МАТЕМАТИКА

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

РЕДАКТОРЫ СЕРИИ: А.Н. КОЛМОГОРОВ, С.П. НОВИКОВ

19

ПРОБЛЕМЫ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА

ИЗДАТЕЛЬСТВО "МИР" МОСКВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

МАТЕМАТИКА

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

РЕДАКТОРЫ СЕРИИ: А.Н. КОЛМОГОРОВ, С.П. НОВИКОВ

19

ПРОБЛЕМЫ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА

Сборник статей

Перевод с английского и французского
А. М. РЕВЯКИНА и Б. С. СТЕЧКИНА

Под редакцией
К. А. РЫБНИКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1980

УДК 519.1

Сборник статей зарубежных ученых, посвященный основным направлениям современной общей комбинаторики. Среди авторов известные специалисты — Р. Радо (Англия), Р. Вилле (ФРГ), П. Камерон (США). В статьях содержатся постановки новых нерешенных задач, важные для приложений, приводятся новые результаты, полученные в последнее время. Большой интерес представляют обзорные статьи Н. Слоана (США) и Дж. Мейсона (Англия).

Рассчитан на научных работников, использующих в своей работе методы комбинаторного анализа, полезен аспирантам и студентам математических специальностей как учебное пособие.

Редакция литературы по математическим наукам

1702070000

П $\frac{20203\text{-}018}{041(01)\text{-}80}$ 18-80

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

За последние годы научная активность в области решения проблем комбинаторного анализа, как прикладных, так и теоретических, резко возросла, о чем свидетельствует возросшее число конференций, семинаров, симпозиумов. Объясняется это явление в первую очередь практическими успехами, достигнутыми с помощью комбинаторных методов математики, и важностью решаемых задач. Существенную роль играет и то обстоятельство, что дальнейшее расширение приложений невозможно без решения соответствующих теоретических проблем. Именно поэтому в литературе по комбинаторике содержится много обзоров современного состояния отдельных разделов общей комбинаторной теории и постановок новых проблем.

Научная ценность подобных материалов, разумеется, неоспорима. Они способствуют быстрейшему вовлечению математиков, в особенности научной молодежи, в решение трудных теоретических задач комбинаторного характера. В них вырабатывается общая теория и глубже вскрываются связи между отдельными ее частями.

В настоящий сборник отобраны статьи из Трудов 6-й Британской конференции по комбинаторике, Оксфорд, июль 1977 (Combinatorial Surveys. Proceedings of the 6-th British Combinatorial Conference. Ed. by Peter J. Cameron, — Academic Press, 1977) и Трудов симпозиума по высшей комбинаторике, Берлин, сентябрь 1976 (Higher Combinatorics. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute. Ed. by Martin Aigner, — Reidel Publishing Company, 1977). В этих статьях содержатся обзоры актуальных направлений развития современного комбинаторного анализа и ставятся нерешенные задачи.

Первый раздел вводит читателя в область матроидов, или комбинаторных геометрий, т. е. специальных классов комбинаторных конфигураций в их геометрических интерпретациях. В работе Мейсона в наглядной геометрической форме выражены основы теории матроидов и все основные матроидные конструкции. К ней примыкает статья Инглтона, дающая более подробный обзор теории трансверсальных матроидов и включающая вопросы их характеризации, представления, базисной упорядоченности и операций над ними. К теории матроидов относится также статья Даулинга и Денига, в которой устанавливается идентичность базисов комбинаторной геометрии $G_k(P)$ и подмножеств конечного частично упорядоченного множества P, содержащихся во множестве максимальных элементов цепей длины $\geqslant k$ в некотором k- и $(k-1)$-насыщенном цепном разбиении этого множества. Наконец, в работе Таса определены частичные геометрии как некоторые системы инцидентности. Для них дана классификация по значениям их параметров, выделен один из частных видов (обобщенные четырехугольники), обсуждены вопросы об их свойствах и о связях с блок-схемами и дугами в проективных плоскостях. Этот раздел сборника дает представление о современном состоянии исследования комбинаторных систем (конфигураций) в их геометрических аспектах.

В трех статьях, составляющих второй раздел сборника, показаны трудности решения задач комбинаторики перечислительного характера, существующие в наше время. Эти статьи до известной степени объединены общностью комбинаторных задач, но весьма выразительны по сложности, громоздкости и разнообразию перечислительной методики.

В третий раздел включена группа статей об алгебраическом аппарате, используемом при решении комбинаторных задач на множествах более общей природы, нежели множество натуральных чисел, на котором ставятся и решаются задачи классической комбинаторики. Теоретико-групповая тематика затронута в статье Камерона. Речь идет об анализе свойств группы подстановок G неупорядоченного множества X, действующей на множестве его t-подмножеств $X(t)$, для тех случаев, когда это действие транзитивно или примитивно. При этом рассмотрены комбинаторные методы и результаты, включая теорему Рамсея, задачи о раскрасках, отношение упорядоченности, совершенные коды, параллелизмы и системы Штейнера. Приведены доказательства, поставлены нерешенные задачи. Конечные структуры описаны в статье Вилле. Среди результатов, приведенных в этой статье, следует отметить обобщение на произвольные конечные структуры теоремы Биркгофа о единственности представления элемента конечной дистрибутивной структуры в виде несократимого объединения неразложимых в объединение элементов. Аппарат стандартных k-алгебр и симплициальных комплексов и его приложение к теории матроидов и частично упорядоченных множеств описаны в статье Стенли.

Раздел замыкает статья Слоана. Она особенно интересна тем, что в ней раскрываются связи между различными частями комбинаторного анализа. В ней показано, как коды, исправляющие ошибки, могут быть использованы для построения наилучших упаковок шаров в евклидовом пространстве и для теории решеток. Общая идея здесь состоит в отыскании способов расширения упаковок в единичном кубе на все пространство $\mathbf{R}^n$ и нахождения упаковок наивысшей плотности.

В целом настоящий сборник отражает современный уровень исследований по трем направлениям развития комбинаторного анализа: геометрическим системам комбинаторики, специальным разделам алгебры, перечислительным средствам. Он принесет несомненную пользу математикам различных специальностей, а также аспирантам и студентам.

К. А. Рыбников

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ В ОБЩЕЙ КОМБИНАТОРНОЙ ТЕОРИИ

ИЗУЧЕНИЕ МАТРОИДОВ КАК ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ КОНФИГУРАЦИЙ[1])

Дж. Х. Мейсон

Матроиды возникают в самых разнообразных комбинаторных и алгебраических контекстах. Такие понятия, как

независимость и базисы в векторных пространствах,
алгебраическая зависимость,
циклы в графах,
поверхности в проективных геометриях,
атомные полумодулярные (полудедекиндовы) решетки,

сводятся к одной и той же лежащей в основе (матроидной) структуре. Существенной особенностью матроидов является то, что они выделяют из рассматриваемой ситуации основные свойства инцидентности точек, прямых и плоскостей, которые мы связываем с геометрией.

То, что матроиды появляются в столь многих областях и разнообразных обличиях, дает основание считать их объектами, достойными изучения. А вот как это изучение проводится, зависит в большой степени от подхода. Теория графов предполагает обобщение одних понятий, теория решеток — других, а теория векторных пространств — совсем иных. Нередко геометрический аспект теряется в изобилии алгебраических символов.

Поэтому я намереваюсь дать обзор основных матроидных конструкций с геометрической точки зрения. Этот обзор будет служить введением для тех, кто еще не знаком с теорией матроидов, а также, надеюсь, даст возможность по-новому взглянуть на предмет специалистам, не использующим геометрические представления. Чтобы сохранить интуитивно-геометрический стиль изложения, в текст включено мало подробно изложенных теорем и еще меньше доказательств. Тем не менее, в большинстве случаев сказанного бывает достаточно для того, чтобы убедиться в правильности утверждений без обращения к другим источникам.

---

[1]) Mason J. H., Matroids as the study of geometrical configurations.

1. МАТРОИДЫ: КОНСТРУКЦИИ И ОТОБРАЖЕНИЯ

С точки зрения теории категорий теория матроидов несколько необычна, поскольку в ней изучаются два вида отображений (сильные и слабые). Но ни одна из возникающих категорий не дает достаточно полного описания матроидных конструкций.

1.1. Объекты — матроиды

Нас интересуют геометрические конфигурации, подобные изображенным на рис. 1.

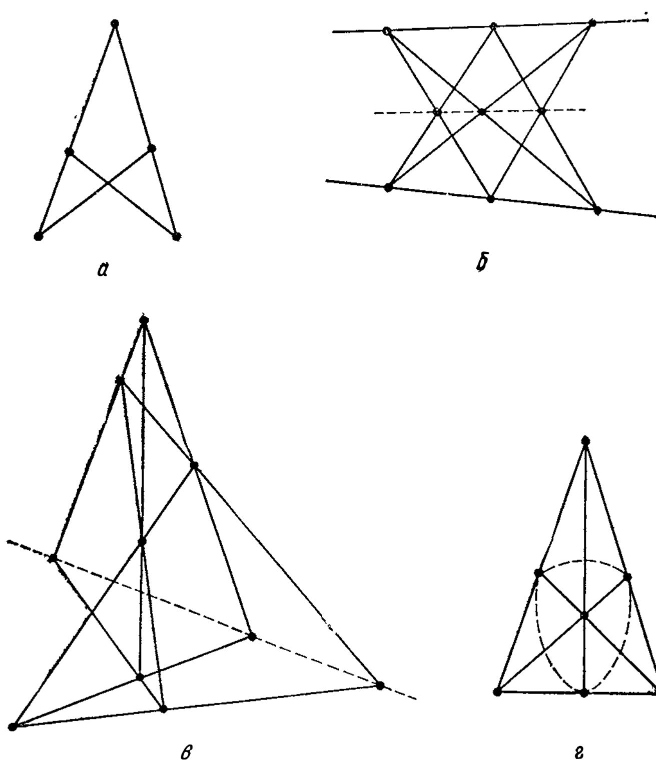


Рис. 1. Планарные конфигурации (явно показаны лишь прямые с более чем двумя точками):
а) конфигурация K_4; б) α-конфигурация Паппа (с пунктирной прямой) и β-конфигурация Паппа (без пунктирной прямой); в) α-конфигурация Дезарга (с пунктирной прямой) и β-конфигурация Дезарга (без пунктирной прямой); г) α-конфигурация Фано (с пунктирной прямой) и β-конфигурация Фано (без пунктирной прямой).

Они состоят из (конечного) множества P точек и некоторых подмножеств множества P, называемых прямыми, плоскостями и т. д., свойства инцидентности которых являются геометрическими. Под этим понимается, что всякие две различные точки лежат на единственной прямой; всякие три различные (не коллинеарные) точки лежат на единственной плоскости (или, иначе, всякая прямая и точка, не лежащая на ней, лежат на единственной плоскости) и т. д. Заметим, что не делается предположение об обязательном пересечении прямых на плоскости.

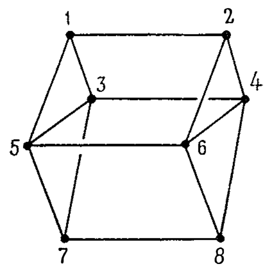


Рис. 2. Конфигурация Вамоса.

В традиционной геометрии точкам приписывается аффинная размерность 1. Мы хотим отразить как этот традиционный подход, так и подход со стороны теории векторных пространств, в котором одномерные подпространства состоят из многих точек (или векторов). Поэтому мы будем говорить о семействе *поверхностей* соответствующего ранга, каждая из которых состоит из множества точек. Определим *комбинаторную геометрию* как конечное множество поверхностей с соответствующим рангом k, $0 \leqslant k$, и таких, что:

всякая k-поверхность и 1-поверхность, не лежащая на ней, лежат на единственной $(k+1)$-поверхности.

Полезно познакомиться со следующими примерами, поскольку они иллюстрируют некоторые часто встречающиеся случаи, а также хорошо подходят для проверки теорий. Их построение базируется на матроиде V_4, называемом конфигурацией Вамоса, поскольку последний использовал ее при исследовании вопросов линейной представимости.

Вследствие ограниченных возможностей изображения фигур большой размерности на плоскости используем один и тот же чертеж (рис. 2) для представления каждого из этих трех матроидов.

Существует много разных способов описания инцидентности, зависящих от главного источника примеров (табл. 1). Основные из этих источников перечислены в табл. 2.

Всякий подход к инцидентности включает семейство аксиом о некоторых отвлеченных понятиях, таких, как базис, размерность, зависимость, независимость и т. д., причем для конечных множеств все они оказываются эквивалентными. Мы будем допускать использование различных понятий, наиболее удобных в конкретной ситуации, сбивая тем самым с толку непосвященного читателя и забавляя специалиста. Более детальное описание этих подходов можно найти в работах Крапо и Рота [3], Брилавского [1] и Уэлша [18].

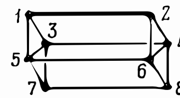
Таблица 1

	3-поверхности с более чем 3 точками	4-поверхности с более чем 4 точками	5-поверхности с более чем 5 точками
V_4 (конфигурация Вамоса ранга 4)	1234 1256 3456 5678 3478	12345678	
V_4^+ ранга 4	1234 1256 3456 5678 3478 1278	12345678	
V_5 ранга 5	1234 1256 3456 5678 3478 1278	123456 123478 125678 345678	12345678

Таблица 2

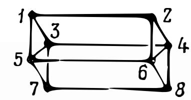
1935	Х. Уитни [19]	Матроид	Обобщенная линейная независимость. Ее введение особенно мотивировано лесами в графах, представимых в векторных пространствах над полем $GF(2)$
1936	С. Маклейн [10]	Геометрическая решетка	Решетка поверхностей проективных, аффинных и других геометрий
1937	Б. Л. ван дер Варден [17]	Зависимость	Линейная и алгебраическая зависимость

Таблица 3

Матроидные понятия	Линейные пространства	Графы	Обозначения	
Точки S	Векторы	Ребра	S, T, U, V	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
Независимые множества $\mathscr{I}$: $\emptyset \in \mathscr{I}$; $A \subseteq B$, $B \in \mathscr{I} \Longrightarrow$ $\Longrightarrow A \in \mathscr{I}$; $\|A\| < \|B\|$ и $A, B \in$ $\in \mathscr{I} \Longrightarrow \exists\ b \in$ $\in B \setminus A$: $A \cup \{b\} \in \mathscr{I}$ Зависимые множества $\equiv$ не независимые множества	Линейно независимые Замена Штейница	Лес	A, B независимы	Выборки $\{1\}$ $\{1, 2\}$ $\{1, 2, 3\}$ $\{1, 2, 3, 5\}$ $\{1, 2, 7, 8\}$
Базис $\equiv$ максимальное независимое множество	Базис	Остовный лес	B	$\{1, 2, 3, 5\}$ $\{1, 2, 7, 8\}$
Циклы $\equiv$ минимальные зависимые множества $e \in C_1 \cap C_2$, $C_1 \neq C_2 \Longrightarrow \exists C$: $C \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$	Минимальные зависимые	Цикл	C, D	$\{1, 2, 3, 4\}$ $\{5, 6, 7, 8\}$ $\{1, 2, 5, 6\}$
Ранг $\rho \equiv$ целочисленная функция: $\rho(\emptyset) = 0$, $\rho(\{x\}) \leqslant 1$, $A \subseteq B \Longrightarrow \rho(A) <$ $< \rho(B)$, $\rho(A \cup B) + \rho(A \cap$ $\cap B) \leqslant \rho(A) + \rho(B)$	Размерность	Размер остовного леса	ρ, rk	$\rho V_4 = 4$ $\rho(\{1, 2, 3, 4\}) = 3$ $\rho(\{1, 2\}) = 2$ $\rho(\{1\}) = 1$

Сводка основных понятий, которые нам потребуются для дальнейшего изложения, дана в табл. 3.

Продолжение табл. 3

Матроидные понятия	Линейные пространства	Графы	Обозначения	
Поверхности $\equiv$ максимальные множества данного ранга. Поверхности, упорядоченные по включению $\equiv$ геометрическая решетка: полная, атомная, полумодулярная (полудедекиндова)	Подпространства (аффинные подпространства)		F, G, H	$\{1, 2, 3, 4\}$ $\{3, 4, 5, 6\}$ $\{7, 8\}$
Гиперплоскости $\equiv$ поверхности, ранг которых равен $\rho(S)-1$	Гиперплоскости	Дополнения коциклов		$\{1, 2, 3, 4\}$
Замыкание множества $A \equiv$ наименьшая поверхность, содержащая в себе множество A	Линейная оболочка		$\langle A\rangle$	$\langle\{1, 2, 5\}\rangle=\{1, 2, 5, 6\}$

Маленькими буквами обозначены элементы множеств, а под $S \cup e$ понимаем $S \cup \{e\}$.

Термин *комбинаторная геометрия* применяется, когда имеют дело с геометрической решеткой поверхностей. Однако часто 1-поверхности сами оказываются *множествами*. В этом случае мы используем термин *предгеометрия* или *матроид*. Переход от матроида к решетке напоминает переход от векторного пространства к аффинной или проективной геометрии. Эта ситуация проявляется особенно наглядно в теории графов, где иногда полезно допустить существование в графах кратных ребер и петель. В соответствующем графу циклическом матроиде петли составляют 0-поверхности, а параллельные ребра между двумя фиксированными вершинами (вместе со всеми петлями) образуют 1-поверхность.

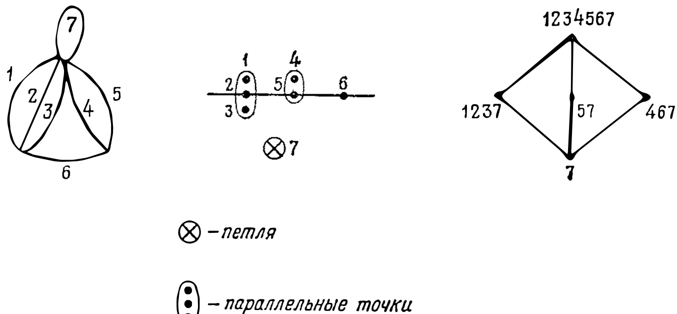


Рис. 3. Петли и параллельные ребра.

Поскольку многие матроидные конструкции содержат параллельные точки и петли, удобнее с самого начала допускать их существование.

Примеры

1. *Свободные матроиды.* Матроид без циклов на множестве S называется свободным (иногда — дискретным) и обозначается $F(S)$ или F_n (если важно знать только мощность множества, на котором определен матроид).

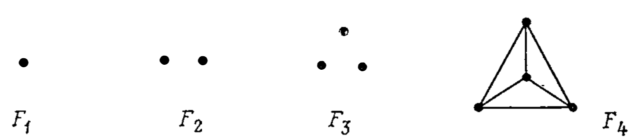


Рис. 4. Свободные матроиды.

В общем случае мы используем слово «свободный», вкладывая в него смысл «независимый, насколько возможно». В частности, можно говорить о точке e, лежащей свободно на поверхности F. Например, на рис. 5 точка 6 лежит свободно на поверхности $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6\rangle$. Точки 2 и 3 являются свободными на $\langle 1, 2, 3\rangle$, а точка 1 таковой не является.

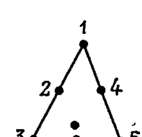


Рис 5

Будем говорить, что некий матроид $M(S)$ *свободнее*, чем матроид $N(S)$, подразумевая при этом, что каждое подмножество A из S, независимое в N, является независимым и в M.

2. *Однородные матроиды.* Матроид на n-множестве, базисами которого являются все k-подмножества, а циклами — все $(k+1)$-подмножества, называется однородным матроидом ранга k и обозначается $U_k(n)$.

Рис. 6. Однородные матроиды.

Линейная представимость

Поскольку основные примеры матроидов задавались подмножествами векторных пространств, естественно поставить вопрос: в каких случаях матроид возникает именно таким образом? Скажем, что матроид $M(S)$ без петель *представим* в V над полем K, если существует взаимно однозначная функция

$$f\colon S \to V,$$

такая, что

множество A независимо в M тогда и только тогда, когда $f(A)$ линейно независимо в V.

Ясно, что β-конфигурация Дезарга ранга 3 не представима, в силу известных теорем проективной геометрии. Конфигурация Дезарга в пространстве ранга 4 не может иметь «разомк-

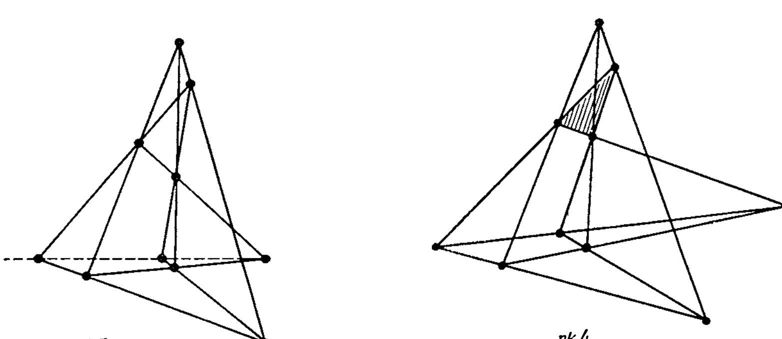


Рис. 7. Конфигурации Дезарга ранга 3 и 4 соответственно.

нутой прямой» по той же причине, по какой в векторном пространстве две различные плоскости пересекаются в лучшем случае по прямой.

Однако легко можно разместить в пространстве ранга 4 непредставимый матроид (а именно, конфигурацию Вамоса V_4) на восьми точках (это наименьшее возможное число точек). Поскольку во всяком векторном пространстве найдется точка, лежащая на всех четырех прямых $\langle 1, 2\rangle$, $\langle 3, 4\rangle$, $\langle 5, 6\rangle$, $\langle 7, 8\rangle$, то прямые $\langle 1, 2\rangle$ и $\langle 7, 8\rangle$ компланарны. Действительно, как мы вскоре увидим, конфигурации V_4 и Дезарга тесно связаны.

Прежде чем переходить к дальнейшему изложению, полезно набросать общую картину основных направлений развития теории матроидов, разработанных к настоящему времени.

1. Различение и характеризация классов примеров матроидов (графические, бинарные, трансверсальные, регулярные, ориентированные и т. д.).
2. Построение новых матроидов из старых.
3. Перечисления (полиномы Татта, Уитни и хроматический).
4. Применения (теория согласования и анализ сетей).

В дальнейшем остановимся на направлении, сформулированном в списке под номером 2.

1.2. Основные конструкции

Сужение. Если рассматривать подконфигурацию матроида M, то получим подматроид. Это оправдывает себя, поскольку мы не потребовали, чтобы поверхности пересекались модулярно, как в проективной геометрии. Кроме того, это оправдывает определение теории матроидов как исследования геометрических конфигураций.

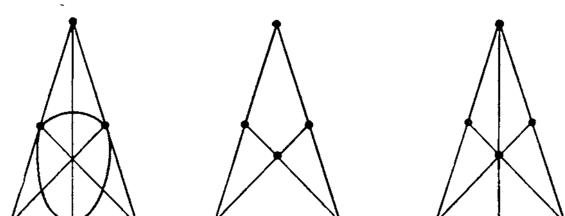


Рис. 8 α- и β-конфигурации Фано и их сужение.

Пусть M — матроид на множестве S и $V \subseteq S$. Тогда *сужение* матроида M на подмножество V (обозначение: $M \mid V$) определяется следующим образом:

$$A \subseteq V \text{ независимо в } M \mid V \Longleftrightarrow A \text{ независимо в } M\ ^{1)}.$$

При этом $\operatorname{rk} A$ не изменяется.

[1]) Мы сохранили в переводе символы $\Longleftrightarrow$ и $\Longrightarrow$, применяемые автором для замены выражений «тогда и только тогда, когда» и «из ... следует, что» соответственно. — *Прим. перев.*

Сужение матроида M на дополнение к множеству V удобно обозначать $M\backslash V$ (другими словами, V вычеркивается из M).

Сжатие. Название заимствовано из теории графов, где аналогичным понятием обозначается стягивание ребер графа. В векторных пространствах сжатие соответствует переходу к фактор-пространствам, а его геометрическим эквивалентом является проектирование.

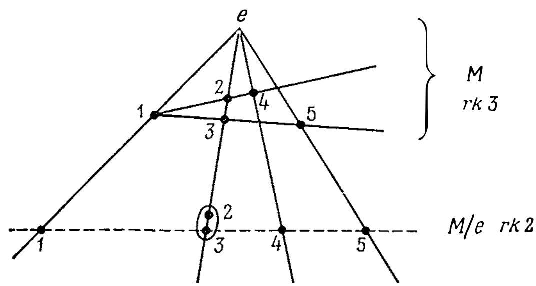


Рис. 9. Сжатие матроида M посредством e представлено как проекция.

Пусть M — матроид на множестве S, $V \subseteq S$ и $U = S\backslash V$. Тогда *сжатием* матроида M посредством V (обозначение: $M\backslash V$) называется матроид на множестве U, такой, что

A независимо в $M/V \Leftrightarrow A \cup B$ независимо в M для некоторого (любого) базиса B из $M \mid V$.
При этом $\operatorname{rk} A = \rho(A \cup V) - \rho(V)$.

Сжатие матроида посредством множества V геометрически интерпретируется как последовательность проекций точек в некоторый базис из V.

Теорема. *Операции сужения и сжатия коммутируют, т. е.*

$$(M/A) \mid (B\backslash A) = (M \mid (B \cup A))/A$$

(*матроид M, сжатый посредством A, а затем суженный на $B\backslash A$, равен сужению матроида M на множество $B \cup A$, сжатому посредством A*).

Доказательство этой теоремы является легким упражнением в терминах функций ранга и более трудным, когда используются понятия базисов или циклов; и еще оно становится совсем трудным в терминах теории решеток, фактически принимая вид теоремы о «накипи» (Крапо — Рота [3]).

Упражнение. $(M \mid (B \cup A))/A \neq (M \mid B)/(A \cap B)$.

Замечание: Когда заданы матроид $M(S)$ и точка e в S, то принято считать M и M/e совершенно различными матроидами. Однако геометрическая идея проекции наводит нас на мысль, что матроиды M и M/e являются частями одного «большого» матроида. Формальная конструкция этого «большого» матроида есть частный случай усечения Дилуорса, которое мы рассмотрим во второй главе работы.

Двойственность. Этот термин происходит из теории графов. Уитни [19] показал, что идея двойственности для планарных графов может быть распространена на матроиды (и следовательно, на произвольные графы), и привел геометрическую интерпретацию двойственности для матроидов, возникающих из векторного пространства. К концу этой главы мы будем в состоянии обобщить ее на произвольные матроиды.

Пусть M — матроид на множестве S. Тогда двойственный к M матроид (обозначение: $M^*(S)$) определяется следующим образом:

> $A \subseteq S$ независимо в $M^* \Leftrightarrow S \setminus A$ содержит базис матроида M (таким образом, базисы матроидов M и M^* взаимно дополняют друг друга).

Для функции ранга ρ^* двойственного матроида M^* имеет место следующее равенство:

$$\rho^*(A) = |A| - [\rho(S) - \rho(S \setminus A)],$$

где $\rho(S)$ — мощность базиса матроида M, $\rho(S) - \rho(S \setminus A)$ — мощность наименьшего из пересечений множества A с базисами матроида M, $|A| - [\rho(S) - \rho(S \setminus A)]$ — мощность наибольшего из пересечений множества A с дополнениями к базисам матроида M. Гиперплоскости матроида M^* являются дополнениями циклов матроида M.

Примеры. $U_k^*(n) = U_{n-k}(n)$.

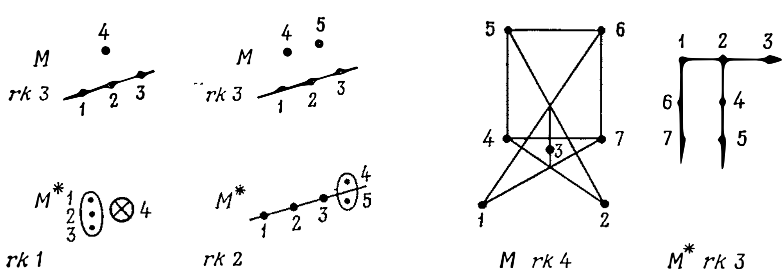


Рис. 10. Три матроида и двойственные им.

Равенство $M^{**} = M$ проверяется весьма просто, хотя, если рассматривать исключительно решетки поверхностей матроидов, это соотношение несправедливо, поскольку матроид M^* часто обладает параллельными элементами, так что решетка частично утрачивает информацию.

Теорема (Татт [16]). *Матроид, двойственный к сжатию, является сужением двойственного матроида, а именно*:

$$(M/V)^* = M^* \backslash V.$$

Доказательство теоремы является простым упражнением в манипулировании либо функциями ранга, либо циклами или базисами (в зависимости от того, чему читатель отдает предпочтение).

Операции сжатия и сужения могут быть обращены. Описание того, как это делается, изложено соответственно в основных работах Крапо и Хиггса.

Сужение — расширение. Если вместо вычеркивания точек матроида мы хотим определить операцию их присоединения, то мы должны учитывать, какая информация для этого необходима. С геометрической точки зрения это означает, что нам желательно знать, какие «старые» прямые, плоскости и поверхности содержат новую (присоединенную) точку.

На рис. 11 и 12 приведены примеры расширений.

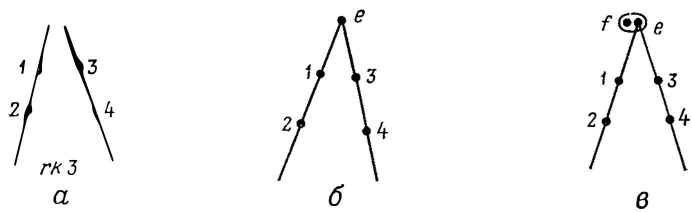


Рис. 11. В конфигурации а). (соответственно б).) помещаем точку e (соответственно точку f) на прямые $\langle 1, 2\rangle$ и $\langle 3, 4\rangle$, получаем конфигурацию б). (соответственно в).)

Модулярным сечением $\mathcal{M}$ матроида $M(S)$ называется такое множество поверхностей, что

(1) $F \subseteq G$ и $F \in \mathcal{M} \Rightarrow G \in \mathcal{M}$ (фильтр),

(2) $F, G \in \mathcal{M}$ и $\rho(F) + \rho(G) = \rho(F \cup G) + \rho(F \cap G) \Rightarrow F \cap G \in \mathcal{M}$ (свойство модулярных пар).

Необходимость условия (2) проиллюстрирована на рис. 11.

Пусть задано модулярное сечение $\mathcal{M}$. Тогда можно определить расширение матроида M (обозначение: $M(S \cup e; \mathcal{M})$ или, для краткости, M^e) с функцией ранга ρ^e следующим образом:

(1) $A \cup e$ независимо в $M^e \Leftrightarrow A$ независимо в M и $\langle A\rangle \notin \mathcal{M}$;
(2) $A \subseteq S$ независимо в $M^e \Leftrightarrow A$ независимо в M.

При этом $\rho^e(A) = \rho(A)$ для $A \subseteq S$ и

$$\rho^e(A \cup e) = \begin{cases} \rho(A), & \text{если } \langle A \rangle \in \mathcal{M}, \\ \rho(A)+1, & \text{если } \langle A \rangle \notin \mathcal{M}. \end{cases}$$

Примеры. На рис. 15 показано, как одноточечным расширением конфигурации K_4 с помощью модулярного сечения

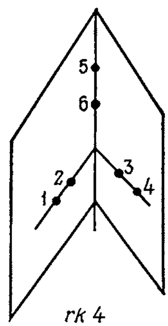


Рис. 12. $\rho(\{1, 2, 3, 4\}) = 3$.
Помещаем точку e на прямые $\langle 1, 2\rangle$ и $\langle 3, 4\rangle$. Тогда точка e лежит на плоскостях $\langle 1, 2, 5, 6\rangle$ и $\langle 3, 4, 5, 6\rangle$ и, следовательно, на прямой $\langle 5, 6\rangle$.

$\mathcal{M}_1 = \{\langle 3, 4\rangle, \langle 1, 6\rangle, S\}$ (соответственно $\mathcal{M}_2 = \{\langle 3, 4\rangle, \langle 1, 6\rangle, \langle 2, 5\rangle, S\}$) получается α-конфигурация Фано (соответственно β-конфигурация Фано).

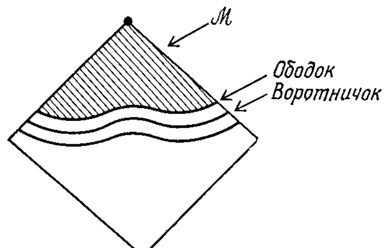


Рис. 13. Типичное модулярное сечение.
Каждая поверхность из воротничка покрывается единственным элементом модулярного сечения $\mathcal{M}$

Частные случаи.

(1) Если модулярное сечение пусто, мы получаем *свободное расширение* $M+e$. В этом случае точка e принадлежит каждому базису $M+e$. Полный ранг расширения $M+e$ на единицу больше ранга матроида M.

(2) Взяв главный фильтр (все поверхности, содержащие в себе данную поверхность F), мы получаем модулярное сечение, которое геометрически соответствует размещению точки e на старой поверхности F настолько свободно, насколько это возможно.

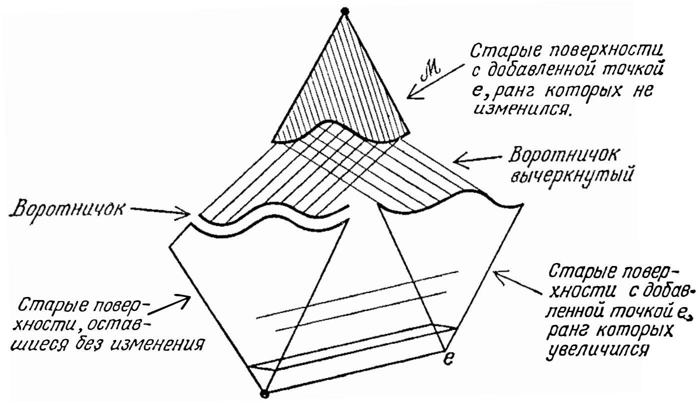


Рис. 14. Одноточечное расширение.

Одноточечные расширения матроида $M(S)$ (обычно мы исключаем из их числа $M+e$ и рассматриваем только расширения, не изменяющие полный ранг) образуют решетку, так как множество модулярных сечений матроида M замкнуто относительно

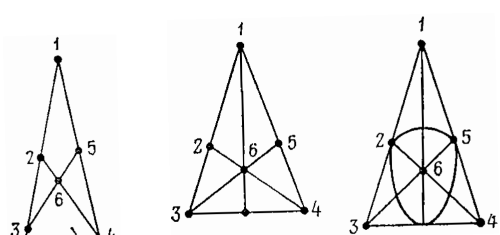


Рис. 15. α- и β-конфигурации Фано как расширения K_4. ($M(S \cup e, \mathscr{M}_1)$-$\beta$-конфигурации Фано, $M(S \cup e, \mathscr{M}_2)$-$\alpha$-конфигурации Фано.)

их пересечений. Нулевой элемент этой решетки образуется добавлением петли посредством главного модулярного фильтра, порожденного $\langle \emptyset \rangle$. Единичным элементом решетки будет одноточечное расширение, получаемое свободным добавлением точки в $M(S)$ (без увеличения ранга) с помощью главного модулярного сечения с единственным элементом S.

Теорема. *Сжатия и расширения коммутируют.*

Пусть даны два модулярных сечения $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ матроида $M(S)$. Образуем модулярное сечение $\mathscr{M}_2^+$, порожденное $\mathscr{M}_2$ в расширении $M(S \cup e_1;\ \mathscr{M}_1)$ (возьмем пересечение всех модулярных сечений матроида M^{e_1}, содержащих в себе поверхности $\mathscr{M}_2$). Как мы вскоре увидим, результат расширений обычно зависит от порядка, в котором они проделаны.

Сжатие — лифт. Для обращения операции сжатия матроида $M(S)$ нам необходимо построить такой матроид $N(S \cup e)$, что $N/e = M$. Ответ получаем из двойственности:

$N/e = M \Longleftrightarrow (N/e)^* = M^* \Longleftrightarrow (N^* \setminus e) = M^* \Longleftrightarrow N^*$ есть одноточечное расширение матроида M^*.

Это в принципе решает проблему, но можно добиться гораздо большего, если определить понятие матроида соединения. Поэтому мы временно отложим геометрическое рассмотрение.

1.3. Матроиды, индуцированные путями в графах

Этот метод построения матроидов является центральным для проблем согласования и теории трансверсалей. Обычно он излагается совершенно независимо от конструкций сужение — расширение и сжатие — лифт, хотя он является лишь иным способом рассмотрения некоторых частных случаев. Тем не менее находим, что индуцирование из графа, в частности из двудольного графа, дает некоторое полезное наглядное представление стандартных конструкций, главным образом для геометрий большого ранга. Поэтому имеет смысл специально остановиться на этих представлениях.

Начальная идея была такой: пусть даны двудольный граф Γ на $V \times S$ и матроид $M(S)$. Тогда новый матроид $M^\Gamma(V)$ индуцирован на V отображением

множество A независимо в $M^\Gamma(V) \Longleftrightarrow$ множество A связано в Γ (посредством попарно непересекающихся по вершинам путей) с некоторым независимым множеством в M.

При ранних исследованиях в качестве $M(S)$ брали свободный матроид на множестве S. В этом случае независимые множества в M^Γ являются частными трансверсалями семейства подмножеств $(\{v : (v,\ s) \in \Gamma\};\ s \in S)$ множества S (этот факт установили Эдмондс и Мирский). Затем Радо заметил, что всякий матроид может быть размещен на множестве S. Несколько исследователей (Перфект, Пим, Бруальди) показали, что двудольный граф Γ может быть заменен на произвольный ориентированный граф.

Важным замечанием, которое содействует как анализу, так и геометрическому изображению, является то, что мы не только получаем M^{Γ}, индуцированный на V, а фактически имеем

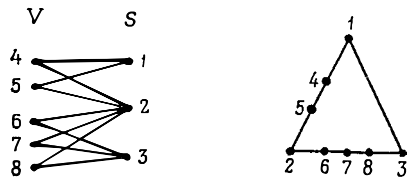


Рис. 16. Матроид, индуцированный из двудольного графа.

матроид на множестве $V \cup S$, сужение которого на S (соответственно на V (есть матроид $M(S)$ (соответственно $M^{\Gamma}(V)$). Этот объемлющий матроид определяется следующим образом:

подмножество $A \subseteq V \cup S$ независимо $\Longleftrightarrow$ A связано в Γ с некоторым независимым множеством в $M(S)$.

Инглтон [8] использовал эту идею для того, чтобы геометрически описать трансверсальные матроиды. Мы начнем с изображения S как некоторого симплекса в $(|S|-1)$-мерном евклидовом пространстве, т. е. с представления свободного матроида на S. Теперь поместим элементы множества V как точки на гранях симплекса, размещая каждую точку v свободно на грани

$$\Gamma(V)=\{s:(v,\ s)\in\Gamma\}$$

симплекса. В результате получаем матроид на множестве $V \cup S$, сужение которого на V является индуцированным матроидом M^{Γ} (см. рис. 16).

Эта же идея имеет более общий характер, поскольку матроид, индуцированный на $S \cup e$ графом Γ, является главным расширением матроида $M(S)$ с помощью модулярного сечения, порожденного поверхностью $\Gamma(e)$.

Таким образом, матроид, индуцированный на $V \cup S$, является результатом ряда главных расширений, выполненных одновременно. Мы можем доказать, что одновременно можно осуществить любое число главных расширений и результат при этом не зависит от порядка, в котором эти расширения выполнены.

Отсюда возникает интересный вопрос: имеется ли аналог в соединении двудольных графов для неглавных расширений? Конечно, имеется (он относится к использованию нескольких графов Γ_i на $V \times S$ и является беспорядочной переформулировкой модулярных сечений), но существует ли для него четкая графическая формулировка? А этот вопрос тесно связан со следующим техническим, но важным вопросом.

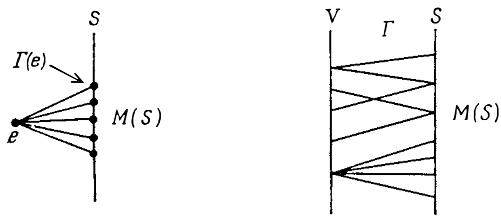


Рис. 17. Главные расширения.

При каких условиях заданные модулярные сечения $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$, ..., $\mathscr{M}_t$ матроида $M(S)$ совместны в том смысле, что существует $N(S \cup E)$, такой, что для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant t$,

$$N \mid (S \cup e_i) \text{ есть расширение } M(S) \text{ с помощью } M_i?$$

Четко сформулированный ответ на этот вопрос мог бы найти применение в ряде аспектов теории матроидов. Пока же мы имеем только частные результаты, полученные в 1975 году Нгуен Хиеном. Чтобы проиллюстрировать возникающие затруднения, рассмотрим несовместимые модулярные сечения $\mathscr{M}_1 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle\ S\}$ и $\mathscr{M}_2 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 5, 6\rangle, S\}$ (рис. 18).

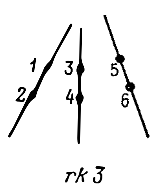


Рис. 18. Несовместимые модулярные сечения.

Модулярные сечения $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ несовместимы, потому что расширение матроида с помощью $\mathscr{M}_1$ с последующим за ним расширением с помощью $\mathscr{M}_2$ делает e_2 петлей. А в расширении матроида с помощью $\mathscr{M}_2$ с последующим за ним расширением с помощью $\mathscr{M}_1$ точка e_1 лежит также на прямой $\langle 5, 6\rangle$.

Приложения индуцирования

1. Теперь мы можем изучать лифт-конструкцию с геометрической точки зрения. Напомним, что $N(S \cup e)$ является лифтом матроида M, если $N/e = M$. Наиболее свободный лифт матроида M

получается присоединением новой точки e в виде $M+e$, а затем подъемом каждой точки s по прямой $\langle s, e\rangle$ (см. ниже). Это именно тот матроид, который получается индуцированием. Сперва возьмем некоторый экземпляр S_1 множества S, а затем индуцируем, как показано на рис. 19.

Матроид N на множестве $S \cup e$ является искомым.

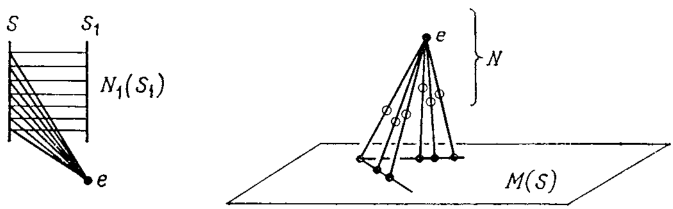


Рис. 19. Лифт.

Теорема. *Матроид $N(S \cup e)$ является наиболее свободным матроидом на множестве $S \cup e$, сжатие которого посредством e равно M.*

Доказательство. Предположим, что $Q(S \cup e)/e = M$. Пусть $A \subseteq S$ является независимым в $Q(S \cup e)$ Тогда:

(i) Если множество A независимо в M, то по построению A является независимым в N.

(ii) Если же A зависимо в M, тогда в Q существует цикл $C \subseteq A \cup e$. По свойству циклической замены C является единственным таким циклом. Таким образом, $C \setminus e$ — единственный цикл в M, содержащийся в A. Но тогда A является по построению независимым в N.

Этот результат иллюстрирует тот факт, что если $M^{\Gamma}(V \cup S)$ индуцируется графом Γ и матроидом $M(S)$, а $A \subseteq S$, то индуцированный матроид, сжатый посредством A (т. е. матроид $M^{\Gamma}(V \cup S)/A$) совпадает с матроидом, индуцированным графом Γ и $M(S)/A$. (Для того чтобы множество было независимым в сжатии посредством A, оно должно быть расширяемо посредством некоторого базиса множества A до независимого множества.)

2. Следующее крайне важное приложение получено независимо Нэш-Вильямсом [13] и Эдмондсом [6]. Несмотря на его частное применение, оно недостаточно хорошо изучено. Это приводит на практике к большому количеству нерешенных проблем. Для простоты начнем изложение с хорошо известного частного случая.

Сумма матроидов. Пусть даны два матроида $M(S)$ и $N(T)$, такие, что $S \cap T = \emptyset$. Тогда можно определить новый матроид $M+N$ на множестве $S \cup T$, такой, что

множество A независимо в $M+N \Longleftrightarrow A \cap S$ независимо в M, а $A \cap T$ независимо в N.

$$\rho(A) = \rho_M(A \cap S) + \rho_N(A \cap T).$$

Геометрически M и N являются вполне свободными относительно друг друга, что напоминает прямое произведение векторных пространств. Однако $M+N$ на языке теории категорий является копроизведением, а не произведением. Свободный матроид $F(S)$ есть сумма свободных матроидов, определенных на каждом одноэлементном подмножестве множества S.

Соединение матроидов. Теперь обратимся к двудольным графам. Пусть даны матроиды $M_1(S)$ и $M_2(S)$ на множестве S. Заменим S двумя различными экземплярами S_1 и S_2 в соответствующих матроидах и получим $M_1(S_1)$ и $M_2(S_2)$. Теперь индуцируем соединение матроидов $M_1 \vee M_2(S)$ из графа Г, как показано на рис. 20.

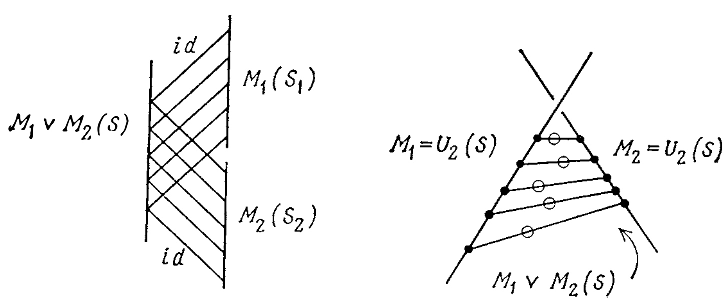


Рис. 20. Соединение матроидов.

Здесь Г, суженный на $S \times S_i$, индуцирует тождественное отображение $S \to S_i$. Новый матроид $M_1 \vee M_2$ обладает следующим свойством:

множество A независимо в $M_1 \vee M_2 \Longleftrightarrow A = A_1 \cup A_2$, где A_i независимо в $M_i(S)$, $i = 1, 2$. При этом $\rho(A) = \max\limits_{B \subseteq A} [\rho_1(B) + \rho_2(A \setminus B)]$.

Геометрическая интерпретация такова, что мы образуем $M_1 + M_2$, затем для каждого $s \in S$ помещаем новую точку свободно на прямую $\langle s_1, s_2 \rangle$. Для этого часто полезно представлять себе соединение $M_1 \vee M_2$ как матроид, определенный на множестве $S \cup S_1 \cup S_2$, поскольку тогда легко заметить, что этот больший матроид обладает следующими свойствами:

$$((M_1 \vee M_2)/S_1) \mid S = M_2(S),$$
$$((M_1 \vee M_2)/S_2) \mid S = M_1(S).$$

Например, лифт-конструкция, которую мы ранее рассматривали, используя двудольные графы, может быть представлена как соединение матроидов. Заметив, что $U_1(S)$ является фактически таким же матроидом (такой же решеткой поверхностей), как $F(e)$, получаем $M \vee U_1 = N$.

Следующая матроидная конструкция, которая включает соединение матроидов, является, видимо, более симметрической и весьма естественной. Пусть даны матроиды $M_1(S)$ и $M_2(T)$. Определим новый матроид $M_1 \bigtriangledown M_2$ на $S \times T$ индуцированием его из $M_1(S) + M_2(T)$, используя граф Г, вершинами которого являются элементы $(S \times T) \cup S \cup T$. Вершина (s, t) соединяется в Г с s из множества S и t из множества T. Тогда

> множество A является независимым в $M_1 \nabla M_2$ в том и только том случае, когда A соединено в Г с некоторым независимым множеством в $M_1 + M_2$.

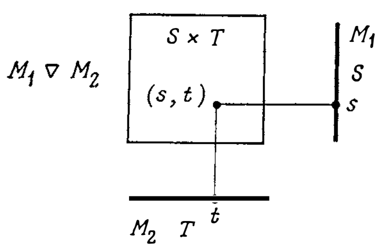


Рис. 21. Матроид $M_1 \nabla M_2$ на множестве $S \times T$.

Нам кажется, что конструкция $M_1 \nabla M_2$ может иметь вполне интересные свойства.

1.4. Отображения

Возникает вопрос, как должны выглядеть отображения в категории геометрических конфигураций. Для ответа на этот вопрос обратимся к

(I) ранее рассмотренным конструкциям, где

расширения = вложения;
сжатия = факторы;

(II) аналогиям из векторных пространств, теории графов, теории решеток и т. д.;

(III) некоторым другим объектам, которые станут источником богатой структуры.

В настоящее время существуют две признанные категории матроидов со свойствами, невыразимыми в терминах теории категорий. Здесь мы в общих чертах обрисуем ситуацию, а во второй части работы попытаемся сделать шаги в направлении других методов.

Сильные отображения

Исходя из (II) в контексте теории решеток, Хиггс и Крапо получили следующее определение сильного отображения:

$\sigma : S \to U$ индуцирует *сильное отображение* матроидов $M(S) \to N(U) \Leftrightarrow \sigma^{-1}(F)$ есть некоторая поверхность матроида M для всех поверхностей F матроида N.

Примеры.

1.

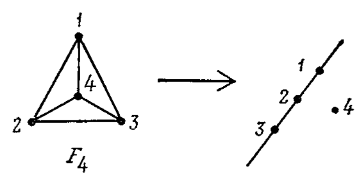


Рис. 22. Тождественное отображение $S \to S$ индуцирует сильное отображение $F(S) \to M(S)$.

2.

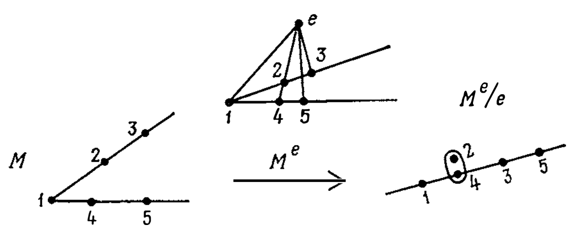


Рис. 23. Тождественное отображение $S \to S$ индуцирует сильное отображение $M(S) \to M(S \cup e, \mathscr{M})/e$.

Если $\mathscr{M} = \{S\}$, то имеем частный случай отображения, называемого *усечением*. Здесь некоторая точка e присоединяется свободно к поверхности S в M, а затем из e производим проектирование. Это усечение матроида M обозначается через M^T.

3. Тождественное отображение $S \to S$ индуцирует сильное отображение $M(S) \to M/V + U_0(V)$.

Нам необходимо куда-нибудь отобразить элементы множества $V \subseteq S$, поэтому присоединяем их обратно к M/V как петли, описываемые однородным матроидом ранга 0 на множестве V. Существует некоторый сильный случай для определения M/V как матроида на множестве S, а не только на $S \setminus V$, поскольку это определение более точно соответствует факторам векторного пространства. Здесь ядро становится 0-мерным пространством. Факторпространство фактически определяется на том же множестве, что и область определения отображения, но подпространства являются теперь смежными классами.

Хотя эти примеры кажутся частными в силу того, что и область, и кообласть определения отображений являются матроидами на одном и том же множестве S, мы всегда можем устроить так, что это случится, и индуцирующим будет тождественное отображение. Делается это с помощью следующих приемов: если $f: S \to T$, то заменим S и T на множество $S \cup (T \setminus f(S))$. Тогда матроид $M(S)$ заменяется матроидом $M(S) + F(T \setminus f(S))$, а $N(T)$ — матроидом с такой же решеткой поверхностей, как и N, но с заменой точки t на параллельные точки $f^{-1}(t)$,

Слабые отображения

Хиггс ввел понятие «свободнее, чем» в виде отображения (названного слабым для того, чтобы отличить его от сильного). Тождественное отображение $S \to S$ индуцирует *слабое* отображение $M(S) \to N(S)$, если из условия, что множество A независимо в N, следует, что A независимо в M. При этом $\rho_M(A) \geqslant \rho_N(A)$.

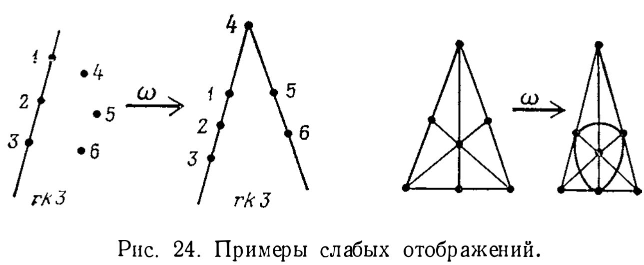


Рис. 24. Примеры слабых отображений.

Отметим, что каждое сильное отображение является слабым. Это наиболее легко установить, заметив, что

σ индуцирует сильное отображение $\Longleftrightarrow$ для любых множеств X, Y, таких, что $Y \subseteq X$,

$$\rho_M(X) - \rho_M(Y) \geqslant \rho_N(X) - \rho_N(Y),$$

тогда как

σ индуцирует слабое отображение $\Longleftrightarrow$ для любого множества X,

$\rho_M(X) - \rho_M(\phi) \geqslant \rho_N(X) - \rho_N(\phi)$.

Впредь через σ и τ будем обозначать сильные отображения, а через ω — слабое (не обязательно сильное) отображение.

Упражнение. Каждое слабое отображение представимо как усечение с последующим за ним слабым отображением, сохраняющим ранг.

По-видимому, очень трудно описать структуру слабых отображений. Несмотря на неоднократные попытки, не достигнуто никакого реального прогресса в том, чтобы сделать точнее геометрическую интуицию о том, что слабые отображения могут быть похожи локально (на подмножествах) на сильные отображения. И в этом случае свободный матроид и суммы матроидов являются единственными конструкциями теории категорий, которые здесь работают.

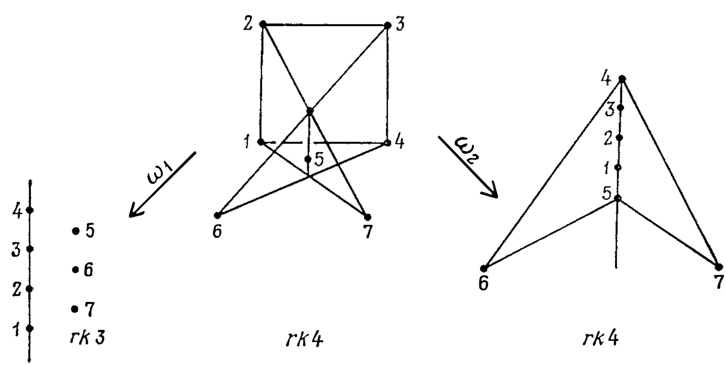


Рис. 25

На рис. 25 показано, что не обязательно должен существовать наиболее свободный слабый образ, который понижает ранг множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$ на единицу.

1.5. Сильные и слабые отображения

Ни сильные, ни слабые отображения в отдельности не образуют достаточно богатых категорий для того, чтобы в полной мере использовать идеи теории категорий. Однако при их совместном рассмотрении получаются некоторые результаты канонического вида. Нередки случаи, когда диаграмма сильных отображений описывает некоторую матроидную конструкцию, которая является либо самым свободным, либо наименее свободным таким объектом. Другими словами, объекты в категории сильных отображений имеют тенденцию быть каноническими по отношению к объектам категории слабых отображений. Одной из причин этого является то, что сохраняющие ранг сильные отображения являются изоморфизмами, однако часто существует несколько матроидов одного и того же ранга, которые удовлетворяют некоторой заданной диаграмме сильных отображений и связаны между собой слабыми отображениями. Проиллюстрируем это положение на некоторых примерах.

Факторизация Хиггса (*см.* [7])

Теорема. *Пусть дано сильное отображение* $\sigma\colon M \to N$. *Тогда* σ *может быть разложено в последовательность сильных отображений, степень каждого из которых равна* 1. *Кроме того, факторы этого разложения являются более свободными, чем факторы любого другого разложения.*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rrrr, "\sigma"] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & & & N \quad \mathrm{rk}M-\mathrm{rk}N=d \\
& M_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\omega_1"] & \cdots \arrow[r] & M_{d-1} \arrow[ur] \arrow[d, dashed, "\omega_{d-1}"] & \\
& P_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{d-1} \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

Рис. 26. Факторизация Хиггса.

Схема доказательства. Самый прямой подход состоит в установлении того, что

$$\mathscr{M} = \{F\colon\ \rho_M(F) - \rho_N(F) = \mathrm{rk}\, M - \mathrm{rk}\, N\}$$

образует модулярное сечение для матроида M. Искомое M_1 теоремы получаем как результат расширения матроида M точкой e с помощью модулярного сечения $\mathscr{M}$ с последующим за ним сжатием посредством e. Таким же способом на каждом шаге из матроида M_i строится M_{i+1}. То, что сжатие и расширение коммутируют, следует из треугольной диаграммы (рис. 27).

Каноническая часть выводится из следующей леммы.

Если $\mathrm{rk}\, P = \mathrm{rk}\, Q$ *и* $\begin{tikzcd} P(S) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\omega"'] & N(S) \\ Q(S) \arrow[ur, "\tau"'] & \end{tikzcd}$, *то* $\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, "\omega"', "\omega_1"] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & N \\ Q \arrow[r] & Q_1 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$

где P_1 *и* Q_1 — *первые члены в факторизации Хиггса сильных отображений* σ *и* τ.

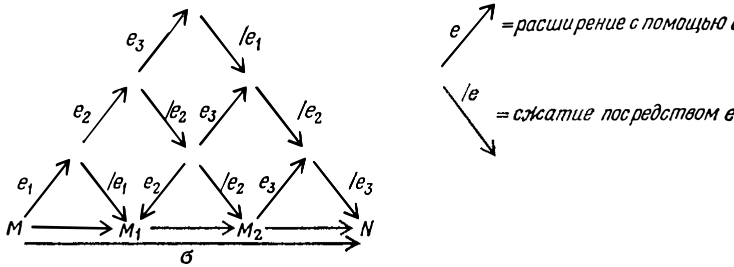


Рис. 27. Треугольник отображений.

Соединение матроидов описывает факторизацию Хиггса сильного отображения $F(S) \to M(S)$. Как мы уже убедились, $N \vee U_1(S)$ является наиболее свободным матроидом на множестве S, ранг которого равен $\operatorname{rk} N + 1$, а N — образ некоторого сильного отображения. Таким образом, $N \vee U_1(S)$ является предпоследним членом в этой последовательности. Другие члены задаются соотношением $N \vee U_k(S)$ для $0 \leqslant k \leqslant |S| - \operatorname{rk} N$. Рассматривая теперь конструкцию соединения матроидов с точки зрения отображений, мы видим, что существуют сильные отображения

$$M_1 \vee M_2 \to M_1,$$
$$M_1 \vee M_2 \to M_2,$$

образованные соответственно сжатиями посредством S_2 и S_1 полного матроида на множестве $S \cup S_1 \cup S_2$. Однако разумеется, что $M_1 \vee M_2$ не является наименее свободным таким матроидом, как это легко заметить, положив $M_1 = M_2$. Матроид $M_1 \vee M_2$ не является также и наиболее свободным (рис. 28).

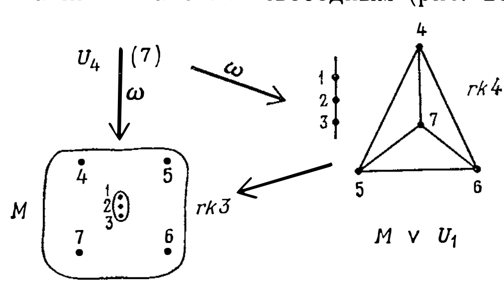


Рис. 28. Матроид $M_1 \vee V_1$ не является наиболее свободным

Это подсказывает следующие две проблемы для дальнейшего исследования.

1. Найти необходимые и достаточные условия того, чтобы $N(S) = M_1 \vee M_2(S)$ (для нетривиального соединения).

2. Охарактеризовать $M_1 \vee M_2$ в терминах сильных и слабых отображений.

Усечение и наращение

Еще один пример сильных и слабых отображений, действующих вместе, может быть найден в работе Крапо [2d] о геометриях наращения. Напомним, что M^{τ} получается путем превращения всех базисов в циклы, или, более геометрически, свободным присоединением точки e к поверхности S матроида M с последующим за ним сжатием посредством e. Крапо показал, что для каждого $N(S)$ семейство всех матроидов M на множестве S, таких, что $M^{\tau} = N$, упорядоченное слабыми отображениями, образует решетку. В частности, существует наиболее свободный такой матроид M. Однако это не справедливо для матроидов M, таких, что $M^{\tau\tau} = N$.

Подробное изучение лифт конструкции Хиггса и наращения Крапо привело Лас Верньяса [9] к более общим результатам следующего типа.

Теорема. *Предположим, что мы имеем два сильных отображения*

$$\begin{tikzcd} M_1(S) \arrow[dr, "\sigma_1"'] & & M_2(S) \arrow[dl, "\sigma_2"] \\ & M_0(S) & \end{tikzcd}$$

жения таких, что $\operatorname{rk} M_i - \operatorname{rk} M_0 = 1$, *где* $i = 1, 2$. *Тогда существует матроид* $P(S)$, *более свободный, чем* M_1 *и* M_2, *и такой, что*

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, dashed] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\ & P \arrow[dl, "\omega_1"'] \arrow[dr, "\omega_2"] \arrow[ddd, dashed, bend left] & \\ M_1 \arrow[dr, "\sigma_1"'] \arrow[ddr, bend right] & & M_2 \arrow[dl, "\sigma_2"] \arrow[ddl, bend left] \\ & M_0 & \\ & M & \end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned} \operatorname{rk} M_1 - \operatorname{rk} M_0 = 1, \\ \operatorname{rk} M_2 - \operatorname{rk} M_0 = 1, \end{aligned}$$

(а) $M_1 \to M$ и $M_2 \to M \Rightarrow P \to M$ (все отображения сильные),
(б) $N \to M_1$ и $N \to M_2 \Rightarrow N \to P$ (все отображения сильные).

Однако это каноническое P может не существовать, если $\operatorname{rk} M_1 - \operatorname{rk} M_0 > 1$. Эти исследования в самом деле связаны со слабым частичным порядком матроидов на множестве S. Они показывают, что нередко матроиды одного и того же ранга, удовлетворяющие некоторой диаграмме, образуют решетку, но не тогда, когда рангам разрешается изменяться.

С алгебраической точки зрения определение сильного отображения имеет смысл, так как обратный образ субвекторного пространства есть субвекторное пространство. Хиггс, следуя одной из идей Эдмондса, смог доказать, что всякое сильное отображение может быть рассмотрено как расширение с последующим за ним сжатием, чем связал подходы (I) и (II) в поисках отображений. Мы кратко обсудим его результат.

К сожалению, единственными стандартными понятиями теории категорий, которые успешно действуют, являются свободный объект на множестве S и копроизведение (сумма матроидов $M+N$).

1.6. Геометрическая картина двойственности

Теперь мы имеем возможность более тщательно исследовать двойственность матроидов. Целесообразно начать с работы Уитни [19] о представимых матроидах. Напомним, что матроид $M(S)$ без петель представим в векторном пространстве V над K, если существует взаимно однозначная функция $f\colon S \to V$, такая, что

множество A независимо в $M \Longleftrightarrow f(A)$ линейно независимо в V.

Предположим, что матроид M представим в векторном пространстве размерности $r = \operatorname{rk} M$. Составим матрицу вектор-столбцов $f(s) : s \in S$

$$\begin{array}{ccc} f(1) & f(2) & f(3) \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}$$

Теперь рассмотрим некоторое новое пространство $W = K^{|S|}$, натянутое[1]) на векторы базиса b_s, $\in S$. Строки матрицы порождают двумерное подпространство H пространства W. Для любого подмножества T множества S пусть Π_T обозначает проекцию пространства W на подпространство, натянутое на $\{f(t) : t \in T\}$. Тогда $\rho(T) = \dim \Pi_T(H)$. Двойственный матроид M

[1]) В смысле линейной оболочки. — *Прим. перев.*

можно образовать аналогично. Поскольку Уитни берет $K=\mathbb{R}$, то он рассуждает о подпространстве $H^{\perp}$, ортогональном H, и обнаруживает, что $\rho^*(T)=\dim \Pi_T(H^{\perp})$. Незначительным изменением перспективы мы можем устранить необходимости для ортогональности и получить конструкцию, которая обобщается на произвольные матроиды. Вместо того чтобы оперировать с $\Pi_T(H)$, обозначим через Π_H проекцию на подпространство, натянутое на H. Тогда $\dim \Pi_T(H)=\dim \Pi_H(T)$ (вторая теорема изоморфизма). Теперь возьмем любое подпространство H^*, дополнительное к H в пространстве W. Тогда

$$\rho(T)=\dim \Pi_H(T) \quad \text{и} \quad \rho^*(T)=\dim \Pi_{H^*}(T).$$

В приведенном примере $H^*=\langle(1, -1, -1)\rangle$. Проекция на H^* дает некоторый матроид ранга 1, каждая точка которого является независимой; таким образом, получаем иллюстрацию того факта, что $U_2^*(3)=U_1(3)$.

Сущность конструкции Уитни заключается в представлении свободного матроида $F(S)$. Внутри линейной оболочки $F(S)$ он нашел два дополнительных подпространства, которые с помощью проектирования задают M и M^*. Но ведь конструкция соединения матроидов дает то же самое, кроме, быть может, «линейной» части (рис. 29).

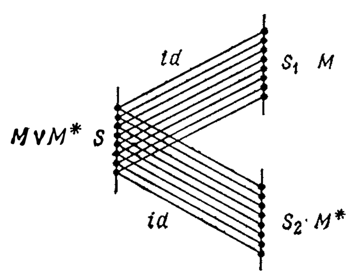


Рис. 29.

Представим себе полный матроид $M \vee M^*$ на множестве $S_1 \cup S_2 \cup S$. Тогда S является базисом для $M \vee M^*$, поскольку базисы M и M^* являются дополнительными. Таким образом, $M \vee M^*/S$ является свободным. К тому же $M(S_1)$ и $M^*(S_2)$ являются дополнительными и $(M \vee M^*)/S_1$ изоморфно M^*, а $(M \vee M^*)/S_2$ изоморфно M.

Обсуждая лифт-конструкцию Хиггса, мы заметили, что M^* может быть заменен на $U_d(S)$, где $d=|S|-\mathrm{rk}\, M=\mathrm{rk}\, M^*$. В действительности подойдет любой матроид на множестве S, который имеет одинаковый с M^* базис. Тем не менее мы чувствуем, что в применении M^* есть нечто каноническое. Самое лучшее, что можно предположить, это то, что M^* является единственным матроидом на S со свойством, что для каждого N, такого, что $M \vee N = F$, некоторый базис M^* является независимым в N.

Мы завершим наше изложение кратким введением во вторую часть настоящей работы. Во время подготовки этих заметок мы осознали, насколько полезно, когда имеешь дело с матроидной конструкцией, заключать исходные матроиды (части) и конечные конструкции в один большой матроид. Сильные отображения не являются исключением.

Предположим, что тождественное отображение $S \to S$ индуцирует сильное отображение $M \to N$. Для простоты возьмем $\operatorname{rk} M - \operatorname{rk} N = 1$. Пусть S_1 — экземпляр множества S. Мы хотим построить матроид P на множестве $S \cup S_1 \cup \{p\}$, такой, что его сжатие посредством p проектирует M на N.

Начать нетрудно, поскольку можно присоединить p к M посредством его модулярного сечения в факторизации Хиггса. Все, что далее требуется, — это пересечь каждую из прямых $\langle p, s \rangle$, $s \in S$, гиперплоскостью $N(S_1)$. Это именно то, что происходит при усечении Дилуорса.

2. УСЕЧЕНИЕ ДИЛУОРСА И ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

Специалисты по теории графов имеют дело с вершинами и ребрами. При переходе от графа к его циклическому матроиду мы переносим только лишь структуру ребер графа. Иногда идеи теории графов, которые, казалось бы, для их формулировки нуждаются как в вершинах, так и в ребрах, тонкими рассуждениями удается переводить в утверждения, зависящие только от ребер, и, следовательно, в матроиды. Большим мастером этого является Татт, который осуществил такой переход для раскрашиваний вершин и теоремы Менгера (см. [16в]). Тем не менее остается пока неясным геометрический механизм происходящего.

Оперируя с векторными пространствами, мы имеем некоторую координатную структуру, которая обусловливает характер линейных отображений. При переходе к матроидам мы теряем эту структуру. Одним из результатов этого является то, что матроидные отображения, примененные к матроиду векторного пространства, не все линейны. Хотя сила матроидов заключается в устранении этих координатных структур, нам приходится иметь дело с более общей структурой, которая, судя по крайней мере по предшествующим работам, недостаточно удовлетворительна с точки зрения теории категорий.

Имея это в виду, мы рассмотрим понятие коотображения по Крапо (см. [2с]), которое обобщает конструкцию Дилуорса. В настоящее время очень мало известно о структуре коотображений, поэтому остановимся в основном на конструкции усечения Дилуорса. Оказалось, что она связана с соединением матроидов и имеет отношение к проблеме представимости матроида. Более того, искусная конструкция Даулинга [5], которая может быть рассмотрена как конструкция коотображения, предлагает способ координатизации матроида, что может дать некоторую полезную категорию отображений, «воспроизводящих» линейные преобразования более точно, чем это делают сильные отображения.

2.1. Усечение Дилуорса

Дилуорс, интересуясь вопросами вложения решеток в полумодулярные решетки с определенными свойствами (см. [4]), получил конструкцию, на которой мы и хотим здесь остановиться. Идея Дилуорса заключалась в том, чтобы сделать поверхности, ранг которых равен k, атомами новой геометрической решетки путем введения новых поверхностей таким образом, чтобы старые поверхности ранга $k+d$ стали в этой новой геометрии поверхностями ранга d.

Геометрически эта идея очень проста. Представим себе матроид в пространстве и поместим новую гиперплоскость в общее положение так, чтобы она пересекала каждую прямую матроида M (см. рис. 30 и 33).

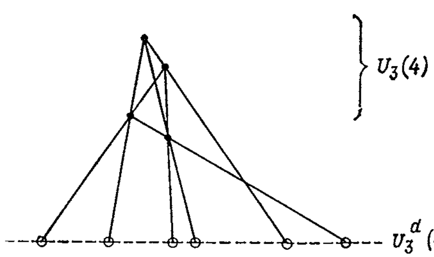


Рис. 30. Усечение Дилуорса $U_3(4)$.

Новые точки на гиперплоскости образуют нижнее усечение Дилуорса M^d матроида M. Каждая прямая матроида M соответствует некоторой новой точке M^d, каждая старая плоскость — некоторой новой прямой и т. д.

На рис. 30 и 33 показано, что происходит, когда прямые матроида M становятся точками нижнего усечения Дилуорса M^d. Дилуорс в более общем случае описал, как сделать k-поверхности матроида M точками новой геометрии $M^{d(k)}$. Из условия, что старые поверхности матроида M остаются поверхностями усечения Дилуорса (соответствующего требованию, что снизу усеченная решетка матроида M является решеткой, вложенной в новую геометрию), следует, что $M^{d(2)}$ является некоторым сужением M^{dd}.

Давайте подробно рассмотрим M^d. Когда три старые прямые будут зависимыми в M^d? Именно тогда, когда они являются копланарными в матроиде M. То есть когда они, как множество точек матроида M, порождают поверхность ранга 3.

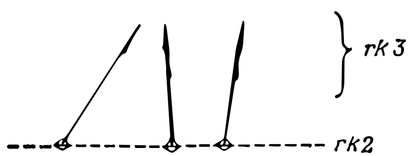


Рис. 31. Усеченные копланарные прямые

Рассмотрение этого рода ведет прямо к конструкции Дилуорса.

Обозначим через $\bar{L}_i$ новую точку, размещенную на старой прямой L_i матроида M. Тогда M^d определяется следующим образом:

множество $\{\bar{L}_1, \ldots, \bar{L}_t\}$ независимо в $M^d \Longleftrightarrow$ для любого $J \subseteq \{1, \ldots, t\}$ $\operatorname{rk} \bigcup_J L_j \geqslant |J|+1$.

Отсрочим проверку того, что M^d является действительно матроидом, до тех пор, пока позже не рассмотрим ее в более общем контексте. Рассмотрим некоторые свойства M^d.

(1) Предположим, что $\{b_1, \ldots, b_n\}$ — базис матроида M, и пусть $L_i = \langle b_1, b_i\rangle$. Тогда множество $\{\bar{L}_i : 2 \leqslant i \leqslant n\}$ является базисом M^d.

Доказательство. Для любого $J \subseteq \{2, \ldots, n\}$ имеем, что

$$\operatorname{rk} \bigcup_J L_j = |J| + 1.$$

Следовательно, множество $\{\bar{L}_i : 2 \leqslant i \leqslant n\}$ является независимым. Кроме того, если L — какая-нибудь прямая матроида M, то

$$\operatorname{rk} L \bigcup_2^n L_j = n < n+1.$$

Поэтому L принадлежит линейной оболочке множества $\{\bar{L}_j : 2 \leqslant j \leqslant n\}$.

(2) Сжатие матроида M с помощью точки x является сужением M^d на точки $\overline{\langle x, s\rangle}$, где $s \in S \setminus \{x\}$, т. е.

$$M/x = M^d \mid \{\overline{\langle x, s\rangle} : s \in S \setminus \{x\}\}.$$

Доказательство. $\{\overline{\langle x, b\rangle} : b \in B\}$ является независимым в M^d:

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \operatorname{rk}(\{x\} \cup A) \geqslant |A| + 1 \text{ для всех } A \subseteq B,\\
&\Longleftrightarrow B \cup x \text{ является независимым в } M,\\
&\Longleftrightarrow B \text{ является независимым в } M/x.
\end{aligned}$$

(3) Из свойства (2) следует, что $(M+e)^d$ содержит как M, так и M^d в том смысле, что $(M+e)^d$ объемлет как матроид M, так и геометрическую конструкцию M^d, получаемую из M.

(4) Как отметил Дилуорс, F_n^d является циклическим матроидом полного графа K_n, решетка поверхностей которого является решеткой разбиений n-множества.

Доказательство. Каждая точка $\bar{L}$ матроида F_n^d соответствует прямой L матроида F_n, которая может быть рассмотрена как ребро полного графа K_n, соединяющее две точки из F_n, образующие прямую L. Множество точек $\{\bar{L}_1, \ldots, \bar{L}_t\}$ независимо в F^d:

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \operatorname{rk} L_J \geqslant |J| + 1 \text{ для всех } J \subseteq \{1, \ldots, t\},\\
&\Longleftrightarrow \text{каждое подмножество ребер } J \text{ пересекает}\\
&\qquad \text{по крайней мере } |J| + 1 \text{ точек},\\
&\Longleftrightarrow \text{ребра } L_1, \ldots, L_t \text{ образуют лес в } K_n.
\end{aligned}$$

Поскольку каждая поверхность циклического матроида полного графа K_n является объединением полных подграфов K_n, непересекающихся по вершинам, он соответствует в точности некоторому разбиению множества n вершин. Ранг поверхности равен $n-m$, где m — число блоков разбиения.

В качестве примера рассмотрим случай, когда $F_5^d = K_5$. Полный граф K_5 является известным, но много ли людей узнают в нем конфигурацию Дезарга? Поскольку $F_4 + e = F_5$, то мы можем построить F_5^d путем рассмотрения конструкции F_4^d, полученной из F_4 для того, чтобы в результате получить следующую картину (см. рис. 32).

С геометрической точки зрения это конфигурация Дезарга, и в то же время циклический матроид графа K_5. Теперь мы можем перевести перспективное соответствие двух треугольников обратно в граф. Вершины треугольников соответствуют ребрам графа, не образующим цикл. Три прямые перспективного соответствия являются циклами в графе K_5, поэтому используем ребро 15 в качестве точки 1 перспективного соответствия. Два треугольника 234 и 12, 13, 14 соответствуют двум звездам 25, 35, 45 и 12, 13, 14, которые вместе с ребром 15 образуют три 3-цикла. Оставшиеся ребра 24, 34, 23 лежат на прямой в F_5^d и образуют соответственно некоторый 3-цикл в графе K_5.

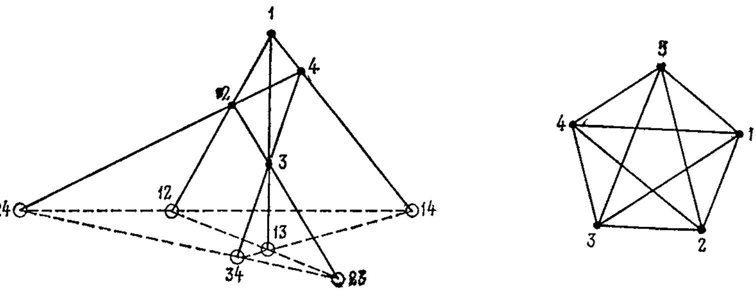


Рис. 32. Конфигурация Дезарга как K_5.

Всегда, когда мы имеем дело с матроидной конструкцией, имеет смысл попытаться по мере возможности вложить и M, и его результат в один большой матроид. В данном случае мы видим, что усечение Дилуорса делает это автоматически ($(M+e)^d$ является именно этим большим матроидом для M и M^d), а также отвечает на вопрос в конце настоящей работы. А именно, пусть дано $x \in S$. Тогда конструкция M/x, полученная из матроида M, уже находится внутри $(M+e)^d$ в качестве сужения. При рассмотрении F_5^d, т. е. F_4 и F_4^d, возникает несколько идей, которые, следуя по намеченному пути, стоит обсудить.

(1) Почему бы не расположить точки также на других поверхностях? Но не один уровень за раз, как это делает Дилуорс, а все сразу (см. разд. 2.2).

(2) Размещение точек свободно на линиях наводит на мысль о связях с соединением матроидов (см. разд. 2.3).

(3) Конфигурация Дезарга возникает всякий раз, когда мы рассматриваем четыре независимые точки матроида M и конфигурацию, которую они порождают в $(M+e)^d$. Поскольку теорема Дезарга является основной для линейного представления проективных геометрий, то, возможно, здесь имеется некоторая связь с представимостью (см. разд. 2.4).

(4) Гиперплоскость выбиралась так, чтобы она была настолько свободной, насколько это возможно. Размещая гиперплоскость менее свободно, мы получаем более общие коотображения. Геометрически эти понятия являются простыми, по крайней мере умозрительно. Рассмотрим матроид M как кон-

фигурацию в пространстве и пусть гиперплоскость перемещается, пересекая при этом в каждый момент все прямые матроида M. Результаты этого являются в точности образами слабых отображений M^d. Было бы очень полезным для этого получить некоторый выполнимый алгебраический метод.

2.2. Обобщение усечения Дилуорса

Определение усечения Дилуорса M^d (при условии, что еще не доказано, что M^d является матроидом) наводит на мысль, что M^d может быть следующим образом обобщено также на другие поверхности матроида M. С каждой поверхностью F матроида M свяжем некоторую новую точку $\bar{F}$. Для дальнейшего изложения удобно исключить из рассмотрения $\langle \varnothing \rangle$. Определим, что

множество $\{\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_t\}$ независимо $\Longleftrightarrow$ для любого $J \subseteq \{1, \ldots, t\}$ имеет место $\operatorname{rk} \bigcup_J F_j \geqslant |J| + 1$.

Оставим на некоторое время в стороне вопрос, является ли M^d матроидом, и рассмотрим его следствия. Пусть $x \in S$. Тогда $\langle \bar{x} \rangle$ является зависимой, поскольку $\operatorname{rk}\{x\} = 1 < 1 + 1$. Этого можно избежать, если изменить аддитивную константу на 1. В действительности, если мы рассмотрим только поверхности ранга k в M, то

$$\operatorname{rk} \bigcup_J F_j \geqslant |J| + k - 1$$

на самом деле задает k-усечение Дилуорса, превращающее $\bar{F}$ в некоторую независимую точку и имеющее полный ранг, равный $\operatorname{rk} M - k + 1$. Для $k = 1$ мы, конечно, снова получаем матроид M. Мы вернемся к рассмотрению случая $k = 1$ позже, когда признаем в нем обобщение соединений матроидов.

Таким образом, подбором k мы можем получить различные усечения Дилуорса. Для того чтобы получить их все одновременно, мы должны выбирать k в зависимости от ранга рассматриваемых поверхностей. Кроме того, если $\{b_1, \ldots, b_t\}$ является независимым множеством матроида M, а F — их линейная оболочка, то хотелось бы, чтобы $\{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_t, \bar{F}\}$ было независимым в новом матроиде. Все это, вместе взятое, предлагает следующую общую конструкцию M^D.

Пусть дан матроид $M(S)$. Тогда в качестве нового множества точек возьмем

$$\{\bar{F} : F \text{ — поверхность матроида, ранг которой } \geqslant 1\}.$$

Положим, что $\{\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_t\}$ независимо в $M^D \Longleftrightarrow$ для любого $J \subseteq \{1, \ldots, t\}$ $\operatorname{rk} \bigcup_J F_j \geqslant |J| + \min_J \{\operatorname{rk} F_j\} - 1$.

Прежде чем доказывать, что M^D действительно является матроидом, имеет смысл подробно рассмотреть свойства этой конструкции.

(1) Каждая точка $\bar{F}$ является независимой в M^D, так как интерпретирование условия, когда J является одноэлементным, дает $\operatorname{rk} F \geqslant 1 + \operatorname{rk} F - 1$.

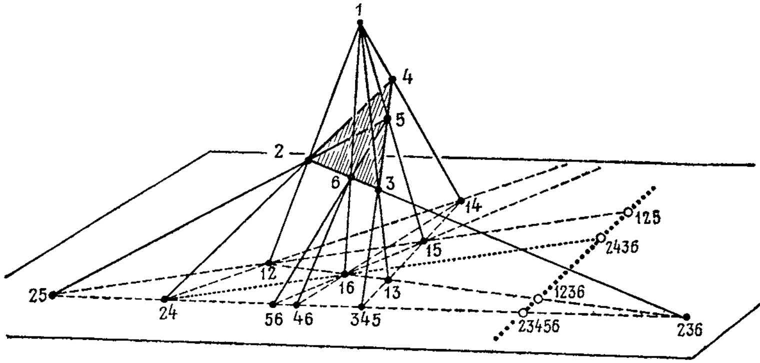


Рис. 33. Типичный матроид M^D (изображены не все точки).

(2) Для любого $A \subseteq S$ множество A является независимым в $M \Longleftrightarrow \{\bar{a} : a \in A\}$ независимо в M^D. Здесь min равен 1, поэтому

множество A независимо в $M^D \Longleftrightarrow$ для любого $B \subseteq A$ $\operatorname{rk} B \geqslant |B| + 1 - 1$, A независимо в M.

(3) Пусть $\mathscr{F}_k = \{\bar{F} : \operatorname{rk} F = k\}$. Тогда M^D, суженный на $\mathscr{F}_k$, задает k-е усечение Дилуорса матроида M, которое обладает рангом, равным $\operatorname{rk} M - k + 1$.

(4) Точка $\bar{F}$ лежит свободно на $M \mid (F \cup \{\bar{F}\})$. Для любого базиса $B = \{b_1, \ldots, b_t\}$ поверхности F в M мы находим, что $\{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_t, \bar{F}\}$ является зависимым в M^D, а каждое его собственное подмножество является независимым.

(5) Точка $\bar{F}$ лежит свободно на прямой $\langle \bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_t : G_i \subseteq F, \operatorname{rk} G_i = \operatorname{rk} F - 1 \rangle$.

(6) Если вместо непосредственного задания M^D мы построим некоторый матроид рекурсивно:

$$M_0 = M,$$
$$M_{n+1} = (M_n + e_{n+1})^d,$$

то $M_{N+1} = M_N$ для всех $N \geqslant \operatorname{rk} M$, и мы получим некоторый больший матроид, который содержит M^D. Этот больший матроид является сверхразрешимым[1]), т. е. он имеет цепь модулярных поверхностей и ветвления на хроматическом многочлене и многочлене Уитни [15].

Теорема. *M^D является матроидом.*

Доказательство. Пусть семейство $\mathcal{F}=\{\bar{F}:\operatorname{rk}F\geqslant 1\}$ пронумеровано, например $F_1, \ldots, F_N$. Для любого $J\subseteq\{1, \ldots, N\}$ положим $\lambda(J)=\operatorname{rk}\bigcup\limits_J F_j-\min\limits_J\operatorname{rk}F_j+1$. Тогда M^D определяется следующим образом:

множество $\{\bar{F}_i : i\in I\}$ является независимым $M^D \Longleftrightarrow$ для любых $J\subseteq I$, $\lambda(J)\geqslant|J|$.

Эта функция λ является неубывающей (т. е. для $J\subseteq K$ $\lambda(J)\leqslant\lambda(K)$) и полумодулярной (т. е. для произвольных J и K, $\lambda(J)+\lambda(K)\geqslant\lambda(J\cup K)+\lambda(J\cap K)$). Функция ранга матроида M обладает этими же свойствами. Таким образом, λ весьма похожа на функцию ранга. Однако $\lambda(\phi)=1$ и $\lambda(J\cup\{k\})$ может быть больше, чем $\lambda(J)+1$. Существуют стандартные пути преобразования λ в функцию ранга, но быстрый способ убедиться, что M^D на самом деле матроид, таков:

Пусть C_1 и C_2 — различные минимальные (по включению) зависимые множества, а $e\in C_1\cap C_2$. Покажем, что $(C_1\cup C_2)\backslash\{e\}$ не является независимым и, таким образом, удовлетворяет аксиоме циклической замены для матроида.

Поскольку C_1 и C_2 являются минимальными зависимыми, мы находим, что

$$|C_i|>\lambda C_i\geqslant\lambda(C_i\backslash\{e\})\geqslant|C_i|-1,\ i=1,\ 2.$$

Поэтому $\lambda((C_1\cup C_2)\backslash\{e\})\leqslant\lambda(C_1\cup C_2)\leqslant$ так как λ неубывающая

$\leqslant\lambda(C_1)+\lambda(C_2)-\lambda(C_1\cap C_2)\leqslant$ поскольку λ является полумодулярной

$\leqslant|C_1|-1+|C_2|-1-|C_1\cap C_2|=$ поскольку $C_1\cap C_2$ является независимым

$=|C_1\cup C_2|-2<$

$<|(C_1\cup C_2)\backslash\{e\}|.$

Таким образом, $(C_1\cup C_2)\backslash\{e\}$ не является независимым, следовательно, M^D — матроид.

---

[1]) Пусть $M(S)$ — сверхразрешимый матроид на множестве S с цепью модулярных поверхностей $A_0\subseteq A_1\subseteq A_2\subseteq\ldots\subseteq A_n=S$, таких, что $\rho(A_i)=i$. Тогда целые числа $|A_{i+1}\diagdown A_i|$ $(i=0, \ldots, n-1)$ являются корнями хроматического многочлена матроида $M(S)$. — *Прим. перев.*

Основанием для применения этого хорошо известного доказательства является то, что оно позволяет нам упомянуть нерешенную проблему относительно таких функций λ, а также проиллюстрировать, насколько тщательным выбором способа (в данном случае циклов вместо функции ранга) можно упростить доказательства. (Обычное доказательство с помощью функции ранга является значительно более трудоемким.)

Доказательство зависело только от λ, являющейся неубывающей и полумодулярной. Другими примерами таких функций являются: $\max$, $-\min$, $\lambda_1+\lambda_2$, $\alpha\lambda$ для $\alpha \geqslant 1$, константы. Семейство всех таких функций λ на множестве S вместе с их линейными положительными комбинациями образует некоторый конус. Описание экстремальных членов этого конуса является, по нашему мнению, все еще нерешенной проблемой [1]). В этой связи Мурти, заметив, что λ обычно отличается от функции ранга, предложил описать те матроиды, для которых только такие λ являются функцией ранга.

2.3. Усечения Дилуорса и соединения матроидов

Соединение $M_1 \vee M_2$ матроидов $M_1(S)$ и $M_2(S)$ может рассматриваться как матроид на трех экземплярах множества S: S, S_1, S_2. Оно может быть описано геометрически как размещение точек из S свободно на соответствующих прямых $\langle s_1, s_2 \rangle$ суммы матроидов $M_1(S_1)+M_2(S_2)$. При усечении Дилуорса матроида M_1+M_2 точки располагаются свободно на всех прямых матроида M_1+M_2, но они ограничиваются некоторой гиперплоскостью. Связь между этими двумя конструкциями состоит в том, что путем подбора аддитивной константы в усечении Дилуорса определение

множество $\{\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_t\}$ независимо $\Longleftrightarrow$ для любого, $J \subseteq \subseteq \{1, \ldots, t\}\ \operatorname{rk} F_J \geqslant |J|$,

когда оно применяется к M_1+M_2, содержит $M_1 \vee M_2$ в качестве сужения. Обычным условием независимости для $M_1 \vee M_2$ является:

(1) $A \subseteq S$ независимо $\Longleftrightarrow$ существует $B \subseteq A$, такое, что

$$\rho_1(B)+\rho_2(A \backslash B) \geqslant |A|.$$

Наше условие преобразовывается в следующее:

(2) $A \subseteq S$ независимо $\Longleftrightarrow$ для любого $B \subseteq A$,

$$\rho_1(B)+\rho_2(B) \geqslant |B|.$$

---

[1]) Ответ на этот вопрос недавно получили А. Ченч и Г. Крапо. Их статья скоро появится в Journal of Combinatorial theory, ser. B.

Единственные нам известные доказательства того факта, что эти утверждения эквивалентны, являются довольно трудными, чисто матроидными. Поэтому мы не будем здесь их рассматривать. Формулировка (2) является вариантом утверждения, впервые полученного Эдмондсом, а утверждение (1) исходит от Нэш-Вильямса.

2.4. Представимость усечений Дилуорса

Мы видели, что конфигурация Дезарга содержится в F_4^D и что F_4 является подматроидом во многих отношениях любого матроида M ранга 4. Так как теорема Дезарга дает конфигурацию, лежащую в основе линейного представления проективных геометрий, то, по-видимому, естественно рассмотреть представимость матроидов M, M^d и M^D.

Напомним, что матроид $M(S)$ (без петель) является линейно представимым над характеристикой χ тогда и только тогда, когда существует взаимно однозначная функция $f: S \to V$, где V — некоторое векторное пространство над полем характеристики χ, такой, что

A независимо в $M(S) \Longleftrightarrow f(A)$
линейно независимо в V.

Теорема. *Если* $\operatorname{rk} M \geqslant 4$, *то* M *представим над характеристикой* $\chi \Longleftrightarrow$ *матроид* M^d *представим над* χ.

Замечание. Из теоремы следует, что такой же самый результат имеет место для M^D, так как M^D является сужением последовательности $(M+e)^d$-конструкций.

Схема доказательства.

M представим $\Longrightarrow$ M^d представим.

Выберем некоторое представление матроида M с базисом $b_1, \ldots, b_n$ из M, представленным так, что $\phi(b_i) = \mathbf{b}_i$ в V. Каждая поверхность ранга 1 матроида M представляется как некоторое одномерное подпространство векторного пространства V. Расширим поле K до $K(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где α_i являются алгебраически независимыми. Пусть H — гиперплоскость из V, натянутая на $\{\mathbf{b}_1 + \alpha_i \mathbf{b}_i : 2 \leqslant i \leqslant n\}$. α_i выбраны алгебраически независимыми для того, чтобы держать H на значительном расстоянии от M и так, чтобы каждая прямая L матроида M (которая соответствует двумерному подпространству из V) пересекала H по *единственному* одномерному подпространству из V. Тогда представлением $\phi(\bar{L})$ прямой $\bar{L}$ является любой ненулевой вектор этого подпространства.

Мы должны, кроме того, показать, что ϕ задает некоторое представление матроида M. Алгебраические детали скрыты в свойстве единственности для гиперплоскости H, описанном выше.

Предположим, что $\bar{L}_1, \ldots, \bar{L}_t$ являются независимыми в M^d. Тогда $\operatorname{rk} \bigcup_J L_j \geqslant |J|+1$ для всех $J \subseteq \{1, \ldots, t\}$. Поэтому подпространство W_J векторного пространства V, натянутое на $\{\phi(K_j) : j \in J\}$, должно иметь размерность $\geqslant |J|+1$ в V. Таким образом, $\dim W_J \cap H \geqslant |J|$. Следовательно, векторы $\{\phi(\bar{L}_1), \ldots, \phi(\bar{L}_t)\}$ являются линейно независимыми в V.

Обратно, если

$$\{\phi(\bar{L}_1), \ldots, \phi(\bar{L}_t)\}$$

являются линейно независимыми в V, то $\dim W_J \cap H \geqslant |J|$, и поскольку никакая прямая L_i не содержится в H, то

$$\dim W_J \geqslant |J|+1.$$

Таким образом, $\operatorname{rk} \bigcup_J L_i \geqslant |J|+1$, откуда $\{\bar{L}_1, \ldots, \bar{L}_t\}$ является независимым в M^d.

M^d представимо $\Longrightarrow$ M представимо (ранг $M \geqslant 4$).

Предположим, что матроид M^d представим в V над полем K. Выберем базис $e_1, \ldots, e_n$ матроида M и базис $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ векторного пространства V над полем K. Расширим поле K до $K(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, как прежде. Тогда $\{\mathbf{b}_1 + \alpha_i \mathbf{b}_i : 2 \leqslant i \leqslant n\}$ является линейно независимым и поэтому может быть выбрано за представление базиса $\{\langle\overline{e_1, e_i}\rangle : 2 \leqslant i \leqslant n\}$ матроида M^d. Оно может быть расширено до представления матроида M^d с коэффициентами из K относительно этого базиса. Мы можем, кроме того, сделать наше представление матроиды M^d таким, что

$$\langle\overline{e_2, e_i}\rangle \text{ представляется как } (\mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2) + (\mathbf{b}_1 + \alpha_i \mathbf{b}_i).$$

Используя факт, что $\langle\overline{e_1, e_i}\rangle$, $\langle\overline{e_1, e_j}\rangle$, $\langle\overline{e_i, e_j}\rangle$ и $\langle\overline{e_2, e_i}\rangle$, $\langle\overline{e_2, e_j}\rangle$, $\langle\overline{e_i, e_j}\rangle$ должны быть различными прямыми в V, представлением $\langle e_i, e_j\rangle$ должно быть $(\mathbf{b}_1 + \alpha_i \mathbf{b}_i) - (\mathbf{b}_1 + \alpha_j \mathbf{b}_j)$ для $2 < i < j$.

Теперь все готово для того, чтобы представить матроид M. Векторы $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ построены так, чтобы они представляли $e_1, \ldots, e_n$, соответствующие нашему представлению матроида M^d. Мы продолжим доказательство индуктивно. Рассмотрим любой еще непредставленный элемент e из S. Для каждого уже представленного элемента x мы знаем координаты $\langle\overline{x, e}\rangle$ в M^d. Координаты элемента e достаточно легко вывести, но надо, кроме того, учитывать возникающее препятствие, а именно, согласуются ли они со всей дополнительной информацией.

Поскольку $\operatorname{rk} M \geqslant 4$, то существуют три элемента базиса e_i, e_j, e_k, такие, что e *не* лежит на всех ими порождаемых прямых. Для определенности предположим, что это e_1, e_2, e_3. (Замечание: особая роль $\mathfrak{b}_1$ является кажущейся, а не реальной.) Тогда известных координат элементов $\langle\overline{e, e_2}\rangle$ и $\langle\overline{e, e_3}\rangle$ достаточно для того, чтобы определить координаты для e, а вся другая информация $\langle\overline{x, e}\rangle$ является непротиворечивой. Вычисление координаты осуществляется непосредственно. В результате получаем $2n$ уравнений с $n+3$ неизвестными, но можно показать, что они являются непротиворечивыми, учитывая следствия того факта, что $\langle\overline{e_2, e}\rangle$, $\langle\overline{e_3, e}\rangle$, $\langle\overline{e_2, e_3}\rangle$ лежат на некоторой прямой в V. Аналогичные рассуждения показывают, что координаты элемента $\langle\overline{e_1, e}\rangle$ являются совместимыми с M^D.

Более общая проблема совместимости излагается следующим образом. Предположим, что мы хотим проверить $\langle\overline{x, e}\rangle$. Поскольку $\{e_1, e_2, e_3\}$ является независимым в M, то мы можем найти два базисных элемента e_i и e_j $(1 \leqslant i < j \leqslant 3)$, таких, чтобы $\{x, e, e_i, e_j\}$ были независимыми в M. Тогда две прямые

$$\langle\overline{e_i, e}\rangle, \quad \langle\overline{e_i, x}\rangle, \quad \langle\overline{e, x}\rangle$$

и

$$\langle\overline{e_j, e}\rangle, \quad \langle\overline{e_j, x}\rangle, \quad \langle\overline{e, x}\rangle$$

являются различными, а координаты элементов $\langle\overline{e_i, e}\rangle$, $\langle\overline{e_i, x}\rangle$, $\langle\overline{e_j, e}\rangle$ и $\langle\overline{e_j, x}\rangle$, как уже известно, являются совместимыми с M^d. Четыре точки e, e_i, e_j, x приводят к конфигурации Дезарга в M с M^d, а следовательно, в V. Таким образом, координаты элемента $\langle\overline{e, x}\rangle$ являются однозначно определенными и совместными с M^d.

Значимость усечения Дилуорса для принятия решения, представим ли матроид, обусловлена существованием конфигураций Дезарга. Например, наименьшим (по размерности) непредставимым матроидом является конфигурация V_4 (или один из ее многих слабых образов). То, что V_4 не может быть линейно представимым, доказывается построением V_4^d; при тщательном рассмотрении мы разглядим в V_4^d конфигурацию Дезарга ранга 3.

Матроид Вамоса выводится также и в других контекстах. На рис. 34 приведен такой пример, принадлежащий Инглтону. Из алгебраических соображений известно, что одна плоскость требует для представимости поля характеристики 2 (из-за конфигурации Фано), а другая плоскость нуждается в поле, характеристика которого не равна 2. Следовательно, этот матроид не является представимым. Обведенные кружками точки образуют конфигурацию V_4, так что можно увидеть геометрически, почему этот матроид непредставим.

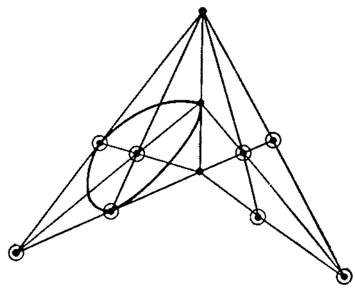


Рис. 34. Непредставимый матроид ранга 4.

В более общем смысле, если матроид является представимым, то, применяя идеи проективных отображений, заметим, что любой базис вместе со свободной точкой должен быть проективно связан с любым другим таким множеством. Под этим мы подразумеваем, что возможно построить новый матроид из старого, причем новая точка коллинеарна с выбранной парой проективных точек; таким образом, проективное соответствие строится как явное перспективное соответствие. В случае многих (но не всех) непредставимых матроидов попытка осуществить эту конструкцию либо приводит в тупик, либо же содержит конфигурацию Вамоса. В любом случае это указывает на то, что матроид непредставим.

2.5. Подход с позиций теории решеток

Мы видели, что обычное усечение Дилуорса свободного матроида F_n задает циклический матроид K_n, решетка поверхностей которого является решеткой разбиений n-элементного множества. Эта идея переносится и на более общий случай M^d.

Пусть $M(S)$ — матроид, L—решетка поверхностей матроида M, а A — множество атомов решетки L (т. е. поверхностей ранга единицы в M). Для любого подмножества X множества A мы обозначим через $\delta(A \setminus X)$ дискретное разбиение множества $A \setminus X$. С каждым элементом x решетки L мы свяжем множество X атомов, лежащих под x в решетке L. Мы назовем π *L-разбиением* множества A, если π — разбиение множества A, блоками которого являются элементы решетки L, а *частичным L-разбиением* множества A является разбиение некоторого подмножества X множества A, соответствующего элементу решетки L, все блоки которого являются к тому же элементами решетки L. Для

$M = F_n\ L$ является булевым на множестве S, а L-разбиения становятся поверхностями циклического матроида K_n, в то время как частичные L-разбиения становятся поверхностями матроида K_{n+1}, т. е. матроида $(F_n + e)^d$. При этом

$$\begin{gathered} M \leftrightarrow L, \\ M^d \leftrightarrow L\text{-разбиения}, \\ \bar{F} \leftrightarrow [F,\ \delta(A \setminus F)], \\ (M+e)^d \leftrightarrow \text{частичные } L\text{-разбиения}. \end{gathered}$$

Оказывается, что L-разбиения множества A и частичные L-разбиения множества A являются геометрическими решетками. В действительности, они являются как раз решетками поверхностей матроидов M^d и $(M+e)^d$ соответственно. Решетка L-разбиений матроида $M+e$ приводится к частичным L-разбиениям матроида M вычеркиванием всех блоков, содержащих e. Упорядочение и операции на решетке определяются следующим образом:

$\pi_1 \leqslant \pi_2 \Leftrightarrow \bigcup \pi_1 \leqslant \bigcup \pi_2$ и каждый блок из π_2 является объединением блоков из π_1;

$$\pi_1 \vee \pi_2 = \text{общим членам разбиений } \pi_1 \text{ и } \pi_2.$$

Основанием для вхождения в такие детали является то, что понятие частичных разбиений полезно не только в описанном усечении Дилуорса, но также в теории трансверсалей [11]. Даулинг, кроме того, использовал эту решетку в работе [5], посвященной построению матроидов, которые отчасти координатизируются элементами некоторой группы.

В основном конструкция Даулинга состоит в том, что берут некоторую группу G и некоторое множество S и заменяют 1-поверхности S (т. е. поверхности, ранг которых равен 1) из $F(S)$ семейством параллельных элементов $\{gs : g \in G\}$. При этом получается матроид на множестве $\{gs : g \in G,\ s \in S\}$, циклы которого являются двухэлементными множествами вида $\{gs,\ hs\}$.

Теперь повысим ранг этого матроида на единицу и получим матроид, изображенный на рис. 35, ранг которого $|S|+1$. Точка p играет роль начала координат, причем G-кратные элементы вытянуты в направлении элементов s. Теперь образуем некоторую разновидность усечения Дилуорса, но отождествим $\langle gs,\ ht\rangle$ с $\langle \lambda gs,\ \lambda ht\rangle$ для всех $\lambda \in G$. Эта конструкция является частным видом коотображения. Сжатием посредством точки p (так, чтобы она действительно выполняла роль начала координат) получаем матроид Даулинга. Групповая структура, вложенная в этот матроид, достаточна, чтобы вынудить любое линейное представление иметь G как подгруппу мультипликативной группы поля.

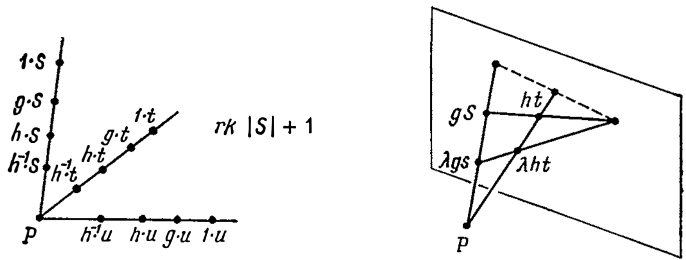


Рис. 35. Конструкция Даулинга

Можно заменить $F(S)$ произвольным матроидом $M(S)$. Однако значительно более общий контекст можно получить, если рассуждать, как в следующем разделе.

2.6. Обобщенные координаты

Возьмем свободный матроид $F(S)$. (Позже мы можем заменить F на произвольный матроид на множестве S.) Каждому $s \in S$ припишем определенное множество K_s и рассмотрим матроид N на K_s, в котором K_s является поверхностью ранга 1, ранее названной s в $F(S)$. (Это справедливо для любого матроида.) Теперь мы имеем N, который напоминает оси векторного пространства, и при этом K_s являются множителями s. Пусть p — новая точка, а лифт N по p дает N_p. Теперь мы можем образовать N_p^D, что в векторных пространствах (насколько мне известно) означает, что K_s принимается алгебраически независимым над некоторым основным полем K.

Когда мы порождаем некоторое векторное пространство, говоря «замкнутый относительно линейных комбинаций», мы берем слабый образ N_p^D, в котором новые точки, соответствующие старым линиям, с пропорциональными коэффициентами отождествляются.

Даулинг рассматривал K_s как группу G и показал, как построить слабый образ, когда новые точки отождествляются, если их координаты пропорциональны относительно левого умножения в группе G. Было бы интересно установить, какие именно отношения эквивалентности на K_s порождают матроид. Это то же самое, что и описание слабых образов N_p^D, что является трудной проблемой.

Мы можем развить эту идею еще на один шаг дальше. Мы думаем, что было бы полезно отметить, что матроид M является координатизируемым матроидом N_p, если некоторый слабый образ матроида N_p^D содержит M как сужение. Это понятие весьма напоминало бы векторное пространство, поскольку p играет роль начала координат. Теперь мы можем ввести координатизирующее отображение. Например, матроид M_1 может быть отображен в M_2 относительно координатизирующей системы N_p, если M_2 может быть получен (с точностью до изоморфизма) сжатием (проектированием) точек внутри N_p. Такое отображение обобщало бы понятие линейного преобразования лучше, чем это делает самое общее сильное отображение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brylawski T. An Outline for the Study of Combinatorial Pre-Geometries. Notes, Univ. of N. Carolina, 1972.
2. Crapo H (a) Structure Theory for Geometric Lattices. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 38 (1967), 14—22.
   (b) Single Element Extensions of Matroids. J. Res. Nat. Bur. Standards 69B (1965), 55—65.
   (c) The Joining of Exchange Geometries. J. Math. Mech., 17 (1968), 837—852, MR #2657.
   (d) Erecting Geometries. Proc. 2nd Chapel Hill Conf on Comb. Math. and Applications, 74—79.
3. Crapo H., Rota G. C. On the Foundations of Combinatorial Theory: Combinatorial Geometries, M. I. T. Press, Camb. Mass., 1970.
4. Dilworth R. Dependence Relations in a Semimodular Lattice. Duke Math. J., II (1944), 575—587.
5. Dowling T. A Class of Geometric Lattices Based on Finite Groups J C. T., 14 (I), 1973, 61—86.
6. Edmonds J., Fulkerson D. Transversals and matroid Partition. J. Res. Nat. Bur. Standards, 69B (1965), 147—153.
7. Higgs D. (a) Strong Maps of Geometries. J. Comb. Th. 5 (2), 1968, 185—191.
   (b) Maps of Geometries. J. Lond. Math. Soc., 41 (1966), 612—618.
8. Ingleton A. Conditions for Representability and Transversality of Matroids. Theorie des Matroides, Lecture Notes 211, Springer Verlag 1971. 62—66.
9. Las Vergnas M. On Certain Constructions for Matroids. Proc. 5th British Comb. Conf. 1975, 395—404.
10. Maclane S. Some Interpretations of Abstract Linear Dependence in terms of Projective Geometry. Amer. J. Math., 28 (1937), 22—32.
11. Mason J. The Three Family Problem Open Univ. Seminar Notes, 1976.
12. Mirksy L. Transversal Theory, Academic Press, 1971.
13. Nash-Williams C. An Application of Matroids to Graph Theory. Proc. Symp. Rome, Dunod, 1968, 263—265.
14. Rado R. A note on Independence Functions. Proc. Lond Math. Soc., 7 (1957), 300—320.
15. Stanley R. Super Solvable Semimodular Lattices, Proc. Conf. on Mobius Algebras, Univ. Waterloo, 1971, 80—142.
16. Tutte W. (a) Introduction to the Theory of Matroids. Rand. Report 448—Pr 1966.
   (b) Menger's Theorem for Matroids. J. Res. Nat. Bur. Standards 69B (1965), 49—53.
17 Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. Пер. с нем. —2-е изд. —М : Наука, 1978.
18 Welsh D Matroid Theory London Math Soc. Monograph, 8, 1976.
19 Whitney H On the Abstract Properties of Linear Dependence. Amer. J. Math., 57 (1935), 509—533.

ГЕОМЕТРИИ, СВЯЗАННЫЕ С ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫМИ МНОЖЕСТВАМИ[1])

Т. А. Даулинг, В. А. Дениг

В статье показано, что подмножества конечного частично упорядоченного множества P, состоящие из наибольших элементов цепей длины $\geqslant k$ в некотором k- и $(k-1)$-насыщенном разбиении на цепи множества P, являются базисами комбинаторной геометрии $G_k(P)$. Тем самым подтверждена гипотеза Грина. Тождественное отображение на P индуцирует сильное отображение

$$G_{k-1}(P) \to G_k(P) \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

которое представимо в виде линейного отображения над любым достаточно большим полем. Геометрия $G_k(P)$ является гаммоидом, а каждый гаммоид в свою очередь является подгеометрией геометрии $G_2(P)$ для некоторого частично упорядоченного множества P высоты три.

0. ВВЕДЕНИЕ

В работе [7] Грин и Клейтман ввели экстремальные понятия шпернеровых k-семейств и k-насыщенных разбиений на цепи в конечном частично упорядоченном множестве P, а также доказали несколько красивых теорем. Позднее эти результаты привели Грина (см. [8]) к предположению, что некоторые подмножества множества P, связанные с k-насыщенными разбиениями на цепи, являются независимыми множествами комбинаторной геометрии [2] на множестве P (здесь и ниже мы используем термин «геометрия» вместо «предгеометрия» или «матроид»). Доказательство гипотезы Грина впервые опубликовано в [4] вместе с другими результатами о структуре и свойствах геометрий, возникающих таким образом. Некоторые из результатов работы [4] приведены в настоящей статье. Доказательства только намечены, а в ряде случаев и вовсе опущены.

---

[1]) Dowling T. A., Denig W. A. Geometries associated with partially ordered sets.

1. ШПЕРНЕРОВЫ k-СЕМЕЙСТВА И НАСЫЩЕННЫЕ РАЗБИЕНИЯ НА ЦЕПИ

Этот раздел посвящен главным образом рассмотрению определений и теорем, опубликованных в [7].

Подмножество конечного частично упорядоченного множества P называется *k-семейством*, если оно не содержит цепи длины (размера) $k+1$, или, что эквивалентно, может быть представлено в виде объединения k антицепей. Пусть $d_k(P)$ — максимальный объем k-семейства в P. Тогда k-семейство объема $d_k(P)$ называется *шпернеровым k-семейством*. Основная зависимость между 1-семейством (антицепями) и разбиениями множества P на цепи установлена в фундаментальной теореме Дилуорса [7]:

Теорема 1. *Конечное частично упорядоченное множество P может быть разбито на $d_1(P)$ цепей.*

Всякое разбиение $\mathscr{C}$ множества P на цепи определяет верхнюю границу для объема k-семейства и, следовательно, для $d_k(P)$. Так как k-семейство A может пересекать цепь C самое большее в $\min\{k, |C|\}$ элементов, то

$$|A| = \sum_{C\in\mathscr{C}} |A \cap C| \leqslant \beta_k(\mathscr{C}),$$

где

$$\beta_k(\mathscr{C}) = \sum_{C\in\mathscr{C}} \min\{k, |C|\}.$$

Таким образом, для всякого разбиения $\mathscr{C}$ множества P на цепи имеет место

$$d_k(P) \leqslant \beta_k(\mathscr{C}).$$

В случае равенства $\mathscr{C}$ называется *k-насыщенным*. Поскольку $\beta_1(\mathscr{C})$ как раз число цепей в $\mathscr{C}$, то теорема 1 устанавливает существование 1-насыщенных разбиений на цепи.

Теорема 1 обобщена для произвольного k Грином и Клейтманом в [7]

Теорема 2. *Для всякого $k \geqslant 0$ существует k-насыщенное разбиение на цепи.*

Рассмотрим разбиение $\mathscr{C}$ на цепи. Положим

$$\mathscr{C}_k = \{C \in \mathscr{C} : |C| \geqslant k\}$$

и определим

$$a_k(\mathscr{C}) = \sum_{C\in\mathscr{C}_k} (|C| - k).$$

Тогда получим, что

$$a_k(\mathscr{C})+\beta_k(\mathscr{C})=|P|,$$

и, следовательно,

$$\alpha_k(\mathscr{C})\leqslant|P|-d_k(P),$$

причем равенство имеет место в том и только том случае, когда $\mathscr{C}$ является k-насыщенным. Очевидно, что свойство k-насыщенности разбиения на цепи зависит только от его множества $\mathscr{C}_k$ цепей длины $\geqslant k$.

Введем целые числа $\Delta_k(P)$:

$$\Delta_k(P)=d_k(P)-d_{k-1}(P).$$

Тогда, поскольку $\alpha_{k-1}(\mathscr{C})=\alpha_k(\mathscr{C})+|\mathscr{C}_k|$, k-насыщенное разбиение $\mathscr{C}$ на цепи удовлетворяет соотношению

$$|\mathscr{C}_k|=d_k(P)-\beta_{k-1}(\mathscr{C})$$

и, таким образом,

$$|\mathscr{C}_k|\leqslant\Delta_k(P),$$

причем равенство имеет место в том и только том случае, когда $\mathscr{C}$ является к тому же $(k-1)$-насыщенным. Будем называть такое разбиение $(k, k-1)$-*насыщенным* разбиением на цепи. Ясно, что это свойство также зависит только от $\mathscr{C}_k$. А то, что такое разбиение существует, доказано в [7]:

Теорема 3. *Для всякого $k\geqslant 1$ существует $(k, k-1)$-насыщенное разбиение на цепи.*

Эта теорема является наилучшей в том смысле, что, как показывают примеры, может не оказаться разбиения на цепи, являющегося k-насыщенным для трех последовательных значений k.

Из других примеров в [7] видно, что шпернерово $(k-1)$-семейство A не обязано содержаться в шпернеровом k-семействе, и, таким образом, неравенство $\Delta_k(P)\geqslant d_1(P-A)$ может оказаться строгим. Поэтому неравенства следующей теоремы [7] не вытекают непосредственно из предыдущих рассуждений. (Здесь *высотой* частично упорядоченного множества называется длина его самой длинной цепи.)

Теорема 4. *Пусть P — частично упорядоченное множество высоты l. Тогда*

$$\Delta_1\geqslant\Delta_2\geqslant\ldots\geqslant\Delta_l>0;$$

но $\Delta_k=0$ для $k>l$.

2. ГИПОТЕЗА ГРИНА

Пусть задано разбиение $\mathscr{C}$ множества P на цепи. Обозначим через $\operatorname{Top}\mathscr{C}_k$ множество наибольших элементов цепей семейства $\mathscr{C}_k$. Грин и Клейтман доказали следующую теорему [7].

Теорема 5. *Пусть X — множество максимальных элементов конечного частично упорядоченного множества Q и пусть $P = Q - X$. Тогда функция r_k, определенная на подмножествах множества X посредством*

$$r_k(A) = |A| - \delta_k(A),$$

где

$$\delta_k(A) = d_k(A \cup P) - d_k(P),$$

является функцией ранга комбинаторной геометрии на X. Некоторое подмножество A множества X независимо тогда и только тогда, когда существует взаимно однозначное «опускающее» отображение φ:

$A \to \mathrm{Top}\,\mathscr{C}_k$ (т. е. $\varphi(a) < a$ для $a \in A$) для некоторого k-насыщенного разбиения $\mathscr{C}$ множества P на цепи.

Для любых множеств X и Y соотношение $R \subseteq X \times Y$ и геометрия H на Y *индуцируют* геометрию $G = R^{-1}H$ на X, независимыми множествами которой являются те подмножества множества X, которые могут быть взаимно однозначно отображены посредством R в некоторое независимое множество геометрии $H(Y)$. (См., например, [2] или [10].)

Теорема 5 естественным образом привела Грина (см. [8]) к следующей гипотезе:

Те подмножества $I \subseteq P$, для которых $I \subseteq \mathrm{Top}\,\mathscr{C}_k$ относительно некоторого k-насыщенного разбиения $\mathscr{C}$ на цепи, являются независимыми множествами комбинаторной геометрии на P.

Из этой гипотезы следует, что геометрия теоремы 5 может рассматриваться как индуцированная отношением $R \subseteq X \times P$, заданным условием

$$xRp, \quad \text{если} \quad x > p \text{ в } Q.$$

3. k-СОЕДИНЕНИЯ И РАЗБИЕНИЯ НА ЦЕПИ

Пусть Γ — конечный ориентированный граф. Рассмотрим произвольное множество $\mathscr{A}$ путей в Γ, не пересекающихся по вершинам. Обозначим через $\mathrm{In}\,\mathscr{A}$ множество начальных вершин, а через $\mathrm{Ter}\,\mathscr{A}$ множество конечных вершин путей в $\mathscr{A}$. Пусть X, Y — подмножества множества вершин V графа Γ. Тогда множество $\mathscr{A}$ путей в Γ, не пересекающихся по вершинам, такое, что $\mathrm{In}\,\mathscr{A} \subseteq X$ и $\mathrm{Ter}\,\mathscr{A} \subseteq Y$, называется (X, Y)-соединением в Γ. Мейсон показал (см. [10]), что подмножества $\mathrm{In}\,\mathscr{A}$ для $\mathscr{A}$ (X, Y)-соединения в графе Γ являются независимыми множествами комбинаторной геометрии $G = (\Gamma;\ X,\ Y)$ на X, называемой *гаммоидом*. Геометрия $(\Gamma;\ V,\ Y)$ называется *строгим гаммоидом*. Множество Y является *отмеченным бази-*

сом в этом представлении геометрии G. Всякий базис гаммоида может быть рассмотрен как отмеченный базис относительно некоторого ориентированного графа на V. Если F — замкнутое множество строгого гаммоида (Γ; V, Y), то подмножество $F_0 = \{x \in F : \Gamma x \nsubseteq F\}$ является базисом из F, где Γx — множество вершин, соединенных с x ребрами графа Γ.

Пусть P_0, P_1, ..., P_k суть $(k+1)$ непересекающихся экземпляров одного и того же конечного частично упорядоченного множества P. Обозначим образ элемента $x \in P$ (соответственно множества $A \subseteq P$) при канонической биекции $P_i \to P$ через $x_i \in P_i$ (соответственно через $A_i \subseteq P_i$). Следуя Грину (см. [8]), определим ориентированный граф $\Gamma_k(P)$ с множеством вершин $V = P_0 \cup P_1 \cup \ldots \cup P_k$ и множеством ребер $E = \{(x_{i-1}, \ '_i) : x < y, \ 1 \leqslant i \leqslant k\}$. Тогда (P_0, P_k)-соединение в ориентированном графе $\Gamma_k(P)$ будет называться *k-соединением*. Максимальное число путей в k-соединении обозначается через $\mu_k(P)$.

С разбиением $\mathscr{C}$ множества P на цепи мы можем связать k-соединение $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathscr{C}_k)$, пути которого являются сегментами длины $k+1$ в цепях семейства $\mathscr{C}_k$. Объем k-соединения $\mathscr{A}$ равен $\alpha_k(\mathscr{C})$, поэтому $\mu_k(P) \geqslant |P| - d_k(P)$, так как $\alpha_k(\mathscr{C}) = |P| - d_k(P)$, когда $\mathscr{C}$ — k-насыщенное разбиение на цепи. Следующая теорема сформулирована в [8].

Теорема 6. *Максимальный объем k-соединения в $\Gamma_k(P)$ равен $\mu_k(P) = |P| - d_k(P)$.*

Схема доказательства. Если A — шпернерово k-семейство и $x \in P - A$, то не существует никакого пути из A_0 в A_k в подграфе $\Gamma_k(A)$ графа $\Gamma_k(P)$, но существует путь из $A_0 \cup \{x_0\}$ в $A_0 \cup \{x_k\}$ в графе $\Gamma_k(A \cup x)$. Каждый такой путь должен содержать x_i для некоторого i, однозначно определенного и зависящего от x. Можно показать, что множество S, состоящее из этих x_i, отделяет P_0 от P_k в графе $\Gamma_k(P)$ и поэтому

$$\mu_k(P) \leqslant |S| = |P| - d_k(P).$$

Фалкерсон (см. [6]) заметил, что ребра максимального 1-соединения (согласования) в $\Gamma_1(P)$ могут быть соединены так, чтобы они образовывали минимальное разбиение множества P на цепи, и применил теорему Кёнига о двудольных графах для получения иного доказательства теоремы Дилуорса. Из этого соотношения между максимальными согласованиями $\mathscr{A}$ и минимальными разбиениями $\mathscr{C}$ на цепи получаем, что $P_1 \setminus \mathrm{Ter}\,\mathscr{A} = (\mathrm{Top}\,\mathscr{C})_1$. Поскольку $\mathrm{Ter}\,\mathscr{A}$ является базисом трансверсальной геометрии на множестве P_1, представленной графом $\Gamma_1(P)$, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 7 (см. [6, 8]). *Подмножества* $\operatorname{Top}\mathscr{C}$, *где* $\mathscr{C}$ — *минимальное разбиение множества* P *на цепи, являются базисами двойственной трансверсальной геометрии* $G_1(P)$ *на* P.

Дениг (см. [4]) получил конструктивную характеризацию этих двойственных трансверсальных геометрий $G(X)$, которые реализуются как $G_1(X)$ для некоторого частичного упорядочения на X.

4. $(k, k-1)$-СОЕДИНЕНИЯ И РАЗБИЕНИЯ НА ЦЕПИ

Для того чтобы расширить рассуждение Фалкерсона, проведенное для $k=1$, будем рассматривать множество $P_1 \setminus \operatorname{Ter}\mathscr{A}$ в $\Gamma_1(P)$ как совокупность множеств начальных вершин множества $\mathscr{B}$ путей длины $k=1$ из P_1 в P_k, которые не пересекаются с путями из $\mathscr{A}$. Вообще определим $(k, k-1)$-соединение в графе $\Gamma_k(P)$ как пару $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$, такую, что

(1) $\mathscr{A}$ является (P_0, P_k)-соединением,
(2) $\mathscr{B}$ является (P_1, P_k)-соединением,
(3) $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ является $(P_0 \cup P_1, P_k)$-соединением.

Объемом $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ является пара $(|\mathscr{A}|, |\mathscr{B}|)$. Будем считать $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ *максимальным* $(k, k-1)$-соединением, если для всякого другого $(k, k-1)$-соединения $(\mathscr{A}', \mathscr{B}')$

$$|\mathscr{A}| \geqslant |\mathscr{A}'| \quad \text{и} \quad |\mathscr{A} \cup \mathscr{B}| \geqslant |\mathscr{A}' \cup \mathscr{B}'|.$$

Если $\mathscr{A}^T$ обозначает (P_1, P_k)-соединение, полученное вычеркиванием начальных вершин путей из $\mathscr{A}$, то $\mathscr{A}^T \cup \mathscr{B}$ в $(k-1)$-соединении в индуцированном подграфе на $P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_k$ изоморфно графу $\Gamma_{k-1}(P)$. Итак, $|\mathscr{A} \cup \mathscr{B}| = |\mathscr{A}^T \cup \mathscr{B}| \leqslant \leqslant \mu_{k-1}(P) = |P| - d_{k-1}(P)$. Таким образом, для любого максимального $(k, k-1)$-соединения имеем $|\mathscr{A}| = |P| - d_k(P)$ и $|\mathscr{B}| \leqslant \leqslant \Delta_k(P)$.

Пусть $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathscr{C}_k)$ — множество путей из P_1 в P_k в $\Gamma_k(P)$, соответствующих максимальным сегментам длины k на цепях семейства $\mathscr{C}_k$ заданного разбиения $\mathscr{C}$ множества P на цепи. Тогда если $\mathscr{C}$ является k-насыщенным, то $|\mathscr{B}| = |\mathscr{C}_k| \leqslant \Delta_k(P)$, причем равенство имеет место, когда разбиение $\mathscr{C}$ является $(k-1)$-насыщенным. Выбирая разбиение $\mathscr{C}$ на цепи $(k, k-1)$-насыщенным, мы получим следующую теорему:

Теорема 8. *Объем максимального* $(k, k-1)$-*соединения в графе* $\Gamma_k(P)$ *равен* $(|P| - d_k(P), \Delta_k(P))$.

Хотя $(k, k-1)$-насыщенное разбиение $\mathscr{C}$ на цепи дает максимальное $(k, k-1)$-соединение $(\mathscr{A}_k(\mathscr{C}), \mathscr{B}(\mathscr{C}))$ на графе $\Gamma_k(P)$, не все максимальные соединения получаются таким образом, если $k > 1$. Однако нам потребуется только частичная справедливость обратного утверждения. Следующая теорема является основным шагом в доказательстве гипотезы Грина. Поэтому приведем несколько подробней схему доказательства.

Теорема 9. *Пусть* $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ — *максимальное* $(k, k-1)$-*соединение в графе* $\Gamma_k(P)$. *Тогда существует* $(k, k-1)$-*насыщенное разбиение* $\mathscr{C}$ *множества* P *на цепи, такое, что* $(\operatorname{Top}\mathscr{C}_k)_1 = \operatorname{In}\mathscr{B}$.

Схема доказательства. Доказательство проведем по индукции относительно $|P|$. Рассмотрим два случая.

В первом случае некоторый максимальный элемент b частично упорядоченного множества P удовлетворяет $d_k(P \setminus b) = d_k(P)$. Тогда из результата Грина и Клейтмана (см. [7], теорема 3.10, утверждение (1) в доказательстве) следует, что $d_{k-1}(P \setminus b) = d_{k-1}(P)$. Поскольку $\mu_k(P \setminus b) = \mu_k(P) - 1$, $b_0 \in \operatorname{In}\mathscr{A}$ и мы можем предположить, что a_1 — вторая вершина $\mathscr{A}$-пути A, содержащего b_0. Затем мы покажем, что $b_1 \in \operatorname{In}\mathscr{B}$, и пусть B будет $\mathscr{B}$-путь, содержащий вершину b_1. Удалением A из $\mathscr{A}$ и заменой B на A^T в $\mathscr{B}$ определим максимальное $(k, k-1)$-соединение в графе $\Gamma_k(P \setminus b)$. По предположению индукции существует $(k, k-1)$-насыщенное разбиение $\mathscr{D}$ множества $P \setminus \{b\}$ на цепи, такое, что $(\operatorname{Top}\mathscr{D}_k)_1 - (\operatorname{In}\mathscr{B} \setminus \{b_1\}) \cup \{a_1\}$. Присоединяя элемент b к цепи разбиения $\mathscr{D}_k$ с наибольшим элементом a, получаем искомое разбиение множества P на цепи.

В случае 2 каждый максимальный элемент b частично упорядоченного множества P удовлетворяет $d_k(P \setminus b) = d_k(P) - 1$, отсюда следует, что $\Delta_k(P) \geqslant \Delta_k(P \setminus b)$. Рассмотрим элемент $b \in \operatorname{Top}\mathscr{C}'_k$ для некоторого $(k, k-1)$-насыщенного разбиения $\mathscr{C}'$ на цепи. Предположим, что $b_1 \notin \operatorname{In}\mathscr{B}$, и покажем, что b — максимальный элемент в P. Следовательно, никакой путь из $\mathscr{B}$ не содержит b_i. На следующем шаге покажем, что существует максимальное $(k, k-1)$-соединение $(\mathscr{A}', \mathscr{B})$, такое, что $b_0 \notin \operatorname{In}\mathscr{A}'$ и никакое b_i не лежит на пути из $\mathscr{A}'$. Докажем это следующим образом: поскольку $\mu_k(P \setminus b) = \mu_k(P)$, мы можем найти максимальное k-соединение $\mathscr{A}''$, такое, что $b_0 \notin \operatorname{In}\mathscr{A}''$. Замыкание F множества P_0 в строгом гаммоиде $(\Gamma_k; V, P_k)$ не может содержать вершину пути из $\mathscr{B}$, а каждый путь из $\mathscr{A}''$ пересекается с $\mathscr{A}$-путем в единственной вершине F-базиса $F_0 = \{x \in F\colon \ \Gamma_x \nsubseteq F\}$. Каждый $\mathscr{A}'$-путь получаем путем присоединения начального сегмента $\mathscr{A}''$-пути, предшествующего вершине из F_0, к конечному сегменту $\mathscr{A}$-пути, содержащего ту же вершину из F_0.

Тогда $(\mathscr{A}', \mathscr{B})$ является максимальным $(k, k-1)$-соединением в $P \setminus \{b\}$, и по предположению индукции существует

$(k, k-1)$-насыщенное разбиение $\mathscr{D}$ множества $P\setminus\{b\}$ на цепи, такое, что $(\mathrm{Top}\,\mathscr{D}_k)_1 = \mathrm{In}\,\mathscr{B}$. Следовательно, $\mathscr{C} = \mathscr{D} \cup \{b\}$ удовлетворяет условиям теоремы.

5. ГЕОМЕТРИЯ $G_k(P)$

Рассмотрим теперь строгий гаммоид $G = (\Gamma_k;\ V,\ P_k)$ на $V = P_0 \cup P_1 \cup \ldots \cup P_k$. Базисы сужения $G(P_0)$ являются множествами $\mathrm{In}\,\mathscr{A}$ для $\mathscr{A}$-максимального k-соединения в графе $\Gamma_k(P)$, а базисы сужения $G(P_0 \cup P_1)$ — множествами $\mathrm{In}\,\mathscr{A} \cup \mathrm{In}\,\mathscr{B}$ для $(\mathscr{A},\ \mathscr{B})$ — $(k,\ k-1)$-соединения в графе $\Gamma_k(P)$, такого, что $|\mathscr{A} \cup \mathscr{B}| = |P| - d_{k-1}(P)$. Поэтому базисы минора $G(P_0 \cup \cup P_1)/P_0$ являются множествами $\mathrm{In}\,\mathscr{B}$ для $(\mathscr{A},\ \mathscr{B})$-максимального $(k,\ k-1)$-соединения в графе $\Gamma_k(P)$. Так как минор гаммоида является гаммоидом (см. [9]), мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 10. *Подмножества* $\mathrm{Top}\,\mathscr{C}_k$ для $\mathscr{C}$, $(k,\ k-1)$-*насыщенного разбиения частично упорядоченного множества P на цепи суть базисы комбинаторной геометрии $G_k(P)$ на P. Эта геометрия является гаммоидом ранга $\Delta_k(P)$.*

То, что эта геометрия идентична геометрии, упоминающейся в гипотезе Грина, вытекает из следующей теоремы.

Теорема 11. *Если $\mathscr{C}$ является k-насыщенным разбиением множества P на цепи, то существует $(k,\ k-1)$-насыщенное разбиение $\mathscr{C}'$ на цепи, такое, что* $\mathrm{Top}\,\mathscr{C}_k \subseteq \mathrm{Top}\,\mathscr{C}'_k$.

Доказательство. Пусть $(\mathscr{A},\ \mathscr{B})$ будет $(k,\ k-1)$-соединением, связанным с разбиением $\mathscr{C}$. Тогда $\mathrm{In}\,\mathscr{A} \cup \mathrm{In}\,\mathscr{B}$ является независимым в $G(P_0 \cup P_1)$, и поскольку $\mathscr{C}$ есть k-насыщенное разбиение на цепи, то множество $\mathrm{In}\,\mathscr{A}$ — базис в $G(P_0)$. Таким образом, множество $\mathrm{In}\,\mathscr{B}$ является независимым в $G(P_0 \cup P_1)/P_0$ и поэтому содержится в базисе $\mathrm{In}\,\mathscr{B}'$. Но $\mathrm{In}\,\mathscr{B} = (\mathrm{Top}\,\mathscr{C}_k)_1$ и $\mathrm{In}\,\mathscr{B}' = (\mathrm{Top}\,\mathscr{C}'_k)_1$ для некоторого $(k,\ k-1)$-насыщенного разбиения $\mathscr{C}'$ множества P на цепи.

Следствие. *Гипотеза Грина справедлива.*

6. СИЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ $G_{k-1}(P) \to G_k(P)$

Если G и H — комбинаторные геометрии на одном и том же множестве X и тождественное отображение на X индуцирует *сильное отображение* из G в H, т. е. если каждое H-замкнутое множество является G-замкнутым, то мы говорим, что $G \to H$ является сильным отображением. Сильное отображение $G \to H$ является *элементарным*, если $r(G) = r(H) + 1$, где r — ранг. Элементарное сильное отображение $G \to H$ однозначно характеризуется посредством одноточечного расширения (см. [2]) геометрии G, сжатие которого дает геометрию H. Элементарное сильное отображение называется *главным* (см. [5]), если модулярное сечение, определяющее расширение, является главным порядковым фильтром в решетке замкнутых множеств геометрии G, т. е. если обладает единственной порождающей поверхностью. Пусть F — такая порождающая поверхность, а r_G и r_H — функции ранга геометрий G и H. Тогда $r_H(A) = r_G(A) - 1$ или $r_H(A) = r_G(A)$ в зависимости от того, содержится или не содержится поверхность F в G-замыкании множества A.

Пусть $F(X)$ обозначает свободную геометрию на множестве X, т. е. геометрию, в которой все подмножества множества X замкнуты. Тогда для любой геометрии $G(X)$ отображение $F(X) \to G(X)$ является сильным отображением, *отображением замыкания* геометрии $G(X)$.

Следующая теорема принадлежит Даулингу и Келли (см. [5]), а также Брауну (см. 1]).

Теорема 12. *Геометрия $G(X)$ является двсйственной трансверсальной геометрией тогда и только тогда, когда отображение замыкания $F(X) \to G(X)$ может быть разложено на главные сильные отображения.*

Доказательство показывает, что G-замыкания порождающих поверхностей в главном разложении дают единственное максимальное представление трансверсальной геометрии $G^*(X)$.

Другая характеризация двойственных трансверсальных геометрий дана Инглтоном и Пиффом (см. [9]):

Теорема 13. *Геометрия $G(X)$ является двойственной трансверсальной геометрией тогда и только тогда, когда она является строгим гаммоидом.*

Следующая теорема проливает свет на связь между этими двумя характеризациями двойственных трансверсальных геометрий.

Теорема 14. *Пусть Y — подмножество множества вершин V ориентированного графа* Γ *и пусть $y \in Y$. Тогда*

$$(\Gamma;\ V,\ Y) \to (\Gamma;\ V,\ Y \setminus y)$$

является главным сильным отображением между строгими гаммоидами, порожденным замыканием множества $\Gamma_y \cup \{y\}$.

Опустим доказательство этой теоремы. Упомянем несколько интересных следствий.

Следствие 1. *Пусть X, Y, Z — подмножества множества вершин V ориентированного графа Γ, и пусть каждый путь из X* в *Z пересекает подмножество Y. Тогда* $(\Gamma;\ X,\ Y)\to\to(\Gamma;\ X,\ Z)$ *является сильным отображением гаммоидов*

Доказательство. Повторным применением теоремы 14 получаем, что отображение $(\Gamma;\ V,\ Y\cup Z)\to(\Gamma;\ V,\ Z)$ является сильным, и следовательно, сужение $(\Gamma;\ X,\ Y\cup Z)\to(\Gamma;\ X,\ Z)$ также является сильным. Но подмножество $A\subseteq X$ связано в $Y\cup Z$ тогда и только тогда, когда X связано в Y. Поэтому $(\Gamma;\ X,\ Y\cup Z)=(\Gamma;\ X,\ Y)$.

Следствие 2. *Для каждого $k\geqslant 1$ отображение*

$$G_{k-1}(P)\to G_k(P)$$

является сильным.

Доказательство. Поскольку геометрия $G_0(P)$ является свободной, то для $k=1$ следствие справедливо. Пусть $k\geqslant 2$, $V=P_0\cup P_1\cup\ldots\cup P_k$. Рассмотрим строгие гаммоиды $G=(\Gamma_k;\ V,\ P_{k-1}\cup P_k)$ и $H=(\Gamma_k;\ V,\ P_k)$. В силу теоремы 14, $G\to H$ — сильное отображение, и, следовательно, отображение миноров

$$G(P_0\cup P_1)/P_0\to H(P_0\cup P_1)/P_0$$

является сильным. Но в силу следствия 1 $G(P_0\cup P_1)=(\Gamma_k;\ P_0\cup P_1,\ P_{k-1}\cup P_k)=(\Gamma_k;\ P_0\cup P_1,\ P_{k-1})=(\Gamma_{k-1};\ P_0\cup P_1,\ P_{k-1})$, и, таким образом, $G(P_0\cup P_1)/P_0=G_{k-1}(P)$, в то время как $H(P_0\cup P_1)/P_0=G_k(P)$.

Следствие 3 (ср. с теоремой 4). *Пусть l — высота частично упорядоченного множества P. Тогда $\Delta_1\geqslant\Delta_2\geqslant\ldots\geqslant\Delta_l>0$ и $G_{k-1}(P)=G_k(P)$ в том и только том случае, когда $\Delta_{k-1}=\Delta_k$.*

Доказательство. Если $G\to H$ — сильное отображение, то $r(G)\geqslant r(H)$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $G=H$ (см. [2]). Поскольку $r(G_k)=\Delta_k$, то следствие доказано.

Таким образом, с каждым конечным частично упорядоченным множеством P мы можем связать такую *сильную последовательность* $(G_1,\ G_2,\ \ldots,\ G_l)$ геометрий на множестве P, где l — высота частично упорядоченного множества P, что $r(G_i)=\Delta_i$ и $G_i\to G_j$ — сильное отображение всякий раз, когда $i\leqslant j$. Естественно поставить вопрос, как много информации о частичном порядке множества P сохраняется в *сильной последовательности* геометрий, связанной с множеством P. В настоящее время получены лишь частичные ответы на поставленный вопрос (см. [4]). Следующий пример (см. рис. 1) показывает, что сильная последовательность геометрий не определяет частичный порядок.

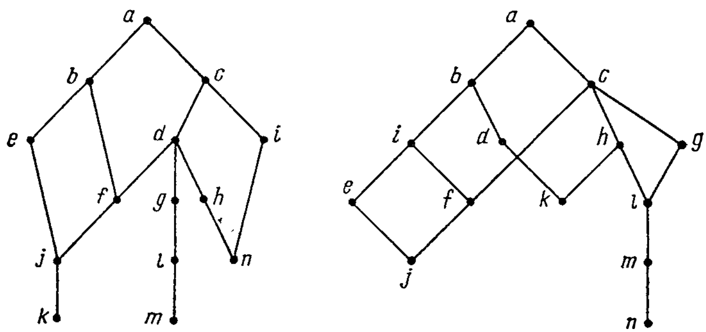


Рис. 1. Два частичных порядка с одной и той же сильной последовательностью. Последовательность (5, 3, 2, 2, 1, 1) является Δ-последовательностью.

7. ЛИНЕЙНЫЕ СИЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Представлением геометрии $G(X)$ над полем K называется отображение σ: $X \to K^{r(G)}$, такое, что $I \subseteq X$ независимо в геометрии G тогда и только тогда, когда $\sigma | I$ инъективно и $\sigma(I)$ линейно независимо в $K^{r(G)}$. Геометрия G является *линейной* над K, если существует представление геометрии G над полем K.

Представлением сильного отображения $G \to H$ над полем K называется линейное отображение L: $K^{r(G)} \to K^{r(H)}$, такое, что $L \circ \sigma$ является представлением геометрии H над полем K для всякого представления σ геометрии G над K. Конечно, такие отображения могут существовать только тогда, когда как G, так и H являются линейными над полем K. Мы говорим, что $G \to H$ *линейно* над полем K, если существует представление сильного отображения $G \to H$ над K.

Теорема 15. *Пусть $G \to H$ — главное сильное отображение, геометрия G линейна над K и порядок поля K достаточно большой. Тогда $G \to H$ является линейным над K. В частности, сильное отображение $G \to H$ является линейным над некоторым расширением поля K.*

Схема доказательства. Пусть $t = r(F)$, $n = r(G)$. Выберем базис $b_1, b_2, \ldots, b_t$ из F и расширим его до базиса $b_1, b_2, \ldots, b_n$ геометрии G. Пусть σ — представление геометрии G, такое, что $\sigma(b_i) = \mathbf{e}_i$, где $\mathbf{e}_i$ — i-ый единичный вектор стандартного базиса пространства K^n. Так как X конечно, то для достаточно большого поля K существует вектор $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_t, 0, \ldots, 0)$ в линейной оболочке $\sigma(F)$, такой, что он не лежит в линейной оболочке $\sigma(F) \cap \sigma(C)$ для всякой гиперплоскости C геометрии G, не содержащей F. Таким образом, $u_i \neq 0$ для $i = 1, 2, \ldots, t$, и мы можем предполагать, что $u_1 = 1$. Определим линейное отображение $L\colon K^n \to K^{n-1}$, положив

$$L(\mathbf{e}_1) = (u_2, \ldots, u_t, 0, \ldots, 0),$$
$$L(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_{i-1}, \quad 2 \leqslant i \leqslant n,$$

где $\mathbf{e}'_i$ — единичные векторы стандартного базиса пространства K^{n-1}. То, что $L \circ \sigma$ — представление геометрии H, может быть доказано с помощью теоремы Коши — Бине.

Следствие. *Сильное отображение $G_{k-1}(P) \to G_k(P)$ является линейным над каждым достаточно большим полем K.*

Доказательство. Известно (см. [10]), что гаммоид линеен над каждым достаточно большим полем. Пусть геометрии G и H будут такими же, как в доказательстве следствия 2 теоремы 14. Тогда сильное отображение $G \to H$ по теореме 14 разлагается в произведение главных сильных отображений и, следовательно, по теореме 15 является линейным над достаточно большим полем K.

Сужение на миноры линейного отображения линейно, и, таким образом,

$$G_{k-1}(P) = G(P_0 \cup P_1)/P_0 \to H(P_0 \cup P_1)/P_0 = G_k(P)$$

является линейным.

8. ГАММОИДЫ В $G_2(P)$

Миноры гаммоидов являются гаммоидами (см. [9]), поэтому геометрии $G_k(P)$ — гаммоиды. В силу этого несколько неожидан следующий результат.

Теорема 16. *Пусть $G(X)$ — гаммоид. Тогда существует множество S, не пересекающееся с X, и частичный порядок на множестве $P = X \cup S$, такой, что*

$$G_2(P) = G(X) \oplus H(S),$$

где $H(S)$ полностью состоит из петель и перешейков[1]*.*

Доказательство. По теореме Инглтона и Пиффа (см. [9]) каждый гаммоид является сжатием трансверсальной геометрии. Таким образом, $G(X) = H(X \cup Y)/Y$ для некоторой трансверсальной геометрии $H(X \cup Y)$. Мы можем предположить, что Y независимо в H, и пусть $R \subseteq (X \cup Y) \times Z$ будет представлением

[1] Перешейком называется точка, не лежащая ни в каком цикле матроида. — *Прим. перев.*

геометрии H, где $|Z| = r(H)$. Пусть множество W, такое, что $|W| = |Y|$ не пересекается с X, Y, и Z, и пусть σ: $W \to Y$ — биекция. Определим частичный порядок на множестве $P = X \cup (Y \cup Z \cup W)$, положив $a > b$, если имеет место одно из следующих условий:

$$(1)\ a \in X \cup Y, \quad b \in Z, \quad aRb;$$
$$(2)\ a \in W, \quad b \in Y, \quad \sigma(a) = b;$$
$$(3)\ a \in W, \quad b \in Z, \quad \sigma(a) = Rb.$$

В таком случае множество P является частично упорядоченным высоты 3.

Кроме того, нетрудно показать, что $X \cup Y$ — шпернерово 1-семейство, $(X \cup Y) \cup Z$ — шпернерово 2-семейство и что каждое (2,1)-насыщенное разбиение на цепи имеет $|W|$ цепей длины 3, наибольшие элементы которых являются в точности элементами множества W, и $r(G)$ цепей длины 2, наибольшие элементы которых образуют некоторый базис геометрии G. Таким образом, базисы гаммоида $G_2(P)$ суть $W \cup B$, где B — базис геометрии G. Поэтому W — множество перешейков, а $Y \cup Z$ — множество петель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brown T. J. Transverasal theory and F-products, preprint.
2. Crapo H., Rota G. C. Combinatorial Geometries, MIT Press, Cambridge, Mass. (1970).
3. Dilworth R. P. A decomposition theorem for partially ordered sets, Ann. of Math., 51 (1950), 161—166.
4. Denig W. A. A class of combinatorial geometries arising from partially ordered sets, Ph. D. dissertation, Ohio State University (1976).
5. Dowling T. A., Kelly D. G. Elementary strong maps and transversal geometries, Discrete Mathematics, 7 (1974), 209—224.
6. Fulkerson D. R. A note on Dilworth's theorem for partially ordered sets, Proc. Amer. Math. Soc., 7 (1956), 701—702.
7. Greene C., Kleitman D. J. The structure of Sperner k-families, J. Combinatorial Theory, A 20 (1976), 41—68.
8. Greene C. Sperner families and partitions of a partially ordered set. Combinatorics: Proceedings of the Advanced Study Institute on Combinatorics held at Nijenrode Castle (ed. by J. H. Van Lint and M. Hall), Amsterdam, Part 2, 91—106.
9. Ingleton A. W., Piff M. J. Gammoids and transversal matroids, J. Combinatorial Theory (B) 15 (1973), 51—68.
10. Mason J. H. On a class of matroids arising from paths in graphs, Proc. London Math. Soc., III, Ser. 25 (1972), 55—74.

ТРАНСВЕРСАЛЬНЫЕ МАТРОИДЫ И РОДСТВЕННЫЕ СТРУКТУРЫ[1])

Э. У. Инглтон

О трансверсальных матроидах (с частичными трансверсалями семейства множеств в качестве независимых подмножеств) и о более общей теории матроидов, получаемых из графов, имеется обширная литература. В настоящей статье дается обзор известных результатов и некоторых все еще не решенных проблем. Рассматриваются вопросы: характеризации трансверсальных матроидов и их представлений, стандартные операции на трансверсальных матроидах, гаммоидах и сильных гаммоидах, базисная упорядочиваемость матроидов. Вводится и обсуждается понятие полного класса матроидов (гаммоиды образуют простейший такой класс).

1. СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ И ТРАНСВЕРСАЛЬНЫЕ МАТРОИДЫ

Впервые взаимосвязь теории трансверсалей и теории матроидов была установлена в 1942 г. Радо [35], но лишь более чем через 20 лет Эдмондс и Фалкерсон [18] впервые явно доказали, что частичные трансверсали (конечного) семейства подмножеств (конечного) множества являются независимыми множествами матроида. Настоящая работа посвящена обзору некоторых полученных с тех пор результатов о классе $\mathscr{T}$ таких трансверсальных и других, тесно связанных с ними матроидов. В своем обзоре мы ограничимся рассмотрением только конечных ситуаций, отбросив массу интересных результатов об их бесконечных обобщениях.

Здесь не делается никаких попыток придерживаться исторического порядка. Вместо этого чтобы подчеркнуть геометрический подход к данной теории, начнем с описания геометрической конфигурации, которая, казалось бы, не имеет непосредственного отношения к теории трансверсалей. Пусть

$$V = \{v_1, \ldots, v_r\}$$

[1]) Ingleton A. W. Transversal matroids and related structures.

— множество r линейно независимых элементов векторного пространства U и будем рассматривать множество V как *r-симплекс* (точнее как множество вершин r-симплекса). Если K является k-подмножеством множества индексов $I=\{1, \ldots, r\}$, то подмножество вершин $V(K)=\{v_i: i \in K\}$ порождает k-мерное подпространство (k-поверхность), которое называется *k-гранью* симплекса ($k=1, \ldots, r$). Симплекс наиболее естественно представляется в проективном или аффинном пространстве, но эта точка зрения должна приниматься с осторожностью, поскольку в дальнейшем нам могут понадобиться дополнительные элементы, расположенные на вершинах, но отличные от них (т. е. расположенные на 1-гранях).

Теперь пусть T — подмножество множества U, не пересекающееся с V, элементы которого «свободно размещаются» на гранях множества V. Неформально это означает, что не существует никаких соотношений между элементами множества

$$E=V \cup T,$$

кроме тех, что наложены размерностями граней, на которых они лежат. Формально элемент x множества E принадлежит линейной оболочке $\langle X \rangle$ подмножества X множества T тогда и только тогда, когда или $x \in X$, или существуют подмножества $Y\,(Y \subseteq X)$ и $K\,(K \subseteq I)$, такие, что

$$\langle Y \rangle = F(K) \quad \text{и} \quad x \in F(K).$$

Получившаяся конфигурация $\mathbf{S}$ на множестве E со структурой независимости, индуцированной структурой U, названа Брилавским [13] свободной симплициальной предгеометрией [1]). Мы будем отбрасывать слово «свободная» и будем использовать просто термин *симплициальный матроид* (но не следует путать его с симплициальными геометриями Крапо и Рота [14]); V называется *порождающим симплексом* конфигурации $\mathbf{S}$.

Такая конфигурация легко реализуется аналитически. Пусть имеется множество [2])

$$T=\{t_1, \ldots, t_n\}_{\neq}.$$

[1]) В литературе встречаются другие термины (хотя в некоторых случаях они определены совершенно разными способами, в действительности все они эквивалентны), а именно: главный матроид (или предгеометрия) [7, 9], свободная симплициальная предгеометрия с порождающим симплексом [9], фундаментальный трансверсальный матроид [3, 6], главная трансверсальная предгеометрия [9, 13], строгий дельтоид [22]. «Свободная симплициальная предгеометрия» (без оговорки «с порождающим симплексом») имеет другое значение в [9]; «главная предгеометрия» имеет другой смысл в [17].

[2]) Имеется в виду множество, все элементы которого различны. — *Прим перев.*

Каждый элемент t_j принадлежит единственной наименьшей грани $F(K_j)$ симплекса V. Теперь элементам симплекса V поставим в соответствие координаты $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots$ над некоторым полем Φ и положим, что i-я координата элемента t_j множества T есть

$$\begin{cases} X_{ij}, & \text{если} \quad i \in K_j, \\ 0, & \text{если} \quad i \notin K_j, \end{cases}$$

где $(X_{ij}: j = 1, \ldots, n; \ i \in K_j)$ — семейство независимых неизвестных из трансцендентного расширения поля Φ. Если Φ бесконечное или конечное, но достаточно большое, то можно считать, что X_{ij} принимают значения в поле Φ без введения нежелательных соотношений.

Наша конфигурация может быть представлена с помощью двудольного графа Δ с E в качестве множества вершин и множеством ребер

$$\{(v_i, t_j): v_i \in V, \ t_j \in T, \ i \in K_j\}.$$

Тогда легко видеть, что базисы конфигурации $\mathbf{S}$ являются точно множествами вида $Y \cup X$, где $Y \subseteq V$, $X \subseteq T$, такими, что $V \setminus Y$ соединено с X в графе Δ, т. е. базисы являются трансверсалями семейства $(B_1, \ldots, B_r)$ подмножеств множества E, где

$$B_i = A_i \cup \{v_i\}, \quad A_i = \{t_j \in T : i \in K_j\} \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

Отсюда $\mathbf{S}$ — трансверсальный матроид, но особый, благодаря отмеченному базису $V = \{v_1, \ldots, v_r\}$ со свойством, что $v_i \in B_j$, тогда и только тогда, когда $i = j$. Таким образом, симплициальные матроиды идентичны с *фундаментальными* (или *главными*) трансверсальными матроидами [3, 6, 9, 13].

Однако, если конфигурация $\mathbf{S}$ может быть определена как трансверсальный матроид, сужение $\mathbf{M} = \mathbf{S} \mid T$ является матроидом на T с независимыми множествами частичных трансверсалей семейства $(A_1, \ldots, A_r)$ и, очевидно, является совершенно произвольным семейством. Отсюда вытекает следующий результат (впервые точно сформулированный в таком виде Брилавским [13]):

Теорема 1. *Матроид является трансверсальным тогда и только тогда, когда он может быть получен из симплициального матроида вычеркиванием порождающего симплекса.*

Эта теорема содержится также в работах автора [19, 20], но геометрическое описание было выражено там в несколько иных и менее ясных терминах Можно даже сказать, что она, по существу, была доказана (хотя скорее в аналитических, нежели в геометрических терминах) Мирским и Перфект, которые в 1967 г. установили линейную представимость трансверсальных матроидов путем приписывания неопределенных координат точно так же, как описано выше ([29] и [28], теорема 7.1.3).

2. ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ТРАНСВЕРСАЛЬНЫХ МАТРОИДОВ

Чтобы исследовать структуру трансверсальных матроидов, нам потребуется рассмотреть циклические поверхности. В заданном матроиде **M** множество X называется *циклическим* или *вполне зависимым*, если оно является объединением циклов, т. е. если его дополнение является поверхностью двойственного матроида **M***. В частности, множество X является циклической поверхностью матроида **M** тогда и только тогда, когда дополнение множества X является циклической поверхностью матроида **M***. Нетрудно проверить, что матроид **M** на заданном множестве полностью определяется указанием семейства **F**(**M**) всех его циклических поверхностей вместе с их рангами (см., например, [13]). Часто это является очень экономным способом описания некоторого частного матроида. Семейство **F** (**M**) обладает естественной структурой решетки, такой, что $F \vee G$ — обычное соединение поверхностей, т. е. линейная оболочка множества $F \cup G$, а $F \wedge G$ — объединение всех циклов, содержащихся в $F \cap G$. Приятной особенностью этой решетки является то, что для получения семейства **F** (**M***) достаточно инвертировать ее.

В определении симплициального матроида **S** подразумевается, что циклическое множество ранга k в **S** или в сужении $\mathbf{S} | T$ должно лежать на k-грани симплекса V; более того, циклическая k-поверхность должна *быть* k-гранью (или, более точно, пересечением этой грани с множествами E или T в зависимости от обстоятельств). Этот факт не только показывает, что число циклических k-поверхностей в трансверсальном матроиде ранга r не может превышать $\binom{r}{k}$, как доказали Бруальди и Мейсон [10], но также накладывает ограничения на способ совмещения циклических поверхностей.

Теорема 2. *Матроид* **M** *ранга* r *является трансверсальным в том и только том случае, когда существует инъективное отображение*

$$\phi : \mathbf{F}(\mathbf{M}) \to \mathbf{2}^r,$$

где $\mathbf{2}^r$ — *решетка всех подмножеств множества* $\{1, \ldots, r\}$, *такая, что*

1) $|\phi F| = \rho(F) \qquad (\forall F \in \mathbf{F}(\mathbf{M}))$,

2) $\phi(F \vee G) = \phi F \cup \phi G$ $(\forall F,\ G \in \mathbf{F}(\mathbf{M}))$,

3) $\rho(\bigcap F_j) \leqslant |\bigcap \phi F_j|$ *для каждого конечного семейства циклических поверхностей* F_j.

(*Через* ρ *обозначается функция ранга матроида* $\mathbf{M}$.)

Критерий этого типа впервые получил Мейсон [24], но в терминах семейства всех циклических множеств, а не просто циклических поверхностей.

Важно заметить, что в пределах перестановок множества $\{1, \ldots, r\}$ может существовать не более одного ϕ, удовлетворяющего условиям (1) и (2). Это относительно упрощает применение теоремы 2 для непосредственной проверки того, является ли данный матроид трансверсальным (ср. алгоритм в [8]). Однако Мейсон вывел из нее и чисто внутреннюю характеризацию трансверсальных матроидов в терминах неравенств относительно ρ. Если $(F_1, \ldots, F_N)$ есть некоторое семейство циклических поверхностей и $J \subseteq \{1, \ldots, N\}$, то через $F(J)$ обозначим $\bigcup (F_j : j \in J)$.

Теорема 3. *Заданный матроид является трансверсальным тогда и только тогда, когда для каждого семейства* $(F_1, \ldots, F_N)$ *циклических поверхностей имеет место*

$$\rho(F_1 \cap \ldots \cap F_N) \leqslant \sum_{J \subseteq \{1, \ldots, N\}} (-1)^{|J|+1} \rho(F(J)).$$

В исходной теореме Мейсона [24] это условие сформулировано в терминах всех семейств циклических *множеств*, но, как и в случае теоремы 2, нетрудно показать, что достаточно рассматривать лишь циклические поверхности[1]). На самом же деле можно пойти еще дальше и потребовать выполнения этого условия лишь для очень ограниченного множества семейств циклических поверхностей.

Определение. Назовем множество A *критической поверхностью*, если оно является пересечением всех циклических поверхностей, которые собственным образом содержат его, тогда пусть $F_1, \ldots, F_N$ — минимальные (по включению) элементы множества всех циклических поверхностей, собственным образом

---

[1]) В самом деле, если в теореме 3 действительно желать достичь максимума экономии, хотя и с некоторой потерей ясности, то все обсуждение может быть ограничено рассмотрением лишь тех циклических поверхностей, дополнения которых являются *неразложимыми* поверхностями матроида $\mathbf{M}^*$ в смысле § 4 работы [22] (см. теорему 8 ниже).

содержащих A, и пусть

$$\delta A = \sum_{J \subseteq \{1, \ldots, N\}} (-1)^{|J|+1} \rho(F(J)) - \rho(A).$$

(Легко видеть, что δA также задается аналогичной суммой, где суммирование ведется по семейству *всех* циклических поверхностей, собственным образом содержащих A.)

Тогда имеем следующую теорему:

Теорема 4. *Заданный матроид является трансверсальным тогда и только тогда, когда $\delta A \geqslant 0$ для каждой критической поверхности A.*

Другой аналитический критерий для трансверсального матроида впервые был получен совершенно независимо в [22] при помощи двойственности из теории строгих гаммоидов, которые мы рассмотрим позднее в разд. 5.

Определение. Функция β от подмножеств матроида $\mathbf{M}$ ранга r определяется рекурсивно по следующей формуле:

$$\beta X = r - \rho(X) - \sum \beta F,$$

где сумма берется по всем циклическим поверхностям F, собственным образом содержащим X.

Теорема 5. *Матроид $\mathbf{M}$ является трансверсальным тогда и только тогда, когда $\beta X \geqslant 0$ для каждого множества X.*

Этот результат оказывается (пожалуй, не так уж неожиданно) тесно связанным с теоремами 3 и 4. В действительности же ясно, что достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\beta A \geqslant 0$ для каждой критической поверхности A, а с помощью обращения Мёбиуса в решетке $\mathbf{F}(\mathbf{M})$ нетрудно доказать такое

Предложение. *Для каждой критической поверхности A*

$$\beta A = \delta A.$$

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Трансверсальный матроид обычно может быть «представлен» посредством более чем одного семейства подмножеств. Хорошо известно (и молчаливо допускалось в разд. 2), что представления $(A_1, \ldots, A_r)$ длины r, равной рангу матроида, всегда существуют, и мы будем ограничиваться рассмотрением именно таких представлений. (Более длинные представления могут встречаться лишь тогда, когда матроид имеет копетли.) Представление называется *минимальным*, если замена любого A_i на его собственное подмножество приводит к получению другого матроида; *максимальные* представления определяются аналогично.

Симплициальное вложение, описанное в разд. 1, полезно для характеризации возможных представлений трансверсального матроида **M** на множестве T. Если T пересекает каждую $(r-1)$-грань симплекса V в гиперплоскости из **M**, то ясно, что представление $(A_1, \ldots, A_r)$, соответствующее симплициальному вложению, является минимальным, а множества A_i являются коциклами (дополнениями граней в множестве T). Бонди и Уэлш [3] показали обратное, что в *любом* минимальном представлении множества A_i являются коциклами. Таким образом, всегда можно найти симплициальное вложение, такое, что $(r-1)$-грани фактически соответствуют гиперплоскостям матроида **M**. Получающаяся конфигурация гиперплоскостей названа в [19, 20] *квазисимплексом*.

В общем случае существует несколько минимальных представлений, но, если не учитывать порядок, существует только одно максимальное представление [2, 8, 22]. Пусть (A_i) — некоторое представление, и пусть C_i — линейная оболочка A_i в $\mathbf{M}^*$, т. е. $T \setminus C_i$ является наибольшей циклической поверхностью, содержащейся в $T \setminus A_i$. Если мы используем (C_i) для определения симплициального вложения обращением процедуры разд. 1, то ясно, что результирующий матроид будет иметь такую же циклическую поверхность, и поэтому он является тем же самым матроидом. Таким образом, (C_i) есть некоторое представление и, очевидно, максимальное. Единственность следует из единственности отображения ϕ теоремы 2: C_i есть в точности $T \setminus F_i$, где F_i — наибольшая циклическая поверхность, такая, что $i \notin \phi F_i$.

Эти замечания являются основой алгоритма, который создали Бруальди и Динольт [8] для проверки того, является ли данный матроид трансверсальным, и для получения максимального представления, если это так.

В заключение отметим очевидное следствие.

Теорема 6. *Трансверсальный матроид ранга r имеет единственное представление тогда и только тогда, когда он имеет r циклических гиперплоскостей.*

4. ПОДКЛАССЫ КЛАССА $\mathscr{T}$

Мы уже встречались с подклассом $\mathscr{S}$ симплициальных матроидов. Если матроид **S** — симплициальный, то двойственный ему $\mathbf{S}^*$ — также симплициальный (двойственность в точности соответствует замене ролей множеств V и T в двудольном графе Δ [22]) и поэтому, конечно, трансверсальный. Таким образом, используя очевидную символику, запишем

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^*.$$

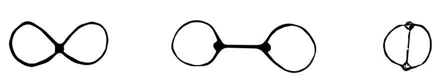
Это включение является, конечно, строгим; например, все трансверсальные матроиды ранга $\leqslant 3$ являются также контрансверсальными [22]. По-видимому, кроме аналитического критерия, полученного из теорем 3—5, не существует иного способа охарактеризовать класс $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}^*$ трансверсальных — контрансверсальных матроидов.

В терминах представлений мы можем определить иерархию подклассов

$$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_3 \subset \ldots$$

класса $\mathcal{T}$. Трансверсальный матроид будет отнесен к подклассу $\mathcal{T}_k$, если существует (минимальное) представление $(A_1, \ldots, A_r)$, такое, что пересечение каждых $k+1$ из A_i пусто. Это эквивалентно тому, что каждый элемент лежит на k-грани в соответствующем симплициальном вложении.

Матроиды подкласса $\mathcal{T}_1$ с представлениями в виде разобщенного семейства мало интересны. Несколько неожиданно подкласс $\mathcal{T}_2$ недавно был отождествлен Мэтью [26] с классом бициклических матроидов Симоеса — Перейра [37]. Бициклические матроиды определяются как матроиды на множествах ребер графов (с петлями и кратными ребрами), циклы которого являются «бициклами», т. е. множествами ребер подграфов, гомеоморфных одному из следующих графов:



Естественно задать вопрос, существует ли в терминах гиперграфов какая-нибудь аналогичная интерпретация подкласса $\mathcal{T}_k$ $(k \geqslant 3)$.

В части отношений и включений подкласс $\mathcal{T}_1$, изученный Речки [36], оказался классом матроидов разбиений, в котором различные *множества* в представлении разобщены, но могут повторяться в семействе $(A_1, \ldots, A_r)$.

Известно, что все трансверсальные матроиды представимы линейной зависимостью над достаточно большими полями (см. разд. 1 выше, а также [33]). Можно постараться охарактеризовать те матроиды класса $\mathcal{T}$, которые представимы над некоторым частным полем. Например, Суза и Уэлш [16] установили, что бинарные трансверсальные матроиды совпадают с графическими трансверсальными матроидами, которые уже охарактеризованы Бонди [1]. Нам неизвестны какие-либо другие результаты в этой области.

5. ДВОИСТВЕННОСТЬ — СТРОГИЕ ГАММОИДЫ

Возвратимся к ситуации, описанной в разд. 1, где трансверсальный матроид $\mathbf{M}=\mathbf{S}|T$ был получен как сужение симплициального матроида S с порождающим симплексом $V = \{v_1, \ldots, v_r\}$. Мы можем предположить, как отмечено в разд. 3, что r есть ранг матроида $\mathbf{M}$, и обозначить тогда элементы множества T через $t_1, \ldots, t_n$, так, чтобы $t_i \in A_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Теперь из двудольного графа Δ, соответствующего $\mathbf{S}$, построим ориентированный граф Γ с множеством вершин T, проводя дуги из вершины t_i в t_j в графе Γ всюду, где v_i соединена с t_j в двудольном графе Δ. Мы увидим, что r-подмножество X множества T соединено с V в двудольном графе Δ тогда и только тогда, когда $T \setminus X$ соединено в ориентированном графе Γ (не пересекающимися по вершинам путями, возможно, нулевой длины) с $B_0 = \{t_{r+1}, \ldots, \ldots, t_n\}$ ([22], лемма 3.1). Отсюда следует, что подмножества множества T, соединенные в графе Γ с B_0, суть базисы матроида $\mathbf{M}(\Gamma, B_0)$, который является в точности двойственным $\mathbf{M}^*$ матроида $\mathbf{M}$.

Матроиды, полученные таким образом из ориентированного графа, названы Мейсоном [25] *строгими гаммоидами*. Эта конструкция может легко быть обращена, чтобы показать, что каждый строгий гаммоид определяется как двойственный трансверсальному матроиду. Поэтому справедлива

Теорема 7 [22, 27]. *Класс $\mathcal{T}^*$ котрансверсальных матроидов идентичен классу строгих гаммоидов.*

Двойственность матроидов вообще не имеет хорошей геометрической интерпретации, но можно получить эквивалентную интерпретацию строгих гаммоидов, которая имеет следующее интуитивное геометрическое содержание. Если $\mathbf{M}=\mathbf{S}|T$, то двойственный матроид $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}(\Gamma, B_0)$ является сжатием $\mathbf{S}^* \cdot T$. Далее, как отмечено в § 4, $\mathbf{S}^*$ также является симплициальным матроидом с порождающим симплексом T, а V — множество r независимых точек, свободно размещенных на гранях симплекса T. Таким образом, $\mathbf{M}(\Gamma, B_0)$ может быть представлен как результат проектирования n-симплекса T в n-мерное векторное пространство U из r-поверхности R, натянутой на независимое множество V, свободно размещенное на гранях симплекса V (или более формально, как образ множества T в факторпространстве U/R). Это описание эквивалентно теореме

Даулинга и Келли ([17], теорема 3.3), которая отождествляет их «главные предгеометрии» с котрансверсальными матроидами.

Всякая характеризация матроидов класса $\mathcal{T}$ (например, теоремы 2—5) с помощью двойственности переводится в характеризацию матроидов класса $\mathcal{T}^*$. В частности, мы, пожалуй, сформулируем четко двойственный аналог теоремы 5, который фактически впервые был получен Мейсоном [25] в контексте строгих гаммоидов. Чтобы получить такой аналог в виде, требующем наименьших выкладок, нам потребуются дополнительно некоторые матроидные понятия из [22]. Поверхность F называется *разложимой*, если $F = F_1 \cup F_2$, где F_1, F_2 являются собственными подповерхностями поверхности F, такими, что

$$\rho F_1 + \rho F_2 = \rho F \quad \text{и} \quad \rho(F_1 \cap F_2) = 0;$$

в противном случае поверхность F называется *неразложимой*. (Таким образом, в случае матроида без петель понятие «неразложимый» эквивалентно понятию «связный».) Неразложимая поверхность, безусловно, является циклической, но обратное неверно.

Определение. В данном матроиде $\mathbf{M}$ определим функцию множества α по рекурсивной формуле

$$\alpha X = |X| - \rho X - \sum \alpha F,$$

где сумма берется по всем неразложимым поверхностям F, собственным образом содержащимся в X.

Теорема 8 [25, 22]. *Матроид является котрансверсальным тогда и только тогда, когда для каждого множества A, являющегося нетривиальным объединением неразложимых поверхностей, выполняется неравенство*

$$\alpha A \geqslant 0.$$

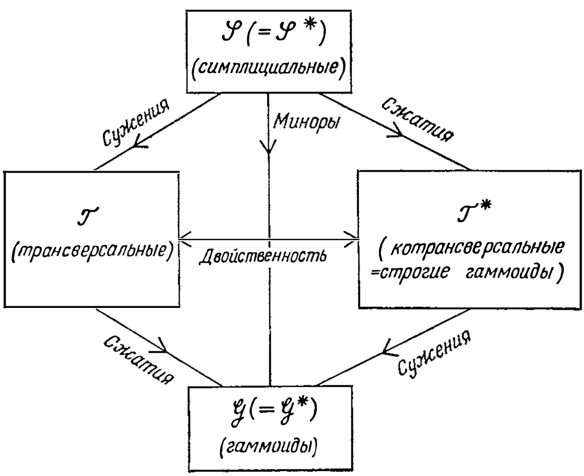
По существу, такой же результат, но в терминах циклических поверхностей получен Бруальди [7, (4.10)].

6. ГАММОИДЫ

Пусть A, B_0 — подмножества множества вершин T ориентированного графа Г. Перфект [31] установила, а Пим [34] обобщил, что подмножества A, которые соединены в Г с подмножествами B_0, являются независимыми множествами матроида на A, который называется *гаммоидом*. Ясно, что такой гаммоид является сужением $\mathbf{M}(\Gamma, B_0) \mid A$ строгого гаммоида. Поэтому тот факт, что гаммоиды являются матроидами, следует из рассуждений разд. 5. Поскольку строгие гаммоиды являются всего лишь сжатиями симплициальных матроидов, то справедлива

Теорема 9 [22]. *Класс $\mathcal{G}$ гаммоидов является в точности классом миноров симплициальных матроидов и, следовательно, замкнут относительно операций сужения, сжатия и двойственности.*

Соотношения между основными классами матроидов, которые мы обсудили, приведены на следующей схеме:



Гаммоид является частным случаем более общей конструкции. Если $\mathbf{M}_0$ — матроид на множестве вершин T ориентированного графа Γ (или на некотором подмножестве множества T) и $A \subseteq T$, то подмножества от A, соединенные в графе Γ с независимыми множествами в $\mathbf{M}_0$, являются независимыми множествами нового матроида $\mathbf{M}_1$ на множестве A [5, 25, 32]. Назовем этот процесс получения матроида $\mathbf{M}_1$ из матроида $\mathbf{M}_0$ *индукцией*. Несложная графическая конструкция показывает, что индукция, рассматриваемая как операция на классах матроидов, является оператором замыкания. Но по определению $\mathcal{G}$ является классом, полученным индукцией из свободных матроидов и, следовательно, сам замкнут относительно индукции. Итак, если гаммоид $\mathbf{M}$ индуцируется из свободного матроида на множестве B_0, то усечение до ранга k матроида $\mathbf{M}$ индуцируется из k-однородного матроида на множестве B_0. Но однородные матроиды, очевидно, являются гаммоидами (фактически трансверсальными). Поэтому справедлива

Теорема 10. *Класс $\mathcal{G}$ замкнут относительно операций индукции и усечения.*

Назовем класс матроидов *полным*, если он замкнут относительно операций сужения, сжатия, двойственности, прямой суммы, усечения и индукции. (То же самое понятие может быть определено различными другими списками допустимых операций в зависимости от личного вкуса. Конечно, этот список включает некоторые логически избыточные пункты.)

Единственной из этих операций, еще не упоминавшейся в связи с гаммоидами, является операция прямой суммы. Но очевидно, что прямая сумма гаммоидов является тем не менее гаммоидом. Поэтому в заключение сформулируем следующее утверждение.

Теорема 11. *Класс $\mathcal{G}$ является полным классом матроидов.*

В действительности класс $\mathcal{G}$ занимает особое место в иерархии полных классов. По недолгом размышлении ясно, что он является *наименьшим непустым полным классом*. Это потому, что любой такой класс обязательно содержит все матроиды ранга 0 (индукцией, используя граф без ребер), а следовательно, в силу двойственности, все свободные матроиды и далее, по индукции, все гаммоиды.

Нахождение внутренней характеризации в целом является важной и сложной проблемой. Существуют некоторые частные результаты, покрывающие весьма специальные ее случаи:

Теорема 12 [22]. *Матроид ранга $\leqslant 3$ является гаммоидом тогда и только тогда, когда он является контрансверсальным.*

(На самом деле все матроиды ранга $\leqslant 2$ являются контрансверсальными.)

Теорема 13 [12, 13, 20]. *Для бинарного матроида* **M** *следующие утверждения эквивалентны:*

а) **M** *является гаммоидом.*

б) **M** *не имеет миноров, изоморфных* $\mathbf{M}(K_4)$ — *циклическому матроиду полного графа* K_4.

в) **M** *изоморфен циклическому матроиду параллельно-последовательных сетей.*

Поскольку бинарные матроиды могут быть охарактеризованы как матроиды, которые не имеют в качестве минора 4-точечной прямой, то теорема 13 дает для бинарных гаммоидов критерий «запрещенного минора». В теории матроидов существует ряд известных теорем о «запрещенных минорах» и, возможно, следующей должна в настоящем контексте быть рассмотрена аналогичная теорема для тернарных гаммоидов (т. е. гаммоидов, представимых над полем GF (3)). Мы полагаем, что поиск хорошо определенного полного списка запрещенных миноров для характеризации класса $\mathcal{S}$ в целом, вероятно, будет безуспешным. Такой список обязательно должен быть бесконечным; минимальных негаммоидов ранга 3 (легко опознаваемых благодаря теоремам 8 и 12) бесконечно много и, очевидно, не существует способа их перебора. Вполне возможно, что, хотя для классов матроидов, замкнутых относительно сужений и сжатий, но не более того, найден простой критерий «запрещенного минора», все же следует искать исключения в другом смысле для того, чтобы охарактеризовать полные классы. Мы вернемся к этому вопросу в разд. 8.

7. ПОДКЛАССЫ КЛАССА $\mathcal{G}$

В предыдущих разделах мы использовали термин «индукция» в широком смысле, включая в рассмотрение общий случай ориентированных графов. В специальном случае, где матроид $\mathbf{M}_1$ получается из матроида $\mathbf{M}_0$ при помсщи двудольного графа, будем говорить, что $\mathbf{M}_1$ *выводится* из $\mathbf{M}_0$. Таким образом, если $\mathcal{F}$ — класс свободных матроидов, то $\mathcal{T}$ может быть отождествлен с $\mathcal{F}'$ — классом всех извлечений свободных матроидов. Повторяя процесс, мы получим иерархию классов путем последовательного извлечения:

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}'' \subset \ldots .$$

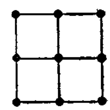
Матроиды в этом классе

$$\mathcal{F}^{(\infty)} = \bigcup_{r=1}^{\infty} \mathcal{F}^{(r)}$$

названы у Мейсона [25] *каскадами*. Мейсон привел пример (строгого) гаммоида, который не является каскадом. Было бы интересно найти характеризации классов $\mathcal{F}^{(r)}$ $(r \geqslant 2)$ и/или $\mathcal{F}^{(\infty)}$.

Другой «неуловимый» подкласс состоит из тех гаммоидов, которые получаются из *неориентированных* графов. Когда речь идет об индукции матроидов, неориентированный граф эквивалентен ориентированному графу, полученному заменой каждого неориентированного ребра парой дуг в противоположных направлениях. В статье [38] Вудалл привел пример гаммоида, который не получается из какого-либо неориентированного графа, где он также рассмотрел другие варианты и обобщения понятия графической индукции. Интересно, что гаммоид в этом примере оказался как строгим гаммоидом, так и каскадом.

Класс $\mathscr{G}$ замкнут относительно усечений (и, следовательно, является $\mathscr{T}^*$), классы $\mathscr{S}$ и $\mathscr{T}$ не являются таковыми. Матроиды, которые представляют собой усечения симплициальных матроидов, охарактеризованы Бруальди и Динольтом [9]. Насколько нам известно, не существует характеризации усечений класса $\mathscr{T}$. Очевидно, что они образуют собственный подкласс класса $\mathscr{G}$; легко проверить, что (строгий) гаммоид ранга 3



(который также является примером некаскада у Мейсона) не является усечением никакого трансверсального матроида.

8. БАЗИСНАЯ УПОРЯДОЧЕННОСТЬ И ДРУГИЕ ПОЛНЫЕ КЛАССЫ

Мы заметили, что класс $\mathscr{G}$ является наименьшим нетривиальным полным классом. Два более обширных полных класса определяются с помощью понятий базисной упорядоченности, которые были введены Бруальди [4] по отношению к трансверсальным матроидам.

Матроид **M** является *строго базисно-упорядоченным*, если для любых двух данных базисов B_1, B_2 существует отображение ϕ: $B_1 \to B_2$, такое, что для каждого подмножества X базиса B_1

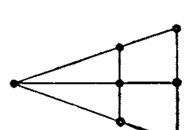
(*) $(B_1 \setminus X) \cup \phi X$ является также базисом.

Матроид **M** называется просто *базисно-упорядоченным*, если свойство замены (*) выполняется по меньшей мере для подмножеств X мощности 1 и $r-1$ (где r — ранг матроида **M**).

Ряд результатов [4, 5, 11, 15, 16, 22, 25] продемонстрировал, что классы $\mathscr{BO}$ базисно-упорядоченных и $\mathscr{SBO}$ строго базисно-упорядоченных матроидов являются в действительности полными. Поэтому мы имеем включения

$$\mathscr{G} \subset \mathscr{SBO} \subset \mathscr{BO}.$$

Хорошо известно, что первое включение строгое; простейшим примером этого служит



который по теоремам 8 и 12 является негаммоидом, но по теореме 14, приведенной ниже, является строго базисно-упорядоченным. То, что второе включение также строгое, показано на примере в работе [21]. В той же самой работе показано, что для класса $\mathscr{BO}$ проблема запрещенных миноров не имеет хорошего решения.

Как и в случае класса $\mathscr{G}$, полная картина классов $\mathscr{BO}$ и $\mathscr{SBO}$ существует только для двух специальных случаев: матроидов ранга три и бинарных матроидов. Все матроиды ранга $\leqslant 2$ являются строго базисно-упорядоченными; а для матроидов ранга 3 базисная упорядоченность и строгая базисная упорядоченность эквивалентны по определению и $\mathbf{M}(K_4)$ является единственным препятствием (см., например, [15, 21]):

Теорема 14. *Матроид ранга* 3 (*строго*) *базисно-упорядочен тогда и только тогда, когда он не имеет сужений, изоморфных* $\mathbf{M}(K_4)$.

В случае бинарного матроида $\mathbf{M}(K_4)$ снова представляет единственное препятствие:

Теорема 15 [16]. *Бинарный матроид базисно-упорядочен тогда и только тогда, когда он не имеет миноров, изоморфных* $\mathbf{M}(K_4)$.

Так, согласно теоремам 13 и 15, для бинарных матроидов условия базисной упорядоченности, строгой базисной упорядоченности и гаммоидов, все эквивалентны.

Имеется много возможностей для введения бесконечного числа полных классов между $\mathscr{BO}$ и $\mathscr{SBO}$ с помощью соответствующих ограничений на мощности подмножеств X, для которых (*) должно иметь место, но этот вопрос, видимо, не изучен.

Другими известными полными классами являются класс $\mathscr{R}$ всех представимых матроидов и подклассы, соответствующие представимости над полями указанной характеристики. Лас Верньяс недавно заметил также, что ориентируемые матроиды [23] образуют полный класс.

Как альтернативу к определению полных классов через какое-нибудь общее свойство составляющих их матроидов можно определить полные классы через множества образующих или «необразующих». Пусть дано семейство матроидов $(\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_k)$, и пусть $\mathscr{C}(\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_k)$ обозначает наименьший полный класс матроидов, который содержит все $\mathbf{M}_i$; пусть $\mathscr{E}(\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_k)$ обозначает наибольший полный класс, который не содержит $\mathbf{M}_i$.

Поскольку имеющиеся данные свидетельствуют о том, что минимальное семейство запрещенных миноров для интересных полных классов является всегда бесконечным, возможна такая формулировка проблемы препятствий для полных классов.

Проблема 1. Можно ли найти конечное семейство $(\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_k)$, такое, что

$$\mathscr{C} = \mathscr{E}(\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_k)$$

для данного полного класса $\mathscr{C}$ матроидов (в частности, для $\mathscr{C} = \mathscr{G}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{O}$, $\mathscr{SBO}$)?

Или вместо препятствий можно рассматривать образующие:

Проблема 2. Можно ли найти конечное семейство $(\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_k)$, такое, что

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}(\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_k)$$

для данного полного класса $\mathscr{C}$?

Этот вопрос, как мы уже видели, имеет тривиальный ответ для класса $\mathscr{G}$ (единственный матроид на пустом множестве будет служить в качестве образующего), но для других случаев, по-видимому, является открытым.

Особое негативное качество, которое придается в этой теории матроиду $\mathbf{M}(K_4)$ (простейшему матроиду, который не является гаммоидом) предполагает рассмотрение следующей проблемы с противоположной точки зрения.

Проблема 3. Определить класс $\mathscr{E}(\mathbf{M}(K_4))$.

Одним из возможных решений проблемы 3 будет класс $\mathscr{BO}$, который делает $\mathbf{M}(K_4)$ единственным препятствием в настоящем смысле для базисной упорядоченности. Напротив, не исключено, что класс $\mathscr{K}$ матроидов, которые не содержат $\mathbf{M}(K_4)$ *как минор*, является уже полным. И в этом случае решением проблемы 3 будет класс $\mathscr{K}$. Вполне возможно, что оба эти решения ложны, но очевидно, что они не могут быть оба истинны, поскольку, как показано в [21], $\mathscr{K}$ строго больше, чем класс $\mathscr{BO}$. Возможно, первое решение наиболее подходящее, но нам кажется, что верным является второе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bondy J. A. Transversal matroids, base—orderable matroids and graphs, Quart. J. Math. (Oxford) (2) 23 (1972), 81—89.
2. Bondy J. A. Presentations of transversal matroids, J. London Math. Soc. (2) 5 (1972), 289—292.
3. Bondy J. A., Welsh D. J A. Some results on transversal matroids and constructions of identically self-dual matroids, Quart. J. Math. (Oxford) (2) 22 (1971), 435—451.

4. Brualdi R. A. Comments on bases in dependence structures, Bull. Australian Math. Soc., 7 (1969), 161—167.
5. Brualdi R. A. Induced matroids, Proc. Amer. Math. Soc., 29 (1971) 221—231.
6. Brualdi R. A. Fundamental transversal matroids, Proc. Amer. Math. Soc., 45 (1974), 151—156.
7. Brualdi R. A. Matroids induced by directed graphs, a survey, Proc. 2nd Czech. Graph Theory Symp., Prague (1974), 115—134.
8. Brualdi R. A., Dinolt G. W. Characterizations of transversal matroids and their presentations, J. Comb. Theory, 12 (1972), 268—286.
9. Brualdi R. A., Dinolt G. W. Truncations of principal geometries, Discrete Math., 12 (1975), 113—138.
10. Brualdi R. A., Mason J. H. Transversal matroids and Hall's theorem, Pacific J. Math., 41 (1972), 601—613.
11. Brualdi R. A., Scrimger E. B. Exchange systems, matchings and transversals, J. Comb. Theory, 5 (1968), 244—257.
12. Brylawski T. H. A combinatorial model for series-parallel networks, Trans. Amer. Math. Soc., 154 (1971), 1—22.
13. Brylawski T. H. An affine representation for transversal geometries, Studies in Appl. Math., 54 (1975), 143—160.
14. Crapo H. H., Rota G. C. Combinatorial Geometries (M. I. T. Press, 1970).
15. Davies J. Some problems in matroid theory, D. Phil. thesis, Univ. of Oxford (1975).
16. de Sousa J., Welsh D. J. A. A characterization of binary transversal structures, J. Math. Anal. Appl., 40 (1972), 55—59.
17. Dowling T. A., Kelly D. G. Elementary strong maps and transversal geometries, Discrete Math., 7 (1974), 209—224.
18. Edmonds J. R., Fulkerson D. R. Transversals and matroid partition, J. Res. Nat. Bur. Standards 69B (1965), 147—153.
19. Ingleton A. W. Conditions for representability and transversality of matroids, in Théorie des Matroides, ed. C. P. Bruter (Springer, 1971), 62—66.
20. Ingleton A. W. A geometrical characterization of transversal independence structures, Bull. London Math. Soc., 3 (1971), 47—51.
21. Ingleton A. W. Non-base-orderable matroids, Proc. 5th British Combinatorial Conf., Aberdeen (1975), 355—360.
22. Ingleton A. W., Piff M. J. Gammoids and transversal matroids, J. Comb. Theory, 15 (1973), 51—68.
23. Las Vergnas M. Matroides orientables, preprint.
24. Mason J. H. A characterization of transversal independence spaces, in Théorie des Matroides, ed. C. P. Bruter (Springer, 1971), 86—94.
25. Mason J. H. On a class of matroids arising from paths in graphs, Proc. London Math. Soc. (3), 25 (1972), 55—74.
26. Matthews L. R. Bicircular matroids, preprint.
27. McDiarmid C. Strict gammoids and rank functions, Bull. London Math. Soc., 4 (1972), 196—198.
28 Mirsky L. Transversal Theory (Academic Press), 1971.
29. Mirsky L., Perfect H. Applications of the notion of linear independence to problems in combinatorial analysis, J. Comb. Theory 2 (1967), 327—357.
30. Narayanan H., Vartak M. N. Gammoids, base — orderable matroids and series — parallel networks, preprint.
31. Perfect H. Applications of Menger's graph theorem, J. Math. Anal. Appl., 22 (1968), 96—110.
32. Perfect H. Independence spaces and combinatorial problems, Proc. London Math. Soc., (3), 19 (1969), 17—30.

33. Piff M. J., Welsh D. J. A. On the vector representation of matroids, J. London Math. Soc., (2), 2 (1970), 284—288.
34 Pym J. S. The linking of sets in graphs, J. London Math. Soc., 44 (1969), 542—550.
35. Rado R. A theorem on independence relations, Quart. J. Math. (Oxford), 13 (1942), 83—89.
36. Recski A. On partitional matroids with applications, Proc. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Keszthely (1973), 1169—1179.
37. Simões-Pereira J. M. S. On subgraphs as matroid cells, Math. Z., 127 (1972), 315—322.
38. Woodall D. R. Linking in graphoids, preprint.

КОМБИНАТОРИКА ЧАСТИЧНЫХ ГЕОМЕТРИЙ И ОБОБЩЕННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ[1]

Дж. А. Тас

1. ЧАСТИЧНЫЕ ГЕОМЕТРИИ

1.1. Введение

Конечной частичной геометрией [7] является структура инцидентности $S=(P, B, I)$, в которой отношение инцидентности симметрично и удовлетворяет следующим аксиомам:

(1) каждая точка инцидентна $1+t$ линиям $(t \geqslant 1)$, и две различные точки инцидентны не больше чем одной линии;

(2) каждая линия инцидентна $1+s$ точкам $(s \geqslant 1)$ и две различные линии инцидентны не больше чем одной точке;

(3) если x — точка, а L — линия, неинцидентная x, то существует ровно $\alpha\,(\alpha \geqslant 1)$ точек $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$ и α линий $L_1, L_2, \ldots, L_\alpha$, таких, что xIL_iIx_iIL, $i=1, 2, \ldots, \alpha$.

Назовем точки x, y (соответственно линии L, M) коллинеарными (сходящимися), если они инцидентны не меньше чем одной линии (точке). Если точки x, y (соответственно линии L, M) множества S коллинеарны (сходятся), будем обозначать это $x \sim y\,(L \sim M)$; в противном случае напишем $x \not\sim y\,(L \not\sim M)$.

1.2. Теорема

Пусть $S=(P, B, I)$ — частичная геометрия с параметрами s, t, α. Если $|P|=v$ и $|B|=b$, то $v=(s+1)(st+\alpha)/\alpha$ и $b=(t+1)(st+\alpha)/\alpha$.

Доказательство. Пусть L — фиксированная линия множества S. Подсчитаем различными способами число упорядоченных пар (x, M), где xIM, $x\not I L$ и $L \sim M$. Получаем, что $\alpha(v-s-1)=(s+1)ts$ или $v=(s+1)(st+\alpha)/\alpha$.

Двойственное утверждение $b=(t+1)(st+\alpha)/\alpha$.

Следствие. *Если S — частичная геометрия с параметрами s, t, α, то $\alpha \mid st(s+1)$ и $\alpha \mid st(t+1)$.*

---

[1] Thas J. A. Combinatorics of partial geometries and generalized quadrangles.

Замечание. Пусть $S=(P, B, I)$ — частичная геометрия с параметрами s, t, α. Если $E=\{\{x, y\} \| x, y \in P$ и $x \sim y\}$, то (P, E) является строго регулярным графом с параметрами $v=(s+1)\times \times(st+\alpha)/\alpha$, $n_1=st+s$, $p_{11}^1=s-1+t(\alpha-1)$, $p_{11}^2=(t+1)\alpha$ [7].

1.3. Теорема

(Р. С. Боуз [6] — Д. Г. Хигман [20]). *Если* $S=(P, B, I)$ — *частичная геометрия с параметрами* s, t, α, *то* $\alpha(s+t+ +1-\alpha) \mid st(s+1)(t+1)$.

Доказательство. Пусть $P=\{x_1, x_2, \ldots, x_v\}$ и $A=(a_{ij})$ есть $v\times v$-матрица, такая, что $a_{ij}=0$, если $i=j$, или $x_i \not\sim x_j$; $a_{ij}=1$, если $i \neq j$ и $x_i \sim x_j$ (т. е. A является матрицей смежности графа (P, E)). Обозначив $A^2=(c_{ij})$, получаем: (а) $c_{ii}=(t+1)s$; (б) если $i \neq j$ и $x_i \not\sim x_j$, то $c_{ij}=(t+1)\alpha$; (в) если $i \neq j$ и $x_i \sim \sim x_j$, то $c_{ij}=s-1+t(\alpha-1)$. Следовательно,

$$A^2-(s-t-\alpha-1)A-(t+1)(s-\alpha)I=(t+1)\alpha J$$

(где I — единичная матрица порядка v, а J есть $v\times v$-матрица, состоящая из единиц).

Очевидно, что $(t+1)s$ является собственным значением матрицы A, а матрица J имеет собственные значения 0 и v с кратностями $v-1$ и 1 соответственно. Из равенства $((t+1)\times \times s)^2-(s-t-\alpha-1)(t+1)s-(t+1)(s-\alpha)=(t+1)\alpha v$ следует, что собственное значение $s(t+1)$ матрицы A соответствует собственному значению v матрицы J, и, следовательно, $s(t+1)$ имеет кратность 1. Другие собственные значения матрицы A суть корни квадратного уравнения $x^2-(s-t-\alpha-1)x-(t+1)\times \times(s-\alpha)=0$. Обозначая кратности этих собственных значений x_1, x_2 через m_1, m_2, получаем $x_1=-t-1$, $x_2=s-\alpha$ и $1+m_1+ +m_2=v$, $s(t+1)-m_1(t+1)+m_2(s-\alpha)=\operatorname{tr} A=0$. Тогда $m_2= =(s+1)(t+1)st/\alpha(s+t+1-\alpha)$ и

$$m_1=s((s+1)t+\alpha)(s-\alpha+(t+1)\alpha)/\alpha(s+t+1-\alpha).$$

Отсюда заключаем, что $\alpha(s+t+1-\alpha) \mid st(s+1)(t+1)$.

1.4. Четыре класса частичных геометрий

Класс частичных геометрий делится на четыре (неразобщенных) класса.

(а) Частичные геометрии с $\alpha=s+1$ или (двойственно) $\alpha= =t+1$. Необходимые условия для существования таких частичных геометрий имеют вид $s+1 \mid t(t+1)$ или (двойственно)

$t+1 \mid s(s+1)$. Частичная геометрия S с $\alpha = s+1$ — это то же самое, что и $2-(v,\ s+1,\ 1)$-схема.

(б) Частичные геометрии с $\alpha = s$ или (двойственно) $\alpha = t$. В этом случае необходимые условия тривиальны. Частичная геометрия S с $\alpha = t$ — это то же самое, что и сеть порядка $s+1$ и дефекта $s-t+1$.

(в) Частичные геометрии с $\alpha = 1$. Частичная геометрия, для которой $\alpha = 1$, называется обобщенным четырехугольником. Обобщенные четырехугольники были введены Титсом [54]. Для обобщенного четырехугольника S с параметрами s, t получаем, что $s+t \mid st(s+1)(t+1)$. Это условие было доказано также Фейтом и Хигманом [18]. Во второй главе настоящей работы обобщенные четырехугольники будут рассмотрены более подробно.

(г) Частичные геометрии с $1 < \alpha < \min(s,\ t)$.

1.5. Частичные геометрии с $1 < \alpha < \min(s,\ t)$

Вводное замечание. Поскольку все известные частичные геометрии с $1 < \alpha < \min(s,\ t)$ строятся с помощью максимальных дуг в проективных плоскостях, то следующий параграф мы посвятим некоторым важным результатам, относящимся к максимальным дугам.

Максимальные дуги. В конечной проективной плоскости порядка q любое непустое множество 1 точек может быть описано как $\{1;\ n\}$-дуга, где $n\ (n \neq 0)$ есть наибольшее число коллинеарных точек в этом множестве. Для данных q и $n\ (n \neq 0)$ это число никогда не превышает $(n-1)(q+1)+1$; дугу же с таким числом точек будем называть максимальной дугой [3]. Эквивалентным образом максимальную дугу можно определить как непустое множество точек, пересекающееся с каждой линией в точности в n точках либо не пересекающееся вообще.

Если K является $\{nq-q+n;\ n\}$-дугой (т. е. максимальной дугой) проективной плоскости π порядка q, где $n \leqslant q$, то легко доказать, что множество $K' = \{$линии L проективной плоскости $\pi \parallel K \cap L = \varnothing\}$ является $\{q(q-n+1)/n;\ q/n\}$-дугой (т. е. максимальной дугой), двойственной проективной плоскости π^* плоскости π. Отсюда тотчас же следует, что если дезаргова проективная плоскость $PG(2,\ q)$ содержит $\{nq-q+n;\ n\}$-дугу, $n \leqslant q$, то она также содержит и $\{q(q-n+1)/n;\ q/n\}$-дугу.

Из предыдущего следует, что необходимым условием для существования максимальной дуги (как собственного подмножества заданной плоскости) является то, что n должно быть множителем числа q. Деннистон [17] доказал, что это условие является достаточным в случае любой дезарговой плоскости порядка 2^h. Его конструкция такова: рассмотрим неприводимую однородную квадратичную форму $F(X, Y)$ над полем $GF(2^h)$, а также подгруппу H порядка $n=2^m$ $(0 \leqslant m \leqslant h)$ аддитивной группы A поля $GF(2^h)$; если мы выберем систему неоднородных координат (X, Y) в дезарговой плоскости $PG(2, 2^h)$, то $K = \{(X, Y) \| F(X, Y) \in H\}$ является $\{2^{h+m}-2^h+2^m; 2^m\}$-дугой плоскости $PG(2,2^h)$. Однако условие $n \mid q$ не является достаточным в случае дезарговой плоскости нечетного порядка. Коссю [14] доказал, что не существует $\{21; 3\}$-дуги в $PG(2, 9)$. Тас [47] получил следующий более общий результат: в $PG(2, q)$, $q=3^h$ и $h>1$, не существуют ни $\{2q+3; 3\}$-дуги, ни $\{q(q-2)/3; q/3\}$-дуги. Мы предполагаем, что в $PG(2, q)$, где q нечетное, не существует $\{nq-q+n; n\}$-дуг с $n<q$ (т. е. единственными максимальными дугами дезарговой плоскости $PG(2, q)$, где q нечетно, являются $PG(2, q)$ и $AG(2, q)$).

Наконец, заметим, что помимо конструкции Деннистона существует (насколько нам известно) только одна иная конструкция максимальных дуг с $n>2$ (в случае $n=2$ максимальная дуга является полным овалом и известно много конструкций полных овалов). Эта конструкция, которая имеется в работе Таса [46], является следующей. Рассмотрим овоид O и 1-пространство¹) W геометрии $PG(3,2^m)$ $(m>0)$, такие, что каждая прямая из W имеет одну и только одну общую с O точку (т. е. такую, что W принадлежит линейному комплексу прямых, определенных с помощью O). Пусть $PG(3, 2^m)$ вложена как некоторая гиперплоскость R в $PG(4, 2^m)=P$, и пусть x — точка из $P-R$. Обозначим через C множество точек из $P-R$, которые лежат на линии px, где $p \in 0$. Тогда C является максимальной дугой с параметрами $1=2^{3m}-2^{2m}+2^m$ и $n=2^m$ проективной плоскости π, определенной с помощью 1-пространства W. Известные овоиды O из $PG(3, 2^m)$ являются эллиптическими квадратичными формами или овоидами Титса (овоид Титса определяется исключительно в $PG(3, 2^{2s+1})$, где $s \geqslant 1$), а известные 1-пространства W из $PG(3, 2^m)$, которые принадлежат линейному комплексу линий, являются дезарговыми пространствами (т. е. регулярными пространствами) или пространствами Ленебурга (пространство Ленебурга определяется исключительно в $PG(3, 2^{2s+1})$, где $s \geqslant 1$) [44]. Следовательно, имеем четыре возможности для выбора пары $(0, W)$. Таким образом, возникают два типа максимальных дуг в дезарговых плоскостях и два типа в плоскостях Ленебурга. Если O представляет собой эллиптическую квадратичную форму и W — регулярное пространство, то можно доказать, что паре (O, W)

---

¹) Автор употребляет термин «1-spread». — *Прим. перев.*

соответствует Деннистон-дуга (в обозначениях предыдущего параграфа мы имеем $GF(2^h) = GF(2^{2m})$, $H = GF(2^m)$).

Известные частичные геометрии с $1 < \alpha < \min(s, t)$. Пусть K — $\{qn - q + n;\ n\}$-дуга, $1 < n < q$, проективной плоскости π (не сбязательно дезарговой) порядка q. Определим точки частичной геометрии S как точки проективной плоскости π, которые не содержатся в K. Линии S являются линиями плоскости π, которые инцидентны n точкам дуги K. Инцидентность та же, что и в π. Теперь нетрудно доказать, что конфигурация S, таким образом определенная, является частичной геометрией с параметрами: $s = q - n$, $t = q - q/n$, $\alpha = q - q/(n - n + 1)$ ([45], [46], [57]).

В частности, предположим, что существует $\{qn - q + n;\ n\}$-дуга K, $1 < n < q$, в проективной плоскости $PG(2, q)$ над полем $GF(q)$. Тогда вторая частичная геометрия S' определяется следующим образом. Пусть $PG(2, q)$ вложена как плоскость H в $PG(3, q) = P$. Определим точки частичной геометрии как точки из $P - H$. Линии частичной геометрии S' являются линиями из P, которые не содержатся в H и пересекают K (с необходимостью в единственной точке). Инцидентность индуцирована из P. Легко доказать, что определенная таким образом геометрия S' является частичной геометрией с параметрами $s = q - 1$, $t = qn - q + n - 1$, $\alpha = n - 1$ [46].

Поскольку из существования $\{qn - q + n;\ n\}$-дуги K в $PG(2, q)$ следует существование $\{q(q - n + 1)/n;\ q/n\}$-дуги K' в $PG(2, q)$, отсюда получаем, что существует частичная геометрия с параметрами $s = q - 1$, $t = (q^2 - qn + q - 1)/n$, $\alpha = (q - n)/n$ [46].

Заметим, что существует $\{2^{m+h} - 2^h + 2^m;\ 2^m\}$-дуга в $PG(2, 2^h)$ $(0 \leqslant m \leqslant h)$ и, следовательно, существует частичная геометрия с параметрами

(а) $s = 2^h - 2^m,\ t = 2^h - 2^{h-m},\ \alpha = (2^m - 1)(2^{h-m} - 1)\ (0 < m < h)$

и

(б) $s = 2^h - 1,\ t = 2^{h+m} - 2^h + 2^m - 1,\ \alpha = 2^m - 1\ (0 < m < h)$.

Для таких частичных геометрий никогда не имеют место соотношения $s + 1 = \alpha$, $t + 1 = \alpha$, $s = \alpha$ или $t = \alpha$. Частичная геометрия (а) является обобщенным четырехугольником тогда и только тогда, когда $h = 2$ и $m = 1$ (тогда $s = t = 2$, $v = b = 15$). Частичная геометрия (б) является обобщенным четырехугольником тогда и только тогда, когда $m = 1$ (тогда $s = 2^h - 1$, $t = 2^h + 1$, $v = 2^{3h}$, $b = 2^{2h}(2^h + 2)$), т. е. тогда и только тогда, когда K является полным овалом. Эти четырехугольники, соответствующие полным овалам, были впервые открыты Аренсом и Секерешем [1] и независимо от них Холлом [19].

1.6. Литература

Для дополнительных сведений о частичных геометриях см. работы Боуза [6], [8], Бумиллера [11], Де Клерка [15], [52], Хиггмана [20] и Таса [39], [45], [46], [52].

2. ОБОБЩЕННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

2.1. Регулярность и антирегулярность

Пусть $S=(P, B, I)$ — обобщенный четырехугольник с параметрами s, t. Следующие определения даны для точек с двойственными понятиями для линий, также предполагаемых заданными. Если $x \in P$, то звезда точки x определяется соотношением $\operatorname{st}(x)=\{y \in P \| x \sim y\}$. Если $x, y \in P$, $x \neq y$, то след множества $\{x, y\}$ определяется соотношением $\operatorname{tr}(x, y)=\{z \in P \| z \sim x, z \sim y\}=\operatorname{st}(x) \cap \operatorname{st}(y)$, а линейная оболочка множесгва $\{x, y\}$ — соотношением $\operatorname{sp}(x, y)=\{u \in P \| u \sim z \forall z \in \operatorname{tr}(x, y)\}=\{u \in P \| \operatorname{tr}(x, y) \subset \operatorname{st}(u)\}$. Получаем, что $|\operatorname{st}(x)|=st+s+1$, и если $x \not\sim y$, то $|\operatorname{tr}(x, y)|=t+1$ и $|\operatorname{sp}(x, y)| \leqslant t+1$ (если $x \sim y$, то $\operatorname{sp}(x, y)=\operatorname{tr}(x, y)$ и $|\operatorname{sp}(x, y)|=s+1$). Множество трех попарно неколлинеарных точек обобщенного четырехугольника S называется триадой (точек). Пусть $T=\{x, y, z\}$ — некоторая триада. Точка $u \in P$, для которой имеем $u \sim x$, $u \sim y$, $u \sim z$, называется центром триады T. Триада, обладающая центром, называется центральной. Говорят, что пара (x, y), $x \not\sim y$, регулярна, если $|\operatorname{sp}(x, y)|=t+1$. Пара (x, y), $x \not\sim y$, антирегулярна в том случае, если $|\operatorname{st}(z) \cap \operatorname{tr}(x, y)| \leqslant 2$ для всех $z \in P-\{x, y\}$. Точка x является регулярной (антирегулярной), если (x, y) регулярна (антирегулярна) для всех $y \in P$, если $x \not\sim y$.

Доказательства следующих теорем даны соответственно в работах [24], [33], [32], [48], [25]:

(1) *Если $1<s<t$, то пара (x, y), $x \not\sim y$, не является ни регулярной, ни антирегулярной.*

(2) *Пара (x, y), $x \not\sim y$, регулярна тогда и только тогда, когда каждая центральная триада (x, y, z) имеет точно 1 или $1+t$ центров. При $s=1$ это имеет место в том и только том случае, когда каждая триада (x, y, z) является центральной.*

(3) *Пусть $s \geqslant t$ и (x, y) — пара неколлинеарных точек. Не существует триады (x, y, z) с единственным центром в том и только том случае, когда $t=1$ или $s=t$ и (x, y) — антирегулярная пара.*

(4) *Если обобщенный четырехугольник S с параметрами s, s имеет ровно одну антирегулярную пару точек, то число s нечетно,*

(5) *Если обобщенный четырехугольник S с параметрами s, s имеет регулярную точку x и регулярную пару (L_1, L_2) несовпадающих линий, для которых x не инцидентна никакой линии из* $\mathrm{tr}(L_1, L_2)$, *то число s четно.*

(6) *Пусть x — корегулярная точка обобщенного четырехугольника S с параметрами s, s (т. е. каждая линия, проходящая через x, регулярна). Тогда x является регулярной в том и только том случае, когда число s четно.*

Следующие замечания впервые были сделаны Бенсоном [5] (см. также [21]). Пусть $S=(P, B, I)$ — обобщенный четырехугольник с параметрами s, $s\,(s>1)$; предположим, что S содержит регулярную точку x. Если $L\in B$, то множество точек, инцидентных L, обозначается через L^*. Пусть $B_x=B_1\cup B_2$, где B_1 — множество множеств L^*, таких, что xIL, а B_2 — множество линейных оболочек, содержащихся в $\mathrm{st}(x)$. *Тогда структура инцидентности* $(\mathrm{st}(x), B_x, \in)$ *есть* $2-(s^2+s+1, s+1, 1)$-*схема, т. е. проективная плоскость порядка s.*

Предположим далее, что S содержит антирегулярную точку x. Выберем точку y, где $y\sim x$ и $y\neq x$. Введем следующие обозначения: $P^*=\{z\in \mathrm{st}(x)\,\|\, z\not\sim y\}$ и $B^*=B_1\cup B_2$, где B_i есть совокупность множеств $L^*-\{x\}$, такое, что xIL, $y\,\not{I}L$, а $B_2=$ $=\{\mathrm{tr}(x, z)-\{y\}\,\|\, z\sim y, z\not\sim x\}$. *Тогда структура инцидентности* $(P^*, B^*, \in)$ *есть* $2-(s^2, s, 1)$,*схема, т. е. аффинная плоскость порядка s.*

2.2. Неравенство Хигмана

Теорема (Хигман [20]). *Если $S=(P, B, I)$ есть обобщенный четырехугольник с параметрами s и t, где $s>1$ и $t>1$, то $t\leqslant s^2$ и двойственно $s\leqslant t^2$.*

Доказательство (Камерон [12]). Пусть x, y — две неколлинеарные точки обобщенного четырехугольника S. Если $V=$ $=\{z\in P\,\|\, z\not\sim x, z\not\sim y\}$, то $|V|=d=(s+1)(st+1)-2-2(t+1)s+$ $+(t+1)$. Элементы из V обозначим через $z_1, z_2, \ldots, z_d$ и введем обозначения $t_i=|\{u\in \mathrm{tr}(x, y)\,\|\, u\sim z_i\}|$.

Подсчитаем двумя различными способами количество упорядоченных пар (z_i, u), где $z_i\in V$, $u\in \mathrm{tr}(x, y)$, $u\sim z_i$. Получим

$$\sum_i t_i=(t+1)(t-1)s. \tag{1}$$

Затем подсчитаем двумя различными способами число упорядоченных троек (z_i, u, u'), где $z_i\in V$, $u\in \mathrm{tr}(x, y)$, $u'\in \mathrm{tr}\times$ $\times(x, y)$, $u\neq u'$, $u\sim z_i$, $u'\sim z_i$. Получим

$$\sum_i t_i(t_i-1)=(t+1)t(t-1). \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $\sum_i t_i^2 = (t+1)(t-1)(s+t)$. Так как $d \sum_i t_i^2 - \left(\sum_i t_i\right)^2 \geqslant 0$, то справедливо $d(t+1)(t-1)(s+t) \geqslant \geqslant (t+1)^2 (t-1)^2 s^2$, или $d(s+t) \geqslant (t+1)(t-1) s^2$. Следовательно, $t(s-1)(s^2-t) \geqslant 0$, или $s^2 \geqslant t$.

Следствие (Боуз [6]). *Пусть S — обобщенный четырехугольник с параметрами s и t, где $s > 1$ и $t > 1$. В этом случае $s^2 = t$ тогда и только тогда, когда $d \sum_i t_i^2 - \left(\sum_i t_i\right)^2 = 0$ для любой пары неколлинеарных точек (x, y); тогда и только тогда, когда $t_i = \left(\sum_i t_i\right)/d$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ (и для любой пары неколлинеарных точек (x, y)); тогда и только тогда, когда каждая триада точек имеет постоянное число центров. Это постоянное число центров равно $s+1$.*

Пусть $s^2 = t$ $(s > 1)$ и пусть (x, y, z) — триада точек. Определим след триады (x, y, z) как множество центров триады (x, y, z). Линейная оболочка триады (x, y, z) есть множество $\mathrm{sp}(x, y, z) = \{u \in P \| u \sim w \forall w \in \mathrm{tr}(x, y, z)\}$. Из предыдущего следует, что $|\mathrm{tr}(x, y, z)| = s+1$ и $|\mathrm{sp}(x, y, z)| \leqslant s+1$. Если $|\mathrm{sp}(x, y, z)| = s+1$, то мы скажем, что (x, y, z) является регулярной.

Доказательство Камерона может быть обобщено для того, чтобы получить следующую теорему, которая, по-видимому, является фундаментальной для комбинаторной характеристики классических четырехугольников.

Теорема (Тас [40]). *Если для некоторой пары (x, y), $x \not\sim y$, имеем $|\mathrm{sp}(x, y)| \geqslant p+1$, где p — положительное целое число, то $s=1$ или $pt \leqslant s^2$. Более того, если $p \neq t$, то количество центров триады (x, y, z), где z неколлинеарна с точками из $\mathrm{sp}(x, y)$, является некоторой константой тогда и только тогда, когда $pt = s^2$ (эта постоянная равна $(s+p)/p$).*

2.3. Подчетырехугольники

Обобщенный четырехугольник $S' = (P', B', I')$ называется подчетырехугольником обобщенного четырехугольника $S = = (P, B, I)$ тогда и только тогда, когда $P' \subset P$, $B' \subset B$ и $I' = = I \cap ((P' \times B') \cup (B' \times P'))$. Если $S' \neq S$, то мы скажем, что S' является собственным подчетырехугольником обобщенного четырехугольника S. Следующая основная теорема впервые появилась в работе Пейна [26], но доказательство, которое мы приведем, принадлежит Тасу [50].

Теорема (Пейн — Тас). *Если обобщенный четырехугольник $S'=(P', B', I')$ с параметрами s', t' является подчетырехугольником обобщенного четырехугольника $S=(P, B, I)$ с параметрами s, t, то $s=s'$ или $s \geqslant s't'$ либо двойственно $t=t'$ или $t \geqslant s't'$.*

Доказательство. Предположим, что S' — собственный подчетырехугольник обобщенного четырехугольника S. Тогда $P \neq P'$ и $B \neq B'$ (из $P=P'$ (соответственно $B=B'$) следует, что $(1+s)(1+st)=(1+s')(1+s't')$ (соответственно $(1+t)(1+st)=(1+t')(1+s't')$), где $s \geqslant s'$ и $t \geqslant t'$, и поэтому $s=s'$ и $t=t'$, т. е. $S=S'$ — противоречие). Пусть xIL, $x \in P-P'$ и $L \in B'$. Если xIM, $M \in B$ и $L \neq M$, то непосредственно из определения обобщенного четырехугольника следует, что M не инцидентно точкам из P'. Далее, пусть $V=\{x \in P-P' \,\|\,$не существует $L \in B'$, где $xIL\}$. Тогда $|V|=d=(1+s)(1+st)-(1+s')(1+s't')-(1+t')(1+s't')(s-s')$.

(а) $t=t'$. Так как $|V|=d \geqslant 0$, то получаем $(s-s')t(s-s't) \geqslant 0$. Следовательно, $s=s'$ или $s \geqslant s't$.

(б) $t>t'$. Пусть $V=\{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$ и t_i — число точек из P', которые коллинеарны с x_i. Подсчитаем двумя различными способами количество упорядоченных пар (x_i, z), $x_i \in V$, $z \in P'$, $x_i \sim z$.

Получаем

$$\sum_i t_i=(1+s')(1+s't')(t-t')s. \tag{1}$$

Вычислим двумя разными способами число упорядоченных троек (x_i, z, z'), $x_i \in V$, $z \in P'$, $z' \in P'$, $z \neq z'$, $x_i \sim z$, $x_i \sim z'$. Получаем

$$\sum_i t_i(t_i-1)=(1+s')(1+s't')s'^2t'(t-t'), \tag{2}$$

из (1) и (2) следует, что $\sum_i t_i^2=(1+s')(1+s't')(t-t')(s+s'^2t')$. Так как $d\sum_i t_i^2-\left(\sum_i t_i\right)^2 \geqslant 0$, то имеем $(1+s')(1+s't')(t-t') \times (s-s')(s-s't')(st+s'^2t'^2) \geqslant 0$. Поскольку $t>t'$, то $s=s'$ или $s \geqslant s't'$.

Непосредственно из (а) и (б) следует, что $s=s'$ или $s \geqslant s't'$. Двойственно $t=t'$ или $t \geqslant s't'$.

Следствие. *Предположим, что $t>t'$. Из* (б) *следует, что $t_i=\left(\sum_i t_i\right)/d \; \forall i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ тогда и только тогда, когда*

$d\sum_i t_i^2 - \left(\sum_i t_i\right)^2 = 0$, *т. е. тогда и только тогда, когда* $s=s'$ *или* $s=s't'$. *Если* $s=s'$, *то* $t_i = 1+st'\forall i$; *если* $s=s't'$, *то* $t_i = 1+s'\forall i$.

Двойственные рассуждения могут быть легко проведены.

Следующие результаты являются простыми следствиями неравенства Хигмана и предыдущей теоремы, хотя они впервые появились в работе Таса [51].

Теорема (Тас — Пейн). *Пусть S' — собственный подчетырехугольник обобщенного четырехугольника S, где S имеет параметры s, t, а S' имеет параметры s, t'.*

(1) $t \geqslant s$. *Если* $t=s$, *то* $t'=1$.

(2) *Если* $s>1$, *то* $t' \leqslant s$. *Если* $t'=s\geqslant 2$, *то* $t=s^2$.

(3) *Если* $s=1$, *то* $1\leqslant t' < t$ *является единственным сужением на* t'.

(4) *Если* $s>1$ *и* $t'>1$, *то* $\sqrt{s}\leqslant t' \leqslant s$ *и* $s^{3/2}\leqslant t \leqslant s^2$.

(5) *Если* $t=s^{3/2}>1$ *и* $t'>1$, *то* $t'=\sqrt{s}$.

(6) *Пусть S' имеет собственный подчетырехугольник S'' с параметрами s, t'', $s>1$. Тогда $t''=1$, $t'=s$ и $t=s^2$.*

Приведем другую теорему, которая оказалась очень полезной для нескольких теорем характеризации [51]:

Теорема. *Пусть $S'=(P', B', I')$ — подструктура обобщенного четырехугольника $S=(P, B, I)$ с параметрами s и t, ($s>1$), для которой выполняются следующие условия:*

(1) *если x, $y\in P'$ ($x\neq y$) и $xILIy$, то $L\in B'$;*

(2) *каждый элемент из B' инцидентен $s+1$ элементам из P'.*

Тогда существуют три возможности:

(а) *элементы из B' являются прямыми, которые инцидентны с различными точками из P, и P' состоит из тех точек из P, которые инцидентны этим прямым;*

(б) *$B'=\varnothing$ и P' есть множество попарно неколлинеарных точек из P;*

(в) *S' является подчетырехугольником с параметрами s и t'.*

2.4. Все известные четырехугольники

Классические обобщенные четырехугольники. (а) Рассмотрим невырожденную гиперквадрику Q порядка 2 на проективном пространстве $PG(d, q)$, где $d=3$, 4, или 5. Тогда точки из Q вместе с линиями из Q (которые являются подпространствами максимальной размерности на Q) образуют обобщенный четырехугольник $Q(d, q)$ с параметрами [16]:

$$s=q,\ t=1,\quad v=(q+1)^2,\quad b=2(q+1),\qquad \text{где}\ d=3;$$
$$s=t=q,\quad v=b=(q+1)(q^2+1),\qquad \text{где}\ d=4;$$
$$s=q,\ t=q^2,\quad v=(q+1)(q^3+1),\quad b=(q^2+1)(q^3+1),\qquad \text{где}\ d=5.$$

Заметим, что структура $Q(3, q)$ тривиальна.

(б) Пусть H — невырожденная эрмитова примитивная плоскость проективного пространства $PG(d, q^2)$, $d=3$ или 4. Тогда точки из H вместе с линиями на H образуют обобщенный четырехугольник $H(d, q^2)$ с параметрами [16]:

$$s=q^2,\quad t=q,\quad v=(q^2+1)(q^3+1),\quad b=(q+1)(q^3+1),\qquad \text{где}\ d=3;$$
$$s=q^2,\quad t=q^3,\quad v=(q^2+1)(q^5+1),\quad b=(q^3+1)(q^5+1),\qquad \text{где}\ d=4.$$

(в) Точки из $PG(3, q)$ вместе с тотально изотропными прямыми относительно симплектической полярности образуют обобщенный четырехугольник $W(q)$ с параметрами $s=t=q$, $v=b=(q+1)(q^2+1)$ [16].

Все эти примеры обобщенных четырехугольников (которые все связаны с классическими простыми группами) принадлежат Титсу.

Изоморфизмы между классическими обобщенными четырехугольниками. Доказано, что обобщенный четырехугольник $Q(4, q)$ изоморфен двойственному к $W(q)$ [5] и что $Q(5, q)$ изоморфен двойственному к $H(3, q^2)$ [33]. Более того, $W(q)$ является самодвойственным тогда и только тогда, когда q — четное число [44].

Регулярные точки и линии классических моделей. Каждая линия и каждая точка обобщенного четырехугольника $Q(3, q)$ регулярны. Более того, каждая точка обобщенного четырехугольника $Q(3, q)$ является антирегулярной.

Каждая линия из $Q(4, q)$ является регулярной. Если q — четное число, то каждая точка обобщенного четырехугольника $Q(4, q)$ является регулярной; если q — нечетное число, то каждая точка из $Q(4, q)$ является антирегулярной.

Каждая линия обобщенного четырехугольника $Q(5, q)$ регулярна. Более того, регулярна и каждая триада точек.

$H(4, q^2)$ не содержит регулярных точек и линий. Но для любой пары (x, y) неколлинеарных точек получаем, что $|\operatorname{sp}(x, y)|=q+1$. Пусть z — некоторая точка, которая не коллинеарна ни с какой точкой из $\operatorname{sp}(x, y)$. Поскольку $(|\operatorname{sp}(x, y)|-1)t=s^2$, то число центров триады (x, y, z) равно $(s+q)/q=q+1$.

Некоторые важные подчетырехугольники, для которых $s=s'$ или $t=t'$. Обобщенный четырехугольник $Q(4, q)$ имеет подчетырехугольники, изоморфные $Q(3, q)$ (здесь $s=t$ и $t'=1$).

$Q(5, q)$ имеет подчетырехугольники, изоморфные $Q(4, q)$ (здесь $s=t'$, $s^2=t$). $H(4, q^2)$ имеет подчетырехугольники, изоморфные $H(3, q^2)$ (здесь $t=s^{3/2}$, $t'=\sqrt{s}$). $H(3, q^2)$ имеет подчетырехугольники, изоморфные $W(q)$ (двойственной из (в)).

Все известные неклассические четырехугольники. (а) Пусть $P=\{x_{ij} \| i, j=1, 2, \ldots, s+1\}$ и $B=\{L_1, \ldots, L_{s+1}, M_1, \ldots \ldots, M_{s+1}\}$, где $s \geqslant 1$. Инцидентность определяется следующим образом: $x_{ij} I L_k \Longleftrightarrow i=k$, $x_{ij} I M_k \Longleftrightarrow j=k$. Тогда $S=(P, B, I)$ есть обобщенный четырехугольник с параметрами $s=s$, $t=1$, $v=(s+1)^2$, $b=2(s+1)$.

Регулярные точки и регулярные линии. Каждая точка и каждая линия обобщенного четырехугольника S регулярны. Более того, каждая точка обобщенного четырехугольника S антирегулярна.

Подчетырехугольники. Легко доказать, что обобшенный четырехугольник S имеет подчетырехугольник с параметрами s' и 1 для всех целых чисел s', таких, что $1 \leqslant s' \leqslant s$.

(б) (Титс (16]). Пусть $d=2$ (соответственно $d=3$). Рассмотрим овал O (соответственно овоид O) проективной плоскости $PG(d, q)$. Пусть $PG(d, q)$ вложена как гиперплоскость H в $PG(d+1, q)=P$. Определим точки как (1) точки из $P-H$, (2) гиперплоскости X из P, для которых $|X \cap O|=1$, (3) некоторый новый символ x. Линиями будут: (а) линии из P, которые не содержатся в H и пересекают O (обязательно в единственной точке), и (б) точки овала O. Инцидентность определяется следующим образом: точки типа (1) инцидентны только линиям типа (а); здесь инцидентность является инцидентностью из P. Точка X типа (2) инцидентна со всеми линиями $\subset X$ типа (а) и в точности с одной линией типа (б), а именно представленной единственной точкой из O в X. Наконец, единственная точка типа (3) не инцидентна ни с какой линией типа (а) и инцидентна со всеми линиями типа (б). Структура инцидентности, определенная таким образом, является обобщенным четырехугольником с параметрами

$$s=t=q, \qquad v=b=(q+1)(q^2+1), \qquad \text{где } d=2;$$

$$s=q, \quad t=q^2, \quad v=(q+1)(q^3+1), \quad b=(q^2+1)(q^3+1), \qquad \text{где } d=3.$$

Если $d=2$, то четырехугольник определяется с помощью $T_2(O)$; если $d=3$, то четырехугольник определяется с помощью $T_3(O)$. Если это не приведет к недоразумению, то эти четырехугольники также будут обозначаться через $T(O)$.

Дальнейшие сведения о $T_2(O)$. Четырехугольник $T_2(O)$ изоморфен $Q(4, q)$ тогда и только тогда, когда O есть неприводимый конус из $PG(2, q)$. По известной теореме Сегре [34] каждый овал O проективной плоскости $PG(2, q)$, где q — нечетное число, является неприводимым конусом. Поэтому для нечетных q четырехугольник $T_2(O)$ всегда изоморфен $Q(4, q)$.

Пусть q — четное число. Тогда не каждый овал является неприводимым конусом [34]. В этом случае существует четырехугольник $T_2(O)$, который не изоморфен $Q(4, q)$. Заметим, что точка x типа (3) и все линии типа (б) регулярны. Следовательно, $T_2(O)$ всегда имеет подчетырехугольники с параметрами $s' = q$, $t' = 1$, а также с параметрами $s' = 1$, $t' = q$.

Дальнейшие сведения о $T_3(O)$. Четырехугольник $T_3(O)$ изоморфен $Q(5, q)$ тогда и только тогда, когда O есть эллиптическая квадрика в $PG(3, q)$. По замечательной теореме Барлотти [2] каждый овоид O проективной плоскости $PG(3, q)$, где q — нечетное число, является эллиптической квадрикой. Поэтому для нечетных q четырехугольник $T_3(O)$ всегда изоморфен $Q(5, q)$.

Пусть q — четное число. Если q есть некоторая нечетная степень двух, то существуют овоиды, которые не являются эллиптическими квадриками [55]. Поэтому в случае четного q существуют четырехугольники $T_3(O)$, которые не изоморфны $Q(5, q)$. Заметим, что все линии типа (б) и все триады (x, y, z), где x — единственная точка типа (3), регулярны. Кроме того, легко показать, что $T_3(O)$ имеет всегда подчетырехугольники с параметрами $s' = t' = q$.

(в) (Пейн — Аренс и Секереш — М. Холл). Следующий важный конструктивный метод принадлежит Пейну ([27], [28]).

Пусть x — регулярная точка обобщенного четырехугольника $S = (P, B, I)$ с параметрами s, s. Множество P' определяется как множество $P - \mathrm{st}(x)$. Элементы из B' будут элементами следующих двух типов: элементы типа (а) есть линии из B, которые не инцидентны с x; элементы типа (б) есть линейные оболочки $\mathrm{sp}(x, y)$, где $y \not\sim x$. Отношение инцидентности I' определяется следующим образом: если $y \in P'$ и L — линия типа (а) из B', то $yI'L$ тогда и только тогда, когда yIL; если $y \in P'$ и L — линия типа (б) из B', то $yI'L$ тогда и только тогда, когда $y \in L$. Теперь нетрудно доказать, что $S' = (P', B', I')$ является обобщенным четырехугольником с параметрами $s' = s - 1$, $t' = s + 1$, $v' = s^3$, $b' = s^2(s + 2)$. Будем говорить, что S' получается расширением четырехугольника S относительно регулярной точки x.

Пусть $S = W(g)$, где g — нечетное число Тогда каждая точка является регулярной, а каждая линия — антирегулярной. Расширение относительно любой точки дает единственно известный четырехугольник с параметрами $q - 1$ и $q + 1$, впервые открытый Аренсом и Секерешем [1]. Затем пусть $S = T_2(O)$, где q — четное число. Единственная точка типа (3) является регулярной, и все линии, проходящие через нее, также регулярны. Расширение относительно этой регулярной точки приводит к четырехугольнику, впервые полученному Аренсом и Секерешем и независимо Холлом (см. 1.5). Расширение двойственным образом относительно одной из регулярных линий приводит к новому четырехугольнику с параметрами $q+1$ и $q-1$ [28].

Замечание. Для параметров любого из известных четырехугольников имеем

$s=1$, $t\geqslant 1$, или двойственно $t=1$, $s\geqslant 1$;

$s=t=q$, где q — степень простого числа;

$s=q$, $t=q^2$, или двойственно $s=q^2$, $t=q$, где q — степень простого числа;

$s=q^2$, $t=q^3$, или двойственно $s=q^3$, $t=q^2$, где q — степень простого числа;

$s=q-1$, $t=q+1$, или двойственно $s=q+1$, $t=q-1$, где q — степень простого числа.

2.5. Обобщенные четырехугольники с малым числом точек и линий

Рассмотрим теперь, какие обобщенные четырехугольники S с параметрами s и t, где $s\leqslant t$ и s — малое число, могут существовать и какие из них уже известны.

(а) $s=1$. Тогда для любого $t\geqslant 1$ существует единственный пример.

(б) $s=2$. По теоремам 1.3 и 2.2 либо $t=2$, либо $t=4$. В каждом из случаев существует единственный четырехугольник. Случай $t=2$, вероятно, впервые рассмотрен Бенсоном [5]. Случай $t=4$ затронут независимо по крайней мере трижды (Зейдель [36], Шульт [37], Тас [42]).

(в) $s=3$. Здесь $t=3$, 5, 6 или 9. Пейн доказал, что для $t=3$ существует пример, единственный с точностью до двойственности [30]. Для $t=5$ существует известный пример в бесконечном классе с параметрами $q-1$, $q+1$, где q — простое число в любой степени. Насколько нам известно, единственность здесь не определяется. Для $t=6$ ничего не известно. Камерон первым доказал, что $Q(5, 3)$ является единственным четырехугольником с параметрами 3 и 9 ([13], [32]).

(г) $s=4$. Здесь $t=4$, 6, 8, 11, 12 или 16. Ничего не известно о случаях $t=11$ и 12. Недавно Пейн доказал, что существует единственный четырехугольник с параметрами 4, 4 [31]. Для $t=6$, 8, 16 известны единственные примеры, но вопрос о единственности далек от решения.

2. 6. Теоремы характеризации

Перечислим наиболее важные комбинаторные характеризации известных обобщенных четырехугольников. Заметим, что такие понятия, как линейная оболочка, регулярный, антирегулярный и подчетырехугольник, играют центральную роль в этих теоремах.

(1) (Бюкенхут — Лефевр [9]). Если множество точек проективного пространства $PG(d, q)$ вместе с множеством линий проективного пространства $PG(d, q)$ образует обобщенный четырехугольник S, то S есть классический обобщенный четырехугольник.

(2) (Бенсон [5]). Если $s=t\,(t>1)$, то S изоморфен $W(s)$ тогда и только тогда, когда все его точки регулярны.

(3) (Тас [41]). Если S — обобщенный четырехугольник, для которого $|\operatorname{sp}(x, y)|\geqslant s+1>2$ $\forall x, y\,(x \not\sim y)$, то S изоморфен $W(s)$.

(4) (Маззокка — Пейн — Тас [32]). Пусть S — обобщенный четырехугольник с параметрами s, s, имеющий антирегулярную точку x. Если существует точка $y\sim x$, $y\neq x$, для которой ассоциированная аффинная плоскость (см. 2.1) является дезарговой, то S изоморфен $Q(4, s)$.

(5) (Таллини [38]). Пусть $S=(P, B, I)$ — обобщенный четырехугольник, для которого каждая точка является регулярной. Если $L=(P$, {линейные оболочки}, естественное отношение инцидентности), то нетривиальное подпространство из L является множеством точек $T\neq P$, которое содержит по крайней мере три точки, не принадлежащие той же самой линейной оболочке, и для которого из $\{x, y\}\subset T$ следует, что $\operatorname{sp}(x, y)\subset T$.

Обобщенный четырехугольник $S=(P, B, I)$, такой, что $s>t$, $s>1$ и $t>1$, изоморфен $H(3, q^2)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

(а) каждая точка обобщенного четырехугольника S регулярна;

(б) из условия, что $\operatorname{sp}(x, y)\cup\operatorname{sp}(x', y')$ содержится в нетривиальном подпространстве из L, следует, что $\operatorname{tr}(x, y)\cup\operatorname{tr}(x', y')$ содержится в нетривиальном подпространстве из L.

(6) (Тас [43] и [49]). Если обобщенный четырехугольник S с параметрами $s=q$ и $t=q^2\,(q>1)$ обладает точкой x, для которой каждая триада (x, y, z) регулярна, то S изоморфен $T_3(O)$ (поэтому, если q — нечетное число, то S изоморфен $Q(5, q)$). Если q четное и если, более того, каждая линия регулярна, то S изоморфен $Q(5, q)$.

(7) (Тас [43]). Если $s^2=t\,(t>1)$, то S изоморфен $Q(5, s)$ тогда и только тогда, когда каждая триада регулярна.

(8) (Тас [49]). Предположим, что обобщенный четырехугольник $S=(P, B, I)$ с параметрами s, t $(s>1)$ содержит точку x, такую, что каждая центральная триада прямых, где центр инцидентен точке x, содержится в собственном подчетырехугольнике S' с параметрами s, t'. Тогда S имеет параметры s, s^2 и изоморфен четырехугольнику $T_3(O)$ (поэтому, если s — нечетное число, то S изоморфен $Q(5, s)$).

(9) (Тас [41]). Если S — обобщенный четырехугольник с параметрами s, t $(s>1)$, для которого каждая центральная триада линий содержится в собственном подчетырехугольнике S' с параметрами s, t', то S изоморфен $Q(5, s)$.

(10) (Тас [49]). Прежде всего введем следующую аксиому, которую обозначим через (D): если L_1, L_2, M_1, M_2, U_1, U_2, N_1 — линии, такие, что $L_1 \sim L_2$, $M_1 \sim M_2$, $L_1 \sim U_1$, $M_1 \sim U_1$, $L_2 \sim U_2$, $M_2 \sim U_2$, $U_1 \sim U_2$, $L_1 \sim N_1$, $M_1 \sim N_1$, то существует по крайней мере одна линия N_2, для которой $L_2 \sim N_2$, $M_2 \sim N_2$, $N_1 \sim N_2$.

Предположим, что обобщенный четырехугольник S с параметрами s, t, где $2<s<t$, содержит точку x, такую что каждая линия, инцидентная x, регулярна, и такую, что аксиома (D) имеет место всякий раз, когда L_1 и L_2 содержат точку x. Тогда S имеет параметры s, s^2 и изоморфен $T_3(O)$ (поэтому для нечетного s обобщенный четырехугольник S изоморфен $Q(5, s)$).

(11) (Тас [49]). Если S — обобщенный четырехугольник с параметрами s, t, где $2<s<t$, для которого каждая линия регулярна и выполняется аксиома (D), то $s^2=t$ и S изоморфен $Q(5, s)$.

(12) (Тас [40]). Если $s^3=t^2$ $(t>1)$, то S изоморфен $H(4, s)$ тогда и только тогда, когда $|\mathrm{sp}(x, y)| \geqslant \sqrt{s+1}$ $\forall x, y$ $(x \not\sim y)$.

(13) (Тас [41]). Пусть S — обобщенный четырехугольник с параметрами s, t, для которого выполняются следующие условия:

(а) для каждой $\mathrm{sp}(x, y)$, где $x \not\sim y$, каждая центральная триада (x, y, z), где z не коллинеарна ни с какой точкой из $\mathrm{sp}(x, y)$, имеет по крайней мере два центра;

(б) существуют точки x и y, где $x \not\sim y$, для которых $t+1>|\mathrm{sp}(x, y)|>2$. Тогда S изоморфен $H(4, s)$.

(14) (Тас [41]). Если S — обобщенный четырехугольник, для которого $|\mathrm{sp}(x, y)| \geqslant s^2/t+1$ $\forall x, y$, $x \not\sim y$, то имеет место одно из следующих условий:

(а) $s=1$;

(б) $t=s^2$;

(в) S изоморфен $W(s)$;

(г) S изоморфен $H(4, s)$.

4 Заказ 570

(15) (Тас [41]). Предположим, что для обобщенного четырехугольника S справедливо следующее: для любой $\mathrm{sp}(x, y)$, где $x \not\sim y$, число центров триады (x, y, z), где z не коллинеарна ни с какой точкой из $\mathrm{sp}(x, y)$, является постоянным. Тогда выполняется одно из следующих условий:

(а) все точки обобщенного четырехугольника S регулярны;

(б) $s^2 = t$;

(в) S изоморфен $H(4, s)$.

(16) (Тас [41]). Пусть S — обобщенный четырехугольник с параметрами s, t $(s > 1)$. Если любое множество $\{x\} \cup \mathrm{tr}(y, z)$, где $y \not\sim z$ и x не коллинеарна ни с какой точкой из $\mathrm{sp}(y, z)$, содержится в собственном подчетырехугольнике с параметрами s, t', то S изоморфен $W(s)$, $Q(5, s)$ или $H(4, s)$.

(17) (Тас [41]). Пусть S — обобщенный четырехугольник с параметрами s, t, для которого не каждая точка регулярна. Если каждое множество $\{x\} \cup \mathrm{tr}(y, z)\,(y \not\sim z)$, где x не коллинеарна ни с какой точкой из $\mathrm{sp}(y, z)$ и коллинеарна по крайней мере с одной точкой из $\mathrm{tr}(y, z)$, содержится в собственном подчетырехугольнике с параметрами s, t', то S изоморфен $Q(5, s)$, $H(4, s)$ или $Q(4, s)$, где s — нечетное число.

Замечание. Другие комбинаторные характеризации, которые подчеркивают связь между циклическими геометриями (инверсивными, плоскостями Минковского и Лагерра) и обобщенными четырехугольниками, можно найти в работах [48] и [32].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ahrens R., Szekeres G. On a combinatorial generalization of 27 lines associated with a cubic surface, J. Austral. Math. Soc., X (1969), 485—492.
2. Barlotti A. Un estensione del teorema di Segre—Kustaanheimo, Boll. Un. Mat. Ital., (3) 10 (1955), 498—506.
3. Barlotti A. Sui $\{k; n\}$-archi di un piano lineare finito, Boll. Un. Mat. Ital., (3), 11 (1956), 553—556.
4. Barlotti A. Some topics in finite geometrical structures, Inst. of Stat. Mimeo Series No. 439, 1965.
5. Benson C. T. On the structure of generalized quadrangles, J. Algebra, 15 (1970), 443—454.
6. Bose R. C. Graphs and designs, C. I. M. E., II ciclo, Bressanone, 1972, 1—104.
7. Bose R. C. Strongly regular graphs, partial geometries, and partially balanced designs, Pacific J. Math., 13, (1963), 389—419.
8. Bose R. C. Geometric and pseudo-geometric graphs $(q^2+1,\ q+1,\ 1)$, J. Geom., 2 (1972), 75—93.
9. Buekenhout F., Lefèvre C. Generalized quadrangles in projective spaces, Arch. Math., 25 (1974), 540—552.
10. Buekenhout F. Une caractèrization des espaces affins basèe sur la notion de droite, Math. Z., 111 (1969), 367—371.
11. Bumiller C., Jr. Partial geometries and rank three groups, Ph. D. Dissertation, Yale University (1975),

12. Cameron P. J. Partial quadrangles, Quart. J. Math. Oxford, (3), 25 (1974), 1—13.
13. Cameron P. J. Private communication.
14. Cossu A. Su alcune proprietà dei $\{k;\ n\}$-archi di un piano proiettivo sopra un corpo finito, Rend. Mat. e Appl., 20 (1961), 271—277.
15. De Clerck F. Partial geometries, Ph. D. Dissertation, University of Ghent.
16. Dembowski P., Finite geometries, Springer Verlag, 1968.
17. Denniston R. H. F. Some maximal arcs in finite projective planes, J. Comb. Theory, 6 (1969), 317—319.
18. Feit W., Higman G. The nonexistence of certain generalized polygons, J. Algebra, 1 (1964), 114—131.
19. Hall M., Jr. Affine generalized quadrilaterals, Studies in Pure Mathematics, ed. by L. Mirsky, Academic Press, (1971), 113—116.
20. Higman D. G. Partial geometries, generalized quadrangles, and strongly regular graphs, in Atti Convegno di Geometria e sue Applicazioni, Perugia, 1971.
21. Mazzocca F. Sistemi grafici rigati di seconda specie, Relazione N. 28. Instit. di Math. dell' Univ. di Napoli, 22 pages.
22. Mazzocca F. Caratterizzazione dei sistemi rigati isomorfi an una quadrica ellittica dello $S_{5,q}$ con q dispari, Rend. Accad. Naz. Lincei, 57 (1974), 360—368.
23. Olanda D. Sistemi rigati immersi in uno spazio proiettivo, Relazione n. 26, Ist. Mat. Univ. Napoli, (1973), 1—21.
24. Payne S. E. Nonisomorphic generalized quadrangles, J. Algebra, 18 (1971), 201—212.
25. Payne S. E. Generalized quadrangles of even order, J. Algebra, 31 (1974), 367—391.
26. Payne S. E. A restriction on the parameters of a subquadrangle, Bull. Amer. Math. Soc., 79, (1973), 747—748.
27. Payne S. E. The equivalence of certain generalized quadrangles, J. Comb. Theory, 10 (1971), 284—289.
28. Payne S. E. Quadrangles of order $(s-1,\ s+1)$, J. Alg., 22 (1972) 97—119.
29. Payne S. E. Finite generalized quadrangles: a survey, Proc. Int. Conf. Proj. Planes, Wash. State Univ. Press, (1973), 219—261.
30. Payne S. E. All generalized quadrangles of order 3 are known, J. Comb. Theory, 18 (1975), 203—206.
31. Payne S. E. Generalized quadrangles of order 4, to appear.
32. Payne S. E., Thas J. A. Generalized quadrangles with symmetry, Simon Stevin, 49 (1975—1976), 3—32 and 81—103.
33. Payne S. E., Thas J. A. Classical finite generalized quadrangles: A combinatorial study, to appear.
34. Segre B. Lectures on modern geometry, Ed. Cremonese, Roma, 1961.
35. Segre B. Ovals in a finite projective plane, Canad. J. Math., 7 (1955), 414—416.
36. Seidel J. J. Strongly regular graphs with (—1, 1, 0) adjacency matrix having eigenvalue 3, Lin. Algebra and Appl., 1 (1968), 281—298.
37. Shult E. Characterizations of certain classes of graphs, J. Comb. Theory (B), 13 (1972), 142—167.
38. Tallini G., Strutture di incidenza dodate di polarità, Rend. Sem. Mat. Milano, 41 (1971), 41 pp.
39. Thas J. A. On polarities of symmetric partial geometries, Arch. Math., 25 (1974), 394—399.
40. Thas J. A. On generalized quadrangles with parameters $s=q^2$ and $t=q^3$, Geometriae Dedicata, 5 (1976), 485—496.
41. Thas J. A. Combinatorial characterizations of the classical generalized quadrangles, Geometriae Dedicata, to appear.

42. Thas J. A. On 4-gonal configurations with parameters $r=q^2+1$ and $k=q+1$, part 1, Geometriae Dedicata, 3 (1974), 365—375.
43. Thas J. A. 4-gonal configurations with parameters $r=q^2+1$ and $k=q+1$, part II, Geometriae Dedicata, 4 (1975), 51—59.
44. Thas J. A. Ovoidal translation planes, Arch. Math., 23 (1972), 110—112.
45. Thas J. A. Construction of partial geoometries, Simon Stevin 46 (1973), 95—98.
46. Thas J. A. Construction of maximal arcs and partial geometries, Geometriae Dedicata, 3 (1974), 61—64.
47. Thas J. A. Some results concerning $\{(q+1)(n-1); n\}$-arcs and $\{(q+1)(n-1)+1; n\}$-arcs in finite projective planes of order q, J. Comb. Theory, 19 (1975), 228—232.
48. Thas J A., 4-gonal configurations, in Finite Geometrical Structures and their Applications, C. I. M. E., II ciclo, Bressanone (1972), 249—263.
49. Thas J. A. Combinatorial characterizations of generalized quadrangles with parameters $s=q$ and $t=q^2$, to appear.
50. Thas J. A. A remark concerning the restriction the parameters of a 4-gonal subconfiguration, Simon Stevin, 48 (1974—1975), 65—68.
51. Thas J. A. 4-gonal subconfigurations of a given 4-gonal configuration, Rend. Accad. Naz Lincei, 53 (1972), 520—530.
52. Thas J. A., De Clerck F. Some applications of the fundamental characterization theorem of R. C. Bose to partial geometries, Rend. Accad. Naz. Lincei, to appear.
53. Thas J. A., De Winne P. Generalized quadrangles in projective spaces, J. of Geometry, to appear.
54. Tits J. Sur la trialité et certains groupes qui s'en déduisent, Publ. Math. I. H. E. S., Paris 2 (1959), 14—60.
55. Tits J. Ovoides et groupes de Suzuki, Arch. Math., 13 (1962), 187—198.
56. Tits J. Buildings and BN-pairs of spherical type, Springer—Verlag Lecture Notes # 386, Berlin, 1974.
57. Wallis W. D. Configurations arising from maximal arcs, J. Comb. Theory A, 15 (1973), 115—119.

2. МЕТОДЫ ПЕРЕЧИСЛЕНИЙ

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ РАЗБИЕНИЙ: РОЛЬ ЭЙЛЕРОВЫХ РЯДОВ И q-ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ [1]

Дж. Е. Эндрюс, Р. Эски

Теория разбиений чисел издавна связывалась с так называемыми гипергеометрическими функциями или эйлеровыми рядами. Мы начинаем с обсуждения некоторых не слишком известных тождеств Л. Дж. Роджерса, получающих интересные интерпретации в теории разбиений. Мы показываем, как ряд способов изучения разбиений приводит к эйлеровым рядам. Большая часть нашей работы является по преимуществу введением к недавним работам об ортогональных многочленах, определяемых посредством базисных гипергеометрических рядов, а также к приложениям, которые можно получать из этих результатов для теории разбиений. Пожалуй, наиболее интересно отметить, что тождества Роджерса — Рамануджана выводятся здесь из нашего решения задачи о связи коэффициентов малых q-многочленов Якоби.

1. НЕСКОЛЬКО ТЕОРЕМ Л. ДЖ. РОДЖЕРСА

Л. Дж. Роджерс [20] стал известен благодаря следующим двум тождествам, доказанным им в 1894 году:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}, \qquad (1.1)$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})}. \qquad (1.2)$$

История забвения этих тождеств и их последующего переоткрытия С. Рамануджаном описывалась неоднократно [17,

---

[1]) Andrews G. E., Askey R. Enumeration of partitions: the role of Eulerian series and q-orthogonal polynomials

стр. 90—91], [8; гл. 7], так что мы не будем воспроизводить ее здесь. Нашей теперешней целью является рассмотрение ряда других результатов Роджерса, которые все еще мало известны. Эти тождества почти так же поразительны, как «тождества Роджерса—Рамануджана» (т. е. (1.1) и (1.2)), а их аналоги в терминах теории разбиений даже более неожиданны. Эти результаты и общее обсуждение таких задач в разд. 2 привели нас к заключению об отставании широкого исследования аналитической теории эйлеровых рядов. В разд. 3 мы вносим некоторый вклад в эти исследования, показывая, насколько полезными при изучении разбиений оказываются ортогональные многочлены, определяемые базисными гипергеометрическими функциями; результаты этого раздела представляют собой лишь введение в более широкое изучение ортогональных многочленов, представленное в [9].

1.1. Аналитическая форма тождеств Роджерса

Роджерс (в [20] и [21]) привел целый ряд тождеств относительно рядов сумм и произведений. Чтобы избежать ослабления интереса к этим результатам из-за показа слишком большого их числа, мы выбрали лишь шесть из них; они хорошо иллюстрируют эти удивительные открытия Роджерса:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{2n})}=$$
$$=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{2n+1})(1-q^{20n+4})(1-q^{20n+16})},\qquad(1.1.1)$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2+2n}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{2n+1})}=$$
$$=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{2n+1})(1-q^{20n+8})(1-q^{20n+12})},\qquad(1.1.2)$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{2n})}=\prod_{\substack{n=1\\ n\not\equiv\pm1,\ \pm8,\\ \pm9,\ 10\,(\mathrm{mod}\,20)}}^{\infty}(1-q^n)^{-1},\qquad(1.1.3)$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{2n+1})}=\prod_{\substack{n=1\\ n\not\equiv\pm3,\ \pm4,\\ \pm7,\ 10\,(\mathrm{mod}\,20)}}^{\infty}(1-q^n)^{-1};\qquad(1.1.4)$$

$$\left\{\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m})\right\}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q^4)(1-q^8)\dots(1-q^{4n})}\right\}=$$
$$=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}; \qquad (1.1.5)$$

$$\left\{\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m})\right\}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2+2n}}{(1-q^4)(1-q^8)\dots(1-q^{4n})}\right\}=$$
$$=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})}. \qquad (1.1.6)$$

Для справок заметим, что (1.1) и (1.2) впервые опубликованы в [20, стр. 328, рав. (1) и стр. 329 рав. (2)]. Равенство (1.1.1) есть второе равенство на стр. 331 мемуара Роджерса [20], в то время как равенство (1.1.2) эквивалентно равенству (7) на стр. 331 в [20]. Равенство (1.1.3) эквивалентно равенству, напечатанному сразу после равенства (12) на стр. 332 в [20], а равенство (1.1.4) эквивалентно равенству (6) на стр. 331 в [20]. Равенство (1.1.5) есть последнее равенство на стр. 330 в [20], а равенство (1.1.6) есть тождество, предшествующее равенству (7) на стр. 331 в [20].

1.2. Следствия из тождеств Роджерса для теории разбиений

В разделе 2 будет обсуждаться техника, полезная при переходе от комбинаторных к аналитическим тождествам, здесь же ограничимся приведением совершенно неожиданных теорем о разбиениях, которые следуют из (1.1.1) — (1.1.6).

Начинаем с напоминания.

Теорема 1 (теорема Эйлера). *Число разбиений $b_1+b_2+\dots+b_r$ числа n, где $b_1\geqslant b_2\geqslant b_3\geqslant\dots$ и каждое b_i нечетно, равно числу разбиений $c_1+c_2+\dots+c_s$ числа n, где $c_1>c_2>c_3>\dots$.*

Стандартное упражнение в элементарной теории разбиений [3; гл. 13], [18; гл. 19] показывает, что теорема Эйлера легко выводима из тривиального тождества о бесконечных произведениях

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n})}{(1-q^n)}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2n-1}}.$$

Б. Гордон [16] отметил, что (1.1.1) может быть интерпретировано следующим образом.

Теорема 2 (теорема Гордона). *Число разбиений* $b_1+b_2+\ldots$ $\ldots+b_r$ *числа* n, *где* $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots$ *и каждое* b_i *либо нечетно, либо* $\equiv \pm 4 \pmod{20}$, *равно числу разбиений* $c_1+c_2+\ldots+c_3$ *числа* n, *где* $c_1 > c_2 \geqslant c_3 > c_4 \geqslant c_5 > \ldots$.

Таким образом, теорема 2 кажется весьма тесно связанной с теоремой 1, однако доказательство ее более сложно. Имеется аналогичная интерпретация (1.1.2), упомянутая Гордоном [16] и подробно доказанная В. Коннором [13].

Теорема 3. *Число разбиений* $b_1+b_2+\ldots+b_r$ *числа* n, *где* $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots$ *и каждое* b_i *либо нечетно, либо* $\equiv \pm 8 \pmod{20}$, *равно числу разбиений* $c_1+c_2+\ldots+c_{2s+1}$ *числа* n *на нечетное число частей, где* $c_1 \geqslant c_2 \geqslant c_3 > c_4 \geqslant c_5 > c_6 \geqslant c_7 > \ldots$ (*т. е. в* $c_i \geqslant c_{i+1}$ *имеет место строгое неравенство, если* i *нечетно и* $i \geqslant 3$).

В. Коннор [13] также интерпретировал (1.1.3) и (1.1.4).

Теорема 4. *Число разбиений* $b_1+b_2+\ldots+b_r$ *числа* n, *где* $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots$ *и каждое* $b_i \not\equiv \pm 1, \pm 8, \pm 9, 10 \pmod{20}$, *равно числу разбиений* $c_1+c_2+\ldots+c_s$ *числа* n *на четное число частей, где* $c_1 \geqslant c_2 > c_3 \geqslant c_4 > c_5 \geqslant \ldots$.

Теорема 5. *Число разбиений* $b_1+b_2+\ldots+b_r$ *числа* n, *где* $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots$ *и каждое* $b_i \not\equiv \pm 3, \pm 4, \pm 7, 10 \pmod{20}$, *равно числу разбиений* $c_1+c_2+\ldots+c_s$ *числа* n, *где* $c_1 \geqslant c_2 > c_3 \geqslant c_4 > c_5 \geqslant \ldots$.

Равенства (1.1.5) и (1.1.6), по-видимому, не интерпретировались ранее; отметим, что бесконечное произведение в (1.1.5) в точности таково, как в (1.1), а то, что в (1.1.6), в точности таково, как в (1.2).

Теорема 6. *Число разбиений числа* n *с различными частями и с каждой четной частью, большей чем удвоенное число нечетных частей, равно числу разбиений* n *на части, сравнимых с* 1 *или* 4 *по модулю* 5.

Теорема 7. *Число разбиений числа* n *на различные части, каждая из которых больше чем* 1, *в которых каждая четная часть больше, чем удвоенное число нечетных частей, равно числу разбиений* n *на части, сравнимые с* 2 *или* 3 *по модулю* 5.

Как хорошо известно, из равенства (1.1) следует, что число разбиений n на части, которые разнятся по крайней мере на 2, также равно числу разбиений n на части, сравнимые с 1 или 4 по модулю 5.

Пример. Рассмотрим случай $n = 14$ для теоремы 6 и первого тождества Роджерса — Рамануджана:

Различные части, каждая > удвоенного числа нечетных частей	части разнятся по крайней мере на 2	части $\equiv 1,4 \pmod 5$
14	14	14
13+1	13+1	11+1+1+1
12+2	12+2	9+4+1
11+3	11+3	9+1+1+1+1+1
10+4	10+4	6+6+1+1
10+3+1	10+3+1	6+4+4
9+5	9+5	6+4+1+1+1+1
8+6	9+4+1	6+1+ ... +1
8+5+1	8+6	4+4+4+1+1
8+4+2	8+5+1	4+4+1 ... +1
7+6+1	8+4+2	4+1+ ... +1
6+5+3	7+5+2	1+1+ ... +1

Поскольку тождества Роджерса — Рамануджана плохо поддаются чисто комбинаторному доказательству, естественно ожидать, что комбинаторное доказательство теоремы 6 окажется трудным; однако следующая задача более доступна.

Задача 1. Установить взаимно однозначное соответствие между разбиениями n, в которых части разнятся по крайней мере на 2, и разбиениями n на различные части, в которых каждая четная часть больше чем удвоенное число нечетных частей.

2. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРОВЫХ РЯДОВ

Связь между теоремами 2 — 7 и тождествами (1.1.1) — (1.1.6) устанавливается легко. Выберем переход от (1.1.1) к теореме 2 в качестве примера. Напомним, что выражение

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{2n})} \tag{2.1}$$

служит производящей функцией для числа разбиений, в которых имеется не более $2n$ частей (см. теорему $12=2$ и $13=1$ в [3]). Кроме того, очевидно равенство

$$q^{n^2} = q^{0+1+1+2+2+\dots+(n-1)+(n-1)+n}. \tag{2.2}$$

Таким образом, если $\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_j$ — произвольное разбиение, в котором $j \leqslant 2n$, то можно доопределить $\gamma_{j+1}=\gamma_{j+2}= \ldots =\gamma_{2n+1}=0$ и тогда увидим, что $\gamma_1+n=c_1$, $\gamma_2+(n-1)=c_2$, $\gamma_3+(n-1)=c_3, \ldots, \gamma_{2n-1}+1=c_{2n-1}$, $\gamma_{2n}+1=c_{2n}$, $\gamma_{2n+1}=c_{2n+1}$ представляет собой разбиение $c_1+c_2+c_3+\ldots$, которое имеет либо $2n$, либо $2n+1$ ненулевых частей. Таким образом, левая часть равенства (1.1.1), очевидно, представляет собой производящую функцию для числа разбиений $c_1+c_2+c_3+\ldots$, в которых $c_1>c_2\geqslant c_3>c_4\geqslant\ldots$. Поскольку правая часть (1.1.1), очевидно, представляет собой производящую функцию разбиений, в которых каждая часть либо нечетна, либо $\equiv\pm 4 \pmod{20}$, то видим, что из равенства этих производящих функций в (1.1.1) вытекает утверждение теоремы 2.

Рассуждения, привлекаемые для вывода теорем 3 — 5, вполне подобны этому; вместо (2.2) нужно лишь рассмотреть соответственно равенства

$$q^{n^2+2n}=q^{1+1+2+2+\ldots+n+n+n};$$
$$q^{n^2+n}=q^{1+1+2+2+\ldots+n+n};$$
$$q^{n^2+n}=q^{0+1+1+2+2+\ldots+n+n}.$$

При выводе теорем 6 и 7 из (1.1.5) и (1.1.6) нужно быть немного более внимательным. Покажем это для (1.1.5).

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q^4)(1-q^8)\ldots(1-q^{4n})}=$$
$$=\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2n})(1+q^2)(1+q^4)\ldots(1+q^{2n})}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2n})}\cdot\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2n+2m}). \qquad (2.3)$$

Тем же способом, каким мы преобразовали левую часть (1.1.1), получим, что

$$\frac{q^{n^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2n})}=\frac{q^{1+3+5+\ldots+2n-1}}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2n})}$$

представляет собой производящую функцию для числа разбиений с нечетными различными частями.

Поскольку $\prod\limits_{m=1}^{\infty}(1+q^{2n+2m})$ перечисляет разбиения на различные четные части, где каждая часть $>2n$, видим, что

$$\frac{q^{n^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2n})}\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2n+2m}) \qquad (2.4)$$

перечисляет разбиения на различные части, где n частей нечетны, а каждая четная часть $>2n$. Суммирование (2.4) по всем $n\geqslant 0$ приводит к производящей функции (2.3).

Наконец, заметим, что теорема 6 теперь следует из (1.1.5) и того факта, что правая часть (1.1.5) перечисляет разбиения с частями $\equiv 1,\ 4 \pmod 5$.

Теорема 7 выводится из (1.1.6) аналогично; нужно только использовать равенство $3+5+\ldots+(2n+1)=n^2+2n$.

2.1. Несколько нерешенных проблем о производящих функциях

Семь наших теорем создают впечатление, что доказательство тождеств теории разбиений состоит прежде всего в получении подходящих производящих функций и последующем применении аналитической техники для установления тождества соответствующих производящих функций.

В этом небольшом подразделе обсуждаются некоторые нерешенные задачи, относящиеся к «простым» переходам от тождества теории разбиений к тождеству аналитическому.

Во-первых, мы отметим «сцепленные» идеалы разбиений, которые уже интенсивно исследовались ([5], [7]; подробному введению в этот предмет посвящена глава 8 в [8]). Коротко говоря, сцепленные идеалы разбиений приводят к классам c разбиений, чьи производящие функции удовлетворяют линейным однородным q-разностным уравнениям с полиномиальными коэффициентами. Это означает, что если $f_c(x;q)=\sum P_c(m,n)x^mq^n$, где $P_c(m,\ n)$ есть число разбиений n на m частей, принадлежащих «сцепленному идеалу разбиений класса c», то существуют N и многочлены $\pi_j(x,\ q)$, такие, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_c(xq^j;\ q)\pi_j(x;\ q)=0. \tag{2.1.1}$$

Такая постановка вопроса приводит нас к следующей задаче [5; стр. 1037].

Какие конечные q-разностные линейные уравнения с полиномиальными коэффициентами (*такие, как* (2.1.1)) *имеют решения, представимые «более высокоразмерными» q-рядами*?

Вообще ответить на этот вопрос, по-видимому, очень трудно. Кроме того, даже в весьма частных задачах (для которых известен ответ на этот вопрос) остаются некоторые неясности. Например, пусть $b_{k,\ a}(m,\ n)$ обозначает число разбиений n на m частей: $b_1+b_2+\ldots+b_m$, $b_i\geqslant b_{i+1}$, $b_i-b_{i+k-1}\geqslant 2$, $b_{m-a+1}>1$; пусть $B_{k,\ a}(n)=\sum\limits_{m\geqslant 0} b_{k,\ a}(m,\ n)$, т. е. $B_{k,\ a}(n)$ есть полное число таких разбиений без учета частей.

Б. Гордон [15] (см. также [1]) доказал

Теорему 8. *Для* $1 \leqslant a \leqslant k$ *и всех* n *имеет место равенство* $A_{k,a}(n) = B_{k,a}(n)$, *где* $A_{k,a}(n)$ *есть полное число* $a \pmod{2k+1} \not\equiv 0$ *разбиений* n *на части.*

Заметим, что случаи $k = a = 2$ и $k = a + 1 = 2$ представляют собой стандартные аналоги тождеств Роджерса — Рамануджана (1.1), (1.2) в терминах разбиений. Отметим также, что имеется соответствующее аналитическое тождество [6]

$$\sum_{n_1, n_2, \ldots, n_{k-1} \geqslant 0} \frac{q^{N_1^2 + N_2^2 + \ldots + N_{k-1}^2 + N_a + N_{a+1} + \ldots + N_{k-1}}}{(q)_{n_1} (q)_{n_2} \ldots (q)_{n_{k-1}}} =$$

$$= \prod_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0,\ \pm a \pmod{2k+1}}}^{\infty} (1 - q^n)^{-1}, \tag{2.1.1}$$

где $(q)_n = (a, \quad q)_n = (1-a)(1-aq)\ldots(1-aq^{n-1})$ и $N_j = n_j + n_{j+1} + \ldots + n_{k-1}$; к тому же это принимает вид (1.1) при $k = a = 2$ и (1.2) при $k = a + 1 = 2$.

Отметим, наконец, что можно (некомбинаторно) доказать, что

$$\sum_{m, n \geqslant 0} b_{k,a}(m, n) x^m q^n =$$

$$= \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_{k-1} \geqslant 0} \frac{x^{N_1 + N_2 + \ldots + N_{k-1}} q^{N_1^2 + N_2^2 + \ldots + N_{k-1}^2 + N_a + \ldots + N_{a-1}}}{(q)_{n_1} (q)_{n_2} \ldots (q)_{n_{k-1}}}. \tag{2.1.2}$$

Таким образом, (2.1.2) образует «более высокоразмерное» представление с помощью q-рядов производящей функции, связанной с множеством разбиений, рассмотренным в теореме 8.

Если $k = 2$, то (2.1.2) можно легко доказать комбинаторно, с привлечением производящих функций, как в теоремах 2.7. Для случая $k > 2$ известно лишь доказательство (2.1.2), демонстрирующее, что каждая часть этого равенства есть единственное решение некоторой системы q-разностных уравнений.

Существует ли прямое комбинаторное доказательство равенства (2.1.2)?

3. q-ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ И РАЗБИЕНИЯ

В разд. 2 мы показали взаимосвязь между q-рядами и производящими функциями разбиений. Сейчас мы предполагаем вывести восемь тождеств (1.1), (1.2), (1.1.1) — (1.1.6) в качестве следствий некоторых наших новых результатов об ортогональных многочленах, определяемых посредством базисных гипергеометрических рядов. Чтобы сохранить разумные размеры нашего обзора, мы будем рассматривать лишь одно семейство q-ортогональных многочленов, именно малые q-многочлены Якоби. Ранее прилагательное «малый» не использовалось, однако мы нашли второй q-аналог многочленов Якоби, который имеет третий свободный параметр, и эти последние многочлены будем именовать большими q-многочленами Якоби:

$$p_n(x;\ \alpha,\ \beta\,|\,q) = {}_a\phi_1\begin{pmatrix} q^{-n},\ \alpha\beta q^{n+1};\ q,\ qx \\ \alpha q \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

$${}_{r+1}\phi_r\begin{pmatrix} a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{r+1};\ q,\ t \\ b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_r \end{pmatrix} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_{r+1})_n t^n}{(q)_n (b_1)_n \dots (b_r)_n} \tag{3.2}$$

и

$$(A)_n = (1-A)(1-Aq)\dots(1-Aq^{n-1}). \tag{3.3}$$

Нулевой малый q-многочлен Якоби есть 1; следующие два имеют вид

$$p_1(x;\ \alpha,\ \beta\,|\,q) = 1 - \frac{(1-\alpha\beta q^2)}{(1-\alpha q)}x, \tag{3.4}$$

$$p_2(x;\ \alpha,\ \beta\,|\,q) = 1 - \frac{(1-\alpha\beta q^3)}{(1-\alpha q)}(1+q)xq^{-1} + \\ + \frac{(1-\alpha\beta q^3)(1-\alpha\beta q^4)}{(1-\alpha q)(1-\alpha q^2)}x^2q^{-1}. \tag{3.5}$$

Основными результатами, заимствованными нами из общей теории базисных гипергеометрических функций, являются q-аналог бикомпактных рядов [11; стр. 66, рав. (14)]

$$\sum_{n=0} \frac{(a)_n z^n}{(q)_n} = \frac{(az)_\infty}{(z)_\infty} \tag{3.6}$$

и формула суммирования для сбалансированного ${}_3\phi_2$ ([11; стр. 68, рав. (1)]; ряд в (3.2) называем сбалансированным [10; стр. 56], если один из a_i есть q^{-n}, где n — неотрицательное целое и $qa_1a_2\dots a_{r+1} = b_1b_2\dots b_r$):

$${}_3\phi_2\begin{pmatrix} q^{-n},\ Aq^n,\ B;\ q,\ q \\ C,\ \frac{ABq}{C} \end{pmatrix} = \frac{B^n\left(\frac{Aq}{C}\right)_n\left(\frac{C}{B}\right)_n}{(C_n)\left(\frac{ABq}{C}\right)_n}. \tag{3.7}$$

Относительно этих многочленов можно доказать много теорем, и мы представляем их в [9]. Здесь же мы имеем дело лишь с получением формулы связи коэффициентов (теорема 10). Для этой цели мы должны доказать один промежуточный результат (теорема 9), который полностью описывает отношение ортогональности малых q-многочленов Якоби. Существование этого результата показано В. Ханом [16; § 10]; В. Ал-Салам и А. Верма [22] выводят этот результат, исходя из рассмотрения моментов соответствующего распределения.

Теорема 9.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i q^i (q^{i+1})_\infty}{(\beta q^{i+1})_\infty} p_n(q^i, \alpha, \beta \mid q)\, p_m(q^i; \alpha, \beta \mid q) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если} \quad m \neq n, \\ \dfrac{\alpha^n q^n (q)_\infty (\alpha\beta q^{n+1})_\infty (q)_n}{(\beta q^{n+1})_\infty (\alpha q)_\infty (\alpha q)_n (1-\alpha\beta q^{2n+1})}, & m = n. \end{cases} \tag{3.8}$$

Доказательство. Поскольку $p_m(x; \alpha, \beta \mid q)$ имеет степень m по x, то мы можем заменить $p_m(q^i; \alpha, \beta \mid q)$ на любой другой многочлен от q^i степени m; после изучения этого упрощенного случая легко вывести (3.8):

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i q^i (q^{i+1})_\infty}{(\beta q^{i+1})_\infty} p_n(q^i; \alpha, \beta \mid q)\, q^{im} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i q^{(m+1)i} (q^{i+1})_\infty}{(\beta q^{i+1})_\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(q^{-n})_j (\alpha\beta q^{n+1})_j q^{(i+1)j}}{(q)_j (\alpha q)_j} =$$

$$= \frac{(q)_\infty}{(\beta q)_\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(q^{-n})_j (\alpha\beta q^{n+1})_j q^j}{(q)_j (\alpha q)_j} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\beta q)_i}{(q)_i} (\alpha q^{m+j+1})^i =$$

$$= \frac{(q)_\infty}{(\beta q)_\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(q^{-n})_j (\alpha\beta q^{n+1})_j q^j}{(q)_j (\alpha q)_j} \frac{(\alpha\beta q^{m+j+2})_\infty}{(\alpha q^{m+j+1})_\infty} = \qquad \text{см. (3.6)}$$

$$= \frac{(q)_\infty (\alpha\beta q^{m+2})_\infty}{(\beta q)_\infty (\alpha q^{m+1})_\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(q^{-n})_j (\alpha\beta q^{n+1})_j (\alpha q^{m+1})_j q^j}{(q)_j (\alpha q)_j (\alpha\beta q^{m+2})_j} =$$

$$= \frac{(q)_\infty (\alpha\beta q^{m+2})_\infty (\beta^{-1} q^{-n})_n (q^{-m})_n}{(\beta q)_\infty (\alpha q^{m+1})_\infty (\alpha q_n) (\alpha^{-1}\beta^{-1} q^{-n-m-1})_n} = \qquad \text{см. (3.7)}$$

$$= \frac{(q)_\infty (\alpha\beta q^{m+n+2})_\infty (q^{-m})_n \alpha^n q^{n(m+1)}}{(\beta q^{n+1})_\infty (q^{m+1})_\infty (\alpha q)_n} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant m < n, \\ \dfrac{(-\alpha)^n q^{n(n+1)/2} (q)_\infty (\alpha\beta q^{2n+2})_\infty (q)_n}{(\beta q^{n+1})_\infty (\alpha q)_\infty}, & m = n. \end{cases} \tag{3.9}$$

Следовательно, верхняя строка в (3.8) доказана. Более того, поскольку старший коэффициент в $p_n(x; \alpha, \beta \mid q)$ равен $(-1)^n (\alpha\beta q^{n+1})_n q^{-n(n-1)/2}/(\alpha q)_n$, то мы можем домножить нижнюю строку (3.9) на это выражение для получения нижней строки (3.8). Таким образом, теорема 9 доказана.

Отметим, что в нашем доказательстве формулы связи равенства (3.9) и (3.8) одинаково важны.

Имеется ряд причин для изучения проблемы связи коэффициентов. Сегё [24; гл. 9] использовал связь коэффициентов между многочленами Якоби с одним альтернирующим (меняющимся) параметром для нахождения наименьшего порядка среднего значения Чезаро, которое суммирует каждый ряд Якоби от непрерывных функций. По-видимому, Д. Фельдхейм первый получил явную формулу (${}_3F_2$ — гипергеометрическая функция) для связи коэффициентов между двумя произвольными многочленами Якоби (для более подробного ознакомления с проблемой связи коэффициентов см. [10, гл. 7]). Теорема 10 представляет собой q-аналог теоремы Фельдхейма.

Теорема 10. *Пусть* $a_{k,n}$ *определено для всех* n, k; $0 \leqslant k \leqslant n$, *соотношением*

$$p_n(x;\ \alpha,\ \beta \mid q) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} p_k(x;\ \alpha,\ \beta \mid q). \tag{3.10}$$

Тогда

$$a_{n,k} = \frac{(-1)^k q^{k(k+1)/2} (\gamma\delta q^{n+1})_k (q^{-n})_k (\alpha q)_k}{(q)_k (\gamma q)_k (\alpha\beta q^{k+1})_k} \times$$
$$\times {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{-n+k},\ \gamma\delta q^{n+k+1},\ \alpha q^{k+1};\ q,\ q \\ \gamma q^{k+1},\ \alpha\beta q^{2k+2} \end{matrix}\right). \tag{3.11}$$

Доказательство. Соотношение ортогональности в теореме 9 позволяет нам сразу найти представление для $a_{k,n}$:

$$a_{k,n} = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i q^i (q^{i+1})_\infty}{(\beta q^{i+1})_\infty} p_k(q^i;\ \alpha,\ \beta \mid q)\, p_n(q^i;\ \gamma,\ \delta \mid q)}{\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i q^i (q^{i+1})_\infty}{(\beta q^{i+1})_\infty} (p_k(q^i;\ \alpha,\ \beta \mid q))^2}; \tag{3.12}$$

вид знаменателя правой части (3.12) непосредственно следует из (3.8) при $m = n = k$. Преобразуем сейчас выражение числителя в (3.12):

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i q^i (q^{i+1})_\infty}{(\beta q^{i+1})_\infty} p_k(q^i;\ \alpha,\ \beta \mid q)\, p_n(q^i;\ \gamma,\ \delta \mid q) =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{(q^{-n})_j (\gamma\delta q^{n+1})_j q^j}{(q)_j (\gamma q)_j} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i q^i (q^{i+1})_\infty}{(\beta q^{i+1})_\infty} p_k(q^i;\ \alpha,\ \beta \mid q)\, q^{ij} =$$
$$= (q)_\infty \sum_{j=0}^{n} \frac{(q^{-n})_j (\gamma\delta q^{n+1})_j q^j}{(q)_j (\gamma q)_j} \frac{(\alpha\beta q^{j+k+2})_\infty (q^{-j})_k \alpha^k q^{k(j+1)}}{(\beta q^{k+1})_\infty (\alpha q^{j+1})_\infty (\alpha q)_k} =$$

(согласно предпоследней строке в цепочке равенств (3.7))

$$= \frac{(-1)^k (q)_\infty \alpha^k q^{k(k+1)/2}}{(\beta q^{k+1})_\infty (\alpha q)_k} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(q^{-n})_{j+k} (\gamma\delta q^{n+1})_{j+k} q^{j+k} (\alpha\beta q^{j+2k+2})_\infty}{(q)_j (\gamma q)_{j+k} (\alpha q^{j+k+1})_\infty} =$$

$$= \frac{(-1)^k (q)_\infty (\gamma\delta q^{n+1})_k (\alpha\beta q^{2k+2})_\infty (q^{-n})_k \alpha^k q^{k(k+3)/2}}{(\beta q^{k+1})_\infty (\alpha q)_\infty (\gamma q)_k} \times$$

$$\times {}_3\phi_2\begin{pmatrix} q^{-n+k}, \ \gamma\delta q^{n+k+1}, \ \alpha q^{k+1}; \ q, \ q \\ \gamma q^{k+1}, \ \alpha\beta q^{2k+2} \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Для получения $a_{k,n}$ мы делим последнее выражение в цепочке равенств (3.13) на нижнюю строку (3.8) при $m=n=k$. Итак,

$$a_{k,n} = \frac{(-1)^k q^{k(k+1)/2} (\gamma\delta q^{n+1})_k (q^{-n})_k (\alpha q)_k}{(\alpha\beta q^{k+1})_k (q)_k (\gamma q)_k} \times$$

$$\times {}_3\phi_2\begin{pmatrix} q^{-n+k}, \ \gamma\delta q^{n+k+1}, \ \alpha q^{k+1}; \ q, \ q \\ \gamma q^{k+1}, \ \alpha\beta q^{2k+2} \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 10 может быть немедленно обобщена с целью получения тождества для функций ${}_{r+1}\phi_r$, определенных в (3.2).

Теорема 11. *Пусть* $a_{k,n}$ *определены, как в* (3.9); *тогда*

$${}_{r+2}\phi_{r+1}\begin{pmatrix} q^{-n}, \ \gamma\delta q^{n+1}, \ a_1, \ \ldots, \ a_r; \ q, \ xq \\ \gamma q, \ b_1, \ \ldots, \ b_r \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} \, {}_{r+2}\phi_{r+1}\begin{pmatrix} \alpha^{-k}, \ \alpha\beta q^{k+1}, \ a_1, \ \ldots, \ a_r; \ q, \ xq \\ \alpha q, \ b_1, \ \ldots, \ b_r \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Доказательство. Мы просто заметим, что поскольку (3.10) представляет собой полиномиальное тождество по x, то оно сохраняет свою силу, если мы заменим всюду x^k на любое другое выражение и, в частности, на

$$\frac{(a_1)_k \ldots (a_r)_k x^k}{(b_1)_k \ldots (b_r)_k}. \tag{3.16}$$

Проиллюстрируем сейчас силу теоремы 11, выводя из нее ватсоновский q-аналог теоремы Виппля [25]:

Теорема 12

$${}_8\phi_7\begin{pmatrix} a, \ q\sqrt{a}, \ -q\sqrt{a}, \ b, \ c, \ d, \ e, \ q^{-n}; \ q, \ \frac{a^2q^{n+2}}{bcde} \\ \sqrt{a}, \ -\sqrt{q}, \ \frac{aq}{b}, \ \frac{aq}{c}, \ \frac{aq}{d}, \ \frac{aq}{e}, \ aq^{n+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{(aq)_n \left(\frac{aq}{de}\right)_n}{\left(\frac{aq}{d}\right)_n \left(\frac{aq}{e}\right)_n} \, {}_4\phi_3\begin{pmatrix} \frac{aq}{bc}, \ d, \ e, \ q^{-n}; \ q, \ q \\ \frac{de}{aq^n}, \ \frac{aq}{b}, \ \frac{aq}{c} \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Доказательство. В (3.15) положим $r=2$, $\beta=\delta$, $a_1=\alpha q$, $x=1$, $b_2=q^2\alpha\delta a_2/b_1$. Такой выбор параметров мотивируется тем, что при нем и $a_{k,n}$, и ${}_4\phi_3$ из правой части (3.15) приводятся к ${}_3\phi_2$-рядам, суммируемым согласно (3.7). Таким образом, (3.15) преобразуется к виду

$$
{}_4\phi_3\left(\begin{matrix} q^{-n},\ \gamma\delta q^{n+1},\ \alpha q,\ a_2;\ q,\ q \\ \gamma q,\ b_1,\ \dfrac{q^2\alpha\delta a_2}{b_1} \end{matrix}\right)=
$$

$$
=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k q^{k(k+1)/2}(\gamma\delta q^{n+1})_k (q^{-n})_k (\alpha q)_k}{(\alpha\delta q^{k+1})_k (q)_k (\gamma q)_k}\times
$$

$$
\times{}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{-n+k},\ \gamma\delta q^{n+k+1},\ \alpha q^{k+1};\ q,\ q \\ \gamma q^{k+1},\ \alpha\delta q^{2k+2} \end{matrix}\right)\times
$$

$$
\times{}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{-k},\ \alpha\delta q^{k+1},\ a^2;\ q,\ q \\ b_1,\ \dfrac{q^2\alpha\delta a_2}{b_1} \end{matrix}\right)=
$$

$$
=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k q^{k(k+1)/2}(\gamma\delta q^{n+1})_k (q^{-n})_k (\alpha q)_k}{(\alpha\delta q^{k+1})_k (q)_k (\gamma q)_k}\times
$$

$$
\times\frac{(\alpha q^{k+1})^{n-k}(\delta q^{k+1})_{n-k}\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)_{n-k}}{(\gamma q^{k+1})_{n-k}(\alpha\delta q^{2k+2})_{n-k}}\cdot\frac{a_2^k\left(\dfrac{\alpha\delta q^2}{b_1}\right)_k\left(\dfrac{b_1}{a_2}\right)_k}{(b_1)_k\left(\dfrac{\alpha\delta a_2 q^2}{b_1}\right)_k}=
$$

$$
=\frac{\alpha^n q^{n^2+n}(\delta q)_n\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)_n}{(\gamma q)_n}, \tag{3.18}
$$

$$
\sum_{k=0}^{n}\frac{a_2^k(-\alpha)^{-k}q^{k(k+1)/2+(k+1)(n-k)}\left(\gamma\delta q^{n+1}\right)_k\left(q^{-n}\right)_k(\alpha q)_k}{(q)_k(\alpha\delta q^{k+1})_n(1-\alpha\delta q^{n+k+1})}(1-\alpha\delta q^{2k+1})\times
$$

$$
\times\frac{\left(\dfrac{\alpha\delta q^2}{b_1}\right)_k\left(\dfrac{b_1}{a_2}\right)_k}{(\delta q)_k\left(1-\dfrac{\gamma}{\alpha}q^{n-1}\right)\left(1-\dfrac{\gamma}{\alpha}q^{n-2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{\gamma}{\alpha}q^{n-k}\right)(b_1)_k\left(\dfrac{\alpha\delta a_2 q^2}{b_1}\right)_k}=
$$

$$
=\frac{\alpha^n q^n(\delta q)_n(\gamma/\alpha)_n}{(\gamma q)_n(\alpha\delta q)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_2^k\gamma^{-k}\left(\gamma\delta q^{n+1}\right)_k\left(q^{-n}\right)_k(\alpha q)_k}{(q)_k(\alpha\delta q^{n+1})_k(1-\alpha\delta q^{n+k+1})}\times
$$

$$
\times(\alpha\delta q)_k(1-\alpha\delta q^{2k+1})\cdot\frac{(\alpha\delta q^2/b_1)_k(b_1/a_2)_k}{(\delta q)_k\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}q^{-n+1}\right)_k(b_1)_k\left(\dfrac{\alpha\delta a_2 q^2}{b_1}\right)_k}=
$$

$$
=\frac{\alpha^n q^n(\delta q)_n(\gamma/\alpha)_n}{(\alpha\delta q^2)_n(\delta q)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha\delta q)_k(1-\alpha\delta q^{2k+1})(\alpha\delta q^2/b_1)_k(\alpha q)_k}{(q)_k(1-\alpha\delta q)_k(b_1)_k(\delta q)_k}\times
$$

$$
\times\frac{(\gamma\delta q^{n+1})_k(b_1/a_2)_k(q^{-n})_k a_2^k\gamma^{-k}}{\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}q^{-n+1}\right)_k\left(\dfrac{\alpha\delta a_2 q^2}{b_1}\right)_k(\alpha\delta q^{n+2})_k}. \tag{3.19}
$$

В (3.19) положим $\alpha = d/q$, $\gamma = eda^{-1}q^{-n-1}$, $\delta = a/d$, $b_1 = aq/b$, $a_2 = \frac{aq}{bc}$ Следовательно,

$$
{}_4\phi_3\left(\begin{matrix} q^{-n}, \; e, \; d, \; \frac{aq}{bc}; \; q, \; q \\ \frac{ed}{aq^n}, \; \frac{aq}{b}, \; \frac{aq}{c} \end{matrix}\right) = \frac{d^n\left(\frac{aq}{d}\right)_n\left(\frac{e}{aq^n}\right)_n}{(aq)_n\left(\frac{ed}{aq^n}\right)_n} \times
$$

$$
\times\, {}_8\phi_7\left(\begin{matrix} q, \; q\sqrt{a}, \; -q\sqrt{a}, \; b, \; d, \; e, \; c, \; q^{-n}; \; q, \; \frac{a^2q^{n+2}}{bcde} \\ \sqrt{a}, \; -\sqrt{a}, \; \frac{aq}{b}, \; \frac{aq}{d}, \; \frac{aq}{e}, \; \frac{aq}{c}, \; aq^{n+1} \end{matrix}\right) =
$$

$$
= \frac{\left(\frac{aq}{d}\right)_n\left(\frac{aq}{e}\right)_n}{(aq)_n\left(\frac{aq}{de}\right)_n} \times
$$

$$
\times\, {}_8\phi_7\left(\begin{matrix} a, \; q\sqrt{a}, \; -q\sqrt{a}, \; b, \; c, \; d, \; e, \; q^{-n}; \; q, \; \frac{a^2q^{n+2}}{bcde} \\ \sqrt{a}, \; -\sqrt{a}, \; \frac{aq}{b}, \; \frac{aq}{c}, \; \frac{aq}{d}, \; \frac{aq}{e}, \; aq^{n+1} \end{matrix}\right), \tag{3.20}
$$

что эквивалентно (3.18) — желаемому результату.

Заключительный результат этого раздела — теорема 13 — содержит все необходимое для доказательства тождеств (1.1), (1.2) и (1.1.1)—(1.1.6). Все эти результаты имелись еще у Роджерса [20], [21], хотя Г. Н. Ватсон [25], [26] был первым, кто увидел, что они выводимы из теоремы 12.

Теорема 13.

$$
\frac{1}{(aq)_\infty}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(aq)_{n-1}(1-aq^{2n})(-1)^n a^{2n} q^{\frac{1}{2}n(5n-1)}}{(q)_n}\right) =
$$

$$
= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}a^n}{(q)_n} = (-aq^2; \; q^2)_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}a^n}{(q^2; \; q^2)_n(-aq^2; \; q^2)_n}; \tag{3.21}
$$

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{4n^2}q^{2n}}{(q^4; \; q^4)_n} = (aq; \; q^2)_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}a^n}{(q^2; \; q^2)_n(aq; \; q^2)_n}. \tag{3.22}
$$

Замечание. Нижеприведенное доказательство первой части (3.21) принадлежит Г. Н. Ватсону [25]. Для остальных двух тождеств было дано несколько простых доказательств (Роджерс [20], Ватсон [26], Эндрюс [2]). Доказательства, представленные нами, мы связываем с формулами для полиномиальных ${}_2\phi_1$-функций; хотя такой способ несколько сложен, он доставляет хорошую идею о происхождении таких тождеств. В то же время он показывает, что все эти результаты относятся к малым q-многочленам Якоби, а именно к общим полиномиальным ${}_2\phi_1$-функциям.

Доказательство. Первая часть (3.21) следует из теоремы 12, если параметры b, c, d, e, n стремятся к бесконечности; строгое обоснование этой процедуры приведено в книгах Бэйли [11] и Слатера [23].

Для доказательства второй части (3.2.1) мы опираемся на q-аналог теоремы Куммера:

$$ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a, & b; & q, & -q/b \\ & \frac{aq}{b} & & \end{matrix}\right) = \frac{(aq;\ q^2)_\infty (-q)_\infty (q^2a/b^2;\ q^2)_\infty}{(aq/b)_\infty (-q/b)_\infty}. \tag{3.23} $$

Этот результат, независимо доказанный Бэйли [12] и Даумом [14], можно получить весьма элементарно [4]. В (3.2.3) полагаем $a = q^{-n}$ и пусть $b \to 0$; отсюда следует

$$ \sum_{j=0}^{n} \frac{(q^{-n})_j}{(q)_j} q^{nj-j(j-1)/2} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ (q;\ q^2)_{n/2}, & \text{если } n \text{ четно;} \end{cases} \tag{3.24} $$

известный результат Гаусса, использованный им в одном из его исследований знака гауссовой суммы. Продолжая, получаем, что

$$ \begin{aligned} (aq;\ q^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}a^n}{(q^2;\ q^2)_n (aq;\ q^2)_n} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}a^n}{(q^2;\ q^2)_n} (aq^{2n+1};\ q^2)_\infty = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}a^n}{(q^2;q^2)_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m q^{m^2+2nm} (-1)^m}{(q^2;\ q^2)_m} = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^{s^2}a^s}{(q^2;\ q^2)_s} \sum_{m=0}^{s} \frac{(q^2;\ q^2)_s (-1)^m}{(q^2;\ q^2)_m (q^2;\ q^2)_{s-m}} = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^{s^2}a^s}{(q^2;\ q^2)_s} \sum_{m=0}^{s} \frac{(q^{-2s};\ q^2)_m}{(q^2;\ q^2)_m} q^{2sm-m^2+m} = \\ &\qquad\qquad \text{по (3.24)} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^{(2s)^2}q^{2s}}{(q^2;\ q^2)_{2s}} (q^2;\ q^4)_s = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^{4s^2}q^{2s}}{(q^4;\ q^4)_s}, \end{aligned} $$

что и доказывает (3.22). Отметим, что наше доказательство следует ватсоновскому подходу [26]; однако тот факт, что из (3.23) следует (3.24), по-видимому, нов.

Далее, нам понадобится формула суммирования для ${}_2\phi_1$-функции, которая, вероятно, не появлялась ранее

$$
{}_2\phi_1\begin{pmatrix} b^2, & \frac{b^2}{c}; & q^2, & \frac{cq}{b^2} \\ & c & & \end{pmatrix} =
$$

$$
= \frac{1}{2}\,\frac{(b^2;\ q^2)_\infty\,(q;\ q^2)_\infty}{(c;\ q^2)_\infty\,(cq/\beta^2;\ q^2)_\infty}\left(\frac{(c/b)_\infty}{(b)_\infty} + \frac{(-c/b)_\infty}{(-b)_\infty}\right). \tag{3.25}
$$

Этот результат легко выводится из фундаментального преобразования Гейне для ${}_2\phi_1$ [2; (11)]:

$$
{}_2\phi_1\begin{pmatrix} \alpha, & \beta; & q, & \tau \\ & \gamma & & \end{pmatrix} = \frac{(\beta)_\infty\,(\alpha\tau)_\infty}{(\gamma)_\infty\,(\tau)_\infty}\,{}_2\phi_1\begin{pmatrix} \gamma/\beta, & \tau; & q, & \beta \\ & \alpha\tau & & \end{pmatrix}. \tag{3.26}
$$

Для вывода (3.25) заменим q на q^2 и положим $\alpha = b^2/c$, $\beta = b^2$, $\gamma = c$, $\tau = cq/b^2$:

$$
{}_2\phi_1\begin{pmatrix} b^2, & b^2/c; & q^2, & cq/b^2 \\ & c & & \end{pmatrix} =
$$

$$
= \frac{(b^2;\ q^2)_\infty\,(q;\ q^2)_\infty}{(c;\ q^2)_\infty\,(cq/b^2;\ q^2)_\infty}\,{}_2\phi_1\begin{pmatrix} c/b^2, & cq/b^2; & q^2, & b^2 \\ & q & & \end{pmatrix} =
$$

$$
= \frac{(b^2;\ q^2)_\infty\,(q;\ q^2)_\infty}{(c;\ q^2)_\infty\,(cq/b^2;\ q^2)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c/b^2)_{2n}b^{2n}}{(q)_{2n}} =
$$

$$
= \frac{(b^2;\ q^2)_\infty\,(q;\ q^2)_\infty}{(c;\ q^2)_\infty\,(cq/b^2;\ q^2)_\infty}\,\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c/b^2)_n b^n\,(1+(-1)^n)}{(q)_n} =
$$

$$
= \frac{1}{2}\,\frac{(b^2;\ q^2)_\infty\,(q;\ q^2)_\infty}{(c;\ q^2)_\infty\,(cq/b^2;\ q^2)_\infty}\left(\frac{(c/b)_\infty}{(b)_\infty} + \frac{(-c/b)_\infty}{(-b)_\infty}\right) \text{ согласно (3.6),}
$$

что и дает (3.25). Положим сейчас $b = q^{-n}$ в (3.25) и пусть при этом $c \to \infty$; получим

$$
\sum_{m=0}^{n}\frac{(q^{-2n};\ q^2)}{(q^2;\ q^2)_m}\,q^{2nm-m^2+2m} = (-q)_n. \tag{3.27}
$$

Таким образом, для окончательного доказательства (3.21) имеем

$$(-aq^2;\ q^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}a^n}{(q^2;\ q^2)_n\,(-aq^2;\ q^2)_n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}a^n}{(q^2;\ q^2)_n}(-aq^{2n+2};\ q^2)_\infty=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}a^n}{(q^2;\ q^2)_n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q^{m^2+m+2nm}a^m}{(q^2;\ q^2)_m}=$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{q^{s^2}a^s}{(q^2;\ q^2)_s}\sum_{m=0}^{s}\frac{(q^2;\ q^2)_s q^m}{(q^2;\ q^2)_m\,(q^2;\ q^2)_{s-m}}=$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{q^{s^2}a^s}{(q^2;\ q^2)_s}\sum_{m=0}^{s}\frac{(q^{-2s};\ q^2)_m\,q^{2sm-m^2+2m}}{(q^2;\ q^2)_m}=$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{q^{s^2}a^s}{(q^2;\ q^2)_s}(-q)_s=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{q^{s^2}a^s}{(q)_s};$$

тем самым теорема 13 полностью доказана.

Покажем сейчас, как из теоремы 13 следуют тождества Роджерса — Рамануджана и наши 6 тождеств (1.1.1) — (1.1.6). Если положить $a=1$ в теореме 13 и вспомнить, что, согласно тождеству Якоби [18, стр. 284],

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(5n-1)}(1+q^n)}{(q)_\infty}=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})},$$

то (1.1), (1.1.5) и (1.1.1) следуют непосредственно. Если положить $a=q$ в (3.1.1) и заметить, что [18, стр. 284]

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(5n+3)}(1-q^{2n+1})}{(q)_\infty}=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})},$$

то (1.2) следует немедленно, а (1.1.4) следует после алгебраического упрощения.

Наконец, заметим, что выражение

$$(-aq;\ q^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}a^n}{(q^2;\ q^2)_n\,(-aq;\ q^2)_n}\tag{3.28}$$

равно каждому из выражений в (3.21), поскольку

$$(-aq;\ q^2)_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}a^n}{(q^2;\ q^2)_n\,(-aq;\ q^2)_n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}a^n}{(q^2;\ q^2)_n} (-aq^{2n+1};\ q^2)_\infty =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}a^n}{(q^2;\ q^2)_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m q^{m^2+2nm}}{(q^2;\ q^2)_m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m^2}a^m}{(q^2;\ q^2)_m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n+2nm}a^n}{(q^2;\ q^2)_n} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m^2}a^m}{(q^2;\ q^2)_m} (-aq^{2m+2};\ q^2)_\infty =$$

$$= (-aq^2;\ q^2)_\infty \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m^2}a^m}{(q^2;\ q^2)_m\,(-aq^2;\ q^2)_m}.$$

Поскольку выражение в (3.27) идентично правой части (3.2.1), то видим, что (1.1.3) (в слегка замаскированной форме) следует из нашей теоремы при $a=1$, а (1.1.6) прямо следует из нее при $a=q$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы старались описать на примерах, как взаимодействуют теория разбиений и теория базисных гипергеометрических функций. В частности, мы надеялись подчеркнуть то возможное значение, какое могут иметь q-ортогональные многочлены. Мы должны добавить, что настоящая работа представляет собой беглый обзор нашей работы [9] на эту же тему, где представлены q-аналоги (иногда более чем один) всех классических и дискретных ортогональных многочленов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Andrews G. E. An analytic proof of the Rogers—Ramanujan—Gordon identities, Amer. J. Math., 88 (1966), 844—846.
2. Andrews G. E. q-Identities of Auluk, Carlitz and Rogers, Duke Math. J., 33 (1966), 575—582.
3. Andrews G. E. Number Theory, W. B. Saunders, Philadelphia, 1971.
4. Andrews G. E. On the q-analog of Kummer's theorem and applications, Duke Math. J., 40 (1973), 525—528.

5. Andrews G A A general theory of identities of the Rogers — Ramanujan type, Bull Amer. Math Soc., 80 (1974), 1033—1052.
6. Andrews G. E. An analytic generalization of the Rogers — Ramanujaan identities for odd moduli, Proc. Nat. Acad Sci , 71 (1974), 4082—4085.
7. Andrews G E. Problems and prospects for basic hypergeometric functions, from Theory and Application of Special Functions, ed. R Askey, Academic Press, New York, 1975, pp. 191—224
8. Andrews G. E. TheTheory of Partitions, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 2, Addison — Wesley, Reading, 1977.
9. Andrews G. E., Askey R. A. The Classical and Discrete Orthogonal Polynomials and Their q-Analogs
10. Askey R. A Orthogonal Polynomials and Special Functions, Regional Conf. Series in Appl. Math., Vol. 21, S. I. A. M., Philadelphia, 1975
11. Bailey W. N. Generalized Hypergeometric Series, Cambridge University Press, Cambridge, 1935 (Reprinted; Hafner, New York, 1964).
12. Bailey W. N. A note on certain q-identities, Quart. J. Math., 12 (1941), 173—175.
13. Connor W. G Partition theorems related to some identities of Rogers and Watson, Trans. Amer. Math. Soc., 214 (1975), 95—111.
14. Daum J. A The basic analog of Kummer's theorem, Bull Amer. Math. Soc., 48 (1942), 711—713
15. Gordon B. A combinatorial generatization of the Rogers — Ramanujan identities, Amer. J. Math., 83 (1961), 393—399.
16. Gordon B. Some continued fractions of the Rogers — Ramanujan type, Duke Math. J., 32 (1965), 741—748.
17. Hardy G. H. Ramanujan, Gambridge University Press, Cambridge, 1940 (Reprinted: Chelsea, New York).
18. Hardy G. H., Wright E. M. An Introduction to The Theory of Numbers, 4th ed., Oxford University Press, Oxford, 1960.
19. Hahn W. Über Orthogonalpolynome, die q-Differenzengleichungen genügen, Math. Nach., 2 (1949), 4—34.
20. Rogers L. J. Second memoir on the expansion of certain infinite products, Proc. London Math. Soc., 25 (1894), 318—343.
21. Rogers L. J. On two theorems of combinatory analysis and some allied identities, Proc. London Math. Soc. (2), 16 (1917), 315—336.
22. Al-Salam W. A., Verma A. Orthogonalite preserving operators and q-Jacobi polynomials, to appear.
23. Slater L. J. Generalized Hypergeometric Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.
24. Szego G. Orthogonal Polynomials, Colloquium Publications, vol. 23, 3rd ed., American Mathematical Society, Providence, 1967.
25. Watson G. N. A new proof of the Rogers — Ramanujn identities, J. London Math. Soc., 4 (1929), 4—9.
26. Watson G. N. A note on Lerch's functions, Quart. J. Math , Oxford Ser., 8 (1937), 43—47.

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТИПА ЭЙЛЕРА И МАКМАГОНА НА ГРУППЕ ПЕРЕСТАНОВОК[1])

Д. Фоата

1. ВВЕДЕНИЕ

Числа Эйлера $A_{n,k}$ $(n \geqslant 1,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$ определяются следующим рекуррентным соотношением:

$$\begin{aligned} &A_{1,1} = 1, \quad A_{1,k} = 0 \quad (k \neq 1), \\ &A_{n,k} = kA_{n-1,k} + (n-k+1)\,A_{n-1,k-1}\ (n \geqslant 2,\ 1 \leqslant k \leqslant n). \end{aligned} \tag{1}$$

В табл. 1 представлены несколько первых значений этих чисел.

Таблица 1

k / n	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	4	1			
4	1	11	11	1		
5	1	26	66	26	1	
6	1	57	302	302	57	1

Эйлеровы числа можно задавать и посредством так называемой формулы Ворпицкого:

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k} \binom{x+k-1}{n} \ (n \geqslant 1), \tag{2}$$

обращение которой (в смысле Мёбиуса) дается формулой

$$A_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (k-i)^n \binom{n+1}{i} \ (0 \leqslant k \leqslant n). \tag{3}$$

Для всякого целого $n \geqslant 1$ многочлен

$$A_n(t) = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k} t^{k-1}$$

---

[1]) Foata D. Distributions eulériennes et mahoniennes sur le groupe des permutations.

называется *многочленом Эйлера* (степени $n-1$). Экспоненциальная производящая функция эйлеровых многочленов $A_n(t)$ $(n \geqslant 1)$ имеет вид

$$1+\sum_{n\geqslant 1}\frac{u^n}{n!}A_n(t) = \frac{(1-t)}{-t+\exp(u(t-1))}$$

и представима также в виде

$$1+\sum_{n\geqslant 1}\frac{u^n}{n!}A_n(t)=\left(1-\sum_{n\geqslant 1}\frac{u^n}{n!}(t-1)^{n-1}\right)^{-1}. \tag{4}$$

Арифметические и комбинаторные свойства этих чисел, в частности эквивалентность формул (1), (2), (3), (4), можно найти у Карлитца [4], Риордана ([16], стр. 38—39, 214—216) и Фоата—Шюценберже [11].

Числа Макмагона $B_{n,\,k}$ $(n \geqslant 1,\ 0 \leqslant k \leqslant n(n-1)/2)$ определяются посредством тождества

$$\sum_{k=0}^{n(n-1)/2} B_{n,k}\,q^k = \prod_{i=1}^{n}\frac{1-q^i}{1-q} \qquad (n \geqslant 1). \tag{5}$$

(По аналогии с эйлеровыми эти числа далее именуются макмагоновыми числами — да простят мне этот неологизм в память великого комбинаторика майора П. А. Макмагона.)

Вводя q-аналог $[i]_q$ целого $i \geqslant 1$ по правилу

$$[i]_q=(1-q^i)/(1-q)=1+q+q^2+\ldots-q^{i-1}, \tag{6}$$

представляем (5) в виде

$$\sum_{k=0}^{n(n-)/2} B_{n,k}\,q^k=[n]_q[n-1]_q\ldots[2]_q[1]_q \qquad (n \geqslant 1).$$

Несколько первых значений макмагоновых чисел представлены в табл. 2.

Таблица 2

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1										
2	1	1									
3	1	2	2	1							
4	1	3	5	6	5	3	1				
5	1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1

Непосредственно из формул (1) и (5) получаем соотношение

$$\sum_{k=1}^{n}A_{n,\,k}=\sum_{k=0}^{n(n-1)/2}B_{n,\,k}=n! \qquad (n \geqslant 1).$$

Таким образом, естественно ожидать, что эти две последовательности чисел встретятся в различных задачах о перечислении, относящихся к группе $\mathfrak{S}_n$ перестановок множества $[n]=\{1, 2, \ldots, n\}$ или иного функционального множества мощности $n!$. Пусть D_n — такое множество, а X — отображение, определенное на D_n и принимающее целые значения: говорят, что X *статистически эйлерово* (соответственно макмагоново) на D_n, если

$$A_{n,k}=|\{d\in D_n : X(d)=k\}| \qquad (1\leqslant k\leqslant n)$$

(соответственно $B_{n,k}=|\{d\in D_n : X(d)=k\}|\ (0\leqslant k\leqslant n(n-1)/2)$).

Пусть $\sigma=\sigma(1)\,\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ — некоторая перестановка последовательности $1\ 2\ldots n$. Обозначим через $\mathrm{RISE}\,\sigma$ число *возрастаний* в перестановке σ, т. е. при соглашении $\sigma(0)=0$, число всех номеров i, для которых $\sigma(i)<\sigma(i+1)$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$. *Число инверсий* $\mathrm{INV}\,\sigma$ в перестановке σ определяется как число пар (i, j), таких, что $\sigma(i)>\sigma(j)$ $(1\leqslant i<j\leqslant n)$. Наконец, *мажорирующий индекс* $\mathrm{MAJ}\,\sigma$ перестановки σ есть сумма тех i, для которых $\sigma(i)>\sigma(i+1)$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$.

Легко видеть, что, например, для

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\6&4&9&7&2&5&8&1&3\end{pmatrix}$$

имеем

$$\mathrm{RISE}\,\sigma=5,\quad \mathrm{INV}\,\sigma=23,\quad \mathrm{MAJ}\,\sigma=15.$$

Хорошо известно (см., например, Риордан ([16], стр. 213—216), что RISE есть статистически эйлерово отображение на $\mathfrak{S}_n$. Также известно, что и INV, и MAJ — статистически макмагоновы на $\mathfrak{S}_n$ (см., например, Конге ([7], стр. 81 и стр. 108). Обозначая через σ^{-1} перестановку, обратную к перестановке σ на группе $\mathfrak{S}_n$, полагаем

$$\mathrm{IRISE}\,\sigma=\mathrm{RISE}\,\sigma^{-1},\qquad \mathrm{IMAJ}\,\sigma=\mathrm{MAJ}\,\sigma^{-1}.$$

Очевидно, что тем самым получаем новое статистически эйлерово отображение IRISE и статистически макмагоново отображение IMAJ.

Настоящая работа состоит из трех частей. В первой из них (разд. 2) ставится задача, остававшаяся открытой, о связи между «дискретными» интерпретациями чисел Эйлера и «непрерывной» интерпретацией в терминах разбиения единичного n-мерного куба. Действительно, аналитически доказывается, что отношение $A_{n,k}/n!$ представляет собой объем части единичного n-мерного куба, заключенной между плоскостями $\sum x_i=k-1$ и $\sum x_i=k$. Таким образом, речь идет об отыскании *комбинаторного* доказательства этого результата. Задача, излагаемая в разд. 2, была предложена участникам коллоквиума в Берлине. Простое и элегантное ее решение, найденное Ричардом Стенли, воспроизводится ниже.

Вторая часть работы (разд. 3 и 4) является попыткой изучения распределения 5-вектора (RISE, IRISE, INV, MAJ, IMAJ), т. е. изучения многомерной производящей функции

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum x_1^{\mathrm{RISE}\,\sigma} x_2^{\mathrm{IRISE}\,\sigma} x_3^{\mathrm{INV}\,\sigma} x_4^{\mathrm{MAJ}\,\sigma} x_5^{\mathrm{IMAJ}\,\sigma},$$

где суммирование ведется по всем σ в множестве перестановок $\mathfrak{S}_n$. Мы не имеем аналитического выражения этой функции, но зато мы покажем, что известны *все* маргинальные двумерные представления, т е. двумерная производящая функция любой пары статистик, извлеченной из последовательности (RISE, IRISE, INV, MAJ, IMAJ). В разд. 3 посредством преобразования на $\mathfrak{S}_n$, уже введенного у Фоата (1968) и использованного в работе у Фоата — Шюценберже (1977а), показывается, что эти 20 двумерных распределений сводятся к 6 распределениям. Раздел 4 ограничивается приведением аналитических выражений для этих 6 распределений. В частности, мы покажем, что q-аналог *чисел* Эйлера, найденный Карлитцем (1954, 1975), дает двумерную производящую функцию от (RISE, MAJ), в то время как q-аналог *многочленов* Эйлера, предложенный Стенли [18], приводит к функции от (IRISE, MAJ).

Для любой перестановки $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ из $\mathfrak{S}_n$ и $i = 1, 2, \ldots, n$ обозначим через x_i число $\sigma(j)$ слева от $\sigma(i)$, меньшее чем $\sigma(i)$. Далее, через IMAL σ обозначим число различных целых чисел *последовательности* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Например, для

$$\sigma = 7 \quad 9 \quad 1 \quad 2 \quad 8 \quad 5 \quad 6 \quad 3 \quad 4$$

имеем

$$x_1 x_2 \ldots x_n = 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3,$$

откуда IMAL $\sigma = 4$.

Как показано Дюмоном [8], статистика IMAL эйлерова. В последнем разделе статьи доказывается, что пара (IMAL, MAJ) имеет то же распределение на $\mathfrak{S}_n$, что и (IRISE, MAJ) (и еще (RISE, INV)). Для получения этого результата мы прибегнем к кодированию перестановок S-кодом, свойства которого систематически используются в статье по мере надобности (Фоата — Шюценберже [13]).

Для описания различных используемых алгоритмов мы позволили себе заимствовать обозначения, ставшие традиционными в информатике. Например, «$x \leftarrow y$» означает, что следует заменить y на x, а под «$x_1 x_2 \ldots x_n$» $\leftarrow$ «$y_1 y_2 \ldots y_n$» понимается замена $x_1 \leftarrow y_1, x_2 \leftarrow y_2, \ldots, x_n \leftarrow y_n$.

2. ЭЙЛЕРОВЫ СТАТИСТИКИ

Для доказательства того, что RISE, определение которого было приведено во введении, есть эйлерова статистика на $\mathfrak{S}_n$, нужно показать, что число перестановок, имеющих k возрастаний, удовлетворяет рекуррентному соотношению (1). Доказательство очевидно.

Для любого $n \geqslant 1$ через D_n обозначим множество таких последовательностей $x_1, x_2, \ldots, x_n$ длины n, что $0 \leqslant x_i \leqslant i-1$ для любого $i=1, 2, \ldots, n$. Естественно, что $|D_n| = n!$. Для каждого $w = x_1, x_2, \ldots, x_n$ из D_n обозначим через IMA w *число различных целых чисел в последовательности* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Эта статистика введена Дюмоном [8]. При помощи рекуррентного соотношения (1) непосредственно убеждаемся в том, что она эйлерова. Дюмон [8] построил взаимно однозначное отображение Φ группы $\mathfrak{S}_n$ на D_n, удовлетворяющую тождеству

$$\mathrm{RISE}\,\sigma = \mathrm{IMA}\,\Phi(\sigma).$$

Впрочем, кажется, для всех эйлеровых статистик E, которые известны и которые определены на дискретных множествах, умеют строить взаимно однозначное отображение Φ, тождественно удовлетворяющее $\mathrm{RISE}\,\sigma = E\Phi(\sigma)$ (см. Фоата — Шюценберже [11]).

Последняя геометрическая интерпретация чисел Эйлера, относящаяся к непрерывному множеству, а не к дискретному, оставалась до сих пор в комбинаторном плане изолированной от других. Рассмотрим n-мерный единичный куб и для $1 \leqslant k \leqslant n$ обозначим через $T_{n,k}$ часть этого куба, заключенную между плоскостями, задаваемыми уравнениями $\sum_{i=1}^{n} x_i = k-1$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i = k$. Чтобы вычислить объем $T_{n,k}$, можно поступить следующим образом. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — последовательность n случайных переменных, взаимно независимых и равномерно распределенных на отрезке [0, 1]. Положим $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ Объем $\mathrm{Vol}\,T_{n,k}$ равен вероятности того, что S_n заключено между $k-1$ и k Несложно вычислить функцию распределения $P\{S_n \leqslant x\}$. Вычисление проведено Феллером (1966). В неявном виде оно имеется уже у Лапласа [14]. Для любого действительного x положим $x_+ = \max(x, 0)$.

Имеем тогда, что

$$P\{S_n \leqslant x\} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x-i)_+^n \binom{n}{i}.$$

Когда x равно некоторому целому $k\,(0\leqslant k\leqslant n)$, получаем

$$P\{S_n\leqslant k\}=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(k-i)^n\binom{n}{i}.$$

Отсюда для $1\leqslant k\leqslant n$ имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol}T_{n,k}&=P\{k-1<S_n\leqslant k\}=\\&=\frac{1}{n!}\left[\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(k-i)^n\binom{n}{i}\sum_{i-0}^{k-1}(-1)^i(k-1-i)\binom{n}{i}\right]=\\&=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(k-i)^n\binom{n+1}{i}.\end{aligned}$$

Таким образом, вновь приходим к формуле Ворпицкого (3) для чисел Эйлера. Отсюда

$$\operatorname{Vol}T_{n,k}=A_{n,k}/n!\qquad(1\leqslant k\leqslant n).\tag{6}$$

Этот результат элементарен, однако же и он периодически переоткрывается (см. фон Рандов и др. [15]). Заметим, что доказательство формулы (6) возможно лишь благодаря формуле Ворпицкого. Таким образом, задача, которая остается нерешенной, заключается в том, чтобы доказать (6) при помощи рекуррентной формулы (1) или лучше, установив взаимно однозначное соответствие с некоторой известной эйлеровской статистикой. Мы сформулируем эту задачу следующим образом. Пусть $U_{n,k}$ — множество точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ единичного куба, имеющих k возрастаний, т. е., если положить $x_0=0$, таких, чтобы неравенство $x_{i-1}<x_i$ выполнялось точно для k индексов i из $[n]$. При помощи все той же последовательности случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ доказывают, что объем $U_{n,k}$ снова равен вероятности того, что вектор $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ принадлежит $U_{n,k}$. Но $(X_1, X_2, \ldots, X_n)\in U_{n,k}$ в том и только том случае, если существует такое $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, что $\operatorname{RISE}\sigma=k$ и $X_{\sigma^{-1}(1)}<X_{\sigma^{-1}(2)}<\ldots<X_{\sigma^{-1}(n)}$. Отсюда

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol}U_{n,k}&=\sum\{P\{X_{\sigma^{-1}(1)}<X_{\sigma^{-1}(2)}<\ldots<X_{\sigma^{-1}(n)}\}:\operatorname{RISE}\sigma=k\}=\\&=\frac{1}{n!}\left|\{\sigma\in\mathfrak{S}_n:\operatorname{RISE}\sigma=k\}\right|=\frac{1}{n!}A_{n,k}\qquad(1\leqslant k\leqslant n).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\operatorname{Vol}T_{n,k}=\operatorname{Vol}U_{n,k}\quad(1\leqslant k\leqslant n).\tag{7}$$

Для получения полной комбинаторной теории всех интерпретаций чисел Эйлера достаточно построить преобразование

$$\Phi\colon(x_1, x_2, \ldots, x_n)\to(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

единичного куба, которое ставит во взаимно однозначное соответствие симплекс $U_{n,k}$ и $T_{n,k}$ для любого $k=1, 2, \ldots, n$.

Эта задача была устно поставлена во время коллоквиума в Берлине, и Стенли [19] нашел следующее простое преобразование: для любого $i=1, 2, \ldots, n$ полагаем

$$y_i = \begin{cases} 1+x_{i-1}-x_i, & \text{если} \quad x_{i-1}<x_i, \\ x_{i-1}-x_i, & \text{если} \quad x_{i-1}>x_i. \end{cases}$$

Обращение этого преобразования дается формулой

$$x_i = -y_1 - \ldots - y_i + 1 + [y_1 + \ldots + y_i]$$

$(1 \leqslant i \leqslant n)$. Естественно, что преобразование и его обращение не определены на гранях симплексов, т. е. на множестве точек, имеющих по крайней мере две равные координаты, но эти множества имеют меру нуль.

3. ДВУМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Вектор (RISE, IRISE, INV, MAJ, IMAJ) содержит две эйлеровы статистики RISE и IRISE, а также три макмагоновы статистики INV, MAJ и IMAJ. Среди двадцати пар, которые можно составить из этих пяти статистик, имеются:

(I) две пары, компоненты которых — эйлеровы статистики: (RISE, IRISE) и (IRISE, RISE),

(II) шесть пар, компоненты которых — макмагоновы статистики: (MAJ, INV), (IMAJ, INV), (IMAJ, MAJ), (MAJ, IMAJ), (INJ, IMAJ), (INV, MAJ); далее идут шесть пар, в которых первая компонента эйлерова, а вторая макмагонова и которые можно разбить на два класса (III) и (IV):

(III) (RISE, MAJ), (IRISE, IMAJ);

(IV) (RISE, INV), (IRISE, INV), (IRISE, MAJ), (RISE, IMAJ);

и наконец,

(V) (соответственно (VI)) — две (соответственно четыре) пары, полученные перестановкой компонент в двух (соответственно четырех) парах группы (III) (соответственно (IV)).

Теорема 1. *Пары статистик, принадлежащие одной и той же группе* (I), (II), (III), (IV), (V) *или* (VI)*, имеют одинаковое распределение.*

Для доказательства этой теоремы мы воспользуемся свойствами преобразования ψ и группы $\mathfrak{S}_n$, описанными у Фоата [10] и Фоата — Шюценберже [13]. Приведем сначала конструкцию преобразования ψ.

Алгоритм для ψ.

Пусть $\sigma=\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ — некоторая перестановка. Для получения $\psi(\sigma)=\tau=\tau(1)\tau(2)\ldots\tau(n)$ применим к σ следующую процедуру.

(1) если $n=1$, то $\tau\leftarrow\sigma$, и алгоритм закончен; в противном случае $k\leftarrow n-1$; $\sigma_k\leftarrow\sigma(1)\sigma(2)\ \ldots\ \sigma(n-1)$ и $\tau(n)\leftarrow\sigma(n)$;

(2) если $k=1$, то положить $\tau(1)$ равной единственной букве в σ_1 и $\psi(\sigma)=\tau\leftarrow\tau(1)\ \ldots\ \tau(n)$; алгоритм закончен; в противном случае сравнить первый член $\sigma_k(1)$ в σ_k с $\tau(k+1)$; если $\sigma_k(1)$ больше (соответственно меньше), чем $\tau(k+1)$, то отсечь σ_k перед буквой, большей (соответственно меньшей), чем $\tau(k+1)$;

(3) внутри каждой ячейки, определенной разрезами, переместить первую букву на последнее место;

(4) положить σ_{k-1} равным преобразованному таким образом слову после исключения последней буквы;

(5) положить $\tau(k)$ равным этой последней букве;

(6) заменить k на $k-1$ и снова перейти к (2).

Пример. Если применить ψ к

$$\sigma=6\quad 4\quad 9\quad 7\quad 2\quad 5\quad 8\quad 1\quad 3,$$

то получим последовательно

$$\begin{aligned}
\sigma_8&=6\,|\,4\,|\,9\,|\,7\ \ 2\,|\,5\,|\,8\ \ 1\,.\,3&&=\tau(9),\\
\sigma_7&=6\,|\,4\ \ 9\,|\,2\,|\,7\,|\,5\,|\,1\,.\,8&&=\tau(8),\\
\sigma_6&=6\,|\,9\,|\,4\,|\,2\,|\,7\,|\,5\,.\,1&&=\tau(7),\\
\sigma_5&=6\,|\,9\ \ 4\ \ 2\,|\,7\,.\,5&&=\tau(6),\\
\sigma_4&=6\,|\,4\,|\,2\ \ 9\,.\,7&&=\tau(5),\\
\sigma_3&=6\,|\,4\,|\,9\,.\,2&&=\tau(4),\\
\sigma_2&=6\,|\,4\,.\,9&&=\tau(3),\\
\sigma_1&=6\,.\,4&&=\tau(2),\\
&\ \ 6&&=\tau(1),
\end{aligned}$$

$$\tau=\psi(\sigma)=6\quad 4\quad 9\quad 2\quad 7\quad 5\quad 1\quad 8\quad 3.$$

В работе Фоата [10] доказано, что ψ является биекцией $\mathfrak{S}_n$ на себя и удовлетворяет тождеству

$$\mathrm{MAJ}\,\psi(\sigma)=\mathrm{INV}\,\sigma. \tag{8}$$

В предыдущем примере

$$\mathrm{INV}\,\sigma=23=\mathrm{MAJ}\,\tau.$$

У Фоата — Шюценберже [12] было установлено другое свойство ψ. Обозначим через RISE SET σ множество возрастаний перестановки $\sigma=\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$, т. е. множество целых i, таких, что $0\leqslant i\leqslant n-1$ и $\sigma(i)<\sigma(i+1)$ (при том же соглашении $\sigma(0)=0$). Полагаем также

$$\mathrm{IRISE\ SET}\ \sigma=\mathrm{RISE\ SET}\ \sigma^{-1},$$

так чтобы $\mathrm{RISE}\,\sigma$ и $\mathrm{IRISE}\,\sigma$ были соответственно мощностями множеств $\mathrm{RISE\ SET}\ \sigma$ и $\mathrm{IRISE\ SET}\ \sigma$. При этом MAJ (соответственно IMAJ) есть сумма целых чисел, заключенных между 1 и $n-1$ и не принадлежащих $\mathrm{RISE\ SET}\ \sigma$ (соответственно $\mathrm{IRISE\ SET}\ \sigma$). Легко видеть, что i принадлежит $\mathrm{IRISE\ SET}\ \sigma$ в том и только том случае, если $i+1$ находится *справа* от i в слове $\sigma(1)\ \sigma(2)\ \ldots\ \sigma(n)$.

Например, для

$$\sigma=\begin{array}{c}0\\0\end{array}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 6 & 4 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

имеем

$$\mathrm{RISE\ SET}\ \sigma=\{0,\ 2,\ 5,\ 6,\ 8\},$$
$$\mathrm{IRISE\ SET}\ \sigma=\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 7\}.$$

Доказано (см. Фоата — Шюценберже [12]), что в $\mathfrak{S}_n$

$$\mathrm{IRISE\ SET}\ \psi(\sigma)=\mathrm{IRISE\ SET}\ \sigma.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\mathrm{IRISE}\ \psi(\sigma)&=\mathrm{IRISE}\ \sigma,\\ \mathrm{IMAJ}\ \psi(\sigma)&=\mathrm{IMAJ}\ \sigma.\end{aligned}\tag{9}$$

Положим $i\sigma=\sigma^{-1}$ для любого σ из $\mathfrak{S}_n$ и рассмотрим последовательность

$$\sigma\xrightarrow{\tilde{\mathrm{I}}}\sigma_1\xrightarrow{\psi}\sigma_2\xrightarrow{\tilde{i}}\sigma_3\xrightarrow{\psi^{-1}}\sigma_4\xrightarrow{\tilde{i}}\sigma_5.\tag{10}$$

Из (8) и (9), а также из того хорошо известного факта, что i сохраняет число обращений в перестановке, выводим равенства

$$\mathrm{MAJ}\ \sigma=\mathrm{IMAJ}\ \sigma_1=\mathrm{IMAJ}\ \sigma_2=\mathrm{MAJ}\ \sigma_3=\mathrm{INV}\ \sigma_4=\mathrm{INV}\ \sigma_5,$$
$$\mathrm{INV}\ \sigma=\mathrm{INV}\ \sigma_1=\mathrm{MAJ}\ \sigma_2=\mathrm{IMAJ}\ \sigma_3=\mathrm{IMAJ}\ \sigma_4=\mathrm{MAJ}\ \sigma_5,$$
$$\mathrm{RISE}\ \sigma=\mathrm{IRISE}\ \sigma_1=\mathrm{IRISE}\ \sigma_2,\ \mathrm{RISE}\ \sigma_4=\mathrm{IRISE}\ \sigma_5.$$

Последовательность (10) дает все преобразования, нужные для доказательства теоремы 1, что и требовалось доказать.

Распределения пар групп (V) и (VI) при помощи симметрии сводятся к распределениям пар групп (III) и (VI) (соответственно). Стало быть, имеются лишь четыре различные двумерные маргинальные распределения, а именно распределения групп (I), (II), (III) и (IV). Их аналитическое выражение известно, как мы увидим в следующем разделе.

4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ МАРГИНАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Карлитц и др. [5] получили многие аналитические выражения для распределения (RISE, IRISE) (группа (I)). С четырьмя формулами (1), (2), (3) и (4), существующими для чисел Эйлера, можно связать четыре формулы для чисел

$$A_{n,j,k} = |\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \mathrm{RISE}\,\sigma = j, \quad \mathrm{IRISE}\,\sigma = k\}|.$$

Как показано Карлитцем и др. [5], формулам (1), (2), (3) и (4) соответствуют следующие 4 формулы: (11), (12), (13) и (14):

$$\begin{aligned}(n+1)\,A_{n+1,j,k} = {} & (jk+n)\,A_{n,j,k} + \\ & + (k(n+2-j)-n)\,A_{n,j-1,k} + \\ & + (j(n+2-k)-n)\,A_{n,j,k-1} + \\ & + ((n+2-j)(n+2-k)+n)\,A_{n,j-1,k-1},\end{aligned} \tag{11}$$

$$\binom{xy+n-1}{n} = \sum_{0 \leqslant j,\,k \leqslant n} \binom{x+j-1}{n}\binom{y+k-1}{n} A_{n,j,k}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}A_{n,j,k} = {} & \sum_{0 \leqslant s \leqslant j}\ \sum_{0 \leqslant t \leqslant k} (-1)^{s+t} \times \\ & \times \binom{n+1}{s}\binom{n+1}{t}\binom{(j-s)(k-t)+n-1}{n},\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n \geqslant 0}\ \sum_{j,\,k \geqslant 0} & A_{n,j,k} x^j y^k u^n (1-x)^{-n} (1-y)^{-n} = \\ & = \sum_{j \geqslant 0} \frac{y^j}{1-x(1-u)^{-j}} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{x^k}{1-y(1-u)^{-k}}.\end{aligned} \tag{14}$$

Рассмотрим тождество

$$\prod_{m,\,n \geqslant 0} (1 - x^n y^m u) \sum_{n \geqslant 0} \frac{H_n(x,\,y)\,u^n}{(1-x)(1-y)\ldots(1-x^n)(1-y^n)}.$$

Согласно Карлитцу [2], это тождество определяет последовательность полиномов $H_n(x,\,y)$ $(n \geqslant 0)$. Шима и Мотцкин [6], а также Розель [17] доказали, что для любого $n \geqslant 1$ полином $H_n(x,\,y)$ является *производящим полиномом пары* (MAJ, IMAJ) *на* $\mathfrak{S}_n$. На основании теоремы 1 заключаем, что $H_n(x,\,y)$ будет также *производящим полиномом каждой пары группы* (II), в частности пары (MAJ, INV).

Карлитц [1], [4] рассматривал q-аналог рекуррентного соотношения (1) для чисел Эйлера. Таким образом, заменяя целое k его q-аналогом $[k]_q=(1-q^k)/(1-q)$, определяем последовательность полиномов $A_{n,k}(q)$, определяемых следующим образом:

$$A_{1,1}(q)=1, \quad A_{1,k}(q)=0 \quad \text{для} \quad k\neq 1,$$

$$A_{n,k}(q)=[k]_q A_{n-1,k}(q)+[n-k+1]_q A_{n-1,k-1}(q)$$

$$\text{для} \quad n\geqslant 2,\ 1\leqslant k\leqslant n.$$

Полагая

$$A_n(t, q)=\sum_{k=1}^{n} t^k q^{\binom{n-k+1}{2}} A_{n,k}(q) \quad (n\geqslant 1),$$

Карлитц (1975) показал затем, что $A_n(t, q)$ — *производящий полином пары* (RISE, MAJ) *на* $\mathfrak{S}_n$. Таблица первых его значений приводится в конце этого раздела.

Стенли [18] рассматривал q-аналог не формулы (1), а формулы (4), который дает выражение производящей функции эйлеровых *полиномов*. Заменяя в этой формуле $n!$ его q-факториалом

$$[n]_q!=\frac{1-q^n}{1-q}\frac{1-q^{n-1}}{1-q}\cdots\frac{1-q}{1-q},$$

получаем тождество

$$1+\sum_{n\geqslant 1}\frac{A_n^1(t, q)\,n^n}{[n]_q!}=\left(1-\sum_{n\geqslant 1}\frac{(t-1)^{n-1}\,n^n}{[n]_q!}\right)^{-1},$$

которое определяет последовательность полиномов $(A_n^1(t, q))_{n\geqslant 1}$. (Первые значения см. ниже.) Стенли [17] показал, что $tA_n^1(t, q)$ *есть производящий полином пары* (RISE, INV) *на* $\mathfrak{S}_n$. Значит, по теореме 1, $tA_n^1(t, q)$ тоже есть *производящий полином каждой из пар группы* (IV), в частности пары (IRISE, MAJ).

Итак, в силу теоремы 1 и результатов этого раздела мы имеем выражение для бикомпактной производящей функции *всех* пар статистик последовательности

(RISE, (IRISE, INV, MAJ, IMAJ).

Таблица $A_n(t, q)$

$$A_1(t, q)=t,$$

$$A_2(t, q)=tq+t^2,$$

$$A_3(t, q)=tq^3+t^2q\,(2q+2)+t^3,$$

$$A_4(t, q)=tq^6+t^2q^3\,(3q^2+5q+3)+ +t^3q\,(3q^2+5q+3)+t^4,$$

$$A_5(t, q)=tq^{10}+t^2q^6\,(4q^3+9q^2+9q+4)+ +t^3q^3\,(6q^4+16q^3+22q^2+16q+6)+ +t^4q\,(4q^3+9q^2+9q+4)+t^5.$$

Таблица $tA'_n(t, q)$

$tA_1^1(t, q) = t,$

$tA_2^1(t, q) = tq + t^2,$

$tA_3^1(t, q) = tq^3 + t^2q(2q+2) + t^3,$

$tA_4^1(t, q) = tq^6 + t^2(3q^5 + 4q^4 + 3q^3 + q^2) + t^3(q^4 + 3q^3 + 4q^2 + 3q) + t^4,$

$$tA_5^1(t, q) = tq^{10} + t^2(4q^9 + 6q^8 + 6q^7 + 6q^6 + 2q^5 + 2q^4) + \\ + t^3(3q^8 + 9q^7 + 12q^6 + 18q^5 + 12q^4 + 9q^3 + 3q^2) + \\ + t^4(2q^6 + 2q^5 + 6q^4 + 6q^3 + 6q^2 + 4q) + t^5.$$

Ни одной трикомпонентной или четырехкомпонентной маргинальной производящей функции распределения для этого вектора, по-видимому, неизвестно. Отметим, что Фоата и Шюценберже [12] изучали симметрии распределения 4-вектора (RISE, IRISE, MAJ, IMAJ) и показали, что вводимая ниже группа симметрии есть прямое произведение диэдральной группы 8-го порядка на группу 2-го порядка.

Согласно теореме 1, пары (RISE, INV) и (IRISE, MAJ) имеют одинаковое распределение. Неизвестна такая эйлерова статистика E, для которой (E, INV) и (RISE, MAJ) имеют одинаковое распределение.

5. V-КОД

Эйлерова статистика IMAJ на $\mathfrak{S}_n$ была определена во введении. В трех последних разделах предполагается доказать, что *пары* (IMAL, MAJ) *и* (IRISE, MAJ) *имеют одинаковое распределение на* $\mathfrak{S}_n$. Для этого мы определим V-код группы $\mathfrak{S}_n$, затем S-код (в разд. 6), который является переупорядочением V-кода. Наконец, сформулированный результат будет доказан в качестве следствия из свойств S-кода в разд. 7.

V-код перестановки $\sigma = \sigma(1)\sigma(2) \ldots \sigma(n)$ есть такое слово $V\sigma = v_1v_2 \ldots v_n$, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ буква v_i равна позиции наибольшего целого $\sigma(j)$, меньшего $\sigma(i)$ и расположенного слева от $\sigma(i)$ (при том же соглашении, что $\sigma(0) = 0$ находится в позиции 0). Иными словами, если $a_i = \max\{\sigma(j) : 0 \leqslant j \leqslant i-1,\ \sigma(j) < \sigma(i)\}$, то v_i есть единственное целое, такое, что $\sigma(v_i) = a_i$.

Определение V-кода распространяется на *подслова* перестановок $\sigma(1)\sigma(2) \ldots \sigma(n)$, т. е. на такие последовательности $\sigma' = \sigma(c_1)\sigma(c_2) \ldots \sigma(c_k)$, что $k \geqslant 1$ и $1 \leqslant c_1 < c_2 < \ldots < c_k \leqslant n$. Если положить $\sigma(c_0) = 0$ и $a'_i = \max\{\sigma(c_j) : 0 \leqslant j \leqslant i-1,\ \sigma(c_j) < \sigma(c_i)\}$, то V-код перестановки σ' есть $V\sigma' = v_1v_2 \ldots v_k$, где v_i — единственное целое, такое, что $\sigma(c_{v_i}) = a'_i$.

Например, при

$$\sigma = \begin{array}{c} 0 \\ \, \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 1 & 4 & 6 & 3 & 9 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

имеем

$$V\sigma = 0 \quad 1 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad 2.$$

Для подслова

$$\sigma' = \begin{array}{c} 0 \\ \, \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

имеем

$$V\sigma' = 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 1.$$

Напомним, что *предшествующим* для σ является такое целое i, что $0 \leqslant i \leqslant n-1$ и что $\sigma(i)+1$ расположено *справа* от $\sigma(i)$. Обозначим через $A\sigma$ множество предшествующих σ. Естественно, что $\mathrm{IRISE}\,\sigma = |A\sigma|$.

Например, для

$$\sigma = \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 1 & 4 & 6 & 3 & 9 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

имеем $A\sigma = \{0, \ 1, \ 2, \ 3\}$.

Ясно, что если σ принадлежит $\mathfrak{S}_n$, то $V\sigma$ принадлежит множеству всех слов $x_1x_2 \ldots x_n$, таких, что $0 \leqslant x_i \leqslant i-1$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Более того, *множество различных букв* $V\sigma$ *равно множеству предшествующих* σ. А поскольку мощность $A\sigma$ снова равна $\mathrm{IRISE}\,\sigma$, то

$$\mathrm{IMA}\,V\sigma = \mathrm{IRISE}\,\sigma. \tag{15}$$

Чтобы убедиться в том, что отображение $V\colon \mathfrak{S}_n \to D_n$ *биективно*, сразу же приведем конструкцию обратного к V отображения V^{-1}.

Алгоритм для V^{-1}. Пусть $w = x_1x_2 \ldots x_n$ — слово из D_n. Чтобы получить такую перестановку σ, что $V\sigma = w$, применим следующую процедуру:

(1) $\sigma(0) \leftarrow 0$; $\sigma(1) \leftarrow 1$; если $n = 1$, то алгоритм закончен; в противном случае $k \leftarrow 2$;

(2) $\sigma(k) \leftarrow \sigma(x_k) + 1$ и увеличить на 1 все элементы последовательности $\sigma(0)\,\sigma(1)\,\sigma(2) \ldots \sigma(k-1)$, которые больше или равны $\sigma(k)$, и оставить неизменными остальные;

(3) если $k = n$, то алгоритм закончен; в противном случае заменить k на $k+1$ и перейти к (2).

Следующие два свойства V-кода существенны для построения S-кода.

Свойство 1. *Пусть* $V\sigma = v_1 v_2 \ldots v_n$ — *V-код перестановки* $\sigma = \sigma(1)\,\sigma(2)\,\ldots\,\sigma(n)$. *Положим* $x = \max\{v_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ *и обозначим через* $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ *(соответственно* $(d_1, d_2, \ldots, d_l)$*) возрастающую последовательность таких целых* m, *что* $v_m < x$ *(соответственно* $v_m = x$*). Тогда*

$$\begin{aligned}
&\sigma(d_1) = \sigma(x) + l + 1,\ \sigma(d_2) = \sigma(x) + l,\\
&\sigma(d_3) = \sigma(x) + l - 1,\ \ldots,\ \sigma(d_{l-1}) = \sigma(x) + 2,\\
&\sigma(d_l) = \sigma(x) + 1.
\end{aligned}$$

Кроме того, *V-код подслова* $\sigma' = \sigma(c_1)\,\sigma(c_2)\ldots\sigma(c_k)$ *равен* $V\sigma' = v_{c_1} v_{c_2} \ldots v_{c_k}$.

Проверка свойства 1 не представляет никакой трудности и здесь не воспроизводится. Проиллюстрируем это свойство на приведенном ранее примере.

Имеем

$$\begin{array}{rccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\
\sigma = & 5 & 7 & 1 & 4 & 6 & 3 & 9 & 2 & 8\\
V\sigma = & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2\\
x = & 3, \\
c_1 \ldots c_k = & 1 & 2 & 3 & . & 5 & . & 7 & . & 9\\
\sigma' = & 5 & 7 & 1 & . & 6 & . & 9 & . & 8\\
\sigma(x) = & 1,\\
d_1 \ldots d_l = & . & . & . & 4 & . & 6 & . & 8 & .\\
\sigma(d_1) \ldots \sigma(d_l) = & . & . & . & 4 & . & 3 & . & 2 & .\\
V\sigma' = & 0 & 1 & 0 & . & 1 & . & 2 & . & 2,
\end{array}$$

который равен $v_{c_1} v_{c_2} \ldots v_{c_k}$.

Следующее свойство есть непосредственное следствие свойства 1.

Свойство 2. *Пусть* w *и* w' — *два слова из* D_n, *отличающиеся лишь позицией своих максимальных букв. Иными словами, предположим, что*

$$\begin{aligned}
w &= v_1 \ldots v_{d_1 - 1} x v_{d_1 + 1} + v_{d_l - 1} x v_{d_l + 1} \ldots v_n,\\
w' &= v'_1 \ldots v'_{d'_1 - 1} x v'_{d'_1 + 1} \ldots v'_{d'_l - 1} x v'_{d'_l + 1} \ldots v'_n,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&v_1 \ldots v_{d_1 - 1} v_{d_1 + 1} \ldots v_{d_l - 1} v_{d_l + 1} \ldots v_n =\\
&= v'_1 \ldots v'_{d'_1 - 1} v'_{d'_1 + 1} \ldots v'_{d'_l - 1} v'_{d'_l + 1} \ldots v'_n,
\end{aligned}$$

причем последнее слово содержит лишь буквы, меньшие x. *Тогда для* $\sigma = V^{-1}w$ *и* $V^{-1}w'$ *имеем*

$$\sigma(d_1) = \sigma'(d'_1),\ \sigma(d_2) = \sigma'(d'_2),\ \ldots,\ \sigma(d_l) = \sigma'(d'_l).$$

6. S-КОД

Для любого $w = x_1x_2\ldots x_n$, принадлежащего D_n, обозначим через RISE SETw множество *возрастаний* w, т. е. таких индексов i, что $0 \leqslant i \leqslant n-1$ и $x_i < x_i + 1$ (при соглашении $x_0 = 0$). В силу (15) имеем IMA $V\sigma$ = IRISE σ. Зато RISE SET $V\sigma$ не обязательно равно RISE SET σ. Чтобы установить это свойство, достаточно получить соответствующее переупорядочение $V\sigma$, поскольку свойство (15), очевидно, сохраняется при любом переупорядочении. Итак, мы предполагаем доказать следующую теорему:

Теорема 2. *Существует такая биекция* S: $\mathfrak{S}_n \to D_n$, *что если*

$$S\sigma = s_1s_2\ldots s_n \quad \text{и} \quad V\sigma = v_1v_2\ldots v_n,$$

то справедливы следующие свойства:

(I) $S\sigma$ *есть переупорядочение* $V\sigma$;

(II) RISE SET $S\sigma$ = RISE SET σ.

Построение S-*кода*. Проводим индукцию по n. Для $n=1$ очевидным образом полагаем $S\sigma = V\sigma = 0$ для единственной перестановки σ в $\mathfrak{S}_1$. Пусть $n \geqslant 2$ и $V\sigma = v_1v_2\ldots v_n$ — V-код перестановки $\sigma = \sigma(1)\,\sigma(2)\ldots\sigma(n)$.

Положим $x = \max\{v_i\colon 1 \leqslant i \leqslant n\}$ и обозначим через $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ (соответственно $(d_1, d_2, \ldots, d_l)$) возрастающую последовательность таких индексов m, что $v_m < x$ (соответственно $v_m = x$). Пусть $t_{c_1}t_{c_2}\ldots t_{c_k}$ — S-код перестановки $\sigma(c_1)\,\sigma(c_2)\ldots\sigma(c_k)$. Образуем слово

$$\begin{aligned} w &= t_1t_2\ldots t_n = \\ &= t_1\ldots t_{d_1-1}xt_{d_1+1}\ldots t_{d_2-1}xt_{d_2+1}\ldots t_{d_l-1}xt_{d_l+1}\ldots t_n. \end{aligned}$$

S-код $s_1s_2\ldots s_n$ перестановки $\sigma = \sigma(1)\,\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ получается при помощи следующей процедуры:

(1) $s_1s_2\ldots s_{d_1-1} \leftarrow t_1t_2\ldots t_{d_1-1}$;

$\sigma(n+1) \leftarrow 0$; $d_{l+1} \leftarrow n+1$; $j \leftarrow 1$;

(2) $m \leftarrow d_j$;

(3) если $\sigma(m) > \sigma(m-1)$ и $\sigma(m+1)$,

тогда

$$s_m s_{m+1} \dots s_{d_{j+1}-1} \leftarrow x t_{m+1} \dots t_{d_{j+1}-1}$$

и перейти к (6);

(4) если $\sigma(m) < \sigma(m-1) < \sigma(m+1)$ и $s_{m-1} < t_{m+1}$ или если $\sigma(m-1) > \sigma(m) > \sigma(m+1)$, то обозначить через q позицию самого близкого пика к m, расположенного слева от него, иными словами, q определяется неравенствами

$$1 \leqslant q \leqslant m-1 \quad \sigma(q-1) < \sigma(q), \ \sigma(q) > \sigma(q+1) > \dots$$
$$\dots > \sigma(m-1) > \sigma(m);$$

тогда

$$s_q s_{q+1} s_{q+2} \dots s_{m-1} s_m s_{m+1} \dots s_{d_{j+1}-1} \leftarrow$$
$$\leftarrow x s_q s_{q+1} \dots s_{m-2} s_{m-1} t_{m+1} \dots t_{d_{j+1}-1},$$

и перейти к (6);

(5) (в других случаях) обозначить через q позицию самого близкого пика к m, расположенного справа от него; иными словами, q есть целое число, определяемое соотношениями:

$$m+1 \leqslant q \leqslant n,$$
$$\sigma(m) < \sigma(m+1) < \dots \sigma(q), \ \sigma(q) > \sigma(q+1);$$

тогда

$$s_m s_{m+1} \dots s_{q-1} s_q s_{q+1} \dots s_{d_{j+1}-1} \leftarrow t_{m+1} t_{m+2} \dots t_q x t_{q+1} \dots t_{d_{j+1}-1};$$

(6) если $j = l$, то алгоритм закончен; положить

$$S\sigma \leftarrow s_1 s_2 \dots s_n;$$

в противном случае увеличить j на 1 и перейти к (2).

Замечание 1. Шаг (5) предыдущего алгоритма полностью определен. В самом деле, $\sigma(m) = \sigma(d_j) > \sigma(d_{j+1})$ в силу свойства 1. Поэтому из неравенств $\sigma(m) < \sigma(m+1) < \dots < \sigma(q)$ следует, что $(m =)\ d_j < q < d_{j+1}$.

Замечание 2. Можно убедиться в том, что $S\sigma$ принадлежит полностью D_n, проверяя, что на каждом этапе s_i, которые определяются, удовлетворяют неравенству $s_i \leqslant i-1$.

Замечание 3. Тот факт, что

$$\text{RISE SET } S\sigma = \text{RISE SET } \sigma,$$

проверяется без труда при применении каждого шага (3), (4) и (5).

Замечание 4. Если V-код перестановки σ содержит лишь буквы, меньшие или равные 1, то $S\sigma = V\sigma$.

Замечание 5. Пусть $V\sigma = v_1 v_2 \ldots v_n$ — V-код перестановки $\sigma = \sigma(1)\,\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ и $x = \max\{v_i\colon\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, x$ обозначим через $c_1^i, c_2^i, \ldots, c_{ki}^i$ возрастающую последовательность таких индексов m, что $v_m \leqslant i$ и σ_i есть подслово $\sigma_i = \sigma(c_1^i)\,\sigma(c_2^i)\ldots\sigma(c_{ki}^i)$. Чтобы применить предыдущий алгоритм, определим последовательно $S\sigma_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, x$.

В приводимом ниже примере указывается последовательность шагов алгоритма (обозначенная номерами от 11 до 15) только для определения $S\sigma_3$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
$\sigma =$	9	11	3	10	2	8	7	14	13	6	5	1	4	12	
$V\sigma =$	0	1	0	1	0	3	3	2	2	3	3	0	3	2	
$S\sigma_1 =$	0	1	0	1	0	.	.	.	.	.	.	0	.	.	
$S\sigma_2 =$	0	1	0	1	0	.	.	2	2	.	.	0	.	2	
$w =$	0	1	0	1	0	3	3	2	2	3	3	0	3	2	
$s_1 \ldots s_5 =$	0	1	0	1	0										(11)
$s_1 \ldots s_6 =$	0	1	0	1	0	3									(13)
$s_1 \ldots s_9 =$	0	1	0	1	0	3	2	3	2						(15)
$s_1 \ldots s_{10} =$	0	1	0	1	0	3	2	3	3	2					(14)
$s_1 \ldots s_{11} =$	0	1	0	1	0	3	2	3	3	3	2	0			(14)
$S\sigma =$	0	1	0	1	0	3	2	3	3	3	2	0	2	3	(15)

Ниже мы приведем конструкцию обращения S^{-1} для S. Утомительно, но несложно проверить, что $S^{-1} \circ S$ — тождественное отображение. При описании S^{-1} мы увидим, что свойство 2 V-кода играет узловую роль.

Алгоритм для S^{-1}. Пусть $w = s_1 s_2 \ldots s_n$ — слово из D_n и $x = \max\{s_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Обозначим через $d_1, d_2, \ldots, d_l$ такие индексы i, что $s_i = x$. Слово

$$w' = s_1 \ldots s_{d_1 - 1} s_{d_1 + 1} \ldots s_{d_l - 1} s_{d_l + 1} \ldots s_n$$

по индукции есть S-код перестановки σ', V-код которой является переупорядочением w' и обозначается

$$v' = v_1 \ldots v_{d_1 - 1} v_{d_1 + 1} \ldots v_{d_l - 1} v_{d_l + 1} \ldots v_n.$$

Составим слово

$$\begin{aligned} v &= v_1 \ldots v_n = \\ &= v_1 \ldots v_{d_1 - 1} x v_{d_1 + 1} \ldots v_{d_l - 1} x v_{d_l + 1} \ldots v_n \end{aligned}$$

и определим перестановку

$$\tau = \tau(1)\tau(2)\ldots\tau(n),$$

V-код которой есть v.

Чтобы получить перестановку $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$, S-код которой есть w, применим следующую процедуру:

(1) $\sigma(d_l+1)\sigma(d_l+2)\ldots\sigma(n) \leftarrow \tau(d_l+1)\tau(d_l+2)\ldots\tau(n)$; $\sigma(0)\leftarrow 0$; $\sigma(n+1)\leftarrow 0$; $d_0\leftarrow 0$; $j\leftarrow l$;

(2) $m\leftarrow d_j$;

(3) если $\tau(m)>\tau(m-1)$ и $\sigma(m+1)$, то $\sigma(d_{j-1}+1)\sigma(d_{j-1}+2)\ldots$ $\ldots\sigma(m-1)\sigma(m)\leftarrow\tau(d_{j-1}+1)\tau(d_{j-1}+2)\ldots\tau(m-1)\tau(m)$; перейти к (6);

(4) если $\tau(m-1)$ и $\tau(m)<\sigma(m+1)$, то, обозначив через p наименьший индекс, такой, что $m+1\leqslant p\leqslant n$ и $\sigma(m+1)>$ $>\sigma(m+2)>\ldots>\sigma(p-1)>\sigma(p)>\tau(m)$, положить

$$\sigma(d_{j-1}+1)\sigma(d_{j-1}+2)\ldots\sigma(m-1)\sigma(m)\sigma(m+1)\ldots\sigma(p-1)\sigma(p),$$

равное

$$\tau(d_{j-1}+1)\tau(d_{j-1}+2)\ldots\tau(m-1)\sigma(m+1)\sigma(m+2)\ldots\sigma(p)\tau(m);$$

перейти к (6);

(5) если $\tau(m-1)>\tau(m)$ и $\sigma(m+1)$, то $\sigma(m)\leftarrow\tau(m)$, если $d_{j-1}=m-1$; в противном случае, обозначив через p такой наименьший индекс, что $d_{j-1}+1\leqslant p\leqslant m-1$ и $\tau(m)<\tau(p)<$ $<\tau(p+1)<\ldots<\tau(m-1)$, положить

$$\sigma(d_{j-1}+1)\sigma(d_{j-1}+2)\ldots\sigma(p-1)\sigma(p)\sigma(p+1)\ldots\sigma(m-1)\sigma(m),$$

равное

$$\tau(d_{j-1}+1)\tau(d_{j-1}+2)\ldots\tau(p-1)\tau(m)\tau(p)\ldots\tau(m-2)\tau(m-1);$$

(6) если $j=1$, то алгоритм закончен; положить

$$S^{-1}w\leftarrow\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n);$$

в противном случае уменьшить j на 1 и перейти к (2).

Сохраним те же обозначения, что и в описании алгоритма для S^{-1}, с той разницей, что мы записываем $w=s(1)s(2)\ldots$ $\ldots s(n)$ вместо $s_1s_2\ldots s_n$. Обозначим, кроме того, через $c_1^ic_2^i\ldots c_{ki}^i$ возрастающую последовательность таких индексов m, что $s(m)\leqslant i$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ x)$. Чтобы получить $\sigma=S^{-1}w$, определим последовательно $\sigma_i'=S^{-1}s(c_1^i)s(c_2^i)\ldots s(c_{ki}^i)$, используя предыдущий алгоритм для $j=1,\ 2,\ldots,\ x$. Естественно, что $\sigma_x'=\sigma$. Этот процесс применяется в следующем ниже примере.

Пример.

$$
\begin{array}{rcccccccccccccccl}
w= & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 0 & 2 & 3 & \\
v_1= & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & . & . & \\
\tau_1=\sigma_1'= & 4 & 6 & 3 & 5 & 2 & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & \\
v_1=v_1'= & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & . & . & \\
v_2= & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & . & 2 & . & . & . & 2 & 0 & 2 & . & \\
\tau_2= & 4 & 6 & 3 & 5 & 2 & . & 9 & . & . & . & 8 & 1 & 7 & . & \\
\sigma_2'= & 4 & 6 & 3 & 5 & 2 & . & 9 & . & . & . & 8 & 1 & 7 & . & \\
v_2'= & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & . & 2 & . & . & . & 2 & 0 & 2 & . & \\
v_3= & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 0 & 2 & 3 & \\
\tau_3= & 9 & 11 & 3 & 10 & 2 & 8 & 14 & 7 & 6 & 5 & 13 & 1 & 12 & 4 & \\
 & & & & & & & & & & & 13 & 1 & 4 & 12 & (15) \\
 & & & & & & & & & & 13 & 5 & 1 & 4 & 12 & (14) \\
 & & & & & & & & & 13 & 6 & 5 & 1 & 4 & 12 & (14) \\
 & & & & & & & 7 & 14 & 13 & 6 & 5 & 1 & 4 & 12 & (15) \\
\sigma_3'= & 9 & 11 & 3 & 10 & 2 & 8 & 7 & 14 & 13 & 6 & 5 & 1 & 4 & 12 & (13)
\end{array}
$$

$\sigma=S^{-1}w=\sigma_3'$.

7. ЭЙЛЕРОВА СТАТИСТИКА IMAL

Напомним, что *код Лемера* перестановки $\sigma=\sigma(1)\,\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ есть последовательность $L\sigma=x_1x_2\ldots x_n$, определенная следующим образом:

$$x_i=|\{j:1\leqslant j\leqslant i-1,\quad \sigma(j)<\sigma(i)\}|$$

для любого $i=1,2,\ldots,n$. Код $L\sigma$ принадлежит множеству D_n. Кроме того, очевидно, что $L\colon \mathfrak{S}_n\to D_n$ биективно и что, с другой стороны,

$$\mathrm{RISE\ SET}\ L\sigma=\mathrm{RISE\ SET}\,\sigma$$

для любого σ из $\mathfrak{S}_n$. Напомним еще, что для любого $w=x_1x_2\ldots x_n$ из D_n через $\mathrm{IMA}\,w$ обозначается число различных x_i в w и что полагают

$$\mathrm{IMAL}=\mathrm{IMA}\circ\mathrm{L}.$$

В предыдущем разделе мы видели, что биекция $S\colon\mathfrak{S}_n\to D_n$ обладает следующими свойствами:

(i) $\mathrm{RISE\ SET}\quad S\sigma=\mathrm{RISE\ SET}\,\sigma$,

(ii) $\mathrm{IMA}\,S\sigma=\mathrm{IRISE}\,\sigma$.

Композиция S и L^{-1} дает

$$\mathfrak{S}_n\xrightarrow{S}D_n\xrightarrow{L^{-1}}\mathfrak{S}_n.$$

Отсюда

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{RISE\ SET}\,L^{-1}\circ S\sigma=\mathrm{RISE\ SET}\,\sigma,\\
&\mathrm{IMAL}\ L^{-1}\circ S\sigma=\mathrm{IMA}\,S\sigma=\mathrm{IRISE}\,\sigma.
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

Две перестановки $L^{-1} \circ S\sigma$ и σ, имеющие одинаковое RISE SET, имеют также одно и то же MAJ. Тогда тождества (16) показывают, что *пары* (IRISE, MAJ) *и* (IMAL, MAJ) *имеют одинаковое распределение на* $\mathfrak{S}_n$. На самом деле тождества (16) содержат более сильный результат.

Теорема 3. *Для любого множества* T, *такого, что* $0 \in T \subset \subset [n-1]$, *статистики* IRISE *и* IMAL *имеют одинаковое распределение на множестве*

$$\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \text{RISE SET}\, \sigma = T\}.$$

Иллюстрацией этой теоремы служит табл. 3, построенная для $n = 4$.

Таблица 3

RISE SET	σ	$L\sigma$	IMALσ	IRISEσ
0, 1, 2, 3	1 2 3 4	0 1 2 3	4	4
0, 1, 2	1 2 4 3	0 1 2 2	3	3
	1 3 4 2	0 1 2 1	3	3
	2 3 4 1	0 1 2 0	3	3
0, 1, 3	1 3 2 4	0 1 1 3	3	3
	1 4 2 3	0 1 1 2	3	3
	2 3 1 4	0 1 0 3	3	3
	2 4 1 3	0 1 0 2	3	2
	3 4 1 2	0 1 0 1	2	3
0, 2, 3	2 1 3 4	0 0 2 3	3	3
	3 1 2 4	0 0 1 3	3	3
	4 1 2 3	0 0 1 2	3	3
0, 1	1 4 3 2	0 1 1 1	2	2
	2 4 3 1	0 1 1 0	2	2
	3 4 2 1	0 1 0 0	2	2
0, 2	2 1 4 3	0 0 2 2	2	2
	3 2 4 1	0 0 2 0	2	2
	3 1 4 2	0 0 2 1	3	3
	4 1 3 2	0 0 1 1	2	2
	4 2 3 1	0 0 1 0	2	2
0, 3	3 2 1 4	0 0 0 3	2	2
	4 2 1 3	0 0 0 2	2	2
	4 3 1 2	0 0 0 1	2	2
0	4 3 2 1	0 0 0 0	1	1

Добавление

ЭЙЛЕРОВЫ РАЗБИЕНИЯ ЕДИНИЧНОГО ГИПЕРКУБА

Р. П. Стенли

В предыдущей работе Доминик Фоата упомянул результат, неявно содержащийся в одной из работ Лапласа, что объем R_{nk} части единичного гиперкуба $[0,\ 1]^n$, содержащейся между двумя гиперплоскостями $\sum x_i = k-1$ и $\sum x_i = k$, выражается формулой $\frac{1}{n!} A_{nk}$, где A_{nk} есть число Эйлера. С другой стороны, из хорошо известной комбинаторной интерпретации A_{nk} как числа перестановок $\{1, 2, \ldots, n\}$ с k подъемами (считая один подъем сначала), следует, что $\frac{1}{n!} A_{nk}$ есть также объем множества S_{nk} всех точек $(x_1, \ldots, x_n) \in [0,\ 1]^n$, для которых $x_i < x_{i+1}$ точно для k значений i (включая по условию $i=0$).

Фоата поставил задачу, существует ли некоторое явно выраженное, сохраняющее размерность отображение φ: $[0,\ 1]^n \to [0,\ 1]^n$, переводящее S_{nk} в R_{nk}, за исключением, возможно, множества меры нуль.

Мы утверждаем, что такое отображение может быть задано следующим образом: определим φ: $[0,\ 1]^n \to [0,\ 1]^n$ посредством $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$, где

$$y_i = \begin{cases} x_{i-1} - x_i, & \text{если} \quad x_i < x_{i-1}; \\ 1 + x_{i-1} - x_i, & \text{если} \quad x_i > x_{i-1}. \end{cases}$$

Положим $x_0 = 0$ и оставим φ неопределенным на множестве меры нуль, состоящем из точек, где некоторые $x_{i-1} = x_i$. Если $(x_1, \ldots, x_n) \in S_{nk}$, то $\sum y_i = k - x_n$. Следовательно, $(y_1, \ldots, y_n) \in R_{nk}$. Кроме того, в каждой из 2^{n-1} областей $[0,\ 1]^n$ определено, будет ли $x_i < x_{i-1}$ или $x_i > x_{i-1}$ для $2 \leqslant i \leqslant n$; φ есть аффинное преобразование детерминанта $(-1)^n$. Следовательно, преобразование φ размерность сохраняет. Наконец, определено обращение φ (за исключением множества меры нуль, где некоторые $y_1 + y_2 + \ldots + y_i$ суть целые) следующим образом:

$$x_i = 1 + [y_1 + \ldots + y_i] - y_1 - \ldots - y_i.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carlitz L. q-Bernoulli and Eulerian numbers, Trans. Amer. Math. Soc., 76 (1954), 332—350
2. Carlitz L. The expansion of certain products, Proc. Amer. Math. Soc., 7 (1956), 558—564.
3. Carlitz L. Eulerian numbers and polynomials, Math. Magazine, 33 (1959), 247—260.
4. Carlitz L. A combinatorial property of q-Eulerian numbers, Amer. Math. Monthly, 82 (1975), 51—54.
5. Carlitz L., Roselle D. P., Scoville R. A. Permutations and sequences with repetitions by number of increases, J. Combinatorial Theory, I (1966), 350—374.
6. Cheema M. S., Motzkin T. S. Multipartitions and Multipermutations Proc. of Symposia in Pure Math., vol. 19, Combinatorics, Amer. Math. Soc., Providence (1971), 39—70.
7. Comtet L. Analyse Combinatoire, vol. 2, Presses Universitaires de France, Paris (1970).
8. Dumont D. Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi, Duke Math. J., 41 (1974), 305—318.
9. Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 2. Пер. с англ. — М.: «Мир», 1967.
10. Foata D. On the Netto inversion number of a sequence, Proc. Amer. Math., Soc., 19 (1968), 236—240.
11. Foata D., Schützenberger M. — P. Théorie géométrique des polynômes eulériens, Lecture Notes in Math. n 138, Springer—Verlag Berlin. (1970).
12. Foata D., Schützenberger M. — P. Major index and inversion number of permutations, A paraitre dans Math. Nachrichten (1977a).
13. Foata D., Schützenberger M. — P. La troisième transformation fondamentale du groupe des permutations. A paraitre (1977b).
14. Laplace Oeuvres complètes, vol. 7, (1820), réédité par Gauthier — Villars, Paris, p. 257 et suivantes (1886).
15. Randow von R., Meyer W. Ein Würfelschnittproblem und Bernoullische Zahlen, Math Ann., 193 (1971), 315—321.
16. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1963.
17. Roselle D. P. Coefficients associated with the expansion of certain products, Proc. Amer. Math. Soc., 45 (1974), 144—150.
18. Stanley R. P. Binomial posets, Möbius inversion, and permutation enumeration, J. Combinatorial Theory.
19. Stanley R. P. Eulerian partitions of a unit hypercube.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ В КОМБИНАТОРНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ [1])

Р. Радо

В этой статье рассматриваются два направления комбинаторной теории множеств: исчисление разбиений (partition calculus) и теория Δ-систем. В ней представлен обзор как опубликованных результатов, так и некоторых новых.

Обозначения. Большими латинскими буквами будем обозначать множества, а малыми, если не оговорено противное, — кардинальные числа; через c^+ обозначим наименьшую мощность, большую чем c, и пусть $c^- = \min\{x : x^+ \geqslant c\}$. Бесконечные кардинальные числа обозначаем через $\aleph_0, \aleph_1, \ldots$, а соответствующие ординалы — через $\omega_0 (= \omega), \omega_1, \ldots$. Если $a \geqslant \aleph_0$, то cfa обозначает то наименьшее c, для которого существует представление $a = \sum\limits_{i \in I} a_i$, где $|I| = c$ и $a_i < a$ для $i \in I$. Мощность множества A обозначаем через $|A|$ и полагаем, что

$$[A]^r = \{X \subseteq A : |X| = r\}.$$

Символ $\{x_i : i \in I\}_{\neq}$ обозначает множество $\{x_i : i \in I\}$, в котором $x_i \neq x_j$ для $i \neq j$. Изредка мы будем использовать *оператор вычеркивания* $\wedge$, чье действие заключается в исключении тех членов последовательности, над которыми он расположен. Пусть множество S_i определено для каждого $i \in I$, тогда $S_J = \bigcup\limits_{i \in J} S_i$ для $J \subseteq I$.

1. p-ОТНОШЕНИЯ [2])

(а) Хорошо известный принцип ящиков (принцип Дирихле) гласит, что для всякой функции f: $A \to I$, где $|A| > |I|$, найдется $\{x, y\}_{\neq} \subseteq A$, такое, что $f(x) = f(y)$. Рамсей [1] описал следующее замечательное обобщение этого принципа.

Теорема 1. *Пусть* $|A| = \aleph_0$; r, $|I| < \aleph_0$; f: $[A]^r \to I$. *Тогда найдется* $X \in [A]^{\aleph_0}$, *такое, что функция* f *постоянна на* $[X]^r$.

---

[1]) Rado R. Problems in combinatorial set theory.

[2]) В оригинале «partition relations», — *Прим. перев.*

Именно эта теорема послужила толчком к созданию исчисления разбиений, см., например, [2]. Основным понятием исчисления разбиений является *ор-отношение*[1])

$$a \to (b_i)^r_{i \in I}, \tag{1}$$

которое означает следующее: для любых $A: |A| = a$, $f: [A]^r \to I$ найдется $X \in [A]^{b_i}$, такое, что $f = i$ на $[X]^r$. Если $|I| = n$ и $b_i = b$ для $i \in I$, то (1) также записывают в форме

$$a \to (b)^r_n. \tag{2}$$

Если α, β_i — ординалы, то отношение $\alpha \to (\beta_i)^r_{i \in I}$ означает, что всякий раз, когда $(A, <)$ — упорядоченное множество порядкового типа $\operatorname{tp}(A, <) = \alpha$, и если $f: [A]^r \to I$, то найдется $i \in I$ и $X \subseteq A$, такое, что $\operatorname{tp}(X, <) = \beta_i$ и $f = i$ на $[X]^r$.

Теорема 1 утверждает, что

$$\aleph_0 \to (\aleph_0)^r_n \quad \text{для} \quad r,\ n < \aleph_0. \tag{3}$$

Рамсей также доказал конечный аналог (3):

Теорема 2. *Пусть даны b, r, $n < \aleph_0$, тогда найдется мощность $a < \aleph_0$, такая, что отношение* (2) *выполнено.*

Хотя уже известен ряд доказательств (3), следующий вариант доказательства может представлять интерес в силу своей краткости.

Доказательство отношения (3).

Пусть $1 \leqslant r < \aleph_0$ и предположим, что

$$\aleph_0 \to (\aleph_0)^{r-1}_n \quad \text{для} \quad n < \aleph_0. \tag{4}$$

Этого достаточно для вывода (3). Пусть $|A| = \aleph_0$; $|I| < \aleph_0$; $f: [A]^r \to I$. Определим рекурсивно x_ν, P_ν, Q_ν для $\nu < \omega$. Пусть $\nu < \omega$; $P_\nu \in [A]^\nu$; $Q_\nu \in [A \setminus P_\nu]^{\aleph_0}$. Тогда найдется $Q'_\nu \in [Q_\nu]^{\aleph_0}$, такое, что $f(X \cup \{y\}) = f(X \cup \{z\})$ для $X \in [P_\nu]^{r-1}$ и y, $z \in Q'_\nu$. Выберем $x_\nu \in Q'_\nu$ и положим $P_{\nu+1} = P_\nu \cup \{x_\nu\}$; $Q_{\nu+1} = Q'_\nu \setminus \{x_\nu\}$. Повторно применим эту процедуру для $\nu = 0, 1, \ldots, \hat{\omega}$, начиная с $P_0 = \phi$; $Q_0 = A$. Таким способом получаем множество $B = \{x_0, x_1, \ldots, \hat{x}_\omega\}_{\neq}$ с тем свойством, что для некоторой функции g: $[B]^{r-1} \to I$ выполняется $f(X \cup \{x_\alpha\}) = g(X)$, если $\alpha < \omega$ и $X \in [\{x_0, \ldots, \hat{x}_\alpha\}]^{r-1}$. Согласно (4), найдется множество $D \in [B]^{\aleph_0}$, такое, что g постоянна на $[D]^{r-1}$. Значит, f постоянна на $[D]^r$ и тем самым (3) доказано.

---

[1]) В оригинале «ordinary partition relation». — *Прим. перев.*

(b) Теперь приведем без доказательства некоторые общие результаты об op-отношениях. Эти и более общие предложения рассмотрены в [2].

(I) Для данных $I \neq \phi$: $r < \aleph_0$ и произвольных мощностей $b_i \, (i \in I)$ найдется мощность, для которой имеет место (1). В предположении истинности *обобщенной континуум-гипотезы* (далее: ОКГ)

$$2^c = c^+ \quad \text{для} \quad c \geqslant \aleph_0 \tag{ОКГ}$$

имеем, что

$$\aleph_{\alpha+(r-1)} \to (\aleph_\alpha)^r_n$$

для $1 \leqslant r < \aleph_0$ и $n < cf \aleph_\alpha$.

(II) Вариант леммы, приводящий поэтапно к положительному утверждению. Пусть $1 \leqslant r < \aleph_0$; $a \geqslant \aleph_0$; $a \to (b_i)^r_{i \in I}$ и имеет место ОКГ. Тогда $a^+ \to (b_i + 1)^{r+1}_{i \in I}$.

Логическое отрицание p-отношения получаем заменой $\to$ на $\not\to$.

(III) Вариант леммы, приводящий поэтапно к отрицательному утверждению. Пусть $3 \leqslant r < \aleph_0$; $|I| \geqslant 2$; $b_i \geqslant \aleph_0$ для $i \in I$; $a \not\to (b_i)^r_{i \in I}$. Тогда в предположении ОКГ имеем, что $a^+ \not\to (b_i)^{r+1}_{i \in I}$.

Ограничение о конечности «показателя» r в op-отношении естественно с точки зрения следующего результата (см. [3], стр. 434).

Теорема 3. *Пусть* $a \geqslant 0$; $b \geqslant r \geqslant \aleph_0$; $n \geqslant 2$. *Тогда* $a \not\to (b)^r_n$.

(c) *dp-отношение* [1])

$$a \to [b_i]^r_{i \in I}, \tag{5}$$

также именуемое *sb-отношением* [2]), выражает следующее условие. Всякий раз, когда $|A| = a$ и f: $[A]^r \to I$, найдутся $i \in I$ и $X \in [A]^{b_i}$, такие, что $f \neq i$ на $[X]^r$. Следующая теорема устанавливает связь между dp- и op-отношениями.

Теорема 4. *Пусть* $|N| \geqslant 2$; $I_\nu \neq \phi$ *для* $\nu \in N$; $I_\mu \cap I_\nu = \phi$ *для* $\mu \neq \nu$; $I = I_N$; $b_i \leqslant c_\nu$, *если* $\nu \in N$ *и* $i \in I_\nu$; $a \to (c_\nu)^r_{\nu \in N}$. *Тогда имеет место* (5).

Полагая $N = I$; $I_\nu = \{\nu\}$ и $c_\nu = b_\nu$, мы видим, что (1) влечет (5) в предположении, что $|I| \geqslant 2$.

Доказательство теоремы 4. Пусть $|A| = a$; $[A]^r = \bigcup_{i \in I} K_i$. $K_i \cap K_j = \phi$ для $i \neq j$. Положим $L_\nu = K_{I \setminus I_\nu}$ для $\nu \in N$. Пусть

[1]) В оригинале «dual partition relation». — *Прим. перев.*

[2]) В оригинале «square-bracket relation». — *Прим. перев.*

$X \in [A]^r$. Тогда $X \in K_{i_0}$ для некоторого $i_0 \in I$. Далее, пусть $i_0 \in I_{\nu_0}$ для некоторого $\nu_0 \in N$. Поскольку $|N| \geqslant 2$, можно выбрать $v_1 \in N \setminus \{\nu_0\}$. Если $i_0 \in I_{\nu_1}$, то $i_0 \in I_{\nu_0} \cap I_{\nu_1} = \phi$, что противоречит условию. Следовательно, $i_0 \notin I_{\nu_1}$; $i_0 \in I \setminus I_{\nu_1}$; $X \in \in K_{i_0} \subseteq K_{I \setminus I_{\nu_1}} = L_{\nu_1} \subseteq L_N$; $[A]^r \subseteq L_N$. Согласно $a \to (c_\nu)^r_{\nu \in N}$, найдутся $\nu_2 \in N$ и $Y \in [A]^{c_{\nu_2}}$, такие, что $[Y]^r \subseteq L_{\nu_2}$. Мы можем выбрать $i \in I_{\nu_2}$. Тогда $|Y| = c_{\nu_2} \geqslant b_i$; $[Y]^r \cap K_i \subseteq L_{\nu_2} \cap K_i = K_{I \setminus I_{\nu_2}} \cap K_i \subseteq \subseteq K_{I \setminus I_{\nu_2}} \cap K_{I_{\nu_2}} = \phi$. Существование i и Y с этими свойствами доказывает (5).

Сформулируем без доказательства результат для d-отношений (см. [2], теорему 22).

Теорема 5. *Пусть в предположении ОКГ $cfa < a$ и $2 \leqslant r < \aleph_0$. Тогда $a \not\to [a]^r_c$ для $c \leqslant 2^{r-1}$. Если к тому же $cfa = \aleph_0$, то $a \to [a]^r_c$ для $c > 2^{r-1}$.*

(d) *pp-отношение* [1])

$$\binom{a}{b} \to \binom{c_i}{d_i}_{i \in I}$$

выражает следующее условие. Для всяких $|A| = a$; $|B| = b$; f: $A \times B \to I$ найдутся $i \in I$; $X \in [A]^{c_i}$; $Y \in [B]^{d_i}$, такие, что $f = i$ на $X \times Y$.

op-отношение при $r = 2$ имеет ясную интерпретацию в терминах реберного раскрашивания полного графа. Аналогично *pp*-отношение может быть интерпретировано в терминах реберного раскрашивания полного двудольного графа. Отметим следующее утверждение ([2], теорема 44).

Теорема 6. *В предположении ОКГ для a, $b \geqslant \aleph_0$ отношение $\binom{a}{b} \to \binom{a}{b}_2$ выполнено тогда и только тогда, когда*

$$\{a, a^+, cfa, (cfa)^+\} \cap \{b, b^+, cfb, (cfb)^+\} = \phi.$$

(e) *cp-отношения* [2]). Пусть $(A, <)$ — упорядоченное множество порядкового типа $\operatorname{tp}(A, <) = \alpha$ и пусть $r < \aleph_0$. Символ $\{x_0, \ldots, \hat{x}_r\}_<$ обозначает множество и выражает то условие, что $x_\alpha < x_\beta$ для $\alpha < \beta < r$,

Функция f: $[A]^r \to I$ называется *канонической*, если найдутся числа $\varepsilon_0, \ldots, \hat{\varepsilon}_r \in \{0, 1\}$, такие, что для всех выборов множеств $\{x_0, \ldots, \hat{x}_r\}_<$, $\{y_0, \ldots, \hat{y}_r\}_< \subseteq A$ равенства

$$f(\{x_0, \ldots, \hat{x}_r\}) = f(\{y_0, \ldots, \hat{y}_r\})$$

[1]) В оригинале «polarized partition relation». — *Прим. перев.*

[2]) В оригинале «canonical partition relation». — *Прим. перев.*

выполняются тогда и только тогда, когда $x_\rho = y_\rho$ для каждого $\rho < r$ при $\varepsilon_\rho = 1$. Отметим, что если $\alpha = \omega_\lambda$ и $(\varepsilon_0, \ldots, \hat{\varepsilon}_r) \neq (0, \ldots, \hat{0})$, то f принимает $\aleph_\lambda$ различных значений. *ср-отношение*

$$\alpha \rightarrow (\beta)^r_{\text{can}}$$

означает следующее. Для всякого упорядоченного множества $(A, <)$ порядкового типа $\operatorname{tp}(A, <) = \alpha$ и функции f: $[A]^r \rightarrow I$ для некоторого I найдется $B \subseteq A$ с $\operatorname{tp}(B, <) = \beta$, такое, что эта функция f канонична на $(B, <)$.

Основной характерной особенностью *ср*-отношений является тот факт, что в противоположность всем другим видам *р*-отношений ничего не говорится о числе $|I|$ «цветов» в данном раскрашивании f: $[A]^r \rightarrow I$. Отметим два результата и одну гипотезу, связующие *ор*- и *ср*-отношения.

Теорема 7. ([4], теорема 46).

(I) *Пусть* $r < \aleph_0$ *и* $s = \binom{2r}{r}$. *Пусть* q *есть число различных отношений эквивалентности, которые можно определить на множестве* $\{0, 1, \ldots, \hat{s}\}$. *Пусть* α, β — *ординалы*; $|\beta| > 2r$; $\alpha \rightarrow (\beta)^{2r}_q$. *Тогда* $\alpha \rightarrow (\beta)^r_{\text{can}}$.

(II) *В предположении истинности ОКГ пусть* α — *некоторый ординал и* $r < \aleph_0$. *Тогда*

$$\omega_{\alpha+2r+1} \rightarrow (\omega_\alpha + 2r + 1)^{r+1}_{\text{can}}.$$

Напомним, что бесконечный кардинал b называется (слабо) *недостижимым*, если $b = cfb = b^-$.

Теорема 8. *В предположении истинности ОКГ положим, что бесконечный кардинал* $\aleph_\beta$ *не является недостижимым. Тогда для каждого ординала* α *отношение*

$$\omega_\alpha \rightarrow (\omega_\beta)^2_{\text{can}} \tag{6}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\aleph_\alpha \rightarrow (\aleph_\beta)^2_n \quad \text{для каждого } n < \aleph_\beta. \tag{7}$$

Легко видеть, что из (6) следует (7). Пусть $|A| = \aleph_\alpha$ и f: $[A]^r \rightarrow I$; $|I| = n < \aleph_\beta$. Пусть $(A, <)$ — упорядоченное множество с $\operatorname{tp}(A, <) = \omega_\alpha$. Согласно (6) найдется $X \subseteq A$ с $\operatorname{tp}(X, <) = \omega_\beta$, такое, что f канонична на $[X]^r$, скажем со значениями $\varepsilon_0, \ldots, \hat{\varepsilon}_r \in \{0, 1\}$ из определения каноничности. Теперь, если $\varepsilon_\rho = 1$ для некоторого ρ, то, согласно отмеченному выше, f должна принимать $\aleph_\beta$ значений, что противоречит тому, что $|I| < \aleph_\beta$. Следовательно, все $\varepsilon_\rho = 0$, и, таким образом, f постоянна на $[X]^r$. Это доказывает (7).

Доказательство импликации «из (7) следует (6)» более запутанно и использует некоторые результаты работы [2]. Представляется наиболее вероятным, что теорема 8 сохраняет свою силу, если показатель 2 заменить на $r < \aleph_0$, однако мы не обладаем доказательством этого факта. Сформулируем явно это предположение.

Гипотеза. *В предположении истинности ОКГ пусть* $r < \aleph_0$ *и* $\aleph_\beta$ *не является недостижимым. Тогда отношение* $\omega_\alpha \to (\omega_\beta)^r_{\text{can}}$ *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\aleph_\alpha \to (\aleph_\beta)^r_n \text{ для каждого } n < \aleph_\beta.$$

2. Δ-СИСТЕМЫ

Термины система и семейство используются как синонимы. $(a,\ b)$-*семейство* есть семейство $(A_i : i \in I)$, которое таково, что $|I| = a$ и $|A_i| = b$ для $i \in I$. Выражения, такие, как $(> a,\ \leqslant b)$-семейство, ясны сами по себе. Система $\mathfrak{A} = (A_i : i \in I)$ называется *слабой* (*сильной*) Δ-системой, если для $i \neq j$ мощность $|A_i \cap A_j|$ (множество $A_i \cap A_j$) не зависит от i и j. $\Delta(c)$-*система* есть такая Δ-система $(A_i : i \in I)$, что $|I| = c$.

Очевидно, каждая сильная Δ-система является слабой. Однако система $(\{0,\ 1\},\ \{0,\ 2\},\ \{1,\ 2\})$ является слабой, но не сильной. Следующее простое предложение показывает, что эта частная система представляет собой критический случай. Слабые Δ-системы с более чем тремя членами, каждый из которых мощности не более двух, являются автоматически сильными.

Теорема 9. *Каждая* $(\geqslant 4,\ \leqslant 2)$-*система, которая является слабой* Δ-*системой, является также сильной* Δ-*системой.*

Доказательство. Пусть $(\geqslant 4,\ \leqslant 2)$-система $\mathfrak{A} = (A_i\, i \in I)$ является слабой Δ-системой. Мы можем предполагать, что $0,\ 1,\ 2,\ 3 \in I$ и $|A_i \cap A_j| = p \leqslant 2$ для $i \neq j$.

Случай 0. $p = 0$. Тогда $A_i \cap A_j = \phi$ для $i \neq j$.

Случай 1. $p = 1$. Если $|A_0| = 1$, то $|A_0 \cap A_i| = 1$ для $i \neq 0$; $A_0 \subseteq A_i$; $A_i \cap A_j = A_0$ для $i \neq j$. Теперь пусть $|A_i| = 2$ для всех i. Пусть $A_0 = \{0,\ 1\}$. Тогда для $i \neq 0$ имеем либо $0 \in A_i$, либо $1 \in A_i$. Без ограничения общности можем предположить, что $0 \in A_1 \cap A_2$. Более того, мы можем предполагать, что $A_1 = \{0,\ 2\}$ и $A_2 = \{0,\ 3\}$.

Случай 1а. $0 \notin A_{j_0}$ для некоторого $j_0 \notin \{0,\ 1,\ 2\}$. Тогда $|A_i \cap A_{j_0}| = 1$ для $i \in \{0,\ 1,\ 2\}$, и, следовательно, $1,\ 2,\ 3 \in A_{j_0}$, что противоречит $|A_{j_0}| = 2$.

Случай 1b. $0 \in A_j$ для всех $j \notin \{0, 1, 2\}$. Тогда $A_\alpha \cap A_\beta = \{0\}$ для $\alpha \neq \beta$ и $\mathfrak{A}$ является сильной Δ-системой.

Случай 2. $p=2$. Тогда $A_\alpha \cap A_\beta = A_0$ для $\alpha \neq \beta$, и теорема доказана.

Кроме того, имеется еще одно предложение, которое также утверждает, что при определенных условиях слабая Δ-система является сильной.

Теорема 10. *Пусть* $\mathfrak{A} = (A_i : i \in I)$ — *слабая* Δ-*система*; $|A_i \cap A_j| = p < \aleph_0$ *для* $i \neq j$; $|A_i| = a_i$ *для* $i \in I$. *Тогда* $\mathfrak{A}$ *является сильной* Δ-*системой, если имеет место одно из следующих условий*:

(I) $a_i \leqslant n < \aleph_0$ *для* $i \in I$ *и* $|I| > 1 + n\binom{n}{p}$,

(II) $|I| > 3 + \binom{a_i}{p}\binom{a_j}{p}\binom{a_k}{p}$ *для всех* $\{i, j, k\}_\# \subseteq I$, *где* $\binom{a}{p} = |[A]^p|$ *для* $|A| = a \geqslant \aleph_0$.

Доказательство. Утверждение (I) доказано в работе [5], теорема 2. Пусть теперь имеет место (II). Мы можем предположить, что для некоторого ординала n $I = \{0, 1, \ldots, \hat{n}\}$. Положим $D_{\alpha\beta} = A_\alpha \cap A_\beta$ для $\alpha, \beta < n$.

Случай 1. Пусть для $\alpha < \beta < \gamma < n$ система $(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma)$ является сильной Δ-системой. Тогда $D_{\alpha\beta} = D_{\alpha\gamma}$ всякий раз, когда $\alpha \neq \beta$ и $\alpha \neq \gamma$. Пусть теперь $\alpha \neq \beta$ и $\gamma \neq \delta$. Тогда $D_{\alpha\beta} = D_{\gamma\delta}$ и $\mathfrak{A}$ является сильной Δ-системой. Если $\alpha = \gamma$, то $D_{\alpha\beta} = D_{\gamma\beta} = D_{\gamma\delta}$, а если $\alpha \neq \gamma$, то $D_{\alpha\beta} = D_{\alpha\gamma} = D_{\delta\gamma}$.

Случай 2. $n \geqslant 3$ и система (A_0, A_1, A_2) не является сильной Δ-системой. Пусть $t < 3 \leqslant i < n$. Тогда $|D_{ti}| = p$. Следовательно,

$$|\{(D_{0i}, D_{1i}, D_{2i}) : 3 \leqslant i < n\}| \leqslant \binom{a_0}{p}\binom{a_1}{p}\binom{a_2}{p} = q.$$

Случай 2a. $|I \setminus \{0, 1, 2\}| > q$. Тогда найдутся ординалы i, j, где $3 \leqslant i < j < n$, такие, что $D_{ti} = D_{tj}$ для всех $t < 3$. Тогда для $t < 3$,

$$A_i \cap A_j \supseteq D_{ti} \cap D_{tj} = D_{ti}; \quad |A_i \cap A_j| = p = |D_{ti}| < \aleph_0.$$

Следовательно, $A_i \cap A_j = D_{ti}$ для $t < 3$. Если $s < t < 3$, то $A_s \cap A_t \supseteq D_{si} \cap D_{ti} = A_i \cap A_j$; $|A_s \cap A_t| = p = |A_i \cap A_j| < \aleph_0$. Таким образом, $A_s \cap A_t = A_i \cap A_j$ для $s < t < 3$, что противоречит тому, что (A_0, A_1, A_2) не является сильной Δ-системой.

Случай 2b. $|I \setminus \{0, 1, 2\}| \leqslant q$. Тогда $|I| \leqslant 3 + q$, что противоречит предположению (II). Тем самым теорема доказана.

Сейчас приведем краткий обзор некоторых результатов, полученных ранее. Пусть отношение $a \to st\,\Delta(b, c)$ означает, что каждая $(a, <b)$-система содержит сильную $\Delta(c)$-подсистему. Для данных b и c найдется наименьшая мощность a, обозначаемая через $f_{st\Delta}(b, c)$, такая, что $a \to st\,\Delta(b, c)$. Обозначим через $s(b, c)$ супремум всех мощностей вида $\sum\limits_{|\nu|<b} \prod\limits_{\mu<\nu} c_\mu$ (μ, ν пробегают множество всех ординалов), где c_μ — некоторые мощности, такие, что $c_\mu < c$ для всех μ.

Теорема 11. *Пусть* $b \geqslant 2$; $c \geqslant 3$; $b + c \geqslant \aleph_0$. *Тогда*

$$f_{st\Delta}(b, c) \in \{s(b, c), (s(b, c))^+\}.$$

Эта теорема является частью теоремы IV из [6]. В работе [6] можно найти полное описание значений, принимаемых функцией $f_{st\Delta}$, как в предположении истинности ОКГ, так и без него. Я пользуюсь этим удобным случаем, чтобы отметить ряд ошибок в [6], относящихся к вычислению $f_{st\Delta}$ в предположении истинности ОКГ, на которые мне весьма любезно указал Р. О. Девис. Эти ошибки, однако, могут быть легко исправлены.

Теорема 12. *Пусть* $m \geqslant \aleph_0$ *и* $n < m$. *Пусть* $\mathfrak{A} = (A_i : i \in I)$ *является такой* (m^+, m)*-системой, что* $|A_i \cap A_j| < n$ *для* $i \neq j$. *Тогда*

(I) *если* $m^n = m$, *то* $\mathfrak{A}$ *содержит сильную* $\Delta(m^+)$*-подсистему*,

(II) *если* $m^n > n$ *и ОКГ имеет место, то* $\mathfrak{A}$ *содержит сильную* $\Delta(p)$*-подсистему для каждого* $p < m$,

(III) *утверждение* (II) *станет ложным, если в* (II) *заменить* $p < m$ *на* $p \leqslant m$.

Этот результат является теоремой 1 в [5].

Теорема 13. *Если* $a \geqslant 2$; $b \geqslant 1$; $a + b \geqslant \aleph_0$, *то каждая* $(> a^b, \leqslant b)$*-система обладает сильной* $\Delta(> a)$*-подсистемой. Этот результат является частью теоремы* 1 *из* [7].

Пусть отношение $(a, b) \to wk\Delta(c)$ означает, что каждая (a, b)-система обладает слабой $\Delta(c)$-подсистемой. Для данных a и b найдется наименьшая мощность c, обозначаемая через $\varphi_{wk\Delta}(a, b)$, удовлетворяющее

$$(a, b) \nrightarrow wk\Delta(c).$$

Теорема 14. *В предположении истинности ОКГ, если* $a, b \geqslant \aleph_0$, *то*

$$\varphi_{wk\Delta}(a, b) \in \{3, a^-, a, a^+\}.$$

Этот результат доказан в § 7 работы [5], где можно также найти полное описание функции $\varphi_{wk\Delta}$ в предположении истинности ОКГ.

Желательно было бы, во-первых, изучить по аналогии с определением функции $f_{st\Delta}$ функцию $\psi_{\omega k\Delta}(a, b)$, чье значение есть наименьшая мощность c, такая, что найдется $(a, < b)$-система без слабой $\Delta(c)$-подсистемы, во-вторых, представить описание как в [5], но уже без предположения истинности ОКГ.

Среди прочих задач я отмечу только следующую, которая весьма конкретна и привлекает внимание целого ряда авторов.

Задача. Существует ли положительное целое число c, такое, что для $1 \leqslant n < \aleph_0$ каждая (c^n, n)-система содержит сильную $\Delta(3)$-подсистему?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ramsey F. P. On a problem of formal logic, Proc. London Math. Soc. (2), vol. 30 (1930), pp. 246—286.
2. Erdös P., Hajnal A., Rado R. Partition relations for cardinal numbers, Acta Math. Hungarian Acad. Scient. vol. XVI (1965), pp. 93—196.
3. Erdös P., Rado R. Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set, Proc. London Math. Soc. (3), vol. 2 (1952), pp. 417—439.
4. Erdös P., Rado R. A partition calculus in set theory, Bull. American Math. Soc., vol. 62 (1956), pp. 427—489.
5. Erdös P., Rado R. Intersection theorems for systems of sets, Journ. London Math. Soc., vol. 35 (1960), pp. 85—90.
6. Erdös P., Rado R. Intersection theorems for systems of sets (II), Journ. London Math. Soc., vol. 44 (1969), pp. 467—479.
7. Erdös P., Milner E. C., Rado R. Intersection theorems for systems of sets (III), Journ. Australian Math. Soc., vol. XVIII (1974), pp. 22—40.

3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АППАРАТ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА

ГРУППЫ ПОДСТАНОВОК НА НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ [1]

Петер Дж. Камерон

Пусть дана группа подстановок G на множестве X. Тогда G действует естественным образом на множестве $X(t)$ t-подмножеств множества X. Какой должна быть группа G, чтобы выполнялось некоторое свойство (такое, как транзитивность или примитивность) этого действия, и как это связано с более известными понятиями, такими, как многократная транзитивность и примитивность группы G? Вопросы такого рода рассматриваются в настоящей работе. Будет дан не полный обзор, а лишь описание некоторых из многих комбинаторных методов, используемых в изучении этих вопросов, а также ряд комбинаторных результатов и возникающих проблем, включая теорему Рамсея, проблемы раскрашивания, отношения порядка, совершенные коды, параллелизмы и системы Штейнера. В первой части мы рассмотрим транзитивность и (кратко) s-транзитивность и g-транзитивность [2], тогда как примитивность будет предметом исследования второй части. В работе не будут упомянуты некоторые другие свойства (такие, как частичная транзитивность и строгая примитивность [3]).

1. ТРАНЗИТИВНОСТЬ

1.1. Введение

Напомним, что группа подстановок G некоторого множества X называется *транзитивной* на X, если для каждой пары $x, y \in X$ найдется некоторый элемент $g \in G$, который переводит x в y. Мы скажем, что G является *t-транзитивной* на

[1] Cameron Peter J. Permutation groups on unordered sets.

[2] Автор употребляет соответственно термины «sharp transitivity» и «generous transitivity». — *Прим. перев.*

[3] В оригинале соответственно «fractional transitivity» и «strong primitivity». — *Прим. перев.*

множестве X, если она транзитивна на множестве упорядоченных наборов из t различных элементов множества X, и t-*однородной* (или *транзитивной на t-множествах*), если она транзитивна на $X(t)$. Ясно, что при $t=1$ оба понятия сводятся к понятию транзитивности. Первому понятию уделяется большое внимание в теории групп, поскольку оно *индуктивно* в том смысле, что группа G является t-транзитивной тогда и только тогда, когда она транзитивна и ее подгруппа G_x, оставляющая неподвижную точку x множества X, является $(t-1)$-транзитивной на оставшихся точках. Имеем тривиальное следствие:

(1.1.1) t-транзитивная группа является t-однородной.

В следующих двух разделах мы рассмотрим обратную задачу: какие t-однородные группы не являются t-транзитивными? Работой, положившей начало исследованиям этого вопроса для конечных групп, является очень важная статья Ливингстона и Вагнера [29]; в ней и в последующей работе Кантора [23] дан полный ответ на поставленный вопрос. Мы опишем полученные ими результаты и последующие обобщения на бесконечные группы. В § 1.2 описывается соотношение между орбитами группы на множествах $X(s)$ и $X(t)$; в более общем случае, если s-подмножества множества X раскрашены некоторым способом, будут рассмотрены «схемы раскрашивания» t-подмножеств. В § 1.3 рассматриваются те бесконечные группы подстановок (подобно группе сохраняющих порядок подстановок $\mathbb{R}$), которые являются t-однородными для всех t, но не являются s-транзитивными для некоторого s. Такая группа может быть самое большее 3-транзитивной. Мы опишем в общих чертах два доказательства этого факта, принадлежащие Камерону и Хигману. В заключительном разделе этой части мы обсудим усиление понятия транзитивности, так называемую «g-транзитивность», а также соответствующее понятие. Это приводит нас к «свойству обмена» для конечных групп и, следовательно, снова к проблеме раскраски из § 1.2. Вкратце рассмотрена также «s-транзитивность».

1.2. Теорема 1 Ливингстона и Вагнера

Первыми результатами статьи Ливингстона и Вагнера [29] являются следующие теорема и следствие (в предположении, что X-конечное множество):

(1.2.1) Пусть G-группа подстановок на множестве X и $|X|\geqslant 2t$. Тогда группа G имеет на множестве $X(t)$ по крайней мере столько же орбит, сколько и на множестве $X(t-1)$.

(1.2.2) При тех же самых предположениях если группа G является t-однородной, то она является и $(t-1)$-однородной.

При их доказательстве используется теория характеров симметрических групп. Вскоре после Ливингстона и Вагнера короткое теоретико-числовое доказательство следствия (1.2.2) было опубликовано Вайлендтом [47]. Из его рассуждений получается тот же результат, но при более слабом предположении, что $|X| \geqslant t+p^a-1$ для всех степеней p^a простого числа p, делящих t. (В частности, 6-однородная группа степени [1]) 8 является 5-однородной, т. е. 2-однородная группа степени 8 является 3-однородной!) Кроме того, несмотря на название его статьи, рассуждения Вайлендта верны также для бесконечных групп. Иное доказательство для бесконечного (или достаточно большого конечного) множества X, использующее теорему Рамсея [37], было дано Берковым и Гобби [5]. Их результат опять-таки является более общим: если группы G и H таковы, что всякая H-орбита в $X(t)$ содержится в некоторой G-орбите, то каждая H-орбита в $X(t-1)$ содержится в некоторой G-орбите. Отсюда, если в качестве H взять симметрическую группу, получается (1.2.2).

Вернемся к исходному доказательству. Утверждение (1.2.1) следует из утверждения о том, что подстановочный характер группы G на множестве $X(t-1)$ содержится в характере группы G на множестве $X(t)$; это верно для группы G, поскольку верно для симметрической группы. Кантор [24] заметил, что это утверждение в терминах теории характеров следует из того факта, что матрица инцидентности для множества $X(t-1)$ по отношению к $X(t)$ (где инцидентность суть включение) имеет ранг, равный числу строк матрицы. Мы увидим, что, должным образом сформулированное, это утверждение верно также и в бесконечном случае и что оно влечет некоторый более общий комбинаторный факт, из которого следует (1.2.1). Мы сформулируем утверждение в самом общем виде.

Пусть X и Y — множества, а $\rho \subseteq X \times Y$ — отношение между ними. Для $y \in Y$ положим $\rho^*(y) = \{x \in X : (x, y) \in \rho\}$. Если элементы множества X раскрашены в m цветов $c_1, \ldots, c_m$, то *схемой раскраски* элемента $y \in Y$ называется m-выборка $(a_1, \ldots, a_m)$, где $a_i = |\rho^*(y) \cap c_i|$. Для всякого множества X обозначим через $\mathbb{Q}^X$ $\mathbb{Q}$-векторное пространство [2]) функционалов из X в $\mathbb{Q}$ (с поточечно определенными операциями).

---

[1]) Степенью группы подстановок называется число переставляемых объектов. — *Прим. перев.*

[2]) Имеется в виду векторное пространство над $\mathbb{Q}$. — *Прим. перев.*

(1.2.3) Предположим, что X и Y — два множества, а $\rho \subseteq X \times Y$ — некоторое отношение, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) множество $\rho^*(y)$ конечно для всех $y \in Y$;

(2) линейное преобразование $\theta : \mathbb{Q}^X \to \mathbb{Q}^Y$, определенное посредством

$$(f\theta)(y) = \sum_{x \in \rho^*(y)} f(x),$$

имеет ядро 0. Если элементы множества X раскрашены в m цветов (все m цветов использованы при раскраске), то существует по крайней мере m схем раскраски элементов множества Y.

Доказательство. Мы можем предположить, что m конечно. Пусть c_i — подмножество элементов множества X, раскрашенных i-м цветом, и f_i — его характеристическая функция, $1 \leqslant i \leqslant m$, а $\sigma_j = \{a_{1j}, \ldots, a_{mj}\}$ — j-я схема раскраски и g_j — ее характеристическая функция, $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда $(f_j\theta)(y) = a_{ij}$, если y обладает схемой раскраски σ_j, т. е.

$$f_i\theta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j.$$

Так как $\{f_1, \ldots, f_m\}$ и $\{g_1, \ldots, g_n\}$ являются линейно независимыми множествами, то матрица $A = (a_{ij})$ является представлением ограничения некоторого линейного преобразования θ. Отсюда $\operatorname{rk} A = m \leqslant n$.

Предположения в (1.2.3) подтверждены для большого числа отношений. Разберем этот результат для одного весьма важного случая.

(1.2.4) Предположим, что $0 \leqslant s \leqslant t$, $s + t \leqslant |X|$ и s-подмножества множества X раскрашены в m цветов. Тогда существует по меньшей мере m схем раскраски t-подмножеств.

Тот факт, что отношение включения между $X(s)$ и $X(t)$ при этих предположениях удовлетворяет условию (2) утверждения (1.2.3), хорошо известен для конечных множеств X и легко распространяется на бесконечные множества (см. Камерон, [9]). Утверждение (1.2.1) является непосредственным следствием из (1.2.4). Другими отношениями, для которых справедливы утверждения предложения (1.2.3), являются отношения включения между s-подмножествами и блоками в $2s$-схеме (Рой-Чоудхури и Уилсон [38]), между подпространствами конечных проективных и аффинных пространств (Кантор [24]) и между вполне изотропными подпространствами конечных полярных пространств (Лехрер [27]).

Следующие две нерешенные проблемы связаны с (1.2.4):

Проблема 1. *Описать раскраски множества* $X(s)$, *для которых в* (1.2.4) *имеет место равенство.*

Эта проблема не совсем точно сформулирована, поскольку неясно, в каком виде мы хотим получить ответ. Но для случая $s=2$, $t=3$ имеется пробный «удовлетворительный» ответ:

(1.2.5) Предположим, что $|X| \geqslant 5$ и ребра полного графа на множестве X раскрашены в m разных цветов таким образом, что существует только m схем раскраски треугольников. Тогда имеет место одно из следующих условий:

(1) существует цвет, валентность которого в каждой вершине не превосходит 1;

(2) $m=2$, а множество X разбивается на две непустые части, так что ребра, соединяющие вершины одной и той же части, окрашены одним цветом, а ребра, соединяющие вершины разных частей, — другим;

(3) $m=2$, $|X|=5$, а ребра, раскрашенные в один цвет, образуют пятиугольник, такой, что его диагонали раскрашены в другой цвет;

(4) $m=1$.

Проблема 2. *Предположим, что s-подмножества множества X раскрашены в m цветов и $n(t)$ — количество схем раскраски t-подмножеств. Показать, что $n(t)$ является монотонной неубывающей функцией для* $s \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}|X|$.

Если эта проблема имеет положительное решение, то в проблеме 1 можем предположить, что $t=s+1$.

1.3. Теорема 2 Ливингстона и Вагнера

В своей книге по теории игр Фон Нейман и Моргенштейн ([33], стр. 258) поставили вопрос: какие конечные группы подстановок степени n являются t-однородными для всех целых чисел t, где $1 \leqslant t \leqslant n$? Игра с n игроками, обладающая такой группой симметрий, будет справедливой в том смысле, что никакое подмножество игроков не будет обладать каким-либо особым преимуществом. К тому же такая группа не сохраняет никакое нетривиальное семейство подмножеств множества X и, следовательно, не может быть изучена комбинаторикой типа «блок-схем», поэтому надо также знать все такие группы. Следующее определение дано Бомоном и Петерсоном [4];

(1.3.1) Если группа подстановок G конечной степени n является t-однородной для $t \leqslant n$, то либо

(1) G является симметрической или знакопеременной группой, либо

(2) $G = AGL\ (1,\ 5)$, $PGL\ (2,\ 5)$, $PGL\ (2,\ 8)$, $P\Gamma L\ (2,\ 8)$, где $n = 5,\ 6,\ 9,\ 9$.

Следующий шаг был сделан Ливингстоном и Вагнером [29]:

(1.3.2) Пусть G — t-однородная группа подстановок на конечном множестве X, причем $|X| \geqslant 2t$ Тогда

(1) группа G является $(t-1)$-транзитивной;

(2) если $t \geqslant 5$, то группа G является t-транзитивной.

В статье [29] содержится одно из наиболее ранних проявлений принципа индукции, оказавшегося очень важным для конечных групп подстановок. Завершающий камень был положен Кантором [23]:

(1.3.3) Пусть t-однородная группа G не является t-транзитивной конечной степени $n \geqslant 2t$. Тогда выполняется одно из следующих условий:

(1) $t = 2$, $ASL(1,\ n) \leqslant G \leqslant A\Sigma L(1,\ n)$, $n \equiv 3 \pmod 4$;

(2) $t = 3$, $PSL(2,\ n-1) \leqslant G \leqslant P\Sigma L(2,\ n-1)$, $n \equiv 0 \pmod 4$;

(3) $t = 3$, $G = AGL(1,\ 8)$, $A\Gamma L(1,\ 8)$, $A\Gamma L(1,\ 32)$, $n = 8, 8, 32$;

(4) $t = 4$, $G = PGL(2,\ 8)$, $P\Gamma L(2,\ 8)$, $P\Gamma L(2,\ 32)$, $n = 9,\ 9,\ 33$.

Для бесконечных групп положение совершенно иное. Группа всех сохраняющих порядок подстановок действительных чисел является t-однородной для всех положительных целых чисел t (в качестве примера рассмотрите кусочно-линейные отображения), но не является даже 2-транзитивной (поскольку никакие две точки не могут быть переставлены). Некоторые из ее подгрупп сохраняют эти свойства (кусочно-линейные подстановки, подстановки с ограниченным основанием и так далее). Вместо $\mathbb{R}$ мы можем использовать любое линейно упорядоченное множество, в котором все открытые интервалы изоморфны; «многочисленные» примеры могут быть построены как сверхпроизведения. Другие примеры включают группы подстановок, которые: 1) сохраняют или изменяют на обратный линейный порядок (2-транзитивные, но не 3-транзитивные); 2) сохраняют циклический порядок (2-транзитивные, но не 3-транзитивные); 3) сохраняют или изменяют на обратный циклический порядок (3-транзитивные, но не 4-транзитивные). Основная теорема этого раздела утверждает, что больше никаких других таких групп не существует.

(1.3.4) Предположим, что бесконечная группа подстановок G является t-однородной для всех положительных целых чисел t, r-транзитивной, но не $(r+1)$-транзитивной для некоторого положительного целого числа r. Тогда $r \leqslant 3$ и группа G сохраняет линейный или циклический порядок на множестве X или обратную пару таких порядков.

Опишем в общих чертах два доказательства этой теоремы. Первое принадлежит Камерону [9] и оперирует с конечными группами подстановок, в то время как доказательство Г. Хигмана использует идеи из бесконечной комбинаторики и логики [17].

Первое доказательство. Пусть K_t — группа подстановок, индуцированная на t-множестве его стабилизатором[1]) (поэтому $K_t \leqslant S_t$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда G является t-транзитивной). Пусть $k_t = |K_t|$, а m_t — число орбит при действии стабилизатора t точек на оставшихся точках. Число G-орбит при действии на упорядоченных t-наборах равно $t!/k_t$, а число орбит на упорядоченных $(t+1)$-наборах задается двумя выражениями:

$$(t+1)!/k_{t+1} = (t!/k_t)\, m_t;$$

отсюда получаем, что $k_{t+1} = (t+1)\, k_t/m_t$. Ясно, что $m_{t+1} \geqslant m_t - 1$; дальнейший анализ показывает, что на самом деле $m_{t+1} \geqslant m_t$ (это означает, что стабилизатор t точек не фиксирует больше никаких иных точек), причем равенство имеет место только тогда, когда m_t делит $\frac{1}{2}(t+1)(t+2)$. Таким образом, если $m_t \geqslant t+3$, то $m_u \geqslant u+3$ для всех $u \geqslant t$, отсюда $k_u \leqslant (t+2)(t+1)\, k_t/(u+2)(u+1)$; но это невозможно, поскольку правая часть неравенства стремится к нулю при $u \to \infty$. Таким образом, для всех t должно выполняться неравенство $m_t \leqslant t+2$. Если группа G является r-транзитивной, но не $(r+1)$-транзитивной, то группа K_{r+1} будет подгруппой индекса самое большее $r+2$ в группе S_{r+1}. Отсюда либо $r \leqslant 5$, либо $K_{r+1} = A_{r+1}$ или $K_{r+1} = S_r$. Противоречие возникает во всех случаях, кроме данных четырех. В этих оставшихся случаях знание групп K_{r+1} и K_{r+2} дает достаточно информации для того, чтобы применять заданные ниже характеризации соотношений для завершения доказательства.

Второе доказательство. Пусть ρ — орбита группы G, действующей на упорядоченных $(r+1)$-наборах различных элемен-

---

[1]) Стабилизатор подмножества — это группа подстановок, переводящих данное подмножество в себя. — *Прим перев.*

тов. Тогда ρ является нетривиальным G-инвариантным $(r+1)$-арным отношением; это отношение является *однородным* в том смысле, что его ограничения на любые два t-множества являются изоморфными для всех t. Существует лишь конечное число $(r+1)$-арных отношений на множестве $\{1, \ldots, r+1\}$, скажем $\rho_1, \ldots, \rho_n$. Возьмем любое линейное упорядочение $<$ на множестве X. Для каждого $(r+1)$-подмножества S множества X единственный сохраняющий порядок изоморфизм из S в $\{1, \ldots, r+1\}$ (в естественном упорядочении) отображает элемент ρ в некоторый элемент ρ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. По теореме Рамсея [37] существует бесконечное подмножество Y множества X, все $(r+1)$-подмножества которого задают один и тот же элемент ρ_i. Таким образом, на множестве Y отношение ρ возникает из отношения порядка $<$ в том смысле, что оно может быть определено в терминах порядка $<$ без определения количества.

Пусть *семейство* E ставит в соответствие каждому конечному подмножеству T множества X непустое множество $E(T)$ порядков на множестве T, причем $E(T)$ содержит ограничение на T каждого элемента множества $E(T')$ всякий раз, когда $T \subseteq T'$. Порядки на конечных подмножествах множества X, из которых отношение ρ получается посредством вышеупомянутого правила, составляют некоторое семейство ($E(T) \neq \emptyset$, так как множество T является ρ-изоморфным подмножеству множества Y той же самой мощности). Из леммы Цорна следует, что существует минимальное семейство E^*, содержащееся в E, такое, что $|E^*(T)| = 1$ для всех T, т. е. существует некоторый линейный порядок на всем множестве X, из которого получается отношение ρ. (Это утверждение принадлежит Б. Н. Нейману, но является также аналогичным лемме 1 Радо [36]. Оно может также быть выведено из теоремы компактности для первоупорядоченного исчисления предикатов.)

Теорема Ходжа, Лахлана и Шела [18] (независимо доказана также Хигманом) описывает соотношения, которые могут возникнуть в этой ситуации. В предположении транзитивности группы автоморфизмов любое такое отношение ρ получается из единственного отношения, являющегося либо линейным порядком, либо отношением «между», индуцированным линейным или циклическим порядком, либо отношением «разделения», индуцированным циклическим порядком. При отсутствии этого предположения могут возникать некоторые варианты первых двух возможностей.

Первое доказательство утверждает даже большее: существует функция f, такая, что если G является $f(r)$-однородной и r-транзитивной, но не $(r+1)$-транзитивной, то имеет место заключение теоремы (1.3.4). Есть также некоторые признаки положительного решения следующей проблемы:

Проблема 3. *Показать, что можно принять* $f(r)=r+2$.

Этот факт справедлив для $r=1$: 3-однородная, но не 2-транзитивная бесконечная группа сохраняет линейный порядок. Это было показано Макдермоттом [30]. По утверждению (1.2.2) такая группа является 2-однородной; поэтому если λ есть G-орбита при действии G на упорядоченных парах различных элементов, то для любых элементов x и y справедливо в точности одно из утверждений $(x, y)\in\lambda$, $x=y$, $(y, x)\in\lambda$. Возьмем точку x. По принципу Дирихле существуют различные элементы y и z, для которых либо (x, y), $(x, z)\in\lambda$, либо (y, x), $(z, x)\in\lambda$. В каждом случае, независимо от выполнения соотношения $(y, z)\in\lambda$, ограничение λ на $\{x, y, z\}$ является линейным порядком. Поскольку группа G является 3-однородной, то этот факт имеет место и для любого 3-множества, поэтому λ является линейным порядком.

Существенным фактом здесь является то, что аксиоматическое определение линейного порядка включает только три точки. Аналогичные результаты справедливы и для других соотношений в теореме (1.3.4). Таким образом, отношение «между» в линейном порядке и отношение циклического порядка являются тернарными отношениями, в определении которых участвуют четыре точки, в то время как отношение «разделения» в циклическом порядке является кватернарным отношением, в определении которого участвуют пять точек. Эти факты доказаны в «основаниях геометрии», поскольку отношения «между» и «разделения» являются естественными отношениями на прямых в действительных евклидовой и проективной плоскостях. См., например, работу [6] Борсука и Шмелева. Доказательства появились также у Камерона [9]. Все эти факты подтверждают вышеупомянутую гипотезу; используя их, Камерон проверил гипотезу для $r=2$.

Голланд [19] дал обзор свойств групп, действующих на упорядоченных множествах.

Следует заметить, что существует много примеров групп, которые являются t-транзитивными для всех целых чисел $t\geqslant 1$. Это, в частности, группа всех таких подстановок g множества X, что $|\operatorname{supp} g|<a$, где $\operatorname{supp} g=\{x\in X\colon g(x)=x\}$, (где a бесконечно и $a\leqslant|X|$; группа конечных четных подстановок; группы гомеоморфизмов многообразий, таких, как $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}P^n$, $S^n\,(n>1)$; свободные группы; определенные прямые пределы конечных симметрических групп. Такие группы не сохраняют нетривиальных конечных соотношений; предположительно их изучение потребует топологических методов.

1.4. s-транзитивность и g-транзитивность

Группа G называется *s-транзитивной* на множестве X, если для любых x, $y \in X$ существует единственная подстановка $g \in G$, переводящая x в y. Мы скажем, что G называется *$s - t$-транзитивной* (соответственно *$s - t$-однородной*), если она является s-транзитивной на множестве упорядоченных t-наборов различных элементов (соответственно на множестве неупорядоченных t-подмножеств). Всякая группа может быть представлена единственным способом как s-транзитивная группа подстановок; это теорема Кэли. С другой стороны, Жордан [21] показал:

(1.4.1) Конечная $s - t$-транзитивная группа подстановок, такая, что $t \geqslant 4$, является либо симметрической группой S_t или S_{t+1}, либо знакопеременной группой A_{t+2}, либо группой Матье M_{11} или M_{12} (причем $t = 4$ или 5 соответственно).

Следующий результат обобщен Титсом [42] (и далее Холлом [15]):

(1.4.2) Не существует никакой бесконечной $s - t$-транзитивной группы, такой, что $t \geqslant 4$.

Зассенхауз [51, 52] описал все конечные $s - 2$-транзитивные и $s - 3$-транзитивные группы. Важным инструментом здесь является простой частный случай теоремы Фробениуса [14], который показывает, что $s - 2$-транзитивная конечная группа является группой $\{x \longmapsto ax + b\colon a, b \in F, a \neq 0\}$ почти поля F. Для бесконечного случая было выполнено несколько работ, обычно при предположениях, гарантирующих получение такого же результата (см., например, [32], [42]).

Из теоремы Кантора (1.3.3) следует, что единственными конечными $s - t$-однородными группами являются $ASL(1, n)$, $n \equiv 3 \pmod 4$ для $t = 2$, а также $AGL(1, 8)$ и $A\Gamma L(1, 32)$ для $t = 3$. В бесконечном случае выполнено несколько работ при дополнительных предположениях, например [12].

Проблема 4. *Показать, что не существует никакой $s - t$-однородной бесконечной группы для $t \geqslant 3$.*

Группа подстановок G называется *g-транзитивной* на множестве X, если для любых двух различных точек x, $y \in X$ существует элемент $g \in G$, который переставляет x и y. Ясно, что это понятие является усилением транзитивности. Более общо, Нейман [34] называет группу G *$g - t$-транзитивной*, если стабилизатор любого $(t+1)$-множества индуцирует на нем полную симметрическую группу S_{t+1} или же, что эквивалентно, если каждая G-орбита при действии G на неупорядоченных

$(t+1)$-наборах соответствует единственной орбите при действии на упорядоченных $(t+1)$-наборах.

(1.4.3) (1) Группа является $(t+1)$-транзитивной тогда и только тогда, когда она является $(t+1)$-однородной и $g-t$-транзитивной.

(2) $g-t$-транзитивная группа является t-транзитивной.

Доказательство. (1) Очевидно.

(2) Наметим в общих чертах два доказательства. Первое проводится по индукции. Если группа G является $g-t$-транзитивной, то она является транзитивной и стабилизатор некоторой точки является $g-(t-1)$-транзитивным на остальных точках. (На самом деле, обратное утверждение также верно, поэтому понятие $g-t$-транзитивности является индуктивным в смысле разд. 1.1. Ясно, что любое индуктивное свойство $P(t)$ влечет за собой t-транзитивность.) Второе доказательство использует следующую лемму Вагнера [45].

(1.4.4) Если G — группа, в которой стабилизатор любого t-множества является транзитивным на нем (и $1 \leqslant t \leqslant |X|$), то группа G является $(t-1)$-однородной.

Доказательство. Любые два $(t-1)$-множества, пересечение которых имеет размер $t-2$, лежат в одной и той же орбите. Этот факт следует из связности.

Итак, если группа G является $g-t$-транзитивной, то она является t-однородной и $g-(t-1)$-транзитивной, поэтому по утверждению 1.4.3 (1) она является t-транзитивной.

Следуюшее простое достаточное условие является полезным для конечных групп.

(1.4.5) Если группа G является t-транзитивной и у стабилизатора t точек все его орбиты на оставшихся точках имеют разные размеры, то G является $g-t$-транзитивной.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что все орбиты упорядоченных $(t+1)$-наборов обладают разными размерами, тогда как орбиты, соответствующие одной и той же орбите на $(t+1)$-множествах, имеют один и тот же размер.

Соответствующее неупорядоченное понятие, g-транзитивность на множестве $X(t)$, является гораздо более сильным, чем представляется сначала. Прежде чем рассмотреть его, мы должны сделать некоторое отступление.

Говорят, что группа подстановок G на множестве X, где $|X| = 2k < \infty$, обладает *свойством обмена*, если для всякого разбиения множества X на два k-подмножества существует элемент группы G, переставляющий эти две части. Такие группы были изучены Камероном, Нейманом и Саксломом [11]. Существует несколько интересных примеров, которые включают группы Матье M_{12} и M_{24}, а также 3- и 4-мерные аффинные группы над $GF(2)$.

(1.4.6) Пусть G — группа подстановок на множестве X, причем $|X| = 2k$. Тогда группа G обладает свойством обмена в том и только том случае, когда для всех целых чисел t, $0 \leqslant t \leqslant k-1$, группа G имеет одинаковое число орбит при действии на $X(t)$ и на $X(t+1)$.

Доказательство, аналогично доказательству Ливингстона и Вагнера (1.2.1), использует теорию характеров; но комбинаторного аналога (в духе (1.2.4)) для него не известно. С этим, однако, тесно связано следующее замечание Хьюза [20]:

(1.4.7) Пусть $|X| = 2k$ и $D \subseteq X(k)$. Предположим, что множество D содержит дополнение каждого из его элементов. Если D является t-схемой для некоторого целого числа t, $0 \leqslant t \leqslant k-1$, то D является также и $(t+1)$-схемой.

Первым следствием (1.4.6) является тот факт, что группа G, обладающая свойством обмена, транзитивна. (Это легко доказать, и непосредственно.) Второе следствие может быть выведено из предложения (1.2.5), поскольку G имеет одинаковое число орбит на $X(2)$ и $X(3)$: группа G является либо импримитивной с двумя блоками размера k или k блоками размера 2, либо 3-однородной. (Импримитивность определяется в § 2.1.) Импримитивные группы могут быть полностью определены. Ясно, что разрешение проблемы 1 существенно помогло бы в решении следующей проблемы:

Проблема 5. *Найти все группы со свойством обмена.*

На этом отступление закончено.

(1.4.8) Предположим, что G является g-транзитивной на множестве $X(t)$ и $|X| \geqslant 2t$. Тогда

(1) группа G является $(2t-1)$-однородной и $(2t-2)$-транзитивной на множестве X;

(2) если $t \neq 3$ или 5, то стабилизатор $(2t-1)$-множества действует на нем как S_{2t-1} или A_{2t-1} (и, следовательно, группа G является «почти $(2t-1)$-транзитивной»).

Доказательство. Стабилизатор $2t$-множества обладает свойством обмена; из (1.4.4) следует, что группа G является $(2t-1)$-однородной. Стабилизатор $(2t-1)$-множества Y содержит элемент, который переставляет любые два t-подмножества множества Y, пересекающиеся в единственной точке. Вследствие связности группа G является $(t-1)$-однородной на Y. Итак, предложения (1.2.2) и (1.3.1) доказывают п. (2) утверждения, отсюда также может быть выведено и завершение доказательства (1).

Проблема 6. *Показать, что если X — бесконечное множество, то из g-транзитивности на $X(t)$ следует $(2t-1)$-транзитивность.*

2. ПРИМИТИВНОСТЬ

2.1. Введение

Примитивность (как и простота) обычно определяется от противного. Транзитивная группа G на множестве X называется *импримитивной*, если существует нетривиальное G-инвариантное отношение эквивалентности на множестве X, т. е. если множество X разбивается этим отношением по меньшей мере на два непересекающихся подмножества, из которых хотя бы в одном содержится более одного элемента. Такое разбиение называется *системой импримитивности*, а его члены — *блоками импримитивности* (или просто *блоками*). Блок может быть охарактеризован как некоторое подмножество множества X (кроме одноэлементных, пустого и самого множества X), которое либо совпадает, либо не пересекается со своими образами при действии подстановок из группы G. Группа, которая не является импримитивной, конечно, называется *примитивной*. Известно несколько других характеризаций примитивности (в настоящей работе они не будут использованы):

(1) транзитивная группа G на множестве X является примитивной тогда и только тогда, когда G_X — максимальная подгруппа группы G;

(2) транзитивная группа G на множестве X является примитивной тогда и только тогда, когда все ее графы орбит являются связными (в слабом смысле, т. е. без учета ориентаций, хотя если X — конечное множество, то это не имеет значения);

(3) для любой группы G простые объекты в категории G-пространств являются в точности примитивными G-пространствами и тривиальным двухточечным пространством.

Мы рассмотрим три обобщения примитивности. Во всех этих определениях группа G предполагается *t-транзитивной* на множестве X. Первые два понятия определяются по аналогии с понятиями из § 1.1.

Группа G называется *t-примитивной*, если стабилизатор $(t-1)$ точек является примитивным на оставшихся точках;

группа G называется *примитивной на t-множествах*, если она действует примитивно на множестве $X(t)$. Последнее определение принимает форму отрицания, отражая негативную форму понятия примитивности: группа G называется *t-примитивной по Штейнеру*, если она не является группой автоморфизмов системы Штейнера $S(t, k, n)$ на множестве X, где $1<k<n$. (*Системой Штейнера* ($S(t, k, n)$) называется такое семейство *блоков* или k-подмножеств n-множества X, что каждое t-подмножество множества X содержится в единственном блоке.)

Все три понятия при $t=1$ сводятся к понятию примитивности. (Система Штейнера $S(1, k, n)$ является просто некоторым разбиением множества X на k-подмножества.) Получаем два тривиальных следствия:

(2.1.1) Если G является t-примитивной либо примитивной на t-множествах, то группа G является t-примитивной по Штейнеру.

Доказательство. Пусть G сохраняет некоторую систему Штейнера $S(t, k, n)$ на множестве X, где $t<k<n$, B — блок этой системы, а $x_1, \ldots, x_{t1} \in B$. Тогда $B \setminus \{x_1, \ldots, x_{t-1}\}$ есть блок импримитивности для стабилизатора элементов $x_1, \ldots, x_{t-1}$, действующего на множестве $X \setminus \{x_1, \ldots, x_{t-1}\}$, в то время как $B(t)$ является некоторым блоком импримитивности для G, действующей на множестве $X(t)$.

Проблема 7. *Найти все исключения из оставшихся импликаций между этими тремя понятиями по крайней мере для конечных групп.*

Некоторая работа была проделана О'Нэном (не опубликовано), Аткинсоном [2] и Прегером [35] о 2-примитивных по Штейнеру, но не 2-примитивных группах. Помимо этого единственным известным результатом является утверждение (2.3.3); группы, встречающиеся в этой теореме, все являются t-примитивными, но не примитивными на t-множествах. Другими группами с этим свойством являются симплектические группы $\mathrm{Sp}(2n, 2)$ (в обоих 2-транзитивных представлениях) и группа $PSL(2, 11)$ для $t=2$ и $PSL(2, 2^a)$ (где (2^a-1) — простое число) для $t=3$. Группы Сузуки $Sz(q)$, $q>2$ являются примитивными на 2-множествах, но не являются 2-примитивными. Существуют также разрешимые группы, которые являются 2-примитивными по Штейнеру, но не являются ни 2-примитивными, ни примитивными на 2-множествах.

2-транзитивная группа не сохраняет никаких нетривиальных бинарных отношений и поэтому, конечно, является примитивной. Поскольку оба свойства являются индуктивными, то отсюда следует, что

(2.1.2) $(t+1)$-транзитивная группа является t-примитивной.

Основным результатом этой части является результат, аналогичный утверждению (2.3.3), состоящий в определении всех $(t+1)$-транзитивных групп, которые не являются примитивными на t-множествах. Покажем, что такая группа является группой автоморфизмов параллелизма множества $X(t)$. Предыдущий раздел является полностью комбинаторным; в нем показано, как теорема Ван Линта и Тьетавайнена [28] о бинарных совершенных кодах может быть использована для того, чтобы дать геометрическую характеризацию определенных параллелизмов. (Показано, что все параллелизмы в утверждении (2.3.3), кроме одного, получаются таким способом.) Комбинаторные результаты также использованы для того, чтобы охарактеризовать некоторые системы Штейнера и биплоскости (Интересно сравнить данную связь между биплоскостями и линейными бинарными кодами со связью, описанной Ассмусом [1].)

Понятие t-примитивности по Штейнеру естественным образом возникает при попытках обобщить «классические» теоремы о примитивных группах. Рассмотрим для примера теорему Жордана о примитивных группах, имеющих транзитивную подгруппу меньшей степени. Это приводит к проблеме определения всех систем Штейнера, группы автоморфизмов которых являются транзитивными на упорядоченных базисах. Эта проблема также тесно связана с предшествующим разд. 2.3. Наконец, мы опишем соотношение между примитивностью и g-транзитивностью, укажем приложения, принадлежащие Сакслу [39], показывающие, как эти идеи используются в специфической теоретико-групповой проблеме.

2.2. Применение теоремы о совершенных кодах

Параллелизмом множества $X(t)$ называется отношение эквивалентности, удовлетворяющее «аксиоме о параллельности» Евклида: для любых $x \in X$ и $Q \in X(t)$ существует единственный элемент $Q' \in X(t)$, для которого $x \in Q'$ и $Q' \parallel Q$. Иначе говоря, параллелизм является разбиением множества $X(t)$ на *классы параллельности*, каждый из которых разбивает множество X. Ясно, что для $|X| = n < \infty$ условие «t делит n» является необходимым для существования параллелизма множества $X(t)$. Бараньи [3] доказал, что это условие является также и достаточным. В его доказательстве используется теорема целостности для потоков в сетях. Детальное описание параллелизмов множества $X(t)$, включающее весь материал этого раздела, содержится в работе Камерона [10].

Говорят, что параллелизм множества $X(t)$ обладает *свойством параллелограмма*, если всякий раз, когда объединение двух различных параллельных t-подмножеств разбивается на две равные части, эти две части сами являются параллельными. Название взято по аналогии со случаем $t=2$: если ребра одной пары противоположных ребер четырехугольника параллельны, то параллельны ребра и другой пары.

Примером параллелизмов со свойством параллелограмма является обычная параллельность прямых в d-мерном аффинном пространстве над полем $GF(2)$ для всех $d \geqslant 1$. (Представляя точки элементами векторного пространства над $GF(2)$, получаем, что $\{x_1, x_2\} \parallel \{x_3, x_4\}$ тогда и только тогда, когда $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, откуда, очевидно, следует выполнение свойства параллелограмма.)

(2.2.1) Параллелизм множества $X(t)$, где $|X| = n < \infty$, со свойством параллелограмма бывает одним из следующих типов:

(1) тривиальный параллелизм с $t=1$ или $t=n$;

(2) отношение «совпадает или пересекается», где $n=2t$;

(3) аффинная параллельность прямых, где $t=2$, $n=2^d$;

(4) единственный пример, в котором $t=4$, $n=24$.

Доказательство. Можно предположить, что $t>1$. Построим реберно-раскрашенный граф, множество вершин которого есть

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{t-1} X(i) \cup Y,$$

где Y — множество классов параллельности. Каждой точке $x \in X$ сопоставим цвет $c(x)$. Соединим Q с $Q \cup \{x\}$ (или с классом параллельности, содержащим $Q \cup \{x\}$, если $|Q| = t-1$) ребром, раскрашенным в цвет $c(x)$, всякий раз, когда $|Q| < t$ и $x \notin Q$.

Определенный таким образом граф обладает тем свойством, что каждая вершина лежит на единственном ребре каждого цвета. (Это требуется исключительно определением параллелизма). Для $x \in X$ пусть $t(x)$ — (корректно определенная и не имеющая неподвижных точек) подстановка на множестве Ω, которая переставляет концы каждого ребра, раскрашенного в цвет $c(x)$. С использованием свойства параллелограмма может быть проверено, что $t(x)$ является *строгим автоморфизмом* раскрашенного графа (отображающим каждое ребро в ребро того же самого цвета). Теперь легко показать, что подстановка $t(x)$ порождает элементарную абелеву 2-группу T, s-транзитивную на Ω. Рассмотрим T как аддитивную группу векторного пространства над $GF(2)$ и запишем ее в аддитивном обозначении. Вследствие свойства s-транзитивности мы можем отождествить T с Ω таким способом, что множество $\{x_1, \ldots, x_i\}$ (или класс параллельности, содержащий его, если $i=t$) отождествляется с элементом $t(x_1)+\ldots+t(x_i)$, отображая $\emptyset$ в эту вершину.

В этом случае раскрашенный граф на Ω является *диаграммой Кэли* группы T относительно порождающего множества $\{t(x): x \in X\}$. Всякая диаграмма Кэли связана с представлением группы. Рассмотрим представление группы T как элементарной абелевой 2-группы и выясним, какие соотношения имеют место среди порождающих $t(x)$ помимо соотношений $t(x)+t(x)=0$ и $t(x)+t(x')=t(x')+t(x)$. Для описания этих соотношений рассмотрим векторное пространство V над полем $GF(2)$ с базисом $\{v(x): x \in X\}$ и гомоморфизм θ из V в T, отображающий $v(x)$ в $t(x)$ для всех x. «Сверхсоотношения» описываются ядром гомоморфизма θ.

(Двоичным) *кодом, исправляющим ошибки*, является множество n-строк из нулей и единиц, т. е. подмножество векторного пространства V над полем $GF(2)$ с фиксированным базисом. Код называется *линейным*, если это подмножество является подпространством. Декодирование линейного кода включает в себя вычисление гомоморфизма на факторпространство. Мы интерпретируем создавшееся положение, имея в виду это соотношение. Вычислим элемент $(v(x_1)+\ldots+v(x_i))\theta$, начиная с $\emptyset$ и следуя по пути с последовательностью цветов $c(x_1), \ldots, c(x_i)$; какая красочная и наглядная процедура декодирования!

Код называется совершенным, *исправляющим e ошибок*, если для любого слова v существует единственное кодовое слово, которое отличается от v самое большое в e позициях. Для заданного кода *расширенный код* получается добавлением дополнительной координаты, равной сумме всех других координат к каждому кодовому слову; эта координата называется *проверкой на четность*. Мы покажем, что $W=\ker(\theta)$ является расширенным совершенным кодом, исправляющим $(t-1)$ ошибок. Выберем $x \in X$ и пусть V' и W' получены запрещением координаты с индексом x. Мы должны показать, что W' является совершенным.

Для любого $v \in V$ рассмотрим вершины множества Ω, соответствующие $v\theta$. Это либо i-множество $\{x_1, \ldots, x_i\}$, где $i \leqslant t-1$, либо класс параллельности, содержащий единственный член $\{x, x_1, \ldots, x_{t-1}\}$, который включает в себя x. В обоих случаях $v'-(v(x_1)'+\ldots+v(x_i)') \in W'$ и $i \leqslant t-1$. Для доказательства единственности этого элемента кода W' достаточно показать, что ненулевой элемент кода W' имеет по крайней мере $2t-1$ записей, равных 1. Но элемент кода W соответствует замкнутому контуру без повторения цветов, начинающемуся с $\emptyset$ в графе. Такой контур имеет длину по крайней мере $2t$. Если его длина равна $2t$, то последовательность цветов является объединением двух параллельных t-множеств.

Теорема о совершенном коде ([41], [28]), в частности, утверждает, что линейный совершенный двоичный код, исправляющий e ошибок, является одним из следующих:

(1) тривиальный код (только нуль-вектор), причем $m=e$;

(2) запоминающий код (векторы, состоящие либо из одних 0, либо из одних единиц), где $m=2e+1$;

(3) двоичный код Хэмминга (порожденный характеристическими функциями прямых из $PG(d-1, 2)$), причем $e=1$, $m=2^d-1$;

(4) двоичный код Голея (порожденный характеристическими функциями сдвигов квадратичных вычетов по модулю 23 или блоков системы Штейнера $S(4, 7, 23)$), причем $e=3$, $m=23$. Отсюда следует наша теорема.

В заключение мы отметим несколько приложений и смежных результатов. Говорят, что система Штейнера $S(t, k, n)$ обладает *свойством симметрической разности* неудачно, если всякий раз, когда два блока имеют $\frac{1}{2}k$ общих точек, их симметрическая разность является блоком. Для того чтобы избежать рассмотрения тривиальных случаев, мы будем предполагать, что k — четное число и $k<2t$. Первый интересный случай возникает, когда $k=2t-2$, здесь мы имеем следующий результат (с некоторым изменением системы обозначений):

(2.2.2) Единственными нетривиальными системами Штейнера типа $S(t+1, 2t, n)$ со свойством симметрической разности являются системы плоскостей в аффинном d-пространстве над полем $GF(2)$ $(d\geqslant 3)$, а также единственная в своем роде система $S(5, 8, 24)$.

Доказательство. Назовем два t-подмножества параллельными, когда либо они равны, либо их объединение является некоторым блоком. То, что это является отношением эквивалентности, следует из свойства симметрической разности; что является параллелизмом — из определения системы Штейнера; выполнение свойства параллелограмма очевидно.

Проблема 8. *Найти все системы Штейнера $S(t, k, n)$, (такие, что k четно и $k<2t$) со свойством симметрической разности.*

Помимо (2.2.2) мало что известно. Например, если $t=5$ и $k=6$, то $n=12$ (и единственная система S (5, 6, 12) обладает свойством симметрической разности). Во всех других примерах должно быть $t \geqslant 7$ и $k \geqslant 10$. См. [8].

Существует эквивалентная геометрическая характеризация полученных систем $S(t, 2t-1, n-1)$ со свойством симметрической разности, напоминающая аксиомы Веблена — Юнга [43] для проективных геометрий (см. [10]).

Последнее приложение касается биплоскостей. (Сведения об обсуждаемых здесь биплоскостях можно найти в работе Ассмуса, Меццароба и Сальваха [1], а о связях с параллелизмами — в работе Камерона [10].) Нам понадобятся две специальные биплоскости: B (порядка 1) имеет в качестве блоков все 3-подмножества 4-множества, тогда как блок из B' (порядка 4) является симметрической разностью строки и столбца в таблице (4×4). Во всякой биплоскости три точки x, y, z блока X порождают B тогда и только тогда, когда «вторые блоки», порожденные при помощи xy, yz и zx, имеют общую точку w. Пусть биплоскость имеет блок X, такой, что любые три точки блока X порождают B. Назовем два 3-подмножества блока X параллельными, если «четвертые точки» порожденных ими биплоскостей равны. Это параллелизм множества $X(3)$, и он определяет биплоскость. Примерами биплоскостей с этим свойством являются B, B' и единственный пример порядка 7. Не известно, существуют ли какие-нибудь иные примеры. Однако при более строгих предположениях мы можем получить следующую характеризацию.

(2.2.3) Пусть биплоскость B^* имеет блок X (где $|x| \geqslant 4$), любые четыре точки которого порождают B'. Тогда $B^* = B'$.

Доказательство. Поскольку любые три точки блока из B' порождают B, мы имеем параллелизм множества $X(3)$, который обладает свойством параллелограмма (так как оно имеет место в B'). Далее применяем (2.2.1).

До сих пор везде предполагалось, что X конечно. На самом же деле все, кроме теоремы о совершенном коде, остается справедливым для бесконечных множеств X; поэтому линейные совершенные коды, параллелизмы со свойством параллелограмма, системы Штейнера $S(t+1, 2t, n)$ со свойством симметрической разности и (для $t=3$) биплоскости, удовлетворяющие предположениям (2.2.3), являются «эквивалентными» понятиями. Сколь угодно большие примеры, известные при $t=2$, строятся так же, как и в конечном случае, однако ничего неизвестно для $t > 2$.

Проблема 9. *Какие бесконечные примеры существуют?*

2.3. Группы автоморфизмов параллелизмов

Пусть G — группа автоморфизмов параллелизма множества $X(t)$, где $t > 1$ и $|X| = n > 2t$. Тогда для данных t точек $x_1, \ldots, x_t$ t-множества, параллельные $\{x_1, \ldots, x_t\}$, образуют систему импримитивности для стабилизатора точек $x_1, \ldots, x_t$; поэтому группа G не является $(t+1)$-примитивной и тем более по (2.1.2) не является $(t+2)$-транзитивной. Более того, если параллелизм обладает свойством параллелограмма, то группа G не является даже $(t+1)$-примитивной по Штейнеру. В этом разделе мы обсудим следующие две теоремы:

(2.3.1) Пусть параллелизм множества $X(t)$ (где X конечно) допускает $(t+1)$-транзитивную группу автоморфизмов. Тогда либо он обладает свойством параллелограмма, либо $t = 2$, $|X| = 6$.

(2.3.2) Пусть группа подстановок G на конечном множестве X является $(t+1)$-транзитивной, но не является примитивной на t-множествах. Тогда группа G является группой автоморфизмов некоторого параллелизма множества $X(t)$ и блок импримитивности является классом параллельности. Из (2.2.1), (2.3.1) и (2.3.2) получаем

(2.3.3) В предположениях теоремы (2.3.2) имеет место один из следующих случаев:

(1) $n = 2t$, $G = S_n$ или A_n;

(2) $t = 2$, $n = 2^d$, $G \leqslant AGL(d, 2)$;

(3) $t = 2$, $n = 6$, $G = PGL(2, 5)$;

(4) $t = 4$, $n = 24$, $G = M_{24}$.

В случае (2) группа G может быть собственной подгруппой в $AGL(d, 2)$; существует пример $G = V_{16}A_7$, где $d = 4$, объясняющийся изоморфизмом группы $GL(4, 2)$ и A_8. Несмотря на работы Вагнера [44], Д. Г. Хигмана (не опубликовано) и Кантора [25], проблема существования других примеров является открытой.

Исторически сложилось так, что теорема (2.3.1) была доказана раньше теоремы (2.3.2), хотя доказательство теоремы (2.3.2) требует детального знания групп, встречающихся в заключении теоремы (2.3.1). Однако для такого простого утверждения, как теорема (2.3.2), по-видимому, требуется прямое доказательство. Дальнейшая мотивировка для поиска такого доказательства вызвана следующими результатом и проблемой.

(2.3.4) $(t+1)$-примитивная группа является примитивной на t-множествах.

Проблема 10. *Найти бесконечные* $(t+1)$-*транзитивные группы, которые не являются примитивными на* t-*множествах, или по крайней мере подтвердить теорему* (2.3.2) *для бесконечного случая.*

Доказательство теоремы (2.3.1) является чисто техническим. Для $t=2$ оно может быть проведено следующим образом. Множество фиксированных точек стабилизатора H трех точек x, y, z является объединением 2-множеств, параллельных $\{x, y\}$, поэтому имеет четную мощность k. Если $k=4$, то имеет место свойство параллелограмма. Методы, разработанные Кантором (см. [26], глава 6), показывают, что если $k>4$, то $k=n$, т. е. G является s — 3-транзитивной (см. разд. 1.4). Из классификации таких групп получаем, что $n=6$. Доказательство в работе [10] более элементарно. Заметим, что единственный параллелизм в случае $t=2$, $n=6$ обладает группой автоморфизмов, действующей на точках как PGL (2,5), а на цветах как S_5.

Теорема (2.3.2) выводится из теоремы (2.3.1) индукцией по t. Предположим, что G является $(t+1)$-транзитивной на X, и пусть S — блок импримитивности в $X(t)$. Если любые два члена блока S являются непересекающимися, то S является классом параллельности. В противном случае пусть x — точка, содержащаяся в двух членах блока S, и пусть $S'=\{Q-\{x\} \mid x\in Q\in S\}$. S' является блоком импримитивности для G_x в $(X-\{x\})(t-1)$. По индукции он является классом параллельности, откуда S является множеством блоков системы Штейнера $S(2, t, n)$ на X. Более того, G является транзитивным расширением одной из групп утверждения (2.3.3). Так как S_{2t-1} и A_{2t-1} являются примитивными на t-множествах, а M_{24} не имеет транзитивного расширения, то $t=3$. Пусть H — стабилизатор четырех точек множества X и Z — множество его фиксированных точек. Тогда $N_G(H)$ является s — 4-транзитивной на множестве Z, поэтому $|Z|=4$, 5, 6 или 11 по утверждению (1.4.1). Если $x, y, z\in Z$ и $\{x, y, z\}\in S$, то H сохраняет систему троек Штейнера S и Z содержит подсистему, но не существует никакой системы троек Штейнера на 4, 5, 6 или 11 точках.

Применение случая $t=3$ связано с (2.2.3).

(2.3.5) Биплоскость с группой G автоморфизмов, фиксирующей некоторый блок X и 4-транзитивной на нем, является либо биплоскостью B', либо дополнением проективной плоскости над полем $GF(2)$.

Доказательство. Предположим, что $|X|=k>4$. Для x, y, $z\in X$ пусть $H=G_{xyz}$ и пусть B_{xy} — второй блок, порожденный x и y и т. д. Если $B_{xy}\cap B_{xz}=\{x, w\}$, то w фиксируется группой H, так как это — второй блок, порожденный y, w; но этот блок должен быть блоком B_{yz}, так как его пересечение с X поточечно фиксируется группой H. Таким образом, любые три точки множества X порождают биплоскость B. По замечаниям, предшествующим (2.2.3), группа G сохраняет параллелизм множества X (3); далее применяем (2.3.3).

Заметим между прочим, что никакая нетривиальная симметрическая схема с $\lambda > 2$ не может допускать группу, действующую 4-транзитивно на блоке (см. [26], разд. 8F).

2.4. Базисно-транзитивные системы Штейнера

Из трех понятий, введенных в разд. 2.1, t-примитивности специалисты в теории групп уделили наибольшее внимание. Это произошло потому, что обычным путем изучения группы подстановок является исследование стабилизатора точки; t-примитивность, подобно t-транзитивности, является индуктивным понятием. Однако может получиться и так, что t-примитивность по Штейнеру будет наиболее «естественным» понятием. Одним из соображений в пользу этого замечания является тот факт, что две классические теоремы Жордана [21] о примитивных группах могут быть расширены на группы, t-примитивные по Штейнеру.

Первая теорема утверждает, что если G примитивна на X и P является не тождественно действующей силовской p-подгруппой группы G_x, то P действует нетривиально на каждой G_x-орбите, отличной от $\{x\}$. Аналогичное утверждение имеет место для стабилизатора t точек в группе, t-примитивной по Штейнеру (см. Симс [40]).

Второе соображение связано с тем, что называют теперь группами Жордана. Если G является группой подстановок на конечном множестве X, то подмножество Y множества X, такое, что $|Y| > 1$ и $|X - Y| \geqslant 1$, называется *подмножествами Жордана*, если поточечный стабилизатор множества $X - Y$ является транзитивным на Y. Жорданово подмножество Y *нетривиально*, если группа G не является $(|X - Y| + 1)$-транзитивной. *Группой Жордана* называется группа, допускающая нетривиальное множество Жордана. Жордан показал, что примитивная группа Жордана является 2-транзитивной. (Заметим, что расширение на бесконечные группы требует топологических понятий: см. Виландт [47].) Более общо

(2.4.1) Группа Жордана, t-примитивная по Штейнеру, является $(t + 1)$-транзитивной.

Доказательство. Предположим, что группа Жордана G является t-транзитивной, но не $(t + 1)$-транзитивной. Можно показать, что любые два множества Жордана в $X \setminus \{x_1, \ldots, x_t\}$ имеют непустое пересечение, поэтому их объединение является множеством Жордана. Тогда множество $X \setminus \{x_1, \ldots, x_t\}$ содержит единственное максимальное множество Жордана Y. Сдвиги множества $B = X - Y$ являются блоками системы Штейнера на множестве X.

Базисом в системе Штейнера $S(t, k, n)$ называется упорядоченный $(t+1)$-набор, точки которого не содержатся в одном блоке. (За исключением условия упорядочения, это согласуется с определением из теории матроидов.) Система, допускающая группу, транзитивную на базисах, называется *базисно-транзитивной*. Доказательство утверждения (2.4.1) показывает, что группа Жордана действует на базисно-транзитивной системе Штейнера; поэтому следующая проблема обобщает проблему отыскания всех групп Жордана:

Проблема 11. *Найти все базисно-транзитивные системы Штейнера.*

Известные нетривиальные примеры являются системами точек и прямых в проективной или аффинной геометриях над полем $GF(q)$ (причем $q \neq 2$ для аффинных геометрий), точек и плоскостей в аффинных геометриях над $GF(2)$, а также это три замечательные системы $S(3, 6, 22)$, $S(4, 7, 23)$ и $S(5, 8, 24)$, обнаруженные Уиттом [49], [50].

Решение этой проблемы будет иметь несколько следствий помимо классификации групп Жордана. Например, базисно-транзитивный матроид приводит при геометризации и усечении к базисно-транзитивной системе Штейнера. Кроме того, следующий результат имеет отношение к утверждениям (2.3.2) и (2.3.4) и доказывается аналогично:

(2.4.2) Предположим, что G является $(t+1)$-транзитивной, но не является примитивной на t-множествах множества X. Тогда блок импримитивности в $X(t)$ является множеством блоков базисно-транзитивной системы Штейнера $S(s, t, n)$ для некоторого $s < t$.

Результат (2.3.2) утверждает, что для конечных множеств X мы имеем $s = 1$. Знание базисно-транзитивных систем Штейнера при $s \geqslant 2$ может помочь при получении альтернативного доказательства. Этот результат позволяет поставить несколько комбинаторных проблем:

Проблема 12. *Когда множество $X(t)$ можно разбить на системы Штейнера $S(s, t, n)$ некоторого частного вида (например, все изоморфные проективным или аффинным геометриям)?*

Проблема 13. *Пусть дано разбиение множества $X(t)$ на системы Штейнера $S(2, t, n)$, тогда для любого $x \in X$ мы имеем полученный параллелизм множества $(X-\{x\})(t-1)$. Какие есть связи между свойствами систем Штейнера, встречающимися в разбиении, и свойствами полученных параллелизмов?*

Мы проиллюстрируем эту проблему на примере.

(2.4.3) Для конечного множества X, такого, что $|X| = n > 3$, не существует никакого разбиения множества $X(3)$ на системы троек Штейнера, для которого все полученные параллелизмы обладают свойством параллелограмма.

Доказательство. (1) Из теоремы (2.2.1) получаем, что $n = 2^d+1$ для некоторого целого d.

(2) Будем писать $abc \sim def$, если эти два 3-множества относятся к одной и той же системе троек Штейнера. Если $1\,2\,3 \sim 1\,4\,5 \sim 2\,4\,6$, то $1\,3\,5 \sim 1\,2\,4 \sim 2\,3\,6$, поэтому $1\,2\,3 \sim 3\,5\,6$. Таким образом, каждая система троек Штейнера является проективной геометрией над полем $GF(2)$ [43] и $n = 2^e - 1$ для некоторого целого числа e.

Из пунктов (1) и (2) получаем требуемый результат. Остается открытым вопрос, имеет ли это место для бесконечных множеств. Заметим, что (2.3.2) и результат Кели о том, что $X(3)$ не может быть разбито в системы троек Штейнера, когда $|X| = 7$, обеспечивают проведение альтернативного рассуждения в утверждении (2.3.2).

В завершение этого раздела мы рассмотрим некоторые работы, выполненные в направлении решения проблемы 11.

(2.4.4) Система Штейнера $S(t, k, n)$ $(1 < t < k < n)$, допускающая базисно-транзитивную группу G, в которой стабилизатор t точек поточечно фиксирует содержащий их блок, является проективной геометрией над полем $GF(2)$ или аффинной геометрией.

Этот результат принадлежит Кантору ([22], см., также [26]). Холл [16] ранее исследовал случай $t=2$, $k=3$; в то же время из результата Нагао [31] следует, что случай $t > 3$ невозможен. Мы опишем в общих чертах доказательство Холла; доказательство Кантора является аналогичным. Рассматривая инволюции, Холл показал, что всегда существует подсистема S_7 (проективная плоскость над полем $GF(2)$) или подсистема S_9 (аффинная плоскость над полем $GF(3)$). По условию базисной транзитивности каждый базис лежит в такой подсистеме. В случае S_7 выполняются аксиомы Веблен — Юнга для проективной геометрии [43]. Существует лупа L, ассоциированная с любой системой троек Штейнера, являющаяся коммутативной и имеющая экспоненту 3. Если каждый базис лежит в S_9, то она является лупой Муфанг. Брук и Слэби (см. [7], стр. 157) показали, что такая лупа является центрально нильпотентной. Поскольку группа автоморфизмов лупы L является транзитивной на неединичных элементах, то каждый элемент лежит в центре и L является элементарной абелевой 3-группой.

Для обоснования следующего результата заметим, что группа G действует базисно-транзитивно на $S(t, k, n)$ тогда и только тогда, когда она транзитивна на точечно-блочных парах (x, B), где $x \notin B$, в то время как стабилизатор такой пары является t-транзитивным на B.

(2.4.5) Пусть G действует транзитивно на точечно-блочных парах (x, B), где $x \notin B$, системы Штейнера $S(t, k, n)$, где $2 < t < k < n$, и предположим, что стабилизатор такой пары является $(t+2)$-транзитивным на B. Тогда эта система является аффинной геометрией над полем $GF(2)$ или системой Витта.

Доказательство. Это достаточно доказать для случая $t=3$. Из предположения транзитивности вытекают следующие условия:

(1) если $(x_1, \ldots, x_4)$ — базис, то число пар $\{x_5, x_6\}$, для которых $\{x_1, x_2, x_5, x_6\}$ и $\{x_3, x_4, x_5, x_6\}$ являются подмножествами блоков, не зависит от выбора базиса $(x_1, \ldots, x_4)$;

(2) либо (а) из $|B_1 \cap B_2| = |B_1 \cap B_3| = 2$, $B_1 \cap B_2 \cap B_3 = \emptyset$ следует, что $|B_2 \cap B_3| \neq 1$ для любых трех блоков B_1, B_2, B_3, либо (б) из $|B_1 \cap B_2| = |B_1 \cap B_3| = 2$, $B_1 \cap B_2 \cap B_3 = \emptyset$ следует, что $|B_2 \cap B_3| \neq 2$ для любых трех блоков B_1, B_2, B_3.

Из условия (2) (а) следует (1), а также то, что система является *локально проективным пространством* в смысле Дуайена и Юбо [13]; из их результата следует, что система является аффинной или системой Витта (или $S(3, 12, 112)$, если она существует). Действительно, для $k=4$ условие (2) (а) является в точности свойством симметрической разности! Классификация может быть также проделана методами, использующими собственные значения, как в [8]. Случай (2) (б) исключается по теоретико-групповым соображениям; случай $k=5$ требует особого внимания. Комбинаторная проблема для систем, удовлетворяющих условиям (1) и (2) (б), до сих пор не решена; далее следует краткий обзор известных результатов (см. [8]).

Из условия (2) (б) для $S(3, k, n)$ следует, что $n \geqslant 2 + \frac{1}{2}(k-1)^2(k-2)$, причем равенство имеет место только для параметров $S(3, 5, 26)$, $S(3, 23, 5084)$ и $S(3, 105, 557026)$. Для каждого из этих случаев из (2) (б) следует (1). Если условия (1) и (2) (б) выполнены, то k является нечетным, а если

$k > 5$, то n ограничено сверху некоторой функцией от k. (Единственной возможной для $7 \leqslant k \leqslant 21$ системой является $S(3, 7, 2702)$.) Никаких подобных границ не известно для $k = 5$; однако из существования системы $S(3, 5, n)$, удовлетворяющей условиям (1) и (2) (б), следует существование биплоскости порядка $n-1$ с пустым полярным соответствием.

2.5. Еще о g-транзитивности

Мы видели в (1.4.1), что $g - t$-транзитивность «поднимает» $(t+1)$-однородность до полной $(t+1)$-транзитивности. Она выполняет аналогичную функцию и в отношении примитивности (Нейман [34]):

(2.5.1) $g - t$-транзитивная и t-примитивная по Штейнеру группа является t-примитивной.

Действительно, если G является $g - t$-транзитивной и B — любой блок импримитивности для стабилизатора точек $x_1, \ldots$ $\ldots, x_{t-1}$, то сдвиги множества $\{x_1, \ldots, x_{t-1}\} \cup B$ являются блоками системы Штейнера.

Мы завершаем изложение примером, показывающим, как эти понятия могут быть использованы в одной специфической проблеме. Это применение появилось в работе Саксла [39] о теореме Маннинга.

(2.5.2) Пусть G есть 4-транзитивная группа степени n, обладающая свойством, что стабилизатор четырех точек имеет в точности две орбиты на оставшихся точках, причем одну из них длины 3. Тогда $n = 23$, $G = M_{23}$.

Доказательство. Мы можем предположить, сверившись со списком Симса примитивных групп малой степени [40], что n является достаточно большим. Если $n > 10$, то G является $g - 4$-транзитивной по утверждению (1.4.5); если $n > 13$, то G не является 4-примитивной по теореме 2.1 (2) работы [40]. По утверждению (2.5.1) G является группой автоморфизмов системы Штейнера $S(4, 7, n)$ и ясно, что G является базисно-транзитивной. Так как 4-транзитивная группа степени 7 является симметрической или знакопеременной группой, то из утверждения (2.4.5) следует требуемый результат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Assmus E. F., Jr., Mezzaroba J. A., Salwach C. J. Planes and biplanes. Higher Combinatorics, D. Reidel Publishing Company, Amsterdam — Oxford — New York, 1978, 205—212.

2. Atkinson M. D. Doubly transitive but not doubly primitive permutation groups. I, J. London Math. Soc. (2), 7 (1974), 632—634 II, ibid (2), 10 (1975), 53—60
3. Baranyai Z. On the factorisation of the complete uniform hypergraph Proc. Erdos — Colloq., Keszthely, to appear
4. Beaumont R. A , Peterson R P., Set-transitive permutation groups Canad. J. Math., 7 (1955), 35—42.
5. Bercov R. D , Hobby C. R. Permutation groups on unordered sets, Math. Z., 115 (1970), 165—168.
6. Borsuk K., Szmielew W. «Foundations of Geometry». North—Holland Publ. Co , Amsterdam, 1960.
7. Bruck R H A Survey of Binary Systems. Springer — Verlag, Berlin — Gottingen — Heidelberg, 1958.
8. Cameron P. J. Two remarks on Steiner systems Geometriae Dedicata 4 (1975), 403—418
9. Cameron P J. Transitivity of permutation groups on unordered sets, Math. Z., 148 (1976), 127—139
10 Cameron P. J Parallelisms of Complete Designs London Math Soc Lecture Notes 23, Cambr Univ. Pr., Cambridge, 1976
11 Cameron P. J., Neumann P M., Saxl J Finite groups with an interchange property
12. Camion P Sharply two-homogeneous infinite permutation groups, Permutations (Actes du Colloq., Paris 1972), 49—55 Gauthier-Villars, Paris, 1974.
13 Doyen J., Hubaut X Finite regular locally projective spaces. Math. Z., 119 (1971), 83—88
14. Frobenius G Über primitive Gruppen des Grades n und der Klasse $n-1$, S B Akad Berlin (1902), 455—459
15. Hall M , Jr On a theorem of Jordan, Pacific J. Math., 4 (1954), 219—226
16. Hall M., Jr Group theory and block designs Proc. Intern. Conf. Theory of Groups (ed L. G. Kovacs and B. H Neumann), 113—144 Gordon and Breach, New York, 1967
17. Higman G. Homogeneous relations To appear
18 Hodges W A., Lachlan A H. Shelah S Possible orderings of an indiscernable sequence To appear.
19. Holland W. C. Ordered permutation groups. «Permutations» (Actes du Colloq., Paris 1972), 57—64. Gauthier—Villars, Paris, 1974
20. Hughes D R. Private communication.
21 Jordan C. Oeuvres (ed. J Dieudonné). Gauthier — Villars, Paris, 1961.
22 Kantor W. M. On 2-transitive groups in which the stabiliser of two points fixes additional points J. London Math. Soc. (2), 5 (1972), 114—122.
23. Kantor W. M. k-homogeneous groups Math. Z., 124 (1972), 261—265.
24. Kantor W. M. On incidence matrices of finite projective and affine spaces Math. Z., 124 (1972), 315—318.
25 Kantor W. M. On 2-transitive collineation groups of finite projective spaces. Pacific J Math , 48 (1973), 119—131.
26. Kantor W. M. 2-transitive designs. «Combinatorics» (ed. M. Hall Jr. and J. H. van Lint), 365—418 Reidel, Dordrecht, 1975.
27 Lehrer G. I. On incidence structures in finite classical groups. Math. Z, 147 (1976), 287—299.
28 van Lint J. H Recent results on perfect codes and related topics Combinatorics (ed. M. Hall Jr. and J H. van Lint), 163—183 Reidel, Dordrecht, 1975.
29 Livingstone D , Wagner A., Transitivity of finite permutation groups on unordered sets Math. Z , 90 (1965), 393—403.

30. McDermott J. P J. Lecture at Oxford. 1974.
31. Nagao H On multiply transitive groups IV. Osaka J. Math., 2 (1965), 327—341.
32 Neumann B. H On the commutativity of addition. J. London Math. Soc., 15 (1940), 203—208.
33 фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. Пер. с англ —М.: Наука, 1970.
34. Neumann P. M. Generosity and characters of multiply transitive permutation groups. Proc. London Math. Soc. (3), 31 (1975), 457—481.
35. Praeger C. E Doubly transitive permutation groups that are not doubly primitive. To appear
36. Rado R. Axiomatic treatment of rank in infinite sets, Canad. J. Math., 1 (1949), 337—343.
37 Ramsey F. P On a problem in formal logic. Proc. London Math. Soc. (2), 30 (1930), 264—286.
38. Ray-Chaudhuri D. K., Wilson R. M. On t-designs, Osaka J. Math., 12 (1975), 737—744
39. Saxl J. Lecture at Oxford, 1976.
40 Sims C. C. Computational methods in the study of permutation groups. Computational Problems in Abstract Algebra (ed. J. Leech), 169—183. Pergamon Press, London, 1970.
41. Tietäväinen A On the nonexistence of perfect codes over finite fields. SIAM J. Appl. Math , 24 (1973), 88—96.
42. Tits J Généralisations des groupes projectifs basée sur leurs propriétés de transitivité. Acad. Roy. Belgique Cl. Sci. Mem., 27 (1952).
43. Veblen O., Young J. W. Projective Geometry, Ginn and Go., Boston, 1916
44. Wagner A On collineation groups of finite projective spaces, I. Math. Z., 76 (1961), 411—426.
45. Wagner A. Normal subgroups of triply-transitive permutation groups of odd degree, Math. Z., 94 (1966), 219—222.
46. Wielandt H. Finite Permutation Groups, Acad. Press, New York-London; 1964.
47. Wielandt H. Endliche k-homogene Permutationsgruppen. Math. Z., 101 (1967), 142.
48. Wielandt H. Lecture at Oberwolfach, 1975.
49. Witt E. Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 12 (1938), 256—264.
50. Witt E. Über Steinersche Systeme. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 12 (1938), 265—275.
51. Zassenhaus H. Kennzeichnung endlicher linearer Gruppen als Permutationsgruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 11 (1935), 17—40.
52. Zassenhaus H Über endliche Fastkorper. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 11 (1935), 187—220.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ СТРУКТУР [1])

Р. Вилле

0. ВВЕДЕНИЕ

Последние несколько лет интерес к изучению конечных структур возрастал. Об этом свидетельствует огромное число статей в периодической печати, а также появление различных монографий, посвященных специальным темам, в частности работы Крапо и Рота [8], Райвела [35], Джонсона и Нейшина [23] и, разумеется, некоторые разделы книг Биркгофа [7], Кроули и Дилуорса [10]. Данную статью также можно отнести к этой области; в ней описан ряд вопросов теории конечных структур с алгебраической точки зрения в свете исследований, выполненных в основном членами Дармштадтской Высшей технической школы.

Мы сосредоточимся на двух аспектах теории конечных структур: арифметике и свойстве свободы. В первой части рассматривается обобщение арифметической теоремы Биркгофа о единственности представления элементов конечной дистрибутивной решетки в виде несократимого объединения. Особое внимание мы уделим восстановлению конечной структуры с помощью ее подмостей [2]) и приложениям этого конструктивного метода к арифметике полиномиальных функций на конечных структурах. Во второй части конечные структуры характеризуются как свободные замыкания частичных структур. Для специальных классов частичных структур (например, частично упорядоченных множеств) существуют описания тех из них, которые свободно порождают конечные структуры (по отношению к модулярному закону или другим соотношениям на структурах).

Нам хотелось бы особенно поблагодарить И. Райвела за многочисленные интересные и плодотворные обсуждения в процессе подготовки этой работы.

1. АРИФМЕТИКА

В теории конечных структур существует аналог фундаментальной теоремы арифметики (о представлении натурального числа в виде произведения простых), а именно:

---

[1]) Wille R. Aspects of finite lattices;

[2]) Автор использует термин «scaffolding». — *Прим. перев*

Теорема 0. *Каждый элемент в конечной структуре обладает неприводимым представлением в виде объединения (соответственно пересечения) $\bigcup$-неразложимых (соответственно $\bigcap$-неразложимых) элементов.*

Напомним, что элемент x в конечной структуре L называется $\bigcup$-*неразложимым* (соответственно $\bigcap$-*неразложимым*), если $x \neq 0$ (соответственно $x \neq 1$) и не существует никаких элементов y и z, отличных от x в L, таких, что $x = y \vee z$ (соответственно $x = y \wedge z$). Частично упорядоченное множество всех $\bigcup$-неразложимых (соответственно $\bigcap$-неразложимых) элементов структуры L обозначим $J(L)$ (соответственно $M(L)$). Множество X элементов структуры образует *неприводимое представление* его объединения (соответственно пересечения), если объединение (соответственно пересечение) каждого собственного подмножества X не совпадает с объединением (соответственно пересечением) множества X.

Хотя теорема 0 может быть легко проверена, она содержит фундаментальную идею для подпрямого разложения алгебр на подпрямо неразложимые множители (см. Биркгоф [5]). Эта идея может быть проиллюстрирована тем фактом, что алгебра с конечной структурой конгруэнтности является *подпрямо неразложимой* тогда и только тогда, когда их тождество является $\bigcap$-неразложимым отношением конгруэнтности. Обратно, теоремы о разложении в теории чисел и алгебре стимулировали поиски арифметических теорем в теории структур (см. Клейн [25]). Первый окончательный результат, который обеспечивает удовлетворительный анализ арифметики конечных дистрибутивных структур, дается следующей теоремой.

Теорема 1. (Биркгоф [4]). *Каждый элемент конечной дистрибутивной структуры L обладает единственным неприводимым представлением в виде объединения (соответственно пересечения) $\bigcup$-неразложимых (соответственно $\bigcap$-неразложимых) элементов; кроме того, структура L изоморфна структуре всех порядковых идеалов (соответственно порядковых фильтров) множества $J(L)$ (соответственно $M(L)$).*

Напомним, что подмножество X частично упорядоченного множества P называется *порядковым идеалом* (соответственно *порядковым фильтром*), если $y \in X$ всякий раз, когда $y \leqslant x$ (соответственно $y \geqslant x$) для некоторого $x \in X$. Очевидно, порядковые идеалы (соответственно порядковые фильтры) множества P образуют полную структуру $I(P)$ (соответственно $F(P)$).

В работе Дилуорса [13] показано, что конечные структуры, удовлетворяющие утверждению теоремы 1, не очень сильно отличаются от дистрибутивных структур. Поэтому дальнейшие обобщения теоремы 1 заставляют отступаться от единственности или накладывать ограничения на разложения на $\bigcup$-неразложимые (соответственно $\bigcap$-неразложимые) элементы. Широко известное обобщение, ослабляющее единственность, содержится в следующем результате.

Теорема 2 (Курош [26], Оре [32]). *Пусть L — модулярная структура. Если $a = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_m$ и $a = y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_n$ суть два неразложимых представления элемента a в L в виде объединения $\bigcup$-неразложимых элементов, то для каждого x_i существует y_j, такой, что $a = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_{i-1} \vee y_j \vee x_{i+1} \vee \ldots \vee x_m$ является также $\bigcup$-неразложимым представлением элемента a; в частности, получаем, что $m = n$.*

Класс структур, в котором выполняется утверждение, обратное утверждению теоремы 2, исследуется в работе Кроули [9]; опять-таки при этом конечная структура, удовлетворяющая утверждению теоремы 2, является близкой к модулярным структурам.

Для обобщения второй части теоремы 1 нам потребуется определение нормального пополнения частично упорядоченного множества P. Пусть $X^* := \{y \in P : y \geqslant x$ для всех $x \in X\}$ и пусть $X_* := \{y \in P : y \leqslant x$ для всех $x \in X\}$ для некоторого подмножества X частично упорядоченного множества P. *Нормальным пополнением* $N(P)$ частично упорядоченного множества P называется полная структура всех множеств $(X^*)_*$, таких, что $X \subseteq P$ (см. Кроули и Дилуорс [10], стр. 71).

Теорема 3 (Банашевский [1], Шмидт [39]). *Конечная структура L изоморфна нормальному пополнению частично упорядоченного множества $J(L) \cup M(L)$.*

Иные формулировки и приложения теоремы 3 можно найти в работах Марковского [28], [29], Уркхарта [49] и Келли [24].

Хотя теоремы 2 и 3 являются важными обобщениями теоремы 1, обе они утратили ее существенные части. Теорема 2 не указывает способ восстановления структуры по подструктуре рассматриваемых элементов по той причине, что здесь нет аналога сильной двойственности между конечными дистрибутивными структурами и конечными частично упорядоченными множествами (см. Пристли [33], [34]). Теорема 3 обеспечивает такую двойственность, однако арифметическое содержание теоремы 1 при этом не проявляется. Ниже мы рассматриваем дальнейшее обобщение теоремы 1, что может быть понято как попытка получить единственное $\bigcup$-представление специфическими элементами, равно как и восстановление структуры подструктурой этих элементов.

Как упоминалось выше, нам прежде всего нужно обобщить понятие $\bigcup$-неразложимых элементов в конечных структурах. Отправной точкой для этого обобщения является то, что элемент конечной структуры L является $\bigcup$-неразложимым тогда и только тогда, когда он покрывает в точности один элемент. Мы хотим обобщить этот случай на такие элементы, которые могут покрывать более одного элемента, однако эти покрываемые элементы являются «плотно» связанными вместе.

Элемент x конечной структуры L называется *поднеразложимым* (см. [56]), если $x \neq 0$ и существует пара элементов $a > b$ в L, такая, что для каждого элемента y, покрываемого элементом x, существуют $c_1, c_2, \ldots, c_{2n} \in L$, такие, что

$$(\ldots((((x \wedge c_1) \vee c_2) \wedge c_3) \vee c_4) \wedge \ldots c_{2n-1}) \vee c_{2n} = a$$

и

$$(\ldots((((y \wedge c_1) \vee c_2) \wedge c_3) \vee c_4) \wedge \ldots c_{2n-1}) \vee c_{2n} = b$$

(см. Шмидт [38], стр. 69). Очевидно, что любой $\bigcup$-неразложимый элемент x структуры L является поднеразложимым, так как если y является единственным элементом, покрывающим x, то можно выбрать $a := x$, $c_1 := x$, $b := y$, и $c_2 := y$. Для многих целей весьма полезной является следующая внешняя характеризация поднеразложимых элементов структуры L: элемент x структуры L является поднеразложимым тогда и только тогда, когда существует сюрьективный гомоморфизм φ из L на подпрямо неразложимую структуру, причем $x = \bigwedge \varphi^{-1}\varphi x$ (см. [56]). Множество всех поднеразложимых элементов L вместе с ограничением операции объединения на это множество образует частичную $\bigcup$-полуструктуру $G(L)$, которая называется *подмостями* структуры L. Напомним, что *частичная* $\bigcup$*-полуструктура* $(\underset{\sim}{S}, \underset{\sim}{\vee})$ определяется с помощью некоторой $\bigcup$-полуструктуры $(\tilde{S}, \vee)$, где $\underset{\sim}{S} \subseteq S$ и $x \underset{\sim}{\vee} y = z$ для $x, y, z \in \underset{\sim}{S}$, тогда и только тогда, когда $x \vee y = z$ (часто употребляют обозначение S вместо $(\underset{\sim}{S}, \underset{\sim}{\vee})$ и $\vee$ вместо $\underset{\sim}{\vee}$) (Гретцер [18], стр. 48). Очевидно, что сужение частичного порядка $(S, \vee)$ может быть определено на $\underset{\sim}{S}$ с помощью частичной операции $\underset{\sim}{\vee}$. Поэтому мы можем внутренним образом определить *идеал* X $(\underset{\sim}{S}, \underset{\sim}{\vee})$ как некоторое подмножество $\underset{\sim}{S}$, такое, что $z \in X$, как только $z \leqslant x$ или $z = x \underset{\sim}{\vee} y$ для некоторых $x, y \in X$. Структура всех идеалов $(\underset{\sim}{S}, \underset{\sim}{\vee})$ обозначается через $I(\underset{\sim}{S})$. Множество максимальных элементов идеала в $(\underset{\sim}{S}, \underset{\sim}{\vee})$ называется *замкнутым подмножеством* множества $\underset{\sim}{S}$. Легко заметить, что подмости конечной дистрибутивной структуры L есть в точности частично упорядоченное множество $J(L)$ и что замкнутые подмножества множества $J(L)$ являются антицепями множества $J(L)$ (см. [56]).

Прежде чем изложить общую теорему о представлении, проиллюстрируем введенные понятия на модулярной структуре $FM(3)$, свободно порожденной тремя элементами x, y и z ($FM(3)$ впервые была описана Дедекиндом [12]).

На рис. 1 поднеразложимые элементы обозначены большими кружками; $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ является единственным поднеразложимым элементом, который не является $\bigcup$-неразложимым; для проверки его поднеразложимости мы можем выбрать $a := (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$, $b := (x \wedge z) \vee (y \wedge a)$, $c_2 := b$

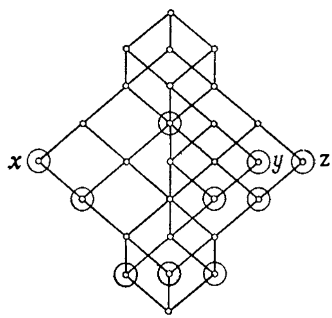


Рис. 1. Модулярная структура $FM(3)$.

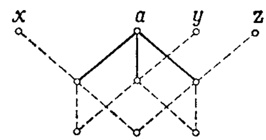


Рис. 2. Подмости $G(FM)(3))$ структуры $FM(3)$.

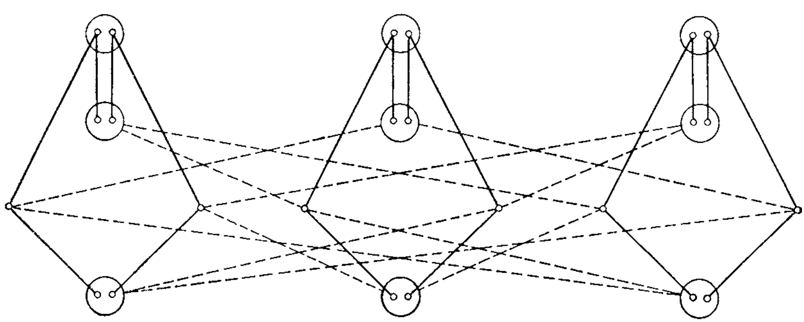


Рис. 3. Подмости $G(FN_5(3))$ структуры $FN_5(3)$.

и либо $c_1 := (x \wedge y) \vee (z \wedge a)$ для покрывающего элемента $(y \wedge z) \vee (x \wedge a)$, либо $c_1 := a$ для b, либо $c_1 := (y \wedge z) \vee (x \wedge a)$ для $(x \wedge y) \vee (z \wedge a)$. На рис. 2 частичный порядок $G(FM(3))$ описывается всеми линиями, где нетривиальные соединения обозначены линиями. Примером замкнутого подмножества из $G(FM(3))$ является $\{x, z, a\}$, но $\{x, z\}$ не являются замкнутым.

Теорема 4 (см. [56]). *Каждый элемент в конечной структуре L имеет единственное представление в виде объединения замкнутого множества поднеразложимых элементов; более того, L изоморфна структуре всех идеалов ее подмостей $G(L)$.*

Как и теорема 1 для конечных дистрибутивных структур, теорема 4 дает способ (редукцию) описания конечных структур и их арифметик, в особенности для тех, которые являются большими относительно их подпрямо неразложимых факторов. Эта редукция легко видна на структуре $FN_5(3)$ (рис. 4), свободно порожденной тремя элементами относительно соотношений на структуре, справедливых в 5-элементной немодулярной структуре N_5 (см. Ватерман [50]); мощности (кардинальные числа) этой структуры и ее подмостей есть $|FN_5(3)| = 99$ и $|G(FN_5(3))| = 15$ (см. [56]).

В качестве другого примера рассмотрим модулярную структуру $FM(\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathfrak{n})$, свободно порожденную двумя элементами e_1, e_2 и n-элементной цепью $e_3 < e_4 < \ldots < e_{n+2}$. Для $n = 5$ получаем $|FM(\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathbb{5})| = 12134$ и $|G(FM(\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathbb{5}))| = 82$ (см. [53], [56]). По этой причине показаны (см. рис. 5) лишь подмости структуры $FM(\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathfrak{n})$. То, как арифметические проблемы могут трактоваться с применением подмостей, демонстрируется на примере изучения запутанности «решетчатых» терминов, необходимых для описания элементов $FM(\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathfrak{n})$ через образующие. Очевидно, что $\bigcup$-неразложимые элементы конечной структуры в точности есть $\bigcup$-неразложимые элементы ее подмостей. Используя этот факт, легко проверить по рис. 5, что $\bigcup$-неразложимые элементы структуры $FM(\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathfrak{n})$ могут быть представлены в виде $e_i \wedge ((e_j \wedge e_k) \vee (e_j \wedge e_l))$ $(1 \leqslant i,\ j,\ k,\ l \leqslant n+2)$, что улучшает утверждение Шуценберже [41].

В работе с теоремой 4 желательно сделать свойство двойственности между конечными структурами и их подмостями более полезным. Прежде всего требуется характеризация подмостей как частичной $\bigcup$-полуструктуры (см. Шмидт [40]). Рассмотрим ниже подход Гантера, Погунтке и Вилле [16], который был модифицирован и обобщен на произвольные структуры добавлением топологических условий в работе Гирца и Кеймеля [17].

Существенным наблюдением является тот факт, что вследствие гомоморфизма φ из конечной структуры на подпрямо неразложимую структуру S получаем вложение $\underline{\varphi}$ $\bigcup$-полуструктуры $S^{\vee} := \{S \setminus \{0\}, \bigvee\}$ в подмости $G(L)$ по $\underline{\varphi} x := \bigwedge \varphi^{-1} x \times$ $\times (x \in S \setminus \{0\})$. Поэтому $G(L)$ является объединением U-полуструктур $\underline{\varphi} S^{\vee}$, называемых *компонентами* подмостей $G(L)$, где $S := L/\theta$ есть подпрямо неразложимый фактор и φ — канонический гомоморфизм из L на L/θ. Это служит причиной введения

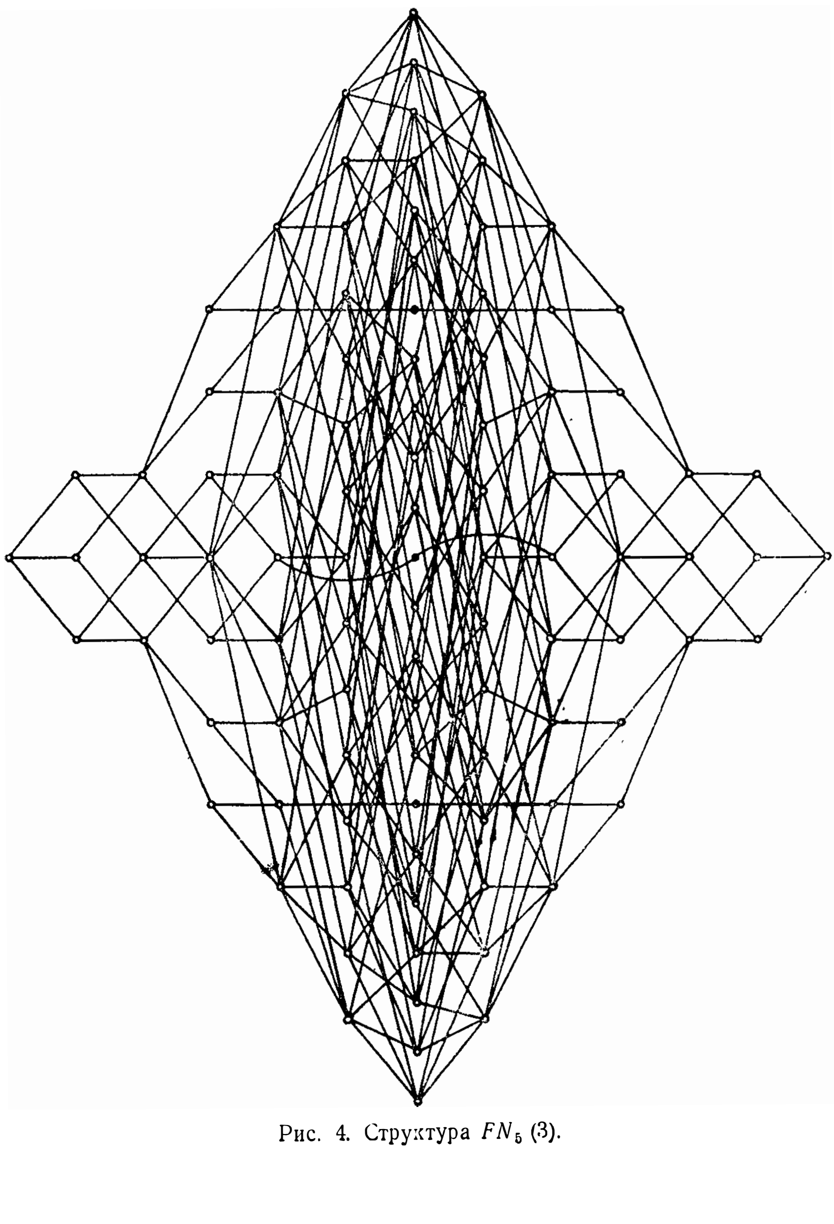


Рис. 4. Структура FN_5 (3).

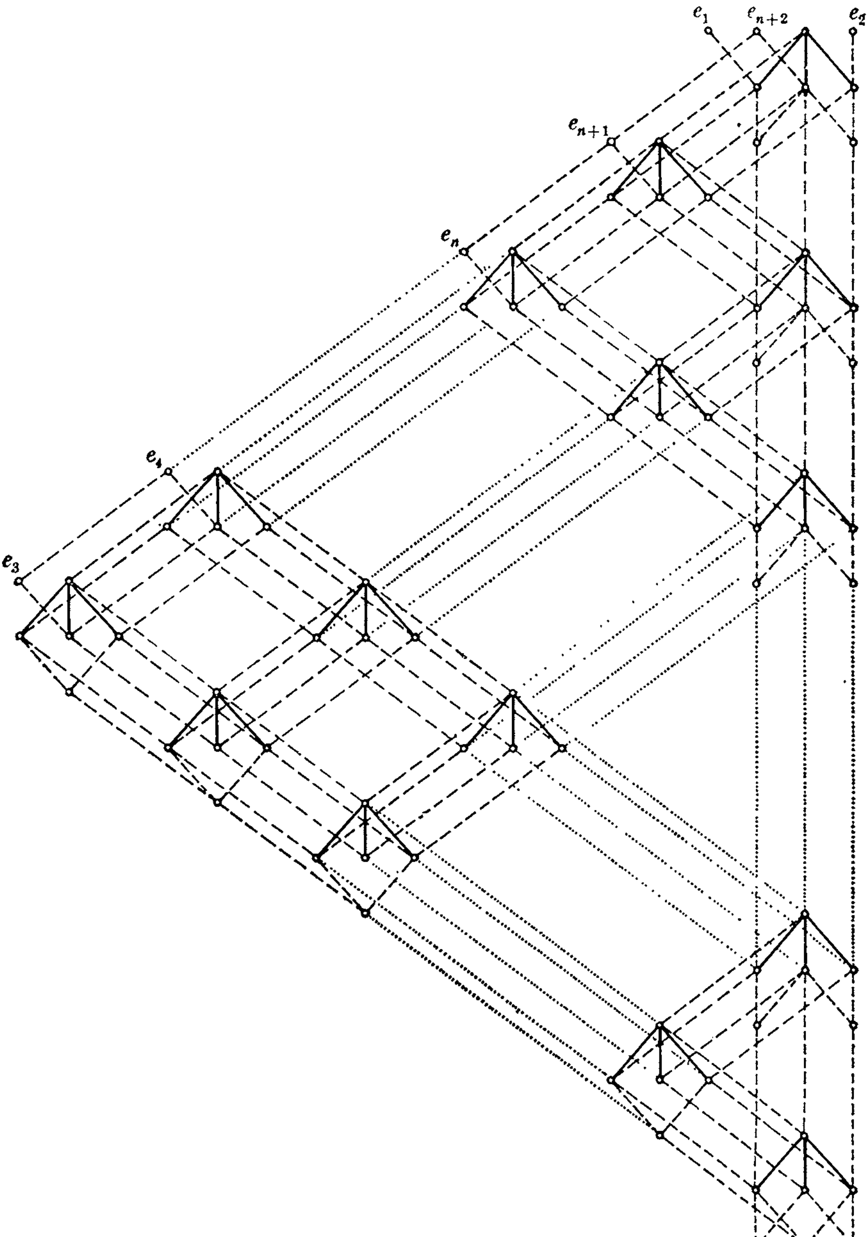


Рис. 5. Подмости $G(FM(\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathfrak{n})$ структуры $FM(\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathfrak{n})$.

следующего определения:

Частичной $\mathfrak{K}$*-полуструктурой с компонентами* $(L_i, \bigvee_i)$ $(i \in I)$ называется частичная $\bigcup$-полуструктура $(P, \bigvee)$, удовлетворяющая следующим условиям:

(1) $P = \bigcup_{i \in I} L_i$;

(2) $(L_i, \bigvee_i) \in \mathfrak{K}$ для всех $i \in I$, где $\mathfrak{K}$ есть класс $\bigcup$-полуструктур, замкнутый относительно построения изоморфных образов;

(3) $x \bigvee y = z$ для всех $x \neq z \neq y$ в $(P, \bigvee)$ тогда и только тогда, когда существуют $i \in I$ и $\underline{x}, \underline{y} \in L_i$, такие, что $\underline{x} \leqslant x \leqslant \leqslant z \geqslant y \geqslant \underline{y}$, $z \in L_i$ и $\underline{x} \bigvee_i \underline{y} = z$.

Теорема 5 (Гантер, Погунтке, Вилле [16]). *Пусть* γ — *изоморфно замкнутый класс подпрямо неразложимых конечных структур. Конечная частичная* $\bigcup$*-полуструктура* P *изоморфна подмостям некоторой конечной структуры* L*, такой, что* $L/\Theta \in \gamma$ *для всех* $\Theta \in M(\mathfrak{Z}(L))$ *(где* $\mathfrak{Z}(L)$ — *структура конгруэнтности структуры* L*) тогда и только тогда, когда* P — *частичная* $\{S^{\vee} : S \in \gamma\}$ — *полуструктура с компонентами* S_Θ $(\Theta \in M(\mathfrak{Z}L)))$*, причем существуют изоморфизмы* ξ_Θ: $S_\Theta \to (L/\Theta)^{\vee}$*, задающие* $\bigcup$*-сохраняющие отображения* α_Θ: $P \to L/\Theta$ *по* $\alpha_\Theta x := \bigvee \{\xi_\Theta y : y \in S_\Theta,\ y \leqslant x\}$ *для* $x \in P$ $(\Theta \in M(\mathfrak{Z}(L)))$.

Теорема 5 показывает, что частичная $\mathfrak{K}$-полуструктура является подмостями конечной структуры тогда и только тогда, когда объединение любых двух ее компонент является подмостями конечной структуры. Следующая теорема разъяснит, как эта характеризация может быть использована для описания всех подмостей конечных структур в особом эквационально[1]) определенном классе. Мы рассмотрим класс $\mathfrak{M}_3$, состоящий из всех тех структур, которые удовлетворяют всем соотношениям на структурах, справедливым в 5-элементной недистрибутивной модулярной структуре M_3. Класс $\mathfrak{M}_3$ является наименьшим эквационально определенным классом модулярных структур, собственно расширяющим класс $\mathfrak{G}$ всех дистрибутивных структур (см. Джонсон [22]); класс $\mathfrak{G}$ состоит из структур, удовлетворяющих всем соотношениям, имеющим место в двухэлементной структуре D_2 (см. Биркгофф [2], Стоун [44]).

Теорема 6 (Гантер, Погунтке, Вилле [16]). *Частичная* $\mathfrak{K}$*-полуструктура, имеющая не менее двух компонент, является подмостями некоторой конечной структуры в* $\mathfrak{M}_3$ *тогда и только тогда, когда объединение любых двух ее компонент описывается одной из следующих диаграмм:*

[1]) То есть заданным семейством соотношений. — *Прим. перев.*

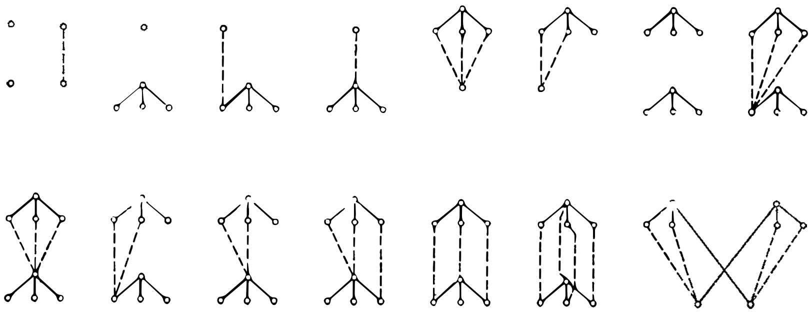


Рис. 6.

Наличие конструктивных методов построения подмостей конечного подпрямого произведения при помощи подмостей ее факторов делает понятие подмостей действительно плодотворным. Такие методы для более общей ситуации развиты в работе [56]. В случае конечных структур одним из основных вопросов является эффективное вычисление конечного подпрямого произведения, задаваемого факторами структуры и множеством ее образующих. Однако вследствие законов поглощения вычисление объединения и пересечения может быть чрезмерно избыточным. Избежать этого затруднения можно с помощью конструкции специфических элементов для $\bigcup$-представлений либо с помощью конструкции частичной $\bigcup$-полуструктуры, структура идеалов которой изоморфна подпрямому произведению.

n-структура — это пара (L, α), где L — структура, α — отображение из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на множество образующих структуры L. n-структура (L, α) называется *n-произведением* n-структур (L_i, α_i) $(i \in I)$, если L является подструктурой прямого произведения $\bigtimes_{i \in I} L_i$ и $\alpha k = (\alpha_i k : i \in I)$ для всех $k = \{1, 2, \ldots, n\}$ (см. [52]). Конечное n-произведение (L, α) может быть построено с помощью его факторов (L_i, α_i) $(i \in I)$ следующими двумя способами (см. [56]).

Конструкция I.

1. Определить наибольшие $\bigcup$-сохраняющие отображения $\alpha_{ij}\colon L_j \to L_i$, такие, что $\alpha_{ij}\alpha_j k \leqslant \alpha_i k$ для всех $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $(i, j \in I)$.

2. Образовать подмножество $G(\alpha_{ij} : i, j \in I) := \{(\alpha_{ij} x : i \in I)\colon j \in I \text{ и } x \in L_j\}$ произведения $\bigtimes_{i \in I} L_i$.

3. Вычислить (L, α), согласно $L = \{\bigvee A : A \subseteq G(\alpha_{ij}) : i, j \in I)\}$ и $\alpha k = (\alpha_i k : i \in I)$, для всех $k = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Конструкция II.

1. Определить наибольшие $\bigcup$-сохраняющие отображения $\alpha_{ij}\colon L_j \to L_i$, такие, что $\alpha_{ij}\alpha_j k \leqslant \alpha_i k$ для всех $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $(i, j \in I)$.

2. Образовать частичную U-полуструктуру $H(\alpha_{ij} : i, j \in I) := \left(\left(\bigcup_{i\in I} \{i\} \times L_i^{\vee}\right)/\Theta, \vee\right),$ где $(i, x)\,\Theta\,(j, y) \Leftrightarrow x \leqslant \alpha_{ij} y$, $y \leqslant \alpha_{ji} x$ и $\overline{(i, x)} \vee \overline{(j, y)} = \overline{(k, z)} \Leftrightarrow x \leqslant \alpha_{ik} z$, $y \leqslant \alpha_{jk} z$, $z = \alpha_{ki} x \vee_k \alpha_{kj} y$ для $i, j, k \in I$ и $x \in L_i^{\vee}$, $y \in L_j^{\vee}$, $z \in L_k^{\vee}$.

3. Вычислить (L, α), согласно $L \cong I(H(\alpha_{ij} : i, j \in I))$ и $\tilde{\alpha} k := \{\overline{(i, x)} : i \in I,\ x \in L_i^{\vee}$, такой, что $x \leqslant \alpha_i k\}$, для всех $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Конструкции I и II были использованы для определения конечных структур, свободно порожденных частичными структурами относительно определенных соотношений, таких, как $FN_5(3)$ или $FM(\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathfrak{n})$ (см. [53], [56]). В дальнейшем в качестве приложений иного типа мы обсудим, в какой степени эти построения могут помочь проанализировать арифметику полиномиальных функций на конечных структурах. Показывая, что каждое соотношение, справедливое в N_5, можно вывести согласно аксиомам структур и пяти другим специфическим соотношениям, справедливым в N_5, Маккензи [30] продемонстрировал те затруднения, которые могут возникнуть при простом синтактическом исследовании терминов структур. Такие затруднения могут указывать, что для общего изучения полиномиальных функций, являющихся функциями, описанными в терминах структур с константами из рассматриваемой структуры, предпочтителен более семантический подход (см. Лош и Нёбауер [27[1]).

Для структуры L (*унарные*) *полиномиальные функции* есть элементы подструктуры $Q(L)$, которая порождается с помощью тождественной функции и постоянных функций в структуре всех функций из L в самое себя. Описанные построения могут быть применены, чтобы определять полуструктуры $Q(L)$ конечной структуры L, поскольку существуют n-структуры $(Q(L), \alpha)$ и $(L, \alpha_x)\,(x \in L)$ с $n = |L| + 1$, такие, что $(Q(L), \alpha)$ является n-произведением n-структур $(L, \alpha_x)\,(x \in L)$. Это будет проиллюстрировано построением подструктуры $Q(N_5)$.

Сначала мы определим $\alpha\colon \{1, 2, \ldots, 6\} \to Q(N_5)$ таким способом, чтобы $\alpha 1$ являлась тождественной функцией, а $\alpha k\ (2 \leqslant k \leqslant 6)$ — постоянными функциями, причем $\alpha 2 < \alpha 4 < \alpha 6$ и $\alpha 2 < \alpha 3 < \alpha 5 < \alpha 6$. Для получения $(Q(N_5), \alpha)$ как 6-произведение 6-структур (N_5, α_x), отображение $\alpha_x\colon \{1, 2, \ldots, 6\} \to N_5\ (x \in N_5)$ должно быть определено следующим образом:

$\alpha_x 1 := x$ и $\alpha_x k := \alpha k x$ для $2 \leqslant k \leqslant 6$. Для обеих конструкций мы должны определить наибольшие $\bigcup$-сохраняющие отображения α_{xy}: $N_5 \to N_5$, такие, что $\alpha_{xy} y \leqslant x$ и $\alpha_{xy} z \leqslant z$ для всех $z \in N_5$ (x, $y \in N_5$). Очевидно, что α_{xy} является тождественной функцией при $y \leqslant x$. Отображения α_{xy}, такие, что $y \not\leqslant x$, описаны на диаграмме рис. 7, которая только указывает отображения $z \longmapsto \alpha_{xy} z$ для элементов z, для которых $\alpha_{xy} z \neq 0$ и $z = \bigwedge \alpha_{xy}^{-1} \alpha_{xy} z$.

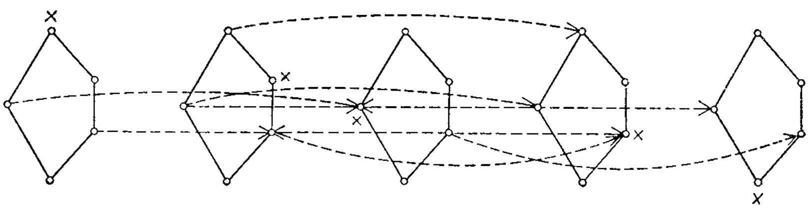


Рис. 7.

Продолжая конструкцию I, мы получим в качестве элементов множества $G(\alpha_{xy} : x,\ y \in N_5)$ $(= G(Q(N_5)))$ элементы

(33232), (33333), (42422), (44444), (53232), (53533), (55232), (55252), (55555), (63432), (63633), (66464) и (66666),

где элемент $(x_6 x_5 x_4 x_3 x_2)$ описывает функцию f, для которой $f\alpha k = a x_k$ для $2 \leqslant k \leqslant 6$. Если взять теперь объединение всех подмножеств множества $G(\alpha_{xy} : x,\ y \in N_5)$, то конструкция завершается 24 элементами полуструктуры $Q(N_5)$ (см. Дорнингер и Визенбауэр [15], теорема 6). В случае конструкции II мы должны образовать частичную полуструктуру $H(\alpha_{xy} : x,\ y \in N_5)$, которая описывается диаграммой на рис. 8. Наконец, структура идеалов полуструктуры $H(\alpha_{xy} : x,\ y \in N_5)$, изоморфная $Q(N_5)$, показана на рис. 9.

Метод построения полуструктуры $Q(N_5)$ указывает на общий способ характеризации арифметики полиномиальных функций на конечной структуре L. Определим α_{xy} как наибольшее $\bigcup$-сохраняющее отображение из L в L, такое, что $\alpha_{xy} y \leqslant x$ и $\alpha_{xy} z \leqslant z$ для всех $z \in L$ (x, $y \in L$). Для y, $z \in L$ определим f_y^x: $L \to L$ как $f_y^z x := \alpha_{xy} z$ для всех $x \in L$.

Теорема 7 [60, 61]. *Если L — конечная структура и y, $z \in L$, то f_y^z — полиномиальная функция на L; более того, $f = \bigvee \{f_y^z : y \in L$ и $fy = z\}$ для каждого $f \in Q(L)$.*

Теорема 7 может быть использована для характеризации конечных структур, которые богаты полиномиальными функциями. Структура L называется *порядковой полиномиально пол-*

ной, если каждая сохраняющая порядок функция из L в L является полиномиальной (см. Швайгерт [42]).

Теорема 8 [60]. *Конечная структура L является порядковой полиномиально полной тогда и только тогда, когда тождественная функция и постоянная функция в 0 являются единственными $\bigcup$-сохраняющими отображениями $\delta: L \to L$, такими, что $\delta x \leqslant x$ для всех $x \in L$.*

Из теоремы 8 и конструкции II мы получаем следующую характеризацию подмостей структуры $Q(L)$ для конечной полиномиально полной структуры L.

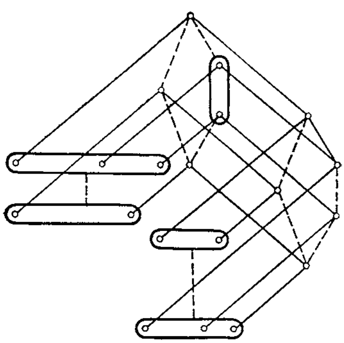


Рис. 8. Подмости $G(Q(N_5))$ полуструктуры $Q(N_5)$.

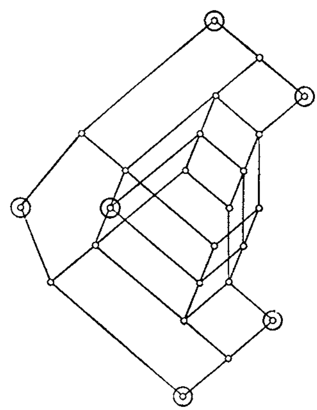


Рис. 9. Полуструктура $Q(N_5)$.

Теорема 9. *Пусть L — конечная полиномиально полная структура. Тогда подмости полуструктуры $Q(L)$ изоморфны частичной $\bigcup$-полуструктуре $(L \times L^{\vee}, \underset{\sim}{\vee})$, где $(x_1, x_2) \underset{\sim}{\vee} (y_1, y_2) = (z_1, z_2)$, тогда и только тогда, когда $x_1 = y_1 = z_1$, $x_2 \vee y_2 = z_2$, либо $x_1 \geqslant y_1 = z_1$, $x_2 \leqslant y_2 = z_2$, либо $y_1 \geqslant x_1 = z_1$, $y_2 \leqslant x_2 = z_2$.*

Из приведенной ниже теоремы, которая также является следствием теоремы 8, видно, что теорема 9 проливает свет, например, на арифметику полиномиальных функций на неприводимых конечных геометрических структурах.

Теорема 10 [60]. *Конечная структура L, наибольший элемент которой является объединением атомов, является порядковой полиномиально полной тогда и только тогда, когда L является простой.*

Этот раздел завершается результатом, показывающим, что структуры подпространств (неразложимых) конечных проективных геометрий являются (с точностью до изоморфизма) конечными модулярными структурами, богатыми полиномиальными функциями.

Теорема 11 [60]. *Конечная модулярная структура L является порядковой полиномиально полной тогда и только тогда, когда она является неразложимой и геометрической.*

2. СВОБОДНЫЕ КОНЕЧНЫЕ СТРУКТУРЫ[1)]

Группы и другие алгебраические структуры часто описываются множествами соотношений относительно определенных образующих. В данном разделе мы обсудим применение этого метода описания конечных структур.

Легко проверяется, например, что соотношения $b \vee c = c$ и $(a \vee b) \wedge c = b$ на образующих a, b и c задают структуру, изоморфную прямому произведению 2-элементной и 3-элементной цепей. Эта структура может быть представлена также как структура, свободно порожденная частичной структурой, которая

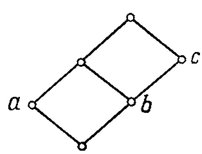


Рис. 10.

образована элементами a, b, c и $a \vee b$. Переход от соотношений к частичным структурам делает определяющие условия более наглядными и поэтому часто используется в теории структур. В общем случае множество соотношений относительно образующих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяет частичную структуру следующим образом: берется множество P элементов, описанных всеми подчленами соотношений в структуре $FL(n)$, свободно порожденной элементами $x_1, \ldots, x_n$, и P превращается в *частичную структуру* добавлением ограничений операций $\vee$ и $\wedge$ из $FL(n)$ (см. Гретцер [18], стр. 48). Эта частичная структура свободно порождает структуру, описанную данными соотношениями. Напомним, что структура $FL(P)$, *свободно порожденная* частичной структурой (с точностью до изоморфизма), характеризуется следующими условиями: $FL(P)$ порождается множеством P и для каждого гомоморфизма φ из P в некоторую структуру L существует гомоморфизм $\hat{\varphi}: FL(P) \to L$, расширяющий φ (см. Гретцер [18], разд. 5).

[1)] В оригинале раздел называется «Finiteness and freeness». — *Прим. перев.*

Рассмотрение метода описания структур с помощью свободного порождения мы начнем с тавтологического утверждения о том, что конечная структура свободно порождается конечной частичной структурой. Безусловно, любая конечная структура свободно порождается по крайней мере сама собой. Однако действительно интересная ситуация возникает тогда, когда существует большее различие между структурой и порождающей ее частичной структурой. В этом случае мы получаем эффективную редукцию в описании структуры как свободного замыкания частичной структуры. Ответ на вопрос, когда конечная структура может быть эффективно описана частичной структурой, можно получить, разрешив следующую проблему.

Проблема. *Для каких конечных частичных структур P структура $FL(P)$ конечна?*

Чем проще конструкция конечной частичной структуры P, тем больше разница между мощностями структур $FL(P)$ и P. Поэтому естественно начать с рассмотрения вполне неупорядоченных множеств, т. е. с рассмотрения свободных структур $FL(n)$. К сожалению, это не приближает нас к решению проб-

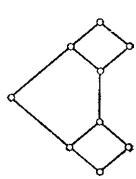


Рис. 11. Структура $FL(\mathbb{1}+\mathbb{2})$.

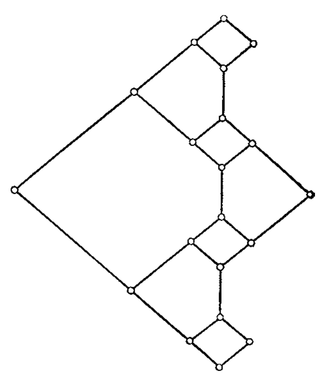


Рис. 12. Структура $FL(\mathbb{1}+\mathbb{3})$.

лемы, так как $|FL(1)|=1$, $|FL(2)|=4$ и $|FL(n)|=\aleph_0$ для всех $n\geqslant 3$ (см. Биркгоф [3]). Непересекающиеся объединения $\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2+\dots\mathfrak{n}_m$ цепей $C_1, C_2, \dots, C_m$, таких, что $(1\leqslant i\leqslant m)$, также не приближают нас к решению, поскольку $|FL(\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2+\dots$ $\dots+\mathfrak{n}_m)|=\aleph_0$, если $m\geqslant 3$ или $n_1\cdot n_2\geqslant 4$ (см. Соркин [43]). Диаграммы бесконечных структур $FL(\mathbb{1}+\mathbb{4})$ и $FL(\mathbb{2}+\mathbb{2})$ могут быть найдены у Рольфа [36]. Диаграммы 9-элементной структуры $FL(\mathbb{1}+\mathbb{2})$ и 20-элементной структуры $FL(\mathbb{1}+\mathbb{3})$ приведены соответственно на рис. 11 и 12 (см. Соркин [43]).

На следующем этапе будут исследованы конечные частично упорядоченные множества, рассматриваемые как частичные структуры, если положить, что $x\vee y=z$ тогда и только тогда, когда $x\leqslant y=z$ или $y\leqslant x=z$, и двойственным образом для

7 Заказ 570

операции $\wedge$. При обобщении упомянутых результатов Биркгофа и Соркина сформулированную проблему в случае конечных частично упорядоченных множеств разрешает следующая теорема.

Теорема 12 [59]. *Для конечного частично упорядоченного множества P следующие условия эквивалентны:*

(1) *$FL(P)$ является конечной;*

(2) *$FL(P)$ является подпрямым произведением структур, описанных диаграммами на рис* 13.

(3) *P не содержит изоморфных копий* $\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathbb{1}$, $\mathbb{1}+\mathbb{4}$ *и* $\mathbb{2}+\mathbb{2}$.

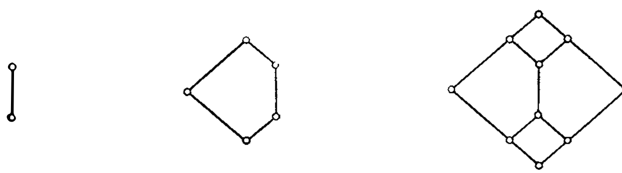
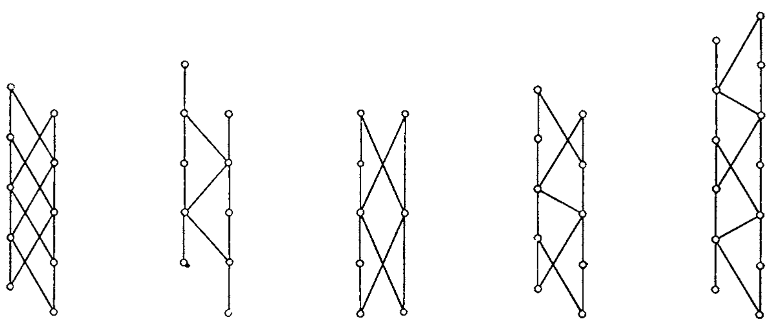


Рис. 13.

Условие (2) дает возможность определения конечных структур $FL(P)$ с помощью конструктивных методов, изложенных в первой части этой статьи. Сначала мы должны найти максимальное семейство гомоморфизмов $\alpha_i : P \to L_i$ $(i \in I)$, где L_i подпрямо неразложимый фактор структуры $FL(P)$ (описанный в (2)), такой, что $\alpha_i P$ порождает L_i и не существует изоморфизма $\psi : L_i \to L_j$ $(i \neq j)$, такого, что $\psi\alpha_i = \alpha_j$. Построим n-произведение (L, α) с факторами $(L_i, \tilde{\alpha}_i)$ $(i \in I)$ и $n = |P|$, где $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i v$ для фиксированной биекции $v : \{1, 2, \ldots, n\} \to P$. Итак, $FL(P)$ определена, поскольку $L \ncong FL(P)$. В работе [59] конечные структуры $FL(P)$ полностью описаны с помощью рекурсивной конструкции конечного частично упорядоченного множества P, удовлетворяющего условию (3). Вместо напоминания полного описания этих частично упорядоченных множеств, которые являются ординальными суммами ординально неразложимых частично упорядоченных множеств $P(n_1, n_2, \ldots$ $\ldots, n_m)$, на рис. 14 мы приведем некоторые примеры конечных частично упорядоченных множеств, удовлетворяющих условию (3).

Больше ничего не известно в настоящее время о нашей проблеме, помимо некоторых мелких изолированных результатов, которые более или менее общеизвестны. Для того чтобы получить еще один пример, заметим, что 8-элементная булева структура свободно порождается частичной структурой, образованной ее атомами и коатомами (см. Гретцер [18], лемма 5.9).

Для изучения свойств конечности и свободы в данном контексте существенным является то, что $FL(P)$ конечна тогда и только тогда, когда существует (с точностью до изоморфизма) только конечное число конечных подпрямо неразложимых структур, порожденных гомоморфным образом множества P, и не существует бесконечной подпрямо неразложимой структуры, порожденной гомоморфным образом множества P. В этом свете следующая модификация теоремы 12 может быть полезна для дальнейшего исследования структур, порожденных частичными структурами.



$P(8)$ $P(0,4)$ $P(2,1,2)$ $P(2,2,2)$ $P(1,2,2,1)$

Рис. 14.

Теорема 13 [58]. *Для конечного частично упорядоченного множества P следующие условия эквивалентны:*

(1) *Существует (с точностью до изоморфизма) только конечное число простых структур, порожденных гомоморфным образом множества P.*

(2) *1-элементная структура D_1, 2-элементная структура D_2 и 5-элементная структура M_3 являются (с точностью до изоморфизма) единственными простыми структурами, порожденными гомоморфным образом множества P.*

(3) *P не содержит изоморфной копии $\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathbb{1}$, $\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathbb{2}$ и $\mathbb{1}+\mathbb{K}_2$, где $\mathbb{1}+\mathbb{K}_2$ описывается с помощью следующей диаграммы:*

Следствие. *Простая структура, порожденная самое большее тремя элементами, изоморфна D_1, D_2 или M_3.*

Помимо других примеров мы получим бесконечные перечни неизоморфных конечных простых структур, порожденных изоморфными копиями «критических» частично упорядоченных множеств $\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathbb{1}$ и $\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathbb{2}$ с помощью следующего замечательного результата.

Теорема 14 (Штрайтц [45, 46]). *Структура всех разбиений n-элементного множества имеет подмножество образующих, изоморфное $\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathbb{1}$ для всех $n \geqslant 4$ и $\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathbb{2}$ для всех $n \geqslant 10$.*

Свободные замыкания частичных структур рассматриваются также в других эквационально определенных классах структур, иных, чем класс всех структур. Для эквационально определенного класса $\mathfrak{L}$-структур структура $F(P, \mathfrak{L})$, *$\mathfrak{L}$-свободно порожденная* частичной структурой P (с точностью до изоморфизма), характеризуется следующим условием: $F(P, \mathfrak{L})$ содержится в $\mathfrak{L}$, существует гомоморфизм из P на порождающее подмножество структуры $F(P, \mathfrak{L})$ и для каждого гомоморфизма φ из P в структуру L из класса $\mathfrak{L}$ существует гомоморфизм $\hat{\varphi}$: $F\times \times(P, \mathfrak{L}) \to L$, такой, что $\hat{\varphi}_\tau = \varphi$ (см. Гретцер [18], разд. 5).

Далее мы рассмотрим вопрос о том, какие конечные частичные структуры P имеют конечные $\mathfrak{L}$-свободные замыкания $F(P, \mathfrak{L})$ главным образом для класса $\mathfrak{M}$ всех модулярных структур. Обычно $F(P, \mathfrak{M})$ обозначается просто через $FM(P)$. Для вполне неупорядоченных множеств, т. е. для свободных модулярных структур $FM(n)$, мы имеем $|FM(1)| = 1$, $|FM(2)| = 2$, $|FM(3)| = 28$ и $|FM(n)| = \aleph_0$ для всех $n \geqslant 4$ по Дедекинду [12] и Биркгофу [2]. В ходе обобщений этих и других результатов Биркгофа ([6], стр. 72), Такеути [47], Тролла и Дункана [48], Шуценберже [41], Рольфа [37] и Вилле [53] получилась теорема, разрешающая вопрос о конечных $\mathfrak{M}$-свободных замыканиях $FM(P)$ для конечных частично упорядоченных множеств.

Теорема 15 [54]. *Для конечного частично упорядоченного множества P следующие условия эквивалентны:*

(1) *$FM(P)$ является конечной;*

(2) *$FM(P)$ является подпрямым произведением структур, изоморфных D_2 или M_3.*

(3) *P не содержит изоморфной копии $\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathbb{1}$ и $\mathbb{1}+ +\mathbb{2}+\mathbb{2}$.*

И снова условие (2) аналогично теореме 12 дает возможность применения конструктивных методов из первой части для определения конечных структур $FM(P)$. Это было очевидно еще при рассмотрении подмостей структуры $FM(\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathfrak{n})$. Поскольку конечные частично упорядоченные множества, удовлетворяющие условию 3, не охарактеризованы внутренним образом, мы можем только проиллюстрировать условие (3) некоторыми примерами (см. рис. 15).

Бесконечный список конечных простых модулярных структур, порожденных изоморфными копиями «критического» частично упорядоченного множества $\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathbb{1}$, мы получаем из следующего результата (примеры для $\mathbb{1}+\mathbb{2}+\mathbb{2}$ могут быть найдены в работе Херрмана, Киндермана и Вилле [20]).

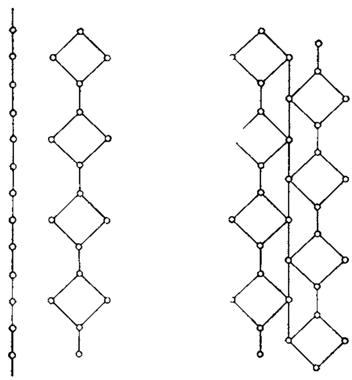
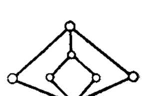


Рис. 15.

Теорема 16 (Херрман, Рингель и Вилле [21], Херрман [19]). *Структура всех подпространств n-мерной проективной геометрии над простым полем* ($2 \leqslant n < \infty$) *имеет порождающее подмножество, изоморфное* $\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathbb{1}+\mathbb{1}$.

Помимо дальнейших примеров (см. Херрман [19]) получен другой бесконечный список конечных простых модулярных структур с 4 образующими с помощью выбора интервалов $[e(n, n), 1]$ в $FM(J_1^4)$, который описан в следующей теореме; J_1^4 — частичная структура, образованная 0, 1, а атомы структуры описываются следующей диаграммой:



Тоерема 17 (Дей, Херрман, Вилле [11]). *Модулярная структура $FM(J_1^4)$ описывается следующей диаграммой* (рис. 16).

В доказательстве теоремы 15 существенной частью является установление импликации (3) $\Rightarrow$ (2). Это сделано с помощью следующих двух лемм (см. [53]).

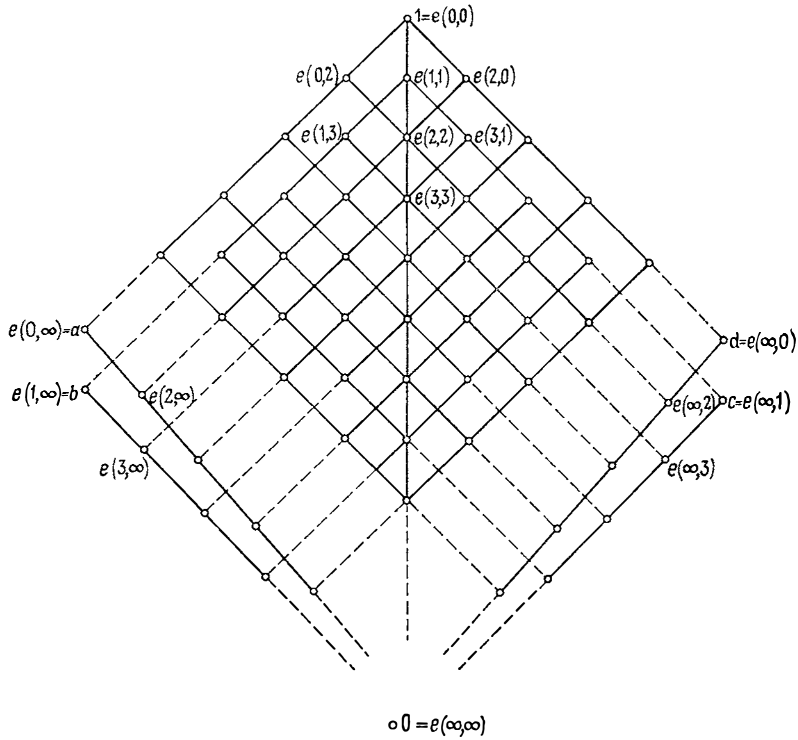


Рис. 16. Модулярная структура $FM(J_1^4)$.

D_2-лемма. *Пусть M — подпрямо неразложимая модулярная структура, порожденная конечным подмножеством $E_0 \cup E_1$. Тогда из $M \not\cong D_2$ следует, что $\bigvee E_0 \geqslant \bigwedge E_1$.*

M_3-лемма. *Пусть M — подпрямо неразложимая модулярная структура, порожденная конечным подмножеством $E_0 \cup E_2 \cup \cup E_3 \cup E_5 \cup E_1$ ($E_2, E_3, E_5 \neq \varnothing$); более того, пусть $\bar{e}_i := \bigvee \bigcup (E_j : i$ делит $j)$ и $\underline{e}_i := \bigwedge \bigcup (E_j : j$ делит $i)$ для $i = 2, 3, 5$. Тогда из $M \not\cong M_3$ следует, что*

$$(\bar{e}_2 \wedge \bar{e}_3) \vee (\bar{e}_2 \wedge \bar{e}_5) \vee (\bar{e}_3 \wedge \bar{e}_5) \geqslant (\underline{e}_2 \vee \underline{e}_3) \wedge (\underline{e}_2 \vee \underline{e}_5) \wedge (\underline{e}_3 \vee \underline{e}_5).$$

Чтобы показать, как использовать леммы, докажем, что $FM(P)$ является подпрямым произведением структур, изоморфных D_2 (т. е. $FM(P)$ дистрибутивна), если P является объединением двух цепей $a_1 \leqslant a_2 \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ (см. Биркгоф [6], стр. 72). Предположим, что φ — гомоморфизм из P на порождающее подмножество подпрямо неразложимого фактора M структуры $FM(P)$, такого, что $M \ncong D_2$. Если $E_0 := \{\varphi a_1\}$ и $E_1 := \varphi P \setminus E_0$, то по D_2-лемме получаем $\varphi a_1 \geqslant \geqslant \varphi a_2 \wedge \varphi b_1$; следовательно, $0 = \varphi a_1 \wedge \varphi b_1 = \varphi a_2 \wedge \varphi b_1$ и повторным применением D_2-леммы получаем $0 = a_2 \wedge \varphi b_1 = \varphi a_3 \wedge \varphi b_1 = \ldots \ldots = \varphi a_n \wedge \varphi b_1 = \varphi b_1$. Аналогичным образом отсюда следует, что $0 = \varphi b_2 = \ldots = \varphi b_n$ и также $0 = \varphi a_1 = \ldots = \varphi a_n$. Таким образом, мы получаем $|M| = 1$, что противоречит подпрямой неразложимости фактора M. Следовательно, каждый подпрямо неразложимый фактор структуры $FM(P)$ изоморфен D_2.

Леммы D_2 и M_3 могут быть также использованы для того, чтобы охарактеризовать конечные частичные модулярные структуры $L_0 + L_1 + \ldots + L_n$ с конечным $\mathfrak{M}$-свободным замыканием, где $L_0 + L_1 + \ldots + L_n$ есть непересекающее объединение конечных модулярных структур $(L_i, \vee_i, \wedge_i)$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, что означает, что $x \vee y = z$ в $L_0 + L_1 + \ldots + L_n$ тогда и только тогда, когда $x, y, z \in L_i$ для некоторого i и $x \vee_i y = z$ и аналогично для $\wedge$.

Теорема 18 [55]. *Для конечных модулярных структур L_0, $L_1, \ldots, L_n$ $(n \geqslant 1)$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *$FM(L_0 + L_1 + \ldots + L_n)$ является конечной;*

(2) *$FM(L_0 + L_1 + \ldots + L_n)$ является подпрямым произведением структур, изоморфных D_2 или M_3;*

(3) *с точностью до перестановок структур $L_0, L_1, \ldots, L_n$ либо*

а) *$n = 1$, $|L_0| = 1$, $L_1 \cong S$, где S — подструктура прямого произведения двух цепей;*
либо

б) *$n = 1$, L_0 — цепь, $L_1 = \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant k} [a_{i-1}, a_i]$, где $[a_{i-1}, a_i] \cong D_2$ или $D_2 \times D_2$;*
либо

в) *$n = 2$ $|L_0| = |L_1| = 1$, L_2 — цепь.*

Теорема 18, в частности, отвечает на вопрос Дорненгера [14] о конечных модулярных полиномиальных структурах над конечной дистрибутивной структурой. В качестве более изолированного результата для $\mathfrak{M}$ нам хотелось бы упомянуть о свободных модулярных структурах $FM({}_DM_3)$, которые являются конечными для любой конечной дистрибутивной структуры (см. Мицске и Вилле [31]).

В общем случае вопрос о конечных $\mathfrak{L}$-свободных замыканиях может быть рассмотрен только для класса всех структур и класса всех модулярных структур. Единственным исключением из этого является тот результат, что структура $F(P, \mathfrak{L})$ является конечной для любой конечной частичной структуры, если класс $\mathfrak{L}$ определяется множеством всех соотношений на структурах, справедливых в фиксированной конечной структуре (см. Биркгоф, [7], стр. 144; в [62] имеется незначительное обобщение для модулярных структур). Для такого класса $\mathfrak{L}$ главной проблемой относительно $F(P, \mathfrak{L})$ очень часто является вопрос о том, является ли инъективным гомоморфизм $\tau : P \to F(P, \mathfrak{L})$ (напр. [51], теор. 3.4). В работе [57] приведен пример, показывающий, насколько может быть интересным изучение $\mathfrak{L}$-свободных замыканий для некоторого специфического класса, где проблема существования для проективной плоскости порядка 10 сводится к вопросу, имеет ли определенное $\mathfrak{L}$-свободное замыкание более чем 16 элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Banaschewski B. Hüllensysteme und Erweiterungen von Quasi—Ordnungen. Z. Math. Logik Grundlagen Math., 2 (1956), 117—130.
2 Birkhoff G. On the combination of subalgebras. Proc. Cambridge Phil Soc., 29 (1933), 441—464.
3 Birkhoff G. On the structure of abstract algebras. Proc. Cambridge Phil. Soc., 31 (1935), 433—454.
4. Birkhoff G. Rings of sets. Duke Math. J., 3 (1937), 442—454.
5. Birkhoff G. Subdirect unions in universal algebras. Bull. Amer Math. Soc., 50 (1944), 764—768.
6. Birkhoff G. Lattice theory. 2nd ed. Providence, Amer. Math. Soc., 1948.
7. Birkhoff G. Lattice theory. 3rd ed. Providence: Amer. Math. Soc., 1967. (См. также Биркгоф. Теория структур. Пер. с нем.—М.: Наука, 1979.)
8. Crapo H. H., Rota G. C. On the foundations of combinatorial theory: Combinatorial geometries (preliminary edition). Cambridge—London: MIT Press, 1970.
9 Crawley P. Decomposition theory of nonsemimodular lattices. Trans Amer. Math. Soc., 99 (1961), 246—254.
10 Crawley P., Dilworth R. P. Algebraic theory of lattices. Englewood Cliffs: Prentice Hall 1973.
11. Day A., Herrmann C., Wille R. On modular lattices with four generators. Alg. Universalis, 2 (1972), 317—323.
12 Dedekind R. Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe. Math. Ann., 53 (1900), 371—403
13. Dilworth R P. Lattices with unique irreducible decompositions, Ann. Math., 41 (1940), 771—777.
14. Dorninger D. Modulare Polynomverbände über endlichen distributiven Verbänden. Monatsch. Math., 78 (1974), 305—310.
15. Dorninger D., Wiesenbauer J. Anzahlsätze für Polynomfunktionen auf Verbänden. Preprint.
16. Ganter B., Poguntke W., Wille R. Finite sublattices of fourgenerated modular lattices. Preprint.
17. Gierz G., Keimel K. Topologische Darstellung von Verbänden. Math. Z., 150 (1976), 83—99.
18. Grätzer G. Lattice theory: First concepts and distributive lattices. San Francisco: Freeman, 1971.
19. Herrmann C. On the equational theory of submodule lattices. In Proc. Lattice Theory Conf. Houston 1973, pp. 105—118.
20 Herrmann C., Kindermann M., Wille R On modular lattices generated by 1+2+2. Alg. Universalis, 5 (1975), 243—251

21. Herrmann C., Ringel C. M., Wille R. On modular lattices with four generators. Not. Amer. Math. Soc., 20 (1973), A—418; 73T—A151.
22. Jónsson B. Algebras whose congruence lattices are distributive. Math. Scand , 21 (1967), 110—121.
23. Jónsson B , Nation J. B. A report on sublattices of a free lattice. In: Contributions to Universal Algebra. Szeged: J. Bolyai Mat Soc (to appear)
24. Kelly D. The 3-irreducible partially ordered sets. Canad. J. Math. (submitted).
25. Klein F. Über einen Zerlegungssatz in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen Math. Ann., 106 (1932), 114—130.
26. Kurosch A. Durchschittsdarstellungen mit irreduziblen Komponenten in Ringen u. sogen. Dualgruppen. Матем сб. 42 (1935), 613—116.
27. Lausch H , Nöbauer W. Algebra of polynomials. Amsterdam — London: North-Holland, 1973
28 Markowsky G. Combinatorial aspects of lattice theory with applications to the enumeration of free distributive lattices. Ph. D. Thesis, Harvard University, 1973
29 Markowsky G. Some combinatorial aspects of lattice theory. In: Proc. Lattice Theory Conf. Houston, 1973, pp. 36—68.
30 McKenzie R. Equational bases and non-modular lattice varieties. Trans. Amer Math. Soc., 174 (1972), 1—43.
31 Mitschke A., Wille R. Freie modulare Verbände $FM\ ({}_DM_3)$ In: Proc Lattice Theory Conf. Houston, 1973, pp. 383—396.
32. Ore O. On the foundation of abstract algebra II. Ann. Math. 37 (1936), 265—292.
33. Priestley H. A. Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces. Bull London Math. Soc , 2 (1970), 186—190.
34. Priestley H. A. Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices. Proc London Math Soc. III, Ser. 24 (1972), 507—530.
35. Rival I. Contributions to combinatorial lattice theory Ph. D. Thesis, Winnipeg, 1973.
36. Rolf H. L. The free lattice generated by a set of chains. Pacific J. Math., 8 (1958), 585—595.
37 Rolf H. L. The free modular lattice, $FM\ (2+2+2)$, is infinite. Proc. Amer. Math Soc., 17 (1966), 960—961.
38 Schmidt E. T. Kongruenzrelationen algebraischer Strukturen. Math Forschungsber. 25, Berlin: VEB Dt. Verlag d. Wiss., 1969.
39 Schmidt J. Zur Kennzeichnung der Dedekind — MacNeillschen Hülle einer geordneten Menge Arch Math , 7 (1956), 241 — 249.
40 Schmidt J Boolean duality extended. In: Theory of sets and topology. A collection of papers in honour of Felix Hausdorff. Berlin: VEB Dt. Verlag d Wiss 1972, pp 435—453.
41 Schützenberger M. P Construction du treillis modulaire engendré par deux éléments et une chaîne finite discrète. C. R. Acad. Sci. Paris 235 (1952), 926—928
42 Schweigert D Über endliche ordnungspolynomvollständige Verbände. Monatsh. Math 78 (1974), 68—76.
43 Соркин Ю. И. Свободные объединения структур. Матем. сб., 30 (72) (1952), 677—699.
44 Stone M. H. The theory of representations of Boolean algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 122 (1936), 379—398.
45 Strietz H. Finite partition lattices are four-generated, In: Proc. Lattice Theory Conf Ulm 1975, 257—259
46 Strietz H. Über Erzeugendensysteme endlicher Partitionsverbände, Preprint.

47 Takeuchi K On free modular lattices II. Tôhoku Math J., 11 (1959), 1—12.
48 Thrall R. M., Duncan D. G. Note on free modular lattices. Amer. J. Math., 75 (1953), 627—632.
49 Urquhart A. A topological representation theory for lattices. Preprint.
50 Waterman A. G. The free lattice with 3 generators over N_5. Port Math., 26 (1967), 285—288.
51 Wille R. Primitive Länge und primitive Weite bei modularen Verbänden. Math. Z., 108 (1969), 129—136.
52. Wille R. Subdirekte Produkte und konjunkte Summen. J. reine angew. Math., 239/240 (1970), 333—338.
53. Wille R. On free modular lattices generated by finite chains. Alg. Universalis 3 (1973), 131—138.
54 Wille R. Über modulare Verbände, die von einer endlichen halbgeordneten Menge frei erzeugt werden. Math. Z., 131 (1973) 241—249.
55 Wille R. Über freie Produkte endlicher modularer Verbände. Abh. Math Sem Hamburg 45 (1976), 218—224.
56. Wille R. Subdirekte Produkte vollständiger Verbände. J. reine angew. Math 283/284 (1976), 53—70.
57. Wille R Finite projective planes and equational classes of modular lattices In: Atti Conv Geom. Comb. Roma 1973 (to appear)
58 Wille R. A note on simple lattices. In: Contributions to Lattice Theory. Szeged: J Bolyai Mat. Soc. (to appear).
59. Wille R. On lattices freely generated by finite partially ordered sets. In: Contribution to Universal Algebra. Szeged: J. Bolyai Mat. Soc. (to appear).
60. Wille R. Eine Charakterisierung endlicher, ordnungspolynomvollständiger Verbände. Arch. Math. (to appear).
61. Wille R. A note on algebraic operations and algebraic functions of finite lattices. Preprint.
62. Wille R. Jeder endlich erzeugte, modulare Verband endlicher Weite ist endlich. Math. cas. 24 (1974), 77—80.

КОМПЛЕКСЫ КОЭНА — МАКОЛЕЯ[1]

Ричард П. Стенли

1. СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ

Пусть Δ — конечный симплициальный комплекс (для краткости *комплекс*) на множестве вершин $V=\{x_1, \ldots, x_n\}$. Таким образом, Δ является семейством подмножеств множества V, удовлетворяющим следующим двум условиям:

(1) $\{x_i\} \in \Delta$ для всех $x_i \in V$;

(2) если $F \in \Delta$ и $G \subset F$, то $G \in \Delta$.

Существует некоторое коммутативное кольцо A_Δ, которое близко связано с комбинаторными и топологическими свойствами комплекса Δ. Мы обсудим эту связь в частном случае, когда A_Δ является кольцом Коэна — Маколея. За недостатком места мы не сможем привести большинство доказательств и прокомментировать ряд интересных дополнительных аспектов проблемы. Однако планируется издание значительно расширенного варианта настоящей статьи.

Пусть Δ — некоторый комплекс (т. е. конечный симплициальный комплекс). Если $F \in \Delta$, то назовем F *гранью* комплекса Δ. Если F имеет $i+1$ элементов (обозначение: $\operatorname{card} F = i+1$), то скажем, что $\dim F = i$. Пусть $d=\delta+1=\max\{\operatorname{card} F \mid F \in \Delta\}$. Тогда записываем, что $\dim \Delta = \delta = d-1$. Если каждая максимальная грань комплекса Δ имеет размерность δ, то Δ называется *чистым* (или, как говорят топологи, *однородным*). Пусть f_i — число i-мерных граней комплекса Δ. Таким образом, $f_0=n$. Вектор $f=(f_0, f_1, \ldots, f_\delta)$ называется *f-вектором* комплекса Δ. Теперь определим функцию на неотрицательных целых числах, полагая

$$H(\Delta, m)=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad m=0; \\ \sum\limits_{i=0}^{\delta} f_i \binom{m-1}{i}, & \text{если} \quad m>0. \end{cases} \tag{1}$$

Определим целые числа h_i посредством следующего соотношения:

$$(1-\lambda)^d \sum_{m=0}^{\infty} H(\Delta, m)\lambda^m = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \lambda^i. \tag{2}$$

[1] Stanley Richard P. Cohen — Macaulay Complexes

Легко заметить, что если $i > d$, то $h_i = 0$. Вектор $h = (h_0, h_i, \ldots, h_d)$ называется *h-вектором* комплекса Δ. Знание f-вектора комплекса Δ эквивалентно знанию h-вектора.

Обозначим через $|\Delta|$ основное топологическое пространство комплекса Δ, как это определяется в топологии. Запись $\Delta = \langle abc, acd, bcd, bde \rangle$ означает, что у комплекса Δ грани $\{a, b, c\}$, $\{a, c, d\}$ $\{b, c, d\}$ и $\{b, d, e\}$ являются максимальными. Для этого комплекса Δ f-вектор равен (5, 8, 4), h-вектор — (1, 2, 1, 0), $|\Delta|$ является 2-клеткой.

Пусть k — раз и навсегда фиксированное поле. Все группы гомологий, рассматриваемые в настоящей работе, берутся над полем коэффициентов k. Пусть $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов над полем k, переменные которого суть вершины комплекса Δ. Пусть I_Δ — идеал кольца A, порожденный всеми свободными от квадратов одночленами $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_j}$, такими, что $\{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_j}\} \notin \Delta$. Например, если $\Delta = \langle abc, acd, bcd, bde \rangle$, то $I_\Delta = (ae, ce, abd)$. (Нам надо всего лишь включить *минимальные* «не грани» комплекса Δ как множество образующих для I_Δ, поскольку I_Δ является идеалом.) Пусть $A_\Delta = A/I_\Delta$. Это кольцо впервые рассматривалось М. Хохстером (который предложил исследовать его своему студенту Г. Райзнеру (см. [10])) и независимо автором этой статьи (см. [14], [15]). Для того чтобы изучить алгебраические свойства A_Δ, нам потребуются некоторые понятия из коммутативной алгебры. Мы сделаем обзор этих понятий в контексте «стандартных k-алгебр», хотя большая часть нами сказанного может быть значительно обобщена.

1. ЧИСЛА БЕТТИ КОЛЕЦ

Пусть $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов над k, переменные которого суть вершины комплекса Δ, а I — любой однородный идеал кольца A (т. е. I порождается однородными многочленами). Пусть $R = A/I$. Назовем такое кольцо R *стандартной k-алгеброй*. В частности, R является градуированной алгеброй [1]) с представлением $R = R_0 + R_1 + \ldots$, где R_i — векторное пространство, образованное линейными комбинациями однородных многочленов степени i с коэффициентами из k и содержащееся в R. Таким образом, $R_0 = k$, R_1 порождает R как некоторую k-алгебру, $R_i R_j \subset R_{i+j}$ и $\dim_k R_i < \infty$. *Функция Гильберта* $H(R, m)$ кольца R определяется условием $H(R, m) =$

---

[1]) Под G-градуированным кольцом понимается кольцо R, для аддитивной группы которого задано представление в виде прямой суммы $R = \sum_{r \in G} R_r$, а умножение в R отображает $R_r \times R_s$ в R_{r+s} для всех $r, s \in G$. — *Прим. перев.*

$=\dim_k R_m$. Гильберт впервые показал, что для достаточно большого m функция $H(R, m)$ является многочленом (*многочленом Гильберта* кольца R). *Размерность Крулля* кольца R, обозначаемая через $\dim R$, может быть определена как $t+1$, где t — степень многочлена Гильберта кольца R.

Если $R=A/I$ — стандартная k-алгебра, то *конечная свободная резольвента* кольца R (как A-модуля) является точной последовательностью [1]) $0 \to M_j \to M_{j-1} \to \ldots \to M_0 \to R \to 0$ A-модулей, где каждое M_i является некоторым свободным A-модулем конечного ранга. Из теоремы Гильберта следует, что свободная резольвента R всегда существует. Существует единственная резольвента, которая минимизирует ранг каждого M_i; эта резольвента называется *минимальной*. Определим i-е *число Бетти* $\beta_i=\beta_i(R)$ кольца R как ранг A-модуля M_i, присутствующего в минимальной свободной резольвенте кольца R. В частности, $\beta_0=1$, а β_1 равно минимальному числу образующих идеала I. На языке гомологической алгебры $\beta_i = \dim_k \operatorname{Tor}_i^A(R, k)$. Другие сведения читатель найдет в [12].

Пример. Пусть $\Delta=\langle ab, bc, ac, cd\rangle$, тогда $I_\Delta=(ad, bd, abc)$. Тогда минимальная свободная резольвента кольца A_Δ имеет вид $0 \to M_2 \to M_1 \to M_0 \to A_\Delta \to 0$, где $\operatorname{rk} M_0=1$, $\operatorname{rk} M_1=3$, $\operatorname{rk} M_2=2$. При соответствующем выборе базисов $\{X\}$ для M_0, $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ для M_1, $\{Z_1, Z_2\}$ для M_2 эти отображения задаются следующим образом: $X \longmapsto 1$, $Y_1 \longmapsto adX$, $Y_2 \longmapsto bdX$, $Y_3 \longmapsto abcX$, $Z_1 \longmapsto bY_1 - aY_2$, $Z_2 \to bcY_1 - dY_3$. Имеем $\beta_0=1$, $\beta_1=3$, $\beta_2=2$ и $\beta_i=0$ для $i \geqslant 3$.

Если R — стандартная k-алгебра, то пусть h будет наибольшим из таких целых чисел i, для которых $\beta_i(R) \neq 0$. Известно, что $n-d \leqslant h \leqslant n$, где $d=\dim R$, а n — число переменных в A. Целое число h является *гомологической размерностью* кольца R (как A-модуля) и обозначается $\operatorname{hd}_A R$ или просто $\operatorname{hd} R$. Если $\operatorname{hd} R=n-d$, то скажем, что R является *кольцом Коэна — Маколея*. Целое число β_{n-d} называется тогда *типом* кольца R и обозначается $\operatorname{type} R$. Если R — кольцо Коэна — Маколея типа 1, то R называется *кольцом Горенштейна*. Для кольца Горенштейна можно показать, что $\beta_i=\beta_{h-i}$, где $h=\operatorname{hd} R$. Если R — кольцо Коэна — Маколея, то известно, что $\operatorname{Ext}_A^i(R, A)=0$, если $i \neq \operatorname{hd} R$. Пусть $\Omega(R)=\operatorname{Ext}_A^h(R, A)$, где $h=hdR$. Это

[1]) Последовательность морфизмов $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v}$ в абелевой категории $\mathscr{C}$ называется точной, если $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} v$. Произвольная последовательность морфизмов, в которой каждые два соседних компонируемы, называется точной, если точны все ее подпоследовательности, образованные парами соседних морфизмов. — *Прим перев.*

означает, что если мы «дуализируем» [1]) минимальную свободную резольвенту кольца R, применяя функтор $\mathrm{Hom}_A(\cdot, A)$, то получим некоторую минимальную свободную резольвенту для $\Omega(R)$, рассматриваемую как A-модуль. $\Omega(R)$ называется *каноническим модулем* кольца R. Пусть дано, что R — кольцо Коэна — Маколея. Тогда R является кольцом Горенштейна в том, и только том случае, когда $\Omega(R) \cong R$. Таким образом, минимальная свободная резольвента стандартной k-алгебры Горенштейна является «самодвойственной» (это гораздо более сильный результат, чем $\beta_i = \beta_{h-i}$).

3. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ ГИЛЬБЕРТА

Теперь рассмотрим отношение между структурой кольца R и его функцией Гильберта $H(R, m)$. Непустое множество одночленов x^α, y^β, ... называется *порядковым идеалом одночленов*, если всякий раз, когда и $u \in M$, и v делит u, то $v \in M$. Некоторая конечная или бесконечная последовательность $h = (h_0, h_1, \ldots)$ целых чисел называется 0-*последовательностью*, если существует порядковый идеал M одночленов, содержащий точно h_i одночленов степени i. Например, (1, 3, 2, 2) является 0-последовательностью, так как мы можем взять $M = \{1, x, y, z, x^2, xy, x^3, x^2y\}$. Скажем, что некоторый конечный порядковый идеал M одночленов является *чистым*, если все максимальные элементы идеала M (упорядоченные по делимости) имеют одну и ту же степень. Очевидным образом определим *чистую* 0-*последовательность*. Для примера (1, 3, 1) является 0-последовательностью, но не является чисто 0-последовательностью. Ясно, что если $(h_0, h_1, \ldots)$ — 0-последовательность, то $h_0 = 1$ и

$$0 \leqslant h_i \leqslant \binom{h_1 + i - 1}{i}, \tag{3}$$

поскольку соответствующий порядковый идеал M имеет h_1 фактически появляющихся переменных и существуют $\binom{h_1+i-1}{i}$ одночленов от h_1 переменных степени i. В [15] приведено явное числовое условие того, чтобы последовательность $(h_0, h_1, \ldots)$ являлась 0-последовательностью, хотя суть этого результата впервые доказал Маколей. Неизвестно никакой другой аналогичной характеризации чистых 0-последовательностей.

Следующий результат характеризует функцию Гильберта стандартной k-алгебры Коэна — Маколея. Этот результат при-

---

[1]) То есть вместо каждого свободного A-модуля M_i в резольвенте кольца R берем двойственный ему модуль $\mathrm{Hom}_A(M_i, A)$. — *Прим. перев*

надлежит Маколею, но впервые сформулирован в „современной“ терминологии в работе [14]. (Доказательство см. в [16], следствие 3.10).

Теорема 1. *Пусть H — функция на неотрицательных целых числах, а k — произвольное поле. Тогда H является функцией Гильберта некоторой стандартной k-алгебры Коэна — Маколея, размерность Крулля которой равна d тогда и только тогда, когда последовательность $(h_0, h_1, \dots)$, определенная посредством*

$$(1-\lambda)^d \sum_{m=0}^{\infty} H(m)\lambda^m = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \lambda^i, \tag{4}$$

является 0-последовательностью с конечным числом ненулевых членов.

Если R есть некоторая стандартная k-алгебра Коэна — Маколея с размерностью Крулля d и функцией Гильберта H, то мы назовем последовательность $h = (h_0, h_1, \dots)$, определенную посредством соотношения (4), *h-вектором* k-алгебры R. Если $h_i = 0$ для $i > s$, то этот h-вектор, кроме того, будем записывать как $(h_0, h_1, \dots, h_s)$.

Теперь мы в состоянии определить промежуточное между k-алгебрами Коэна — Маколея и Горенштейна понятие, которое для нас представляет интерес. Предположим, что R — стандартная k-алгебра Коэна — Маколея с h-вектором $(h_0, h_1, \dots, h_s)$, $h_s \neq 0$. Легко видеть, что $h_s \leqslant \operatorname{type} R$. Если $h_s = \operatorname{type} R$, то скажем, что R является *кольцом уровня*, а $(h_0, h_1, \dots, h_s)$ назовем *последовательностью уровня*. Кольцо уровня с $h_s = 1$ является кольцом Горенштейна, и в этом случае мы называем $(h_0, h_1, \dots, h_s)$ *последовательностью Горенштейна*. Ясно, что каждая последовательность уровня является 0-последовательностью. В отличие от случая кольца Коэна — Маколея неизвестно никакой характеризации последовательностей уровня и даже последовательностей Горенштейна. Следующий результат дает некоторые сведения о последовательностях уровня, хотя, несомненно, могут быть получены более сильные ограничения.

Теорема 2. *Пусть $h = (h_0, h_1, \dots, h_s)$ — последовательность уровня, такая, что $h_s \neq 0$.*

(1) *Если i и j являются неотрицательными целыми числами, такими, что $i + j \leqslant s$, то $h_i \leqslant h_j h_{i+j}$. В частности, если h является последовательностью Горенштейна, то $h_i = h_{s-i}$.*

(2) *Вектор $h_s, h_{s-1}, \dots, h_0$) является некоторой суммой h_s 0-последовательностей.*

(3) *Если $0 \leqslant t < s$, то $(h_0, h_1, \dots, h_t)$ является последовательностью уровня.*

Например, (1, 4, 10, 2) является 0-последовательностью, но по теореме 2 (1) не является последовательностью уровня. Аналогично (1, 4, 2, 2) является 0-последовательностью, но по теореме 2 (2) не является последовательностью уровня. С другой стороны, (1, 3, 5, 4, 5, 3, 1) является последовательностью, но не является последовательностью Горенштейна, хотя этот пример не охватывается теоремой 2. Характеризация последовательности Горенштейна с $h_1 \leqslant 3$ приведена в [16] (см. теорему 4.2). Наконец, как легко заметить, каждая чистая 0-последовательность является последовательностью уровня. Обратное утверждение неверно, например, для (1, 3, 1).

4. ПРИЛОЖЕНИЯ К СИМПЛИЦИАЛЬНЫМ КОМПЛЕКСАМ

Теперь мы в состоянии применить вышеизложенные результаты о стандартных k-алгебрах к k-алгебрам вида A_Δ. Мы начнем с простого результата, доказательство которого приведено в [15].

Теорема 3. *Пусть Δ — комплекс, такой, что $d = 1 + \dim \Delta$. Тогда $d = \dim A_\Delta$ и функция Гильберта $H(A_\Delta, m)$ является функцией $H(\Delta, m)$, определенной по формуле* (1).

Следствие. *Предположим, что A_Δ является кольцом Коэна — Маколея. Тогда h-вектор комплекса Δ равен h-вектору кольца A_Δ. Следовательно, h-вектор комплекса Δ является 0-последовательностью.*

Это следствие приводит к следующему вопросу: определить комплекс Δ, для которого A_Δ является кольцом Коэна — Маколея, или, что более общо, вычислить hdA_Δ. Ответ на этот вопрос следует из неопубликованного результата М. Хохстера[1]). Для того чтобы его привести, нам потребуются некоторые обозначения. Пусть V — множество вершин комплекса Δ, а $W \subset V$. Обозначим через Δ_W *сужение* комплекса Δ на подмножество W, т. е. $\Delta_W = \{F \in \Delta \mid F \subset W\}$. Далее всюду H (соответственно $\tilde{H}$) обозначает гомологию (соответственно приведенную гомологию), симплициальную или сингулярную (как будет удобнее) над полем коэффициентов k, при условиях, что $\tilde{H}_{-1}(\Gamma) = 0$, если $\Gamma \neq \varnothing$, $\tilde{H}_i(\varnothing) = 0$, если $i \geqslant 0$, $\tilde{H}_{-1}(\varnothing) = k$, $\tilde{H}_i(\Gamma) = 0$, если $i < -1$.

Теорема 4. *Числа Бетти кольца A_Δ задаются посредством*

$$\beta_i(A_\Delta) = \sum \dim_k \tilde{H}_{j-i-1}(\Delta_W),$$

[1]) См. дополнительные замечания автора в конце настоящей статьи.

где сумма берется по всем подмножествам W множества V вершин комплекса Δ, таким, что $\operatorname{card} W = j$.

Теорема 4 дает топологический критерий для вычисления $\operatorname{hd} A_\Delta$ и, следовательно, для установления того, является ли A_Δ кольцом Коэна — Маколея. Однако этот критерий довольно громоздок для применения. Еще до доказательства теоремы 4 Райзнер (см. [10]) получил более простое условие того, чтобы A_Δ являлось кольцом Коэна — Маколея. Эквивалентность нижеописанных условий (1) и (2) является результатом Райзнера, в то время как эквивалентность условий (2) и (3) является простым упражнением в топологии. Сначала напомним, что если $F \in \Delta$, то *звено* грани F определяется следующим образом:

$$\operatorname{lk} F = \{G \in \Delta \mid F \cap G = \varnothing,\ F \cup G \in \Delta\}.$$

В частности, $\operatorname{lk} \varnothing = \Delta$.

Теорема 5. *Следующие три условия эквивалентны:*

(1) A_Δ — *кольцо Коэна — Маколея.*

(2) *Для всех* $F \in \Delta$ (*включая* $F = \varnothing$) $\tilde{H}_i(\operatorname{lk} F) = 0$, *если* $i \neq \dim \operatorname{lk} F$.

(3) *Если* $X = |\Delta|$, *то* $\tilde{H}_i(K) = H_i(X, X - p) = 0$ *для всех* $p \in X$ *и* $i \neq \dim X$.

Если A_Δ — кольцо Коэна — Маколея, то Δ назовем *комплексом Коэна — Маколея*. Свойство комплекса быть комплексом Коэна — Маколея зависит от поля k. Из теоремы об универсальных коэффициентах следует, однако, что Δ является комплексом Коэна — Маколея над *некоторым* полем k в том и только том случае, когда Δ является комплексом Коэна — Маколея над полем рациональных чисел.

Отметим, что из теоремы 5 следует, что вопрос, является ли Δ комплексом Коэна — Маколея, зависит только от $|\Delta|$ (и поля коэффициентов k). Недавно Дж. Мункрес показал, используя теорему 4, что для любого комплекса Δ целое n-е A_Δ зависит только от $|\Delta|$ (и от k).

Если $h = (h_0, h_1, \ldots, h_d)$ — h-вектор некоторого комплекса Коэна — Маколея Δ, то по следствию из теоремы 3 и условия (3) имеем, что $h_i \leqslant \binom{n-d+i-1}{i}$. Когда $|\Delta|$ — сфера, это условие эквивалентно некоторому условию на f-вектор комплекса Δ вида $f_i \leqslant c_i(n, d)$, где $c_i(n, d)$ — явно определенное число, зависящее от H, i, n и d. Говорят, что комплекс, удовлетворяющий вышеописанному условию на h_i, удовлетворяет *условию ограниченности сверху*. Если $X = |\Delta|$ — топологическое многообразие с краем или без него, то $H_i(X, X-p)=0$ для всех $p \in X$ и $i < \dim X$. Отсюда по теореме 5 Δ является комплексом Коэна—Маколея тогда и только тогда, когда $\tilde{H}_i(X)=0$ для $i < \dim X$. В частности, Δ является комплексом Коэна—Маколея, если Δ — сфера или клетка. Таким образом, условие ограниченности сверху имеет место для сфер и клеток. Для дальнейших деталей см. [15]. Примером комплекса, который не удовлетворяет этому условию, является комплекс $\langle abcd, ae, be, ce\rangle$, h-вектор которого есть $(1, 1, 0, -3, 2)$. Неизвестно никакого примера комплекса Δ, не удовлетворяющего условию ограниченности сверху, для которого $|\Delta|$ является многообразием с краем или без него.

5. КОНСТРУИРУЕМОСТЬ И СЛОИСТОСТЬ[1])

Приведем результат, показывающий, что следствие теоремы 3 полностью характеризует h-вектор некоторого комплекса Коэна — Маколея. Скажем, что комплекс Δ является *конструируемым* (понятие принадлежит М. Хохстеру), если он может быть получен с помощью следующей рекурсивной процедуры:

(1) любой симплекс является конструируемым;

(2) если Δ' и Δ'' конструируемы и имеют одну и ту же размерность δ, причем $\Delta' \cap \Delta''$ также конструируемо и имеет размерность $\delta-1$, то $\Delta' \cup \Delta''$ является конструируемым комплексом. Прямое рассуждение Майера — Вьеториса, скомбинированное с теоремой 5, показывает, что Δ является комплексом Коэна — Маколея, если он конструируем. (Может быть также получено прямое алгебраическое доказательство; см. [14].)

Предположим, что при построении конструируемого многогранника всегда можно в качестве Δ'' взять симплекс. Это эквивалентно тому, что Δ является чистым комплексом и его максимальные грани могут быть упорядочены $F_1, F_2, \ldots, F_\mu$ таким образом, что для $i=2, 3, \ldots, \mu$ мы имеем, что $(F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_{i-1}) \cap F_i$ есть непустое объединение граней F из F_i, удовлетворяющих условию $\dim F_i - \dim F = 1$. В этом случае будем говорить, что комплекс Δ является *слоистым*. Это определение несколько отличается от других определений понятия «слоистости», принятых в литературе, так как мы не накладываем никаких ограничений на случай, когда $(F_1 \cup \ldots \cup F_{i-1}) \cap F_i$ может состоять из *всех* граней F и F_i коразмерности 1. Интересные сведения о слоистых комплексах можно найти в [5][2]).

---

[1]) Соответствующие термины в оригинале: «constructibility» и «shellability». — *Прим. перев.*

[2]) См. также К. Куратовский, Топология, М., Мир, 1969, т. 2, гл. 5, 48, где понятие слоистости пространств введено как аналог частичной упорядоченности. — *Прим. ред.*

Теорема 6. *Пусть $h = (h_0, h_1, \ldots, h_d)$ — последовательность целых чисел. Следующие четыре условия эквивалентны.*

(1) *h — 0-последовательность;*

(2) *h — h-вектор некоторого комплекса Коэна—Маколея Δ;*

(3) *h есть h-вектор некоторого конструируемого Δ-комплекса Δ;*

(4) *h есть h-вектор некоторого слоистого комплекса Δ.*

Наиболее важными примерами слоистых комплексов являются граничные комплексы симплициальных выпуклых многогранников. Мы не знаем примера конструируемого комплекса, который не был бы сложным. Однако в разд. 7 имеются примеры конструируемых комплексов, для которых неясно, являются ли они слоистыми, и, по-видимому, вполне похоже на то, что конструируемый комплекс не обязан быть слоистым.

6. КОМПЛЕКСЫ ГОРЕНШТЕИНА

Если A_Δ есть кольцо Горенштейна, то Δ называется *комплексом Горенштейна.* (Как обычно, он зависит от поля k.) Дадим некоторую характеризацию комплексов Горенштейна, которая может быть выведена из теоремы 4 топологическими или комбинаторными рассуждениями. Напомним, что если Γ и Δ являются комплексами на непересекающихся множествах вершин V и W, то их *соединение* $\Gamma * \Delta$ является некоторым комплексом на множестве $V \cup W$, определенным следующим образом:

$$\Gamma * \Delta = \{F \cup G : F \in \Gamma \quad \text{и} \quad G \in \Delta\}.$$

Теорема 7. *Δ является комплексом Горенштейна тогда и только тогда, когда Δ есть $\sigma * \Gamma$, где σ — симплекс и*

$$\tilde{H}_i(X) = 0 \text{ для } i < \delta; \quad \dim_k \tilde{H}_\delta(X) = 1,$$

$$H_i(X, X - p) = 0 \text{ для } i < \delta; \ \dim_k H_\delta(X, X - p) = 1 \text{ для всех } p \in X,$$

где $X = |\Gamma|$ и $\delta = \dim X$. (5)

Поскольку условия (5) выполняются автоматически, если X — многообразие, то, в частности, Δ есть комплекс Горенштейна, если X — сфера; это результат, впервые доказанный М. Хохстером (не опубликован). Заметим также, что Δ может быть комплексом Горенштейна (над любым полем k) без предположения о том, что X — топологическое многообразие; например, когда X есть надстройка «двенадцатигранного пространства» Кнезера.

Предположим, что $(h_0, h_1, \ldots, h_d)$ является h-вектором комплекса Горенштейна Δ. Тогда можно предположить, что $h_d \neq 0$, поскольку если $h_s \neq 0$ и $h_{s+1} = 0$, то $(h_0, \ldots, h_s)$ является h-вектором комплекса Γ из теоремы 7. По теореме 2 (2) имеем, что

$h_i = h_{d-i}$. Это соотношение эквивалентно условию на f-вектор комплекса Δ, известному как *уравнение Дэна — Соммервилля.*

Крупной нерешенной проблемой в теории выпуклых многогранников является характеризация h-вектора $(h_0, \ldots, h_d)$ граничного комплекса некоторого симплициального выпуклого d-многогранника. Все еще не доказанная «g-гипотеза» Макмюллена [9] утверждает, что желаемая характеризация задается следующими двумя условиями:

$$h_i = h_{d-i} \quad \text{для всех} \quad i; \tag{6}$$

$(h_0,\ h_1 - h_0,\ h_2 - h_1,\ \ldots,\ h_e - h_{e-1})$ является 0-последовательностью, где $e = \left[\frac{d}{2}\right]$.

Спрашивается, имеют ли место условия (6) в случае, когда $|\Delta|$ — сфера, или даже в более общем случае, когда Δ — комплекс Горенштейна. Существуют особые случаи, для которых можно проверить выполнение условий (6). Например, в [9] показано геометрическими методами (диаграммы Гейла), что если $|\Delta|$ — некоторая сфера, удовлетворяющая условию $n \leqslant 4 + \dim \Delta$, то имеют место условия (6). Это является также непосредственным следствием теоремы 7 и теоремы 4.2 из [16] и на самом деле нуждается лишь в предположении, что Δ— комплекс Горенштейна, удовлетворяющий условию $n \leqslant 4 + \dim \Delta$. Следующая теорема дает другой результат такого же типа. Она является легким следствием теоремы 4 и заключением теоремы 3. Сначала нам требуется дать определение. Если $|\Delta|$ — δ-мерное многообразие с краем, то *граничный комплекс* $\partial\Delta$ комплекса Δ есть комплекс, максимальные грани которого являются $(\delta - 1)$-мерными гранями комплекса Δ, лежащими только на одной δ-мерной грани. Таким образом, $|\partial\Delta| = \partial|\Delta|$, поэтому если $|\Delta|$ — δ-мерная клетка, то $|\partial\Delta|$ является $(\delta - 1)$-мерной сферой.

Теорема 8. *Предположим, что $|\Delta|$ — d-мерное многообразие с краем, такое, что Δ — комплекс Коэна — Маколея, а $\partial\Delta$ — комплекс Горенштейна (например, $|\Delta|$ — клетка), и такое, что любая грань $F \in \Delta - \partial\Delta$ удовлетворяет условию $F \geqslant \frac{1}{2}$ $(d-1)$. Тогда h-вектор $(h_0, \ldots, h_d)$ комплекса $\partial\Delta$ удовлетворяет условиям* (6).

Из результата Кли [8] следует, что если Δ — комплекс Горенштейна с h-вектором $(h_0, \ldots, h_d)$ $h_d \neq 0$, то

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_{d-1} \geqslant (d-1)h_1.$$

В [16] показано, что (1, 13, 12, 13, 1) является последовательностью Горенштейна. Отсюда следует, что последовательность Горенштейна не обязана быть h-вектором комплекса Горенштейна в противоположность случаю Коэна — Маколея.

В качестве обобщения теоремы 7 можно поставить вопрос об описании канонического модуля $\Omega(A_\Delta)$ в случае, когда A_Δ является кольцом Коэна — Маколея. Если $|\Delta|$ — многообразие с краем, то существует ошеломляющий признак (однако еще не доказательство) того, что $\Omega(A_\Delta)$ изоморфно идеалу кольца A_Δ, порожденному свободными от квадратов одночленами $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_j}$, для которых $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_j}\} \in \Delta - \partial\Delta$[1]).

7. НЕЗАВИСИМЫЕ МНОЖЕСТВА И РАЗОМКНУТЫЕ ЦИКЛЫ

Рассмотрим теперь некоторые приложения комплексов Коэна — Маколея к теории предгеометрий (или «матроидов») в смысле Крапо и Рота [4]. *Конечная предгеометрия* Γ состоит из конечного множества V вершин (или «точек») и семейства Δ подмножеств множества V, называемых *независимыми множествами*, такими, что (1) Δ — комплекс, (2) для каждого подмножества W множества V индуцированный комплекс Δ_W является чистым. Во избежание тривиальностей будем предполагать также, что $\{v\} \in \Delta$ для всех $v \in V$, поэтому мы можем отождествить Γ с Δ. Назовем Δ *G-комплексом*. Например, если V — конечное множество точек в векторном пространстве и Δ — семейство линейно независимых подмножеств множества V, то Δ является G-комплексом. Если V — множество ребер конечного графа G, а Δ — семейство подмножеств множества V, не содержащих никакого цикла, то Δ — G-комплекс. Другие примеры см. в [4]. Сошлемся также на работу [4] для разъяснения любой необъясненной терминологии в этом разделе.

Легко видеть, используя так называемое «разложение Татта — Гротендика» [2], что G-комплекс является конструируемым и, следовательно, комплексом Коэна — Маколея. Используя теорему 4, можно получить простое выражение для чисел Бетти: $\beta_i(A_\Delta)$. Мы должны вычислить $N = \dim_k H_{j-i-1}(\Delta_W)$, где $W \subset V$ и $\mathrm{card}_W = j$. Пусть $\delta = \dim \Delta_W$. Поскольку Δ_W является комплексом Коэна — Маколея, то $N = 0$, если только не выполняется равенство $j - i - 1 = \delta$. Если же $j - i - 1 = \delta$, то $N = (-1)^\delta(\chi(\Delta_W) - 1)$, где χ — эйлерова характеристика. Известно, что $\chi(\Delta_W) - 1 = 0$, если $V - W$ не являются поверхностью (замкнутым множеством) двойственной предгеометрии $\tilde{\Delta}$. Когда $V - W$ является некоторой поверхностью, то $N =$

[1]) См. дополнительные замечания автора в конце настоящей статьи.— *Прим. ред.*

$=|\tilde{\mu}(V-W,\ V)|$, где $\tilde{\mu}$ — функция Мёбиуса (в смысле работы [11]) решетки $L(\tilde{\Delta})$ поверхностей из $\tilde{\Delta}$. Более того, $(\operatorname{card} W)-\delta-1$ является в точности корангом множества $V-W'$ в $\tilde{\Delta}$, т. е. длиной наибольшей цепи между $V-W$ и V в $L(\tilde{\Delta})$. Отсюда получаем следующую теорему:

Теорема 9. *Пусть Δ — G-комплекс на множестве вершин V. Тогда $\beta_i(A_\Delta)=\sum|\tilde{\mu}(X,\ V)|$, где X пробегает по всем поверхностям коранга i комплекса $\tilde{\Delta}$.*

Сравним это число с так называемыми «числами Уитни первого типа» $\sum|\tilde{\mu}(\emptyset,\ X)|$, где X пробегает по всем поверхностям ранга i комплекса $\tilde{\Delta}$. Из теоремы 9 следует, что, когда Δ — G-комплекс, тип кольца A_Δ равен $|\tilde{\mu}(\emptyset,\ V)|$. С другой стороны, если $(h_0,\ h_1,\ \ldots,\ h_d)$ — h-вектор *любого* комплекса Δ, удовлетворяющего условию $\dim\Delta=d-1$, то легкий подсчет показывает, что $h_d=(-1)^{d-1}(\chi(\Delta)-1)$. Следовательно, если Δ — G-комплекс, то $h_d=|\tilde{\mu}(\emptyset,\ V)|=\operatorname{type}A_\Delta$. Отсюда получаем

Следствие. *Если Δ — G-комплекс, то A_Δ является кольцом уровня типа $|\tilde{\mu}(\emptyset,\ V)|$. Отсюда h-вектор комплекса Δ является последовательностью уровня.*

Не каждая последовательность уровня является h-вектором некоторого G-комплекса (например, $(1,\ 3,\ 1)$), и было бы интересно охарактеризовать такие h-векторы. В этом направлении имеем

Предположение. *Если Δ есть G-комплекс, то h-вектор комплекса Δ является чистой 0-последовательностью (как определено в разд. 5).*

Тесно связаны с G-комплексами «комплексы разомкнутых циклов». Пусть $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ — упорядоченные вершины предгеометрии Δ. *Разомкнутый цикл* получается исключением наивысшего отмеченного элемента из любого цикла (минимального зависимого множества) комплекса Δ. *Комплекс разомкнутых циклов* (или *BC-комплекс*) комплекса Δ относительно упорядочения $x_1,\ \ldots,\ x_n$ есть комплекс, гранями которого являются подмножества множества V, не содержащие разомкнутых циклов. Пусть Λ обозначает комплекс разомкнутых циклов комплекса (относительно упорядочения $x_1,\ \ldots,\ x_n$). Если $(f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_\delta)$ — f-вектор комплекса Λ, где $\delta=\min\Lambda$, то $p_\Delta(\lambda)=\lambda^{\delta+1}-f_0\lambda^\delta+\ldots-(-1)^\delta f_\delta$ есть *характеристический полином* комплекса Δ, который является, таким образом, независимым от выбора упорядочения вершин (см. [11], § 7). Если комплекс Δ состоит из ациклических множеств ребер графа G, то $\lambda^c \cdot p_\Delta(\lambda)$ — *хроматический полином* графа Γ, где c — число компонент графа G. Следовательно, теория комплексов Коэна — Маколея применима к хроматическим полиномам.

Легко видеть, что BC-комплекс Λ является конструируемым и поэтому комплексом Коэна — Маколея. Отсюда h-вектор комплекса Λ является 0-последовательностью. Это улучшает наблюдения Уилфа ([17] теорема 2), который был пионером в исследовании комплексов разомкнутых циклов методами теории комплексов. Дополнительную информацию о BC-комплексах см. в [3].

Тот факт, что h-вектор BC-комплекса Λ является 0-последовательностью, никоим образом не характеризует такие h-векторы, и было бы крайне интересно получить дополнительные ограничения более подробным анализом кольца A_Λ. Было сделано предположение, что f-вектор $(f_0, \ldots, f_\delta)$ BC-комплекса является *унимодальным*, т. е. для некоторого i имеем $f_0 \leqslant f_1 \leqslant \ldots \leqslant f_i$, $f_i \geqslant f_{i+1} \geqslant \ldots \geqslant f_\delta$. К несчастью, это не следует просто из того факта, что h-вектор является 0-последовательностью. Например, вектор $h = (1, 500, 55, 220, 715, 2002)$ является 0-последовательностью, а соответствующий f-вектор (с $d = 5$) равен $f = (1, 505, 2065, 3395, 3325, 3493)$. Отсюда по теореме 6 f является f-вектором некоторого комплекса Коэна — Маколея Δ (или даже слоистого комплекса). Заметим, что без теоремы 6 трудно найти пример даже чистого комплекса, f-векторы которого не являются унимодальными.

8. ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА КОЭНА — МАКОЛЕЯ

Пусть P — конечное частично упорядоченное множество. Обозначим через $\Delta(P)$ комплекс, вершинами которого являются элементы множества P, а гранями — цепи (линейно упорядоченные подмножества) множества P. Если $\Delta(P)$ — комплекс Коэна — Маколея, то назовем P *частично упорядоченным множеством Коэна — Маколея* (как обычно, он зависит от поля k). Существуют два основных класса таких частично упорядоченных множеств.

(1) Полумодулярная решетка является частично упорядоченным множеством Коэна — Маколея. Это следует из теоремы 5 и работы Фолкмана [7] и Фармера [6]. В более общем случае мы выдвигаем предположение, что конечная *допустимая решетка* в смысле [13] является частично упорядоченным множеством Коэна — Маколея.

(2) Пусть Σ — конечный регулярный клетчатый комплекс, например конечный симплициальный комплекс. (Разумеется, могут быть допущены и более общие структуры.) Предполо-

жим, что основное топологическое пространство комплекса Σ удовлетворяет условию (3) теоремы 5. Если P — множество граней комплекса Σ, упорядоченное по включению, то P является частично упорядоченным множеством Коэна — Маколея. Действительно, $\Delta(P)$ является в точности первым барицентрическим подразделением комплекса Σ.

Частично упорядоченные множества Коэна—Маколея впервые в явном виде были рассмотрены Баклавским [1]. Его теоремы 6.1 и 6.2 являются частными случаями следующего результата, высказанного в качестве гипотезы автором этой статьи и который был доказан Мункресом (не опубликовано). Определим сначала *ранг* $\rho(x)$ элемента x конечного частично упорядоченного множества P как длину наибольшей цепи из P, наибольший элемент которой есть x. Таким образом, $\rho(x)=0$ тогда и только тогда, когда x — минимальный элемент из P. Если $x \leqslant y$ в P, положим $\rho(x, y)=\rho(y)-\rho(x)$. Если комплекс $\Delta(P)$ чистый, то $\rho(x, y)$ является длиной *любой* неуплотняемой цепи между элементами x и y и $\rho(x, y)=\dim\Delta(P)$ тогда и только тогда, когда x является минимальным элементом, а y — максимальным элементом из P.

Теорема 10. *Пусть P — частично упорядоченное множество Коэна — Маколея с функцией ранга ρ, i — неотрицательное целое число. Пусть P_i — множество всех $x \in P$, удовлетворяющих условию $\rho(x) \neq i$. Зададим на P_i порядок, индуцированный из P. Тогда P_i является частично упорядоченным множеством Коэна — Маколея.*

Если P — частично упорядоченное множество Коэна — Маколея с функцией Мёбиуса μ и $x \leqslant y$ в P, то открытый интервал (x, y) есть частично упорядоченное множество Коэна — Маколея и $(-1)^l \mu(x, y)=\dim_k \tilde{H}_l(\Delta((x, y)))$, где $l=\rho(x, y)$. Отсюда $(-1)^l \mu(x, y) \geqslant 0$, т. е. функция Мёбиуса частично упорядоченного множества P *чередует знак*. Из теоремы 10 следует, что если мы удаляем любое множество «уровней» из P, то функция Мёбиуса результирующего частично упорядоченного множества продолжает чередовать знак.

Если P — конечное частично упорядоченное множество, для которого комплекс $\Delta(P)$ является чистым и $\mu(x, y)=(-1)^{\rho(x, y)}$ для каждого $x \leqslant y$ в P, то P называется *частично упорядоченным множеством Эйлера*. Нетрудно заметить, что частично упорядоченное множество Коэна — Маколея P является горенштейновым в том и только том случае, когда при удалении из P всех элементов x, которые соединены с каждым элементом из P, и затем присоединении единственного максимального и единственного минимального элемента полученное частично упорядоченное множество оказывается эйлеровым.

Вышеописанные рассмотрения наводят на мысль, что частично упорядоченные множества Коэна — Маколея являются естественным классом частично упорядоченных множеств, и их функции Мёбиуса заслуживают дальнейшего изучения.

ЗАМЕЧАНИЯ, ДОБАВЛЕННЫЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

(1) Работа М. Хохстера, на которую мы ссылались (особенно при обсуждении теоремы 4) оказалась опубликованной в статье М. Хохстера «Кольца Коэна — Маколея, комбинаторика и симплициальные комплексы», основанной на сообщении, сделанном на конференции по теории колец в Оклахоме, 11—13 марта 1976. Эта работа содержит много других интересных результатов о структуре кольца A_Δ.

(2) Относительно гипотезы в разд. 6 о модуле $\Omega(A_\Delta)$, когда $|\Delta|$ является некоторым многообразием с краем, Хохстер доказал следующий результат. Предположим, что Δ — комплекс Коэна — Маколея и $|\Delta|$ — многообразие с краем. Пусть I — идеал кольца A_Δ, порожденный всеми свободными от квадратов одночленами $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_j}$, для которых $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_j}\} \in \Delta - \partial\Delta$. Тогда I изоморфен модулю $\Omega(A_\Delta)$ тогда и только тогда, когда $\partial\Delta$ — комплекс Горенштейна (например, если $|\Delta|$ является ориентируемым).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baclawski K. Homology and Combinatorics of Ordered Sets, thesis, Harvard University, 1976.
2. Brylawski T. A decomposition for combinatorial geometries, Trans. Amer. Math. Soc., 171 (1972), 235—282.
3. Brylawski T. The broken circuit complex, to appear.
4. Crapo H., Rota G.-C. On the Foundations of Combinatorial Theory: Combinatorial Geometries, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1970.
5. Danaraj G., Klee V. Which spheres are shellable?, preprint.
6. Farmer F. Cellular homology for posets, preprint.
7. Folkman J The homology groups of a lattice, J. Math. Mech., 15 (1966), 631—636.
8. Klee V. A d-pseudomanifold with f_0 vertices has at least $df_0-(d-1)\times$ $\times(d+2)$ d-simplices, Houston J. Math., 1 (1975), 81—86.
9. McMullen P. The number of faces of simplicial polytopes, Israel J. Math , 9 (1971), 559—570.
10. Reisner G. Cohen—Macaulay quotients of polynomial rings, Advances in Math., 21 (1976), 30—49
11. Rotta G.-C. On the foundations of combinatorial theory, I Theory of Möbius functions, Z. Wahrschenlichkeitstheorie 2 (1964), 340—368.
12. Serre J. — P. Algèbre Locale — Multiplicités, Lecture Notes in Math., no 11, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

13. Stanley R Finite lattices and Jordan — Hölder sets, Algebra Universalis 4 (1974), 361—371.
14. Stanley R Cohen — Macaulay rings and constructible polytopes, Bull Amer. Math. Soc., 81 (1975), 133—135.
15. Stanley R. The Upper Bound Conjecture and Cohen — Macaulay rings, Studies in Applied Math., 54 (1975), 135—142.
16. Stanley R. Hilbert functions of graded algebras, Advances in Math., to appear.
17. Wilf H. S. Which polynomials are chromatic? Proc. Colloquium on Combinatorial Theory, Rome, 1973, to appear.

БИНАРНЫЕ КОДЫ, РЕШЕТКИ И СФЕРИЧЕСКИЕ УПАКОВКИ[1]

Н. Дж. А. Слоан

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие авторы изучали интересные и неожиданные связи между бинарными (а иногда и тернарными) кодами, с одной стороны, и упаковками шаров и решетками в $\mathbb{R}^n$ — с другой ([11], [17]—[20], [24]—[27], [52]—[58], [67], [68], [97]). Настоящая работа содержит обзор этих связей, а также наиболее важные теоремы и конструкции, к ним относящиеся; теоремы даны по преимуществу без доказательств. Недавно было обнаружено, что существуют аналогичные связи между кодами над $GF(4)$ и комплексными решетками; однако эти результаты будут опубликованы в отдельной работе [101]

В настоящей работе исследуется следующая идея. Бинарный код (разд. 3) есть множество точек, плотно уложенных внутри единичного куба в $\mathbb{R}^n$. Упаковка шаров (разд. 2) есть множество точек, плотно заполняющих все пространство $\mathbb{R}^n$. Нужно найти способы распространить упаковки в кубе до упаковки во всем пространстве. Некоторые методы осуществления этого описаны в разд. 5, 7, 9.

Цель состоит в том, чтобы находить упаковки в $\mathbb{R}^n$ (при фиксированном n) с наибольшей плотностью, или (что то же самое) с наибольшим контактным числом (разд. 2). Таблицы наилучших известных упаковок см. в [56]. Чтобы эти таблицы не выглядели устарелыми, их следует пополнить двумя новыми результатами; а) в $\mathbb{R}^{11}$ имеются неэквивалентные нерешетчатые упаковки, совокупно обозначаемые $P11c$, в которых некоторые шары касаются 582 других шаров; центральная плотность таких упаковок составляет всего лишь 0,02588... (см. разд. 5); б) в $\mathbb{R}^{36}$ имеется решетчатая упаковка с центральной плотностью $\delta = 3{,}330\ldots$ [101]. Помимо того, весьма плотные упаковки были построены в $\mathbb{R}^n$ для больших n (см. [97], § 10).

Связи между кодами и упаковками шаров становятся более сильными, если ограничиться самодвоичными линейными кодами и самодвоичными решетчатыми упаковками (разд. 6); наиболее

---

[1]) Sloane N. J. A. Binary codes, lattices, and sphere-packings. Proc. Sixth British Comb. Conf., 1977, p. 117—164.

сильные связи обнаруживаются, если сопоставлять самодвойственные коды с весами, кратными 4, с самодвойственными решетками, в которых квадраты длин четны (разд. 8). В последнем случае имеются параллельные теоремы, дающие верхние и нижние границы для наилучших кодов и решеток, а также параллельные теоремы, характеризующие весовой энумератор кода и тета-функцию решетки.

2. УПАКОВКИ ШАРОВ

Шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса ρ (с центром в начале координат) состоит из всех тех точек $x=(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, для которых $x \cdot x = \sum x_i^2 \leqslant \rho^2$; он имеет объем $V_n \rho^n$, где

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} n+1\right)}.$$

Упаковка шаров в $\mathbb{R}^n$ есть такое расположение равных шаров, при котором в $\mathbb{R}^n$ нет точки, входящей более чем в один шар. Например, на рис. 1 показана упаковка A_2 в $\mathbb{R}^2$.

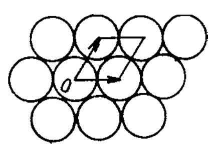


Рис. 1. Плотнейшая упаковка на плоскости.

Плотность упаковки Δ есть та доля $\mathbb{R}^n$, которая лежит внутри сфер ([88, гл. 1]). Например, упаковка на рис. 1 может быть получена, если плоскость замостить «черепицами» вида

 Следовательно, плотность равна доле «черепицы», покрытой кругами, что составляет $\Delta = \pi/2\sqrt{3} = 0{,}9069\ldots$ Обычно работают с нормализованной плотностью $\delta = \Delta/V_n$, именуемой *центральной плотностью*, а не с самой Δ. Для упаковки на рис. 1 $\delta = \Delta/\pi = 1/2\sqrt{3}$.

Основная проблема, относящаяся к упаковкам шаров, состоит в нахождении плотнейшей упаковки в $\mathbb{R}^n$. Вторая проблема заключается в отыскании наибольшего возможного числа единичных шаров, касающихся одного единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Число это называют *контактным* числом и обозначают его через τ. На рис. 1 для каждого шара $\tau = 6$.

Упаковку шаров называют *решетчатой* или просто *решеткой*, если центры шаров образуют абелеву группу относительно покомпонентного сложения. Иными словами, пусть $e^1=(e_1^1, \ldots, e_n^1), \ldots, e^n=(e_1, \ldots, e_n^n)$ — линейно независимые векторы в $\mathbb{R}^n$; тогда решетка Λ, образованная этими векторами, состоит из всех линейных комбинаций $c_1e^1+\ldots+c_ne^n$, где все c_i целые.

Матрица M размера $n\times n$, (i, j)-элемент которой равен e_j^i, называется производящей матрицей для решетки Λ, поскольку всякий $x\in\Lambda$ может быть записан как $x=cM$, где $c\in\mathbb{Z}^n$. Детерминант решетки Λ определяется равенством

$$\det\Lambda=|\det M|$$

и равен объему параллелепипеда (или n-мерной ячейки), натянутого на e^i.

Минимальное квадратичное расстояние решетки Λ есть число

$$d(\Lambda)=\min_{\substack{x,\ y\in\Lambda\\ x\neq y}}(x-y)(x-y).$$

Если шары радиуса $\rho=\frac{1}{2}\sqrt{d(\Lambda)}$ имеют центры в точках решетки Λ, то получаем решетчатую упаковку шаров плотности

$$\Delta=\frac{V_n\rho^n}{\det\Lambda}. \tag{1}$$

Двойственной называют решетку $\Lambda^\perp=\{x\in\mathbb{R}^n : x\cdot y\in\mathbb{Z}\,\forall y\in\Lambda\}$. Легко видеть, что производящая матрица для $\Lambda^\perp$ имеет вид $(M^{-1})^{tr}$. Если $\Lambda=\Lambda^\perp$, то Λ называют *самодвойственной* (или *унимодулярной*) решеткой. Например, $\mathbb{Z}^n$ образует самодвойственную решетку в $\mathbb{R}^n$ с $M=I_n$. Решетка Λ самодвойственна тогда и только тогда, когда $\det\Lambda=1$ и $e^ie^j\in\mathbb{Z}$ для всех i, j.

Четные самодвойственные решетки, или иначе — решетки типа II, особенно важны: они определяются тем дополнительным условием, что квадрат длины $x\cdot x$ есть четное целое для всех $x\in\Lambda$. Как будет показано ниже, четные самодвойственные решетки существуют тогда и только тогда, когда n кратно 8.

Можно теперь задать следующий вопрос: какие решетчатые упаковки (или самодвойственные решетки, или четные самодвойственные решетки) обладают в $\mathbb{R}^n$ наибольшей плотностью или наибольшим контактным числом?

Представим известные результаты по этому вопросу. Плотнейшие (без ограничений) упаковки шаров известны лишь для $n\leqslant 2$ ([38]—[40], [42], [88]), а наибольшее τ — для $n\leqslant 3$ (см., например, ([30], [51]). Плотнейшие решетчатые упаковки известны для $n\leqslant 8$ ([6], [15], [23], [88]), а наибольшее τ для решетки — при $n\leqslant 9$ ([31], [104], [105]). Наибольшие Δ и τ

четных самодвойственных решеток известны для $n \leqslant 48$ (разд. 8); все четные самодвойственные решетки были классифицированы для $n \leqslant 24$ ([50], [79]). Меньше известно о самодвойственных решетках, которые нечетны — см. [50] и разд. 6 настоящей работы.

Задача 1. *Расширить эти результаты!*

Помимо этих результатов известно много хороших упаковок и решеток в случае более высоких размерностей (см. [56] и ниже). Так, например, в $\mathbb{R}^{10}$, $\mathbb{R}^{11}$ и $\mathbb{R}^{13}$ имеются нерешетчатые упаковки, которые предположительно должны быть плотнее любой решетчатой упаковки ([23], [54], [56], § 6). Имеются также верхние и нижние оценки для Δ, τ при всех n ([57], [58], [76], [88] и § 7, 9).

Изучение решетчатых упаковок тесно связано с изучением квадратичных форм. Если решетка Λ имеет производящую матрицу M, то $A = MM^{tr}$ положительно определено, а xAx^{tr} представляет собой квадратичную форму, ассоциированную с Λ. Квадратичная форма, ассоциированная с плотнейшей упаковкой в $\mathbb{R}^n$, называется *абсолютно экстремальной формой* [29]. Квадратичную форму, ассоциированную с самодвойственной решеткой, называют формой типа I, а ассоциированную с четной самодвойственной решеткой — формой типа II [76, 93]. Будем иногда говорить, что такие решетки являются решетками типа I и II соответственно. Имеется обширная литература по упаковкам шаров, см., например, [5], [29]—[32], [38], [39], [56], [76], [88]—[90], а также ссылки, приведенные в них.

3. КОДЫ

Пусть F — конечное поле. *Код C* над полем F *длины n* есть просто подмножество F^n. Вектор или *кодовое слово* кода C имеет форму $u = (u_1, \ldots, u_n)$, где $u_i \in F$. *Расстоянием*, или *метрикой* (*Хемминга*), между двумя векторами u и v длины n называется число тех координатных мест, в которых эти векторы различны, и обозначается оно через $\operatorname{dist}(u, v)$. *Вес* вектора u есть число $wt(u)$ ненулевых компонент u_i. Таким образом, $\operatorname{dist}(u, v) = wt(u - v)$.

Число ошибок, которые код C может исправить, определяется его *минимальным расстоянием* $d(C)$, задаваемым по формуле

$$d(C) = \min_{\substack{u,\, v \in C \\ u \neq v}} \operatorname{dist}(u, v).$$

Тогда код C может исправить $\left[\frac{1}{2}(d(C)-1)\right]$ ошибок.

Мы интересуемся преимущественно бинарными кодами: $F = GF(2)=\{0, 1\}$; тернарными кодами: $F=GF(3)=\{0, 1, 2\}$ и кодами над $GF(4)=\{0, 1, \omega, \omega^2\}$, где $\omega^2=\omega+1$. Сопряжение в поле $GF(p^a)$, где p — простое, определяется по правилу $\bar{x}=x^p$ для всех $x \in GF(p^a)$. Аналогично для векторов $\bar{u}=(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)$.

Основная проблема теории кодирования состоит в вычислении $A_F(n, d)$ — наибольшего числа кодовых слов в коде над полем F длины n с минимальным расстоянием d. Например, если $F=GF(2)$, то $A_F(n, d)$ есть наибольшее число вершин единичного куба в $\mathbb{R}^n$ с тем свойством, что любые две из них отдалены друг от друга по крайней мере на $\sqrt{d}$ в евклидовой метрике.

Код называется *линейным*, если он образует абелеву группу относительно покомпонентного сложения в F и замкнут относительно умножения на элементы поля F (короче — если он образует F-модуль). Линейный код над $GF(q)$ содержит q^k кодовых слов, где k есть *размерность* кода. *Двойственный* код есть код вида

$$C^\perp=\left\{u \in F^n\colon\ u \cdot \bar{v}=\sum u_i\bar{v}_i=0 \quad \forall v \in C\right\},$$

и он имеет размерность $n-k$. (Для бинарных и тернарных кодов черту можно опускать.) Если $C=C^\perp$, то код C называют *самодвойственным* $\left(\text{и } n \text{ четно, } k=\frac{1}{2}n\right)$. Линейный код может быть определен заданием его производящей матрицы M, которая есть $k\times n$-матрица, чьи строки и составляют код.

Если $M=[I_k\,|\,B]$ есть производящая матрица для C, то $[-\bar{B}^{tr}\,|\,I_{n-k}]$ есть производящая матрица для $C^\perp$. Кроме того, C — самодвоичен тогда и только тогда, когда $B\bar{B}^{tr}=-I_{n/2}$.

Интересный подкласс самодвойственных кодов составляют те, в которых веса кодовых слов кратны некоторой константе $c>1$. Такие коды существуют лишь в четырех нетривиальных случаях.

Теорема 1 (Глисон, Пирс и Тюрин [3, 4]). *Пусть C — самодвойственный код над полем $GF(q)$, в котором вес каждого кодового слова делится на константу $c>1$. Тогда либо C — тривиальный код с минимальным расстоянием 2, либо имеет место один из следующих четырех случаев*:

(I) $q=2,\ c=2$,
(II) $q=2,\ c=4$,
(III) $q=3,\ c=3$,
(IV) $q=4,\ c=2$.

Мы будем говорить, что такие коды являются кодами типа I, II, III, IV соответственно. Поскольку всякий самодвойственный код над $GF(2)$ (соответственно $GF(3)$, $GF(4)$) содержит лишь кодовые слова с весами, кратными 2 (соответственно 3, 2), то коды типа II наиболее интересны. Мы увидим, что самодвойственные коды типов I, II имеют много общих свойств с решетками типов I, II соответственно.

Задача 2. *Существует ли результат, подобный теореме* 1, *для решеток, например для общих классов решеток, определенных в* [37], *стр.* 635?

Можно поинтересоваться наибольшим линейным (самодвойственным или самодвойственным типов от I до IV) кодом с фиксированной длиной n и минимальным расстоянием d. Об этих вопросах известно немногим больше, нежели о соответствующих вопросах по поводу упаковок шаров. Помимо трех пробелов наилучшие бинарные коды известны для длины $n \leqslant 16$ ([12]); пробелы эти таковы:

$$38 \leqslant A(10,4) \leqslant 40,$$
$$72 \leqslant A(11,4) \leqslant 80,$$
$$144 \leqslant A(12,4) \leqslant 160.$$

Задача 3. *Вычислить* $A(10,4)$, $A(11,4)$, $A(12,4)$ *для бинарных кодов.*

Для больших значений n см [12], 74] и [64, приложение А]. Наилучшие бинарные линейные коды известны для $n \leqslant 24$, ([1], [12], [45], [46], [64]). Наилучшие самодвойственные коды типов I и II описаны ниже, в § 6, 8, а типов III и IV — в [63], [69], [70], [101]. За дополнительной информацией о кодах мы отсылаем читателя к [3], [9], [10], [13], [14], [22], [59], [82], [99] и особенно к [64].

4. ТЕТА-ФУНКЦИИ И ВЕСОВЫЕ ЭНУМЕРАТОРЫ

В решетчатой упаковке шаров Λ обозначим A_r число тех точек решетки (т. е. центров шаров) $x \in \Lambda$, для которых $x \cdot x = r$. В самодвойственных решетках r всегда целое, но в общем случае это не так. Контактное число решетки есть $\tau = A_{d(\Lambda)}$.

Тета-функция решетки Λ есть функция

$$\Theta_\Lambda(\tau) = \sum_{x \in \Lambda} = e^{\pi i \tau x \cdot x} \sum_r A_r e^{\pi i \tau r} = 1 + A_{d(\Lambda)} e^{\pi i \tau d(\Lambda)} + \ldots, \qquad (2)$$

которая голоморфна для $\tau \in H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Таким образом, тета-функция есть степенной ряд, ассоциированный с решеткой, коэффициенты которого дают число точек для каждого расстояния от начала координат.

С другой стороны, пусть C — линейный код длины n над полем F, и пусть A_r — число кодовых слов в C веса r. Тогда *весовой энумератор* кода C есть функция

$$W_C(x, y) = \sum_{u \in C} x^{n-wt(u)} y^{wt(u)} = \sum_{r=0}^{n} A_r x^{n-r} y^r =$$
$$= x^n + A_{d(C)} x^{n-d(C)} y^{d(C)} + \ldots . \qquad (3)$$

Весовой энумератор есть однородный полином степени n от двух переменных x и y, ассоциированный с кодом, коэффициенты которого дают число кодовых слов каждого расстояния от начала координат.

Иногда бывает полезно определять $A_r(u)$ для нелинейного кода C как число кодовых слов, отстоящих на расстоянии r от u.

Тета-функция и весовой энумератор содержат существенную информацию, но их трудно вычислять. Следующие две теоремы иногда облегчают это вычисление.

Теорема 2 (см., например, [36, гл. 2, § 11.3], [93, гл. VII, § 6]). *Тета-функция двоичной в решетки* $\Lambda^\perp$ *дается формулой*

$$\Theta_{\Lambda^\perp}(\tau) = (\det \Lambda) \left(\frac{i}{\tau} \right)^{n/2} \Theta_\Lambda \left(- \frac{1}{\tau} \right) \qquad (4)$$

для $\tau \in H$.

Теорема 3 (Маквильямс [61], [64]). *Пусть* C — *линейный код над полем* $GF(q)$, *содержащий* q^k *кодовых слов. Тогда весовой энумератор двоичного кода* $C^\perp$ *задается по формуле*

$$W_{C^\perp}(x, y) = q^{-k} \cdot W_C(x + (q-1) y, \; x - y). \qquad (5)$$

Обе эти теоремы следуют из общего вида пуассоновской формулы суммирования, которая утверждает, что сумма функции над линейным пространством равна сумме ее преобразования Фурье над сопряженным пространством ([36, стр. 220], [47, стр. 44], [60, стр. 153]).

Задача 4. *Теорема Маквильямса была обобщена применительно к распределению расстояний нелинейного кода* ([64], [65],[73]). *Имеется ли обобщение теоремы* 2 *для нерешетчатых упаковок?*

Удобно ввести переменную $q = e^{\pi i \tau}$, $\tau \in H$, и выразить тета-функции решеток в терминах тета-функций Якоби, определяемых следующим образом (см. [8], [87], [102], [106]):

$$\theta_1'(\tau) = \theta_1'(0 \mid \tau) = 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)\,q^{(m+1/2)2}, \tag{6}$$

$$\theta_2(\tau) = \theta_2(0 \mid \tau) = 2\sum_{m=0}^{\infty} q^{(m+1/2)^2}, \tag{7}$$

$$\theta_3(\tau) = \theta_3(0 \mid \tau) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2}, \tag{8}$$

$$\theta_4(\tau) = \theta_4(0 \mid \tau) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-q)^{m^2}. \tag{9}$$

Представления этих функций произведениями таковы:

$$\theta_1'(\tau) = 2q^{1/4}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})^3, \tag{10}$$

$$\theta_2(\tau) = 2q^{1/4}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})(1+q^{2m})^2, \tag{11}$$

$$\theta_3(\tau) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})(1+q^{2m-1})^2, \tag{12}$$

$$\theta_4(\tau) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})(1-q^{2m-1})^2. \tag{13}$$

Существует много тождеств, из которых, пожалуй, следующие наиболее полезны:

$$\theta_1'(\tau) = \theta_2(\tau)\,\theta_3(\tau)\,\theta_4(\tau), \tag{14}$$

$$\theta_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \left(\frac{\tau}{i}\right)^{1/2}\theta_4(\tau), \tag{15}$$

$$\theta_3\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \left(\frac{\tau}{i}\right)^{1/2}\theta_3(\tau), \tag{16}$$

$$\theta_2(\tau)^2 = 2\theta_2(2\tau)\,\theta_3(2\tau), \tag{17}$$

$$\theta_3(\tau)\,\theta_4(\tau) = \theta_4(2\tau)^2, \tag{18}$$

$$\theta_3(\tau)^2 + \theta_4(\tau)^2 = 2\theta_3(2\tau)^2, \tag{19}$$

$$\theta_3(\tau)^2 - \theta_4(\tau)^2 = 2\theta_2(2\tau)^2, \tag{20}$$

$$\theta_3(\tau) + \theta_4(\tau) = 2\theta_3(4\tau), \tag{21}$$

$$\theta_3(\tau) - \theta_4(\tau) = 2\theta_2(4\tau), \tag{22}$$

$$\theta_2(\tau)^4 + \theta_4(\tau)^4 = \theta_3(\tau)^4. \tag{23}$$

Формулы (15), (16) следуют также из пуассоновской формулы суммирования.

Пример 1. Самодвойственная решетка $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{R}^1$ имеет тета-функцию

$$\Theta_{\mathbb{Z}}(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2} = \theta_3(\tau). \tag{24}$$

Для этой решетки уравнение (4) следует из (16).

Пример 2. Бинарный код $C_2 = \{00, 11\}$ самодвойствен, $n=2$, $k=1$, $d(C_2)=2$, и имеет весовой энумератор

$$W_{C_2}(x, y) = x^2 + y^2 = \psi_2. \tag{25}$$

Другие примеры будут приведены в последующих параграфах.

5. КОНСТРУКЦИЯ А

Приведем простейший метод для получения сферической упаковки из кода.

Конструкция А ([54], [56], [18], [19]). Пусть C — бинарный код длины n, необязательно линейный, содержащий $|C|$ кодовых слов с минимальным расстоянием d. Мы предполагаем, что нулевое кодовое слово 0 принадлежит C. Сферическая упаковка $\Lambda(C)$ в $\mathbb{R}^n$ получается, если в качестве центров взять все те $x = (x_1, \ldots, x_n)$, для которых

$$\sqrt{2}x \pmod 2 \in C. \tag{26}$$

Таким образом, центры состоят из всех векторов, которые могут быть получены из кодовых слов с прибавлением произвольных четных чисел к компонентам (кодового слова) и последующим делением на $\sqrt{2}$. Начало координат всегда есть центр.

Пример 3. Пусть $C = \{000, 011, 101, 110\}$, $n=3$, $d=2$. Несколько центров ближайших к началу координат: $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1, \pm 1, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 2, 0, 0) \ldots$. Это есть плоскоцентрированная кубическая решетка D_3 — плотнейшая решетчатая сферическая упаковка в $\mathbb{R}^3$ ([30]).

Вообще, если $d < 4$, то центры, ближайшие к началу координат, составляют $2^d A_d(0)$ векторов типа $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1)^d 0^{n-d}$, получаемых из кодовых слов веса d. Такие центры имеют квадрат расстояния $d/2$ от начала координат. Если $d > 4$, то центрами, ближайшими к началу координат, будут $2n$ центров типа

$(\pm\sqrt{2})^1 0^{n-1}$ с квадратом расстояния 2. Наконец, если $d=4$, то оба множества центров имеют одно и то же расстояние от начала координат. Таким образом, радиусы сфер следует выбирать по формуле

$$\rho = \begin{cases} 2^{-3/2} d^{1/2}, & \text{если} \quad d \leqslant 4, \\ 2^{-1/2}, & \text{если} \quad d \geqslant 4. \end{cases} \tag{27}$$

Результирующая упаковка шаров $\Lambda(C)$ имеет τ шаров, касающихся шара, расположенного в начале координат, где

$$\tau = \begin{cases} 2^d A_d(0), & \text{если} \quad d < 4, \\ 2n + 16A_4(0), & \text{если} \quad d = 4, \\ 2n, & \text{если} \quad d > 4. \end{cases} \tag{28}$$

Эта упаковка шаров периодична (хотя не обязательно является решетчатой) и получается повторением построенного блока, состоящего из $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \ldots \times \sqrt{2}$ куба с кодовыми словами, помеченными как центры на $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \ldots \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$-кубе в одном углу. Каждая копия большого куба привносит $|C|$ шаров радиуса ρ, так что центральная плотность этой сферической упаковки есть

$$\delta = |C| \rho^n 2^{-n/2}. \tag{29}$$

Теорема 4. $\Lambda(C)$ *есть решетчатая упаковка тогда и только тогда, когда* C *есть линейный код.*

Теорема 5. *Предположим, что* C *есть линейный код размерности* k. *Тогда*

(1) $\det \Lambda(C) = 2^{\frac{1}{2}n-k}$;

(2) $\Lambda(C^\perp) = \Lambda(C)^\perp$;

(3) $\Lambda(C)$ *принадлежит типу* I *тогда и только тогда, когда* C *принадлежит типу* I;

(4) $\Lambda(C)$ *принадлежит типу* II *тогда и только тогда, когда* C *принадлежит типу* II.

Доказательство. Без ограничения общности предположим, что C имеет производящую матрицу $[I \mid B]$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & B \\ 0 & 2I \end{bmatrix}$$

есть производящая матрица для $\Lambda(C)$. Теорема теперь легко выводится.

Теорема 6 ([11], [19]). *Предположим, что* C — *линейный код с весовым энумератором* $W_C(x, y)$. *Тогда тета-функция* $\Lambda(C)$

дается формулой

$$\Theta_{\Lambda(C)}(\tau) = W_C(\theta_3(2\tau),\ \theta_2(2\tau)). \tag{30}$$

Доказательство. Рассмотрим кодовое слово $u = (u_1, \ldots, u_n)$ из C. Соответствующие центры в $\Lambda(C)$ составляют множество

$$\Lambda(u) = \left\{(y_1, \ldots, y_n) : y_r \in \frac{1}{\sqrt{2}} u_r + \sqrt{2}\mathbb{Z},\ 1 \leqslant r \leqslant n\right\}.$$

Пусть тета-функция подмножества $S \in \Lambda(C)$ имеет вид

$$\Theta_S(\tau) = \sum_{y \in S} q^{y \cdot y}.$$

Тогда из (24)

$$\Theta_{\sqrt{2}\mathbb{Z}}(\tau) = \Theta_{\mathbb{Z}}(2\tau) = \theta_3(2\tau).$$

Аналогично

$$\Theta_{\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\mathbb{Z}}(\tau) = \theta_2(2\tau).$$

Следовательно,

$$\Theta_{\Lambda(u)}(\tau) = \theta_3(2\tau)^{n-wt(u)}\theta_2(2\tau)^{wt(u)},$$

$$\Theta_{\Lambda(C)}(\tau) = \sum_{u \in C} \Theta_{\Lambda(u)}(\tau) = W_C(\theta_3(2\tau),\ \theta_2(2\tau)),$$

что и требовалось доказать.

Пример 4. Тривиальный код T_n, состоящий из всех бинарных векторов длины n, имеет $d(T_n) = 1$, $W_{T_n}(x, y) = (x+y)^n$. Это создает решетку $\frac{1}{\sqrt{2}} Z^n$, которая имеет тета-функцию $\theta_3\left(\frac{1}{2}\tau\right)^n$, удовлетворяющую тождеству

$$\theta_3(2\tau) + \theta_2(2\tau) = \theta_3\left(\frac{1}{2}\tau\right). \tag{31}$$

Равенство (3) также следует из (21), (22).

Пример 5. Аналогично в $\mathbb{R}^2$ решетка $\Lambda(C_2)$ равна $\mathbb{Z}^2$ и имеет тета-функцию, удовлетворяющую тождеству

$$\theta_3(2\tau)^2 + \theta_2(2\tau)^2 = \theta_3(\tau)^2. \tag{32}$$

Равенство (32) вытекает также из (19), (20).

Пример 6. Пусть C — код длины n, состоящий из всех 2^{n-1} векторов четного веса; $d(C) = 2$, $W_C(x, y) = \frac{1}{2}\{(x+y)^n + (x-y)^n\}$. Результирующая упаковка $\Lambda(C)$ является хорошо известной решетчатой упаковкой D_n с $\rho = 1/2$, $\tau = 2n(n-1)$, $\delta = 2^{-(n+2)/2}$ и тета-функцией

$$\Theta_{D_n}(\tau) = \frac{1}{2}\left\{\theta_3\left(\frac{1}{2}\tau\right)^n + \theta_4\left(\frac{1}{2}\tau\right)^n\right\},$$

что вытекает из (30), (21), (22). Для $n = 3$, 4, 5 это есть плотнейшие возможные решетчатые упаковки в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [16], [29], [56], [88]).

Пример 7. Пусть H_8 — обобщенный код Хемминга с параметрами $n = 8$, $k = 4$, $d(H_8) = 4$ и

$$W_{H_8}(x, y) = x^8 + 14x^4y^4 + y^8 = \psi_8 \tag{33}$$

(см., например, [64], гл. 1). Результирующая упаковка $\Lambda(H_8) = E_8$ оказывается плотнейшей возможной решетчатой упаковкой в R^8 и имеет $\rho = 2^{-1/2}$, $\tau = 240$, $\delta = 2^{-4}$ и тета-функцию

$$\begin{aligned}\Theta_{E_8}(\tau) &= \theta_3(2\tau)^8 + 14\theta_3(2\tau)^4\theta_2(2\tau)^4 + \theta_2(2\tau)^8 = \\ &= \frac{1}{2}[(\theta_3(2\tau)^2 + \theta_2(2\tau)^2)^4 + (\theta_3(2\tau)^2 - \\ &- \theta_2(2\tau)^2)^4 + 16\theta_3(2\tau)^4\,\theta_2(2\tau)^4] = \\ &= \frac{1}{2}\{\theta_2(\tau)^8 + \theta_3(\tau)^8 + \theta_4(\tau)^8\}.\end{aligned} \tag{34}$$

Это следует из (17), (21), (22) (следуя [19]). Кроме того, E_8 есть экстремальная решетка типа II (см. разд. 8). 240 векторов, ближайших к началу координат, дают 240 чисел Кэли единичной нормы, или корней системы типа E_8 ([16], [31]). Решетчатая упаковка E_7 может быть получена аналогично (см. [56]); для E_6 см. [16], [29], [56], [101].

Пример 8. В размерностях 9 — 15 превосходные нерешетчатые упаковки получаются применением конструкции A к нелинейным кодам с минимальным расстоянием 4. Здесь мы приведем лишь две иллюстрации, а за более подробной информацией отсылаем читателя к [54], [56]. (1) Имеется несколько неэквивалентных нелинейных кодов длины 11 с 72 кодовыми словами, минимальным расстоянием 4 и $A_4(0) = 34$ ([64], Гл. 1). Соответствующие сферические упаковки, совокупно обозначаемые через *P11a*, имеют $\delta = 2^{-8}\cdot 3^2 = 0{,}03515\ldots$; некоторые сферы таких упаковок касаются 566 других. (2) С другой стороны, М. Р. Бест (см. [12]) недавно обнаружил несколько неэквивалентных кодов постоянного веса, содержащих каждый 35 кодовых слов длины 11, веса 4, с расстоянием по крайней мере 4. Любой из таких видов можно преобразовать к нелинейному коду длины 11, содержащему 53 кодовых слова с $d(C) = 4$ и $A_4(0) = 35$. Результирующие сферические упаковки, обозначаемые *P11c*, имеют $\delta = 53\cdot 2^{-11} = 0{,}02588\ldots$, и некоторые их сферы касаются 582 других. (3) Для сравнения плотнейшая известная решетчатая упаковка в $\mathbb{R}^{11}$, обозначаемая K_{11}, имеет $\delta=2^{-1}\cdot 3^{-5/2}=0{,}03207\ldots$ и $\tau=432$. С другой стороны, решетчатая упаковка J_{11} в $\mathbb{R}^{11}$ с наибольшим известным константным числом имеет $\delta=2^{-5}=0{,}03125$ и $\tau=438$.

Все это приводит к мысли, что максимизация τ есть задача локальная, в то время как максимизация δ глобальная (!), и эти две задачи могут иметь различные решения даже для решетчатых упаковок. Кроме того, нерешетчатые упаковки вообще представляются лучшими для обеих задач, нежели решетчатые. Но ничего из этого пока не доказано. Лишь для $\mathbb{R}^9$ мы знаем, что наибольшее τ для решетчатых упаковок равно 272 ([104]), тогда как имеется нерешетчатая упаковка, в которой некоторые сферы касаются 306 других ([64]).

6. САМОДВОЙСТВЕННЫЕ (ТИПА I) КОДЫ И РЕШЕТКИ

На протяжении этого раздела C будет обозначать код типа I, т. е. самодвойственный бинарный линейный код, который содержит кодовые слова только четной длины.

Аналогично Λ будет обозначать решетку типа I, т. е. самодвойственную решетку, которая удовлетворяет условию $x\cdot x\in\mathbb{Z}$ для всех точек x. Мы увидим, что в этом случае весовой энумератор $W_C(x,\ y)$ и тета-функция $\Theta_\Lambda(\tau)$ сильно связаны и ведут себя похожим образом.

Действительно, из теорем 2 и 3 выводятся

Теорема 7.

$$W_C\left(\frac{x+y}{2},\ \frac{x-y}{2}\right)=W_C(x,\ y), \tag{35}$$

$$W_C(x,\ -y)=W_C(x,\ y). \tag{36}$$

Теорема 8.

$$\Theta_\Lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\left(\frac{\tau}{i}\right)^{n/2}\Theta_\Lambda(\tau), \tag{37}$$

$$\Theta_\Lambda(\tau+2)=\Theta_\Lambda(\tau). \tag{38}$$

Пусть G — произвольная конечная группа комплексных матриц размеров $m\times m$. Тогда полином $f(x)=f(x_1,\ldots,\ x_m)$ называют *инвариантным* над G, если

$$f(Tx)=f(x)\quad \text{для всех}\quad T\in G.$$

Из теоремы 7 следует, что функция $W_C(x,\ y)$ инвариантна относительно группы G_1, порожденной матрицами (как образующими)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что G_1 изоморфна диэдральной группе порядка 16, или иначе G_1 есть конечная унитарная группа, образованная симметриями, см. [94]. Сейчас имеется уже несколько способов изложения, из коих лучшим нам кажется детально представленный в [100]. Иные трактовки даны в [11], [19], [41], [62]. Следствием любого из этих подходов служит

Теорема 9 (Глисон). *Пусть C есть бинарный самодвойственный код: тогда*

$$W_C(x, y) \in \mathbb{C}[\psi_2, \xi_8], \tag{39}$$

где ψ_2 дано в (25), *а* $\xi_8 = x^2y^2(x^2-y^2)^2$.

Иными словами, это означает, что $W_C(x, y)$ однозначно представим полиномом от ψ_2 и ξ_8 — см. [50]. По поводу обобщений см. [11], [62], [63], [69], [71], [100].

С другой стороны, пусть G — произвольная подгруппа конечного индекса в $SL_2(\mathbb{R})$ и пусть χ — характер G. Комплекснозначную функцию $f(\tau)$ называют *модулярной формой веса w для G с ограничением на χ, если*

(1) $f(\tau)$ голоморфна для $\tau \in H$,

(2) $$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \left(\frac{c\tau+d}{\chi(\delta)}\right)^w f(\tau) \tag{40}$$

для каждого $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$,

(3) $f(\tau)$ голоморфна в каждой точке (cusp) G. (См., например, [43], [44], [67], [81], [87], [91], [93], [95].) Поскольку в литературе имеется много различных определений веса, стоит сказать, что в нашей терминологии форма $\Delta_{24}(\tau)$, которая генерирует числа Рамануджана, имеет вид

$$\Delta_{24}(\tau) = q^2 \prod_{m=1}^{\infty} (1-q^{2m})^{24} \tag{41}$$

и представляет собой модулярную форму веса 12 для $SL_2(\mathbb{Z})$ с ограничением на характер $\chi = 1$.

Из теоремы 8 следует, что $\Theta_\Lambda(\tau)$ есть модулярная форма веса $n/2$ и для группы G_2, образуемой посредством

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: \tau \to \tau + 2, \tag{42}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}: \tau \to -\frac{1}{\tau} \tag{43}$$

с ограничением на характер $\chi(U) = 1$, $\chi(S) = i$. Пусть M_n — комплексное векторное пространство, образованное линейной оболочкой всех модулярных форм веса $n/2$ и с ограничением на χ, и пусть $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$. Тогда M есть градуированное кольцо.

Теорема 10 (Гекке).

(a) $\dim_{\mathbb{C}} M_n = 1 + [n/8]$.

(b) *Если Λ есть самодвойственная решетка, то*

$$\Theta_\Lambda(\tau) \in \mathbb{C}[\theta_3(\tau),\ \Delta_8(\tau)], \tag{44}$$

где $\theta_3(\tau)$ дано в (8), *а $\Delta_8(\tau)$ есть форма вида*

$$\begin{aligned}\Delta_8(\tau) &= \frac{1}{16}\theta_2(\tau)^4\theta_4(\tau)^4 = -2^{-8}\theta_2\left(\frac{\tau-1}{2}\right)^8 = \\ &= q\prod_{m=1}^{\infty}\{(1-q^{2m-1})(1-q^{4m})\}^8 = \\ &= q - 8q^2 + 28q^3 - 64q^4 + 126q^5 - 224q^6 + \ldots . \end{aligned}\tag{45}$$

Доказательство. Пункт (a) следует из [81, теорема 4, стр. 1—41], поскольку из предположений следует, что $\Theta_\Lambda(\tau) \in M(2, n/2, 1)$, в обозначениях того же источника [81, p. XIV].

(в) Так как ряд Пуанкаре имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\dim_{\mathbb{C}} M_n)\lambda^n = \frac{1}{(1-\lambda)(1-\lambda^8)}, \tag{46}$$

можно надеяться отыскать базис для M, состоящий из двух алгебраически независимых модулярных форм, одной в M_1 и одной в M_8. Мы уже видели в примере 1, что $\theta_3(\tau) \in M_1$. Для формы из M_8 можно либо использовать $\Theta_{E_8}(\tau)$ из равенства (34), либо более простую форму:

$$\begin{aligned}16\Delta_8(\tau) &= \theta_3(\tau)^8 - \Theta_{E_8}(\tau) = \{\theta_3(2\tau)^2 + \theta_2(2\tau)^2\}^4 - \\ &- \{\theta_3(2\tau)^8 + 14\theta_3(2\tau)^4\theta_2(2\tau)^4 + \theta_2(2\tau)^8\} = \\ &= 4\theta_3(2\tau)^2\theta_2(2\tau)^2\{\theta_3(2\tau)^2 - \theta_2(2\tau)^2\}^2 = \\ &= \theta_2(\tau)^4\theta_4(\tau)^4 = \\ &= 16q\prod_{m=1}^{\infty}\{(1-q^{2m-1})(1-q^{4m})\}^8;\end{aligned}$$

здесь мы использовали (32), (34), (17), (19), (20), (11), (13). Алгебраическая независимость $\theta_3(\tau)$ и $\Delta_8(\tau)$ завершает доказательство.

Пример 7 (*продолжение*). Хорошо известно (напр. [81]), что ряд Эйзенштейна $E_4(\tau)$ принадлежит M_8, где

$$E_4(\tau) = 1 + 240\sum_{r=1}^{\infty}\sigma_3(r)q^{2r}, \tag{47}$$

и $\sigma_t(r)$ есть сумма t-х степеней делителей r. Поскольку оба ряда начинаются с $1+240q^2+\ldots$, то из этого следует, что $E_4(\tau)$ равно тета-функции решетки E_8. Из (34) получаем тождество

$$E_4(\tau)=\frac{1}{2}\{\theta_2(\tau)^8+\theta_3(\tau)^8+\theta_4(\tau)^8\} \qquad (48)$$

(см. [102, том II, стр. 257, рав. XXXVI (8)] [19, стр. 169]).

Теорема 11. *Если разложить* $\Delta_8(\tau)=\sum a_r q^r$, *то коэффициенты* a_r *оказываются знакопеременными и мультипликативными в том смысле, что*

$$|a_r|\cdot|a_s|=\sum_{\substack{d\mid(r,\ s)\\ d\ \text{нечетн.}}}\cdot d^3\,|a_{rs/d^2}| \qquad (49)$$

(*ср. с теоремой* 21 *ниже*).

Экстремальные коды и решетки типа I

Из теоремы 9 следует, что если $n=2j=8\mu=2\nu$, где $0\leqslant\leqslant\nu\leqslant 3$, то

$$W_C(x,\ y)=\sum_{r=0}^{\mu}a_r\psi_2^{j-4r}\xi_8^r \qquad (50)$$

для однозначно определенных целых $a_0,\ \ldots,\ a_\mu$. Допустим, что нам удалось так подобрать a_i, что правая часть (50) приняла вид

$$x^n+A^*_{2\mu+2}x^{n-2\mu-2}y^{2\mu+2}+\ldots, \qquad (51)$$

т. е. она не содержит степеней y между 0 и $2\mu+2$. Мы называем (51) *экстремальным весовым энумератором* $W^*(x,\ y)$ длины n, а код, имеющий такой весовой энумератор (если таковой имеется), — *экстремальным кодом типа* I. Если экстремальный код существует, то он имеет наибольшее минимальное расстояние среди всех кодов типа длины n.

Аналогично для решеток: пусть $n=8\mu+\nu$, где $0\leqslant\nu\leqslant 7$; пишем

$$\Theta_\Lambda(\tau)=\sum_{r=0}^{\mu}a_r\theta_3(\tau)^{n-8r}\Delta_8(\tau)^r \qquad (52)$$

и выбираем $a_0,\ \ldots,\ a_\mu$ так, чтобы правая часть (52) приняла вид *экстремальной тета-функции* размерности n:

$$1+A^*_{\mu+1}q^{\mu+1}+\ldots=\Theta^*(\tau). \qquad (53)$$

Решетка с такой тета-функцией называется *экстремальной решеткой типа I.*

Теорема 12 ([68], [70], [96]). *И в экстремальном весовом энумераторе, и в экстремальной тета-функции коэффициенты* $A^*_{2\mu+2}$ *и* $A^*_{\mu+1}$ *положительны.*

Следствие 13. *Для самодвойственного бинарного кода*

$$d(C) \leqslant 2\left[\frac{n}{8}\right]+2. \tag{54}$$

Для самодвойственной решетки

$$d(\Lambda) \leqslant \left[\frac{n}{8}\right]+1 \tag{55}$$

(из этого неравенства следует верхняя оценка для плотнссти в (1)*). Для экстремальных кодов и решеток в* (54) *и* (55) *имеет место равенство.*

Для больших значений n следствие 13 слабее, чем

Теорема 14 Макэлис и др. [74], [64, гл. 17], Левенштейн ([57], [58]). *Для всякого линейного кода* C *с* $k=n/2$

$$\frac{d(C)}{n} \lesssim 0{,}178\ldots. \tag{56}$$

Для всякой упаковки шаров в $\mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{n}\log_2\Delta \lesssim -0{,}5237\ldots. \tag{57a}$$

В частности, для решетчатой упаковки с $\Lambda=1$ *из равенств* (1), (57a) *следует, что*

$$\log_2\frac{d(\Lambda)}{n} \lesssim -\pi. \tag{57b}$$

Задача 5. *Неравенство* (56) *кажется более сильным, чем* (57b). *Имеется ли аналог таких оценок для сферических упаковок?*

Из рассмотрения (56) и (57), естественно, вытекает

Теорема 15 ([68]). *Следующий коэффициент* ($A^*_{2\mu+4}$ *или* $A^*_{\mu+2}$) *в экстремальном весовсм энумераторе и тета-функции отрицателен для всех достаточно больших* n. *Следовательно, соответствующие экстремальные коды и решетки не существуют.*

В обоих случаях первый отрицательный коэффициент появляется, когда $n=32$; например, экстремальная тета-функция для $n=32$ имеет вид

$$\Theta^*(\tau) = 1+4700160q^5-8094720q^6+\ldots.$$

Теорема 16 ([70], [84], [85], [103]). *Экстремальные самодвойственные коды типа* I *существуют тогда и только тогда, когда* $n=2, 4, 6, 8, 12, 14, 22$ *или* 24.

Однако меньше известно относительно экстремальных решеток типа I. Они существуют при $n=1-7$: $\mathbb{Z}^n$, $8: E_8$, 12: $\Lambda(B_{12})$, 14: $\Lambda(D_{14})$, где B_{12} и D_{14} — экстремальные самодвойственные коды, определяемые в [84] и при 24 (решетку Лича см. в разд. 7). Они не существуют при $n=9$, 10, 11, 13 (Кнезер [50]).

Задача 6. *Исследовать остальные значения n.*

Код Нордстрома — Робинсона.

Экстремальный весовой энумератор длины 16 имеет вид

$$x^{16}+112y^{10}y^6+30x^8y^8+112x^6y^{10}+y^{16}, \tag{58}$$

хотя и не существует линейного кода с таким весовым энуматором. Имеется, однако, *нелинейный* код с этим весовым энумератором, именно код Нордстрома — Робинсона ([80], [92], [64, гл. 2, § 8]).

Задача 7. *Существует ли нерешетчатая упаковка шаров в $\mathbb{R}^{16}$, которая является аналогом кода Нордстрома—Робинсона? Ее экстремальная тета-функция имеет вид*

$$\Theta^*(\tau)=1+7680q^3+4320q^4+276480q^5+61440q^6+\ldots, \tag{59}$$

который подтверждает, что эта упаковка может состоять из решетчатой упаковки Λ_{16} из разд. 7 вместе с 15 ее трансляциями. Имеются ли аналогичные упаковки, соответствующие кодам Кердока (см. [49], [86], [64, гл. 15, § 5,6])?

7. КОНСТРУКЦИЯ В

Конструкция А работает наилучшим образом вплоть до размерности 4, используя коды минимального веса 4. Для более высоких размерностей конструкции B и C дают лучшие результаты.

Конструкция В ([52], [53], [56]).

Пусть C — бинарный код длины n размерностн k и наименьшего веса 8, в котором вес каждого кодового слова кратен 4. Сферическая упаковка $L(C)$ получается в $\mathbb{R}^n$ взятием в качестве центров всех $x=(x_1, \ldots, x_n)$ в $\mathbb{R}^n$, для которых

1) $\sqrt{2}\times(\operatorname{mod} 2)\in C$,

2) $4 \mid \sqrt{2}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

(Такая конструкция может также быть применена к более общим кодам, но именно этот вариант охватывает наиболее важные случаи.)

Теорема 17. $L(C)$ *является решетчатой сферической упаковкой с минимальным квадратичным расстоянием, контактным числом, плотностью, детерминантом и тета-функцией:*

$$d(L(C)) = 4,$$
$$\tau = 2n(n-1) + 128A_8,$$
$$\delta = 2^{k-1-n/2},$$
$$\det L(C) = 2^{n/2+1-k},$$
$$\Theta(\tau) = \frac{1}{2} W_C(\theta_3(2\tau),\ \theta_2(2\tau)) + \frac{1}{2}\theta_4(2\tau)^n.$$

Пример 7 (продолжение). Код $\{0^8,\ 1^8\}$ вновь дает решетку E_8.

Пример 9. Код C Рида—Мюллера первого порядка при $n=16$, $k=5$, $d(C)=8$ [64, гл. 14] приводит к решетке $L(C)=\Lambda_{16}$ в $\mathbb{R}^{16}$ с $\tau=4320$ и $\delta=2^{-4}$. Это плотнейшая известная решетка в $\mathbb{R}^{16}$ (см. задачу 7).

Координатная таблица.

Для перехода к высшим размерностям можно использовать координатную таблицу ([53], [56]) точек в $\mathbb{Z}^n$. Она получается выписыванием бинарного представления компонент x в столбцы, начиная с наименьшего значимого двоичного разряда. Дополнительное обозначение используется для отрицательных целых чисел; так, например, координатная таблица $x=(-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4) \in \mathbb{Z}^9$ имеет вид

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0
.	.	.	.	.	.	.	.	.

Первая, вторая, третья и т. д. строки этой координатной таблицы вектора x называются 1-й, 2-й, 3-й, 4-й и т. д. строками соответственно.

Если мы отбрасываем $\sqrt{2}$ из конструкции, то конструкция А просто устанавливает, что центрами являются все $x \in \mathbb{Z}^n$, которые имеют 1-ю строку в C без ограничения на другие строки. Согласно конструкции В, 1-я строка вектора x должна быть в C, 2-строка должна иметь четный вес, а остальные строки не имеют ограничений.

Пример 10. Решетка Лича Λ_{24} ([53]). Пусть G_{24} — код длины n-24 типа II Голея, такой, что

$$W_{G_{24}}(x,\ y) = x^{24} + 759x^{16}x^{8} + 2576x^{12}y^{12} + 759x^{8}y^{16} + y^{24} \tag{60}$$

(см. [64, гл. 2, § 6]). Решетка Лича имеет вид

$$\Lambda_{24} = L(G_{24}) \cup (u + L(G_{24})), \tag{61}$$

где $u = 2^{-3/2}(1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ -3)$. Для ее описания иным способом умножим центры (61) на $\sqrt{2}$. Тогда эти центры состоят из двух множеств: четные центры, определяемые условием 1-я строка $= 0^{24}$, 2-я строка $\in G_{24}$, 4-я строка имеет четный вес и нечетные центры — 1-я строка $= 1^{24}$, 2-я строка $\in G_{24}$, 4-я строка имеет нечетный вес. Λ_{24} является решетчатой сферической упаковкой в $\mathbb{R}^{24}$ с $\tau = 196560$ и $\delta = 1$. Если центры задаются посредством (61), то Λ_{24} является решеткой типа II с наименьшим квадратичным уклонением $d(\Lambda_{24}) = 4$ и тета-функции вида

$$\Theta_{\Lambda_{24}}(\tau) = 1 + 196560q^{4} + 16773120q^{6} + \\ + 398034000q^{8} + 4629381120q^{10} + \ldots . \tag{62}$$

Конвей [24—27] широко исследовал этот тип решеток и его группы симметрии. Альтернативное определение было дано Маккеем [75].

Замечание. Конструкция B может быть также применена к кодам над полем $GF(3)$ [56] и $GF(4)$ [101].

8. КОДЫ ТИПА II И РЕШЕТКИ

Продолжаем начатое в § 6 изучение самодвойственных кодов и решеток. В этом разделе C будет обозначать код типа II, т. е. самодвойственный бинарный код, в котором вес каждого кодового слова кратен 4. Аналогично Λ будет обозначать решетку типа II, т. е. самодвойственную решетку, для которой $x \cdot x$ четно для всех $x \in \Lambda$. Именно здесь выявятся наиболее сильные аналогии между кодами и решетками, хотя еще и не полностью понятны связи.

Уравнения (36) и (38) можно сейчас заменить на

$$W_C(x,\ iy) = W_C(x,\ y), \tag{63}$$

$$\Theta_\Lambda(\tau + 1) = \Theta_\Lambda(\tau). \tag{64}$$

Следовательно, $W_C(x,\ y)$ есть инвариант относительно наибольшей группы G_3, порожденной $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$. Это есть конечная унитарная группа, порожденная симметриями 4 [6] 2 порядка 192 (см. [94]), и мы получаем ([100]):

Теорема 18 (Глисон). *Если C — есть код типа* II, *то*

$$W_C(x, y) \in \mathbb{C}[\psi_8, \xi_{24}], \tag{65}$$

где ψ_8 *задано из* (33), *а* $\xi_{24} = x^4 y^4 (x^4 - y^4)^4$.

Аналогично $\Theta_\Lambda(\tau)$ является модулярной формой веса $n/2$ для полной модулярной группы $SL_2(\mathbb{Z})$, порожденной S (Уравнение (43)) и $T\colon \tau \to \tau + 1$, с ограничением на характер $\chi(T) = 1$, $\chi(S) = i$. Пусть M_n и M будут такие, как в разд. 7.

Теорема 19 (Гекке). *Если Λ есть решетка типа* II, *то*

(a)
$$\dim_{\mathbb{C}} M_n \begin{cases} 1 + \left[\frac{n}{24}\right], & \textit{если} \quad 8 \mid n, \\ 0, & \textit{если} \quad 8 \nmid n; \end{cases}$$

(b)
$$\Theta_\Lambda(\tau) \in \mathbb{C}[E_4(\tau), \Delta_{24}(\tau)], \tag{66}$$

где $E_4(\tau)$ *и* $\Delta_{24}(\tau)$ *см. в* (47), (41) *или* (68).

Доказательство: (a) следует из [81, 3, стр. 1—23]. (b) Ряды Пуанкаре имеют вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\dim_{\mathbb{C}} M_n) \lambda^n = \frac{1}{(1-\lambda^8)(1-\lambda^{24})}, \tag{67}$$

и мы рассчитываем найти базис для M, состоящий из двух алгебраически независимых модулярных форм, одна в M_8 и одна в M_{24}. Мы уже имеем $E_4(\tau) \in M_8$ из (34) и (48). Применяя конструкцию A к G_{24}, получаем решетку типа II $\Lambda(G_{24})$ в $\mathbb{R}^{24}$ с тета-функцией $W_{G_{24}}(\theta_3(2\tau), \theta_2(2\tau))$. Для формы в M_{24} мы берем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{672}\{E_4(\tau)^3 - W_{G_{24}}(\theta_3(2\tau), \theta_2(2\tau))\} = \\ &\quad = \frac{1}{16}\theta_3(2\tau)^4 \theta_2(2\tau)^4 \{\theta_3(2\tau)^4 - \theta_2(2\tau)^4\}^4 = \\ &\quad = \left\{\frac{1}{2}\theta_2(\tau)\theta_3(\tau)\theta_4(\tau)\right\}^8 = \left\{\frac{1}{2}\theta_1'(0)\right\}^8 = \\ &\quad = q^2 \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{2m})^{24} = \Delta_{24}(\tau); \end{aligned} \tag{68}$$

здесь мы использовали (48), (34), (60), (17), (19), (20), (14).

Следствие 20. *Код или решетка типа* II *существует тогда и только тогда, когда n кратно* 8.

Сравнивая (65) и (66), замечаем, что $\mathbb{C}[\psi_8, \xi_{24}]$ и $\mathbb{C}[E_4(\tau), \Delta_{24}(\tau)]$ изоморфны градуированным кольцам — оба имеют ряды Пуанкаре (67). В действительности изоморфизм между ними устанавливается через (30):

$$f(x, y) \to f(\theta_3(2\tau), \theta_2(2\tau)). \tag{69}$$

К сожалению, это не подсказывает, как находить решетку с заданной тета-функцией. В действительности (69) не дает даже отображения весового энумератора кода Голея на тета-функцию решетки Лича (см. задачу 8). Бруе и Энгеяр [19] представили весьма интересные обсуждения изоморфизма между этими кольцами.

Теорема 21 (Морделл [77], см. также [81]). *В представлении* $\Delta_{24}(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) q^{2m}$ *коэффициенты* $\tau(m)$ *являются числами Рамануджана, мультипликативными в том смысле, что*

$$\tau(r)\tau(s) = \sum_{d \mid (r,s)} d^{11}\tau(rs/d^2).$$

По поводу значений $\tau(m)$ и гипотезы Рамануджана см., например, Катц [48].

Экстремальные коды и решетки типа II

Эти результаты весьма подобны результатам из раздела 6, так что мы опускаем детали. Пусть $n = 8j = 24\mu + 8\nu$, $0 \leqslant \nu \leqslant 2$. Для кодов выберем $a_0, \ldots, a_\mu$ так, что

$$\sum_{r=0}^{\mu} a_r \psi_8^{j-3r} \xi_{24}^r = x^n + A_{4\mu+4}^{*} x^{n-4\mu-4} y^{4\mu+4} + \ldots . \tag{70}$$

Это есть так называемый *экстремальный весовой энумератор*, а код, имеющий его, есть *экстремальный код типа* II длины n. Аналогично для решеток: выбираем $a_0, \ldots, a_\mu$ так, что

$$\sum_{r=0}^{\mu} a_r E_4(\tau)^{j-3r} \Delta_{24}(\tau)^r = 1 + A_{2\mu+2}^{*} q^{2\mu+2} + \ldots . \tag{71}$$

Это есть *экстремальная тета-функция*, и соответствующая ей решетка есть *экстремальная решетка типа* II размерности n.

Теорема 22 ([68], [70], [96]). *В экстремальном весовом энумераторе* (70) $A_{4\mu+4}^{*} > 0$ *для всех* n, *но* $A_{4\mu+8}^{*} < 0$ *для всех достаточно больших* n. *В экстремальной тета-функции* (71) $A_{2\mu+2}^{*} > 0$ *для всех* n, *но* $A_{2\mu+4}^{*} < 0$ *для всех достаточно больших* n.

Эти коэффициенты впервые становятся отрицательными при $n = 3720$ для кодов и $n = 41\,000$ для решеток.

Следствие 23. *Для кодов типа* II

$$d(C) \leqslant 4\left[\frac{n}{24}\right] + 4. \tag{72}$$

Для решеток типа II

$$d(\Lambda) \leqslant 2\left[\frac{n}{24}\right] + 2. \tag{73}$$

В [68] *показано, что для всякой константы* C

$$d(C) \leqslant \frac{n}{6} - C,$$

$$d(\Lambda) \leqslant \frac{n}{12} - C$$

для всех достаточно больших n. *Заметим, что* (72), (73) *сильнее, чем* (56), (57).

Экстремальному коду или экстремальной решетке соответствует равенство в (72) и (73). Известны экстремальные коды следующих длин: 8 (один код H_8 [84]); 16 (два кода [84]); 24 (один код G_{24} [33], [83], [85], [64, гл. 20]); 32 (пять кодов [28]); 40; 48; 56; 64; 80; 88; 104 (по крайней мере один код каждой длины — см. [64], рис. 19.2) и 136 [78]. Первый неясный случай $n = 72$ (см. [98]). Экстремальные весовые энумераторы для всех $n \leqslant 200$ представлены в [70].

Известны следующие экстремальные решетки:

n	8	16	24	32	40	48
Число	1	2	1	$\geqslant 1$	$\geqslant 1$	$\geqslant 2$
Название	E_8		Λ_{24}	$P32_r$		$P48_p$, $P48_q$
Ссылка	[93]	[93]	[26], [79]	§ 9	[75]	[18], [56]

Задача 8. *Из теоремы* 22 *следует, что экстремальные коды и решетки существуют лишь для конечного числа* n — *найти их!*

Задача 9. *Имеются ли сколько-нибудь интересные экстремальные нелинейные коды или решетки типа* II, *подобно, например, коду Нордстрома — Робинсона, который есть экстремальный нелинейный код типа* I?

Экстремальные коды длины, кратной 24, особенно важны с точки зрения следующей теоремы.

Теорема 24 (Ассмус и Маттсон [2]; [64, гл. 6]). *Если C — экстремальный код типа* II, *а n кратно* 24, *то кодовые слова любого ненулевого веса образуют 5-схему.*

Параметры этих схем можно определить из [70]. Например, кодовые слова минимального ненулевого веса образуют 5-схему: $v=n=24m$, $k=4m+4$ и

$$\lambda=\binom{5m-2}{m-1}.$$

Дельсарте, Гёсталс и Зейдель ([35], см. также 34]) показали, что векторы наименьшей длины в решетке Лича образуют сферическую 11-схему. Однако следующий вопрос остается открытым.

Задача 10. *Найти аналог теоремы 24 для экстремальных решеток.*

Очевидно, первый шаг состоит в изучении коэффициентов $A^*_{2\mu+2}$ (см. (71)), где n кратно 24. Первые начальные значения и их разложения на простые множители представлены в табл. 1.

Таблица 1

Старшие коэффициенты в экстремальных тета-функциях.

n	Старшие коэффициенты
24	1 9 6 5 6 0
48	5 2 4 1 6 0 0 0
72	6 2 1 8 1 7 5 6 0 0
96	5 6 5 8 6 6 3 6 2 8 8 0
120	4 5 7 9 2 8 1 9 0 7 2 0 0 0
144	3 4 8 6 1 5 7 9 6 8 3 8 4 0 0 0
168	2 5 6 2 0 6 2 7 4 2 2 5 9 0 2 0 0 0
192	1 8 4 2 2 7 2 6 0 4 7 1 6 5 4 4 0 0 0 0
216	1 3 0 5 9 8 4 4 0 7 9 1 7 6 4 6 0 9 6 6 4 0

Разложение на простые числа
$2^4\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 13$
$2^9\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13$
$2^4\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 13\cdot 19\cdot 37$
$2^{11}\cdot 3^6\cdot 5\cdot 7^3\cdot 13\cdot 17$
$2^{10}\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 31\cdot 61$
$2^{13}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13\cdot 19\cdot 37\cdot 73$
$2^4\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 11\cdot 13^3\cdot 17\cdot 29\cdot 43\cdot 7^3$
$2^{13}\cdot 3^2\cdot 5^4\cdot 7^3\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 97\cdot 4943$
$2^8\cdot 3^7\cdot 5\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 19\cdot 37\cdot 109\cdot 868891$

Из равенства (7) в [68] можно получить, что

$$A^*_{2\mu+2}=\frac{720\mu}{691(\mu+1)}\sum_{r=0}^{\mu}(r+1)\{91\sigma_{11}(r+1)+ \\ +600\tau(r+1)\}\rho_{\mu-r}^{(\mu+1)}, \qquad (74)$$

где $\rho_m^{(\mu+1)}$ есть коэффициент при q^m в q-разложении

$$\prod_{s=1}^{\infty}(1-q^s)^{-24(\mu+1)}.$$

Следствие 23 дает верхнюю оценку для кодов и решеток типа II. Имеются соответствующие нижние оценки, которые асимптотически согласуются с общими оценками (Гильберта — Варшамова [64; гл. 17] и Минковского [88, стр. 3]) для кодов и решеток:

Теорема 25 ([66], [76, стр. 47]). *Существуют коды типа* II, *для которых*

$$\frac{d(C)}{n}\gtrsim H_2^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}110. \qquad (75)$$

Существуют решетки типа II, *для которых*

$$\log_2\frac{d(\Lambda)}{n}\gtrsim-\log_2(2\pi e)=-4{,}09\ldots \qquad (76a)$$

или, эквивалентно,

$$\frac{1}{n}\log_2\Delta\gtrsim-1. \qquad (76b)$$

Доказательство (75) использует формулу для полного числа кодов типа II (ср. с [83], [85]), тогда как доказательство (76) использует масс-формулу (Зигель [95a]; [76], [93]) для суммы тета-функций решеток типа II в $\mathbb{R}^n$.

Замечание. Имеется аналогичная, хотя и менее разработанная, чем в разд. 8, теория для кодов типа III ([19], [56], [67], [69]), кодов типа IV ([63], [101]) и ассоциированных с ними решеток.

9. КОНСТРУКЦИЯ C

Этот раздел дается в кратком изложении.

Конструкция C ([55], [56]).

Предположим, что $C_0, C_1, \ldots, C_a$ — бинарные коды длины n. Упаковка шаров получается в $\mathbb{R}^n$ взятием в качестве центров всех $x\in\mathbb{Z}^n$, для которых 2^r-я строка координатной сетки x

лежит в C_r для всех $r=0, \ldots, a$, а оставшиеся строки выбираются произвольно.

Простейшее приложение получается, если в качестве C_r взять код Рида — Мюллера $2r$-го порядка. Например, если $n=32$, C_0 имеет $k=1$, $d(C_0)=32$; C_1 имеет $k=16$, $d(C_1)=8$; C_2 имеет $k=31$, $d(C_2)=2$, и мы получаем экстремальную решетчатую упаковку типа II $P32r$ ([56, § 6,5]). Эту и аналогичные упаковки см. Бернс и Уолл [7], Лич [52], [53] и Бруе и Энгияр [20].

В [18] Бруе и Энгияр описывают интересную общую конструкцию, аналогичную конструкции С, основывающуюся на флагах кодов $C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_a$.

Использование BCH кодов в конструкции С дает более плотные упаковки ([56, § 6,6]), а комбинирование BCH и кодов Джастисена [97] дает плотнейшие упаковки, какие еще были явно построены для очень больших n, имеющие

$$\log_2 \Delta \gtrsim -6n, \qquad n \to \infty. \tag{77}$$

Мы заканчиваем постановкой одной из самых важных задач.

Задача 11. *Построить упаковки, удовлетворяющие* (76).

Этот обзор основывался на многих источниках, особенно [56] и работах Бруе [18] и Бруе и Энгияра [19], где независимо описаны многие параллели между кодами и решетками. Весовые энумераторы и тета-функции вычислялись с использованием языков ALTRAN [21] и MACSYMA [72].

ДОБАВЛЕНИЯ АВТОРА К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Задача 3. Бест М. Р. показал, что $A(10, 4)=40$, $72 \leqslant A(11, 4) \leqslant 79$, $144 \leqslant A(12, 4) \leqslant 158$. Код с 40 кодовыми словами длины 10 и расстоянием Хэмминга 4 восходит (через конструкцию А) к нерешетчатой упаковке шаров $P10C$ в $\mathbb{R}^{10}$ с центральной плотностью $\delta = 5 \cdot 2^7 = 0{,}03966$, — новый рекорд и $\tau = 372$.

Задача 4 решена А. М. Одлизко и Н. Дж. Слоаном.

Задача 5 решена Кабатянским Г. А. и В. И. Левенштейном (Проблемы передачи информации, 14, 1978, № 1, 1—25).

Задача 6 решена. См. Extremal self-dual lattices exist only in dim 1—8, 12, 14, 15, 23 and 24, J. H. Conway, A. M. Odlyzko and N. J. A. Sloane, Math, 25, 1976, 36—43.

Дж.-М. Гёталс заметил, что ответ на задачу 9 отрицательный.

В самом деле, нетрудно показать, что если код типа II или решетка G дистанционно инвариантна (т. е. обладает тем свойством, что число $h \in G$ с $\mathrm{dist}(h, g) = r$ не зависит от g для всех r), то G линеен.

Парной работой к этой является работа Self-dual Codes and Lattices, N. J. A. Sloane, Proc. Sympos. Pure Math., on Relations between Comb. and other Parts of Math. (Publ. by AMS)

Примечание переводчика

В ДАН, том 246, № 6, показано, что в $\mathbb{R}^8$ $\tau = 240$, а в $\mathbb{R}^{24}$ $\tau = 196560$; там же получены и новые оценки для плотностей сферических упаковок.

Я. Пах ознакомил нас со следующей задачей:

Задача. Верно ли, что если сферическая упаковка плоскости кругами не обязательно равных радиусов такова, что всякий круг касается по крайней мере шести других, то либо радиусы всех кругов равны, либо имеется круг сколь угодно большого (или малого) радиуса?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alltop W. O. Private communication.
2. Assmus E. F., Jr., Mattson H. F., Jr. New 5-designs. J. Combinatorial Theory, 6 (1969), 122—151.
3. Assmus E F., Jr., Mattson H. F., Jr. Coding and combinatorics. SIAM Review, 16 (1974), 349—388.
4. Assmus E. F., Jr., Mattson H. F., Jr., Turyn R. J. Research to develop the algebraic theory of codes. Report AFCRL—67—0365, Air Force Cambridge Research Labs., Bedford, Mass., June 1967.
5. Baranovskii E. P. Packings, coverings, partitionings, and certain other distributions in spaces of constant curvature. Progress in Math. 9 (1971), 209—253.
6. Barnes E. S. The complete enumeration of extreme senary forms. Phil. Trans. Royal Soc., (Series A), 249 (1957), 461—506.
7. Barnes E. S., Wall G. E. Some extreme forms defined in terms of Abelian groups. J. Australian Math. Soc., 1 (1959), 47—63.
8. Bellman R. A. Brief Introduction to Theta-Functions. Holt, Rinehart and Wiston, N. Y., 1961.
9. Берлекэмп Э. Алгебраическая теория кодирования. Пер. с. англ. — М.:Мир, 1971.
10. Berlekamp E. R. Key Papers in the Development of Coding Theory. IEEE Press, N. Y., 1974.
11. Berlekamp E. R., MacWilliams F. J., Sloane N. J. A. Gleason's theorem on self-dual codes. IEEE Trans. Info. Theory 18 (1972), 409—414.
12 Best M. R., Brouwer A. E., MacWilliams F. J., Odlyzko A. M., Sloane N. J. A. Bounds for binary codes of length less than 25. IEEE Trans Info. Theory, to appear.
13. Blake I. F., editor. Algebraic Coding Theory: History and Development. Dowden, Stroudsburg, Pa., 1973.

14. Blake I. F., Mullin R. C. The Mathematical Theory of Coding. Academic Press, N. Y., 1975.
15. Blichfeldt H. F. The minimum values of positive quadratic forms in six, seven and eight variables. Math. Zeit., 39 (1935), 1—15.
16. Bourbaki N. Groupes et Algèbres de Lie, Chapitres IV, V, VI. Hermann, Paris, 1968.
17. Broué M. Le réseau de Leech et le groupe de Conway. Thèse de 3e cycle, Paris, 1970.
18. Broué M. Codes correcteurs d' erreures autoorthogonaux sur le corps à deux éléments et formes quadratiques entières définies positives à discriminant $+1$. Comptes Rendus des Journées Mathématiques de la Société Math. de France, Univ. Sci. Tech. Languedoc, Montpellier, 1974, pp. 71—108.
19. Broué M., Enguehard M. Polynômes des poids de certains codes et fonctions thêta de certains réseaux. Ann. Scient. Éc. Norm Sup., 5 (1972), 157—181.
20. Broué M., Enguehard M. Une famille infinie de formes quadratiques entières; leurs groupes d'automorphismes. Ann. Scient Éc. Norm. Sup., 6 (1973), 17—52.
21. Brown W. S., ALTRAN User's Manual. Bell Labs, Murray Hill, N. J. 4th edition, 1977.
22. Cameron P. J., Van Lint J. H. Graph Theory, Coding Theory and Block Designs. London Math. Soc. Lecture Note Series, No 19. Combridge Univ. Press, Cambridge, 1975. (Готовится русский перевод.)
23. Chaundy T. W. The arithmetic minima of positive quadratic forms (I). Quart. J. Math Oxford, 17 (1946), 166—192.
24. Conway J. H. A perfect group of order 8, 315, 553, 613, 086, 720, 000 and the sporadic simple groups. Proc. Nat. Acad. Sci., 61 (1968), 398—400.
25. Conway J. H. A group of order 8, 315, 553, 613, 086, 720, 000. Bull. London Math Soc., 1 (1969), 79—88.
26. Conway J. H. A characterization of Leech's lattice. Invent. Math., 7 (1969), 137—142.
27. Conway J. H. Three lectures on exceptional groups. Pp. 215—247 of Finite Simple Groups, edited by M. B. Powell and G. Higman. Academic Press, N. Y., 1971.
28. Conway J. H., Pless V. On the enumeration of self-dual codes. Preprint.
29. Coxeter H. S. M. Extreme-forms, Canad. J. Math., 3 (1951), 391—441.
30. Coxeter H. S. M. An upper bound for the number of equal nonoverlapping spheres that can touch another of the same size. Proc. Symoposia in Pure Math., Vol. VII, pp. 53—72. Amer. Math. Soc, Providence, R. I., 1963. Reprented in [32].
31. Coxeter H. S. M. Geometry. Lectures on Modern Mathematics, edited by T. L. Saaty. Wiley, N. Y., 1965, Vol. III. Reprinted in [32].
32. Coxeter H. S. M. Twelve Ceometric Essays. Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, Ill., and Feffer and Simons, London, 1968.
33. Delsarte P., Goethals J.—M. Unrestricted codes with the Golay parameters are unique. Discrete Math., 12 (1975), 211—224
34. Delsarte P., Goethals J.—M., Seidel J J. Bounds for systems of lines, and Jacobi polynomials. Philips Res Reports 30 (1975), 91—105.
35. Delsarte P., Goethals J.—M., Seidel J. J. Spherical codes and designs. Geometriae Dedicata, to appear.
36. Dym H., McKean H. P. Fourier Series and Integrals Academic Press, N. Y., 1972.
37. Feit W. On integral representations of finite groups. Proc. London Math. Soc. (3), 29 (1974), 633—683.
38. Fejes Tóth L. Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum.

Springer-Verlag, N. Y., 1953.
39. Fejes Tóth L. Regular Figures. Pergamon Press, Oxford, 1964.
40. Folkman J. H., Graham R. L. A packing inequality for compact convex subsets of the plane. Canad. Math Bull., 12 (1969), 745—752.
41. Gleason A. M. Weight polynomials of self — dual codes and the MacWilliams identities. Actes, Congrès Internl. de Mathematique, Gauthier-Villars, Paris, 1971, Vol. 3, pp. 211—215.
42. Graham R. L., Witsenhausen H. S., Zassenhaus H. J. On tightest packings in the Minkowski plane. Pacific J. Math., 41 (1972), 699—715.
43 Gunning R. C. Lectures on Modular Forms. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1962.
44. Hardy G. H , Ramanujan Chelsea, N. Y., 1959.
45 Hashim A. A., Pozdniakov V. S. Computerized search for linear binary codes. Electronics Letters, 12 (1976), 350—351.
46 Helgert H. J., Stinaff R. D Minimum-distance bounds for binary linear codes. IEEE Trans. Info. Theory, 19 (1973), 344—356.
47. Igusa J. Theta Functions. Springer-Verlag, N Y., 1972.
48. Katz N. M. An overview of Deligne's proof of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields. Pp. 275—305 of Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems, edited by F. Browder, Proc. Symp. Pure Math. 28. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1976.
49. Kerdock A. M. A class of low-rate nonlinear codes. Information and Control, 20 (1972), 182—187.
50. Kneser M. Klassenzahlen definiter quadratischer Formen. Arkiv der Math , 8 (1957), 241—250.
51. Leech J. The problem of the thirteen.spheres. Math. Gazette, 40 (1956), 22—23.
52. Leech J. Some sphere packings in higher space. Canad. J. Math. 16 (1964), 657—682
53. Leech J. Notes on sphere packings. Canad. J. Math., 19 (1967) 251—267.
54. Leech J., Sloane N. J. A. New sphere packings in dimensions 9—15. Bull. Amer. Math Soc., 76 (1970), 1006—1010.
55. Leech J., Sloane N. J. A New sphere packings in more than thirty-two dimensions. Proc. Second Chapel Hill Conf. on Combin. Math. and Applic., Chapel Hill, N. C., 1970, pp 345—355.
56. Leech J., Sloane N. J. A. Sphere packings and error-correcting codes. Canad. J. Math., 23 (1971), 718—745.
57. Levenshtein V. I. On the closest packing of equal spheres in n-dimensional Euclidean space (in Russian). Mat. Zametki, 18 (1975), 301—311.
58. Levenshtein V. I. Methods for obtaining bounds in metric problems of coding theory. Pp. 126—143 of Proc. 1975 IEEE — USSR Joint Workshop on Information Theory. Inst. Electrical Electronics Engrs., N. Y., 1976.
59. Lint J. H. van. Coding Theory. Lecture Notes in Math. 201, Springer-Verlag, N. Y. 1971.
60. Люмис Л. Введение в абстрактный гармонический анализ. Пер с англ. —М.:ИЛ, 1956.
61. MacWilliams F. J. A theorem on the distribution of weights in a systematic code. Bell. Syst. Tech. J., 42 (1963), 79—94.
62. MacWilliams F. J., Mallows C L., Sloane N. J. A. Generalizations of Gleason's theorem on weight enumerators of self-dual codes. IEEE Trans. Info. Theory, 18 (1972), 794—805.
63. MacWilliams F. J., Odlyzko A. M., Sloane N. J. A., Ward H. N. Self-dual codes over *GF* (4). J. Combinat. Theory, to appear.
64. MacWilliams F. J., Sloane N. J. A. The Theory of Error — Correcting Codes. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1977 (to appear).
65. MacWilliams F. J., Sloane N. J. A., Goethals J. M. The MacWilliams

Identities for Nonlinear Codes. Bell Syst. Tech. J., 51 (1972), 803—819
66. MacWilliams F. J., Sloane N. J. A. Thompson J. G. Good self-dual codes exist. Discrete Math., 3 (1972), 153—162.
67. Maher D. P. Self-orthogonal Codes and Modular Forms. Ph D. Thesis, Lehigh Univ., Bethlehem, Pa., 1976
68. Mallows C. L., Odlyzko A. M., Sloane N. J. A. Upper bounds for modular forms, lattices, and codes. J. Algebra, 36 (1975), 68—76.
69. Mallows C. L., Pless V., Sloane N. J. A. Self-dual codes over *GF* (3) SIAM J. Applied Math., 31 (1976), 649—666.
70. Mallows C. L., Sloane N J. A. An upper bound for self-dual codes Information and Control, 22 (1973), 188—200.
71. Mallows C. L., Sloane N. J. A. Weight enumerators of Self-orthogonal codes. Discrete Math., 9 (1974), 391—400.
72. Mathlab Group, M. I. T. MACSYMA Reference Manual, Version 8. Project MAC, M. I. T., Cambridge, Mass., 1975.
73 McEliece R. J. A nonlinear, nonfield vesrion of the MacWilliams identities. Unpublished notes, 1972.
74. McEliece R. J., Rodemich E. R., Rumsey H. C., Jr., Welch L. R. New upper bounds on the rate of a code via the Delsarte—MacWilliams inequalities, IEEE Trans. Info. Theory (to appear).
75. McKay J. A setting for the Leech lattice. Pp. 117—118 of Finite Groups'72, edited by T. Gagen, M. P. Hale, Jr. and E. E. Shult. North-Holland, Amsterdam, 197?.
76. Milnor J., Husemoller D. Symmetric Bilinear Forms. Springer-Verlag, N. Y., 1973.
77. Mordell L. J. On Mr. Ramanujan's empirical expansions of modular functions. Proc. Camb. Phil. Soc., 19 (1919), 117—124.
78. Moore E. H. Using the group of a code to compute its minimum weight. Preprint.
79. Niemeier H.—V. Definite quadratische Formen der Dimension 24 und Diskriminante I. J. Number Theory, 5 (1973), 142—178.
80. Nordstrom A. W., Robinson J. P. An Optimum nonlinear code. Information and Control, 11 (1967), 613—616.
81. Ogg A. Modular Forms and Dirichlet Series. Benjamin, N. Y., 1969.
82. Peterson W. W., Weldon E. J., Jr. Error-Correcting Codes. 2nd edit., M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 1972.
83. Pless V. On the uniqueness of the Golay codes. J. Combinatorial Theory, 5 (1968), 215—228.
84. Pless V. A classification of self-orthogonal codes over *GF* (2). Discrete Math., 3 (1972), 209—246.
85. Pless V, Sloane N. J. A. On the classification and enumeration of self-dual codes. J. Combinatorial Theory, 18A (1975), 313—335.
86. Preparata F. P. A class of optimum nonlinear double-error-correcting codes Information and Control, 13 (1968), 378—400.
87. Rademacher H Topics in Analytic Number Theory. Springer-Verlag, N. Y., 1973.
88. Роджерс К Укладки и покрытия. Пер. с англ.—М.:«Мир», 1968.
89. Rogers C. A Probabilistic and combinatorial methods in the study of the geometry of Euclidean spaces. Pp 497—500 of Proc. Internat. Congress Math., Vancouver, 1974.
90. Saaty T. L, Alexander J. M. Optimization and the geometry of numbers:packing and covering. SIAM Review, 17 (1975), 475—519.
91. Schoeneberg B. Elliptic Modular Functions. Springer-Verlag, N. Y., 1974.
92. Semakov N. V., Zinoviev V. A. Complete and quasi-complete balanced codes Problems of Information Transmission, 5 (No. 2, 1969) 11—13.
93. Serre J.—P. A Course in Arithmetic Springer-Verlag, N. Y., 1973.
94. Shephard G. C., Todd J. A. Finite unitary reflection groups. Canad.

J Math , 6 (1954), 274—304.

95. Shimura G. Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphi-Functions Iwanami Shoten, Japan, and Princeton Univ. Press, Princecton, N. J., 1971.

95a. Siegel C. L. Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, Annals of Math , 36 (1935), 527—606 = Gesammelte Abhandlungen, I pp, 326—405, Springer — Verlag, N Y., 1966.

96. Siegel C. L Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen. Göttingen Nach , No. 10 (1969), 87—102.

97. Sloane N. J. A. Sphere packings constructed from BCH and Justesen codes. Mathematika, 19 (1972), 183—190.

98 Sloane N J. A Is there a (72, 36) $d=16$ self-dual code? IEEE Trans. Info. Theory, 19 (1973), 251.

99. Sloane N. J. A. A Short Course on Error-Correcting Codes. Springer-Verlag, N. Y., 1975.

100. Sloane N. J. A. Error-correcting codes and invariant theory: new applications of a nineteenth-century technique. Amer. Math. Monthly 84 (1977), 82—107.

101. Sloane N. J. A. Codes over *GF* (4) and complex lattices. Preprint.

102. Tannery J., Molk J. Éléments de la théorie des Fonctions Elliptiques. 4 vols, 2nd edition, Chelsea, N. Y., 1972.

103. Ward H. N. A restriction on the weight enumerator of a self-dual code. J. Combinatorial Theory, 21A (1976), 253—255.

104. Watson G. L. The number of minimum points of a positive quadratic form. Dissertationes Math. (Warsaw), 84 (1971), 42 pages (Math. Reviews 47 (1974) $\neq$ 6610 p. 1150).

105. Watson G L. The number of minimum points of a positive quadratic form having no perfect binary section with the same minimum. Proc. London Math. Soc. (3) 24 (1972), 625—646.

106. Whittaker E. T., Watson G. N. A Course of Modern Analysis. 4th edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1963. (См. также Уиттекер Е Т , Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. Пер. с англ.— М.:Физматгиз, 1963.)

СОДЕРЖАНИЕ

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

ПРОБЛЕМЫ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА

Научный редактор А. А. Бряндинская
Мл научный редактор Л. С. Суркова
Художник А. В. Шипов
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Н. А. Иовлева
Корректор В И. Киселева

ИБ № 1991

Сдано в набор 27.11.79. Подписано к печати 03.09.80. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 1. Гарнитура латинская. Печать высокая. Объем 8,00 бум. л. Усл. печ л. 16,00. Уч.-изд. л. 14,44 Изд № 1/0530 Тираж 4400 экз. Зак 570. Цена 1 р. 10 к.

Издательство «МИР» 129820, Москва, И-110, ГСП 1-й Рижский пер., 2.

Отпечатано в Ленинградской типографии № 2 головном предприятии ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 198052, г Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29 с матриц ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского производственно-технического объединения «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.