

Kritische Theorie der freien Riefler-Hemmung.

Von

Dr.-Ing. **Hermann Bock**,
Regierungsbauführer a. D., Hamburg.

Mit 14 in den Text gedruckten Figuren.



Springer-Verlag
Berlin Heidelberg GmbH
1910.

Kritische Theorie der freien Riefler-Hemmung.

Von

Dr.-Ing. **Hermann Bock**,
Regierungsbauführer a. D., Hamburg.

Mit 14 in den Text gedruckten Figuren.



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1910

ISBN 978-3-662-38893-8

ISBN 978-3-662-39824-1 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-39824-1

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	5
Beschreibung des Rieflerganges	6
Einführung von Konstruktionsdaten	8
I. Die Elastizitätstheorie der Federn	9
A. Allgemeine Betrachtung	9
B. Einschränkende Annahmen	12
C. Schwingung und Oberschwingung des Pendels	13
D. Die Abhängigkeit des Einspannungsmomentes und der Ausbiegung vom Ausschlagwinkel	19
E. Das Momentanzentrum des Pendels	22
F. Der Isochronismus	24
G. Der gegenseitige Einfluß von Anker und Pendel	26
II. Die Beanspruchung der Federn	27
A. Die betriebsmäßige Beanspruchung	27
B. Der Einfluß von Erschütterungen	29
III. Die Querschwingungen des Pendels	31
A. Die Kreiselwirkung	32
B. Die Wirkung der Coriolisbeschleunigung	33
IV. Das Federkraftdiagramm	34
A. Die Periode der Auslösung	34
B. Die Periode der Hebung	40
1. Der Fall	41
2. Der Stoß	43
3. Die Gleitperiode	44
C. Zusammenfassung der praktischen Ergebnisse	47
D. Approximative Ermittlung der Federarbeit	48
V. Die Ankerarbeit und ihre Veränderlichkeit	49
A. Berechnung der Ankerarbeit	49
B. Die Veränderlichkeit der Ankerarbeit	51
1. Die Antriebskraft wächst	51
2. Die Ruhereibung der Klauen wächst	51
3. Die Gleitreibung wächst	51
4. Die Schwungweite des Pendels wächst	52

	Seite
VI. Der Einfluß der Hebung auf die Schwingungsdauer	52
A. Das Spiralendiagramm	52
B. Anwendung auf den freien Gang	55
VII. Der nicht stationäre Schwingungszustand des Pendels	58
A. Der Energiebedarf des Pendels	58
B. Die Zustandsgleichung	59
C. Die Relaxationsdauer des Pendels	61
D. Periodischer Antrieb	63
VIII. Zusammenstellung der wichtigsten praktischen Ergebnisse	66

Diese Arbeit wurde als Dissertation der Großherzogl. Technischen Hochschule zu Karlsruhe vorgelegt.

Einleitung.

Sonnen- und Wasseruhren, im besten Falle primitive Mechanismen mit schwingender „Wage“ waren die Hilfsmittel, mit denen man ehemals die Zeit maß und den Tag unterteilte. Nachdem aber GALILEI, angeregt durch die Schwingungen eines Kronleuchters in der Kathedrale zu Pisa, das Pendel als Meßinstrument eingeführt hatte, begann die Ära der genauen Zeitbestimmungen, die in unsern Tagen eine dem hohen Stande der gesamten Technik entsprechende Vollkommenheit erreicht haben.

Zunächst war das Pendel allerdings noch ein primitiver Apparat und nur für die Messung kleinerer Zeiträume geeignet, denn es mußte mit der Hand angestoßen und seine Schwingungen mußten gezählt werden. Es fehlte eben der Mechanismus, der beides zugleich besorgte, das Unterhalten der Schwingungen sowohl wie das Zählen derselben. Doch schon GALILEIS Sohn VINCENZ soll dem Pendel ein Räderwerk zur Erfüllung jener Obliegenheiten angegliedert haben, während andere diese Idee dem HUYGHENS zuschreiben, dem ersten Theoretiker des Schwingungsvorganges. — Dann kam die Periode der allmählichen Vervollkommnung der Mechanismen, deren wesentlichster Punkt die Konstruktion des ruhenden Ganges durch GRAHAM im Jahre 1710 war. Jahrhunderte hindurch war die Grahamhemmung ein Attribut fast jeder Präzisionsuhr, bis ihr gegen Ende des vorigen Jahrhunderts in den freien Federkraftgängen ein gefährlicher und zuletzt siegreicher Rivale entstand.

Diese neuen Hemmungen, als deren erfolgreichste und bekannteste die des Dr. RIEFLER in München zu gelten hat, erfüllen die Anforderungen, die man an eine Hemmung zu stellen berechtigt ist, in weitgehendem Maße und dürften durch andere rein mechanische Vorrichtungen kaum zu übertreffen sein, höchstens vielleicht durch elektromagnetische. Jene Anforderungen, die ich in meiner Monographie „Die Uhr, Grundlagen und Technik der Zeitmessung“

näher präzisiert habe, gipfeln in dem Satz, daß die Gleichförmigkeit der Pendelschwingung durch den Mechanismus des Uhrwerkes so wenig als möglich gestört werden darf.

Wie weit sie beim Rieflergang erfüllt sind, läßt sich daraus beurteilen, daß bei ihm tägliche Abweichungen des Ganges von seinem Mittelwerte von durchschnittlich acht Tausendsteln Sekunde und weniger mehrfach beobachtet worden sind! Wenn nun auch viel hiervon der vorzüglichen Temperaturkompensation der Pendel zugute zu rechnen ist, so macht doch sie allein noch lange nicht alles aus. Im folgenden wird vorausgesetzt, daß die Temperaturkompensation ideal sei, sowie daß Änderungen des Elastizitätsmoduls der Federn infolge von Temperaturänderungen ausgeschlossen seien.

Zu solcher Prämisse sind wir in zweifacher Hinsicht berechtigt: einmal stehen Uhren erster Qualität gewöhnlich in geschützten Räumen (eine Ausnahme hiervon macht z. B. die Riefleruhr des Königl. geodätischen Institutes zu Potsdam, die aber trotzdem mit zu den besten gehört), und dann wollen wir uns eben mit den inneren Vorgängen des Mechanismus und nicht mit exogenen Störungen befassen.

Beschreibung des Rieflerganges.

Fig. 1 stellt eine schematisierte Zeichnung des Ganges vor, in der alle kinematisch oder dynamisch unwesentlichen Details fortgelassen sind; auch sind einzelne Formen der Deutlichkeit wegen in übertriebenem Maßstabe wiedergegeben. Der Rechnung selbst werden später natürlich die richtigen Werte zugrunde gelegt werden.

Das Pendel hängt an 2 Blattfedern f , deren obere Fassung sich mittels eines Stiftes d oder sonst irgendwie auf einen Träger T stützt, der seinerseits wieder mit 2 Stahlschneiden s auf 2 ebene Achatpfannen P gelagert ist, wie der Balken einer chemischen Wage. Der Träger erweitert sich an der einen Seite zum Anker A , dessen 2 steinerne Klauen K abwechselnd in die eigentümlich geformte Verzahnung des Gangrades G einspielen. (In Wirklichkeit sind aus praktischen Gründen 2 Gangräder vorhanden, deren Wirkung aber genau dieselbe ist, wie die hier beschriebene.) Der Eingriff erfolgt „auf der Tangente“, d. h. der Winkel Radachse-Klaue-

Ankerachse ist ein rechter. Sämtliche Teile sind vergoldet, und die Zapfen laufen in Steinlagern. Die Drehachse OO des Trägers, mit andern Worten, die Verbindungslinie der Schneiden liegt ein wenig unterhalb der oberen Federfassung.

Die Arbeitsweise des Mechanismus ist folgende: sobald das Pendel auf seinem Lingsgange die Mitte (der terminus technicus lautet „Totpunkt“) um ein Geringes überschritten hat, wird der Anker infolge der entstehenden Anspannung der Tragfedern mit-

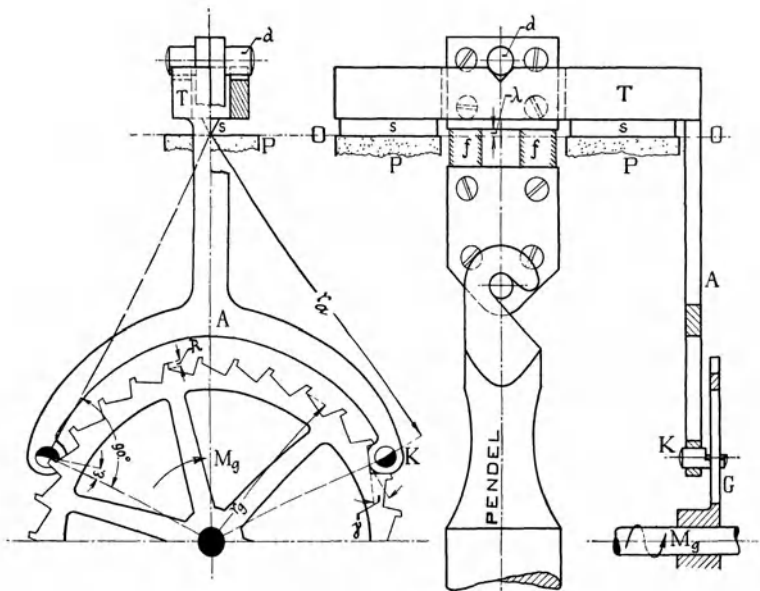


Fig. 1.

gedreht, so daß das Gangrad nach einer kurzen „Auslösungsperiode“, während der die linke Klaue an der vorspringenden „Ruhefläche“ R des Radzahnes entlang gleitet, frei wird. Infolge des auf ihn einwirkenden Antriebsmomentes M_g dreht es sich nunmehr um eine halbe Zahnteilung im Sinne des Uhrzeigers, wobei es mit seiner schrägen „Hebefläche“ die rechte Klaue nach außen treibt, bis letztere von der Ruhefläche des Zahnes erreicht ist. Während dieser „Hebungsperiode“ geht das Pendel im „Ergänzungsbogen“ ungestört weiter nach links bis zu seinem Umkehrpunkte.

Es kann auch vorkommen, daß die Klaue von der Hebeflanke über die Ruhefläche hinweggeschleudert wird, z. B. wenn die Antriebskraft zu stark ist oder bei Erschütterungen. Dann „galoppiert“ der Gang. Damit die Klauenreibung an der Ruhefläche während der Auslösung möglichst gering ausfällt, ist die Klaue um $\varepsilon = 10$ bis 12° abgescrägt, dem Reibungswinkel entsprechend. — Beim Rückgange des Pendels wiederholt sich genau derselbe Vorgang.

Die Hemmung ist fast vollständig „frei“, denn das Pendel schwingt nahezu ganz unbehelligt durch den Mechanismus, mit dem es ausschließlich durch die Tragfedern in Verbindung steht. Durch sie bekommt es auch seinen Antrieb, dessen genaue Ermittlung eine Hauptaufgabe der vorliegenden Arbeit ist.

Einführung von Konstruktionsdaten.

Im größten Teile dieser Studie ist die Rechnung zahlenmäßig vollständig durchgeführt, einmal, weil dadurch die Resultate der Untersuchung anschaulicher werden, und dann auch an manchen Stellen notgedrungen, wo die Form der mathematischen Ausdrücke eine allgemeine Lösung nicht zuließ.

Wie so oft bei der Behandlung technischer Probleme, bei denen man sich unbequemer Nebenumstände nicht einfach entledigen kann, ohne die Ergebnisse wertlos zu machen, war es auch hier gelegentlich nötig, Vernachlässigungen a priori einzuführen und sie nachher durch Stichproben nach Möglichkeit auf ihre Zuverlässigkeit zu prüfen. Solches gelingt aber meist nur bei zahlenmäßiger Behandlung.

Die meisten Rechnungen sind, der Genauigkeit ihrer Unterlagen entsprechend, mit dem logarithmischen 50 cm-Schieber und Lupe durchgeführt.

Der Übersichtlichkeit wegen schicke ich die hauptsächlichsten Konstruktionsdaten samt ihren Symbolen im Zusammenhange voraus.

Pendelgewicht	$G = 7,35 \text{ kg.}$
Schwingungsdauer	$T = 1,0 \text{ sek.}$
Trägheitsmoment, bezogen auf Dreh- achse	$J_p = 0,689 \text{ kgmsek}^2.$
Statisches Moment	$S = 0,693 \text{ kgsek}^2.$

Trägheitsradius, bezogen auf Drehachse	$k = 0,959 \text{ m.}$
Trägheitsradius, bezogen auf Schwerachse	$k_s = 0,253 \text{ m.}$
(Das Trägheitsellipsoid ist ein Rotationskörper.)	
Abstand des Pendelschwerpunktes von der Drehachse	$e = 0,925 \text{ m.}$
Reduzierte Pendellänge	$\frac{k^2}{e} = 0,994 \text{ m.}$
Breite der Federn zusammen	$b = 0,8 \text{ cm.}$
Länge „ „	$l = 0,4 \text{ cm.}$
Dicke „ „	$h = 0,01 \text{ cm.}$
Ihr äquatoriales Trägheitsmoment	$J = 0,667 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^4.$
Ihr Elastizitätsmodul	$E = 2,4 \cdot 10^6 \text{ kgcm}^{-2}.$
Trägheitsmoment des Gangrades	$J_g = 2,3 \cdot 10^{-7} \text{ kgmsek}^2.$
„ „ Ankers	$J_a = 20 \cdot 10^{-7} \text{ kgmsek}^2.$
Statisches Moment „ „	$S_a = 0,0 \text{ kgsek}^2.$
Antriebsmoment des Gangrades	$M_g = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ kgm.}$
Radius des Gangrades	$r_g = 20 \text{ mm.}$
„ „ Ankers	$r_a = 40 \text{ mm.}$
Breite der Ruhefläche	$R = 0,2 \text{ mm.}$
Größe des Falles	$F = 0,3 \text{ mm.}$
Zahl der Gangradzähne	$z = 30.$
Ruheausschlagwinkel des Ankers	$\beta = 3'.$
Maximalausschlagwinkel des Pendels	$\bar{\alpha} = 100'.$
Reibungskoeffizient von Stein auf Messing	$\mu = \text{tg } \rho = 0,18.$
Entfernung der Ankerachse von der oberen Klemmung	$\lambda = 0,6 \text{ mm.}$

Anm. Diese Zahlen entsprechen im großen und ganzen der Ausführungsform der Riefelgänge.

I. Die Elastizitätstheorie der Federn.

A. Allgemeine Betrachtung.

Das technische Pendel stellt in seiner allgemeinsten Form einen an einer doppelseitig eingespannten Blattfeder hängenden schweren Körper vor, der aus irgend einem Anfangszustande heraus

unter der Einwirkung der Feder- und der Schwerkraft Schwingungen vollzieht (Fig. 2).

H , V und M seien die an dem Federende angreifenden Kräfte und Momente, sowie S der Schwerpunkt des Körpers. Da der Ausschlagwinkel, der von der Mitte bis zum Umkehrpunkt gerechnet wird, Werte bis zu $2^{1/2}0$ erreichen kann, so ist es nicht mehr zulässig, die gewöhnliche Gleichung der elastischen Linie auf die Feder anzuwenden, der die Annahme $\frac{ds}{dx} = 1$ zugrunde gelegt ist; man ist vielmehr gezwungen, den vollen analytischen Ausdruck für den Krümmungsradius einzuführen. Vernachlässigt man die Masse der Feder gegenüber der des Körpers, so wird der Zustand der Feder durch die Differentialgleichung charakterisiert:

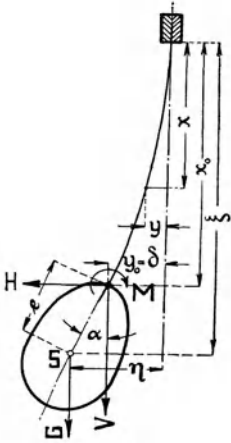


Fig. 2.

$$E \cdot J \cdot \frac{d^2 y}{d x^2} \cdot \left[1 + \left(\frac{d y}{d x} \right)^2 \right]^{3/2} = M + H \cdot (x_0 - x) - V \cdot (y_0 - y). \quad (1)$$

Vernachlässigt man weiter den Luftwiderstand, so ergibt sich der jeweilige Zustand des Körpers aus den 3 Gleichungen:

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{d^2 \xi}{d t^2} &= G - V, \\ m \cdot \frac{d^2 \eta}{d t^2} &= -H, \\ m \cdot k_s^2 \cdot \frac{d^2 \alpha}{d t^2} &= -M - V \cdot e \cdot \sin \alpha + H \cdot e \cdot \cos \alpha, \end{aligned} \quad (2)$$

worin k_s der Trägheitsradius des Körpers, bezogen auf den Schwerpunkt.

Diese 4 Gleichungen beschreiben den Schwingungszustand vollständig. Sie enthalten 11 Variable, wozu nach der Integration noch 8 willkürliche Konstanten treten würden. Um also die periodische Funktion $f(x, y, t) = 0$, durch die alle anderen Größen bestimmt sind, darstellen zu können, bedürfte es noch weiterer 13 Beziehungen, die sich teilweise aus den örtlichen und zeitlichen Anfangsbedingungen, teilweise aus geometrischen Beziehungen ergeben.

Die 4 örtlichen Bedingungen sind:

$$\begin{aligned} \text{für } x = 0 \text{ ist } y &= 0, \\ \text{„ } x = 0 \text{ „ } \frac{dy}{dx} &= 0, \\ \text{„ } x = x_0 \text{ „ } y &= y_0, \\ \text{„ } x = x_0 \text{ „ } \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Die 3 geometrischen Relationen sind:

$$\begin{aligned} \xi - x_0 &= e \cdot \cos \alpha, \\ \eta - y_0 &= e \cdot \sin \alpha, \\ \int_0^{x_0} \sqrt{dx^2 + dy^2} &= l, \end{aligned}$$

worin l die konstante Länge der Feder. Die noch fehlenden 6 Bedingungen sind zeitlicher Natur, d. h. sie geben an, welcher Art der Zustand des Systems zur Zeit $t=0$ ist. Sie könnten etwa lauten:

$$\begin{aligned} \text{für } t = 0 \text{ ist } \alpha &= 0, \\ \text{„ } t = 0 \text{ „ } \frac{d\alpha}{dt} &= \omega_0, \\ \text{„ } t = 0 \text{ „ } \eta &= 0, \\ \text{„ } t = 0 \text{ „ } \frac{d\eta}{dt} &= v_0, \\ \text{„ } t = 0 \text{ „ } \xi &= l + e, \\ \text{„ } t = 0 \text{ „ } \frac{d\xi}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Bedingungen sind so zu wählen, daß die Feder weder reißt noch ausknickt.

Setzt man diese Grenzbedingungen ein, so ergibt sich ein möglicher Schwingungszustand, und zwar derjenige, der wirklich eintritt, wenn die besagten zeitlichen Bedingungen tatsächlich erfüllt sind.

Daran, daß so viele Anfangsbedingungen notwendig sind, insbesondere auch daran, daß ω_0 und v_0 voneinander unabhängig sind, erkennt man, daß sehr viele verschiedene Schwingungsarten des Pendels möglich sind; welche von ihnen wirklich eintritt resp. sich infolge mechanischer Ursachen nach und nach von selbst einstellt, läßt sich nicht sagen, zumal ja die Integration der simultanen

Gleichungen (1) und (2) unmöglich ist. Immerhin ist obige Erkenntnis bereits von Wert.

In Wirklichkeit wird die Sachlage auch dadurch noch weiter kompliziert, daß beim freien Gange die obere Federfassung beweglich ist.

Da wir also auf direktem Wege nicht weiter kommen, werden wir im nächsten Abschnitt einige Einschränkungen einführen; wir werden dabei stets im Auge zu behalten haben, daß es sich um eine approximative Lösung handelt, die in extremen Fällen sinnlos werden kann.

B. Einschränkende Annahmen.

Wir setzen voraus, daß der Ausschlagwinkel α des Pendels so klein bleibt, daß man unbedenklich $\sin \alpha = \alpha$ und $\cos \alpha = 1$ setzen kann, d. h. wir wenden die sog. „Methode der kleinen Schwingungen“ an. Die zweite Einschränkung ist die gewaltsamere.

Einen Ausschlag von $100'$ kann man bei feinen Präzisionsuhren im allgemeinen als obere Grenze ansehen. Nun ist:

$$\begin{aligned} 100' &= 0,0290893, \\ \sin 100' &= 0,0290847, \\ \cos 100' &= 0,99958. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Zahlen kann man sich ein Bild von der Größenordnung der Fehler machen, die mit der Einschränkung verbunden sind. Solange es sich um die Behandlung der elastischen Reaktionen der Feder handelt, ist sie ohne weiteres zulässig; dagegen reicht das Verfahren nicht aus zur Klärung der Frage des Isochronismus, weil dieser bei kleinen Schwingungen eo ipso gewährleistet ist.

Aus der Einschränkung ergeben sich sofort einige Folgerungen:

1. Da nunmehr das dem Sinus von α proportionale Drehmoment der Schwere dem Winkel selbst proportional gesetzt wird, außerdem aber für die elastische Wirkung der Aufhängung dasselbe gilt, so kann man jetzt die Pendelbewegung als reine Sinusversus-Bewegung auffassen. Hierin liegt weiter die stillschweigende Voraussetzung, daß die Bewegung so erfolge, als ob sie einen festen Drehpunkt hätte; das ist nun zwar nicht der Fall, da aber die Länge der Feder etwa 300mal kleiner ist als die des Pendels, so ist doch die Abweichung von der reinen Drehbewegung

sicher sehr klein. Wo wir uns den ideellen Pendeldrehpunkt hinzuzudenken haben, wird sich später zeigen; jedenfalls liegt er unterhalb der oberen Federfassung. Vergl. auch Seite 23.

Versteht man unter $\bar{\alpha}$ den maximalen Ausschlagwinkel und unter T die Schwingungsdauer, d. h. die zwischen zwei Umkehrpunkten liegende Zeit, so bestehen nach Obigem für die Pendelbewegung folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}\alpha &= \bar{\alpha} \cdot \sin \frac{t}{T} \cdot \pi, \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \omega = \bar{\alpha} \cdot \frac{\pi}{T} \cdot \cos \frac{t}{T} \cdot \pi, \\ \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= \frac{d\omega}{dt} = -\bar{\alpha} \cdot \frac{\pi^2}{T^2} \cdot \sin \frac{t}{T} \cdot \pi = -\frac{\pi^2}{T^2} \cdot \alpha.\end{aligned}\tag{3}$$

ω ist die Winkelgeschwindigkeit und $\frac{d\omega}{dt}$ die Winkelbeschleunigung des Pendels.

2. Da wir übereingekommen sind, $\cos \alpha = 1$ zu setzen, so können wir erst recht den auf die Pendelfeder bezogenen Ausdruck $\frac{dx}{ds} = 1$ setzen, denn dieser erreicht nur an der untersten Stelle der Feder dieselbe Abweichung von 1 wie $\cos \alpha$, wie Fig. 2 zeigt. Mit anderen Worten, wir können den Krümmungsradius der Feder umgekehrt proportional $\frac{d^2y}{dx^2}$ setzen und die gewöhnliche Gleichung der elastischen Linie zur Anwendung bringen.

Die Feder ist also nach dieser Auffassung als beiderseits eingespannter, auf Zug und Biegung beanspruchter, statisch unbestimmter Stab zu behandeln.

C. Schwingung und Oberschwingung des Pendels.

Wendet man die unter B vorgesehenen Einschränkungen auf die Gleichungen (2) an, so folgt:

$$\begin{aligned}m \cdot \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= 0, \\ m \cdot \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= -H, \\ m \cdot k_s^2 \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} &= -M - G \cdot e \cdot \alpha + H \cdot e.\end{aligned}\tag{4}$$

Außerdem ist natürlich nach Fig. 2:

$$\eta = \delta + e \cdot \alpha.$$

Die erste Gleichung ist identisch mit der Bestimmung $\cos \alpha = 1$, d. h. man stellt sich die Bewegung des Pendelschwerpunktes als geradlinig vor. Das Pendel ist also jetzt aus einem System mit drei Freiheitsgraden ein solches mit zweien geworden.

Ehe man jedoch an die Lösung dieses Gleichungssystems gehen kann, muß man mit Hilfe der Gleichung der elastischen Linie zunächst die Beziehungen zwischen M , H , δ und α feststellen. Wir geben die Rechnung das erstmal ausführlich an. Die Gleichung der elastischen Linie lautet nach Gleichung (1) unter Berücksichtigung der ausgemachten Annäherungen:

$$E \cdot J \cdot \frac{d^2 y}{d x^2} = M + H(l - x) - G \cdot (\delta - y) \quad (5)$$

oder abgekürzt:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - a \cdot y = b - c \cdot x, \quad \text{wolin} \quad (5')$$

$$a = \frac{G}{E \cdot J},$$

$$b = \frac{M + H \cdot l - G \cdot \delta}{E \cdot J},$$

$$c = \frac{H}{E \cdot J}.$$

Da die Gleichung nur für einen bestimmten Zeitpunkt gilt, so stellen wir uns unter δ irgend einen der möglichen Werte vor, der zunächst als konstant aufzufassen ist. Später sind wir allerdings zu einem andern Verfahren gezwungen.

Weil die rechte Seite der Gleichung (5'), die sog. Störungsfunktion, eine ganze rationale Funktion und die Differentialgleichung von der zweiten Ordnung ist, so ist nach der Theorie der Anteil der Störungsfunktion in der Integralgleichung von der Form $P \cdot x + Q$ und das allgemeine Integral lautet demnach:

$$y = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x} + P \cdot x + Q. \quad (6)$$

r ergibt sich in bekannter Weise aus:

$$r^2 - a = 0 \quad \text{zu} \quad r = \pm \sqrt{a}.$$

Mithin wird:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \sqrt{a} \cdot e^{\sqrt{a}x} - C_2 \sqrt{a} \cdot e^{-\sqrt{a}x} + P.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1 a \cdot e^{\sqrt{a}x} + C_2 \cdot a \cdot e^{-\sqrt{a}x}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (5') ein, so folgt:

$$-aP \cdot x - aQ = b - c \cdot x.$$

Da dies für jeden Wert von x Geltung haben soll, so folgt durch Koeffizientenvergleichung:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{H}{G},$$

$$Q = -\frac{b}{a} = \delta - \frac{M + H \cdot l}{G}. \quad (7)$$

Hiermit ist die allgemeine Integration vollzogen.

Durch Berücksichtigung der 4 Grenzbedingungen bekommen wir die Bestimmungsgleichungen für die 4 Unbekannten C_1 , C_2 , M und H . Da die obere Federfassung gemäß Fig. 2 zunächst als fest vorgestellt wird, ist

$$\begin{aligned} \text{für } x = 0 & \quad y = 0, \\ \text{„ } x = 0 & \quad \frac{dy}{dx} = 0, \\ \text{„ } x = l & \quad y = \delta, \\ \text{„ } x = l & \quad \frac{dy}{dx} = \alpha. \end{aligned}$$

α bedeutet den Ausschlagwinkel des Pendels. Durch Einsetzen folgt:

$$0 = C_1 + C_2 + \delta - \frac{M + H \cdot l}{G},$$

$$0 = C_1 \sqrt{a} - C_2 \sqrt{a} + \frac{H}{G},$$

$$\delta = C_1 e^{\sqrt{a}l} + C_2 e^{-\sqrt{a} \cdot l} + \frac{H}{G} \cdot l + \delta - \frac{M + H \cdot l}{G},$$

$$\alpha = C_1 \sqrt{a} \cdot e^{\sqrt{a} \cdot l} - C_2 \sqrt{a} e^{-\sqrt{a} \cdot l} + \frac{H}{G}.$$

Durch Elimination der C ergeben sich für H und M Ausdrücke von der Form:

$$\begin{aligned} H &= G \cdot (A \cdot \delta - B \cdot \alpha) \text{ kg,} \\ M &= G \cdot (C \cdot \alpha - D \cdot \delta) \text{ mkg.} \end{aligned} \quad (8)$$

Setzt man in obige Bestimmungsgleichungen statt der allgemeinen Werte die auf Seite 9 angegebenen konstruktiven Zahlenwerte ein, so wird:

$$\begin{aligned} G \cdot A &\sim 5200 \text{ m}^{-1} \text{ kg,} & G \cdot B &\sim 6,7 \text{ kg,} \\ G \cdot C &\sim 0,02 \text{ mkg,} & G \cdot D &\sim 6,7 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Setzt man weiter die für H und M gefundenen Ausdrücke in die Gleichungen (4), Seite 13, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Relation $\eta = \delta + e \cdot \alpha$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta}{dt^2} + e \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} &= g \cdot [B \alpha - A \delta], \\ k_s^2 \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} &= g [D \delta - C \alpha] - g \cdot e \alpha + g \cdot e [A \delta - B \alpha]. \end{aligned} \quad (9)$$

Diese simultanen Gleichungen beschreiben die Bewegung unter den eingeführten Einschränkungen.

Man substituiere δ aus der 2. in die 1. Gleichung; es ergibt sich dabei eine Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{d^4 \alpha}{dt^4} + E \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + F \cdot \alpha = 0, \text{ worin} \quad (10)$$

$$E = \frac{g}{k_s^2} \cdot [C + e \cdot (1 + B + D + eA) + A k_s^2] \text{ sek}^{-2}, \quad (11)$$

$$F = \frac{g^2}{k_s^2} [A \cdot (C + e) - B \cdot D] \text{ sek}^{-4}.$$

Setzt man die gefundenen Zahlenwerte ein, so wird:

$$\begin{aligned} E &\sim 10^5 \text{ sek}^{-2}, \\ F &\sim 9,9 \cdot 10^5 \text{ sek}^{-4}. \end{aligned}$$

Das allgemeine Integral von (10) ist:

$$\alpha = C_1 \cdot e^{r_1 t} + C_2 \cdot e^{r_2 t} + C_3 \cdot e^{r_3 t} + C_4 \cdot e^{r_4 t}. \quad (12)$$

Die r ergeben sich in bekannter Weise aus der „charakteristischen“ Gleichung:

$$r^4 + E r^2 + F = 0.$$

Da sie quadratisch in r^2 ist, so wird:

$$r = \pm \sqrt{-\frac{E}{2} \pm \sqrt{\frac{E^2}{4} - F}} \text{ sek}^{-1}. \quad (13)$$

Wie die Zahlenwerte zeigen, ist der Radikand der kleinen Wurzel stets positiv; r^2 ist also immer reell und negativ. Nennt man die beiden Werte des Radikanden der großen Wurzel $-\psi_1^2$ und $-\psi_2^2$, so wird:

$$r = \pm i \cdot \psi \text{ sek}^{-1}.$$

Damit geht (12) unter Berücksichtigung der Relation $\cos \psi \pm i \cdot \sin \psi = e^{\pm i \psi}$ über in:

$$\alpha = C^I \cdot \cos \psi_1 t + C^{II} \cdot \sin \psi_1 t + C^{III} \cdot \cos \psi_2 t + C^{IV} \cdot \sin \psi_2 t. \quad (14)$$

Man hat es also mit 2 übereinander gelagerten Schwingungen zu tun, deren Schwingungsdauern die Werte $\frac{\pi}{\psi_1}$ und $\frac{\pi}{\psi_2}$ Sekunden haben.

Rechnet man sich die Werte von ψ mit Hilfe des Binomialsatzes aus (13) aus, so bekommt man für die Schwingungsdauern der beiden Wellen ~ 1 und $\sim 0,01$ sek; die erste ist natürlich die gewöhnliche Pendelschwingung — eine Spur beschleunigt durch die elastische Direktionskraft der Aufhängung — und die zweite hat man sich so vorzustellen, daß das obere Ende der Pendelstange in seitlicher Richtung hin und her schwankt, während der Pendelschwerpunkt sozusagen stillsteht.

Um angeben zu können, ob und unter welchen Umständen ein Verschwinden dieser Oberschwingung möglich ist, müssen wir noch δ und η als Funktionen der Zeit darstellen.

Differenziert man den Ausdruck (14) zweimal und setzt das Resultat in die 2. Gleichung des Systems (9) ein, so bekommt man sofort:

$$\begin{aligned} \delta = & \frac{C + e + Be - \frac{k_s^2}{g} \cdot \psi_1^2}{D + eA} \cdot [C^I \cdot \cos \psi_1 t + C^{II} \cdot \sin \psi_1 t] \\ & + \frac{C + e + Be - \frac{k_s^2}{g} \cdot \psi_2^2}{D + eA} \cdot [C^{III} \cdot \cos \psi_2 t + C^{IV} \cdot \sin \psi_2 t]. \quad (15) \end{aligned}$$

Ebenso leicht bekommt man η mit Hilfe der Beziehung $\eta = \delta + e \cdot \alpha$ aus (14) und (15):

$$\begin{aligned} \eta = & \left[\frac{C + e + eB - \frac{k_s^2}{g} \cdot \psi_1^2}{D + eA} + e \right] \cdot \left[C^I \cos \psi_1 t + C^{II} \sin \psi_1 t \right] \\ & + \left[\frac{C + e + eB - \frac{k_s^2}{g} \cdot \psi_2^2}{D + eA} + e \right] \cdot \left[C^{III} \cos \psi_2 t + C^{IV} \sin \psi_2 t \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

Wählt man nunmehr die Anfangsbedingungen so, daß für $t = 0$ $\alpha = 0$ und $\delta = 0$, sowie $\frac{d\alpha}{dt} = \omega_0$ und $\frac{d\eta}{dt} = v_0$, so geht das Pendel zur Zeit null lotrecht durch die Mitte, und die Bestimmungsgleichungen für die C lauten:

$$1. \quad 0 = C^I + C^{III},$$

$$0 = (C + e + B e) \cdot (C^I + C^{III}) - \frac{k_s^2}{g} (C^I \psi_1^2 + C^{III} \psi_2^2),$$

oder einfacher:

$$2. \quad 0 = C^I \psi_1^2 + C^{III} \psi_2^2.$$

$$3. \quad \omega_0 = C^{II} \psi_1 + C^{IV} \psi_2.$$

$$v_0 = (C^{II} \psi_1 + C^{IV} \psi_2) \cdot \left[\frac{C + e + B e}{D + e A} + e \right]$$

$$- \frac{k_s^2}{g} \cdot \frac{1}{D + e A} \cdot [C^{II} \psi_1^3 + C^{IV} \psi_2^3],$$

oder einfacher:

$$4. \quad v_0 = \frac{\omega_0 \cdot [C + e(1 + B + D + e A)] - [C^{II} \psi_1^3 + C^{IV} \psi_2^3] \cdot \frac{k_s^2}{g}}{D + e A}$$

Aus 1 und 2 folgt zunächst:

$$C^I = C^{III} = 0.$$

Wird $\frac{\pi}{\psi_2}$ als die Hauptschwingung angesehen und soll die Oberschwingung $\frac{\pi}{\psi_1}$ verschwinden, so braucht nur noch C^{II} gleich null zu werden. Eliminiert man C^{IV} aus 3 und 4, so bekommt man einen Ausdruck für C^{II} , der dann verschwindet, wenn:

$$v_0 = \omega_0 \frac{C + e \cdot (1 + B + D + A e) - \frac{k_s^2}{g} \cdot \psi_2^2}{D + A e} \quad (17)$$

Dies ist also die gesuchte Bedingung dafür, daß die Oberschwingung verschwindet. Sie ist praktisch leicht zu erfüllen, denn $\frac{v_0}{\omega_0}$, d. h. die Entfernung des Schwerpunktes von dem erforderlichen Momentanzentrum, ist fast genau gleich e . Mit andern Worten: die erforderliche Anfangsbewegung liegt durchaus innerhalb des normalen Zustandes.

Diese Erkenntnis ist von großer Tragweite; wir können nämlich von nun an so rechnen, als ob tatsächlich gar keine Ober-

schwingung vorhanden wäre. Sollte sie einmal aus irgend einem Grunde entstehen, so wird sie infolge der Luftdämpfung rasch zu null abklingen, falls sie nicht durch eine dauernde Ursache immer von neuem eingeleitet wird. Diese ist aber bei den Federkraftgängen zweifellos in geringerem Maße vorhanden als bei den gewöhnlichen Hemmungen, denn der Antrieb erfolgt hier nicht durch einen harten seitlichen Druck auf die Pendelstange, sondern nur durch ein durch die Feder dem Pendel übermitteltes Kräftepaar.

In dem Vorhandensein des elastischen Zwischengliedes zwischen Uhrwerk und Pendel liegt ein Hauptvorzug der Federkraftgänge; es schützt das Pendel vollständig gegen gewaltsame äußere Einflüsse. Der Gedanke, den Zusammenhang zwischen Pendel und Werk auf die Aufhängefeder zu beschränken, ist der Ausgangspunkt des ganzen Fortschritts.

D. Die Abhängigkeit des Einspannungsmomentes und der Ausbiegung vom Ausschlagwinkel.

Vergl. Fig. 3. Da wir jetzt wissen, daß wir von Oberschwingungen absehen können, so fassen wir die Pendelbewegung definitiv als reines Sinusversus-Gesetz auf und führen die Gleichungen (3), Seite 13, ein.

Dadurch ist zunächst die Seitenkraft H bestimmt; sie läßt sich folgendermaßen ermitteln: an jedem Massenelement dm (vergl. Fig. 4) wirkt außer der Schwerkraft $g \cdot dm$ ein infolge der negativen Winkelbeschleunigung stets nach auswärts gerichteter Trägheitswiderstand $dK = r \cdot \frac{d\omega}{dt} dm$, worin $\frac{d\omega}{dt}$ als Absolutwert einzuführen ist. Dessen Komponenten sind:

$$dK_1 = y \cdot \frac{d\omega}{dt} dm \text{ kg,}$$

$$dK_2 = x \cdot \frac{d\omega}{dt} dm \quad ,$$

oder:

$$K_1 = \frac{d\omega}{dt} \cdot \int y \cdot dm = 0,$$

denn die Mittellinie ist zugleich eine Symmetrale.

$$K_2 = \frac{d\omega}{dt} \cdot \int x \cdot dm = \frac{d\omega}{dt} \cdot S,$$

worin S das statische Moment des Pendels. K_2 werde wieder in 2 Komponenten zerlegt, von denen die horizontale $K_2 \cdot \cos \alpha = K_2$ gesetzt werden kann, während die vertikale $K_2 \cdot \sin \alpha$ gegenüber dem Gewicht G vernachlässigbar ist, ebenso wie die bis jetzt noch nicht erwähnte Zentripetalkraft, die nur 0,8⁰/₁₀₀ des Gewichtes ausmacht[†].

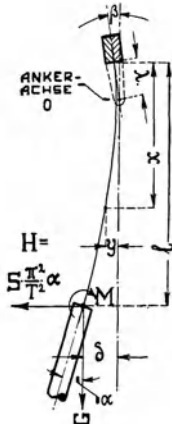


Fig. 3.

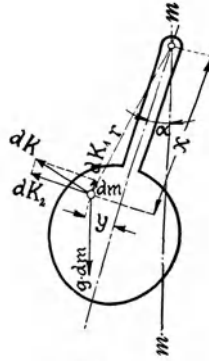


Fig. 4.

$K_2 \cdot \cos \alpha$ ist aber die gesuchte Seitenkraft H , und es gilt:

$$H = \frac{d\omega}{dt} \cdot S \text{ kg.} \quad (18)$$

Setzt man den Wert für $\frac{d\omega}{dt}$ aus (3) ein, so folgt:

$$H = \frac{\pi^2}{T^2} \cdot S \cdot \alpha \text{ kg.} \quad (19)$$

Anm. Nebenbei sei bemerkt, daß die Kraft K_2 durch den Schwingungspunkt geht, denn es ist:

$$\frac{M_{K_2}}{K_2} = \frac{\frac{d\omega}{dt} \cdot \int x^2 \cdot dm}{\frac{d\omega}{dt} \cdot \int x \cdot dm} = \frac{J_p}{S} = \frac{k^2}{e}.$$

Da H jetzt gegeben ist, so sind in der natürlich auch nun noch geltenden Integralgleichung (6), Seite 14, die Werte C_1 , C_2 , δ und M als Unbekannte aufzufassen, d. h. mit Hilfe der Grenzbedingungen zu eruiieren. Die Ausdrücke $\delta = f(\alpha)$ und $M = F(\alpha)$ werden uns dann bei späteren Untersuchungen als Grundlage dienen.

Versteht man unter β den Winkel, den der in Ruhe befindliche Anker mit der Lotrechten bildet, sowie unter λ (vergl. Fig. 3) die Entfernung der Ankerdrehachse von der oberen Federfassung, so sind die Grenzbedingungen nunmehr folgende:

$$\begin{aligned} \text{für } x = 0 \text{ ist } & y = \lambda \cdot \beta, \\ \text{.. } x = 0 \text{ .. } & \frac{dy}{dx} = -\beta, \\ \text{.. } x = l \text{ .. } & y = \delta, \\ \text{.. } x = l \text{ .. } & \frac{dy}{dx} = \alpha. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Forderungen in die Integralgleichung (6) bzw. in ihren Differentialquotienten erhält man 4 Bestimmungsgleichungen für C_1 , C_2 , M und δ .

Durch Auflösung derselben ergeben sich für M und δ die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} M &= G \cdot \frac{\left[(1-U) \cdot \left(e^{\sqrt{a} \cdot \frac{l}{2}} - e^{-\sqrt{a} \cdot \frac{l}{2}} \right)^2 + 2 \right] \cdot \alpha + 2\beta}{\sqrt{a} \cdot \left(e^{\sqrt{a} \cdot l} - e^{-\sqrt{a} \cdot l} \right)} \text{ mkg}, \\ \delta &= \left[U \cdot l - \frac{2U-1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{e^{\sqrt{a} \cdot l} - 1}{e^{\sqrt{a} \cdot l} + 1} \right] \cdot \alpha \\ &+ \left[\lambda - \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{e^{\sqrt{a} \cdot l} - 1}{e^{\sqrt{a} \cdot l} + 1} \right] \cdot \beta \text{ m.} \end{aligned} \quad (20)$$

U ist abkürzungsweise für $\frac{\pi^2}{T^2} \cdot \frac{e}{g} = \frac{e^2}{k^2}$ geschrieben.

Führt man in die Gleichungen (20) die auf Seite 9 angegebenen Zahlenwerte ein, so bekommt man:

$$\begin{aligned} M &= (21 \cdot \alpha + 14,5 \cdot \beta) \cdot 10^{-4} \text{ mkg}, \\ \delta &= (26 \cdot \alpha - 7 \cdot \beta) \cdot 10^{-4} \text{ m.} \end{aligned} \quad (20')$$

Für jedes α ist jetzt sowohl M wie δ bekannt. Außerdem können wir für unseren Spezialfall die numerische Gleichung der

elastischen Linie der Feder nunmehr angeben, indem wir die gefundenen Werte für C_1 , C_2 , M und δ in die Gleichung (6) einführen:

$$\begin{aligned} y &= (13 \cdot \alpha + 6,6 \cdot \beta) \cdot e^{678 \cdot x} \cdot 10^{-6} \\ &+ (13,9 \cdot \alpha + 14,8 \cdot \beta) \cdot e^{-678 \cdot x} \cdot 10^{-4} \\ &+ 0,93 \cdot \alpha \cdot x \\ &- 0,0014 \cdot \alpha \\ &- 0,0009 \cdot \beta \text{ m.} \end{aligned}$$

Übrigens hätten wir die Relationen (20) auch direkt aus den Ergebnissen des Abschnittes C ableiten können, wenn wir dort nicht von der Einschränkung $\beta = 0$ Gebrauch gemacht hätten. Das hätte aber die Untersuchung sehr verwickelt gestaltet.

Wären die Tragfedern einfache, durch ein Kräftepaar beanspruchte Blattfedern, so würde:

$$M = \frac{EJ}{l} \cdot \alpha = \frac{0,16 \cdot 10^{-4}}{0,004} \cdot \alpha = 0,004 \cdot \alpha \text{ mkg}$$

sein. Infolge des Hinzutretens der Kräfte G und H wird die Sachlage jedoch wesentlich anders.

Aus der Formel (20) für M erhellt die beachtenswerte Tatsache, daß M nicht dann zu null wird, wenn das Pendel durch die Mittelebene des Ankers hindurchgeht, d. h. wenn $\alpha = -\beta$ wird, sondern bereits bei erheblich kleinerem α .

E. Das Momentanzentrum des Pendels.

Wie jede ebene Bewegung, hat auch die des Pendels ein Momentanzentrum oder Pol, den jeweiligen Berührungspunkt einer festen und einer beweglichen, d. h. mit dem Pendel verbunden gedachten Polbahn. Die Kenntnis derselben wäre praktisch insofern von Interesse, als sie einen Schluß gestatten würde auf den Grad des erreichten Isochronismus, von dem in der Praxis so viel die Rede ist. Bekanntlich müßte die feste Polbahn eine mit einem Kreise von einem Radius gleich einem Viertel der reduzierten Pendellänge auf einer horizontalen Geraden erzeugte Zykloide sein, wenn der Schwingungspunkt eine Tautochrone beschreiben sollte; die bewegliche Polbahn wäre dann die Achse des Pendels und die feste würde zur Evolute, d. h. Krümmungsmittelpunkt und Pol fielen stets zusammen.

Anm. Streng würde aber auch dann der Isochronismus nicht erreicht sein, denn das Pendel ist kein Massenpunkt, d. h. kein Körper vom kleinsten Trägheitsmoment Null, und die elastische Wirkung der Feder stört ebenfalls.

Unsere Annäherungstheorie gestattet aber keinen Schluß auf die Form der Polbahnen; sie erlaubt eben nur, die Lage des Pols für sehr kleine Ausschlagwinkel zu bestimmen, da sie bloß für solche mit voller Schärfe zutrifft.

Der oberste Punkt der Pendelstange, d. h. die untere Federfassung, besitzt eine Horizontalgeschwindigkeit $v = \frac{d\delta}{dt}$ und eine Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$. Folglich liegt der Pol um die Strecke $x = \frac{v}{\omega}$ über der Fassung.

1. Während der Ergänzungsbögen, wo β konstant ist, ist nach Gleichung (20):

$$x = \frac{d\delta}{d\alpha} = U \cdot l - \frac{2U-1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{e^{\sqrt{a} \cdot l} - 1}{e^{\sqrt{a} \cdot l} + 1}; \quad (21)$$

das ergibt in Zahlen 2,6 mm, d. h. der Pol liegt um $4 - 2,6 = 1,4$ mm unterhalb der oberen Fassung.

2. Während der Auslösung und des Falles dagegen dreht sich das Pendel sozusagen um die Schneiden des Ankers. Diese Periode umfaßt aber noch nicht 10 % der gesamten Schwingungsbahn, und die durch die Schneidenreibung und ihre Veränderlichkeit verursachte Störung ist somit nur ganz geringfügig. Dazu kommt, daß die fragliche Periode nahezu in der Mitte der Bahn liegt, wo das Pendel am unempfindlichsten ist. Vergl. Seite 55. Diese beiden Umstände sind zweifellos mit die Hauptgründe für die vorzüglichen Leistungen des freien Ganges.

3. Während der Hebungsperiode endlich ist sowohl α als auch β variabel, und die Strecke x nimmt den Wert an:

$$x = 0,0026 - 0,0007 \cdot \frac{d\beta}{d\alpha}.$$

Wie sich später zeigen wird, ist $\frac{d\beta}{d\alpha}$ nahezu konstant; also auch während der Hebung hat der Pol eine annähernd feste Höhenlage; sie liegt aber unterhalb der für die Ergänzungsbögen angegebenen, und zwar nicht unbeträchtlich, denn $\frac{d\beta}{d\alpha}$ ergibt sich rund zu 4,8.

Da sowohl der Beginn wie auch der Schluß der Hebung mit einem Stoß vor sich geht, so treten in der Wechselgeschwindigkeit

des Poles zweifellos Unstetigkeiten auf, die zum Eintritt der früher erwähnten Oberschwingungen Anlaß geben können. Hieraus ergibt sich zunächst die praktische Forderung, die Antriebsstärke nicht größer als gerade noch ausreichend zu machen, damit die Stöße möglichst milde ausfallen. (Vergl. S. 47.)

Die Unstetigkeiten sind aber durchaus nicht notwendig, wie die Betrachtung der Gleichung (20) für δ zeigt. Es läßt sich nämlich unschwer erreichen, daß der Koeffizient von β verschwindet und damit auch die Abhängigkeit der Pollage von der Hebung. Macht man die Annahme $k = e$, d. h. denkt man sich Trägheits- und Schwerpunkt zusammenfallend, was in unserm Falle bis auf einen Fehler von 3,5 0/0 richtig ist, so wird in Gleichung

$$(20) \quad U = \frac{\pi^2}{T^2} \cdot \frac{e}{g} = \frac{e^2}{k^2} = 1.$$

Unter dieser Bedingung verschwindet aber der Koeffizient von β , sobald man $\lambda = l - \frac{d\delta}{d\alpha}$ setzt, d. h. wenn man die Schneidenachse mit dem Pol der Ergänzungsbögen zusammenfallen läßt.

Will man also Oberschwingungen vermeiden, so hat man vor allen Dingen die Ankerachse so zu legen, daß sie mit dem durch Gleichung (21) charakterisierten Momentanzentrum zusammenfällt. Dann dreht sich das Pendel tatsächlich immer um eine und dieselbe Achse, und zwar um dieselbe, wie der Anker.

Anm. Mächte man die Annahme $k = e$ nicht, so würde $\lambda = \frac{U \cdot l - \frac{d\delta}{d\alpha}}{\frac{2U}{2} - 1}$ werden müssen, wenn der Koeffizient von β verschwinden sollte.

F. Der Isochronismus.

Wenn trotzdem neuerdings die Ankerachse oft über den Pol gelegt wird, so hat das folgende Bewandtnis. Aus Versuchen hat sich gezeigt, daß sich hierdurch nicht nur ein Zustand erreichen läßt, bei dem große und kleine Bögen etwa in gleichen Zeiten zurückgelegt werden, sondern sogar bei genügender Distanz beider Achsen die längeren Bögen in kleineren Zeiten. Das ist ohne weiteres verständlich, denn jetzt erfolgt ja die Schwingung im Auslösungs- und Fallbogen um einen höher gelegenen Pol als in den Außenbögen, wodurch eine Annäherung an den Zustand des Zykloidenpendels erreicht wird. Die ungefähre Größe der Strecke, um welche

der Pol bei letzterem nach unten wandert, läßt sich leicht angeben und damit ein Schluß auf die Größenordnung der erforderlichen Distanz beider Achsen ziehen. Die Parametergleichung der gemeinen Zykloide mit dem Rollkreisradius $\frac{e}{4}$ lautet nämlich:

$$x = \frac{e}{4} \cdot (\varphi - \sin \varphi).$$

$$y = \frac{e}{4} \cdot (1 - \cos \varphi).$$

Daraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{e}{y} - 1}.$$

Dieser Wert muß aber gleich der Kotangente des Ausschlagwinkels des Pendels $\text{ctg } \alpha \sim \frac{1}{\alpha}$ sein, denn die Mittellinie des Pendels ist die bewegliche Polbahn.

Wenn also Isochronismus eintreten soll, so muß die Strecke y , um die der Pol sinkt, den ungefähren Wert haben:

$$y = \frac{e}{2} \cdot \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \text{ m.} \quad (22)$$

Das macht bei 100' Ausschlag kaum $\frac{1}{2}$ mm aus.

Mit einer solchen Anordnung nimmt man jedoch die Nachteile der Unstetigkeiten während der Hebung mit in Kauf, und es fragt sich sehr, ob das zu empfehlen ist.

Der Isochronismus ist beim freien Gange der Konstanz der Schwungweite wegen sowieso nur von untergeordneter Bedeutung: gilt doch eine Veränderung derselben um 1' bei luftdicht eingekapselten Uhren schon als recht groß. Vergl. auch Seite 63.

Anm. Bekanntlich gibt es auch einen sog. Federisochronismus: d. h. bei passender Stärke der Feder tritt ein Zustand ein, in welchem der Unterschied zwischen der Dauer der großen und der kleinen Schwingungen teilweise verschwindet. Auch diese Erscheinung ist auf ein Herabsinken des Momentanzentrums in den Außenlagen zurückzuführen, denn es gibt keine dem Proportionalitätsgesetze gehorchende Feder, die imstande wäre, allein durch ihre elastische Kraft das durch die Ungleichung $\sin \alpha < \alpha$ verursachte, den Grund des Anisochronismus bildende Manko an Direktionskraft auszugleichen.

G. Der gegenseitige Einfluß von Anker und Pendel.

Das vom Pendel auf den Anker ausgeübte Drehmoment ist von entscheidender Bedeutung für die rechnerische Behandlung der Ankerbewegung. Seine Größe ist leicht anzugeben. Bezeichnet O die Ankerdrehachse, d. h. die Spur der Schneidenverbindungsline (vergl. Fig. 3), so gilt:

$$M_0 = M + H(l - \lambda) - G \cdot \delta \text{ mkg.} \quad (23)$$

Hierin ist also M das Spannungsmoment an der unteren Federfassung und M_0 das gesuchte Drehmoment, das der Anker von der Feder resp. dem Pendel erfährt. Setzt man die Zahlenwerte für H , M und δ aus (19) und (20) in Gleichung (23) ein, so folgt:

$$M_0 \sim 0,0064 \cdot (\alpha + \beta) \text{ mkg.} \quad (23')$$

Die Übereinstimmung der Koeffizienten von α und β ist eine zufällige; damit die Rechnung hierdurch an Allgemeinheit keine Einbuße erleidet, werden wir weiterhin M_0 in der Form $A\alpha + B\beta$ einführen und erst später beim Einsetzen der Zahlen $A = B = 0,0064$ werden lassen.

Nach dem Prinzip von Aktion und Reaktion ist M_0 zugleich auch das vom Anker auf das Pendel ausgeübte Moment. Streng richtig ist das natürlich nur für die Auslösungs- und die Fallperiode, wo, wie bereits erwähnt, die Achsen beider Körper zusammenfallen: wir wollen aber diese Identität ganz allgemein annehmen, wozu wir durch zwei Gründe berechtigt sind. Einmal ist die wahre Abweichung des Pendelpoles von O nur eine kleine Größe, und dann ist sie auch nach Richtung und Größe unbekannt. Es ist also hier wie so oft bei technischen Rechnungen: entweder begnügt man sich mit Annäherungen, oder aber die Theorie versagt. Übrigens wird sich weiterhin bei Berechnung der Ankerarbeit (vergl. Seite 50) eine zahlenmäßige Kontrolle des angewandten Verfahrens ergeben, durch die die Zulässigkeit der Hypothese innerhalb der erforderlichen Genauigkeitsgrenzen dargetan wird.

Anm. Man beachte auch, daß die Hypothese zur Tatsache wird, wenn die Schneidenachse durch den ideellen Pendeldrehpunkt, d. h. den Pol geht.

II. Die Beanspruchung der Federn.

A. Die betriebsmäßige Beanspruchung.

Ihre Untersuchung ist ein Problem der gewöhnlichen Festigkeitslehre. Jeder Querschnitt der Feder wird durch G auf Zug, durch H auf Schub und durch das Moment

$$M_x = M + H \cdot (l - x) - G (\delta - y) \text{ mkg}$$

auf Biegung beansprucht. Vergl. Fig. 3. Nun muß ermittelt werden, an welcher Stelle M_x zu einem Maximum wird. Man hat zu diesem Zweck in die Gleichung für M_x die für M und δ gefundenen Ausdrücke, sowie y aus der numerischen Gleichung der elastischen Linie einzusetzen. Dann erhält man M_x als Funktion von x und α ; man hat weiter $\frac{\partial M_x}{\partial x}$ und $\frac{\partial M_x}{\partial \alpha}$ zu bilden und beide Ausdrücke verschwinden zu lassen. Der zweite Ausdruck ergibt ein imaginäres x , d. h. bei variablem α existiert keine Stelle, an der die Beanspruchung einmal ein Maximum hätte, oder mit andern Worten: die Beanspruchung wächst mit α unbegrenzt. Der erste Ausdruck ergibt zwar ein reelles x , jedoch ist für dieses $\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}$ ein positiver Wert; es handelt sich also um ein Minimum des Momentes. Der gefährliche Querschnitt liegt mithin an der oberen Federfassung.

Setzt man nunmehr in der für M_x gefundenen Gleichung $x = 0$, $y = \lambda \cdot \beta$, $\alpha = 100'$ und β laut Konstruktion gleich $3'$, so folgt das Biegemoment an der oberen Einspannstelle:

$$M_{max} = 0,000313 \text{ mkg.}$$

Da weiter der Querschnitt beider Federn zusammen ein äquatoriales Trägheitsmoment von $\frac{2}{3} \cdot 10^{-7} \text{ cm}^4$ besitzt, so folgt die maximale Biegebungsbeanspruchung unter Zugrundelegung des für so dünne Körper schon recht zuverlässigen NAVIERSchen Theorems:

$$\sigma_b = \frac{0,0313}{\frac{2}{3} \cdot 10^{-7}} \cdot 0,005 \sim 2350 \text{ kgcm}^{-2},$$

worin 0,005 der Abstand der äußersten Faser. Da der Querschnitt der Federn gleich $0,8 \cdot 0,01 = 0,008 \text{ cm}^2$, so folgt weiter eine Zugbeanspruchung durch das Gewicht G von:

$$\sigma_z = \frac{7,35}{0,008} = 920 \text{ kgcm}^{-2}.$$

Hierzu gesellt sich eine Schubbeanspruchung durch die Seitenkraft $H = 6,84 \cdot \alpha$ von der Größe

$$\tau_z = \frac{H}{b \cdot J} \cdot \int_z^{\frac{h}{2}} z \cdot dF \text{ kgcm}^{-2} = \frac{H}{b \cdot h^3} \cdot 12 \cdot \left[\frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right] \text{ kgcm}^{-2},$$

worin z die Entfernung des fraglichen Punktes von der Mittellinie des Querschnittes. τ_{max} herrscht in der Mittellinie selbst und beträgt $\sim 37,5 \text{ kgcm}^{-2}$.

Wir haben es also mit einem zweiachsigen Spannungszustande zu tun, dessen Ebene die Schwingungsebene des Pendels ist.

Da die Normalbeanspruchung an der Stelle z den Wert $\sigma_z + \frac{M_{max}}{J} \cdot z \text{ kgcm}^{-2}$ hat, so könnte man jetzt für jedes z die beiden Hauptspannungen nach Größe und Richtung angeben und daraus mit Hilfe des Querkontraktionsmoduls m die sog. „reduzierte“ Spannung

$$\sigma_r = \frac{m-1}{2m} \sigma + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

ableiten, die in der Technik meistens als für die Anstrengung des Materials maßgebend betrachtet wird: oder aber man könnte nach der Anschauung von MOHR an jeder Stelle die größte auftretende

Schubspannung $\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$ als Maß der Anstrengung ansehen (vergl. FÖPPL, Band 5, § 3). Darauf könnte man weiter diejenige Stelle des Querschnittes auffindig machen, an der die Anstrengung ein Maximum ist.

Dies alles ist aber in unserm Falle kaum nötig, denn τ ist gegenüber den σ sehr klein. Demnach ist hier als größte betriebsmäßige Beanspruchung der Wert

$$\sigma_b + \sigma_z = 3270 \text{ kgcm}^{-2}$$

zu betrachten.

Da $\sigma_b > \sigma_z$, so hat die Beanspruchung den Charakter der „Schwingungsbeanspruchung“ (WEYBACH), d. h. sie wechselt in den äußeren Fasern beständig ihr Vorzeichen; an zwei von der Mitte rund 0,02 mm entfernten Stellen dagegen herrscht reine „Ursprungs-

festigkeit“, die zwischen Null und einem Maximum schwankt. Die mittelste Schicht endlich erfährt nur veränderlichen Zug.

Diese Anstrengung ist für Federstahl keineswegs als hoch zu bezeichnen, denn man läßt für solchen oft 6500 kgcm^{-2} und mehr zu. Immerhin darf nicht übersehen werden, daß die Feder durch den fortwährenden Wechsel der Spannung allmählich ermüdet und erst dann als zuverlässig betrachtet werden kann, wenn sie nicht mehr zu „jung“ ist, d. h. wenn der Elastizitätsmodul sich mehr und mehr einem Grenzwert genähert hat. Wir kommen auf diesen Punkt noch zurück.

B. Der Einfluß von Erderschütterungen.

Für uns kommen nur die Ausläufer ferner Beben sowie die bei Stürmen auftretenden Bodenschwankungen in Frage, die nach OMORI erhebliche Werte annehmen können.

Daß eine im makroseismischen Gebiet aufgestellte Uhr schwere Störungen ihres Ganges bis zu völligem Stillstande erleiden kann, liegt auf der Hand, wenngleich letzteres bei freien Gängen ihres langen Ergänzungsbogens halber weniger oft vorkommen soll als bei Grahamgängen.

Nach Beobachtungen, die bei Dynamitsprengungen in Steinbrüchen in Amerika gemacht sind, pflanzen sich künstliche Erdschütterungen nur auf kurze Strecken fort, gelangen also kaum bis an die Standorte von Präzisionsuhren. Dasselbe ist der Fall mit den durch den Verkehr, durch Maschinen usw. hervorgerufenen Erzitterungen, die sich nicht bis in die Tiefe hinab erstrecken, in die die Uhren-Fundamente hinabreichen sollen.

Nun ist in der Praxis gelegentlich beobachtet worden, daß plötzlich mehrere nicht an demselben Orte befindliche Uhren ihren Gang ohne erkennbare Ursache um mehrere Zehntel Sekunde pro Tag ändern, meist im Sinne einer Retardation. Man spricht dann von einer durch mikroseismische Vorgänge entstandenen „Dehnung der Pendelfeder“. Diese Hypothese gewinnt dadurch an Wahrscheinlichkeit, daß die Erscheinung nach mehreren Wochen verschwindet, wenn die „Federdehnung wieder zurückgegangen“ ist, sowie auch dadurch, daß man durch einen Stoß gegen die Uhr eine analoge Erscheinung hervorrufen kann.

Die Erklärung erscheint auch dann noch ganz plausibel, wenn man ermittelt, welche Beziehung zwischen Dehnung und Gangänderung besteht. Da die Schwingungsdauer $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ und $\frac{dt}{dl} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{l \cdot g}}$, so beträgt z. B. für unser Pendel bei einer Dehnung von 0,01 mm die Retardation pro Tag:

$$\frac{0,01}{1000} \cdot 86400 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{0,9938 \cdot 9,81}} = 0,435 \text{ sek,}$$

d. h. eine kleine Ursache bringt bereits eine beträchtliche Wirkung hervor.

Nach Angaben der Erdbebenwarte zu Hamburg war z. B. bei dem großen kalabrischen Beben 1908, das Messina zerstörte, die halbe vertikale Schwingungsamplitude in unseren Gegenden 1,7 mm bei einer ganzen Periode von 18 Sekunden; die maximale Vertikalbeschleunigung, die allgemein unter Zugrundelegung des Sinusgesetzes berechnet wird, betrug demnach:

$$1,7 \cdot \frac{\pi^2}{g^2} = 0,207 \text{ mmsek}^{-2},$$

d. h. rund den 50 000sten Teil der Beschleunigung der Schwere. In Göttingen sind allerdings schon vertikale Zusatzbeschleunigungen von $\frac{g}{10000}$ msek⁻² beobachtet worden. Aber auch sie würden nur eine Gewichtsverminderung des Pendels von $\Delta G = 7,35 \cdot 10^{-4}$ kg und damit nach HOOKE eine Maximaldehnung der Tragfedern von

$$\Delta l = \frac{\Delta G \cdot l}{E \cdot F} = \frac{7,35 \cdot 10^{-4} \cdot 0,4}{2,4 \cdot 10^6 \cdot 0,008} \sim 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

zustande bringen, ganz abgesehen davon, daß an eine Überschreitung der Elastizitätsgrenze infolge der Zusatzkraft ΔG , wie sie zur Erklärung obiger Erscheinung angenommen werden müßte, gar nicht zu denken ist.

Entweder treffen also die landläufigen Vorstellungen über das Verhalten der elastischen Körper auf die Pendelfedern nicht zu, oder aber es sind andere Ursachen mit im Spiel.

Da liegt es nun nahe, an Ermüdungserscheinungen der Feder zu denken. Durch die oben erwähnten Erschütterungen und noch mehr durch die meist weit stärkeren Horizontalkomponenten der Beben wird zwar keine wesentliche Erhöhung, wohl aber eine temporäre Änderung der Art und Weise der Beanspruchung hervor-

gerufen, die eine gesteigerte Ermüdung, d. h. ein zeitweiliges Nachlassen des Elastizitätsmoduls zur Folge haben dürfte. Damit wäre die Zunahme der Schwingungsdauer auf die verringerte Direktionskraft der Feder zurückgeführt. Eine analoge Erscheinung wird übrigens auch bei Chronometern beobachtet. Eine weitere Stütze dieser Vermutung ist darin zu erblicken, daß beim Rieflergange eine geringfügige Abnahme der Schwungweite nach Er-schütterungen sicher festgestellt ist. Das bedeutet eine Verringerung der Energiezufuhr zum Pendel, d. h. ebenfalls ein Nachlassen des Elastizitätsmoduls. Hieraus folgt, daß der Isochronismus die Störung erhöht, denn er verhindert den teilweisen Ausgleich der Verzögerung durch den Einfluß der kürzeren Schwungweite.

Aus alledem geht hervor, daß die Feder ein äußerst subtiles Organ ist, das die sorgfältigste Auswahl und Behandlung verlangt, denn sie ist es, die der weiteren Steigerung der Präzision vorläufig eine Grenze setzt

III. Die Querschwingungen des Pendels.

Die obere Federfassung ist in Wirklichkeit nicht, wie in Fig. 1 schematisch angegeben, direkt mittelst des Stiftes d auf den Träger T gelagert, sondern durch Vermittlung von zwei durch d geführten, spitz zulaufenden Stützschauben. Infolgedessen hat das Pendel eine gewisse Freiheit, kleine Querschwingungen senkrecht zu der normalen Schwungebene zu vollziehen. Sie dürften zwar durch die Spitzenreibung und den Luftwiderstand rasch abgedämpft werden, wenn sie einmal, etwa durch die vorhin erwähnten horizontalen Erdbebenstöße, entstanden sind: immerhin können sie aber während ihres Bestehens die Hauptschwingung stören. Damit wäre ein weiterer Gesichtspunkt zur Erklärung der im vorigen Kapitel behandelten Erdbebenstörungen gegeben. Es erübrigt, zu untersuchen, ob die Haupt- und die Querschwingung einander beeinflussen oder, ausführlicher ausgedrückt, ob **1.** die Hauptschwingung imstande ist, die Querschwingung zu unterhalten und ob **2.** die Querschwingung die Hauptschwingung zu stören vermag.

Das Problem gehört scheinbar zur Theorie des sphärischen Pendels: diese reicht aber zu seiner Beantwortung nicht aus, denn das physische Pendel hat nicht bloß Translationsenergie, wie der an

eine Kugelfläche gebundene Massenpunkt, sondern auch lebendige Kraft der Rotation. Das Problem erfordert somit ein Zurückgehen auf die Kreiseltheorie. Es ist hier nicht nötig, die Sache bis in ihre letzten Konsequenzen zu verfolgen; es genügt, zu zeigen, daß die beiden Schwingungen sich tatsächlich aus zwei Gründen gegenseitig beeinflussen.

A. Die Kreiselwirkung.

Vergl. Fig. 5. α sei der Winkel der Haupt-, α' der der kleinen Querschwingung und AA die Hauptschwingungsachse. O ist weiter der Aufhängungspunkt und S der Schwingungspunkt des

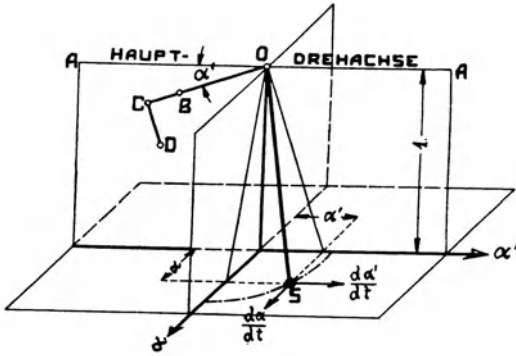


Fig. 5.

Pendels zur Zeit t . Dann ist OB der in der Querschwingungsebene liegende Vektor des statischen Momentes der Bewegungsgröße oder des „Dralles“ der Hauptschwingung, dessen Zahlengröße oder Tensor $OB = J_p \cdot \frac{d\alpha}{dt}$ kgmsek ausmacht.

Dadurch, daß $\frac{d\alpha}{dt}$ in der Zeit dt um $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ wächst, nimmt auch OB um den Wert $BC = J_p \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ zu. Dadurch ferner, daß sich der Punkt S mit der Geschwindigkeit $\frac{d\alpha'}{dt}$ nach rechts bewegt, gelangt das Ende des Drallvektors nach der Zeit dt nicht bloß nach C , sondern nach D , wobei $CD = OC \cdot d\alpha' = J_p \cdot \frac{d\alpha}{dt} \cdot d\alpha'$. Die Vermehrung des auf AA projizierten Dralles \mathfrak{B} beträgt somit pro Sekunde:

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = J_p \cdot \left[\frac{d^2 \alpha}{dt^2} \cos \alpha' - \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{d\alpha'}{dt} \cdot \sin \alpha' \right] \text{ mkg}, \quad (24)$$

und dieser Wert ist nach dem allgemeinen Flächensatz gleich dem auf die Hauptschwingungsachse wirkenden Drehmoment der Schwere. Der erste Term entspricht der ebenen Bewegung, während der zweite die Störung durch die Querschwingung repräsentiert.

Umgekehrt wird natürlich auch die Querbewegung durch die Hauptschwingung beeinflusst.

B. Die Wirkung der Coriolisbeschleunigung.

Dadurch, daß die Pendelbewegung auf dem rotierenden Erdkörper stattfindet, entsteht neben der stets gleichgerichteten Zentripetalbeschleunigung weiter die sog. Coriolis- oder Clairautbeschleunigung f_c , die, in der Sprache der Vektoranalysis ausgedrückt, nach Größe und Richtung das doppelte äußere Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit der Erde ω_e und der Relativgeschwindigkeit v des fraglichen Körpers ist. Ist α der Winkel zwischen ω_e und v ,

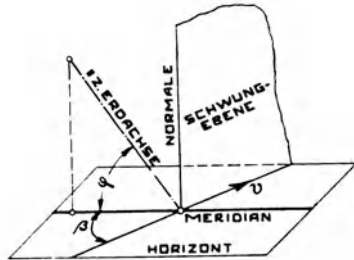


Fig. 6.

φ der Breitengrad und β das Azimut der Bewegung, so folgt gemäß Fig. 6 aus einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \varphi,$$

und somit:

$$f_c = 2 \cdot v \cdot \omega_e \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \varphi} \text{ msek}^{-2}, \quad (25)$$

entsprechend der Definition des Vektorprodukts.

Somit erfährt der im Abstände x von der Achse befindliche Massenpunkt dm des Pendels die Kraft:

$$dC = 2 \cdot x \cdot \bar{\alpha} \cdot \frac{\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{t}{T} \cdot \pi\right) \omega_e \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \beta \cos^2 \varphi} \cdot dm \text{ kg}. \quad (26)$$

Der Winkel γ , den sie mit der Lotrechten bildet, ergibt sich nach dem sphärischen Kosinussatze aus:

$$\text{tg } \gamma = \frac{\text{tg } \varphi}{\sin \beta}.$$

Folglich ist ihre senkrecht zur Schwungebene stehende Komponente nach einigen Vereinfachungen:

$$dC' = dC \cdot \sin \gamma = 2 x \bar{\alpha} \cdot \frac{\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{t}{T} \pi\right) \cdot \omega_e \cdot \sin \varphi \cdot dm \text{ kg.} \quad (27)$$

Sie ist also vom Azimut des Pendels unabhängig, denn β fällt heraus.

Also ist schließlich das von der Corioliskraft auf das ganze Pendel ausgeübte, auf die Achse der Querschwingung bezogene Drehmoment:

$$M = 2 \cdot \bar{\alpha} \cdot \frac{\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{t}{T} \pi\right) \cdot \omega_e \cdot \sin \varphi \cdot \int x^2 dm \text{ mkg,} \quad (28)$$

worin $\int x^2 dm \sim J_p$.

Es erreicht im Maximum etwa den Wert 10 grmm und zeigt, daß die Haupt- und die Querschwingung sich auch abgesehen von der Kreiselwirkung wegen der Erdrotation merkbar beeinflussen können.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich die praktische Forderung, die Aufhängekonstruktion so einzurichten, daß sie den Querschwingungen eine genügende Reibung entgegengesetzt. Das dürfte im allgemeinen der Fall sein, allerdings unter der Voraussetzung, daß die eingangs erwähnten Schraubenspitzen auf ihren Pfannen auch wirklich mit Reibung aufsitzen und nicht etwa zykloidisch rollen.

IV. Das Federkraftdiagramm.

Hierunter verstehen wir die graphische Darstellung des von der Feder auf das Pendel ausgeübten Drehmomentes M_0 (vergl. Seite 26) über dem Pendelwege als Abszisse.

Es ist mehr als irgend etwas anderes geeignet, Klarheit in die Arbeitsweise des Rieflerganges zu bringen und soll deshalb ausführlich behandelt werden, auch in Zahlen.

A. Die Periode der Auslösung.

Die Hauptaufgabe der Untersuchung ist, den Weg festzustellen, den das Pendel während der Auslösung zurücklegt, sowie natürlich auch die Variation von M_0 längs desselben.

Die eine rollende Reibung darstellende Schneidenreibung dürfte gegenüber der der Klaue im allgemeinen vernachlässigbar sein; letztere ergibt sich mit Hilfe der Fig. 1 (links) aus folgender statischen Betrachtung. Bezeichnet man mit N den Normaldruck zwischen Klaue und Radzahn, mit M_g das vom Gangrad ausgeübte Drehmoment und mit $\mu = \operatorname{tg} \rho$ den Reibungskoeffizienten, so gelten für den Auflagerpunkt bei der Bewegung des Abgleitens die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{R}{r_a} + N \cdot \sin \varepsilon - \mu \cdot N \cdot \cos \varepsilon &= 0, \\ \frac{M_g}{r_g} - N \cdot \cos \varepsilon - \mu \cdot N \cdot \sin \varepsilon &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Durch Elimination von N folgt:

$$R = M_g \cdot \frac{r_a}{r_g} \cdot \operatorname{tg}(\rho - \varepsilon) \text{ kgm.} \quad (30)$$

Ist der Klauenwinkel ε richtig getroffen, so ist R tatsächlich null. Ändert sich aber ρ etwa durch Ölverdickung, oder war ε von Anfang an nicht richtig gewählt, so hat R irgend einen positiven oder negativen Wert. Wir setzen allgemein voraus, daß R positiv sei. Wir sehen ferner die Winkelgeschwindigkeit des Pendels ω_p während des Auslösungsprozesses als konstant an, weil die Gleichung sonst unintegrierbar wird. In Wirklichkeit wird die Geschwindigkeit über der Bahn α als Abszisse durch eine Ellipse dargestellt, denn nach Gleichung (3), Seite 13, gilt:

$$\omega_p = \alpha \cdot \frac{\pi}{T} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2} \text{ sek}^{-1}. \quad (31)$$

Die Auslösung beginnt nun frühestens bei $\alpha = \frac{B}{A} \cdot \beta = 3'$, wenn M_o zu null geworden ist, und nimmt im Durchschnitt einen Bogen von $\frac{B}{A} \cdot \frac{b}{r_a}$ ein, worin b die Breite der Ruhefläche. Das ergibt $\frac{0,0064}{0,0064} \cdot \frac{0,2}{40} \cdot \frac{180 \cdot 60}{\pi} \sim 17'$, d. h. die Auslösung ist rund bei $3' + 17' = 20'$ Pendelausschlag beendet.

Nun ist nach Gleichung (31) ω_p für $3'$ gleich $0,0914$ und für $20'$ $0,0896 \text{ sek}^{-1}$; der durch die Konstantsetzung gemachte Fehler ist also klein. Wir setzen $\omega_p = 0,09 \text{ sek}^{-1}$ für die Auslösungsperiode.

Rechnet man nunmehr die Zeit und der Einfachheit wegen auch den Weg von dem Beginn der Ankerbewegung an (Punkt P in Fig. 7), so lautet die Bewegungsgleichung des Ankers für den Auslösungsprozeß:

$$J_a \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - (A \cdot \omega_p \cdot t - B \varphi) - A \cdot \omega + R = 0. \quad (32)$$

Der Klammerausdruck ist M_0 .

Da nun $A \omega = R$, so wird:

$$J_a \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + B \varphi = A \cdot \omega_p \cdot t. \quad (33)$$

Die Integration ergibt unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{A}{B} \cdot \omega_p \cdot \left[t - \sqrt{\frac{J_a}{B}} \sin \sqrt{\frac{B}{J_a}} \cdot t \right], \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega = \frac{A}{B} \cdot \omega_p \cdot \left[1 - \cos \sqrt{\frac{B}{J_a}} \cdot t \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Diese Integralgleichungen beschreiben die Ankerbewegung während der Auslösung. Wir haben es also mit einem eigentümlichen Schwingungsvorgang zu tun, der an die neuerdings an Grahamgangklauen beobachteten, auf Vibrationen zurückzuführenden Querrillen erinnert. Der Anker folgt dem Pendel nicht gleichmäßig, sondern er schwingt mit einer Amplitude von $\frac{A}{B} \cdot \omega_p \cdot \sqrt{\frac{J_a}{B}}$ gleich 5,5' um eine fortschreitende Mittellage. Da der Ankerradius $r_a = 40$ mm, so sind das 0,064 mm halber Schwingweite. Die Dauer einer Schwingung beträgt $\pi \sqrt{\frac{J_a}{B}} = 0,055$ sek.

Negativ wird ω niemals. In solchem Falle würde die Reibung ihr Vorzeichen umkehren; sonst hat sie auf die Schwingung keinen Einfluß.

Die ganze Erscheinung ist ihrem Wesen nach genau gleich z. B. dem Brummen der Bremsklötze bei Fahrzeugen. Der Bremsklotz folgt dem Radkranz so lange, bis die Anspannung des elastischen Gestänges die Reibung zu überwinden vermag und den Klotz zurückreißt. Darauf beginnt der Vorgang von neuem.

Die auf das Pendel wirkende Federspannung hat den Wert (vergl. Seite 35):

$$M_0 = A [\omega + \omega_p \cdot t] - B \cdot \varphi \text{ mkg.}$$

$\frac{B}{A} \frac{17' \cdot \pi}{180 \cdot 60} \cdot \frac{1}{0,09} = 0,055$ sek dauern, also in unserem Falle zufälligerweise fast genau ebensoviel. Das rührt daher, daß das Abgleiten gerade in einen Knotenpunkt der Ankerschwingung fällt.

Bei anderen Konstruktionen kann jedoch t die Grenzwerte

$$\varphi_a \cdot \frac{B}{A \cdot \omega_p} \pm \sqrt{\frac{J_a}{B}} \text{ sek}$$

erreichen, wenn nämlich in Gleichung (34) der Sinus gerade gleich $+1$ oder -1 wird. φ_a ist der Auslösungsweg des Ankers. In solchen extremen Fällen beeinflusst die Schwingung des Ankers also die Zeitdauer der Auslösung erheblich. Geschieht dies im Sinne einer Verminderung, so kann es nur als Vorteil angesehen werden. Vergl. Seite 23.

Während der Auslösungszeit hat das Pendel den Weg

$$0,09 \cdot 0,056 \cdot 180 \cdot 60 \cdot \frac{\pi}{\pi} = 17,3'$$

zurückgelegt. Vergl. Fig. 7.

Hiermit wären die unter A aufgeworfenen Kardinalfragen erledigt, und das Federkraftdiagramm kann bis zum Ende der Auslösungsperiode gezeichnet werden.

Wenn nun der Anker nach dem Abgleiten der Klaue von der Ruhefläche des Radzahnes frei geworden ist, so besitzt er im allgemeinen sowohl potentielle wie kinetische Energie, d. h. sowohl Federspannung wie Geschwindigkeit; beide zugleich können nämlich nach dem auf Seite 38 Gesagten nur in dem Ausnahmefalle $\varrho = \varepsilon$ zu null werden. Die Geschwindigkeit hat nach Gleichung (34) im Maximum den Wert:

$$\omega_{max} = \frac{A}{B} \cdot \omega_p \cdot 2 = 0,09 \cdot 2 = 0,18 \text{ sek}^{-1},$$

während die Federspannung nach Gleichung (35) auf

$$M_{o max} = R + A \cdot \omega_p \cdot \sqrt{\frac{J_a}{B}} \text{ mkg}$$

ansteigen kann.

Der erste Term von $M_{o max}$ ist nicht angebar ohne genaue Kenntnis des Reibungswinkels ϱ , während der zweite in unserm Falle $0,0064 \cdot 0,09 \cdot \sqrt{\frac{20 \cdot 10^{-7}}{0,0064}} = 1,02 \cdot 10^{-5}$ mkg ausmacht. Die durch ihn hervorgerufene Ankerbeschleunigung von

$$\frac{A \cdot \omega_p \cdot \sqrt{\frac{J_a}{B}}}{J_a} = 5 \text{ sek}^{-2}$$

ist gegenüber der Beschleunigung des Gangrades von

$$\frac{M_a}{J_g} = \frac{2,5 \cdot 10^{-5}}{2,3 \cdot 10^{-7}} = 108,7 \text{ sek}^{-2}$$

nur gering.

Man begeht daher nur einen verschwindenden Fehler, wenn man sich den Anker nach seiner Freigabe als stillstehend oder, richtiger gesagt, als der Pendelgeschwindigkeit entsprechend bewegt vorstellt, wie wir es nun tun wollen. Damit bekommt die zahlenmäßige Untersuchung einen allgemeineren Charakter und hängt nicht mehr so sehr von dem zufälligen Verhalten des Ankers am Ende der Auslösung bei der gerade vorliegenden Konstruktion ab.

Da hiernach M_o während der dem Ende der Auslösung folgenden Zeit gleich null zu setzen ist, so heißt das: $A \alpha = B \beta$. Hieraus folgt die Winkelgeschwindigkeit des Ankers zu:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{A}{B} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{A}{B} \cdot \omega_p.$$

Dies gilt natürlich nur bis zu dem Augenblick, wo die Klaue von der Hebungsfanke des Rades erreicht und damit ihrer Freiheit ein Ende gemacht wird.

B. Die Periode der Hebung.

Die Hauptaufgabe der Untersuchung ist, zu konstatieren, wie lange die Hebung bis zur vollendeten Umlegung des Ankers dauert, sowie vor allem auch, welche Variationen M_o dabei erleidet.

Da der Anker „auf der Tangente“ eingreift, d. h. Gangradachse, Klaue und Ankerachse einen rechten Winkel bilden, so genügt es auch hier wie bei der Auslösung, die Untersuchung auf eine Klaue zu beschränken; auf der andern Seite ist der Vorgang derselbe. Wäre der oben bezeichnete Winkel kein rechter, so würden zwischen den Funktionen beider Klauen Unterschiede auftreten.

In dem Augenblick, wo das Gangrad frei wird, stehen sich auf der linken Seite Klaue und Hebefläche in der Weise gegenüber, wie es in Fig. 1 (rechts) zu sehen ist, nur daß der Abstand zwischen beiden infolge der bereits beendeten Auslösung noch etwas kleiner geworden ist. Dieser übrig bleibende Abstand, der „Fall“ F , ist

aus praktischen Gründen notwendig und werde hier zu 0,3 mm gesetzt. Vergl. auch Fig. 9.

Die Hebung zerfällt in 3 Abschnitte: der erste umfaßt die Zeit vom Beginn bis zum Aufschlagen des Hebungszahnes auf die Klaue, den „Fall“ im weiteren Sinne; der zweite ist der dann auftretende Stoß; der dritte endlich umfaßt die eigentliche Hebung oder Gleitperiode, d. h. die Verdrängung der Klaue durch die Hebungfläche bis zum Aufschlagen der Ruhefläche des Zahnes auf die Klaue.

Den Neigungswinkel γ des Hebezahnes gegen die Tangente (vergl. Fig. 1) stellen wir uns als für alle Radien gleich groß vor, obschon die Flanke dann eigentlich nach einer logarithmischen Spirale gekrümmt sein müßte. Ein passender Mittelwert für $\operatorname{tg} \gamma$ ergibt sich aus Fig. 1 wie folgt:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{F + b + 2 r_a \cdot \beta}{2 \cdot r_g \cdot \pi \cdot \frac{1}{z}} = 0,27, \quad (36)$$

worin F der Fall, b die Breite der Ruhefläche, β der Ausschlagwinkel des ruhenden Ankers; der Nenner ist der Bogen, um den sich der mit z Zähnen besetzte Radumfang pro Schwingung weiter dreht. $b + 2 r_a \cdot \beta$ ist das Bogenstück, um welches die Klaue während der Hebung seitlich gedrängt werden muß.

1. Der Fall.

Das Gangrad hat eine von null beginnende, gleichförmig beschleunigte Bewegung mit der Winkelbeschleunigung $\frac{M_g}{J_g}$; die Klaue dagegen besitzt (vergl. Seite 40) allgemein eine Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = \frac{A}{B} \cdot \omega_p \cdot r_a$. Setzen wir den Mittelwert der Pendelgeschwindigkeit für die Fallperiode $\omega_p = 0,089$, einem Werte, den wir nachträglich verifizieren können, so wird $v_0 = \frac{0,0064}{0,0064} \cdot 0,089 \cdot 40 = 3,56 \text{ mmsek}^{-1}$.

Es fragt sich nun, wo und nach welcher Zeit sich die beiden einander eilenden Körper (Hebungszahn und Klaue) treffen.

Um dies zu ermitteln, machen wir von dem Prinzip der kinematischen Umkehrung Gebrauch, d. h. wir denken uns den Hebungszahn stillstehend und übertragen die ihm innewohnende beschleunigte Bewegung in umgekehrtem Sinne auf die Klaue.

Dann beschreibt sie relativ zum Zahn die in Fig. 9 skizzierte Bahn, deren Parametergleichung lautet:

$$y = \frac{M_g}{J_g} \cdot r_g \cdot \frac{t^2}{2}, \quad (37)$$

$$x = v_0 \cdot t.$$

Eliminiert man die Zeit t , so nimmt die Bahngleichung die Form an:

$$y = \frac{M_g \cdot r_g}{2 J_g \cdot v_0^2} \cdot x^2. \quad (38)$$

Die Gleichung der Hebeflanke, auf dasselbe Koordinatensystem bezogen, ist:

$$y \cdot \sin \gamma + x \cdot \cos \gamma = F. \quad (39)$$

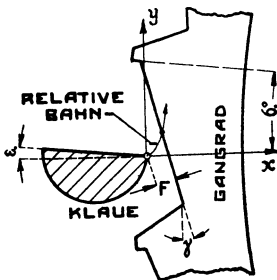


Fig. 9.

(38) und (39) sind die Bestimmungsgleichungen für die Koordinaten des Treffpunktes, aus denen man dann die Fallzeit t_1 findet.

Eine weitere Entwicklung der allgemeinen Formeln wäre kaum noch übersichtlich; wir setzen deshalb nunmehr Zahlenwerte in (38) und (39) ein und finden:

$$x = 0,097 \text{ mm}, \quad y = 0,796 \text{ mm}.$$

Durch Einsetzen in Gleichung (37) ergibt sich die Fallzeit:

$$t_1 = 0,027 \text{ sek.}$$

In dieser Zeit bewegt sich das Pendel um $0,027 \cdot 0,089 = 0,0024$ Bogeneinheiten vorwärts, was einem Winkel von $8,25'$ entspricht. Vergl. Fig. 7.

Der Fallwinkel des Gangrades beträgt, da die Fallhöhe $y = 0,796 \text{ mm}$ und sein Radius 20 mm ist, $\frac{0,796}{20} \cdot \frac{180}{\pi} \sim 2,3^\circ$, mithin rund 38% des gesamten zur Verfügung stehenden Winkels von $\frac{360}{60} = 6^\circ$. Das entspricht einem gleichgroßen Energieverlust, von dem allerdings bei dem Stoß ein Teil zurückgewonnen wird. — Außerdem ist die Fallhöhe in praxi einstellbar, wodurch der Verlust verringert werden kann.

Die vom Gangrade im Moment des Stoßes erreichte Endgeschwindigkeit ist der Falldauer t_1 proportional und hat hier den Wert:

$$\omega_g' = \frac{M_g}{J_g} \cdot t = \frac{2,5 \cdot 10^{-5}}{2,3 \cdot 10^{-7}} \quad 0,027 = 2,93 \text{ sek}^{-1}. \quad (40)$$

2. Der Stoß.

Daß beim Auftreffen des Hebungszahnes auf die Klaue ein ziemlich starker Stoß erfolgt, kann man an dem kräftigen Doppelschlag erkennen, der ein Kennzeichen des freien Ganges ist. Der erste Schlag bedeutet den Beginn, der zweite den Schluß der Gleitperiode.

Der Stoß ist nach Fig. 9 ein schräger; die ihn hervorrufende Geschwindigkeitskomponente des Radzahnes hat den Wert:

$$v_g = \omega_g' \cdot r_g \cdot \sin \gamma \text{ msek}^{-1}. \quad (41)$$

Führt man die Momentankraft P als Ursache der plötzlichen Geschwindigkeitsänderung ein, so kann man für Gangrad und Anker die Bewegungsgleichungen anschreiben:

$$\begin{aligned} J_g \cdot \left[\omega_g' - \frac{u}{r_g \cdot \sin \gamma} \right] &= P \cdot r_g \cdot \sin \gamma. \\ J_a \cdot \frac{u}{r_a \cdot \cos \gamma} &= P \cdot r_a \cdot \cos \gamma. \end{aligned} \quad (42)$$

Hierin ist u die gemeinsame Geschwindigkeit von Zahn und Klaue nach dem Stoß, gerechnet in der Richtung der Normalen zur Hebefläche. Da der Stoß als unelastisch angesehen werden kann, so charakterisiert sie den endgültigen Bewegungszustand beim Beginn der Gleitung. Eliminiert man die Momentankraft P , deren Dimension $\text{kg} \cdot \text{sek}$ ist, so folgt die Winkelgeschwindigkeit des Rades nach dem Stoß aus (42) zu:

$$\omega_g'' = \frac{u}{r_g \cdot \sin \gamma} = \frac{J_a \cdot r_a^2 \cdot \cos^2 \gamma}{J_a \cdot r_g^2 \cdot \sin^2 \gamma + J_g \cdot r_a^2 \cdot \cos^2 \gamma} \omega_g' \text{ sek}^{-1}, \quad (43)$$

und weiter die des Ankers:

$$\omega_a'' = \frac{u}{r_a \cdot \cos \gamma} \text{ sek}^{-1}. \quad (44)$$

Gleichung (43) hätten wir auch ohne weiteres mit Hilfe der „reduzierten“ Massen aus der Konstanz der Summe der Bewegungsmomente ableiten können.

Durch Einsetzen der Zahlenwerte erhält man:

$$\omega_g'' = 2,52 \text{ sek}^{-1}. \quad \omega_a'' = 0,34 \text{ sek}^{-1}.$$

3. Die Gleitperiode.

Auch für sie müssen wir die Pendelgeschwindigkeit ω_p als konstant ansehen. Wir setzen sie schätzungsweise zu $0,087 \text{ sek}^{-1}$ ein und kontrollieren nach vollendeter Untersuchung diese Annahme.

Nennt man den Normaldruck zwischen Hebefläche und Klaue N , sowie ihren Reibungskoeffizienten $\mu = \text{tg } \varrho$, so lautet nach Fig. 1 (rechts) die Bewegungsgleichung des Gangrades:

$$J_g \cdot \frac{d^2 \varphi_g}{dt^2} + N \cdot r_g \cdot (\sin \gamma + \mu \cdot \cos \gamma) = M_g. \quad (45)$$

Die Indices a und g beziehen sich wie immer auf Anker und Gangrad.

Nunmehr ist die Bewegungsgleichung des Ankers abzuleiten.

Das sich seiner Umlegung entgegenstimmende Drehmoment ist nach Gleichung (23'):

$$M_0 = A \cdot \alpha - B \cdot \beta \text{ mkg},$$

wenn man beide Winkel in ihren Anfangslagen als positiv ansieht.

Sind diese Anfangswerte zu Beginn der Gleitung α_0 und β_0 , so gilt:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \omega_p \cdot t, \\ \beta &= \beta_0 - \varphi_a. \end{aligned} \quad (46)$$

Denn das Pendel entfernt sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_p von der Mitte, und φ_a ist der aus der Differentialgleichung der Gleitbewegung als Funktion der Zeit zu bestimmende Ausdruck für den Winkel, um den sich der Anker von der Anfangslage β_0 ab gerechnet nach t Sekunden zur Mitte hin bereits vorwärtsbewegt hat.

Man beachte, daß $A \alpha_0 - B \beta_0$ gleich null sein muß, denn zu Beginn der Gleitung ist die Anspannung der Feder noch null, da wir von der Berücksichtigung der während des Falles auftretenden Schwingungen absehen wollten. Vergl. Seite 40.

Die Bewegungsgleichung des Ankers lautet demnach nach Fig. 1 (rechts):

$$\begin{aligned} J_a \cdot \frac{d^2 \varphi_a}{dt^2} + A (\alpha_0 + \omega_p \cdot t) - B (\beta_0 - \varphi_a) \\ = N \cdot r_a \cdot (\cos \gamma - \mu \cdot \sin \gamma), \end{aligned} \quad (47)$$

worin N wieder der Normaldruck.

Ferner besteht die geometrische Beziehung:

$$\frac{d\varphi_a}{d\varphi_g} = \frac{r_g}{r_a} \cdot \operatorname{tg} \gamma, \quad (48)$$

was man leicht einsieht, wenn man sich eine unendlich kleine Verrückung vorstellt: mithin ist auch:

$$\frac{d^2\varphi_g}{dt^2} = \frac{d^2\varphi_a}{dt^2} \cdot \frac{r_a}{r_g} \cdot \operatorname{ctg} \gamma. \quad (49)$$

Gleichung (48) ist der analytische Ausdruck für die kraftschlüssige kinematische Verbindung zwischen beiden Teilen. Setzt man (49) in Gleichung (45) ein und eliminiert dann N aus (45) und (47), so folgt als endgültige Gleichung für die Ankerbewegung unter Berücksichtigung aller Nebenumstände, also auch der Trägheit des Gangrades:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\varphi_a}{dt^2} \cdot \left[J_a \cdot \frac{r_g}{r_a} \cdot \operatorname{tg}(\gamma + \varrho) + J_g \cdot \frac{r_a}{r_g} \cdot \operatorname{ctg} \gamma \right] \\ & + \frac{r_g}{r_a} \cdot \operatorname{tg}(\gamma + \varrho) [A \cdot (\alpha_0 + \omega_p \cdot t) - B \cdot (\beta_0 - \varphi_a)] = M_g. \end{aligned} \quad (50)$$

ϱ ist wieder der Reibungswinkel und M_g das Drehmoment des Gangrades.

Die Gleichung hat die Form:

$$\frac{d^2\varphi_a}{dt^2} + a \cdot \varphi_a = b - c \cdot t.$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte bekommt man, wenn man $\operatorname{tg} \varrho = 0,18$ setzt:

$$\begin{aligned} a &= 703 \text{ sek}^{-2}, \\ b &= 11,5 \text{ sek}^{-2}, \\ c &= 61,1 \text{ sek}^{-3}. \end{aligned}$$

Die Integration erfolgt in bekannter Weise und ergibt unter Berücksichtigung der Tatsache, daß

1. für $t = 0$ $\varphi = 0$,
2. „ $t = 0$ $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_a''$ [vergl. Gleichung (44)]:

$$\varphi_a = \frac{b}{a} \cdot \left[1 - \cos \sqrt{a} \cdot t \right] + \left[\omega_a'' + \frac{c}{a} \right] \cdot \frac{\sin \sqrt{a} \cdot t}{\sqrt{a}} - \frac{c}{a} \cdot t. \quad (51)$$

Auch diese Gleichung enthält periodische Funktionen, von denen aber nur ein kleiner Teil der Periode in Betracht kommt.

Setzt man in Gleichung (51) die Zahlenwerte ein, so ergibt sich:

$$\varphi_a' = 56,5 [1 - \cos 26,5 \cdot t] + 55,9 \sin 26,5 \cdot t - 299 t, \quad (52)$$

wobei φ_a gleich in Bogenminuten umgerechnet ist.

Nun läßt sich auch die Dauer der Gleitperiode, t_2 , zahlenmäßig bestimmen.

Sie findet ihr Ende, wenn der Anker seine Endlage $-\beta = -3'$ erreicht hat; die Anfangslage β_0 aber setzt sich aus folgenden Summanden zusammen:

1. dem Anfangsausschlag von $\beta = 3'$;
2. dem Bogen von $17'$, den der Anker während der Auslösung zurücklegt;
3. dem von dem Anker während des Falles durchmessenen Winkel.

Da die Fallzeit $0,027$ sek und die Geschwindigkeit während des Falles $\frac{B}{A} \cdot \omega_p = 0,089$ sek $^{-1}$ beträgt, so wird dieser Winkel gleich $8,25'$, einem Wert, der übrigens auch der auf Seite 42 berechneten Falltiefe x entsprechen muß.

Der gesamte Gleitweg des Ankers umfaßt mithin $31,25$ Bogenminuten.

Setzt man diese Zahl für φ_a' in Gleichung (52) ein, so bekommt man t_2 durch Probieren zu $\sim 0,021$ sek.

In dieser Zeit hat das Pendel, dessen mittlere Geschwindigkeit während der Gleitzeit rund $0,087$ sek $^{-1}$ beträgt, einen Weg von $6,2'$ zurückgelegt. Seine Stellung am Ende der Gleitperiode ergibt sich somit aus folgender Addition:

Weg während der Entspannung	3'
" " " Überspannung	w
" " " Auslösung	17,3'
" " des Falles	8,25'
" " der Gleitung	6,2'
	Summa: $w + 34,75'$.

Die Federspannung befolgt während der Gleitperiode das Gesetz:

$$M_0 = A \cdot (\alpha_0 + \omega_p \cdot t) - B \cdot (\beta_0 - \varphi_a) = A \cdot \omega_p \cdot t + B \cdot \varphi_a \text{ mkg.}$$

Da φ_a als Funktion von t jetzt bekannt ist, so läßt sich auch M_0 ausdrücken und somit das Federkraftdiagramm fertig zeichnen. Vergl. Fig. 7.

Stellt man die Funktion (52) graphisch dar, so ergibt sich, daß sie innerhalb des in Betracht kommenden Intervalles ziemlich genau geradlinig ist, d. h. die Ankerbewegung ist fast gleichförmig und jedenfalls nur ganz wenig beschleunigt.

Das treibende Drehmoment des Gangrades ist also gerade als ausreichend zu betrachten, oder mit anderen Worten: die Größe der Antriebskraft hat einen vorteilhaften Wert.

Wir haben hier also ein Kriterium für die Richtigkeit der Größe von M_g .

Nun wollen wir noch die Gleichung derjenigen Geraden ableiten, durch die sich Gleichung (52) mit möglichster Annäherung ersetzen läßt, zum Zwecke späterer Verwendung.

Soll die Summe der Quadrate der Ordinatendifferenzen ein Minimum sein, so muß, wenn $\varphi = C \cdot t$ die Gleichung jener Geraden ist, die nach C genommene Variation des bestimmten Integrals $\int_0^{0,021} (C \cdot t - \varphi_a)^2 \cdot dt$ verschwinden, worin φ_a der entsprechende Ausdruck aus Gleichung (52).

Nun folgt aus

$$\frac{\delta}{\delta C} \int_0^{0,021} (C \cdot t - \varphi_a)^2 dt = 0:$$

$$\varphi' \sim 1450 \cdot t \quad (53)$$

oder, wenn φ in Bogenmaß umgerechnet wird:

$$\varphi \sim 0,42 \cdot t. \quad (53')$$

C. Zusammenfassung der praktischen Ergebnisse.

Die Federspannung wird null, wenn das Pendel die Mitte um $\frac{B}{A} \beta = 3'$ überschritten hat (Entspannungsweg).

Die Ankerbewegung beginnt, wenn das Pendel noch um $\frac{M_g}{A} \cdot \frac{r_a}{r_g} \cdot \operatorname{tg}(\varrho - \varepsilon) = w$ weiter gegangen ist (Überspannungsweg). Wenn $\varrho = \varepsilon$, so wird $w = 0$.

Die Auslösung ist ein Schwingungsvorgang des Ankers mit der Dauer $\pi \cdot \sqrt{\frac{J_a}{B}} = 0,055$ Sekunden. Die Ankergeschwindigkeit schwankt dabei zwischen null und der doppelten Pendelgeschwindigkeit. Der Augenblick der Freigabe des Ankers hängt von der

Schwingung wesentlich ab. Die Auslösung dauert bei uns 0,056 Sekunden; das Pendel legt dabei 17,3' zurück.

Die Klaue verläßt den Zahn im allgemeinen mit potentieller und kinetischer Energie; nur wenn $\rho = \epsilon$ ist, können beide zugleich null werden.

Dauer und Höhe des Falles hängen von beiden ab. Bei uns dauert er 0,027 Sekunden und macht 38 % der gesamten zur Verfügung stehenden Gangradbewegung aus. Dabei legt das Pendel 8,25' zurück.

Bei dem Stoß geht ein Teil der Gangradenergie verloren, ein Teil bleibt dem Rad erhalten und der Rest überträgt sich auf den Anker. Bei uns betragen diese Teile 14, 74 und 12 %.

Dabei ist der Stoß als unelastisch vorausgesetzt.

Die Gleitbewegung des Ankers stellt den Beginn eines verwickelten Schwingungsvorganges dar, dessen Dauer von mancherlei Faktoren abhängt. Bei uns beträgt sie 0,021 Sekunden, wobei das Pendel um 6,2' weiter geht. Da die Ankerbewegung bei geeigneter Wahl der Größe der Antriebskraft fast ohne Beschleunigung erfolgt, so ist die durch den Endstoß vernichtete Energie fast genau so groß wie die Ankerenergie beim Beginn der Gleitbewegung. Die Gefahr des Galoppierens (vergl. S. 8) ist damit auf ein Minimum reduziert.

Nach Beendigung der Gleitbewegung ist die Federspannung wieder eine lineare Funktion der Pendelstellung, jedoch mit einem anderen Nullpunkt als vor der Auslösung. Vergl. Fig. 7.

D. Approximative Ermittlung der Federarbeit.

Das Federkraftdiagramm stellt zugleich auch die Arbeit der Feder dar, denn die Abszissen bedeuten den Winkelweg und die Ordinaten das Kräftepaar der Feder. Bei der Annäherung an die Mitte, also hier rechts, entspannt sich die Feder und führt somit dem Pendel Arbeit zu (+); links ist es umgekehrt (-).

Die Differenz beider Teile wird angenähert durch das Dreieck *UVW* repräsentiert, dessen Inhalt mithin der dem Pendel pro Schwingung zugeführten Energie numerisch gleich ist — insoweit als die auf Seite 26 gemachte, den Pol des Pendels betreffende Annahme zutrifft.

Im nächsten Abschnitt wird sich übrigens zeigen, wie weit dies richtig ist.

Ist α_1 der Ausschlagwinkel des Pendels zu Beginn und α_2 der am Ende der Gleitperiode, so hat das Dreieck UVW offenbar den Inhalt:

$$E_f = \frac{A}{2} \left(\alpha_1 + \frac{B}{A} \cdot \beta \right) \cdot \left(\alpha_2 + \frac{B}{A} \cdot \beta \right) \text{ mkg.} \quad (54)$$

Dieser Ausdruck stellt also angenähert die dem Pendel bei jeder Schwingung zugeführte Energiemenge dar. In unserm Falle ist:

$$E_f = \frac{1}{2} \cdot 0,0064 \cdot 0,0092 \cdot 0,0109 \sim 0,32 \cdot 10^{-6} \text{ mkg,}$$

d. h. pro Hub stehen dem Pendel 0,32 grmm zur Verfügung zum Ausgleich des Arbeitsverlustes durch Luftwiderstand und Klauen- resp. Schneidenreibung.

V. Die Ankerarbeit und ihre Veränderlichkeit.

Unter Ankerarbeit wollen wir die zur Umlegung des Ankers erforderliche Energiemenge verstehen, die von diesem auf die Feder und weiter auf das Pendel übertragen wird. Diese Berechnungsweise der dem Pendel zur Verfügung stehenden Arbeitsmenge hat vor der im vorigen Abschnitt mit Hilfe des Federkraftdiagramms entwickelten Formel den Vorzug, daß sie von der auf Seite 26 aufgestellten Hypothese unabhängig ist und daher als Kontrolle zu dienen vermag.

A. Berechnung der Ankerarbeit.

Das von der Feder auf den Anker ausgeübte Drehmoment hat allgemein den Wert:

$$M = A \alpha - B \beta \text{ mkg,}$$

und speziell während der Gleitung:

$$M = A (\alpha_0 + \omega_p \cdot t) - B (\beta_0 - \varphi_a) \text{ mkg.}$$

Vergl. Gleichung (46), Seite 44.

Da $A \alpha_0 - B \beta_0 = 0$, so vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$M = A \cdot \omega_p \cdot t + B \varphi_a \text{ mkg.}$$

Da sich Gleichung (52) wegen ihrer transzendenten Form nicht invers schreiben läßt, so ist t nicht explicite als Funktion von φ_a angebbar; wohl aber ist dies mit genügender Annäherung mit Hilfe von Gleichung (53') möglich, die wir in der Form $t = \frac{\varphi_a}{C}$ verwenden wollen, worin $C = 0,42$, wenn φ_a im Bogenmaß ausgedrückt ist.

Setzt man diesen Wert für t in obigen Ausdruck ein, so wird:

$$M = \left(A \cdot \omega_p \cdot \frac{1}{C} + B \right) \cdot \varphi_a \text{ mkg.}$$

Mithin ist die Ankerarbeit:

$$E_a = \frac{1}{2} \cdot \left(A \cdot \omega_p \cdot \frac{1}{C} + B \right) \cdot \varphi_a^2 \text{ mkg,} \quad (55)$$

worin A und B die bekannten Federkonstanten, ω_p die mittlere Pendelgeschwindigkeit während der Gleitperiode, C die Konstante aus Gleichung (53') und φ_a der gesamte Umlegungswinkel des Ankers, 31,25 Minuten gleich 0,0091 im Bogenmaß.

Der Zahlenwert von E_a ist somit:

$$E_a = \frac{1}{2} \cdot 0,0064 \cdot \left(0,087 \cdot \frac{1}{0,42} + 1 \right) \cdot 0,0091^2 = 0,32 \cdot 10^{-6} \text{ mkg.}$$

Wenn auch die Übereinstimmung mit dem auf Seite 49 für die Federarbeit E_f errechneten Wert zum Teil zufälliger Natur ist, so zeigt sie doch, daß jene oft erwähnte Hypothese (vergl. Seite 26) zum mindesten in unserm Falle ihre Berechtigung besitzt, und demnach die Grundlagen, auf denen das Federkraftdiagramm aufgebaut wurde, Vertrauen verdienen.

Anm. Da das Gangrad pro Schwingung $2,5 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{6}{360} \cdot 2\pi = 0,262 \cdot 10^{-5}$ mkg an Arbeit abgibt, so ist der Gesamtwirkungsgrad der Hemmung:

$$\eta = \frac{0,32}{0,262} \cdot 10^{-1} \sim 12,2\%.$$

Dieser geringe Wert ist aber kein besonderer Nachteil, denn die Uhr ist keine Maschine für Kraftübertragung; auch ist η bei anderen Konstruktionen, z. B. beim Grahamgange, wegen der starken Ruhereibung noch weit kleiner. Nichtsdestoweniger verdiente jedoch eine Uhr mit besserem Wirkungsgrade unter sonst gleichen Umständen den Vorzug, schon der kleineren Abnutzung wegen.

B. Die Veränderlichkeit der Ankerarbeit.

Wir wollen untersuchen, in welcher Weise sich E_a ändert, wenn einzelne Faktoren den in praxi unvermeidlichen Variationen unterliegen. Wir bekommen dann ein Urteil über den Einfluß jener Variationen auf den Gang der Uhr.

1. Die Antriebskraft wächst.

β_0 sei wieder die Ankerlage zu Beginn der Gleitung. Da die Fallstrecke nunmehr vom Gangrade in kürzerer Zeit zurückgelegt wird, so wird der inzwischen vom Anker zurückgelegte Weg und damit auch β_0 kleiner; der Umlegungswinkel φ_a wird also auch kleiner. Weiter vollzieht sich jetzt auch die Gleitung rascher, d. h. die Konstante C ist größer geworden. Also ist die zugeführte Energie E_a kleiner geworden, so paradox es auch klingen mag.

2. Die Ruhereibung der Klauen wächst.

Der Überspannungsweg w (vergl. Fig. 7) wird größer, d. h., wenn der Anker in Bewegung gerät, ist das Pendel bereits weiter fortgeschritten: ω_p ist also während der Gleitung kleiner als sonst. Der Anker wird aber nun während des Falles durch die von der Überspannung herrührende, am Ende der Auslösung frei werdende Federspannung dem Gangrade entgegengeschnellt; damit wird β_0 sowohl wie $\bar{\varphi}_a$ größer. Außerdem wird die Ankerumlegung durch die erhöhte Federspannung in die Länge gezogen, d. h. die Konstante C verkleinert. Alles in allem ist E_a also gewachsen. Hiermit ist die Ansicht widerlegt, daß die Vergrößerung der Schneideneibung, die ja auch zur Ruhereibung gehört, das Pendel behindern müsse. — Allerdings steht dem Wachstum von E_a auch eine größere Inanspruchnahme des Pendels bei der Auslösung gegenüber.

3. Die Gleitungsreibung wächst.

Die Hebungsdauer wird dadurch zweifellos verlängert, d. h. C kleiner. $\bar{\varphi}_a$ ändert sich nicht, wohl aber wird der Durchschnittswert von ω_p etwas kleiner, weil die Beendigung der Hebung hinausgeschoben ist. Etwas sicheres über die Änderung von E_a läßt sich also nicht aussagen.

4. Die Schwungweite des Pendels wächst.

Die Klaue kommt jetzt während des Falles der Zahnflanke etwas rascher entgegen, wodurch β_0 und $\overline{\varphi_a}$ vergrößert werden. Durch das rascher forteilende Pendel wird aber auch die Ankerumlegung erschwert und verzögert, mithin C kleiner. ω_p nimmt absolut zu, relativ aber ein wenig ab infolge der Verschleppung des Schlusses der Umlegung. In Summa ist also E_a entschieden gewachsen.

Die Schwungweite befindet sich also in einer Art von labilem Zustande, denn in ihrem Wachstum liegt eine Ursache zu weiterer Zunahme. Das ist ein Übelstand.

Stellt man sich nun z. B. den Fall vor, daß die Antriebskraft wächst, so nimmt die Schwungweite nach dem unter 1 Gesagten allmählich ab. Hierdurch wird nach 4 eine weitere Verkleinerung bedingt, so daß die Gesamtabnahme stärker ist, als nach 1 zu erwarten wäre.

Nach welchen Gesetzen und in welcher Zeit eine solche Abnahme ceteris paribus etwa erfolgt, wird im letzten Abschnitt gezeigt werden.

VI. Der Einfluß der Hebung auf die Schwingungsdauer.

A. Das Spiralendiagramm.

Die Differentialgleichung der durch den Luftwiderstand gedämpften Pendelschwingung lautet bekanntlich:

$$J_p \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + p \cdot \frac{d\varphi}{dt} + S \cdot g \cdot \varphi = 0. \quad (56)$$

Hierin ist p das Kräftepaar des Luftwiderstandes für die Winkelgeschwindigkeit eins; vorausgesetzt ist, wie gewöhnlich bei so kleinen Geschwindigkeiten, daß der Widerstand der Geschwindigkeit proportional sei. Inwieweit diese Annahme berechtigt ist, erhellt aus den auf Seite 62 angeführten Versuchsergebnissen.

Für den Fall, daß $\overline{\varphi}$ den anfänglichen Maximalausschlag bedeutet und die Zeit von ihm ab gezählt wird, lautet die Integralgleichung von (56):

$$\varphi = \bar{\varphi} \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos \left[\beta t - \arctg \frac{\alpha}{\beta} \right] \text{ und} \quad (57)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = -\bar{\varphi} \cdot \beta \cdot \left[\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1 \right] \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \beta t.$$

Darin ist die Dämpfungskonstante $\alpha = \frac{p}{2 \cdot J_p}$ sek⁻¹ und die Periodizitätskonstante $\beta = \sqrt{\frac{S \cdot g}{J_p} - \frac{p^2}{4 J_p^2}}$ sek⁻¹.

Die Amplitude von ω ist, wie man sieht, $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ mal größer als die von φ .

Die Funktionen (57) lassen sich leicht graphisch veranschaulichen. Vergl. Fig. 10. Man zeichne sich eine logarithmische

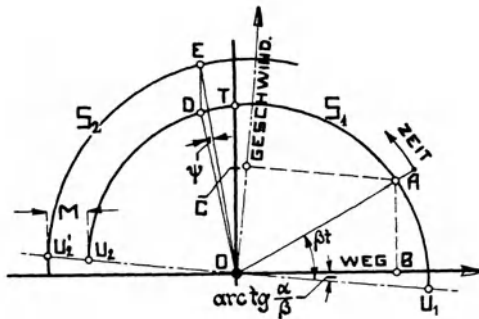


Fig. 10.

Spirale, d. h. also eine polare Kurve, deren in gleichen Winkelabständen aufeinander folgende Radien eine abnehmende geometrische Reihe bilden.

OA sei die Stellung des mit konstanter Winkelgeschwindigkeit β im Sinne des Pfeiles umlaufend gedachten Radiusvektors zur Zeit t . Gibt man der Strecke OU_1 den Wert $\bar{\varphi} \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1}$, so ist, wenn der Radius rotiert und A dabei auf der Spirale wandert, die Projektion OB der jeweilige Ausschlagwinkel φ des Pendels, mithin die Abszissenachse die Achse des Pendelweges. Soll die Figur maßstäblich richtig sein, so muß der Exponent jener geometrischen Reihe natürlich der Gleichung (57) Genüge leisten, d. h. der Radiusvektor muß sich bei einer Drehung von 180° im Verhältnis von

1: $e^{-\frac{\alpha}{\beta} \cdot \pi}$ verkürzen, was leicht einzusehen ist. — Man sieht, wie die Schwingungen immer kleiner werden.

Legt man weiter das strichpunktierte Achsenkreuz durch diejenigen Punkte der Spirale, die horizontale resp. vertikale Tangenten haben, so ist OC die zu der Vektorstellung OA gehörige Winkelgeschwindigkeit ω , falls man OU_1 jetzt in einem im Verhältnis von $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ zu eins verkleinerten Maßstabe mißt. Die Geschwindigkeit erreicht also ihr Maximum zeitlich und noch mehr örtlich vor der Mitte. Die U sind die beiden Umkehrpunkte, in denen $\omega = 0$ ist.

M ist das Manko an Schwingweite nach einer Schwingung. Soll es nicht eintreten, so muß der Punkt A irgendwo und auf irgendeine Weise von der Spirale S_1 nach S_2 übergeführt werden, worauf er dann zuletzt in U_2' anlangt. Dabei ist der Winkel des Radiusvektors, die exzentrische Anomalie, stets ein Maß für die während der Bewegung verfllossene Zeit, solange A auf der Spirale bleibt. Für die Dauer der Überführung von S_1 nach S_2 , die Auslösungs- und Hebungsperiode, gilt dies nicht mehr, wie folgende Überlegung zeigt: nach der Relation $dt = \frac{d\varphi}{\omega}$ ist das Zeitelement dt numerisch dem Winkel mit dem Bogen $d\varphi$ und dem Radius ω gleichwertig. Solange nun die Tangente an die von A beschriebene Kurve einen bestimmten konstanten Winkel mit der Kreistangente bildet, und zwar denselben Winkel wie die Geschwindigkeitsachse mit der lotrechten Ordinatenachse, ist das Verkürzungsverhältnis der Projektionen für Wegelement und Geschwindigkeit jederzeit dasselbe und damit die Beziehung $d\beta t = \text{Const} \cdot \frac{d\varphi}{\omega}$ stets erfüllt; sonst ist das nicht der Fall. Der Zentriwinkel kann also nur für die logarithmische Spirale als Zeitmaßstab angesehen werden. Dies ist wichtig für die Deutung des Diagramms.

Der Winkel φ im Bogenmaß gemessen bedeutet $\frac{\varphi}{\beta}$ sek, denn eine ganze Schwingung umfaßt nach (57) $\frac{\pi}{\beta}$ sek.

Nehmen wir nun einmal an, die Überführung von S_1 nach S_2 erfolge durch einen „Drehstoß“ in sehr kurzer Zeit, etwa von D nach E ; da sich die Pendelstellung in der kurzen Zeit nicht wesentlich ändert, so liegt E senkrecht über D . Die Schwingungszeit vor dem Stoß entspricht dem Winkel U_1OD , die nach dem Stoß

dem Winkel EOU_2' . Die Schwingungsdauer ist also um $\frac{\psi}{\beta}$ Sekunden verlängert worden. Wäre der Stoß vor dem „Totpunkt“ T erfolgt, so würde eine Verkürzung eingetreten sein. Im Totpunkt selbst aber hätte der Stoß keinerlei Einfluß auf die Dauer der Schwingung. Dieser allgemein bekannte Satz läßt sich also aus dem Diagramm ohne weiteres ablesen.

Die Punkte D und E brauchen natürlich nicht übereinander zu liegen; sie werden es in Wirklichkeit auch nie tun, da die Energiezufuhr Zeit erfordert, und das Pendel dabei um ein Stück weitergeht, das gleich der Projektion von DE auf die Wegachse ist.

Allgemein gilt der Satz: Die Schwingungsdauer ist gleich $U_1OD + EO U_2'$ sek, vermehrt um die Dauer von Auslösung und Hebung.

Die Betrachtung mittels des Spiralendiagramms ist also eine Ergänzung der früheren Untersuchungen; sie gestattet uns einen sehr klaren Überblick über die Beeinflussung der Schwingung durch den Mechanismus des Uhrwerkes.

B. Anwendung auf den freien Gang.

Die Direktionskraft setzt sich aus derjenigen der Schwere und der der Feder zusammen; letztere entspricht dem Federkraftdiagramm. Vergl. Fig. 11. In einem nahe der Mitte gelegenen Punkte x ist die Direktionskraft null. Nach Gleichung (23') auf Seite 26 gilt:

$$S \cdot g \cdot x + Ax + B\beta = 0.$$

Da $\beta = 3'$, so wird:

$$x = - \frac{B}{S \cdot g + A} \cdot 3' = - \frac{0,0064}{6,8 + 0,0064} \cdot 3' \sim - 0,17''.$$

In Fig. 12 ist die Summation der Ordinaten von 11 vollzogen; sie stellt das Beschleunigungsdiagramm des Pendels vor. Denkt man sich jede Hälfte desselben um die Strecke x nach außen gezogen, so nimmt es die normale Gestalt an, bei der die Direktionskraft in der Mitte verschwindet und proportional dem Abstände von ihr wächst. Jede Abszisse der linear verlaufenden Teile des Diagramms ist nun allerdings um $x = 0,17''$ zu groß abgetragen, mit Ausnahme des Stückes zwischen Mitte und Auslösungsanfang, wo eine ebenso große Verkleinerung stattgefunden hat. — Mit Hilfe

dieses Kunstgriffes sind wir jetzt in die Lage gekommen, den freien Gang an der Hand des Spiralendiagramms zu diskutieren.

Die Gesamtschwingungsdauer setzt sich aus folgenden vier Teilen zusammen (s. Fig. 13):

1. $\frac{U_1 O D}{\beta}$ sek bis zum Beginn der Auslösung;
2. der Dauer der Auslösung;
3. " " " Hebung;
4. $\frac{E O U_2'}{\beta}$ sek bis zum Umkehrpunkt.

Die Bedeutung der Winkel δ und ϵ geht aus Fig. 12 hervor. Zu beachten ist nun folgendes:

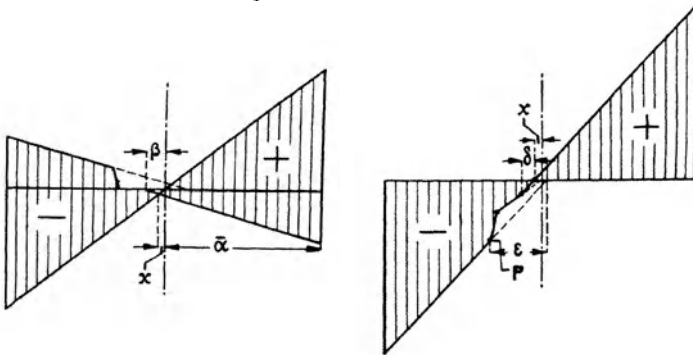


Fig. 11 und 12.

a) Wenn die Schwingweite α zunimmt, so wäre das Diagramm von Rechts wegen in einem größeren Maßstabe zu zeichnen: einfacher ist es aber, sich die Winkel δ und ϵ entsprechend verkleinert zu denken, d. h. die Punkte D und E nach rechts gerückt.

b) Der Auslösungsweg ist eine konstante konstruktive Größe, die Auslösungsdauer also abhängig von der Pendelgeschwindigkeit.

c) Die Hebungsdauer ist in erster Linie abhängig von der Antriebskraft.

Die Hauptvariable ist für uns die Hebungsdauer, und wir stehen vor folgender Kardinalfrage: Was geschieht, wenn sie sich ändert, z. B. wenn sie größer wird?

Infolge des relativ großen Trägheitsmoments des Pendels variiert die Schwingweite nur ganz allmählich, so daß sie zunächst

als konstant angesehen werden kann. Vergleiche den letzten Abschnitt.

Da der Punkt P in Fig. 12 infolge der späteren Beendigung der Hebung etwas nach links rückt, so wird auch ε größer und weiter der Winkel EOU_2' in Fig. 13 kleiner; die Dauer des der Hebung nachfolgenden Ergänzungsbogens nimmt also ab. Mithin wird die durch die längere Hebungsdauer erzeugte Verlängerung der Schwingungsdauer mehr oder weniger ausgeglichen.

Nun hat aber die Verschiebung von P noch eine weitere Folge. Wie man aus Fig. 12 erkennt, hat die pro Schwingung zugeführte Energie zugenommen, denn die negative Fläche des Diagramms ist kleiner geworden. Hieraus folgt, daß mit der Verlängerung der Hebungsdauer (etwa infolge eines Nachlassens der Triebkraft) die Schwingweite zunehmen muß. Auf dies Paradoxon waren wir bereits bei der Berechnung der Ankerarbeit gestoßen; wir hätten es übrigens auch schon aus Gleichung (54), Seite 49, herauslesen können.

Nachdem die Schwingweite soweit zugenommen hat, daß die Energiebilanz wieder hergestellt ist, tritt ein neuer stationärer Zustand ein.

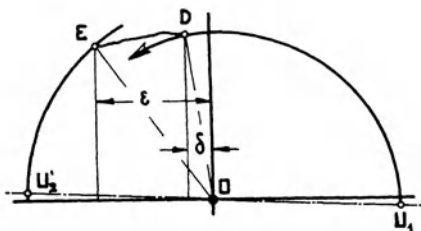


Fig. 13.

ε und δ sind jetzt nach dem unter a) Gesagten in kleinerem Maßstab aufzutragen, und die Punkte D und E in Fig. 13 rücken etwas nach rechts. Da aber E direkt nach Beginn der Störung bereits nach links gerückt war, so kann über die definitive Änderung seiner Lage auf Grund der vorliegenden allgemeinen Schlußfolgerung nichts Bestimmtes ausgesagt werden.

Bezüglich der Schwingungsdauer ergibt sich demnach im ganzen folgendes:

1. die Hebungsdauer hat zugenommen; ihre Änderung war die Ursache der ganzen Störung;
2. die Auslösungsdauer hat wegen der größeren Pendelgeschwindigkeit abgenommen;
3. über die Änderung der Dauer des nachfolgenden Ergänzungsbogens EOU_2' läßt sich nichts Bestimmtes aussagen;

4. die Dauer des einleitenden Ergänzungsbogens $U_1 O D$ hat etwas abgenommen.

Bei abnehmender Hebungsdauer ist natürlich alles umgekehrt.

Der Fall ist also sehr wohl denkbar, daß Verhältnisse vorkommen können, unter denen bei wachsender Schwungweite in Summa eine Verkürzung der totalen Schwingungsdauer eintritt, obwohl einer ihrer Teile, die Hebungsdauer, bestimmt gewachsen ist.

Wir hätten es dann also sozusagen mit einer Art Uhrwerkisochronismus zu tun, der ein Gegengewicht gegen die nach bekannten Gesetzen mit der Schwungweite erfolgende Zunahme der Schwingungsdauer bilden und den auf Seite 24 behandelten Polisochronismus ergänzen würde.

Das Gesamtergebnis dieses Abschnitts läßt sich folgendermaßen zusammenfassen: das Spiraldiagramm gestattet, den Einfluß der Lage und der Dauer der Hebung auf die Schwingung bequem zu übersehen; es zeigt insbesondere, daß die Dauer der Ergänzungsbögen um so konstanter ist, je mehr die Hebung in die Bahnmitte fällt, sowie auch, daß eine Änderung der Gesamtschwingungsdauer in einem bestimmten Sinne bei einer Änderung der Hebungsdauer nicht allgemein stattfindet, sondern die Änderung je nach der Konstruktion in verschiedenem Sinne ausfallen kann.

VII. Der nicht stationäre Schwingungszustand des Pendels.

A. Der Energiebedarf des Pendels.

Versteht man wieder unter p das Drehmoment des Luftwiderstandes für die Geschwindigkeit 1, so ist der mittlere Widerstand während einer Schwingung:

$$\frac{\pi}{4} \cdot p \cdot \omega_{max} = \frac{\pi}{4} \cdot p \cdot \bar{\alpha} \cdot \frac{\pi}{T} \text{ mkg,}$$

denn das Geschwindigkeitsdiagramm des Pendels über seiner Bahn ist bekanntlich eine Ellipse (vergl. Seite 36) mit der mittleren Höhe $\frac{\pi}{4} \omega_{max}$.

Folglich ist die vom Luftwiderstande pro Schwingung verbrauchte Arbeit:

$$E_1 = 2 \bar{\alpha} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \rho \cdot \bar{\alpha} \cdot \frac{\pi}{T} = \frac{\pi^2 \cdot \bar{\alpha}^2 \cdot \rho}{2 \cdot T} \text{ mkg.} \quad (58)$$

Denselben Ausdruck erhält man auch leicht folgendermaßen: nach Gleichung (57), Seite 53, bilden die Schwingungen, wenn keine Energiezufuhr stattfindet, eine geometrische Reihe mit dem Exponenten $e^{-\frac{\rho}{2J_p} \cdot T}$.

War nun die potentielle Energie des Pendels im n ten Umkehrpunkt $S \cdot g \cdot (1 - \cos \bar{\alpha}_n)$, so ist sie im nächsten nur noch $S \cdot g \cdot (1 - \cos \alpha_{n+1})$; die Differenz bedeutet den Verlust während der dazwischen liegenden Schwingung. Sie ist:

$$E_1 = S \cdot g \cdot (\cos \alpha_n - 1 - \cos \alpha_{n+1}).$$

Entwickelt man den Kosinus in einer Reihe und vernachlässigt vom 3. Gliede an, so wird:

$$E_1 = S \cdot g \cdot \left(\frac{\alpha_n^2}{2} - \frac{\alpha_{n+1}^2}{2} \right) = S \cdot g \cdot \frac{\alpha_n^2}{2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\rho T}{J_p}} \right).$$

Entwickelt man auch die Exponentialfunktion in einer Reihe und vernachlässigt wegen der Kleinheit von ρ vom dritten Gliede an, so folgt:

$$E_1 = S \cdot g \cdot \frac{\alpha_n^2 \cdot \rho \cdot T}{2 J_p} \text{ mkg.}$$

Da endlich $T = \pi \cdot \sqrt{\frac{J_p}{S \cdot g}}$, so ergibt sich, wie oben:

$$E_1 = \frac{\pi^2 \cdot \bar{\alpha}^2 \cdot \rho}{2 \cdot T} \text{ mkg.}$$

Anm. Natürlich sind noch andere Umstände vorhanden, die Energie verzehren, z. B. die elastische Nachwirkung der Federn und die Reibung; sie sind aber gegenüber dem Luftwiderstande klein und mögen mit in den Ausdruck für E_1 inbegriffen vorgestellt werden, ungeachtet ihres vielleicht etwas abweichenden Gesetzes.

B. Die Zustandsgleichung.

Solange die pro Schwingung dem Pendel zugeführte Arbeit E_2 genau so groß ist, als Gleichung (58) vorschreibt, ist sein Zustand stationär. Jetzt wollen wir untersuchen, was eintritt, wenn das Gleichgewicht gestört und z. B. $E_2 > E_1$ wird.

Die Energie des Pendels hat den Wert:

$$\bar{E}_p = \omega^2 \cdot \frac{J_p}{2} = \left(\frac{\pi}{T} \right)^2 \cdot \frac{J_p}{2} = A \cdot \bar{\alpha}^2 \text{ mkg.} \quad (59)$$

Sie ist im Umkehrpunkt rein potentieller und im „Totpunkt“ rein kinetischer Natur. Wir stellen uns aber unter $\bar{\alpha}$ einen dem jeweiligen augenblicklichen Energiegehalt des Pendels entsprechenden fiktiven Maximalausschlag vor, befinde es sich wo es wolle.

Ferner fassen wir sowohl den Energieverbrauch als auch die Zufuhr trotz ihres periodischen Charakters als stetig auf; bei der außerordentlichen Kleinheit von E_1 und E_2 gegenüber E_p ist dies ohne weiteres zulässig.

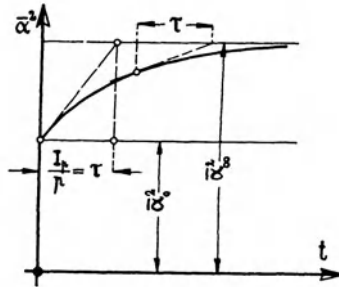


Fig. 14.

$E_1 = B \bar{\alpha}^2$ sei nun die dem Pendel pro Schwingung entzogene und E_2 die pro Schwingung konstant zugeführte Energie. Da in der Sekunde $n = \frac{1}{T}$ Schwingungen gemacht werden, so sind diese Werte, wenn die Rechnung auf die Sekunde bezogen wird, noch mit $\frac{1}{T}$ zu multiplizieren. Also gilt die Bilanzgleichung:

$$\frac{E_2}{T} = \frac{E_1}{T} + \frac{dE_p}{dt} = \frac{B}{T} \cdot \bar{\alpha}^2 + A \cdot \frac{d\bar{\alpha}^2}{dt}. \quad (60)$$

Durch Integration ergibt sich:

$$E_2 - B \cdot \bar{\alpha}^2 = T \cdot \text{Const.} \cdot e^{-\frac{B}{A} \cdot \frac{t}{T}}. \quad (61)$$

Charakterisieren wir den Anfangszustand durch die Größe $\bar{\alpha}_0^2$ und den Endzustand, da wir es mit einer aperiodisch verlaufenden Exponentialfunktion zu tun haben, die ihren Sollwert erst nach un-

endlich langer Zeit erreicht, folgerichtig durch $\bar{\alpha}_\infty^2$, so gelten die Grenzbedingungen:

$$\begin{aligned} E_2 - B \bar{\alpha}_0^2 &= T. \text{ Const} && \text{für } t = 0. \\ E_2 - B \bar{\alpha}_\infty^2 &= 0 && \text{„ } t = \infty. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (61) folgt unter Berücksichtigung der Werte von A und B schließlich die Zustandsgleichung:

$$\bar{\alpha}^2 = \bar{\alpha}_\infty^2 - (\bar{\alpha}_\infty^2 - \bar{\alpha}_0^2) \cdot e^{-\frac{p}{J_p} \cdot t}. \quad (62)$$

Sie zeigt uns die Art und Weise, wie die Schwungweite ceteris paribus allmählich dem neuen Zustande zustrebt. Vergl. Fig. 14.

C. Die Relaxationsdauer des Pendels.

Im Anschluß an die Terminologie der Physik wollen wir den Ausdruck $\frac{J_p}{p}$, der die Dimension einer Zeit hat, als Relaxationsdauer oder Zeitkonstante bezeichnen. Er läßt sich bekanntlich als diejenige Zeit definieren, nach welcher der Übergang zu dem neuen Zustande bis zu $e^{-1} = 63,2\%$ erledigt ist; denn setzt man in (62) $t = \frac{J_p}{p}$, so folgt:

$$\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}_0^2 = \frac{e-1}{e} \cdot (\bar{\alpha}_\infty^2 - \bar{\alpha}_0^2),$$

oder auch als die Zeit, die bis zur Erreichung des Sollwertes vergehen würde, wenn die Änderung konstant mit derselben Vehemenz vor sich ginge, wie im ersten Augenblick; denn für $t=0$ ist nach (62);

$$\frac{d\bar{\alpha}^2}{dt} = \frac{\bar{\alpha}_\infty^2 - \bar{\alpha}_0^2}{\frac{J_p}{p}}. \quad (\text{Vergl. Fig. 14.})$$

Wir erkennen somit folgendes: je größer das Trägheitsmoment und je kleiner der Luftwiderstand des Pendels, um so langsamer folgt seine Schwungweite den Variationen der Intensität des Antriebes, d. h. um so konstanter ist sie. Das Streben der Praxis, möglichst schwere und lange Pendel zu verwenden, erfährt hierdurch seine theoretische Begründung.

Herr Dr. RIEFLER hat die Liebenswürdigkeit gehabt, auf meine Anregung hin mit verschiedenen Pendeln Dämpfungsversuche

anzustellen. Eine der mitgeteilten Zahlenreihen gebe ich hier wieder.

Ein Sekundenpendel mit gewöhnlicher Linsenform wurde bei 711,5 mm mittlerem Luftdruck und festgeklebtem Anker in Schwung gebracht und dann die Schwungweite von Zeit zu Zeit notiert; vergl. die folgende Tabelle. — Aus der Konstanz der logarithmischen Dekremente, besonders bei den kleineren Amplitüden, sieht man, daß man es tatsächlich mit einer angenäherten Exponentialfunktion zu tun hat, so daß die auf Seite 52 gemachte Annahme über den Luftwiderstand als für kleine Ausschlagwinkel gerechtfertigt zu betrachten ist.

Zeit in Stunden	$\bar{\alpha}$	$\log \alpha$	$J \log \alpha$
0	180'	2,255 27	
1	126'	2,100 37	0,154 90
2	91'	1,959 04	0,141 33
3	68'	1,832 51	0,126 53
4	51'	1,707 57	0,124 94
5	40'	1,602 06	0,105 51
6	31'	1,491 36	0,110 70
7	24'	1,380 21	0,111 15
8	19'	1,278 75	0,101 46

} 0,113 38

Nun läßt sich die Relaxationsdauer zahlenmäßig bestimmen. Ist $\bar{\alpha}_1$ die Weite der ersten und $\bar{\alpha}_n$ die der n ten Schwingung, so gilt nach Gleichung (57), Seite 53:

$$\frac{\bar{\alpha}_n}{\bar{\alpha}_1} = \left(e^{-\frac{p T}{2 J_p}} \right)^{n-1} \tag{63}$$

Durch Logarithmieren folgt:

$$\frac{J_p}{\dot{p}} = \frac{m \cdot T \cdot (n-1)}{2 (\log \bar{\alpha}_1 - \log \bar{\alpha}_n)} \text{ sek,} \tag{64}$$

worin m der Modul der natürlichen Logarithmen; oder:

$$\frac{J_p}{\dot{p}} = 6,03 \cdot \frac{T \cdot (n-1)}{\log \bar{\alpha}_1 - \log \bar{\alpha}_n} \cdot 10^{-5} \text{ Stunden.} \tag{65}$$

Bedenkt man, daß das Pendel in einer Stunde 3600 Schwingungen macht, so folgt für die Relaxationsdauer:

$$\frac{J_p}{p} = 6,03 \cdot \frac{1 \cdot 3599}{0,11338} \cdot 10^{-5} \sim 1 \text{ h } 55 \text{ min.}$$

In dieser Zeit nimmt also das Quadrat der Schwingweite zu etwa $\frac{5}{8}$ den neuen Wert an. Für die Schwingweite selbst ist die Relaxationsdauer natürlich doppelt so groß, d. h. 3 h 50 min.

Diese Schwerfälligkeit bedeutet einen großen Vorteil im Interesse der Konstanz der Betriebsverhältnisse, dem wir im nächsten Abschnitt noch weiter nachgehen wollen.

Genau derselbe Vorgang, wie er jetzt geschildert wurde, vollzieht sich selbstverständlich auch dann, wenn die Störung nicht von einer Änderung der Intensität des Antriebes, sondern etwa von einer Schwankung des Luftwiderstandes herrührt, denn die Bilanzgleichung (60) behält ihre Gültigkeit.

Bei luftdicht eingekapselten Werken kann dies aber natürlich nicht vorkommen, vorausgesetzt, daß die Luftpumpe nicht in Tätigkeit tritt.

Anm. Da für das von RIEFLER untersuchte Pendel $\frac{J_p}{p} = 6900$ sek und $J_p \sim 0,69$ kgmsek², so ist $p \sim 0,0001$ kgmsek. Nunmehr läßt sich nach Gleichung (58) der Energiebedarf pro Schwingung ermitteln:

$$E_1 = \frac{\pi^2 \cdot \bar{\alpha}^2 \cdot p}{2 T} \sim 0,42 \cdot 10^{-6} \text{ mkg.}$$

Hierin ist $\bar{\alpha} = 100'$ gesetzt. Mithin würde das von uns durchgerechnete Werk, das pro Schwingung nur $0,32 \cdot 10^{-6}$ mkg liefert, für dies Pendel nicht genügen; mit andern Worten, es würde sich eine kleinere Schwingweite (88') einstellen.

D. Periodischer Antrieb.

Wie vollkommen das Triebwerk auch sein mag, periodische Schwankungen der Stärke des Antriebes lassen sich nicht gänzlich vermeiden.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie sich die Schwingweite ändert, wenn solche Variationen eintreten, etwa nach dem einfachen Gesetz:

$$E = r' + s' \cdot \sin m t \text{ mkgsek}^{-1}, \quad (66)$$

worin man sich unter $\frac{2\pi}{m}$ etwa die Umlaufzeit eines der Räder vorstellen möge. Allgemeiner wäre die Anwendung einer FOURIERSchen Reihe, doch genügt (66) für unsern Zweck vollkommen.

Wie die Dimension zeigt, ist hier mit E die pro Zeiteinheit zugeführte Energie gemeint. Da diese aber nach (58) dem Quadrat der Schwungweite im stationären Zustande proportional sein muß, so können wir im Anschluß an die Bezeichnungweise der Zustandsgleichung für (66) auch schreiben:

$$\bar{\alpha}_\infty^2 = r + s \cdot \sin m t. \quad (67)$$

Diesen Ausdruck müssen wir jetzt mit der Zustandsgleichung (62) in Verbindung bringen.

Der Kürze wegen schreiben wir im folgenden statt $\bar{\alpha}_\infty^2 X$ und statt $\bar{\alpha}^2 x$.

Da die Relaxationsdauer konstant ist, so strebt die zu untersuchende Funktion ihrem Endwerte X in jedem Augenblicke dergestalt zu, daß die auf die Asymptote bezogene Subtangente, die nach Fig. 14 die Relaxationsdauer τ repräsentiert, stets gleich τ bleibt. X selbst ist dabei nach (67) variabel. Es muß also sein:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{X-x}{\tau} \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = \frac{X}{\tau}. \quad (68)$$

Die rechte Seite, die Störungsfunktion, ist eine Funktion der unabhängigen Variablen. Setzen wir sie zunächst gleich null, so folgt durch Integration:

$$x = C \cdot e^{-t/\tau}. \quad (69)$$

Nun wenden wir die Methode der Variation der Konstante an. Durch Differentiation von (69) folgt:

$$\frac{dx}{dt} = e^{-t/\tau} \cdot \frac{dC}{dt} - \frac{C}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}. \quad (70)$$

Setzt man (69) und (70) in (68) ein, so ergibt sich:

$$C = \frac{1}{\tau} \cdot \int X \cdot e^{t/\tau} dt + C_1, \quad (71)$$

also:

$$x = e^{-t/\tau} \cdot \left[\frac{1}{\tau} \cdot \int X \cdot e^{t/\tau} dt + C_1 \right]. \quad (72)$$

Hiermit ist die allgemeine Lösung des vorliegenden Problems vollzogen und wir haben in unserm Spezialfalle nur noch X aus (67) einzusetzen und die letzte Integration zu erledigen. Es ist:

$$r \cdot \int e^{t/\tau} dt = \tau \cdot r \cdot e^{t/\tau} + C^I,$$

$$s \cdot \int \sin m t \cdot e^{t/\tau} dt = s \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\sin m t - m \cdot \cos m t}{\frac{1}{\tau^2} + m^2} \cdot e^{t/\tau} + C^{II}.$$

Durch Einsetzen in (72) erhalten wir:

$$x = r + \frac{s}{\frac{1}{\tau} + m^2 \tau} \cdot \left(\frac{1}{\tau} \cdot \sin m t - m \cdot \cos m t \right) + C^{III} \cdot e^{-t/\tau}. \tag{73}$$

Da für $t = 0$ $x = x_0$, so wird:

$$C^{III} = x_0 - r + \frac{m \cdot s}{\frac{1}{\tau} + m^2 \tau},$$

also x endgültig:

$$x = r + \frac{s}{\frac{1}{\tau} + m^2 \tau} \cdot \left(\frac{1}{\tau} \cdot \sin m t - m \cdot \cos m t \right) + \left(x_0 - r + \frac{m \cdot s}{\frac{1}{\tau} + m^2 \tau} \right) \cdot e^{-t/\tau}. \tag{74}$$

Hierin ist x das Quadrat der Schwungweite zur Zeit t , x_0 dasselbe zu Anfang, τ die Relaxationsdauer, r und s die Konstanten aus (67) und m die Winkelgeschwindigkeit des die Störung verursachenden Rades.

Gleichung (74) gestattet eine interessante Diskussion. Das letzte Glied, das von dem initialen Zustande x_0 abhängt, verschwindet mit der Zeit gänzlich; da r ein negatives Vorzeichen hat, so kann es schon von Anfang an fehlen. Eigentümlicherweise ist das aber nicht dann der Fall, wenn x_0 den Mittelwert r hat, sondern wenn $x_0 = r - \frac{\tau \cdot m \cdot s}{1 + m^2 \tau^2}$ ist. Das hängt mit der Phasenverschiebung zwischen X und x zusammen.

Denkt man sich nun das letzte Glied bereits verschwunden, so wird mit Hilfe der Substitution $m \tau = \operatorname{tg} m \vartheta$:

$$x = r + \frac{s}{\sqrt{1 + \tau^2 m^2}} \cdot \sin m (t - \vartheta). \tag{75}$$

Die Schwankung von x hinkt also um \mathcal{J} Sekunden hinter der Schwankung von X (d. h. dem Werte, den x eigentlich haben müßte, wenn der Zustand bereits stationär wäre) hinterher; diese Nacheilung wächst mit der Umlaufgeschwindigkeit m des störenden Triebrades und mit der Relaxationsdauer.

Weit wichtiger ist die Betrachtung des Ausdrucks $\frac{s}{\sqrt{1+m^2\tau^2}}$, der die Amplitude angibt, mit welcher x um seinen Mittelwert r schwankt. Sie zeigt, daß die Schwankung um so kleiner wird, je größer einmal die Relaxationsdauer ist, und dann auch, je rascher das störende Rad umläuft.

Diese Wirkung der Vergrößerung der Relaxationsdauer hat etwas Selbstverständliches an sich: neu dagegen ist der theoretische Nachweis dafür, daß rascher umlaufende Räder weit weniger Störungen verursachen als langsame.

Die Praxis hat den richtigen Weg längst eingeschlagen; bei der neuesten RIEFLERSchen Triebwerkkonstruktion z. B. dreht sich das am langsamsten laufende Rad immer noch achtmal in der Stunde.

Hiermit sind auch die Einwände derer entkräftet, die in der etwa alle halbe Minute in Tätigkeit tretenden elektrischen Aufzugsvorrichtung eine Störungsquelle sehen; im Gegenteil, je seltener die Störung auftritt, um so schlimmer ist sie unter sonst gleichen Umständen.

VIII. Zusammenstellung der wichtigsten praktischen Ergebnisse.

Das Pendel hat die Neigung, Oberschwingungen auszunehmen, die darin bestehen, daß das obere Stangenende kleine Seitenbewegungen macht. Sie stören die Hauptschwingung nicht, wohl aber unter Umständen die Funktion der Hemmung. Diese Neigung ist jedoch geringer als bei dem Grahamgange.

Der ideelle Pendeldrehpunkt liegt, kleine Ausschlagwinkel vorausgesetzt, während der Ergänzungsbögen näherungsweise um

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{e^{\sqrt{a}l} - 1}{e^{\sqrt{a}l} + 1} \text{ cm}$$

unterhalb der oberen Federfassung, worin $a = \frac{G}{E \cdot J}$ und l die Federlänge. Den genaueren Wert gibt Gleichung (21). Legt man die Drehachse des Ankers durch diesen Punkt, so ist eine Bewegung ohne Oberschwingung möglich; legt man sie aber zur Erzeugung von Isochronismus höher, so sind Oberschwingungen unvermeidlich. Diese Überhöhung hat weniger als $\frac{1}{2}$ mm zu betragen, wenn sie ihren Zweck erfüllen soll.

Die Beanspruchung der Federn übersteigt nicht das normale Maß: die durch Erschütterungen eintretende Verlangsamung des Ganges ist vermutlich auf eine Änderung des Elastizitätsmoduls zurückzuführen, denn Überschreitungen der Elastizitätsgrenze sind ausgeschlossen. Der Isochronismus erhöht den Einfluß dieser Veränderung.

Die obere Federfassung muß dergestalt auf den Anker gelagert werden, daß sie dem Eintritt von Querschwingungen des Pendels eine genügende Reibung entgegensetzt; solche Querschwingungen können unter Umständen von der Hauptschwingung unterhalten werden und beeinflussen sie dann trotz ihrer Kleinheit aus verschiedenen Gründen. Der Winkel, den die Schwungebene mit der Nord-Südrichtung bildet, hat auf die Erscheinung keinen Einfluß.

Während der Auslösung vollzieht der Anker eine Schwingungsbewegung, die die Dauer der Auslösung beeinflussen kann. Ist die Konstruktion so getroffen, daß dabei eine Verkürzung der Auslösungsdauer eintritt, so ist das vorteilhaft.

Die Antriebskraft muß so bemessen sein, daß sich der Anker während der Gleitperiode möglichst gleichförmig bewegt. Damit wird die Gefahr des Galoppierens und die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von Oberschwingungen auf ein Minimum reduziert.

Der Antrieb, den das Pendel erfährt, hängt vor allem von der Lage und der Dauer der Gleitperiode ab; er wächst mit der Abnahme der Triebkraft des Werkes und umgekehrt. Ebenso nimmt er zu mit der Vergrößerung der Klauen- oder der Schneidenreibung. Eine Behinderung der Schwingung durch die Schneidenreibung wird hierdurch zum mindesten ausgeglichen. Je mehr die Hebung in die Mitte der Bahn fällt, um so konstanter ist die Dauer der Ergänzungsbögen.

Der Einfluß einer Änderung der Antriebskraft des Werkes auf die Schwingungsdauer kann je nach der Konstruktion in ver-

schiedenem Sinne ausfallen. Hierin liegt die Möglichkeit der Erzielung einer besonderen Art von Isochronismus.

Die Schwungweite folgt den Änderungen des Antriebes mit um so größerer Schwerfälligkeit und ist daher um so konstanter, je größer das Trägheitsmoment des Pendels und je kleiner der Luftwiderstand ist. Periodische Änderungen wirken unter sonst gleichen Umständen um so weniger, je kürzer die Periode ist. Eine recht oft wirkende Aufzugsvorrichtung und das Fehlen aller langsam umlaufenden Triebräder sind deshalb als vorteilhaft anzusehen.
