ОБЪ ОТНОШЕНІЯХЪ И СРОДСТВАХЪ МЕЖДУ КРИВЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ.

Петерсона.

(Читано 20-го Ноября 1865 года).

Отношеніемъ между двумя поверхностями мы назовемъ такую связь между ихъ точками, при которой каждой точкѣ одной поверхности соотвѣтствуетъ опредѣленная точка другой поверхности и при которой двѣ точки на одной поверхности будутъ безконечно близки, если имъ соотвѣтствующія точки на другой поверхности безконечно близки. Такое отношеніе аналитически выражается двумя уравненіями между координатами обѣихъ поверхностей или, если координаты даны какъ функціи произвольныхъ перемѣнныхъ, двумя уравненіями между этими перемѣнными.

Положимъ, что координаты x, y, z одной поверхности даны какъ функціи перемѣнныхъ l и t; координаты X, Y, Z другой поверхности — какъ функціи перемѣнныхъ p и q, то посредствомъ двухъ уравненій между l, t, p и q мы можемъ выразить p и q какъ функціи отъ l и t, т. е. опредѣлить точку p, q одной поверхности соотвѣтствующую данной точкѣ l, t другой поверхности.

Исключая изъ уравненій поверхностей перемѣнныя p и q, мы получимъ координаты обѣихъ поверхностей какъ функціи общихъ перемѣнныхъ l и t. Такія общія перемѣнныя l

и t двухъ поверхностей, находящихся въ данномъ отношеніи, произвольны и могутъ быть замѣнены другими общими перемѣнными l_1 и t_1 чрезъ произвольное подстановленіе $l=f(l_1, t_1)$, $t = \varphi\,(l_1, t_1)$. При всякомъ данномъ отношеніи мы можемъ напримѣръ выбрать общія перемѣнныя p и q такого свойства, что бы кривыя, соотвѣтствующія на обѣихъ поверхностяхъ x, y, z и X, Y, Z постояннымъ p и q, пересѣкались подъ прямыми углами или чтобъ

$$\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dq}+\frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq}=0 \text{ и}$$

$$\frac{dX}{dp}\cdot\frac{dX}{dq}+\frac{dY}{dp}\cdot\frac{dY}{dq}+\frac{dZ}{dp}\cdot\frac{dZ}{dq}=0$$

Положимъ, что координаты x, y, z и X, Y, Z обѣихъ поверхностей даны какъ функціи общихъ перемѣнныхъ l и t.

Означая $\left(\frac{dx}{dl}\right)^2+\left(\frac{dy}{dl}\right)^2+\left(\frac{dz}{dl}\right)^2$ чрезъ a, $\frac{dx}{dl}\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dl}\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dl}\frac{dz}{dt}$ чрезъ b, $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ чрезъ c, мы выведемъ изъ условія $\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dq}+\frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq}=0$ посредствомъ $\frac{dx}{dl}=\frac{dx}{dp}\frac{dp}{dl}+\frac{dx}{dq}\frac{dq}{dl}$, $\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dp}\frac{dp}{dt}+\frac{dx}{dq}\frac{dq}{dt}$ и т. д. слѣдующее уравненіе

$$a\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt}-b\left\{\frac{dp}{dl}\frac{dq}{dt}+\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dl}\right\}+c\frac{dp}{dl}\frac{dq}{dl}=0\ldots\ldots 1.$$

Такимъ же образомъ мы выведемъ

$$\mathrm{A}\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt}-\mathrm{B}\left\{\frac{dp}{dl}\frac{dq}{dt}+\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dl}\right\}+\mathrm{C}\frac{dp}{dl}\frac{dq}{dl}=0\ldots\, 2.$$

если A, B, C имѣютъ для поверхности X, Y, Z то значеніе, какъ a, b, c для поверхности x, y, z.

Означая $\frac{dp}{dt} : \frac{dp}{dl}$ чрезъ u, $\frac{dq}{dt} : \frac{dq}{dl}$ чрезъ v, мы приведемъ уравненія 1) и 2) къ слѣдующему виду

$$auv - b\,(u + v) + c = 0$$
$$\mathrm{A}uv - \mathrm{B}\,(u + v) + \mathrm{C} = 0$$

которыя должны быть рѣшены относительно u и v. Такъ какъ эти уравненія симметричны относительно u и v, то мы получимъ по исключеніи одного неизвѣстнаго для u и v то самое уравненіе, именно:

$$(a\mathrm{B} - b\mathrm{A})u^2 + (c\mathrm{A} - a\mathrm{C})u + (b\mathrm{C} - c\mathrm{B}) = 0 \ldots . \quad 3.$$

Если u_1 и u_{11} два корня этого уравненія, то $\frac{dp}{dt} : \frac{dq}{dl}$ будетъ равняться одному корню u_1, $\frac{dq}{dt} : \frac{dq}{dl}$ другому корню u_{11}, слѣдовательно искомыя общія перемѣнныя p и q будутъ интегралы уравненій

$$dl + u_1 dt = 0 \text{ и } dl + u_{11} dt = 0$$

такъ какъ всѣмъ интеграламъ этихъ уравненій соотвѣтствуютъ одни и тѣже кривыя (потому что ихъ положеніе не измѣняется вслѣдствіе подстановленія fp и φq вмѣсто p и q), то мы заключаемъ:

Какое бы ни было отношеніе между точками двухъ поверхностей, всегда существуетъ на каждой поверхности только одна прямоугольная сѣть соотвѣтствующихъ кривыхъ.

Замѣчаніе. Эта сѣть никогда не можетъ быть мнима, если отношеніе существуетъ между дѣйствительными точками поверхностей.

Тогда изъ уравненія $ds^2 = adl^2 + 2bdldt + cdt^2$ слѣдуетъ что a, c и $ac - b^2 > 0$, такимъ же образомъ A, C и $\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2$ будутъ > 0.

Чрезъ умноженіе на $a\mathrm{B} - b\mathrm{A}$ мы приведемъ уравненіе (3) къ слѣдующему виду

$$\left\{(a\mathrm{B}-b\mathrm{A})u+\frac{c\mathrm{A}-a\mathrm{C}}{2}\right\}^2=\left\{\frac{c\mathrm{A}-a\mathrm{C}}{2}-\mathrm{B}b\right\}^2-(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2)(ac-b^2)\,..\;3.$$

Полагая $\mathrm{B}=\sqrt{\mathrm{AC}.}\,cos\varphi,\ b=\sqrt{ac.}\ \ cos\varphi'$, мы разложимъ вторую часть на два положительныхъ производителя

$$\frac{1}{4}\left\{\sqrt{c\mathrm{A}}+\sqrt{a\mathrm{C}}-2\sqrt{ac\mathrm{AC}.}\,cos\,(\varphi-\varphi')\right\}\times$$

$$\left\{\sqrt{c\mathrm{A}}+\sqrt{a\mathrm{C}}-2\sqrt{ac\mathrm{AC}.}\,cos\,(\varphi+\varphi')\right\}$$

отсюда слѣдуетъ, что оба корня уравненія 3) будутъ дѣйствительные.

Кромѣ этихъ общихъ перемѣнныхъ, которымъ на обѣихъ поверхностяхъ соотвѣтствуетъ прямоугольная сѣть кривыхъ, мы для изслѣдованія произвольнаго отношенія между двумя данными поверхностями можемъ еще ввести общія перемѣнныя p и q такого свойства, что бы кривыя соотвѣтствующія постояннымъ p и q на обѣихъ поверхностяхъ были сопряженны. Эти общія перемѣнныя, которыя по ихъ геометрическому значенію весьма замѣчательны, мы назовемъ сопряженными общими перемѣнными даннаго отношенія. Задача опредѣлить ихъ имѣетъ тоже одно опредѣленное рѣшеніе.

Двѣ системы пересѣкающихся на поверхности кривыхъ называются сопряженными, если касательная плоскость поверхности, проводимая по кривой одной системы, пересѣкается въ двухъ послѣдовательныхъ положеніяхъ по касательнымъ кривыхъ другой системы. Это свойство сопряженныхъ кривыхъ мы можемъ выразить еще такъ: двѣ послѣдовательныя кривыя одной системы съ двумя послѣдовательными кривыми другой системы должны образовать безконечно малый плоскій четыреугольникъ, котораго противуположныя стороны (касательныя кривыхъ), будучи продолжены, должны пересѣкаться.

Положимъ что p и q будутъ тѣ перемѣнныя данной поверхности x, y, z, постояннымъ значеніямъ которыхъ соотвѣтствуютъ сопряженныя кривыя; обозначимъ дифференціалы координатъ $\frac{dx}{dp}$, $\frac{dx}{dq}$, $\frac{d^2x}{dpdq}$ и т. д. чрезъ x', x_1, x_1', и косинусы угловъ касательной плоскости или нормали поверхности чрезъ ξ, η, ζ; тогда

$$\xi x' + \eta y' + \zeta z' = 0, \ \xi x_1 + \eta y_1 + \zeta z_1 = 0$$

Косинусы касательной кривой $q = const.$ относятся какъ $x' \cdot y' : z'$, слѣдовательно косинусы касательной смежной кривой $q = const.$ относятся какъ $\left(x' + \frac{dx'}{dq} dq\right) : \left(y' + \frac{dy'}{dq} dq\right) : \left(z' + \frac{dz'}{dq} dq\right)$ или какъ $(x' + x_1'dq) : (y' + y_1'dg) : (z' + z_1'dq)$. Такъ какъ по опредѣленію сопряженныхъ кривыхъ эти обѣ касательныя должны лежать въ касательной плоскости поверхности, $\xi x' + \eta y' + \zeta z' = 0$ и $\xi(x' + x_1'dq) + \eta(y' + y_1'dq) + \xi(z' + z_1'dq) = 0$, то мы получимъ условіе

$$\xi x_1' + \eta y_1' + \zeta z_1' = 0 \ldots . \quad 5.$$

подъ которымъ кривыя соотвѣтствующія постояннымъ p и q сопряженны. Если мнимыя перемѣнныя удовлетворяютъ этому условію, то онѣ хотя и не имѣютъ этого геометрическаго значенія, но мы ихъ и въ такомъ случаѣ назовемъ перемѣнными сопряженными.

Опредѣленіе сопряженныхъ общихъ перемѣнныхъ.

Положимъ, что координаты x, y, z и X, Y, Z двухъ поверхностей, находящихся въ отношеніи, даны какъ функціи произвольныхъ общихъ перемѣнныхъ l и t, и требуется выразить эти координаты какъ функціи общихъ сопряженныхъ перемѣнныхъ.

Означая косинусы нормали поверхности x, y, z чрезъ ξ, η, ζ,

$\xi \frac{d^2x}{dl^2} + \eta \frac{d^2y}{dl^2} + \zeta \frac{d^2z}{dl^2}$ чрезъ a, $\xi \frac{d^2x}{dldt} + \eta \frac{d^2y}{dldt} + \zeta \frac{d^2z}{dldt}$ чрезъ b,

$\xi \frac{d^2x}{dt^2} + \eta \frac{d^2y}{dt^2} + \zeta \frac{d^2z}{dt^2}$ чрезъ c,

$\xi \frac{d^2x}{dp^2} + \eta \frac{d^2y}{dp^2} + \zeta \frac{d^2z}{dp^2}$ чрезъ α, $\xi \frac{d^2x}{dpdq} + \eta \frac{d^2y}{dpdq} + \zeta \frac{d^2z}{dpdq} = 0$,

$\xi \frac{d^2x}{dq^2} + \eta \frac{d^2y}{dq^2} + \zeta \frac{d^2z}{dq^2}$ чрезъ γ

мы посредствомъ уравненій

$$\frac{d^2x}{dl^2} = \frac{d^2x}{dp^2}\left(\frac{dp}{dl}\right)^2 + 2\frac{d^2x}{dpdq} \cdot \frac{dp}{dl} \cdot \frac{dq}{dl} + \frac{d^2x}{dq^2}\left(\frac{dq}{dl}\right)^2$$
$$+ \frac{dx}{dp} \cdot \frac{d^2p}{dl^2} + \frac{dx}{dq}\frac{d^2q}{dl^2}$$

$$\frac{d^2x}{dldt} = \frac{d^2x}{dp^2}\frac{dp}{dl}\frac{dp}{dt} + \frac{d^2x}{dpdq}\left\{\frac{dp}{dl}\frac{dq}{dt} + \frac{dq}{dl}\frac{dp}{dt}\right\}$$
$$+ \frac{d^2x}{dq^2}\frac{dq}{dl}\frac{dq}{dt} + \frac{dx}{dp}\frac{d^2p}{dldt} + \frac{dx}{dq}\frac{d^2q}{dldt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dp^2}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + 2\frac{d^2x}{dpdq} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{d^2x}{dq^2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2$$
$$+ \frac{dx}{dp} \cdot \frac{d^2p}{dt^2} + \frac{dx}{dq}\frac{d^2q}{dt^2}$$

выведемъ

$$a = \alpha\left(\frac{dp}{dl}\right)^2 + \gamma\left(\frac{dq}{dl}\right)^2, \quad b = \alpha\frac{dp}{dl}\frac{dp}{dt} + \gamma\frac{dq}{dl}\frac{dq}{dt}$$
$$c = \alpha\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \gamma\left(\frac{dq}{dt}\right)^2.$$

Исключая α и γ, мы получимъ

$$a\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dq}{dt} - b\left\{\frac{dp}{dl}\frac{dq}{dt} + \frac{dq}{dl}\frac{dp}{dt}\right\} + c\frac{dp}{dl}\frac{dq}{dl} = 0.. \quad 6.$$

Такимъ же образомъ мы выведемъ

$$A\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}-B\left\{\frac{dp}{dl}\frac{dq}{dt}+\frac{dq}{dl}\frac{dp}{dt}\right\}+C\frac{dp}{dl}\cdot\frac{dq}{dl}=0\ldots\ 7.$$

Если A, B, C имѣютъ для поверхности X, Y, Z то же значеніе какъ a, b, c для поверхности x, y, z

Изъ двухъ уравненій мы опредѣлимъ p и q, какъ изъ уравненій 1) и 2) съ тою только разницею, что тамъ перемѣнныя p и q, вслѣдствіе условій $a>0, c>0, ac-b^2>0$, всегда будутъ дѣйствительныя, между тѣмъ какъ въ уравненіяхъ 6) и 7) они могутъ быть и мнимыя; слѣдовательно:

при всякомъ данномъ отношеніи между двумя поверхностями мы можемъ выразить координаты обѣихъ поверхностей какъ функціи общихъ сопряженныхъ (мнимыхъ или дѣйствительныхъ) перемѣнныхъ.

Опредѣленіе отношеній

Отношеніе или связь между точками двухъ поверхностей опредѣляется, какъ мы видѣли, двумя уравненіями между координатами или перемѣнными обѣихъ поверхностей; мы теперь дадимъ точное геометрическое объясненіе тѣхъ отношеній, которыя мы будемъ разсматривать, и выведемъ ихъ аналитическія выраженія.

1. Первое отношеніе. Полагая точки x, y, z и X, Y, Z двухъ поверхностей въ такой связи что касательныя плоскости или нормали обѣихъ поверхностей въ соотвѣтствующихъ точкахъ параллельны, мы получимъ для аналитическаго выраженія этого отношенія слѣдующія два уравненія

$$\xi : \eta \quad \zeta = \xi_1 \cdot \eta_1 : \zeta_1 \ldots\ 8.$$

гдѣ ξ, η, ζ означаютъ косинусы нормалей одной певерхности, ξ_1, η_1, ζ_1 — другой поверхности.

Если координаты x, y, z, слѣдовательно и косинусы ξ, η, ζ даны какъ функціи произвольныхъ перемѣнныхъ l и t; X, Y, Z и ξ_1, η_1, ζ_1 какъ функціи произвольныхъ перемѣнныхъ p и q, то по исключеніи перемѣнныхъ p и q посредствомъ уравненій $\xi : \eta : \zeta = \xi_1 : \eta_1 : \zeta_1$, мы получимъ координаты обѣихъ поверхностей какъ функціи общихъ перемѣнныхъ l и t, которыя могутъ быть замѣнены прямоугольными или сопряженными общими перемѣнными.

Чтобы короче выразить, что касательныя плоскости двухъ поверхностей въ соотвѣтствующихъ точкахъ параллельны, мы скажемъ, что поверхности въ этихъ точкахъ параллельны, и назовемъ это отношеніе параллелизмомъ поверхностей.

II. Второе отношеніе, которое мы будемъ разсматривать, состоитъ въ той связи точекъ двухъ поверхностей, при которой прямая, соединяющая соотвѣтствующія точки, есть общая касательная къ обѣимъ поверхностямъ въ этихъ точкахъ.

Чтобы аналитически выразить это отношеніе, замѣтимъ, что общая касательная, соединяющая соотвѣтствующія точки x, y, z и X, Y, Z обѣихъ поверхностей, должна быть перпендикулярна къ нормалямъ обѣихъ поверхностей въ этихъ точкахъ, слѣдовательно:

$$(X-x)\,\xi+(Y-y)\,\eta+(Z-z)\,\zeta=0$$
$$(X-x)\,\xi_1+(Y-y)\,\eta_1+(Z-z)\,\zeta=0\ldots\quad 9.$$

(гдѣ ξ, η, ζ и ξ_1, η_1, ζ_1 косинусы нормалей обѣихъ поверхностей въ точкахъ x, y, z и X, Y, Z), будутъ два уравненія между координатами или перемѣнными обѣихъ поверхностей; посредствомъ этихъ уравненій мы можемъ ввести прямоугольныя, сопряженныя или произвольныя общія перемѣнныя.

Чтобы короче выразить это отношеніе мы скажемъ, что поверхности соединены въ соотвѣтствующихъ точкахъ и назовемъ отношеніе конъюнкціею.

III. Третье отношеніе опредѣляется тѣмъ, что соотвѣтствующія точки обѣихъ поверхностей лежатъ на прямой линіи съ данной неподвижной точкой. Мы скажемъ, что соотвѣтствующія точки въ этомъ случаѣ лежатъ перспективно относительно данной точки и послѣднюю назовемъ точкою зрѣнія или центромъ перспективы.

Принимая точку зрѣрія за начало координатъ, мы получимъ слѣдующія два уравненія:

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z} \quad ..... \quad 10.$$

Если точка зрѣнія въ безконечности, то, выбравъ ось z—овъ параллельно съ проектирующими, мы получимъ слѣдующія два уравненія

$$X=x, \ Y=y.$$

IV. Четвертое отношеніе. Въ четвертомъ отношеніи мы полагаемъ точки двухъ поверхностей x, y, z и X, Y, Z въ такой связи, при которой углы между безконечно близкими точками одной поверхности, равняются угламъ между соотвѣтствующими точками другой поверхности.

Это условіе, по причинѣ подобія безконечно малыхъ соотвѣтствующихъ тріугольниковъ, приводится къ тому, что разстоянія безконечно близкихъ соотвѣтствующихъ точекъ на обѣихъ поверхностяхъ пропорціональны, т. е. линейные элементы $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ и $dS=\sqrt{dX^2+dY^2+dZ^2}$ обѣихъ поверхностей при произвольныхъ приращеніяхъ dp и dq общихъ перемѣнныхъ p и q пропорціональны.

Положимъ

$$ds^2=adp^2+bdpdq+cdq^2$$
$$dS^2=Adp^2+Bdpdq+Cdq^2$$

то по этому условія, которымъ должны удовлетворять общія перемѣнныя двухъ данныхъ поверхностей, будутъ

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c} \quad .... \quad 11.$$

или, полагая $\frac{A}{a}=\lambda$, гдѣ λ функція отъ общихъ перемѣнныхъ, мы получимъ $A=\lambda a$, $B=\lambda b$, $C=\lambda c$, слѣдовательно $dS^2=\lambda^2 ds^2$.

Положимъ, что l и t тѣ мнимыя перемѣнныя поверхности x, y, z, посредствомъ которыхъ линейный элементъ ds этой поверхности приводится къ виду $ds^2=\mu^2 dldt$.

Положимъ, что l_1, t_1, $dS^2=\nu^2 dl_1 dt_1$ суть мнимыя перемѣнныя и линейный элементъ поверхности X, Y, Z, тогда

$$l_1=l \text{ и } t_1=t, \text{ или общее } l_1=f(l),\ t_1=f(t)$$

будутъ искомыя два уравненія между перемѣнными обѣихъ поверхностей, вслѣдствіе которыхъ

$$dS=\frac{\nu}{\mu}ds, \text{ или ообщее } dS=\frac{\nu}{\mu}f'(l).\ f'(t)ds=\lambda ds.$$

Исключая l_1 и t_1, мы получимъ координаты обѣихъ поверхностей какъ функціи мнимыхъ общихъ перемѣнныхъ l и t, которыя могутъ быть замѣнены сопряженными, прямоугольными или произвольными общими перемѣнными.

Изъ свойства этого отношенія, при которомъ углы между соотвѣтствующими безконечно близкими точками равны, слѣдуетъ, что всѣ кривыя на одной поверхности пересѣкутся подъ тѣми же углами какъ имъ соотвѣтствующія кривыя на другой поверхности, что слѣдовательно, произвольные чертежи на одной поверхности будутъ подобны имъ соотвѣтствующимъ чертежамъ на другой поверхности. По этому свойству мы назовемъ это отношеніе графическимъ, и скажемъ, что точки обѣихъ поверхностей лежатъ графически.

О сродствѣ между поверхностями.

Отношеніемъ мы называемъ ту опредѣленную связь между точками для поверхностей совершенно произвольныхъ, которая аналитически выражается двумя уравненіями между координатами или перемѣнными обѣихъ поверхностей. Но такая связь, которая обусловливается тремя или болѣе уравненіями уже не можетъ существовать между точками двухъ произвольныхъ поверхностей. Она предполагаетъ особенныя свойства общія этимъ поверхностямъ, и потому мы назовемъ такую связь сродствомъ между этими поверхностями.

1) Примѣръ. (Сродство соотвѣтствующихъ плоскостей).

Такая связь между точками x, y, z и X, Y, Z двухъ поверхностей, что каждой плоской кривой одной поверхности соотвѣтствуетъ плоская кривая другой поверхности, обусловливается, очевидно, слѣдующими тремя уравненіями:

$$X = ax + by + cz + e,\ Y = a_1x + b_1y + c_1z + e_1$$
$$Z = a_{11}y + b_{11}y + c_{11}z + e_{11} \dots\ 12.$$

вслѣдствіе которыхъ только $AX + BY + CZ + E$ можетъ быть $= 0$, при произвольномъ уравненіи $\alpha x + \beta y + \gamma z + \varepsilon = 0$, $\}$A, a, α и т. д. здѣсь постоянныя$\{$.

Поэтому, связь, объусловливающаяся тѣмъ, что плоскимъ кривымъ соотвѣтствуютъ плоскія кривыя есть сродство, которое не существуетъ между произвольными поверхностями. По даннымъ уравненіямъ поверхностей x, y, z, мы можемъ вывести уравненія всѣхъ тѣхъ поверхностей X, Y, Z, съ которыми это сродство возможно; если поверхность x, y, z есть сфера, то поверхности X, Y, Z будутъ поверхности второй степени, эллипсоиды.

Это сродство, что плоскимъ кривымъ соотвѣтствуютъ плоскія кривыя, отличается еще тѣмъ замѣчательнымъ свойствамъ, что всѣмъ сопряженнымъ кривымъ одной поверхности соотвѣтствуютъ сопряженныя кривыя другой поверхности

Чтобы доказать это, припомнимъ, что перемѣнныя p и данной поверхности x, y, z будутъ сопряженны, если

$$\xi x'_1 + \eta y'_1 + \zeta z'_1 = 0\ \dots\ 5.$$

x'_1, y'_1, z'_1, здѣсь означаютъ дифференціалы по обѣимъ перемѣннымъ, а ξ, η, ζ косинусы нормалей поверхности, которые относятся какъ

$$\}y'z_1 - y_1z'\{ : \}z'x_1 - z_1x'\{ : \}x'y_1 - x_1y'\{.$$

Но такъ какъ посредствомъ уравненій

$$X = ax + by + cz + e,\ Y = a_1x + b_1y + c_1z + e_1,$$
$$Z = \alpha_{11}x + b_{11}y + c_{11}z + e_{11}\ \dots\ 12$$

мы изъ уравненія

$$\}Y'Z_1 - Y_1Z'\{X'_1 + \}Z'X_1 - Z_1X'\{Y'_1 + \}X'Y_1 - X_1Y'\{Z'_1 = 0$$

можемъ вывести уравненіе

$$\}y'z_1-y_1z'\{\, x'_1+\}z'x_1-z_1x'\{\, y'_1+\}x'y_1-x_1y'\{\, z'_1=0,$$

и на оборотъ, то заключаемъ, что всѣ общія перемѣнныя p и q, которыя въ одной поверхности сопряженны, и въ другой поверхности будутъ сопряженны; что и требовалось доказать.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ общее уравненіе сопряженныхъ кривыхъ на поверхностяхъ X, Y, Z, если общее уравненіе сопряженныхъ кривыхъ на поверности x, y, z, извѣстно.

Положимъ, что поверхность x, y, z есть сфера $x^2+y^2+z^2=1$; дифференцируя это уравненіе по обѣимъ перемѣннымъ p и q, мы получимъ

$$xx'_1+yy'_1+zz'_1+x'x_1+y'y_1+z'z_1=0.$$

Но такъ какъ для сферы $x^2+y^2+z^2=1$ косинусы ξ, η, ζ нормалей тождественны съ координатами x, y, z, то слѣдуетъ, что $\xi x'_1+\eta y'_1+\zeta z'_1=0$, если $x'x_1+y'y_1+z'z_1=0$, т. е. что на сферѣ всѣ тѣ кривыя сопряженны, которыя пересѣкаются подъ прямыми углами. Уравненіе этихъ кривыхъ на сферѣ будетъ общее уравненіе сопряженныхъ кривыхъ на поверхностяхъ второй степени.

II. Примѣръ (графически-перспективное сродство).

Отношеніе между двумя поверхностями, при которомъ соотвѣтствующія кривыя пересѣкаются подъ равными углами, приводится, какъ мы видѣли, къ тому условію, что разстоянія соовѣтствующихъ безконечно близкихъ точекъ на обѣихъ поверхностяхъ пропорціональны, и это отношеніе возможно между произвольными поверхностями.

Выражая линейные элементы обѣихъ поверхностей ds и dS посредствомъ общихъ перемѣнныхъ, мы получимъ $dS=\lambda ds$, гдѣ λ можетъ быть произвольная функція отъ общихъ перемѣнныхъ.

Если $\lambda=1$, т. е. если разстоянія соотвѣтствующихъ безконечно близкихъ точекъ на обѣихъ поверхностяхъ равны, то такая связь не можетъ существовать между произвольными поверхностями, и мы получимъ сродство изгибанія, которымъ мы займемся послѣ.

Отношеніе, при которомъ соотвѣтствующія точки двухъ поверхностей находятся въ прямой линіи съ данной точкою зрѣнія, тоже возможно между произвольными поверхностями. Но такая связь между двумя поверхностями, при которой соотвѣтствующія точки лежатъ въ прямой линіи съ данной точкой, и кромѣ того ихъ безконечно малыя разстоянія пропорціональны, если она вообще возможна, не можетъ существовать между произвольными поверхностями. Она есть сродство, которое выражается аналитически четырьмя уравненіями, при которыхъ два объусловливаютъ перспективное, а два— графическое положеніе точекъ.

Положимъ, что p и q произвольныя общія перемѣнныя двухъ поверхностей x, y, z и X, Y, Z, находящихся въ такомъ сродствѣ; $ds^2 = adp^2 + bdpdq + cdq^2$ линейный элиментъ поверхности x, y, z, и $dS^2 = Adp^2 + Bdpdq + Cdq^2$ линейный элементъ поверхности X, Y, Z; тогда эти четыре уравненія будутъ

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} \;\ldots\; \text{(графичность)} \;\ldots\ldots\; 11.$$

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} \;\ldots\; \text{(перспективность)} \;\ldots\ldots\; 10.$$

Полагая $\frac{X}{x} = l$, мы получимъ $X = lx$, $Y = ly$, $Z = lz$

отсюда

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = l^2 \}dx^2 + dy^2 + dz\{ +$$
$$2l \}xdx + ydy + zdz\{ dl + \}x^2 + y^2 + z^2\{ dl^2.$$

Полагая $\frac{A}{a} = \lambda$, мы получимъ

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \lambda^2 ds^2 = \lambda^2 \}dx^2 + dy^2 + dz^2\{$$

слѣдовательно

$$(\lambda^2 - l^2)\{ dx^2 + dy^2 + dz^2 \} = 2lrdldr + r^2dl^2 = (2lrdr + r^2dl)\, dl \quad \ldots.\ 14.$$

если $x^2 + y^2 + z^2$ означимъ чрезъ r^2.

Это уравненіе

$$(\lambda^2 - l^2)\ \{dx^2 + dy^2 + dz^2\} = (2lrdr + r^2dl)\, dl$$

при произвольныхъ приращеніяхъ dp и dq перемѣнныхъ p и q тогда только можетъ существовать, когда обѣ части равняются 0; потому что если вторая часть, состоящая изъ двухъ дѣйствительныхъ производителей, не равняется 0, то она при двухъ значеніяхъ приращеній dp, dq обращается въ 0, слѣдовательно $\lambda^2 - l^2$ должна быть 0, такъ какъ $dx^2 + dy^2 + dz^2$ не обращается въ 0; отсюда слѣдуетъ, что или dl или $2lrdr + r^2dl = d(r^2l)$ должно быть $= 0$.

Изслѣдуемъ эти два рѣшенія.

Если $dl = 0$ или $l = const$, то слѣдуетъ изъ уравненій $X = lx$, $Y = ly$, $Z = lz$, что обѣ поверхности подобны, тогда это сродство понятно само собою, и заключается, какъ частный случай, во второмъ рѣшеніи.

Если $d(r^2l) = 0$, то $l = \frac{k}{r^2}$ (гдѣ k постоянная, которую мы можемъ принимать за единицу) и мы получимъ слѣдующія уравненія тѣхъ поверхностей X, Y, Z, которыхъ точки могутъ быть въ перспективномъ и графическомъ положеніи съ точками данной поверхности x, y, z,

$$X = \frac{x}{r^2}, \ Y = \frac{y}{r^2}, \ Z = \frac{z}{r^2} \quad \ldots.\ 15.$$

гдѣ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; отсюда

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

и

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

т. е. произведеніе радіусовъ векторовъ отъ точки зрѣнія къ двумъ соотвѣтствующимъ точкамъ обѣихъ поверхностей постоянно. Поэтому мы можемъ замѣнить уравненія объусловливающія это сродство слѣдующими симметричными

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z} \text{ и } \{X^2+Y^2+Z^2\}\{x^2+y^2+z^2\}=1 \ \ldots . \ 15.$$

Выведемъ изъ этого сродства нѣсколько заключеній и назовемъ для краткости поверхность X, Y, Z графическо-перспективной поверхностью x, y, z.

Теорема I. Если двѣ произвольныя поверхности x, y, z и x_1, y_1, z_1 пересѣкаются, то ихъ графическо-перспективныя поверхности X, Y, Z и X_1, Y_1, Z_1, пересѣкаются подъ тѣмъ же угломъ въ каждой точкѣ кривой пересѣченія.

Доказательство. — Вообразимъ чрезъ точку x, y, z кривой пересѣченія еще третью произвольную поверхность x_{11}, y_{11}, z_{11}, и чрезъ соотвѣтствующую точку X, Y, Z ея графически-перспективную поверхность X_{11}, Y_{11}, Z_{11}, то мы получимъ три пары соотвѣтствующихъ кривыхъ пересѣченія, изъ которыхъ по двѣ лежатъ въ одной поверхности. По предположенію, лежащія въ одной поверхности кривыя должны пересѣкаться подъ тѣмъ же угломъ, какъ соотвѣтствующая кривая на графически-перспективной поверхности, поэтому тѣлесные углы въ точкахъ x, y, z и X, Y, Z будутъ равны, слѣдовательно уголъ между поверхностями x, y, z и x_1, y_1, z_1, равенъ углу между поверхностями X, Y, Z и X_1, Y_1, Z_1.

Положимъ что поверхность x, y, z есть сфера $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\rho^2$; вставляя $x=\frac{X}{x^2+y^2+z^2}$, $y=\frac{Y}{x^2+y^2+z^2}$, $z=\frac{Z}{x^2+y^2+z^2}$, мы получимъ для графически-перспективной поверхности слѣдующее уравненіе

$$1-2(\alpha X+\beta Y+\gamma Z)=\{\rho^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\}(X^2+Y^2+Z^2) \ldots \ 16$$

Эта поверхность есть сфера, которая обращается въ плоскость, если данная сфера x, y, z проходитъ чрезъ точку зрѣнія ($\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$); и проходитъ чрезъ точку зрѣнія, если данная поверхность x, y, z есть плоскость.

Теорема. II. Каждой сферической кривой на произвольной поверхности x, y, z, т. е. пересѣченію этой поверхности съ сферою, соотвѣтствуетъ сферическая кривая (пересѣченіе со сферою) на графически-перспективной поверхности X, Y, Z; каждой плоской кривой соотвѣтствуетъ сферическая кривая, сфера которой проходитъ чрезъ начало координатъ; каждому кругу (пересѣченію съ двумя сферами) соотвѣтствуетъ кругъ; каждой прямой (пересѣченію съ двумя плоскостями) соотвѣтсвуетъ кругъ, проходящій чрезъ точку зрѣнія; сферы или плоскости этихъ кривыхъ пересѣкаютъ одну поверхность подъ тѣмъ же угломъ какъ другую. [по Теоремѣ I.].

Спряженныя кривыя, которыя пересѣкаются подъ прямыми углами, называются линіями кривизны. Если поэтому перемѣнныя p и q удовлетворяютъ уравненіямъ

$$(y'z_1 - y_1z')\,x'_1 + (z'x_1 - z_1x')\,y'_1 + (x'y_1 - x_1y')\,z'_1 = 0$$
$$x'x_1 + y'y_1 + z'z_1 = 0$$

то постояннымъ p и q соотвѣтствуютъ линіи кривизны.

Теорема. III. Линіямъ кривизны на произвольной поверхности x, y, z соотвѣтствуютъ линіи кривизны на ея графически-перспективной поверхности X, Y, Z.

Положимъ, что p и q общія перемѣнныя обѣихъ поверхностей, удовлетворяющія уравненіямъ

$$\}y'z_1 - y_1z'\{\, x'_1 + \}z'x_1 - z_1x')\,y'_1 + \}x'y_1 - x_1y'\{\, z'_1 = 0$$
$$\text{и } x'x_1 + y'y_1 + z'z_1 = 0;$$

докажемъ, что они удовлетворяютъ и уравненіямъ

$$\}Y'Z_1 - Y_1Z'\{X'_1 + \}Z'X_1 - Z_1X'\{Y'_1 + \}X'Y_1 - X_1Y'\{Z'_1 = 0 \text{ и}$$
$$X'X_1 + Y'Y_1 + Z'Z_1 = 0.$$

Полагая $X = \frac{x}{x^2_1 + y^2 + z^2}, Y = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, Z = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$ и дифференцируя, мы выведемъ посредствомъ $x'x_1 + y'y_1 + z'z_1 = 0$.

$$Y'Z_1 - Y_1Z' = \frac{2hx - (x^2 + y^2 + z^2)(y'z_1 - y_1z')}{(x^2 + y^2 + z^2)^3},$$

$$Z'X_1 - Z_1X' = \frac{2hy - (x^2 + y^2 + z^2)(z'x_1 - z_1x')}{(x^2 + y^2 + z^2)^3},$$

$$X'Y_1 - X_1Y' = \frac{2hz - (x^2 + y^2 + z^2)(x'y_1 - x_1y')}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \quad \ldots. 17.$$

гдѣ $h = x(y'z_1 - y_1z') + y(z'x_1 - z_1x') + z(x'y_1 - x_1y')$.

Отсюда посредствомъ $(y'z_1 - y_1z')x'_1 + (z'x_1 - z_1x')y'_1 + (x'y_1 - x_1y')z'_1 = 0$ заключаемъ

$$\}Y'Z_1 - Y_1Z'\{X'_1 + \}Z'X_1 - Z_1X'\{Y'_1 + \}X'Y_1 - X_1Y'\{Z'_1 = 0.$$

и такъ какъ уравненіе $X'X_1 + Y'Y_1 + Z'Z_1 = 0$ есть слѣдствіе уравненія $x'x_1 + y'y_1 + z'z_1 = 0$ по предположенію, что соотвѣтствующія кривыя пересѣкаются подъ равными углами, то мы заключимъ, что линіямъ кривизны соотвѣтствуютъ линіи кривизны. Поэтому перемѣнныя линій кривизны будутъ общія, — слѣдовательно сопряженныя, прямоугольныя, общія перемѣнныя этого сродства.

I. Приложеніе.

Положимъ, что данная поверхность x, y, z есть поверхность вращенія.

$$x - a = u.cosq; \quad y = u.sinq; \quad z = v$$

гдѣ u и v произвольныя функціи перемѣнной p; постоянная a—разстояніе оси отъ начала координатъ, выражаетъ произвольное положеніе поверхности относительно этой точки.

Уравненіе графически-перспективной поверхности X, Y, Z будетъ

$$\mathrm{X}=\frac{kx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{k\,(u.cosq+a)}{a^2+u^2+v^2+2au.cosq}$$

$$=\frac{k}{2a}\left\{\frac{a^2-(u^2+v^2)}{a^2+u^2+v^2+2au.cosq}+1\right\}$$

$$\mathrm{Y}=\frac{ky}{x^2+y^2+z^2}=\frac{k.u.sinq}{a^2+u^2+v^2+2au.cosq}$$

$$\mathrm{Z}=\frac{kz}{x^2+y^2+z^2}=\frac{kv}{a^2+u^2+v^2+2au.cosq},$$

Означивъ $\frac{a^3+u^2+v^2}{2au}$ чрезъ x, $\frac{a^2-(u^2+v^2)}{2au}$ чрезъ β, $\frac{v}{u}$ чрезъ γ, (слѣдов. $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2+1$) и положивъ для краткости $k=2a$, мы получимъ слѣдующія замѣчательныя уравненія

$$\mathrm{X}-1=\frac{\beta}{\alpha+cosq},\ \mathrm{Y}=\frac{sinq}{\alpha+cosq},\ \mathrm{Z}=\frac{\gamma}{\alpha+cosq}\ \ldots.\ 18.$$

гдѣ α, β, γ произвольныя функціи перемѣнной p, удовлетворяющія только условію $\alpha^2-\beta^2-\gamma^2=1$.

Выражая u и v посредствомъ α, β и γ, мы получимъ $u=\frac{a}{\alpha+\beta}$, $v=\frac{a\gamma}{\alpha+\beta}$; слѣдовательно уравненіе поверхности вращенія будетъ, если примемъ a за единицу этой поверхности

$$x-1=\frac{cosq}{\alpha+\beta},\ y=\frac{sinq}{a+\beta},\ z=\frac{\gamma}{\alpha+\beta}.$$

Эта поверхность вращенія находится въ перспективномъ отношеніи съ поверхностію

$$\mathrm{X}-1=\frac{\beta}{\alpha+cosq},\ \mathrm{Y}=\frac{sinq}{\alpha+cosq},\ \mathrm{Z}=\frac{\gamma}{\alpha+cosq}\ \ldots.\ 18.$$

точка зрѣнія будетъ начало координатъ.

Полагая для краткости $\left(\frac{d\gamma}{dp}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dp}\right)^2-\left(\frac{d\alpha}{dp}\right)^2=1$, т. е. вводя $\int dp\sqrt{\left(\frac{d\gamma}{dp}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dp}\right)^2-\left(\frac{d\alpha}{dp}\right)^2}$ вмѣсто p какъ перемѣнную, мы получимъ, дифференцируя

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=\frac{dp^2+dq^2}{(\alpha+\beta)^2}$$

$$dS^2=dX^2+dY^2+dZ^2=\frac{dp^2+dq^2}{(\alpha+cosq)^2}$$ слѣдовательно

$$dS^2=\frac{\alpha+\beta}{\alpha+cosq}ds$$

откуда слѣдуетъ графическое отношеніе обѣихъ поверхностей x, y, z и X, Y, Z.

Выведемъ изъ свойствъ поверхностей вращенія нѣсколько свойствъ для ихъ графическо-перспективныхъ поверхностей:

$$X=\frac{\beta}{\alpha+cosq},Y=\frac{sinq}{\alpha+cosq},Z=\frac{\gamma}{\alpha+cosq}\;\ldots\quad 18.$$

гдѣ α, β, γ произвольныя функціи перемѣнной p, удовлетворяющія уравненію $\alpha^2-\beta^2-\gamma^2=1$.

Кривыя, соотвѣтствующія постоямнымъ p и q будутъ линіи кривизны (Теор. III). Линіи одной кривизны $q=const$, которыя въ поверхностяхъ вращенія суть плоскіе меридіаны съ наклоненіемъ 90°, въ поверхностяхъ X, Y, Z будутъ сферическія кривыя, сферы которыхъ всѣ проходятъ чрезъ точку $X=1$, $Y=0$, $Z=0$ (точку зрѣнія), и которыя пересѣкаютъ поверхности подъ прямыми углами (по Теор. I и II). Линіи кривизны $p=const.$, которыя суть круги въ поверхностяхъ x, y, z, будутъ круги и въ поверхностяхъ X, Y, Z.

II. Приложеніе.

Положимъ, что данная поверхность x, y, z есть произвольный конусъ:

$$x - a = \alpha q,\ y = \beta q,\ z = \gamma q$$

α, β, γ здѣсь произвольныя функціи отъ перемѣнной p, удовлетворяющія только условію $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, потому что они суть косинусы угловъ образующихъ прямыхъ Постоянная a, которую мы можемъ принять за 1, есть разстояніе вершины конуса отъ начала координатъ.

Уравненія графическо-перспективныхъ поверхностей будутъ

$$X = \frac{kx}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{k(\alpha q + 1)}{1 + 2\alpha q + q^2} = \frac{k}{2}\left\{\frac{1 - q^2}{1 + 2xq + q^2} + 1\right\}$$

$$Y = \frac{k.\beta.q}{1 + 2aq + q^2}$$

$$Z = \frac{k.\gamma.q}{1 + 2aq + q^2}$$

Вставляя e^{-q} вмѣсто q, слѣдовательно *Cosq* и *Sinq* вмѣсто $\frac{1}{q} + q$ и $\frac{1}{q} - q$ и приравнивая $\frac{k}{2} = 1$, мы получимъ

$$X - 1 = \frac{\mathfrak{Sin}q}{\alpha + \mathfrak{Cos}q},\ Y = \frac{\beta}{\alpha + \mathfrak{Cos}q},\ Z = \frac{\gamma}{\alpha + \mathfrak{Cos}q}\ \ldots\ 19.$$

уравненіе графическо-перспективной поверхности конуса

$$x - 1 = \alpha e^{-q},\ y = \beta e^{-q},\ z = \gamma e^{-q}$$

гдѣ α, β, γ произвольныя функціи перемѣнной p, удовлетворяющія только условію $a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Полагая $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$, мы получаемъ

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = e^{-2q}(dp^2 + dq^2).$$

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + dY^2 = \frac{dp^2 + dq^2}{(\alpha + \mathfrak{Cos}q)^2}$$

слѣдовательно

$$dS = \frac{e^q}{\alpha + \mathfrak{Cos}q}\ .\ ds$$

Графическо-перспективныя поверхности конусовъ и графическо-перспективныя поверхности поверхностей вращенія сходны не только по ихъ аналитическимъ выраженіямъ, какъ это слѣдуетъ изъ уравненій 18 и 19, но и по ихъ геометрическимъ свойствамъ, именно:

Въ конусѣ образующія прямыя, соотвѣтствующія постояннымъ p, какъ извѣстно, суть линіи одной кривизны. Линіи другой кривизны, слѣдовательно, будутъ сферическія кривыя $q = const$, сферы которыхъ имѣютъ свой общій центръ въ вершинѣ и пѣресѣкаютъ конусъ подъ прямыми углами. По этому (теор. II) въ графическо-перспективныхъ поверхностяхъ X, Y, Z конусовъ, уравненія которыхъ

$$X = \frac{\mathfrak{Sin}q}{\alpha + \mathfrak{Cos}q},\ Y = \frac{\beta}{\alpha + \mathfrak{Cos}q},\ Z = \frac{\gamma}{\alpha + \mathfrak{Cos}q} \ \ldots\ 19.$$

гдѣ α, β, γ произвольныя функціи отъ p, удовлетворяющія уравненію $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, кривыя соотвѣтствующія постояннымъ p и q будутъ линіи кривизны.—Линіи одной кривизны $q = const$, будутъ сферическія кривыя, сферы которыхъ пересѣкаютъ поверхности подъ прямыми углами.—Линіи другой кривизны будутъ круги, которыя проходятъ чрезъ одну точку.

Эти самыя свойства находимъ мы тоже у графическо-перспективныхъ поверхностей отъ поверхностей вращенія, съ тою только разницею, что у этихъ поверхностей сферы проходятъ, а круги не проходятъ чрезъ одну точку.

Мы видѣли, что при всякой опредѣленной связи (т. е. связи опредѣляемой покрайней мѣрѣ двумя уравненіями) между точками двухъ поверхностей существуютъ сопряженныя общія перемѣнныя p и q, т. е. общія перемѣнныя p и q такаго свойства, что постояннымъ p и q соотвѣтствуютъ на обѣихъ поверхностяхъ сопряженныя кривыя. Эти сопряженныя кривыя въ теоріи отношеній и сродствъ играютъ важную роль; при изслѣдованіи вышеупомянутыхъ отношеній мы не будемъ искать ихъ, но они сами будутъ представляться намъ по ихъ геометрическому значенію и по интегрируемости выраженій.

По этой причинѣ мы назовемъ ихъ основаніемъ отношенія и скажемъ, что отношеніе существуетъ относительно этихъ кривыхъ. Если эти сопряженныя кривыя суть линіи кривизны, то основаніе будетъ прямоугольное.

Полагая данную поверхность x, y, z съ произвольной поверхностію X, Y, Z въ отношеніи, мы получаемъ на поверхности x, y, z одну опредѣленную сѣть сопряженныхъ кривыхъ какъ основаніе (исключая только то отношеніе, когда всѣмъ сопряженнымъ кривымъ одной поверхности соотвѣтствуютъ сопряженныя кривыя другой поверхности; частный случай этого отношенія есть вышеупомянутое сродство, при которомъ плоскимъ кривымъ соотвѣтствуютъ плоскія кривыя). Полагая ту самую поверхность x, y, z въ томъ самомъ отношеніи съ другой поверхностію X, Y, Z, мы получаемъ вообще другое основаніе. Но здѣсь возникаетъ вопросъ какія поверхности X, Y, Z могутъ быть съ поверхностію x, y, z въ данномъ отношеніи на томъ самомъ основаніи т. е. относительно тѣхъ же самыхъ сопряженныхъ кривыхъ. Эти поверхности X, Y, Z уже не будутъ произвольны, но составляютъ сродство, отличающееся особенными общими свойствами, которыя зависятъ не столько отъ самой поверхности x, y, z, сколько отъ основанія отношенія на поверхности x, y, z, потому что, проходя всѣ возможныя основанія даннаго отношенія на поверхности x, y, z, мы проходимъ всѣ поверхности, которыя могутъ быть въ данномъ отношеніи съ поверхностію x, y, z т. е. всѣ возможныя поверхности. Такимъ образомъ отношеніе приводится къ сродству, посредствомъ котораго мы изслѣдуемъ свойства всѣхъ поверхностей по даннымъ сопряженнымъ кривымъ одной поверхности, напримѣръ сферы, на которой всѣ кривыя, пересѣкающіяся подъ прямыми углами, сопряженны, или плоскости, на которой всѣ возможныя кривыя сопряженны. Этотъ взглядъ не новость; давно уже для нагляднаго представленія служатъ перспективныя и графическія изображенія на бумагѣ; но наша бумага можетъ быть и кривая и способы изображенія будутъ еще другіе.

ГЛАВА I.

Отношеніе первое.

О ПАРАЛЛЕЛЬНЫХЪ КАСАТЕЛЬНЫХЪ ПЛОСКОСТЯХЪ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Параллелизмъ поверхностей.

Отношеніе между двумя поверхностями, въ которомъ касательныя плоскости обѣихъ поверхностей въ соотвѣтствующихъ точкахъ параллельны, выражается аналитически уравненіями

$$\xi : \eta : \zeta = \xi_1 : \eta_1 : \zeta_1 \ldots \quad 8.$$

гдѣ ξ, η, ζ и ξ_1, η_1, ζ_1 суть косинусы нормалей обѣихъ поверхностей.

Если ξ, η, ζ даны какъ функціи перемѣнныхъ p и q; ξ_1, η_1, ζ_1 — какъ функціи перемѣнныхъ l и t, то, исключая l и t помощію двухъ уравненій $\xi : \eta : \zeta = \xi_1 : \eta_1 : \zeta_1$, мы получимъ координаты обѣихъ поверхностей какъ функціи общихъ перемѣнныхъ p и q. Соотвѣтствующія въ отношеніи точки обѣихъ поверхностей будутъ соотвѣтствовать одинакимъ значеніямъ этихъ перемѣнныхъ.

Чтобы отношеніе существовало между дѣйствительными точками, уравненія $\xi : \eta \cdot \zeta = \xi_1 . \eta_1 : \zeta_1$, рѣшаемыя относительно l и t, должны имѣть покрайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный корень, если p, q, l и t суть дѣйствительныя перемѣнныя.

Вообразивъ изъ центра сферы радіусы, параллельные съ нормалями данной поверхности x, y, z, мы убѣдимся, что концы этихъ радіусовъ покроютъ по крайней мѣрѣ часть сферы, площадь которой, по Гауссу, не измѣнится, если мы изогнемъ поверхность. Вся сфера такимъ образомъ можетъ быть покрыта нѣсколько разъ, но достаточно и половины сферы покрытой, чтобы нормали проходили всѣ возможныя направленія и чтобы поверхность x, y, z имѣла со всѣми произвольными поверхностями параллельныя нормали, слѣдовательно и параллельныя касательныя плоскости.

Это условіе, что покрыта по крайней мѣрѣ половина Гауссовой сферы, мы предполагаемъ для одной изъ сравниваемыхъ поверхностей, а развертывающіяся поверхности, которыя покрываютъ только кривую, исключаемъ вовсе. Отношеніе тогда существуетъ между дѣйствительными точками.

Исключивъ перемѣнныя l и t, мы получаемъ координаты x, y, z и X, Y, Z обѣихъ поверхностей какъ функціи общихъ перемѣнныхъ p и q. Къ даннымъ значеніямъ этихъ перемѣнныхъ p и q принадлежатъ двѣ соотвѣтствующія точки, къ даннымъ приращеніямъ dp и dq два соотвѣтствующія направленія на обѣихъ поверхностяхъ, именно: тѣ направленія, которыя проходятъ черезъ точку p, q и $p + dp$, $q + dq$ на обѣихъ поверхностяхъ.

Теорема IV. Если двѣ поверхности x, y, z и X, Y, Z находятся въ такомъ отношеніи, что нормали въ соотвѣтствующихъ точкахъ параллельны, то чрезъ каждую точку одной поверхности проходятъ два направленія, которыя (или двѣ кривыя, касательныя которыхъ) параллельны съ своими соотвѣтствующими направленіями на другой поверхности. Эти два направленія на каждой поверхности сопряженны и составляютъ по этому на обѣихъ поверхностяхъ тѣ сѣти, которыя мы назвали основаніемъ отношенія.

Доказательство. Условіе, что соотвѣтствующія направленія dx, dy, dz и dX, dY, dZ параллельны

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy} = \frac{dZ}{dz}$$

существуетъ, если $\frac{dX}{dx}=\frac{dY}{dy}$, потому что оба направленія перпендикулярны къ параллельнымъ нормалямъ.

Полагая $dx=x'dp+x_1dq$, $dX=X'dp+X_1dq$ и т. д., мы получимъ

$$(x'dp+x_1dq):(X'dp+X_1dq)=(y'dp+y_1dq):(Y'dp+Y_1dq)$$

или умножая на $(X'dp+X_1dq)(Y'dp+Y_1dq)$,

$$(x'Y'-y'X')dp^2+(x'Y_1-y'X_1+x_1Y'-y_1X')dpdq$$
$$+(x_1Y_1-y_1X_1)dq^2=0\ldots.\ 20.$$

Рѣшая это уравненіе относительно $\frac{dp}{dq}$, мы получимъ два направленія, соотвѣтствующія обоимъ корнямъ $\frac{dp}{dq}$.

Если эти два корня дѣйствительные и неравные (случай равныхъ и мнимыхъ корней мы изслѣдуемъ послѣ), то мы можемъ ввести новыя общія перемѣнныя p и q такого свойства, чтобы постояннымъ p и q соотвѣтствовали эти два направленія, т. е. мы можемъ приравнять эти новыя перемѣнныя интеграламъ отъ уравненій

$$dp-mdq=0 \text{ и } dp-ndq=0,$$

гдѣ m и n суть два корня уравненія 20), тогда

$$\frac{X'}{x'}=\frac{Y'}{y'}=\frac{Z'}{z'} \text{ и } \frac{X_1}{x_1}=\frac{Y_1}{y_1}=\frac{Z_1}{z_1}$$

и обозначая $\frac{X'}{x_1}$ чрезъ e, $\frac{X_1}{x_1}$ чрезъ ε, мы получимъ

$$\left.\begin{aligned} dX&=X'dp+X_1dq=ex'dp+\varepsilon x_1dq\\ dY&=Y'dp+Y_1dq=ey'dp+\varepsilon y_1dq\\ dZ&=Z'dp+Z_1dq=ez'dp+\varepsilon z_1pq \end{aligned}\right\}\ldots.\ 21,$$

гдѣ функціи e и ε должны удовлетворять условіямъ интегрируемости, т. е. уравненіямъ

$$\frac{d(ex')}{dq} = \frac{d(\varepsilon x_1)}{dp}, \quad \frac{d(ey')}{dq} = \frac{d(\varepsilon y_1)}{dp}, \quad \frac{d(ez')}{dq} = \frac{d(\varepsilon z_1)}{dp}.$$

Дифференцируя эти три уравненія и складывая ихъ по умноженіи сперва соотвѣтственно на x', y', z', затѣмъ также на x_1, y_1, z_1, и наконецъ на $y'z_1 - y_1z'$, $z'x_1 - z_1x'$, $x'y_1 - x_1y'$, мы получимъ слѣдующія, съ ними тождественныя три уравненія

$$\left.\begin{aligned} &\{x'^2 + y'^2 + z'^2\}\frac{de}{dq} - \{x'x_1 + y'y_1 + z'z_1\}\frac{d\varepsilon}{dp} + \\ &\qquad (e-\varepsilon)\,\{x'x'_1 + y'y'_1 + z'z'_1\} = 0 \\ &\{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\}\frac{d\,\varepsilon}{dp} - \{x'x_1 + y'y_1 + z'z_1\}\frac{de}{dq} + \\ &\qquad (\varepsilon-e)\,\{x_1x'_1 + y_1y_1' + z_1z'_1\} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots 22.$$

$$\begin{aligned} (e-\varepsilon)\{&(y'z_1 - y_1z')x_1' + (z'x_1 - z_1x')y_1' \\ &+ (x'y_1 - x_1y')z_1'\} = 0 \ldots 23. \end{aligned}$$

Если $e - \varepsilon = 0$, то изъ уравненія 22) слѣдуетъ, что $\frac{de}{dq} = \frac{d\varepsilon}{dp} = 0$, или $e = \varepsilon = const$, слѣдовательно $X = ex$, $Y = ey$, $Z = ez$; не обращая вниманія на этотъ случай, гдѣ обѣ поверхности должны быть подобны и въ параллельномъ положеніи, мы заключаемъ изъ уравненія 23), что

$$(y'z_1 - y_1z')x_1' + (z'x_1 - z_1x')y_1' + (x'y_1 - x_1y')z_1' = 0 \ldots 5.$$

Это уравненіе, какъ мы видѣли, есть условіе, подъ которымъ будутъ сопряженны направленія соотвѣтствующія постояннымъ p и q ($dp = 0$ и $dq = 0$), или точнѣе, подъ которымъ будутъ сопряженны кривыя $p = const.$ и $q = const$, касательныя которыхъ суть эти направленія.

Что это условіе существуетъ и для другой поверхности X, Y, Z, доказывается подстановленіемъ $X' = ex'$, $X_1 = \varepsilon x_1$ и т. д. въ уравненіе 5). Если по этому двѣ поверхности x, y, z и X, Y, Z находятся въ отношеніи параллелизма, то чрезъ каждую точку одной поверхности проходятъ двѣ кривыя, которыя параллельны (т. е. касательныя которыхъ параллельны) съ соотвѣтствующими кривыми на поверхности X, Y, Z Эти кривыя на обѣихъ поверхностяхъ сопряженны и составляютъ по этому основаніе отношенія. Мы ихъ назовемъ кривыми основанія.

Теорема V Угловыя свойства соотвѣтствующихъ кривыхъ основанія одинаковы.

Объясненіе и доказательство. Прямая линія, проходящая черезъ двѣ послѣдовательныя точки произвольной кривой, называется касательной или направленіемъ кривой; плоскость, проходящая черезъ три послѣдовательныя точки, называется прикасающейся плоскостію или плоскостію кривой; сфера, проходящая черезъ четыре послѣдовательныя точки, называется прикасающеюся сферою или сферою кривой; кривая, имѣющая только одну сферу (если эта одна сфера прикасается во всѣхъ точкахъ) называется сферической кривой, — одну плоскость — плоской кривой, и одно направленіе — прямой.

Если кривая находится на поверхности, то уголъ между плоскостію кривой и плоскостію поверхности (касательной плоскостію поверхности) называется наклоненіемъ кривой. Кривая, наклоненіе которой равно 90°, называется геодезической или кратчайшей линіей; кривую, наклоненіе которой равно 0, назовемъ прикасающейся кривой (она дѣйствительно существуетъ только на сѣдлообразныхъ поверхностяхъ). Кривая, пересѣкающая свои сопряженныя направленія подъ прямымъ угломъ, (сопряженный уголъ = 90°) называется линіей кривизны; кривая, пересѣкающая свои сопряженныя направленія подъ угломъ равнымъ 0, (въ которой совпадаютъ оба сопряженныя направленія) есть прикасающаяся кривая; кривую, сопряженныя направленія которой параллельны, мы назовемъ (по причинѣ далѣе изложенной) цилиндрической кривой.

Безконечно малый уголъ между двумя послѣдовательными направленіями кривой мы назовемъ главной кривизной (отношеніе этого угла къ элементу дуги иногда называется главной кривизной), уголъ между двумя послѣдовательными плоскостями кривой называется торзіей. Если мы проведемъ чрезъ касательную кривой плоскость А и проектируемъ на эту плоскость послѣдовательную касательную кривой, то безконечно малый уголъ между касательной и проектированной послѣдовательной касательной (т. е. проекція главной кривизны на плоскость А) называется кривизной кривой въ плости А или въ сѣченіи А. Если кривая находится на поверхности, то кривизна въ нормальномъ сѣченіи называется нормальной кривизной, въ касательной плоскости поверхности — касательной или геодезической кривизной.

Такъ какъ соотвѣтствующія кривыя основанія двухъ поверхностей, находящихся въ отношеніи параллелизма, имѣютъ въ соотвѣтствующихъ точкахъ параллельныя касательныя и параллельныя нормали, отъ которыхъ зависятъ всѣ упомянутые конечные и безконечно малые углы (наклоненіе, сопряженный уголъ, главная геодезическая и нормальная кривизна, торзія, и т. д.), то мы заключимъ:

Что если кривая основанія на одной изъ двухъ поверхностей, находящихся въ отношеніи параллелизма, есть прямая (главная кривизна = 0), кратчайшая линія (наклоненіе = 90°, геодезическая кривизна = 0), прикасающаяся кривая (наклоненіе = 0, нормальная кривизна = 0), плоская кривая (торзія = 0) линія кривизны (сопряженный уголъ = 90°), цилиндрическая кривая (сопряженныя направленія параллельны между собою), то ей соотвѣтствующая кривая основанія на другой поверхности должна быть также прямая, кратчайшая линія и т. д.

Если двѣ прямыя, которыя во всемъ протяженіи безконечно близки, проходятъ чрезъ двѣ послѣдовательныя точки данной кривой, то разстояніе узла этихъ прямыхъ (или точки пересѣченія, если онѣ пересѣкаются) отъ точки кривой, чрезъ которую онѣ проходятъ, назовемъ секансомъ, а эти прямыя сѣкущими Въ случаѣ пересѣченія — главнымъ секансомъ и главными сѣкущими.

Рядъ сѣкущихъ проходящихъ въ сплошной послѣдовательности чрезъ кривую составляетъ линейчатую поверхность, которая обращается въ развертывающуюся поверхность, если сѣкущія главныя. Если, напримѣръ, данная кривая лежитъ по произвольной поверхности и сѣкущія касаются этой поверхности, то и линейчатая поверхность будетъ касаться поверхности. Если эти сѣкущія проведены по направленіямъ сопряженнымъ данной кривой, то онѣ пересѣкаются и составляютъ ту развертывающуюся поверхность, которая касается данной поверхности въ данной кривой и которая обращается въ цилиндръ, если сѣкущія параллельны, — въ конусъ если онѣ сходятся въ одну точку. Въ первомъ случаѣ кривая будетъ цилиндрическая, во второмъ мы назовемъ ее конической.

Главный секансъ, который перпендикуляренъ къ кривой называется радіусомъ. Тотъ радіусъ, который лежитъ въ прикасающейся плоскости кривой, называется главнымъ, радіусъ прикасающейся ея сферы-сферическимъ радіусомъ. Если кривая лежитъ на поверхности, то тотъ радіусъ, который касается поверхности, называется касательнымъ или геодезическимъ, тотъ радіусъ, который есть вмѣстѣ съ тѣмъ нормаль поверхности, — нормальнымъ.

Теорема VI. *Параллельные секансы соотвѣтствующихъ кривыхъ основанія пропорціональны.*

Вообразимъ двѣ сѣкущія чрезъ смежныя точки x, y, z и $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ кривой основанія на поверхности x, y, z и чрезъ соотвѣтствующія точки X, Y, Z и $X+dX$, $Y+dY$, $Z+dZ$ двѣ имъ параллельныя сѣкущія, то четыреугольники, составляемые на каждой поверхности обѣими сѣкущими, ихъ кратчайшимъ разстояніемъ и безконечно малой дугою кривой (или треугольники, если сѣкущія пересѣкаются), будутъ подобны, потому что всѣ ихъ стороны параллельны, слѣдовательно параллельные секансы относятся какъ безконечно малыя дуги. Если по этому s и s_1 суть два произвольные секанса кривой основанія въ точкѣ x, y, z; S и S_1, параллельные имъ секансы соотвѣтствующей кривой основанія въ точкѣ X, Y, Z, то $S : S_1 = s : s_1$.

Если слѣдовательно r, t, n означаютъ главный, касательный и нормальный радіусы, s главный касательный секансъ основанія въ точкѣ x, y, z, и если R, T, N, S имѣютъ то же самое значеніе для соотвѣтствующей кривой основанія въ точкѣ X, Y, Z, то

$$r : t : n : s : \nu = R : T : N : S : \mathfrak{N} \ldots\; 24.$$

Примѣчаніе. Соотвѣтствующіе сферическіе радіусы не параллельны, поэтому они и не принадлежатъ сюда.

Сродство параллелизма

ИЛИ ОТНОШЕНІЕ ПАРАЛЛЕЛИЗМА НА ДАННОМЪ ОСНОВАНІИ.

Мы опредѣлили точки, въ которыхъ двѣ произвольныя поверхности x, y, z, X, Y, Z параллельны, т. е. имѣютъ параллельныя касательныя плоскости; мы видѣли, что черезъ каждую точку x, y, z одной поверхности проходятъ двѣ кривыя, которыя параллельны, т. е. имѣютъ параллельныя касательныя съ двумя кривыми, проходящими чрезъ точку X, Y, Z другой поверхности; эти кривыя, которыя на обѣихъ поверхностяхъ сопряженны, мы назвали основаніемъ параллелизма; докажемъ теперь, что если намъ дана произвольная поверхность x, y, z и на ней, сѣть сопряженныхъ кривыхъ, то мы можемъ найдти поверхность X, Y, Z, которая параллельна съ поверхностію x, y, z относительно этихъ кривыхъ т. е. съ данною поверхностію на данномъ основаніи.

Положимъ, что координаты x, y, z даны какъ функціи тѣхъ перемѣнныхъ p и q, постояннымъ значеніямъ которыхъ соотвѣствуютъ эти сопряженныя кривыя. Чтобы касательныя кривыхъ $q = const.$ на поверхностяхъ x, y, z и X, Y, Z были параллельны, $\frac{dX}{dp}$, $\frac{dY}{dp}$, $\frac{dZ}{dp}$ должны относиться какъ $\frac{dx}{dp}$, $\frac{dy}{dp}$, $\frac{dz}{dp}$, слѣдовательно

$$\frac{X'}{x'} = \frac{Y'}{y'} = \frac{Z'}{z'} .$$

Такимъ же образомъ мы найдемъ условіе, что кривыя $p = const.$ параллельны

$$\frac{X_1}{x_1} = \frac{Y_1}{y_1} = \frac{Z_1}{z_1} .$$

Изъ этого уже слѣдуетъ, что касательныя плоскости поверхностей x, y, z и X, Y, Z, которыя касаются этими кривыми, параллельны.

Означая $\frac{X'}{x'}$ чрезъ e, $\frac{X_1}{x_1}$ чрезъ ε, мы получимъ

$$\left.\begin{aligned} dX &= X'dp + X_1dq = ex'dp + \varepsilon x_1dq \\ dY &= ey'dp + \varepsilon y_1dq \\ dZ &= ez'dp + \varepsilon z_1dq \end{aligned}\right\} \dots\; 21.$$

Если поверхность X, Y, Z существуетъ, то неопредѣленныя функціи e и ε должны удовлетворять условіямъ интегрируемости, именно

$$\frac{d(ex')}{dq} = \frac{d(\varepsilon x_1)}{dp} , \quad \frac{d(ey')}{dq} = \frac{d(\varepsilon y_1)}{dp} , \quad \frac{d(ez')}{dq} = \frac{d(\varepsilon z_1)}{dp} .$$

Эти три условія, какъ мы видѣли (ур. 22 и 23), обращаются въ слѣдующія три, съ ними тождественныя условія

$$\left.\begin{aligned} &(x'^2 + y'^2 + z'^2)\frac{de}{dq} - (x'x_1 + y'y_1 + z'z_1)\frac{d\varepsilon}{dp} + \\ &\qquad (e-\varepsilon)\,(x'x'_1 + y'y'_1 + z'z'_1) = 0 \\ &(x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2)\frac{d\varepsilon}{dp} - (x'x_1 + y'y_1 + z'z_1)\frac{de}{dq} + \\ &\qquad (e-\varepsilon)\,(x_1x'_1 + y_1y'_1 + z_1z'_1) = 0 \end{aligned}\right\}\ldots\ 22.$$

$$(e - \varepsilon)\,\}(y'z_1 - y_1z')x'_1 + (z'x_1 - z_1x')y'_1 \\ + (x'y_1 - x_1y')z'_1\{ = 0.\ ..\ 23.$$

Третье условіе существуетъ само по себѣ, потому что кривыя соотвѣтствующія постояннымъ p и q сопряженны; а обоимъ первымъ мы удовлетворимъ посредствомъ обѣихъ неопредѣленныхъ функцій e и ε. — Интегрируя уравненія 22), мы получимъ функціи e и ε съ двумя произвольными функціями, посредствомъ которыхъ мы выведемъ изъ уравненій

$$dX = ex'dp + \varepsilon x_1 dq,\quad dY = ey'dp + \varepsilon y_1 dq,\quad dZ = ez'dp + \varepsilon z_1 dq \ldots\ 21.$$

значенія координатъ X, Y, Z.

Такъ какъ координаты X, Y, Z заключаютъ въ себѣ двѣ произвольныя функціи, то мы заключаемъ что безконечное множество поверхностей X, Y, Z параллельно съ данной поверхностію x, y, z на данномъ основаніи $p = const.$, $q = const.$ Всѣ эти поверхности X, Y, Z, между которыми находится и данная поверхность x, y, z, $(e = \varepsilon = 1)$ составляютъ сродство параллелизма, отличающееся тѣми общими свойствами, которыя мы изложили въ трехъ теоремахъ о параллелизмѣ, именно что:

1. Кривыя $p = const$ и $q = const$ на каждой изъ этихъ поверхностей сопряженны и параллельны съ соотвѣтствующими кривыми всѣхъ другихъ поверхностей;

2. Что угловыя свойства этихъ кривыхъ на всѣхъ поверхностяхъ одинаковы;

3. Что параллельные секансы пропорціональны. — Слѣдовательно:

Данная поверхность x, y, z находится въ отношеніи параллелизма со всѣми произвольными поверхностями, X, Y, Z, въ сродствѣ параллелизма, т. е. на данномъ основаніи $p = const$, $q = const$. только съ поверхностями X, Y, Z удовлетворяющими условіямъ

$$dX = ex'dp + \varepsilon x_1 dq, \quad dY = ey'dp + \varepsilon y_1 dq, \quad dZ = ez'dp + \varepsilon z_1 dq.$$

Уравненія этихъ поверхностей мы можемъ вывести по этимъ условіямъ, и ихъ свойства изучать по упомянутымъ тремъ теоремамъ.

Для опредѣленія неопредѣленныхъ функцій e и ε служатъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} &(x'^2 + y'^2 + z'^2)\frac{de}{dq} - (x'x_1 + y'y_1 + z'z_1)\frac{d\varepsilon}{dp} + \\ &\qquad (e - \varepsilon)(x'x'_1 + y'y'_1 + z'z'_1) = 0 \\ &(x_1^2 + y'^2 + z_1^2)\frac{d\varepsilon}{dp} - (x'x_1 + y'y_1 + z'z_1)\frac{de}{dq} + \\ &\qquad (\varepsilon - e)(x_1x'_1 + y_1y'_1 + z_1z_1') = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ 22.$$

которыя мы можемъ упростить слѣдующимъ образомъ.

Положимъ, что $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = u^2dp^2 + 2uv.\cos\omega\, dp\, dq + v^2dq^2$ линейный элементъ данной поверхности x, y, z, тогда

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = u^2, \quad x'x_1 + y'y_1 + z'z'_1 = uv.\cos\omega$$
$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = v^2$$

слѣдовательно

$$x'x'_1 + y'y'_1 + z'z'_1 = u\frac{du}{dq} = uu_1 \quad x_1x'_1 + y_1y'_1 + z_1z'_1 = v\frac{dv}{dp} = vv'.$$

По подстановленіи, мы изъ уравненій 22) получаемъ

$$\left.\begin{array}{l} u\,\dfrac{de}{dq} - v\,\dfrac{d\varepsilon}{dp}\cos\omega + (e - \varepsilon)u_1 = 0 \\ v\,\dfrac{d\varepsilon}{dp} - u\,\dfrac{de}{dq}\cos\omega + (\varepsilon - e)v' = 0 \end{array}\right\}\ldots\; 22.$$

и отсюда

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{de}{dq} + \dfrac{u_1 - v'\cos\omega}{u\sin^2\omega}(e - \varepsilon) = 0 \\ \dfrac{d\varepsilon}{dq} + \dfrac{v' - u_1\cos\omega}{v\sin^2\omega}(\varepsilon - e) = 0 \end{array}\right\}\ldots\; 24.$$

или, означая

$$\frac{u_1 - v'\cos\omega}{u\sin^2\omega} \text{ чрезъ } m,\; \frac{v' - u_1\cos\omega}{v\sin^2\omega} \text{ чрезъ } n\ldots\; 25.$$

мы получимъ

$$\frac{de}{dq} + m(e - \varepsilon) = 0\,,\; \frac{d\varepsilon}{dp} + n(\varepsilon - e) = 0\ldots.\; 24.$$

гдѣ m и n данныя функціи отъ p и q.

Параллелизмъ изогнутыхъ поверхностей.

Мы уже видѣли, что сродство изгибанія есть частный случай графическаго отношенія, что разстоянія безконечно близкихъ соотвѣтствующихъ точекъ, которыя здѣсь пропорціональны, тамъ равны, потому что если двѣ поверхности посредствомъ изгибанія могутъ быть приведены къ совпаденію, то безконечно малыя разстоянія между совпадающими (соотвѣтствующими) точками должны быть равны, и если они равны, то нѣтъ препятствія привести поверхности къ совпаденію.

Основаніе сродства изгибанія, т. е. тѣ сопряженныя кривыя данной поверхности x, y, z, которыя остаются сопряженными, если мы изогнемъ эту поверхность x, y, z въ другую форму x_1, y_1, z_1, мы назовемъ *линіями изгибанія* и скажемъ, что поверхность x, y, z изогнута по этимъ линіямъ.

Эти линіи изгибанія опредѣляются какъ основаніе средства по уравненіямъ 6) и 7) и будутъ вообще другія, если мы изогнемъ поверхность x, y, z въ третью форму x_{11}, y_{11}, z_{11}. Но если двѣ поверхности x_1, y_1, z_1, и x_{11}, y_{11}, z_{11} могутъ быть въ сродствѣ изгибанія съ данной поверхностію x, y, z на одномъ и томъ же основаніи, т. е. если поверхность x, y, z по тѣмъ же линіямъ изгибанія можетъ быть изогнута въ двѣ различныя формы x_1, y_1, z_1 и x_{11}, y_{11}, z_{11}, то мы назовемъ эти линіи главными линіями изгибанія. (По такимъ линіямъ изгибанія, какъ мы послѣ докажемъ, поверхность можетъ быть изогнута въ безконечно много формъ).

Примѣчаніе. Линіи изгибанія, которыми мы подробно будемъ заниматься въ графическомъ отношеніи, однѣ имѣютъ то свойство, что произведенія ихъ нормальныхъ радіусовъ при изгибаніи не измѣняются. Гауссова теорема о постоянствѣ произведенія нормальныхъ радіусовъ линій кривизны относится сюда только въ томъ случаѣ, если линіи кривизны при изгибаніи не измѣняютъ своего положенія, т. е. если тѣ самыя линіи кривизны остаются линіями кривизны Въ этомъ случаѣ основаніе изгибанія будетъ прямоугольное и можетъ быть притомъ простое или главное. На главномъ прямоугольномъ основаніи изгибаются только les surfaces moulures de Monge, и эти изгибанія въ самомъ дѣлѣ выведены (par Bour, Journal de l'Ecole Polytechnique, t. XXII).

Прибавимъ сюда, для поясненія слѣдующей теоремы, примѣры изгибанія на косоугольномъ основаніи.

Положимъ, что дана поверхность слѣдующаго вида

$$x = a + \alpha,\ y = b + \beta,\ z = c + \gamma \ldots 26.$$

гдѣ a, b, c три произвольныя функціи одной перемѣнной p, α, β, γ такія же функціи перемѣнной q.

Свойства этой поверхности:

Кривыя, соотвѣтствующія постояннымъ p и q, суть

1. Кривыя неизмѣняемыя, потому что всѣмъ постояннымъ значеніямъ функцій α, β, γ соотвѣствуетъ одна и таже кри-

вая въ различныхъ положеніяхъ; тоже самое относительно функцій a, b, c.

2. Цилиндрическія кривыя, потому что главные касательные секансы кривой $q = const.$, косинусы которыхъ относятся какъ $\frac{dx}{dq} : \frac{dy}{dq} : \frac{dz}{dq}$, параллельны.

3. Сопряженныя кривыя, потому что дифференціалы x'_1, y'_1, z'_1, по обѣимъ перемѣннымъ равны 0, слѣдовательно

$$\xi x'_1 + \eta y'_1 + \zeta z'_1 = 0\dots\ 5.$$

4. Въ линейномъ элементѣ

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2)dp^2 +$$
$$2(a'\alpha_1 + b'\beta_1 + c'\gamma_1)\ dp.dq + (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)dq^2\dots..\ 27.$$

гдѣ $a' = \frac{da}{dp}$, $\alpha_1 = \frac{d\alpha}{dq}$, и т. д., мы замѣтимъ интересный случай, когда мы можемъ замѣнить функціи a, b, c и α, β, γ другими функціями, не измѣняя линейнаго элемента, т. е. когда мы можемъ изогнуть данную поверхность x, y, z по линіямъ изгибанія $p = const.$ и $q = const.$

Этотъ случай выражается аналитически условіями:

$$la'^2 + mb'^2 + nc'^2 = 0,\ \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1^2 + \nu\gamma_1^2 = 0\dots\ 28.$$

гдѣ l, m, n; λ, μ, ν постоянныя. Дѣйствительно, полагая, что эти условія существуютъ между данными функціями a, b, c и α, β, γ и замѣняя

a чрезъ ga, b чрезъ hb, c чрезъ kc

α чрезъ $\frac{\alpha}{g}$, β чрезъ $\frac{\beta}{h}$, γ чрезъ $\frac{\gamma}{k}$

гдѣ g, h и k постоянныя, мы получимъ линейный элементъ

$$ds^2 = (g^2a'^2 + h^2b'^2 + k^2c'^2)dp^2 + 2(a'\alpha_1 + b'\beta_1 + c'\gamma_1)dpdq$$
$$+ \left(\frac{\alpha_1^2}{g^2} + \frac{\beta_1^2}{h^2} + \frac{\gamma_1^2}{k^2}\right)dq^2$$

который долженъ быть тождественъ съ линейнымъ элементомъ

$$ds^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2)dp^2 + 2(a'\alpha_1 + b'\beta_1 + c'\gamma_1)dpdq$$
$$+ (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)dq^2.$$

Отсюда слѣдуютъ два условія

$$a'^2\,(g^2-1) + b'^2(h^2-1) + c'^2(k^2-1) = 0$$

$$\alpha_1^2\,\frac{g^2-1}{g^2} + \beta_1^2\,\frac{h^2-1}{h^2} + \gamma_1^2\,\frac{k^2-1}{k^2} = 0$$

которымъ мы можемъ удовлетворить посредствомъ условій 28), полагая

$$\frac{g^2-1}{l} = \frac{h^2-1}{m} = \frac{k^2-1}{n}\ ;\ \frac{g^2-1}{g^2\lambda} = \frac{h^2-1}{h^2\mu} = \frac{k^2-1}{k^2\nu}\ \ldots.\ 29.$$

Три изъ этихъ четырехъ уравненій опредѣляютъ намъ неизвѣстныя постоянныя g, h, k, а четвертое выражаетъ зависимость между данными постоянными l, m, n, λ, μ, ν уравненія 28).

Если по этому положимъ

$$X = ga + \frac{\alpha}{g}, Y = hb + \frac{\beta}{h}, Z = kc + \frac{\gamma}{k}\ \ldots.\ 30.$$

то X, Y, Z будутъ координаты поверхности, которая можетъ быть приведена къ совпаденію съ данной поверхностію

$$x = a + \alpha,\ y = b + \beta,\ z = c + \gamma$$

потому что линейные элементы обѣихъ поверхностей тождественны.

Кривыя соотвѣтствующія постояннымъ p и q на обѣихъ поверхностяхъ сопряженны и поэтому будутъ основаніями изгибанія. Это основаніе будетъ простое, потому что постоянныя g, h, k (ур. 29) слѣдовательно и координаты X, Y, Z имѣютъ только одно значеніе, изъ уравненій 29) мы получимъ для g^2, h^2 и k^2 кромѣ одного корня еще корень $g^2=1$,

$h^2 = 1$, $k^2 = 1$, который соотвѣтствуетъ данной поверхности x, y, z

Но если одна изъ функцій a, b, c, напр. a и одна изъ функцій α, β, γ напр. β, сами собою равны 0, то условія

$$la'^2 + mb'^2 + nc'^2 = 0 \text{ и } \lambda\alpha_1^2 + \mu\beta_1^2 + \nu\gamma_1^2 = 0$$

существуютъ при произвольныхъ m, n, λ, ν, если $l = \infty$ и $\mu = \infty$, и уравненія 29) сдѣлаются неопредѣленными.

Уравненіе данной поверхности будетъ тогда

$$x = \alpha,\ y = b,\ z = c + \gamma \ldots\ 31.$$

гдѣ къ свойствамъ, по которымъ кривыя $p = const$ и $q = const$ суть неизмѣняемыя, цилиндрическія и сопряженныя, прибавляется еще то свойство, что эти кривыя плоски.

Мы легко убѣдимся, что въ этомъ случаѣ всякая поверхность

$$\mathrm{X} = \int\sqrt{\alpha_1^2 - k^2\gamma_1^2}dq\,,\ \mathrm{Y} = \int\sqrt{b'^2 - \frac{c'^2}{k^2}}\,,\ \mathrm{Z} = kc + \frac{\gamma}{k} \ldots\ 32.$$

приводится къ совпаденію съ поверхностію x, y, z, потому что

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\mathrm{X}^2 + d\mathrm{Y}^2 + d\mathrm{Z}^2 = (b'^2 + c'^2)dp^2 + 2c'\gamma_1 dpdq + (\alpha_1^2 + \gamma_1^2)dq^2 \ldots$$

независимо отъ совсѣмъ произвольной постоянной k, которую мы назовемъ параметромъ изгибанія. Основаніе этого изгибанія будетъ главное косоугольное, потому что поверхность x, y, z изгибается въ разныя формы X, Y, Z потѣмъ же линіямъ $p = const.$ и $q = const.$

Пусть

$$x = a\alpha,\ y = \alpha\beta,\ z = b \ldots\ 33.$$

данная поверхность, гдѣ a и b функціи перемѣнной p, α и β функціи другой перемѣнной q.

Свойства этой поверхности:

Кривыя соотвѣтствующія постояннымъ p и q

1. Плоскія, потому что $\frac{y}{x}=\frac{\beta}{\alpha}=const$ если $q=const.$ и $z=b=const$ если $p=const.$

2. Сопряженныя, потому что z_1 и z'_1 равны 0, слѣдовательно

$$(y'z_1 - y_1z')x'_1 + (z'x_1 - z_1x')y'_1 + (x'y_1 - x_1y')z'_1$$
$$= z'(x_1y'_1 - y_1x'_1) = 0.$$

3. Кривыя $q=const.$ цилиндрическія, потому что главные касательные секансы, косинусы которыхъ относятся какъ $\frac{d\alpha}{dq}:\frac{d\beta}{dq}:0$ параллельны.

4. Для линейнаго элемента мы получимъ

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = [a'^2(\alpha^2+\beta^2) + b'^2]dp^2 +$$
$$2aa'(\alpha\alpha' + \beta\beta')dpdq + a^2(\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2)dq^2$$

этотъ линейный элементъ очевидно не измѣнится, если мы замѣнимъ

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha^2+\beta^2 \text{ чрезъ } \alpha^2+\beta^2+k \;, & b'^2 \text{ чрезъ } b'^2 - ka'^2, \\ \text{оставляя} & \\ \qquad a = a & \text{и} \quad \alpha_1{}^2+\beta_1{}^2=\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2 \end{array}\right\} \ldots\; 34.$$

потому что

$$a'^2(\alpha^2+\beta^2+k^2) + b'^2 - ka'^2 = a'^2(\alpha^2+\beta^2) + b'^2$$

$$\frac{d(\alpha^2+\beta^2+k)}{dq} + \frac{d(\alpha^2+\beta^2)}{dq} = 2(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)$$

k будетъ параметръ изгибанія. Этимъ измѣненіемъ функціи α, β, b получаютъ, совсѣмъ другой видъ, именно, означая $\alpha^2+\beta^2$ чрезъ γ^2, $\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2$ чрезъ η^2, мы получимъ изъ уравненій $\alpha^2+\beta^2+k=\gamma^2$ и $\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2=\eta^2$

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha = \sqrt{\gamma^2 - k.}\, cos\int\frac{\sqrt{(\gamma^2 - k)\eta^2 - \gamma_1^{\,2}}}{\gamma^2 - k}\,dq\\
&\beta = \sqrt{\gamma^2 - k.}\, sin\int\frac{\sqrt{(\gamma^2 - k)\eta^2 - \gamma_1^{\,2}}}{\gamma^2 - k}\,dq.\\
&\text{и изъ замѣненія } b'^2 \text{ чрезъ } b'^2 - ka'^2 \text{ слѣдуетъ, что}\\
&\int\sqrt{b'^2 - ka'^2.}\,dp \text{ должно ставить вмѣсто } b
\end{aligned}\right\}\ldots\ 35.$$

и только остается $a = a$

Поверхности, соотвѣтствующія этимъ значеніямъ функцій α, a, b, β будутъ

$$\left.\begin{aligned}
&X = {}_a\sqrt{\gamma^2 - k.}\ cos\int\frac{\sqrt{(\gamma^2 - k)\eta^2 - \gamma_1^{\,2}}}{\gamma^2 - k}\,dq\\
&Y = a\sqrt{\gamma^2 - k.}\ sin\int\frac{\sqrt{(\gamma^2 - k)\eta^2 - \gamma_1^{\,2}}}{\gamma^2 - k}\,dq\\
&Z = \int\sqrt{b'^2 - ka_1^{\,2}.}\,dp
\end{aligned}\right\}\ldots\ 36.$$

Всѣ эти поверхности X, Y, Z будутъ изогнутыя формы поверхности x, y, z по главнымъ линіямъ изгибанія $p = const$, $q = const$, потому что кривыя $p = const$ и $q = const$. во всѣхъ этихъ поверхностяхъ сопряженны и потому что $dX^2 + dY^2$ $dZ^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ при всѣхъ значеніяхъ параметра k.

Пусть

$$a = cosp,\quad \alpha = \lambda cosq,\quad \beta = \mu sinq,\quad b = \nu sinp,$$

гдѣ λ, μ, ν постоянныя. Тогда данная поверхность x, y, z будетъ

$$\left.\begin{aligned}
&x = \lambda cosp\,.\,cosq\\
&y = \mu cosp\,.\,sinq\\
&z = \nu sinp
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ 37.$$

или

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}+\frac{z^2}{\nu^2}=1 \ldots 37.$$

и мы находимъ для ней три ряда изгибаній X, Y, Z, смотря потому, которую изъ трехъ осей данной поверхности второй степени мы примемъ за ось ν. Если λ^2, μ^2 или ν^2 отрицательно, то мы замѣнимъ p чрезъ pi или $\frac{\pi}{2} - pi$, q чрезъ qi.

Теорема VII. Если поверхность x_1, y_1, z_1 есть изогнутая форма поверхности x, y, z, то и всѣ поверхности X_1, Y_1, Z_1, которыя параллельны одной поверхности x_1 y_1 z_1, суть изогнутыя формы поверхностей X, Y, Z, которыя параллельны съ другой поверхностію x, y, z, относительно линій изгибанія.

Эту замѣчательную теорему, посредствомъ которой всѣ вопросы, касающіеся изгибанія поверхностей, приводятся къ ихъ простѣйшему началу, мы можемъ выразить еще и такъ:

Во всѣхъ поверхностяхъ, параллельныхъ данной поверхности относительно линій изгибанія (простыхъ или главныхъ), основаніемъ параллелизма будутъ линіи изгибанія (простыя или главныя).

Поэтому свойства, которыми характеризуются линіи изгибанія, переходятъ также какъ угловыя свойства отъ данной поверхности къ поверхностямъ параллельнымъ. (Теор. V)

Доказательство. Положимъ, что

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = u^2dp^2 + 2uv.\cos\omega dpdq + v^2dq^2$$

линейный элементъ поверхности x, y, z и что кривыя $p =$ const. и $q =$ const. линіи изгибанія (главныя или простыя), т. е. такія сопряженныя кривыя, по которымъ поверхность x, y, z изгибается, тогда уравненія поверхностей параллельныхъ относительно этихъ кривыхъ будутъ

$$dX = x'edp + x_1\varepsilon dq,\ dY = y'edp + y_1\varepsilon dq,\ dZ = z'edp + z_1\varepsilon dq$$

гдѣ e и ε опредѣляются уравненіями

$$\frac{de}{dp} + m(e-\varepsilon) = 0,\ \frac{d\varepsilon}{dq} + n(\varepsilon - e) = 0 \dots\ 24.$$

$$m = \frac{u_1 - v'\cos\omega}{u.\sin^2\omega},\ n = \frac{v' - u_1\cos\omega}{v.\sin^2\omega}\ \dots\ 25.$$

Изъ этихъ уравненій 24) и 25) слѣдуетъ, что общій видъ функцій e и ε зависитъ только отъ функцій u_1, v и ω, и слѣдовательно не измѣнится при изгибаніи поверхности x, y, z, потому что линейный элементъ $ds^2 = u^2dp^2 + 2uv.\cos\omega.dpdq + v^2dq^2$ не измѣняется; отсюда мы заключаемъ, что линейный элементъ поверхностей X, Y, Z

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = e^2(x'^2 + y'^2 + z'^2)dp^2 + 2e\varepsilon(x'x_1 + y'y_1 + z'z_1)dpdq + \varepsilon^2(x^2{}_1 + y_1{}^2 + z_1{}^2)dq^2 = e^2u^2dp^2 + 2e\varepsilon.u\,v.\cos\omega dpdq + \varepsilon^2v^2dq^2.$$

неизмѣняется при изгибаніи поверхности x, y, z.

Примѣръ I. Положимъ, что дана поверхность

$$x = a\alpha,\ y = a\beta,\ z = b \dots\ 33.$$

гдѣ a и b функціи перемѣнной p, α и β функціи перемѣнной q.

Какъ мы уже видѣли, кривыя $p = const.$, $q = const.$ суть здѣсь линіи главнаго изгибанія, по которымъ поверхность x, y, z можетъ быть изогнута во многія формы

Функціи α, β, a, b вслѣдствіе этого изгибанія получаютъ новыя значенія, заключающія въ себѣ произвольный параметръ изгибанія k. Этотъ параметръ k входитъ сюда посредствомъ уравненій

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + k; & \alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 = \alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 \\ a = a & b'^2 = b'^2 - ka'^2 \end{array}\right\} \dots\ 34.$$

гдѣ первыя части означаютъ значенія функцій a, b, α, β для изогнутыхъ поверхностей, и этотъ параметръ будетъ по теор. VII параметромъ изгибанія всѣхъ поверхностей X, Y, Z, которыя параллельны поверхности x, y, z относительно линій изгибанія $p = const$. и $q = const$.

Выведемъ уравненіе этихъ параллельныхъ поверхностей; изъ уравненій

$$x = a\alpha,\ y = a\beta,\ z = b.$$

мы получаемъ линейный элементъ

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = a'^2(\alpha^2 + \beta^2)dp^2 + 2aa'(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)dpdq$$
$$+ a^2(\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2)dq^2 = u^2 .\, dp^2 + 2uv.cos\omega.dpdq + v^2dq^2$$

слѣдовательно

$$u = a'\sqrt{\alpha^2 + \beta^2},\ cos\omega = \frac{\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2)}},\ v = a\sqrt{\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2}$$

а отсюда:

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{u_1 - v'cos\omega}{u.sin^2\omega} = \frac{\dfrac{du}{dq} - \dfrac{dv}{dp}\ cos\omega}{u.sin^2\omega} = 0 \\ n &= \frac{v' - u_1cos\omega}{vsin^2\omega} = \frac{a'}{a} \qquad\qquad = \frac{da}{adp} \end{aligned}\right\} \ldots\ 35.$$

Подстановляя эти значенія функцій m и n въ уравненія

$$\frac{de}{dq} + m(e - \varepsilon) = 0,\ \frac{d\varepsilon}{dp} + n\ (\varepsilon - e) = 0$$

и интегрируя, мы получимъ

$$e = \mathrm{F}p$$

$$\frac{d\varepsilon}{dp} + \varepsilon\ \frac{da}{adp} = \mathrm{F}p .\ \frac{da}{adp}$$

слѣдовательно

$$\frac{d(a\varepsilon)}{dp} = \mathrm{F}p .\ da$$

$$a\varepsilon = \varphi q + \int \mathrm{F}p . \frac{da}{dp}\ dp.$$

И такъ

$$e = \mathrm{F}p,\ \varepsilon = \frac{\varphi q + \int \mathrm{F}p \, \frac{da}{ap} \, dp}{a} \ \ldots . \ 36.$$

Подставляя значенія функцій e и ε въ уравненія

$$d\mathrm{X} = ex' dp + \varepsilon x_1 dq, \ d\mathrm{Y} = ey' dp + \varepsilon y_1 dq, \ d\mathrm{Z} = ez' dp + \varepsilon z_1 dq$$

гдѣ $x = a\alpha$, $y = a\beta$, $z = b$, мы получимъ

$$d\mathrm{X} = \alpha \mathrm{F}p \frac{da}{dp} \, dp + (\varphi q + \int \mathrm{F}p \, \frac{da}{dp} dp) \frac{d\alpha}{dq} \, dq$$

слѣдовательно

таким же образомъ
$$\left.\begin{aligned} \mathrm{X} &= a\alpha \mathrm{F}p + \int \varphi q \, \frac{d\alpha}{dq} \, dq \\ \mathrm{Y} &= a\beta \mathrm{F}p + \int \varphi q \, \frac{d\beta}{dq} \, dq \\ \mathrm{Z} &= \int \mathrm{F}p \, \frac{db}{dp} \, dp \end{aligned}\right\} \ \ldots . \ 37.$$

Это есть уравненіе всѣхъ поверхностей X, Y, Z параллельныхъ съ поверхностей $x = a\alpha$, $y = a\beta$, $z = b$ относительно кривыхъ $p = const.$ и $q = const.$

$\mathrm{F}p$ и φq будутъ произвольныя функціи параллелизма. Но такъ какъ a и b произвольныя данныя функціи отъ p, то $\mathrm{F}p$ очевидно не измѣняетъ общій видъ поверхностей X, Y, Z:

Изъ этого слѣдуетъ, что поверхности x, y, z при разныхъ значеніяхъ функцій a и b между собою параллельны, т. е. что мы получимъ часть искомыхъ поверхностей X, Y, Z, замѣняя эти функціи другими функціями a и b.

Приравнивая по этому $\mathrm{F}p = 1$, мы получимъ слѣдующія поверхности X, Y, Z

$$\mathrm{X} = a\alpha + \int \varphi q \, \frac{d\alpha}{dq} \, dq, \mathrm{Y} = a\beta + \int \varphi q \, \frac{d\beta}{dq} \, dq, \mathrm{Z} = b \ldots . \ 38.$$

Свойства. — Кривыя, соотвѣтствующія постояннымъ p и q будутъ 1) плоскія, 2) сопряженныя, 3) линіи главнаго изгибанія, 4) кривыя $q = const.$ будутъ цилиндрическія кривыя.

Эти четыре свойства, какъ угловыя, переходятъ прямо отъ поверхности x, y, z къ параллельнымъ поверхностямъ X, Y, Z. Изгибанія послѣднихъ мы получимъ, если замѣнимъ функціи α, β, b въ уравненіи 38) тѣми функціями α, β, b, которыя мы опредѣлили при изгибаніи поверхностей x, y, z уравненія 35).

Примѣръ II. Сродство параллелизма поверхностей

$$x = a\alpha,\ y = a\beta,\ z = b \ldots\ 33.$$

заключаетъ въ себѣ, какъ мы видѣли, только одну новую функцію φq.

Параллелизмъ поверхностей

$$x = a + \alpha,\quad y = b + \beta,\ z = c + \gamma \ldots\ 26.$$

изгибанія которыхъ мы получили уравненіями 2) и 3), не заключаетъ въ себѣ ни одной новой функціи, потому что уравненія параллельныхъ поверхностей X, Y, Z будутъ

$$\left.\begin{aligned} X &= \int fp\,\frac{da}{dp}\,dp + \int \varphi q\,\frac{d\alpha}{dq}\,dq \\ Y &= \int fp\,\frac{db}{dp}\,dp + \int \varphi q \cdot \frac{d\beta}{dq}\,dq \\ Z &= \int fp\,\frac{dc}{dp}\,dp + \int \varphi q \cdot \frac{d\gamma}{dq}\,dq \end{aligned}\right\} \ldots\ 39.$$

откуда слѣдуетъ, что произвольныя функціи a, b, c, α, β, γ замѣняются только другими произвольными функціями, т. е. что поверхности x, y, z уже между собою параллельны относительно линій изгибанія.

Возьмемъ за то другой примѣръ изгибанія на простомъ косоугольномъ основаніи.

Поверхность

$$x = \frac{\mathfrak{Sin}.cp}{\mathfrak{Cos}p + cosq},\ y = \frac{sin\ cq}{\mathfrak{Cos}p + cosq},\ z = \frac{a\mathfrak{Cos}.cp + bcos.cq}{\mathfrak{Cos}p + cosq} \ldots 40.$$

(a, b и c постоянныя, $b^2 = 1 + a^2$), изгибается въ слѣдующую форму x_1, y_1, z_1,

$$x_1 = \frac{c\mathfrak{Sin}.p}{\mathfrak{Cos}p + cos q}, y_1 = \frac{c.sin.q}{\mathfrak{Cos}p + cos q}, z_1 = \frac{b\mathfrak{Cos}.cp + a\mathfrak{Sin}\, c_q}{\mathfrak{Cos}p + cos q}q .. \quad 41.$$

Кривыя $p = const.$ и $q = const.$ будутъ сопряженны, линейные элементы тождественны; изгибаніе будетъ простое, потому что по этимъ кривымъ существуетъ только одно изгибаніе, и при этомъ постоянныя a и b перемѣняются, $Sin\ cp$ и $sin.cq$ переходятъ въ $cSin.p$ и $c.sin.q$. Эти предложенія слѣдуютъ изъ болѣе общихъ предложеній изложенныхъ при графическомъ отношеніи; мы однако же можемъ убѣдиться въ вѣрности ихъ дифференцированіемъ.

По теоремѣ VII всѣ поверхности X_1, Y_1, Z_1 параллельныя съ поверхностію x_1, y_1, z_1, должны быть изогнутыя формы поверхностей X, Y, Z, параллельныхъ съ поверхностію x, y, z.

Чтобы вывести уравненіе этихъ поверхностей X, Y, Z и X_1, Y_1, Z_1, замѣтимъ, что обѣ поверхности x, y, z, и x_1, y_1, z_1 принадлежатъ къ поверхностямъ болѣе общаго вида

$$x = \frac{a + \alpha}{l + \lambda}, y = \frac{b + \beta}{l + \lambda}, z = \frac{c + \gamma}{l + \lambda} \quad \ldots\ldots \quad 42.$$

гдѣ a, b, c и l функціи одной перемѣнной p; α, β, γ и λ функціи перемѣнной q, выведемъ для этихъ уравненія поверхностей X, Y, Z, параллельныхъ относительно кривыхъ $p = const.$ и $q = const.$ Что эти кривыя сопряженны докажется, если мы докажемъ a posteriori, что поверхности X, Y, Z существуютъ.

Положимъ для этой цѣли

$$\left.\begin{aligned}
X &= \frac{a + \alpha}{l + \lambda}\{Fp + \varphi q\} - \int\frac{a'}{l'}F'pdp - \int\frac{\alpha_1}{\lambda_1}\varphi'qdq \\
Y &= \frac{b + \beta}{l + \lambda}\{Fp + \varphi q\} - \int\frac{b'}{l'}F'pdp - \int\frac{\beta_1}{\lambda_1}\varphi'qdq \\
Z &= \frac{c + \gamma}{l + \lambda}\{Fp + \varphi q\} - \int\frac{c'}{l'}F'pdp - \int\frac{\gamma_1}{\lambda_1}\varphi'qdq
\end{aligned}\right\} \ldots \quad 43.$$

гдѣ $\frac{da}{dp}$, $\frac{d\alpha}{dq}$ и т. д. обозначены чрезъ a', α_1, и т. д., то помощію дифференцированія получимъ

$$\left.\begin{aligned}
dX = X'dp + X_1dq &= \{Fp + \varphi q - \frac{l+\lambda}{l'}F'p\}\frac{d\left(\frac{a+\alpha}{l+\lambda}\right)}{dp}dp \\
&+ \{Fp + \varphi q - \frac{l+\lambda}{\lambda_1}\varphi'q\}\frac{d\left(\frac{a+\alpha}{l+\lambda}\right)}{dq}dq \\
&= \{Fp + \varphi q - \frac{l+\lambda}{l'}F'p\}x'dp \\
&+ \{Fp + \varphi q - \frac{l+\lambda}{\lambda_1}\varphi'q\}x_1dq \\
dY = Y'dp + Y_1dq &= \{Fp + \varphi q - \frac{l+\lambda}{l'}F'p\}y'dp \\
&+ \{Fp + \varphi q - \frac{l+\lambda}{\lambda_1}\varphi'q\}y_1dq \\
dZ = Z'dp + Z_1dq &= \{Fp + \varphi q - \frac{l+\lambda}{l'}F'p\}z'dp \\
&+ \{Fp + \varphi q - \frac{l+\lambda}{\lambda_1}\varphi'q\}z_1dq
\end{aligned}\right\}..44.$$

Отсюда мы заключимъ, что

$$\frac{X'}{x'} = \frac{Y'}{y'} = \frac{Z'}{z'}$$

$$\frac{X_1}{x_1} = \frac{Y_1}{y_1} = \frac{Z_1}{z_1}$$

слѣдовательно поверхности X, Y, Z параллельны съ поверхностями x, y, z относительно кривыхъ $p = const.$ и $q = const.$ что и требовалось доказать.

Полагая по этому въ уравненіяхъ 43)

$$a = \mathfrak{Sin}cp,\ b = 0,\quad c = a\mathfrak{Cos}cp,\ l = \mathfrak{Cos}p$$
$$\alpha = 0,\quad \beta = sincq,\ \gamma = b.coscq,\ \lambda = cosq$$

мы получимъ классъ поверхностей X, Y, Z, параллельныхъ съ поверхностію x, y, z уравненія 40) и заключающихъ въ себѣ двѣ произвольныя функціи φq и Fp, функціи параллелизма.

Полагая

$$a = c\mathfrak{Sin}p,\ b = 0,\quad c = b\mathfrak{Cos}cp,\ l = \mathfrak{Cos}p$$
$$\alpha = 0,\quad \beta = c.sinq,\ \gamma = a.cosq,\ \lambda = cosq$$

мы получимъ классъ поверхностей X_1, Y_1, Z_1 параллельныхъ съ поверхностію x_1, y, z, уравненія 41).

Поверхности X, Y, Z будутъ изогнутыя формы поверхностей X_1, Y_1, Z_1 по линіямъ простаго изгибанія $p = const.$ $q = const.$