

А.И. Толстых · КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

А.И. Толстых

**КОМПАКТНЫЕ
РАЗНОСТНЫЕ
СХЕМЫ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ
В ЗАДАЧАХ
АЭРОГИДРОДИНАМИКИ**



АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

А.И.Толстых
**КОМПАКТНЫЕ
РАЗНОСТНЫЕ
СХЕМЫ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ
В ЗАДАЧАХ
АЭРОГИДРОДИНАМИКИ**

Ответственный редактор
академик О.М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ



МОСКВА "НАУКА"
1990

Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики / А.И. Толстых. — М.: Наука, 1990. — 230 с. — ISBN 5-02-006701-6

Монография посвящена описанию и исследованию нового класса разностных аппроксимаций — компактных (трехточечных) аппроксимаций третьего и более высокого порядков с разностями против потока. Рассматриваются эффективные численные алгоритмы для уравнений и систем, описывающих конвективно-диффузионные процессы. Приводятся примеры численного решения задач аэрогидродинамики.

Для специалистов в области прикладной математики и численных методов сплошной среды.

Ил. 37. Табл. 7. Библиогр. 114 назв.

Compact difference schemes and their applications to fluid dynamics problems / A.I. Tolstykh. — M.: Nauka, 1990. — 230 p. — ISBN 5-02-006701-6.

The book contains the first complete description and investigation of the new family of difference approximations, namely compact (three-point) the third and higher-than third order schemes with upwind differencing. The effective numerical algorithms for equations and systems of equations describing convective-diffusive processes are considered. The difference schemes for fluid dynamics and examples of numerical simulation of compressible and incompressible flows are presented.

Readership: scientists interested in numerical analysis and computational fluid dynamics, applied scientists.

Il. 37. Tabl. 7. Bibliogr. 114.

Рецензенты: *В.В. Щенников, А.С. Холодов*
Редактор *В.К. Белова*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью этой книги является систематическое изложение теоретических основ компактных аппроксимаций с разностями против потока, а также описание и исследование основанных на них численных алгоритмов для задач механики жидкости и газа. Область применения таких алгоритмов может быть достаточно широкой и включать в себя различные явления, в которых присутствуют конвективные и диффузионные процессы (в частности, с малыми коэффициентами диффузии).

Предложенные автором в начале 70-х годов компактные аппроксимации третьего порядка в дальнейшем систематически использовались им и его коллегами для численного решения уравнений Навье—Стокса сжимаемого газа. В последующие годы они стали применяться также для численного моделирования течений несжимаемой жидкости, описываемых различными формами уравнений гидродинамики. Одновременно с созданием и применением численных алгоритмов происходил процесс углубления и развития теории компактных разностных схем, а также понимания их свойств и роли с точки зрения практических приложений. В настоящее время этот процесс продолжается, причем некоторые новые теоретические результаты были получены в процессе работы над этой книгой.

Значительное влияние на формирование и развитие излагаемых здесь идей оказал А.А. Дородницын, который был научным руководителем автора в бытность его студентом, аспирантом, а затем научным сотрудником. Ему автор приносит глубокую благодарность.

Автор благодарит также О.М. Белоцерковского за многолетнее внимание к этой работе и ее одобрение.

Большую роль в развитии и применении численных алгоритмов сыграли А.П. Быркин, А.Д. Савельев, В.Ю. Дзюба, А.Ю. Даниленко, В.И. Костин, Е.Н. Чигрев, А.П. Мазуров.

Весьма полезными были обсуждения различных аспектов построения разностных схем с В.В. Щенниковым, А.И. Панариным и А.С. Холодовым; идеи последнего о сеточно-характеристическом подходе нашли отражение в этой книге.

Всем им автор выражает благодарность.

ВВЕДЕНИЕ

1. О РАЗНОСТНЫХ МЕТОДАХ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ В АЭРОДИНАМИКЕ

Многообразие задач механики жидкости и газа делает желательным конструирование численных алгоритмов, ориентированных на определенный класс (или классы) задач. Важную с практической точки зрения группу составляют задачи о течениях вязких жидкостей и газов, описываемых уравнениями Навье–Стокса или Рейнольдса, дополненными полуэмпирическими моделями турбулентности, а также теми или иными упрощениями этих уравнений.

Специфический характер таких течений, характеризуемый возможностью образования тонких вязких слоев, зон их взаимодействия, отрывов потока и т.д., предьявляет в ряде случаев достаточно жесткие требования к численным методам. Многие из них описаны в [1, 2].

Прежде всего при необходимости использования малых пространственных шагов сетки, возникающей, в частности, в случае больших чисел Рейнольдса, становятся желательными достаточно устойчивые неявные разностные схемы, позволяющие избежать введения неоправданно малых временных шагов (или соответствующих итерационных параметров), характерных для явных схем.

Хотя возможность параллельных вычислений во многом компенсирует скромный запас устойчивости явных схем, конкурентоспособность последних в случае решения многих практически важных задач о течениях вязкой среды остается далеко не очевидной. Это впечатление усиливает и тот факт, что неявные схемы в той или иной степени также поддаются распараллеливанию.

Если остановиться на концепции неявных схем, то другим желаемым свойством алгоритма является экономичная разрешимость разностных уравнений, когда число арифметических операций, приходящихся на вычислительный цикл, пропорционально числу узлов сетки. Таким свойством обладают, в частности, схемы, шаблон которых в каждом пространственном направлении содержит не более трех узлов.

В случае течений с большими градиентами, часто представляющем наибольший интерес, особо важную роль играет свойство алгоритма не искажать получаемые в процессе счета сеточные решения "паразитными" (схемными) осцилляциями. Если это условие не выполняется, то процесс вычислений может быть либо сильно осложнен, либо вообще невозможен.

Наконец, порядок аппроксимации конвективных членов в уравнениях, описывающих течение с вязкостью, должен превышать первый порядок;

в противном случае либо существует опасность искажения решений из-за схемной вязкости, либо пространственные шаги сетки следует выбирать неразумно малыми.

Перечисленные требования к алгоритму для многих схем являются противоречивыми. Например, схемы с центральными разностями без принятия соответствующих мер являются сильно немонотонными при достаточно больших значениях сеточного числа Рейнольдса, схемы второго порядка с односторонними разностями не являются трехточечными и т.д.

Класс разностных схем, описываемых в этой книге, практически обладает всеми указанными выше свойствами. Поскольку порядок этих схем выше второго, их можно отнести к категории схем повышенной точности. Для уточнения этого понятия целесообразно напомнить определения аппроксимации и устойчивости схем, а также теорему о связи между ними и сходимостью в том виде, как это представлено в [3]. Пусть имеется задача

$$Lu = f, \quad u \in U, \quad f \in F, \quad (0.1)$$

в которой u и f – соответственно искомая функция и известная правая часть из пространств U и F , а L – некоторый дифференциальный оператор. Пусть, далее, на некоторой сетке ω_h построен разностный аналог (0.1)

$$L_h u_h = f_h, \quad f_h \in F_h, \quad u_h \in U_h, \quad (0.2)$$

где индексом h отмечены сеточные функции, разностный оператор, а также пространства, к которым принадлежат f_h и u_h .

Разностная схема (0.2) аппроксимирует исходную задачу (0.1) с порядком аппроксимации k , если имеет место неравенство

$$\|L_h [u]_h - f_h\|_{F_h} < C h^k, \quad (0.3)$$

в котором h – некоторый характерный шаг сетки, $[\cdot]_h$ – оператор проектирования пространства U на пространство U_h , а C – некоторая постоянная.

Если при достаточно малом значении h решения задачи (0.2) и задачи

$$L_h v_h = f_h + \delta_h$$

существуют и удовлетворяют неравенству

$$\|u_h - v_h\|_{U_h} < C_1 \|\delta_h\|_{F_h}, \quad (0.4)$$

где $C_1 = \text{const}$, то схема (0.2) называется устойчивой.

Из (0.3) и (0.4) немедленно следует сходимость u_h к $[u]_h$ при $h \rightarrow 0$ [3], причем

$$\|[u]_h - u_h\| < C_1 C h^k. \quad (0.5)$$

Неравенство (0.5) является весьма важным для оценки точности метода; оно показывает, что отличие приближенного решения от точного зависит не только от величин h и k , но и от постоянных величин C_1 и C .

Для точности разностных решений при фиксированном шаге h или для увеличения шага h при фиксированной точности естественно использовать схемы высокого порядка аппроксимации. Однако для реального h увеличение k необязательно уменьшит правую часть (0.5), поскольку константа C сама может возрастать с ростом k как величина, ограничивающая высшие производные, входящие в погрешность аппроксимации. Например, для

двух схем порядка k_1 и k_2 ($k_2 > k_1$) с константами $C = C^{(1)}$ и $C = C^{(2)}$ может оказаться, что при некотором значении h

$$C^{(1)}h^{k_1} < C^{(2)}h^{k_2}.$$

Такая ситуация, в частности, характерна для экспоненциального изменения решения $e^{-x/\epsilon}$ при $\epsilon \ll 1$ и может иметь место в случае течений с малой вязкостью. Приведенные рассуждения показывают, что схема высокого порядка может действительно стать схемой повышенной точности, если константа C не будет существенно возрастать с ростом k . К этому можно приблизиться, в частности, если произвести такую замену независимых переменных, при которой области с малыми характерными размерами "растягиваются", решение не претерпевает резких изменений в направлении новых координат и его высшие производные не возрастают (или не сильно возрастают) с увеличением своего порядка. Если в разумно преобразованную область ввести разностную сетку с постоянными шагами, то можно ожидать, что в физических координатах зонам с малыми характерными размерами будут соответствовать малые шаги сетки, а неравенство (0.6), в котором под h понимаются локальные значения этих шагов, будет иметь противоположный знак.

Процедура "растягивающих" преобразований, часто применяемая в вычислительной практике, по существу равнозначна введению сеток с переменными шагами (неравномерных сеток). Однако с точки зрения использования аппроксимаций высокого порядка она предпочтительней и будет предполагаться везде в дальнейшем.

Применение растяжения областей с малыми размерами имеет простой физический смысл: оно обеспечивает размещение в этих областях по крайней мере нескольких узлов и тем самым желательную разрешающую способность метода. Это особенно важно при численном исследовании течений в случае достаточно больших значений числа Рейнольдса.

В задачах о течениях вязких жидкостей и газов основой для построения преобразования координат, растягивающего области типа пограничных слоев, ударных волн и т.д., может стать общая априорная информация о характере изучаемого течения. Зная, например, приблизительную толщину и расположение пограничных слоев, нетрудно ввести фиксированную заранее функцию физической координаты, поперечной к пограничному слою, осуществляемую требуемое растяжение. Такой прием получил широкое распространение в расчетной практике.

Вместе с тем существуют ситуации, когда точное расположение и размеры областей с малыми характерными размерами заранее неизвестны. Примером могут служить оторвавшиеся от поверхности сдвиговые слои и ударные волны. Кроме того, в фиксированных заранее преобразованиях трудно учесть изменение размеров растягиваемых областей. В связи с этим в некоторых случаях представляется разумным строить преобразование, которое само "приспосабливалось" бы (адаптировалось) к получаемому решению.

Существует несколько способов построения адаптирующихся сеток [4–9]. Не претендуя на полноту изложения, остановимся лишь на двух из них – методе преобразования координат, зависящего от решения, поскольку он, по-видимому, был первым опытом применения таких сеток

[4–6] и использовался при получении приводимых ниже результатов, а также методе [7, 8], основанном на вариационном принципе и имеющем общий характер. Помимо адаптации сеток к областям с малыми характерными размерами, часто необходимой оказывается и их адаптация к сложной форме границ расчетных областей (иногда меняющихся с течением времени). Вопросу построения таких сеток посвящено много работ [10–13], здесь же он не рассматривается.

2. НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ СЕТОК, АДАПТИРУЮЩИХСЯ К РЕШЕНИЯМ

Применение преобразования координат, зависящего от решения. Рассмотрим принцип построения автоматически сгущающихся сеток на примере решения задачи о течениях вязких жидкостей и газов. Пусть в поле течения в случае достаточно больших чисел Рейнольдса имеются области типа пограничных слоев или ударных волн (вязкие слои), в которых какая-либо компонента скорости претерпевает быстрые изменения. Будем говорить, что в этом случае скорость является признаком растяжения.

Рассматривая для простоты двумерный случай, введем вместо одной из выбранных координат (s, n) , например вместо n , новую независимую переменную [4–6]

$$\xi = \xi(u, v, s, n), \quad (0.6)$$

где u, v (соответственно s, n) – компоненты скорости.

Пусть преобразование (0.6) удовлетворяет следующим свойствам:

- а) функция ξ при фиксированном значении s быстро меняется в тех же областях, что и хотя бы одна из функций (растягивающее свойство);
- б) выполняется условие $\partial \xi(u(s, n), v(s, n), s, n) / \partial n = \chi > 0$ (условие взаимной однозначности).

Если функция, удовлетворяющая этим условиям, построена, то вязкие слои с толщиной, стремящейся к нулю при числе Рейнольдса $Re \rightarrow \infty$, отображаются по области в плоскости (s, ξ) , имеющей характерные размеры $O(1)$. Это следует из того, что в этих слоях изменение переменной $\xi(n)$, повторяя изменение какой-либо компоненты скорости, имеет порядок $O(1)$.

Введя в плоскости (s, ξ) разностную сетку с фиксированными шагами, получим, что, сколь бы велико ни было число Рейнольдса, в растягиваемые вязкие слои попадает фиксированное число узлов. Осуществляемое таким образом сгущение узлов происходит автоматически в процессе определения функции $u(s, n)$ и $v(s, n)$, а не задается заранее. Поэтому априорной информации о фактических размерах и положении вязких слоев не требуется.

Остановимся на функции ξ [6]. Для выполнения условия а) можно использовать преобразование $\xi = \xi(z, s, n)$, где $z = \sqrt{u^2 + v^2}$. Действительно, функция $u^2 + v^2$ всегда быстро меняется в вязких слоях и поэтому может служить признаком растяжения. Для выполнения условия б) может быть использована самая общая информация о физической картине течения. Например, если положение и размеры вязкого слоя заранее не известны, но известно, что изменение функции z при $s = \text{const}$ внутри этого слоя монотонно, то достаточно использовать простейшую линейную зависи-

мость от z и n вида

$$\xi = az + bn + c, \quad (0.7)$$

где a , b и c – некоторые константы. Так как $\partial\xi/\partial n = a\partial z/\partial n + b$, то выбором коэффициента $b = O(1)$ всегда можно добиться положительности этой производной на интервале возможной немонотонности функции $z(n)$ вне вязкого слоя, где $|\partial z/\partial n| = O(1)$.

Преобразование (0.7) пригодно для многих представляющих интерес задач о вязких течениях. Более того, иногда при разумно выбранной системе координат (s, n) вместо z в (0.7) достаточно использовать какую-либо одну компоненту скорости, например u , тогда функция ξ будет иметь вид

$$\xi = au + bn + c. \quad (0.8)$$

В случае $a = 1$, $b = c = 0$ преобразование (0.8) совпадает с преобразованием Крокко в теории пограничного слоя.

Можно предусмотреть также случай, когда об исследуемом течении вообще ничего не известно. В [6] показано, что подходящим преобразованием является функция вида

$$\xi = af|\partial z/\partial n|dn + bn + c, \quad (0.9)$$

совпадающая с (0.7) на каждом участке монотонности функции $z(n)$.

При практической реализации (0.9) можно выделять участки монотонности решения $z(n)$, получаемого на каждом этапе вычислений (на каждом временном шаге или итерации), после чего записывать для этих участков преобразование (0.7) со своими константами a , b и c .

Построение адаптирующихся сеток на основе вариационного принципа. В [7, 8] был сформулирован и применен общий вариационный принцип построения сеток, позволяющий управлять такими их свойствами, как отклонение от лагранжевых координат, деформация и сгущение узлов. Следуя этим работам и ограничиваясь сгущающими преобразованиями, рассмотрим отображения $q_i = q_i(x_1, x_2, t)$, где x_i – физические координаты ($i = 1, 2$). Построим функционал вида

$$F[q_1, q_2] = \int_D \Phi I^\alpha dx_1 dx_2, \quad (0.10)$$

где D – расчетная область, $I = (\partial x_1/\partial q_1)(\partial x_2/\partial q_2) - (\partial x_1/\partial q_2)(\partial x_2/\partial q_1)$, Φ – некоторая известная функция координат и искомых функций, управляющая сгущением координатных линий. Согласно [7–9] среди отображений q_i , удовлетворяющих граничным условиям на D , требуется найти такое, которое доставляет минимум функционалу (0.10).

Уравнения Эйлера для этой задачи можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\Phi} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \right) = 0, \quad j = 1, 2,$$

или, дифференцируя по новым переменным, к виду

$$g^{kn} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\Phi \frac{\partial x^l}{\partial q_n} \right) = 0, \quad l = 1, 2, \quad (0.11)$$

где g^{kn} – контравариантные компоненты метрического тензора преобразования $x_i = x_i(q_1, q_2)$, $i = 1, 2$.

В качестве управляющей функции Φ можно выбрать, например, функцию

$$\Phi = (\epsilon + |\text{grad } u|^\alpha)^\beta,$$

где ϵ, α, β – положительные константы, u – какая-либо искомая функция. Смысл введения функции Φ особенно ясен в случае одномерного преобразования $q(x)$. Пусть, например, требуется растянуть области, где производные $\partial u/\partial x$ велики. Тогда запишем (0.11) в виде

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial q}{\partial x} = \text{const}, \quad \Phi = \left(\epsilon + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^\alpha \right)^\beta. \quad (0.12)$$

Из (0.12) следует, что производные $\partial q/\partial x$ велики в тех областях, где велики значения $|\partial u/\partial x|$, но это и означает растяжение этих областей преобразованием $q(x)$.

Интерпретацию выбора функций Φ в случае двумерных преобразований $q_1(x_1, x_2)$ и $q_2(x_1, x_2)$ можно найти в [9].

Пусть в (0.12) $\alpha = \beta = 1$, тогда после интегрирования получаем

$$q = \int |\partial u/\partial x| dx + \epsilon x + c.$$

Но это фактически и есть преобразование (0.9), полученное из эвристических соображений. Для практической реализации автоматического сгущения узлов сетки, задаваемого (0.12), можно записать эволюционное уравнение вида [8]

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q} \left[\left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^\alpha + \epsilon \right) \frac{\partial x}{\partial q} \right]. \quad (0.13)$$

Решая на каждом временном слое основной схемы уравнение (0.13) до установления, найдем значения координаты x , соответствующие этому временному слою. Затем, используя формулы численного дифференцирования, определим производные $\partial x/\partial q$, входящие в преобразованную систему. Некоторые примеры применения (0.13) приведены в [8].

3. ПРИЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ СХЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Большая точность схем высокого порядка аппроксимации, достигаемая на гладких и плавно меняющихся решениях исходной задачи, стимулировала разработку схем, порядок которых больше двух. Некоторые методы построения таких схем можно условно классифицировать следующим образом: использование многоточечных шаблонов; использование дифференциальных следствий исходных уравнений; применение компактных аппроксимаций.

Вместе с тем, понимая процесс повышения точности разностных решений в более широком смысле, следует выделить эффективный метод, использующий комбинации сеточных функций, полученных на разных сетках (метод Ричардсона); подробнее его исследование изложено в [14]. Можно отметить также метод, основанный на формировании комбинаций решений, полученных при помощи некоторых базисных схем однопараметрического семейства (метод параметрической коррекции [15]).

Имея в виду, что подобные подходы представляют самостоятельный интерес и в принципе могут сочетаться с различными разностными схемами, ограничимся вопросами конструирования аппроксимаций высокого порядка дифференциальных операторов, коротко описав концепции, положенные в основу перечисленных выше направлений.

Схемы с многоточечными шаблонами. Наиболее прямолинейный путь введения аппроксимаций высокого порядка состоит в использовании многоточечных формул численного дифференцирования. Однако в общем виде он не является эффективным, поскольку в случае неявных схем возникают проблемы, связанные с экономичным решением разностных уравнений, а в случае явных схем – проблемы их устойчивости. К этому следует добавить также увеличение количества паразитных решений разностных уравнений, возникающее из-за многоточечности шаблона и приводящее к возможности катастрофических проявлений схемной немонотонности.

Вместе с тем разумное использование многоточечного шаблона позволило создать целый ряд удачных явлений схем высокого порядка (третьего или четвертого) для уравнений гиперболического типа, и в частности для уравнений Эйлера невязкого газа [16–19]. Все они могут быть объединены в многопараметрическое семейство схем, основанных на идеях метода Рунге–Кутты. Можно отметить также схему третьего порядка [19], совпадающую в линейном случае со схемой максимального порядка на четырехточечном шаблоне [20].

Весьма общим методом построения схем для заданного многоточечного шаблона является запись их в виде суммы значений искомой функции в узлах этого шаблона, умноженных на неизвестные коэффициенты, с дальнейшим определением последних из условия обнуления погрешности аппроксимации вплоть до желаемого порядка (см., например, [3]). Преимущество такого подхода состоит в том, что можно оставить один или несколько коэффициентов в качестве свободных параметров, управляющих теми или иными свойствами схемы [21].

Следует иметь в виду, что в случае многоточечных шаблонов требуется нестандартная запись схемы в приграничных узлах, что в некоторых случаях может породить дополнительные проблемы. Использование многоточечного шаблона может стать весьма эффективным при построении нелинейных схем с обратной связью (например, с адаптирующимися шаблонами [22]).

Использование дифференциальных следствий исходных уравнений. Существенным моментом при построении схем высокого порядка может стать тот факт, что сходимость разностного решения к точному для устойчивого алгоритма обеспечивается аппроксимацией на точном решении и не требует аппроксимации на произвольной гладкой функции.

Это обстоятельство можно использовать для обнуления погрешностей аппроксимации низших порядков только в силу выполнения аппроксимируемого дифференциального уравнения. Типичным примером может служить двухслойная трехточечная в пространственном направлении схема со специально выбранными весами для уравнения теплопроводности; она имеет второй порядок по времени и четвертый по пространству.

Несколько иное использование следствий из исходного дифференциального уравнения состоит в том, что наряду с ним рассматриваются разност-

ные аппроксимации уравнений, полученных путем дифференцирования всех его членов по независимым переменным. Эта идея была предложена в [23].

Пусть, например, имеется уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \partial \varphi(u) / \partial x. \quad (0.14)$$

После дифференцирования его по x получается продолженная система [24]

$$\frac{\partial}{\partial t} u_x^{(k)} = \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (0.15)$$

где через $u_x^{(k)}$ обозначена производная $\partial^k u / \partial x^k$. Поскольку в правую часть (0.15) для каждого k входят функции $u = u_x^{(0)}, u_x^{(1)}, \dots, u_x^{(k)}$, то, аппроксимируя каждое уравнение системы (0.15) какой-либо разностной схемой (например, одной и той же), можно на каждом шаге по времени для сформулированных начальных условий определить аппроксимации производных до n -го порядка включительно. Эти разностные высшие производные можно затем использовать для обнуления погрешностей аппроксимации основного уравнения (0.14) ($k = 0$). В принципе, это позволяет строить схемы произвольного порядка аппроксимации, однако при большом n в общем случае этот метод становится достаточно громоздким.

Аналогичная идея была применена в [25], разница состояла лишь в том, что сеточные функции, аппроксимирующие производные $u_x^{(k)}$, использовались для представления интегралов по границе ячейки сетки в интегро-интерполяционном методе (см., например, [26]).

Использование продолженной системы уравнений или эквивалентного способа разложения в ряд позволяет строить аппроксимации высокого порядка для уравнений различных типов.

Компактные схемы. Альтернативный путь построения схем высокого порядка состоит в использовании так называемых компактных аппроксимаций. Их сущность удобно проиллюстрировать на примере приближенного определения производной функции по ее значениям в узлах. Если традиционное представление производной

$$f = \partial u / \partial x \quad (0.16)$$

на сетке $\omega_h : x_j = jh$ имеет вид

$$f_j = \sum_{k=-q}^r \alpha_k u_{j+k},$$

где $f_j = f(jh)$, а α_k — некоторые коэффициенты, зависящие от шага (для простоты полагаемого постоянным), то компактная аппроксимация (0.16) может быть записана следующим образом:

$$\beta_{-1} f_{j-1} + \beta_0 f_j + \beta_1 f_{j+1} = \alpha_{-1} u_{j-1} + \alpha_0 u_j + \alpha_1 u_{j+1}, \quad (0.17)$$

здесь α_i и β_i ($i = -1, 0, 1$) — некоторые коэффициенты.

Если в обычных формулах численного дифференцирования на трех узлах достигается максимальная точность $O(h^2)$, то при определении f_j из системы (0.17), располагаясь двумя дополнительными коэффициентами в левой части этого равенства, можно, очевидно, повысить максимальный по-

рядок аппроксимации от второго до четвертого. Технически определение коэффициентов в (0.17) можно осуществить самыми различными способами: разложением в ряд Тэйлора функций u и f с последующим обнулением коэффициентов при степенях h , применением метода неопределенных коэффициентов, подстановкой интерполяционных полиномов Эрмита и т.д.

В общем случае под f_j можно понимать аппроксимацию в узле $x = x_j$ некоторого дифференциального оператора, содержащего операторы производных по x первого и второго порядков и входящего в формулировку исходной задачи.

Удобство соотношений типа (0.17) состоит в том, что основанные на них алгоритмы реализуются трехточечными прогонками с числом арифметических операций, пропорциональным числу узлов сетки, и являются экономичными.

Развитие методов, основанных на компактных аппроксимациях, фактически происходило в двух направлениях — конструирование нецентрированных схем третьего порядка и центрированных схем четвертого порядка. Под нецентрированными (или несимметричными) схемами здесь условно понимаются схемы, содержащие операторы, меняющие свою самосопряженную или кососимметричную часть в зависимости от знаков коэффициентов уравнений или от знаков собственных значений матриц в случае систем уравнений. Наоборот, компактные схемы, разностные операторы в которых не переключаются при изменении этих знаков, в дальнейшем будем называть центрированными (или симметричными), имея в виду, что соотношения типа (0.17) для первых и вторых производных в этом случае будут иметь равные по модулю коэффициенты α_{-1} и α_1 , а также β_{-1} и β_1 . Нецентрированные схемы третьего порядка были впервые предложены, исследованы и применены автором этой книги [4, 5, 27–29]. Первая из этих публикаций относится к 1972 г. Позднее появились центрированные схемы четвертого порядка [30–36], предложенные почти одновременно несколькими авторами (первое упоминание о таких аппроксимациях в [37], см. также [1]). Если последние применялись главным образом при аппроксимации уравнений Навье–Стокса несжимаемой жидкости, то схемы третьего порядка прошли всестороннюю апробацию для различного класса задач — в случае уравнений Эйлера и Навье–Стокса сжимаемого газа (задачи о внутренних и внешних течениях в широком диапазоне чисел Маха и Рейнольдса), в случае уравнений гидродинамики, записанных в различных формах, в случае уравнений Рейнольдса осредненных турбулентных течений и т.д. Данная книга посвящена именно этому классу компактных схем. Компактные аппроксимации рассматриваются в ней прежде всего как эффективный способ дискретизации конвективных членов, содержащих несамосопряженные операторы; наоборот, дискретизация членов с вязкостью вследствие самосопряженности соответствующих операторов интерпретируется как второстепенная часть алгоритма, реализуемая различными способами. Таким образом, область целесообразного применения описываемых здесь методов — задачи с преобладающей ролью конвекции или чисто конвективные задачи. Именно таковыми в большинстве практически важных случаев являются задачи аэрогидродинамики. Благоприятные качества схем третьего порядка обусловлены в случае уравнений гидро-

динамики переключением операторов в зависимости от знака скорости, обеспечивающим диагональное преобладание в разностной задаче, а в случае систем уравнений сжимаемого газа — учетом характеристических направлений этих систем или их гиперболической части.

При небольших числах Рейнольдса, когда сеточные числа Рейнольдса также малы, вполне приемлемыми оказываются более простые центрированные (и, в частности, компактные) аппроксимации. Такие схемы были получены на основе аппроксимации первых производных вида (0.20) и аналогичных соотношений для вторых производных [31–34].

Другой подход к построению центрированных компактных схем четвертого порядка связан с определением коэффициентов в равенстве (0.20), понимаемом как связь между искомой сеточной функцией u_j и аппроксимацией в узлах дифференциального оператора $f_j = (Lu)_j$, входящего в формулировку исходной задачи [30, 35, 36]. Достоинство такого метода состоит в том, что для оператора Lu , содержащего первые и вторые производные, решение разностных уравнений осуществляется трехточечной скалярной прогонкой (в других компактных методах четвертого порядка в таких случаях требуется векторная трехточечная прогонка с матрицами размерности 2×2). Вместе с тем он является в значительной мере ориентированным на решение скалярных конвективно-диффузионных уравнений. Обобщение его для систем уравнений оказывается весьма громоздким, в то время как для компактных методов, использующих раздельную аппроксимацию первых и вторых производных, оно является элементарным.

Первая глава посвящена теории схем с компактными аппроксимациями третьего порядка. Здесь рассмотрен широкий круг вопросов, связанный с описанием различных способов использования этих аппроксимаций, с исследованием их свойств, а также применением их при дискретизации скалярных или векторных уравнений первого или второго порядка в случае одной и нескольких пространственных координат. Здесь же приводятся сведения о конструировании центрированных компактных схем; некоторые из них могут быть получены, в частности, путем симметризации схем третьего порядка. Для более полного ознакомления с деталями этих схем заинтересованному читателю можно рекомендовать оригинальные работы [30–36]. Краткое описание центрированных компактных схем приводится также в монографии [1].

В последующих главах приводятся алгоритмы уравнений Эйлера и Навье–Стокса, описывающих течения сжимаемого газа (см. гл. 2) и несжимаемой жидкости (см. гл. 3). В качестве удобного инструмента численного исследования стационарных течений рассматриваются компактные схемы для так называемых параболизированных уравнений Навье–Стокса. Внимание уделяется также турбулентным течениям, описываемым уравнениями Рейнольдса, дополненными полуэмпирическими моделями турбулентности, а также некоторым неклассическим методам гидродинамики.

Примеры применения рассмотренных методов, представленные в главах 2 и 3, имеют иллюстративный характер. Основное внимание здесь уделяется вычислительным аспектам решаемых задач, а не обсуждению аэродинамических характеристик течений. Это обстоятельство наложило отпечаток и на сам подбор примеров, многие из которых либо носят модельный или тестовый характер, либо являются характерными задачами.

Глава 1

СТРУКТУРА И АНАЛИЗ КОМПАКТНЫХ СХЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

1. КОМПАКТНЫЕ СХЕМЫ С НАПРАВЛЕННЫМИ РАЗНОСТЯМИ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА

1.1. Формулы компактного численного дифференцирования третьего порядка и основанные на них схемы

Аппроксимация первых производных. Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция $u(x)$, обладающая производными вплоть до четвертого порядка включительно (в дальнейшем там, где это необходимо, соответствующая гладкость функций будет подразумеваться без специальных оговорок).

Введем на отрезке $[a, b]$ сетку $\omega_h : x_n = nh$, $h = \text{const}$ и зададимся целью найти связь между значениями в трех соседних узлах сетки функции u и аппроксимации третьего порядка точности ее производной $f = du/dx$. Для этого достаточно, например, записать равенство

$$\alpha_1 f_{i-1} + \alpha_2 f_i + \alpha_3 f_{i+1} = \beta_1 u_{i-1} + \beta_2 u_i + \beta_3 u_{i+1}, \quad (1.1)$$

где $f_i = f(x_i)$, $u_i = u(x_i)$, разложить функции u и f в ряды Тэйлора в окрестности узла x_i и, используя тождество $f = du/dx$, так подобрать коэффициенты α_i и β_i ($i = 1, 2, 3$), чтобы после подстановки рядов в (1.1) это равенство переходило в соотношение $f_i = (du/dx)|_{x=x_i} + O(h^3)$. Простейшие выкладки приводят к следующим значениям коэффициентов:

$$\alpha_1 = -\frac{1 + \alpha_2 h}{2h}; \quad \alpha_3 = \frac{1 - \alpha_2 h}{2h}; \quad (1.2)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{6} + \frac{h\alpha_2}{4}; \quad \beta_2 = \frac{2}{3}; \quad \beta_3 = \frac{1}{6} - \frac{h\alpha_2}{4}.$$

В этих формулах коэффициент α_2 выбран в качестве свободно варьируемого параметра. В частности, при $\alpha_2 = 0$ имеет место хорошо известное равенство

$$\frac{1}{6} f_{i-1} + \frac{2}{3} f_i + \frac{1}{6} f_{i+1} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad (1.3)$$

которое приводит к соотношению $f_i = (du/dx)|_{x=x_i} + O(h^4)$, поскольку члены с нечетными степенями h при подстановке рядов Тэйлора в (1.3) взаимно уничтожаются.

Равенство (1.3) может быть получено многими другими путями (например, из аппроксимации функции u кубическим сплайном или полиномом Эрмита). В дальнейшем соотношение (1.1), а также (1.3), будем называть формулами компактного численного дифференцирования, имея в виду достижение высокого порядка аппроксимации производных на трехточечном (компактном) шаблоне.

В дальнейшем нас будут интересовать в основном несимметричные формулы вида (1.1) при $\alpha_2 \neq 0$, обладающие, как будет ясно из дальнейшего, более благоприятными свойствами, чем формула (1.3). Воспользовавшись свободой выбора параметра α_2 , потребуем, чтобы аппроксимации производной f , определяемые однопараметрическим семейством (1.1), (1.2), обладали бы, помимо третьего порядка, еще одним заданным свойством. В качестве такого свойства выберем следующее: коэффициенты α_i ($i = 1, 3$) в (1.1) являются коэффициентами квадратурной формулы четвертого порядка аппроксимации для интегралов в правой части равенств

$$u_i - u_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx, \quad u_{i+1} - u_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx. \quad (1.4)$$

Легко усмотреть, что первому равенству (1.4) соответствует значение $\alpha_2 = 1/h$, а второму $-\alpha_2 = -1/h$. Соответственно в первом случае $\alpha_3 = 0$ и

$$u_i - u_{i-1} = h(5f_{i-1} + 8f_i - f_{i+1})/12, \quad (1.5a)$$

во втором случае $\alpha_1 = 0$ и

$$u_{i+1} - u_i = h(-f_{i-1} + 8f_i + 5f_{i+1})/12. \quad (1.5b)$$

Выделенные таким образом аппроксимации, как и их симметричный вариант (1.3), обладают важным свойством: они позволяют получать разностные схемы для дифференциальных уравнений путем аппроксимации соответствующих этим уравнениям законов сохранения.

Для получения формулы (1.5a) можно было бы непосредственно строить квадратурные формулы для правых частей (1.4), использующие значения функции f в трех узлах: x_{i-1} , x_i и x_{i+1} ; именно так они были получены в ранних работах [4, 5]. При построении квадратурных формул удобно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов [38] и потребовать, чтобы они были тождественны точке для трех пробных функций $f = 1, x, x^2$. Отметим, что формулу (1.5b) можно рассматривать как формулу корректора Адамса для обыкновенного дифференциального уравнения $du/dx = f(u, x)$. Равенства (1.5a) и (1.5b) целесообразно переписать в следующем операторном виде:

$$\Delta_- u_i = hA_+ f_i, \quad \Delta_+ u_i = hA_- f_i,$$

где Δ_+ и Δ_- — операторы правых и левых двухточечных разностей, а A_- и A_+ — операторы квадратурных формул соответственно для правого и левого интервалов, заключенных между узлами x_{i-1} , x_i и x_{i+1} :

$$\begin{aligned} \Delta_- u_i &= u_i - u_{i-1}, & A_+ f_i &= (5f_{i-1} + 8f_i - f_{i+1})/12, \\ \Delta_+ u_i &= u_{i+1} - u_i, & A_- f_i &= (5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1})/12. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Теперь формулы компактного численного дифференцирования третьего порядка можно представить в виде

$$f_i = A_{\pm}^{-1} \Delta_{\mp} u_i / h = (\partial u / \partial x)_{x=x_i} + O(h^3); \quad (1.7)$$

в дальнейшем индексы у сеточных функций для краткости записи будут опускаться.

Из равенств (1.5) следует, что для определения значений f_i производной функции u нужно обратить операторы A_+ или A_- , т.е. решить линейную систему с трехдиагональной матрицей, подобно тому как это делается при численном дифференцировании на основе кубических сплайнов; необходимы лишь те или иные граничные условия на левом и правом концах рассматриваемого интервала $[x_0, x_N]$, $N \geq 2$. В дальнейшем, однако, будут рассматриваться не эти задачи, а вопросы использования операторов A_{\pm} и A_{\mp} для построения разностных схем.

Компактные (трехточечные) схемы третьего порядка. Рассмотрим нелинейное уравнение переноса, записанное в виде закона сохранения:

$$\partial u / \partial t + \partial \varphi(u) / \partial x = f(u, x, t). \quad (1.8)$$

Введем разностную сетку $\omega_{\tau} \times \omega_h$, $\omega_{\tau}: t_m = m\tau$, на которой определим некоторую аппроксимацию $\langle \partial u / \partial t \rangle$ производной $\partial u / \partial t$ с погрешностью $O(\tau^k)$.

Используя формально для аппроксимации производных по x оператор $A_{+}^{-1} \Delta_{-}$ или $A_{-}^{-1} \Delta_{+}$, можно построить семейство разностных схем достаточно общего вида

$$h \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle^{m+1} + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j A_{\mp}^{-1} \Delta_{\pm} \varphi^{m+1-j} = h \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j f^{m+1-j}, \quad (1.9)$$

где $\varphi^m = \varphi(u^m)$, а σ_j ($j = 0, 1, 2, \dots, k-1$) — некоторые весовые множители. Подбирая эти множители, можно достичь желаемого порядка точности относительно шага τ . При этом погрешность аппроксимации (1.9) относительно шага h всегда будет иметь порядок $O(h^3)$. Для того чтобы в этом убедиться, удобно воспользоваться следующими полезными символическими представлениями сеточных функций $\Delta_{\mp} f$ и $A_{\pm} f$, полученными в результате разложения достаточно гладкой функции $f(x)$ в ряды Тэйлора в точке $x = x_i$:

$$A_{\pm} f = \left(E \pm \frac{h}{2} D_x + \frac{h^2}{6} D_x^2 \right) f + O(h^3), \quad (1.10)$$

$$\Delta_{\mp} f = \left(E \pm \frac{h}{2} D_x + \frac{h^2}{6} D_x^2 \right) D_x f + O(h^3).$$

Здесь E — единичный оператор, а D_x и D_x^2 — операторы соответственно первой и второй производных по x в точке $x = x_j$. Подставляя (1.10)

в (1.9), приходим к равенству

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle_i^{m+1} + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_i^{m+1-j} = \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j f^{m+1-j},$$

из которого следует третий порядок аппроксимации схем (1.9) относительно шага h .

Умножив (1.9) слева на A_{\pm} , получим эквивалентные схемы вида

$$A_{\pm} \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle^{m+1} + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j \Delta_{\mp} \varphi^{m+1-j} = A_{\pm} \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j f^{m+1-j}.$$

Из трехточечности операторов A_{\pm} следует, что шаблон этих схем третьего порядка содержит три узла на каждом временном слое: $t = t_{m+1-j}$ ($j = 0, k-1$). Как и в случае центрированных схем [31], будем называть их компактными.

В дальнейшем этот термин будет употребляться применительно ко всем схемам для уравнения (1.8), которые могут быть получены на основе формул компактного численного дифференцирования.

Выбор пары операторов A_+ , Δ_- или A_- , Δ_+ в (1.8) безразличен с точки зрения аппроксимации, однако он существен при построении устойчивых схем. Проиллюстрируем универсальный принцип этого выбора на примере пары двухслойных схем:

$$A_{\pm} \frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} + \frac{1}{h} \Delta_{\mp} (\sigma_0 \varphi^{m+1} + \sigma_1 \varphi^m) = 0, \quad \sigma_0 + \sigma_1 = 1. \quad (1.11)$$

Пусть $\varphi(u) = au$, $a = \text{const}$. Применяя спектральные методы, получим следующее выражение для собственного значения оператора перехода:

$$\lambda = \frac{1 - ar\sigma_1 W_{\pm}(\alpha)}{1 + ar\sigma_0 W_{\pm}(\alpha)}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi, \quad r = \frac{\tau}{h}. \quad (1.12)$$

$$\text{Здесь } W_+(\alpha) = \frac{12[1 - \exp(-i\alpha)]}{5 \exp(-i\alpha) - \exp(i\alpha) + 8}, \quad W_-(\alpha) = \frac{12[\exp(i\alpha) - 1]}{5 \exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha) + 8} -$$

функции комплексного аргумента, удовлетворяющие условиям $\text{Re } W_+ = -\text{Re } W_- \geq 0$, $\text{Im } W_+ = \text{Im } W_-$. Выбирая теперь ту из пар (1.6), для которой $a \text{Re } W_l \geq 0$ (l — это плюс или минус), получим при $\sigma_1 = \sigma \geq 0,5$ абсолютно устойчивую схему (1.9). В дальнейшем под устойчивостью схемы будем понимать ее устойчивость в приближении замороженных коэффициентов.

В нелинейном случае простым критерием выбора нужной пары операторов в узле $x_j = jh$ является условие

$$\varphi'(u_j^m) \text{Re } W_l \geq 0; \quad (1.13)$$

в случае изменения знака $\varphi'(u_j^m)$ (при переходе к узлу x_{j-1} или x_{j+1}) требуется изменение ориентации операторов, аналогично тому как это происходит в случае обычных несимметричных схем: при $\varphi'(u_j^m) > 0$ в узле $x = x_j$ используется левая разность Δ_- (и оператор A_+), а при $\varphi'(u_j^m) < 0$ — правая разность (и оператор A_-). Такой выбор ориентации односторонних разностей Δ_- и Δ_+ приводит к неотрицательным операторам, аппроксимирующим производную $\partial\varphi/\partial x$ в (1.8).

Для формализации выбора нужной пары операторов удобно представить операторы A_{\mp} и Δ_{\pm} в виде следующих сумм:

$$A_{\pm} = A_0 \mp 0,25\Delta_0, \quad \Delta_{\mp} = 0,5(\Delta_0 \mp \Delta_2),$$

где

$$A_0 f = \frac{1}{2}(A_+ + A_-)f = \frac{1}{6}f_{i-1} + \frac{2}{3}f_i + \frac{1}{6}f_{i+1},$$

$$\Delta_0 = f_{i+1} - f_{i-1}, \quad \Delta_2 = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1};$$

операторы A_0 и Δ_2 являются самосопряженными (симметричными) составляющими операторов A_{\pm} и Δ_{\mp} , а оператор Δ_0 — их кососимметричной частью. Введя параметр $s = \text{sgn} \varphi'(u_j^m)$ и опуская индексы у операторов A_{\pm} и Δ_{\mp} , запишем выбранную из (1.11) схему в виде

$$A \frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} + \Delta \frac{[\sigma \varphi^{m+1} + (1 - \sigma)\varphi^m]}{h} = A[\sigma f^{m+1} + (1 - \sigma)f^m], \quad (1.14)$$

где

$$A = A_0 - 0,25s\Delta_0, \quad \Delta = 0,5(\Delta_0 - s\Delta_2), \quad s = \text{sgn} \varphi'(u^m).$$

Положив в (1.14) $s = 0$, получим симметричные аппроксимации, использованные в ряде работ [31–33]; легко показать, что они имеют четвертый порядок относительно шага h .

1.2. КОМПАКТНЫЕ СХЕМЫ КАК АППРОКСИМАЦИИ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Использование уравнений баланса. Свойства операторов A и Δ аппроксимировать интегральные равенства (1.4) позволяют получать разностные схемы в виде уравнений баланса потоков через границы элементарных ячеек, образованных разностной сеткой, т.е. в виде разностных законов сохранения. В частности, схема (1.14) может быть получена интегрированием методом [39]. Пусть, например, в (1.1) $f \equiv 0$. Записывая это уравнение в виде

$$\text{div } \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{a} = (u, \varphi(u))^T, \quad (1.15)$$

интегрируя (1.15) по элементарной ячейке

$$t_m \leq t \leq t_{m+1}, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad (1.16)$$

со сведением поверхностного интеграла к контурному, будем аппроксимировать равенство

$$\oint u dx - \varphi(u) dt = 0,$$

в котором интегрирование ведется по сторонам прямоугольника (1.16). При аппроксимации интегралов по границам $x = \text{const}$ будем использовать формулу трапеций, а при интегрировании по границам $t = \text{const}$ — одну из квадратурных формул, определяемых оператором A_+ или A_- (для определенности предположим, что всюду $\varphi'(u^m) > 0$ и следует использовать оператор A_+). В результате получим равенство

$$A_+(u^{m+1} - u^m)h + \frac{1}{2}(\varphi_i^{m+1} + \varphi_i^m - \varphi_{i-1}^{m+1} - \varphi_{i-1}^m)\tau = 0, \quad (1.17)$$

откуда после деления на $h\tau$ получается схема (1.14) при $\sigma_1 = \sigma = 0,5$.

Пусть расчетная область является прямоугольником $0 \leq t \leq T = M\tau$, $0 \leq x \leq X = Nh$. Тогда суммирование равенств (1.17) по m и i ($0 \leq m \leq M$, $0 \leq i \leq N$) приводит в силу взаимного уничтожения сеточных функций u_i^m и φ_i^m соответствующих общим границам ячеек, к интегральному закону сохранения

$$\int_0^{X-h} u(T, x) dx - \int_0^{X-h} u(0, x) dx + \int_0^T \varphi(u(0, t)) dt - \int_0^T \varphi(u(X-h, t)) dt = 0,$$

в котором первые два интеграла аппроксимированы в соответствии с квадратурной формулой (1.5a), а вторые два — с формулой трапеций.

Свойство консервативности при переключении операторов. В случае изменения знака производной $\varphi'(u_i^m)$, когда происходит переключение схемы с одной пары операторов на другую, суммирование разностных уравнений типа (1.17) не приводит к взаимному уничтожению значений сеточных функций во внутренних узлах сетки. Пусть производная меняет знак между узлами x_k и x_{k+1} . Тогда при $\varphi'(u_k^m) > 0$ и $\varphi'(u_{k+1}^m) < 0$ квадратурная формула для интервала $[x_k, x_{k+1}]$ не выписывается, а при суммировании по k возникает ненулевой член $\varphi_k - \varphi_{k+1}$. Если же $\varphi'(u_{k-1}^m) < 0$ и $\varphi'(u_k^m) > 0$, то уравнения баланса для ячейки со стороны $[x_k, x_{k+1}]$ выписываются дважды, что также вызывает появление при суммировании ненулевого члена вида $\varphi_{k+1} - \varphi_k$. Можно показать, что во всех случаях внутри области образуются схемные источники вида $(\varphi_{k+1}^{m+1} - \varphi_k^{m+1})/h + A_{\pm}(u_k^{m+1} - u_k^m)/\tau$. Интенсивность их, как легко видеть, имеет порядок $O(h^3)$. Если в окрестности смены знака производной $\varphi'(u^m)$ высшие производные решения существуют и не очень велики, то такая локальная неконсервативность не должна влиять на качество решения, тем более что количество точек смены знака производной в расчетной области на практике обычно намного меньше общего числа узлов.

Тем не менее при желании можно добиться полного взаимного уничтожения потока вектора $(u, \varphi(u))^T$ через общие границы элементарных ячеек, понизив, однако, локальный порядок аппроксимации схемы в точках изменения знака функции $s(x_i) = \text{sgn}(u_i^m)$. Для этого достаточно модифициро-

вать операторы A и Δ , записав их в следующем виде:

$$A = A_0 - 0,25\Delta_0 s, \quad \Delta = 0,5 [\Delta_0 - \Delta_- (T_{1/2} s)\Delta_+]. \quad (1.18)$$

Здесь через T_i обозначен оператор сдвига вдоль оси x на величину lh , так что сеточная функция $\Delta_- (T_{1/2} s)\Delta_+ \varphi$ в узле $x = x_i$ имеет вид

$$\Delta_- (T_{1/2} s)\Delta_+ \varphi_i = s_{i+1/2}(\varphi_{i+1} - \varphi_i) - s_{i-1/2}(\varphi_i - \varphi_{i-1}). \quad (1.19)$$

В случае, когда $s_i = \text{const}$ при $t = t_m$, операторы (1.18) совпадают с (1.14). Во всех случаях разностную схему (1.11) с операторами (1.18) ($s = 1$ соответствует паре операторов A_+ , Δ_- , а $s = -1$ — паре операторов A_- , Δ_+) можно представить в виде

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\tau} + Q_{j+1/2} - Q_{j-1/2} + \frac{1}{h} (q_{j+1/2} - q_{j-1/2}) = 0,$$

где

$$Q_{j+1/2} = \frac{1}{6} (\langle u_t \rangle_{j+1} - \langle u_t \rangle_j) - \frac{1}{4} [(s \langle u_t \rangle)_{j+1} + (s \langle u_t \rangle)_j],$$

$$q_{j+1/2} = 0,5(\bar{\varphi}_{j+1} + \bar{\varphi}_j) - s_{j+1/2}(\bar{\varphi}_{j+1} - \bar{\varphi}_j),$$

$$\bar{\varphi}_j = \sigma \varphi(u_j^{m+1}) + (1 - \sigma)\varphi(u_j^m), \quad \langle u_t \rangle_j = (u_j^{m+1} - u_j^m)/\tau.$$

При суммировании разностных уравнений по индексам j и m значения сеточных функций в узлах, за исключением приграничных, взаимно уничтожаются.

Нетрудно установить, что $A^{-1} \Delta f = \partial f / \partial x + O(h^3)$ в узлах, в окрестности которых функция s не меняет знак. В случае перемены знака происходит понижение порядка аппроксимации производных до первого.

Оператор A в (1.18) можно задать и в следующей форме:

$$A f_j = A_0 f_j - 0,25(s_{j+1/2} (E + T_1) - s_{j-1/2} (E + T_{-1})) f_j;$$

при этом свойства консервативности и аппроксимации операторов (1.18) не нарушаются.

Понижение порядка аппроксимации в узлах, где происходит смена знака производной $\varphi'(u^m)$, незначительно влияет на порядок аппроксимации в квадратичной норме, если число таких узлов невелико по сравнению с общим числом узлов.

Использование рассмотренных вариантов операторов A и Δ часто приводит к практически одинаковым решениям. Однако в общем случае целесообразность одного или другого из них, скорей всего, определяется спецификой решаемой задачи.

1.3. ДИСПЕРСИОННЫЕ И ДИССИПАТИВНЫЕ СВОЙСТВА АППРОКСИМАЦИЙ $A^{-1} \Delta$

Волновые решения дифференциально-разностного уравнения переноса. При разностной дискретизации уравнений переноса большую роль играют дисперсионные и диссипативные свойства выбранных аппроксимаций; они показывают, как распространяются и изменяются со временем те или иные

спектральные компоненты неизбежно возникающих "схемных" погрешностей.

Пусть имеется простейшее уравнение переноса

$$\partial u / \partial t + c \partial u / \partial x = 0, \quad c = \text{const.} \quad (1.20)$$

Чтобы исключить влияние способа дискретизации производной $\partial u / \partial t$ и изучить лишь свойства операторов A и Δ , рассмотрим дифференциально-разностное уравнение, аппроксимирующее (1.20) на сетке ω_h в узле $x = x_n$:

$$du_n/dt + cA^{-1} \Delta u_n/h = 0, \quad (1.21)$$

где A и Δ — операторы (1.14) с $s = \text{sgn } c$.

Разыскивая решение (1.21) в виде $U(t)e^{ikh_n}$, $k = \text{const}$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dU}{dt} + \left[\frac{c}{h} W_0(kh) + i \frac{c}{h} W_1(kh) \right] U = 0, \quad (1.22)$$

где

$$W_0(\alpha) = 96s\Phi(\alpha) \sin^4 \alpha/2, \quad W_1(\alpha) = 24\Phi(\alpha) \sin \alpha(7 - \cos \alpha), \\ \Phi(\alpha) = [(8 + 4 \cos \alpha)^2 + 35 \sin^2 \alpha]^{-1}.$$

Сравнивая (1.22) с уравнением $U' + ickU = 0$, полученным из (1.20) после подстановки в него $U(t)e^{ikx}$, найдем для "схемной" фазовой скорости c^* выражение вида

$$c^* = c W_1(\alpha)/\alpha, \quad \alpha = kh,$$

в котором $c = \text{const}$ является точной фазовой скоростью гармоник с волновым числом k .

Второе слагаемое (1.22), неотрицательное при всех значениях α , характеризует диссипацию, приводящую к затуханию гармоник.

Для не слишком коротких волн ($kh \ll 1$) имеем представление

$$c^* = c [1 + O(\alpha^4)], \quad ch^{-1} W_0(\alpha) = d = O(\alpha^4), \quad W_{0 \max} = W_0(\pi) = 6.$$

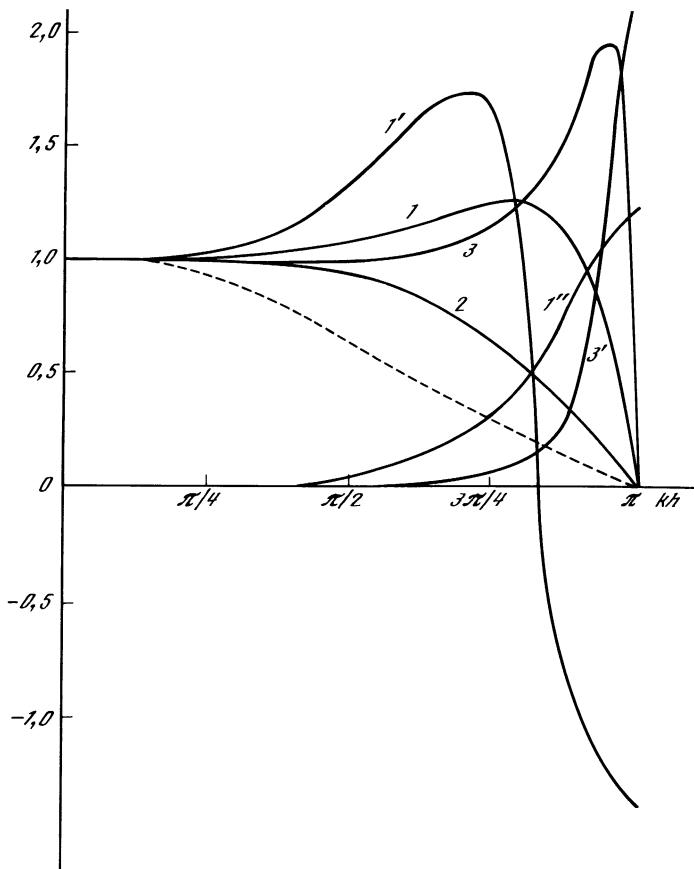
Эти формулы означают, что для длинных и средних волн (по сравнению с величиной шага h), когда произведение kh невелико, фазовая ошибка, вносимая заменой дифференциального оператора разностным оператором $A^{-1} \Delta/h$, крайне незначительна и имеет четвертый порядок малости относительно kh .

Для этого же диапазона длин волн коэффициент затухания гармоник за характерное время h/c

$$\lambda = \exp[-W_0(kh)],$$

равный единице в случае исходного уравнения (1.20), имеет вид $\lambda = 1 - O(\alpha^4)$, $d = O(\alpha^4)$, т.е. приводит к весьма малым амплитудным ошибкам.

Для коротких волн, разрешаемых сеткой ($kh \lesssim \pi$), фазовая скорость c^* обращается в нуль и фазовая ошибка велика. При этом схемная групповая скорость $c_g = dc^*/d\alpha$ становится, как нетрудно установить, отрицательной, что означает возможность распространения возмущений вверх по потоку. Вместе с тем в этом диапазоне kh резко уменьшается коэффициент λ



Р и с. 1.1

(резко возрастает диссипация d), что должно приводить к сильному подавлению коротких волн, проявляющихся на практике в виде пилообразных (схемных) осцилляций. Фактически в аппроксимацию $A^{-1}\Delta$ как бы заложен фильтр, не искажающий решения с большими и средними по сравнению с шагом h масштабами и подавляющий высокочастотные составляющие решений, масштабы которых сравнимы с шагом сетки. Эти составляющие, как правило, не имеют физического смысла, поскольку для разрешаемого сеткой масштаба L должно выполняться условие $h \ll L$. На практике описанные выше дисперсионные и диссипативные свойства аппроксимаций $A^{-1}\Delta$ позволяют получить не искаженные (или слабо искаженные) схемой немонотонностью решения, не прибегая к введению дополнительных диссипативных механизмов.

На рис. 1.1 приведены зависимости $c^*(\alpha)/c$ и $c_g(\alpha)/c$ ($\alpha = kh$) (кривые 1, 1'), а также диссипация d (кривая 1''). Там же для сравнения нанесена пунктиром зависимость относительной фазовой скорости $c^*(\alpha)/c$ для

центральных разностей, аппроксимирующих производную du/dx . Как видно на рис. 1.1, в случае применения оператора $A^{-1}\Delta$ фазовые ошибки малы в значительно более широком диапазоне kh , чем при центрально-разностной аппроксимации. Неравенство $c_g(\alpha)/c > 1$ в некотором диапазоне α указывает на возможность распространения затухающих схемных возмущений с несколько большей скоростью, чем основные возмущения.

Интересно сравнить кривые $c^*(\alpha)$ для схем третьего порядка и их симметричного аналога при $s=0$ $A_0^{-1}\Delta_0$ (кривая 2), имеющего четвертый порядок аппроксимации (рис. 1.1). Согласно рис. 1.1, фазовые ошибки в случае схем четвертого порядка также малы в широком диапазоне kh , однако такие схемы не содержат диссипативного механизма, который смог бы подавить "ошибочные" коротковолновые компоненты, разрешаемые сеткой. В этом состоит главный недостаток аппроксимаций вида $A_0^{-1}\Delta_0$ (как и всех бездиссипативных аппроксимаций), часто приводящий к невозможности их применения без искусственного введения специального диссипативного механизма. Вид и параметры этого механизма не всегда бывают очевидны и универсальны и иногда могут составить предмет отдельного исследования.

Оценки на основе дифференциальных приближений. Для оценок дисперсионных и диссипативных свойств аппроксимации $A^{-1}\Delta$ наряду с приведенным выше элементарным анализом можно было бы использовать аппарат метода дифференциального приближения [40].

Дифференциальное приближение для (1.21) запишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{l=4}^{\infty} C_l \frac{\partial^l u}{\partial x^l}, \quad (1.23)$$

где

$$C_4 = -h^4/24, \quad C_5 = -37h^5/1440.$$

Ограничиваясь первым дифференциальным приближением, т.е. учитывая в сумме правой части лишь первое слагаемое, получим после подстановки в (1.23) функции вида $\exp i(kx - \omega t)$:

$$-i\omega + ikc + (k^4 h^3 / 24)c = 0.$$

Отсюда следует оценка для диссипации за время h/c :

$$\lambda = \exp [(h^3 k^4 / 24)ct] \approx 1 - (1/24)k^4 h^4,$$

справедливая при малых значениях kh . Используя аналогичным образом второе дифференциальное приближение, получим равенство

$$-i\omega + ik - k^4 h^3 c / 24 + 37ik^5 h^4 c / 1440 = 0$$

и оценку для схемной фазовой скорости, характеризующую фазовую ошибку для малых kh :

$$c^*/c = \omega/kc = 1 + 37k^4 h^4 / 1440.$$

Из последнего равенства следует, что в соответствии с рис. 1.1 для рассматриваемой схемы фазовая скорость имеет тенденцию к превышению своего точного значения c в отличие от многих схем, для которых эта тенденция противоположна.

1.4. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Условия хорошей обусловленности. Пусть расчетная область является прямоугольником $0 \leq t \leq M\tau$, $0 \leq x \leq Nh$. Типичные разностные уравнения, возникающие при использовании операторов A и Δ , рассмотрим на примере двухслойной схемы с весами (1.11).

Выбрав некоторый узел j , $0 < j < N$, перепишем схему (1.11) при $\varphi'(u_j^m) > 0$ в виде

$$\left(5u_{j-1}^{m+1} - \frac{12\tau\sigma}{h}\varphi_{j-1}^{m+1}\right) + \left(8u_j^{m+1} + \frac{12\tau\sigma}{h}\varphi_j^{m+1}\right) - u_{j+1}^{m+1} = d_j, \quad (1.24)$$

$$\sigma = \sigma_0,$$

где сеточная функция d_j ($j = \overline{1, N-1}$) известна.

Наиболее универсальным приемом практической реализации алгоритма (1.24) является линеаризация функции $\varphi_j = \varphi(u_j^{m+1})$ с использованием значений u_j^l на предыдущем ($l = m$) или предыдущих ($l \leq m$) слоях $t = t_j$. Предположим, не нарушая общности, простейшую линеаризацию вида

$$\varphi_j^{m+1} = a_j(u_j^m)u_j^{m+1},$$

где $a_j(u_j^m)$ — известная сеточная функция. Разностные уравнения (1.24) теперь могут быть представлены в виде

$$(5 - 2R_{j-1})u_{j-1} + (8 + 2R_j)u_j - u_{j+1} = 12d_j, \quad (1.25)$$

где $R_j = 6\sigma\tau\varphi'(u_j^m)/h$. В случае $\varphi'(u_j^m) < 0$ уравнение (1.24) имеет вид

$$-u_{j-1} + (8 + 2R_j)u_j + (5 - 2R_{j+1})u_{j+1} = 12d_j, \quad (1.26)$$

$$R_j = 6\sigma\tau|\varphi'(u_j^m)|/h.$$

Поскольку (1.25) и (1.26) имеют совершенно одинаковую структуру и могут быть получены одно из другого путем обратной нумерации узлов, рассмотрим первое из них.

При исследовании обусловленности системы уравнений, имеющих вид (1.25) при $j = 1, 2, \dots, N-1$ и включающих в себя те или иные граничные условия при $j = 0$ и $j = N$, можно воспользоваться результатами, изложенными в [3].

Рассмотрим сначала случай, когда функция $a_j(u_j^m) = a_j$ удовлетворяет разностному условию Гельдера

$$|a_k - a_j| < D \left| \frac{k-l}{N} \right|^\omega. \quad (1.27)$$

Такая ситуация возникает, в частности, когда решение исходной задачи (1.8) непрерывно. Следуя [3], запишем для (1.25) уравнение

$$-q^2 + (8 + 2R_j)q + (5 - 2R_{j-1}) = 0, \quad (1.28)$$

имеющее корни

$$q_1 = 4 + R_j - \sqrt{21 + 2(R_j - R_{j-1}) + 6R_j + R_j^2},$$

$$q_2 = 4 + R_j + \sqrt{21 + 6R_j + 2(R_j - R_{j-1}) + R_j^2}.$$

В случае выполнения неравенств $|q_1| < 1$ и $|q_2| > 1$ при достаточно больших N система, порождаемая (1.25), является хорошо обусловленной, т.е. чувствительность ее решения к отклонениям R_j и d_j не возрастает с номером N (фактически это означает, что, записав ее в матричном виде $Au = f$ и $u = (u_1, \dots, u_{N-1})^T$, получим, что число обусловленности $\nu = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ не возрастает с номером N) [3].

С учетом (1.27) при $k = j$ и $l = j - 1$ неравенство $|q_2| > 1$ в силу $R_j > 0$ очевидно. Для доказательства неравенства $|q_1| < 1$ удобно рассмотреть два случая: 1) $5 - 2R_{j-1} > 0$ и $q_1 < 0$; 2) $5 - 2R_j < 0$ и $q_1 > 0$. Элементарные выкладки с учетом (1.27) показывают, что в обоих случаях $|q_1| < 1$ и, следовательно, рассматриваемая система хорошо обусловлена.

При расчете разрывных решений условие разностной гильдер-непрерывности (1.27) в отдельных узлах может нарушаться. В этом случае удобно использовать достаточный признак хорошей обусловленности [3]. Он сводится к выполнению неравенства

$$8 + 2R_j \geq 1 + |5 - 2R_{j-1}|. \quad (1.29)$$

Неравенство (1.29) заведомо выполняется при $5 - 2R_j \geq 0$, если же $5 - 2R_j < 0$, то для его выполнения требуется ограничение

$$\max_j \left| |a_{j-1}| - |a_j| \right| \frac{\tau}{h} < \frac{1}{\sigma}. \quad (1.30)$$

Таким образом, и в случае разрывных решений система, образованная уравнениями вида (1.25) или (1.26), является хорошо обусловленной при выполнении не очень жесткого условия (1.30).

Для практики полезно следующее замечание: если сеточная функция a_j , близкая к нулю, меняет знак при переходе от узла к узлу в силу схемной немонотонности, то для предотвращения нежелательных переключений операторов A и Δ можно положить в них $s = 0$ при $|a_j| < \epsilon$ и $s = \text{sgn } a_j$ при $|a_j| > \epsilon$, где ϵ — некоторое малое число.

Определенную информацию о решении разностных уравнений можно получить, положив $R_j = \text{const} = R$, $a_j = a$ и $d_j \equiv 0$. Тогда общее решение будет иметь вид

$$u_j = c_1 q_1^j + c_2 q_2^j, \quad (1.31)$$

где c_1 и c_2 — некоторые константы. При $R \leq 5/2$, т.е. при $a\tau/h = K \leq 5/12\sigma$,

$$4 - \sqrt{21} \leq q_1 < 0. \quad (1.32)$$

При выполнении (1.32) решение (1.31) может иметь быстрозатухающую в силу $|q_1| < 1$ осциллирующую составляющую. При $K \geq 5/12\sigma$ осцилляции исчезают.

Решение разностных уравнений. Естественным методом решения разностных уравнений является прогонка, которая для хорошо обусловленной системы является устойчивой. Ввиду того что $|q_1| < 1$, а $|q_2| > 0$, на каждом конце рассматриваемого интервала $[x_0, x_N]$ должны быть сформулированы граничные условия. Эти условия являются обычными условиями для трехточечных неявных схем и определяются спецификой

решаемой задачи. В общем случае их можно записать в виде

$$\begin{aligned}\alpha_1 u_0^{m+1} + \beta_1 u_1^{m+1} &= \gamma_1, \\ \alpha_2 u_{N-1}^{m+1} + \beta_2 u_N^{m+1} &= \gamma_2,\end{aligned}\tag{1.33}$$

где α_i , β_i и γ_i ($i = 1, 2$) – некоторые коэффициенты. Эти условия могут иметь жесткий характер на тех границах $x = x_0$ или $x = x_N$ расчетной области, откуда выходят характеристики исходного дифференциального уравнения (условия типа $u_k^{m+1} = \Psi^{m+1}$, где $k = 0$, а сеточная функция Ψ^{m+1} задана), и мягкий характер – на границах, куда они приходят. В последнем случае применимы различные виды экстраполяции, запись для исходных уравнений какой-либо схемы с использованием внутренних узлов области и т.д. Как показала расчетная практика, в некоторых случаях достаточно удаленной границы, до которой еще не дошли возмущения, мягкие граничные условия могут быть заменены жесткими. Примером может служить задача распространения разрыва, описываемого уравнением (1.8) при $\varphi(u) = u^2/2$, $f \equiv 0$, которая будет рассмотрена ниже.

Выбор граничных условий (1.33) может повлиять на устойчивость алгоритма в целом. Оценка этой устойчивости можно получить, используя, например, признак Бабенко–Гельфанда [3].

В некоторых частных случаях для решения системы (1.24) целесообразно использовать итерационный метод. При $\varphi'(u_j^m) > 0$, $j = 1, N-1$, (1.24) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\left(5u_{j-1}^{m+1,k} - \frac{12\tau\sigma}{h}\varphi_{j-1}^{m+1,k} \right) + \left(8u_j^{m+1,k} + \frac{12\tau\sigma}{h}\varphi^{m+1,k} \right) = \\ = u_{j+1}^{m+1,k-1} + d_j,\end{aligned}\tag{1.34}$$

где k – номер итераций. Если функцию $\varphi_j^{m+1,k}$ линеаризовать относительно $(k-1)$ -й итерации, то система (1.34) при $j = 1, N-1$ становится линейной с двухдиагональной матрицей; ее можно решить методом "бегущего счета". В приближении постоянных коэффициентов для собственного значения λ оператора перехода от $(k-1)$ -й к k -й итерации получается выражение вида

$$\lambda = \frac{e^{i\alpha}}{8 + 2R + (5 - 2R)e^{-i\alpha}}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2,\tag{1.35}$$

где $R = 6\sigma\tau a/h$, $a = \text{const} = \varphi'(u^m)$. Из (1.35) следует, что для $|\lambda|$ справедлива оценка

$$|\lambda| \leq [\min(13, \sqrt{9 + 24R + 16R^2})]^{-1},$$

указывающая на очень быструю сходимость (1.34). Если желательно решить систему (1.24) в нелинеаризованном виде, то вместо прогонок с итерациями выгодней использовать итерационный процесс (1.34) с линеаризацией функций $\varphi_j^{m+1,k}$, поскольку обращение двухдиагональных матриц требует меньшего числа арифметических операций, чем обращение трехдиагональных матриц. Для некоторых видов функций φ (например, при $\varphi(u) = u^2$) возможно также непосредственное решение нелинейных уравнений (1.34).

1.5. Аппроксимация производных по времени. Компактные схемы для нестационарных задач

Трехслойные схемы. Выше была рассмотрена простейшая двухслойная схема из семейства (1.9) — схема с весами, частными случаями которой являются чисто неявная схема ($\sigma_0 = 1, \sigma_1 = 0$) и схема Кранка–Никольсона ($\sigma_0 = \sigma_1 = 0,5$) с погрешностью $O(\tau^2 + h^3)$. Для приложений могут оказаться полезными и некоторые другие варианты схем из (1.9). Рассмотрим некоторые из них.

Схема третьего порядка с $\langle du/\partial t \rangle^{m+1} = (u^m - u^{m-1})/\tau$. По аналогии с оператором A введем на сетке ω_τ оператор A_τ вида

$$A_\tau f = (5f^{m+1} + 8f^m - f^{m-1})/12 \approx \frac{1}{\tau} \int_{t_m}^{t_{m+1}} f dt. \quad (1.36)$$

Проинтегрировав исходное уравнение (1.8) по x и t в области $t_m \leq t \leq t_{m+1}$, $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ или в области $t_m \leq t \leq t_{m+1}$, $x_{j-1} \leq x \leq x_j$ (в зависимости от знака производной $\varphi'(u_j^m)$) и заменяя интегралы квадратурными формулами (1.6) и (1.36), получим вследствие коммутативности операторов A и A_τ схему из (1.9) вида

$$A(u^{m+1} - u^m)/\tau + A_\tau(\Delta/h)\varphi^{m+1} = A_\tau A f, \quad (1.37)$$

соответствующую $\sigma_0 = 5/12, \sigma_1 = 8/12$ и $\sigma_2 = -1/12$.

В индексном представлении, например в случае $\varphi'_u \geq 0$, она записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{5}{12} \frac{u_{j-1}^{m+1} - u_{j-1}^m}{\tau} + \frac{8}{12} \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\tau} - \frac{1}{12} \frac{u_{j+1}^{m+1} - u_{j+1}^m}{\tau} + \\ & + \frac{5}{12} \frac{\varphi_j^{m+1} - \varphi_{j-1}^{m+1}}{h} + \frac{8}{12} \frac{\varphi_j^m - \varphi_{j-1}^m}{h} - \frac{1}{12} \frac{\varphi_j^{m-1} - \varphi_{j-1}^{m-1}}{h} = d_j, \end{aligned}$$

где через d_j для краткости обозначены члены, входящие в правую часть (1.37).

Исследование устойчивости схемы (1.37) спектральным методом сводится к анализу корней уравнения

$$\lambda - 1 + \left(\frac{5}{12} \lambda + \frac{8}{12} - \frac{1}{12} \frac{1}{\lambda} \right) rW(\alpha) = 0, \quad r = a\tau/h = \text{const}, \quad (1.38)$$

в котором $\text{Re}(rW) \geq 0$.

Уравнение (1.38) громоздко для алгебраического анализа, однако численное решение его элементарно. Изменение величины $\Lambda = \max_{0 \leq \alpha \leq 2\pi} |\lambda|$ с изменением параметра $|a|\tau/h$, полученное расчетным путем из уравнения (1.38), показывает, что схема (1.37) условно устойчива: $\Lambda \leq 1$ лишь при $|a|\tau/h \leq 1$. Это означает, что применять ее следует лишь для описания нестационарных процессов, когда выбор шага по времени $\tau \sim h$ диктуется физикой явления.

При этом компенсацией за усложнение процесса счета по сравнению

со случаем явных схем может служить третий порядок точности по всем переменным на компактном трехточечном в каждом направлении шаблоне.

С х е м ы с $\langle \partial u / \partial t \rangle^{m+1} = (3u^{m+1} - 4u^m + u^{m-1}) / 2\tau$. Запишем семейство трехслойных схем с такой дискретизацией производной $\partial u / \partial t$ в виде

$$A \left(\frac{3u^{m+1} - 4u^m + u^{m-1}}{2\tau} \right) + \frac{\Delta}{h} (\sigma_0 \varphi^{m+1} + \sigma_1 \varphi^m + \sigma_2 \varphi^{m-1}) = Af, \quad (1.39)$$

$$\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 = 1.$$

При $\sigma_0 = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = 0$ имеем схему с погрешностью $O(\tau^2 + h^3)$. Собственные значения λ оператора перехода для нее могут быть записаны в виде ($\varphi'_u = a = \text{const}$)

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm (1 - 2R - 2Si)^{1/2}}{3 + 2R + 2Si}, \quad (1.40)$$

где для краткости введены обозначения $R = ar \text{Re } W, S = ar \text{Im } W$, причем $r = \tau/h$, а W — функция комплексного аргумента из (1.12), удовлетворяющая условию $a \text{Re } W \geq 0$. Покажем, что $|\lambda_{1,2}| \leq 1$. Обозначим через Y модуль выражения $(1 - 2R - 2Si)$ и рассмотрим две возможности: $Y \leq 1$ и $Y > 1$. В первом случае модуль числителя (1.40) удовлетворяет неравенству

$$|2 \pm (1 - 2R - 2Si)^{1/2}| \leq 2 + \sqrt{Y} \leq 3,$$

а модуль знаменателя $[(3 + 2R)^2 + 4S^2]^{1/2}$ не меньше 3 в силу $R \geq 0$, поэтому модуль дроби (1.40) не превосходит единицы.

Пусть теперь $Y > 1$. Записав (1.40) в виде

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{Y} (\cos \varphi / 2 + i \sin \varphi / 2)}{3 + 2R + 2Si}, \quad \varphi = \arccos [(1 - 2R) / Y],$$

получим после простых выкладок, что неравенство $|\lambda|^2 \leq 1$ выполняется, если

$$\Phi_{1,2}(Y, R) = Y^2 - Y = 4[(1 - 2R + Y)/2]^{1/2} + 4 + 16R > 0.$$

Для Φ_2 это очевидно в силу $Y > 1$. Для Φ_1 имеем при $R > 0, Y > 1$: $\Phi_1(Y, 0) \geq 0$, поскольку $\partial \Phi_1(Y, 0) / \partial Y = 2Y - 1 - [(1 + Y)/2]^{-1/2} > 0$, $\Phi_1(1, 0) = 0$, и, кроме того, $\partial \Phi_1(Y, R) / \partial R = 16 + 2[(1 - 2R + Y)/2]^{-1/2} > 0$.

Таким образом, трехслойная схема (1.39) абсолютно устойчива.

Используя некоторую свободу выбора весовых множителей σ_i ($i = 0, 1, 2$) в (1.39), можно построить схему с погрешностью $O(\tau^3 + h^3)$. Для этого достаточно подставить разложения в ряд Тэйлора решений $u(x, t)$ задачи (1.8) в окрестности $t = t_{m+1}$ в схему (1.39) и потребовать обращения в нуль всех членов порядка $O(\tau)$ и $O(\tau^2)$. Простейшие выкладки приводят к значениям $\sigma_0 = 2/3, \sigma_1 = 2/3, \sigma_2 = -1/3$.

Схема (1.39) с этими коэффициентами, как показывают вычисления собственных значений λ оператора перехода, является условно-устойчивой.

Схемы с операторами A и Δ для нестационарных задач. Алгоритмы, основанные на применении аппроксимаций (1.9), обладают общим свойством: их погрешность при установлении не зависит от шага τ (полная аппроксимация в смысле [41]).

Это позволяет использовать их при решении стационарных и нестационарных задач. В первом случае оказываются достаточными простейшие аппроксимации $\langle u_\tau \rangle^{m+1}$ производной $du/\partial t$; более того, допустимо вообще отказаться от аппроксимации этой производной, введя вместо нее член $B\langle u_\tau \rangle^{m+1}$, где B — некоторый оператор, ускоряющий сходимость функции u_n^m при $m \rightarrow \infty$ к стационарному решению.

Применение неявных абсолютно устойчивых схем типа (1.9) для нестационарных задач в общем случае может представиться нерациональным из-за увеличенного количества арифметических операций по сравнению с явными схемами. Тем не менее схемы (1.9) могут оказаться полезными и в этом случае в силу следующих причин:

величины шагов по времени, диктуемые требуемой точностью временного разрешения, могут оказаться больше, чем шаги по времени, определяемые критериями устойчивости явных схем;

необходимость сгущения узлов сетки в пространственном направлении может приводить в случае явных схем к неоправданно малым шагам по времени.

Если же по смыслу исходной задачи полная аппроксимация и абсолютная устойчивость не требуются, то применение операторов A и Δ оказывается естественным способом повышения порядка аппроксимации некоторых известных явных схем, не входящих в семейство (1.9), с сохранением их условной устойчивости. Заметив, что явная двухслойная схема (1.9) с $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = 1$ абсолютно неустойчива, модифицируем в качестве примера одношаговую схему Лакса—Вендрофа. Не нарушая общности, рассмотрим уравнение с постоянными коэффициентами (1.20). Записав разложение в ряд вида $u^{m+1} = u^m + \tau u_t + (\tau^2/2)u_{tt} + O(\tau^3)$, где все производные взяты при $t = t_m$, заменим производные по времени производными по пространству, используя исходное уравнение (1.20). Для аппроксимации первых и вторых производных по x воспользуемся соответственно операторами $A^{-1}\Delta$ и Δ_2 . Окончательно получим схему с погрешностью $O(\tau^2 + h^3 + \tau h^2)$:

$$\frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} + \frac{c}{h} A^{-1}\Delta u^m - \frac{\tau c^2}{2h^2} \Delta_2 u^m = 0. \quad (1.41)$$

Для реализации (1.41) требуется трехточечная скалярная прогонка при обращении оператора A ; при этом сначала определяется сеточная функция $Z = A^{-1}\Delta u^m$, а затем $u^{m+1} = u^m - (\tau c/h)Z + \tau(c/h)^2 \Delta_2 u^m/2$.

Схема (1.41) уступает схеме (1.14) по запасу устойчивости: она всего лишь условно устойчива. Однако в случае многомерных задач, решаемых на ЭВМ с векторными или матричными процессорами, обращение операторов A , соответствующих различным пространственным направлениям, можно осуществлять одновременно, а не последовательно, как в случае неявных схем расщепления. К тому же такое обращение может оказаться предпочтительнее обращения операторов вида $A + \sigma c \tau \Delta/h$, $c = \varphi'_u$, в схеме (1.14).

На основе известных схем (например, двухшаговых) можно сконструировать и другие алгоритмы, обладающие погрешностью $O(h^3)$. Для этого достаточно вместо традиционных формул численного дифференцирования применять оператор $A^{-1}\Delta$.

Дисперсионные и диссипативные свойства. При анализе дисперсионных и диссипативных свойств схем, построенных на основе операторов A и Δ , можно использовать выражения (1.12) для $W_+(\alpha)$ и $W_-(\alpha)$. Однако дискретизация производных по времени, вообще говоря, изменит величины фазовых и амплитудных ошибок. Рассмотрим сначала двухслойную схему (1.11) с весами $\sigma_0 = \sigma$ и $\sigma_1 = 1 - \sigma$. Подставляя в нее решение вида $u_n^m = \lambda^m \exp(ikhn)$, получим равенство

$$\lambda = |\lambda| \exp(-i\alpha\theta), \quad (1.42)$$

в котором $\alpha = kh$, а $|\lambda|$ и θ определяются выражениями

$$|\lambda| = \left[\frac{1 - (1 - 2\sigma)KW_0 - \sigma(1 - \sigma)K^2(W_0^2 + W_1^2)}{(1 + \sigma KW_0)^2 + \sigma^2 K^2 W_1^2} \right]^{1/2}, \quad (1.43)$$

$$\theta = \frac{1}{K\alpha} \operatorname{arctg} \frac{KW_1}{[1 - (1 - 2\sigma)KW_0 - \sigma(1 - \sigma)K^2(W_0^2 + W_1^2)]},$$

где K — число Куранта ($K = c\tau/h$).

Сравнивая (1.42) с относительным изменением точного решения (1.20) $u(t + \tau)/u(t) = e^{-ick\tau} = e^{-iK\alpha}$, получим для относительной фазовой скорости $c^*/c = \theta$ при небольших значениях α оценку вида

$$c^*/c = 1 - (\sigma^2 - \sigma + 1/3)K^2\alpha^2 + O(\alpha^4); \quad (1.44)$$

выражение (1.43) для $|\lambda|$, которое при $\sigma > 0,5$ всегда не превышает единицу, при этом перейдет в

$$|\lambda| = 1 - (\sigma - 1/2)K^2\alpha^2 + O(\alpha^4). \quad (1.45)$$

В случае схемы (1.41) имеем

$$\frac{c^*}{c} = \frac{1}{K\alpha} \operatorname{arctg} \frac{KW_1}{1 - KW_0 - 2K^2 \sin^2(\alpha/2)}, \quad (1.46)$$

$$|\lambda| = \sqrt{[1 - KW_0 - 2K^2 \sin^2(\alpha/2)]^2 + K^2 W_1^2}.$$

Из (1.46) следуют оценки

$$c^*/c = 1 + (K/2)\alpha^2 + O(\alpha^4), \quad |\lambda| = 1 + O(\alpha^4), \quad (1.47)$$

причем $|\lambda| \leq 1$ при $K \leq K_{\max}$, $K_{\max} \approx 0,3$.

На основании равенств (1.44)–(1.46) можно сделать следующие заключения. Для длинных и средних волн ($\alpha \ll 1$) в случае схемы (1.11) амплитудные и фазовые ошибки при введении приближенной формулы для производной по времени возросли по сравнению со случаем дифференциально-разностного уравнения (1.21); однако у схемы (1.11) типа Кранка–Никольсона ($\sigma = 0,5$) они минимальны: $|\lambda| = 1 + O(\alpha^4)$, $c^*/c = 1 - K^2\alpha^2/12 + O(\alpha^4)$. В случае схемы (1.41) увеличилась лишь фазовая ошибка; при значениях K , допускаемых критерием устойчивости, это увеличение незначительно. Что касается коротких волн ($\alpha \approx \pi$), когда фазовые ошибки максимальны, то обе схемы (1.11) и (1.41), согласно (1.43) и (1.46), при надлежащем выборе числа Куранта K могут обеспечить их очень быстрое затухание ($|\lambda| \approx 0$). Таким образом, аппроксимации $A^{-1}\Delta$ благоприятны в тех случаях, когда желательно точно моделиро-

вать распространение длинных и средних волн, интенсивно демпфируя высокочастотные гармоники. При этом третий порядок схемы позволяет выбирать более крупные шаги h , чем в случае схем второго порядка.

Как следует из приведенного выше анализа, введение аппроксимации временной производной может ухудшить оценки (1.23) для фазовых и амплитудных ошибок, вносимых в точное решение оператором $A^{-1}\Delta$ (последние, как легко показать, приводят к соотношению $|\lambda| = \exp(-KW_0)$). Чтобы устранить дополнительные фазовые и амплитудные погрешности, достаточно повысить порядок схемы относительно шага τ . К этому приводят следующие эвристические соображения.

Пусть $\langle du/\partial t \rangle = (du/\partial t)_{t=t_m} + \gamma(\tau^q \partial^{q+1} u / \partial t^{q+1})_{t=t_m} \tau^q + O(\tau^{q+1})$ — некоторая аппроксимация производной $du/\partial t$ порядка q с коэффициентом γ в разложении по τ . Тогда получим дисперсионное соотношение для дифференциального приближения

$$-i\omega + \gamma\tau^q (-i\omega)^{q+1} + \frac{c}{h} W_0(kh) + \frac{ic}{h} W_1(kh) = 0. \quad (1.48)$$

Для отношения ω/k из (1.48) следует уравнение

$$-(\omega/k) - \gamma(-\tau\alpha/h)^q (\omega/k)^{q+1} i^q + cW_1(\alpha)/\alpha - icW_0(\alpha)/\alpha = 0, \quad \alpha = kh. \quad (1.49)$$

Считая при малых α второе слагаемое в (1.49) малой поправкой к значению $\omega/k = cW_1(\alpha)/\alpha$, получим для фазовой скорости $c^* = (\text{Re}\omega)/k$ оценку $c^* = cW_1(\alpha)/\alpha + O(\alpha^q)$. Мнимая часть ω определяет вклад, вносимый в диссипацию схемы.

1.6. О двухслойной схеме третьего порядка относительно τ и h

Построение двухслойной схемы. Рассмотренные выше трехслойные схемы, обладающие погрешностью $O(\tau^3 + h^3)$, являлись лишь условно устойчивыми. В некоторых случаях, однако, оказывается желательным использование абсолютно устойчивой схемы, имеющей высокий порядок аппроксимации относительно шага τ . Такая схема полезна, в частности, при построении маршевого алгоритма для стационарных задач, в которых роль времени играет одна из пространственных координат. Оказывается, удается построить двухслойную двухшаговую схему, обладающую этим свойством [42]. Для уравнения (1.8) запишем сначала схему вида

$$(u^m - u^{m-1})/\tau + \tilde{A}_\tau (A^{-1}\Delta\varphi)^m/h = \tilde{A}_\tau f^m, \quad (1.50)$$

где \tilde{A}_τ — оператор, определенный на сетке ω_τ и аналогичный оператору A_+ , определенному на сетке ω_h :

$$\tilde{A}_\tau g = (5g^{m-1} + 8g^m - g^{m+1})/12;$$

фактически оператор \tilde{A}_τ является сопряженным оператору A_τ из трехслойной схемы (1.37). Ясно, что схема (1.50) имеет погрешность $O(\tau^3 + h^3)$. Вместе с тем она содержит нежелательный член $A^{-1}\Delta\varphi^{m+1}/12h$, который затрудняет ее реализацию. Для исключения этого члена без понижения точности аппроксимации достаточно воспользоваться какой-либо схемой второго порядка. Выберем схему типа Кранка–Никольсона, представив

ее в виде

$$\frac{u^{m+1} - u^{m-1}}{2\tau} + \frac{1}{2h} (A^{-1}\Delta\varphi^{m-1} + A^{-1}\Delta\varphi^{m+1}) = F^m, \quad (1.51)$$

где $F^m = T_{1/2}^{(t)} A_t f^m$, причем $T_{1/2}^{(t)}$ – оператор сдвига на $\tau/2$ в положительном направлении оси t .

Обозначив через $Lu^m = A^{-1}\Delta\varphi(u^m)/h$ и комбинируя (1.50) и (1.51), получим искомую схему вида

$$\begin{aligned} [E + (2/3)\tau L]u^m - \{E - \tau L [5E - (E + \tau L)^{-1}(E - \tau L)]/12\}u^{m-1} = \\ = \tau [E + (\tau/6)L(E + \tau L)^{-1}T_{1/2}^t]f^m. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Для определения u^m достаточно сначала найти предварительное значение u^{m+1} из (1.51), подставить его в (1.50), а затем обратить оператор $[E + (2/3)\tau L]$ в (1.50). Ввиду нелинейности оператора L , как и в случае рассмотренных выше неявных схем, требуется его линеаризация относительно известных значений сеточной функции u_j . Эти значения можно получать, например, по тем или иным экстраполяционным формулам или из предыдущей итерации в случае использования какого-либо итерационного процесса для решения нелинейных уравнений.

Убедиться в третьем порядке схемы (1.52) можно, не прибегая к громоздким выкладкам. Для этого достаточно заметить, что (1.52) отличается от схемы (1.50) членами

$$\frac{\tau}{12} L(E + \tau L)^{-1}(E - \tau L)u^{m-1} - \frac{\tau}{12} Lu^{m+1} + \frac{\tau^2}{6} L(E + \tau L)^{-1}T_{1/2} A_t f^m. \quad (1.53)$$

Умножая (1.53) слева сначала на L^{-1} , а затем на $(E + \tau L)$, получим выражение вида

$$\frac{\tau}{12} (-u^{m-1} + u^{m+1} - \tau Lu^{m+1} - \tau Lu^{m-1}) + \frac{\tau^2}{6} T_{1/2} A_t f^m.$$

Поскольку $T_{1/2} = E + \frac{\tau}{2} D_t + O(\tau^2)$, $A_t = E - \frac{\tau}{2} D_t + O(\tau^2)$, где D_t – оператор дифференцирования по t , легко усмотреть, что это выражение, а следовательно, и (1.53) имеют порядок $O(\tau^4)$.

Оценки устойчивости, диссипации и дисперсии. Для оценки устойчивости при предположении $\varphi(u) = au$, $a = \text{const}$ достаточно воспользоваться методом Фурье. После громоздких выкладок модуль собственных значений оператора перехода в пространстве фурье-образов может быть записан в виде

$$|\lambda|^2 = \frac{1 + \frac{4}{3}K\nu + \frac{K^2}{g}(13\mu^2 - 5\nu^2) - \frac{2}{3}K^3\nu(\nu^2 + \mu^2) + \frac{1}{4}(\nu^2 + \mu^2)^2 K^4}{1 + \frac{10}{3}K\nu + \frac{K^2}{9}(13\mu^2 - 5\nu^2) + \frac{20}{9}K^3\nu(\nu^2 + \mu^2) + \frac{4}{9}(\nu^2 + \mu^2)^2 K^4}, \quad (1.54)$$

где $K = a\tau/h$, а через ν и μ обозначены функции $W_0(\alpha)$ и $W_1(\alpha)$, $\alpha = kh$.

Из (1.54) следует неравенство $|\lambda| \leq 1$, т.е. абсолютная устойчивость схемы (1.52), а также оценка для амплитудных ошибок, характеризующая диссипацию схемы:

$$|\lambda| = 1 - O(k^4 h^4).$$

Таким образом, схема (1.52) характеризуется очень малой диссипацией для длинных по сравнению с h волн. Для самых коротких волн, разрешаемых сеткой ($kh = \pi$), (1.54) переходит в

$$|\lambda^2| = \frac{1 + (4/3)K\nu_m - (5/9)K^2\nu_m^2 - (2/3)K^3\nu_m^3 + (1/4)K^4\nu_m^4}{1 + (10/3)K\nu_m - (5/9)K^2\nu_m^2 + (20/9)K^3\nu_m^3 + (4/9)K^4\nu_m^4},$$

где $\nu_m = W_0(\pi) \cong 6$, откуда следует, что такие волны быстро затухают (при больших числах Куранта K $|\lambda| \approx 3/4$).

Выражение для схемной фазовой скорости, характеризующее фазовые ошибки, может быть записано в виде

$$a^* = \frac{a}{K\alpha} \operatorname{arctg} \frac{K\mu(18 + 42K\nu + 23K^2\mu^2 + 46K^2\nu^2)}{18 + 42K\nu + 13K^2\mu^2 + 20K^2\nu^2 - 7K^3\nu\mu - 24K^4\nu^2\mu^2 - 6K^4\mu^4}.$$

Разложение в ряд правой части этого выражения по степеням kh приводит к следующей оценке при $kh \ll 1$:

$$a^*/a = 1 - O(k^4 h^4).$$

Таким образом, схема (1.52) обладает следующими благоприятными свойствами: третьим порядком аппроксимации; трехточечностью шаблона в направлении x и двухслойностью по t ; абсолютной устойчивостью; малыми амплитудами и фазовыми ошибками для не слишком коротких волн и подавлением высокочастотных схемных осцилляций.

Такая схема может быть использована для решения нестационарных задач и в маршевых алгоритмах для стационарных задач. В последнем случае, как показывает анализ, существенным является двухслойность схемы.

1.7. Примеры сквозного счета разрывных решений

Нелинейное уравнение переноса. Схемы, построенные на основе операторов A и Δ в виде уравнений баланса через границы сеточных ячеек, могут быть использованы для получения решений, допускающих разрывы. В качестве примера целесообразно рассмотреть модельное уравнение

$$\partial u / \partial t + \frac{1}{2}(\partial u^2 / \partial x) = 0, \quad (1.55)$$

являющееся грубым аналогом уравнений газовой динамики. Если для (1.55) поставлена задача Коши с начальными данными $u(0, x) = u_0(x)$, причем функция $u_0(x)$ на некотором интервале от x убывает, то вследствие пересечения характеристик $dx/dt = u$ этого уравнения, его решение должно содержать разрыв. Конечно-разностное описание разрыва и его распространения может иллюстрировать дисперсионные и диссипативные свойства применяемой схемы. Пусть имеются следующие условия Коши при $t = 0$:

$$u(x, 0) = 1 \quad (x \leq d); \quad u(x, 0) = 2 - x/d \quad (d \leq x \leq 2d); \quad u(x, 0) = 0 \quad (x > 2d).$$

Тогда точное решение задачи (1.55), таково, что при $t = d$ формируется разрыв, который затем движется с постоянной скоростью $x/t = 0,5$ в положительном направлении оси x .

Для численного решения этой задачи использовалась трехслойная условно-устойчивая схема (1.37) с применением оператора A_t , определяющего квадратурную формулу при интегрировании потока через границу $x = \text{const}$ сеточной ячейки.

При решении разностных уравнений с граничными условиями $u_0^{m+1} = 1$, $u_N^{m+1} = 0$ (граница $x = Nh$ выбиралась достаточно далеко от начала координат) использовались все перечисленные выше методы: трехточечная прогонка для линеаризованной системы, бегущий счет при обращении двухдиагональных матриц, решение нелинейных (квадратных) уравнений в каждом узле. Во всех случаях применялись итерации для получения с заданной точностью малых невязок нелинейных уравнений при $t = t_{m+1}$. При прочих равных условиях затраты машинного времени были несколько меньшими в случае обращения двухдиагональных матриц.

На рис. 1.2 показаны изменения функции u в окрестности разрыва, полученные при помощи схемы (1.37) при $\tau/h = 0,7$ (сплошные линии) и явных схем третьего порядка из [16, 43] (треугольники). Во всех случаях наблюдается хорошее совпадение фронтов точного и разностного разрывов, характеризующих малые фазовые ошибки. Особенностью приведенных на рис. 1.2 расчетных данных для схемы (1.37) является расположение участков немонотонности решений впереди разрыва (со стороны малых значений u). Это объясняется тем, что для коротких волн разностная групповая скорость превышает фазовую, что находится в соответствии с линейным анализом п. 1.3. Быстрое затухание пилообразных колебаний при удалении от разрыва может быть объяснено значительной диссипацией схемы для этого диапазона длин волн и согласуется с наличием составляющей $u_j = (-1)^j q_1^j$ ($0 < q_1 < 1$) в решении однородных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

В отличие от явных схем третьего порядка схема (1.37) для устойчивого счета не требует введения внепорядковых диссипативных членов. В этой схеме их можно использовать для уменьшения амплитуд схемных осцилляций. Некоторые примеры такого использования приведены на рис. 1.2, б (пунктир). Расчеты, однако, показали, что в случае уравнений газовой динамики незначительные быстрозатухающие осцилляции, если они и появляются при применении рассматриваемых схем, не вносят каких-либо трудностей в интерпретацию и практическое использование получаемых решений.

Задача о распаде разрыва. Пусть для уравнений газовой динамики

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad (1.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{h}{\gamma} + \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial \rho u (h + u^2/2)}{\partial x} = 0,$$

$$p = [(\gamma - 1)/\gamma] \rho h,$$

где u , p , ρ , h и γ — соответственно скорость, давление, плотность, эн-

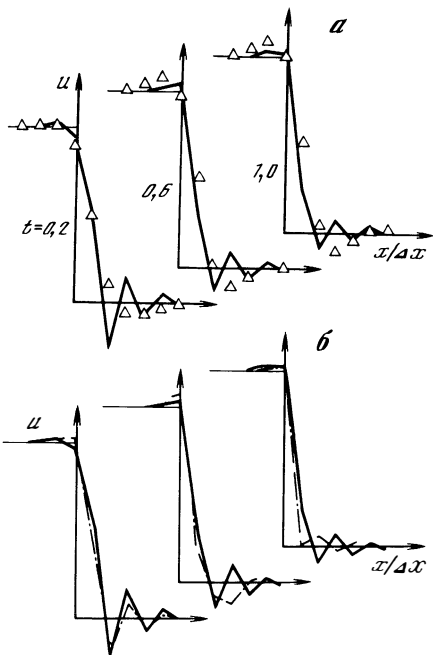


Рис. 1.2

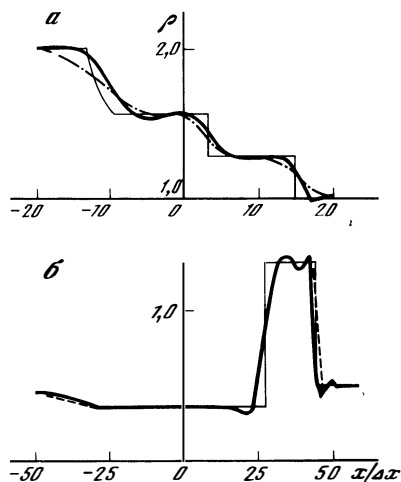


Рис. 1.3

тальпия и показатель адиабаты, поставлена задача Коши

$$u(0, x) = 0, \quad \rho(0, x) = \rho_1, \quad p(0, x) = p_1 \quad \text{при } x < 0,$$

$$u(0, x) = 0, \quad \rho(0, x) = \rho_2, \quad p(0, x) = p_2 \quad \text{при } x > 0.$$

Решение этой задачи хорошо изучено (см., например, [44]); оно характеризуется возникновением при $t > 0$ областей непрерывного решения в плоскости x, t , разделенных между собой ударными волнами и контактными разрывами.

При использовании операторов A и Δ для аппроксимации производных по x в (1.56) возникает вопрос о том, какую пару из них следует выбрать в каждом из трех уравнений.

Решение этого вопроса в общем случае гиперболических систем будет рассмотрено ниже. Для системы (1.56) удастся сформулировать простое правило выбора пар операторов, имеющее частный характер. Рассмотрим его на примере двухслойной схемы

Пусть в некоторой части расчетной области $j_0 h_0 < jh \leq j_1 h$ выполняется условие

$$|u| \geq c = (\gamma - 1)h,$$

где c — скорость звука. Тогда, используя во всех трех уравнениях (1.56) операторы A и Δ из (1.14) при $s = \text{sgn } u_j^m$, получим в приближении замороженных коэффициентов уравнение, корни которого являются собствен-

ными значениями оператора перехода:

$$[R(\lambda) + urW] \{[R(\lambda) + urW]^2 - c^2 r^2 W^2\} = 0, \quad r = \tau/h,$$

где $R(\lambda) = (\lambda - 1) (\sigma_0 \lambda + \sigma_1)^{-1}$. Это уравнение распадается на три уравнения вида (1.20) с коэффициентами $a_1 = u$, $a_2 = u - c$ и $a_3 = u + c$. Все они определяют значения λ по модулю, не превосходящие единицы в силу $s = \operatorname{sgn} a_i, i = 1, 2, 3 (\sigma_0 \geq 0,5)$.

В областях, где $|u| < c$, при аппроксимации первого и третьего уравнений (1.56) следует использовать операторы из (1.14) при $s = \operatorname{sgn} u_j^m$, а при аппроксимации второго уравнения (1.56) — сопряженные операторы ((1.14) при $s = -\operatorname{sgn} u_j^m$). После несложных выкладок уравнения для λ можно записать в виде

$$R(\lambda) + urW = 0,$$

$$R(\lambda)^2 + 2uri(\operatorname{Im} W)R(\lambda) + |W|^2 r^2 (c^2 - u^2) = 0.$$

Рассматривая второе из этих уравнений как квадратное относительно $R(\lambda)$, найдем

$$R(\lambda) = -uri \mp i \sqrt{u^2 r^2 (\operatorname{Im} W)^2 + (c^2 - u^2) r^2 |W|^2}. \quad (1.57)$$

Разрешая (1.57) относительно λ , получим при $\sigma_0 \geq 0,5$ значения λ , по модулю не превосходящие единицы.

Аналогичный анализ можно провести и для других схем, использующих операторы A и Δ . Вид выписанных выше уравнений для λ не изменится, если положить

$$R(\lambda) = \begin{cases} \left(\frac{3}{2} \lambda - 2 + \frac{1}{2} \lambda^{-1} \right) \lambda^{-1} & \text{в случае схемы (1.39) с } \sigma_0 = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = 0, \\ (\lambda - 1) \left(\frac{5}{12} \lambda + \frac{8}{12} - \frac{1}{12} \lambda^{-1} \right)^{-1} & \text{в случае схемы (1.37)}. \end{cases}$$

При расчетах использовалась условно-устойчивая схема (1.37), реализуемая трехточечными прогонками с итерациями.

На рис. 1.3 приведены два примера расчета, характеризующиеся: один — возникновением сравнительно мощной волны разрежения, другой — наличием интенсивных ударных волн и контактного разрыва. В первом случае (рис. 1.3,а) начальные данные при $t = 0$ выбирались следующим образом: $\rho = p = 2, u = 0$ при $x < 0$ и $\rho = p = 1, u = 0$ при $x \geq 0$; во втором случае (рис. 1.3,б) начальные данные заимствовались из [16]. Расчеты проводились при $\tau/h = 0,5$. Для сравнения на рис. 1.3,а приведены результаты, полученные по схемам первого [44], а на рис. 1.3, б — третьего [16] порядков точности (штрихпунктирные и штриховые линии соответственно).

Из анализа рис. 1.3 следует, что решения, получаемые при помощи компактной схемы (1.37) и явной схемы третьего порядка [16] практически совпадают и указывают на существенно меньшую схемную диссипацию, чем в случае схем первого порядка.

1.8. Компактные схемы третьего порядка для гиперболических систем

Построение аппроксимаций. В случае систем уравнений возникает вопрос, какую пару операторов A_{\pm} , Δ_{\mp} следует использовать при дискретизации пространственных производных в различных уравнениях. Пример из п. 1.7 показывает, что в частных случаях абсолютная устойчивость может быть достигнута путем применения пары A_{+} , Δ_{-} в одних уравнениях и пары A_{-} , Δ_{+} – в других. В общем случае этот вопрос можно решать так же, как он часто решается для схем с односторонними разностями, т.е. путем диагонализации матрицы соответствующей линеаризованной системы. Диагонализация позволяет выбрать такие пары операторов A_{\pm} и Δ_{\mp} для каждого образовавшегося скалярного уравнения, которые приводят к абсолютно устойчивым схемам с положительными операторами.

Пусть имеется система вида

$$\partial \mathbf{f}(\mathbf{u}, x) / \partial t + \partial \mathbf{F}(\mathbf{u}, x) / \partial x = \mathbf{g}(\mathbf{u}, x, t), \quad (1.58)$$

где \mathbf{u} , \mathbf{f} , \mathbf{F} и \mathbf{g} – p -компонентные векторы, причем векторные функции \mathbf{f} , \mathbf{F} и \mathbf{g} обладают достаточным запасом гладкости. Поставим ей в соответствие линейную систему

$$\partial \mathbf{u} / \partial t + L^{-1} Q \partial \mathbf{u} / \partial x = \mathbf{g}_1(\mathbf{u}, x, t), \quad (1.59)$$

в которой $L = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u}$ и $Q = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{u}$ – матрицы Якоби. Предположим, что схема (1.59) гиперболична и матрица $L^{-1} Q = K$ имеет действительные собственные значения λ_i ($i = \overline{1, p}$).

Чтобы наметить структуру компактной схемы третьего порядка, предположим сначала, что матрицы L и Q постоянны. В этом случае преобразованием $\mathbf{u} = S \mathbf{v}$, где столбцами матрицы S являются собственные векторы матрицы K , система (1.59) приводится к виду

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + \Lambda \partial \mathbf{v} / \partial x = S^{-1} \mathbf{g}_1, \quad (1.60)$$

где $\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \}$, а $K = S \Lambda S^{-1}$. Таким образом, мы приходим к системе независимых друг от друга уравнений

$$\partial v_{(i)} / \partial t + \lambda_i \partial v_{(i)} / \partial x = f_{(i)}, \quad i = \overline{1, p}, \quad (1.61)$$

в которой $v_{(i)}$ и $f_{(i)}$ – компоненты векторов \mathbf{v} и $S^{-1} \mathbf{g}_1$ соответственно. Приведение гиперболических систем к каноническому виду (1.60) широко использовалось при построении явных схем с односторонними разностями (см. [13, 21]).

Каждое из уравнений (1.61) является частным случаем рассмотренного выше уравнения (1.8), и его можно аппроксимировать при помощи операторов A и Δ . Рассмотрим простейшую дискретизацию производной по времени – двухслойную схему с весовым множителем вида

$$\begin{aligned} [A_0 - 0,25 \operatorname{sgn} \lambda_i \Delta_0] \frac{v_{(i)}^{m+1} - v_{(i)}^m}{\tau} + \frac{(\Delta_0 - \operatorname{sgn} \lambda_i \Delta_2) \lambda_i \bar{v}_{(i)}^{m+1}}{2h} = \\ = (A_0 - 0,25 \operatorname{sgn} \lambda_i \Delta_0) \bar{g}_{(i)}, \end{aligned} \quad (1.62)$$

где черта сверху означает, что рассматриваются взвешенные значения функций \mathbf{v} и \mathbf{g}_1 : $\bar{\mathbf{v}} = \sigma \mathbf{v}^{m+1} + (1 - \sigma) \mathbf{v}^m$, $\bar{\mathbf{g}}_1 = \sigma \mathbf{g}_1^{m+1} + (1 - \sigma) \mathbf{g}_1^m$.

Записывая (1.62) в матричном виде и возвращаясь к прежней перемен-

ной $\mathbf{u} = S^{-1}\mathbf{v}$, получим после умножения всех членов на S^{-1} следующую схему:

$$\begin{aligned} (A_0 - 0,25M\Delta_0) \frac{\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m}{\tau} + \frac{\Delta_0 - M\Delta_2}{2h} K\bar{\mathbf{u}} = \\ = (A_0 - 0,25M\Delta_0) \bar{\mathbf{g}}_1. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Здесь $M = SDS^{-1}$, а через D обозначена диагональная матрица с элементами $\text{sgn} \lambda_l$.

Перепишем схему (1.63) в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} (A_0 - 0,25M\Delta_0) L^{-1}L \frac{\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m}{\tau} + \frac{\Delta_0 - M\Delta_2}{2h} L^{-1}Q\bar{\mathbf{u}} = \\ = (A_0 - 0,25M\Delta_0) L^{-1}L\bar{\mathbf{g}}_1. \end{aligned}$$

После умножения последнего равенства на L схема (1.63) может быть представлена в виде

$$(A_0 - 0,25\tilde{M}\Delta_0) L \frac{\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m}{\tau} + \frac{(\Delta_0 - \tilde{M}\Delta_2) Q\bar{\mathbf{u}}}{2h} = (A_0 - 0,25\tilde{M}\Delta_0) \bar{\mathbf{g}}_1. \quad (1.64)$$

где $\tilde{M} = LML^{-1}$. Матрицы M и \tilde{M} в схемах (1.63) и (1.64) играют ту же роль, что и скалярный множитель $\text{sgn} \varphi'(u^m)$ в схеме (1.14) для скалярного уравнения (1.8), в случае $p = 1$ эти матрицы переходят в $\text{sgn} \lambda_1$.

Несколько модифицируя операторы в схеме (1.64), но сохраняя ее общую структуру, запишем аппроксимацию нелинейного уравнения (1.58) в виде

$$B_x (\mathbf{f}^{m+1} - \mathbf{f}^m) / \tau + C_x \bar{\mathbf{F}} = B_x \bar{\mathbf{g}}, \quad (1.65a)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^m = \mathbf{f}(\mathbf{u}^m, x), \quad \bar{\mathbf{F}} = \sigma \mathbf{F}^{m+1} + (1 - \sigma) \mathbf{F}^m, \quad \mathbf{F}^m = \mathbf{F}(\mathbf{u}^m, x), \\ \bar{\mathbf{g}} = \sigma \mathbf{g}^{m+1} + (1 - \sigma) \mathbf{g}^m \end{aligned}$$

а для операторов B_x и C_x возможны следующие варианты:

$$B_x = A_0 - 0,25 \Delta_0 \tilde{M}, \quad C_x = \frac{1}{2h} [\Delta_0 - \Delta_- (T_{1/2} \tilde{M}) \Delta_+], \quad (1.65б)$$

$$B_x = A_0 - 0,25 [(T_{1/2} \tilde{M})(E + T_1) - (T_{-1/2} \tilde{M})(E + T_{-1})], \quad (1.65в)$$

$$C_x = \frac{1}{2h} [\Delta_0 - \Delta_- (T_{1/2} \tilde{M}) \Delta_+],$$

$$B_x = A_0 - 0,25 \tilde{M} \Delta_0, \quad C_x = \frac{1}{2h} [\Delta_0 - \tilde{M} \Delta_2]. \quad (1.65г)$$

Предполагается, что в узле $x = x_j$ сеточные функции в полуцелых узлах вычислены следующим образом:

$$T_{1/2} M = (M_{j+1} + M_j) / 2 = (M(\mathbf{u}_{j+1}, x_{j+1}) + M(\mathbf{u}_j, x_j)) / 2,$$

или

$$T_{1/2}M = M_{j+1/2} = M((\mathbf{u}_{j+1} + \mathbf{u}_j)/2, x_{j+1/2}).$$

Аппроксимирующие свойства операторов B_x и C_x . Если собственные значения матрицы $K = L^{-1}Q$ не меняют знака в рассматриваемой области, то схема (1.61) имеет третий порядок аппроксимации относительно шага h . Действительно, тогда при предположении о достаточной гладкости решений (1.58) справедливы следующие представления для операторов B_x и C_x :

$$B_x \mathbf{f} = \left(E - \frac{h}{2} D_x M + \frac{h^2}{6} D_x^2 \right) \mathbf{f} + O(h^3), \quad (1.66a)$$

$$C_x \mathbf{f} = \left(E - \frac{h}{2} D_x M + \frac{h^2}{6} D_x^2 \right) D_x \mathbf{f} + O(h^3)$$

в случае операторов (1.65б), (1.65в);

$$B_x \mathbf{f} = \left(E - \frac{h}{2} M D_x + \frac{h^2}{6} D_x^2 \right) \mathbf{f} + O(h^3), \quad (1.66б)$$

$$C_x \mathbf{f} = \left(E - \frac{h}{2} M D_x + \frac{h^2}{6} D_x^2 \right) D_x \mathbf{f} + O(h^3)$$

в случае операторов (1.65г). Здесь и далее знак \sim над M опускается.

Подставляя (1.66a) (или (1.66б)) в (1.65a) и умножая полученные соотношения на $\left(E - \frac{h}{2} D_x M + \frac{h^2}{6} D_x^2 \right)^{-1}$ (или $\left(E - \frac{h}{2} M D_x + \frac{h^2}{6} D_x^2 \right)^{-1}$), получим равенство

$$(\mathbf{f}^{m+1} - \mathbf{f}^m)/\tau + D_x \mathbf{F} = \mathbf{g} + O(h^3),$$

из которого следует, что локальная погрешность аппроксимации схемы (1.65a) имеет порядок $O((\sigma - 0,5)\tau + h^3)$.

Если же в окрестности рассматриваемого узла $x = x_j$ хотя бы одна функция $\lambda_i(x)$ ($i = \overline{1, p}$) меняет знак, то элементы матрицы M оказываются разрывными.

Если при этом узел $x = x_j$ не является точкой смены знака $\lambda_i(x)$, то при достаточно малых h разложение (1.66б) остается в силе, поскольку в нем отсутствуют производные от матрицы M . Однако сеточные функции $B_x \mathbf{f}$ и $C_x \mathbf{f}$ в случае операторов (1.65б) или (1.65в) уже не могут быть представлены в виде (1.66a), поскольку последние предполагают достаточную гладкость M в интервале $[x_{j-1}, x_{j+1}]$.

Для выяснения порядка локальной аппроксимации схемы (1.65a) с меняющимся знаком λ_j удобно выделить из нее члены с матрицей M ; их сумма в узле $x_j = jh$ в случае операторов (1.65б) имеет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \left[M_{j+1} \left\langle \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right\rangle_{j+1} - M_{j-1} \left\langle \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right\rangle_{j-1} \right] - \frac{1}{2h} [M_{j+1/2} (\mathbf{F}_{j+1} - \mathbf{F}_j) - \\ & - M_{j-1/2} (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_{j-1})], \end{aligned} \quad (1.67)$$

где $\langle \partial \mathbf{f} / \partial t \rangle_j = (\mathbf{f}_j^{m+1} - \mathbf{f}_j^m)/\tau$.

Нетрудно убедиться, что матрицу M можно представить в виде

$$M = \sum_{k=1}^p (\operatorname{sgn} \lambda_k) M^{(k)},$$

где $M^{(k)} = SD^{(k)}S^{-1}$, а матрицы $D^{(k)}$ имеют единственный ненулевой элемент, равный единице, находящийся на пересечении k -й строки и k -го столбца. Таким образом, разрыв элементов матрицы M определяется изменением функции $\operatorname{sgn} \lambda_k(x)$, в то время как элементы матрицы $M^{(k)}$ ($k = \overline{1, p}$) остаются гладкими.

Поскольку часть схемы (1.65а), не зависящая от M , аппроксимирует уравнение (1.58) с четвертым порядком относительно шага h , достаточно рассмотреть порядок малости суммы (1.67).

Если собственные значения λ_k не меняют знак, то произведения $\operatorname{sgn} \lambda_k M^{(k)}$ являются гладкими функциями x . При этом выражение (1.67) после разложения в ряд Тейлора может быть представлено в виде

$$-\frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} M^{(k)} \left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_j} + O(h^3).$$

В силу исходного уравнения с точностью до дискретизации производной $\partial f / \partial t$ оно имеет порядок $O(h^3)$.

Пусть теперь при некотором k функция $\operatorname{sgn} \lambda_k$ меняет знак в окрестности узла x_j . Для определенности будем считать, что

$$\operatorname{sgn} \lambda_k(x_{j-1}) = 1, \quad \operatorname{sgn} \lambda_k(x_j) = -1, \quad \operatorname{sgn} \lambda_k(x_{j+1}) = -1; \quad (1.68)$$

все остальные ситуации могут быть рассмотрены аналогичным образом с тем же окончательным результатом. При выполнении равенств (1.68) часть выражения (1.67), зависящая от $M^{(k)}$, может быть записана в виде

$$-\frac{1}{4} \left[\left(M_{j+1}^{(k)} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle_{j+1} + M_{j-1}^{(k)} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle_{j-1} \right) + 2 \left(M_{j+1/2}^{(k)} \frac{\bar{F}_{j+1} - \bar{F}_j}{h} \right) \right]. \quad (1.69a)$$

Используя гладкость элементов матрицы $M^{(k)}$, легко убедиться в том, что на решении уравнения (1.58) выражение (1.69а) имеет порядок $O((\sigma - 0,5)\tau + \tau^2 + h)$.

Аналогичным образом можно проанализировать локальную погрешность схемы (1.61) с операторами (1.65в).

Пусть функция λ_k меняет знак в некотором интервале $[x_{j-1}, x_j]$, причем без потери общности имеют место равенства (1.68). Тогда, повторяя рассуждения, получим вместо (1.69а) выражение вида

$$-\frac{1}{4} \left[M_{j+1/2}^{(k)} \left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle_{j+1} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle_j + 2 \frac{\bar{F}_{j+1} - \bar{F}_j}{h} \right) \right]; \quad (1.69б)$$

оно в отличие от (1.69а) имеет на точном решении (1.58) порядок $O((\sigma - 0,5)\tau + \tau^2 + h^2)$.

Приведенные оценки относятся к локальной аппроксимации. Если же использовать среднеквадратичные нормы, то порядок аппроксимации

в случае нарушения гладкости элементов матрицы M повысится до $3/2$ и $5/2$ соответственно для операторов (1.65а) и (1.65б).

Из вида операторов B_x и C_x , задаваемых формулами (1.65б), (1.65г), следует, что во втором случае схема (1.65а) неконсервативна. Наоборот, при использовании операторов (1.65б) и (1.65в) сеточные функции $B_x f_j$ и $C_x K f_j$ можно представить в виде

$$B_x f_j = A_0 f_j + q_{j+1/2} - q_{j-1/2}, \quad C_x K f_j = Q_{j+1/2} - Q_{j-1/2},$$

где функции $q_{j\pm 1/2}$ и $Q_{j\pm 1/2}$ зависят линейным образом от f_j .

Такая структура операторов в схемах (1.65а, б, в), по существу, выражает свойство консервативности этих схем, позволяя интерпретировать последние как уравнения баланса потоков через границы ячеек, образованных разностной сеткой. При суммировании (1.65а) по всем узлам потоки через общие внутренние границы ячеек исчезают.

Для консервативной схемы (1.65а), (1.65в) имеет смысл использовать также негативные нормы [39] вида

$$\|f\|_1 = h^2 \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^k |f_j| \quad \text{или} \quad \|f\|_2 = h \sqrt{\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^k |f_j|^2},$$

где N — число узлов сетки. В этих нормах в силу взаимного уничтожения погрешностей при суммировании третий порядок сохранится даже при нарушении гладкости.

Из приведенных выше оценок следует, что при изменении знаков собственных значений (например, на звуковой линии в случае уравнений газовой динамики) теоретические качества схемы несколько ухудшаются, что, впрочем, свойственно всем схемам с ориентированными разностями на фиксированном шаблоне. Чтобы избежать этого, достаточно заменить разрывные функции $\text{sgn} \lambda^{(k)}(x)$ их надлежащими гладкими аппроксимациями. При этом, согласно разложениям (1.66а) и (1.66б), третий порядок схемы (1.65а) не нарушается. В силу этих же формул без потери третьего порядка можно вместо $\text{sgn} \lambda^{(k)}(x)$ использовать любые гладкие функции $s_k(x)$, удовлетворяющие условиям $\text{sgn} s_k(x) = \text{sgn} \lambda^{(k)}(x)$. В скалярном случае это соответствует применению вместо двухточечных разностей Δ_{\mp} некоторых трехточечных аппроксимаций первых производных вида $0,5(\Delta_0 - s \Delta_2)$ или $0,5(\Delta_0 - \Delta_2 s)$, $|s| \neq 1$. Использование этой дополнительной степени свободы требует специального исследования. На практике оказывается вполне применимым следующий прием: в узлах, где $|\lambda^{(k)}(x)| < \epsilon$ при заданном малом числе ϵ , полагается $\lambda^{(k)}(x) = 0$ и, таким образом, используются аппроксимации четвертого порядка. Конечно, в случае схемы (1.65а), (1.65б) это приводит к появлению внутренних источников схемного происхождения, однако при относительно небольшом числе таких узлов их роль с учетом высокого порядка их малости можно оценить как незначительную.

Можно отметить также, что аппроксимационные свойства операторов B_x и C_x установлены в предположении о достаточной гладкости решения u задачи для системы (1.58). В действительности же решения (1.58) при некоторых начальных и краевых условиях необязательно являются гладкими, допуская, в частности, существование разрывов. Если потеря глад-

кости происходит в окрестности точки смены знака собственных значений матрицы K , то оценки погрешности аппроксимации в окрестности этих точек могут оказаться неприменимыми. В этих случаях схемы (1.65а), (1.65б) и (1.65а), (1.65в) можно интерпретировать как разностные законы сохранения, справедливые и для разрывных решений. Более подробная информация об аппроксимационных свойствах описанных выше схем может быть получена с учетом конкретного вида системы (1.58) и свойств ее решений. С практической же точки зрения возникает альтернатива: либо использовать неконсервативную схему (1.65а), (1.65г), имеющую всюду на гладком решении локальный третий порядок относительно шага h , либо использовать схемы (1.65а), (1.65б) или (1.65а), (1.65в), утрачивающие в окрестности смены знака λ_k третий порядок, но во всех случаях аппроксимирующие законы сохранения. При проведении конкретных расчетов в основном принимался второй вариант.

О реализации алгоритма. Системы разностных трехточечных уравнений, возникающие при непосредственном применении схемы (1.65а), являются, вообще говоря, нелинейными. Попытка решать ее вряд ли целесообразна, по крайней мере, если число уравнений системы превосходит единицу. Поэтому естественно заменить исходную схему (1.65а) схемой с линеаризованным оператором, который для своего обращения требует решения линейной системы. Такая схема имеет вид

$$(B_x L + \tau \sigma C_x Q) (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) / \tau + C_x \mathbf{F}(\mathbf{u}^m) = \bar{\mathbf{g}}, \quad (1.70)$$

где матрицы $L = \partial f / \partial \mathbf{u}$ и $Q = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{u}$ вычислены по значениям сеточной функции \mathbf{u}^m . На гладких функциях она отличается от схемы (1.65) членами порядка $O(\tau^2)$. Действительно, схема (1.70) может быть представлена в следующей форме:

$$B_x L (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) / \tau + C_x (\sigma Q \mathbf{u}^{m+1} + \mathbf{F}^m - \sigma Q \mathbf{u}^m) = \bar{\mathbf{g}}, \\ \mathbf{F}^m = \mathbf{F}(\mathbf{u}^m).$$

Для сравнения ее с исходной схемой (1.65а) достаточно воспользоваться разложениями функций $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ и $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ в ряды Тэйлора в окрестности $\mathbf{u} = \mathbf{u}^m$, из которых следует, что

$$\mathbf{f}^{m+1} = \mathbf{f}^m + L(\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) + O(\delta^2), \quad \mathbf{F}^{m+1} = \mathbf{F}^m + Q(\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) + O(\delta^2),$$

где $\delta = \|\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m\|$. С использованием этих равенств схема (1.70) запишется в виде

$$B_x \frac{\mathbf{f}^{m+1} - \mathbf{f}^m}{\tau} + \frac{1}{\tau} O(\delta^2) + C_x [\sigma \mathbf{F}^{m+1} + (1 - \sigma) \mathbf{F}^m + O(\delta^2)] = \bar{\mathbf{g}}.$$

Ввиду того что $\delta = \|\tau \partial \mathbf{u} / \partial t\| + O(\tau^2)$, дискретизации производных по переменным t и x в схемах (1.65а) и (1.70) имеют отличия порядка $O(\tau)$ и $O(\tau^2)$ соответственно. Нетрудно показать, что при $\sigma = 0,5$ отличие схем (1.65а) и (1.70) можно сделать равным $O(\tau^2)$, если матрицу L вычислять по сеточной функции $\mathbf{u}^{m+1/2}$, определяемой, например, путем экстраполяции функций \mathbf{u}^m и \mathbf{u}^{m-1} .

Разностные уравнения относительно векторной сеточной функции \mathbf{u}^{m+1} , полученные из (1.70), во внутренних узлах области $[x_0, x_N]$ могут быть

записаны в виде

$$A_j \mathbf{u}_{j-1}^{m+1} + B_j \mathbf{u}_j^{m+1} + C_j \mathbf{u}_{j+1}^{m+1} = \mathbf{f}_j, \quad j = \overline{1, N-1},$$

где \mathbf{f}_j – известная правая часть, а A_j, B_j, C_j – следующие матрицы:

$$A_j = \left(\frac{1}{6} I - \frac{1}{4} M_{j-1} \right) L_{j-1} + \frac{r}{2} (I - M_{j-1/2}) Q_{j-1},$$

$$B_j = \frac{2}{3} L_j + \frac{r}{2} (M_{j-1/2} + M_{j+1/2}) Q_j,$$

$$C_j = \left(\frac{1}{6} I + \frac{1}{4} M_{j+1} \right) L_{j+1} - \frac{r}{2} (I + M_{j+1/2}) Q_{j+1}.$$

Здесь через I обозначена единичная матрица, а через r – отношение τ/h .

Выписанная система является блок-трехдиагональной с размерностью блоков $p \times p$. Для ее решения можно использовать метод матричной прогонки (см., например, [45]), формулы которого имеют вид

$$\mathbf{u}_j^{m+1} = \alpha_j \mathbf{u}_{j+1}^{m+1} + \mathbf{b}_j,$$

$$\alpha_j = (B_j - A_j \alpha_{j-1})^{-1} C_j,$$

$$\mathbf{b}_j = (B_j - A_j \alpha_{j-1})^{-1} (\mathbf{f}_j - A_j \mathbf{b}_{j-1}),$$

$$j = \overline{1, N-1}.$$

Для осуществления прямого и обратного ходов прогонки необходимы разностные граничные условия при $x = x_0$ и $x = x_N$. Ввиду неуниверсальности этих условий здесь и часто в дальнейшем они не рассматриваются, однако предполагается, что они сформулированы таким образом, чтобы разностные системы были хорошо обусловленными, а весь алгоритм – устойчивым. Вопросы хорошей обусловленности разностных уравнений будут рассмотрены ниже.

Простейшие оценки устойчивости матричной прогонки в рассматриваемом случае могут быть легко получены, если коэффициенты при производных в исходных уравнениях постоянны. Тогда матрицы $L_j = L$, $Q_j = Q$, $M_j = M$ постоянны, причем

$$M = (LS)D(LS)^{-1}, \quad L^{-1}Q = S\Lambda S^{-1}, \quad S = L^{-1/2} \tilde{S},$$

где $D = \text{diag}\{\text{sgn } \lambda_i\}$, $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\}$, λ_i – собственные значения матрицы $L^{-1}Q$ ($i = \overline{1, p}$), а \tilde{S} – матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы $L^{-1/2}QL^{-1/2}$. Используя эти соотношения, разностную систему удобно привести к следующему виду:

$$\tilde{S}A' \tilde{S}^{-1} \mathbf{u}_{j-1}^{m+1} - \tilde{S}B' \tilde{S}^{-1} \mathbf{u}_j^{m+1} + \tilde{S}C' \tilde{S}^{-1} \mathbf{u}_{j+1}^{m+1} = L^{-1/2} \mathbf{f}_j, \quad j = \overline{1, N-1},$$

где

$$A' = \text{diag} \left\{ \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \text{sgn } \lambda_i + \frac{r}{2} (\lambda_i - |\lambda_i|) \right\},$$

$$B' = -\text{diag} \left\{ \frac{2}{3} + r |\lambda_i| \right\},$$

$$C' = \text{diag} \left\{ \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \text{sgn} \lambda_i - \frac{r}{2} (\lambda_i + |\lambda_i|) \right\}, \quad r = \tau/h.$$

Теперь система уравнений относительно p -мерных векторов распадается на p независимых друг от друга систем с трехдиагональными матрицами для скалярных сеточных функций. Эти системы уже были предварительно рассмотрены; ниже будут обсуждены их хорошая обусловленность и, следовательно, устойчивость метода прогонки при их решении.

1.9. Исследование устойчивости

Свойства матрично-разностных операторов. Чтобы оценить устойчивость нелинейной схемы (1.65а) с любыми из операторов (1.66), будем использовать принцип замороженных коэффициентов. Предполагается, что $f(u, x) = Lu$, $F(u, x) = Qu$, $g = 0$, где Q и L — постоянные матрицы. Кроме того, для исключения влияния на устойчивость граничных условий, различных для различных задач, будем считать, что для (1.58) поставлена задача Коши в неограниченной области $t > 0$, $-\infty \leq x \leq \infty$ с начальными данными при $t = 0$, обращающимися в ноль вне некоторого интервала оси x .

Хотя абсолютная устойчивость схемы (1.65а) при $\sigma \geq 0,5$ при сделанных предположениях следует из абсолютной устойчивости схем для каждого уравнения (1.61), на которые распадается вся система, для дальнейшего удобно вывести некоторые операторные неравенства, характеризующие устойчивость (1.65а) в энергетических нормах. При этом оказывается возможным использовать аппарат исследования и результаты, содержащиеся в [46].

Итак, рассмотрим схему с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} B_x (u^{m+1} - u^m) / \tau + C_x K \bar{u} &= 0, \\ B_x &= A_0 - 0,25M\Delta_0, \quad C_x = 0,5 (\Delta_0 - M\Delta_2) / h. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Не ограничивая общность, будем предполагать, что матрица $K = L^{-1}Q$ — симметрическая, в противном случае ее всегда можно симметризовать (и притом не единственным образом) некоторым преобразованием. Фактически возможность приведения ее к диагональному виду $S^{-1}KS$ означает возможность ее симметризации.

Ввиду симметричности матрицы K матрица S является ортогональной ($S^T = S^{-1}$), так что матрицы M и K записываются в виде $M = SDS^T$, $K = SAS^T$.

Отсюда следующие свойства произведения MK :

$$MK = KM, \quad (MK)^T = MK \geq 0. \quad (1.72)$$

В самом деле, $MK = SDS^T$, $KM = S\Lambda DS^T$, где

$$D\Lambda = \Lambda D = \begin{pmatrix} \text{sgn} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \text{sgn} \lambda_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 \\ 0 & |\lambda_p| \end{pmatrix},$$

поэтому $(MKZ, Z) = (SD\Lambda S^T Z, Z) = (D\Lambda v, v) \geq 0$, где $v = S^T Z$, что и означает неотрицательность симметрической матрицы MK .

Установим теперь некоторые свойства неравенства, относящиеся к разностно-матричным операторам, входящим в приведенные выше схемы. Под скалярным произведением (\mathbf{u}, \mathbf{v}) двух векторных сеточных функций будем понимать сумму

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i h. \quad (1.73)$$

Пространство сеточных функций, обращающихся в нуль вне некоторого интервала со скалярным произведением (1.73), будем называть в дальнейшем пространством H .

Рассмотрим разностные операторы Δ_0 , Δ_2 , входящие в (1.70). Их свойства, важные для дальнейшего, следуют из результатов, изложенных в [46]. Напомним некоторые из них.

Операторы Δ_0 и Δ_2 являются соответственно кососимметричным и самосопряженным, т.е. для любых ненулевых \mathbf{u} и \mathbf{v}

$$(\Delta_0 \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -(\mathbf{u}, \Delta_0 \mathbf{v}), \quad (\Delta_2 \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \Delta_2 \mathbf{v}). \quad (1.74)$$

Имеют место следующие неравенства:

$$-(\Delta_2 \mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq 4(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 4 \|\mathbf{v}\|^2, \quad (1.75)$$

$$-4(\Delta_2 \mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq -(\Delta_0^2 \mathbf{v}, \mathbf{v}). \quad (1.76)$$

Они могут быть записаны в виде операторных неравенств

$$-\Delta_2 \leq 4E, \quad -4\Delta_2 > -\Delta_0^2. \quad (1.77)$$

Соотношения (1.74)–(1.77) можно вывести из определения скалярного произведения (1.73) при помощи простых алгебраических выкладок.

Рассмотрим, например, неравенство (1.76). Прежде всего заметим, что для операторов Δ_+ и Δ_- имеет место соотношение

$$(\Delta_+ \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -(\mathbf{u}, \Delta_- \mathbf{v}), \quad \text{т.е. } (\Delta_+)^* = -\Delta_-.$$

Запишем левую часть (1.76) в виде $-4(\Delta_- \Delta_+ \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 4(\Delta_+ \mathbf{v}, \Delta_+ \mathbf{v})$, а правую часть (1.76) в виде $-(\Delta_0 \Delta_0 \mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\Delta_0 \mathbf{v}, \Delta_0 \mathbf{v})$.

Таким образом, требуется показать, что

$$4 \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i|^2 \geq \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_{i-1}|^2,$$

но

$$\begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_{i-1}|^2 &\leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i|^2 + 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i| |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}| + \\ &+ \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}|^2 \leq 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i|^2 + 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}|^2 = \\ &= 4 \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i|^2, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Связь между операторами Δ_2 и Δ_0^2 можно установить в более информативном виде по сравнению со вторым неравенством (1.77). Для этого запишем очевидные равенства

$$\Delta_2 = \Delta_+ - \Delta_-, \quad \Delta_0 = \Delta_+ + \Delta_-.$$

Возведя обе части их в квадрат, а затем вычитая один результат из другого, получим равенство

$$\Delta_0^2 = 4\Delta_2 + \Delta_2^2. \quad (1.78)$$

Отсюда, между прочим, следует и второе неравенство (1.77).

Оператор A_0 можно выразить через оператор Δ_2 в виде

$$A_0 = E + \frac{1}{6} \Delta_2. \quad (1.79)$$

Таким образом, он является самосопряженным и в силу первого неравенства (1.77) положительно определенным:

$$A_0 \geq E - \frac{1}{6} \cdot 4E = \frac{1}{3} E. \quad (1.80)$$

Рассмотрим теперь разностно-матричные операторы. Очевидно, что для любого самосопряженного матричного оператора $N = N^*$ и разностного оператора δ произведение $N\delta$ будет самосопряженным или кососимметричным в смысле скалярного произведения (1.73), если оператор δ соответственно самосопряжен или кососимметричен. В самом деле, пусть δ — кососимметричен. Тогда, используя коммутативность постоянных матричных операторов с разностными, можно написать цепочку равенств

$$(N\delta u, v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} N\delta u_i, v_i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta u_i N v_i = - \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i, N\delta v_i = -(u, N\delta v).$$

Обозначая теперь индексами (0) и (1) соответственно самосопряженные и кососимметричные составляющие операторов, запишем следующие равенства:

$$\begin{aligned} B^{(0)} &= A_0, \quad B^{(1)} = -0,5M\Delta_0, \\ C^{(0)}K &= -MK\Delta_2/h, \quad C^{(1)} = -K\Delta_0/h. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Теперь можно показать, что для операторов, входящих в схему, справедливы следующие оценки:

$$B > E/3, \text{ т.е. } (Bv, v) \geq (v, v)/3, \quad (1.82a)$$

$$CK > 0, \text{ т.е. } (CKv, v) \geq 0, \quad (1.82б)$$

$$B^*CK > 0, \text{ т.е. } (B^*CKv, v) \geq 0, \quad (1.82в)$$

где v — произвольная ненулевая сеточная функция.

Для доказательства второго неравенства (первое непосредственно следует из (1.80)) заметим, что согласно (1.72) $(MK) = (MK)^T$, а оператор Δ_2 — самосопряженный и положительный. Третье неравенство следует из выражения для самосопряженной составляющей оператора B^*CK :

$$(B^*CK)^{(0)} = MK[-2\Delta_2 + 0,5(\Delta_0)^2 - \Delta_2^2/3]/4h,$$

в котором согласно равенству (1.78) $-2\Delta_2 = -0,5\Delta_0^2 + 0,5\Delta_2^2$. Таким образом,

$$(B^*CK)^{(0)} = MK\Delta_2^2/24h > 0.$$

Устойчивость в энергетических нормах. При исследовании устойчивости схемы (1.70) удобно воспользоваться энергетическими нормами, т.е. нормами, порожденными некоторыми самосопряженными положительными операторами D [46]:

$$\|v\|_D^2 = (Dv, v).$$

Общая теория устойчивости разностных схем в энергетических нормах подробно изложена в [46]. Здесь и далее мы будем понимать под устойчивостью схемы

$$C(u^{m+1} - u^m)/\tau + \mathcal{A}u^m = 0 \quad (1.83)$$

в энергетической норме $\|\cdot\|_D$ выполнение неравенства

$$(Du^{m+1}, u^{m+1}) \leq (Du^m, u^m), \text{ или } \|u^{m+1}\|_D \leq \|u^m\|_D,$$

которое означает, что энергия оператора D не возрастает на решении (1.83).

Из многочисленных результатов, полученных в [46], для семейства схем (1.83) в дальнейшем будут использованы следующие два условия устойчивости.

1. Если операторы C и \mathcal{A} не зависят от m и оператор \mathcal{A} – положительный самосопряженный, то для устойчивости схемы (1.83) в норме $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ необходимо и достаточно выполнение неравенства $C \geq 0,5\tau\mathcal{A}$.

2. Если схему (1.83) можно представить в виде

$$(E + \tau\theta\mathcal{A})(u^{m+1} - u^m)/\tau + \mathcal{A}u^m = 0, \quad (1.84)$$

где оператор \mathcal{A} – неотрицательный, то для ее устойчивости в норме $\|\cdot\|_D$, где D – любой самосопряженный положительный оператор, перестановочный с \mathcal{A} , необходимо и достаточно выполнение неравенства $\sigma \geq 0,5$.

При оценках устойчивости в соответствии с [46] схема (1.84) в дальнейшем будет называться схемой с весами, хотя схема (1.70) также является схемой с весами, приводимой к виду (1.84) умножением на оператор B_x^{-1} .

Норма $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ может оказаться полезной при оценке устойчивости в случае стационарных задач, решаемых методом установления. Например, малость нормы $\|u^m\|_{\mathcal{A}}$ означает малость среднеквадратичной невязки для приближенного решения уравнения $\mathcal{A}u = 0$ $\|u^m\|_{\mathcal{A}} = \sqrt{(\mathcal{A}u^m, \mathcal{A}u^m)}$. Если же операторы C и \mathcal{A} в (1.83) коммутативны, то устойчивость этой схемы при сделанных предположениях в случае $C \geq 0,5\tau\mathcal{A}$ будет иметь место и в норме $\|\cdot\|_D$, где D – любой положительный самосопряженный оператор, коммутативный с \mathcal{A} [46]; в частности, можно положить $D = E$, так что $\|\cdot\|_D = \|\cdot\|_H$.

При оценке устойчивости схемы (1.70) можно воспользоваться любым из сформулированных выше критериев. Действительно, эта схема имеет вид

$$(B + \sigma\tau\mathcal{A})(u^{m+1} - u^m)/\tau + \mathcal{A}u^m = 0,$$

где $B = B_x$, $\mathcal{A} = C_x K$. После умножения на \mathcal{A}^* она переходит в схему

$$(\mathcal{A}^*B + \sigma\tau\mathcal{A}^*\mathcal{A})(u^{m+1} - u^m)/\tau + \mathcal{A}^*\mathcal{A}u^m = 0. \quad (1.85)$$

В (1.85) оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ – самостоятельный и положительный, а опера-

тор \mathcal{A}^*B – положительный, поскольку $((C_x K)^*Bu, u) = (u, B^*C_x Ku) \geq 0$ в силу неравенства (1.82в). Таким образом, для устойчивости схемы (1.85) в норме $\|\cdot\|_{\mathcal{A}^* \mathcal{A}}$ необходимо и достаточно выполнение неравенства $\mathcal{A}^*B + \sigma \tau \mathcal{A}^* \mathcal{A} \geq 0,5 \tau \mathcal{A}^* \mathcal{A}$.

При $\sigma \geq 0,5$ это неравенство справедливо при любом значении τ и схема (1.85) является абсолютно устойчивой в рассматриваемой норме. Более того, операторы \mathcal{A}^*B и $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$ коммутативны в силу коммутативности постоянных матриц M и K , входящих в эти операторы, так что абсолютная устойчивость (1.85) имеет место и в норме $\|\cdot\|_H$.

В дальнейшем для оценок устойчивости схем удобно записывать их в виде схем с весами типа (1.84), используя оператор $N = B_x^{-1}C_x$. В частности, схема (1.70) после умножения на B_x^{-1} приобретает вид

$$(E + \sigma \tau NK)(u^{m+1} - u^m)/\tau + NKu^m = 0. \quad (1.86)$$

Оператор NK – положительный, поскольку вследствие коммутативности матриц M и K справедливо равенство

$$(B_x^{-1}C_x Ku, u) = (B_x^* C_x Kv, v),$$

где $v = (B_x^*)^{-1}u$; правая часть его положительна при $v \neq 0$ в силу неравенства (1.82в).

Из положительности оператора NK следует абсолютная устойчивость схемы (1.86) при $\sigma \geq 0,5$.

2. КОМПАКТНЫЕ СХЕМЫ С НАПРАВЛЕННЫМИ РАЗНОСТЯМИ ПРИ НАЛИЧИИ ДИФFUЗИОННЫХ ЧЛЕНОВ

2.1. Способы введения разностных аналогов диффузии

Об аппроксимации диффузных членов. При конструировании разностных алгоритмов для уравнений переноса с диффузионными членами в большинстве случаев, представляющих интерес, первостепенную роль играют способы аппроксимаций конвективных членов; именно они определяют архитектуру всего метода в целом. Это связано со следующими обстоятельствами. Во-первых, диффузионные члены чаще всего пренебрежимо малы во всей расчетной области, за исключением ее подобластей с малыми характерными размерами. Поэтому структуру решений в значительной мере определяет конвекция и, следовательно, ее разностная аппроксимация. Во-вторых, диффузионные члены содержат в себе самосопряженные операторы, надлежащие разностные аналоги которых не ухудшают устойчивость алгоритма и часто улучшают свойства разностных решений. Вместе с тем в случае неявной схемы повышенного порядка аппроксимации наличие диффузии в математической модели может несколько усложнить реализацию численного алгоритма. Именно так обстоит дело при использовании для аппроксимации первых производных формул компактного численного дифференцирования.

Чтобы проиллюстрировать сказанное, рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u, x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \epsilon(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} + f(u, x), \quad \epsilon > 0. \quad (2.1)$$

Следуя идее построения компактных схем для уравнения переноса, запишем его простейший разностный аналог на сетке $\omega_\tau \times \omega_h$ в виде

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle^{m+1} + \frac{A^{-1}\Delta}{h} \varphi^{m+1} = \delta_2 u^{m+1} + f^{m+1}, \quad (2.2)$$

где в операторах A и Δ $s = \text{sgn} \varphi'_u(u^m)$, а $\delta_2 u^{m+1}$ — некоторая аппроксимация члена $\frac{\partial}{\partial x}(\epsilon(u, x) \partial u / \partial x)$ при $t = t_{m+1}$. После умножения (2.2) на A становится ясным, что разностные уравнения будут трехточечными только в том случае, если оператор $A\delta_2$ является трехточечным. Но трехточечность оператора $A\delta_2$ и одновременно высокий порядок аппроксимации оператора δ_2 , вообще говоря, несовместимы из-за малого количества свободных коэффициентов при значениях функций в трех узлах, которыми можно распоряжаться при построении оператора δ_2 . Невозможность сведения разностных уравнений к трехточечным скалярным уравнениям и означает некоторое усложнение процесса реализации алгоритма.

С другой стороны, если оператор δ_2 является самосопряженным и отрицательным, то схема (2.2) в случае постоянных коэффициентов является абсолютно устойчивой при условии, что этим свойством обладает ее частный случай при $\epsilon = 0$. В самом деле, собственные значения A оператора перехода для (2.2) при $\varphi(u) = au$, $a = \text{const}$, будут удовлетворять уравнению типа

$$R(\lambda) + \lambda [a(\tau/h)W(\alpha) + \epsilon(\tau/h^2)\psi(\alpha)] = 0, \quad (2.3)$$

где $W(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) — собственные значения операторов $A^{-1}\Delta$ (см. (1.12)) и δ_2 , удовлетворяющие условиям $\text{Re } W \geq 0$, $\text{Re } \psi > 0$, $\text{Im } \psi \equiv 0$, а $R(\lambda)$ — некоторая функция, определяемая видом аппроксимации $\langle \partial u / \partial t \rangle^{m+1}$. Уравнение (2.3) можно переписать в виде

$$R(\lambda) + \lambda a(\tau/h)W_1(\alpha) = 0,$$

где $W_1(\alpha) = W(\alpha) + (\epsilon/ah)\psi(\alpha)$. Поскольку при получении оценки $|\lambda| \leq 1$ при $\epsilon = 0$, по существу, достаточно использовать лишь свойство $\text{Re } W \geq 0$ функции $W(\alpha)$, а функция $W_1(\alpha)$ обладает этим же свойством, становится очевидным, что из устойчивости (2.2) при $\epsilon = 0$ в рассматриваемом случае постоянных коэффициентов следует ее устойчивость при $\epsilon > 0$.

Таким образом, можно построить много вариантов абсолютно устойчивых в приближении замороженных коэффициентов схем для уравнения (2.1), в которых разностные аналоги производных $\partial \varphi / \partial x$ имеют вид $A^{-1}\Delta \varphi / h$. При этом основными факторами, между которыми должен достигаться компромисс, являются порядок аппроксимации диффузионных членов и простота решения разностных уравнений. Условно будем классифицировать эти схемы с точки зрения второго фактора, т.е. по тому, как осуществляется переход от одного слоя $t = \text{const}$ к другому. При этом можно выделить схемы, реализуемые скалярными и векторными трехточечными прогонами, а также схемы с факторизованными операторами, основанные на расщеплении по физическим признакам.

Алгоритмы с трехточечными скалярными прогонами. Чтобы оператор $A\delta_2$ стал трехточечным, достаточно выбрать δ_2 в виде $\delta_2 = A^{-1}\Lambda_2$, где $\Lambda_2 f =$

аппроксимация на трехточечном шаблоне производной $\partial/\partial x(\epsilon \partial f/\partial x)$; например, можно положить

$$\Lambda_2 f \approx \frac{\partial}{\partial x} \epsilon \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_j} = \frac{\epsilon_{j+1/2}(f_{j+1} - f_j) - \epsilon_{j-1/2}(f_j - f_{j-1})}{h^2} + O(h^2), \quad (2.4)$$

где значения в полуцелых узлах $x = x_{j \pm 1/2}$ либо вычисляются по известным значениям в них аргументов функции ϵ , либо получаются осреднением вида $\epsilon_{j \pm 1/2} = 0,5(\epsilon_{j \pm 1} + \epsilon_j)$. Тогда схему для уравнения (2.1) можно записать в виде

$$A \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle^{m+1} + \frac{\Delta}{h} \varphi(u^{m+1}) - \Lambda_2 u^{m+1} = A f^{m+1}. \quad (2.5)$$

После линеаризации функции $\varphi(u^{m+1})$ решение разностной системы (2.5) можно осуществить методом трехточечной скалярной прогонки.

Устойчивость схемы (2.5) легко исследуется после конкретизации разностной формулы для $\langle \partial u / \partial t \rangle^{m+1}$. Так, в случае двухслойной аппроксимации производной $\partial u / \partial t$ линейный аналог (2.5) записывается в виде

$$\left[A + \tau \left(a \frac{\Delta}{h} - \epsilon \frac{\Delta_2}{h^2} \right) \right] \frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} + \left(a \frac{\Delta}{h} - \epsilon \frac{\Delta_2}{h^2} \right) u^m = 0, \quad (2.6)$$

где $a = \text{const}$, $\epsilon \doteq \text{const}$, а оператор Δ_2 является оператором вторых разностей.

Оператор $A^{-1}a\Delta/h$ является частным случаем оператора $B_x^{-1}C_x$ из (1.65) и поэтому неотрицателен. Поскольку оператор Δ_2 отрицателен, самосопряжен и коммутативен с A , то оператор $-A^{-1}\Delta_2$ положителен. Это следует из цепочки равенств для производной сеточной функции u :

$$(A^{-1}\Lambda u, u) = (A^{-1}\Lambda^{1/2}u, \Lambda^{1/2}u) = (v, Av) > 0,$$

где $\Lambda = -\Lambda_2$, $v = A^{-1}\Lambda^{1/2}u$. Таким образом, оператор $A^{-1}[(a/h)\Delta - (\epsilon/h^2)\Delta_2]$ положительный и схема (2.6), приводящаяся после умножения на A к частному случаю схемы с весами, является абсолютно устойчивой. Этот же результат элементарно получается спектральным методом.

Чтобы установить порядок аппроксимации схемы (2.6), подставим в нее соответствующие ряды Тэйлора (с технической точки зрения удобно воспользоваться операторными записями (1.10)). При этом часть погрешности аппроксимации, не зависящая от функции ϵ , запишется в виде $O(\tau^k + h^3)$, где k — порядок аппроксимации производной $\partial u / \partial t$. Остальная часть будет иметь вид

$$O(h) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \epsilon \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.7)$$

Таким образом, формально схема (2.6) имеет первый порядок. Однако она существенно отличается от схем первого порядка с двухточечными направленными разностями. Различие состоит в том, что погрешность $O(h)$ возникает при аппроксимации не конвективных, а диффузионных членов. Поэтому она при малых значениях ϵ мала всюду, за исключением областей с малыми характерными размерами (типа пограничных слоев или ударных волн). Это означает, что в этом случае почти всюду

локальная погрешность, зависящая от шага h , имеет вид $O(h^3 + \|\epsilon\|h)$, $\|\epsilon\| = \max_{x, u} \epsilon(u, x)$, что может быть не хуже, чем $O(h^3)$.

Внутри же областей с малыми характерными размерами локальная погрешность порядка $O(h)$ в некоторых случаях может оказаться вполне приемлемой. В частности, такая ситуация имеет место, если в той или иной физической задаче функциональная зависимость $\epsilon(u, x)$ сама задается лишь приближенно; примером может служить случай, когда ϵ является коэффициентом турбулентной вязкости.

Изложенные соображения имеют лишь качественный характер; целесообразность применения схемы (2.6) может быть выяснена с учетом специфики конкретной задачи.

Алгоритмы с трехточечными векторными прогонками. Чтобы сохранить высокий порядок аппроксимации уравнения (2.1), можно поступить следующим образом. Запишем его в виде системы двух уравнений первого порядка, введя новую независимую переменную $q = du/dx$:

$$\begin{aligned} du/dt + \partial(\varphi - \epsilon q)/\partial x &= f, \\ du/dx - q &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Первое уравнение будем аппроксимировать на сетке $\omega_\tau \times \omega_h$ при помощи операторов A и Δ , выбранных так же, как и при $\epsilon = 0$, т.е. полагая в формулах (1.14) $s = \text{sgn} \varphi'(u^m)$. Для аппроксимации второго уравнения (2.8) применим формулы компактного численного дифференцирования третьего порядка, но с противоположной ориентацией операторов (т.е. операторов из (1.14) при $s = -\text{sgn} \varphi'(u^m)$).

В результате такой дискретизации пространственных производных, рассматриваемых, например, на слое $t_m = t_{m+1}$, разностная схема для (2.8) запишется в виде

$$\begin{aligned} A \langle \partial u / \partial t \rangle^{m+1} + \Delta(\varphi - \epsilon q)^{m+1} / h &= A f^{m+1}, \\ \tilde{A} q^{m+1} &= \tilde{\Delta} u^{m+1} / h, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\tilde{A}q = A^*q = A_0 + 0,25 \text{sgn} \varphi'(u^m) \Delta_0$, $\tilde{\Delta}u = 0,5(\Delta_0 + \text{sgn} \varphi'(u^m) \Delta_2)$. Вместо (2.9) можно было бы рассмотреть более общую схему, в которой оператор Δ действует на сеточную функцию $\sum_{j=0}^k \sigma_j (\varphi - \epsilon q)^{m+1-j}$, где

$\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$ – весовые множители, удовлетворяющие равенству $\sigma_0 + \sigma_1 + \dots + \sigma_{k-1} = 1$.

Для случая $\varphi(u, x) = au$, $a = \text{const}$, $\epsilon = \text{const}$ и $\langle \partial u / \partial t \rangle_n^{m+1} = (u_n^{m+1} - u_n^m) / \tau$ абсолютная устойчивость схемы (2.9) легко доказывается спектральным методом [3]. В самом деле, собственное значение λ оператора перехода в этом случае находится из уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 + \lambda(a\tau/h)W & -\lambda(\epsilon\tau/h)W \\ \tilde{W}/h & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь через W и \tilde{W} обозначены функции из (1.10), удовлетворяющие соответственно неравенствам

$$a \text{Re} W > 0 \text{ и } a \text{Re} \tilde{W} < 0.$$

Раскрывая определитель, получаем

$$\lambda = \left[1 + \left(\frac{a\tau}{h} \right) W - \left(\frac{\epsilon\tau}{h^2} \right) W\tilde{W} \right]^{-1},$$

откуда, поскольку $\text{Im } W = \text{Im } \tilde{W}$, следует неравенство $|\lambda| \leq 1$.

Разностную схему (2.9) можно рассматривать как систему уравнений относительно векторной сеточной функции $V_j^{m+1} = (u_j^{m+1}, q_j^{m+1})$; при этом соотношения (2.9) связывают лишь три соседних узла на оси x . После линеаризации этой системы ее решение легко находится в результате векторной прогонки.

Используя разложения (1.10), нетрудно убедиться в том, что схема (2.9) имеет погрешность $O(\tau^k + h^3)$ на решении уравнения (2.1), если производная $\partial u/\partial t$ аппроксимирована с погрешностью $O(\tau^k)$.

В случае постоянной функции ϵ существует и другая простая возможность сохранения высокого порядка схемы в результате сведения уравнения (2.1) к системе двух уравнений. Обозначив через r производную $\partial^2 u/\partial x^2$, запишем вместо (2.8) систему

$$\partial u/\partial t + \partial \varphi/\partial x = \epsilon r, \quad \partial^2 u/\partial x^2 = r. \quad (2.10)$$

Как и ранее, используем для аппроксимации первого уравнения (2.10) операторы A и Δ при $s = \text{sgn } \varphi'(u^m)$. Для аппроксимации второго уравнения (2.10) применим известную формулу компактного численного дифференцирования для второй производной

$$\partial^2 f/\partial x^2 = \mathcal{A}^{-1} \Delta_2 f/h^2 + O(h^4),$$

$$\mathcal{A} = E + \frac{1}{12} \Delta_2, \quad (2.11)$$

которую иногда связывают с аппроксимациями Падэ. Четвертый порядок этой формулы немедленно следует из разложений для операторов \mathcal{A} и Δ_2 :

$$\mathcal{A} f = \left(E + \frac{h^2}{12} D_x^2 \right) f + O(h^4),$$

$$h^{-2} \Delta_2 f = \left(E + \frac{h^2}{12} D_x^2 \right) D_x^2 f + O(h^4),$$

справедливых для достаточно гладкой функции f .

На основе такого способа дискретизации производных по x можно строить различные семейства разностных схем. Ограничиваясь, как и ранее, случаем, когда эти производные рассматриваются на слое $t = t_{m+1}$, можно записать следующую разностную схему для системы (2.10):

$$\begin{aligned} A \langle \partial u/\partial t \rangle^{m+1} + (\Delta/h) \varphi^{m+1} &= A \epsilon r^{m+1}, \\ \mathcal{A} r^{m+1} &= \Delta_2 u^{m+1}/h^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

По построению, эта схема имеет погрешность $O(\tau^k + h^3 + \epsilon h^4)$. Как и схема (2.9), она может быть реализована векторной прогонкой, используемой для решения трехточечной системы векторных уравнений относительно сеточной функции $V_j^{m+1} = (u_j^{m+1}, r_j^{m+1})$.

Как и в случае схемы (2.9), абсолютная устойчивость (2.12) при $\varphi(u) = au$, $a = \text{const}$, легко проверяется спектральным методом; например, при $\langle \partial u / \partial t \rangle^{m+1} = (u^{m+1} - u^m) / \tau$ собственные значения λ оператора перехода представляются выражением

$$\lambda = \left[1 + \left(\frac{a\tau}{h} \right) W(\alpha) + \left(\frac{\epsilon\tau}{h^2} \right) f(\alpha) \right]^{-1}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi,$$

$$\text{где } f(\alpha) = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)^{-1}.$$

Функция $\lambda(\alpha)$ удовлетворяет неравенству $|\lambda| \leq 1$, поскольку ее можно представить в виде $\lambda = 1/(c + di)$, $c \geq 0$.

При решении разностных уравнений (2.9) и (2.12) использование трехточечных векторных прогонок с матрицами размерности 2×2 не приводит к каким-либо жестким требованиям к производительности ЭВМ. Вместе с тем ценой понижения порядка аппроксимации этих схем относительно шага τ удаётся оставаться в рамках трехточечных скалярных прогонок. В более общем виде этот вопрос будет рассмотрен ниже.

Алгоритмы расщепления. Одна из возможностей сохранить скалярные прогонок и в то же время аппроксимировать диффузионные члены с желаемым порядком точности состоит в приближенной факторизации суммы операторов, включающей в себя разностные аналоги конвекции и диффузии. Полагая $\langle \partial u / \partial t \rangle^{m+1} = (u^{m+1} - u^m) / \tau$, один из вариантов схемы, аппроксимирующей (2.1) с точностью до членов порядка $O((\sigma - 0,5)\tau + \tau^2)$, можно записать в форме

$$\left[E + \sigma \tau A^{-1} \frac{\Delta}{h} \varphi'(u^m) \right] [E - \sigma \tau \delta_2] \frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} + Lu^m = \bar{f}, \quad (2.13a)$$

$$Lu^m = \frac{A^{-1} \Delta}{h} \varphi^m - \delta_2 u^m, \quad \bar{f} = \sigma f^{m+1} + (1 - \sigma) f^m.$$

Схема (2.13a) обладает полной аппроксимацией в смысле [41]: часть ее погрешности, зависящая от шага τ , исчезает на установившемся решении ($u^{m+1} = u^m$). Она может быть использована, в частности, для получения стационарного решения уравнения (2.1).

Схему (2.13a) удобно использовать, введя дробные шаги:

$$\left[E + \sigma \tau A^{-1} \frac{\Delta}{h} \varphi'(u^m) \right] \xi^{1/2} + \tau Lu^m = \tau \bar{f}, \quad (2.13b)$$

$$[E - \sigma \tau \delta_2] \xi^1 = \xi^{1/2},$$

где $\xi^{1/2}$ — некоторая промежуточная сеточная функция, а $\xi^1 = u^{m+1} - u^m$.

Схему (2.13a) можно интерпретировать как алгоритм расщепления по физическим признакам: в первом уравнении (2.13b) учитывается только конвекция, во втором — только диффузия. Соответственно обрабатываемый оператор в первом уравнении после умножения его на A совпадает с оператором, обрабатываемым при решении разностных уравнений для уравнения переноса (1.8). Второе уравнение (2.13b) аналогично разностному уравнению теплопроводности, причем имеется возможность выбора обрабатываемого оператора $E - \sigma \tau \delta_2$. Определяя скалярными про-

гонками из первого уравнения (2.13а) функцию $\xi^{1/2}$, а затем решая второе уравнение (2.13б) относительно ξ^1 , можно окончательно найти функцию u^{m+1} . Схема (2.13а) и эквивалентная схема (2.13б) являются лишь одним из вариантов многочисленных схем расщепления [41, 47], пригодных для аппроксимации уравнения (2.1).

В качестве оператора δ_2 можно выбрать оператор Λ_2 , определяемый равенством (2.4). Тогда погрешность схемы (2.13а), зависящая от шага h , имеет вид $O(h^3 + \|\epsilon\|h^2)$, а оператор $(E - \tau\delta_2)$ обращается при помощи трехточечных скалярных прогонок. Другим примером, когда решение второго уравнения (2.13б) сводится к применению трехточечных прогонок, является использование при $\epsilon = \text{const}$ в качестве δ_2 аппроксимации четвертого порядка вида $\mathcal{A}^{-1}\Delta_2/h^2$ из (2.11). После умножения этого уравнения на \mathcal{A} получается система с трехдиагональной матрицей

$$(\mathcal{A} - \sigma\tau\Delta_2)\xi^1 = \mathcal{A}\xi^{1/2}.$$

Такая схема, очевидно, имеет порядок $O(h^3 + \epsilon h^4)$ и является альтернативной схеме (2.12) с векторными прогонками.

Устойчивость схем расщепления при $\varphi(u) = au$, $\epsilon = \text{const}$ для неотрицательных и коммутативных операторов $A^{-1}\Delta$ и δ_2 непосредственно следует из общей теории [46]; она легко может быть установлена спектральным методом.

2.2. Разностные уравнения

Хорошая обусловленность разностных систем. Изучим подробнее свойства разностных уравнений, возникающих при аппроксимации уравнения переноса с диффузионными членами. При этом рассмотренные в п. 1 разностные системы удобно интерпретировать как частный случай, соответствующий тождественному обращению в нуль функции $\epsilon(u, x)$.

По существу, достаточно исследовать трехточечные разностные уравнения в алгоритмах со скалярными и векторными прогонками: в алгоритмах расщепления на одном из этапов обращается тот же оператор, что и в случае уравнения переноса без диффузионных членов.

Разностные уравнения в алгоритме со скалярными прогонками возникают при обращении оператора

$$A + \frac{\tau\Delta}{h} \varphi'(u^m) - \Lambda_2, \quad (2.14)$$

где оператор Λ_2 определен формулой (2.4).

Оператор (2.14) соответствует уравнению (2.5), в котором положено $\langle \partial u / \partial t \rangle^{m+1} = (u^{m+1} - u^m) / \tau$ и произведена линейризация функции $\varphi(u^{m+1})$ относительно слоя $t = t_m$. При $\epsilon \equiv 0$ этот оператор приводит к рассмотренной выше системе уравнений для чисто конвективного случая.

В индексной записи разностные уравнения, порождаемые оператором (2.14) при $\varphi'(u_j^m) \geq 0$, имеют вид

$$\begin{aligned} & \left(r_{j-1} - \frac{5}{12} + \frac{\tau}{h^2} \epsilon_{j-1/2} \right) u_{j-1} - \left[\frac{8}{12} + r_j + \frac{\tau}{h^2} (\epsilon_{j-1/2} + \epsilon_{j+1/2}) \right] u_j + \\ & + \left(\frac{1}{12} + \frac{\tau}{h^2} \epsilon_{j+1/2} \right) u_{j+1} = d_j, \quad j = \overline{1, N-1}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где положено $r_j = \frac{\tau}{h} \varphi'(u_j^m)$, через d_j обозначена некоторая известная сеточная функция, а $N - 1$ — число внутренних узлов сетки ω_h . Если же $r_j < 0$, то разностные уравнения запишутся в виде

$$\left(\frac{1}{12} + \frac{\epsilon_{j-1/2}\tau}{h^2} \right) u_{j-1} - \left[\frac{8}{12} + |r_j| + (\epsilon_{j-1/2} + \epsilon_{j+1/2}) \frac{\tau}{h^2} \right] u_j + \left(|r_{j+1}| - \frac{5}{12} + \epsilon_{j+1/2} \frac{\tau}{h^2} \right) u_{j+1} = d_j, \quad j = \overline{1, N-1}. \quad (2.16)$$

Как следует из сравнения (2.15) и (2.16), структура этих уравнений остается неизменной: одно из них может быть получено из другого заменой r_j на $-r_j$ и изменением направления нумерации узлов сетки, при котором u_{j-1} переходит в u_{j+1} и наоборот. Каждое из них можно представить в форме

$$a_j u_{j-1} - 2b_j u_j + c_j u_{j+1} = d_j, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (2.17)$$

где

$$2b_j = \frac{8}{12} + |r_j| + (\epsilon_{j-1/2} + \epsilon_{j+1/2}) \frac{\tau}{h^2},$$

$$a_j = |r_{j-1}| - \frac{5}{12} + \frac{\tau}{h^2} \epsilon_{j-1/2}, \quad c_j = \frac{1}{12} + \frac{\tau}{h^2} \epsilon_{j+1/2},$$

причем в случае $\varphi'(u_j^m) \geq 0$ номера узлов возрастают с возрастанием координаты x , а в случае $\varphi'(u_j^m) < 0$ убывают.

В алгоритме с векторными прогонками разностная система имеет блоч-трехдиагональную матрицу. В индексной форме эта система записывается в виде

$$A_j \mathbf{v}_{j-1} - B_j \mathbf{v}_j + C_j \mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{d}_j, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (2.18)$$

где \mathbf{v}_j — вектор с компонентами (u_j^{m+1}, q_j^{m+1}) , \mathbf{d}_j — двухкомпонентный вектор правых частей, а A_j, B_j и C_j — следующие матрицы:

$$A_j = \left\| \begin{array}{cc} |r_{j-1}| - \frac{5}{12} & -\frac{\epsilon_{j-1}\tau}{h} \\ 0 & -\frac{1}{12} \end{array} \right\|, \quad B_j = - \left\| \begin{array}{cc} \frac{8}{12} + |r_j| & \frac{\epsilon_j \tau}{h} \\ -\frac{1}{h} & -\frac{8}{12} \end{array} \right\|,$$

$$C_j = \left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{12} & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{5}{12} \end{array} \right\|.$$

Предполагается, что при $r_j \geq 0$ в (2.18) используется прямая нумерация узлов (т.е. в направлении возрастания координаты x), а при $r_j < 0$ — обратная.

Для исследования систем (2.17) и (2.18) целесообразно воспользоваться результатами работы [48]. Изложим кратко эти результаты, перефразируя их применительно к рассматриваемому случаю.

Пусть требуется решить разностную краевую задачу

$$\begin{aligned} \sum_{k=-1}^1 A_{k,n} u_{n+k} &= f_n, \quad 1 \leq n \leq N-1, \\ \sum_{i=0}^2 \alpha_i u_i &= g_1, \quad \sum_{i=0}^2 \beta_i u_{N-i} = g_2, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $A_{k,n}$ — квадратные матрицы $p \times p$; u_n и f_n — p -компонентные векторы; α_i и β_i — матрицы, имеющие по p столбцов и соответственно по r и s строк; g_1 и g_2 — соответственно r -мерный и s -мерный векторы ($s+r=p$). Относительно компонент матриц $A_{k,n}(n, h)$ предполагается, что они непрерывно зависят от аргумента (nh) всюду внутри рассматриваемого интервала, за исключением конечного числа точек, где они могут претерпевать разрывы первого рода (скачки). В случае систем (2.17) и (2.18) скачки соответствуют переключению схемы при изменении знака функции u_n . Вводятся в рассмотрение определители

$$\det \sum_{k=-1}^1 A_{k,n} \mu^{1+k} = 0, \quad \det \sum_{k=-1}^1 A_{k,n} \nu^{1-k} = 0. \quad (2.20)$$

Если среди корней (2.20) есть r корней μ и s корней ν меньших по модулю единицы, но нет равных по модулю единице, то уравнения при $1 \leq n < N-1$ называются регулярными; если скачки в коэффициентах не меняют этой ситуации, то они также считаются регулярными. Требуется, кроме того, чтобы граничные условия с нулевой правой частью имели бы только тривиальные решения. При этих условиях задача (2.19) с регулярными уравнениями и регулярными скачками, согласно [48], является хорошо обусловленной. Это означает, что

$$\max_n \|u_n\| \leq M (\max_n \|f_n\| + \|g_1\| + \|g_2\|), \quad M = \text{const},$$

где под нормой вектора понимается максимум модулей его компонент. Для хорошо обусловленных задач (2.19) может быть доказана устойчивость прогонки (см., например, [49]).

В случае системы (2.17) каждое из характеристических уравнений имеет вид

$$c_j \mu^2 - 2b_j \mu + a_j = 0, \quad c_j - 2b_j \nu + a_j \nu^2 = 0, \quad (2.21)$$

где коэффициенты определены (2.17). При малых h

$$r_{j-1} = (\tau/h) \varphi'(u_{j-1}) \approx r_j, \quad \epsilon_{j-1/2} \approx \epsilon_{j+1/2} \approx \epsilon_j$$

и эти коэффициенты удовлетворяют неравенствам

$$c_j > 0, \quad 2b_j > c_j + |a_j|, \quad j = \overline{1, N}. \quad (2.22)$$

В результате простейших алгебраических выкладок нетрудно показать, что корни уравнения (2.21) $\mu_{1,2}$ и $\nu_{1,2} = \mu_{1,2}^{-1}$ таковы, что $-1 < \mu_1 < 1 < \mu_2$, $-1 < \nu_2 < 1 < \nu_1$.

Таким образом, для системы уравнений (2.17) $s=r=1$ и при надлежащих граничных условиях на концах интервала $[x_0, x_N]$ (они здесь не кон-

критерируются ввиду их зависимости от типа задачи) эта система является хорошо обусловленной. Если изменение знака производной $\varphi'(u^m)$ происходит в конечном числе точек интервала $[x_0, x_N]$, то переключение схемы, приводящее к скачку в коэффициентах, не меняет свойства регулярности системы.

Можно выделить отдельно ситуацию, когда

$$a_j = |r_{j-1}| + \frac{\tau}{h^2} \epsilon_{j-1/2} - \frac{5}{12} > 0, \quad (2.23)$$

$$j = \overline{1, N},$$

В этом случае оба корня уравнений (2.21) положительны и в решении разностной системы отсутствует осциллирующая составляющая. В сочетании же с неравенствами (2.22) неравенство (2.23) образует хорошо известное достаточное условие устойчивости прогонки.

Практически неравенство (2.23) во всей расчетной области может быть выполнено при любых значениях $\tau \epsilon_j/h$, если удастся выбрать шаг τ таким образом, что

$$\tau \min_j |\varphi'(u_j^m)|/h > 5/12,$$

но при этом максимальное число Куранта $\tau \max_j |\varphi'(u_j^m)|/h$ не настолько велико, чтобы вызвать нелинейную неустойчивость.

Выполнение неравенства (2.23) облегчается из-за наличия в его левой части положительного слагаемого $\epsilon_j \tau/h^2$; более того, если $\epsilon_j \tau/h^2 > 5/12$, то оно выполняется при любых значениях r_j . Однако при малых значениях ϵ_j и числа Куранта порядка единицы рассчитывать на существенный вклад этого слагаемого при всех j не всегда оправдано, вследствие того что малые шаги h , как правило, вводятся лишь в части расчетной области, где роль диффузионных членов велика.

Однако, во всяком случае, можно рассчитывать на благоприятное воздействие разностных аналогов диффузии на свойство монотонности получаемых решений.

Рассмотрим теперь систему трехточечных уравнений (2.18). Характеристические уравнения для них имеют вид

$$\det(A_n + B_n \mu + C_n \mu^2) = 0, \quad \det(A_n \nu^2 + B_n \nu + C_n) = 0, \quad (2.24)$$

где положено $r_{j-1} = r_{j+1} = r_j = r$, $\epsilon_{j-1/2} = \epsilon_{j+1/2} = \epsilon_j = \epsilon$.

Поскольку для корней μ_k и ν_k ($k = 1, 2, 3, 4$) справедливо соотношение $\mu_k = 1/\nu_k$, достаточно рассмотреть одно из них. После несложных выкладок уравнение $\det(A_n + B_n \mu + C_n \mu^2) = 0$ записывается в виде

$$\Phi(\mu) = 5\mu^4 - (32 + 5R - e)\mu^3 - (90 + 3R + 2e)\mu^2 + (9R + e - 32)\mu + 5 - R = 0, \quad (2.25)$$

где $R = 12ar$, $e = 144r\epsilon/h$.

Можно установить, что два корня уравнения (2.25) по модулю больше единицы, а остальные два меньше единицы.

Так как $\Phi(1) = -144$, $\Phi(-1) = -(16 + 8R + 4e) < 0$, то вследствие $\Phi(\mu) \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow \mp\infty$, очевидно, кривая $\Phi(\mu)$ пересекает ось $\Phi = 0$ левее

точки $\mu = -1$ и правее точки $\mu = 1$. Это означает, что существуют два действительных корня μ_1 и μ_2 , удовлетворяющие неравенствам $\mu_1 < -1$, $\mu_2 > 1$. Чтобы показать, что два других корня действительны и по модулю меньше единицы, удобно рассмотреть два случая: $R \leq 5$ и $R > 5$. В первом случае $\Phi(0) = 5 - R \geq 0$ и ввиду отрицательности $\Phi(\mu)$ при $\mu \mp 1$ кривая $\Phi(\mu)$ должна пересечь ось $\Phi = 0$ внутри каждого из интервалов $[-1, 0]$, $[0, 1]$; поэтому один из корней (2.25) μ_3 удовлетворяет неравенству $1 < \mu_3 \leq 0$, а другой $\mu_4 - 0 \leq \mu_4 < 1$.

Во втором случае достаточно показать существование точки $\mu_* \in [0, 1]$, для которой $\Phi(\mu_*) > 0$. Тогда вследствие отрицательности $\Phi(\mu)$ при $\mu = 0$ и $\mu = 1$ кривая $\Phi(\mu)$ должна 2 раза пересечь ось $\Phi = 0$ внутри интервала $[0, 1]$. Для того чтобы показать существование точки μ_* , $\Phi(\mu_*) > 0$, запишем равенство (2.25) в виде

$$\Phi(\mu) = \varphi_1(\mu)\varphi_2(\mu) + e(\mu - 1)^2\mu = 0. \quad (2.26)$$

Простейший анализ квадратных трехчленов $\varphi_1(\mu)$ и $\varphi_2(\mu)$ показывает, что при $R > 5$ существует интервал $[\mu_*^{(1)}, \mu_*^{(2)}]$, где $0 < \mu_*^{(1)}$ и $0 < \mu_*^{(2)} < 1$ — наименьшие по модулю корни уравнения $\varphi_1(\mu) = 0$ и $\varphi_2(\mu) = 0$, в котором $\varphi_1(\mu)\varphi_2(\mu) \geq 0$. В качестве μ_* теперь достаточно выбрать любую точку из этого интервала: при этом оба слагаемых (2.26) положительны и $\Phi(\mu_*) > 0$. Таким образом, оба корня μ_3 и μ_4 положительны и строго меньше единицы по модулю.

В случае конечного числа скачков в коэффициентах матриц A_j , B_j и C_j , возникающих при переключениях операторов A и Δ вследствие изменения знака $\varphi'(u^m)$, а также при надлежащих граничных условиях на концах интервала $[x_0, x_N]$ (по два условия на каждом конце), система (2.18) является хорошо обусловленной в смысле [48], а метод прогонки при ее решении оказывается устойчивым.

Разностные граничные условия. Приведенный выше анализ показывает, что системы уравнений (2.17) и (2.18) требуют формулировки одинакового числа граничных условий на обоих концах рассматриваемого интервала. Эти условия должны подчиняться определенным требованиям регулярности, сформулированным в [48]. Однако конкретный вид этих условий зависит от специфики решаемой задачи и не может быть указан заранее. Вместе с тем можно высказать общие соображения применительно к определенным классам решаемых задач.

В частности, если один из концов интервала является идеализацией бесконечности, на которой задано невозмущенное состояние u_∞ , то естественным граничным условием на этом конце будет равенство $u = u_\infty$ для системы (2.17) и равенства $u = u_\infty$, $q = 0$ для системы (2.18). Например, в задаче о распаде разрыва на границах достаточно протяженной области ставились условия равенства искомых функций соответствующим начальным параметрам слева и справа от разрыва.

Если же один из концов интервала в случае задач о течениях жидкости и газа является аналогом твердой поверхности, то одно из разностных значений следует из граничного условия в математической постановке задачи (например, значение u или связь между u и q на поверхности). Чтобы сконструировать второе условие, можно поступить следующим образом.

Пусть, для определенности, рассматриваемая граница области $x \geq 0$ есть $x = 0$, причем в узле $x_1 = h$ имеет место неравенство $\varphi'(u_1^m) < 0$. Это означает, что в первом уравнении (2.9) используются операторы A и Δ при $s = \text{sgn } \varphi'(u^m) = -1$ и это уравнение можно интерпретировать как уравнение баланса потока $\varphi - \epsilon q$ для ячейки $h \leq x \leq 2h$. В качестве дополнительного граничного условия можно записать уравнение баланса этого же потока для ячейки $0 \leq x \leq h$, не входящее в разностную схему, однако для этого следует использовать операторы A и Δ противоположной ориентации (т.е. при $s = 1$), использующие при $x = x_1$ только внутренние узлы расчетной области. Граничное условие тогда будет иметь вид

$$\epsilon_1 q_1^{m+1} - \epsilon_0 q_0^{m+1} = \varphi(u_1^{m+1}) - \varphi(u_0^{m+1}) + hA \left(\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle^{m+1} - f^{m+1} \right). \quad (2.27)$$

Если же $\varphi'(u_1^m) \geq 0$, то уравнение (2.27) для ячейки $0 \leq x \leq h$ уже включено в разностную схему, однако в нее не включено второе уравнение (2.9), которое можно интерпретировать как баланс потока и для ячейки $h \leq x \leq 2h$. Записывается этот баланс для ячейки $h \leq x \leq 2h$, но с использованием операторов \bar{A} и $\bar{\Delta}$, соответствующих $s = 1$ и использующих только внутренние узлы области, получим граничное условие

$$Aq^{m+1} = (u_1^{m+1} - u_0^{m+1})/h. \quad (2.28)$$

Равенства (2.27) или (2.28) имеют третий порядок аппроксимации одного из исходных уравнений (2.8) в узле $x = x_1$; они и являются вторым, дополнительным, граничным условием на границе $x = 0$ для решения разностных уравнений (2.9). Вместе с первым условием, вытекающим из математической формулировки задачи, условия (2.27) или (2.28) могут быть представлены в форме

$$Pv_0 + Qv_1 + Rv_2 = 1, \quad (2.29)$$

где $v = (u, q)^T$, P, Q, R — матрицы размерности 2×2 ; 1 — двухкомпонентный вектор правых частей.

Имеется положительный опыт применения граничных условий (2.29), которому предшествовало исследование для случая постоянных коэффициентов, показавшее, что они удовлетворяют признаку Бабенко—Гельфанда [3]. Вместе с тем этот опыт является недостаточным для заключения об универсальности этих условий.

Сформулированные выше граничные условия в известной степени можно интерпретировать как полученные из физических соображений. Возможны и другие, чисто формальные способы их конструирования. Фактически в качестве дополнительного граничного условия можно использовать некоторые алгебраические соотношения, связывающие значения сеточных функций u и q в граничных и ближайших к ним узлах расчетной области. Ограничиваясь тремя приграничными узлами $x = jh$, $j = 0, 1, 2$, эти соотношения в общем виде можно записать как равенство

$$\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = h (\beta_0 q_0 + \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2), \quad (2.30)$$

где α_i и β_i ($i = 0, 1, 2$) — некоторые константы.

Коэффициенты α_i и β_i можно определить из условия того, что формула (2.30) аппроксимирует с желаемым порядком относительно шага h равенство

$$q(0) = \partial u / \partial x \Big|_{x=0}. \quad (2.31)$$

Из условия аппроксимации (2.31) с первым порядком и условия нормировки сразу же следуют три равенства:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 1, \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1. \quad (2.32)$$

Если желательно аппроксимировать (2.31) с третьим порядком, то, используя равенства

$$\frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=0},$$

можно обратить в нуль коэффициенты при h и h^2 , полученные после подстановки в (2.31) рядов Тэйлора для функций $u(x)$ и $q(x) = \partial u / \partial x$. При этом возникают еще два равенства:

$$\beta_1 + 2\beta_2 = \alpha_1/2 + 2\alpha_2, \quad (1/2)\beta_1 + 2\beta_2 = (1/6)\alpha_1 + (4/3)\alpha_2. \quad (2.33)$$

Система (2.32), (2.33) определяет шесть неизвестных коэффициентов α_i и β_i ($i=0, 1, 2$) с точностью до одного свободного параметра.

Выбрав, например, в качестве этого параметра коэффициент β_2 , получим следующие выражения для $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0$ и β_1 :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -5/6 + 2\beta_2; & \alpha_1 &= 2/3 - 4\beta_2; & \alpha_2 &= 1/6 + 2\beta_2; \\ \beta_0 &= 1/3 - \beta_2; & \beta_1 &= 2/3. \end{aligned} \quad (2.34)$$

В частности, положив $\beta_2 = 0$, получим формулу

$$\frac{1}{3} q_0 + \frac{2}{3} q_1 = \frac{1}{6h} (-5u_0 + 4u_1 + u_2),$$

аппроксимирующую равенство (2.31) с погрешностью $O(h^3)$.

Ограничиваясь вторым порядком, можно получить множество других формул, зависящих от двух свободных параметров. Среди всех возможных алгебраических соотношений типа (2.30) пригодны для использования те, которые вместе со вторым граничным условием в сочетании с аппроксимациями исходного уравнения во внутренних узлах области образуют устойчивую схему. Для оценки выяснения устойчивости схемы с учетом граничных условий можно воспользоваться признаком Бабенко—Гельфанда [3], понимая под сеточной функцией значения в узлах сетки вектора с компонентами $\{u, q\}$. Ввиду множества различных вариантов условий вида (2.30) такой анализ здесь не приводится.

Стационарные разностные решения. Сеточное число Рейнольдса. Характер решений разностных систем, возникающих при применении рассматриваемых аппроксимаций, удобно проиллюстрировать в случае стационарного уравнения (2.1) с постоянными коэффициентами ($\partial/\partial t \equiv 0, \varphi = au, a = \text{const}, \epsilon = \text{const}, f \equiv 0$). Точное решение этого уравнения имеет вид

$$u = C_1 + C_2 \exp(ax/\epsilon), \quad C_1 = \text{const}, \quad C_2 = \text{const}$$

и указывает на существование при малых значениях ϵ пограничного слоя с толщиной $\Delta x \sim \epsilon/a$. Из общих соображений очевидно, что для точного описания деталей решения шаг сетки h в окрестности этого слоя должен удовлетворять условию $h \ll \Delta x$, откуда следует оценка

$$\text{Re}_c = \frac{ha}{\epsilon} < R_{cm},$$

где Re_c — так называемое сеточное число Рейнольдса, а R_{cm} — некоторая величина порядка единицы. Условие $\text{Re}_c < R_{cm}$ является общим для всех схем, не учитывающих характер точного решения; оно указывает, в частности, на необходимость локального уменьшения шагов путем введения неравномерных сеток. Вместе с тем схемы могут заметно различаться по максимальным значениям R_{cm} , для которого разностное решение еще остается похожим на точное, а также по наличию или отсутствию схемных осцилляций. Пусть, например, используются аппроксимации третьего порядка конвективных и диффузионных членов (т.е. схема (2.9)). После подстановки в разностные уравнения сеточной функции

$$\begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} q^j, \quad q = \text{const}, \quad a_1, a_2 = \text{const}$$

получается алгебраическое уравнение для определения q . Формально его коэффициенты можно получить из коэффициентов уравнения (2.25), разделив последние на $l = 144\tau\epsilon/h^2$ и перейдя к пределу при $\tau \rightarrow \infty$. Простые выкладки приводят к следующим значениям:

$$q_1 = 1,$$

$$q_2 = \frac{1 + \frac{2}{3} \text{Re}_c + \sqrt{\left(1 + \frac{2}{3} \text{Re}_c\right)^2 + \frac{1}{3} \text{Re}_c \left(\frac{5}{12} \text{Re}_c - 1\right)}}{2 - \frac{5}{6} \text{Re}_c},$$

$$q_3 = \frac{1 + \frac{2}{3} \text{Re}_c - \sqrt{\left(1 + \frac{2}{3} \text{Re}_c\right)^2 + \frac{1}{3} \text{Re}_c \left(\frac{5}{12} \text{Re}_c - 1\right)}}{2 - \frac{5}{6} \text{Re}_c}.$$

Легко усмотреть, что первые два корня при $h \rightarrow 0$ дают точное решение, а корень q_3 соответствует "паразитной" составляющей разностного решения. При всех значениях Re_c выполняется неравенство $0 \leq q_3 < 1$.

Если $\text{Re}_c < 12/5$, то разностное решение близко к точному и не содержит осциллирующей составляющей. При $\text{Re}_c > 12/5$ корень q_3 становится отрицательным, что не позволяет правильно описать пограничный слой. Однако можно задаться вопросом: насколько при этом искажается решение $u_j^{(1)} = C_1 = \text{const}$, соответствующее отсутствию в исходном уравнении диффузионного члена ($\epsilon = 0$)? "Паразитная" составляющая $u_j^{(3)} = C_3 q_3^j$ общего решения не приводит к искажению $u_j^{(1)}$, поскольку $0 \leq q_3 < 1$

и $u_j^{(3)}$ быстро затухают. Остается рассмотреть решение $u_j^{(2)} = C_2 q_2^j$. Очевидно, что для выполнения граничных условий при $j=0$ и $j=N$ (например, $u_0 = 0, u_N = 1$) с учетом оценки $|q_2| > 1$ константа C_2 должна быть мала и иметь порядок $O(|q_2|^{-N})$. Но это означает, что осциллирующая составляющая $u_j^{(2)}$ ведет себя приблизительно как $(-1)^j (1/|q_2|)^{N-j}$, т.е. также затухает с увеличением $N-j$. Поскольку $|q_2| \geq (4 + \sqrt{21})/5$ при $12/5 \leq \text{Re}_c \leq \infty$, это затухание оказывается достаточно быстрым. Таким образом, при больших значениях Re_c невозможность правильно описать структуру пограничного слоя не является препятствием для достаточно точного описания внешней части решения (т.е. решения исходного уравнения при $\epsilon = 0$, а в случае уравнений аэрогидродинамики – решения для невязкой части течения).

Для сравнения можно привести результаты аналогичного анализа в случае дискретизации du/dx и $\partial^2 u/\partial x^2$ при помощи операторов Δ_0 и Δ_2 ; тогда

$$q_2 = -(1 + \text{Re}_c/2)/(\text{Re}_c/2 - 1), \quad q_2 \approx -1 \text{ при } \text{Re}_c \gg 1$$

и составляющая $u_j^{(2)} = C_2 q_2^j$ является незатухающей осциллирующей частью общего решения.

2.3. Примеры расчетов для уравнений с малыми коэффициентами при старших производных

При решении практических задач часто наибольший интерес представляют случаи, когда функция ϵ принимает малые значения в расчетной области. Критерием этой малости могут служить большие значения параметра $R = u_* l_* / \epsilon_*$, где u_* и ϵ_* – характерные масштабы соответственно функций u и ϵ , а l_* – характерный пространственный масштаб, на котором функция изменяется на свой порядок; параметр R является аналогом числа Рейнольдса в случае уравнений течения вязкой среды.

При больших значениях R в расчетной области с характерным размером L могут возникать зоны быстрого изменения функции u , когда отношение l_*/L становится малым в некоторых ее частях. Наличие зон с малыми характерными размерами типа пограничных слоев или ударных волн предъявляет жесткие требования к численным алгоритмам. В частности, алгоритм должен быть достаточно устойчив, а полученные решения не должны быть искажены (или сильно искажены) схемной немонотонностью. Области с малыми характерными размерами должны разрешаться с достаточной точностью; при этом желательно, чтобы близки к точным значениям были не только значения функции u в узлах, но и значения ее первой производной, характеризующей диффузные потоки.

Если эти требования не выполнены, то при расчетах могут возникнуть следующие неприятности: шаги τ могут оказаться неоправданно малыми для осуществления устойчивого счета; вследствие больших градиентов искомым функциям может возникнуть осцилляция решения, которые в некоторых случаях способны нарушить процесс вычислений. Другой крайностью является случай применения схем первого порядка, когда при реальных шагах сетки возможны значительные отличия получаемых реше-

ний от точного при внешне благоприятном характере изменения сеточных функций.

Рассмотренные схемы во многом удовлетворяют сформулированным требованиям, однако при этом должно выполняться следующее очевидное условие: если желательно разрешить область с малым характерным размером l_* , то шаг h в этой области следует выбирать много меньшим l_* .

Эффективно реализовать такой выбор можно введением растягивающего преобразования, которое отображало бы физическую область с различными (в том числе и малыми) характерными пространственными масштабами на расчетную область с единственным характерным масштабом — ее размером. В этом случае при постоянном шаге сетки в расчетной области шаг в физической области оказывался бы малым там, где это необходимо. По существу, уменьшение шагов путем введения преобразования физической координаты является неперенным условием применения описанных выше схем третьего порядка, поскольку последние построены на сетках с постоянными шагами.

Может возникнуть вопрос: что может дать применение схем повышенной точности в смысле уменьшения числа узлов сетки при заданной точности? Ответ состоит в том, что при удачном преобразовании $\xi(u, x)$ производные $\partial u^l / \partial \xi^l$ могут оказаться равномерно-ограниченными по l (например, при $\xi = u$ они просто будут равны нулю) или, во всяком случае, не возрастать очень быстро при возрастании l . Тогда погрешность схемы порядка k будет мажорироваться величинами $C_k h_\xi^k$, где h_ξ — шаг сетки в расчетной области, а константы C_k не сильно зависят от номера k . При этом можно ожидать выполнения неравенства $C_l h_\xi^l < C_k h_\xi^k$ при $k > l$ и, следовательно более высокой точности схемы высокого порядка аппроксимации. Если же точность фиксируется, то схема высокого порядка в этом случае требует меньшего числа узлов, хотя и должно быть выполнено условие $h \ll l_*$.

В приводимых ниже примерах расчетные данные были получены [6] при помощи схемы (2.9) для уравнения типа (2.1) с аппроксимациями третьего порядка диффузионных членов. В качестве преобразования независимой переменной x использовалась функция $\xi(x, u)$, зависящая от решения u , получаемого на каждом временном слое. Эта функция задавалась в виде

$$\xi = au + bx, \quad \xi(x_0) = 0, \quad \xi(x_N) = 1, \quad (2.35)$$

где $[x_0, x_N]$ — интервал, на котором ищется решение уравнения (2.1), а a и b — положительные константы. При малых значениях коэффициента диффузии ϵ эта функция отображает области изменения x с характерным размером порядка $O(\epsilon)$ на области изменения ξ порядка $O(1)$, так что равномерной сетке с постоянным шагом h_ξ в расчетной плоскости соответствует некоторая сгущенная в области больших градиентов сетка с переменным шагом в физической плоскости.

Производя замену (2.35), перепишем уравнение (2.1) в виде

$$\frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \epsilon \chi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{f}{\chi}, \quad (2.36)$$

где

$$\chi = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \text{и} \quad \chi^{-1} = \frac{1}{b} \left(1 - a \frac{\partial u}{\partial \xi} \right), \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\cdot) = \frac{\partial}{\partial t} (\cdot) \Big|_{\xi = \text{const}}.$$

Аппроксимацию (2.36) вида (2.9), записанную на сетке

$$\omega = \omega_\tau \times \omega_{h\xi} (\omega_{h\xi} : \xi_j = (\xi_N - \zeta_{0j})/N, j = \overline{0, N}),$$

дополним равенством для (2.37)

$$\chi_j^{m+1} = b \left[1 - a \left(\frac{\partial u^m}{\partial \xi} \right)_j \right]^{-1}, \quad (2.38)$$

позволяющим на каждом временном шаге определять сеточную функцию χ .

В качестве граничных условий на одном из концов интервала $[x_0, x_N]$ для разностной системы использовались граничные условия из математической постановки задачи, дополненные искусственными условиями типа (2.27), (2.28) для вектора $(u, q)^T$. На другом конце, где решение предполагалось невозмущенным, полагалось $q = 0$.

В общем виде разностные граничные условия при $\zeta = 0$ и аналогичные им при $\zeta = 1$ можно записать в виде

$$P_0 v_0 + Q_0 v_1 + R_0 v_2 = I_0, \quad P_1 v_{N-2} + Q_1 v_{N-1} + R_1 v_N = I_1, \quad (2.39)$$

где P_j, Q_j, R_j — матрицы 2×2 , а I_j — двухкомпонентные векторы ($j = 0, 1$).

Анализ граничных условий (2.39) в приближении замороженных коэффициентов показал, что эти условия удовлетворяют признаку устойчивости Бабенко—Гельфанда, если под сеточной функцией понимать пару $(u, q)_i$. Можно показать также хорошую обусловленность соответствующих систем разностных уравнений.

В качестве примеров рассматривались следующие модельные задачи.

У р а в н е н и е Б ю р г е р с а. В (2.1) положим $\varphi(u) = u^2/2$, $\epsilon(u, x) = \nu = \text{const} > 0$, $f \equiv 0$. Произведем замену $x_1 = x - t/2$, придем к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u}{2} \right) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}. \quad (2.40)$$

Интересуясь стационарным решением (2.40) с граничными условиями $u(-\infty) = 1$ и $u(\infty) = 0$, применим преобразование вида (2.35), заменив предварительно бесконечный интервал изменения x_1 конечным. При малых значениях ν достаточно, например, рассмотреть интервал $-1 \leq x \leq 1$, отобразив его на интервал $-1 \leq \xi \leq 1$.

На рис. 1.4 и в табл. 1 приведены некоторые результаты расчетов по схеме (2.9) с граничными условиями (2.39). Из рис. 1.4 следует, что практически независимо от величины ν функции $u(\xi)$ (штриховые линии) определяют характерную толщину ударной волны $\Delta \xi = O(1)$, соответствующую толщине $\Delta x_1 = O(\nu)$ в физической плоскости. Фактическое значение $\Delta \xi$

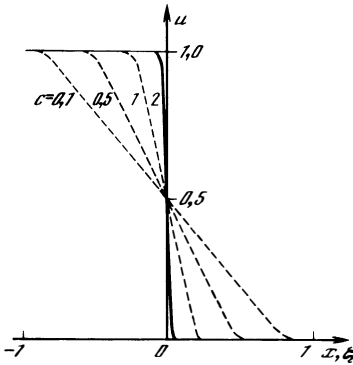


Рис. 1.4

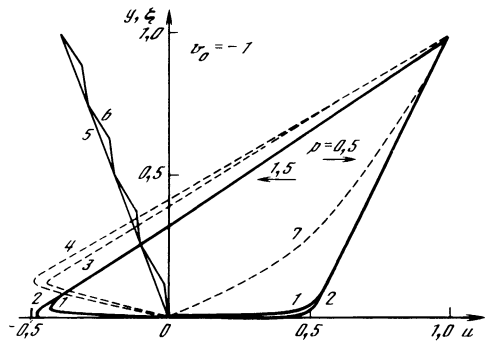


Рис. 1.5

зависит от отношения $b/a = C$ в (2.35), задаваемого в достаточной степени произвольно. При увеличении C возрастает вклад в $\zeta(u, x_1)$ физической координаты x_1 и величина $\Delta\zeta$ уменьшается.

В табл. 1 для иллюстрации точности метода приведены значения $x_1(\zeta)$, $u(\zeta)$ и $u'_{x_1}(\zeta)$ на интервале $-1 \leq \zeta \leq 0$, полученные в случае $\nu = 10^{-3}$, $C = 0,1$ при $h_\xi = 0,1$ и $0,025$ (в последнем случае приведены также точные значения $u_e(x_1)$ и $u'_e(x_1)$). Уже при $h_\xi = 0,1$ почти во всей области достигается совпадение с вариантом $h_\xi = 0,025$ в трех-четыре значащих цифрах как самих функций, так и их производных. Некоторое понижение точности происходит в окрестности выхода на асимптотику ($\zeta \approx -0,9$ при $C = 0,1$), где становятся большими высшие производные $u(\zeta)$.

Течение Куэтта со вдувом. Положим $F = \partial p / \partial x$, $\epsilon(u, y) = \text{Re}^{-1}$, $\varphi(u) = \nu_0 u$, где постоянные F , ν_0 и Re — соответственно продольный градиент давления, скорость вдува и число Рейнольдса. Роль координаты x в (2.1) играет нормальная к поверхности координата y . Граничные условия имеют вид $u(0) = 0$, $u(1) = 1$.

Согласно точному решению этой задачи, пограничный слой с толщиной порядка $O(\text{Re}^{-1})$ образуется либо на неподвижной стенке $y = 0$ ($\nu_0 < 0$), либо на подвижной $y = 1$ ($\nu_0 > 1$). В зависимости от значений $P = F/\nu_0$ профили скорости могут быть либо монотонными, либо иметь резко выраженные экстремумы (рис. 1.5). Предполагая, что какая-либо информация о положении и размерах пограничного слоя отсутствует, будем использовать преобразование с линейной функцией $\psi(u)$ типа (0.9) и константами, зависящими от интервала монотонности функции $u(y)$ [6].

Результаты расчетов для двух характерных случаев монотонного профиля ($P = 0,5$) и возвратного течения ($P = 1,5$) приведены на рис. 1.5 (1, 2 — $u(y)$ при $\text{Re} = 10^2$ и 10^3 соответственно; 3, 4 — $u(\xi)$ ($\text{Re} = 10^2$ (для 3, 7) и 10^3 (для 4, 7)). Как и в предыдущем примере, функции $u(\zeta)$ слабо зависят от параметра Re и толщина слоя в расчетной области имеет порядок $O(1)$.

В табл. 2 для некоторых характерных значений ζ приведены величины $u(\zeta)$, $u'(\zeta)$, $u'_y(\zeta)$ вместе с точными значениями $u_e(y)$ и $u'_e(y)$. Эти данные получены при $\text{Re} = 10^3$, $h_\xi = 0,025$, $\nu_0 = 1$ для наиболее неблагоприят-

Таблица 1

ξ	$h = 0,1$		
	$x_1(\xi)$	$u(\xi)$	$u'_{x_1}(\xi)$
-0,0	0,0000	0,50000	125,092
-0,1	0,000467	0,55997	123,296
-0,2	0,000968	0,61992	117,902
-0,3	0,00149	0,67986	108,915
-0,4	0,00208	0,73980	96,337
-0,5	0,00276	0,79973	80,168
-0,6	0,00359	0,85965	60,414
-0,7	0,00443	0,91956	37,071
-0,8	0,00721	0,98482	7,55180
-0,9	0,39785	1,00021	0,92862
-1,0	1,00000	1,00000	0,02346

ного из рассмотренных случаев $P = 1,5$, когда можно ожидать больших погрешностей вычислений. Значительное понижение точности, согласно табл. 2, наблюдается в области изменения знака производной u_ξ ($\xi = 0,13$, рис. 1.5); при этом значение u при $\xi = 0,1$ даже выпадает из монотонной последовательности значений u вследствие неточности определения $u(0, 1)$. Такое поведение решения разностной задачи объясняется весьма большими значениями высших производных u в этой области и, кроме того, изменением констант преобразования при переходе из одного интервала монотонности в другой. Вместе с тем функции и их производные во всей остальной части расчетной области вычисляются достаточно точно.

В табл. 3 приведены результаты расчетов варианта табл. 2 при меньшем шаге $h_\xi = 0,0125$. Эти данные свидетельствуют о заметном увеличении точ-

Таблица 2

ξ	$y(\xi)$	$u(\xi)$	$u'_y(\xi)$	$u_e(y)$	$u'_e(y)$
0,000	0,00000	0,00000	-498,50	0,00000	-498,50
0,025	0,000219	-0,09854	-399,62	-0,09820	-399,96
0,050	0,000500	-0,19696	-300,78	-0,19589	-301,86
0,075	0,000881	-0,29518	-201,99	-0,29144	-205,73
0,100	0,000505	-0,39490	-102,83	-0,19778	-299,96
0,125	0,00258	-0,48976	-4,8596	-0,45848	-36,139
0,150	0,03827	-0,46142	-2,0336	-0,44259	1,50000
0,175	0,06112	-0,40768	0,87417	-0,40831	1,50000
0,200	0,08987	-0,36562	1,94439	0,36518	1,50000
0,250	0,14667	-0,28009	1,60525	0,27999	1,50000
0,300	0,20353	-0,19472	1,52637	-0,19469	1,50000
0,400	0,31731	-0,02403	1,50112	-0,02403	1,50000
0,500	0,43109	-0,146640	1,49934	0,146641	1,50000

$h = 0,025$				
$x_1 (\xi)$	$u(\xi)$	$u'_{x_1}(\xi)$	$u_e(x_1)$	$u'_e(x_1)$
0,0000	0,50000	124,999	0,50000	125,000
0,000482	0,55995	123,202	0,56002	123,198
0,000979	0,61990	117,810	0,62004	117,795
0,00150	0,67984	108,826	0,68003	108,792
0,00209	0,73979	96,249	0,74001	96,196
0,00277	0,79972	80,082	0,79995	80,014
0,00362	0,85963	60,329	0,85983	60,259
0,00487	0,91951	37,003	0,91961	36,962
0,00741	0,97925	10,154	0,97603	11,693
0,39995	1,00000	0,92870	1,00000	0,00000
1,00000	1,00000	0,03662	1,00000	0,00000

ности всюду и, в частности, в упомянутой выше неблагоприятной области. Заметим, что в отличие от случая монотонного профиля u в табл. 1 сопоставление данных табл. 2 и 3 при одних и тех же значениях ξ неэффективно, поскольку экстремальные значения u при $h_\xi = 0,025$ и $0,0125$, а следовательно, и преобразования $\xi(y)$ несколько различаются.

Кроме схем третьего порядка, при проведении методических расчетов применялись также схемы четвертого порядка с оператором $A_0 = 0,5(A_- + A_+)$, а также обычные центрально-разностные схемы. В окрестности поверхности сеточные функции, полученные при помощи симметричных схем, даже при малых h обнаружили тенденцию к осцилляциям. На рис. 1.5

Т а б л и ц а 3

ξ	$y(\xi)$	$u(\xi)$	$u'_y(\xi)$	$u_e(y)$	$u'_e(y)$
0,0000	0,00000	0,00000	-498,50	0,00000	-498,50
0,0125	0,000104	-0,04924	-449,10	-0,04923	-449,11
0,0250	0,000220	-0,09846	-399,70	0,09843	-399,73
0,0350	0,000351	-0,14765	-350,31	0,147	-350,37
0,0500	0,000502	-0,19680	-300,93	-0,19670	-301,04
0,0625	0,000680	-0,24590	-251,57	-0,24573	-251,74
0,0750	0,000896	-0,29492	-202,22	-0,29462	-202,52
0,0875	0,00117	-0,34383	-152,90	-0,34322	-153,51
0,1000	0,00154	-0,39255	-103,63	-0,39082	-105,36
0,1125	0,00176	-0,44157	-54,286	-0,41130	-84,556
0,1250	0,00277	-0,48901	-5,3229	-0,46475	-2,9578
0,1375	0,02186	-0,47731	11,614	-0,46720	1,4999
0,1500	0,03305	-0,44999	1,0788	-0,45041	1,5000
0,1625	0,04746	-0,42904	1,7327	-0,42881	1,5000
0,2000	0,0900	-0,36492	1,4806	-0,36493	1,5000

приведено сравнение решений вблизи стенки, соответствующих схемам третьего и четвертого порядков ($h = 0,0125$; см. рис. 1.5, кривые 5 и 6).

Таким образом, при надлежащем размещении узлов сетки в физической плоскости несимметричные компоненты схемы могут давать весьма точные результаты. Их преимущество по сравнению с симметричными схемами второго порядка, если даже не учитывать соображения точности, состоит в большей монотонности решений, вытекающей из ориентации схемы в соответствии с направлением распространения возмущений.

2.4. Компактные схемы для систем уравнений с диффузионными членами

Аппроксимирующие операторы; трехточечные схемы. При построении разностных алгоритмов для систем, описывающих одновременно конвективные и диффузионные процессы (в частности, для уравнений динамики вязкого газа), основную роль, как и в случае одного уравнения, играет способ аппроксимации гиперболической части уравнений. Используя для этой цели операторы B_x и C_x , введенные в п. 1.8 (формулы (1.65a)), проблеме конструирования алгоритма можно свести к выбору разностных аналогов диффузионных членов.

Рассмотрим в качестве модельной систему

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{g}, \quad (2.41)$$

в которой \mathbf{u} , \mathbf{f} , \mathbf{F} и \mathbf{g} — p -компонентные векторы, причем матрицы $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u} = L$, $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{u} = Q$ и μ размерности $p \times p$ являются симметрическими, а матрицы L и μ , кроме того, положительны.

Рассуждая так же, как и в случае скалярного уравнения, можно прийти к различным возможностям аппроксимации члена $\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)$ в векторном уравнении (2.41). Наиболее удобной с точки зрения решения разностных уравнений является аппроксимация вида $B_x^{-1} \Lambda_2 \mathbf{u}$, где матрично-разностный оператор Λ_2 определяется формулой

$$\Lambda_2 = (\mu_{j+1/2} \Delta_+ - \mu_{j-1/2} \Delta_-) h^{-2}. \quad (2.42)$$

При использовании этой аппроксимации возможно следующее обобщение схемы с весами (1.70) на случай системы (2.41):

$$\begin{aligned} B_x \left\langle \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right\rangle^{m+1} + \sum_{l=0}^k \sigma_l (C_x \mathbf{F}^{m+1-l} - \Lambda_2 \mathbf{u}^{m+1-l}) = \\ = \sum_{l=0}^k \sigma_l B_x \mathbf{g}^{m+1-l}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

В частности, двухслойная схема после линеаризации функций \mathbf{f} и \mathbf{F} может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} [B_x L + \sigma \tau (C_x Q - \Lambda_2)] (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) / \tau + C_x \mathbf{F}^m - \Lambda_2 \mathbf{u}^m = \\ = B_x [\sigma \mathbf{g}^{m+1} + (1 - \sigma) \mathbf{g}^m]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Матрицы L и Q , как и в случае гиперболических систем, предполагаются вычисленными по известным значениям функции u^m .

Ввиду того что $B_x f = E + O(h)$ и $\Lambda_2 = D_x \mu D_x + O(h^2)$, для аппроксимаций диффузионных членов можно записать оценку

$$B_x^{-1} \Lambda_2 u_j^m = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{t=t_m, x=x_j} + O(h).$$

При этом погрешность аппроксимации схем (2.43), (2.44) относительно шага h условно можно записать в виде $O(h^3 + \|\mu\|h)$, подчеркивая тем самым, что первый порядок возникает при аппроксимации членов с функцией μ . Как отмечалось выше, такой вариант может оказаться приемлемым, если зависимость $\mu(u, x)$ сама задается с некоторой погрешностью. В частности, это происходит в случае уравнений Рейнольдса, замыкаемых некоторой полуэмпирической моделью турбулентности. Другим примером является случай, когда вследствие малости функции μ диффузионные члены пренебрежимы в значительной части расчетной области, а там, где они играют существенную роль, высокой точности по тем или иным причинам не требуется.

Процесс решения разностных уравнений при переходе от одного слоя $t = \text{const}$ к другому несколько не усложняется по сравнению со случаем $\mu \equiv 0$ и может быть осуществлен трехточечными векторными прогонками с матрицами $p \times p$.

Для оценки устойчивости схемы (2.44) рассмотрим соответствующую исходной системе (2.41) систему с постоянными матрицами. После простых преобразований последнюю можно представить в форме

$$\partial v / \partial t + K \partial v / \partial x = \nu \partial^2 v / \partial x^2, \quad (2.45)$$

где $v = L^{1/2} u$, $\nu = L^{-1/2} \mu L^{-1/2}$, $K = L^{-1/2} Q L^{-1/2}$ – симметричные матрицы. Матрица ν , кроме того, является положительной в силу неравенства $(L^{-1/2} \mu L^{-1/2} u, u) = (\mu v, v) > 0$, где $v = L^{-1/2} u$.

Схема (2.44) для системы (2.45) имеет вид

$$[E + \sigma \tau B_x^{-1} (C_x K - \Lambda_2)] (v^{m+1} - v^m) / \tau + B_x^{-1} (C_x K - \Lambda_2) v^m = 0. \quad (2.46)$$

Абсолютная устойчивость схемы (2.46) при $\sigma \geq 0,5$ легко устанавливается при дополнительном предположении о том, что матрица μ коммутативна с матрицами Q и L . В этом случае операторы B_x и Λ_2 , как легко усмотреть, являются коммутативными, так что имеет место цепочка равенств

$$(B_x^{-1} (-\Lambda_2) u, u) = (B_x^{-1} \sqrt{-\Lambda_2} u, \sqrt{-\Lambda_2} u) = (v, B_x v),$$

где $v = B_x^{-1} \sqrt{-\Lambda_2} u$. Но последнее в этой цепочке скалярное произведение неотрицательно в силу неотрицательности оператора B_x . Отсюда следует неотрицательность оператора $-B_x^{-1} \Lambda_2$ и, следовательно, оператора $B_x^{-1} (C_x K - \Lambda_2)$. Поэтому схема (2.46) абсолютно устойчива при $\sigma \geq 0,5$ как схема с весами.

Сведение к системе уравнений первого порядка. По аналогии со скалярным случаем систему уравнений второго порядка (2.41) можно свести

следующим образом к двум системам первого порядка:

$$\partial \mathbf{f} / \partial t + \partial \mathbf{F} / \partial x = \partial \mu \mathbf{q} / \partial x + \mathbf{g}, \quad \partial \mathbf{u} / \partial x = \mathbf{q}, \quad (2.47)$$

где \mathbf{q} – новая неизвестная векторная функция.

Для аппроксимации первого уравнения (2.47) будем использовать операторы B_x и C_x из (1.65), соответствующие гиперболической части этого уравнения ($\mu \equiv 0$), а для аппроксимации второго уравнения (2.47) – сопряженные им операторы. Ограничиваясь для определенности двухслойными схемами, запишем разностный аналог (2.47) в виде

$$\begin{aligned} B_x(\mathbf{f}^{m+1} - \mathbf{f}^m) / \tau + C_x \bar{\mathbf{F}} &= C_x(\bar{\mu} \bar{\mathbf{q}}) + B_x \bar{\mathbf{q}}, \\ \tilde{C}_x \mathbf{u}^{m+1} &= \tilde{B}_x \mathbf{q}^{m+1}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Здесь черта означает среднение вида $\bar{\mathbf{F}} = \sigma \mathbf{F}^{m+1} + (1 - \sigma) \mathbf{F}^m$, $\tilde{B}_x = B_x^* = (A_0 + 0,25 \Delta_0 M)$, $\tilde{C}_x = C_x^* = [\Delta_0 + \Delta_-(T_{1/2} M) \Delta_+] / 2h$, M – матрица, возникающая при приведении матрицы $L^{-1} Q$ к диагональному виду; напомним, что $M = L S D S^{-1} L^{-1}$, $D = \text{Diag} \{ \text{sgn } \lambda_1, \dots, \text{sgn } \lambda_p \}$, где столбцами матрицы S являются собственные векторы матрицы $L^{-1} Q$, а λ_i ($i = \overline{1, p}$) – ее собственные значения.

Для исследования устойчивости схемы (2.48) при постоянных матрицах L , Q и μ удобно исключить вектор \mathbf{q}^{m+1} из второго уравнения (2.48) ($\mathbf{q}^{m+1} = \tilde{B}_x^{-1} \tilde{C}_x \mathbf{u}^{m+1} = -(B_x^*)^{-1} C_x^* \mathbf{u}^{m+1}$) и записать эту схему при $\mathbf{g} \equiv 0$ в виде

$$[E + \sigma \tau (NK + V)] (\mathbf{v}^{m+1} - \mathbf{v}^m) / \tau + (NK + V) \mathbf{v}^m = 0,$$

где $\mathbf{v} = L^{1/2} \mathbf{u}$, $V = B_x^{-1} C_x \nu (B_x^*)^{-1} C_x^*$, $N = B_x^{-1} C_x$, $K = L^{-1} Q$.

Ранее было установлено, что $NK > 0$. Покажем, что оператор V является положительным самосопряженным. В самом деле, операторы B_x и C_x , а следовательно, B_x^{-1} и C_x при постоянных матрицах коммутативны. Поэтому $(B_x^*)^{-1} C_x^* = (C_x B_x^{-1})^* = (B_x^{-1} C_x)^*$, откуда в силу симметричности матрицы $\nu = L^{-1/2} \mu L^{-1/2}$ немедленно следует самосопряженность оператора V :

$$(\mathbf{V} \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (N \nu N^* \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\nu N^* \mathbf{u}, N^* \mathbf{v}) = (N^* \mathbf{u}, \nu N^* \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, N \nu N^* \mathbf{v}).$$

Кроме того, $(\mathbf{V} \mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\nu \mathbf{z}, \mathbf{z}) > 0$, где $\mathbf{z} = N^* \mathbf{u}$, поскольку матрица ν – положительна.

Таким образом, $NK + V > 0$, и выписанная выше схема с постоянными матрицами абсолютно устойчива при $\sigma \geq 0,5$ как схема с весами, построенная при помощи положительных операторов.

При практической реализации схемы (2.48) после ее линеаризации нужно решать систему двух трехточечных векторных уравнений с матрицами $p \times p$. В частности, это можно осуществить векторными прогонками с прогночными матрицами размерности $2p \times 2p$. При использовании ЭВМ с последовательным выполнением действий такая большая размерность матриц может вызвать существенные трудности. Чтобы остаться в рамках прогонок с матрицами $p \times p$, можно поступить следующим образом.

Запишем сначала исходную схему (2.48) в линеаризованном виде:

$$\begin{aligned} & [B_x L + \tau \sigma (C_x Q + C_x \mu B_x^{*-1} C_x^*)] (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) / \tau + \\ & + C_x (\mathbf{F}^m - \mu \mathbf{q}^m) = B_x \bar{\mathbf{g}}, \\ & C_x^* \mathbf{u}^m = -B_x^* \mathbf{q}^m. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Левая часть (2.49) получена после линеаризации функций \mathbf{f} и \mathbf{F} в обра­щаемом операторе, причем матрицы L , Q и μ предполагаются вычисленными по известным значениям функции и на предыдущем временном слое (или на предыдущих временных слоях). Основная сложность обращения оператора в квадратных скобках состоит в сложной структуре оператора $C_x \mu B_x^{*-1} C_x^*$. Поэтому является естественной замена последнего на некоторый трехточечный оператор без нарушения устойчивости схемы. Поскольку перед оператором диффузионных членов в обра­щаемом операторе стоит множитель τ , такая замена приведет к эквивалентной схеме (2.49) с точностью до членов порядка $O(\tau)$. Если высокий порядок аппроксимации схемы относительно шага τ не требуется, то вновь полученная схема может оказаться вполне приемлемой. Именно так происходит в случаях, когда интерес представляют лишь стационарные решения исходной задачи.

Из общих соображений легко усмотреть, что в качестве оператора, заменяющего операторы $C_x \mu B_x^{*-1} C_x^*$, естественно выбрать такой оператор D , для которого выполняется условие энергетической эквивалентности операторов $W = B_x^{-1} D$ и $V = B_x^{-1} C_x \mu B_x^{*-1} C_x^*$, т.е. условия типа $\alpha (W\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq (V\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq \beta (W\mathbf{u}, \mathbf{u})$ с продолжительными числовыми константами α и β .

Положим $D = -k\Lambda_2$, где k – некоторый числовой коэффициент, а Λ_2 – трехточечный разностный аналог (2.42) оператора $\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial}{\partial x} \right)$. Тогда схема (2.49) перейдет в схему

$$\begin{aligned} & [B_x L + \tau \sigma (C_x Q - k\Lambda_2)] (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) / \tau + C_x \mathbf{F}^m - \mu \mathbf{q}^m = B_x \bar{\mathbf{g}}, \\ & C_x^* \mathbf{u}^m = -B_x^* \mathbf{q}^m. \end{aligned} \quad (2.50)$$

От схемы (2.49) схема (2.50) отличается членами порядка $O(\tau)$; на установившемся решении эта разница исчезает.

Согласно (2.50), по известной сеточной функции \mathbf{u}^m определяется функция $\mathbf{q}^m = -B_x^{*-1} C_x^* \mathbf{u}^m$, затем вычисляется выражение $C_x (\mathbf{F}^m - \mu \mathbf{q}^m)$, после чего в результате обращения трехточечного оператора $B_x L + \tau \sigma (C_x Q - k\Lambda_2)$ определяется искомая функция \mathbf{u}^{m+1} .

Схеме (2.50) соответствует следующая схема с постоянными симметрическими матрицами K и μ ($\mu > 0$):

$$(E + \sigma \tau N K + \sigma \tau k W) (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) / \tau + (N K + V) \mathbf{u}^m = 0,$$

где $W = -B_x \Lambda_2$, $N = B_x^{-1} C_x$.

При надлежащем выборе постоянной k , по крайней мере в случае коммутативных матриц K и μ , эта схема будет абсолютно устойчивой при $\sigma \geq 0,5$. Действительно, после умножения ее на $(N K + V)^*$ получается

равенство

$$\mathfrak{B}(u^{m+1} - u^m)/\tau + A_1^* A_1 u^m = 0, \quad (2.51)$$

где $A_1 = NK + V$, а

$$\mathfrak{B} = [(NK + V)^* + (NK + V)^*(kW - \sigma V) + \sigma \tau A_1^* A_1].$$

Схема (2.51) будет абсолютно устойчивой в норме $\| \cdot \|_{A_1^* A_1}$ при выполнении неравенства $\mathfrak{B} \geq 0,5 \tau A_1^* A_1$ [46]; таким образом, при $\sigma \geq 0,5$ достаточно показать, что найдется константа k , для которой второе слагаемое в операторе \mathfrak{B} неотрицательно (первое слагаемое в нем положительно по построению операторов NK и V).

Выбор константы k можно осуществить следующим образом. Перепишем условие неотрицательности второго слагаемого в операторе \mathfrak{B} в виде двух неравенств:

$$\sigma(NK)^*(kW - V) \geq 0; \quad (2.52a)$$

$$\sigma V^*(kW - V) \geq 0. \quad (2.52b)$$

Обозначая через X левую часть неравенства (2.52a), после простых выкладок с использованием коммутативности матриц K и μ , а также выражения для оператора $D = -k\mu\Delta_2 = -k\mu C_x^* C_x$ нетрудно получить равенство

$$X = \mu(C_x K)^*(C_x C_x^*)(B_x B_x^*)^{-1} \sigma(kB_x^* - E)(B_x^*)^{-1}.$$

Скалярное произведение (Xv, v) теперь можно переписать в виде

$$(Xv, v) = \sigma(\mu(C_x K)^*[kB_x - E](B_x^*)^{-1}y, y),$$

где $y = (B_x^{-1} C_x)^* v$. После введения обозначения $z = (B_x^*)^{-1} y$ последнее равенство переходит в

$$(Xv, v) = \sigma(\mu S z, z), \quad (2.53)$$

причем оператор S задается формулой $S = B_x (C_x K)^* (kB_x^* - E)$. Теперь ясно, что константу k следует выбрать так, чтобы оператор S был неотрицательным. Для определения самосопряженной составляющей $S^{(0)}$ оператора S достаточно воспользоваться равенством

$$B_x B_x^* = A_0^2 - \Delta_0^2/16 = E + \Delta_2/12 - 5\Delta_2^2/144,$$

справедливым в силу того, что $A_0 = E + \Delta_2/6$ и $\Delta_0^2 = 4\Delta_2 + \Delta_2^2$, а также тем фактом, что самосопряженная составляющая оператора $B_x (C_x K)^*$, согласно п. 1.9, равна $MK\Delta_2^2/24h$. После несложных преобразований получается следующее выражение для $S^{(0)}$:

$$S^{(0)} = \frac{0,5}{h}(-\Delta_2) \left[kE - \left(\frac{1}{12}k + \frac{1}{12} \right) (-\Delta_2) - \frac{5}{144} k\Delta_2^2 \right] MK.$$

Поскольку $\Delta_2^2 < 4(-\Delta_2)$, оператор в квадратных скобках превосходит оператор $kE - (k+1)(-\Delta_2)/12 + 5\Delta_2/36$. Но так как $-\Delta_2 \leq 4E$, то последний будет положительным при выполнении неравенства

$$k \geq 3. \quad (2.54)$$

Для таких значений k в силу положительности матрицы MK и оператора $(-\Delta_2)$ оператор $S^{(0)}$ будет положительным и скалярное произведение (2.53) для положительной симметрической матрицы μ , коммутативной с S , будет также положительным. Но это и означает выполнение неравенства (2.52а).

Левую часть неравенства (2.52б) можно переписать в виде

$$\sigma \mu (B_x B_x^*)^{-2} (C_x C_x^*) (k B_x^* - E). \quad (2.55)$$

Так как $\mu (B_x B_x^*)^{-2} (C_x C_x^*)$ — положительный самосопряженный оператор, коммутативный с оператором в скобках, то для неотрицательности оператора (2.55) достаточно, чтобы был неотрицательным оператор $k B_x^* - E$.

Но так как $B^* > (1/3)E$, то неравенство $k B^* - E > 0$ выполняется, если только $k > 3$. Таким образом, при выборе k , согласно (2.54), справедливы оба неравенства (2.52) и схема (2.51) абсолютно устойчива в норме $\|\cdot\|_{A^*A}$. Применение схемы (2.50) вместо исходной схемы (2.49), как уже отмечалось, позволяет использовать для решения разностных уравнений трехточечную прогонку с матрицами $p \times p$, а не $2p \times 2p$. Цена этого — первый порядок аппроксимации относительного шага τ и более сильные предположения коммутативности матриц M и μ при доказательстве устойчивости независимо от шага τ . Первый из этих факторов, как уже отмечалось, является не столь существенным, если интерес представляет не процесс изменения решения со временем, а стационарное решение, достигаемое в процессе установления.

Что касается коммутативности матриц M и μ , то она всегда имеет место в скалярном случае ($p = 1$). В практически интересных случаях (например, течения вязкого газа) эти матрицы являются некоммутирующими, переменными и, более того, зависящими в каждый момент времени от решения. Поэтому приведенное выше обоснование устойчивости, как и предыдущие аналогичные обоснования, носят оценочный характер. Однако оно позволяет надеяться, что при надлежащих граничных условиях на практике схема будет обладать достаточным запасом устойчивости, т.е. возможностью счета при достаточно больших отношениях τ/h .

Как и в скалярном случае, существует и другая возможность сведения системы (2.41) с диффузионными членами к системе уравнений первого порядка. Эта возможность реализуется в случае постоянной матрицы μ . Введя новую зависимую переменную — векторную функцию $q = \partial^2 u / \partial x^2$, систему (2.41) можно переписать в виде

$$\partial f / \partial t + \partial F / \partial x = \mu \bar{q} + g, \quad (2.56)$$

Для построения аппроксимации высокого порядка системы (2.56) достаточно первое из них рассматривать как векторное уравнение переноса с правой частью, а второе аппроксимировать при помощи оператора \mathcal{A} из (2.11). В частности, возможна следующая двухслойная схема с весами:

$$\begin{aligned} B_x (f^{m+1} - f^m) / \tau + C_x \bar{q} &= \mu \bar{q} + g, \\ \Delta_2 u^{m+1} &= h^2 \mathcal{A} q^{m+1}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

где черта, как и ранее, среднее с весом σ , $(\mathcal{A}q)_i = (q_{i-1} + 10q_i + q_{i+1})/12$. Погрешность аппроксимации схемы (2.57) имеет порядок $O(h^3 + \|\mu\| h^4)$.

После исключения переменной q и линеаризации обращаемого оператора

схема (2.57) может быть записана в следующей форме:

$$\begin{aligned} [B_x L + \tau \sigma (C_x Q - \mu h^{-2} \mathcal{A}^{-1} \Delta_2)] (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) / \tau + C_x \mathbf{F}^m - \mu B_x \mathbf{q}^m = B_x \mathbf{g}, \\ \Delta_2 \mathbf{u}^m = h^2 \mathcal{A} \mathbf{q}^m. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Ее аналог в случае постоянных матриц имеет вид

$$[E + \sigma \tau (NK + V_1)] (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) / \tau + (NK + V_1) \mathbf{u}^m = 0, \quad (2.59)$$

где $V_1 = -\mu B_x^{-1} \mathcal{A}^{-1} \Delta_2 / h^2$.

Легко видеть, что оператор $\mathcal{A}^{-1} \Delta_2$ — отрицательный самосопряженный. Простейшие выкладки показывают, что это приводит к положительности оператора V_1 и, следовательно, оператора $NK + V_1$. Таким образом, при $\sigma \geq 0,5$ схема (2.59) является абсолютно устойчивой.

Как и в случае новой независимой переменной \mathbf{q} из (2.48), схема (2.57) после линеаризации функций \mathbf{f} и \mathbf{F} может быть представлена в виде системы трехточечных разностных уравнений относительно вектора \mathbf{z} , компонентами которого являются компоненты векторов \mathbf{u} и \mathbf{q} . Эта система решается, в частности, методом векторной прогонки с матрицами размерности $2p \times 2p$. Для того чтобы использовать прогонку с матрицами $p \times p$, достаточно в обрабатываемом операторе в (2.58) член $-\mu h^{-2} \mathcal{A}^{-1} \Delta_2$ заменить на член $-\mu k \Delta_2$, где k — некоторый числовой коэффициент. Используя аналогичные приведенным выше рассуждения, легко установить, что неравенства типа (2.52), в которых под V понимается V_1 , а под W — оператор $\mu B_x^{-1} (-\Delta_2) / h^2$, выполняются в случае коммутативных матриц K и μ при $k \geq 3/2$. Но это будет означать устойчивость такой модифицированной схемы в норме $\| \cdot \|_{A_1^* A_1}$, где $A_1 = NK + V_1$.

Замена оператора $\mathcal{A}^{-1} \Delta_2$ на энергетически эквивалентный ему оператор превращает обрабатываемый оператор в трехточечный (2.58), но понижает порядок аппроксимации схемы относительно шага τ до первого независимо от выбора весового множителя σ . Однако на установившемся решении порядок погрешности схемы оказывается не зависящим от τ и равным $O(h^3 + \| \mu \| h^4)$.

Схемы с факторизованными операторами. Использование приближенной факторизации обрабатываемых операторов позволяет, как и в скалярном случае, конструировать схемы, в которых разностные аналоги диффузионных членов в меньшей степени усложняют процесс решения разностных уравнений. Одно из семейств двухслойных факторизованных схем для (2.41) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} (L + \sigma \tau B_x^{-1} C_x Q) (E - \sigma \tau L^{-1} \delta_2) \frac{\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m}{\tau} + L_h \mathbf{u}^m = \bar{\mathbf{g}}, \\ L_h \mathbf{u}^m = B_x^{-1} C_x \mathbf{F}^m - \delta_2 \mathbf{u}^m. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Через $\delta_2 \mathbf{u}^m$ в (2.60) обозначена некоторая аппроксимация порядка l производной $\frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial}{\partial x}$ при $t = t_m$. Общий порядок аппроксимации схемы (2.60) зависит от выбора оператора δ_2 , на установившемся решении погрешность этой схемы не зависит от шага τ и может быть представлена в виде $O(h^3 + \| \mu \| h^l)$.

Схемы с факторизованными операторами подробно описаны и исследованы в [41, 47]. В силу неотрицательности оператора $B_x^{-1}C_xQ$ и отрицательности оператора δ_2 устойчивость схемы (2.60) следует из общей теории.

Схему (2.60) можно заменить эквивалентной схемой дробных шагов вида

$$\begin{aligned}(B_x L + \sigma \tau C_x Q) \xi^{1/2} &= -\tau B_x L_h u^m = -\tau (C_x F^m - B_x \delta_2 u^m), \\ (L - \sigma \tau \delta_2) \xi^1 &= L \xi^{1/2},\end{aligned}\tag{2.61}$$

где $\xi^{1/2}$ – некоторый промежуточный вектор, $\xi^1 = u^{m+1} - u^m$. Уравнения для $\xi^{1/2}$ с точностью до правой части совпадают с уравнениями для случая отсутствия диффузии и могут быть решены методом векторной прогонки с матрицами $p \times p$. Уравнения для ξ^1 не содержат аппроксимации конвективных членов; их структура определяется выбором оператора δ_2 .

В некоторых случаях в качестве оператора δ_2 разумно использовать оператор Λ_2 , определяемый формулой (2.42). При этом порядок погрешности аппроксимации схемы (2.60), зависящий от шага h , оказывается равным $O(h^3 + \|\mu\| h^2)$.

Следует иметь в виду, однако, что применение факторизованных схем типа (2.60) требует некоторой аккуратности при формулировке граничных условий при определении промежуточной функции $\xi^{1/2}$, не имеющей физического смысла.

2.5. Применение внутренних итерационных процессов

О роли внутренних итераций. При практическом использовании рассматриваемых алгоритмов иногда желательно обращать операторы в том или ином смысле более простые, чем те, которые диктуются выбранной схемой. Например, в некоторых ситуациях может оказаться целесообразным использовать схему (2.49) с достаточно высоким порядком аппроксимации относительно шага τ , но оставаться при этом в рамках векторных прогонок с матрицами $p \times p$. В других случаях векторные прогонки вообще могут оказаться нежелательными и т.д.

Естественным путем замены операторов на более простые является введение внутренних итерационных процессов, когда на каждом шаге по времени производятся итерации с решением разностных уравнений желаемого вида. В случае сходимости итераций получаемая сеточная функция должна совпадать с функцией u^{m+1} , определяемой оператором перехода выбранной схемы.

Использование итераций является невыгодным с точки зрения распараллеливания алгоритма, однако если число итераций невелико, то оно может оказаться целесообразным при использовании ЭВМ с последовательным выполнением действий. Например, прогонки с обращением матриц $p \times p$ в некоторых задачах требуют больше арифметических операций, чем несколько итераций с p скалярными прогонками.

Целесообразность внутренних итераций с более простыми обрабатываемыми операторами существенно возрастает в тех случаях, когда необходимость итераций на каждом временном слое диктуется другими соображениями. Характерным примером может служить ситуация, когда система типа (2.41) является частью более общей модели, а в соответствующем алго-

ритме выполнение операций, связанных с ее решением, должно происходить вслед за (или перед) решением остальных уравнений. В этом случае попеременное решение групп уравнений на каждом временном шаге может существенно повысить устойчивость метода. Именно так обстоит дело при расчетах турбулентных течений, описываемых полумпирическими моделями турбулентности в виде дополнительных дифференциальных уравнений, а также при учете сил плавучести в стратифицированной среде.

Другим примером является итерирование на каждом временном слое, обусловленное нелинейностью исходных уравнений. Такое итерирование может оказаться выгодным, в частности, если использование сеточной функции u^{m+1} при вычислении матриц L и Q в обрабатываемом операторе существенно снижает ограничение на шаги по времени.

Возможны различные варианты внутренних итераций; ниже будут рассмотрены некоторые из них.

Итерации, связанные с оператором диффузионных членов. Поскольку введение разностного аналога диффузионных членов может усложнить процесс решения разностных уравнений, естественно попытаться заменить его на более простой, т.е. на такой, который допускает обращение оператора перехода не более сложное, чем в случае отсутствия диффузионных членов, но при этом после сходимости итераций не влияет на первоначальную структуру алгоритма.

Рассмотрим схему

$$(L + \tau \sigma NQ + \tau \sigma V)(u^{m+1} - u^m)/\tau + (NF^m + Vu^m) = \bar{g}, \quad (2.62)$$

где $N = B_x^{-1}C_x$, а V — оператор, аппроксимирующий диффузионные члены. В частности, схема (2.62) получается из схемы третьего порядка (2.9) после исключения функции q и умножения левой и правой части на B_x^{-1} ; при этом $V = B_x^{-1}C_x \mu B_x^{*-1}C_x$. Введя оператор W желаемой структуры, схему (2.62) можно переписать в эквивалентном виде:

$$(L + \tau \sigma NQ + \tau \sigma kW)(u^{m+1} - u^m)/\tau + \sigma(V - kW)(u^{m+1} - u^m) = \bar{g} - NF^m - Vu^m, \quad (2.63)$$

где k — некоторый коэффициент.

Равенство (2.63) естественным образом определяет следующий итерационный процесс:

$$(L + \tau \sigma NQ + \tau \sigma kW)\tilde{u}^{l+1} + \tau \sigma(V - kW)\tilde{u}^l = \tau(\bar{g} - NF^m - Vu^m), \quad (2.64)$$

где $\tilde{u}^l = u^{m+1, l} - u^m$, а l — номер итерации. Согласно алгоритму (2.64), в течение каждой $(l + 1)$ -й итерации происходит обращение оператора

$$B_x L + \tau \sigma C_x Q + \tau \sigma k B_x W,$$

причем сеточная функция $B_x(V - kW)\tilde{u}^l$ вычисляется по известной из предыдущей итерации функции \tilde{u}^l . В случае, если $V = B_x^{-1}C_x \mu B_x^{*-1}C_x^*$, вычисление $B_x V \tilde{u}^l$ само по себе требует обращения оператора B_x^* :

$$B_x V \tilde{u}^l = C_x \mu B_x^{*-1} C_x^* \tilde{u}^l = C_x \mu q^l,$$

где

$$B_x^* q^l = C_x^* \tilde{u}^l.$$

При сходимости итераций выполняются равенства $\mathbf{u}^{m+1, l+1} = \mathbf{u}^{m+1, l} = \mathbf{u}^{m+1}$ и (2.64) переходит в (2.62). Практически в силу конечности числа итераций l_m отличие схемы (2.64) от схемы (2.62) при $l = l_m$ будет определяться недоитерированностью итерационного процесса (2.64).

Обращаясь для оценки сходимости итераций к случаю постоянных матриц и считая, не нарушая общности, что L и Q – соответственно единичная и симметрическая матрицы, итерационный процесс (2.64) с точностью до правой части можно представить в виде

$$(G + \tau A_2^* A_2) \tilde{\mathbf{u}}^{l+1} = \tau A_2^* A_2 \tilde{\mathbf{u}}^l, \quad (2.65)$$

где $A_2 = \sigma(kW - V)$, $G = A_2^* (E + \tau\sigma NQ + \tau\sigma V)$.

Пусть $W = B_x^{-1} \Lambda_2$; тогда если матрицы μ и Q коммутативны и выполняется условие $k \geq 3$, то в соответствии с рассуждениями, приведенными при обосновании неравенств (2.52), оператор A_2 является положительным. При этом легко доказывается неравенство

$$\tau \| (G + \tau A_2^* A_2)^{-1} A_2^* A_2 \| < 1, \quad (2.66)$$

означающее сходимость итерационного процесса.

В скалярном случае ($p = 1$) для собственных значений λ оператора перехода от m -й к $(m + 1)$ -й итерации может быть получено следующее выражение:

$$|\lambda|^2 = \frac{\nu^2}{1 + \nu^2 + \Delta(\alpha)} l^2. \quad (2.67)$$

Здесь

$$\nu = 4k\mu_{11}(\tau/h^2) \sin^2(\alpha/2) / \Phi(\alpha),$$

$$l^2 = \left[\left(\frac{1}{3} \cos \alpha + \frac{2}{3} - \frac{1}{k} \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha \right] / \Phi(\alpha),$$

$$\Phi(\alpha) = \left[\left(\frac{1}{3} \cos \alpha + \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha \right],$$

μ_{11} – единственный элемент матрицы μ , а $\Delta(\alpha)$ – некоторая неотрицательная функция. Очевидно, что при $k \geq 3$ имеет место неравенство $l < 1$, откуда следует, что $|\lambda|$ меньше единицы при всех значениях шагов τ и h . На основании равенства (2.67) можно также заключить, что сходимость особенно быстрая для низкочастотных гармоник, когда $|\lambda| = O(\alpha^2)$, $\alpha \ll 1$. Для быстрой сходимости высокочастотных гармоник полезно выбрать значение $k = 3$; тогда множитель l^2 можно привести к виду

$$l^2 = \frac{16 \sin^4 \frac{\pi - \alpha}{2} + \frac{9}{4} \sin^2(\pi - \alpha)}{\left(2 - 4 \sin^2 \frac{\pi - \alpha}{2} \right)^2 + \frac{9}{4} \sin^2(\pi - \alpha)}. \quad (2.68)$$

Из (2.68) следует, что при таком выборе k имеет место оценка $|\lambda| = O(\pi - \alpha)$, указывающая на быстрое уменьшение коротковолновых

составляющих погрешности ($\pi - \alpha \ll 1$). Существенно также отметить, что во всех случаях имеет место неравенство $|\lambda| < \gamma < 1$, где число γ не зависит от шагов сетки. Таким образом, на количество итераций до получения заданной точности число узлов расчетной области никак не влияет.

Итерации со скалярными прогонками. Основная идея сведения алгоритма с векторными прогонками к алгоритму со скалярными прогонками состоит в использовании в качестве обращаемых операторов, представимых в виде SGS^{-1} , где S — некоторая матрица, а G — матрично-разностный оператор, содержащий в качестве матричных коэффициентов лишь диагональные матрицы. Рассмотрим сначала случай обращения оператора B_x , когда приходится решать разностные уравнения вида

$$B_x \mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad B_x = A_0 - 0,25 \Delta_0 M, \quad (2.69)$$

где \mathbf{F} — некоторая известная сеточная функция, образованная значениями в узлах p — компонентного вектора. Если бы матрица M была постоянна, то систему (2.69) в силу равенства $M = SDS^{-1}$, $D = \text{diag} \{ \text{sgn} \lambda_i \}$, $i = \overline{1, p}$, можно было бы записать следующим образом:

$$S(A_0 - 0,25 \Delta_0 D) S^{-1} \mathbf{u} = \mathbf{F}. \quad (2.70)$$

Введением новой зависимой переменной $\mathbf{v} = S^{-1} \mathbf{u}$ система (2.70) приводится к p независимым уравнениям

$$(A_0 - 0,25 \Delta_0 \kappa_i) v^{(i)} = f^{(i)}, \quad i = \overline{1, p}, \quad \kappa_i = \text{sgn} \lambda_i, \quad (2.71)$$

где $v^{(i)}$ и $f^{(i)}$ — компоненты векторов $S^{-1} \mathbf{u}$ и $S^{-1} \mathbf{F}$ соответственно, а λ_i — собственные значения матрицы $K = L^{-1} Q$.

После решения уравнений (2.71) методом трехточечной скалярной прогонки определяется вектор \mathbf{v} , а затем вектор $S \mathbf{u}$. В случае переменных матриц, обозначив левую часть (2.70) через $SGS^{-1} \mathbf{u}$, можно построить следующий итерационный процесс для решения системы (2.69):

$$G_1 \mathbf{u}^{l+1} + (B_x - G_1) \mathbf{u}^l = \mathbf{F}, \quad G_1 = SGS^{-1}. \quad (2.72)$$

Сеточная функция $(B_x - G_1) \mathbf{u}^l$ с учетом равенства $A_0 = E + \Delta_2/6$ в индексном представлении записывается в виде

$$\begin{aligned} (B_x - G_1) \mathbf{u}^l &= \frac{1}{6} [(E - S_j S_{j+1}^{-1}) \mathbf{u}_{j+1}^l + (E - S_j S_{j-1}^{-1}) \mathbf{u}_{j-1}^l] - \\ &- \frac{1}{4} [(S_{j+1} - S_j) \varphi_{j+1} - (S_{j-1} - S_j) \varphi_{j-1}], \quad \varphi = DS^{-1} \mathbf{u}^l. \end{aligned}$$

В случае гладких элементов матриц $S(x)$ разности $E - S_j S_{j-1}^{-1}$, $E - S_j S_{j+1}^{-1}$, $S_{j-1} - S_j$, $S_{j+1} - S_j$ имеют элементы порядка $O(h)$; нетрудно установить, что при этом $\|B_x - G\| = O(h)$. Если же элементы матриц S терпят разрывы первого рода вследствие либо переключения оператора B_x при смене знаков λ_i ($i = \overline{1, p}$), либо разрывности решения \mathbf{u} , то элементы разностей матриц $\Delta_{\mp} S_j$ имеют порядок $O(1)$. Если при этом число точек разрыва конечно при $h \rightarrow 0$, то порядок среднеквадратичной нормы $\|B_x - G\|$ может быть оценен в виде $O(\sqrt{h})$. Принимая во внимание эти соображения при оценке сходимости итераций (2.72), можно надеяться на то, что при некоторых конечных шагах h норма оператора перехода

$G_1^{-1}(B_x - G_1)$ удовлетворяет неравенству

$$\|G_1^{-1}(B_x - G_1)\| \leq \|G_1^{-1}\| \|B_x - G_1\| < 1. \quad (2.73)$$

Однако выполнение неравенства (2.73) сильно зависит от поведения решения u исходной задачи, и поэтому выяснение того, сходится ли процесс (2.72) с заданной точностью за разумное число итераций, требует экспериментальной проверки.

При обращении оператора $B_x L + \tau \sigma C_x Q$ итерационный процесс может быть записан аналогичным образом:

$$G_1 u^{l+1} + (B_x L + \tau \sigma C_x Q - G_1) u^l = F, \quad (2.74)$$

где G_1 — оператор, представимый в виде SGS^{-1} , причем матрично-разностный оператор G содержит только диагональные матрицы. Для конструирования оператора G_1 вновь обратимся к случаю постоянных матриц. Замечая, что операторы B_x и C_x построены при помощи матрицы M , равной $M = S_1 DS_1^{-1}$, где $S_1 = L^{-1}S$, а S — матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы $K = L^{-1}Q$, перепишем (2.74) после умножения на L^{-1} в виде

$$\begin{aligned} S [A_0 - \Delta_0 D + 0,5 \sigma \tau h^{-1} (\Delta_0 \Lambda - \Delta_2 D \Lambda)] S^{-1} u^{l+1} = \\ = L^{-1} [F - (B_x L + \tau \sigma C_x Q - G_1) u^l]. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Оператор в квадратных скобках содержит диагональные матрицы $D = \text{diag} \{ \text{sgn } \lambda_i \}$ и $\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_i \}$, $i = \overline{1, p}$, так что оператор, действующий на u^{l+1} , после перехода к новой векторной функции $v = S^{-1} u^{l+1}$ обращается при помощи скалярных прогонок. Отсюда следует, что в качестве оператора G_1 в (2.74) достаточно использовать оператор, действующий на u^{l+1} в равенстве (2.75). При этом рассуждения о сходимости итераций полностью совпадают с приведенными выше по поводу итерационного процесса (2.72).

Рассмотрим, наконец, случай уравнений с диффузионными членами, когда приходится обращать оператор типа

$$B_x L + \sigma C_x Q + \tau \sigma V, \quad (2.76)$$

где оператор V содержит матрицу μ . В общем случае даже при постоянных матрицах L , Q и μ его нельзя представить в виде SGS^{-1} , поскольку из-за некоммутативности матриц L , Q и μ не существует преобразований, одновременно приводящих их к диагональному виду. Однако замена на каждой итерации матрицы μ на некоторую положительную симметрическую матрицу, представимую в виде $S \mu_1 S^{-1}$, где матрица μ_1 диагональна, опять-таки приводит к возможности обращения оператора перехода при помощи скалярных прогонок. При такой замене естественно заменить и сам оператор V на некоторый трехточечный оператор, т.е. фактически совместить итерации, связанные с изменением матриц, с описанными выше итерациями при наличии диффузии. В этом случае одновременно решаются проблема замены векторных прогонок скалярными и проблема обращения операторов, содержащих сложные аппроксимации диффузионных членов:

Выбор матрицы μ_1 , очевидно, можно произвести многими способами. В качестве μ_1 можно выбрать матрицу вида $l \|\mu\| I$, $l = \text{const}$, где I — еди-

ничная матрица. Структуру обращаемого оператора с диагональными матрицами при этом можно представить в виде

$$S [A_0 - \Delta_0 D + 0,5 \sigma h^{-1} (\Delta_0 \Lambda - \Lambda_2 D \Lambda + k_1 h^{-1} \mu_1 \Delta_2)] S^{-1},$$

где оператор $S \mu_1 S^{-1} \Delta_2 / h^2$ используется как альтернатива оператору $B_x W = \Lambda_2$ в итерационном процессе (2.63), а k_1 — некоторый положительный коэффициент, определяемый аналогично коэффициенту k из (2.63), но с учетом коэффициента l , появившегося при замене матрицы μ на $S \mu_1 S^{-1}$. Выбор коэффициентов k_1 и l должен обеспечить положительность соответствующих операторов и сходимость итераций по крайней мере в случае постоянных матриц.

При оценках целесообразности сведения векторных прогонок к скалярным основную роль играет количество необходимых итераций. Если учесть, что скалярные прогонок можно осуществлять одновременно, то при небольшом числе итераций такая редукция может оказаться выгодной даже при применении компьютеров, допускающих распараллеливание. Само собой разумеется, что все это зависит от специфики решаемой задачи.

3. ПРИМЕНЕНИЕ КОМПАКТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ В МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ

3.1. Неявные компактные схемы в случае нескольких пространственных координат

Матрично-разностные операторы. Принципы построения компактных аппроксимаций с направленными разностями, изложенные выше, можно без труда перенести на случай многомерных задач. Пусть требуется аппроксимировать систему без диффузионных членов

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j(\mathbf{u}, x_j)}{\partial x_j} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, x), \quad (3.1)$$

в которой \mathbf{u} , \mathbf{f} , \mathbf{g} и F_j ($j = \overline{1, n}$) — p -компонентные векторы, причем матрицы $L = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u}$, $Q_j = \partial F_j / \partial \mathbf{u}$ — симметрические, а матрица L , кроме того, положительна. Для каждой из координатных осей x_j введем разностную сетку

$$\omega_j \{ x_j^{(k_j)} = h_j k_j, \quad k_j = 0, \mp 1, \mp 2, \dots \}$$

с постоянным шагом h_j . Используя матрицы S_j , столбцами которых являются собственные векторы матриц $L^{-1} Q_j$, соответствующие их собственным значениям $\lambda_k^{(j)}$ ($k = \overline{1, p}$), можно построить операторы B_{x_j} и C_{x_j} , полностью аналогичные B_x и C_x из (1.65):

$$B_{x_j} = (A_0^j - 0,25 \Delta_0^j M_j), \quad C_{x_j} = 0,5 (\Delta_0^j - \Delta_-^j (T_{1/2}^j M_j) \Delta_+^j) / h_j. \quad (3.2)$$

Здесь верхний индекс j отмечает принадлежность переменной x_j операторов центральных Δ_0 , левых Δ_- и правых Δ_+ разностей, а также операторы сдвига T_k^j на расстоянии kh_j :

$$T_k^j \mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) = \mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_j + kh_j, \dots, x_n), \\ \Delta_0^j = T_1^j - T_{-1}^j, \quad \Delta_-^j = E - T_{-1}^j, \quad \Delta_+^j = T_1^j - E;$$

при этом оператор A_0^j определяется равенством $A_0^j = (T_1^j + 4E + T_{-1}^j)/6$, а M_j – матрицы, зависящие от знаков собственных значений $\lambda_k^{(j)}$ и придающие характеристическую ориентацию операторам B_{x_j} и C_{x_j} : $M_j = S_j D_j S_j^{-1}$, где

$$D_j = \text{diag} \{ \text{sgn } \lambda_k^j, \text{sgn } \lambda_2^j, \dots, \text{sgn } \lambda_p^j \}.$$

Операторы B_{x_j} и C_{x_j} обладают следующим свойством: в случае достаточно гладкой функции $f(x)$ имеет место равенство

$$B_{x_j}^{-1} C_{x_j} f |_{x_j = kh_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{x_j = kh_j} + O(h_j^3). \quad (3.3)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться формальными разложениями в ряды Тэйлора для функций $B_{x_j} f$ и $C_{x_j} f$:

$$B_{x_j} f = \left(E - \frac{h_j}{2} D_{x_j} M_j + \frac{h_j^2}{6} D_{x_j}^2 \right) f + O(h_j^3), \quad (3.4)$$

$$C_{x_j} f = \left(E - \frac{h_j}{2} D_{x_j} M_j + \frac{h_j^2}{6} D_{x_j}^2 \right) D_{x_j} f + O(h_j^3),$$

в которых D_{x_j} – оператор дифференцирования по координате x_j . Из (3.4) следует, что $B_{x_j}^{-1} C_{x_j} = D_{x_j} + O(h_j^3)$.

В случае одного уравнения ($p = 1$) матрицы M_j вырождаются в скаляр $s_j = \text{sgn}(\partial f_j / \partial u)_j$, а операторы C_{x_j} и B_{x_j} переходят соответственно в ориентированные двухточечные разделенные разности и операторы A_{\mp} вида (1.6), определенные на сетке ω_j .

Структура компактных схем. Существует несколько возможностей использования операторов B_{x_j} и C_{x_j} для аппроксимации системы (3.1).

Одна из них состоит в обобщении случая, когда элементы матриц L и Q_j ($j = \overline{1, n}$) постоянны во всей расчетной области и уравнения (3.1) могут быть записаны в виде

$$L \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n Q_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = g. \quad (3.5)$$

При построении схемы третьего порядка системы (3.5) при помощи операторов B_{x_j} и C_{x_j} ($j = \overline{1, n}$) можно рассуждать следующим образом. Третий порядок будет гарантирован, если после подстановки в схему разложений (3.4) аппроксимация каждого слагаемого в (3.5) будет со-

держивать произведение $\prod_{j=1}^n \left(E - \frac{h_j}{2} D_{x_j} M_j + (h_j^2/6) D_{x_j}^2 \right)$ и, кроме того, в аппроксимации члена $Q_k (\partial u / \partial x_k)$ будет присутствовать оператор дифференцирования D_{x_k} . Все эти условия будут выполнены, если схему для (3.5) записать в виде (для краткости записи положено $B_j = B_{x_j}$, $C_j = C_{x_j}$)

$$B(f^{m+1} - f^m)/\tau + \sum_{j=1}^n G_j \overline{F}_j - B\overline{g} = 0, \quad f = Lu, \quad \overline{F}_j = Q_j \overline{u}, \quad (3.6)$$

где $B = B_1 B_2 \dots B_n$, $G_j = B_1 B_2 \dots B_{j-1} C_j B_{j+1} \dots B_n$ ($j = \overline{1, n}$). Действительно, подставляя в схему (3.6) разложения (3.4), нетрудно заметить,

что все слагаемые, соответствующие сумме $\sum_{j=1}^n G_j \bar{F}_j$, с точностью до членов третьего порядка относительно шагов h_j будут содержать произведения

$$\begin{aligned} & \left[E - \frac{h_1}{2} D_{x_1} M_1 + \frac{h_1^2}{6} D_{x_1}^2 \right] \dots \left[E - \frac{h_{k-1}}{2} D_{x(k-1)} M_{k-1} + \right. \\ & \left. + \frac{h_{k-1}^2}{6} D_{x(k-1)}^2 \right] \left[E - \frac{h_k}{2} D_{xk} M_k + \frac{h_k^2}{6} D_{xk}^2 \right] D_{xk} \times \\ & \times \left[E - \frac{h_{k+1}}{2} D_{x(k+1)} M_{k+1} + \frac{h_{k+1}^2}{6} D_{x(k+1)}^2 \right] \dots \\ & \dots \left[E - \frac{h_n}{2} D_{xn} M_n + \frac{h_n^2}{6} D_{xn}^2 \right], \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.7)$$

при этом оператор B с такой точностью будет иметь вид

$$\prod_{j=1}^n \left(E - \frac{h_j}{2} D_{xj} M_j + \frac{h_j^2}{6} D_{xj}^2 \right).$$

Ввиду коммутативности всех операторов с операторами D_{xk} , имеющей место в случае постоянных матриц L и Q_j , D_{xk} можно переместить, сделав его последним сомножителем, в произведение (3.7). После умножения (3.6) на $\left[\prod_{j=1}^n \left(E - (h_j/2) D_{xj} M_j + (h_j^2/6) D_{xj}^2 \right) \right]^{-1}$ окончательно схема запишется в виде

$$\frac{\mathbf{f}^{m+1} - \mathbf{f}^m}{\tau} + \sum_{j=1}^n D_{xj} \bar{F}_j = \mathbf{g} + O(h_1^3 + h_2^3 + \dots + h_n^3),$$

откуда следует, что погрешность аппроксимации равна

$$O((\sigma - 0,5) \tau + \tau^2 + h_1^3 + h_2^3 + \dots + h_n^3).$$

В случае переменных матриц можно сохранить форму записи (3.6), добавив в нее дополнительное слагаемое \mathbf{H} , учитывающее некоммутативность соответствующих операторов. Это дополнительное слагаемое можно получить из следующих соображений. Перестановка операторов D_{xj} и B_{xk} приводит к равенству

$$D_{xj} B_{xk} = B_{xk} D_{xj} + (h_k/2) a_{kj}, \quad (3.8)$$

где $a_{kj} = (D_{xk} M_k D_{xj} - D_{xj} D_{xk} M_k)$.

Пусть $a_{kj}^{(h)} F_j$ — аппроксимации второго порядка точности членов вида $a_{kj} F_j$. Тогда, согласно (3.8), перестановка оператора дифференцирования D_j с любым оператором B_{xk} с точностью до $O(h_k^3)$ не изменит порядок аппроксимации слагаемого с F_j , если в правую часть (3.6) добавить член $(a_{kj}^{(h)} h_k/2) \left(\prod_{i=k+1}^n B_{xi} \right) F_j$ ($k \leq n-1$), $(a_{nj}^{(h)} h_n/2) \bar{F}_j$ ($k = n$).

Осуществляя такие перестановки в каждом из слагаемых в $\sum_{j=1}^n G_j \mathbf{F}_j^{m+1}$ до тех пор, пока оператор D_{x_j} не окажется перед \mathbf{F}_j , получим окончательно, что схема (3.6) будет схемой порядка $O(\tau + h_1^3 + \dots + h_n^3)$, если вместо правой части \mathbf{g} ввести новую правую часть $\bar{\mathbf{g}}^{m+1} = \mathbf{g}^{m+1} + \mathbf{H}^m$, где

$$\mathbf{H}^m = \sum_{j=1}^n (8h_j)^{-1} \left[\sum_{k=j+1}^{n-1} \omega_{kj} \left(\prod_{i=k+1}^n B_{xi} \right) + \omega_{nj} \right] \bar{\mathbf{F}}_j, \quad (3.9)$$

$$\omega_{kj} = \Delta_0^k M_k \Delta_0^j - \Delta_0^j \Delta_0^k M_k.$$

В слагаемое \mathbf{H}^m входят значения сеточных функций в трех узлах в каждом из пространственных направлений x_j , и, следовательно, первоначальный шаблон схемы при наличии \mathbf{H}^m не изменяется.

Другой способ аппроксимации системы (3.1) состоит в непосредственном применении операторов $B_{x_j}^{-1} C_{x_j}$ в качестве формул численного дифференцирования (3.3). При этом удобно ввести новые сеточные функции

$$\mathbf{Y}_j = B_{x_j}^{-1} C_{x_j} \mathbf{F}_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.10)$$

записав разностный аналог (3.1) с погрешностью $O((\sigma - 0,5)\tau + \tau^2 + h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2)$ в виде

$$\frac{\mathbf{f}^{m+1} - \mathbf{f}^m}{\tau} + \sum_{j=1}^n \bar{\mathbf{Y}}_j = \bar{\mathbf{g}}, \quad (3.11)$$

где черта, как и ранее, означает осреднение с весом σ .

Используя линеаризацию вида

$$\mathbf{f}^{m+1} = \mathbf{f}^m + L(\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) + O(\|\delta\|^2),$$

$$\mathbf{F}_j^{m+1} = \mathbf{F}_j^m + Q_j(\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) + O(\|\delta\|^2),$$

где $L = (\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u})_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^m}$, $Q_j = (\partial \mathbf{F}_j / \partial \mathbf{u})_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^m}$, $\delta = \mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m = O(\tau)$, схему (3.11) с точностью до членов первого порядка малости относительно τ можно заменить на схему

$$\left(L + \sigma \tau \sum_{j=1}^n B_{x_j}^{-1} C_{x_j} Q_j \right) \frac{\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m}{\tau} + \sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_j^m = \bar{\mathbf{g}}. \quad (3.12)$$

Чтобы при помощи этой схемы определить сеточную функцию \mathbf{u}^{m+1} , необходимо предварительно определить функции \mathbf{Y}_j^m из систем уравнений

$$B_{x_j} \mathbf{Y}_j^m = \mathbf{F}_j^m, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.13)$$

а затем обратить оператор $L + \sigma \tau \sum_{j=1}^n B_{x_j}^{-1} C_{x_j} Q_j$.

Схему (3.6) также удобно заменить линеаризованной схемой

$$\left(BL + \sigma \tau \sum_{j=1}^n G_j Q_j \right) \frac{\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m}{\tau} + \sum_{j=1}^n G_j \mathbf{F}_j^m = \bar{\mathbf{g}} + \mathbf{H}^m, \quad (3.14)$$

последняя при определении сеточных функций при $t = t_m$ не требует решения разностных уравнений.

Оценки устойчивости. Если под скалярным произведением (\mathbf{u}, \mathbf{v}) финитных векторных сеточных функций, определяемых на сетке $\omega_1 \times \omega_2 \times \dots \times \omega_n$, понимать сумму

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n = -\infty}^{\infty} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})_{i_1, i_2, \dots, i_n} h_1 h_2 \dots h_n,$$

то основные операторные неравенства, использовавшиеся выше, полностью сохраняются. В частности, операторы B_{xj} и C_{xj} удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} C_{xj} K_j > 0, \quad B_{xj}^* C_{xj} K_j > 0, \\ B_{xj}^{-1} C_{xj} K_j > 0, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где матрицы $K_j = L^{-1} Q_j$ и соответственно матрицы M_j , входящие в операторы B_{xj} и C_{xj} , предполагаются постоянными и — без нарушения общности — симметрическими.

Из третьего неравенства (3.15) немедленно следует условие абсолютной устойчивости схемы (3.12) в приближении замороженных коэффициентов. Действительно, (3.12) при $\mathbf{F} = 0$ можно переписать в виде

$$\left(E + \tau \sigma \sum_{j=1}^n B_{xj}^{-1} C_{xj} K_j \right) \frac{\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m}{\tau} + \sum_{j=1}^n B_{xj}^{-1} C_{xj} K_j \mathbf{u}^m = 0, \quad (3.16)$$

причем оператор $\sum_{j=1}^n B_{xj}^{-1} C_{xj} K_j$ положителен как сумма положительных операторов. Поэтому схема (3.16), будучи схемой с весами, абсолютно устойчива при $\sigma \geq 0,5$.

При оценке устойчивости схемы (3.14) ее также целесообразно представить как схему с весами. С учетом того что в случае постоянных матриц компенсирующая сеточная функция \mathbf{H}^m исчезает, равенство (3.14) после умножения на B^{-1} переходит в равенство

$$\left(E + \tau \sigma \sum_{j=1}^n \tilde{G}_j K_j \right) \frac{\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m}{\tau} + \sum_{j=1}^n \tilde{G}_j K_j \mathbf{u}^m = B^{-1} \bar{\mathbf{g}}, \quad (3.17)$$

где $\tilde{G}_j = B_{xn}^{-1} B_{x(n-1)}^{-1} \dots B_{xj}^{-1} C_{xj} B_{x(j+1)} \dots B_{x(n-1)} B_{xn}$.

Положительность операторов \tilde{G}_j легко устанавливается при дополнительном предположении о коммутативности постоянных матриц K_j ($j = 1, \dots, n$) с матрицами $K_{j+1}, K_{j+2}, \dots, K_n$. В этом случае

$$\begin{aligned} (\tilde{G}_j K_j \mathbf{u}, \mathbf{u}) &= (B_{xj}^{-1} C_{xj} K_j B_{x(j+1)} \dots B_n \mathbf{u}, (B_{x(j+1)}^*)^{-1} \dots (B_{xn}^*)^{-1} \mathbf{u}) = \\ &= (B_{xj}^{-1} C_{xj} K_j R_j \mathbf{v}, \mathbf{v}) = (B_{xj}^{-1} C_{xj} K_j \mathbf{w}, \mathbf{w}), \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $R_j = \prod_{i=j+1}^n B_{xi}^* B_{xi}$, $\mathbf{v} = (B_{x(j+1)}^*)^{-1} \dots (B_{xn}^*)^{-1} \mathbf{u}$, $\mathbf{w} = R_j^{1/2} \mathbf{v}$. В цепочке равенств (3.18) существенно использовалась возможность перестановки матрицы K_j на место после оператора C_{xj} , а также положительность самосопряженного оператора R_j , позволяющая ввести оператор $R_j^{1/2}$.

Ввиду положительности оператора $B_{xj}^{-1} C_{xj} K_j$ скалярное произведение в правой части последнего из равенств (3.18) положительно при $\mathbf{u} \neq 0$,

откуда следует положительность оператора \tilde{G}_j и абсолютная устойчивость схемы (3.17) при $\sigma \geq 0,5$.

Обращение линеаризованного оператора в (3.12) и (3.14), в принципе, можно осуществить при помощи разумно построенных итерационных процессов. Мы, однако, будем рассматривать схемы (3.12) и (3.14) как исходные при построении алгоритмов расщепления по пространственным координатам.

Задачи с диффузией. Принцип построения компактных схем для конвективно-диффузионных задач при наличии одной пространственной переменной полностью переносится на многомерный случай. Вместе с тем в этом случае может возникнуть необходимость аппроксимировать смешанные производные, не рассматривавшиеся ранее.

Аппроксимации смешанных производных не укладываются в принятую здесь стратегию построения схем с положительными операторами, поскольку смешанные производные не являются положительно или отрицательно определенными операторами. Это их свойство ставит под сомнение разумность включения соответствующих разностных операторов в оператор перехода от одного слоя $t = \text{const}$ к другому; наоборот, кажется целесообразным учитывать их на предшествующих рассматриваемому временных слоях.

Пусть вместо системы (3.1) рассматривается система

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j(\mathbf{u})}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mu_{ij} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}, \quad (3.19)$$

в которой матрицы μ_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) — неотрицательные симметрические.

Для аппроксимации членов со вторыми производными вида $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu_{ii} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right)$ в зависимости от специфики решаемой задачи и требова-

ний, предъявляемых к алгоритму, можно использовать, в частности, любой из описанных выше способов, применяя его для каждой из пространственных координат x_i ($i = \overline{1, n}$). Имея в виду третий порядок относительно шага h_j и обозначая через N_j оператор $B_{x_j}^{-1} C_{x_j}$, аппроксимации V_{jj} \mathbf{u} этих членов можно записать в виде

$$V_{jj} \mathbf{u} = -N_j \mu_{jj} N_j^* \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x_j} \mu_{jj} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + O(h_j^3). \quad (3.20)$$

В рамках этого же порядка аппроксимации смешанные производные естественно дискретизировать следующим образом:

$$V_{ij} \mathbf{u} = -\frac{1}{2} (N_i \mu_{ij} N_j^* + N_i^* \mu_{ij} N_j) \mathbf{u}, \quad (3.21a)$$

или

$$V_{ij} \mathbf{u} = -\frac{1}{2} (N_i \mu_{ij} N_j + N_i^* \mu_{ij} N_j^*) \mathbf{u}. \quad (3.21б)$$

Аппроксимации (3.21а) и (3.21б) построены таким образом, чтобы операторы V_{ij} , как и их дифференциальные прообразы $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$, были самосопряженными по крайней мере в случае постоянных матриц $\mu_{ij} = \mu_{ji}$.

Пусть матрицы μ_{ij} таковы, что оператор $\sum_{j=1}^n N_j N_j^*$ энергетически эквивалентен оператору $\sum_{i,j=1}^n V_{ij}$, т.е. выполняется условие

$$\beta \sum_{j=1}^n N_j \mu_{jj} N_j^* < \sum_{i,j=1}^n V_{ij} < \gamma \sum_{j=1}^n N_j \mu_{jj} N_j^* \quad (3.22)$$

с некоторыми константами $\gamma > 0, \beta > 0$. Тогда, если довольствоваться погрешностью $O(\tau)$ аппроксимации уравнения (3.19), абсолютно устойчивую двухслойную схему типа схемы (3.14) можно записать в виде

$$\left[L + \tau \sigma \sum_{j=1}^n (B_{x_j}^{-1} C_{x_j} Q_j + \gamma N_j \mu_{jj} N_j^*) \right] \frac{\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m}{\tau} + \sum_{j=1}^n N_j F_j(\mathbf{u}^m) - \sum_{i,j=1}^n V_{ij} \mathbf{u}^m = \mathbf{g}^m. \quad (3.23)$$

Схема (3.23) пригодна для использования (по крайней мере, в факторизованном виде) в решении стационарных задач: на установившемся решении она имеет погрешность $O(h_1^3 + h_2^3 + \dots + h_n^3)$ и, кроме того, абсолютно устойчива при $\sigma \geq 0,5$. Последнее вытекает из следующих соображений.

Схема (3.23) соответствует схема с постоянными матрицами

$$(E + \tau \sigma \mathcal{A} + \tau \sigma R) (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) / \tau + \mathcal{A} \mathbf{u}^m = 0, \quad (3.24)$$

в которой

$$\mathcal{A} = \sum_{j=1}^n B_{x_j}^{-1} C_{x_j} K_j + \sum_{i,j=1}^n V_{ij} > 0,$$

$$R = \gamma \sum_{j=1}^n N_j \mu_{jj} N_j^* - \sum_{i,j=1}^n V_{ij}$$

— самосопряженный и положительный в силу неравенств (3.22) оператор. Такая схема, согласно [46], должна быть абсолютно устойчивой в норме $\|\cdot\|_D$, $D = E + \tau \sigma R$ при $\sigma \geq 0,5$.

Оператор $N_j \mu_{jj} N_j^*$, в свою очередь, можно заменить оператором $D_j = -B_{x_j}^{-1} \mu_{jj} \Delta_2^j$, записав вместо схемы (3.23) схему

$$\left[L + \tau \sigma \sum_{j=1}^n B_{x_j}^{-1} (C_{x_j} Q_j - \gamma \mu_{jj} \Delta_2^j) \right] \frac{\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m}{\tau} + \sum_{j=1}^n N_j F_j(\mathbf{u}^m) + \sum_{i,j=1}^n V_{ij} \mathbf{u}^m = \mathbf{g}^m. \quad (3.25)$$

Оператор в квадратных скобках интересен тем, что допускает приближенную факторизацию со сравнительно просто обрабатываемыми одномерными операторами. Схеме (3.25) также можно поставить в соответствие схему (3.24), в которой $R = \gamma_1 \sum_{j=1}^n D_j - \sum_{i,j=1}^n V_{ij}$ — оператор, являющийся, как нетрудно показать, положительным при надлежащем выборе константы γ_1 и выполнении условия (3.22).

К сожалению, оператор R в этом случае не является самосопряженным, абсолютная устойчивость схемы (3.25) при надлежащем выборе константы γ_1 не следует немедленно из результатов [46]. При $n = 1$, однако, как было показано, абсолютная устойчивость имеет место при $\sigma \geq 0,5$, $\gamma_1 \geq 3$.

Из приведенных выше соображений следует, что абсолютная устойчивость схем (3.23) и (3.25) в значительной мере обусловлена выполнением неравенств (3.22); в скалярном случае их можно свести к неравенствам вида

$$C_1 \sum_{j=1}^n \xi_j^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \mu_{ij} \xi_i \xi_j \leq C_2 \sum_{j=1}^n \xi_j^2, \quad C_2 > C_1 > 0,$$

которые в [46] названы свойством сильной эллиптичности оператора $\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$.

В случае нестационарных задач могут оказаться желательными схемы с погрешностями $O(\tau^2)$, а не $O(\tau)$. Такие схемы можно построить, используя те же принципы, что и для одномерных нестационарных конвективно-диффузионных уравнений; при этом разностные аналоги смешанных производных с желаемой точностью можно учитывать явным образом, используя сеточные функции на предшествующих временных схемах. Конечно, такие схемы могут оказаться лишь условно устойчивыми даже в случае постоянных коэффициентов. Однако, как показала практика, ограничения на шаг τ , возникающие в реальных нелинейных задачах с граничными условиями, часто оказываются более жесткими, чем эти ограничения, вызванные явностью аппроксимации смешанных производных или невозможностью удовлетворить неравенствам (3.21). Во многих представляющих интерес случаях (например, в уравнениях Навье—Стокса сжимаемого газа) смешанные производные с точки зрения порядков величин играют сравнительно несущественную роль. Это наводит на мысль использовать их более простые явные аппроксимации, быть может не согласующиеся с аппроксимациями производных $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu_{ii} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right)$. Примерами таких аппроксимаций могут служить разностные аналоги производных $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu_{ij} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \right)$, построенные при помощи обычных двухточечных или центральных разностей:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mu_{ij} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} = \frac{1}{2h_i h_j} (\Delta_+^i \mu_{ij} \Delta_-^j \mathbf{u} + \Delta_-^i \mu_{ji} \Delta_+^j \mathbf{u}) + O(h_i^2 + h_j^2), \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mu_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{1}{4h_i h_j} \Delta_0^i \mu_{ij} \Delta_0^j u. \quad (3.27)$$

Разностные операторы, входящие в правые части (3.26) и (3.27), в случае постоянных матриц $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ являются самосопряженными.

3.2. Схемы покоординатного расщепления: стационарные задачи

Структура факторизованных схем. На основе схем (3.12) и (3.14) можно построить экономичные алгоритмы, сводящиеся к обращению одномерных операторов. Такие алгоритмы хорошо изучены [41, 47]; они сводятся к введению в качестве обрабатываемого оператора произведения операторов, причем каждый из множителей является легко обратимым. Примеры факторизованных схем уже рассматривались в связи с введением диффузионных членов. В отличие от этих схем, основанных на расщеплении по физическим признакам, в случае многомерных задач экономичными являются схемы покоординатного расщепления, в которых факторизованный оператор является произведением операторов, соответствующих каждой из пространственных координат. Существует несколько вариантов таких алгоритмов; основное внимание вначале будет уделено одному из них, обладающему свойством независимости погрешности аппроксимации от шага τ на стационарном решении исходной задачи, в [41] это свойство названо полной аппроксимацией.

Если исходить из схемы (3.14), то естественный способ факторизации оператора перехода от одного слоя $t = \text{const}$ к другому состоит в следующем. Запишем равенство

$$\left[\prod_{j=1}^n (B_{x_j} + \tau \sigma C_{x_j} Q_j L^{-1}) \right] L = \prod_{j=1}^n B_{x_j} L + \tau \sigma \sum_{j=1}^n \tilde{G}_j L + O(\tau^2), \quad (3.28)$$

где $\tilde{G}_j = B_{x_1} B_{x_2} \dots B_{x_{(j-1)}} C_{x_j} Q_j L^{-1} B_{x_{(j+1)}} \dots B_{x_{(n-1)}} B_{x_n}$. На основании этого равенства схема расщепления может быть представлена в виде

$$\left[\prod_{j=1}^n (B_{x_j} + \tau \sigma C_{x_j} Q_j L^{-1}) \right] L \frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} + \sum_{j=1}^n G_j F_j^m = \bar{g} + \bar{H}. \quad (3.29)$$

Если бы матрицы L , Q_j ($j = 1, n$) были бы попарно коммутативны, то операторы $\tilde{G}_j L$ совпали бы с операторами $G_j L$, а сумма Q_j в (3.6) членов в правой части (3.28) — с обрабатываемым оператором в схеме (3.14). В этом случае схема (3.29) отличалась бы от схемы (3.14) членами второго порядка малости относительно шага τ и совпадала бы с последней при установлении решения ($u^{m+1} = u^m$). Если матрицы некоммутируют, то различие этих схем имеет первый порядок, а погрешность аппроксимации схемы (3.19) представляется в виде $O(\tau + h_1^3 + h_2^3 + \dots + h_n^3)$ независимо от значения σ . Однако на стационарном решении зависимость этой погрешности от шага τ исчезает, что существенно при решении стационарных задач методом установления. Практическая реализация алгоритма (3.29) сводится к обращению одномерных операторов $B_{x_j} L + \tau \sigma C_{x_j} Q_j$, причем вычислительный процесс может быть организован при помощи дроб-

ных шагов:

$$\begin{aligned}
 (B_{x_1}L + \tau C_{x_1}Q_1)L^{-1}\tilde{u}^{1/n} &= \tau \left(Bg^m + H^m - \sum_{j=1}^n G_j F^m \right), \\
 (B_{x_2}L + \tau C_{x_2}Q_2)L^{-1}\tilde{u}^{2/n} &= \tilde{u}^{1/n}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 (B_{x(n-1)}L + \tau C_{x(n-1)}Q_{n-1})L^{-1}\tilde{u}^{(n-1)/n} &= \tilde{u}^{(n-2)/n}, \\
 (B_{x_n}L + \tau C_{x_n}Q_n)\tilde{u}^1 &= \tilde{u}^{(n-1)/n}, \quad \tilde{u}^1 = u^{m+1} - u^m.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Ввиду того что выбор параметра σ не влияет на погрешность схемы (3.29), в (3.30) положено $\sigma = 1$, а функции \bar{g} и \bar{H} для упрощения вычислений выбраны равными g^m и H^m .

Факторизованная схема, соответствующая схеме (3.12), имеет вид

$$\prod_{j=1}^n (E + \tau \sigma B_{x_j}^{-1} C_{x_j} Q_j) \frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} + \sum_{j=1}^n Y_j^m = \bar{g}, \tag{3.31}$$

где $Y_j^m = B_{x_j}^{-1} C_{x_j} F_j^m$.

В отличие от схемы (3.29) она совпадает с исходной схемой (3.12) с точностью до членов порядка $O(\tau^2)$ и имеет погрешность $O((\sigma - 0,5)\tau + \tau^2 + h_1^3 + h_2^3 + \dots + h_n^3)$. Таким образом, при $\sigma = 0,5$ она переходит в схему второго порядка относительно шага τ ; на установившемся решении погрешность, зависящая от τ , исчезает.

Обозначая через $\tilde{u}^{k/n}$ выражение $\prod_{j=k+1}^n (L + \tau \sigma B_{x_j}^{-1} C_{x_j} Q_j) \frac{u^{m+1} - u^m}{\tau}$,

а затем применяя к обеим частям выписываемых равенств операторы B_{x_j} ($j = \overline{1, n}$), схему (3.31) можно переписать в форме следующей схемы дробных шагов:

$$\begin{aligned}
 (B_{x_1}L + \tau \sigma C_{x_1}Q_1)L^{-1}\tilde{u}^{1/n} &= -\tau B_{x_1} \left(\bar{g} - \sum_{j=1}^n Y_j^m \right), \\
 (B_{x_2}L + \tau \sigma C_{x_2}Q_2)L^{-1}\tilde{u}^{2/n} &= B_{x_2}\tilde{u}^{1/n} \\
 &\dots\dots\dots \\
 (B_{x(n-1)}L + \tau \sigma C_{x(n-1)}Q_{n-1})L^{-1}\tilde{u}^{(n-1)/n} &= B_{x(n-1)}\tilde{u}^{(n-2)/n}, \\
 (B_{x_n}L + \tau \sigma C_{x_n}Q_n)\tilde{u}^1 &= B_{x_n}\tilde{u}^{(n-1)/n}, \quad \tilde{u}^1 = u^{m+1} - u^m.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Схема (3.32) отличается от схемы (3.20) своими правыми частями: в них присутствуют операторы B_{x_j} ($j = \overline{1, n}$), а сеточные функции Y_j^m требуют решения систем уравнений

$$B_{x_j}Y_j^m = C_{x_j}F_j^m \quad (j = \overline{2, n}). \tag{3.33}$$

Отсутствие в (3.33) системы для определения Y_1^m объясняется тем, что правую часть первого уравнения (3.32) можно переписать в форме

$$\tau B_{x_1} \left(\bar{g} - \sum_{j=1}^n Y_j^m \right) = -\tau \left(B_{x_1}\bar{g} - C_{x_1}F_1^m - \sum_{j=2}^n Y_j^m \right).$$

Если использовать схему второго порядка относительно τ , то для конструктивного применения алгоритма (3.32) требуется вычисление средних значений правой части \bar{g} вида $0,5(g(u^{m+1}, x_j) + g(u^m, x_j))$. Для аппроксимации с точностью $O(\tau^2)$ можно, например, воспользоваться экстраполяцией по известным значениям сеточных функций u^m и u^{m-1} . Другой путь состоит в представлении \bar{g} в виде суммы членов, содержащих u^{m+1} с последующим включением этих членов в левые части уравнений (3.22).

Наличие операторов L^{-1} в левых частях уравнений (3.30) и (3.32) несколько не усложняет процесса их решения: обозначив через $\tilde{v}^{k/n}$ вектор $L^{-1}\tilde{u}^{k/n}$ ($k = 1, n - 1$), можно переписать эти левые части (кроме левой части последнего уравнения) в виде

$$(B_{xk}L + \tau\sigma C_{xk}Q_k)\tilde{v}^{k/n}, \quad k = \overline{1, n-1},$$

а соответствующие правые части (кроме правой части первого уравнения) в виде

$$B_{x(k-1)}L\tilde{v}^{(k-1)/n}, \quad k = \overline{2, n}.$$

Можно отметить также, что присутствие матрицы L в схемах (3.30) и (3.32) связано с формой используемых уравнений. Если в качестве вектора зависимых переменных выбрать вектор f , то матрица L становится единичной, поскольку при этом вместо (3.1) аппроксимируется система

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{F}_j(f, x)}{\partial x} = g,$$

где $\tilde{F}_j(f, x) = F_j(u(f), x)$; естественно, что матрицы M_j при этом изменяются.

При практическом применении алгоритма (3.30) приходится решать системы (3.33), используя, например, векторные прогонки или итерации, описанные выше. Поскольку эти системы независимы друг от друга, при их решении возможны параллельные вычисления.

Оценки устойчивости. Условия устойчивости схем (3.29) и (3.31) для постоянных матриц L и Q_j следуют из общей теории схем расщепления [47], поскольку операторы $B_{xj}^{-1}C_{xj}Q_j$ являются положительными. При этом существенную роль играет число пространственных координат x_j .

Абсолютная устойчивость этих схем при $\sigma \geq 0,5$ легко устанавливается, если $n = 2$, а матрицы Q_1 и Q_2 коммутативны. Тогда, поскольку член \mathbf{H} при сделанных предположениях исчезает, обеим схемам может быть поставлена в соответствие схема

$$(E + \tau\sigma A_1)(E + \tau\sigma A_2)(v^{m+1} - v^m)/\tau + (A_1 + A_2)v^m = 0, \quad (3.34)$$

$$A_1 = B_{x1}^{-1}C_{x1}\tilde{Q}_1, \quad A_2 = B_{x2}^{-1}C_{x2}\tilde{Q}_2, \quad \tilde{Q}_j = L^{-1/2}Q_jL^{-1/2},$$

где $v = L^{1/2}u$, причем A_1 и A_2 – положительные коммутативные операторы. При $\sigma = 0,5$ эта схема абсолютно устойчива [47].

При $\sigma = 0,5$ абсолютная устойчивость (3.34) в норме $\|\cdot\|_{A^*A}$, где $A = A_1 + A_2$, может быть обоснована следующим образом. Перепишем схему (3.34), предварительно умножив ее на A^* , в виде

$$[A^* + \tau\sigma A^*A + \tau^2\sigma^2(A_1^* + A_2^*)A_1A_2](u^{m+1} - u^m)/\tau + A^*Au^m = 0. \quad (3.35)$$

Схема (3.35) будет абсолютно устойчивой, если оператор в квадратных скобках окажется не меньшим, чем $0,5\tau A^*A$ [46]. Ввиду положительности оператора A^* это условие выполняется, если $\tau \geq 0,5$, а оператор $(A_1^* + A_2^*)A_1A_2 = (A_1^*A_1)A_2 + A_2^*A_1A_2 = (A_1^*A_1)A_2 + (A_2^*A_2)A_1$ является положительным. Но это на самом деле так, поскольку каждое слагаемое в выписанной сумме положительно:

$$(A_1^*A_1)A_2 = (A_1^*A_1)A_2^{(0)} + (A_1^*A_1)A_2^{(1)},$$

где $A_2^{(0)}$ и $A_2^{(1)}$ – самосопряженная и кососимметричная части A_2 , причем оператор $(A_1^*A_1)A_2^{(0)}$ – положительный и самосопряженный как произведение коммутативных положительных самосопряженных операторов, а оператор $(A_1^*A_1)A_2^{(1)}$ – кососимметричный ввиду $(A_1^*A_1A_2^{(1)}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (A_2^{(1)}(A_1\mathbf{u}), A_1\mathbf{u}) = 0$.

В некоммутативном случае абсолютная устойчивость схемы (3.34), соответствующей схеме (3.31) (но не соответствующей схеме (3.29)), может быть установлена в норме $\|\cdot\|_D$, $D = \left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right)^* \left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right)$ при $\sigma = 0,5$ [47]. С точки зрения анализа устойчивости значение $\sigma = 0,5$ обладает тем преимуществом, что операторы, действующие на \mathbf{v}^{m+1} и \mathbf{v}^m в (3.34), факторизуются:

$$\left(E + \frac{\tau}{2} A_1\right) \left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right) \mathbf{v}^{m+1} = \left(E - \frac{\tau}{2} A_1\right) \left(E - \frac{\tau}{2} A_2\right) \mathbf{v}^m. \quad (3.36)$$

Вводя теперь новую сеточную функцию

$$\mathbf{w} = \left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right) \mathbf{v},$$

равенство (3.36) можно переписать в виде

$$\mathbf{w}^{m+1} = \left(E + \frac{\tau}{2} A_1\right)^{-1} \left(E - \frac{\tau}{2} A_1\right) \left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right)^{-1} \left(E - \frac{\tau}{2} A_2\right) \mathbf{w}^m,$$

но

$$\left\| \left(E + \frac{\tau}{2} A_j\right)^{-1} \left(E - \frac{\tau}{2} A_j\right) \right\| \leq 1, \quad j = 1, 2;$$

на основании леммы Келлога, доказательство которой следует из определения нормы оператора [47]. Поэтому

$$\|\mathbf{w}^{m+1}\| \leq \|\mathbf{w}^m\|,$$

т.е.

$$(D\mathbf{v}^{m+1}, D\mathbf{v}^{m+1}) \leq (D\mathbf{v}^m, D\mathbf{v}^m),$$

$$(D^*D\mathbf{v}^{m+1}, \mathbf{v}^{m+1}) \leq (D^*D\mathbf{v}^m, \mathbf{v}^m),$$

что и означает устойчивость схемы (3.36) в энергетической норме $\|\cdot\|_{D^*D}$.

При $n > 2$ абсолютная устойчивость схемы (3.31) в общем случае положительных несамосопряженных операторов не может быть установлена

в какой-либо разумной норме [47]. Более того, можно привести пример, показывающий, что схемы такого типа, вообще говоря, при $n = 3$ являются лишь условно устойчивыми.

Для построения такого примера рассмотрим соответствующую схеме (3.31) схему с постоянными матрицами, предполагаемыми, для простоты, коммутативными, и преобразуем ее к виду

$$(\mathcal{A}^* + \sigma\tau\mathcal{A}^*\mathcal{A} + \sigma^2\tau^2R)(\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m)/\tau + \mathcal{A}^*\mathcal{A}\mathbf{u}^m = 0, \quad (3.37)$$

где $\mathcal{A} = \sum_{j=1}^3 N_j K_j$, $K_j = L^{-1}Q_j$, а $R = R_1 + \sigma\tau R_2$ — оператор, возникающий вследствие перемещения одномерных операторов $(E + \tau\sigma N_j K_j)$. Обозначая через a_j и b_j соответственно самосопряженные и кососимметричные составляющие операторов $N_j K_j$ ($j = \overline{1,3}$), после алгебраических выкладок с учетом попарной коммутативности всех операторов нетрудно получить следующие выражения для R_1 и R_2 :

$$\begin{aligned} R_1 &= -[a_1(b_2^2 + b_3^2 + b_2b_3) + a_2(b_1^2 + b_3^2 + b_1b_3) + a_3(b_1^2 + b_2^2 + b_1b_2)], \\ R_2 &= -[(a_1^2 - b_1^2)(a_2a_3 + b_2b_3) + (a_2^2 - b_2^2)(a_1a_3 + b_1b_3) + \\ &+ (a_3^2 - b_3^2)(a_1a_2 + b_1b_2)]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

При выводе формул (3.38) использовались равенства

$$(N_j K_j)^* = (a_j + b_j)^* = a_j^* + b_j^* = a_j - b_j.$$

Так как $N_j K_j$ — положительные операторы, то $a_j > 0$ ($j = \overline{1,3}$). Для кососимметричных же составляющих b_j справедливо неравенство $b_j^2 < 0$, поскольку $(b_j^2 \mathbf{u}, \mathbf{u}) = -(b_j \mathbf{u}, b_j \mathbf{u}) < 0$; можно утверждать также, что $b_i^2 + b_j^2 + b_i b_j < 0$. Отсюда следует, что оператор R_1 — положительный. Однако оператор R_2 необязательно положительный, так как хотя разности $a_j^2 - b_j^2$ и положительны, выражения вида $a_i a_j + b_i b_j$, на которые умножаются эти разности, вообще говоря, являются знакопеременными. Поэтому при некоторых значениях $\sigma\tau$ оператор R_1 может стать отрицательным, нарушив необходимое и достаточное условие устойчивости схемы (3.37):

$$\mathcal{A}^* + \sigma\tau\mathcal{A}^*\mathcal{A} + \sigma^2\tau^2R \geq 0,5\tau\mathcal{A}^*\mathcal{A}.$$

В приведенных выше соображениях нигде не использовалась конкретная структура операторов $a_j > 0$ и b_j ($j = \overline{1,3}$). Поэтому возможная потеря абсолютной устойчивости при $n = 3$ является общей чертой всех факторизованных схем типа (3.32) с несамосопряженными положительными операторами. Рассматривая простейший случай схемы первого порядка с ориентированными разностями (т.е. заменяя операторы B_{xj} в (3.32) единичным оператором), для одного уравнения ($p = 1$) с постоянными коэффициентами можно установить, что при достаточно большом числе Куранта имеет место неустойчивость. В самом деле, можно показать, что в этом случае выполнение условия Неймана при всех значениях τ возможно лишь при $R_2 \geq 0$, где R_2 задается второй формулой (3.38) при $a_j = 2(k_j/h_j) \times \sin^2(\alpha_j/2)$ и $b_j = i(k_j/h_j) \sin \alpha_j$, $j = \overline{1,3}$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, причем постоянные k_j являются единственными элементами матриц K_j . Пусть, для простоты, $k_1 = k_2 = k_3 = k$ и $h_1 = h_2 = h_3 = h$; тогда, если выбрать $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$,

при которых $\sin^2 \alpha < \sin^4(\alpha/2)$, то величина R_2 станет отрицательной, а рассматриваемая схема неустойчивой при достаточно больших значениях $K\tau/h$.

Компактные факторизованные схемы в конвективно-диффузионных задачах. Стандартные принципы расщепления могут быть полностью перенесены на случай, когда компактные аппроксимации используются при дискретизации многомерных уравнений вида (3.19). При этом достаточно включить разностные аналоги V_{ij} производных $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$ в одномерные операторы, соответствующие координатам x_i ($i = 1, n$), а явную аппроксимацию смешанных производных интерпретировать как известную сеточную функцию в правой части уравнений. Например, факторизованный вариант схемы (3.23) имеет вид

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^n [L + \tau \sigma (B_{x_j}^{-1} C_{x_j} Q_j - V_{jj})] (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) / \tau + \sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_j^m = \\ & = \mathbf{g} + \sum_{i,j=1}^n V_{ij} \mathbf{u}^m, \end{aligned} \quad (3.39)$$

где без нарушения общности матрица L считается единичной, а операторы V_{ij} предполагаются построенными в соответствии с формулами (3.21).

Схема (3.39) на стационарном решении (3.19) имеет погрешность $O(h_1^3 + h_2^3 + \dots + h_n^3)$; если вместо суммы $\sum_{i,j=1}^n V_{ij} \mathbf{u}^m$ использовать сумму

$$\sum_{j=1}^n V_{jj} \mathbf{u}^m + \sum'_{i,j=1} V_{ij} \mathbf{u}^{m+1/2},$$

где штрих означает, что суммирование производится только по несовпадающим индексам, то при $\sigma = 0,5$ погрешность (3.39) относительно τ будет иметь порядок $O(\tau^2)$ и эта схема может быть использована также для нестационарных задач.

Если $\mu_{ij} = 0, i \neq j$, то схема (3.39) является абсолютно устойчивой при $\sigma = 0,5$, по крайней мере для $n = 2$. Действительно, в этом случае ей соответствует абсолютно устойчивая схема (3.34) с положительным оператором $\mathcal{A} = A_1 + A_2$, где $A_j = B_{x_j}^{-1} C_{x_j} Q_j - V_{jj} > 0$. Если же $\mu_{ij} \neq 0, i \neq j$, то абсолютная устойчивость этой схемы при $n = 2$ может зависеть от вида матриц μ_{ij} , а также, вообще говоря, от способа определения функции $\tilde{\mathbf{u}}$ в сумме $\sum'_{i,j=1} V_{ij} \tilde{\mathbf{u}}$, которой можно заменить сумму $\sum'_{i,j=1} V_{ij} \mathbf{u}^m$ в правой части (3.39). Во всяком случае, возможное отсутствие абсолютной устойчивости схемы (3.39) во многих практически интересных случаях не является серьезным препятствием для применения этого алгоритма при решении задач, в которых нелинейность является более сильным ограничителем шага τ , чем необходимость аппроксимировать смешанные производные.

При реализации j -го дробного шага, соответствующего схеме (3.39), приходится определять промежуточную сеточную функцию $\tilde{\mathbf{u}}^{j/n}$ из уравнения

$$[B_{x_j} + \tau \sigma (C_{x_j} Q_j - B_{x_j} V_{jj})] \tilde{\mathbf{u}}^{j/n} = \mathbf{f}, \quad (3.40)$$

в котором правая часть \mathbf{f} считается известной. Если под V_{jj} в (3.40) понимать некоторую аппроксимацию диффузионных членов в более широком смысле, то сложность обращения оператора в квадратных скобках зависит от сложности оператора V_{jj} . Возникающие при этом возможности рассмотрены выше. Они заключаются в сведении уравнения (3.40) к двум уравнениям в случае, если $V_{jj} = -B_{x_j}^{-1} C_{x_j} \mu_{jj} B_{x_j}^* - C_{x_j}^*$; в использовании внутренних итераций на каждом дробном шаге; в приближенной факторизации одномерного оператора

$$[E + \sigma \tau (B_{x_j}^{-1} C_{x_j} Q_j - V_{jj})] \sim (E + \sigma \tau B_{x_j}^{-1} C_{x_j} Q_j) (E - \sigma \tau V_{jj});$$

в применении простых операторов $V_{jj} = B_{x_j}^{-1} \Delta_-^j T_{1/2}^j \mu_{jj} \Delta_+^j$, для которых операторы $B_{x_j} V_{jj}$ — трехточечные.

Реализация первой возможности является самой трудоемкой, приходится совместно решать две трехточечные векторные системы

$$\begin{aligned} (B_{x_j} + \tau \sigma C_{x_j} Q_j) \tilde{\mathbf{u}}_1^{j/n} - C_{x_j} \mu_{jj} \tilde{\mathbf{u}}_2^{j/n} &= \mathbf{f}, \\ B_{x_j}^* \tilde{\mathbf{u}}_2^{j/n} &= -C_{x_j}^* \tilde{\mathbf{u}}_1^{j/n} \end{aligned}$$

с матрицами размерности $p \times p$. В стационарном случае это вряд ли целесообразно; более разумным путем представляется приближенная факторизация не схемы (3.23), а схемы (3.25) с упрощенным оператором, действующим на $(\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m)$. Тогда факторизованная схема для стационарных задач пишется в виде

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n (E + B_{x_j}^{-1} C_{x_j} Q_j - k B_{x_j}^{-1} \mu_{jj} \Delta_2^j) (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) / \tau + \sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_j^m &= \\ = \sum_{i,j=1}^n V_{ij} \mathbf{u}^m + \mathbf{g}^m, \end{aligned} \quad (3.41)$$

где k — числовой множитель; при определении \mathbf{u}^{m+1} она требует обращения трехточечных операторов $B_{x_j} + C_{x_j} Q_j - k \mu_{jj} \Delta_2^j$. Как было показано выше, в одномерном случае ($n = 1$) значения $k \geq 3$ обеспечивают устойчивость алгоритма. В двумерном случае такой анализ для схемы (3.41) становится слишком громоздким, однако практика ее применения в случае уравнений Навье—Стокса сжимаемого газа показала, что выбор коэффициента $k = 3$ обеспечивает возможность проведения устойчивого счета.

3.3. Повышение устойчивости алгоритма для стационарных многомерных задач

Описание метода в общем виде. Как уже отмечалось, схема (3.31) с погрешностью $O(\tau)$ или $O(\tau^2)$, исчезающей на стационарном решении исходных уравнений, при числе пространственных координат $n > 2$ в общем случае теряет свойство абсолютной устойчивости. Это существенно

снижает ее эффективность, поскольку при этом ограничивается возможность управлять шагом τ для ускорения сходимости.

Применяя итерации на каждом шаге по времени, можно модифицировать схему (3.31), сделав ее абсолютно устойчивой. Рассмотрим этот подход в общем виде.

Пусть имеется разностная задача

$$(E + \sigma\tau A)(\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m)/\tau + A\mathbf{u}^m = \mathbf{f}^m, \quad (3.42)$$

в которой \mathbf{u}^m , \mathbf{f}^m – векторы; A – некоторый линейный оператор:

$$A = \sum_{i=1}^n A_i, \quad A_i > 0,$$

не зависящий от индекса m . Параметр $\sigma(0 < \sigma \leq 1)$ в (3.42) является некоторым весовым множителем.

Для определения вектора \mathbf{u}^{m+1} по известному вектору \mathbf{u}^m предлагается следующий итерационный процесс:

$$\prod_{i=1}^n (E + \tau^2 D_i)(\mathbf{u}^{m+1, k+1} - \mathbf{u}^m)/\tau + \sigma A\mathbf{u}^{m+1, k} + (1 - \sigma)A\mathbf{u}^m = \mathbf{f}^m, \quad (3.43)$$

в котором операторы D_i ($i = \overline{1, n}$) обладают следующими свойствами:

1. $D_i A_j = A_j D_i$ для всех i и j ;
2. $D_i = D_i^* > 0$, $i = \overline{1, n}$;
3. $D_i \geq n(A_i^* A_i + A_i A_i^*)$, $i = \overline{1, n}$.

Обозначим через l конечное число выполненных внутренних итераций, положим $\mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{u}^{m+1, l}$, нетрудно оценить норму q оператора перехода T от k -й к $(k+1)$ -й итерации ($\mathbf{u}^{m+1, k+1} = T\mathbf{u}^{m+1, k} + \mathbf{F}$, вектор \mathbf{F} известен). Введем обозначение

$$R = \sum_{j=1}^n (E + \tau^2 D_j),$$

оператор T можно представить в виде

$$T = -\tau\sigma R^{-1}A.$$

Для установления неравенства, которому удовлетворяет $q = \|T\|$, целесообразно воспользоваться следующими фактами.

Во-первых, для любого оператора A справедливо соотношение

$$A^*A \leq A^*A + AA^* = 2[(A^{(0)})^2 - (A^{(1)})^2], \quad (3.44)$$

где индексами (0) и (1) отмечены соответственно самосопряженная и кососимметричная составляющие A .

Во-вторых, имеют место оценки

$$\left(\sum_{i=1}^n A_i^{(0)}\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n (A_i^{(0)})^2, \quad (3.45)$$

$$-\left(\sum_{i=1}^n A_i^{(1)}\right)^2 \leq -n \sum_{i=1}^n (A_i^{(1)})^2, \quad (3.46)$$

которые легко доказываются по индукции. Например, для (3.45) в случае

$n = 2$ имеем

$$\begin{aligned} (A_1^{(0)} + A_2^{(0)})^2 &\leq (A_1^{(0)} + A_2^{(0)})^2 + (A_1^{(0)} - A_2^{(0)})^2 = \\ &= 2 [(A_1^{(0)})^2 + (A_2^{(0)})^2]. \end{aligned}$$

Пусть теперь справедливо неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} A_i^{(0)} \right)^2 \leq (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} (A_i^{(0)})^2. \quad (3.47)$$

Представим левую часть (3.47) в следующем виде:

$$\left(\sum_{i=1}^n A_i^{(0)} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n-1} A_i^{(0)} \right)^2 + (A_n^{(0)})^2 + \sum_{i=1}^{n-1} [A_n^{(0)} A_i^{(0)} + A_i^{(0)} A_n^{(0)}].$$

Используя неравенство

$$A_n^{(0)} A_i^{(0)} + A_i^{(0)} A_n^{(0)} \leq (A_n^{(0)})^2 + (A_i^{(0)})^2,$$

вытекающее из положительности оператора $(A_n^{(0)} - A_i^{(0)})^2$, а также предполагаемую оценку (3.45), получим

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n A_i^{(0)} \right)^2 &\leq (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} (A_i^{(0)})^2 + (A_n^{(0)})^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (A_i^{(0)})^2 + \\ &+ (n-1) (A_n^{(0)})^2 = n \sum_{i=1}^n (A_i^{(0)})^2. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается неравенство (3.46). Поскольку $(A_i^{(0)})^2 - (A_i^{(1)})^2 = A_i^* A_i + A_i A_i^*$, из (3.45), (3.46), а также из условия 3 следует неравенство

$$A^* A < n \sum_{i=1}^n (A_i^* A_i + A_i A_i^*) \leq \sum_{i=1}^n D_i, \quad (3.48)$$

которое может быть использовано при оценке нормы $\|T\|$. Последняя записывается в виде

$$\|T\|^2 = \tau^2 \sigma^2 \sup_{\mathbf{u}} \frac{(A^{-1} A \mathbf{u}, R^1 A \mathbf{u})}{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = \tau^2 \sigma^2 \sup_{\mathbf{v}} \frac{(A \mathbf{v}, A \mathbf{v})}{(R \mathbf{v}, R \mathbf{v})}, \quad (3.49)$$

где $\mathbf{v} = R^{-1} \mathbf{u}$ и использована коммутативность оператора R с оператором A , вытекающая из условия 1.

$$\text{Поскольку } R^2 = \left(\prod_{j=1}^n (E + \tau^2 D_j) \right)^2 = E + \tau^2 \sum_{j=1}^n D_j + Q, \text{ где оператор } Q -$$

положительный, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \sigma^2 \tau^2 \frac{(A \mathbf{v}, A \mathbf{v})}{(R \mathbf{v}, R \mathbf{v})} &= \sigma^2 \tau^2 \frac{(A^* A \mathbf{v}, \mathbf{v})}{(R^2 \mathbf{v}, \mathbf{v})} \leq \\ &\leq \frac{\sigma^2 \tau^2 n \sum_{i=1}^n ((A_i^* A_i + A_i A_i^*) \mathbf{v}, \mathbf{v})}{(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + 2\tau^2 \sum_{i=1}^n (D_i \mathbf{v}, \mathbf{v}) + (Q \mathbf{v}, \mathbf{v})} \leq \frac{\sigma^2 \tau^2 \sum_{i=1}^n (D_i \mathbf{v}, \mathbf{v})}{2\tau^2 \sum_{i=1}^n (D_i \mathbf{v}, \mathbf{v})} \leq \frac{\sigma^2}{2}, \end{aligned}$$

из которой следует оценка

$$q = \|T\| \leq \sigma/\sqrt{2}. \quad (3.50)$$

Таким образом, при $\sigma \leq 1$ внутренние итерации сходятся со скоростью геометрической прогрессии, не зависящей от свойств оператора A . В частности, если A — разностный оператор, то эта скорость не зависит от числа узлов сетки в рассматриваемой области.

Определяя последовательно $\mathbf{u}^{m+1,1}, \mathbf{u}^{m+1,2}, \dots, \mathbf{u}^{m+1,l} = \mathbf{u}^{m+1}$, после несложных выкладок можно записать равенство

$$(R + \sigma\tau A)(\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m)/\tau + (E - T^l)A\mathbf{u}^m = (E - T^l)\mathbf{f}^m, \quad (3.51)$$

которое при $l \rightarrow \infty$ переходит в абсолютно устойчивую в силу $A \geq 0$ схему

$$(R + \sigma\tau A)(\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m)/\tau + A\mathbf{u}^m = \mathbf{f}^m.$$

Однако практический интерес представляет схема (3.51) при конечном числе итераций l . Она обладает следующим свойством аппроксимации: независимо от числа l в случае достижения стационарного режима функция $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{u}^m$ удовлетворяет уравнению $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$, где $\mathbf{f} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{f}^m$;

если же выполнить такое число итераций l , что норма $\|T^l\|$ будет иметь порядок $O(\tau)$ или $O(\tau^2)$, то вследствие равенства $R = E + O(\tau^2)$ схема (3.51) окажется аппроксимацией либо первого, либо второго порядка (при $\sigma = 0,5$) нестационарной задачи $d\mathbf{u}/dt + A\mathbf{u} = \mathbf{f}$.

Однако, имея в виду использование схемы (3.51) для решения стационарных задач, естественно выяснить, при каких условиях она является абсолютно устойчивой. Оказывается, абсолютная устойчивость (3.51) имеет место, если оператор $C = (E - T^l)A$ является положительным и, кроме того, параметр σ ограничен некоторым числом $\sigma > 0,5$.

В самом деле, схему (3.51) можно записать в виде

$$\mathbf{u}^{m+1} = G\mathbf{u}^{m+1} + \mathbf{g},$$

где сеточная функция \mathbf{g} известна, а

$$G = (R + \sigma\tau A)^{-1}(R + \sigma\tau A - C).$$

По определению нормы оператора имеем

$$\|G\| = \sup_{\mathbf{u}} \frac{((R + \sigma\tau A)^{-1}(R + \sigma\tau A - C)\mathbf{u}, (R + \sigma\tau A)^{-1}(R + \sigma\tau A - C)\mathbf{u})}{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}.$$

Можно показать, что в силу коммутативности оператора R с оператором A , вытекающей из условия 1,

$$\|G\| = \sup_{\mathbf{v}} \frac{((R + \sigma\tau A - C)\mathbf{v}, (R + \sigma\tau A - C)\mathbf{v})}{((R + \sigma\tau A)\mathbf{v}, (R + \sigma\tau A)\mathbf{v})},$$

где $\mathbf{v} = (R + \sigma\tau A)^{-1}\mathbf{u}$. Таким образом, условие $\|G\| \leq 1$ будет выполняться при выполнении неравенства

$$(R + \sigma\tau A - C)^*(R + \sigma\tau A - C) \leq (R + \sigma\tau A)^*(R + \sigma\tau A). \quad (3.52)$$

После несложных выкладок, учитывающих коммутативность операторов T^l и A , а также неотрицательность A , неравенство (3.52) можно привести

к виду

$$A^*A [(2\sigma - 1)E + (1 - \sigma)(T^l + (T^l)^*) - (T^*T)^l] > 0. \quad (3.53)$$

Оператор A^*A и оператор в квадратных скобках самосопряжены и коммутативны; поэтому левая часть (3.53) будет положительна, если оператор в квадратных скобках окажется положительным. Используя неравенство Коши–Буняковского, можно записать следующие оценки:

$$\begin{aligned} (T^l \mathbf{u}, \mathbf{u}) &= ((T^l)^* \mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq \|T^l\| (\mathbf{u}, \mathbf{u}), \\ ((T^*T)^l \mathbf{u}, \mathbf{u}) &\leq \|T^l\| \|(T^*)^l\| (\mathbf{u}, \mathbf{u}), \end{aligned} \quad (3.54)$$

в которых $\|T^l\| \leq q^l$ и, как можно показать, повторив предыдущие рассуждения с заменой в (3.42) A на A^* , $\|(T^*)^l\| \leq q^l$. На основании этих оценок неравенство (3.52) будет выполняться при положительности выражения $(\sigma - 0,5) - (1 - \sigma)q^l - 0,5q^{2l}$, т.е. при $\sigma \geq 0,5(1 + q^l)$.

Для оценки минимального значения σ_{\min} следует решить уравнение

$$\sigma_{\min} = 0,5 [1 + (\sigma_{\min}/2)^{l/2}]. \quad (3.55)$$

Выполнив одну итерацию метода Ньютона, можно получить приближенное значение $\sigma_{\min} = 0,5 + 0,5(2^{3/l/2} - 1)^{-1}$, которое близко к 0,5 при больших значениях l . Итак, при $\sigma \geq \sigma_{\min}$ схема (3.51) устойчива в случае положительности оператора $C = A - T^l A$. Если бы оператор A был не только неотрицательным, но и самосопряженным, то положительность C была бы очевидной: $C = (E - T^l)A > 0$ в силу $A > 0$ и $(E - T^l) > 0$. Наличие кососимметричных составляющих у операторов A и $E - T^l$ может сделать их произведение знакопеременным, однако интуитивно ясно, что при бóльшем числе l внутренних итераций оператор $E - T^l$ будет близок к единичному, а оператор C – к оператору A . Для определения числа l можно сформулировать несколько достаточных признаков неотрицательности C .

I. Пусть $A \geq \delta E$, где $\delta = \text{const} > 0$. Тогда $C \geq 0$, если $q^l < \delta/\|A\|$.

В самом деле, условие $C > 0$ означает, что $(A\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (A^{(0)}\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq (T^l A\mathbf{u}, \mathbf{u})$, но $(A^{(0)}\mathbf{u}, \mathbf{u}) > \delta(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, а для скалярного произведения $(T^l A\mathbf{u}, \mathbf{u})$, используя неравенство Коши–Буняковского, можно получить оценку

$$(T^l A\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq \|A\| \|T^l\| (\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Таким образом, если $\delta > \|A\| q^l$, то $(A\mathbf{u}, \mathbf{u}) > (T^l A\mathbf{u}, \mathbf{u})$ и $C \geq 0$.

II. Пусть $A \geq \delta E$, $\delta = \text{const} > 0$, а кососимметричная и самосопряженная составляющие оператора A связаны неравенством

$$\|A^{(1)}\mathbf{u}\|^2 \leq m(A^{(0)}\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad m > 0; \quad (3.56)$$

тогда $C \geq 0$, если $q^l < (\sqrt{\|A^{(0)}\|} + \sqrt{m})^{-1} \sqrt{\delta}$.

Действительно, выделяя самосопряженную часть оператора AT^l , условие $C \geq 0$ можно записать в виде

$$(A^{(0)}\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq (A^{(0)}(T^l)^{(0)}\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (A^{(1)}(T^l)^{(1)}\mathbf{u}, \mathbf{u}),$$

при этом скалярные произведения в правой части при помощи неравенства

Коши–Буняковского оцениваются следующим образом:

$$\frac{(A^{(0)}T^{l(0)} \mathbf{u}, \mathbf{u})}{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \leq q^l \sqrt{\frac{(A^{(0)}\mathbf{u}, A^{(0)}\mathbf{u})}{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}},$$

$$\frac{(A^{(1)}T^{l(1)} \mathbf{u}, \mathbf{u})}{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \leq q^l \sqrt{\frac{(A^{(1)}\mathbf{u}, A^{(1)}\mathbf{u})}{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}}.$$

Используя эти оценки, с учетом неравенства (3.56) и $(A^{(0)}\mathbf{u}, A^{(0)}\mathbf{u}) \leq \|A^{(0)}\| (A^{(0)}\mathbf{u}, \mathbf{u})$ окончательно можно получить, что условие $C \geq 0$ будет выполнено, если $q^l (\sqrt{\|A^{(0)}\|} + \sqrt{m}) < \sqrt{\delta}$, т.е. $q^l < (\sqrt{\|A^{(0)}\|} + \sqrt{m})^{-1} \sqrt{\delta}$.

Минимальные значения l , которые получаются из сформулированных достаточных признаков неотрицательности оператора C , могут оказаться слишком грубыми. Кроме того, они неэффективны в случае кососимметричных операторов, когда $A^{(0)} = 0$. Однако если операторы $A^{(0)}$ и $A^{(1)}$ коммутативны, т.е. оператор A – нормальный ($A^*A = AA^*$), то удастся показать, что для достижения абсолютной устойчивости схемы (3.51) требуется всего лишь несколько итераций. Соответствующее достаточное условие неотрицательности C можно сформулировать следующим образом.

III. Пусть $A^{(1)}A^{(0)} = A^{(0)}A^{(1)}$, $A^{(0)} \geq 0$. Тогда $C \geq 0$ при выполнении любого из следующих неравенств:

$$q^l < \sin \frac{\pi}{l+1}, \quad l = 2k, \quad (3.57)$$

$$q^l \leq \sin \frac{\pi}{2(l+1)}, \quad l = 4k - 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.58)$$

Для доказательства этого утверждения удобно воспользоваться следующим фактом: в случае коммутативности самосопряженных и кососимметричных частей оператора возведение его в степень аналогично возведению в степень комплексного числа. Положив $G = -T$, оператор C после простых выкладок можно записать в следующем виде:

$$C = A - T^l A = (R/\tau\sigma)[G + (-1)^{l+1} G^{l+1}].$$

Поскольку $G^{(0)}G^{(1)} = G^{(1)}G^{(0)}$, что следует из нормальности оператора A , для вычисления G^{l+1} можно использовать те же правила, что и при вычислении $z^{l+1} = (x + iy)^{l+1}$, где x и y – действительные числа, причем $x \geq 0$ соответствует оператору $A^{(0)}$, а iy – оператору $A^{(1)}$. Записав z в виде $re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, получим, что самосопряженная часть $C^{(0)}$ оператора C будет неотрицательна, если неотрицательным будет выражение

$$\cos \varphi + (-1)^{l+1} r^{l+1} \cos(l+1)\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad r = \|T\| \leq q.$$

Введя новую переменную μ таким образом, что $\varphi = \pi/2 - \mu/(l+1)$ ($0 \leq \mu \leq (l+1)\pi/2$), это выражение удобно представить в виде

$$f(\mu) = r \sin[\mu/(l+1)] + (-1)^{l+1} r^{l+1} \cos[(\pi/2)(l+1) - \mu]. \quad (3.59)$$

Дальнейший анализ сводится к исследованию знака выражения (3.59). В частности, если $(l+1) = 2k+1$, $k = 1, 3, 5, \dots$, то

$$f(\mu) = r \sin[\mu/(l+1)] + r^{l+1} \sin \mu.$$

При $\mu \leq \pi$ условие $f(\mu) > 0$ выполняется при любых l ; если же $\mu \geq \pi$, то ввиду неравенства

$$\sin \frac{\mu}{l+1} = \sin \left(\frac{\pi}{l+1} + \frac{\mu - \pi}{l+1} \right) < \sin \frac{\pi}{l+1},$$

где $\mu/(l+1) \leq \pi/2$, имеет место оценка $f(\mu) > r \sin[\pi/(l+1)] - r^{l+1}$. Отсюда следует, что $f(\mu) \geq 0$ при $r^l \leq \sin[\pi/(l+1)]$ и, следовательно, при $q^l = \sin[\pi/(l+1)]$.

Если $l+1 = 2k+1$, $k = 2, 4, 6, \dots$, то

$$f(\mu) = r \sin[\mu/(l+1)] - r^{l+1} \sin \mu.$$

При $\mu \geq \pi$ неравенство $f(\mu) \geq 0$ выполняется при $r^l \leq \sin[\pi/(l+1)]$ по тем же причинам, что и в предыдущем случае: $k = 1, 3, 5, \dots$ При $\mu \leq \pi$ имеем $f(0) = 0$, $f'(\mu) = [r/(l+1)] \cos[\mu/(l+1)] - r^{l+1} \cos \mu > 0$, поскольку в случае рассматриваемых значений $l = 4, 8, 12, \dots$ $r^l \leq q^l \leq (l+1)^{-1}$ и, следовательно, $f(\mu) \geq 0$.

Объединяя все рассмотренные ситуации, можно окончательно сформулировать условие (3.57).

В случае $l = 4k - 1$, $k = 1, 2, 3, \dots$ функция $f(\mu)$ приобретает вид

$$f(\mu) = r \cos[\mu/(l+1)] + r^{l+1} \cos \mu.$$

При $0 \leq \mu \leq \pi/2$ выполнение неравенства $f(\mu) \geq 0$ очевидно. При $\mu \geq \pi/2$ $\sin[\pi/2(l+1)] \leq \sin[\mu/(l+1)]$, так что $f(\mu) \geq r \sin[\pi/2(l+1)] - r^{l+1}$. Отсюда непосредственно следует достаточность условия (3.58) неотрицательности $f(\mu)$ и, следовательно, оператора C .

В силу оценки $q \leq \sigma/\sqrt{2} \leq 1/\sqrt{2}$ становится ясным, что в случае нормального оператора для достижения абсолютной устойчивости схемы (3.51) достаточно выполнить лишь несколько итераций. Поскольку кососимметричный оператор является нормальным (из условия $A^* = -A$ следует $A^*A = AA^*$), это относится и к случаю $A^{(0)} = 0$, что вследствие неравенств $A_i \geq 0$ означает кососимметричность операторов A_i ($i = 1, n$).

Приложение к компактным аппроксимациям. Приведенные выше результаты могут быть непосредственно применены к случаю, когда операторы A_j возникают при аппроксимации производных $\partial F_j(\mathbf{u})/\partial x_j$ ($i = \overline{1, n}$) в уравнениях типа (3.1):

$$\partial F_j(\mathbf{u})/\partial x_j = B_{x_j}^{-1} C_{x_j} F_j(\mathbf{u}) + O(h^3).$$

Для оценок устойчивости, как всегда, будем считать, что $F_j(\mathbf{u}) = Q_j \mathbf{u}$, где Q_j — постоянные симметрические матрицы; тогда операторы A_j в (3.42) приобретут вид

$$A_j = B_{x_j}^{-1} C_{x_j} Q_j = B_{x_j}^{-1} \hat{C}_{x_j}.$$

Нетрудно убедиться в том, что, поскольку в операторы B_{x_j} и \hat{C}_{x_j} входят

постоянные матрицы M_j , коммутативные с матрицами Q_j , неотрицательные операторы A_j оказываются нормальными. Для построения операторов D_j требуется вычислить произведения

$$A_j^* A_j = A_j A_j^* = (B_{xj}^{-1} \hat{C}_{xj})^* B_{xj}^{-1} \hat{C}_{xj} = (B_{xj}^* B_{xj})^{-1} \hat{C}_{xj}^* \hat{C}_{xj}.$$

При записи правой части этих равенств была использована коммутативность операторов B_{xj} и \hat{C}_{xj} . Пусть все собственные значения $\lambda_k^{(j)}$ ($k = \overline{1, p}$) матрицы Q_j отличны от нуля (при численной реализации алгоритма строго нулевые собственные значения практически исключены). Тогда

$$M_j^* M_j = M_j^2 = (S_j D_j S_j^T) (S_j D_j S_j^T) = S D_j^2 S^T = I,$$

где I – единичная матрица, S_j – ортогональная матрица, приводящая Q_j к диагональному виду $\text{diag} \{ \lambda_k^{(j)} \}$, а $D_j = \text{diag} \{ \text{sgn} \lambda_p^{(j)} \}$; при этом

$$B_{xj}^* B_{xj} = (A_0^j)^2 - \frac{1}{16} (\Delta_0^j)^2.$$

Учитывая, что $A_0^j = E + \frac{1}{6} \Delta_2^j$, $\Delta_0^j = 4\Delta_2^j + (\Delta_2^j)^2$, $-\Delta_2 \leq 4$, нетрудно получить оценку $B_{xj}^* B_{xj} \geq E/3$, т.е.

$$(B_{xj}^* B_{xj})^{-1} \leq 3E. \quad (3.60)$$

Вычисление произведения $\hat{C}_{xj}^* \hat{C}_{xj} = 0,25 (-\Delta_0^{(j)} + M_j \Delta_2^{(j)}) Q_j (\Delta_0^{(j)} - M_j \Delta_2^{(j)}) Q_j / h_j^2$ приводит к равенству $\hat{C}_{xj}^* \hat{C}_{xj} = -\frac{1}{h_j^2} \Delta_2^{(j)} Q_j^2$, из которого следует оценка

$$\hat{C}_{xj}^* \hat{C}_{xj} \leq \frac{1}{h^2} (-\Delta_2^{(j)}) \|Q_j\| = \frac{1}{h^2} \max_p |\lambda_p^{(j)}|^2 (-\Delta_2^{(j)}). \quad (3.61)$$

Коммутативность операторов $(B_{xj}^* B_{xj})^{-1}$ и $\hat{C}_{xj}^* \hat{C}_{xj}$ позволяет перемножить неравенства (3.60) и (3.61), откуда следует, что

$$(B_{xj}^* B_{xj})^{-1} \hat{C}_{xj}^* \hat{C}_{xj} \leq 3 \max_p |\lambda_p^{(j)}|^2 (-\Delta_2) / h^2. \quad (3.62)$$

Из (6.2) следует, что свойства 1–3 (см. с. 95) будут выполнены, если положить

$$D_j = kn \max_p |\lambda_p^{(j)}|^2 (-\Delta_2) / h^2, \quad (3.63)$$

где $k \geq 3$ – некоторый коэффициент.

Для оценки количества внутренних итераций можно воспользоваться достаточными условиями I и II, однако из общих соображений ясно, что вследствие малости наименьшего собственного значения самосопряженной составляющей $A^{(0)}$ оператора A (т.е. малости диссипации длинных волн) число δ в неравенстве $A \geq \delta E$ мало ($\delta \sim O(h_1^3 + h_2^3 + \dots + h_j^3)$). Отсюда следует, что получаемое из этих условий число l может оказаться завышенным.

Если матрицы Q_j ($j = \overline{1, n}$) попарно коммутативны, то, как нетрудно установить, оператор $A = \sum_{j=1}^n A_j$ оказывается нормальным и для оценки l

можно воспользоваться достаточным условием III; это число оказывается равным 2 или 3. В общем некоммутативном случае оператор A , несмотря на нормальность операторов A_j ($j = \overline{1, n}$), не является нормальным и оценка, вытекающая из свойства 3, строго говоря, не является справедливой. Видимо, истина лежит посередине и установить ее в реальных ситуациях можно только экспериментальным путем.

Интересно отметить, что выбор в качестве оператора D_j второй разности $(-\Delta_2^j)$, умноженной на некоторый коэффициент, является достаточно универсальным и может быть использован для других аппроксимаций конвективных членов. Пусть, например, в аппроксимации этих членов $Q_j \delta^{(j)}$, соответствующих координате x_j , входит оператор $\delta^{(j)}$, являющийся двух- или трехточечной односторонней разностью. Тогда для данного уравнения его можно ($p = 1$) представить в виде

$$\delta^{(j)} = P_j \Delta_0^j + R_j (\Delta_2^j)^k,$$

где P_j и R_j – самосопряженные разностные операторы, а k – целая положительная степень. В первом случае $\delta^{(j)} = 0,5 (\Delta_0^j \pm \Delta_2^j)$ и $P_j = 0,5E$, $R_j = \pm 0,5E$, $k = 1$. Во втором случае

$$\delta^{(j)} = \pm 1,5E \mp 2T_{\mp 1}^j \pm 0,5T_{\mp 2}^j = 0,5(E - 0,5\Delta_2^j)\Delta_0 \pm 0,25(\Delta_2^j)^2,$$

так что $P_j = 0,5(E - 0,5\Delta_2^j)$, $R_j = \pm 0,25E$, $k = 2$. Само собой разумеется, что для устойчивости схемы знаки "+" или "-" выбираются в соответствии со знаком единственного элемента матрицы. Для систем уравнений ($p > 1$) устойчивость будет обеспечена, если знаки "+-" перед самосопряженной частью оператора $\delta^{(j)}$ заменить матрицей M_j , входящей в операторы B_{xj} и C_{xj} ; чтобы убедиться в этом, достаточно повторить те же рассуждения, что и при построении этих операторов.

Если при вычислении $(\delta^{(j)})^* (\delta^{(j)})$ учесть неравенства

$$(\Delta_0^j)^2 \leq C_1 (-\Delta_2^j) \quad \text{и} \quad (\Delta_2^j)^k \leq C_2 (-\Delta_2^j),$$

справедливые для некоторых целых констант C_1 и C_2 , то нетрудно убедиться, что имеет место оценка

$$(\delta^{(j)})^* (\delta^{(j)}) = (\delta^{(j)}) (\delta^{(j)})^* \leq \text{const} (-\Delta_2^j).$$

Эта оценка и позволяет в качестве оператора D_j выбрать оператор $CI(-\Delta_2^j)$ с некоторой положительной константой C .

Наконец, совсем легко усмотреть, что такой оператор D_j годится и для случая, когда операторы A_j в (3.42) возникают при аппроксимации конвективных и диффузионных членов, поскольку он может быть сделан энергетически эквивалентным разностному аналогу диффузии. Например, оператор V_{ij} в (3.20) для постоянной матрицы μ_{ij} можно оценить следующим образом:

$$V_j = (B_{xj}^{-1} C_{xj})^* \mu_j (B_{xj}^{-1} C_{xj}) \leq \|\mu_j\| RI(-\Delta_2^j);$$

аналогичную оценку можно записать и для других использовавшихся аппроксимаций диффузионных членов.

При практической реализации алгоритма (3.42) с оператором D_j вида (3.63) несомненное удобство возникает в связи с возможностью использования скалярных прогонок для обращения оператора $E + \tau^2 D_j$, которые можно выполнять одновременно. Ввиду абсолютной устойчивости метода можно надеяться на уменьшение числа внешних итераций за счет увеличения шага τ при решении стационарных задач.

4. ДРУГИЕ ПОДХОДЫ К ПОСТРОЕНИЮ СХЕМ ТРЕТЬЕГО И БОЛЕЕ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

Ниже приводятся более общие взгляды на построение компактных схем. Для простоты рассматривается случай одной пространственной переменной; обобщение изложенных результатов на многомерный случай может быть представлено так же, как и в п. 3.4.

4.1. Аппроксимация уравнений, записанных в недивергентном виде

Схемы, основанные на применении операторов третьего порядка. Использование консервативной формы исходных уравнений является естественным и удобным при построении разностных схем на основе операторов, рассмотренных выше. Такие схемы оказываются трехточечными, что является существенным с точки зрения решения разностных уравнений.

В случае уравнений, представленных в недивергентной форме, формальное применение операторов A_{\pm} и Δ_{\mp} может не привести к системе с трехдиагональной матрицей. Пусть, например, имеется уравнение переноса

$$\partial u / \partial t + a(x, t) \partial u / \partial x = f(x, t). \quad (4.1)$$

Используя компактное численное дифференцирование при помощи операторов A_{\pm} , Δ_{\mp} , а также простейшую дискретизацию производной $\partial u / \partial t$ для (4.1), можно записать следующую схему с погрешностью $O(h^3)$ относительно шага h :

$$(u^{m+1} - u^n) / \tau + a_n^{m+1} A_{\mp}^{-1} \Delta_{\mp} u^{m+1} / h = f_n^{m+1}. \quad (4.2)$$

При $a = \text{const}$ эта схема совпадает с рассматривавшейся ранее, поэтому очевидно, что из соображения устойчивости сохраняется прежний выбор пары операторов A и Δ , определяемый параметром $s = \text{sgn} a$ в формулах (1.14).

Однако в случае переменного коэффициента $a(x, t)$ в (4.1) простое умножение обеих частей (4.2) на оператор A не позволяет получить трехточечные разностные уравнения. Чтобы, тем не менее, свести реализацию схемы (4.2) к трехточечным скалярным прогонкам, достаточно ввести новую сеточную функцию $q_n = A^{-1} \Delta u_n^{m+1} / h$, удовлетворяющую уравнению

$$A q_n = \Delta u_n^{m+1} / h. \quad (4.3)$$

Сама же схема (4.2) при этом переписывается в виде

$$u_n^{m+1} + \tau a_n^{m+1} q_n = \tau (u_n^m + f_n^{m+1}). \quad (4.4)$$

Если теперь подставить функцию u_n^{m+1} , выраженную из (4.4), в правую часть (4.3), то возникает разностная система относительно q_n :

$$Aq_n + (\tau/h)\Delta(a_n^m q_n) = (\tau/h)\Delta(u_n^m + f_n^{m+1}). \quad (4.5)$$

Решив эту систему с трехдиагональной матрицей, можно найти сеточную функцию q_n , а затем из (4.4) – исходную функцию u_n^{m+1} . Аналогичным образом можно поступить в случае системы гиперболического типа

$$\partial u / \partial t + Q(u, x, t) \partial u / \partial x = f(x, t),$$

где $Q(u, x, t)$ – симметрическая матрица размерности $p \times p$, а u и f – p -компонентные векторы. Используя операторы

$$B_x = A_0 - 0,25M\Delta_0, \quad C_x = (0,5/h)(\Delta_0 - M\Delta_2),$$

где $M = SDS^{-1}$, S – ортогональная матрица, столбцами которой являются собственные векторы Q , $D = \text{diag}\{\text{sgn } \lambda_j\}$, а λ_j ($j = \overline{1, p}$) – собственные значения Q , можно внести векторную сеточную функцию q_n , удовлетворяющую уравнению

$$B_x q_n = C_x u_n^{m+1}. \quad (4.6)$$

Простейшая аппроксимация системы (4.5) при этом запишется в виде

$$u_n^{m+1} + \tau Q q_n = u_n^m + \tau f_n^m. \quad (4.7)$$

Ввиду того что $q_n = B_x^{-1} C_x u_n^{m+1} = (\partial u / \partial x)_n^{m+1} + O(h^3)$, схема (4.7) имеет порядок $O(\tau + h^3)$. Исключение при помощи (4.7) сеточной функции u^{m+1} приводит к системе с блок-трехдиагональной матрицей с размерностью блоков $p \times p$ относительно функции q :

$$B_x q + \tau C_x (Qq) = C_x (u^m + \tau f^m).$$

После решения этой системы, а затем подстановки q в (4.7) окончательно находится функция u^{m+1} .

В случае недивергентной системы

$$\partial u / \partial t + Q \partial u / \partial x = \epsilon \partial^2 u / \partial x^2 + f, \quad (4.8)$$

используя аппроксимацию $B_x^{-1} C_x$ и производной $\partial u / \partial x$, можно построить схемы, отличающиеся способом дискретизации второй производной. В частности, для аппроксимации

$$\partial^2 u / \partial x^2 = \partial q / \partial x = \tilde{C}_x q + O(h), \quad \tilde{C}_x = -C_x^*.$$

Схема для (4.8) с погрешностью $O(h^3 + \epsilon h)$ записывается в виде

$$(u^{m+1} - u^m) / \tau + Qq = \epsilon \tilde{C}_x q + f_n^{m+1}, \quad (4.9)$$

$$B_x q + C_x (Qq) - C_x \epsilon \tilde{C}_x q = C_x (u^m + \tau f^{m+1}).$$

Второе уравнение (4.9) получено после подстановки функции u^{m+1} , выраженной из первого уравнения (4.9), в равенство (4.6). Для получения системы с блок-трехдиагональной матрицей с размерностью блоков $p \times p$

относительно функции q его можно модифицировать следующим образом, оставаясь в рамках этой же погрешности аппроксимации:

$$B_x q + C_x(Qq) - \Delta_- \epsilon \Delta_+ q = C_x(u^m + \tau f_n^{m+1}).$$

После определения q остается непосредственно найти u^{m+1} из первого уравнения (4.9).

Если ввести аппроксимацию третьего порядка

$$\partial^2 u / \partial x^2 \approx r = \tilde{B}_x^{-1} \tilde{C}_x q + O(h^3), \quad \tilde{B}_x = B_x^*, \quad \tilde{C}_x = -C_x^*,$$

то вместо второго уравнения (4.9) можно записать уравнения

$$B_x q + C_x(Qq) - C_x(\epsilon r) = C_x(u^m + \tau f_n^{m+1}), \quad (4.10a)$$

$$\tilde{B}_x r = \tilde{C}_x q \quad (4.10b)$$

относительно сеточных функций q и r . Вместе с равенством

$$(u^{m+1} - u^m) / \tau + Qq = \epsilon r + f_n^{m+1} \quad (4.10в)$$

она образует схему, аппроксимирующую (4.8) с погрешностью $O(h^3)$. Альтернативный вариант состоит в использовании вместо второго уравнения (4.10a) равенства

$$\left(E + \frac{1}{12} \Delta_2 \right) r = \Delta_2 u^{m+1} / h^2, \quad (4.10г)$$

определяющего аппроксимацию четвертого порядка r производной $\partial^2 u / \partial x^2$.

Схемы (4.10a), (4.10б), (4.10в) и (4.10a), (4.10в), (4.10г) после исключения одной из функций u^{m+1} , q и r при помощи (4.10в) приводят к двум трехточечным векторным уравнениям с матрицами $p \times p$.

В случае постоянных коэффициентов в исходных уравнениях (4.1) и (4.8) приведенные выше схемы совпадают с рассмотренным ранее, поэтому их устойчивость можно считать установленной.

Принципы построения компактных аппроксимаций одномерных дифференциальных операторов, входящих в систему (4.8), легко обобщаются на случай систем с n пространственными переменными, записанных в не-дивергентном виде.

В частности, схемы расщепления, описанные выше, нуждаются лишь в незначительной модификации разностных уравнений на каждом из дробных шагов, при которой в качестве искомого сеточных функций удобно рассматриваются аппроксимации $q^{(i)}$ производных $\partial u / \partial x_i$ ($i = 1, n$).

Многопараметрическое семейство компактных схем. Квазилинейные уравнения (4.8) с точки зрения применения компактных аппроксимаций обладают следующей особенностью по сравнению с соответствующими "дивергентными" уравнениями. В них аппроксимируются производные $\partial u / \partial x$ и $\partial^2 u / \partial x^2$, а не производные $\partial \varphi(u) / \partial x$ и $(\partial / \partial x)(\mu \partial u / \partial x)$. Это позволяет построить многопараметрическое семейство схем повышенной точности, включающее и описанные выше схемы. Для этого достаточно воспользоваться формулами, связывающими в трех соседних узлах сетки значения функций $q = \partial u / \partial x$ и $r = \partial^2 u / \partial x^2$ и справедливыми с точностью до членов высокого порядка малости относительно шага h

(формулами Эрмита). Такие формулы можно представить в виде

$$A^{(1)}u + A^{(2)}q + A^{(3)}r = 0, \quad (4.11)$$

где $A^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$) – трехточечные операторы, задаваемые в узле $x_n = nh$ тремя коэффициентами:

$$A^{(j)}\varphi = \sum_{k=-1}^1 \alpha_k^{(j)} \varphi_{n+k}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Девять неизвестных коэффициентов $\alpha_k^{(j)}$ определяются из тех же соображений, что и коэффициенты в формуле (1.1), определяющей связь между функциями u и q . А именно, если интересоваться порядком аппроксимации, не меньшим чем третий, то подстановка в (4.11) рядов Тэйлора для функций u , $\partial u/\partial x$ и $\partial^2 u/\partial x^2$ в окрестности узла $x_n = nh$ и приравнение к нулю коэффициентов при степенях h^k ($k = 0, 1, 2, 3$) приводит к системе четырех уравнений для $\alpha_k^{(j)}$ ($j, k = 1, 2, 3$). Альтернативный путь получения этой системы состоит в применении метода неопределенных коэффициентов, заключающегося в том, что к приближенной формуле (4.11) предъявляется требование ее тождественного выполнения (т.е. тождественного равенства нулю левой части) для пробных функций $u = x, x^2, x^3, x^4$.

Из полученной системы коэффициенты $\alpha_k^{(j)}$ определяются с точностью до пяти свободных параметров. Приведем эти коэффициенты в том виде, как они представлены в [1]:

$$\begin{aligned} \alpha_{-1}^{(1)} &= -\frac{15\beta - 8\gamma}{h^2} + \frac{3\rho - 2\theta}{h}, & a_0^{(1)} &= \frac{16\gamma}{h^2} + \frac{4\theta}{h}, \\ a_1^{(1)} &= -\frac{15\beta - 8\gamma}{h^2} - \frac{3\rho + 2\theta}{h}, & & \\ a_{-1}^{(2)} &= \frac{3\alpha + 7\beta - 5\gamma}{h} + \rho - \theta, & \alpha_0^{(2)} &= \frac{16\beta}{h} + 4\rho, \\ \alpha_1^{(2)} &= -\frac{3\alpha - 7\beta - 5\gamma}{h} + \rho + \theta, & & \\ \alpha_{-1}^{(3)} &= \alpha + \beta - \gamma, & \alpha_0^{(3)} &= 4\alpha, & \alpha_1^{(3)} &= \alpha - \beta - \gamma. \end{aligned} \quad (4.12)$$

При любых значениях параметров $\alpha, \beta, \gamma, \rho$ и θ равенство (4.11) при $u = u^{m+1}$, дополненное соотношением

$$Aq = \Delta u^{m+1}/h, \quad (4.13)$$

в котором операторы A и Δ выбраны в соответствии со знаком $a_n^m = a(x_n, t_m)$, а также равенством

$$(u^{m+1} - u^m)/\tau + a_n^m q = \epsilon r + f, \quad (4.14)$$

следующим из уравнения (4.8) при простейшей дискретизации производной $\partial u/\partial t$, образует схему третьего порядка относительно шага h .

После исключения функции u^{m+1} из (4.14) соответствующая система разностных уравнений окажется системой с блок-трехдиагональной матри-

цей с размерностью блоков 2×2 . Частным случаем этой системы и является система (4.10).

Наличие пяти свободных параметров в (4.12), помимо требования абсолютной устойчивости, позволяет представлять дополнительные требования к свойствам схемы. Этот вопрос здесь рассматриваться не будет, поскольку желаемые свойства схемы могут сильно зависеть от специфики решаемой задачи.

Заметим, наконец, что соотношение (4.11) может быть использовано для аппроксимации диффузионных членов в консервативных схемах, описанных выше. Однако в этом случае, как нетрудно усмотреть, блоч-трехдиагональная матрица системы разностных уравнений будет содержать блоки с размерностью 3×3 , что делает использование таких аппроксимаций неудобным.

4.2. Повышение порядка несимметричных компактных аппроксимаций

Формулы компактного численного дифференцирования, обеспечивающие пятый порядок аппроксимации. Трехточечные формулы (4.11), связывающие значения в узлах функции u , а также значения в узлах разностных аналогов ее первых и вторых производных (q и r), содержат большее количество коэффициентов, чем аналогичные формулы, связывающие значения функций u и q . Отсюда естественным образом возникает идея использовать эти дополнительные коэффициенты для построения таких соотношений, которые позволили бы определить q и r как аппроксимации производных функций, обладающие более высоким, чем третий, порядком аппроксимации. Если бы такие аппроксимации имели благоприятные свойства, то их использование в качестве составной части схемы для уравнения (4.8) было бы вполне разумным, поскольку процесс решения разностных уравнений оказался бы не более сложным, чем в случае схемы третьего порядка (4.10). Для уравнения первого порядка (4.1) функция u является лишней, однако может оказаться, что применение векторных прогонок с матрицами 2×2 вместо скалярных прогонок является разумной платой за высокую точность и другие положительные свойства схемы.

При построении соотношений между u , q и r , выполняющихся с точностью до $O(h^k)$, $k > 3$, будем исходить из того же принципа, что и при построении операторов A и Δ . Аппроксимация производной $\partial u / \partial x$ должна быть такой, чтобы оператор, действующий на u , имел бы знакоопределенную самосопряженную составляющую, знак этой составляющей должен быть параметром аппроксимации, позволяющим строить схемы с положительными операторами.

Исходя из этого принципа, можно рассмотреть следующую форму соотношений вида (4.11):

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i^{(1)} q + \sum_{i=1}^3 \beta_i^{(1)} r = 0,5(\Delta_0 - s\Delta_2)u/h, \quad (4.15)$$

где $q_i \approx \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_i}$, $r_i \approx \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_i}$, а значения $s = 0, 1, -1$ соответствуют центральному, левым и правым разностям, определяемым оператором $0,5(\Delta_0 - s\Delta_2)$. Формула (4.15) содержит шесть неизвестных коэф-

фициентов; остальные три коэффициента оказались зафиксированными в результате выбора конкретных операторов $A^{(1)}$ из (4.11). Для определения коэффициентов $\alpha_i^{(j)}$ и $\beta_i^{(j)}$ ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2$) удобно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов и потребовать, чтобы соотношения (4.15) выполнялись бы тождественно точно (т.е. чтобы q_i и r_i были точными значениями первых и вторых производных) для $u = x, x^2, \dots, x^n$ (случай $u = x^0$ приводит к тривиальным соотношениям). Подстановка этих функций в (4.15) приводит к линейной системе вида

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2h & 0 & 2h & 2 & 2 & 2 \\ 3h^2 & 0 & 3h^2 & -6h & 0 & 6h \\ -4h^3 & 0 & 4h^3 & 12h^2 & 0 & 12h^2 \\ 5h^4 & 0 & 5h^4 & -20h^3 & 0 & 20h^3 \\ -6h^5 & 0 & 6h^5 & 30h^4 & 0 & 30h^4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1^{(k)} \\ \alpha_2^{(k)} \\ \alpha_3^{(k)} \\ \beta_1^{(k)} \\ \beta_2^{(k)} \\ \beta_3^{(k)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1^{(k)} \\ d_2^{(k)} \\ d_3^{(k)} \\ d_4^{(k)} \\ d_5^{(k)} \\ d_6^{(k)} \end{vmatrix}, \quad (4.16)$$

где $d_p^{(1)} = (\Delta_0 - s\Delta_2)x^p/h$, $d_p^{(2)} = \Delta_2 x^k/h^2$, $p = 1, 2, \dots, 6, k = 1, 2$. После определения из системы (4.16) коэффициентов в формуле (4.15) последняя может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} & \left[\left(E + \frac{7}{30} \Delta_2 \right) - \frac{3}{16} s \Delta_0 \right] q + h \left[-\frac{1}{8} s \left(E - \frac{1}{6} \Delta_2 \right) - \frac{1}{30} \Delta_0 \right] r = \\ & = \frac{1}{2h} (\Delta_0 - s\Delta_2) u. \end{aligned} \quad (4.17)$$

На основе равенства (4.17) можно построить несимметричную аппроксимацию пятого порядка точности производной $(\partial u/\partial x)_{x=x_j}$. Для этого достаточно воспользоваться следующими эвристическими соображениями. Чтобы выразить из (4.17) q_j таким образом, чтобы $q_j = (\partial u/\partial x)_{x=x_j} + O(h^5)$, достаточно использовать любое представление вида $r_j = (\partial^2 u/\partial x^2)_{x=x_j} + O(h^4)$, поскольку второе слагаемое в левой части (12) содержит множитель h . В качестве такого представления пригодна формула

$$\partial^2 u/\partial x^2 \approx r_j = (E + (1/12)\Delta_2)^{-1} \Delta_2 u/h^2, \quad (4.18)$$

справедливая с точностью до членов порядка $O(h^4)$. После подстановки (4.18) в (4.17) и умножения результата на $(E + (1/12)\Delta_2)$ простые выкладки приводят к равенству

$$\begin{aligned} & \left[E + \frac{19}{60} \Delta_2 + \frac{7}{360} \Delta_2^2 - \frac{3}{16} s \Delta_0 \left(E + \frac{1}{12} \Delta_2 \right) \right] q = \\ & = \left[(-s\Delta_2) \left(\frac{3}{8} E + \frac{1}{16} \Delta_2 \right) + \Delta_0 \left(\frac{1}{2} E + \frac{3}{40} \Delta_2 \right) \right] u/h. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Разлагая гладкие функции u и $(\partial u/\partial x)$ в ряды Тэйлора в окрестности точки $x = x_j$, легко убедиться в том, что $q_j = (\partial u/\partial x)_{x=x_j} + O(h^5)$.

При практическом определении $(\partial u/\partial x)_{x=x_j}$ с точностью до $O(h^5)$ и $(\partial^2 u/\partial x^2)_{x=x_j}$ с точностью до $O(h^4)$ по заданной функции достаточно совместно решить два трехточечных разностных уравнения – (4.17) и (4.18) – относительно вектора $z_j = (q_j, r_j)$. При выводе формулы (4.17) ставилась цель получить несимметричные (т.е. нецентрированные) аппроксимации. Если же отказаться от этого ограничения, то на основе (4.17) нетрудно получить аппроксимации шестого порядка. Для этого достаточно, положив в (4.17) $s = 0$, записать равенство

$$\left(E + \frac{7}{30} \Delta_2\right)q - \frac{h}{30} \Delta_0 r = \frac{1}{2h} \Delta_0; \quad (4.20)$$

вычитание его из (4.17) приводит ко второму равенству:

$$\frac{3}{8h} \Delta_0 q + \frac{1}{4} \left(E - \frac{1}{6} \Delta_2\right)r = \frac{\Delta_2 u}{h^2}. \quad (4.21)$$

Если под q и r понимать соответственно аппроксимации производных $(\partial u/\partial x)$ и $(\partial^2 u/\partial x^2)$, то, как легко проверить, соотношения (4.20) и (4.21) справедливы с точностью до $O(h^6)$; определяя из них q и r , можно получить следующие формулы компактного численного дифференцирования шестого порядка:

$$\left(E + \frac{4}{15} \Delta_2 + \frac{1}{90} \Delta_2^2\right)q = \left(E + \frac{1}{10} \Delta_2\right) \frac{\Delta_0}{2h} u, \quad (4.22)$$

$$\left(E + \frac{4}{15} \Delta_2 + \frac{1}{90} \Delta_2^2\right)r = \left(E + \frac{11}{60} \Delta_2\right) \frac{\Delta_2}{h^2} u. \quad (4.23)$$

При практическом определении q и r по известной сеточной функции достаточно совместно решить два трехточечных уравнения (4.20) и (4.21). Как следует из равенства (4.22), аппроксимация q производной $\partial u/\partial x$ является косимметричным оператором. Отсутствие самосопряженной составляющей в этой аппроксимации ухудшает возможности ее применения в разностных схемах, вследствие чего формулы (4.20) и (4.21) в дальнейшем рассматриваться не будут.

Нецентрированные схемы порядка выше третьего. Обращаясь к уравнению (4.8), нетрудно усмотреть, что равенство (4.14), полученное после подстановки в него q и r вместо производных $(\partial u/\partial x)$ и $(\partial^2 u/\partial x^2)$, совместно с соотношениями (4.17) и (4.18) при $s = \mp 1$ образует схемы с погрешностью вида $O(h^5 + \|\epsilon\|h^4)$. Повышение порядка при этом несколько не усложняет процесс решения разностных уравнений, которые, как и в случае схемы третьего порядка, можно свести к векторным прогонам с матрицами 2×2 . Выбор параметра s однозначно диктуется соображениями устойчивости, которые приводят к равенству $s = \text{sgn} a$ в каждом узле сети.

Соотношения (4.17) и (4.18) можно использовать также при аппроксимации уравнения переноса (4.5) ($\epsilon \equiv 0$) с пятым порядком относи-

тельно шага h , однако сеточная функция r при этом не будет входить в основное уравнение, дополняемое равенствами (4.17) и (4.18), и окажется лишней.

То же самое можно сказать и о схеме с погрешностью $O(h^5)$ для нелинейного уравнения переноса

$$\partial u / \partial t + \partial \varphi(u, x) / \partial x = f(u, x);$$

при простейшей дискретизации $(\partial u / \partial t)$ она будет иметь вид равенства

$$(u^{m+1} - u^m) / \tau + q = f,$$

дополненного соотношениями (4.17), (4.18); однако при этом под сеточными функциями q и r понимаются аппроксимации соответственно производных $\partial \varphi / \partial x$ и $\partial^2 \varphi / \partial x^2$, а $s = \text{sgn } \varphi'(u)$.

При оценке устойчивости всех этих схем достаточно рассмотреть случай $\varphi(u) = au$, $a = \text{const}$, $\epsilon \equiv 0$; равенство (4.17) при этом удобно записать в виде

$$q = A_5^{-1} \Delta_5 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_n} + O(h^5), \quad (4.24)$$

где

$$A_5 = E + \frac{19}{60} \Delta_2 + \frac{7}{360} \Delta_2^2 - \frac{3}{16} s \Delta_0 \left(E + \frac{1}{12} \Delta_2 \right),$$

$$\Delta_5 = \left[-s \Delta_2 \left(\frac{3}{8} E + \frac{1}{16} \Delta_2 \right) + \Delta_0 \left(\frac{1}{2} E + \frac{3}{40} \Delta_2 \right) \right] / h.$$

Если ввести одно параметрическое семейство схем с весами, то предметом исследования окажется схема

$$(A_5 + \sigma \tau \Delta_5 a) (u^{m+1} - u^m) / \tau + \Delta_5 a u^m = 0. \quad (4.25)$$

Такая схема отличается от изученной схемы (1.14) только тем, что в ней вместо операторов A и Δ используются операторы A_5 и Δ_5 . Последние удовлетворяют тем же неравенствам, что и A и Δ :

$$a \Delta_5 > 0; \quad A_5^* \Delta_5 a > 0; \quad A_5^{-1} \Delta_5 a > 0. \quad (4.26)$$

Первое из них следует из того, что при $s = \text{sgn } a$ $as(-\Delta_2) > 0$, второе — из выражения для самосопряженной составляющей $(A_5^* \Delta_5 a)^{(0)}$ оператора $A_5^* \Delta_5 a$, которое после перемножения коммутативных операторов, входящих в (4.24), легко приводится к виду

$$h(A_5^* \Delta_5 a)^{(0)} = as \left(-\frac{1}{1920} \Delta_2^3 - \frac{1}{16 \cdot 1440} \Delta_2^4 \right).$$

Поскольку $\Delta_2 < 4E$, $\Delta_2^4 = (-\Delta_2)(-\Delta_2^3)$, имеет место неравенство $\Delta_2^4 = -4\Delta_2^3$, откуда следует, что

$$h(A_5^* \Delta_5 a)^{(0)} > as(-\Delta_2^3) \left(\frac{1}{1920} - \frac{1}{4 \cdot 1440} \right) > 0.$$

В силу коммутативности A_5 и Δ_5 третье неравенство (4.26) легко получить из второго.

Из неравенств (4.26) непосредственно следует абсолютная устойчивость схемы (4.25) при $\sigma \geq 0,5$.

На примере уравнения переноса с постоянными коэффициентами можно оценить дисперсионные и диссипативные свойства аппроксимации $A_5^{-1} \Delta_5 u$ конвективного члена $a \, du/dx$. Сравнивая волновые решения точного и разностного уравнений (без введения дискретизации производной du/dt), нетрудно получить следующие выражения для отношения a_*/a схемной фазовой скорости к точной для волнового числа k :

$$\frac{a_*}{a} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{1 - \frac{313}{240} l + \frac{1831}{3600} l^2 - \frac{37}{600} l^3}{\left(1 - \frac{19}{15} l + \frac{14}{45} l^2\right)^2 + \frac{9}{16} r(1-l) \left(1 - \frac{1}{3} l\right)^2}, \quad (4.27)$$

где $l = \sin^2(\alpha/2)$, $\alpha = kh$.

Разложение правой части (4.27) в ряд по α приводит к оценке $a_*/a = 1 - O(\alpha^6)$, указывающей на весьма малое отличие схемной фазовой скорости от точной для не слишком коротких волн.

Для величины диссипации $d = -\ln \lambda$, где λ – коэффициент усиления гармоник за характерное время h/a , получается выражение

$$d = \frac{1}{30} l^3 \frac{1 - (1/3)l}{\left(1 - \frac{19}{15} l + \frac{14}{45} l^2\right)^2 + \frac{9}{16} r(1-l) \left(1 - \frac{1}{3} l\right)^2}; \quad (4.28)$$

при малых α правая часть его имеет порядок $O(\alpha^6)$.

Зависимости от α отношения a_*/a и d приведены в (4.27) и (4.28) а также на рис. 1.1 (кривые 3). Как и в случае схемы третьего порядка, диссипация, очень малая для длинных и средних волн ($kh < \pi/4$), резко возрастает в диапазоне коротких волн, что должно приводить к демпфированию коротковолновой части решения в силу сравнимости длины волны с шагом сетки ($kh \approx \pi$). Однако область волновых чисел, в которой фазовые ошибки малы, существенно превосходит эту область в случае схем третьего порядка. Наличие мощной диссипации в диапазоне коротких волн позволяет надеяться на подавление схемных осцилляций, возникающих, в частности, в случае быстроменяющихся и разрывных решений. Это предположение было подтверждено результатами расчетов для рассмотренной выше задачи о распространении разрыва, описываемого нелинейным уравнением переноса $\varphi(u) = u^2/2$. Дискретизация производных по x и t осуществлялась соответственно при помощи оператора $A_5^{-1} \Delta_5 u$ схемы третьего порядка (1.52).

При практическом применении схемы пятого порядка возникает вопрос о граничных условиях. Возможны различные варианты таких условий, не понижающих формальный порядок аппроксимации алгоритма. Все их можно рассматривать как комбинации разностного аналога исходного уравнения и дополнительных соотношений типа (4.11), сконструированных таким образом, чтобы использовались значения сеточных функций только во внутренних узлах области.

Более того, удачно выбранные граничные условия, обеспечивающие от-

личие порядка $O(h^5)$ точного решения разностного, необязательно должны сами иметь порядок, не меньший пятого.

Схемы пятого порядка для систем уравнений. Рассмотренные аппроксимации пятого порядка легко обобщаются на случай систем уравнений вида (4.8). Для этого достаточно во всех представленных выше соотношениях заменить скалярный параметр s , полагаемый равным знаку коэффициента при производной du/dx , на матрицу M , построенную при помощи собственных векторов и знаков собственных значений матрицы Q из (4.8). Матрично-разностные аналоги B_5 и C_5 операторов A_5 и Δ_5 при этом можно записать в виде

$$B_5 = E + \frac{19}{60} \Delta_2 + \frac{7}{360} \Delta_2^2 - \frac{3}{16} M \Delta_0 \left(E + \frac{1}{12} \Delta_2 \right), \quad (4.29)$$

$$C_5 = \left[M(-\Delta_2) \left(\frac{3}{8} E + \frac{1}{16} \Delta_2 \right) + \Delta_0 \left(\frac{1}{2} E + \frac{3}{40} \Delta_2 \right) \right] / h,$$

а сама схема пятого порядка для (4.8) в узле $x_j = jh$ представится в виде трех трехточечных соотношений

$$(u_j^{m+1} - u_j^m) / r + Q_j q_j = \epsilon_j r_j + f_j, \quad (4.30)$$

$$\left[\left(E + \frac{7}{30} \Delta_2 \right) - \frac{3}{16} M \Delta_0 \right] q - h \left[\frac{M}{8} \left(E - \frac{1}{6} \Delta_2 \right) + \frac{1}{30} \Delta_0 \right] r =$$

$$= \frac{1}{2h} (\Delta_0 - M \Delta_2) u^{m+1},$$

$$\left(E + \frac{1}{12} \Delta_2 \right) r = \frac{\Delta_2 u^{m+1}}{h^2},$$

где q_j и r_j — векторные сеточные функции, аппроксимирующие производные du/dx и $\partial^2 u / \partial x^2$.

Схема (4.30) имеет погрешность $O(h^5 + \|\epsilon\| h^4)$ и становится схемой пятого порядка для чисто конвективных уравнений ($\epsilon \equiv 0$). После исключения u_j^{m+1} из первого уравнения (4.30) она сводится к паре трехточечных векторных уравнений относительно векторов q и r .

В случае гиперболической системы, записанной в дивергентной форме с конвективными членами вида $df(u)/dx$, схема (4.30) при $\epsilon \equiv 0$ лишь незначительно модифицируется с учетом того, что q и r становятся аппроксимациями первых и вторых производных по x функции f . Поскольку при этом в правой части второго и третьего уравнений (4.30) вместо u^{m+1} появляется нелинейная функция $f(u^{m+1})$, для удобства решения разностных уравнений естественно произвести ее линеаризацию. Кроме того, если схему желательно записать в виде некоторых уравнений баланса, операторы $M \Delta_0$ и $M \Delta_2$ следует, как и в рассмотренных схемах третьего порядка, заменить на операторы $\Delta_0 M$ и $\Delta_+ (T_{1/2} M) \Delta_-$. Легко проверить, что локальный порядок аппроксимации схемы при этом не нарушится, если в окрестности рассматриваемого узла нет смены знаков собственных значений матрицы Q .

Устойчивость схемы типа (4.30) основывается на легко устанавливаемой положительности операторов $B_5^* C_5$ или $B_5^{-1} C_5$, определенных формулами (4.29); при $\epsilon = 0$ ее можно рассматривать как частный случай схемы с весами

$$(E + \tau \sigma B_5^{-1} C_5 Q) (u^{m+1} - u^m) / \tau + B_5^{-1} C_5 F(u^m) = 0, \quad Q = \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_{t = t_m},$$

абсолютно устойчивой при $\sigma \geq 0,5$ в случае постоянной матрицы Q .

Применение внутренних итераций при решении разностных уравнений. Если в случае скалярных уравнений решение трехточечных разностных уравнений относительно двухкомпонентных векторных функций не вызывает каких-либо затруднений, то при аппроксимации систем из p -уравнений процедура одновременного решения двух векторных уравнений с матрицами $p \times p$ может стать, как и в случае схем третьего порядка, нежелательной. Поэтому естественно попытаться построить итерационные процессы, которые уменьшали бы размерности обрабатываемых матриц. Рассматривая некоторые из таких возможностей, можно выделить две из них, условно назвав их соответственно итерационным процессом для q и r и итерационным процессом для u .

И т е р а ц и о н н ы й п р о ц е с с д л я q и r . Вводя обозначения

$$P = E + \frac{7}{30} \Delta_2 - \frac{3}{16} M \Delta_0, \quad R = \left[\frac{1}{8} M \left(1 - \frac{1}{6} \Delta_2 \right) - \frac{1}{30} \Delta_0 \right],$$

$$S_0 = E + \frac{1}{12} \Delta_2, \quad \Delta = \frac{1}{2} (\Delta_0 - M \Delta_2),$$

исключив из второго и третьего уравнений (4.30) функцию u^{m+1} , выраженную через q и r из первого уравнения (4.30), получим пару векторных уравнений

$$(P + \sigma \gamma \Delta Q) q - (hR + \sigma \gamma \Delta \epsilon) r = g_1, \tag{4.31}$$

$$\sigma r \Delta_2 Q q + (hS_0 - \sigma \gamma \Delta_2 \epsilon) r = g_2,$$

в которых $\gamma = \tau/h$, функции g_1 и g_2 известны, а весовой множитель σ введен для большей общности. Фактически он подразумевает использование в первом уравнении (4.30) вместо q и r соответственно $\sigma q^{m+1} + (1 - \sigma) q^m$ и $\sigma r^{m+1} + (1 - \sigma) r^m$.

Внутренний итерационный процесс теперь можно представить следующим образом. По известной из предыдущей итерации сеточной функции q из второго уравнения (4.31) определяется функция r , что позволяет из первого уравнения (4.31) найти новые значения q и т.д. Обращение соответствующих трехточечных операторов при этом может быть осуществлено при помощи векторных прогонов с матрицами $p \times p$. В операторной форме переход от k -й внутренней итерации к $(k+1)$ -й представляется следующим образом:

$$q^{k+1} = -\sigma \gamma (P + \sigma \gamma \Delta Q)^{-1} (hR + \sigma \gamma \Delta \epsilon) (hS_0 - \sigma \gamma \Delta_2 \epsilon)^{-1} \Delta_2 Q q^k + g_3, \tag{4.32}$$

где функция g_3 — известна.

В случае постоянных матриц Q и ϵ такой процесс сходится со скоростью, не зависящей от шагов сетки. Чтобы показать это, равенство (4.32) удобно представить в виде

$$q^{k+1} = G_1 G_2 q^k + g_3,$$

где

$$G_1 = (hR + \sigma\gamma\Delta\epsilon)(hS - \sigma\gamma\Delta_2\epsilon)^{-1}, \quad G_2 = \sigma\gamma\Delta_2 Q(P + \sigma\gamma\Delta Q)^{-1}.$$

Вычисление $\|G_1\|^2$ после громоздких выкладок приводит к следующему равенству:

$$\|G_1\|^2 = \sup_v \frac{\left\{ h^2 \left[\left(\frac{1}{8} E - \frac{1}{48} \Delta_2 \right)^2 - \frac{1}{900} \Delta_0^2 + h\sigma\gamma\epsilon \left(-\frac{31}{120} \Delta_2 - \frac{1}{20} \Delta_2^2 \right) - \sigma^2 \gamma^2 \xi^2 \Delta_2 \right] \right\} v, v}{\left\{ h^2 \left[E + \frac{1}{12} \Delta_2 \right]^2 + 2h\sigma\gamma\epsilon (-\Delta_2) \left(E + \frac{1}{12} \Delta_2 \right) + \sigma^2 \gamma^2 \epsilon^2 \Delta_2^2 \right\} v, v}$$

Грубые оценки $\|G_1\|$ весьма просто получить при $\epsilon \equiv 0$, когда в правой части этого равенства остаются лишь члены с множителем h^2 . Если вспомнить, что $(-\Delta_2 v, v) \leq 4(v, v)$, $(\Delta_2^2 v, v) \leq 4(-\Delta_2 v, v)$ и $\Delta_0^2 = 4\Delta_2 + \Delta_2^2$, то нетрудно установить, что

$$\|G_1\|^2 < \frac{1/64 + (139/900)y}{1 - (5/36)y}, \quad y = \frac{(-\Delta_2 v, v)}{(v, v)}.$$

Так как максимальное значение y равно 4, то $\|G_1\| \leq 0,35$.

При $\epsilon \neq 0$ можно установить, что по крайней мере $\|G_1\| < 0,5$.

Вычисление нормы оператора G_2 приводит к равенству

$$\|G_2\|^2 = \sup_v \frac{(\sigma^2 \gamma^2 \Delta_2^2 Q^2 v, v)}{\left[\left(\frac{\sigma^2 \gamma^2}{4} \Delta_2^2 Q^2 + \left(E + \frac{7}{30} \Delta_2 \right)^2 - \sigma\gamma \left(E + \frac{7}{30} \Delta_2 \right) \Delta_2 Q M - \Delta_0^2 \left(\frac{\sigma\gamma}{2} Q - \frac{3}{16} M \right)^2 \right] v, v}$$

в котором учтено, что $M^*M = I$. Для грубой оценки $\|G_2\|$ достаточно заметить, что в квадратных скобках второй, третий и четвертый оператор положительны, причем второй превосходит $(1/15)E$, а первый с точностью до множителя совпадает, с оператором в числителе. Отсюда следует, что

$$\|G_2\|^2 < \frac{\sigma^2 \gamma^2 (\Delta_2^2 Q^2 v, v)}{\frac{\sigma^2 \gamma^2}{4} (\Delta_2^2 Q^2 v, v) + \frac{1}{15} (v, v)} < \frac{4}{1 + (60\sigma^2 \gamma^2 \|Q\|^2)^{-1}}.$$

Окончательно получается, что

$$\|G_1\| \|G_2\| \leq \begin{cases} \approx 0,7 [1 + (2\sqrt{15} \sigma\gamma \|Q\|)^{-2}]^{-0,5} & \text{при } \epsilon = 0, \\ [1 + (2\sqrt{15} \sigma\gamma \|Q\|)^{-2}]^{-0,5} & \text{при } \epsilon \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, уже из грубых оценок вытекает сходимость итераций, причем скорость этой сходимости не зависит от шагов сетки.

Во многих представляющий практический интерес случаях матрица ϵ диагональна и обращение оператора $(hR + \sigma\gamma\Delta\epsilon)$ при определении \mathbf{r} осуществляется скалярными прогонками.

Если матрица Q постоянна, то векторные прогонки при обращении оператора $(P + \sigma\gamma\Delta Q)$ сводятся к скалярным в результате диагонализации матрицы Q . Используя коммутативность разностных и матричных операторов, равенство $\left[P + \frac{\sigma\gamma}{2} (\Delta_0 - M\Delta_2) Q \right] \mathbf{q}^{k+1} = \mathbf{f}$ можно переписать в виде

$$G\mathbf{q}^{k+1} = \mathbf{f},$$

$$G = S \left[E + \frac{7}{30} \Delta_2 - \frac{3}{16} D\Delta_0 + \frac{\sigma\gamma}{2} (\Lambda\Delta_0 - \Lambda D\Delta_2) \right] S^{-1},$$

$$D = \text{diag} \{ \text{sgn } \lambda_i \},$$

$$\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_i \};$$

после замены $\mathbf{z} = S^{-1} \mathbf{q}^{k+1}$ оно переходит в систему скалярных трехточечных уравнений

$$\left[E + \frac{7}{30} \Delta_2 - \frac{3}{16} \text{sgn } \lambda_i \Delta_0 + \frac{\sigma\gamma}{2} (\lambda_i \Delta_0 - |\lambda_i| \Delta_2) \right] z_i = (S^{-1} \mathbf{f})_i,$$

$$i = 1, 2, \dots, p.$$

В случае переменных матриц для редукции векторных прогонок к скалярным заменим первое уравнение (4.31) уравнением

$$G\mathbf{q}^{k+1} = \left[G - \left\{ P + \frac{\sigma\gamma}{2} (\Delta_0 - M\Delta_2 Q) \right\} \right] \mathbf{q}^k + \mathbf{g},$$

в котором функция \mathbf{g} известна.

Выражение в квадратных скобках в правой части, представляющее из себя разницу между исходным оператором, действующим на \mathbf{q}^{k+1} , и диагонализированным оператором G , исчезает в случае постоянной матрицы Q . Вследствие этого все предыдущие оценки, полученные в приближении замороженных коэффициентов, остаются в силе. В случае переменных матриц с достаточно гладкими коэффициентами норма этого выражения имеет порядок $O(h)$, и поэтому интуитивно ясно, что при не слишком больших h сходимость не нарушится. Можно получить также строгие оценки для допустимых шагов h , использующие априорную информацию об изменении матрицы S .

Итерационный процесс для \mathbf{u}^{m+1} . Если исключить функции q и r при помощи уравнения (4.31), то первое уравнение (4.30) после введения весового множителя σ запишется в виде

$$(E + \sigma\tau\mathcal{A})(\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m)/\tau + \mathcal{A}\mathbf{u}^m = \bar{\mathbf{f}}, \quad (4.33)$$

где

$$\mathcal{A} = \frac{QP^{-1}}{2h} (\Delta_0 - 2RS_0^{-1}\Delta_2) - \frac{\epsilon}{h^2} S^{-1}\Delta_2, \quad (4.34)$$

$$\bar{f} = \sigma f^{m+1} + (1 - \sigma) f^m.$$

К уравнению (4.33), рассматриваемому как частный случай уравнения с расщепляющимся оператором ($\mathcal{A} = \sum_{j=1}^N A_j$, $N = 1$), можно непосредственно применить описанную выше идею внутренних итераций. Для этого достаточно построить самосопряженный оператор D , коммутативный с оператором \mathcal{A} и удовлетворяющий неравенству

$$D \geq \mathcal{A}^* \mathcal{A} + \mathcal{A} \mathcal{A}^*, \quad (4.35)$$

а затем на каждом слое $t = t_{m+1}$ ввести итерационный процесс

$$(E + \tau^2 D)(u^{m+1, k+1} - u^m) / \tau + \sigma \mathcal{A} u^{m+1, k} = \bar{f} + (\sigma - 1) \mathcal{A} u^m. \quad (4.36)$$

Согласно п. 3.4, итерации (4.36) сходятся со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой не превосходит $\sigma/\sqrt{2}$ ($0,5 \leq \sigma \leq 1$).

В качестве D выберем оператор $k(-\Delta_2)I$, где I — единичная матрица $p \times p$, потребовав, чтобы выполнялось неравенство (4.35). В случае постоянных матриц Q и ϵ , когда разностные и матричные операторы коммутативны, число k можно вычислить, используя явные выражения для p и R из (4.30); его можно представить в виде

$$k = k_1 \|Q\| + k_2 \|\epsilon\|, \quad (4.37)$$

где k_1 и k_2 — некоторые числа. В случае переменных матриц Q и ϵ равенство (4.37) после замены в нем $\|Q\|$ на $\max \|Q\|$ и $\|\epsilon\|$ на $\max \|\epsilon\|$ можно рассматривать как некоторую оценку, нуждающуюся в экспериментальной корректировке.

Алгоритм (4.36) реализуется следующим образом. По известной функции $u^{m+1, k}$ ($u^{n+1, 0} = u^n$) в результате p скалярных прогонок находится функция $r^k = S_0^{-1} \Delta_2 u^{m+1, k} / h^2$. Затем, в результате обращения оператора $P = \left(E + \frac{7}{30} \Delta_2\right) - \frac{3}{16} M \Delta_0$ при помощи трехточечных векторных прогонок с матрицами $p \times p$ определяется функция q . Итерация завершается скалярными прогонками, обращающими оператор $[E + \tau^2 k I (-\Delta_2)]$ при известной функции $\mathcal{A} u^{m+1, k} = Q q^{m+1, k} - \epsilon r^{m+1, k}$.

Как и в случае итерационного процесса для q и r , в случае постоянной матрицы Q векторные прогонок можно заменить скалярными, если ввести функцию $z = S^{-1} u$; тогда система уравнений для определения z_i ($i = 1, 2, \dots, p$) будет иметь вид

$$\left(E + \frac{7}{30} \Delta_2 - \frac{3}{16} \operatorname{sgn} \Lambda_i \Delta_0\right) z_{(i)} = g_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (4.38)$$

где g_i — известные скалярные сеточные функции, а $z_{(i)}$ — компоненты вектора $z^{m+1, k+1}$.

Для случая переменной матрицы Q опять-таки можно использовать соответствующий диагонализруемый оператор. Он имеет вид

$$G = S \left(E + \frac{7}{30} \Delta_2 \right) S^{-1} - \frac{3}{16} S D \Delta_0 S^{-1}$$

и отличается от P лишь в случае переменной матрицы S . При этом уравнение $Pq^k = f$ можно заменить уравнением

$$Gq^k = f + (G - P)q^{k-1}, \quad q^0 = q^m,$$

включив последнее в общий итерационный цикл, соответствующий k -й внутренней итерации. Обращение оператора G сводится к решению скалярных уравнений (4.38). Во всех случаях в силу оценки $\|G - P\| = O(h)$ можно рассчитывать на быструю сходимость итерационных процессов, связанных с переменностью матрицы Q , при не слишком больших значениях h .

Пусть сделаны l итерации $k = l$; тогда, положив $u^{n+1,l} = u^{n+1}$, получим равенство вида

$$(R + \tau \mathcal{A})(u^{n+1} - u^n)/\tau + (E - T^l) \mathcal{A}u^n = (E - T^l \mathcal{A}) f^n, \quad (4.39)$$

где $R = E + \tau^2 D$, а T — оператор перехода ($u^{k+1} = Tu^k + F$), $\|T\| \leq \sigma/\sqrt{2}$. В п. 3.4 приведены оценки для числа l , при котором $(\mathcal{A} - T^l \mathcal{A}) > 0$ и схема (4.39) абсолютно устойчива в приближении замороженных коэффициентов. При $u^{n+1} = u^n$ (в случае установления решения) (4.39) переходит в равенство $\mathcal{A}u^n = f^n$ независимо от числа итераций l ; если же интересоваться нестационарным решением исходной задачи, то число l должно быть по крайней мере таким, чтобы $T^l \mathcal{A}u^n = O(\tau)$.

4.3. Симметризация схем третьего порядка.

Центрированные компактные схемы четвертого порядка

Использование полусумм операторов A_{\pm} и Δ_{\mp} . При применении описанных выше аппроксимаций третьего порядка по сравнению с традиционными схемами увеличивается количество арифметических операторов и объем памяти, приходящихся на один узел сетки. Это связано прежде всего с необходимостью вычисления и хранения матриц M в случае систем уравнений. При решении сложных задач с быстро меняющимися функциями (например, задач о течении вязкого газа при больших числах Рейнольдса) такие издержки являются вполне разумной платой за хорошее качество и точность решений (а в некоторых случаях, как показала практика, и за саму возможность получения решений). Некоторой компенсацией при этом может явиться использование более крупных сеток без потери точности.

Вместе с тем в более легких задачах (например, при исследовании течений в случае небольших чисел Рейнольдса) естественно использовать компактные схемы, не требующие вычисления характеристических матриц M . Построить такие схемы можно, заменив операторы B_x и C_x , лежащие в основе компактных схем третьего порядка, на полусуммы

$$\bar{B}_x = 0,5(B_x + B_x^*), \quad \bar{C}_x = 0,5(C_x - C_x^*),$$

являющиеся соответственно самосопряженным и кососимметричным операторами. При этом в узле $x = x_j$

$$B_x f = A_0 f = \frac{1}{6} f_{j-1} + \frac{2}{3} f_j + \frac{1}{6} f_{j+1},$$

$$\bar{C}_x f = (\Delta_0/2h) f = (f_{j+1} - f_{j-1})/2h. \quad (4.40)$$

Прийти к операторам \bar{B}_x и \bar{C}_x можно также, формально положив $M \equiv 0$ в операторах B_x и C_x ; фактически они являются полусуммами операторов A_+ и A_- , Δ_+ и Δ_- .

Поскольку для \bar{B}_x и \bar{C}_x справедливы разложения

$$\bar{B}_x f = \left(E + \frac{h^2}{3} D_x^2 + O(h^4) \right) f,$$

$$\bar{C}_x f = \left(E + \frac{h^2}{3} D_x^2 + O(h^4) \right) D_x f,$$

оператор $\bar{B}_x^{-1} \bar{C}_x$ является оператором компактного численного дифференцирования четвертого порядка:

$$\bar{B}_x^{-1} \bar{C}_x f_j = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_j} + O(h^4).$$

В случае одной пространственной переменной для построения схем, основанных на операторах \bar{B}_x и \bar{C}_x , достаточно во всех рассмотренных выше схемах операторы B_x , C_x , \tilde{B}_x , \tilde{C}_x (или A и Δ , \tilde{A} и $\tilde{\Delta}$) заменить на \bar{B}_x и \bar{C}_x . При отсутствии диффузионных членов эти схемы, очевидно, будут иметь погрешность $O(h^4)$. Например, симметричный аналог схемы (1.70) для системы уравнений (1.58) при $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = Q\mathbf{u}$ запишется в виде

$$(\bar{B}_x + \tau \sigma \bar{C}_x Q) (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) / \tau + \bar{C}_x \mathbf{F}(\mathbf{u})^m = \bar{B}_x \mathbf{f}. \quad (4.41)$$

При наличии диффузионных членов возможны различные способы их аппроксимации, полностью аналогичные рассмотренным выше. Например,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) = \bar{B}_x^{-1} (\Delta_+ T_{1/2} \mu \Delta_-) \mathbf{u} + O(h^2),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) = \bar{B}_x^{-1} \bar{C}_x \mu \bar{B}_x^{-1} C_x \mathbf{u} + O(h^4).$$

Если диффузионные члены имеют вид $\mu \partial^2 \mathbf{u} / \partial x^2$, то для их аппроксимации можно использовать формулу четвертого порядка (4.18), т.е.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} = \left(E + \frac{1}{12} \Delta_2 \right)^{-1} \frac{(\Delta_2 \mathbf{u})}{h^2} + O(h^4).$$

Примером схемы для системы уравнений (4.8), записанной в недивергентном виде, является схема четвертого порядка

$$\mathbf{u}_n^{m+1} + \tau Q \mathbf{q}_n = \epsilon r \mathbf{u}_n^m + r \mathbf{f}_n^m, \quad (4.42)$$

$$\bar{B}_x \mathbf{q} = \bar{C}_x \mathbf{u}^{m+1},$$

$$(E + \Delta_2/12) \mathbf{r} = \Delta_2 \mathbf{u}^{m+1} / h^2,$$

полностью аналогичная схемам (4.6), (4.10в), (4.10г). Симметризованные аналоги компактных схем третьего порядка не нуждаются в дополнительном анализе их устойчивости в приближении замороженных коэффициентов. По существу, эта устойчивость при отсутствии диффузионных членов следует из неотрицательности операторов $\bar{B}_x \bar{C}_x$ или $\bar{B}_x^{-1} \bar{C}_x$, что обеспечивает выполнение соответствующих энергетических неравенств по тем же причинам, что и положительность операторов $B_x^* C_x$ или $B_x^{-1} C_x$.

Наличие неявных компактных аппроксимаций диффузионных членов приводит к появлению самосопряженной положительной составляющей в операторе схемы, что лишь усиливает операторные неравенства, достаточные для устойчивости.

Компактные аппроксимации четвертого порядка для уравнений переноса обладают теми же свойствами, что и операторы третьего порядка, за исключением диссипативно-дисперсионных свойств, и на рис. 1.1 приведена кривая зависимости фазовой скорости от волнового числа для дискретизации $B_x^{-1} C_x$ производной du/dx в уравнении переноса (1.20) (кривая 2). В случае центрированной аппроксимации четвертого порядка из-за кососимметричности оператора $\bar{B}_x^{-1} \bar{C}_x$ диссипативный механизм отсутствует и коротковолновые возмущения, соответствующие области больших фазовых ошибок, не могут быть подавлены.

Схемы с чередующимися операторами третьего порядка. Симметризацию компактных схем третьего порядка путем использования полусумм \bar{B}_x и \bar{C}_x операторов B_x , B_x^* и C_x , $-C_x^*$ можно рассматривать как способ упрощения алгоритма, позволяющий ценой ухудшения свойств монотонности схемы обойтись в случае систем уравнений без вычисления в каждом узле элементов, характеризующих матрицы M . Существует и другой способ не вычислять эти матрицы, используя тем не менее операторы A и Δ из (1.14). В основе его лежит идея двухшагового перехода от m -го временного слоя к $(m + 1)$ -му с применением то одной пары операторов A и Δ , то другой. Она аналогична идее, заложенной в явной схеме Мак-Кормака [51] с чередующимися направлениями односторонних разностей.

Полезно вспомнить эту схему для векторного уравнения

$$\partial u / \partial t + \partial f(u) / \partial x = 0.$$

На первом этапе находятся промежуточные функции \tilde{u} по формуле

$$\tilde{u} = u^m + r \Delta_+ f(u^m), \quad r = \tau/h.$$

Окончательные значения u^{m+1} определяются в виде

$$u^{m+1} = 0,5 [u^m + \tilde{u} + r \Delta_- f(\tilde{u})]. \quad (4.43)$$

Исключение из (4.43) \tilde{u} приводит к одношаговой схеме вида

$$u^{m+1} = u^m + r \Delta_+ f(u^m) + r \Delta_- f[u^m + r \Delta_+ f(u^m)].$$

В случае линейной задачи ($f(u) = au$) последняя схема совпадает со схемой Лакса–Вендроффа. Используя операторы A и Δ , аналогичную двухшаговую схему можно построить следующим образом. Выбирается произвольная пара операторов (A_+, Δ_-) или (A_-, Δ_+) , обозначаемая через (A, Δ) . Соответственно другая пара, как и ранее, обозначается через

$(\tilde{A}, \tilde{\Delta})$. На первом шаге определяется $\tilde{\mathbf{u}}$ из равенства

$$A\tilde{\mathbf{u}} + r\Delta f(\tilde{\mathbf{u}}) = A\mathbf{u}^m, \quad r = \tau/h, \quad (4.44)$$

после чего окончательные значения \mathbf{u}^{m+1} находятся по формуле

$$\tilde{A}\mathbf{u}^{m+1} = 0,5 [\tilde{A}\mathbf{f}^m + \tilde{A}\tilde{\mathbf{u}} - r\tilde{\Delta}\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}})]. \quad (4.45)$$

Для выяснения порядка аппроксимации схем (4.44), (4.45) удобно умножить (4.44) на A^{-1} и (4.45) на \tilde{A}^{-1} . Полагая $N = A^{-1}\Delta/h$ и $\tilde{N} = \tilde{A}^{-1}\tilde{\Delta}/h$, равенство (4.45) с учетом (4.44) можно записать в виде

$$\mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{u}^m - \frac{\tau}{2} (N + \tilde{N}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}),$$

но $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}^m) + Q(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^m) + O(\tau^2)$, а разность $\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^m$, согласно (4.44), равна $-\tau N \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}})$, поэтому окончательно получается, что

$$\frac{\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m}{\tau} + \frac{(N + \tilde{N})}{2} \mathbf{f}(\mathbf{u}^m) - \frac{\tau}{2} (N + \tilde{N}) Q N \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}) = 0. \quad (4.46)$$

Так как оператор $(N + \tilde{N})/2$ является оператором численного дифференцирования четвертого порядка аппроксимации, то схема (4.46) лишь членами порядка $O(h^4 + \tau)$ отличается от разложения точного решения $\mathbf{u}(x, t)$ в ряд по степеням τ :

$$\frac{\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m}{\tau} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{t=t_m} + O(\tau) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{t=t_m} = - \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u}^m)}{\partial x};$$

таким образом, схемы (4.44), (4.45) имеют четвертый порядок относительно шага h . В случае $\mathbf{f}(\mathbf{u}^m) = Q\mathbf{u}^m$, где Q — постоянная матрица, схемы (4.44), (4.45) после исключений $\tilde{\mathbf{u}}$ представляются в виде

$$\mathbf{u}^{m+1} = 0,5(E + R_1)\mathbf{u}^m = R\mathbf{u}^m, \\ R_1 = \tilde{A}^{-1}(\tilde{A} - rQ\tilde{\Delta})(A + rQ\Delta)^{-1}A, \quad r = \tau/h.$$

В силу попарной коммутативности операторов, входящих в R_1 , можно записать неравенство

$$\|R_1\| < \|\tilde{A}^{-1}A\| \|(\tilde{A} - rQ\tilde{\Delta})(A + rQ\Delta)^{-1}\|,$$

но $\|\tilde{A}^{-1}A\| = 1$, поскольку

$$\|\tilde{A}^{-1}A\| = \sup_{\mathbf{u}} \frac{(A^{*-1}A\mathbf{u}, A^{*-1}A\mathbf{u})}{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = \sup_{\mathbf{u}} \frac{(A^{*-1}\mathbf{u}, A^{*-1}\mathbf{u})}{(A^{-1}\mathbf{u}, A^{-1}\mathbf{u})} = 1$$

в силу нормальности оператора A ($A^*A = AA^*$). Кроме того, вторая норма в правой части, согласно лемме Келлога [47], равна единице. Поэтому

$$\|R\| \leq 0,5(1 + \|R_1\|) = 1.$$

По сравнению с симметризованной схемой (4.41) схемы (4.44), (4.45) несколько проигрывают по числу арифметических действий: при их реализации приходится дополнительно обращаться (например, скалярными прогонками) оператор \tilde{A} в (4.45). Однако они обладают диссипативным

механизмом, связанным с пространственной дискретизацией, отсутствующим у схемы (4.41). Этот механизм должен способствовать подавлению схемных осцилляций. Для его выявления достаточно рассмотреть третье слагаемое в (4.46). Пусть, для простоты, $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{Q}\mathbf{u}$ и матрица \mathbf{Q} постоянна. Тогда $\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{E} + \tau N \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{u}^m$ и

$$-\frac{\tau}{2} (N + \tilde{N}) \mathbf{Q} N \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}) = -\frac{\tau}{2} (N + \tilde{N}) N (\mathbf{E} + \tau N \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^2 \mathbf{u}^m = \mathbf{G} \mathbf{u}^m.$$

Для скалярного произведения $(\mathbf{G}\mathbf{u}, \mathbf{u})$ справедливо равенство

$$(\mathbf{G}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -\frac{\tau}{2} (N_1(N_0^{(0)} + N_1^{(1)}) \mathbf{Q}^2 \mathbf{v}, (\mathbf{E} + \tau N \mathbf{Q})\mathbf{v}),$$

где $\mathbf{v} = (\mathbf{E} + \tau N \mathbf{Q})\mathbf{v}$, а N_0 и N_1 — соответственно самосопряженная и кососимметричная части оператора N . Правую часть этого равенства можно представить в виде

$$-\frac{\tau}{2} ((N_1)^2 \mathbf{Q}^2 \mathbf{v}, \mathbf{v}) + \tau (N_1 [N_0 \mathbf{Q}^2 + \tau (N_0^2 - N_1^2) \mathbf{Q}^3] \mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Очевидно, что в силу $N_1^2 = (N_1^2)^* < 0$ и $\mathbf{Q}^2 > 0$ первое слагаемое этого выражения положительно, второе же слагаемое равно нулю, поскольку оператор N_1 кососимметричный, а коммутативный с ним оператор в квадратных скобках самосопряженный. Таким образом, оператор \mathbf{G} положительный, и ввиду кососимметричности оператора $N + \tilde{N}$ он и является ответственным за диссипацию схемы.

Существует возможность использования чередующихся операторов A и Δ , и для построения явной схемы, аналогичной схеме Мак-Кормака, ее можно представить следующим образом. На первом шаге определяется $\tilde{\mathbf{u}}$ из уравнения

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^m - \tau N \mathbf{f}(\mathbf{u}^m), \quad N = A_x^{-1} \Delta_x / h, \quad (4.47a)$$

а затем окончательно находится \mathbf{u}^{m+1} в виде

$$\mathbf{u}^{m+1} = 0,5(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^m - \tau \tilde{N} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}})), \quad \tilde{N} = \tilde{A}_x^{-1} \tilde{\Delta}_x / h. \quad (4.47b)$$

После исключения $\tilde{\mathbf{u}}$ при помощи (4.47a) схема может быть представлена в виде

$$(\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) / \tau + 1/2 (N + \tilde{N}) \mathbf{f}(\mathbf{u}^m) - (\tau/2) \tilde{N} \mathbf{Q} N \mathbf{f}(\mathbf{u}^m) = 0. \quad (4.48)$$

Легко убедиться в том, что погрешность ее равна $O(h^4 + \tau^2)$; второй порядок относительно τ возникает вследствие того, что последнее слагаемое в (4.48) аппроксимирует член $(\tau/2) (\partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2)_{t=t_m}$ в разложении в ряд Тэйлора решения $\mathbf{u}(x, t)$ в окрестности $t = t_m$.

Поскольку $\tilde{N} = -N^*$, имеет место неравенство $(-\tilde{N}N) > 0$ и схема (4.48) является явной схемой с положительным оператором, отсюда легко выводится ее условная устойчивость. Реализация схемы (4.47) сводится к обращению операторов A и \tilde{A} , которое может быть осуществлено при помощи скалярных прогонок.

Применение сплайнов и формул Эрмита. Хотя различные компактные аппроксимации содержатся в общей формуле (4.11), многочисленность свободных параметров, определяющих их структуру, часто маскирует конкретные схемы. Поэтому на практике процесс построения таких схем основывался на некоторых вполне определенных способах аппроксимации функций.

В середине 70-х годов появилось много исследований, посвященных конструированию центрированных компактных аппроксимаций. Полученные различными способами, эти аппроксимации часто естественным образом приводят к одним и тем же соотношениям, которые, в свою очередь, в некоторых случаях совпадают с рассмотренными выше симметричными формулами.

Одна из идей построения компактных схем состоит в применении кубических сплайнов [32]. Исходя из определения кубического сплайна $S_u(x)$ как непрерывной вместе со своими первой и второй производными функции, принимающей в узлах сетки значения интерполируемой функции, а между узлами являющейся кубической параболой, легко установить, что имеют место равенства

$$\frac{1}{3} q_{j+1} + \frac{4}{3} q_j + \frac{1}{3} q_{j-1} = 2 \Delta_0 u_j / h, \quad (4.49a)$$

$$\frac{1}{3} r_{j-1} + \frac{4}{3} r_j + \frac{1}{3} r_{j+1} = 2 \Delta_2 u_j / h^2, \quad (4.49б)$$

в которых через q и r обозначены соответственно значения в узлах функций $S'_u(x)$ и $S''_u(x)$, а h является шагом равномерной сетки. Первое равенство (4.49) совпадает с уже рассмотренным равенством $A_0 u = \Delta_0 u / 2h$ и определяет аппроксимацию q производной du/dx с четвертым порядком. Второе равенство может быть использовано для аппроксимации производной $\partial^2 u / \partial x^2$ на верхнем временном слое со вторым порядком. Для уравнения (4.8) эти равенства определяют схему с погрешностью $O(h^4 + \|\epsilon\| h^2)$.

Чтобы повысить формальный порядок схемы до четвертого, достаточно вместо второго равенства (4.49) использовать равенство

$$\frac{1}{12} r_{j-1} + \frac{10}{12} r_j + \frac{1}{12} r_{j+1} = \Delta_2 u_j / h^2,$$

тогда оба соотношения (4.49a) можно представить в форме аппроксимаций Паде, имеющих вид

$$[E + (h^2/6) \Delta_+ \Delta_-] q = \Delta_0 u / h, \quad (4.50a)$$

$$[E + (h^2/12) \Delta_+ \Delta_-] r = \Delta_+ \Delta_- u / h^2. \quad (4.50б)$$

Если исходить из формул Эрмита (4.11), то равенства (4.50a) и (4.50б) соответствуют следующим наборам параметров в этих формулах:

$$\alpha = \beta = \gamma = 0, \quad \rho = 1, \quad \theta = 0 \quad \text{для (4.50),}$$

$$\alpha = 5/3, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1, \quad \rho = \theta = 0 \quad \text{для (4.50б).}$$

Формулы вида (4.49a) могут быть получены также при помощи интерполяционных полиномов Эрмита, т.е. полиномов, для которых их значения, а также значения их первых производных совпадают в узлах сетки со значениями интерполируемых функций и их первых производных.

Для этого достаточно построить полином Эрмита, используя значения

$$u(x_{j-1}), u(x_{j+1}), \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_{j-1}}, \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_{j+1}},$$

и затем найти его производную при $x = x_j$. Полученное соотношение даст связь между производными du/dx в узлах x_{j-1} , x_j и x_{j+1} , совпадающую с (4.49а), справедливую с точностью до $O(h^4)$.

Способом получения формул (4.50) является также применение аппроксимаций Падэ. Напомним, что аппроксимации Падэ степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ состоят в замене его отношением $(\sum_{k=0}^m a_k x^k) / (1 + \sum_{k=1}^m b_k x^k)$; погрешность такой замены имеет вид $O(x^{m+n+1})$. Записав для оператора Δ_0 операторный ряд

$$(1/2h) \Delta_0 u = [D_x + (h^2/6) D_x^3 + (h^4/120) D_x^5 + O(h^2)]u, \quad D_x = d/dx,$$

можно задаться целью получить его аппроксимацию вида

$$D_x = (\Delta_0/2h) - (h^2/6) D_x^3 - (h^4/120) D_x^5 - \dots \approx (E + b_1 h^2)^{-1} d_0,$$

т.е. фактически аппроксимацию Падэ при $m = 0, n = 1, x = h^2$, используя тождество

$$\left(1 + \sum_{k=1}^n b_k x^k\right) \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k - \sum_{k=0}^m a_k x^k = x^{m+n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^k.$$

В результате простых выкладок нетрудно получить, что в пределах погрешности $O(h^4)$ оператор b_1 может быть представлен в виде

$$b_1 = \Delta_2/6 = \Delta_- \Delta_+/6,$$

что и приводит к формуле (4.50а). Аналогичным образом может быть получена формула (4.50б), а также введенные в гл. 1 формулы компактного численного дифференцирования третьего порядка.

Центрированные компактные аппроксимации операторов. Вместо того чтобы использовать трехточечные формулы (4.50) для аппроксимаций du/dx и $\partial^2 u/\partial x^2$, можно построить аналогичные формулы, связывающие значения в узлах не производных, а дифференциальных операторов L более общего вида:

$$\alpha_{-1}(Lu)_{j-1} + \alpha_0(Lu)_j + \alpha_1(Lu)_{j+1} = \beta_{-1}u_{j-1} + \beta_0u_j + \beta_1u_{j+1}. \quad (4.51)$$

Такой прием был использован в [35] для получения компактных аппроксимаций четвертого порядка на равномерной сетке; он был назван неявным компактным методом для операторов (Operator Compact Implicit - OCI). Найденные таким образом аппроксимации для оператора

$$\cdot Lu = \epsilon(x) \partial^2 u/\partial x^2 + a(x) \partial u/\partial x + b(x) u$$

совпадают с результатами непосредственного применения формул Эрмита (4.11) при различных значениях свободных параметров [30].

Чтобы найти коэффициенты α_i, β_i ($i = -1, 0, 1$) в (4.51), можно применить различные способы (один из них приводится в [35]). В частности, можно потребовать, чтобы равенство (4.51) выполнялось тождественно

точно для функций $u = x, x^2, x^3, x^4, x^5$ и x^6 . Тогда решение простой алгебраической системы приведет к следующим значениям α_i и β_i :

$$\begin{aligned}\alpha_{-1} &= 6\epsilon_j\epsilon_{j+1} - h(5\epsilon_{j+1}a_j - 2\epsilon_j a_{j+1}) - h^2 a_j a_{j+1}, \\ \alpha_0 &= 4[15\epsilon_{j+1}\epsilon_{j-1} - 4h(\epsilon_{j+1}a_{j-1} - \epsilon_{j-1}a_{j+1}) - h^2 a_{j+1}a_{j-1}], \\ \alpha_1 &= 6\epsilon_j\epsilon_{j-1} - h(5\epsilon_{j-1}a_j - 2\epsilon_j a_{j-1}) - h^2 a_j a_{j-1}, \\ \beta_{-1} &= 0,5[\alpha_1(2\epsilon_{j+1} + ha_{j+1}) + \alpha_0(2\epsilon_j - ha_j) + \alpha_{-1}(2\epsilon_{j-1} - 3ha_{j-1})], \\ \beta_1 &= 0,5[\alpha_1(2\epsilon_{j+1} + 3ha_{j+1}) + \alpha_0(2\epsilon_j - ha_j) + \alpha_{-1}(2\epsilon_{j-1} - ha_{j-1})], \\ \beta_0 &= -(\beta_{-1} + \beta_1).\end{aligned}$$

Метод компактных аппроксимаций операторов в случае уравнений второго порядка обладает несомненным преимуществом перед методами, использующими формулы (4.50), состоящим в том, что при реализации разностной схемы приходится всегда решать скалярные, а не векторные трехточечные уравнения. Вместе с тем обобщение его на случай систем уравнений является весьма громоздким, в то время как применение формул (4.50) в этой ситуации элементарно: достаточно скалярные сеточные функции заменить на векторные.

Ограничения на шаги разностных сеток. Для оценки характера разностных решений в случае применения центрированных компактных схем полезно рассмотреть стационарную простейшую задачу с конвекцией и диффузией, положив в уравнении (2.1)

$$\varphi(u) = au, \quad a = \text{const}, \quad \epsilon = \text{const}, \quad f = 0.$$

Разностные системы, полученные после дискретизации этого уравнения при помощи формул (4.50) или метода ОС1, имеют решения вида

$$u_j = \sum_{k=1}^n c_k q_k^j, \quad c_k = \text{const}, \quad (4.52)$$

где q_k являются корнями соответствующего алгебраического уравнения n -й степени, а $n = 4$ и $n = 2$ соответственно для формул (4.50) и метода ОС1. Анализ корней q_k показывает (см., например, [35]), что если сеточное число Рейнольдса $Re_c = ah/\epsilon$ превосходит некоторое значение порядка единицы, то разностное решение может потерять всякое сходство с точным. Эти максимальные значения равны $4/\sqrt{15}$ ($n = 4$) и $\sqrt{12}$ ($n = 2$), т.е. в случае метода ОС1 диапазон приемлемых значений Re_c шире, чем при применении формул (4.50). Предельное значение Re_c для ОС1 метода превосходит также значение $12/5$ для нецентрированной схемы 3-го порядка. Вместе с тем разностные решения при использовании центрированных аппроксимаций обладают следующим общим недостатком: при $Re_c \rightarrow \infty$ одно из значений q_k приближается к -1 , а сама разностная система — к плохо обусловленной в смысле [48]. В отличие от ситуации, возникающей при применении схемы 3-го порядка, схемные осцилляции при больших Re_c являются слабозатухающими при изменении номера j узла сетки, что фактически приводит к невозможности описать не только структуру пограничного слоя, но и вид невязкой части решения. В этом смысле свойства центрированных компактных схем аналогичны свойствам схемы с центральной разностью Δ_0 для $du/\partial x$ и разностью Δ_2 для $\partial^2 u/\partial x^2$.

Несмотря на указанные недостатки, компактные схемы четвертого порядка могут оказаться весьма эффективными для определенного класса задач.

В области аэрогидродинамики они должны быть полезными при сравнительно небольших значениях числа Рейнольдса, когда можно получить решения высокой точности при умеренных параметрах сетки.

Г л а в а 2

КОМПАКТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧАХ О ТЕЧЕНИЯХ ВЯЗКОГО ГАЗА

Настоящая глава посвящена применению компактных аппроксимаций при численном решении задач динамики вязкого газа. Используя дискретизацию пространственных производных при помощи операторов компактного численного дифференцирования, можно строить различные разностные схемы для уравнений Навье—Стокса или Рейнольдса, вводя в последнем случае уравнения полуэмпирических моделей турбулентности или простейшие концепции турбулентной вязкости. Первое применение компактных аппроксимаций третьего порядка было связано с построением итерационно-маршевых алгоритмов, не требующих покоординатного расщепления и реализующихся при помощи трехточечных скалярных прогонок [5, 6]. Неэффективные для расчета сложных течений в зонах возвратных течений они тем не менее оказались вполне применимыми при решении задач, в которых можно выделить некоторое преимущественное направление. Кроме того, вследствие своей простоты они позволили легко осуществить исследования, связанные с применением адаптирующихся к решению сеток.

Последующие разделы посвящены алгоритмам, в которых все уравнения рассматриваются одновременно, что в случае схем третьего порядка приводит к необходимости вычисления собственных значений и собственных векторов матриц соответствующих квазилинейных систем. При получении решений методом установления эти алгоритмы при помощи приближенной факторизации сводятся к одномерным. Основные теоретические вопросы, связанные с применением таких схем, содержатся в предыдущей главе. Обладая значительным запасом устойчивости и вычислительной надежностью, факторизованные схемы с комплексными аппроксимациями третьего порядка позволяют решать сложные задачи с отрывом потока.

В тех случаях, когда срывные зоны имеют относительно небольшие размеры или вообще отсутствуют, применимыми могут оказаться маршевые или итерационно-маршевые алгоритмы с компактными аппроксимациями для направлений, поперечных к выбранному в качестве основного направления распространения возмущений. Для этих алгоритмов характерно одновременное решение разностных уравнений, соответствующих различным уравнением системы Навье—Стокса.

Подчеркивая высокую вычислительную эффективность схем с ком-

пактными аппроксимациями, нельзя не отметить их усложненную структуру и более высокие требования к ресурсам ЭВМ. В связи с этим вопрос о целесообразности их применения должен решаться с учетом специфики решаемой задачи и тех требований, которые предъявляются к процессу и результатам ее решения.

Примеры расчетов конкретных течений вязкого газа, приводимые в данной главе, относятся к характерным задачам как внешнего, так и внутреннего обтекания. Само собой разумеется, что они не исчерпывают всего многообразия проблем, возникающих в вычислительной аэродинамике. Основная цель представления расчетных данных связана, во-первых, с иллюстрацией качества получаемых решений, во-вторых, с освещением некоторых методических вопросов и, в-третьих, с попутным описанием некоторых закономерностей, выявленных в результате расчетов.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РАЗНОСТНЫЕ СЕТКИ

1.1. Уравнения вязкого газа и их упрощенные формы

Уравнения Навье—Стокса в декартовых и криволинейных координатах. В качестве исходных уравнений будут использоваться полные уравнения Навье—Стокса или их частные случаи, записанные относительно вектора искомых функций:

$$\mathbf{f} = (\rho, u^1, u^2, u^3, e)^T, \quad (1.1)$$

где ρ и e — соответственно плотность и внутренняя энергия газа; u^1, u^2, u^3 — составляющие скорости вдоль осей x^1, x^2, x^3 декартовой системы координат. Вместо вектора (1.1) удобно рассматривать другую искомую векторную функцию $\mathbf{f}(\mathbf{u})$:

$$\mathbf{f} = (\rho, \rho u^1, \rho u^2, \rho u^3, \rho E)^T, \quad (1.2)$$

где E — полная энергия, равная $e + [(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2]/2$. Стандартная векторная форма записи уравнений Навье—Стокса имеет вид

$$\begin{aligned} \partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) &= 0, \\ \partial \rho \mathbf{V} / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V} \mathbf{V} + \mathbf{P}) &= 0, \\ \partial \rho E / \partial t + \operatorname{div}[\mathbf{V}(\rho E + P) + \mathbf{q}] &= 0, \quad \mathbf{V} = (u^1, u^2, u^3)^T, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где \mathbf{P} и \mathbf{q} — соответственно тензор напряжений и вектор плотности теплового потока \mathbf{q} . Система (1.3) замыкается одной из форм уравнения состояния, соотношением между тензором напряжений \mathbf{P} и тензором скоростей деформации $\dot{\mathbf{S}}$ для ньютоновской среды:

$$\mathbf{P} = 2\mu \dot{\mathbf{S}} - [p - (\mu' - 2/3\mu) \operatorname{div} \mathbf{V}] \mathbf{I}, \quad (1.4)$$

а также законом Фурье:

$$\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T. \quad (1.5)$$

В (1.4) и (1.5) через λ, μ, μ' обозначены соответственно коэффициенты теплопроводности, динамической и объемной вязкости, предполагаемые зависящими от термодинамических величин. В дальнейшем без ограниче-

ния общности рассматриваемых алгоритмов предполагается, что газ является совершенным и имеет место равенство для давления p :

$$p = (\gamma - 1)\rho e, \quad (1.6)$$

где γ — показатель адиабаты; для закона изменения вязкости принимается широко распространенная степенная зависимость от температуры

$$\mu \sim T^\omega, \quad 0,5 \leq \omega \leq 1, \quad (1.7)$$

или закон Сэзерленда

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{3/2} \frac{T_\infty + T_s}{T + T_s}, \quad T_s = 122 \text{ К.}$$

Как и обычно, коэффициент объемной вязкости μ' полагается равным нулю, а коэффициент теплопроводности λ определяется из предположения о постоянстве числа Прандтля $Pr = c_p \lambda / \mu$, где c_p — коэффициент теплопроводности при постоянном давлении. С учетом (1.4) систему (1.1) в декартовых координатах удобно представить в тензорном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\rho u^\alpha) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u^i) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\rho u^i u^\alpha + \left(p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{V} \right) \delta^{i\alpha} - \mu \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} \right) \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\rho u^\alpha E + u^\beta \left(p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{V} \right) \delta^{\alpha\beta} - \right. \\ \left. - \mu \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} \right) - \lambda \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где u^1, u^2, u^3 — декартовы составляющие вектора скорости \mathbf{V} ; $\delta^{\alpha\beta}$ — символ Кронекера и принято суммирование по повторяющимся индексам.

Система (1.8) записана в виде законов сохранения (дивергентный вид), что создает определенные удобства при применении компактных аппроксимаций, описанных в предыдущей главе.

С этой точки зрения, а также с точки зрения более точного описания течений с резко меняющимися параметрами консервативную форму записи исходных уравнений важно сохранить и при применении других систем координат. Как известно, это можно осуществить несколькими способами. Один из них состоит в переходе к подвижному координатному базису; другой способ состоит в преобразовании каждого из уравнений импульсов как скалярного закона сохранения, при котором компоненты скоростей остаются декартовыми [8]. В дальнейшем везде будет использоваться второй способ. Соответствующие уравнения в криволинейных координатах $q^\alpha = q^\alpha(x^1, x^2, x^3)$, $\alpha = 1, 2, 3$, имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (J\rho) + \frac{\partial}{\partial q^\alpha} (J\rho a_i^\alpha u^i) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (J\rho u^k) + \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \left\{ J \left[\rho u^k u^j a_j^\alpha + a_k^\alpha p + \frac{2}{3} \mu a_k^\alpha a_\beta^\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial q^\beta} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \mu a_j^\alpha \left(a_m^k \frac{\partial u^j}{\partial q^m} + a_j^\beta \frac{\partial u^k}{\partial q^\beta} \right) \right] \right\} = 0, \\
& \frac{\partial}{\partial t} (J\rho E) + \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \left\{ J \left[u^i a_j^\alpha (\rho E + p) + \frac{2}{3} \mu a_i^k \frac{\partial u^i}{\partial q^k} - \lambda a_\beta^m a_\beta^i \frac{\partial T}{\partial q^m} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \mu a_i^\alpha \left(u^i a_i^\beta \frac{\partial u^i}{\partial q^\beta} + u^k a_j^i \frac{\partial u^k}{\partial q^i} \right) \right] \right\} = 0,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

где через J обозначен якобиан $D(x^1, x^2, x^3)/D(q^1, q^2, q^3)$, а $a_j^i = \partial q^i / \partial x^j$.

В некоторых случаях использование декартовых составляющих скорости в криволинейной системе координат может оказаться неудобным; в частности, это происходит при конструировании различных упрощенных уравнений Навье—Стокса.

При применении описанных выше компактных аппроксимаций в этих случаях удобно записывать исходные уравнения в так называемой слабо консервативной форме, когда основные члены с производными по координатам имеют дивергентный вид, но появляются дополнительные члены, содержащие производные лишь с коэффициентом вязкости μ .

Для получения таких уравнений достаточно осуществить обычное тензорное преобразование уравнений (1.8), используя контравариантные компоненты скоростей u^α . Тогда система (1.8) в криволинейных координатах q^i ($i = 1, 3$) запишется в виде (см., например, [8])

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (J\rho) + \frac{\partial}{\partial q^\alpha} (J\rho u^\alpha) = 0, \\
& \frac{\partial}{\partial t} (J\rho u^i) + \frac{\partial}{\partial q^\alpha} [J(\rho u^i u^\alpha + p^{i\alpha})] + J\Gamma_{\beta\alpha}^i (\rho u^\beta u^\alpha + p^{\beta\alpha}) = 0, \quad , \tag{1.10} \\
& \frac{\partial}{\partial t} (J\rho E) + \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \left[J \left(\rho u^\alpha E + \delta_{k\beta} u^\beta p^{k\alpha} - J\lambda g^{\alpha\beta} \frac{\partial T}{\partial q^\beta} \right) \right] = 0,
\end{aligned}$$

где $p^{i\alpha} = p g^{i\alpha} + \frac{2}{3} \mu g^{i\alpha} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial q^\beta} (J u^\beta) - \mu \left[g^{i\beta} \frac{\partial u^i}{\partial q^\beta} + g^{\alpha\gamma} \frac{\partial u^i}{\partial q^\gamma} + u^k G_k^{i\alpha} \right]$,

$$G_k^{i\alpha} = \delta^{i\beta} \Gamma_{k\beta}^\alpha + \delta^{\alpha\gamma} \Gamma_{k\gamma}^i,$$

где $g^{i\alpha}$ — контравариантные компоненты метрического тензора, а $\Gamma_{k\beta}^\alpha$ — символы Кристоффеля.

При построении компактных схем третьего порядка, как подчеркивалось выше, основную роль играют конвективные члены. В (1.10) они записаны в дивергентной форме $(\partial/\partial q^\alpha) F^\alpha(\mathbf{f})$, где \mathbf{f} — вектор искомым функций, например (u^1, u^2, u^3, ρ, e) , а F^α — члены, соответствующие координатам q^α ($\alpha = 1, 3$). Такая форма и использовалась в предыдущей главе. Наличие в (1.10) членов, не содержащих производных с коэффициентом вязкости, соответствует ненулевым правым частям в исходных уравнениях

гл. 1. Что касается недивергентных членов в (1.10) вида

$$\frac{2}{3} \mu g^{i\alpha} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial q^\beta} (J u^\beta),$$

то их аппроксимация с точки зрения основных свойств алгоритма играет второстепенную роль. В частности, эти аппроксимации можно строить и без использования операторов компактного численного дифференцирования.

Положительная роль дивергентной формы конвективных членов в (1.9) и (1.10), как при разностной интерпретации законов сохранения, так и при применении компактных аппроксимаций, не означает, что использование недивергентных уравнений всегда нецелесообразно. К тому же, как следует из результатов гл. 1, последние также можно аппроксимировать при помощи компактных операторов. Примеры этого в случае уравнений переноса приведены в гл. 3. Тем не менее в дальнейшем, как правило, в качестве исходной формы записи уравнений будет использоваться консервативная (1.9) или слабоконсервативная (1.10) формы уравнений Навье–Стокса. Положив формально в (1.9) и (1.10) $\mu \equiv 0$, можно получить соответствующие формы уравнений Эйлера, которые также будут использоваться в дальнейшем. При решении задач плоских или осесимметричных обтеканий может иногда оказаться полезной система Навье–Стокса, записанная в системе координат (s, n) , связанная с невогнутым контуром твердой поверхности [52].

Об описании турбулентных течений. Во многих важных для практики задачах числа Рейнольдса достаточно велики и течения являются турбулентными. Основные возможности их расчета в настоящее время связаны с применением полуэмпирических моделей турбулентности для уравнений, описывающих осредненные параметры течения (уравнений Рейнольдса).

Для несжимаемой жидкости уравнений Рейнольдса в декартовых координатах имеют вид

$$\overline{\partial \bar{u}_i / \partial t} + \overline{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j / \partial x_j} = -\overline{\partial p / \partial x_i} + \overline{\partial u'_i u'_j / \partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.11)$$

где черта и штрихи означают соответственно осредненные и пульсационные величины.

Для сжимаемого газа возможны различные способы осреднения — осреднение без весовых множителей и осреднение с использованием плотностей в качестве весового множителя.

Классификацию полуэмпирических моделей турбулентности часто связывают с количеством дифференциальных уравнений, которые вводятся для замыкания системы (1.11). Самая простая модель сводится к введению эффективного коэффициента турбулентной вязкости μ_t , зависящего от локальных градиентов осредненных скоростей, самая сложная включает в себя дифференциальные уравнения для вторых моментов.

Большой популярностью вследствие своей простоты пользуется модель Прандтля, согласно которой для двумерного случая

$$\overline{\rho u'_1 u'_2} = -\mu_t \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}, \quad \mu_t = \bar{\rho} l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right|, \quad (1.12)$$

где l — длина пути смещения. В случае струй величина l принимается про-

порциональной ширине струи [53], а в случае пограничных слоев – пропорциональной расстоянию от стенки x_2 . Для более сложных течений эта модель, однако, не всегда дает точные результаты. Многие модели связывает коэффициент μ_t с турбулентной энергией $k = (\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2})/2$, так что

$$\mu_t = c\bar{\rho}\sqrt{k}L, \quad (1.13)$$

где c – некоторая универсальная константа, а L – масштаб длины. Для определения k вводится дополнительное дифференциальное уравнение, которое в случае несжимаемой жидкости имеет вид (см., например, [5])

$$\bar{\rho} \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{\rho} u_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \times \quad (1.14)$$

$$\times \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \bar{\rho} \epsilon,$$

$$\epsilon = C_D k^{3/2}/L, \quad (1.15)$$

где ϵ – диссипация турбулентной энергии $(\mu/\rho)(\partial u_i/\partial x_j)(\partial u_i/\partial x_j)$, а $\sigma_k \sim D$ и C_D – константы. Равенство (1.15) основано на концепции Колмогорова [54], согласно которой количество диссипированной турбулентной энергии определяется энергосодержащим движением. Для замыкания всей системы необходимы зависимости от параметров потока масштаба L . Эти зависимости могут быть различными для различных классов течений; обзор исследований этого вопроса содержится в [53].

Ввиду сложности подбора универсальной формы для L во многих исследованиях внимание уделяется построению дополнительного дифференциального уравнения для L , точнее, для произведения $Y = k^m$ и L^n , где m и n – некоторые целые константы.

В частности, в [53] вводится уравнение для kL , имеющее форму, близкую к (1.13). Широкое распространение получила $k - \epsilon$ -модель турбулентности, в которой $m = 3/2$, $n = -1$ и $Y = \epsilon$ (см., например, [55]).

Полуэмпирические модели (1.12)–(1.15) сконструированы для уравнений несжимаемой жидкости (1.11), поэтому принято считать, что они могут быть использованы с учетом специфики задач и с меньшей степенью достоверности и в случаях сжимаемого газа. Разумеется, константы моделей при этом могут несколько изменяться.

С точки зрения использования компактных аппроксимаций полуэмпирические модели обладают одним общим свойством; они определяют коэффициент турбулентной вязкости, который является эквивалентом молекулярной вязкости (или добавляется к последней) таким образом, что общая структура уравнений сохраняется. Поскольку, как уже неоднократно подчеркивалось, основную роль в рассмотренных в гл. 1 схемах играет способ дискретизации конвективных членов, введение этих моделей не изменяет структуру алгоритмов. Техническое усложнение состоит лишь в том, что вместо вычисления функции $\mu = f(T)$ на каждом этапе по времени (или каждой итерации) необходимо по дополнительной программе вычислять в каждом узле значения μ_t . Однако существует принципиальное обстоятельство, которое может затруднить получение

численного решения для турбулентных течений: коэффициент μ_t может стать быстроменяющейся сеточной функцией, зависящей от градиентов скоростей.

В связи с этим требования к алгоритму и, в частности, к его дисперсионно-диссипативным свойствам должны ужесточаться.

В частности, использование централизованных аппроксимаций для аппроксимации исходных уравнений представляется проблематичным.

Что касается аппроксимации уравнений для энергии и диссипации турбулентности вида (1.14), то может возникнуть вопрос: есть ли необходимость в аппроксимации их схемами высокого порядка в условиях приближенности самой модели и некоторой неопределенности в ее константах? Такой же вопрос возникает относительно членов с турбулентной вязкостью в исходных уравнениях. Ответы на эти вопросы, по-видимому, можно получить в результате сравнения численных решений с экспериментальными данными.

В любом случае эффект применения компактных аппроксимаций должен выразиться в возможности выбора меньшего числа узлов вне областей с существенной ролью турбулентности, а также в сравнительно высоком качестве получаемых решений.

Упрощенные уравнения Навье–Стокса. В аэродинамических приложениях интерес представляют системы уравнений вязкого газа, полученные из (1.9) в результате пренебрежения теми или иными членами. Основанием для этого часто является малость параметра Re^{-1} , где число Рейнольдса $Re = \rho_* U_* L / \mu_*$ вычислено по некоторым характерным значениям ρ_* , U_* , L и μ_* — соответственно плотности, скорости, длины и коэффициента вязкости. В дальнейшем будут рассматриваться более общие уравнения, чем уравнения пограничного слоя, полученные в результате пренебрежения в (1.9) членами порядка $O(Re^{-1/2})$ и выше. Это не означает, однако, что компактные аппроксимации не могут быть использованы для решения уравнений пограничного слоя.

Упрощение системы Навье–Стокса обычно диктуется следующей простой идеей: желательно построить уравнения, которые описывали бы течения, содержащие области как с существенной, так и несущественной вязкостью, но допускающие более экономичные алгоритмы, чем алгоритмы для полных уравнений Навье–Стокса. Обоснование различных упрощений тесно связано со спецификой решаемой задачи. Например, при обтекании затупленного тела потоком слаборазреженного газа, когда еще справедливы уравнения механики сплошной среды, можно использовать уравнения, в которых выброшены члены порядка $O(Re^{-1})$ и выше [56].

В некоторых задачах об обтекании плоских или осесимметричных тел удобно использовать систему координат (s, n) , связанную с контуром твердой поверхности. Эти координаты обычно применяются для описания пограничного слоя на криволинейных стенках, поэтому упрощения полного уравнения (1.11) можно интерпретировать как некоторые промежуточные формы уравнения, содержащие в себе все планы уравнения пограничного слоя. При этом обоснования выбора таких форм являются как бы обобщением аргументации при выводе уравнений Прандтля.

1.2. О применении сеток, сгущающихся в областях быстрого изменения решений

Общие соображения. Использование компактных аппроксимаций третьего порядка может привести к двум до некоторой степени независимым результатам: во-первых, к отсутствию существенных схемных осцилляций решений, определяющему во многом вычислительную надежность алгоритма, во-вторых, к весьма точному описанию течений при умеренном числе узлов сетки.

Если ограничиться лишь первой целью, то требования к выбору разностной сетки оказываются не столь критическими. Например, вводя равномерную сетку в физической плоскости, можно формально проводить расчеты при больших числах Рейнольдса, получая иногда приемлемые решения вне областей с существенной ролью вязкости типа пограничных слоев, ударных волн и т.д.; внутри же этих областей решения будут иметь схемный характер, не описывая реальных характеристик вязкого течения.

Возможности компактных схем, как отмечено во введении, будут использованы более полно, если сочетать их применение с построением сеток, сгущающихся в физическом пространстве в областях с быстрыми изменениями искомых функций.

Ввиду того что в гл. 1 везде предполагались постоянные шаги сетки, требуемое сгущение узлов необходимо осуществлять преобразованием координат, отображающим физическое пространство на расчетную область с равномерной разностной сеткой. При этом зоны с малыми характерными размерами растягиваются в преобразованном пространстве, включая в себя достаточное число узлов.

Вопрос о том, какие именно зоны нужно растягивать, т.е. каковы признаки растяжения, можно решить неоднозначно. Например, можно растягивать: а) области с большими градиентами хотя бы одной из искомых функций; б) области, где сами градиенты меняются очень быстро; в) области, где велики градиенты выбранной заранее искомой функции и т.д.

Соответственно можно растягивать область пограничного слоя, но не растягивать область ударной волны, и наоборот.

При решении конкретных задач естественно выбирать такие признаки растяжения, которые способствовали бы более точному определению существенных для этих задач параметров потока. В рассматриваемых течениях центральную роль играют области типа пограничных слоев. Для правильного их описания и, в частности, точного определения параметров трения и теплопередачи на поверхности вполне достаточно, чтобы их область независимо от числа Рейнольдса содержала количество узлов сетки вдоль поперечной к контуру координате (пусть, для определенности, координате y) не менее некоторого фиксированного числа. Это условие будет заведомо выполнимо, если перейти к новой независимой переменной $\eta = \eta(y)$, такой, что функция $\eta(y)$ в той или иной степени имитировала бы поведение функции $u(y)$, где u – касательная к контуру составляющая скорости. Если под имитацией в самом грубом смысле понимать одинаковость пространственного масштаба, на котором происходит быстрое изменение обеих функций, а также одинаковость характера их изменения около

поверхности, то подходящим окажется преобразование

$$\eta = \ln(1 + \alpha y), \quad (1.16)$$

$\alpha(\text{Re})$ – некоторый параметр, характеризующий толщину области быстрого изменения функции $u(y)$. Во многих случаях толщина пограничного слоя приблизительно известна, поэтому параметр α может быть предварительно указан.

Недостатком преобразования (1.16) является то обстоятельство, что при больших числах Рейнольдса величину α следует выбирать большой, а это может привести к тому, что большинство узлов попадет в область пограничного слоя в ущерб описанию внешнего невязкого течения.

В [56] функция η определялась как решение уравнения

$$\epsilon d^2\eta/dy^2 + d\eta/dy - c = 0, \quad c = \text{const}, \quad 0 \leq c \leq 1, \quad (1.17)$$

в интервале $[0, 1]$ с граничными условиями $\eta(0) = 0$, $\eta(1) = 1$. Решение (1.17) имеет вид

$$\eta(y; \epsilon) = cy + (1 - c) \frac{1 - \exp(-y/\epsilon)}{1 - \exp(-1/\epsilon)}, \quad (1.18)$$

причем параметр ϵ является характерной толщиной пограничного слоя. Постоянная c определяет толщину пограничного слоя в переменной η , а преобразование (1.18) оказывается свободным от указанного выше недостатка.

О применении сеток, адаптирующихся к решению. Преобразования (1.17) и (1.18) предполагают наличие некоторой информации о характере исследуемого течения. Они могут стать еще более эффективными, если объем этой информации будет увеличен. Так, знание закона развития пограничного слоя вдоль поверхности (вдоль оси x) позволяет вводить функции $\alpha(\text{Re}; x)$ и $\epsilon(\text{Re}; x)$, которые могут отслеживать толщину пограничного слоя в каждом сечении $x = \text{const}$; к сожалению, во многих случаях такая информация неизвестна. Повысить точность решений тогда можно введением преобразований, которые растягивали бы области с малыми характерными размерами в зависимости от получаемого на каждом цикле вычисления решений. Во введении приводятся некоторые подходы к построению адаптирующихся к решению сеток. В принципе, их применение может существенно повысить точность метода (или, при заданной точности, сократить количество необходимых узлов сетки). Однако реализация соответствующих алгоритмов может существенно усложниться, а потребность в ресурсах ЭВМ – увеличиться.

Первый опыт применения компактных схем третьего порядка был связан с простейшим вариантом преобразований, зависящих от координат и скоростей и осуществляющих автоматическое сгущение узлов сетки в областях с большими градиентами решений. Эти преобразования, описанные во введении, обладают меньшей общностью, чем соответствующие преобразования, полученные на основе вариационного принципа. Но в то же время они относительно просты и не требуют решения дополнительного дифференциального уравнения. В общем случае вопрос о том, какой принцип построения адаптирующихся сеток лучше и целесообразно ли вообще его использовать вместо фиксированного заранее преобразо-

вания координат, по-видимому, может быть решен только в рамках конкретной задачи.

В разд. 2 этой главы описана упрощенная форма алгоритма с компактными аппроксимациями, использовавшегося на ранних этапах для задач с некоторым преимущественным направлением (s) распространения возмущений; он связан с преобразованием поперечной к этому направлению координаты n вида

$$\eta(n; u) = au + bn + c, \quad (1.19)$$

где u – s -компонента скорости, а $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$ – некоторые известные заранее коэффициенты. Для рассмотренных задач возвратные течения либо отсутствовали, либо были незначительными; при этом профили $u(n)$ были либо монотонны, либо допускали незначительные по модулю отрицательные производные du/dn . Ввиду этого всегда выполнялось неравенство $\partial\eta/\partial n > 0$ и преобразование $\eta(n)$ оказывалось взаимно однозначным. Конкретный вид коэффициентов a , b и c приведен ниже для конкретных задач.

Преобразование (1.19) осуществляет растяжения областей, в которых велики производные du/dn ; такими областями являются пограничные слои на поверхности или свободные сдвиговые слои, положение которых заранее неизвестно. Однако оно не растягивает области, в которых велики вторые производные $\partial^2 u/\partial n^2$ (например, в окрестности внешней границы пограничного слоя). В этих областях точность решений может уменьшаться, о чем и говорит пример модельного уравнения, рассмотренного в гл. 1. С точки зрения получения представляющих интерес характеристик течения и их распределения на обтекаемых поверхностях это обстоятельство вряд ли играет существенную роль.

Можно заметить также, что преобразование (1.19) лишь незначительно растягивает области косых скачков уплотнения и непригодно для детального описания структуры ударных волн. Как правило, подробности этой структуры не представляют большого интереса и их неразрешение практически слабо отражается на решениях в других областях течения. Однако в случае необходимости, заменив (1.19) более общим преобразованием (0.9) из введения, можно ценой усложнения алгоритма осуществлять растяжение не только сдвиговых слоев, но и ударных волн.

2. ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННО-МАРШЕВЫХ АЛГОРИТМОВ С АДАПТИРУЮЩИМИСЯ СЕТКАМИ

2.1. Структура алгоритмов

Преобразование координат и особенности записи уравнений. Как отмечалось, достижение повышенной точности разностных решений при относительно небольшом числе узлов сетки при наличии областей течения с малыми характерными размерами можно осуществить, сочетая высокий порядок аппроксимации с эффективным растяжением этих областей в расчетной области. В гл. 1 рассматривались простейшие модельные примеры использования для этих целей адаптирующихся сеток. Однако более интересными являются ситуации, связанные с численным моделированием течений вязкого газа. Поскольку при этом введение преобразования координат,

зависящего от получаемого решения, требует дополнительных ресурсов ЭВМ, для иллюстративных целей представляется естественным рассмотреть случаи, когда можно использовать сравнительно простые варианты компактных схем. Такая возможность появляется при описании течений с преимущественным направлением распространения возмущений, для которых отрыв потока либо отсутствует, либо приводит к образованию срывных зон с небольшими размерами.

Рассмотрим один из примеров конструирования компактно-разностного алгоритма с адаптирующимися сетками для задач об обтекании плоских или осесимметричных невогнутых тел потоком вязкого газа. Для этих задач можно ввести систему координат (s, n) , связанную с поверхностью тела (координата s направлена вдоль контура, n – вдоль нормали к нему). Имея в виду растяжение областей с существенной ролью вязкости, имеющих малые характерные размеры в направлении n , вместо координат (s, n) рассмотрим новые координаты (s, ζ) , для которых

$$\zeta = \zeta(u, v, s, n), \quad (2.1)$$

где u и v – составляющие скорости вдоль s и n , а $\zeta(s, n) = \zeta(u(s, n), v(s, n), s, n)$ – некоторая функция, быстро меняющаяся при изменении n в растягиваемых областях, причем $\chi = \partial \zeta / \partial n > 0$ (см. введение, а также [4, 6]).

Запишем систему уравнений Навье–Стокса для координат (s, ζ) , представив ее в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u\mathbf{F} + \mathbf{P}}{\chi} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\tilde{v}\mathbf{F} + \mathbf{R} - \mathbf{Q}) + j \frac{\tilde{v}\mathbf{F}}{r\chi} = \\ = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\Omega_1}{\chi} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial \zeta} + j \frac{\Omega_3}{r\chi}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\chi = \partial \zeta / \partial n,$$

$$\mathbf{F} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T, \quad \mathbf{P} = (0, p, 0, up)^T,$$

$$\mathbf{R} = (0, -Gp, p, \tilde{v}p)^T, \quad \mathbf{Q} = (0, Q_u, Q_v, Q_E)^T,$$

$$\Omega_1 = (0, \tau_{ss}, \tau_{sn}, q_s + u\tau_{ss} + v\tau_{sn})^T, \quad \Omega_2 = (0, \tau'_{sn}, \tau'_{nn}, u\tau_{sn} + v\tau_{nn})^T,$$

$$\Omega_3 = (0, \tau_{sn}, 2\tau_{ss} + \tau_{nn}, q_s + u\tau_{ss} + v\tau_{sn})^T,$$

причем $\tilde{v} = v - Gu$, $G = (\partial n / \partial s)_\zeta = \text{const}$. Напомним, что через r в (2.2) обозначено расстояние от точки с координатами (s, n) до оси симметрии, а значения $j = 0, 1$ соответствуют плоскому и осесимметричному случаям. Все переменные в (2.2) считаются безразмерными.

В уравнениях (2.2) для построения третьего порядка членов с вязкостью введены диффузионные переменные Q_u , Q_v и Q_E , определяемые равенствами

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{\text{Re}}{\mu\chi} Q_u, \quad \frac{\partial v}{\partial \zeta} = \frac{\text{Re}}{\mu\chi} Q_v, \quad \frac{\partial E}{\partial \zeta} = \frac{\text{Re Pr}}{\gamma\mu\chi} Q_E, \quad (2.3)$$

Компоненты тензора напряжений τ_{ss} , τ_{sn} , τ_{nn} и вектора тепловых потоков q_s и q_E , присутствующих в (2.3), предполагаются выраженными через

производные по s и ζ . Не приводя этих выражений, существенно отметить, что они имеют следующую структуру:

$$(\text{Re}/\mu\chi)T = \partial\Phi_1/\partial\zeta + \partial\Phi_2/\partial s + j\Phi_3/r\chi, \quad (2.4)$$

где $T = (\tau_{ss}, \tau_{sn}, \tau_{nn}, q_s, q_E)^T$, а векторы Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 не содержат членов с вязкостью. Через τ_{sn} и τ_{nn} в (2.2) обозначены те члены, которые остались в τ_{sn} и τ_{nn} после изъятия из них членов с Q_u и Q_v с включением последних в вектор Q из левой части (2.2).

Равенства (2.3), (2.4) вместе с уравнением состояния (1.6) образуют замкнутую систему относительно переменных ρ , u , v , E , Q_u , Q_v , Q_E , χ , n . Эта система обладает эллиптическими свойствами, обусловленными членами с вязкостью и давлением. Однако для многих случаев обтекания поверхностей с выпуклыми или прямолинейными участками контура передача информации вверх по потоку является относительно слабой. Это происходит, в частности, при обтекании тел сверхзвуковым потоком, в случае дозвукового течения между телом и отшедшей ударной волной и т.д.

Применительно к такому классу задач удобно строить алгоритмы, основанные не на общем методе установления, а на итерационно-маршевом принципе. Согласно этому принципу, в течение текущей итерации происходит решение разностных уравнений с переходом от одного сечения, поперечного к преимущественному направлению, к другому таким же образом, как это происходит в случае эволюционных задач. При этом значения сеточных функций перед рассматриваемым сечением считаются известными из предыдущей итерации. Такой подход эквивалентен хорошо известному методу релаксации в линиях для решения уравнения переноса с диффузией.

Считая в рассматриваемом случае преимущественным направлением направление координаты s , при конструировании маршевого алгоритма можно полностью использовать способы построения компактных схем для одномерных нестационарных уравнений с диффузионными членами. При этом существует две возможности: 1) рассматривать аппроксимацию уравнений (2.2) как аппроксимацию системы с определением направлений ее характеристик и 2) рассматривать аппроксимацию уравнений (2.2) как аппроксимацию независимых скалярных уравнений вида (2.1) из гл. 1.

При использовании второй возможности нереалистично рассчитывать на достижение большого запаса устойчивости метода и применимость его для расчета сложных течений. Однако в этом случае упрощается процесс решения разностных уравнений и уменьшаются требования к памяти ЭВМ. При построении алгоритма с адаптирующимися сетками использовался именно такой подход; итерационно-маршевый алгоритм с одновременным решением аппроксимирующих уравнений описан в конце разд. 5 этой главы.

Общая структура разностных аналогов (2.2)–(2.4) может быть описана следующим образом. После введения сетки ω : $s_i = ih_s$, $\zeta = jh_\zeta$, $h_s = \text{const}$, $h_\zeta = \text{const}$, дискретизация производных по ζ осуществляется при помощи оператора $A_\zeta^{-1} \Delta_\zeta$, где ориентация операторов A_ζ и Δ_ζ определяется в каждом узле значением параметра $s = \text{sgn}(v - Gu)$:

$$A_\zeta = A_0^\zeta - 0,25s\Delta_0^\zeta, \quad \Delta = 0,5(\Delta_0^\zeta - s\Delta_2^\zeta).$$

Производные по s аппроксимируются со вторым порядком по центрированным формулам для членов с вязкостью и давлением и нецентрированным — для конвективных членов. В последнем случае разностные формулы представляются в следующем виде ($\mathbf{F} = (\rho/\chi, \rho u/\chi, \rho v/\chi, \rho E/\chi)^T$):

$$\left\langle \frac{\partial u \mathbf{F}}{\partial s} \right\rangle_{ij} = \frac{u_{i+1/2, j} \mathbf{F}_{i+1/2, j} - u_{i-1/2, j} \mathbf{F}_{i-1/2, j}}{h_s} \approx \frac{\partial u \mathbf{F}}{\partial s},$$

причем

$$\mathbf{F}_{i+1/2, j} = \begin{cases} 3/2 \mathbf{F}_{ij} - 1/2 \mathbf{F}_{i-1, j} & \text{при } u_{i+1/2, j} \geq 0, \\ 3/2 \mathbf{F}_{i+1, j} - 1/2 \mathbf{F}_{i+2, j} & \text{при } u_{i+1/2, j} < 0 \end{cases}$$

и аналогично для $\mathbf{F}_{i-1/2, j}$.

С учетом введенных аппроксимаций разностные аналоги можно представить в виде

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial s} \frac{u \mathbf{F}}{\chi} \right\rangle + j \frac{\tilde{v} \mathbf{F}}{r \chi} + A_{\xi}^{-1} \Delta_{\xi} (\tilde{v} \mathbf{F} - \mathbf{Q}) &= \\ = A_{\xi}^{-1} \Delta_{\xi} (\mathbf{Z}_2 - \mathbf{R}) + \Delta_0^s \frac{\mathbf{Z}_1 - \mathbf{P}}{\chi} + j \frac{\mathbf{Z}_3}{r \chi}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где все функции рассматриваются в некотором внутреннем узле области. Уравнения (2.5) дополняются аппроксимациями уравнений, построенными при помощи операторов $\tilde{A}_{\xi} = A_{\xi}^*$ и $\tilde{\Delta}_{\xi} = -\Delta_{\xi}^*$:

$$\frac{\text{Re}}{\mu \chi} q_u = \tilde{A}_{\xi}^{-1} \tilde{\Delta}_{\xi} u, \quad \frac{\text{Re}}{\mu \chi} q_v = \tilde{A}_{\xi}^{-1} \tilde{\Delta}_{\xi} v, \quad \frac{\text{RePr}}{\gamma \mu \chi} q_E = \tilde{A}_{\xi}^{-1} \tilde{\Delta}_{\xi} E,$$

а также уравнений (2.4), в которых для дискретизации производных по ξ используется оператор $\tilde{A}_{\xi}^{-1} \tilde{\Delta}_{\xi}$, а для дискретизации производных по s — центральная разность Δ_0^s .

Координата n_{ij} узла (s_i, ξ_j) может быть определена из равенства

$$\xi_j = j h_{\xi} = \varphi(u_{ij}, v_{ij}, s_i, n_{ij}), \quad (2.6)$$

а функция $\chi_{ij} = (\partial \xi / \partial n)_{ij}$ — из равенства

$$\partial \varphi(u_{ij}, v_{ij}, s_i, n_{ij}) / \partial \xi = 1. \quad (2.7)$$

Чтобы пояснить смысл последнего равенства, рассмотрим линейное преобразование (1.24). Продифференцировав его по ξ , получим соотношение

$$a \partial u / \partial \xi + b / \chi = 1.$$

Отсюда с учетом первого равенства (2.3) получается формула, выражающая сеточную функцию χ через функцию q_u :

$$\chi = b + (a \text{Re} / \mu) q_u. \quad (2.8)$$

Порядок вычислений. Общий ход вычислительного процесса при неотрицательных значениях скорости u можно представить следующим образом.

Пусть в нулевом приближении векторные сеточные функции $f_i^{(0)} = (\rho, u, v, E, n, \chi)_i^T$ ($i = 1, \dots, M$) известны. Кроме того, предполагается, что всегда известны значения f_1 и f_2 на слоях $s = s_1$ и $s = s_2$ (например, эти слои могут размещаться в невозмущенном потоке); определение $f^{(1)}$ в течение первой итерации при условии, что значения $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \dots, f_{i-1}^{(1)}$ уже определены, происходит следующим образом. Назовем "старыми переменными" совокупность векторов $f_1, f_2, f_3^{(1)}, \dots, f_{i-1}^{(1)}, f_i^{(0)}, \dots, f_n^{(0)}$. По старым переменным из разностных аналогов уравнений (2.4) определяются члены, входящие в компоненты тензора напряжений, после чего правая часть (1.30) может быть вычислена в каждом узле (i, j) , $j = 1, N$. При определении этих членов производятся скалярные прогонки, связанные с обращением оператора \tilde{A}_ξ .

Следующим этапом является вычисление $\rho_{ij}, u_{ij}, v_{ij}, E_{ij}$ компонент вектора F_i , а также $(q_u)_{ij}, (q_v)_{ij}$ и $(q_E)_{ij}$ ($j = 1, N$) на слое $s = s_i$ из уравнений (2.5) и разностных аналогов (2.3). Поскольку все коэффициенты при неизвестных значениях вычисляются по старым переменным, эти уравнения являются линейными и образуют независимые пары уравнений относительно величин $(u, q_u)_{ij}, (v, q_v)_{ij}$ и $(E, q_E)_{ij}$ ($i = 1, N$); исключение составляет аппроксимация уравнения неразрывности, которая не содержит разностных аналогов вторых производных и, следовательно, функций вида (2.3).

Процесс определения двухкомпонентных векторов $(u, q_u)_{ij}, (v, q_v)_{ij}$ и $(E, q_E)_{ij}$ полностью аналогичен определению векторной сеточной функции (u, q) в случае компактной схемы третьего порядка для конвективно-диффузионного уравнения (2.1) из гл. 1 разд. 2 и осуществляется векторной прогонкой с матрицами 2×2 ; сеточная функция ρ_{ij} ($j = 1, N$) определяется в результате скалярной прогонки.

Найденные значения $(q_u)_{ij}$ и u_{ij} позволяют из (2.8) и (2.7) найти соответственно величины χ_{ij} и n_{ij} при $s = s_i$. Процесс вычислений при $s = s_i$ завершается окончательным определением новых значений вектора $f_i^{(1)}$ по формулам

$$f_i^{(1)} = (1 - \alpha) f_i^{(0)} + \alpha f_i,$$

где f_i – вектор найденных сеточных функций, а α – коэффициент релаксации. После этого происходит переход к слою $s = s_{i+1}$ и т.д.

Таким образом, рассматриваемый алгоритм аналогичен методу релаксации в линиях при решении эллиптических уравнений. Эллиптический характер решаемых уравнений учитывается тем, что при $s = s_i$ в аппроксимации тензора напряжений и производной $(\partial p / \partial s)$ входят значения $u_{i+1, j}^{(0)}, v_{i+1, j}^{(0)}, E_{i+1, j}^{(0)}, \chi_{i+1, j}^{(0)}$ и $p_{i+1, j}^{(0)}$, заимствованные из предыдущей итерации.

Возможны различные модификации этого алгоритма, связанные с порядком решения уравнений, с использованием функций, найденных из одной группы уравнений при вычислении коэффициентов в другой группе, с перенесением некоторых членов из левой части (2.5) в правую с последующим

использованием их в обращаемом операторе и т.д. Эти модификации не имеют принципиального характера и здесь обсуждаться не будут. Описанная выше последовательность вычислений относится в основном к случаю, когда продольная скорость всюду положительна. Она может быть сохранена и в случае возникновения небольших отрывных зон, когда формируются возвратные течения; при этом меняется ориентация разностной формулы $\langle \partial(uF)/\partial s \rangle$ в (2.5). Вместе с тем, как показал опыт в случае отрывных зон, полезным может быть следующий прием расчета. Пусть в течение m -й итерации на луче $s = s_i$ скорость u_{ij} становится отрицательной при $j_1 < j < j_2$. Тогда после решения уравнений на этой линии в случае $(m + 1)$ -й итерации полагается

$$f_{ij}^{(m+1)} = \begin{cases} f_{ij}^{(m+1)} & \text{при } j \leq j_1 \text{ и } j \geq j_2, \\ f_{ij}^{(m)} & \text{при } j_1 < j < j_2. \end{cases}$$

После окончания прохода всей расчетной области выбираются все те линии, на которых есть отрицательные значения u_{ij} (как правило, такие лучи сосредоточены в одной или нескольких областях $s_{i1} \leq s \leq s_{i2}$). После этого происходит проход этих лучей, но в обратном направлении. В течение обратного прохода индекс $m + 1$ присваивается значениям f_{0i} при $j_1 < j < j_2$. Оценивать вычислительную устойчивость рассматриваемого алгоритма оказывается затруднительно ввиду большого количества уравнений и неизвестных, можно лишь констатировать, что для фиксированной итерационной схемы является абсолютно устойчивой в случае постоянных коэффициентов для отдельных уравнений, не связанных друг с другом через члены с давлением. Это не обеспечивает абсолютной устойчивости всего алгоритма даже в случае постоянных коэффициентов. Тем не менее опыт его применения показал, что сходимость итераций, а также близость результатов при дроблении шагов сетки наблюдались при надлежащем выборе параметра α (порядка 0,9–0,95).

2.2. Примеры расчетов с использованием адаптирующихся сеток

Течение вязкого газа между телом и отошедшей ударной волной. Одним из простых, но характерных примеров является применение описанной выше методики (точнее, ее модификации) в случае обтекания затупленного тела сверхзвуковым потоком вязкого газа [4, 6].

Если числа Рейнольдса не слишком малы, то отошедшую ударную волну можно рассматривать как поверхность разрыва, используя при этом соотношения Гюгонно. Тогда численное решение уравнений Навье–Стокса удобно искать в полосе $0 \leq s \leq s_0$, $0 \leq n \leq n_\Gamma(s)$, где s, n – система координат, связанная с телом (s – длина дуги, отсчитываемая от критической точки, n – нормаль к поверхности), $n_\Gamma(s)$ – отход ударной волны, а $s = s_0$ – некоторая граница расчетной области внизу по потоку. Строго говоря, в этом случае, помимо условий Гюгонно, необходимо еще одно граничное условие на теле или волне; не останавливаясь на этом вопросе, заметим, что аппроксимация членов с вязкостью на волне с использованием внутренних узлов области формально замыкает разностную систему и может быть использована при решении поставленной задачи. Для автома-

тического сгущения узлов сетки в области пограничного слоя применялось преобразование координаты n вида

$$\zeta = (u/u_{\Gamma} + cn)/(1 + cn_{\Gamma}),$$

где u — s -компонента скорости, а $c > 0$ — некоторая константа [6]. Система Навье—Стокса аппроксимировалась на равномерной сетке в области $0 \leq s \leq s_0$, $0 \leq \zeta \leq 1$ согласно (2.5)–(2.8). Однако соответствие искомым функций и уравнений, из которых они определялись, было выбрано совершенно иным. На каждой линии $s = s_i$ ($i = 0, \overline{M}$) нормальная к поверхности составляющая скорости вычислялась не из разностного уравнения для нормальной составляющей импульса, а из разностного уравнения неразрывности; уравнение для n -компоненты импульса служило для определения давления (или плотности). Такой порядок вычислений, с одной стороны, позволяет вместо прогонок для ρ и \tilde{v} применять формулы бегущего счета, а с другой — создает удобство в определении давления на поверхности тела. Однако это предполагает знакопостоянство и малость переменной \tilde{v} , определяющей ориентацию операторов Δ_{ζ} и A_{ζ} .

Перечисленные выше особенности вычислений связаны со специфической решаемой задачей и не могут быть рекомендованы в общем случае.

Тем не менее они иллюстрируют многообразие алгоритмических возможностей при подключении к основной схеме механизма адаптирующихся сеток.

Остановимся на результатах расчетов, проводившихся при числах $M_{\infty} = 10$, $\gamma = 1,4$ и $Pr = 0,72$ для случаев охлажденной сферы ($h_w = h_{\infty} = 1/(\gamma - 1)M_{\infty}^2$) и $\omega = 0,5$. При числе узлов сетки $M = s/h_s \leq 8$, $N = 1/h_{\zeta} \leq 50$ величина $s_0 \leq \pi$ варьировалась и не влияла заметным образом на приводимые данные.

На рис. 2.1 представлены профили скорости u и v , энтальпии h , давления p и плотности ρ на луче $s = 0,6$ при $Re_0 = 100, 500$ и 5000 (кривые 1, 2, 3; соответствующие числа Рейнольдса, вычисленные по параметрам невозмущенного потока, приблизительно равны соответственно 640, 3200 и 32000). Для случаев $Re_0 = 500$ и 5000 на рис. 2.1 приведены данные, полученные при $N = 25$ (точки) и $N = 50$ (сплошные линии); эти результаты почти не различаются. По-видимому, достаточная точность расчетов может достигаться с относительно большим шагом $\Delta\zeta$ разностной сетки. Отметим также, что при увеличении числа Re зависимости газодинамических параметров от координаты ζ остаются сравнительно консервативными и не имеют резко выраженных градиентов. Основные изменения, происходящие по мере утоньшения пограничного слоя и физической плоскости, сосредоточены в функции $\chi(s, \zeta)$, характеризующей завихренность потока; близкая к постоянной во внешней области, эта функция начинает быстро возрастать, принимая на поверхности тела тем большие значения, чем больше число Re . Однако ширина области, соответствующей пограничному слою, в плоскости (s, ζ) остается конечной и не стремится к нулю при $Re \rightarrow \infty$.

Изменения газодинамических параметров вдоль того же луча $\bar{s} = 0,6$ в физической плоскости приведены на рис. 2.2 (нумерация кривых та же, что и на рис. 2.1). Там же для сравнения изображены результаты расчетов

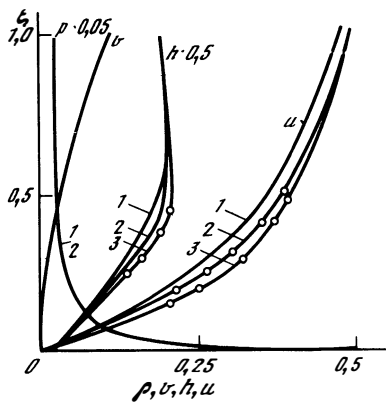


Рис. 2.1

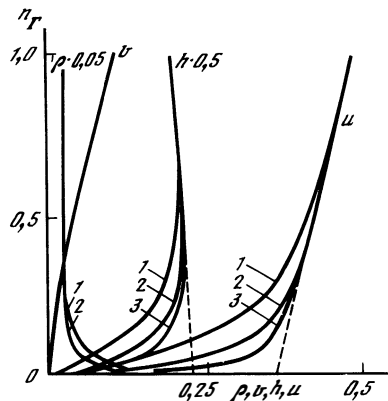


Рис. 2.2

невязкого обтекания [57] ($M_\infty = 10$, $\gamma = 1,4$), соответствующие тому же сочетанию $s = \text{const}$ (пунктирная линия).

Как видно из рис. 2.2, профили газодинамических функций, полученные с помощью уравнений Навье–Стокса, везде, кроме пристеночной области, близки к профилям течения невязкого газа; основные изменения этих функций происходят в узкой зоне около стенки, где, например, плотность изменяется приблизительно в 20 раз.

На рис. 2.3 приведены распределения вдоль поверхности тела коэффициента трения $c_f = (\mu/\text{Re})(\chi \partial u/\partial \xi)_{\xi=0}/(\rho_\infty U_\infty^2)$, теплового потока $q_w = (\mu/(\text{RePr}))(\chi \partial h/\partial \xi)_{\xi=0}/(\rho_\infty U_\infty^3)$, давления $p_w = \bar{p}(s, 0)$, а также величины отхода ударной волны $\epsilon = n_\Gamma$ (кривые 1 и 2 соответствуют $\text{Re}_0 = 100, 500$).

Там же пунктирными линиями указана зависимость $p_w(s)$ и $\epsilon = n_\Gamma(s)$ для случая идеального обтекания. Меньшее значение расстояния отхода ударной волны для вязкого газа соответствует отрицательной величине толщины вытеснения пограничного слоя в рассматриваемом случае сильноохлажденной поверхности ($h_w = h_\infty = 0,025$). Наконец, на рис. 2.4 в логарифмическом масштабе приведено изменение производной $(dc_f/ds)_{s=0}$ (кривая 1) и коэффициента теплопередачи $C_h = q_w(0)/(h_0 - h_w)$, где h_0 — энтальпия торможения, с изменением числа Re (кривая 2). Линейный характер этих функций при $\text{Re} > 10^3$ и угол наклона прямых указывают на обратно пропорциональную зависимость коэффициентов трения и теплопередачи от величины $\sqrt{\text{Re}}$. Для сравнения на рис. 2.4 изображено изменение коэффициента C_h с числом Re согласно теории пограничного слоя [58] при $\omega = 0,5$ (штриховая линия). Таким образом, результаты расчетов, проведенных на основе полных уравнений Навье–Стокса, при больших числах Re хорошо согласуются с данными для невязкого течения и пограничного слоя.

Пластина конечной длины в сверхзвуковом потоке слаборазреженного газа: методические вопросы. Существует значительное число работ, посвященных аналитическому и численному исследованию обтекания плас-

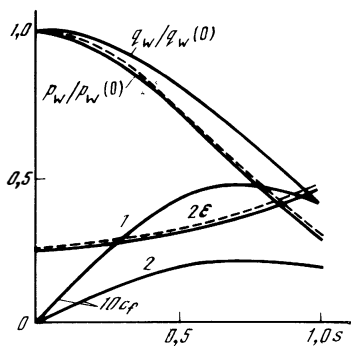


Рис. 2.3

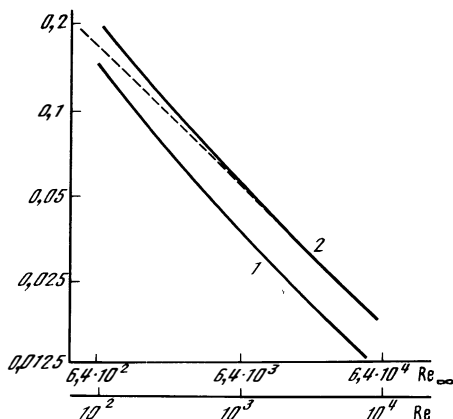


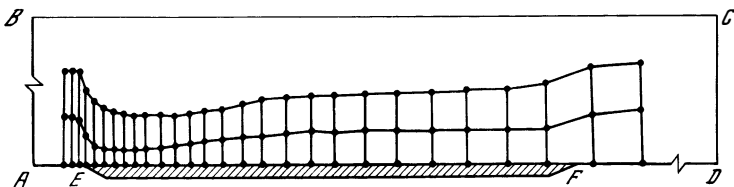
Рис. 2.4

тины с острой передней кромкой в случаях, когда желательно отказаться от традиционного разделения потока на вязкое ядро и пограничный слой. Не останавливаясь на их обзоре, отметим ранние работы [59, 60], в которых строились численные решения уравнений Навье—Стокса для пластин бесконечной длины (без задних кромок). В рамках механики сплошной среды решение задачи о плоском течении слаборазреженного газа около пластины конечной длины является другим примером применения описанной выше методики. Наибольшие числа Рейнольдса, характерные для течения этого типа, а также возможность распространения возмущений от задней кромки вверх по потоку приводят к необходимости описывать движение газа полными уравнениями Навье—Стокса. Приводимые ниже результаты не только иллюстрируют использование компактных аппроксимаций с адаптирующимися к решению сетками, но и выявляют ряд интересных фактов, одним из которых, в частности, является хорошее согласие решений уравнений Навье—Стокса с кинетическими граничными условиями на поверхности с данными эксперимента и численными решениями уравнения Больцмана.

Рассмотрим течение в области $ABCD$ (рис. 2.5) с помещенной в ней пластиной EF (невозмущенный поток направлен параллельно AD). Будем предполагать, что границы AB и BC находятся на достаточно большом расстоянии от пластины, так что течение на них определяется параметрами набегающего потока; на частях AE и FD нижней границы естественно использовать условия симметрии, а на самой пластине EF — условия скольжения и скачка температуры. В декартовой системе координат (x, y) с началом в передней кромке и осью x , направленной вдоль AD , эти условия могут быть записаны в виде [61]

$$u(x, 0) = \left(\chi \frac{\partial u}{\partial g} \right)_w, \quad T(x, 0) = T_w + 1,990 \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{\lambda}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w. \quad (2.9)$$

Здесь индекс w относится к значениям на твердой поверхности, а длина свободного пробега λ задается формулой $\lambda = 1,256 \mu \sqrt{\gamma/\rho c}$ (c — скорость



Р и с. 2.5

звука) или, в безразмерном виде, $Kn = \lambda/L = 1,256 M_\infty \sqrt{\gamma}/Re_\infty L$, где Kn — число Кнудсена. Условия (2.9) имеют асимптотический характер и, строго говоря, неприменимы, если не выполняется неравенство $Kn \leq \lambda/n \leq 1$. При нарушении этого неравенства формально становятся неприменимыми и сами уравнения Навье—Стокса. Однако лишь сравнение с экспериментом и решениями уравнения Больцмана могут выявить границы практической пригодности используемой модели. Стоит заметить, что условия (2.9) играют очень важную роль при получении имеющих физический смысл решений рассматриваемой краевой задачи: вводя проскальзывание потока, они предотвращают возникновение бесконечных производных $(\partial/\partial y)_{x=0, y=0}$ и, следовательно, бесконечных значений давления и трения в передней кромке пластины (в одном из расчетных вариантов использовались условия прилипания, что привело к нереальному возрастанию давления на стенке при $x \rightarrow 0$).

В качестве преобразования координаты y выбираем функцию

$$\zeta = (u - u_0 + cy)/(u_N - u_0 + cy_N),$$

где $u_0 = u(x, 0)$, $c = \text{const} > 0$, а индекс N отмечает значения на границе BC , расположенной в невозмущенном потоке. Признаком растяжения здесь служит касательная скорость u , наиболее резко меняющаяся в пристеночной области. Это преобразование не растягивает ударную волну, однако последнее обстоятельство в данном случае является несущественным с точки зрения аэродинамических характеристик пластины.

Для сгущения узлов сетки вдоль оси x вводилась новая независимая переменная

$$\xi = \ln(1 + \beta x), \quad (2.10)$$

где константа β характеризует степень этого сгущения. При постоянном шаге h_ξ значение β подбирается таким образом, чтобы в окрестности передней кромки шаг h_x имел бы порядок длины свободного пробега λ . Мелкий шаг h_ξ около передней крышки необходим для точного описания течения в области с характерным размером $O(1/Re)$, где функции меняются весьма быстро. Если бы интерес представляли также и детали течения около задней кромки, то преобразование (2.10) следовало бы модифицировать для уменьшения шагов h_x в окрестности $x = L$. Простое увеличение числа узлов M вдоль оси L показало, что эти детали практически не влияют на решение вне небольшой окрестности $x = L$.

При расчетах использовался итерационно-маршевый алгоритм в том виде, как он описан выше. Для числа узлов сетки порядка 10^3 сходимость

до двух-трех значащих цифр достигалась в результате 400–500 итераций (релаксационный параметр α полагался равным 0,75). Методические расчеты, проводившиеся с более мелкими шагами, показали, что отличие функций, вычисленных на различных сетках в среднеквадратичной норме, может достигать лишь несколько процентов.

Обтекание пластины: результаты расчетов. Большинство расчетов проводилось при числе Маха $M_\infty = 10$, для которого известно сравнительно большое число экспериментальных данных. Все остальные параметры задачи: число Рейнольдса $Re_L = \rho_\infty U_\infty L / \mu^*$ (длина пластины L принималась равной единице), число Прандтля Pr , показатель адиабаты $\gamma = \text{const}$ (совершенный газ), степень охлаждения поверхности $t_w = T_w / T_0 = h_w / h_0$ (индексом 0 отмечены параметры торможения) и закон изменения вязкости с температурой — менялись от варианта к варианту.

В качестве примера распределения узлов в физической плоскости, которое автоматически получилось в процессе решения, на рис. 2.5 приведены ближайшие к поверхности узлы для одного из вариантов грубых сеток. Малые размеры шага Δx в окрестности носика являются следствием преобразования (2.10), а малые размеры Δy — следствием относительно больших градиентов функции u . Интересно отметить, что минимальные значения Δy , адаптированные к решению задачи, получаются не в самом носике, а несколько ниже по течению.

Типичные картины течения около горячей и холодной пластины, а также в следе за ними приведены на рис. 2.6 в виде распределений параметров потока в сечениях $s = \text{const}$. Сплошные линии относятся к v/U_∞ , штриховые — к $p/(\rho_\infty U_\infty^2)$, кривые 1 и 2 соответствуют случаям горячей ($t_w = 1$) и холодной ($t_w = 0,1$) стенок. Рассматриваемые числа Рейнольдса ($Re_{L\infty} \ll \ll 10000$) относительно невелики, поэтому начало формирования ударной волны наблюдается лишь в задней части пластины, где появляются заметные максимумы в профилях плотности и нормальной составляющей скорости v . Другим признаком приближения к режиму сильного взаимодействия являются сравнительно небольшие значения производных $(\partial p / \partial y)_{y=0}$, равные нулю в случае пограничного слоя. Если вычислить параметр разрежения $\bar{V}_\infty = M_\infty (c / Re_{\infty x})^{0,5}$ ($c = \mu_w T_w / \mu_\infty T_\infty$) при $x = 1$, т.е. на задней кромке, то окажется, что для многих расчетных вариантов он достигает значений 0,3, т.е. намного больше обычно принимаемой за границу применимости теории сильного взаимодействия величины 0,2.

В окрестности передней кромки полученные решения указывают на весьма большие градиенты искомых функций u , в частности, на большие значения производных $(\partial u / \partial y)_{y=0}$. В этой области, а также ниже по течению поток образует единый уплотненный слой без каких-либо заметных признаков образования ударной волны. Для этого режима обтекания характерна сравнительно большая скорость скольжения $u(x, 0)$ (около носика порядка 70% от U_∞), свойственная течениям при достаточно больших числах Кнудсена; при приближении к задней кромке величина $u(x, 0)$ уменьшается до 0,15–0,20.

Картины течения в случаях холодной ($t_w = 0,1$) и горячей ($t_w = 1$) поверхностей несущественно отличаются друг от друга. Эти отличия проявляются в основном в наличии максимума u функций $h(x, y)_{x=\text{const}}$.

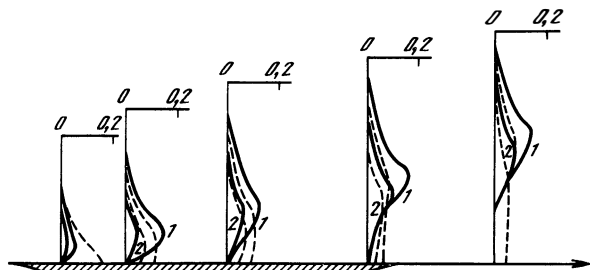


Рис. 2.6

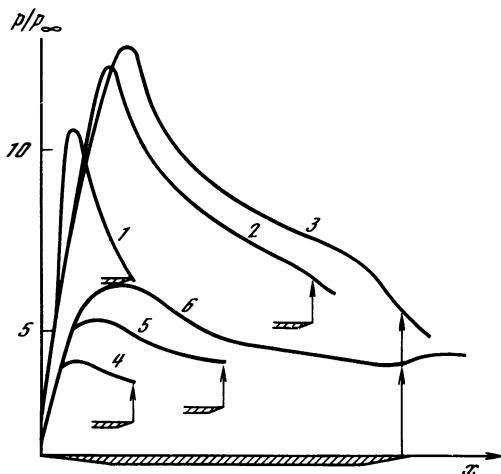
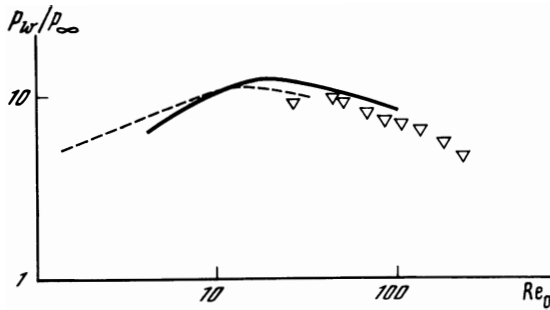


Рис. 2.7

возникающего при охлаждении стенки; кроме того, градиенты $(\partial p / \partial y)_{y=0}$ на холодной стенке несколько больше, чем на горячей (рис. 2.6).

Рассматривая течение перед и за пластиной, легко увидеть, что зона возмущенного потока перед передней кромкой крайне невелика (порядка длины свободного пробега λ); за задней кромкой наблюдается типичная структура следа с постепенным выравниванием газодинамических параметров, возмущенных вследствие присутствия пластины. Распределения давления вдоль поверхности пластины приведены на рис. 2.7 для теплоизолированной ($Re = 1670; 5000; 6700$ (кривые 1–3)) и охлажденной ($Re = 160; 320; 640; t_w = 0,1$ (кривые 4–6)) стенки. Они свидетельствуют о заметном влиянии задних кромок (положение их указано стрелками) на все поле течения.

На рис. 2.8 сравниваются полученные автором расчетные данные (сплошная кривая) с результатами экспериментов [62] (треугольники) и прямого численного моделирования течения разреженного газа методом Бёрда (штриховая линия) [63]. Параметры потока приняты следующими: $M_\infty = 12,66$, $\gamma = 5/3$, $t_w = 0,0835$, $\mu \sim T^{0,68}$. Согласие всех этих данных оказывается вполне удовлетворительным; в частности, решения уравне-



Р и с. 2.8

ний Навье—Стокса и Больцмана приводят к достаточно близкому расположению и значению максимумов распределений вдоль поверхности давления, трения и теплопередачи. Таким образом, использование уравнений Навье—Стокса с условиями скольжения и скачка температуры на поверхности оказывается вполне приемлемым даже при малых числах Рейнольдса, когда применение модели механики сплошной среды является проблематичным.

3. АЛГОРИТМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ КООРДИНАТАМ

3.1. Схемы с компактными аппроксимациями третьего порядка

Матрично-разностные операторы; дискретизация уравнений Эйлера. Принципы построения компактных аппроксимаций для систем уравнений с несколькими пространственными переменными, изложенные в гл. 1, могут быть непосредственно использованы при конструировании алгоритмов численного решения уравнений динамики невязкого и вязкого газов. При этом информация о специфике этих уравнений содержится в характеристических матрицах, входящих в операторы компактного дифференцирования. Характеристические матрицы, в свою очередь, зависят от формы записи исходных уравнений (точнее, их гиперболической части), от выбранной системы координат, а также от того, что считается искомым вектором.

В дальнейшем будет предполагаться, что физическое пространство при помощи некоторого преобразования декартовых координат отображено на расчетную область таким образом, что выполняются следующие условия.

1. Поверхность обтекаемого тела, если она имеется, совпадает с одной из координатных поверхностей в новой системе координат ξ , η и ζ (адаптация к форме тела).

2. Разностной сетке в расчетной области, имеющей постоянные шаги h_ξ , h_η и h_ζ , соответствует надлежащее сгущение узлов в физическом пространстве, допускающее разрешение представляющих интерес областей с малыми характерными размерами (адаптация к искомому решению).

Преобразование координат, удовлетворяющее последнему условию, может быть либо фиксированным заранее на основе какой-либо априорной информации о решении, либо подстраиваться к решению в процессе

счета. Уравнения Навье–Стокса (1.9) для построенной таким образом системы координат (ξ, η, ζ) с сохранением компонент скорости u, v, w в декартовой системе (x, y, z) удобно представить в векторном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_0}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}_0}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial \zeta} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial \zeta} \right), \quad (3.1)$$

где

$$\mathbf{F}_0 = J^{-1} (\tilde{\mathbf{F}} \xi_x + \tilde{\mathbf{G}} \xi_y + \tilde{\mathbf{H}} \xi_z), \quad \mathbf{G}_0 = J^{-1} (\tilde{\mathbf{F}} \eta_x + \tilde{\mathbf{G}} \eta_y + \tilde{\mathbf{H}} \eta_z),$$

$$\mathbf{H}_0 = J^{-1} (\tilde{\mathbf{F}} \zeta_x + \tilde{\mathbf{G}} \zeta_y + \tilde{\mathbf{H}} \zeta_z), \quad \tilde{\mathbf{U}} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)^T,$$

$$\mathbf{F}_0 = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, (E+p)u)^T, \quad \mathbf{G}_0 = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (E+p)v)^T,$$

$$\mathbf{H}_0 = (\rho w, \rho uw, \rho vw, \rho w^2 + p, (E+p)w)^T,$$

а $J = \partial(x, y, z) / \partial(\xi, \eta, \zeta)$ — якобиан преобразования, предполагаемый отличным от нуля. Векторы $\mathbf{F}_1, \mathbf{G}_1$ и \mathbf{H}_1 в правой части (3.1) могут быть получены из (1.9); на данном этапе они являются несущественными.

Выбирая в качестве искомой векторной функции некоторый вектор \mathbf{u} , можно получить матрицы с размерностью 5×5 $L = \partial \mathbf{U} / \partial \mathbf{u}$, $P = \partial \mathbf{F}_0 / \partial \mathbf{u}$, $Q = \partial \mathbf{G}_0 / \partial \mathbf{u}$ и $R = \partial \mathbf{H}_0 / \partial \mathbf{u}$, которые и являются исходными для построения компактных аппроксимаций третьего порядка. Вид этих матриц зависит от того, что считается вектором \mathbf{u} . Здесь существует несколько возможностей, из которых в качестве основной будет рассматриваться следующая:

$$\mathbf{u} = (\rho, u, v, w, e)^T \quad \text{или} \quad (\rho, u, v, w, h)^T. \quad (3.2)$$

Другой вариант состоит в выборе $\mathbf{u} = \mathbf{U}$; при этом матрица L становится единичной, что создает определенные удобства при реализации алгоритма. В обоих случаях давление p предполагается известной функцией e , определяемой уравнением состояния (1.6). Напомним, что операторы компактных аппроксимаций третьего порядка, соответствующие координатам ξ, η и ζ на равномерной сетке

$$\omega_{\xi\eta\zeta}: \quad \xi_i = ih_\xi, \quad \eta_j = jh_\eta, \quad \zeta_k = kh_\zeta, \quad h_\xi, h_\eta, h_\zeta = \text{const},$$

имеют вид

$$\begin{aligned} B_\xi &= A_0^\xi - 0,25 M_\xi \Delta_0^\xi, \quad C_\xi = 0,5 h_\xi^{-1} [\Delta_0^\xi - \Delta_-^\xi (T_{1/2}^\xi M_\xi) \Delta_+^\xi], \\ B_\eta &= A_0^\eta - 0,25 M_\eta \Delta_0^\eta, \quad C_\eta = 0,5 h_\eta^{-1} [\Delta_0^\eta - \Delta_-^\eta (T_{1/2}^\eta M_\eta) \Delta_+^\eta], \\ B_\zeta &= A_0^\zeta - 0,25 M_\zeta \Delta_0^\zeta, \quad C_\zeta = 0,5 h_\zeta^{-1} [\Delta_0^\zeta - \Delta_-^\zeta (T_{1/2}^\zeta M_\zeta) \Delta_+^\zeta], \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$M_\xi = LS_\xi D_\xi (LS_\xi)^{-1}, \quad M_\eta = LS_\eta D_\eta (LS_\eta)^{-1}, \quad M_\zeta = LS_\zeta D_\zeta (LS_\zeta)^{-1}.$$

В (3.3) столбцами матриц S_ξ, S_η и S_ζ являются собственные векторы соответственно матриц $L^{-1}P, L^{-1}Q, L^{-1}R$. Собственные значения последних $\lambda_i^\xi, \lambda_i^\eta, \lambda_i^\zeta$ ($i = 1, 5$) используются в диагональных матрицах D_ξ, D_η и D_ζ :

$$D_\xi = \text{diag}(\text{sgn } \lambda_i^\xi), \quad D_\eta = \text{diag}(\text{sgn } \lambda_i^\eta), \quad D_\zeta = \text{diag}(\text{sgn } \lambda_i^\zeta).$$

Для полноты изложения приведем вид матриц LS_{ξ} , LS_{η} и LS_{ζ} :

$$\begin{aligned}
 LS_{\xi} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ u & \rho y_1 & \rho z_1 & u - s_1 x_1 & u + s_1 x_1 \\ v & -\rho x_1 & 0 & v - s_1 y_1 & v + s_1 y_1 \\ w & 0 & -\rho x_1 & w - s_1 z_1 & w + s_1 z_1 \\ W^2 & \rho(uy_1 - vx_1) & \rho(uz_1 - wx_1) & \gamma e + W^2 - s_1 g_1 & \gamma e + W^2 + s_1 g_1 \end{pmatrix} \\
 LS_{\eta} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ u & \rho y_2 & 0 & u - s_2 x_2 & u + s_2 x_2 \\ v & -\rho x_2 & \rho z_2 & v - s_2 y_2 & v + s_2 y_2 \\ w & 0 & -\rho y_2 & w - s_2 z_2 & w + s_2 z_2 \\ W^2 & \rho(uy_2 - vx_2) & \rho(vz_2 - wy_2) & \gamma e + W^2 - s_2 g_2 & \gamma e + W^2 + s_2 g_2 \end{pmatrix} \\
 LS_{\zeta} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ u & \rho z_3 & 0 & u - s_3 x_3 & u + s_3 x_3 \\ v & 0 & \rho z_3 & v - s_3 y_3 & v + s_3 y_3 \\ w & -\rho x_3 & -\rho y_3 & w - s_3 z_3 & w + s_3 z_3 \\ W^2 & \rho(uz_3 - wx_3) & \rho(vz_3 - wy_3) & \gamma e + W^2 - s_3 g_3 & \gamma e + W^2 + s_3 g_3 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

При записи элементов этих матриц приняты следующие обозначения: $W^2 = (u^2 + v^2 + w^2)/2$, величины с индексами 1, 2, 3 вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 x_1 &= y_{\eta} z_{\zeta} - z_{\eta} y_{\zeta}, \quad y_1 = z_{\eta} x_{\zeta} - x_{\eta} z_{\zeta}, \quad z_1 = x_{\eta} y_{\zeta} - y_{\eta} x_{\zeta}, \\
 x_2 &= z_{\xi} y_{\zeta} - y_{\xi} z_{\zeta}, \quad y_2 = x_{\xi} z_{\zeta} - z_{\xi} x_{\zeta}, \quad z_2 = y_{\xi} x_{\zeta} - x_{\xi} y_{\zeta}, \\
 x_3 &= y_{\xi} z_{\eta} - z_{\xi} y_{\eta}, \quad y_3 = z_{\xi} x_{\eta} - x_{\xi} z_{\eta}, \quad z_3 = x_{\xi} y_{\eta} - y_{\xi} x_{\eta}, \\
 s_i &= a \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}, \quad g_i = ux_i + vy_i + wz_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad a = \sqrt{\gamma(\gamma - 1)e},
 \end{aligned}$$

где индексы ξ, η, ζ у переменных x, y, z означают дифференцирование.

Все элементы матриц M_{ξ} , M_{η} и M_{ζ} считаются известными сеточными функциями, определенными на сетке $\omega_{\xi\eta\zeta}$; фактически они вычисляются по результатам какого-либо предыдущего этапа вычислений (например, по значениям предыдущего временного слоя). Члены с операторами сдвига $T_{1/2}^{\xi}$, $T_{1/2}^{\eta}$ и $T_{1/2}^{\zeta}$, присутствующие в (3.3), могут быть аппроксимированы (например, для координаты ξ) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{-}^{\xi} (T_{1/2}^{\xi} M_{\xi}) \Delta_{+}^{\xi} &= \frac{1}{2} [(M_{\xi})_{i+1jk} + (M_{\xi})_{ijk}] \Delta_{+}^{\xi} - \\
 &- \frac{1}{2} [(M_{\xi})_{i-1jk} + (M_{\xi})_{ijk}] \Delta_{-}^{\xi}, \\
 \Delta_{+}^{\xi} &= T_1^{\xi} - E, \quad \Delta_{-}^{\xi} = E - T_1^{\xi}.
 \end{aligned}$$

Другая возможность состоит в вычислении матриц $M_{\xi} |_{i \pm 1/2}$ непосредственно по интерполированным значениям и в полудельных узлах.

При помощи операторов (3.3) на сетке $\omega_{\tau} \times \omega_{\xi\eta\zeta}$ может быть построе-

на факторизованная схема для уравнений Эйлера ($\mu \equiv 0$ в (3.1)), имеющая погрешность $O(h^3)$, где $h = \max(h_\xi, h_\eta, h_\zeta)$:

$$\begin{aligned} & (L + \sigma\tau B_\xi^{-1} C_\xi P) L^{-1} (L + \sigma\tau B_\eta^{-1} C_\eta Q) L^{-1} (L + \sigma\tau B_\zeta C_\zeta R) \times \\ & \times (u^{m+1} - u^m) / \tau = -L u^m = \\ & = -[B_\xi^{-1} C_\xi F_0(u^m) + B_\eta^{-1} C_\eta G_0(u^m) + B_\zeta^{-1} C_\zeta H_0(u^m)]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Все матрицы, входящие в правую часть (3.5), предполагаются вычисленными по значениям u^m . Через σ в (3.5) обозначен весовой множитель, позволяющий записать погрешность дискретизации по времени в виде $O((\sigma - 0,5)\tau + \tau^2)$.

Осуществить переход от слоя $t = t_m$ к слою $t = t_{m+1}$, как уже указывалось ранее, можно следующим образом: вначале определяются сеточные функции

$$Y = B_\eta^{-1} C_\eta G_0(u^m) \quad \text{и} \quad Z = B_\zeta^{-1} C_\zeta H_0(u^m),$$

после чего находится функция

$$B_\xi L u^m = C_\xi F_0(u^m) + Y + Z.$$

Определение u^{m+1} затем сводится к последовательному обращению операторов $B_\xi L + \sigma\tau C_\xi P$, $B_\eta L + \sigma\tau C_\eta Q$ и $B_\zeta L + \sigma\tau C_\zeta R$.

Схема (3.5) не является абсолютно устойчивой даже в случае постоянных матриц. Однако здесь она рассматривается в качестве базовой в силу следующих соображений.

1. Допустимые числа Куранта для (3.5), как показала практика, могут существенно превышать критерий устойчивости явных схем.

2. Частный случай алгоритма (3.5), когда все функции зависят лишь от двух пространственных координат ξ и η , абсолютно устойчив при постоянных матрицах.

3. Схема (3.5) может стать основой для построения абсолютно устойчивой схемы с внутренними итерациями.

Разумеется, могут быть альтернативы факторизованной схеме (3.5), сохраняющие способ пространственной дискретизации исходных уравнений.

В двумерном случае, когда независимыми переменными являются t , ξ и η , в схеме (3.5) достаточно формально положить $H \equiv 0$ и $R \equiv 0$; тогда $Z \equiv 0$ и обращаемыми операторами являются B_η , $B_\xi L + \tau\sigma C_\xi P$ и $B_\eta L + \tau\sigma C_\eta Q$.

Как уже отмечалось, для вектора искомого функций $u = U$ матрица L в (3.5) становится единичной. При этом матрицы P , Q и R меняют свой вид, однако характеристические матрицы M_ξ , M_η и M_ζ остаются неизменными.

Чтобы пояснить это, достаточно рассмотреть две эквивалентные системы с постоянными коэффициентами

$$L \partial u / \partial t + P \partial u / \partial x = 0, \quad \partial f / \partial t + PL^{-1} \partial f / \partial x = 0, \quad f = Lu,$$

в которых матрица L — невырождена. Матрицы M и \tilde{M} , соответствующие первому и второму уравнению, имеют вид

$$M = (LS)D(LS)^{-1}, \quad \tilde{M} = \tilde{S}\tilde{D}\tilde{S}^{-1},$$

где

$$L^{-1}P = S\Lambda S^{-1}, \quad \Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\}, \quad D = \text{diag}\{\text{sgn}\lambda_i\},$$

$$PL^{-1} = \tilde{S}\tilde{\Lambda}\tilde{S}^{-1}, \quad \tilde{\Lambda} = \text{diag}\{\tilde{\lambda}_i\}, \quad \tilde{D} = \text{diag}\{\text{sgn}\tilde{\lambda}_i\},$$

а λ_i и $\tilde{\lambda}_i$ ($i = 1, \bar{5}$) — собственные значения матриц $L^{-1}P$ и PL^{-1} . Ввиду того что $\lambda_i = \tilde{\lambda}_i$ и из равенства $L^{-1}P = S\Lambda S^{-1}$ следует равенство $PL^{-1} = LS\Lambda S^{-1}L^{-1}$, можно сразу заключить, что матрицы M и \tilde{M} также равны.

Схемы для уравнений Навье—Стокса. Как и в случае систем уравнений с диффузионными членами, рассмотренном в гл. 1, при аппроксимации уравнений Навье—Стокса определяющую роль играет дискретизация их гиперболической части, члены же с коэффициентом вязкости могут быть аппроксимированы многими способами, влияющими в основном на простоту обращения операторов.

В дальнейшем при построении разностных аналогов тензора напряжений будут использоваться следующие принципы: а) члены со вторыми производными по ξ , η и ζ аппроксимируются неявным образом; б) в зависимости от целей и специфики решаемых задач эти аппроксимации могут иметь различные порядки, некоторые варианты их приведены в гл. 1; в) члены со смешанными производными аппроксимируются явным образом, что позволяет рассматривать их разностные аналоги как известные сеточные функции. Применение явных аппроксимаций смешанных производных связано с факторизацией обращаемого оператора, позволяющей решать одномерные системы разностных уравнений. Может показаться, что такое упрощение приведет к ограничению на допустимую величину временного шага τ . Однако, как показывает практический опыт, ограничения на величину τ , связанные с нелинейностью уравнений Навье—Стокса, при не слишком малых числах Рейнольдса являются более сильными и аппроксимация смешанных производных не оказывает заметного влияния на устойчивость схемы.

В алгоритме, описанном выше, вторые производные аппроксимировались с третьим порядком с использованием операторов, сопряженных с операторами конвективных членов; это не усложняло заметным образом процесс решения разностных уравнений. Непосредственное введение аналогичных аппроксимаций в схему с матрично-разностными операторами заставило бы искать пути уменьшения размерности обращаемых матриц при помощи внутренних итераций (например, описанных в гл. 1). Если не ставить целью получение высокого порядка локальной аппроксимации внутри областей с существенной ролью вязкости (что во многих случаях является вполне разумным), то оказываются применимыми дискретизации вторых производных, обеспечивающих погрешность схемы вида $O(h^3 + (1/\text{Re})h)$ или $O(h^3 + (1/\text{Re})h^2)$, описанные в гл. 1.

Такая стратегия приводит к использованию операторов, обычных при аппроксимации вторых и смешанных производных в уравнениях Навье—Стокса. Эти операторы определяются равенствами

$$\Lambda_{\xi\xi} \bar{\mu} f = \Delta_+^{\xi} (T_{-1/2}^{\xi} \bar{\mu}) \Delta_-^{\xi} f / h_{\xi}^2, \quad (3.6)$$

$$\Lambda_{\eta\eta} \bar{\mu} f = \Delta_+^{\eta} (T_{-1/2}^{\eta} \bar{\mu}) \Delta_-^{\eta} f / h_{\eta}^2,$$

$$\Lambda_{\xi\xi} \bar{\mu} \mathbf{f} = \Delta_+^{\xi} (T_{-1/2}^{\xi} \bar{\mu}) \Delta_-^{\xi} \mathbf{f} / h_{\xi}^2,$$

$$\Lambda_{\xi\eta} \bar{\mu} \mathbf{f} = \frac{1}{4h_{\xi} h_{\eta}} \Delta_0^{\xi} \bar{\mu} \Delta_0^{\eta} \mathbf{f}, \quad \Lambda_{\xi\xi} \mu \mathbf{f} = \frac{1}{4h_{\xi} h_{\xi}} \Delta_0^{\xi} \bar{\mu} \Delta_0^{\eta} \mathbf{f} \text{ и т.д.},$$

где диагональная матрица $\bar{\mu}$ имеет вид $\text{diag}(0, \mu, \mu, \mu, \mu/\text{Pr})$ (в дальнейшем в сочетании с векторными функциями она будет обозначаться через μ). В индексном представлении, например, первое и третье равенство (3.6) выглядят так:

$$\Lambda_{\xi\xi} \mathbf{f}_{ijk} = [(\mu_{i+1jk} + \mu_{ijk}) \Delta_+^{\xi} \mathbf{f}_{ijk} - (\mu_{ijk} + \mu_{i-1jk}) \Delta_-^{\xi} \mathbf{f}_{ijk}] / 2h_{\xi}^2,$$

$$\Lambda_{\xi\eta} \mathbf{f}_{ijk} = (\mu_{i+1,jk} \Delta_0^{\eta} \mathbf{f}_{i+1,jk} - \mu_{i-1jk} \Delta_0^{\eta} \mathbf{f}_{i-1jk}) / 4h_{\xi} h_{\eta}.$$

Для того чтобы использовать операторы (3.6), представим векторы \mathbf{F}_1 , \mathbf{G}_1 и \mathbf{H}_1 в правой части (3.1) в виде

$$\mathbf{F}_1 = \mu(\partial \mathbf{T}_{11} / \partial \xi + \partial \mathbf{T}_{12} / \partial \eta + \partial \mathbf{T}_{13} / \partial \zeta),$$

$$\mathbf{G}_1 = \mu(\partial \mathbf{T}_{21} / \partial \xi + \partial \mathbf{T}_{22} / \partial \eta + \partial \mathbf{T}_{23} / \partial \zeta),$$

$$\mathbf{H}_1 = \mu(\partial \mathbf{T}_{31} / \partial \xi + \partial \mathbf{T}_{32} / \partial \eta + \partial \mathbf{T}_{33} / \partial \zeta).$$

Для краткости записи будем использовать там, где это необходимо, индексные обозначения операторов, считая, что $\xi = q_1$, $\eta = q_2$, $\zeta = q_3$, и полагая $\Lambda_{ij} = \Lambda_{q_i q_j}$, $i \neq j$. Введя матрицы

$$P_1 = -\partial \mathbf{T}_{21} / \partial u, \quad Q_1 = -\partial \mathbf{T}_{22} / \partial u, \quad R_1 = -\partial \mathbf{T}_{32} / \partial u,$$

можно конструировать схемы с различными аппроксимациями членов со вторыми производными при сохранении компактных аппроксимаций третьего порядка газодинамической части системы Навье–Стокса.

С точки зрения решения разностных уравнений самый простой способ состояний в применении операторов $B_{\xi}^{-1} \Lambda_{\xi\xi}$, $B_{\eta}^{-1} \Lambda_{\eta\eta}$ и $B_{\zeta}^{-1} \Lambda_{\zeta\zeta}$. Схема для уравнений Навье–Стокса (3.1) при этом с погрешностью $O(h^3 + (1/\text{Re})h)$ может быть записана в виде

$$\begin{aligned} & [L + \tau B_{\xi}^{-1} (C_{\xi} P + \Lambda_{\xi\xi} P_1)] L^{-1} [L + \tau B_{\eta}^{-1} (C_{\eta} Q + \Lambda_{\eta\eta} Q_1)] L^{-1} \times \\ & \times [L + \tau B_{\zeta}^{-1} (C_{\zeta} R + \Lambda_{\zeta\zeta} R_1)] (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) / \tau = \\ & = [B_{\xi}^{-1} (C_{\xi} \mathbf{F} + \Lambda_{\xi\xi} \mathbf{T}_{11}) + B_{\eta}^{-1} (C_{\eta} \mathbf{G} + \Lambda_{\eta\eta} \mathbf{T}_{22}) + B_{\zeta}^{-1} (C_{\zeta} \mathbf{H} + \Lambda_{\zeta\zeta} \mathbf{T}_{33}) + \\ & + \sum_{i \neq j} \Lambda_{ij} \mathbf{T}_{ij}]^m. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ее отличие от схемы (3.5) для уравнений Эйлера состоит в наличии трехточечных операторов $C_{\xi} P + \Lambda_{\xi\xi} P_1$, $C_{\eta} Q + \Lambda_{\eta\eta} Q_1$ и $C_{\zeta} R + \Lambda_{\zeta\zeta} R_1$ вместо операторов $C_{\xi} P$, $C_{\eta} Q$, $C_{\zeta} R$, а также в появлении дополнительного слагаемого $\sum_{i \neq j} \Lambda_{ij} \mathbf{T}_{ij}$ в правой части. Процесс решения разностных уравнений при этом остается тем же самым.

Другой вариант аппроксимации членов со вторыми производными связан с непосредственным использованием операторов $\Lambda_{\xi\xi}$, $\Lambda_{\eta\eta}$ и $\Lambda_{\zeta\zeta}$ (см. гл. 1). В этом случае ее погрешность имеет второй, а не первый, как в случае схемы (3.7), порядок. Однако обрабатываемые операторы перестают быть трехточечными, что делает целесообразным введение дополнительных дробных шагов.

Обозначая через G_ξ , G_η и G_ζ операторы в левой части схемы (3.7), схему с дополнительным расщеплением можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & G_\xi(E + \tau L^{-1} \Lambda_{\xi\xi} P_1) G_\eta(E + \tau L^{-1} \Lambda_{\eta\eta} Q_1) G_\zeta(E + \tau \Lambda_{\zeta\zeta} R_1) (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) / \tau = \\ & = -\tau (\mathcal{L} \mathbf{u}^m + \sum_{ij=1}^3 \Lambda_{ij} \mathbf{T}_{ij}^m). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь оператор \mathcal{L} имеет тот же смысл, что и в схеме (3.5) для уравнений Эйлера.

При аппроксимации тензора вязких напряжений с высоким порядком, если такая необходимость возникает, можно использовать формулы компактного численного дифференцирования. В частности, смешанные производные, для которых естественно использовать центрированные операторы на сетке $\omega_\xi \eta_\zeta$, представимы в виде

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\mu \frac{\partial \mathbf{T}_{ij}}{\partial q_j} \right) = V_{q_i q_j} \mathbf{u} = (A_0^{q_i})^{-1} \Delta_0^{q_i} \mu (A_0^{q_j})^{-1} \Delta_0^{q_j} \mathbf{T}_{ij} / h_{q_i} h_{q_j} + O(h^4), \quad (3.9)$$

где $q_1 = \xi$, $q_2 = \eta$, $q_3 = \zeta$, $i \neq j$.

Для аппроксимации вторых производных с третьим порядком можно использовать сопряженные операторы, подобно тому как это было описано в гл. 1, разд. 2:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\mu \frac{\mathbf{T}_{ii}(\mathbf{u})}{\partial q_i} \right) \approx V_{q_i} \mathbf{u} = -B_{q_i}^{-1} C_{q_i} \mu (B_{q_i}^*)^{-1} C_{q_i}^* \mathbf{T}_{ii}, \quad i = \overline{1,3}. \quad (3.10)$$

С учетом (3.9), (3.10) схему третьего порядка для системы (3.1) запишем в виде

$$\begin{aligned} & [L + \tau (C_\xi^{-1} P - V_\xi)] L^{-1} [L + \tau (B_\eta^{-1} C_\eta Q - V_\eta)] L^{-1} [L + \tau (B_\zeta^{-1} C_\zeta L - V_\zeta)] \times \\ & \times (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) / \tau = -[\mathcal{L} - \sum_{i=1}^3 V_{q_i} - \sum_{i \neq j=1}^3 V_{q_i q_j}] \mathbf{u}^m. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для определения \mathbf{u}^{m+1} необходимо:

- 1) вычислить правую часть уравнений Эйлера $\mathcal{L} \mathbf{u}^m$ в схеме (3.5);
- 2) определить члены V_{q_i} и $V_{q_i q_j}$ ($i, j = \overline{1,3}$) в правой части (3.11), обратив операторы B_{q_i} и $A_0^{q_i}$ ($i = \overline{1,3}$);
- 3) последовательно обратив операторы $B_\xi L + \tau (C_\xi P + B_\xi V_\xi)$, $B_\eta L + \tau (B_\eta C_\eta Q + B_\eta V_\eta)$ и $B_\zeta L + \tau (C_\zeta R - B_\zeta V_\zeta)$

в левой части (3.11).

Таким образом, по сравнению со схемой (3.7) схема (3.11) требует, во-первых, большого количества обращений операторов при вычислении правой части и, во-вторых, обращения более сложных операторов в левой части. Для упрощения этих операций ценой, вообще говоря, уменьшения запаса устойчивости можно заменить в левой части операторы V_{q_i} на энергетически эквивалентные им операторы $B_{q_i}^{-1} k \mu \Delta_2^{q_i}$, $k = \text{const}$, $i = \overline{1,3}$. Возможна также оптимизация процесса вычислений при определении пра-

вой части (3.11). Но даже с учетом всех этих и других возможностей применение схемы (3.11) целесообразно лишь в случае, если есть уверенность в том, что повышение порядка аппроксимации позволит уменьшить количество узлов сетки и компенсировать повышение затрат машинного времени на определение u^{m+1} .

О разностных граничных условиях. Формулировка разностных граничных условий для уравнений Навье—Стокса в случае компактных схем может быть осуществлена так же, как и в случае обычных аппроксимаций. Эти условия, как правило, состоят из условий в бегающем потоке, условий в нижней по течению части потока, условий симметрии (если она существует) и условий на твердой поверхности.

Если в эти условия входят дискретизации производных, то для сохранения высокого порядка аппроксимации можно пользоваться трехточечными односторонними формулами типа формул (2.34) из гл. 1. Однако в этом не всегда существует необходимость. Например, при применении каких-либо экстраполяционных условий на нижней по течению границе расчетной области заведомо предполагается, что возможные возмущения от неточности этих условий слабо распространяются вверх по потоку. Поэтому в этом случае совершенно необязательно использовать формулы высокого порядка. Можно также понижать порядок аппроксимации граничных условий, считая, что в среднеквадратичной норме это не сильно скажется на точности решения. Такое понижение является вполне разумным также и тогда, когда в качестве одного из главных свойств схемы рассматривается не ее третий или четвертый порядок, а благоприятные качества получаемых решений.

При формулировке разностных граничных условий для давления (или плотности) на твердой поверхности, как хорошо известно, возникает некоторая неопределенность, связанная с отсутствием этого условия в математической постановке задачи. Здесь существуют различные возможности, которые обсуждены, например, в [2].

Помимо упомянутого условия в виде аппроксимации в граничных узлах уравнения импульса, не касательного к твердой стенке, возможны следующие варианты аппроксимации в этих узлах исходных уравнений или их следствий: аппроксимация уравнения неразрывности; аппроксимация проекции обеих частей векторного уравнения Навье—Стокса на направление одной из характеристик гиперболической части этих уравнений, проходящей на поверхность и не касательной к ней.

Наконец, существует возможность экстраполяции давления или плотности на поверхности по внутренним узлам расчетной области.

Вопрос о выборе одного из этих (или каких-либо иных условий), как и в случае других разностных схем для уравнений Навье—Стокса, остается открытым. Можно лишь отметить, что для тестовых стационарных задач (пограничные слои на пластине, взаимодействие ударной волны с пограничным слоем и т.д.) применение перечисленных условий приводит к близким результатам; исключение составляет экстраполяционное условие для давления, которое в некоторых случаях искажало установившиеся решения.

При использовании факторизованных схем вида (3.5), (3.7), (3.8) и (3.10) возникает вопрос о граничных условиях для промежуточных се-

точных функций, появляющихся при введении дробных шагов. Чтобы избежать потери аппроксимации в приграничных узлах, свойственной схемам этого типа (см., например, [41]), можно следовать принципам:

1. Если граничное условие задается уравнением, записанным в граничном узле, то его тоже следует расщеплять по пространственным направлениям. При этом в случае отсутствия членов, соответствующих какой-либо переменной, удобно сохранять структуру факторизованной схемы во внутренних узлах, полагая нулевым оператор, относящийся к этой переменной.

2. Если граничным условием является постоянный вектор (например, вектор, соответствующий параметрам набегающего потока), то граничные значения промежуточных величин являются нулевыми. Действительно, пусть факторизованная схема, записанная как схема дробных шагов, имеет вид

$$R_1 \tilde{\mathbf{u}}^{1/3} = \mathbf{f}, \quad R_2 \tilde{\mathbf{u}}^{2/3} = \tilde{\mathbf{u}}^{1/3}, \quad R_3 \tilde{\mathbf{u}}^1 = \tilde{\mathbf{u}}^{2/3}, \quad (3.12)$$

где R_j ($j = 1, 2, 3$) – обращаемые операторы, \mathbf{f} – известная сеточная функция, а $\tilde{\mathbf{u}}^1 = \mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m$. Обозначая индексом Γ значения на границе области, нетрудно усмотреть, что из равенства $\tilde{\mathbf{u}}_\Gamma^1 = 0$ и соотношений (3.12), рассматриваемых на границе, следуют равенства

$$\tilde{\mathbf{u}}_\Gamma^{2/3} = 0, \quad \tilde{\mathbf{u}}_\Gamma^{1/3} = 0.$$

3. Если граничные условия относятся к границе области, где производится экстраполяция по внутренним узлам (например, внизу по потоку), то ввиду приближенности таких условий можно формулировать экстраполяционные условия на этой границе и для промежуточных величин для каждого из дробных шагов.

О решении разностных уравнений. Системы разностных уравнений, возникающие как при вычислении правых частей схем (3.5), (3.7), (3.8), (3.11), так и при обращении одномерных операторов в их левых частях, с учетом граничных условий всегда можно представить в виде

$$A_j \mathbf{u}_{j-1} + B_j \mathbf{u}_j + C \mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{d}_j, \quad j = \overline{2, N-1},$$

$$\mathcal{P}_{11} \mathbf{u} + \mathcal{P}_{12} \mathbf{u}_2 = \mathbf{g}_1, \quad \mathcal{P}_{22} \mathbf{u}_{N-1} + \mathcal{P}_{22} \mathbf{u}_N = \mathbf{g}_2,$$

где $A, B, C, \mathcal{P}_{ij}$ ($i, j = 1, 2$) – матрицы размерности 5×5 , а индекс j соответствует какой-либо переменной при фиксированных остаточных индексах сеточных функций. Очевидный способ решения этой системы состоит в применении метода векторной прогонки при обращении матриц с размерностью 5×5 (в декартовой системе координат эта размерность может быть понижена до 3×3 , ввиду того что давление входит лишь в одну из компонент расщепленного уравнения импульсов, а остальные два уравнения при этом являются скалярными).

В некоторых случаях с целью уменьшения числа арифметических операций, производимых при решении системы (3.12), целесообразно заменить векторные прогонки скалярными на каждой итерации внутреннего итерационного процесса. Основная идея такой замены изложена выше и состоит в представлении обращаемого оператора в виде суммы операторов с диагональными матрицами и некоторой добавки.

3.2. Схемы с центрированными аппроксимациями

Применение симметризованных операторов. Для некоторых относительно простых задач о вязких течениях можно увеличить экономичность алгоритма, отказавшись от вычисления характеристических матриц M_ξ , M_η и M_ζ . Формальное обнуление их элементов приводит к компактным аппроксимациям четвертого порядка конвективных членов, рассмотренных выше.

Приведем вариант такой системы для двумерного случая нестационарной системы Навье–Стокса, записанной в слабоконсервативной форме:

$$\partial \mathbf{U} / \partial t + \partial \mathbf{F} / \partial \xi + \partial \mathbf{G} / \partial \eta + \mathbf{H} = 0, \quad (3.13)$$

ξ и η – криволинейные координаты, а векторные функции \mathbf{U} , \mathbf{F} , \mathbf{G} и \mathbf{H} зависят, как и в системе (3.1), от вектора независимых переменных, содержащего декартовы составляющие скорости. Чтобы отличить симметризованный алгоритм с $M_\xi = 0$ и $M_\eta = 0$ от приведенного в п.3.1, целесообразно ввести следующие обозначения операторов:

$$A_\xi = B_\xi |_{M_\xi=0} = A_\xi^0, \quad A_\eta = B_\eta |_{M_\eta=0} = A_\eta^0, \\ \Delta_\xi = C_\xi |_{M_\xi=0} = \Delta_\xi^0 / h_\xi, \quad \Delta_\eta = C_\eta |_{M_\eta=0} = \Delta_\eta^0 / h_\eta.$$

Используя операторы Λ_{ij} ($i, j = 1, 2$), определенные формулами (3.6), а также представления

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mu(\partial \mathbf{F}_1 / \partial \xi + \partial \mathbf{F}_2 / \partial \eta), \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + (\partial \mathbf{G}_1 / \partial \xi + \partial \mathbf{G}_2 / \partial \eta), \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mu(\partial \mathbf{H}_1 / \partial \xi + \partial \mathbf{H}_2 / \partial \eta), \quad S = \partial \mathbf{F}_1 / \partial u, \quad R = \partial \mathbf{G}_2 / \partial u,$$

факторизованную схему, алгоритмически являющуюся частным случаем схемы типа (3.7), можно представить в виде [64]

$$[A_\xi L + \tau \sigma(\Delta_\xi P + \tau \Lambda_{11} R)] L^{-1} [A_\eta L + \tau \sigma(\Delta_\eta Q + \Lambda_{22} S)] (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) / \tau = \\ = -\mathcal{L} \mathbf{u}^m, \quad (3.14) \\ \mathcal{L} \mathbf{u}^m = [A_\eta \Delta_\xi \mathbf{F}_0 + A_\xi \Delta_\eta \mathbf{G}_0 + A_\xi A_\eta \mathbf{H} + \mu A_\eta \Delta_\xi \mathbf{H}_1 + \mu A_\xi \Delta_\eta \mathbf{H}_2 + \\ + \mu A_\eta (\Lambda_{11} \mathbf{F}_1 + \Lambda_{12} \mathbf{F}_2) + \mu A_\xi (\Lambda_{21} \mathbf{G}_1 + \Lambda_{22} \mathbf{G}_2)]^m.$$

Схема (3.14), записанная на девятиточечном шаблоне, имеет погрешность пространственной дискретизации $O(h^4 + \mu h^2)$, где $h = \max(h_\xi, h_\eta)$. Для перехода от слоя $t = t_m$ к слою $t = t_{m+1}$ достаточно обратить два трехточечных матрично-разностных оператора: $R_\xi = A_\xi L + \tau \sigma(\Delta_\xi P + \Lambda_{11} R)$ и $R_\eta = A_\eta L + \tau \sigma(\Delta_\eta Q + \Lambda_{22} S)$; при этом правая часть в отличие от системы типа (3.5) вычисляется непосредственно без обращения каких-либо операторов путем суммирования по точкам шаблона. Записанная в виде алгоритма дробных шагов, схема (3.17) имеет вид

$$R_\xi \tilde{\mathbf{u}}^{1/2} = -\tau \mathcal{L} \mathbf{u}^m, \quad R_\eta \tilde{\mathbf{u}}^{1/2} = L \tilde{\mathbf{u}}^{1/2}, \quad \tilde{\mathbf{u}}^1 = \mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m.$$

Если не учитывать аппроксимации смешанных производных, то оценки ее устойчивости можно получить из общих результатов, изложенных в гл. 1, разд. 1. Практически устойчивый счет по схеме (3.14) может происходить при достаточно больших значениях числа Куранта $U\tau/h$, $U = \|\mathbf{u}\|$, если только схемные осцилляции не превосходят допустимого предела.

Использование искусственного диссипативного механизма. Расчеты по схеме (3.14), как правило, удается осуществить лишь при отсутствии значительных градиентов искомых решений. В частности, ее можно использовать при плавных изменениях контура твердых поверхностей и сравнительно небольших числах Рейнольдса (порядка нескольких сотен). При увеличении числа Рейнольдса или других ужесточениях режима течения отсутствие схемной диссипации не позволяет погасить неизбежно возникающие в процессе счета паразитные осцилляции решений, которые обычно приводят к невозможности дальнейших вычислений. Расширить область применимости центрированной схемы (3.14) можно путем введения дополнительного диссипативного механизма, который можно рассматривать как фильтр схемных осцилляций, длина волны которых сравнима с шагами сетки.

Существует много возможностей для построения сглаживающих фильтров. Одна из них, совместимая со схемой (3.1), состоит во введении в правую часть системы Навье—Стокса членов вида

$$\frac{\partial}{\partial \xi} k^{(\xi)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} k^{(\eta)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta}, \quad (3.15)$$

где коэффициенты искусственной вязкости $k^{(\xi)}$ и $k^{(\eta)}$ после их дискретизации имеют порядки $O(h^4)$ на гладких решениях исходных уравнений и более низкие порядки (вплоть до $O(1)$) при вычислении их по значениям осциллирующих компонент вектора \mathbf{u} [64]. Этим условиям удовлетворяют, в частности, сеточные функции $k^{(\xi)}$ и $k^{(\eta)}$ вида

$$k_f^{(\xi)} = c_\xi \left(\frac{\Delta_2^\xi f}{|\Delta_-^\xi f| + |\Delta_+^\xi f|} \right)^4, \quad k_f^{(\eta)} = c_\eta \left(\frac{\Delta_2^\eta f}{|\Delta_-^\eta f| + |\Delta_+^\eta f|} \right)^4, \quad (3.16a)$$

где индекс f у коэффициентов $k^{(\xi)}$ и $k^{(\eta)}$ означает, что эти коэффициенты вычислены по одной из компонент f вектора \mathbf{u} , c_ξ и c_η — некоторые компоненты. Для гладких функций f числители дробей в (3.16a) имеют порядок $O(h^2)$, а знаменатели — $O(h)$; таким образом, в этих случаях $k_f^{(\xi)} = O(h^4)$ и $k_f^{(\eta)} = O(h^4)$. Если же сеточная функция в окрестности какого-либо узла имеет пилообразную форму (например, меняется как $(-1)^p \epsilon$, где p — номер узла в направлении ξ), то одна или обе дроби в (3.16a) имеют порядок $O(1)$. В этом случае сильная диссипация, определяемая одним или двумя коэффициентами $k_f^{(\xi)}$ и $k_f^{(\eta)}$, стремится подавить коротковолновую составляющую решения.

Вычислив коэффициенты $k^{(\xi)}$ и $k^{(\eta)}$ по известным значениям \mathbf{u}^m , члены (3.15) можно рассматривать как добавки ко вторым производным в уравнениях Навье—Стокса. В схеме (3.14) их целесообразно использовать в виде неявных трехточечных аппроксимаций, поступая с ними так же, как с производными $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\mu \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \xi} \right)$ и $\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial \eta} \right)$. Таким образом, введение членов (3.15) несколько не усложняет процесс решения разностных уравнений. Если получаемое решение не содержит схемных осцилля-

ций, то коэффициенты $k^{(\xi)}$ и $k^{(\eta)}$ оказываются асимптотически малыми и слабо влияют на его точность.

Использование коэффициентов $k^{(\xi)}$ и $k^{(\eta)}$ в форме (3.16а) часто является весьма эффективным и позволяет существенно расширить диапазон решаемых задач. Однако в некоторых случаях сеточные функции (3.16а) могут стать быстроменяющимися (например, при переходе от областей с плавным характером изменения решений к областям со схемной немонотонностью). Это, в свою очередь, отрицательно сказывается на работоспособности алгоритма. Поэтому иногда целесообразно использовать более мягкие сглаживающие коэффициенты. Примером могут служить коэффициенты

$$k_f^{(\xi)} = \tilde{c}_\xi (\Delta_2^\xi f) |f|^{-1} h_\xi^2, \quad k_f^{(\eta)} = \tilde{c}_\eta (\Delta_2^\eta f) |f|^{-1} h_\eta^2, \quad (3.16б)$$

где \tilde{c}_ξ и \tilde{c}_η – некоторые константы, вообще говоря, отличные от c_ξ и c_η . Для гладких и пилообразных функций f коэффициенты $k_f^{(\xi)}$ и $k_f^{(\eta)}$ имеют порядки соответственно $O(h^4)$ и $O(h^2)$.

Существуют различные возможности выбора функции f , определяющей значения $k_f^{(\xi)}$ и $k_f^{(\eta)}$. Например, для каждого уравнения движения и энергии в качестве f можно выбирать свою функцию f ; можно обойтись единой функцией f , положив, например, $f = \rho$. Последний выбор основан на наблюдении, согласно которому при существовании схемной немонотонности последняя обычно особенно сильно проявляется в осцилляции плотности или давления.

Наконец, можно отказаться от выбора различных коэффициентов сглаживания для различных координат и использовать единый коэффициент k , аналогичный коэффициенту вязкости μ . При этом, в частности, для каждого узла можно положить

$$k = c \sqrt{\sum [(k_f^{(\xi)})^2 + (k_f^{(\eta)})^2]}, \quad (3.16в)$$

где суммирование проводится по всем функциям f , а c – некоторая константа.

При применении рассмотренных диссипативных механизмов всегда возникает вопрос о выборе констант c_ξ , c_η , \tilde{c}_ξ , \tilde{c}_η , c в формулах (3.16). Этот вопрос может решаться на основе следующих очевидных соображений: эти константы, с одной стороны, должны быть возможно меньшими, а с другой – обеспечивать лишь полное устранение схемных осцилляций либо их значительное ослабление, позволяющее вести устойчивый счет. Таким образом, надлежащий выбор констант требует проведения дополнительных методических расчетов, вообще говоря, для каждого класса решаемых задач. Кроме того, при помощи рассмотренных фильтров иногда вообще не удается получить решение, что, возможно, происходит вследствие несовершенства этих диссипативных механизмов. Все это снижает эффективность алгоритма (3.1), как, впрочем, и любого другого алгоритма, основанного на центрированных аппроксимациях.

3.3. Сравнение численных и известных решений. Тестовые задачи

Структура косо́го скачка уплотнения. При сквозном счете течений со скачками уплотнения большую роль играет реакция численных решений на быстрые изменения параметров потока в скачках, а также само описание этих скачков. В случае одномерных уравнений газовой динамики, а также модельного уравнения этот вопрос исследовался в гл. 1. Было выяснено, что при применении компактных аппроксимаций третьего порядка схемная немонотонность, если она и возникает, является быстро затухающей по мере удаления от фронта скачка. Интересно отметить, что эта немонотонность была заметной в решениях для модельного уравнения. Для уравнений газовой динамики ее проявление сводилось лишь к небольшим провалам кривой давления до и после скачка.

Аналогичные результаты получаются при применении алгоритмов, описанных выше. Простейшей тестовой задачей для них является задача о структуре косо́го скачка уплотнения. Граничные условия для нее можно сформулировать следующим образом: на левой границе AB и части верхней границы BC (рис. 2.9) фиксируются параметры набегающего потока с числом Маха $M_\infty = 2$; на части CD верхней границы параметры потока полагаются равными параметрам за косым скачком уплотнения с углом наклона в 23° , на правой и нижней границах формируются мягкие условия экстраполяционного типа.

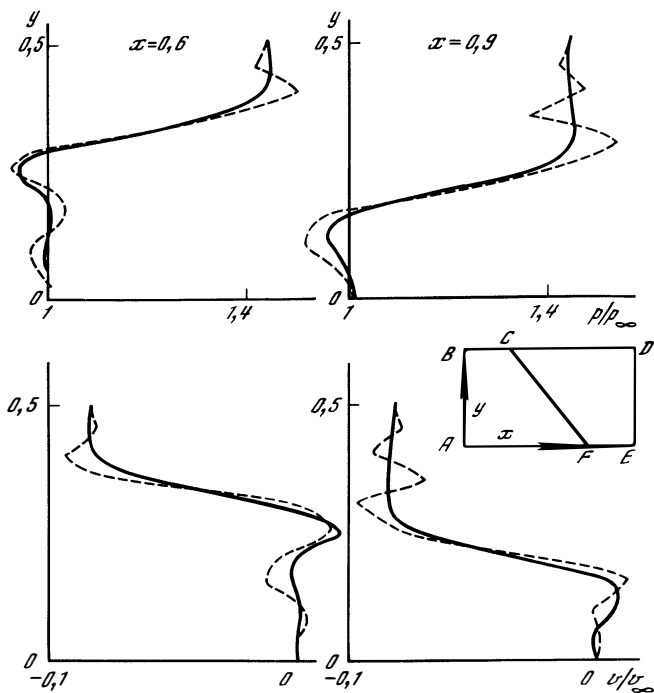
На рис. 2.9 приведены изменения давления $p(y)/p_\infty$ и скорости v/U_∞ поперек скачка, полученные при помощи алгоритмов (3.8) – сплошные кривые и (3.14) – штриховые кривые при $x = 0,6; 0,9$. Согласно рис. 2.9, в первом случае профили газодинамических параметров практически монотонны за исключением небольшого провала давления перед скачком. Для его уменьшения, особенно полезного при больших перепадах давления, когда соответствующее понижение плотности может стать нежелательным с точки зрения продолжения счета, целесообразен следующий проверенный на практике способ [67]. Сущность его состоит в том, что в нескольких узлах около скачка применяются видоизмененные операторы $B_\xi, C_\xi, B_\eta, C_\eta$:

$$B_\xi = A_0^\xi - 0,25 M_\xi \Delta_0^\xi, \quad C_\xi = 0,5 h_\xi^{-1} (\Delta_0^\xi - M_\xi \Delta_2^\xi),$$

$$B_\eta = A_0^\eta - 0,25 M_\eta \Delta_0^\eta, \quad C_\eta = 0,5 h_\eta^{-1} (\Delta_0^\eta - M_\eta \Delta_2^\eta).$$

Подобная операция, не меняя решения в целом, лишь несколько уменьшает величину провала давления.

Если алгоритмы с аппроксимациями третьего порядка позволяют вести устойчивый счет рассматриваемого течения независимо от числа Рейнольдса, то их аналоги с централизованными разностями (3.14) при числах $Re_\infty > 300$ требуют введения диссипативных механизмов. Методические расчеты показали, что приемлемые результаты получаются при использовании констант $c_\xi = c_\eta \approx 0,002$ в формуле (3.16а) и $\tilde{c}_\xi = \tilde{c}_\eta \approx 0,5$ в формуле (3.16б). Соответствующие им профили $u(y)$ и $p(y)$ в сечениях $x = 0,6$ и $x = 0,9$ представлены на рис. 2.10 (кривые 1, 2). Увеличение c_ξ и c_η в (3.1) без изменения сетки может исказить численные решения в тех частях расчетной области, где вторые разности в (3.16) велики (например, кри-



Р и с. 2.9

вые β на рис. 2.10, соответствующие значениям $c_\xi, c_\eta = 0,02$). К сожалению, в случае схем типа (3.14) даже успешный выбор констант сглаживания для одной задачи не всегда гарантирует хотя бы возможность получения численных решений для других задач.

Сравнения с точными решениями. Для оценки реальной точности рассматриваемых аппроксимаций целесообразно рассмотреть немногочисленные примеры, когда удается получить точные решения уравнений Навье—Стокса. Одним из таких случаев являются стационарные течения в плоском и расширяющемся каналах, для которых были найдены автомодельные решения [65]. Используя эти решения, можно, не осуществляя процесс установления при помощи приведенных выше факторизованных схем, вычислить значения в каждом узле стационарных частей этих схем. Полученные результаты и определяют погрешность их аппроксимации на стационарном решении для заданной сетки. В табл. 4–6 приведены среднеквадратичные нормы L_p, L_u, L_v, L_e вычисленных таким образом правых частей схемы (3.14), соответствующих уравнениям неразрывности, продольной и поперечной компонент импульса, а также энергии. В табл. 6 указаны значения чисел Рейнольдса Re_0 и Маха M_0 , определенных по параметрам на линии симметрии канала, а также показателя степени n в законе изменения вязкости вида μ^n , при этом число Прандтля и показатель адиабаты для приведенных результатов равны соответственно 0,71 и 1,4.

Как следует из табличных данных, полученных при различном числе узлов в расчетной области (сетка $6 \times 6, 11 \times 11, 21 \times 21$), сеточные функ-

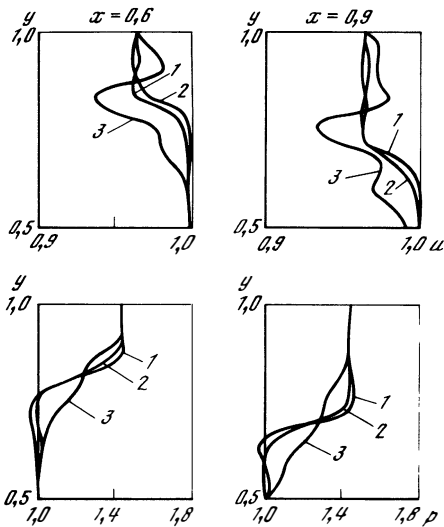


Рис. 2.10

ции оказываются весьма близкими к точным решениям. При этом невязки уравнения неразрывности уменьшаются приблизительно как четвертая степень шага, а невязки для остальных — как квадрат шага. Последнее обстоятельство объясняется сравнительно небольшими числами Re , при которых все течения являются вязкими. При больших числах Рейнольдса локальные погрешности $O(h^2)$ существовали бы лишь в узлах внутри пограничного слоя и среднеквадратичные невязки стремились бы к нулю быстрее, чем h^2 .

Таким образом, если для рассмотренных автомодельных случаев при использовании алгоритмов (3.14) процесс установления будет сходиться, то, удовлетво-

рившись невязками, приведенными в табл. 1 и 2, можно считать, что с этой точностью получены разностные решения, совпадающие с автомодельными (с точностью вычисления последних методом Рунге—Кутты с шагами, намного меньшими шагов разностных сеток для этих таблиц).

Другим подходящим решением для сравнения является решение Блазиуса для ламинарного пограничного слоя на плоской пластине, к которому при больших числах Рейнольдса должно быть асимптотически близко решение полных уравнений Навье—Стокса. На рис. 2.11 профили скорости и температуры T , найденные при расчете обтекания полубесконечной плоской пластины, представлены как функции автомодельной переменной $y[Re_x]^{1/2}/x$. Численное решение (кривые 1), полученное на сетке 35×17 со сгущением узлов к поверхности (передняя кромка пластины размещалась внутри расчетной области), неплохо согласуется с решением Блазиуса, заимствованным из [66] (кривые 2). Данные, приведенные на рис. 2.11, соответствуют числу Маха $Ma_\infty = 3$ и числу Рейнольдса, отнесенному к единице длины, $Re_\infty = 809$ (индекс ∞ здесь и далее означает, что величины вычислены по параметрам набегающего потока).

Небольшое отличие температуры T от ее значения T_∞ , отсутствующее в решении Блазиуса, легко объяснить присутствием слабого скачка уплотнения, возникающего при обтекании пластины (поправленной на толщину вытеснения пограничного слоя) и учитываемого при решении полных уравнений Навье—Стокса.

Взаимодействие ударной волны с пограничным слоем. Некоторым усложнением задачи в пограничном слое на пластине является введение при помощи граничных условий косога скачка уплотнения, падающего на пограничный слой и вызывающего отрыв потока. Хотя точное решение этой задачи неизвестно, тем не менее последняя может рассматриваться

Т а б л и ц а 4

Невязка (плоский канал)	Сетка	
	11 × 11	21 × 21
ε_ρ	$0,157 \cdot 10^{-4}$	$0,145 \cdot 10^{-5}$
ε_u	$0,816 \cdot 10^{-3}$	$0,209 \cdot 10^{-3}$
ε_v	$0,360 \cdot 10^{-3}$	$0,914 \cdot 10^{-4}$
ε_e	$0,377 \cdot 10^{-2}$	$0,962 \cdot 10^{-3}$

Т а б л и ц а 5

Невязка (расширяющийся канал)	Сетка		
	6 × 6	11 × 11	21 × 21
ε_u	$0,228 \cdot 10^{-3}$	$0,617 \cdot 10^{-4}$	$0,163 \cdot 10^{-4}$
ε_v	$0,221 \cdot 10^{-3}$	$0,561 \cdot 10^{-4}$	$0,144 \cdot 10^{-4}$
ε_e	$0,167 \cdot 10^{-2}$	$0,714 \cdot 10^{-3}$	$0,246 \cdot 10^{-3}$

Т а б л и ц а 6

Ссылка на таблицу	Pr	Re ₀	M ₀	γ	n
4	0,71	5	1	1,4	0,76
5	0,71	100	3	1,4	1,0

в качестве тестовой ввиду наличия для нее экспериментальных данных и большого количества расчетных результатов.

Для численного счета задача может быть сформулирована аналогично задаче о косом скачке с тем лишь различием, что на части $A'E$ нижней границы AE размещается поверхность пластины, а на участке AA' этой границы фиксируются условия симметрии (рис. 2.12). Для сравнения с экспериментом целесообразно использовать следующие параметры набегающего потока: число Маха $M_\infty = 2$, угол наклона скачка к пластине $\alpha = 32,6^\circ$, число Рейнольдса, вычисленное по параметрам невозмущенного течения и расстоянию от передней кромки пластины до точки пересечения ее поверхности и линии скачка $Re_\infty = 2,96 \cdot 10^5$.

После установления численного решения в расчетной области оказываются сформировавшимися скачок, пограничный слой, а также область их взаимодействия с зоной возвратного течения. Следует, однако, иметь в виду, что понятие скачков в численном решении имеет условный смысл и означает, что зона ударного перехода в поперечном направлении размазана на несколько ячеек сетки. Если не сгущать узлы в области скачка, то может оказаться, что его толщина сравнима с толщиной пограничного слоя.

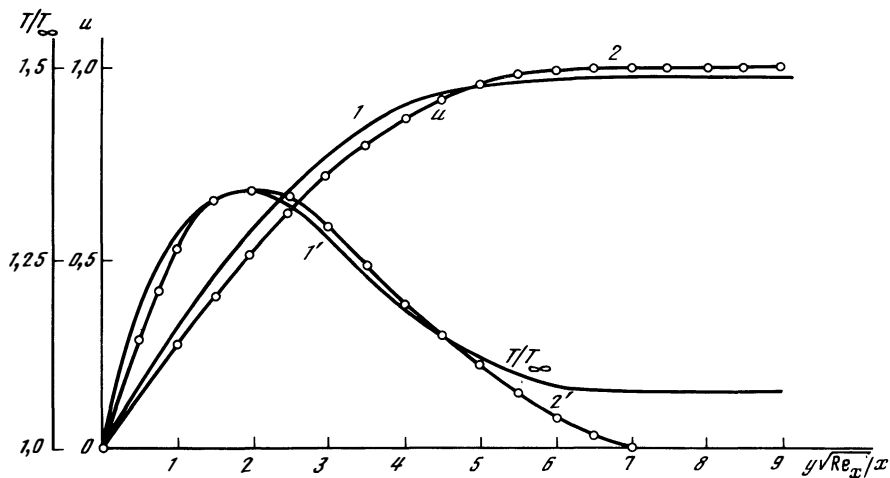


Рис. 2.11

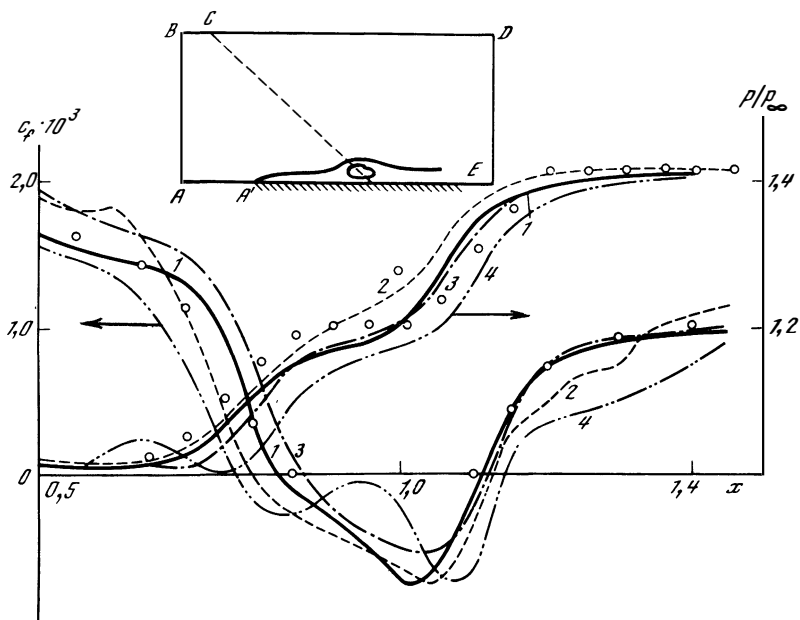


Рис. 2.12

Здесь и в дальнейшем будет иметься в виду именно такая имитация скачка без достаточно точного описания его действительной структуры; в случае необходимости ее можно было бы получить, применяя, например, описанное выше автоматическое сгущение узлов сетки.

На рис. 2.12 представлены распределения давления p_w/p_∞ и коэффициента трения $c_f = 2\tau_w/\rho u_\infty^2$, где $\tau_w = \tau_{xy}|_{y=0}$, а индекс w здесь и далее отмечает значения на поверхности. Расчетные данные, полученные на сетке

32 × 39 при помощи алгоритма (3.8) [67], соответствуют кривой 1; кривая 2 отражает результаты расчетов на сетке, проведенные при помощи централизованной схемы (3.14) [64]. Следует отметить, что в последнем случае в качестве вектора искомым функций рассматривался вектор $(\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T$, поскольку использование вектора $(\rho, u, v, e)^T$ вызвало определенные трудности при получении решений для указанного выше числа Рейнольдса. Кривые 3 и 4 на рис. 2.12 представляют расчетные данные из публикаций [68, 69], а кружочками отмечены экспериментальные результаты [70]. В целом можно говорить об удовлетворительном согласии всех данных, приведенных на рис. 2.12, а некоторое их отличие друг от друга может быть объяснено, в частности, различием использованных сеток, расчетных областей и аппроксимаций.

4. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМОВ РАСЩЕПЛЕНИЯ С КОМПАКТНЫМИ АППРОКСИМАЦИЯМИ

Основная цель приводимых ниже результатов состоит в иллюстрации основных черт решений, получаемых при помощи рассмотренных выше схем. С этой точки зрения методически более обоснованными являются решения двумерных задач, поскольку они требуют существенно меньших ресурсов ЭВМ и позволяют произвести многочисленные тестовые расчеты. В классе задач внешнего обтекания наиболее жесткие требования к алгоритмам предъявляют задачи об отрывных течениях. При их решении часто бывают неэффективными различные упрощенные формы исходных уравнений, весьма полезные для расчета безотрывных течений.

Другой характерный класс задач, всегда привлекавший внимание вычислителей, образуют задачи о внутренних течениях. Если исследование таких течений на основе уравнений Эйлера, как правило, не представляет особого труда, то применение уравнений динамики вязкого газа иногда может вызвать определенные трудности, преодоление которых также может стать критерием эффективности применяемых численных алгоритмов.

Не имея возможности описать все результаты проведенных расчетов, а также провести углубленный аэродинамический анализ полученных данных, ограничимся далее несколькими примерами решений задач указанных классов.

4.1. Задачи внешнего обтекания. Отрывные течения

Методические вопросы. При проведении расчетов [64, 67] использовались схемы (3.7), (3.8) и (3.14) для случая двух пространственных криволинейных координат ξ, η . В качестве зависимых переменных выбирались компоненты вектора $u = \{\rho, u, v, e\}^T$, матрицы S_ξ и S_η , а также диагональные матрицы собственных значений приведены в [67].

На контуре обтекаемого тела, который соответствует линии $\eta = 0$, для определения плотности использовались среди прочих следующие условия.

1. Условие, вытекающее из уравнения неразрывности при $\eta = 0$:

$$J^{-1} \partial \rho_w / \partial t + \rho W_\eta \partial W_\eta / \partial \eta |_{\eta=0} = 0, \quad W_\eta = vx_\xi - uy_\xi, \quad (4.1)$$

имеющее вид

$$(J_w^{-1} + \tau \delta_w^\eta W_\eta)(\rho_w^{m+1} - \rho_w^m) = -\tau \rho_w^m \delta_w^\eta W_\eta, \quad (4.2)$$

где δ_w^η – оператор численного дифференцирования по внутренним углам области, а индекс w отмечает значения на поверхности.

2. Условие для третьей компоненты вектора $z_\eta = S_\eta^{-1} \mathbf{u}$, соответствующей собственному значению $\lambda_3^\eta = -a_\eta < 0$, т.е. характеристике одномерной системы $L \partial u / \partial t + Q \partial u / \partial \eta = 0$, приходящей на поверхность. В дифференциальном виде это условие при $\eta = 0$ можно представить следующим образом:

$$J_w^{-1} \partial z_3^{(\eta)} / \partial t - \partial a_\xi z_3^{(\eta)} / \partial \xi + \partial (W_\eta - a_\eta) z_3^{(\eta)} / \partial \eta = f, \quad (4.3)$$

где f – известная функция.

Соответствующая разностная аппроксимация может быть записана в факторизованном виде

$$\begin{aligned} & \left[A_-^\xi J_w^{-1} - \frac{\tau}{h_\xi} \Delta_+^\xi a_\xi \right] J_w [J_w^{-1} + \tau \delta_w^\eta (W_\eta - a_\eta)] (\rho_w^{m+1} - \rho_w^m) = \\ & = \frac{\tau}{h_\xi} \Delta_+^\xi + a_\xi \rho_w^m - \tau A_-^\xi \delta_w^\eta \left[(W_\eta - a_\eta) \left(\rho - \frac{\gamma \rho W_\eta}{2 a_\eta} \right) \right] + A_-^\xi f, \end{aligned} \quad (4.4)$$

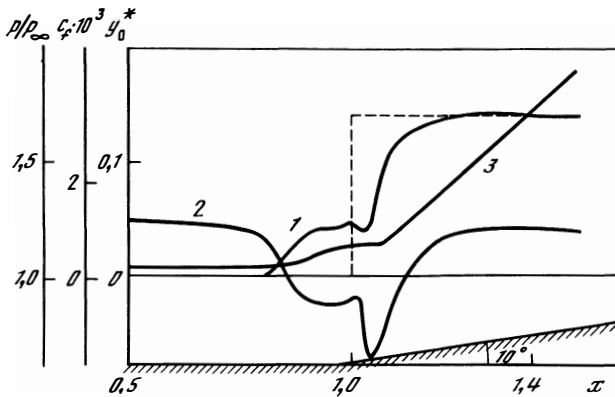
где все величины рассматриваются при $\eta = 0$.

В качестве оператора δ_w^η можно выбрать тот или иной оператор компактного численного дифференцирования. Во многих случаях вполне приемлемой является трехточечная односторонняя аппроксимация второго порядка.

Обтекание тел с изломами образующих. Такие задачи рассматривались в работах, посвященных численному решению полных уравнений Навье–Стокса (см., например, [71, 72]). Основные проблемы, которые возникают уже при исследовании этих элементарных течений, состоят в том, что центрированные схемы при увеличении числа Рейнольдса могут приводить к большим схемным осцилляциям, а схемы с односторонними двухточечными разностями могут оказываться слишком грубыми. Конечно, принятие определенных мер может расширить диапазоны использования таких схем, однако здесь большую роль начинает играть искусство вычислителя. Возможности стандартизации при этом уменьшаются.

Применение рассмотренных выше алгоритмов всегда позволяло получить решение, не искаженные схемной немонотонностью, в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

На рис. 2.13 приведены распределения параметров течения вдоль поверхности угла сжатия. Задача решалась в два этапа [67]. Сначала рассчитывалось обтекание полубесконечной пластины при числе Маха $M_\infty = 2$, числе Рейнольдса на единицу длины $Re_\infty = 4,2 \cdot 10^5$, числе Прандтля $Pr = 0,72$ и температуре поверхности $T_w = 1,68 T_\infty$. Затем моделировалось обтекание расположенного на этой пластине клина с углом $\theta = 10^\circ$ и передней кромкой в точке $x = 1$. На сетке с числом узлов 40×30 стационарное решение достигалось за 50 шагов, причем основные затраты машинного



Р и с. 2.13

времени приходились на развитие отрывного течения перед клином. На рис. 2.13 через c_f (кривая 2) и y_0^* (кривая 3) обозначены соответственно коэффициент трения и сумма толщин вытеснения δ^* пограничного слоя и координаты y_0 соответствующего сечения клина; кривая 1 соответствует давлению p/p_∞ . Пунктиром на рис. 2.13 отмечено распределение давления в случае невязкого обтекания эквивалентного угла сжатия с косым скачком уплотнения. По изменению величины c_f на рис. 2.13 можно судить о наличии весьма протяженной зоны возвратно-циркуляционного течения ($c_f < 0$).

Отрывы потока при вдуве через поверхность [67]. Хорошо известно, что вдув и отсос газа через поверхность обтекаемого тела могут сильно влиять на картину течения. Например, в рассмотренном случае падения косоугольного скачка уплотнения на ламинарный пограничный слой размеры зоны возвратных течений могут существенно изменяться, если в зоне взаимодействия производить отсос. Для моделирования этой ситуации на участке поверхности пластины, ограниченном значениями координаты $x = 0,8725$ и $x = 1,0625$, фиксировалось значение вертикальной составляющей скорости v_j . Распределения давления и коэффициента трения для значений $v_j = -0,001$ и $v_j = -0,003$ представлены кривыми 2 и 3 на рис. 2.14а, б (кривые 1 соответствуют $v_j = 0$). Как видно из графиков, размеры отрывной зоны при $v_j = -0,001$ заметно меньше, чем без отсоса, а при $v_j = -0,003$ течение вовсе становится безотрывным.

На рис. 2.14, а, б приведены также расчетные данные для вдува через тот же участок поверхности при удельных импульсах вдуваемого газа, равных $0,001 \rho_\infty u_\infty$ и $0,003 \rho_\infty u_\infty$ (плотность этого газа предполагается равной плотности в области плато давления). Полученные в этих расчетах распределения давления и коэффициента трения отмечены на рис. 2.14 цифрами 4 и 5. Согласно рис. 2.14, вдув даже небольшого количества газа сильно увеличивает протяженность срывной зоны, которая может состоять из двух областей возвратных течений. Иллюстрацией влияния отсоса и вдува на геометрию отрыва служит рис. 2.15, где представлены картины линий

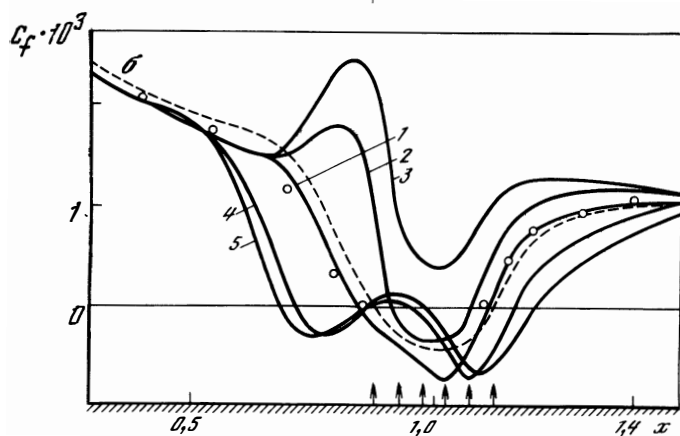
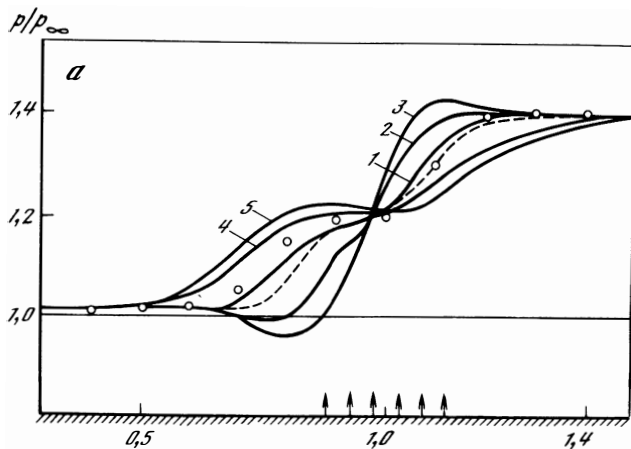


Рис. 2.14

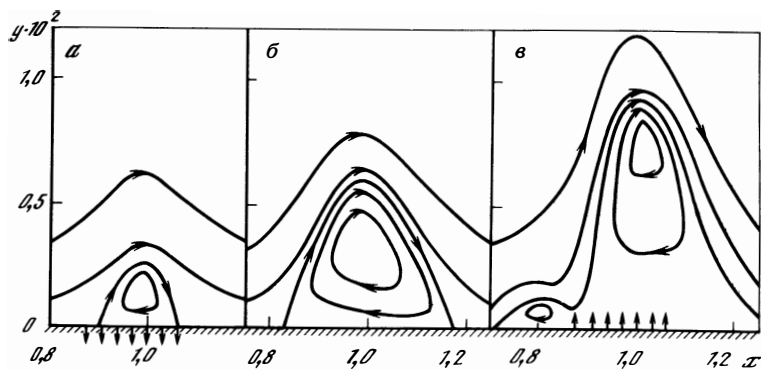


Рис. 2.15

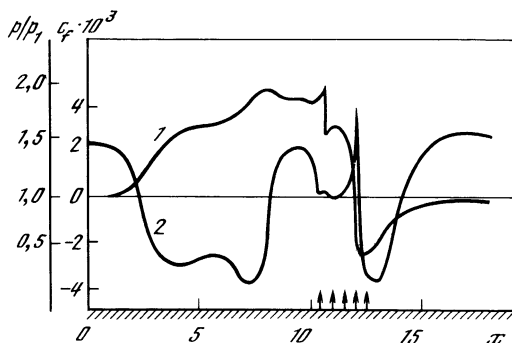


Рис. 2.16

тока для трех случаев: *a* – отсос при значении $v_j = -0,001$, *б* – непроницаемая поверхность, *в* – вдув газа с удельным импульсом $0,001 \rho_\infty u_\infty$.

Другим примером возникновения отрыва при подводе газа через поверхность обтекаемого тела может служить течение в окрестности щелевого отверстия, через которое осуществляется вдув в обтекающий тело поток. Результаты одного из расчетов для случая плоской пластины приведены на рис. 2.16.

На левой границе *AB* расчетной области (рис. 2.12) задавались условия, соответствующие сверхзвуковому ламинарному течению на плоской пластине при числе Маха $M_\infty = 3$ и числе Рейнольдса, вычисленном по параметрам набегающего потока и толщине пограничного слоя, $Re_\infty = 3 \cdot 10^3$. Скорость вдува через отверстие с шириной, равной толщине пограничного слоя δ , полагалась равной звуковой, а остальные параметры потока в отверстии при $y = 0$ определялись по одномерной теории из условия того, что вдуваемый газ подается из резервуара с давлением p_j ; отношение p_j/p_∞ (нерасчетность) полагалось равным 1,06.

На рис. 2.16 представлено распределение давления p_w/p_∞ (кривая 1) и коэффициента трения c_f (кривая 2) вдоль пластины. По отрицательным значениям c_f можно судить о наличии отрыва в протяженной области перед струей и небольшой области за струей. Как следует из рис. 2.16, скачкообразные изменения давления и трения вдоль поверхности не сопровождаются заметной схемной немонотонностью.

Другим характерным примером течений рассматриваемого класса является формирование отрывного течения около струйного препятствия. Для этого случая задача решалась в той же постановке, что и при обтекании угла сжатия; разница состояла лишь в том, что при $x \geq 1$ вместо клина предполагалось наличие вдува через поверхность с параметрами $\rho_j = 1$, $u_j = -0,03$, $v_j = 0,17 \approx \sin 10^\circ$, $T_j = T_\infty$. Результаты расчетов представлены на рис. 2.17 и имеют те же обозначения, что и расчетные данные для угла сжатия на рис. 2.13. Значения y_0^* для одних и тех же значений координат x в обоих случаях удивительно близки между собой: отклонение внешнего, невязкого потока около препятствия (струйного или твердого) происходит на один и тот же угол $\theta \approx 10^\circ$. Для этих течений характерным

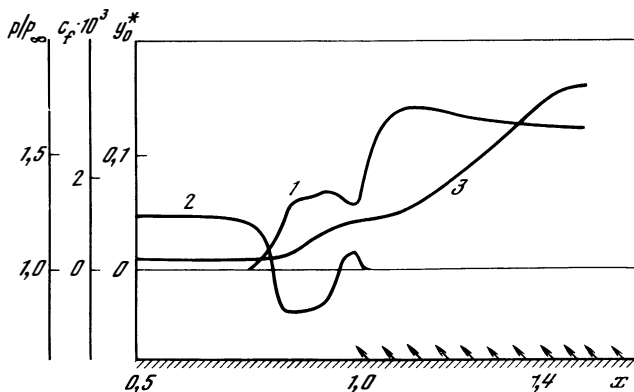


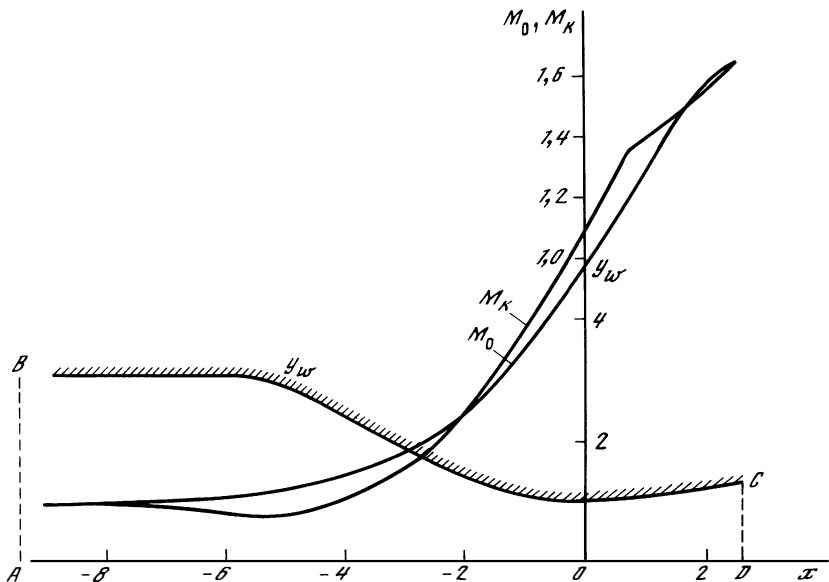
Рис. 2.17

является наличие протяженных зон возвратно-циркуляционного течения. В обоих случаях отрыв потока происходит в точке, где давление приблизительно равно $1,08 p_\infty$, однако для струйного препятствия давление в области плато выше [67].

4.2. Задачи о внутренних течениях

Методические вопросы. Расчет течений вязкого сжимаемого газа в каналах и соплах на первый взгляд может показаться более простым, чем расчет внешнего обтекания, вследствие ограниченности расчетной области, по крайней мере в поперечном направлении, твердыми стенками. Однако замена части вычислительных границ естественными сопровождается усложнением формулировки граничных условий на входе и выходе из области течения. Это связано с тем, что обычно рассматриваемая область является лишь фрагментом более обширной области, в которой происходит движение газа. Последняя может включать в себя, например, зону вне сопла, прилегающую к его срезу, или область сверху по потоку от сечения, где задаются граничные условия.

Формулировка граничных условий для численного решения задачи существенно зависит от типа рассматриваемого внутреннего течения. Если поток на входе в расчетную область является сверхзвуковым, то его параметры можно рассматривать как граничные условия на входной границе области. В противном случае существует распространение возмущений вверх по потоку и простая фиксация параметров на этой границе оказывается некорректной. При дозвуковом потоке на входе (например, в случае сопла Лавалья) приемлемой является следующая постановка граничных условий на границе AB (рис. 2.18). Считаются заданными расход и энтальпия газа, равные их значениям в начальный момент времени процесса установления, а величины продольной скорости и плотности ρ и давления p определяются в процессе счета. На выходе (границе CD) обычно можно использовать те или иные экстраполяционные условия, подобно тому как это делается в задачах внешнего обтекания (в некоторых случаях, однако, по смыслу задачи может оказаться необходимым зафиксировать давление p). Обоснованием для выбора в качестве разностных



Р и с. 2.18

граничных условий на выходе экстраполяционных формул может служить часто выполняющееся условие того, что длина канала намного превышает его ширину; в этом случае можно ожидать, что неточности в описании на выходе из сопла не исказят решение в остальной его части.

Для численного моделирования течений в плоских и осесимметричных каналах удобно использовать единую форму записи уравнений в цилиндрической и декартовой системах координат. Кроме того, для преобразования области в прямоугольную целесообразно вместо декартовых (или цилиндрических) координат x и y (ось x направлена вдоль оси канала) ввести новые координаты $\xi = x$ и $\eta = y/y_w(x)$, где $y_w(x)$ — расстояние от плоскости или оси симметрии до твердой поверхности. Сохраняя декартовы составляющие скоростей u и v вдоль осей x и y , исходную систему можно представить в виде

$$\partial U/\partial t + \partial F/\partial \xi + \partial G/\partial \eta + \mathbf{H} = (1/\text{Re}) \mathbf{T}, \quad (4.5)$$

где \mathbf{U} , \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} , \mathbf{T} — четырехкомпонентные векторы, вид которых приведен в [73] вместе с соответствующими матрицами Якоби и их преобразованиями к диагональному виду. Следует иметь в виду, что для сгущения узлов сетки около поверхности нужно еще одно преобразование координат $\xi_1 = \xi$, $\eta_1 = f(\eta)$, которое следует учесть при использовании матриц S_η и Λ_η . Приводимые ниже расчетные данные получены при использовании простейшего фиксированного заранее преобразования координаты вида

$$\eta_1 = 1 - \frac{\ln(1 + \alpha(1 - \eta))}{\ln(1 + \alpha)},$$

где параметр $\alpha > 0$ регулирует распределение узлов. Для получения ста-

ционных решений в качестве алгоритма установления использовалась схема (3.7) с операторами $B_{\xi}^{-1} \Lambda_{\xi\xi}$ и $B_{\eta}^{-1} \Lambda_{\eta\eta}$, аппроксимирующими вторые производные, и центрированными аппроксимациями второго порядка смешанных производных. При небольших числах Рейнольдса применялась также схема (3.14) с аппроксимациями четвертого порядка. В последнем случае вводились вторые производные по ξ и η коэффициентами искусственной вязкости вида

$$\mu^{\xi} = c_{\xi} \frac{\Delta_{\xi}^2 p}{(2E + T_{-1}^{\xi} + T_1^{\xi})p} \left(\frac{\Delta_{\xi}^2 p}{|\Delta_{-}^{\xi} p| + |\Delta_{+}^{\xi} p|} \right)^2,$$

$$\mu^{\eta} = c_{\eta} \frac{\Delta_{\eta}^2 p}{(2E + T_{-1}^{\eta} + T_1^{\eta})p} \left(\frac{\Delta_{\eta}^2 p}{|\Delta_{-}^{\eta} p| + |\Delta_{+}^{\eta} p|} \right)^2,$$

имеющими порядок $O(h^4)$ на гладких решениях исходной системы.

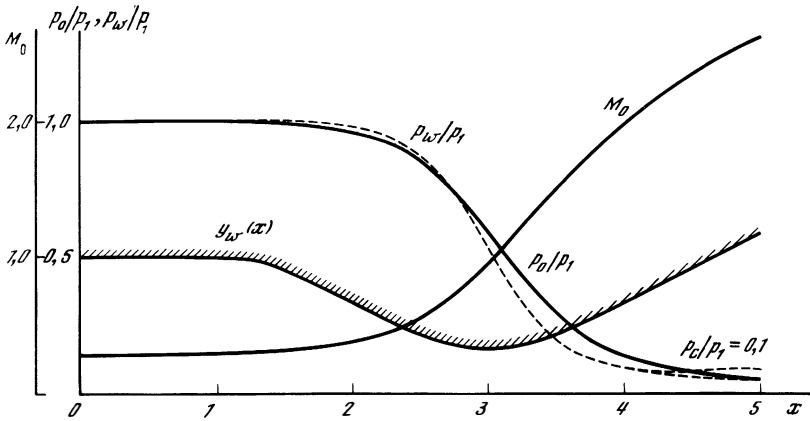
Такой алгоритм применяется лишь для уравнений Эйлера, а также уравнений Навье–Стокса при небольших числах Рейнольдса. При увеличении чисел Рейнольдса, несмотря на сглаживание, часто оказывается затруднительным получить установившееся решение вследствие катастрофически нарастающих схемных осцилляций. Тогда использовалась более сложная, но в то же время более эффективная схема (3.7).

Течение в сопле Лаваля, описываемое уравнениями Эйлера. В случае невязкого течения применение компактных схем является особенно простым: достаточно положить $\mu = 0$ и вместо условий прилипания на стенках использовать условия непротекания. В криволинейной системе координат такое условие при применении векторных прогонок является частью векторного граничного условия и не нарушает единообразия алгоритма. В качестве остальных составляющих этого граничного условия могут быть использованы уравнения для плотностей ρ , продольной скорости u и энтальпии h , аппроксимированные в граничных узлах расчетной области.

Ввиду дозвукового характера течения на входе в сопло граничные условия на левой границе не должны быть фиксированными заранее функциями. Как уже отмечалось, приемлемым вариантом является фиксация расхода и энтальпии и определение функций $u(\eta)$, $\rho(\eta)$, $p(\eta)$ в процессе счета.

На рис. 2.18 приведен контур $u_w(x)$ осесимметричного сопла Лаваля и полученные для него расчетные данные в виде зависимостей от координаты x чисел Маха на оси $M_0(x)$ и на контуре $M_w(x)$ [73]. Используемая равномерная сетка 51×18 обеспечивала сохранение расхода с точностью до 0,2%. Как следует из рис. 2.18, в дозвуковой части сопла газ у стенки тормозится, что находится в соответствии с результатами исследований течений с дозвуковыми скоростями [74]. В минимальном сечении сопла $M_0 = 0,97$, $M_w = 1,08$. В расширяющейся части сопла в окрестности точки сопряжения контура $u_w(x)$ в виде окрестности и прямой алгоритм "улавливает" такой тонкий эффект, как излом в распределении $M_w(x)$. В конце линейного участка этот излом проявляется и в распределении $M_0(x)$.

Представленные на рис. 2.18 данные получены при помощи алгоритма (3.14) с описанным выше искусственным диссипативным механизмом.



Р и с. 2.19

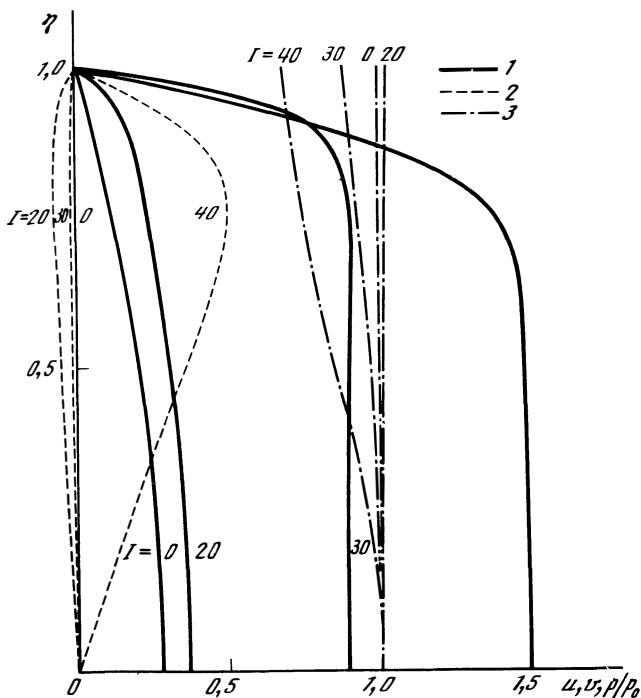
Течение вязкого газа в сопле Лавала, описываемое уравнениями Навье—Стокса. В качестве примера численных решений полных уравнений Навье—Стокса на рис. 2.19 представлены результаты расчетов для плоского сопла Лавала, контур которого изображен на рис. 2.18, в случае двухатомного газа ($\gamma = 1,4$) со степенной зависимостью вязкости от температуры ($\mu \sim T^n$, $n = 0,76$).

Алгоритмически переход от невязкого течения к вязкому состоял в замене описанных выше условий на стенке условиями прилипания и заданной температуры поверхности, а также в учете во внутренних узлах членов, содержащих коэффициент вязкости μ .

Для сравнительно небольших значений числа Рейнольдса, вычисленного по параметрам потока на входе и минимальному поперечному размеру сопла ($Re = 2500$), вполне приемлемой оказывается центрированная схема (3.14) с диссипативным механизмом (3.16). Данные, приведенные на рис. 2.19, — распределения давления на оси p_0/p_1 , на стенке p_w/p_1 (p_1 — давление в сечении на входе), а также число Маха на оси M_0 — получены на сетке 51×18 , равномерной по ξ и меняющей сгущение узлов около стенки для двух типов граничных условий на срезе сопла: экстраполяционных для функций ρ , u , v , h и для p , u , v при заданном давлении p_0 на срезе ($p_0/p_1 = 0,1$). Распределения $M_0(x)$ в обоих случаях практически совпадают.

На рис. 2.20 показаны профили $u(\eta)$ (кривые 1), $v(\eta)$ (кривые 2) и $p/p_0(\eta)$ (кривые 3) в сечениях сопла, отмеченных значением номера узла I ($x = I h \xi$), характеризующие структуру течения. Профиль $u(\eta)$ в минимальном сечении сопла является наиболее наполненным, причем около стенки имеется область, где скорость u превышает свое значение на оси. Можно отметить заметные перепады давления в поперечном направлении в сверхзвуковой области течения, доходящие до 30%. Сохранение расхода газа с точностью до 0,1% характеризует достаточно высокую точность расчетов.

Сверхзвуковые течения в канале постоянной ширины. Еще одним примером применения компактных схем для численного решения уравнений



Р и с. 2.20

Навье—Стокса, описывающих внутренние стационарные течения вязкого газа, являются результаты расчетов сверхзвукового потока газа, попадающего в плоский канал постоянной ширины (рис. 2.21). В качестве граничных условий на входе использовались значения параметров течения в сверхзвуковом ядре и их распределение в условиях пограничного слоя. На выходе канала использовались экстраполяционные условия с заданным давлением p_0 на срезе.

На рис. 2.21 приведены зависимости от координаты x числа Маха на оси M_0 и отношения p/p_1 при $\eta = 1; 0,64$ и 0 (соответственно кривые 1, 2, 3), полученные при значениях числа Маха на входе $M_1 = 2$, числе $Re = 1000$ и противодавлении $p_0/p_1 = 2$.

Представленные на рис. 2.21 данные иллюстрируют достаточно сложную картину течения. В начальной части канала реализуется как бы течение с косым скачком уплотнения, исходящим из передней кромки и обусловленным начальным пограничным слоем. Далее вниз по потоку возникает периодическая картина изменения газодинамических величин, связанная с отражением и взаимодействием скачков. Вследствие падения скачков на пограничный слой в окрестности сечения $x = 2$ на стенке возникает отрыв потока; на оси канала течение всюду является сверхзвуковым.

Отметим, что характер течения в плоском канале при сверхзвуковых условиях на входе, полученный в результате расчетов, близок результатам экспериментального исследования [75] ($M_1 = 1,62$, $Re \sim 10^6$).

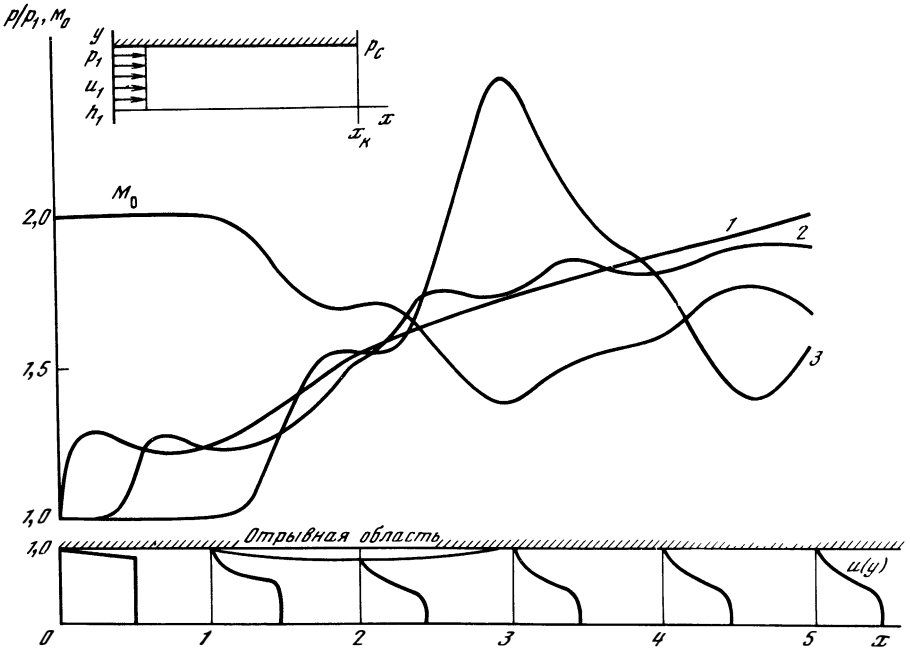


Рис. 2.21

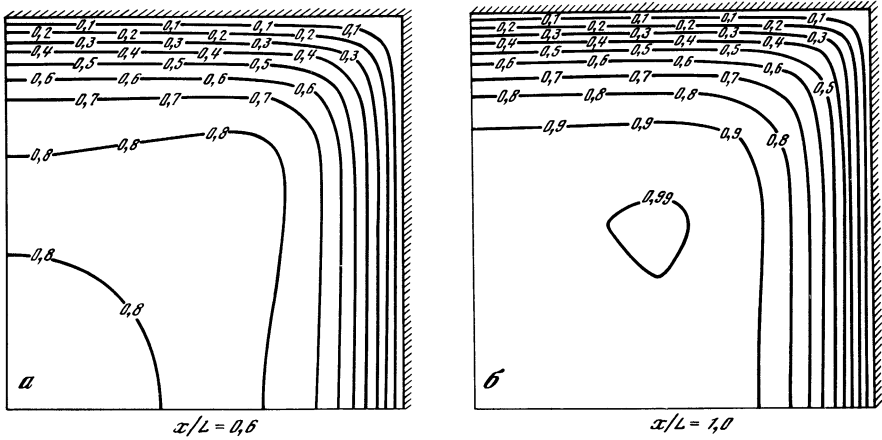


Рис. 2.22

Течение в канале прямоугольного сечения. Простейшим примером пространственных внутренних течений является течение в канале прямоугольного сечения, в который втекает равномерный поток вязкого газа. На рис. 2.22 представлены результаты расчетов для трубы, сечение которой имеет форму квадрата. Поскольку в этом случае существуют две плоскости симметрии, задачу можно решать в одной четверти объема

трубы; при этом на двух граничных плоскостях использовались условия прилипания и охлаждения $T_w = T_\infty$, а на двух других – условия симметрии (рис. 2.22). На входном участке поток предполагается дозвуковым; числа Прандтля и Рейнольдса, вычисленные по параметрам невозмущенного течения и длине трубы L , полагались равными 0,72 и 200 соответственно.

Для этих параметров задачи использовался алгоритм типа (3.14). На рис. 2.22 приведены изолинии числа Маха M в нескольких сечениях $x/L = \text{const}$ (сторона квадратного сечения полагалась равной $0,25 L$). Звуковой поток, втекающий в трубу, начинает тормозиться; его скорость падает, а давление возрастает. С увеличением толщины пограничного слоя основное ядро потока движется в условиях, аналогичных условиям сужающегося дозвукового сопла. На выходе из трубы скорость потока достигает звуковой, что хорошо видно на рис. 2.22, б, где приведены изолинии числа Маха M в сечении $x/L = 1$.

5. ПРИМЕНЕНИЕ КОМПАКТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ В УПРОЩЕННЫХ УРАВНЕНИЯХ НАВЬ–СТОКСА

5.1. Маршевые алгоритмы для стационарных задач

Об упрощении уравнений Навье–Стокса. При решении стационарных задач эллиптический характер уравнений Навье–Стокса, а также большой объем вычислений, связанный с присутствием в них тензора вязких напряжений (особенно значительный в криволинейной системе координат в пространственном случае), заставляют искать пути использования более простых уравнений, описывающих основные характерные черты течений. Как уже отмечалось, одна из возможностей упрощения состоит в наличии преимущественного направления распространения возмущений. Таким свойством обладает целый ряд течений при достаточно больших числах Рейнольдса: например, в ударном слое за отошедшей ударной волной, около удлиненных тел, в каналах и соплах при сверхзвуковых скоростях ядра потока и т.д.

По-видимому, одним из первых опытов упрощения уравнений Навье–Стокса является применение системы, содержащей все члены уравнений Эйлера, пограничного слоя, а также ряд других членов из полной системы, для исследования вязкого течения между телом и отошедшей ударной волной [56]. В настоящее время существует большое число публикаций, посвященных этому вопросу, обзор которых не является целью этой книги.

Основа упрощения системы (1.9) состоит в пренебрежении теми или иными механизмами распространения возмущений вверх по потоку при наличии преимущественного направления. Это позволяет не учитывать (или частично учитывать) зависимость решения в какой-либо части рассматриваемой области от параметров внизу по течению от этой области.

Поскольку такими механизмами являются передача информации вверх по потоку посредством давления и посредством вязкости, то упрощенные уравнения Навье–Стокса можно классифицировать в зависимости от того, оба ли эти механизма не учитываются или лишь второй из них.

В последнем случае в уравнениях Навье–Стокса достаточно сохранить лишь те члены с вязкостью, которые не содержат дифференцирования

по продольной координате. Поскольку при этом сохраняется возможность распространения возмущений против потока, обусловленная градиентами давления, получившиеся уравнения условно можно назвать частично параболизированными. Физическая обоснованность упрощения системы Навье—Стокса зависит от разумного выбора системы координат, в чем существует известный произвол; другой произвол состоит в возможности выбора тех членов в компонентах тензора напряжений, которые можно оставить, не нарушая параболических свойств уравнений.

Для исключения первого из упомянутых механизмов, существующего в тех областях, где поток является дозвуковым, необходимы те или иные упрощения невязкой части уравнений Навье—Стокса. Примером таких полностью параболизированных уравнений могут служить уравнения тонкого ударного слоя и в простейшем случае — уравнения пограничного слоя.

Упрощенные уравнения можно рассматривать как некоторые модельные уравнения, не являющиеся универсальными, вид которых должен мотивироваться спецификой конкретного класса задач. Область их применимости оказывается достаточно ограниченной; в частности, она не включает в себя такой важный вид течений, как отрывные течения с протяженными зонами возвратных потоков. Это, однако, не исключает возможности их широкого использования для решения многих практических задач.

При численном моделировании течений вязкого газа основная выгода от применения упрощенных уравнений Навье—Стокса состоит в использовании так называемых маршевых алгоритмов, в которых координата вдоль преимущественного направления (пусть это будет координата ξ) может рассматриваться как аналог переменной t в уравнениях для нестационарных течений. Если уравнения полностью параболизированы, то для решения задачи достаточно осуществить единственный проход расчетной области, переходя от слоя $\xi = \xi_{i-1}$ к слою $\xi = \xi_0$ на сетке ω_n , храня в памяти лишь предыдущий слой (или несколько предыдущих слоев). В случае частично параболизированных уравнений такой проход является лишь одной итерацией некоторого итерационного процесса, подобно тому как это происходило в случае алгоритма для полных уравнений Навье—Стокса, описанного в разд. 2 этой главы. Однако в отличие от последнего случая при этом необходимо хранить в памяти ЭВМ не все параметры потока в расчетной области, а лишь давление. Повышению экономичности маршевых методов способствует также меньшее количество членов в исходных уравнениях.

С точки зрения применения компактных аппроксимаций наиболее простыми являются полностью параболизированные уравнения Навье—Стокса, в которых отсутствует связь между отдельными уравнениями, обусловленная членами с давлением. Тогда каждое из них можно рассматривать как скалярное уравнение переноса, для которого операторы при дискретизации производных в поперечных направлениях строятся с учетом знаков соответствующих коэффициентов при этих производных.

Более интересным является случай, частично параболизированных уравнений, содержащих все члены уравнений Эйлера. Простейшим вариантом при этом являются сами уравнения Эйлера, описывающие течение невязкого газа, сверхзвуковое в продольном направлении области сверхзвуковых течений.

Маршевые алгоритмы: области сверхзвуковых течений. В качестве одного из характерных примеров использования компактных аппроксимаций в маршевых алгоритмах рассмотрим сначала внутреннее стационарное сверхзвуковое течение невязкого газа. Пусть уравнения Эйлера, например для двумерного случая, представлены в виде

$$\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})/\partial \xi + \partial \mathbf{G}(\mathbf{u})/\partial \eta + \mathbf{H}(\mathbf{u}) = 0, \quad (5.1)$$

где $\mathbf{u} = (\rho, u, v, h)^T$, а матрицы $P = \partial \mathbf{F}/\partial \mathbf{u}$ и $Q = \partial \mathbf{G}/\partial \mathbf{u}$ определены выше. Если скорость u превосходит скорость звука, то матрица $P^{-1}Q$ имеет действительные собственные значения.

Полагая, что маршевым направлением является направление координаты ξ , и используя диагонализацию матрицы $P^{-1}Q$ вида

$$P^{-1}Q = \bar{S}_\eta \bar{\Lambda}_\eta \bar{S}_\eta^{-1}, \quad \bar{\Lambda}_\eta = \text{diag} \{ \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \bar{\lambda}_4 \},$$

можно построить операторы B_η и C_η компактных аппроксимаций в направлении η :

$$B_\eta = A_0^\eta - 0,25 \Delta_0^\eta \bar{M}_\eta, \quad C_\eta = 0,5 h_\eta^{-1} (\Delta_0^\eta - \Delta_-^\eta (T_{1/2} M_\eta) \Delta_+^\eta),$$

где

$$\bar{M}_\eta = (P \bar{S}_\eta) \bar{D}_\eta (P \bar{S}_\eta)^{-1}, \quad \text{а } \bar{D}_\eta = \text{diag} \{ \text{sgn } \bar{\lambda}_i \}.$$

Для системы координат, в которых записаны уравнения (5.1), собственные значения $\bar{\lambda}_i$ ($i = 1, 4$) и матрица \bar{S}_η имеют вид [73]

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 &= \frac{v - y'_w}{y_w u}, \quad \bar{\lambda}_3 = \frac{uv - aR}{y_w (u^2 - a^2)} - \frac{y'_w}{y_w} \eta, \\ \bar{\lambda}_4 &= \frac{uv - aR}{y_w (u^2 - a^2)} - \frac{y'_w}{y_w} \eta, \\ \bar{S}_\eta &= \left\| \begin{array}{cccc} 0 & -(\gamma - 1) \frac{\rho}{a^2} & \frac{\rho (uR + av)}{a (u^2 - a^2)} & 1 \\ u & 0 & -\frac{aR + uv}{u^2 - a^2} & -\frac{a (uv - aR)}{\rho (av - uR)} \\ v & 0 & 1 & \frac{a (u^2 - a^2)}{\rho (av - uR)} \\ 0 & 1 & \frac{a (av + uR)}{u^2 - a^2} & \frac{a^2}{\rho^2} \end{array} \right\|, \quad (5.2) \end{aligned}$$

где $R = \sqrt{u^2 + v^2 - a^2}$, а $a = \sqrt{(\gamma - 1)h}$ – скорость звука. С использованием операторов B_η и C_η безытерационный маршевый алгоритм для системы (5.1) может быть записан в виде

$$B_\eta P (\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i)/h_\xi + C_\eta [\sigma \mathbf{G}_{i+1} + (1 - \sigma) \mathbf{G}_{i-1}] + B_\eta [\sigma \mathbf{H}_i + (1 - \sigma) \mathbf{H}_i] = 0, \quad (5.3)$$

где $\sigma \geq 0,5$ – весовой множитель.

Погрешность его имеет вид $O((\sigma - 0,5)h_\xi + h_\xi^2 + h_\eta^3)$; в случае постоянных матриц он является абсолютно устойчивым при $\sigma \geq 0,5$. Переход

от слоя $\xi = \xi_{i-1}$ к слою $\xi = \xi_i$ после линеаризации функций \mathbf{G} и \mathbf{H} можно осуществить, выполнив трехточечную векторную прогонку с матрицами 4×4 . Используя в качестве основы схему (5.3), можно сконструировать итерационный маршевый алгоритм для частично параболизированных уравнений Навье–Стокса, описывающих сверхзвуковые течения вязкого газа при достаточно больших числах Рейнольдса. В сверхзвуковой части потока, где матрица $P^{-1}Q$ имеет действительные собственные значения, схема (5.3) легко обобщается на уравнения

$$\partial \mathbf{F} / \partial \xi + \partial \mathbf{G} / \partial \eta + \mathbf{H} = \mathbf{T} / \text{Re}, \quad (5.4)$$

где вектор \mathbf{T} не содержит вторых производных ξ и смешанных производных. Такое обобщение представляется в виде

$$\begin{aligned} B_\eta P (\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i) / h_\xi + C_\eta [\sigma \mathbf{G}_i + (1 - \sigma) \mathbf{G}_{i-1}] + B_\eta [\sigma \mathbf{H}_i + (1 - \sigma) \mathbf{H}_{i-1}] = \\ = [\sigma \mathbf{T}_i + (1 - \sigma) \mathbf{T}_{i-1}] / \text{Re}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где компоненты вектора \mathbf{T}_i в узле $\xi = \xi_i$ содержат те или иные аппроксимации вторых производных по η и остальных членов.

Маршевые алгоритмы: дозвуковые потоки. В случае дозвуковых стационарных течений система уравнений Эйлера приобретает эллиптические свойства, что связано с наличием мнимых собственных значений матрицы $P^{-1}Q$. При этом простой здравый смысл подсказывает, что при положительных скоростях u алгоритм должен использовать такую аппроксимацию производных $\partial p / \partial x$ (в сечении $x = x_i$), которая включала бы значения p на линиях $x = x_j$, $j > i$, в этом случае будет учитываться передача информации вверх по потоку при помощи второго из упомянутых выше механизмов. Чтобы алгоритм оставался маршевым, эти значения естественно предполагать вычисленными в процессе предыдущей итерации некоторого итерационного процесса. Обозначая их чертой, можно записать несколько таких аппроксимаций, выделив среди них следующие:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \xi} \right|_{x=x_i} \approx \frac{\bar{p}_{i+1} - p_i}{h_\xi}, \quad (5.6a)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \xi} \right|_{x=x_i} = \frac{\bar{p}_{i+1} - \bar{p}_i}{h_\xi} - \frac{p_i - p_{i-1}}{h_\xi}, \quad (5.6b)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \xi} \right|_{x=x_i} = \frac{\bar{p}_{i+1} - p_{i-1}}{2h_\xi}. \quad (5.6в)$$

Для фиксированной итерации каждой из этих аппроксимаций можно поставить в соответствие систему дифференциальных уравнений вида

$$P_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} + Q \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} + \mathbf{H} = \mathbf{f}, \quad (5.7)$$

где \mathbf{f} — вектор правой части, в который входят значения p , отмеченные чертой.

Матрица P_1 отличается от матрицы P тем, что в случае (5.6a) и (5.6b) ее элемент, соответствующий члену с давлением в x -компоненте уравнения импульсов, будет иметь противоположный знак, а в случае (5.6в) этот элемент будет нулевым.

Во всех случаях собственные значения матрицы $P_1^{-1}Q$ будут действительными. Например, для декартовой системы координат x, y они равны соответственно

$$\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = v/u, \quad \bar{\lambda}_{3,4} = \frac{\gamma \bar{u} \bar{v} \mp \sqrt{(\gamma - 1)^2 \bar{u}^2 \bar{v}^2 + (2\gamma - 1) \bar{u}^2 + 1 - \bar{v}^2}}{1 + (2\gamma - 1) \bar{u}^2}$$

для аппроксимаций (5.5а) и (5.5б),

$$\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = v/u, \quad \bar{\lambda}_{3,4} = [(\gamma + 1) \bar{u} \bar{v} \mp \sqrt{(\gamma - 1)^2 \bar{u}^2 \bar{v}^2 + 4\gamma u^2}]/2\gamma u^2$$

для аппроксимаций (5.5в). Здесь $\bar{u} = u/[(\gamma - 1)h]$, $\bar{v} = v/[(\gamma - 1)h]$ — числа Маха для u и v компонент скорости.

Ввиду корректности для системы (5.7) задачи Коши с начальными данными при $\xi = \text{const}$ для ее решения при фиксированной сеточной функции \bar{p} можно использовать маршевый алгоритм.

Применение компактных аппроксимаций, построенных на основе диагонализации матрицы $K_1 = P_1^{-1}Q$ вида

$$P_1^{-1}Q = S_1^{-1} \Lambda_1 S_1, \quad \Lambda_1 = \text{diag} \{ \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \bar{\lambda}_4 \},$$

приводит к следующей схеме для уравнений Эйлера (5.1):

$$(P_1 + \sigma h_\xi \bar{B}_\eta^{-1} \bar{C}_\eta Q)(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1})/h_\xi + \bar{B}_\eta^{-1} \bar{C}_\eta \mathbf{G}_i - \frac{1}{h_\xi} R \mathbf{u}_{i-1} + \mathbf{H}_i = \mathbf{g}_i, \quad (5.8)$$

где матрица R в случае аппроксимации (5.6б) имеет в качестве ненулевых элементов лишь те, которые соответствуют членам с давлением в уравнении для ξ -компоненты импульса, и в случаях аппроксимаций (5.6а) и (5.6в) $R \equiv 0$; в правую часть \mathbf{g}_i схемы (5.8) входят значения давления, считающиеся известными из предыдущей итерации.

Операторы B_η и \bar{C}_η в (5.8) построены при помощи матрицы $M_1 = P_1 S_1 \Lambda_1 (P_1 S_1)^{-1}$; формально положив ее равной нулю, алгоритмически просто перейти к аппроксимациям четвертого порядка вида $(A_\eta^0)^{-1} \Delta_\eta^0$ производных $(\partial/\partial \eta)$. В случае сходимости итераций схема (5.8) аппроксимирует систему Эйлера (5.1), поэтому при практическом ее использовании остаются лишь два вопроса: устойчив ли (хотя бы условно) маршевый алгоритм как эволюционная задача с "времяобразной" переменной ξ и сходятся ли на самом деле итерации.

На первый вопрос немедленно следует утвердительный ответ в случаях (5.6а) и (5.6в), когда $R \equiv 0$, и схема (5.8) ничем не отличается от уже рассмотренных. Случай (5.6б) требует более сложного анализа, учитывающего конкретный вид матрицы R . Применение спектрального метода для модельной задачи Коши после элементарных выкладок приводит к собственным значениям оператора перехода от слоя $x = x_{i-1}$ к слою $x = x_i$, не превосходящим по модулю единицы, по крайней мере если $v \ll u$, что обычно и имеет место, когда поперечные размеры области течения являются намного меньшими, чем продольные.

Вопрос о сходимости итераций является более сложным. Анализ Фурье для области с продольным размером X и поперечным Y в случае модельной задачи с постоянными коэффициентами и нулевыми граничными условиями наводит на мысль о том, что рассматриваемые итерационные процессы

сходятся для определенного типа потоков и расчетных областей. Чтобы проиллюстрировать это, полезно рассмотреть относительно простой случай декартовой системы координат и центрированной аппроксимации производных по y .

Выражения для коэффициента μ усиления гармоник при переходе к следующей итерации после вычисления соответствующих определителей можно записать в виде

$$\mu = \begin{cases} \mu_1 = e^{-i\alpha} k_1 / (k_1 + k_2) \text{ в случае (5.6а),} \\ \mu_2 = 2i \sin \alpha k_1 / (k_1 \psi + k_2) \text{ в случае (5.6б).} \\ \mu_3 = i \sin \alpha k_1 / k_2 \text{ в случае (5.6в),} \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= \psi + \gamma u^2 \psi + \gamma \bar{u} \bar{v} \varphi, & k_2 &= \gamma \bar{u}^2 \psi^2 - (1 - \bar{v}^2) \varphi^2 + (\gamma + 1) \bar{u} \bar{v} \varphi \psi, \\ \psi &= 1 - \exp(-i\alpha), & \varphi &= i(h_x/h_y) (\sin \beta / 4 \cos \beta), \\ \alpha &= (2\pi h_x/X) l_1, & \beta &= (2\pi h_y/Y) l_2, & l_1 &= 1, 2, \dots, X/h_x, & l_2 &= 1, 2, \dots, Y/h_y, \\ X &= Mh_x, & Y &= Nh_y. \end{aligned}$$

Ограничиваясь для простейших оценок случаем низкочастотных гармоник ($l_1 = l_2 = 1$), нетрудно усмотреть, что

$$\varphi \sim i(2\pi h_x/Y), \quad \psi \sim i(2\pi h_x/X). \quad (5.9)$$

Кроме того, полезно заметить, что маршевые алгоритмы обычно применяются в ситуациях, когда для дозвуковой части потока выполняются неравенства $Y \ll X$ и $\bar{v} \ll \bar{u} < 1$. Именно так происходит в пристеночной области течения. Тогда выражения для k_1 и k_2 упрощаются и приобретают вид

$$k_1 = \psi (1 + (\gamma - 1) \bar{u}^2), \quad k_2 = \gamma \bar{u}^2 \psi^2 + |\varphi|^2, \quad (5.10)$$

так что

$$|\mu_1| = \frac{1 + (\gamma - 1) \bar{u}^2}{|1 + (\gamma - 1) \bar{u}^2 + \gamma \bar{u}^2 \psi + |\varphi|^2 / \psi|}.$$

В этом равенстве два последних слагаемых в знаменателе в силу (5.9) являются чисто мнимыми и $|\mu_1| < 1$.

В случае (5.6б) при сделанных предположениях $|\mu_2| < 1$, поскольку $|\varphi| \gg |\psi|$. Аналогичное заключение можно сделать об условиях выполнения неравенства $|\mu_3| < 1$.

Приведенные элементарные оценки являются лишь необходимыми, однако уже они показывают, что сходимость итераций сильно обусловлена спецификой класса рассматриваемых течений. При конструировании алгоритмов для частично параболизированных уравнений Навье—Стокса следует учитывать наличие в расчетной области зоны дозвукового потока, который неизбежно существует около твердой поверхности. При сверхзвуковом течении на некотором расстоянии от стенки дозвуковая зона скорей всего является частью пограничного слоя, поэтому ее относительные поперечные размеры и скорости малы (порядка $O(\text{Re}^{-1/2})$). Это позволяет надеяться на сходимость итераций.

Обобщая схему (5.8) для уравнений Эйлера на случай упрощенных уравнений Навье–Стокса, достаточно к последней добавить аппроксимацию членов с вязкостью, записав ее по аналогии с (5.5) в виде

$$\begin{aligned} & \bar{B}_\eta P_1 (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1})/h_\xi + \bar{C}_\eta [\sigma \mathbf{G}_i + (1 - \sigma) \mathbf{G}_{i-1}] + \bar{B}_\eta [\sigma \tilde{\mathbf{H}}_i + (1 - \sigma) \tilde{\mathbf{H}}_{i-1}] = \\ & = \frac{1}{\text{Re}} [\sigma \mathbf{T}_i + (1 - \sigma) \mathbf{T}_{i-1}] + \frac{1}{h_\xi} \bar{B}_\eta R \mathbf{u}_{i-1} + \mathbf{g}_i. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Теперь общий алгоритм для расчета сверхзвуковых течений вязкого газа на основе упрощенных уравнений Навье–Стокса можно сформулировать следующим образом: в той части расчетной области, где поток сверхзвуковой и $\bar{u} > 1 + \epsilon$, $\epsilon > 0$, в каждом узле на линии $\xi = \xi_i$ используется аппроксимация (5.5), а в остальной же ее части – аппроксимация (5.11). Переключение схемы с (5.5) на (5.11) не вызывает никаких алгоритмических трудностей: достаточно лишь по-другому вычислить элементы матриц при реализации прогонки. На практике оказалось, что вполне приемлемым упрощением, не ухудшающим качество решений, является применение центрированных операторов \bar{B}_η и \bar{C}_η , в которых $M_1 \equiv 0$. Это особенно существенно в случае дискретизации производных $\partial p / \partial \xi$ вида (5.6в), когда при $\eta \rightarrow 0$ $\mu_{3,4} \rightarrow \infty$.

5.2. Примеры расчетов

Сверхзвуковое невязкое течение в сопле. Полезной проверкой метода является расчет сверхзвукового стационарного течения невязкого газа в профилированном сопле [73], для которого имеются достаточно надежные данные, полученные методом характеристик [76]. Контур этого сопла $y_w(x)$, представленный на рис. 2.23, является решением обратной задачи при заданном распределении числа Маха на разгонном участке $M_0(x)$ и предположении о том, что в критическом сечении имеет место однородное течение газа с числом $M = 1,01$ (штриховая кривая соответствует характеристическому ромбу). Разгонный участок включает в себя коническую часть с углом полураствора в 12° . Зависимости $M_0(x)$ и $M_w(x)$, где M_w – число Маха на стенке, полученные при помощи схемы (5.3), на рис. 2.23 представлены точками вместе с результатами решения обратной задачи методом характеристик (сплошные кривые). Из рис. 2.23 следует, что имеет место практически полное совпадение этих численных данных.

Сверхзвуковое течение вязкого газа в профилированном сопле. Примерами применения маршевого алгоритма, включающего схемы (5.5) и (5.11), являются расчеты течения вязкого газа в пространственном осесимметричном сверхзвуковом сопле [73], которое экспериментально исследовано в [77]. Контуры этого сопла $y_w(x)$ были получены в [77] в результате решения обратной задачи методом характеристик, исходя из требования, чтобы число Маха M однородного ядра потока в выходном сечении сопла равнялось бы 6. При этом полученный таким образом идеальный контур сопла $y(x)$ подправлялся на толщину вытеснения пограничного слоя $\delta^*(x)$, т.е. $y_w(x) = y(x) + \delta^*(x)$. Контур сопла $y_w(x)$, представленный на рис. 2.24, получен при следующих параметрах рабочего газа (воздуха): давление и температура торможения $p_0 = 5000$ Па, $T_0 =$

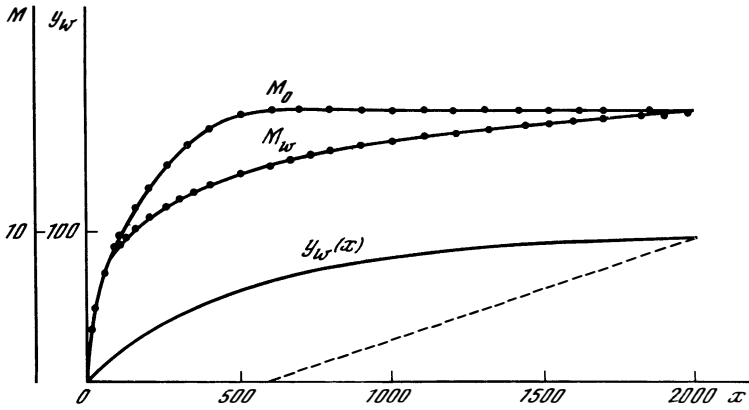


Рис. 2.23

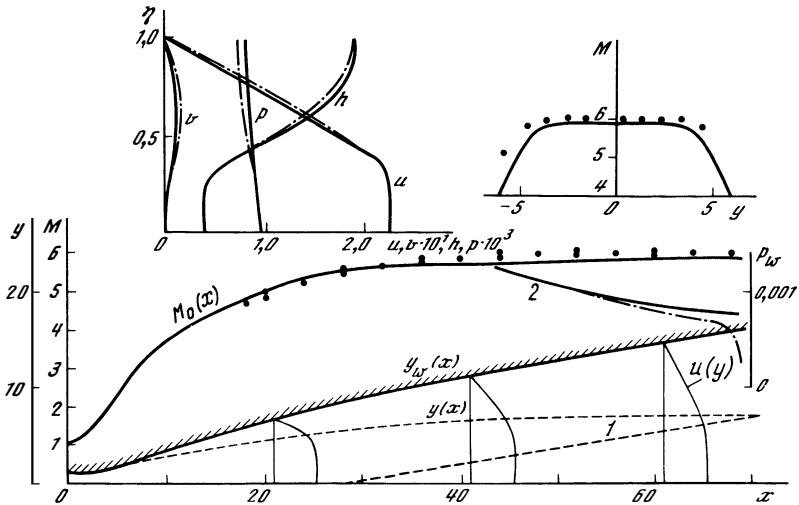


Рис. 2.24

= 450 K, температура стенки $T_w = 290$ K; число Рейнольдса, вычисленное по начальному радиусу сопла и параметрам на входе, $Re = 1098$. Прямая 1 соответствует характеристическому ромбу при решении обратной задачи.

Принималось, что в критическом сечении сопла пограничный слой отсутствует, а поток с числом Маха 1,01 является однородным. Для коэффициента вязкости μ использовался степенной закон $\mu \sim T^{0,76}$. Оказалось, что в случае мягкого условия для давления на выходе из сопла (линейная экстраполяция) для получения решения достаточно было выполнить всего лишь две итерации. В качестве начального приближения в области $M < 1 + \epsilon$, $\epsilon = 0,1$, использовались значения давления, удовлетворяющие условию $(y_w y^v p)_{i+1,j} - (y_w y^v p)_{i,j} = 0$.

На рис. 2.24 приведены полученные в результате решения прямой задачи распределения числа Маха вдоль оси ($M_0(x)$) и в поперечном сечении сопла $x/y_w(0) = 60,8(M(y))$ вместе с данными эксперимента [77] (на рисунке обозначены точками). На рис. 2.24 представлены также функции $u(\eta)$, $v(\eta)$, $h(\eta)$, $p(\eta)$ в сечении $x/y_w(0) = 64,85$, характеризующие структуру течения и указывающие на существование практически однородного сверхзвукового ядра потока. Для иллюстрации изменения размеров этого ядра по длине сопла на рис. 2.24 приведены профили продольной скорости $u(y)$ в различных сечениях $x = \text{const}$.

Из результатов решения прямой задачи следует любопытный вывод: приближенная методика учета вязкости при проектировании сопла в виде добавления толщины вычисления к идеальному контуру [77] в рассматриваемом случае приводит к хорошему совпадению с расчетными данными, полученными при решении уравнений Навье—Стокса, несмотря на большие поперечные размеры пограничного слоя, сравнимые с размерами невязкого ядра потока.

Расчеты течения в сопле с контуром $y_w(x)$ проводились также для заданного давления p_c на выходе, составлявшего менее половины того значения, которое было получено с использованием мягкого граничного условия. В этом случае для сходимости требовалось порядка десяти итераций. На рис. 2.24 приведены распределения давления вдоль стенки $p_w(x)$ в концевой части сопла (кривые 2) при использовании на срезе сопла мягких граничных условий (сплошная линия) и условия $p(y) = p_0 = 0,3 \cdot 10^{-3}$ (штрихпунктирная линия). Те же условные обозначения приняты для соответствующих зависимостей газодинамических параметров от η .

Из рис. 2.24 следует, что в рассматриваемом случае передача возмущений вверх по потоку, несмотря на толстый пограничный слой, осуществляется лишь в пристеночной области, практически не затрагивая однородное ядро потока.

Глава 3

КОМПАКТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧАХ О ТЕЧЕНИЯХ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Применение компактных разностных схем при решении уравнений несжимаемой жидкости технически оказывается значительно более простым, чем в случае течений вязкого газа. Это объясняется тем, что стандартные подходы к построению численных алгоритмов для задач гидродинамики обычно допускают трактовку уравнений импульса как скалярных уравнений относительно скорости или завихренности. Вместе с тем иногда становится желательным одновременное решение уравнений движения, например, при их записи в криволинейной системе координат.

Первый опыт применения компактных аппроксимаций в задачах несжимаемой жидкости был связан с использованием центрированных фор-

мул, обеспечивающих четвертый порядок точности дискретизации первых производных [30–34]. Такие методики получили различные названия в соответствии с тем, каким способом были выведены эти формулы, являющиеся, вообще говоря, частным случаем формул (4.11) из гл. 1.

В дальнейшем речь будет идти в основном о нецентрированных аппроксимациях третьего порядка; это нисколько не нарушит общности описания компактных схем, поскольку алгоритмически центрированные схемы можно получить простым обнулением сеточной функции – переключателю, определяющего ”ориентацию” нецентрированных схем. При этом соответствующие операторы из положительных становятся неотрицательными, что в случае их применения в неявных алгоритмах не изменяет выводов об устойчивости этих алгоритмов в приближении замороженных коэффициентов.

Можно отметить также, что, поскольку компактные аппроксимации являются лишь способом дискретизации пространственных производных, они пригодны для построения самых различных алгоритмов перехода от одного момента времени к другому или от предыдущей итерации к последующей. В дальнейшем будут рассматриваться неявные вычислительные циклы, основанные на приближенной факторизации операторов; на практике они оказались достаточно универсальными и устойчивыми способами получения численных решений.

В разд. 1 вместе с основными уравнениями однородной несжимаемой жидкости рассматриваются алгоритмы для переменных вихрь–функция потока. Методам, основанным на уравнениях для переменных скорости–давления посвящен разд. 2. Внимание в нем уделяется и маршевым алгоритмам расчета стационарных течений.

Приближенные модели несжимаемой жидкости рассматриваются в разд. 3. Здесь обсуждаются вопросы применения компактных аппроксимаций для численного моделирования течений стратифицированных сред, описываемых уравнениями Буссинеска, а также турбулентных течений. В качестве примера применения компактных схем в нетрадиционных задачах несжимаемой жидкости приводится алгоритм для расчета эволюции спектров поверхностного волнения в водоемах, вызванной приповерхностными течениями.

Поскольку основное внимание в гл. 3 уделяется алгоритмическому аспекту задач несжимаемой жидкости, а не результатам их решений, приводимые примеры расчетов немногочисленны и, имея модельный характер, не сопровождаются детальным гидродинамическим анализом.

1. ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА. АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВИХРЯ И ФУНКЦИИ ТОКА

1.1. О численном моделировании течений несжимаемой жидкости

Уравнения и граничные условия. Понимая под несжимаемой жидкостью жидкость с постоянной плотностью, можно выпписать уравнения ее движения, формально положив $\rho = \text{const}$ в системе Навье–Стокса сжимаемого газа и считая давление независимым от плотности. Если предположить еще, что коэффициент вязкости μ является постоянным, то

уравнения неразрывности и импульсов становятся независимыми от уравнения энергии и в декартовой системе координат (x^1, x^2, x^3) могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (u^\alpha) = 0,$$

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(u^i u^\alpha + \frac{P}{\rho} \delta^{i\alpha} - \nu \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \right) = 0, \quad (1.1)$$

где u^i ($i = \overline{1, 3}$) — декартовы составляющие скорости, $\nu = \mu/\rho$ — коэффициент кинематической вязкости и где принято суммирование по повторяющимся индексам.

При сделанных предположениях уравнение энергии становится скалярным конвективно-диффузионным уравнением и имеет тот же вид, что и уравнение для эволюции некоторой пассивной примеси. Для изотермической жидкости оно выполняется тождественно и здесь рассматриваться не будет.

Используя тензорное преобразование с контравариантными компонентами скоростей u^α ($\alpha = 1, 3$), систему (1.1) можно записать в произвольной системе криволинейных координат либо в неконсервативной, либо в слабоконсервативной форме. Последняя может быть получена из уравнений (1.10) гл. 2 при $\rho = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ с использованием равенства $\text{div } \mathbf{V} = 0$ в уравнениях импульса.

Если же желательно сохранить консервативную форму записи системы (1.1), то, как и в случае сжимаемого газа, каждое из этих уравнений можно преобразовать как скалярный закон сохранения, оставляя компоненты импульса декартовыми. При этом результирующая система окажется частным случаем системы (1.9) из гл. 2.

В теории несжимаемой жидкости большую роль играют уравнения, представленные в форме Гельмгольца, записанные относительно завихренности $\omega = \text{rot } \mathbf{V}$; в декартовой системе координат они имеют вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \omega - (\omega \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nu \Delta \omega, \quad (1.2)$$

где $\nabla = (\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \partial/\partial x^3)^\top$, а точкой обозначено скалярное произведение. Эти уравнения особенно удобны в двумерном случае, когда существует лишь один компонент завихренности. Тогда уравнение (1.2) переходит в скалярное уравнение и после введения функции тока ψ в декартовых координатах (x, y) равенствами

$$u^1 = u = \partial \psi / \partial y, \quad u^2 = v = -\partial \psi / \partial x \quad (1.3)$$

система Навье—Стокса, будучи записанной в дивергентной форме, приобретает вид

$$\partial \omega / \partial t + \partial u \omega / \partial x + \partial v \omega / \partial y = \nu \Delta \omega, \quad (1.4a)$$

$$\Delta \psi = -\omega, \quad (1.4b)$$

где $\omega = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$, а $\Delta = (\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2)$.

При постановке вычислительных краевых задач для уравнений Навье–Стокса несжимаемой жидкости возникают те же ситуации, что и в случае сжимаемого газа. Фактически границы областей, в которых происходят дискретизации уравнений, могут быть типизированы в виде границ, где параметры потока предполагаются невозмущенными, границ симметрии, где формулируются условия симметрии течения, свободных границ, возникающих при замене бесконечных областей конечными, а также твердых границ, на которых выполняются условия либо непротекания, либо прилипания.

Существует много способов формулировки граничных условий на свободных границах, пригодных для получения численных решений. Такими условиями могут, в частности, быть:

мягкие граничные условия, диапазон которых может простирается от равенства нулю нормальных к этим границам производных первого или более высокого порядков до некоторых соотношений между ними, определяемых асимптотической формой исходных уравнений;

асимптотические условия, основанные на той или иной асимптотике точных решений;

неотражающие граничные условия, позволяющие выйти возмущениям за границы области, не отразившись внутри ее.

Как и в случае сжимаемого газа, по-видимому, наиболее узким местом в постановке граничных условий на твердых поверхностях при численном решении краевых задач является необходимость построения дополнительного условия для давления в случае уравнений типа (1.1) и условий для вихря в случае уравнений типа (1.2). Здесь опять-таки существует много идей и вариантов.

Обсуждение и анализ различных типов граничных условий выходят за рамки этой книги; их можно найти, например, в монографиях [1, 2]. Заметим лишь, что неудачный выбор граничных условий может свести на нет положительные свойства численного алгоритма и даже привести к его неработоспособности. В дальнейшем будут использоваться в основном традиционные формы этих условий.

О численном моделировании течений несжимаемой жидкости при малых и больших числах Рейнольдса. После приведения уравнений Навье–Стокса к безразмерному виду коэффициент кинематической вязкости ν заменяется величиной Re^{-1} , где $Re = v_* L / \nu$ – число Рейнольдса, вычисленное по характерным масштабам v_* и L соответственно скорости и длины. Для течений несжимаемой жидкости критическое число Рейнольдса, соответствующее переходу ламинарного режима в турбулентный, оказывается сравнительно небольшим. В этой связи уместно вспомнить, что в случае сжимаемого газа увеличение числа Маха оказывает стабилизирующее действие на течение и ламинарный режим может сохраняться до больших значений чисел Re .

При малых докритических числах Рейнольдса численное решение краевых задач для уравнений Навье–Стокса не вызывает особых затруднений и может быть осуществлено традиционными методами. Поэтому неудивительно, что первые расчеты вязких течений на основе уравнений (1.4) были выполнены еще в конце 20-х годов [78] для обтекания кругового цилиндра ($Re = 5, 10$). Однако при увеличении числа Re процесс числен-

ного решения краевых задач, представляющих интерес, существенно усложняется. Это связано по меньшей мере с двумя причинами.

Во-первых, усложняются сами решения исходных уравнений – они могут терять устойчивость, претерпевать бифуркации, вообще перестать быть ламинарными.

Во-вторых, с увеличением локальных градиентов искомым функциям ухудшаются свойства разностных решений и затрудняется процесс их получения. Во многом это связано с возможностью появления коротковолновых осцилляций, дестабилизирующих вычислительный процесс.

Если первая причина в некотором смысле является неустранимой, то вторая может быть в значительной степени устранена применением алгоритмов, подавляющих нефизические высокочастотные гармоники. Такими, в частности, являются компактные схемы третьего порядка.

Философия их применения при больших значениях Re , как и в случае сжимаемого вязкого газа, основывается на следующих соображениях.

1. При реальном количестве узлов разностных сеток за исключением отдельных простых случаев трудно претендовать на получение решений, близких к точным решениям уравнений Навье–Стокса.

2. Сгущая узлы сеток в областях с большими градиентами решений и используя достаточно большие шаги вне этих областей, можно моделировать течения, в которых имеются области с несущественной ролью вязкости (в том числе и турбулентной), и области, в которых течение имеет вязкостный характер (ламинарный или турбулентный); в случае турбулентных течений в правую часть (1.1) следует внести рейнольдсовы напряжения, определяемые той или иной моделью турбулентности.

3. Используя условия прилипания на твердых поверхностях, но не сгущая около них узлы, можно получить решения, близкие к решениям уравнений Эйлера с некоторым схемным пограничным слоем. Такая постановка задачи имеет смысл, когда внутренняя структура вязких пристеночных слоев не представляет интереса и требуется информация лишь о крупномасштабных изменениях течения, слабо зависящих от этой структуры.

Позиции 2 и 3, по существу, снимают вопрос о переходе ламинарного режима течений в турбулентный, но при этом речь идет не о *получении точных численных решений уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса, а об использовании этих уравнений для численного моделирования* представляющих практический интерес течений. Такой подход будет подразумеваться далее в этой главе. Он обладает несомненным преимуществом, позволяя моделировать течение в целом и одновременно описывать его как вязкие, так и невязкие подобласти. При малых числах Рейнольдса ($Re \approx 1 \div 10$) конвективные члены не столь существенны по сравнению со случаем $Re \gg 1$, вследствие чего отпадает необходимость применения нецентрированных аппроксимаций, подстраивающихся под эти члены. При этом значительно проще и экономичнее использовать центрированные схемы четного порядка.

При умеренных и больших числах Рейнольдса, а также при $Re = \infty$, когда члены с вязкостью не учитываются и система Навье–Стокса вырождается в уравнения Эйлера, разностные схемы с компактными аппроксимациями нечетного порядка могут оказаться эффективным инструментом численного исследования течений несжимаемой жидкости.

1.2. Аппроксимация уравнений Навье–Стокса для переменных вихрь–функция тока

Операторы, аппроксимирующие конвективные члены. С точки зрения простоты применения компактных схем система Навье–Стокса в форме (1.4а) выгодно отличается от системы (1.1) наличием лишь одного уравнения с конвективными членами. В этом случае нет необходимости определять собственные значения и собственные векторы матриц, а при решении разностных уравнений достаточно использовать скалярные прогонки.

Скалярные разностные операторы гл. 1 для уравнения (1.4а) на сетке $\omega_h : x_i = ih_x, y_j = jh_y, h_x = \text{const}, h_y = \text{const}$ имеют вид

$$\begin{aligned} A_x &= A_0^x - 0,25s_x \Delta_0^x, & \Delta_x &= 0,5 [\Delta_0^x - s_x \Delta_2^x], \\ A_y &= A_0^y - 0,25s_y \Delta_0^y, & \Delta_y &= 0,5 [\Delta_0^y - s_y \Delta_2^y], \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $s_x = \text{sgn } u_{ij}, s_y = \text{sgn } v_{ij}$, а компоненты скоростей u и v считаются известными. Соответственно операторы

$$\delta_x = A_x^{-1} \Delta_x / h_x \quad \text{и} \quad \delta_y = A_y^{-1} \Delta_y / h_y \quad (1.6)$$

аппроксимируют производные по x и y , так что в каждом узле сетки

$$\delta_x f = \frac{\partial f}{\partial x} + O(h_x^3), \quad \delta_y f = \frac{\partial f}{\partial y} + O(h_y^3). \quad (1.7)$$

Если в расчетной области сеточные s_x и s_y не меняют знака, то применение операторов (1.6) обеспечивает консервативность дискретизации конвективных членов, записанных в дивергентном виде. В окрестности точек переключения s_x и s_y это свойство нарушается, однако по аналогии с матрично-разностными операторами равенства (1.5) можно модифицировать следующим образом:

$$\begin{aligned} A_x &= A_0^x - 0,25 \Delta_0^x s_x, & \Delta_x &= 0,5 [\Delta_0^x - \Delta_x^-(T_{1/2}^x s_x) \Delta_x^+], \\ A_y &= A_0^y - 0,25 \Delta_0^y s_y, & \Delta_y &= 0,5 [\Delta_0^y - \Delta_y^-(T_{1/2}^y s_y) \Delta_y^+]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

При применении операторов (1.8) независимо от изменения знака s_x и s_y разностные потоки через общую границу двух ячеек оказываются равными и в результате суммирования взаимно уничтожаются. Однако в случае переключения s_x и s_y локально понижается порядок аппроксимации операторов δ_x и δ_y , так что равенства (1.7) для некоторых узлов уже не имеют места. Как правило, число узлов переключения составляет небольшую долю общего числа узлов, поэтому выбор операторов (1.5) или (1.8) слабо отражается на получаемых результатах и их точности. Однако следует предохранять схему от излишних переключений, имеющих нефизический характер (например, при малых колебаниях u или v около нуля, вызванных схемными эффектами). В этом случае целесообразно положить $s_x = 0$ и $s_y = 0$ соответственно при $|u| < \epsilon$ и $|v| < \epsilon$, где ϵ — достаточно малое число.

Факторизованные схемы. Для аппроксимации уравнения завихренности (1.4) на сетке $\omega_\tau \times \omega_h$ ($\omega_\tau : t_m = m\tau$) достаточно по известным значениям u_{ij}^m и v_{ij}^m построить операторы (1.6), положив $s_x = \text{sgn } u_{ij}^m, s_y =$

= $\text{sgn } v_{ij}^m$, ввести эту или иную дискретизацию членов с вязкостью и производной $\partial\omega/\partial t$, а затем в рамках неявной схемы осуществить приближенную факторизацию. Если довольствоваться порядком аппроксимации относительно шага τ не выше второго, то можно использовать двухточечную формулу для $\partial\omega/\partial t$. Тогда простейший вариант схемы с операторами δ_x и δ_y для уравнения завихренности можно записать в виде

$$[E + \tau\sigma(\delta_x\bar{u} - \nu\delta_{2x})][E + \tau\sigma(\delta_y\bar{v} - \nu\delta_{2y})](\omega^{m+1} - \omega^m)/\tau + \delta_x\bar{u}\omega^m + \delta_y\bar{v}\omega^m - \nu(\delta_{2x} + \delta_{2y})\omega^m = 0. \quad (1.9)$$

Здесь \bar{u} и \bar{v} — значения скорости, которые предполагаются вычисленными по значениям u^k и v^k ($k \leq m+1$) с использованием тех или иных интерполяционных формул, а δ_{2x} и δ_{2y} — некоторые операторы, аппроксимирующие вторые производные по x и y соответственно.

При вычислении скоростей u и v по функциям тока можно использовать некоторые кососимметричные операторы δ_{0x} и δ_{0y} ; например, для $t = t_m$

$$u^m = \delta_{0y}\psi^m/h_y, \quad v^m = -\delta_{0x}\psi^m/h_x. \quad (1.10)$$

В случае аппроксимации второго порядка достаточно положить

$$\delta_{0x} = \Delta_{0x}/2h_x, \quad \delta_{0y} = \Delta_{0y}/2h_y.$$

Если предположить, что введен разностный аналог уравнения Пуассона (1.46), то при известных сеточных функциях ω^m , \bar{u} и \bar{v} алгоритм сводится к следующим этапам:

1. Определяется $Y = \delta_y\bar{v}\omega^m$ из трехточечных скалярных уравнений $A_y Y = \Delta_y\bar{v}\omega^m$ с последующим вычислением выражения

$$L\omega^m = \Delta_x\bar{u}\omega^m + A_x Y - \nu A_x(\delta_{2x} + \delta_{2y})\omega^m.$$

2. Определяется ω^{m+1} из одномерных уравнений

$$[A_x + \tau\sigma(\Delta_x\bar{u} - \nu A_x\delta_{2x})]\xi^{1/2} = -\tau L\omega^m, \\ [A_y + \tau\sigma(\Delta_y\bar{v} - \nu A_y\delta_{2y})]\xi^1 = A_y\xi^{1/2}. \quad (1.11)$$

3. Решается разностное уравнение Пуассона, соответствующее (1.46).

4. Вычисляются скорости u^{m+1} и v^{m+1} по формулам вида (1.10).

Используя операторы (1.5) или (1.8), можно несколько модифицировать схему (1.9), обойтись без вычисления вспомогательной функции Y . Эта модификация основана на коммутативности этих операторов при постоянном значении параметра s , т.е. при отсутствии изменения знака скоростей. Пусть это условие выполнено. Тогда, умножив обе части (1.9) на $A_x A_y$, получим схему

$$[A_x + \tau\delta(\Delta_x u - \nu A_x\delta_{2x})][A_y + \tau\sigma(\Delta_y\bar{v} - \nu A_y\delta_{2y})](\omega^{m+1} - \omega^m)/\tau + A_y\Delta_x\bar{u}\omega^m + A_x\Delta_y\bar{v}\omega^m - \nu A_x A_y(\delta_{2x} + \delta_{2y})\omega^m = 0,$$

обладающую погрешностью $O(h^3)$. Однако третий порядок этого уравнения теряется в окрестностях узлов, где скорости меняют свой знак. Чтобы этого не происходило, достаточно в этих окрестностях полагать $s = 0$, т.е. использовать аппроксимации четвертого порядка. Конечно, при этом

теряется свойство консервативности, что, однако, часто не отражается на свойствах получаемых решений.

Существует известный произвол в выборе операторов δ_{2x} , δ_{2y} , δ_{0x} , δ_{0y} , а также в аппроксимации уравнения Пуассона. Этот выбор можно осуществить в соответствии с тем, какие цели ставятся при применении операторов (1.6).

Во-первых, не стремясь к достижению порядка аппроксимации выше второго, можно задаться целью в классе неявных трехточечных схем получить такие схемы, которые обладали бы благоприятными свойствами монотонности и не требовали бы введения дополнительных сглаживающих членов.

В этом случае достаточно было бы использовать обычную аппроксимацию уравнения Пуассона, центральные разности для операторов δ_{0x} и δ_{0y} , а также некоторые обсуждавшиеся ранее способы выбора операторов δ_{2x} и δ_{2y} , приводящие к аппроксимациям членов с вязкостью, имеющей порядок меньше третьего.

Во-вторых, вводя в случае необходимости преобразования координат, растягивающие области с большими градиентами, можно поставить задачу построения алгоритмов повышенной точности, т.е. требующих при прочих равных условиях меньшего числа узлов сетки. Тогда нужно использовать разностные аналоги высокого порядка как уравнения Пуассона, так и равенств, определяющих связи между скоростями и функцией тока.

Для дискретизации уравнения Пуассона с четвертым порядком достаточно применить формулы компактного численного дифференцирования типа формул (2.11), приведенных в гл. 1, т.е. формул

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \left(E + \frac{1}{12} \Delta_{2x} \right)^{-1} \frac{\Delta_{2x} \psi}{h^2} + O(h_x^4), \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \left(E + \frac{1}{12} \Delta_{2y} \right)^{-1} \frac{\Delta_{2y} \psi}{h^2} + O(h_y^4), \end{aligned} \quad (1.12)$$

которые могут интерпретироваться как аппроксимации Падэ операторов вторых производных. Тогда итерационная факторизованная схема для (1.4б) запишется в виде

$$(E - \sigma_1 \tau_k \mathcal{A}_x)(E - \sigma_2 \tau_k \mathcal{A}_y)(\psi^{k+1} - \psi^k)/\tau_k = (\mathcal{A}_x + \mathcal{A}_y)\psi^k + \omega^{m+1}, \quad (1.13)$$

где $\mathcal{A}_x = \left(E + \frac{1}{12} \Delta_{2x} \right)^{-1} \Delta_{2x}/h_x^2$, $\mathcal{A}_y = \left(E + \frac{1}{12} \Delta_{2y} \right)^{-1} \Delta_{2y}/h_y^2$, а σ_1 ,

σ_2 и τ_k — итерационные параметры. Как легко заметить, обращение операторов $E - \sigma_1 \tau_k \mathcal{A}_x$ и $E - \sigma_2 \tau_k \mathcal{A}_y$ сводится к трехточечным скалярным прогонкам.

Схема вида (1.13) подробно исследована в [45]. Иногда целесообразным оказывается прямой метод обращения оператора $\mathcal{A}_x + \mathcal{A}_y$ — метод полной редукции, требующий меньшего числа арифметических операций, чем алгоритм (1.13), с оптимальным выбором итерационных параметров.

Если требуется решить стационарную задачу, то необязательно добиваться сходимости итераций (1.13). Положив тогда $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\tau_k = \tau$, можно, используя только одну итерацию, фактически искать установив-

шееся решение уравнения

$$\partial \psi / \partial t = \Delta \psi + \omega.$$

Применение алгоритмов повышенной точности для уравнения Пуассона подразумевает использование аппроксимаций производных $\partial \psi / \partial x$ и $\partial \psi / \partial y$ достаточно высокого порядка. Это легко осуществляется, например, если в формулах (1.10) положить $\delta_{0x} = (A_0^x)^{-1} \Delta_0^x / 2$, $\delta_{0y} = (A_0^y)^{-1} \Delta_0^y / 2$; тогда для определения скоростей потребуются скалярные трехточечные прогонки. Как известно, весьма важную роль в разностных алгоритмах решения уравнения (1.4) играет формулировка граничного условия для завихренности на твердой поверхности. Обсуждение этих условий содержится, например, в [1]. Если не заботиться о повышении порядка аппроксимации алгоритма, то все они, в принципе, могут быть использованы в сочетании с разностными уравнениями (1.9) и разностным аналогом уравнения Пуассона, записанным на пятиточечном шаблоне. В историческом плане первыми условиями для завихренности на твердой поверхности были условия Тома [78] и Вудса [79], имевшие соответственно первый и второй порядок точности.

Если считать, что в декартовой системе координат (x, y) твердая поверхность описывается равенством $y = 0$, то оба эти условия можно получить из разложения в ряд Тейлора функции тока ψ в окрестности стенки, в котором все производные вычисляются при $y = 0$, а $(\partial^2 \psi / \partial y^2)_{y=0} = -\omega(x, 0)$. Полагая $y = h_y$, можно получить условия Тома [78]

$$\omega(x, 0) = -2\psi(x, h_y) / h_y + O(h_y); \quad (1.14a)$$

если же выразить производную $(\partial^3 \psi / \partial y^3)_{y=0}$ через $(\partial \omega / \partial y)_{y=0}$, то получается условие Вудса [79]

$$\omega(x, 0) = -(3/h_y^2)\psi(x, h_y) - \omega(x, h_y)/2 + O(h^2). \quad (1.14б)$$

Альтернативным вариантом получения условия второго порядка является совместное рассмотрение разложений для ψ при $y = h_y$ и $y = 2h_y$.

Фактически оба равенства (1.14а) являются локальными, т.е. независимыми от значений функций в остальных узлах области. Они основываются на гладкости функции тока ψ , условии непротекания $\psi(x, 0) = 0$ и условию прилипания $u = (\partial \psi / \partial y)_{y=0} = 0$; последнее можно рассматривать как лишнее условие для определения ψ , которое позволяет найти $\omega(x, 0)$.

Для случая стационарных задач эффективное условие на твердой поверхности было предложено в [80]. Оно имеет вид

$$\omega(x, 0) = \epsilon [\gamma(x) \partial \psi / \partial y + \omega(x, y)]_{y=0}, \quad (1.15)$$

где ϵ – параметр, стремящийся в процессе счета к единице; γ – релаксационный параметр, а достаточно произвольная функция $\sigma(x)$ вводится с целью улучшения процесса сходимости в случае бесконечной границы $y = 0$ [81, 82].

При $\epsilon = 0$, что естественно задать в начале счета, выполняется равенство $\omega(x, 0) = 0$ и поток проскальзывает вдоль твердой стенки; при $\epsilon = 1$

в случае сходимости процесса, когда $\epsilon \rightarrow 1$, выполняется условие прилипания, а значение $\omega(x, 0)$ приобретает некоторое установившееся значение.

Условия (1.14), (1.15) удобно использовать как явные условия, в которых правые части вычисляются по результатам предыдущего цикла вычислений. Для алгоритма повышенной точности условия (1.14) легко модифицируются. Вместо них в случае достаточно гладкой функции ψ можно записать целый ряд соотношений, выражающих связь между значениями в узлах ψ , $\partial\psi/\partial y$ и $\partial^2\psi/\partial y^2$. Одно из таких соотношений, записанное с погрешностью $O(h_y^5)$, имеет вид

$$\psi_{i1} = \alpha_1 \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)_{i1} + \beta_0 \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right)_{i0} + \gamma_0 \left(\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \right)_{i0}, \quad (1.16)$$

где индексы 0 и 1 соответствуют линиям $y = 0$ и $y = h_y$; в нем учтено, что на твердой стенке $\psi = (\partial\psi/\partial y) = 0$. Коэффициенты α_1 , β_0 и γ_0 легко находятся методом неопределенных коэффициентов [38] и оказываются равными соответственно $(1/4)h_y$, $(1/4)h_y^2$ и $(1/24)h_y^3$.

Из равенства (1.16) следует соотношение

$$\xi_{i0} + \frac{h_y}{6} \left(\frac{\partial\xi}{\partial y} \right)_{i0} = \frac{\psi_{i1}}{h_y^2} + \frac{u_{i1}}{h_y} + O(h_y^3), \quad (1.17)$$

которое после использования аппроксимации второго порядка $(\partial\xi/\partial y)_{i0} = (3\xi_{i0} + 4\xi_{i1} - \xi_{i2})/2h_y$, приводит к трехточечному граничному условию для завихренности с погрешностью $O(h_y^3)$.

Об устойчивости алгоритмов. Оценки устойчивости приведенных выше схем являются весьма затруднительными даже в приближении замороженных коэффициентов, если рассматривать полную задачу с граничными условиями. Можно лишь высказать некоторые общие соображения.

Существенный вклад в вычислительную устойчивость методов для переменных вихрь—функция потока вносит устойчивость схемы для уравнения завихренности. В данном случае такая устойчивость обеспечивается положительностью операторов δ_x и δ_y ; для неявной факторизованной схемы (1.9) она является абсолютной в приближении замороженных коэффициентов.

Если в этом приближении рассмотреть совокупность разностных уравнений завихренности и Пуассона для функции ψ , то первое из них можно представить в виде (для простоты имеется в виду нефакторизованная неявная схема с двухточечной аппроксимацией $\partial\omega/\partial t$)

$$\omega^{m+1} = \omega^m + \tau(a\delta_x \omega^{m+1} + b\delta_y \omega^{m+1} + c\delta_{0x} \psi^k + d\delta_{0y} \psi^k), \quad (1.18)$$

где a , b , c , d — некоторые константы, а $k = m + 1$, если уравнения относительно ω^{m+1} и ψ^{m+1} решаются одновременно, и $k = m$, если сначала решается одно из них, а затем другое.

Рассматривая общую разностную задачу для периодических функций и освобождаясь тем самым от граничных условий, можно перейти в пространство коэффициентов Фурье C_ω и C_ψ функций ω и ψ . Поскольку из уравнения Пуассона следует, что $C_\psi = AC_\omega$, где A — некоторое действительное число, то коэффициент усиления гармоник λ_ω , соответствующий

равенству (1.18) при $k = m + 1$, запишется в виде

$$\lambda_\omega = [1 + \tau (az_{1x} + bz_{1y}) + i\tau (z_{2x} + z_{2y})]^{-1}, \quad (1.19)$$

где $z_{1x}, z_{1y}, iz_{2x}, iz_{2y}$ — спектральные образы операторов $\delta_x, \delta_y, \delta_{0x}, \delta_{0y}$. Из положительности операторов δ_x и δ_y следуют неравенства $\text{Re} z_1 \geq 0, \text{Re} z_2 \geq 0$, а из кососимметричности операторов δ_{0x} и δ_{0y} — действительность чисел z_{2x} и z_{2y} . Таким образом, для $|\lambda_\omega|$ справедлива оценка $|\lambda_\omega| \leq 1$ и схема является абсолютно устойчивой.

Если же $k = m$, то вместо (1.19) можно записать равенство $\lambda_\omega = [1 - i\tau (z_{2x} + z_{2y})] [1 + \tau (az_{1x} + z_{1y})]^{-1}$, из которого следует, что $|\lambda_\omega| \leq 1 + O(\tau^2)$. Эта оценка, будучи несколько худшей, чем предыдущая, тем не менее является вполне приемлемой.

Таким образом, если не рассматривать граничные условия, то в случае нелинейности задачи можно надеяться на вполне разумный запас устойчивости. К сожалению, использование граничных условий для вихря на твердой поверхности в той или иной степени дестабилизирует алгоритм, что может выразиться в ужесточении ограничений на шаг τ и замедлении сходимости в стационарном случае. Это относится прежде всего к явным вариантам этих условий, в которых правые части считаются известными из предыдущего цикла вычислений.

1.3. Примеры расчетов

Применение центрированных компактных схем. Основной областью применения компактных схем четвертого порядка, не учитывающих направления распространения возмущений, оказались задачи о течении несжимаемой жидкости. При этом в большинстве случаев использовались уравнения Навье—Стокса в переменных вихрь—функция тока [31, 34] (см. также [1]). Основным лимитирующим фактором для этих схем являются малость сеточного числа Рейнольдса $\text{Re}_c = v_* h/\nu$, где v_* и h — локальные значения скорости и шага сетки. Если это число не превосходит нескольких единиц, то самосопряженная часть разностного оператора компенсирует отрицательное воздействие его кососимметричной части и сеточные решения не искажаются (или не сильно искажаются) схемной немонотонностью. Если оно мало или равно бесконечности ($\nu = 0$), то применение центрированных алгоритмов, как будет показано ниже, может привести к неудаче.

При выполнении ограничения на Re_c алгоритмы четвертого порядка являются высокоточными и эффективными. В качестве иллюстрации можно привести результаты, заимствованные из [34] и относящиеся к течению вязкой жидкости в прямоугольной каверне с движущейся верхней крышкой. В табл. 7 представлены значения вихря в середине этой крышки, полученные в результате установления при помощи обычных схем второго порядка и компактных схем четвертого порядка, построенных на основе кубических сплайнов (все схемы являются дивергентными) [34]. Из таблицы следует, что компактные схемы немного превосходят по точности схемы второго порядка и могут обеспечить значительную экономию узлов сетки, полностью оправдывающую их применение.

Другим примером использования компактных схем является решение

классической задачи об обтекании кругового цилиндра. В [83] представлены подробные методические исследования, связанные с расчетами при помощи как разностных схем второго порядка с односторонними разностями, так и схем четвертого порядка [30]. Показано, что без каких-либо изменений последние могут быть применены только при числах Рейнольдса $Re = U_\infty d/\nu < 200$ (U_∞ – скорость набегающего потока, d – диаметр цилиндра). Чтобы расширить область допустимых чисел Re , была использована модификация этих схем, связанная с введением дополнительного параметра,

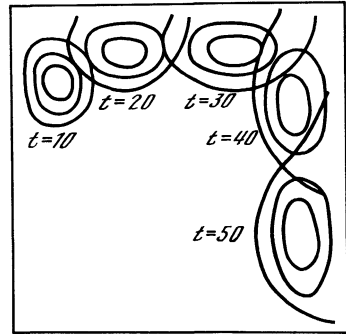


Рис. 3.1

позволяющего переключать трехточечные операторы в зависимости от знака скорости [34] (однако в этом случае при больших сеточных числах Рейнольдса схема становится как бы схемой второго порядка). Модифицированная схема позволяла проводить расчеты до $Re \leq 800$. Хотя при дальнейшем увеличении числа Рейнольдса стационарные решения могли быть получены только при помощи обычных схем, в [83] делается вывод о том, что компактные схемы в области их применимости приводят к лучшим результатам, чем схемы второго порядка. К аналогичному заключению приводят также результаты исследования нестационарных режимов.

Движение пары вихрей в невязкой жидкости. Положительные свойства компактных аппроксимаций третьего порядка [84] можно проиллюстрировать на примере задачи о движении пары вихрей равной интенсивности, но противоположной ориентации в сосуде с твердыми стенками [85].

Пусть в области $G: \{-a \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, в начальный момент времени $t = 0$ возникла пара прандтлевских вихрей, так что

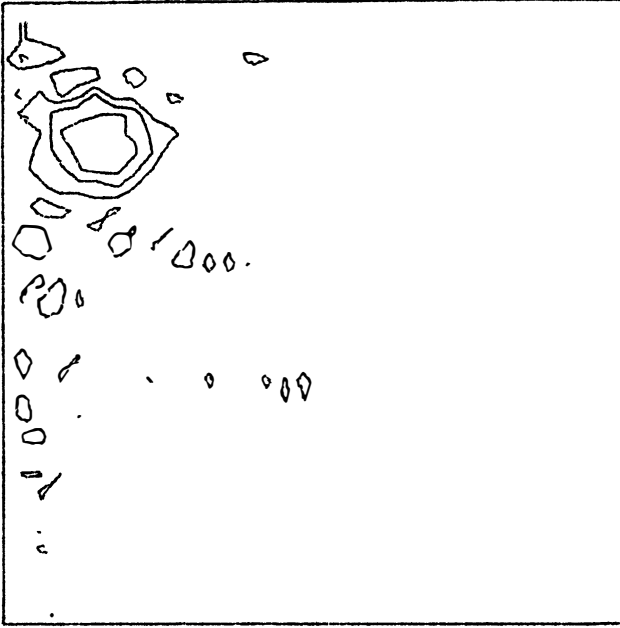
$$\omega = \Omega_0 > 0 \text{ при } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R_0^2,$$

$$\omega = -\Omega_0 \text{ при } (x + x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R_0^2$$

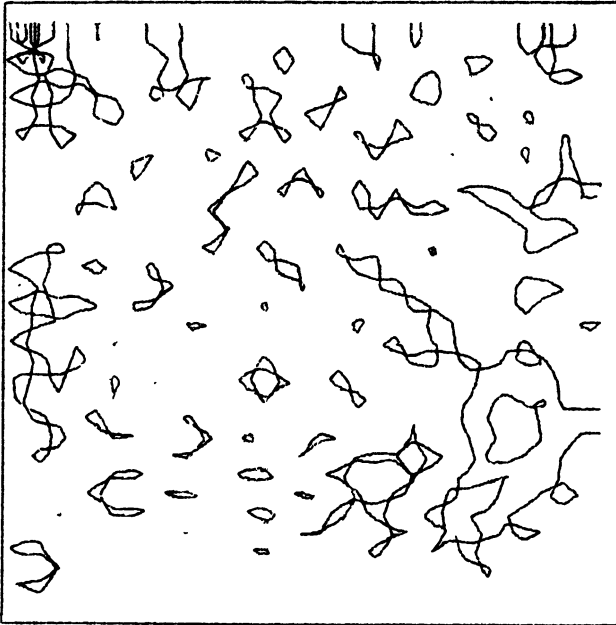
и $\omega = 0$ в остальной части области G . Согласно классическому решению задачи о паре точечных вихрей в безграничной жидкости, должно возникать перемещение областей завихренности вдоль оси y . В данном случае из-за наличия твердых стенок, на которых предполагается непротекание жид-

Таблица 7

Аппроксимация	Сетка	Завихренность в центре подвижной поверхности
Обычная второго порядка	17 × 17	7,376
	65 × 65	6,609
	128 × 128	6,574
Компактная четвертого порядка	17 × 17	6,532

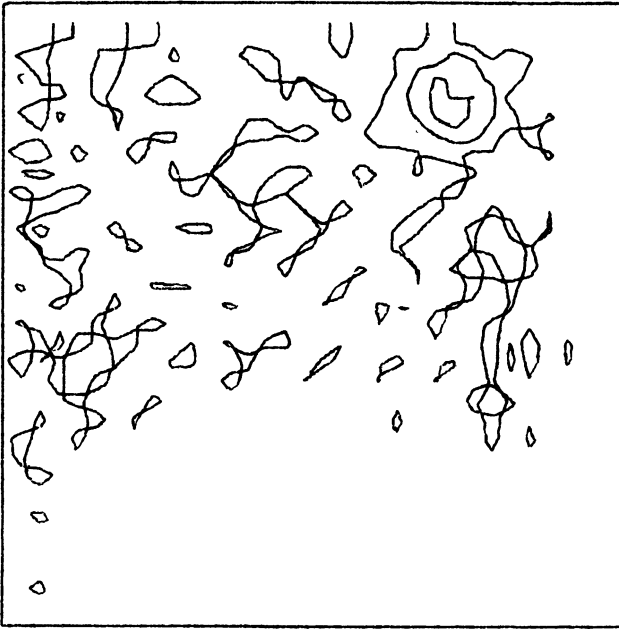


$t = 15$



$t = 35$

Рис. 3.2



$t = 25$

Р и с. 3.2 (окончание)

кости (вязкость равна нулю), вихри поднимаются до границы $y = b$, а затем начинают двигаться вдоль стенок (правый вихрь – по часовой стрелке, левый – против часовой стрелки).

На рис. 3.1 приведены изолинии завихренности в последовательные моменты безразмерного времени в области справа от оси симметрии $x = 0$, полученные в результате расчетов по схеме (1.9) с граничными условиями $\omega = 0$ на твердых границах. На изолиниях не видны какие-либо следы схемной немонотонности, несмотря на то, что численные решения описывают весьма резкую границу между завихренной и незавихренной жидкостью.

Для сопоставления на рис. 3.2 представлены эти же изолинии, полученные при помощи централизованной схемы четвертого порядка ($s_x = s_y = 0$). Хотя эта схема является, как и (1.5), абсолютно устойчивой, тем не менее она оказалась неспособной описать решения с большими градиентами: на рис. 3.2 видно, что вихри с течением времени оказались окруженными нереалистическими мелко масштабными вихревыми структурами, полностью исказившими картину течения. При больших временах наступил полный "развал" решения.

Течения в океане, порожаемые крупномасштабным полем ветра. Другим примером применения компактных схем третьего порядка являются численные решения задачи о развитии и установлении ветрового течения в баротропном океане постоянной глубины под действием внезапно воз-

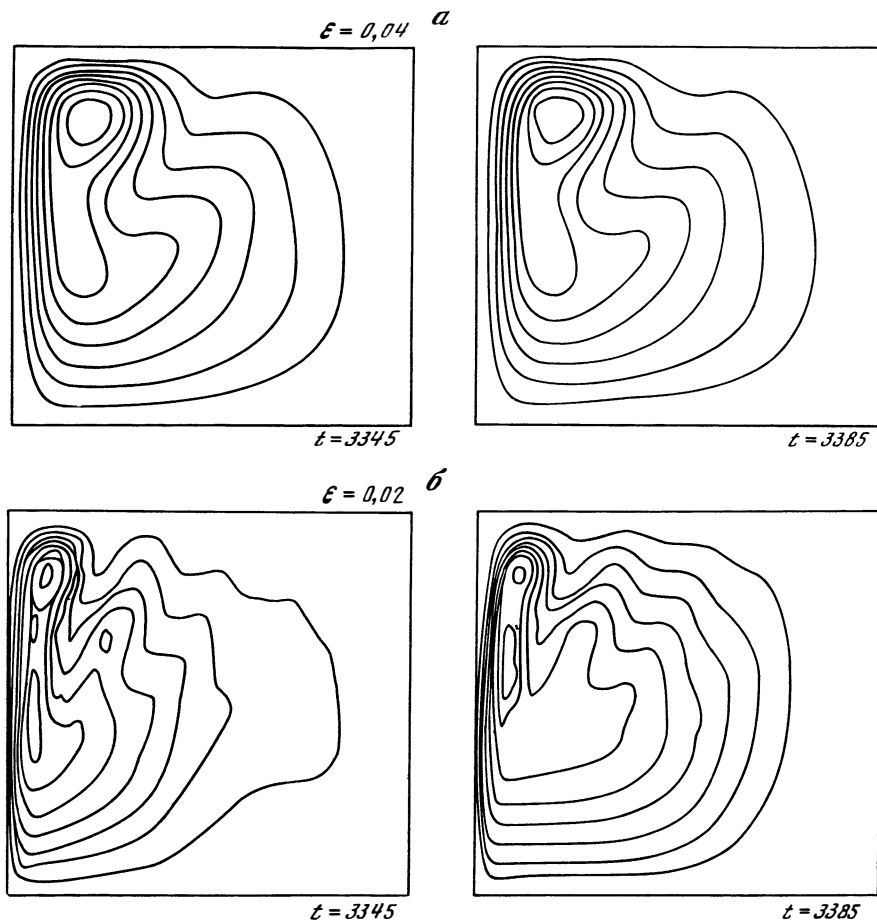


Рис. 3.3

никого и в дальнейшем неизменного во времени крупномасштабного поля ветра.

Математическая постановка этой задачи приведена в [86, 87]. Исходные уравнения в приближении β -плоскости после соответствующего обезразмеривания имеют вид

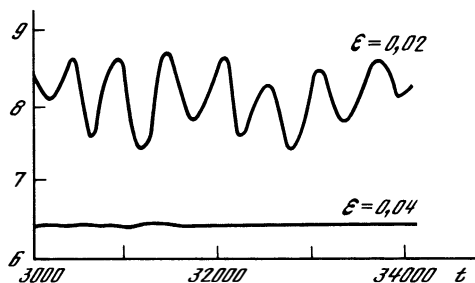
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial u \omega}{\partial x} + \frac{\partial v \omega}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \gamma^3 \Delta \omega - \delta \omega - g(x, y),$$

$$\Delta \psi = -\omega, \quad u = \partial \psi / \partial x, \quad v = -\partial \psi / \partial y,$$

где ϵ , γ и δ – параметры, характеризующие соответственно влияние адвекции относительного вихря ω , горизонтального турбулентного трения и стока вихря. Заданная функция $g(x, y)$ определяется в виде

$$g(x, y) = -\text{rot}_z \tau,$$

где τ – вектор касательного напряжения ветра.



Р и с. 3.4

Граничными условиями задачи в модельной постановке [86, 87] являются условия прилипания на восточном ($x = 1$) и западном ($x = 0$) берегах; границы $y = 0$ и $y = 1$ предполагаются жидкими с выполнением на них равенств $v = 0$ (условие непротекания) и $u_y = 0$ (т.е. фактически $\omega = 0$).

Подробное изучение этой задачи при $\delta = 0$ и $g(x, y) = \sin \pi y$ было проведено в работе [87] при помощи явного метода, использующего аппроксимацию Аракавы конвективных членов [88]. Вследствие центрированности схемы Аракавы при ее применении возникает необходимость введения в алгоритм тех или иных фильтров, устраняющих коротковолновые схемные осцилляции.

В зависимости от значений параметра ϵ возможны два режима течений, описываемых рассматриваемыми уравнениями. При достаточно больших значениях существует стационарный режим течения с формированием пограничного слоя у западного берега. При уменьшении ϵ этот режим теряет устойчивость и возникают квазипериодические изменения ψ и ω [87].

На рис. 3.3 приведены изолинии функции тока в последовательные моменты времени в случае установившегося течения ($\epsilon = 0,04$, рис. 3.3, а) и квазипериодического режима ($\epsilon = 0,02$, рис. 3.3, б), полученные при помощи алгоритма (1.9) [85]. Для этих же значений ϵ на рис. 3.4 представлены зависимости от времени энергии $e = (u^2 + v^2)/2$ в некоторой точке плоскости (x, y) , характеризующие степень установления течения при $\epsilon = 0,04$ и колебательный режим его изменения при $\epsilon = 0,02$.

При получении этих результатов, качественно хорошо согласующихся с данными [87], не возникло необходимости использования каких-либо сглаживающих фильтров.

2. АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ПЕРЕМЕННЫХ СКОРОСТИ–ДАВЛЕНИЯ

2.1. Неявный метод с коррекцией давления

Общая идея построения метода. В случае трех пространственных координат использование уравнений в форме Гельмгольца (1.2) в значительной мере теряет свою эффективность ввиду трудоемкости восстановления поля скорости по полю завихренности. Это обстоятельство существенно увеличивает роль методов, основанных на аппроксимации уравнений гидро-

динамики для естественных переменных – компонент скоростей и давления.

С точки зрения применения разностных методов основная специфика этих уравнений, отличающая их от уравнений сжимаемой жидкости, состоит в невозможности непосредственного определения из них производной $\partial p/\partial t$ и, следовательно, давления на следующем временном слое.

Эта трудность была успешно преодолена в ранних работах [89, 90] путем использования идеи о том, что давление на последующем временном слое может быть определено из условия обращения в нуль дивергенции вектора скорости (метод *MAC*). Эта же идея была реализована в близком к методу *MAC* методе расщепления по физическим признакам [91], в котором процесс вычислений разделялся на три этапа. В этих работах применялась центрально-разностная аппроксимация конвективных членов, что приводило к жестким ограничениям на шаг по времени τ при увеличении числа Рейнольдса. Использование ориентированных разностей с учетом ориентации потока [92, 93] существенно улучшает свойства устойчивости и монотонности схемы.

Для построения неявного метода с коррекцией давления удобно представить уравнения импульсов в системе (1.1) в векторном виде

$$\partial \mathbf{u}/\partial t + L\mathbf{u} = -(1/\rho) \text{grad } p. \quad (2.1)$$

Введя на сетке ω_h разностные аналоги L_h и grad_h соответственно операторов L и grad , можно записать следующие аппроксимации (2.1) на сетке $\omega_\tau \times \omega_h$

$$(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n)/\tau + L_h \tilde{\mathbf{u}} = -(1/\rho) \text{grad}_h p^n, \quad (2.2)$$

$$(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)/\tau + L_h \tilde{\mathbf{u}} = -(1/\rho) \text{grad}_h p^{n+1}. \quad (2.3)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{u}}$ – вектор предварительных значений скоростей \mathbf{u} , который подлежит уточнению.

Из (2.3) и (2.2) следует равенство

$$\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}} = -\frac{\tau}{\rho} \text{grad}_h \delta p, \quad \delta p = p^{n+1} - p^n, \quad (2.4)$$

которое и позволяет найти окончательные значения скоростей \mathbf{u}^{n+1} , если только известна величина δp . Последнюю можно определить, применив к (2.4) разностный оператор div_h и используя разностное условие соленоидальности вектора \mathbf{u}^{n+1} , т.е. условие $\text{div}_h \mathbf{u}^{n+1} = 0$.

В случае однородной жидкости ($\rho = \text{const}$) в результате этой операции получается уравнение для δp вида

$$(1/\rho) \text{div}_h \text{grad}_h \delta p = (1/\tau) \text{div}_h \tilde{\mathbf{u}}. \quad (2.5)$$

Таким образом, для определения поля скоростей и давления при $t = t_{n+1}$ достаточно из (2.2) найти $\tilde{\mathbf{u}}$, а затем из (2.5) найти δp . Окончательные значения скоростей \mathbf{u}^{n+1} вычисляются по формуле (2.4).

Такая последовательность вычислений аналогична принятой в методике [91, 92]. Различие состоит в неявном способе определения значений $\tilde{\mathbf{u}}$, которое при этом имеет не фиктивный, а физический смысл, а также в том, что вместо давления p^{n+1} определяется поправка $\delta p = p^{n+1} - p^n$.

Порядок аппроксимации схемы (2.2), (2.4), (2.5) по пространственным переменным зависит от выбора оператора L_h , в то время как независимо от способа дискретизации по времени погрешность этой схемы относительно шага τ будет иметь порядок $O(\tau)$ из-за членов с $\text{grad}_h p$, рассматриваемых либо на n -м, либо на $(n+1)$ -м временных слоях. При решении стационарных задач методом установления это не столь существенно, однако в случае нестационарных задач может оказаться желательным использовать схемы с погрешностью, не большей, чем $O(\tau^2)$.

К схеме второго порядка приводит следующая модификация алгоритма (2.2), (2.4), (2.5):

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n + (\tau/2)L_h \tilde{\mathbf{u}} &= -(\tau/2)\text{grad}_h p^n, \\ \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n + \tau L_h \tilde{\mathbf{u}} &= -(\tau/2)\text{grad}_h(p^n + p^{n+1}).\end{aligned}\quad (2.6)$$

Из этих уравнений с учетом $\text{div}_h \mathbf{u}^{n+1} = \text{div}_h \mathbf{u}^n = 0$ следует аналог уравнения (2.5) для $\delta p = p^{n+1} - p^n$:

$$\text{div}_h \text{grad}_h \delta p = (4/\tau)\text{div}_h \tilde{\mathbf{u}}, \quad (2.7)$$

а также уравнения (2.4) для определения поля скоростей

$$\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n - 2\tilde{\mathbf{u}} = -(\tau/2)\text{grad}_h \delta p. \quad (2.8)$$

Дискретизация пространственных производных. Не ограничиваясь рассмотрением компактных аппроксимаций, можно сформулировать некоторые общие соображения по поводу выбора операторов, аппроксимирующих производные по переменной x_j ($j = 1, 2, 3$) в операторах div_h и grad_h , а также в конвективных членах системы (1.1). Обозначив эти операторы соответственно $D_j^{(d)}$, $D_j^{(g)}$ и $D_j^{(k)}$, потребуем, чтобы они удовлетворяли следующим условиям:

$$\begin{aligned}D_j^{(k)} &= \delta_{1j}^{(k)} + s\delta_{0j}^{(k)}, \quad s = \text{sgn } u_j \text{ при } s \neq 0, \quad s\delta_{0j}^{(k)} > 0, \\ D_j^{(g)} &= \delta_{1j} + \delta_{0j}, \quad D_j^{(d)} = -(D_j^{(g)})^* = \delta_{1j} - \delta_{0j};\end{aligned}\quad (2.9)$$

здесь индексами 0 и 1 отмечены соответственно самосопряженные и кососимметричные составляющие операторов $D_j^{(k)}$ и $D_j^{(g)}$.

Первые из условий (2.9) означают, что оператор $D_j^{(k)}$ может быть либо кососимметричным, либо положительным, что является естественным условием устойчивости разностной схемы (2.2) при фиксированной правой части.

Согласно второму условию (2.9), операторы численного дифференцирования, входящие в операторы grad_h и div_h , следует выбирать либо кососимметричными, либо противоположно ориентированными (т.е. в виде соответственно левых и правых разностей или наоборот). При выполнении этого условия уравнения (2.5) или (2.7) запишутся в виде

$$D_h \delta p = \frac{l}{\tau} \sum_{j=1}^3 D_j^{(d)} \tilde{u}_j, \quad (2.10)$$

где $l = 1$ в случае уравнения (2.5) и $l = 4$ в случае уравнения (2.7), а

$D_h = \sum_{j=1}^3 (\delta_{1j}^2 - \delta_{0j}^2)$ – самосопряженный отрицательный оператор. Последнее обстоятельство является существенным с точки зрения устойчивости всего алгоритма в целом.

Обращение оператора D_h для некоторых операторов δ_{0j} и δ_{1j} может быть излишне трудоемким, если его шаблон будет содержать более чем три узла в каждом из пространственных направлений. Эту трудность можно обойти, если заменить уравнение (2.10) уравнением

$$\Delta_h \delta p = \sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_2^j}{h_j^2} \delta p = \frac{l}{\tau} \operatorname{div}_h \tilde{u}. \quad (2.11)$$

Однако при этом коррекция давления δp будет обеспечивать обращение в нуль $\operatorname{div}_h \mathbf{u}^{m+1}$ лишь с точностью до $O(h^2)$, $h = \max_j h_j$.

В случае аппроксимации пространственных производных со вторым порядком невязка разностного уравнения неразрывности порядка $O(h^2)$ находится в соответствии с общим порядком схемы и, как показывает практика, во многих случаях не влияет заметным образом на решение. Вместе с тем если желательно иметь бездивергентное поле скорости с той точностью, с которой решается уравнение (2.10), то для каждого цикла по времени можно ввести итерационный процесс, который приводит к обращению оператора D_h . Простейший вариант его записывается в виде

$$\Delta_h \delta p^k = (l/\tau) \operatorname{div}_h \tilde{u} + (\Delta_h - D_h) \delta p^{k-1}, \quad (2.12)$$

где k – номер итерации.

Вычислив константы энергетической эквивалентности операторов Δ_h и D_h , вместо (2.12) можно использовать итерационные процессы с оптимальными наборами параметров, обращая каждый раз либо оператор Δ_h , либо соответствующий ему факторизованный оператор.

При использовании компактных аппроксимаций третьего порядка достаточно положить

$$D_i^{(k)} = \delta_i = A_{xi}^{-1} \Delta_{xi} / h_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.13)$$

где индексы x_i в (2.13) отмечают операторы A и Δ , соответствующие координате x_i . Если не стремиться к построению метода с погрешностью $O(h^3)$, то в качестве операторов $D_j^{(g)}$ можно использовать различные операторы второго порядка точности, например центральные разности $\Delta_0^j / 2h_j$. В этом случае роль компактных аппроксимаций сводится к улучшению свойств монотонности численных решений при дискретизации конвективных членов на трехточечном (по каждой из координат) шаблоне, если сравнивать эти свойства со свойствами обычных центрально-разностных аппроксимаций.

Вместе с тем ценою некоторого увеличения количества арифметических операций в течение каждого вычислительного цикла можно повысить порядок аппроксимации алгоритма. Для этого требуется, во-первых, использовать разностные операторы $D_j^{(g)}$ ($j = \overline{1, 3}$) повышенной точности и, во-вторых, решать уравнение (2.8), а не (2.11), применяя, например, итерационный процесс типа (2.12).

Оставаясь в рамках трехточечных схем, в качестве $D_j^{(g)}$ можно использовать те же операторы δ_j третьего порядка аппроксимации или операторы $(A_0^j)^{-1} \Delta_0^j / 2h_j$ четвертого порядка. Тогда члены вида $\text{grad}_h p^n$ в уравнении импульсов можно определять, положив

$$A_{xj}^{-1} \Delta_{2j} p^n / h_j = X_j \quad \text{или} \quad (A_0^j)^{-1} \Delta_0^j p^n / 2h_j = Y_j \quad (j = \overline{1, 3}) \quad (2.14a)$$

и решая затем трехточечные скалярные уравнения

$$A_{xj} X_j = \Delta_{xj} p^n / h_j \quad \text{или} \quad A_0^j Y_j = \Delta_0^j p^n / 2h_j. \quad (2.14б)$$

Несколько выгоднее использовать операторы δ_j , поскольку после умножения обеих частей разностных уравнений импульсов на один из операторов A_{xj} комбинация $A_{xj}^{-1} \Delta_{xj} p^n$ перейдет в $\Delta_{xj} p^n$, что не потребует введения сеточной функции X_j .

Если члены $\text{grad}_h p^n$ аппроксимируются согласно соотношениям (2.14a, б), то операторы дивергенции div_h однозначно определяются в виде

$$D_j^{(d)} = -(A_{xj}^{-1} \Delta_{xj})^* / h_j \quad \text{или} \quad D_j^{(d)} = (A_0^j)^{-1} (\Delta_0^j).$$

Тогда в первом случае

$$D_h = \sum_{j=1}^3 (A_{xj}^* A_{xj})^{-1} \Delta_2^j / h_j^2, \quad (2.15a)$$

а во втором —

$$D_h = \sum_{j=1}^3 (A_0^j)^{-2} (\Delta_0^j)^2 / 4h_j^2. \quad (2.15б)$$

При использовании итерационного процесса для решения уравнения (2.10) приходится вычислять члены вида $D_h \delta p^n$, где δp^n — известная сеточная функция. Это можно сделать следующим образом. Пусть для определенности оператор D_h определяется формулой (2.15a). Обозначим через Z_j слагаемые $(A_{xj}^* A_{xj})^{-1} \Delta_2^j \delta p^n / h_j$; тогда

$$A_{xj}^* A_{xj} Z_j = \Delta_2^j \delta p^n / h_j^2. \quad (2.16)$$

Обращая последовательно A_{xj}^* и A_{xj} , из (2.13) можно определить Z_j , и, следовательно, $D_h \delta p^n = \sum_{j=1}^3 Z_j$. Аналогично можно поступить в случае,

когда оператор D_h определяется формулой (2.15б).

Применение описанного выше алгоритма повышенной точности требует дополнительного числа скалярных прогонок с общим числом арифметических операций, пропорциональным числу узлов сетки. Следует отметить также необходимость формулировки соответствующих разностных граничных условий. Таким образом, этот алгоритм оказывается более трудоемким и сложным по сравнению с алгоритмом, использующим обычные способы дискретизации производных в операторах grad_h и div_h . Вместе с тем следует иметь в виду, что основные затраты времени счета связаны с решением уравнения Пуассона, а не с обращением операторов A_{xj} или A_{xj}^* , которым соответствует число арифметических операций, пропорциональных числу узлов сетки. Поэтому дополнительное число арифметических операций, связанных с повышением порядка аппрокси-

мации, может не привести к большому проценту увеличения времени счета.

Кроме того, при надлежащем преобразовании физической области в расчетную теоретическая погрешность метода повышенной точности убывает как $O(h^3)$, что позволяет рассчитывать на использование меньшего количества узлов при заданной погрешности.

Оценивая для конкретной задачи роль перечисленных выше фактов, можно сделать вывод о целесообразности или нецелесообразности применения аппроксимаций высокого порядка операторов grad_h и div_h .

Оценки устойчивости. Рассматривая алгоритм с коррекцией давления для задачи Коши в неограниченной области, нетрудно оценить его устойчивость в приближении замороженных коэффициентов при весьма общих предположениях об операторах $D_j^{(g)}$ и $D_j^{(d)}$.

Пусть переход от сеточной функции u^n к \tilde{u} при фиксированной функции $\text{grad}_h p^n$ осуществляется при помощи некоторой абсолютно устойчивой схемы. Основу для этого создает первое условие (2.7), предъявляемое к операторам $D_j^{(k)}$, — схема (2.2) оказывается схемой с положительными операторами. Тогда собственные значения μ , соответствующие этому переходу, удовлетворяют условию Неймана

$$|\mu| \leq 1.$$

Пусть далее $f_j(\alpha_j)$, $0 \leq \alpha_j \leq 2\pi$, — собственные значения операторов $D_j^{(g)}$, $j = \overline{1, k}$; тогда собственные значения оператора D_h , очевидно, будут равны $-\sum_{j=1}^3 f_j \bar{f}_j$. Введем функцию $\kappa(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, положив $\kappa = 1$, если непосредственно решается уравнение (2.8), и

$$\kappa = \sum_{j=1}^3 f_j \bar{f}_j / \left(4 \sum_{j=1}^3 \sin^2 \frac{\alpha_j}{2} \right), \quad 0 \leq \alpha_j \leq 2\pi,$$

если левая часть (2.8) заменяется на $\Delta_h \delta p$. В последнем случае κ , по существу, является отношением собственных значений операторов D_h и Δ_h .

Вычисляя собственные значения λ оператора перехода от n -го временного слоя к $(n+1)$ -му, после некоторых выкладок можно получить уравнение

$$(q-1)[q^2 - 2(1-\kappa+z/2)q + (1-\kappa)(1+z)] = 0, \quad (2.17a)$$

если рассматривается алгоритм (2.2), (2.4); (2.5), и уравнение

$$(q-z+1)[q^2 - 2(1-2\kappa)q + 1 - z^2] = 0, \quad (2.17б)$$

если рассматривается алгоритм (2.6), (2.7), (2.8). В (2.17а, б) использованы следующие обозначения:

$$q = (1+z)\lambda, \quad z = (1-\mu)\mu^{-1}.$$

Из (2.17а) и (2.17б) следует, что одно из собственных значений для каждого случая равно соответственно $(1+z)^{-1}$ и $(1-z)(1+z)^{-1}$. В первом случае неравенство $|\lambda^{(1)}| < 1$ выполняется вследствие того, что $\lambda = \mu$. Во втором случае это неравенство имеет место, если $\text{Re } z \geq 0$. Остальные

два собственных значения $\lambda^{(2)}$ и $\lambda^{(3)}$ являются корнями квадратных уравнений. Они весьма просто вычисляются, если $\kappa = 1$. Тогда

$$\lambda^{(2)} = 0, \quad \lambda^{(3)} = z/(1+z) \quad \text{для (2.17a),}$$

$$\lambda^{(2)} = 1, \quad \lambda^{(3)} = (1-z)/(1+z) \quad \text{для (2.17б).}$$

Все эти значения, очевидно, удовлетворяют условию $|\lambda| \leq 1$ при $\text{Re } z \geq 0$. Ввиду того что последнее неравенство является следствием неравенства $|\mu| \leq 1$, можно утверждать, что все рассмотренные собственные значения по модулю не превосходят единицы, а алгоритм при сделанных предположениях удовлетворяет необходимому условию устойчивости.

При $\kappa \neq 1$ в результате громоздкого алгебраического анализа корней $\lambda^{(2)}$ и $\lambda^{(3)}$ можно показать, что эти выводы остаются справедливыми, если выполняется неравенство $0 \leq \kappa \leq 1$.

Рассмотрим, например, наибольший по модулю корень $\lambda^{(3)}$ квадратного уравнения из (2.17). Для него можно записать выражение

$$|\lambda^{(3)}|^2 = \frac{(1-\kappa + a/2 + \sqrt{(r+f)/2})^2 + (|b| + \sqrt{(r-f)/2})^2}{(1+a)^2 + b^2}, \quad (2.18)$$

где $a = \text{Re } z$, $b = \text{Im } z$, $f = (a^2 - b^2)/4 + \kappa^2(\kappa - 1)$, $r = \sqrt{f^2 + a^2 b^2/4}$.

Очевидно, что при $\kappa = 0$ $|\lambda^{(3)}|^2 = 1$. В то же время нетрудно установить, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\kappa} |\lambda^{(3)}|^2 = & - \left(1 - \kappa + \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{r+f}{2}} \right) + \\ & + (1-2\kappa) \left[- \frac{1-\kappa + a/2}{2r} \sqrt{\frac{r+f}{2}} + \frac{|b|}{4r} \sqrt{\frac{r-f}{2}} - \frac{f}{2r} \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Из неотрицательности a , а также легко устанавливаемых неравенств $|b|/2\sqrt{r} \leq 1$, $|f|/r \leq 1$ следует, что выражение в квадратных скобках в (2.19) не превосходит единицы. Но это означает, что при $0 \leq \kappa \leq 1/2$ левая часть (2.19) отрицательна и $|\lambda^{(3)}|$ убывает с ростом κ , удовлетворяя неравенству $|\lambda^{(3)}| \leq 1$. Заметив еще, что $r(\kappa) = r(1-\kappa)$ и $f(\kappa) = f(1-\kappa)$ при $0 \leq \kappa \leq 1/2$, легко усмотреть, что это неравенство выполняется для всего интервала $0 \leq \kappa \leq 1$. Аналогичный ход рассуждений можно использовать и для корней $\lambda^{(2)}$ и $\lambda^{(3)}$, соответствующих уравнению (2.18).

Из приведенных выше оценок следует, что все алгоритмы, в которых оператор в левой части (2.4) или (2.8) согласован с операторами, входящими в div_h и grad_h ($\kappa = 1$), удовлетворяют условию Неймана устойчивости схемы. Таковыми, в частности, являются алгоритмы повышенной точности с операторами (2.15а,б). Этому условию удовлетворяют также алгоритмы, в которых для дискретизации конвективных членов используются компактные аппроксимации, а для дискретизации остальных производных по пространственным координатам — центральные разности.

Действительно, в этом случае
$$\kappa = \frac{\sum_{j=1}^3 (\sin^2 \alpha_j)}{[4 \sum_{j=1}^3 \sin^2(\alpha_j/2)]^2} \leq 1.$$

Можно установить также выполнение достаточных условий устойчивости рассматриваемых схем, однако в этом вряд ли существует необходимость ввиду значительной идеализации исходной задачи.

2.2. Схемы, основанные на методе искусственной сжимаемости

Исходные уравнения. Отсутствие в уравнениях Навье–Стокса (1.1) производной $\partial p/\partial t$, по существу, и является причиной, по которой при решении нестационарных задач на каждом цикле вычислений приходится решать уравнение Пуассона. Как уже отмечалось, время, затрачиваемое на его решение, составляет значительную часть от общего времени выполнения вычислительного цикла, причем количество выполняемых при этом арифметических операций во многих случаях не является пропорциональным числу узлов сетки. Для построения экономичных методов решения уравнений гидродинамики в [41] был предложен подход, состоящий в введении в уравнение неразрывности членов вида $\epsilon \partial p/\partial t$, где $\epsilon > 0$ – некоторый параметр. В дальнейшем этот подход исследовался и применялся в целом ряде работ (см., например, [94–97], а также монографию [1]). В декартовых координатах исходная система записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial u_i/\partial t + \partial u_i u_j/\partial x_j &= -\partial p/\partial x_i + \nu \Delta u_i, \\ \epsilon \partial p/\partial t + \partial u_i/\partial x_i &= 0, \quad \epsilon > 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

В случае нестационарных задач теоретически можно надеяться на то, что при малых ϵ решения (2.20) не будут слишком сильно отличаться от решений (1.1). В случае использования (2.20) в качестве основы для метода установления параметр ϵ вообще не должен влиять на точность стационарного решения при условии, что оно получено по схеме с полной аппроксимацией.

Привлекательной стороной уравнений (2.20) является близость их свойств к свойствам нестационарных уравнений сжимаемого газа, позволяющим решать обычную эволюционную задачу. Параметр ϵ при этом условно можно назвать параметром искусственной сжимаемости. Область целесообразного применения уравнений (2.20) относится, по-видимому, к решению стационарных задач, когда параметр ϵ можно выбрать равным $O(1)$. При малых значениях ϵ могут возникнуть существенные трудности, аналогичные трудностям в случае применения алгоритмов для сжимаемого газа при числе Маха $M \rightarrow 0$. В [97], однако, предлагается на каждом шаге по времени вводить дополнительный итерационный процесс, параметр которого играет роль псевдовремени; такой процесс позволяет обойти трудности, связанные с вырождением матрицы при производной $\partial/\partial t$ в случае $\epsilon \rightarrow 0$.

Алгоритмы с векторными прогонками. Систему (2.20) удобно представить в векторном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial \mathbf{F}_i(\mathbf{f})}{\partial x_i} = \nu \Delta \mathbf{f}, \quad \nu = \text{diag}(\nu, \dots, \nu, 0), \quad (2.21)$$

где $f = (u^1, \dots, u^k, p)^T$, а число k равно 3 или 2 соответственно в пространственном или плоском случае. Легко усмотреть, что матрицы Якоби $K_i = \partial F_i / \partial f$ имеют действительные собственные значения. Например, при $k = 3$ матрица

$$K_1 = \begin{vmatrix} u_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & 0 \\ \epsilon^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.22)$$

имеет собственные значения $\lambda_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = u_1$, $\lambda_3^{(1)} = u_1/2 + \sqrt{(u_1^2/4) + (1/\epsilon)}$, $\lambda_4^{(1)} = u_1/2 - \sqrt{(u_1^2/4) + (1/\epsilon)}$. Отсюда следует возможность использования компактных аппроксимаций вида

$$\partial F_j / \partial x_j = B_{xj}^{-1} C_{xj} F_j + O(h^3), \quad (2.23)$$

где в операторы B_{xj} и C_{xj} входят матрицы $M_j = S_j D_j S_j^{-1}$, причем $K_j = S_j^{-1} \Lambda_j S_j$, $\Lambda_j = \text{diag}\{\lambda_i^{(j)}\}$, $D_j = \text{diag}\{\text{sgn} \lambda_i^{(j)}\}$, $i = 1, 4$. В декартовой системе координат, для которой выписана матрица (2.22), матрица M_j имеет две строки, в которых ненулевыми элементами являются лишь диагональные элементы. Это соответствует тому, что второе и третье уравнения импульсов из системы (2.21) оказываются не связанными через давление с уравнением неразрывности и могут рассматриваться как скалярные конвективно-диффузионные уравнения. Таким образом, в этом случае по крайней мере при $\nu = 0$ обращение всех матрично-разностных операторов фактически сводится к двум скалярным прогонкам и одной векторной прогонке с матрицами размерности 2×2 . В произвольной системе координат матрица M , вообще говоря, является заполненной, а обращение соответствующих операторов, если не привлекать внутренние итерационные процессы, осуществляется векторными прогонками с матрицами размерности 4×4 . Однако если интересоваться стационарными решениями уравнений (2.20), то при небольших ограничениях на выбор криволинейной системы координат можно добиться того, что размерность матриц в векторных разностных уравнениях не будет превышать 2. Рассмотрим, например, плоское течение невязкой жидкости, описываемое уравнениями в системе координат $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, где x и y — декартовы координаты. Запишем эти уравнения в консервативной форме относительно декартовых составляющих скоростей u и v :

$$\partial f / \partial t + \partial F / \partial \xi + \partial G / \partial \eta = 0, \quad (2.24)$$

$$F = J^{-1}(U/\epsilon, Uu + p\xi_x, Uv + p\xi_y)^T,$$

$$G = J^{-1}\left(V/\epsilon, Vu + p\eta_x, Vv + p\eta_y\right)^T, \quad f = J^{-1}(p, u, v)^T.$$

В (2.24) нижние индексы x и y обозначают дифференцирование по соответствующим переменным, а через U и V обозначены соответственно комбинации $u\xi_x + v\xi_y$ и $u\eta_x + v\eta_y$. Если рассматривать в качестве искомого вектор $f_1 = J^{-1}(p, U, V)$, заменив им вектор f в (2.24), а функции

u и v считать фиксированными, то матрицы Якоби будут иметь вид

$$K_1 = \frac{\partial F}{\partial f_1} = \begin{vmatrix} 0 & \epsilon^{-1} & 0 \\ \xi_x & u & 0 \\ \xi_y & v & 0 \end{vmatrix}, \quad K_2 = \frac{\partial G}{\partial f_1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \epsilon^{-1} \\ \eta_x & 0 & u \\ \eta_y & 0 & v \end{vmatrix}.$$

Их собственные значения будут действительными, если преобразования $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ таковы, что $\xi_x \geq 0$ и $\eta_x \geq 0$. Хотя матрицы (2.21) вырождены, а с ними и матрицы M_{x1} и M_{x2} ($x_1 = \xi$ и $x_2 = \eta$), операторы B_{xj} и $B_{xj} + \tau C_{xj} K_j$ тем не менее являются обратимыми. Для их обращения достаточно решить совместно два уравнения: в случае $j = 1$ они соответствуют первым двум строкам матрицы $\partial F / \partial f_1$, а в случае $j = 2$ — первой и третьей строкам. Уравнение, соответствующее оставшейся строке, решается в результате скалярных прогонок.

После аппроксимации производных $\partial / \partial x_j$, согласно (2.23), для (2.21) может быть записана факторизованная схема

$$\prod_{j=1}^k [E + \tau B_{xj}^{-1} C_{xj} K_j - \tau \nu \delta_{2j}] \frac{f^{m+1} - f^m}{\tau} + \sum_{j=1}^3 (B_{xj}^{-1} C_{xj} F_j^m - \nu \delta_{2j} f^m) = 0, \quad (2.25)$$

где через δ_{2j} обозначен разностный аналог оператора производной $\partial^2 / \partial x_j^2$. Способы выбора операторов δ_{2j} и исследование схемы (2.25) приведены в предыдущих главах.

2.3. Маршевые алгоритмы

Схема с коррекцией давления. Как и в случае сжимаемого газа, в некоторых задачах о стационарных течениях несжимаемой жидкости иногда оказывается полезным выделение преимущественного направления потока с последующим использованием маршевых или итерационно-маршевых алгоритмов. Основой их применения является упрощение уравнений Навье—Стокса, приводящее к тому, что исходная система приобретает свойства параболических уравнений, в которых роль времени играет пространственная координата. Маршевый принцип может позволить существенно увеличить число узлов вдоль этой координаты, что особенно важно в случае пространственных задач.

Существуют различные возможности параболизации уравнений Навье—Стокса, многие из которых связаны с выбором системы координат. Рассмотрим сначала один из вариантов параболизации, когда полностью исключается механизм распространения возмущений вверх по потоку.

Пусть течение в декартовых координатах (x_1, x_2, x_3) описывается уравнениями

$$\frac{\partial u_i \partial u_j}{\partial x_j} = \nu \Delta_{23} u_i, \quad \frac{\partial u_i \partial u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta_{23} u_i, \quad i = 2, 3, \quad (2.26)$$

$$\partial u_i / \partial x_i = 0,$$

в которых $\Delta_{23} = \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$ и принято суммирование по повторяющимся индексам. В системе (2.26) отсутствуют вторые производные по координате x_1 и производная $\partial p/\partial x_1$. Такие уравнения могут использоваться, например, для описания струйных течений, направленных вдоль оси x_1 и не обладающих осевой симметрией. Введя двумерные разностные операторы \bar{L}_h , $\overline{\text{grad}}_h$ и $\overline{\text{div}}_h$, аппроксимирующие соответствующие дифференциальные операторы в плоскости (x_2, x_3) на некоторой сетке ω_{23} , можно записать разностный аналог первого уравнения (2.26), используя сетку $\omega_1 \times \omega_{23}$ ($\omega_1: x_1^n = nh_1$):

$$[(u_1^n)^2 - (u_1^{n-1})^2]/h_1 + L_h u_1^n = 0; \quad (2.27)$$

здесь скорость u_1 предполагается положительной величиной, а через $L_h u_1$ обозначена аппроксимация членов $\partial u_2 u_1/\partial x_2 + \partial u_3 u_1/\partial x_3 - \nu \Delta_{23} u_1$.

Для остальных уравнений (2.26) по аналогии с (2.2), (2.3) и (2.4) можно выписать следующие разностные аппроксимации:

$$(\tilde{v} - \gamma v^{n-1})/h_1 + (1/u_1^n) L_h \tilde{v} = -(1/u_1^n) \overline{\text{grad}}_h p^{n-1}, \quad (2.28a)$$

$$(v^n - \gamma v^{n-1})/h_1 + (1/u_1^n) L_h \tilde{v} = -(1/u_1^n) \overline{\text{grad}}_h p^n, \quad (2.28б)$$

$$(u_1^n - u_1^{n-1})/h_1 = -\overline{\text{div}}_h v^n, \quad (2.28в)$$

в которых вектор v имеет компоненты (u_2, u_3) , а $\gamma = \frac{u^{n-1}}{u^n}$. Вычитая из (2.28б) (2.28a) и применяя к результату оператор $\overline{\text{div}}_h$, можно получить с учетом (2.28в) уравнение для определения поправки к давлению $\delta p = p^n - p^{n-1}$:

$$\overline{\text{div}}_h \frac{1}{u_1^n} \overline{\text{grad}}_h \delta p = \frac{1}{h_1} \left(\overline{\text{div}}_h \tilde{v} + \frac{u_1^n - u_1^{n-1}}{h_1} \right). \quad (2.29)$$

Алгоритм теперь сводится к следующей последовательности действий, полностью аналогичных в случае уравнений (2.2), (2.4), (2.5): определению u^n из (2.27); определению \tilde{v} из (2.28a) с использованием вычисленных значений u_1^n ; решению уравнения (2.29) для δp . Значения компонент вектора v^n после этого могут быть вычислены из равенства

$$(v^n - \tilde{v})/h_1 = -(1/u_1^n) \overline{\text{grad}}_h \delta p, \quad (2.30)$$

которое является результатом вычитания (2.28a) из (2.28б). Для эффективного решения уравнений (2.27) и (2.28a) можно использовать приближенную факторизацию, а при вычислении δp — тот или иной метод решения эллиптических уравнений.

Как и в случае алгоритма (2.2), (2.4), (2.5), нужно позаботиться о том, чтобы в операторах $\overline{\text{grad}}_h$ и $\overline{\text{div}}_h$ использовались сопряженные операторы численного дифференцирования, а аппроксимации конвективных членов в $L_h \tilde{v}$ осуществлялись при помощи неотрицательных операторов.

Алгоритм (2.27), (2.28a), (2.29), (2.30) имеет первый порядок аппроксимации относительно шага h_1 . Дословно повторяя рассуждения, относящиеся к случаю нестационарной задачи п.2.1, можно построить алгоритм с погрешностью $O(h_1^2)$, аналогичный (2.6), (2.7), (2.8).

Для оценок устойчивости схемы (2.27), (2.29), (2.30), интерпретируемой как схема для эволюционной задачи с времяобразной переменной x_1 ,

можно воспользоваться спектральным методом. Рассматривая соответствующую (2.27) нелинейную систему с замороженными коэффициентами, обозначим через μ собственное значение оператора перехода $\left(E + \frac{h_1}{u_1} L_h\right)^{-1}$, $u_1 = \text{const}$. Тогда, как нетрудно показать, собственные значения оператора перехода от слоя $x_1 = x_1^{n-1}$ к слою $x_1 = x_1^n$ будут удовлетворять уравнению

$$(\mu - \lambda)D(\lambda) = 0,$$

где через $D(\lambda)$ обозначена левая часть (2.17 а, б). Отсюда и из результатов анализа $D(\lambda)$ следует, что необходимый признак устойчивости $|\lambda| \leq 1$ будет выполнен, если комплексное число μ будет удовлетворять неравенству $|\mu| \leq 1$. Последнее выполняется, в частности, при аппроксимации конвективных членов при помощи операторов $A_{x_j}^{-1} \Delta_{x_j}$.

Что касается выбора операторов $\text{grad}_h, \text{div}_h$, то все соображения, приведенные по этому поводу в п. 2.1, остаются в силе.

Итерационные маршевые алгоритмы. Во многих задачах с преимущественным направлением стационарного течения оказывается желательным сохранить определяемый градиентом давления механизм распространения возмущений вверх по потоку, не учитывая диффузию в этом направлении. Тогда, как и в случае сжимаемого газа, выгодно применять не метод установления, а итерационный метод, в котором для определения решения при $x = x_i = \text{const}$ (x — маршевая координата) используется уже найденное в течение текущей итерации решение при $x < x_i$ и значения давления при $x > x_i$, найденные в результате предыдущей итерации. Этот метод, как и для сжимаемого газа, часто называют методом глобальных итераций (см., например, [98, 99]), хотя, по существу, он является известным методом блочной релаксации, или методом релаксации в линиях, применяемым при численном решении краевых задач для уравнений эллиптического типа. В принципе, его можно было бы использовать и при решении полных уравнений Навье—Стокса, однако тогда пришлось бы запоминать после каждой итерации не только поле давления, но и поле скоростей.

Простейшим вариантом учета распространения возмущений вверх по потоку является аппроксимация производной $\partial p / \partial x$ на сетке ω_1 : $x_k = kh_1$ в виде

$$\partial p / \partial x |_{x = x_i} \approx (\bar{p}_{i+1} - p_i) / h_1, \quad (2.31)$$

где чертой отмечены значения давления, найденные в результате предыдущей итерации. Вместо (2.31) можно было бы рассмотреть и другие формулы для $\partial p / \partial x |_{x = x_i}$, использующие значения p при $x > x_i$, в частности те, которые содержат некоторые весовые множители.

Пусть дискретизация всех производных по x в исходных уравнениях осуществляется при помощи двухточечных разностей назад, если компонента скорости в направлении x всюду положительна. Тогда, предполагая для простоты декартову систему координат и учитывая равенство

$$\bar{p}_{i+1} - p_i = -(p_i - p_{i-1}) + (\bar{p}_{i+1} - p_{i-1}),$$

структуру итерационного алгоритма для частично параболизированных урав-

нений Навье—Стокса удобно представить в следующем дифференциально-разностном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2} \right) + \mathbf{r} \left(\frac{\bar{p}_{i+1} - \bar{p}_{i-1}}{h_1} \right), \quad (2.32)$$

где

$$\mathbf{f} = (-p + u^2, uv, uw, u)^T, \quad \mathbf{F} = (uv, v^2 + p, vw, v)^T,$$

$$\mathbf{G} = (uw, vw, w^2 + p, w)^T, \quad \mathbf{v} = (u, v, w, 0)^T,$$

$\mathbf{r} = (1, 0, 0, 0)$, а все производные рассматриваются при $x = x_i$. Вид линейзованной левой части (2.32), а с ней и матрично-разностных операторов компактного численного дифференцирования зависит от выбора вектора зависимых переменных. В частности, если в качестве последнего выбрать вектор \mathbf{f} , то матрицы Якоби $P = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{f}$ и $Q = \partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{f}$ будут иметь вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2\frac{v}{u} & 0 & 2u - 2\frac{v^2}{u} \\ 0 & \frac{w}{u} & \frac{v}{u} & -2\frac{vw}{u} \\ 0 & \frac{1}{u} & 0 & -\frac{v}{u} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{w}{u} & \frac{v}{u} & -2\frac{vw}{u} \\ -1 & 0 & 2\frac{w}{u} & 2u - \frac{w^2}{u} \\ 0 & 0 & \frac{1}{u} & -\frac{w}{u} \end{pmatrix}.$$

Собственные значения их действительны (они равны соответственно $u/u, v/u, 1, -1$ для матрицы P и $w/u, w/u, 1, -1$ для матрицы Q), поэтому при аппроксимации левой части системы (2.32) естественно использовать операторы компактных схем третьего порядка B_y, C_y и B_z, C_z , основанные на диагонализации матриц P и Q . Рассматривая переменную x как время-образную, итерационно-маршевый алгоритм для (2.32) на сетке $\omega_1 \times \omega_2 \times \omega_3$ после приближенной факторизации можно записать в следующем виде:

$$(E + h_1 B_y^{-1} C_y P - \nu \delta_{yy})(E + h_1 B_z^{-1} C_z Q - \nu \delta_{zz})(\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i-1})/h_1 = \\ = -[B_y^{-1} C_y \mathbf{F}_{i-1} + B_z^{-1} C_z \mathbf{G}_{i-1} - \nu(\delta_{yy} + \delta_{zz})\mathbf{f}_{i-1}] + \mathbf{r}(\bar{p}_{i+1} - \bar{p}_{i-1})/h_1. \quad (2.33)$$

В (2.33) через δ_{yy} и δ_{zz} обозначены операторы, используемые в аппроксимации вторых производных

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbf{v}(\mathbf{f}) = \frac{\partial}{\partial y} T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{v}(\mathbf{f}) = \frac{\partial}{\partial z} T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z},$$

где $T = \partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{f}$; предполагается, что все матрицы Якоби вычислены при $x = x_{i-1}$. Для того чтобы обрабатываемые операторы были трехточечными, достаточно положить

$$\delta_{yy} = B_y^{-1} \Lambda_{yy}, \quad \delta_{zz} = B_z^{-1} \Lambda_{zz},$$

где Λ_{yy} и Λ_{zz} — трехточечные аппроксимации операторов $\partial / \partial y (T \partial / \partial y)$ и $\partial / \partial z (T \partial / \partial z)$, определенные формулами (3.6) из гл. 2.

При сохранении общей структуры алгоритма (2.33) возможны некото-

рые его модификации. Например, в качестве вектора искомым функций можно выбрать вектор $\mathbf{f} = (u, v, w, p)^T$; при таком выборе изменились бы матрицы P , Q и T и появилась бы новая матрица $L = \partial \mathbf{f} / \partial \tilde{\mathbf{f}}$. Кроме того, вместо линеаризации при помощи матриц Якоби удобных для построения схемы с погрешностью $O(h_1^2)$, вполне приемлемыми оказываются представления в виде

$$\mathbf{F} = \tilde{P} \mathbf{f}, \quad \mathbf{G} = \tilde{Q} \mathbf{f}, \quad (2.34)$$

где матрицы \tilde{P} и \tilde{Q} вычислены, например, по значениям \mathbf{f}_{i-1} . Равенства (2.34) будут выполнены, если положить

$$\tilde{P} = \left\| \begin{array}{cccc} v & 0 & 0 & 0 \\ u & \frac{v}{u} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{v}{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u} & 0 & 0 \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad \tilde{Q} = \left\| \begin{array}{cccc} w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{w}{u} & 0 & 0 \\ u & 0 & \frac{w}{u} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{u} & 0 \end{array} \right\|.$$

Легко убедиться в том, что матрицы \tilde{P} и \tilde{Q} имеют те же собственные значения, что и матрицы P и Q .

В декартовой системе координат использование \tilde{P} и \tilde{Q} вместо P и Q приводит к возможности уменьшения размерности матриц при выполнении векторных прогонок, поскольку в одной из строк \tilde{P} и \tilde{Q} ненулевыми являются лишь диагональные элементы. Однако это преимущество теряется в криволинейной системе координат.

При известном давлении \bar{p} алгоритм (2.33), имеющий погрешность $O(h_1)$ относительно шага h_1 , напоминает алгоритм для двумерных нестационарных течений сжимаемого газа. Он реализуется путем решения разностных уравнений последовательно для слоев $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$, причем сложность этого решения при $v \neq 0$ зависит от выбора операторов δ_{yy} и δ_{zz} .

В случае постоянных матриц P , Q и T абсолютная устойчивость маршевой схемы (2.33) для фиксированной итерации следует из положительности операторов $B_y^{-1} C_y$ и $B_z^{-1} C_z$; при этом существенным является положительность скорости и во всех внутренних узлах расчетной области. Если же возникают возвратные течения и скорость u становится локально отрицательной, то маршевое направление можно сохранить, если осуществить переключение разностных аналогов производной $\partial/\partial x$ в тех областях, где $u < 0$. При этом достаточно положить

$$\partial p / \partial x \approx (p_i - \bar{p}_{i-1}) / h_1, \quad \partial \mathbf{f} / \partial x = (\bar{\mathbf{f}}_{i+1} - \mathbf{f}_i) / h_1, \quad (2.35)$$

оставив неизменными аппроксимации производных по y и z .

Для оценки сходимости итераций вида (2.37) при постоянных коэффициентах удобно воспользоваться методом Фурье. Предположив периодичность решений по координатам x , y и z с периодами X , Y и Z соответ-

венно можно получить следующую оценку для спектрального радиуса Λ оператора перехода от одной итерации к другой:

$$\Lambda = 1 - CX^2(Y^{-2} + Z^{-2})^2 h_1^2, \quad C > 0. \quad (2.36)$$

Из (2.36) следует, что скорость сходимости итераций не зависит от шагов h_2 и h_3 вдоль координат y и z (точнее, от чисел Куранта поперечных течений); она тем больше, чем длиннее расчетная область и чем больше шаг h_1 .

Для возвратных течений в случае применения формул (2.35) аналогичный анализ показывает, что скорость сходимости становится зависимой как от чисел Куранта vh_1/h_2 и wh_1/h_2 , так и от спектральных свойств операторов $B_y^{-1}C_y$ и $B_z^{-1}C_z$. Вообще говоря, она может стать меньшей, чем в случае $u_1 > 0$. Таким образом, можно предположить, что рассматриваемый алгоритм целесообразно применять тогда, когда области возвратных течений либо отсутствуют, либо имеют небольшую протяженность вдоль оси x . К числу неблагоприятных факторов применения метода при $u_1 < 0$ следует отнести также необходимость запоминать не только давление p , но и скорость в зоне возвратных течений.

Ускорение сходимости итераций при увеличении шага h_1 делает желательным повышение порядка аппроксимации схемы в продольном направлении. Это можно осуществить, в частности, используя разнесенные сетки [99]. Оказывается возможным также повысить порядок аппроксимации относительно h_1 до третьего, если использовать схему (1.52) из гл. 1. Однако при этом структура разностных уравнений для каждого слоя $x = \text{const}$ существенно усложняется.

Отметим, наконец, что для повышения скорости сходимости итераций, как в некоторых других рассмотренных выше алгоритмах, перспективным представляется использование метода Федоренко [100–102] последовательных сеток.

3. КОМПАКТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ В НЕКОТОРЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ МОДЕЛЯХ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

3.1. Турбулентные течения. Учет массовых сил

Применение полуэмпирических моделей турбулентности. Используя рассмотренные выше алгоритмы в качестве базовых, можно конструировать расчетные методики для решения задач гидродинамики, описываемых более сложными моделями, чем уравнения Навье–Стокса.

Одной из таких моделей являются уравнения Рейнольдса, дополненные уравнениями тех или иных полуэмпирических теорий турбулентности. В случаях, когда используется концепция турбулентной вязкости, определяемой либо алгебраическими соотношениями, либо дифференциальными уравнениями, аппроксимация основных уравнений принципиально ничем не отличается от аппроксимаций уравнений Навье–Стокса. Различие возникает лишь в связи с появлением дополнительных разностных уравнений, а также в связи с переменностью коэффициента турбулентной вязкости.

Некоторые модели турбулентности, в которых коэффициент турбулентной вязкости находится из решений одного или нескольких дифференци-

альных уравнений (в частности, $k - \epsilon$ -модель), приведены в гл. 2. Формально их аппроксимация не вносит каких-либо трудностей, тем более что ввиду приближенности самой модели она может быть осуществлена при помощи какой-либо простой разностной схемы (например, схемы первого порядка с направленными разностями). Вместе с тем иногда могут возникнуть небольшие проблемы, связанные с правильной формулировкой граничных условий, с одновременным обращением в нуль величин, определяющих турбулентную вязкость, и т.д.

Переменность коэффициента турбулентной вязкости сама по себе также не усложняет алгоритма. Однако в связи с возможностью появления больших градиентов этого коэффициента может усложниться характер получаемых решений, а вместе с ним и процесс вычислений. С этой точки зрения применение алгоритмов, основанных на компактных аппроксимациях, оказывается благоприятным.

Иногда может быть желательным использовать более сложную модель, основанную на дифференциальных уравнениях для напряжений Рейнольдса. Уравнения Рейнольдса вместе с одной из таких моделей [53] записываются в виде

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}}, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u'_k u'_i u'_j}}{\partial x_k} &= -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \\ &- \frac{e}{\Lambda} \left(\overline{u'_i u'_j} - \frac{\delta_{ij}}{3} e^2 \right) + \frac{1}{\text{Re}} \overline{\Delta u'_i u'_j} - \frac{2}{\text{Re}} \delta_{ij} \frac{e^2}{3\lambda^2} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C e \Lambda \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера; $e^2 = u_k u_k$; λ и Λ – соответственно микро- и макро-масштабы турбулентности; C – константа модели; предполагается суммирование по повторяющимся индексам. Уравнения (3.1), (3.2) замыкаются связью между λ и Λ , причем Λ определяется либо по характерным геометрическим размерам, либо из дополнительного дифференциального уравнений.

После аппроксимации левой части (3.1) при помощи компактной схемы, записи разностных уравнений алгоритма с коррекцией давления и аппроксимации уравнений (3.2) с использованием какой-либо устойчивой схемы последовательность вычислений можно представить следующим образом.

Сначала определяется поле скоростей \bar{u}_i^{m+1} при известных моментах второго порядка $(\overline{u'_i u'_j})^m$. Затем независимо друг от друга решаются разностные уравнения, соответствующие уравнениям (3.2). Для повышения устойчивости счета можно использовать внутренний итерационный

процесс, при котором найденные значения $u'_i u'_j$ $m+1$ вновь используются для определения \bar{u}_i^{m+1} и т.д.

Для аппроксимации уравнений (3.2) достаточно выбрать схему невысокого порядка, имея в виду, что сами эти уравнения содержат некоторый произвол; например, можно применить схему с двухточечными разностями против потока.

Течения стратифицированной среды. Приближение Буссинеска. Во многих задачах динамики атмосферы и океана, некоторых задачах конвекции и других задачах с существенной ролью массовых сил плотность среды не является постоянной, однако ее изменение на рассматриваемых масштабах оказывается весьма незначительным. Это дает основание для того, чтобы в уравнении неразрывности

$$\partial \rho / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (3.3)$$

последнее слагаемое считать равным нулю, т.е. считать, что

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.4)$$

В уравнениях движения, учитывающих массовые силы (пусть, например, это будет сила тяжести):

$$\rho \partial \mathbf{v} / \partial t + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}, \quad (3.5)$$

по тем же причинам можно считать, что плотность в левой части приближенно равна некоторому постоянному значению ρ_0 . В правой же части ее незначительные изменения могут оказывать сильное влияние на течение, поэтому последнее слагаемое естественно сохранить в неизменном виде. Следует, однако, иметь в виду, что замена ρ на ρ_0 слабо отражается на вычислительном процессе и ее можно не производить. Чтобы замкнуть систему уравнений, плотность часто определяют из условия равенства нулю первых двух слагаемых (3.3). Альтернативный подход состоит в использовании уравнения состояния (например, зависимости плотности от температуры) и записи конвективно-диффузионного уравнения для параметров, определяющих плотность. С точки зрения применения численных методов оба подхода являются эквивалентными.

Систему сформулированных предположений и упрощений обычно называют приближением Буссинеска; не обсуждая степень его строгости, достоинства и недостатки, будем рассматривать его как некоторую математическую модель, подлежащую численной алгоритмизации.

В уравнениях Буссинеска обычно используют переменные давления и плотности, представленные в виде отклонений от соответствующих параметров p_s и ρ_s в невозмущенной среде. Выбрав декартову систему координат (x, y, z) с осью z , направленной против вектора \mathbf{g} , и считая, что $\rho_s = \rho_s(z)$, исходную систему в безразмерном виде можно записать следующим образом:

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \bar{p} = \nu \Delta \mathbf{v} + (1/\text{Fr}^2) \bar{\rho} \mathbf{r}, \quad (3.6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

$$\partial \bar{\rho} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \bar{\rho} + w \partial \bar{\rho}_s / \partial z = 0, \quad \mathbf{r} = (0, 0, 1)^T.$$

Здесь пространственные координаты отнесены к характерному масштабу L ,

скорость $\mathbf{v} = (u, v, w)$ — к характерной скорости U_0 , время t — к L/V_0 ; функции \bar{p} , $\bar{\rho}$ и $\bar{\rho}_s$ определены в виде

$$\begin{aligned}\bar{p} &= (p - \int \rho g dz) / \rho_0 U_0^2, \\ \bar{\rho} &= [\rho - \rho_s(z)] (L \partial \rho_s / \partial z)^{-1}, \\ \bar{\rho}_s &= \rho_s / \rho_s^*,\end{aligned}$$

а частотное число Фруда Fr — в виде

$$Fr^{-2} = g(-\partial \rho_s^* / \partial z) / U_0^2,$$

где предполагается устойчивая стратификация $\partial \rho_s / \partial z < 0$, причем $\partial \rho_s^* / \partial z = \text{const}$ — некоторое характерное значение $\partial \rho_s / \partial z$.

Систему, аналогичную системе (3.6), можно было бы записать и относительно переменных \mathbf{v} , \bar{p} и \bar{T} , где \bar{T} — отклонение температуры от невозмущенного значения при условии, что используется зависимость $\rho(T)$; в этом случае в третье уравнение (3.6), в котором вместо $\bar{\rho}$ используется \bar{T} , следовало бы ввести диффузные члены. В случае необходимости можно было бы использовать аналогичные уравнения и для других скалярных величин (например, солёности в задачах океанологии).

Применение алгоритма с коррекцией давления. Поскольку уравнения Бусинеска содержат в себе уравнения Навье—Стокса однородной несжимаемой жидкости и отличаются от последних наличием дополнительных членов и уравнений, для их численного решения можно воспользоваться рассмотренными выше подходами или какими-либо другими методами. Имея в виду возможность моделирования пространственных течений, целесообразно рассмотреть особенности применения неявного метода коррекции давления.

Основные модификации этой методики в случае системы (3.6) состоят в следующем.

Во-первых, в уравнениях для определения предварительных значений скоростей появляются члены вида $\bar{\rho}^m / Fr^2$, известные из решения для m -го временного слоя:

$$(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^m) / \tau + L_h \tilde{\mathbf{v}} = -\text{grad}_h \bar{p}^m + \bar{\rho}^m / Fr^2, \quad (3.7)$$

где оператор L_h имеет тот же смысл, что и в (2.2).

Если уравнение для \mathbf{v}^{m+1} записать в виде

$$(\mathbf{v}^{m+1} - \mathbf{v}^m) / \tau + L_h \tilde{\mathbf{v}} = -\text{grad}_h \bar{p}^{m+1} + \bar{\rho}^m / Fr^2,$$

то равенство (2.4), а с ним и уравнение Пуассона (2.5) не изменятся. Небольшое отличие от этих уравнений может возникнуть лишь в том случае, если плотность ρ в левой части (3.5) не заменять на ρ_0 ; оно сведется к замене во всех уравнениях оператора grad_h на оператор $\rho^{-1} \text{grad}_h$. В частности, в левой части (2.5) вместо разностного оператора Лапласа появится оператор $\text{div}_h(1/\rho) \text{grad}_h$.

Во-вторых, к разностным уравнениям (3.7), (2.4) и (2.5) добавляется аппроксимация третьего уравнения (3.6), которую можно записать в виде

$$(\bar{\rho}^{m+1} - \bar{\rho}^m) / \tau + L_h \bar{\rho}^m + w^m \partial \bar{\rho}_s / \partial z = 0. \quad (3.8)$$

Поскольку сеточная функция w^m известна, определение $\bar{\rho}^{m+1}$ можно осуществить независимо от вычисления v^{m+1} и \bar{p}^{m+1} .

Оценки устойчивости алгоритма (3.7), (2.4), (2.5), (3.8) показывают, что вычисление последних слагаемых в (3.7) и (3.8) при $t = t_m$, позволяющее определять v^{m+1} , \bar{p}^{m+1} и $\bar{\rho}^{m+1}$ независимо друг от друга, приводит к некоторой дестабилизации вычислительного процесса. Для собственных значений λ оператора перехода от слоя $t = t_m$ к слою $t = t_{m+1}$ в этом случае можно записать неравенство

$$|\lambda| \leq 1 + (c/\text{Fr}^2)\tau^2, \quad c = \text{const} > 0.$$

Это неравенство не означает неустойчивости, однако при счете больших интервалов времени можно ожидать слабого накопления погрешностей. Средством против этого может явиться внутренний итерационный процесс, при котором найденные в (3.8) значения $\bar{\rho}^{m+1}$ подставляются в (3.7) вместо $\bar{\rho}^m$, а найденные после этого значения w^{m+1} — вместо w^m в (3.8). Практически оказывается достаточным выполнить всего лишь несколько итераций.

Алгоритм (3.7), (2.4), (2.5), (3.8) имеет погрешность $O(\tau)$. Если желательно повысить порядок ее малости до $O(\tau^2)$, то достаточно использовать прием, который применялся при выводе алгоритма (2.6)–(2.8).

Роль компактных аппроксимаций в рассмотренном методе сводится к построению оператора L_h , обеспечивающего устойчивость и благоприятные свойства монотонности разностных решений. После приближенной факторизации оператора $E + \tau L_h$ процесс определения \tilde{v} из (3.7) и $\bar{\rho}^{m+1}$ из (3.8) при надлежащей аппроксимации членов с вязкостью осуществляется скалярными прогонками.

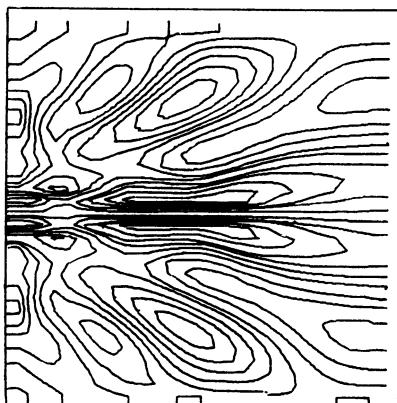
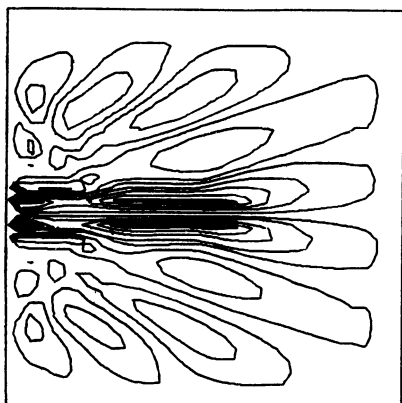
Модификация алгоритма для переменных вихрь—функция тока. Если течение зависит лишь от двух пространственных координат x и y , то уравнения движения и неразрывности удобно представить в форме уравнений для вихря и функции тока. После приведения к безразмерному виду исходную систему в приближении Буссинеска можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + L\omega = \frac{1}{\text{Fr}^2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega, \quad (3.9)$$

$$\Delta \psi = -\omega, \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + L\bar{\rho} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \rho_s}{\partial y},$$

$$Lf = \frac{\partial uf}{\partial x} + \frac{\partial vf}{\partial y}.$$

После аппроксимации левых частей первых двух уравнений (3.9) на сетке $\omega_\tau \times \omega_h$ ($\omega_h: x_j = ih_x, y_j = jh_y, h_x, h_y = \text{const}$) при помощи операторов $A_x^{-1} \Delta_x$ и $A_y^{-1} \Delta_y$ алгоритм для (3.9) будет отличаться от соответствующего алгоритма для однородной жидкости лишь наличием дополнительного уравнения для плотности и дополнительных членов $(\partial \bar{\rho} / \partial x) \text{Fr}^{-2}$ и $\partial \psi / \partial x$ при условии, что последние определяются по результатам преды-



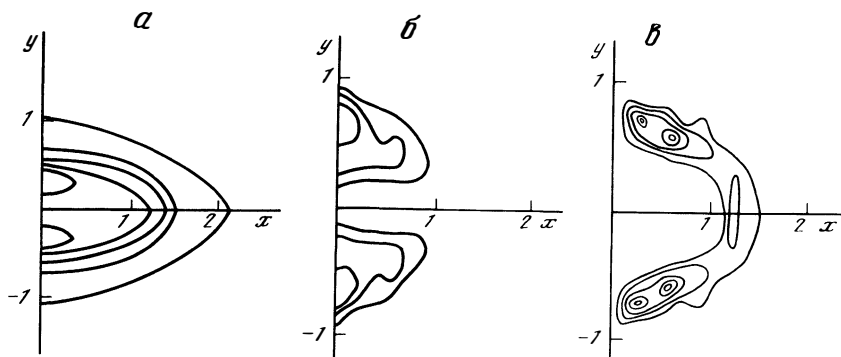
Р и с. 3.5

дущего этапа вычислений. При этом из простейшего анализа устойчивости следует, что разностные операторы $\delta_x^{(\rho)}$ и $\delta_x^{(\psi)}$, аппроксимирующие соответственно производные $\partial \bar{p} / \partial x$ и $\partial \psi / \partial x$ должны удовлетворять условию $\delta_x^{(\rho)} = -(\delta_x^{(\psi)})^*$ — условию, которое выше неоднократно использовалось при построении операторов grad_h и div_h .

В частности, можно положить $\delta_x^{(\rho)} = A_x^{-1} \Delta_x / h_x$ и $\delta_x^{(\psi)} = -(A_x^*)^{-1} \Delta_x^* / h_x$, тогда дискретизация всех первых производных в (3.9) будет иметь третий порядок. Другой вариант состоит в использовании центральных разностей второго порядка, когда $\delta_x^{(\rho)} = \delta_x^{(\psi)} = \Delta_0^x / 2h_x$. Как и в случае переменных скорости—давления, явная аппроксимация членов, связанных с силами плавучести, несколько дестабилизирует алгоритм, приводя к оценке вида $\Lambda \leq 1 + c\tau^2$ для спектрального радиуса Λ оператора перехода. Для повышения устойчивости счета можно использовать внутренние итерации для каждого шага по времени, при которых эти члены определяются из предыдущей итерации. Альтернативный подход состоит в неявной аппроксимации $\partial \bar{p} / \partial x$ и $\partial \psi / \partial x$, однако при этом приходится одновременно решать уравнения для ω и ρ .

Примеры расчетов. Классической задачей стратифицированной несжимаемой среды является задача об эволюции участка перемешанной в начальный момент жидкости (задача о "пятне"). Ей посвящен целый ряд численных исследований [103–109], относящихся как к ламинарному, так и к турбулентному режиму. Подробный анализ стадий развития турбулентного пятна содержится в [108].

При помощи описанных выше алгоритмов решения этой задачи без труда могут быть получены в широком диапазоне чисел Рейнольдса без каких-либо проявлений схемной немонотонности. В качестве примера на рис. 3.5 представлены изолинии вихря и плотности для момента времени $t = 1,6 T$, где T — период Вайселя—Брента, определяемый



Р и с. 3.6

как $2\pi(\alpha g)^{-0,5}$, $\alpha = (\partial \rho_s / \partial z) / \rho_0$. Эти решения соответствуют линейной стратификации $\rho_s(z) = \rho_0(1 - \alpha z)$ и начальным данным

$$\bar{p}(0, x, y) = -y, \quad x^2 + y^2 \leq 1,$$

$$\bar{p}(0, x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 > 1.$$

Они были получены в прямоугольной области $0 \leq x \leq L_x$, $0 \leq |y| \leq L_y$ с использованием алгоритма для уравнений (3.9) и граничных условий на внешней границе экстраполяционного типа.

Примером применения алгоритма с коррекцией давления могут служить результаты численного решения задачи, аналогичной задаче о "пятне", но в случае, когда перемешанная в начальный момент жидкость турбулизована [109]; эта задача рассматривается также в [107].

На рис. 3.6 приведены изолинии энергии турбулентности $e = \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}$ (рис. 3.6, а), а также моментов второго порядка $v'w'$, $u'w'$ при $t = 0,5T$ (рис. 3.6, б, в). В этих расчетах использовались уравнения Рейнольдса (3.1) с полуэмпирической моделью (3.2), несколько модифицированной в связи с учетом сил плавучести.

3.2. Численное моделирование спектров поверхностного волнения

Математические модели: уравнения кинематики поверхностных волн и уравнение для спектров. Другим примером возможности применения компактных аппроксимаций третьего порядка является численное моделирование возмущения спектров поверхностного волнения, возникающих при наличии течений в приповерхностном слое. Существенную роль при описании этого явления играют уравнения кинематики поверхностных волн [110]

$$\partial \mathbf{k} / \partial t + \nabla(\sigma_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad (3.10)$$

где \mathbf{k} — волновой вектор, \mathbf{u} — вектор горизонтальной скорости на поверхности, предполагаемый известным, а $\sigma_0(\mathbf{k})$ — собственная частота поверхностных волн, определяемая из дисперсионного соотношения. Для глубокой воды $\sigma_0(\mathbf{k}) = (g|\mathbf{k}|)^{1/2}$ [110].

Уравнения (3.10) могут иметь нестационарные решения типа перемещающихся разрывов, напоминающие решения уравнений $\partial u/\partial t + \partial u^2/\partial x = 0$.

Действительно, пусть, например, в декартовой системе координат (x, y) все функции зависят только от x и y -компонента вектора \mathbf{k} равна нулю. Тогда уравнение (3.10) запишется в виде

$$\partial k/\partial t + (\partial/\partial x)(\sigma_0(k) + k u(x)) = 0, \quad (3.11)$$

где через k обозначена x -компонента вектора \mathbf{k} , а $u(x)$ – некоторая заданная функция, описывающая скорость течения в приповерхностном слое. Характеристика (3.11) описывается равенством

$$dx/dt = c_g + u(x), \quad (3.12)$$

где c_g – групповая скорость поверхностных волн, равная $0,5 \sqrt{g/k}$. В силу зависимости правой части (3.12) от координаты x возможны ситуации, когда характеристики в плоскости (x, t) пересекаются, приводя в некоторый момент времени к формированию разрыва. Скорость его распространения определяется отношением

$$(\omega_r - \omega_l)/(k_r - k_l), \quad (3.13)$$

в котором индексами r и l обозначены значения $\omega = \sigma_0(k) + k u$ и k справа и слева от разрыва.

В двумерном случае уравнения (3.10) могут быть записаны в недивергентной форме:

$$\frac{\partial k_x}{\partial t} + (c_{gx} + u) \frac{\partial k_x}{\partial x} + (c_{gy} + v) \frac{\partial k_x}{\partial y} + k_x \frac{\partial u}{\partial x} + k_y \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial k_y}{\partial t} + (c_{gx} + u) \frac{\partial k_y}{\partial x} + (c_{gy} + v) \frac{\partial k_y}{\partial y} + k_x \frac{\partial u}{\partial y} + k_y \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

(3.14)

где u и v – компоненты вектора \mathbf{u} , $c_{gx} = \partial \sigma/\partial k_x$, $c_{gy} = \partial \sigma/\partial k_y$.

Решения (3.11) или (3.14) могут быть использованы для определения изменения энергетических характеристик поверхностных волн при возникновении поля скоростей $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

Например, эти решения позволяют найти изменения спектрального распределения плотности волнового действия $A(x, y, \mathbf{k}, t) = F(x, y, \mathbf{k}, t)/\sigma_0(\mathbf{k})$, где $F(x, y, \mathbf{k}, t)$ – пространственный спектр.

Для функции $A(x, y, \mathbf{k}, t)$ построено уравнение переноса вида [111, 112]

$$\partial A/\partial t + (c_{gx} + u) \partial A/\partial x + (c_{gy} + v) \partial A/\partial y = F, \quad (3.15)$$

где правая часть F должна учитывать различные источники потерь и поступления энергии к поверхностным волнам. Ввиду невозможности достаточно точного описания этих источников в [112] использовано их описание в виде

$$F = \alpha(k_x, k_y)(A - A^2/A_0), \quad (3.16)$$

где $A_0(k)$ – невозмущенное распределение спектральной плотности волн

нового действия, а $\alpha(k_x, k_y)$ — некоторая полуэмпирическая зависимость. Не обсуждая правомерность такого представления (некоторые соображения по этому поводу содержатся, например, в [111]), уравнение (3.15) с правой частью (3.16) можно рассматривать как некоторую математическую модель.

Разностные схемы. Используя разложение функции $\omega = \sigma_0 + ki$ вида

$$\omega^{m+1} = \omega^m + \frac{\partial \omega^m}{\partial k_x} (k_x^{m+1} - k_x^m) + \frac{\partial \omega^m}{\partial k_y} (k_y^{m+1} - k_y^m) + O(\tau^2),$$

где индекс m означает, что функция рассматривается при $t = t_m$, и применяя операторы $\delta_x = A_x^{-1} \Delta_x$ и $\delta_y = A_y^{-1} \Delta_y$, в которых параметры s_x и s_y равны соответственно $\text{sgn}(c_{gx} + u)$ и $\text{sgn}(c_{gy} + v)$, итерационную схему для (3.14) можно записать следующим образом:

$$(E + \tau \sigma \delta_x a)(k_x^{m+1, q+1} - k_x^m) + \tau \delta_x \omega^m + \tau \delta_x b(k_y^{m+1, q} - k_y^m) = 0, \quad (3.17)$$

$$(E + \sigma \tau \delta_y b)(k_y^{m+1, q+1} - k_y^m) + \tau \delta_y \omega^m + \tau \delta_y a(k_x^{m+1, q} - k_x^m) = 0.$$

В (3.17) индекс q означает номер итерации, $a = (c_{gx} + u)^m$, $b = (c_{gy} + v)^m$. Итерации при фиксированном номере m сводятся к определению $k_x^{m+1, q+1}$ из первого уравнения (3.17), после чего найденные значения используются для определения $k_y^{m+1, q+1}$ из второго уравнения (3.17). Применяя метод Фурье, легко установить, что в случае постоянных коэффициентов собственные значения λ оператора перехода имеют вид

$$\lambda = r_1 r_2 a b W(\alpha) W(\beta) [1 + r_1 a W(\alpha)]^{-1} [1 + r_2 b W(\beta)]^{-1},$$

где $W(\alpha)$ и $W(\beta)$ — функции, определенные формулами (1.12) из гл. 1, а $r_1 = \tau/h_x$, $r_2 = \tau/h_y$. Отсюда в силу неравенств $a \text{Re } W(\alpha) \geq 0$, $b \text{Re } W(\beta) \geq 0$ следует сходимость итераций при любых значениях τ . Консервативность схемы (3.1) позволяет использовать ее в случае разрывных решений.

Для недивергентного уравнения (3.15) соответствующая факторизованная схема может быть записана в виде

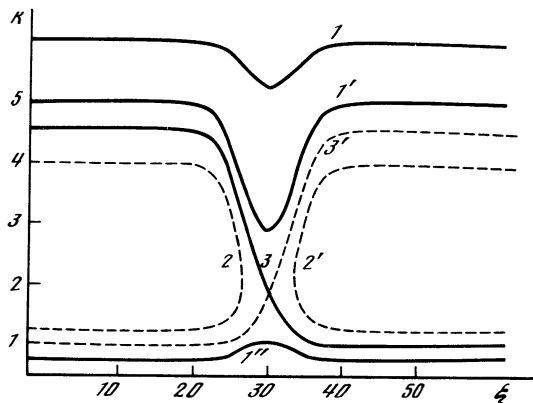
$$(E + \tau \sigma a \delta_x)(E + \tau \sigma b \delta_y)(A^{m+1} - A^m)/\tau + (a \delta_x + b \delta_y)A^m = \\ = \alpha(A^{m+1} - A^m A^{m+1}/A_0). \quad (3.17)$$

Процесс обращения одномерных операторов для этого случая описан выше. Напомним, что при решении уравнения $\xi + \tau \sigma a A_x^{-1} \Delta_x \xi = f$ относительно сеточной функции ξ следует ввести новую функцию $m_\xi = A_x^{-1} \Delta_x \xi$, а затем записать для нее трехточечное уравнение

$$A_x m_\xi = \Delta_x (f - \tau \sigma a m_\xi).$$

Такого же типа схема может быть использована для недивергентных уравнений (3.14).

Примеры расчетов. Одним из примеров применения описанных алгоритмов может служить решение одномерной задачи об определении изменения компоненты k_x волнового вектора под воздействием перемещающегося

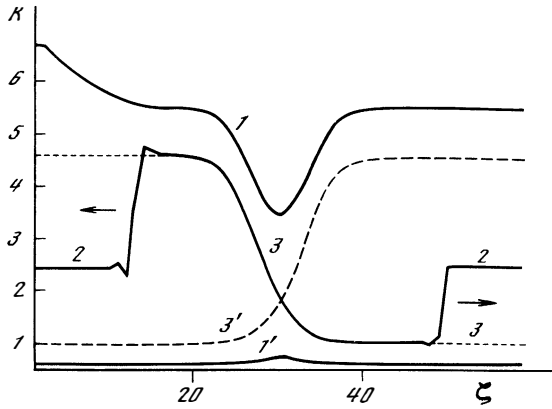


Р и с. 3.7

с постоянной скоростью поля скорости $u(x - Dt)$. Введя новую переменную $\xi = x - Dt$, уравнение (3.11) для этого случая можно записать в виде

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} [\sqrt{gk} + k(u(\xi) - D)] = 0, \quad k = k_x. \quad (3.18)$$

Стационарные решения (3.18) для каждого значения ξ удовлетворяют квадратному уравнению $\sqrt{gk} + k(u - D) = a$. Вид этих решений для функции $u(\xi) = u_0 \exp(-a\xi^2)$ приведен на рис. 3.7 для различных значений a в некоторых условных единицах. На рис. 3.7 видно, что лишь кривые, расположенные вне сепаратрис 3 и $3'$ (например, $1, 1', 1''$), определены при всех значениях ξ . Принято считать, что кривые, расположенные между сепаратрисами 3 и $3'$ (например, кривые 2 и $2'$), соответствуют блокировке волновых пакетов движущимся полем $u(\xi)$ (см., например, [113]). Нижняя ветвь этих кривых, как можно показать, описывает движение пакетов в положительном направлении оси ξ ($c_g + u - D > 0$), а верхняя ветвь — движение в отрицательном направлении ($c_g + u - D < 0$). Однако эвристический анализ решений уравнения (3.18) показывает, что к такому режиму невозможно прийти от некоторого начального непрерывного распределения $k(0, \xi)$, решая задачу Коши для этого уравнения стандартными методами. Действительно, пусть, для определенности, $k(0, \xi) = k_2$, так что $k_3 < k_2 < k_3'$, где индексы 3 и $3'$ отмечают значения $k(\xi)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ у сепаратрис 3 и $3'$. Тогда в течение некоторого начального интервала времени будет происходить изменение решения $k(t, \xi)$ вдоль характеристик (3.12) на интервале $|\xi| < \xi_0$, где $u_0 \neq 0$. Это изменение будет происходить до тех пор, пока решение не выйдет на стационарную кривую, для которой $\partial k / \partial t = 0$. Однако в некоторой окрестности начала координат $\xi = 0$ такими кривыми могут быть лишь сепаратрисы 3 и $3'$. Вследствие этого в какой-то момент времени одна часть решения $k(t, \xi)$ окажется на сепаратрисе, а другая при больших значениях $|\xi|$ — на линии $k = k(0, \xi)$. Этим частям будут соответствовать различные значения $\omega = \sqrt{gk} + k(u - D)$, что в силу исходного уравнения $\partial k / \partial t + \partial \omega / \partial x = 0$



Р и с. 3.8

вызовет перемещение участков кривой $k = k(t, \xi)$ либо в виде разрывов (при пересечении характеристик (3.12)), либо в виде непрерывной зависимости от ξ (в случае веера характеристик), причем скорость перемещения разрыва должна определяться равенством (3.13). Таким образом, можно ожидать, что через некоторое конечное время в конечной окрестности $\xi = 0$ решение $k(t, \xi)$ совпадет с одной из сепаратрис. Более глубокий анализ показывает, что устойчивым является лишь состояние, описываемое сепаратрисой 3. На рис. 3.7 пунктиром отмечены решения, которые в соответствии с приведенными выше рассуждениями не могут быть получены в результате решения задачи Коши.

Расчеты [114] подтвердили эти выводы и выявили существование разрывных решений (3.18). На рис. 3.8 в тех же единицах, что и на рис. 3.7, приведены функции $k(t, \xi)$ для некоторых фиксированных моментов времени, полученные из начальных состояний $k(0, \xi) = \text{const}$. Эти начальные состояния могут быть восстановлены по значениям k на левой или правой границах рисунка, а цифры около кривых обозначают те же типы кривых, что и на рис. 3.7. Кривая 2 иллюстрирует движение разрывов (направление указано стрелками), возникших из начальных данных $k(0, \xi) = k_2$. Спустя некоторое время скачки выйдут за пределы расчетной области и решение, не зависящее от времени, будет описываться сепаратрисой 3. Таким образом, рассматриваемое возмущение $u(\xi)$ как бы уничтожает волновые пакеты с волновыми числами, находящимися в интервале между волновыми числами для сепаратрис 3 и 3' при $|\xi| \rightarrow \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пейре Р., Тейлор Т.Д.* Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Л.: Гидрометеиздат, 1986. 320 с.
2. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика М.: Мир, 1980. 616 с.
3. *Годунов С.К., Рябенский В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1973. 400 с.
4. *Толстых А.И.* Об одном методе численного решения уравнений Навье—Стокса сжимаемого газа // Учен. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3, № 6. С. 78—87.
5. *Толстых А.И.* О методе численного решения уравнений Навье—Стокса сжимаемого газа в широком диапазоне чисел Рейнольдса // Докл. АН СССР. 1983. Т. 210, № 2. С. 48—51.
6. *Толстых А.И.* О сгущении узлов разностных сеток в процессе решения и применении схем повышенной точности при численном исследовании течений вязкого газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1978. Т. 18, № 1. С. 139—153.
7. *Яненко Н.Н., Данаев Н.Г., Лисейкин В.Д.* О вариационном методе построения сеток // Числен. методы механики сплош. среды. 1977. Т. 8, № 4. С. 157—164.
8. *Ковеня В.М., Яненко Н.Н.* Методы расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. 303 с.
9. *Данаев И.Т.* Об одном способе построения криволинейных сеток, сгущающихся в области больших градиентов // Числен. методы механики сплош. среды. 1979. Т. 10, № 4. С. 60—74.
10. *Chu W.H.* Development of a general finite difference approximation for a general domain. I. Machine transformation // J. Comput. Phys. 1971. Vol. 12, N 2. P. 392—403.
11. *Годунов С.К., Прокопов Г.П.* Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1972. Т. 12, № 2. С. 429—440.
12. *Thompson I.F., Thames F.G., Martin C.W.* Automatic numerical generation of a body-fitted curvilinear coordinate system for a field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies // J. Comput. Phys. 1974. Vol. 15, N 2. P. 299—319.
13. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я.* и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
14. *Марчук Г.И., Шайдулов В.В.* Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979. 320 с.
15. *Белоцерковский О.М., Панарин А.И., Щенников В.В.* Метод параметрической коррекции разностных схем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24, № 1. С. 101—125.
16. *Русанов В.В.* Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180, № 6. С. 1303—1305.
17. *Burstein S.Z., Mirin A.* Third order difference methods for hyperbolic equations // J. Comput. Phys. 1968. Vol. 5, N 3. P. 547—557.
18. *Warming R., Kutler P., Lomax H.* Second and third order noncentered schemes for nonlinear hyperbolic equations // AIAA Journal. 1973. Vol. 11, N 2. P. 189—196.
19. *Балакин В.Б.* О методах типа Рунге—Кутты для уравнений газовой динамики // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1970. Т. 10, № 6. С. 1512—1519.
20. *Strang G.* Trigonometric polynomials and difference methods for maxi-

- mum accuracy // J. Math. Phys. 1962. Vol. 41, N 2. P. 147–154.
21. *Холодов А.С.* О построении разностных схем с положительными аппроксимациями для уравнений гиперболического типа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1978. Т. 18, № 6. С. 1476–1499.
 22. *Harten A., Enquist B., Osher S., Chakravarthy R.* Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes // J. Comput. Phys. 1987. Vol. 71, N 2. P. 231–303.
 23. *Тушева А.А., Шокин Ю.Н., Яненко Н.Н.* О построении разностных схем повышенного порядка аппроксимации на основе дифференциальных следствий // Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1975. С. 184–191.
 24. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике. М.: Наука, 1979. 592 с.
 25. *Грудницкий В.Т., Прохорчук Ю.А.* Один прием построения разностных схем с произвольным порядком аппроксимации для дифференциальных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. 1977. Т. 224, № 6. С. 1249–1252.
 26. *Самарский А.А.* О консервативных разностных схемах // Проблемы прикладной математики и механики. М.: Наука, 1971. С. 129–136.
 27. *Толстых А.И.* О разностных схемах повышенной точности для численного решения некоторых задач аэродинамики // Учен. зап. ЦАГИ. 1973. Т. 4, № 2. С. 36–44.
 28. *Толстых А.И.* О неявных разностных схемах третьего порядка точности для многомерных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1976. Т. 16, № 5. С. 1182–1190.
 29. *Толстых А.И.* О неявных схемах повышенной точности для систем уравнений // Там же. 1982. Т. 21, № 2. С. 339–354.
 30. *Krause E., Hirshel E.M., Cordula W.* Forth order "Mehrstellen" integration for three-dimensional turbulent boundary-layers // Proc. AIAA Comput. Fluid Dynamics Conf. Palm Springs (Cal.). 1973. P. 92–102.
 31. *Hirsh R.* Higher-order accurate difference solutions of a fluid mechanics problems by a compact differencing technique // J. Comput. Phys. 1975. Vol. 19, N 1. P. 90–109.
 32. *Rubin S.G., Graves R.A.* Viscous flow solutions with a cubic spline approximation // Comput. and Fluids. 1975. Vol. 3, N 1. P. 1–36.
 33. *Adam Y.* A hermitian finite difference method for the solution of parabolic equations // Comput. and Math. Appl. 1975. Vol. 1, N 3. P. 393–406.
 34. *Rubin S.G., Khosla P.K.* Polynomial interpolation methods for viscous flow calculations // J. Comput. Phys. 1977. Vol. 24, N 3. P. 217–244.
 35. *Ciment M., Leventhal S.H., Weinberg B.C.* The operator compact implicit method for parabolic equations // Ibid. 1978. Vol. 28, N 2. P. 135–166.
 36. *Berger A.E., Solomon J.M., Ciment M.* et al. Generalized OCI schemes for boundary layer problems // Math. Comput. 1980. Vol. 35, N 6. P. 695–731.
 37. *Collatz L.* The numerical treatment of differential equations. N.Y.: Springer, 1966. 526 p.
 38. *Хэмминг М.* Численные методы. М.: Наука, 1969. 400 с.
 39. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
 40. *Шокин Ю.И.* Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1979. 219 с.
 41. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 196 с.
 42. *Толстых А.И.* Об одной схеме третьего порядка и некоторых ее приложениях // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291, № 1. С. 45–49.
 43. *Kuttler P., Lomax H., Warming R.* Computation of a space shuttle flow fields using noncentered finite-difference schemes // AIAA Pap. 1972. N 72–193.
 44. *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47(89), вып. 3. С. 271–306.
 45. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 589 с.
 46. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 416 с.
 47. *Марчук Г.И.* Методы вычислитель-

- ной математики. М.: Наука, 1980. 536 с.
48. *Рябенский В.С.* Необходимые и достаточные условия хорошей обусловленности краевых задач для систем обыкновенных разностных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1964. Т. 4, № 2, С. 242–255.
 49. *Софронов И.А.* О методе прогонки для решения разностных краевых задач // Там же. С. 256–266.
 50. *Толстых А.И.* Метод внутренних итераций для решения пространственных задач с несамосопряженными операторами // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272, № 3. С. 538–541.
 51. *MacCormack R.W.* Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer // Lect. Notes Phys. 1971. Vol. 8. P. 151.
 52. Численное исследование современных задач газовой динамики / Под ред. О.М. Белоцерковского. М.: Наука, 1974. 397 с.
 53. Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. 463 с.
 54. *Бэтчелор Дж.* Теория однородной турбулентности. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 55 с.
 55. *Lauder B.E., Spalding D.B.* The numerical computation of turbulent flow // Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng. 1974. Vol. 3. P. 269.
 56. *Толстых А.И.* О численном расчете сверхзвукового обтекания затупленных тел потоком вязкого газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1966. Т. 6, № 1. С. 119–126.
 57. *Белоцерковский О.М.* Расчет обтекания осесимметричных тел с отходящей ударной волной (расчетные формулы и таблицы полей течения). М.: ВЦ АН СССР, 1961. 56 с.
 58. *Fay J.A., Riddell F.R.* Theory of stagnation point heat transfer of dissociation air // JAS. 1958. Vol. 25, N 2.
 59. *Kurrock J.W., Mates R.E.* Exact numerical solutions of the time-dependent compressible Navier–Stokes equations // AIAA Pap. 1966. N 66–30. P. 1–54.
 60. *Tannehill J.C., Mohling R.A., Raticich J.N.* Numerical computation of the hypersonic rarefied flow near the sharp leading edge of a flat plate // Ibid. 1973. N 73–200. P. 1–13.
 61. *Коган М.Н.* Динамика разреженных газов. М.: Наука, 1967. 440 с.
 62. *Becker M., Boylan D.E.* Flow field and surface pressure measurements in the fully merged and transition regimes on a cooled sharp flat plate // Rarefied Gas Dyn. Suppl. 4. 1967. N 2. P. 993–1014.
 63. *Ерофеев А.И., Перенухов В.А.* Расчет обтекания пластины, расположенной вдоль потока разреженного газа // Учен. зап. ЦАГИ. 1975. Т. 6, № 3. С. 51–57.
 64. *Белоцерковский О.М., Быркин А.П., Мазуров А.П., Толстых А.И.* Разностный метод повышенной точности для расчета течений вязкого газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1982. Т. 22, № 6. С. 1480–1490.
 65. *Быркин А.П.* Автомодельные течения вязкого газа в канале с тепло- и массообменом на стенке // Учен. зап. ЦАГИ. 1976. Т. 7, № 2. С. 25–36.
 66. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
 67. *Савельев А.Д., Толстых А.И.* Алгоритмы для расчета течений вязкого газа, основанные на компактных аппроксимациях третьего порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27, № 11. С. 1709–1724.
 68. *Li C.P.* A numerical study of separated flows induced by shock wave / boundary layer interaction // AIAA Pap. 1977. N 77–168. P. 1–8.
 69. *Beam R.M., Warming R.F.* An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations // Ibid. 1977. N 77–645. P. 1–10.
 70. *Hakkinen R.J., Greber I., Trilling L., Abarbarell S.S.* The interaction of an oblique shock wave with a laminar boundary layer: NASA Memo 2–18–59W. Wash. (D.C.), 1959. P. 1–15.
 71. *Браиловская И.Ю.* Расчет обтекания угла потоком вязкого сжимаемого газа // Изв. АН СССР. МЖТ. 1967. № 3. С. 82–91.
 72. *Allen J.C., Cheng S.I.* Numerical solution of the near wake of supersonic flow with boundary layer over a sharp corner // Phys. Fluids. 1970. Vol. 13, N 1. P. 115–123.
 73. *Быркин А.П., Толстых А.И.* Компактные схемы третьего и четвертого порядков в задачах о внутренних течениях вязкого и невяз-

- кого газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28, № 8. С. 1234–1251.
74. *Быркин А.П., Пономарев С.П., Кудрявцева Л.И.* Исследование течения газа в коллекторах (соплах) аэродинамических труб малых дозвуковых и околозвуковых скоростей // Учен. зап. ЦАГИ. 1987. Т. 18, № 2. С. 117–124.
 75. *Tamaki T., Tomida Y., Yamane R.* A study of pseudo-shock (1-st report) // Bull. ISME. 1970. Vol. 13, N 55. P. 47–58.
 76. *Кацкова О.Н., Наумова И.Н., Шмыглевский Ю.Д., Шулишина И.П.* Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений методом характеристик. М.: ВЦ АН СССР, 1961. С. 1–35.
 77. *Кудрявцева Л.И., Межиров И.И., Пономарев С.П., Якушева В.Л.* Экспериментальное исследование осесимметричных профилированных сопел при малых числах // Учен. зап. ЦАГИ. 1973. Т. 4, № 3. С. 123–126.
 78. *Thom A.* An investigation of fluid flow in two dimensions // R & M, 1928. N 1194. P. 1–18.
 79. *Woods L.* Note on the numerical solution of a fourth order differential equation // Aeronaut. Quart. 1954. N 5. С. 176–184.
 80. *Дородницын А.А.* Об одном методе решения задач обтекания тел вязкой жидкостью // Fluid Dynamics Trans. 1967. Vol. 3. P. 67–82.
 81. *Dorodnycyn A.A.* Review of methods for solving the Navier-Stokes equations // Lect. Notes Phys. 1973. Vol. 18. P. 23–47.
 82. *Дородницын А.А., Меллер Н.А.* О некоторых подходах к решению стационарных уравнений Навье–Стокса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1968. Т. 8, № 2. С. 393–402.
 83. *Lecoq Y., Piquet J.* On the use of several compact methods for the study of unsteady incompressible viscous flow around a circular cylinder // Comput. and Fluids. 1984. Vol. 12, N 4. P. 255–281.
 84. *Толстых А.И.* О расчете течений несжимаемой жидкости при помощи компактных схем третьего порядка // Проблемы прикладной математики и информатики. М.: Наука, 1987. С. 70–82.
 85. *Дзюба Ю.В., Толстых А.И.* Компактные схемы третьего порядка точности в задачах аэродинамики // Вычислительная аэродинамика. М.: Наука, 1987. С. 128–139.
 86. *Каменкович В.М.* К теории инерционно-вязкого пограничного слоя в двумерной модели океанических течений // Изв. АН СССР. ФАО. 1966. Т. 2, № 12. С. 1274–1295.
 87. *Каменкович В.М., Белоцерковский С.О., Пантелеев Н.С.* К вопросу о численном моделировании баротропных течений, порожденных крупномасштабным полем ветра. М.: ИО АН СССР, 1985. С. 3–23. (Изв. ПОЛИМОДЕ; Вып. 15).
 88. *Arakawa A.* Computational design for longterm numerical integration for the equation of fluid motion: two-dimensional incompressible flow. Pt. I // J. Comput. Phys. 1966. N 1. P. 119–143.
 89. *Harlow F., Welch J.* Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow with free surface // Phys. Fluids. 1966. Vol. 9, N 12. P. 2182–2189.
 90. *Amsden A.A., Harlow F.H.* The SMAC method: Los Alamos Sci. Lab. Rep. N. LA-4370. Los Alamos, 1970.
 91. *Белоцерковский О.М., Гушин В.А., Щеников В.В.* Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15, № 1. С. 197–207.
 92. *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 520 с.
 93. *Рыков В.В.* Численное моделирование нестационарных течений несжимаемой жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25, № 5. С. 789–793.
 94. *Владимирова Н.Н., Кузнецов Б.Г., Яненко Н.Н.* Численные расчеты симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости // Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1966. С. 186–192.
 95. *Chorin A.* Numerical solutions of Navier-Stokes equations // Math. Comput. 1968. Vol. 22, N 7. P. 745–762.

96. *Choi D., Merkle C.L.* Application of time-iterative schemes to incompressible flow // *AIAA Journal*. 1985. Vol. 23, N 10. P. 1518–1524.
97. *Merkle C.L., Athavall M.* Time-accurate unsteady incompressible flow algorithms based on artificial compressibility // *AIAA Pap.* 1987. N 87–1137. P. 1–12.
98. *Rubin S.G., Reddy D.R.* Analysis of global pressure relaxation for flows with strong interaction and separation // *J. Comput. and Fluids*. 1983. Vol. 11, N 4. P. 281–306.
99. *Israelli M., Lin A.* Iterative numerical solutions and boundary conditions for the parabolized Navier-Stokes equations // *J. Comput. and Fluids*. 1985. Vol. 13, N 4. P. 397–409.
100. *Федоренко Р.П.* О скорости сходимости одного итерационного процесса // *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 1964. Т. 4, № 3. С. 559–564.
101. *Бахвалов Н.С.* О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор // *Там же*. 1966. Т. 6, № 5. С. 861–881.
102. *Brandt A., Dinar N.* Multigrid solution to elliptic flow problems // *Numerical methods for PDE's*. N.Y.: Acad. press, 1979. P. 53–147.
103. *Young J., Hirt C.* Numerical calculation of internal wave motions // *J. Fluid Mech.* 1972. Vol. 56, N 2. P. 256–276.
104. *Dugan J., Warn-Varnas A., Piacsec S.* Numerical results for laminar mixed region collapse in density stratified fluid // *Comput. and Fluids*. 1976. Vol. 4, N 2. P. 109–121.
105. *Гушин В.А.* Метод расщепления для задач динамики неоднородной вязкой несжимаемой жидкости // *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 1981. Т. 21, № 4. С. 1003–1017.
106. *Бабаков А.В.* Применение метода потоков к одной задаче динамики вязкой стратифицированной жидкости // *Там же*. 1983. Т. 23, № 2. С. 432–439.
107. *Даниленко А.Ю., Костин В.И., Толстых А.И.* О невязном алгоритме расчета течений однородной и неоднородной жидкости. М.: ВЦ АН СССР, 1985. 30 с.
108. *Баренблатт Г.И.* Динамика турбулентных пятен и интрузии в устройстве стратифицированной жидкости // *Изв. АН СССР. ФАО*. 1978. Т. 14, № 2, С. 195–205.
109. *Лыткин Ю.М., Черных Г.Г.* Подобие течения по плотностному числу Фруда и баланс энергии при эволюции зоны турбулентного смешения в стратифицированной среде // *Математические проблемы механики сплошных сред*. Новосибирск: Наука, 1980. Вып. 47. С. 70–89.
110. *Филлипс Ю.М.* Динамика верхнего слоя океана. М.: Мир, 1969. 267 с.
111. *Басович А.Я., Баханов В.В., Галанов В.И.* Влияние интенсивных внутренних волн на ветровое волнение (кинематическая модель) // *Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность*. Горький: ИПФ АН СССР, 1982. С. 8–30.
112. *Hughes В.А.* The effect of internal waves on surface wind waves. Theoretical analysis // *J. Geophys. Res.* 1978. Vol. 83, N 1. P. 455–465.
113. *Басович А.Я.* Трансформация спектра поверхностного волнения под действием внутренней волны // *Изв. АН СССР. ФАО*. 1979. Т. 15, № 6.
114. *Воляк К.И., Даниленко А.Ю., Толстых А.И., Шуган И.В.* О разрывных решениях для волн в неоднородно движущейся среде // *Крат. сообщ. по физике ФИАН*. 1990. № 5. С. 15–18.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	4
1. О разностных методах повышенной точности в аэродинамике	4
2. Некоторые способы построения сеток, адаптирующихся к решениям	7
3. Приемы построения схем высокого порядка	9
Глава 1. Структура и анализ компактных схем третьего порядка	14
1. Компактные схемы с направленными разностями для одномерных уравнений переноса	14
1.1. Формулы компактного численного дифференцирования третьего порядка и основанные на них схемы	14
1.2. Компактные схемы как аппроксимации законов сохранения	18
1.3. Дисперсионные и диссипативные свойства аппроксимаций $A^{-1}\Delta$	20
1.4. Разностные уравнения	24
1.5. Аппроксимация производных по времени. Компактные схемы для нестационарных задач	27
1.6. О двухслойной схеме третьего порядка относительно τ и h	31
1.7. Примеры сквозного счета разрывных решений	33
1.8. Компактные схемы третьего порядка для гиперболических систем	37
1.9. Исследование устойчивости	44
2. Компактные схемы с направленными разностями при наличии диффузионных членов	48
2.1. Способы введения разностных аналогов диффузии	48
2.2. Разностные уравнения	54
2.3. Примеры расчетов для уравнений с малыми коэффициентами при старших производных	62
2.4. Компактные схемы для систем уравнений с диффузионными членами	68
2.5. Применение внутренних итерационных процессов	75
3. Применение компактных аппроксимаций в многомерных задачах	80
3.1. Неявные компактные схемы в случае нескольких пространственных координат	80
3.2. Схемы покоординатного расщепления: стационарные задачи	88
3.3. Повышение устойчивости алгоритма для стационарных многомерных задач	94
4. Другие подходы к построению схем третьего и более высоких порядков	103
4.1. Аппроксимация уравнений, записанных в недивергентном виде	103
4.2. Повышение порядка несимметричных компактных аппроксимаций	107
4.3. Симметризация схем третьего порядка. Центрированные компактные схемы четвертого порядка	117
Глава 2. Компактные аппроксимации в задачах о течениях вязкого газа	125
1. Исходные уравнения. Разностные сетки	126
1.1. Уравнения вязкого газа и их упрощенные формы	126
1.2. О применении сеток, сгущающихся в областях быстрого изменения решений	132

2. Применение итерационно-маршевых алгоритмов с адаптирующимися сетками	134
2.1. Структура алгоритмов	134
2.2. Примеры расчетов с использованием адаптирующихся сеток	139
3. Алгоритмы расщепления по пространственным координатам	146
3.1. Схемы с компактными аппроксимациями третьего порядка	146
3.2. Схемы с центрированными аппроксимациями	155
3.3. Сравнение численных и известных решений. Тестовые задачи	158
4. Примеры применения алгоритмов расщепления с компактными аппроксимациями	163
4.1. Задачи внешнего обтекания. Отрывные течения	163
4.2. Задачи о внутренних течениях	168
5. Применение компактных аппроксимаций в упрощенных уравнениях Навье–Стокса	174
5.1. Маршевые алгоритмы для стационарных задач	174
5.2. Примеры расчетов	180
Г л а в а 3. Компактные аппроксимации в задачах о течениях несжимаемой жидкости	182
1. Формы уравнений Навье–Стокса. Алгоритмы для определения вихря и функции тока	183
1.1. О численном моделировании течений несжимаемой жидкости	183
1.2. Аппроксимация уравнений Навье–Стокса для переменных вихрь–функция тока	187
1.3. Примеры расчетов	192
2. Алгоритмы для переменных скорости–давления	197
2.1. Неявный метод с коррекцией давления	197
2.2. Схемы, основанные на методе искусственной сжимаемости	204
2.3. Маршевые алгоритмы	206
3. Компактные аппроксимации в некоторых приближенных моделях несжимаемой жидкости	211
3.1. Турбулентные течения. Учет массовых сил	211
3.2. Численное моделирование спектров поверхностного волнения	217
Литература	222

CONTENTS

Foreword	3
Introduction	4
1. High accuracy methods in fluid dynamics	4
2. Some ways of constructing meshes which adapt to solution	7
3. Methods of constructing high order schemes	9
Chapter 1. Structure and analysis of the third order compact schemes	14
1. Compact schemes with non-centered differences for one-dimensional convection equations.	14
1.1. The third order compact differencing formulas and corresponding schemes	14
1.2. Compact schemes and approximations of conservation laws	18
1.3. Dispersion and dissipation properties of $A^{-1} \Delta$ operator	20
1.4. Difference equations	24
1.5. Time discretization. Compact schemes for unsteady problems	27
1.6. Two-level the third order scheme with respect to τ and h	31
1.7. Examples of shock-capturing computations	33
1.8. The third order compact schemes for hyperbolic systems	37
1.9. Investigation of stability	44
2. Non-centered compact schemes for equations with diffusion terms	48
2.1. Discretization of diffusion terms	48
2.2. Difference equations	54
2.3. Examples of computations for small diffusion coefficients	62
2.4. Compact schemes for systems of equations with diffusion terms	68
2.5. The use of internal iterations	75
3. Compact approximations in multidimensional problems.	80
3.1. Implicit compact schemes in case of several space coordinates	80
3.2. Coordinate splitting: steady problems	88
3.3. The way of increasing stability for steady multidimensional problems	94
4. Other approaches to constructing of the third order and higher than third order schemes	103
4.1. Discretization of equations in non-divergent forms	103
4.2. The increase of accuracy order of non-symmetric compact approximations.	107
4.3. Symmetrization of the third order schemes. The fourth order centered compact schemes	117
Chapter 2. Compact approximations in viscous gas flow problems	125
1. Equations, Difference meshes	126
1.1. Viscous gas equations and their simplified forms	126
1.2. The use of the grids which condense in high gradient regions	132
2. Iterative-marching algorithms with adaptive grids.	134
2.1. The structure of the algorithm	134
2.2. Examples of computations.	139
3. Coordinate splitting algorithms	146
3.1. The third order compact schemes.	146
3.2. The schemes with centered approximations	155
3.3. The comparison of numerical and known solutions. Test problems	158

4.	Examples of applications of the algorithms with compact approximations	163
4.1.	External flow problems. Separated flows	163
4.2.	Internal flow problems	168
5.	Compact approximations for simplified Navier–Stokes equations	174
5.1.	Marching algorithm	174
5.2.	Examples of computations	180
Chapter 3.	Compact approximations for incompressible flows	182
1.	The forms of Navier–Stokes equations. Algorithms for vorticity–stream function.	183
1.1.	On numerical simulation of incompressible flows	183
1.2.	Approximations of Navier–Stokes equations for vorticity–stream function formulation	187
1.3.	Examples of computations.	192
2.	Algorithms for primitive variables formulation	197
2.1.	Implicit method with pressure correction	197
2.2.	Schemes based on artificial compressibility	204
2.3.	Marching algorithms	206
3.	Compact approximations in some models of incompressible flows	211
3.1.	Turbulent flows. Approaches with gravity forces	211
3.2.	Numerical simulation of surface waves spectra	217
References.	222

Научное издание

Толстых Андрей Игоревич

**КОМПАКТНЫЕ
РАЗНОСТНЫЕ
СХЕМЫ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ
В ЗАДАЧАХ
АЭРОГИДРОДИНАМИКИ**

*Утверждено к печати
Вычислительным центром
АН СССР*

Художник *А.Г. Кобрин*
Художественный редактор *В.Ю. Яковлев*
Технические редакторы *Н.М. Бурова, Г.П. Каренина*
Корректор *Л.А. Агеева*

Набор выполнен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 47078

Подписано к печати 08.10.90. Формат 60 × 90 1/16
Бумага офсетная № 1. Гарнитура Пресс-Роман
Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,5. Усл. кр.-отт. 14,8
Уч.-изд. л. 16,2. Тираж 1380 экз. Тип. зак. 761
Цена 3 р. 30 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука"
117864 ГСП-7, Москва В-485,
Профсоюзная ул., д. 90

Ордена Трудового Красного Знамени
1-я типография издательства "Наука"
199034, Ленинград В-34, 9-я линия, 12

