Анри Пуанкаре

О НАУКЕ

Перевод с французского

Под редакцией
Л. С. ПОНТРЯГИНА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1990

ББК 22.1г
П88
УДК 51(091)

Пуанкаре А. О науке: Пер. с фр./Под ред. Л. С. Понтрягина.— 2-е изд., стер.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.— 736 с.— ISBN 5-02-014328-6.

Включает четыре произведения выдающегося французского математика Анри Пуанкаре (1854—1912): «Наука и гипотеза», «Ценность науки», «Наука и метод» и «Последние мысли», которые посвящены рассмотрению путей познания в математике, механике и физике.

1-е изд.— 1983 г.

Для математиков, физиков, механиков, философов.

П $\frac{1602010000-003}{053(02)-90}$ 29-90

ISBN 5-02-014328-6

ОТ РЕДАКТОРА

Одно из самых ярких и глубоких впечатлений моих юных лет связано с работами великого французского ученого Анри Пуанкаре, посвященными научному творчеству и развитию науки. С годами это впечатление не потускнело. Я уверен, что для формирования научной молодежи, творчески работающей в области математики, физики, механики и, разумеется, философии, эти работы имеют непреходящее значение. Да и для всякого, кого волнуют философско-методологические проблемы развития науки, играющей такую важную роль в современном обществе, они полны живейшего интереса.

К сожалению, русские издания книг «Наука и гипотеза», «Ценность науки», «Наука и метод», «Последние мысли», о которых идет речь, давно уже стали библиографической редкостью. Лишь отдельные фрагменты из них были включены в трехтомное издание избранных трудов А. Пуанкаре, вышедшее в 1974 г.

Таковы причины, побудившие меня внести предложение о выпуске сборника упомянутых работ. Эта идея была поддержана Редакционно-издательским советом Академии наук СССР, утвердившим решение о включении сборника в план изданий Главной редакции физико-математической литературы.

В настоящее издание включены целиком книги «Наука и гипотеза» и «Ценность науки». Из книги «Наука и метод» исключен третий раздел, совпадающий со статьей «Динамика электрона», которая вошла в третий том избранных трудов А. Пуанкаре. Из книги «Последние мысли» исключена по той же причине шестая глава «Гипотеза квантов». Зато сборник дополнен докладом «Новая механика», прочитанным Пуанкаре в 1909 г. в Гёттингене, и посмертно изданной его статьей «Новые концепции материи», впервые публикуемой на русском языке (перевод В. К. Сусленко). При издании остальных работ использованы прежние переводы, текстологически обработанные с целью уточнения и исправления отдельных мест, улучшения стилистики и осовременивания русской терминологии. По книгам «Наука и метод» и «Последние мысли» эта работа проведена Т. Д. Блохинцевой и А. С. Шибановым. Что же касается двух первых книг Пуанкаре «Наука и гипотеза» и «Ценность науки», то была использована находившаяся в распоряжении издательства текстологическая обработка их переводов, выполненная ранее С. Г. Суворовым.

Необходимый критический разбор взглядов Пуанкаре с позиций марксистско-ленинской методологии дается в статье М. И. Панова, А. А. Тяпкина и А. С. Шибанова. Он органически соединен с описанием исторической обстановки создания работ Пуанкаре и читается с большим интересом.

Л. С. Понтрягин

НАУКА
И ГИПОТЕЗА

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Для поверхностного наблюдателя научная истина не оставляет места никаким сомнениям: логика науки непогрешима, и если ученые иногда ошибаются, то это потому, что они забывают логические правила.

Математические истины выводятся из небольшого числа очевидных предложений при помощи цепи непогрешимых рассуждений: эти истины присущи не только нам, но и самой природе. Они, так сказать, ставят границы свобод творца и позволяют ему делать выбор только между несколькими относительно немногочисленными решениями. Тогда нескольких опытов будет достаточно, чтобы раскрыть нам, какой выбор им сделан. Из каждого опыта с помощью ряда математических дедукций можно вывести множество следствий, и таким образом каждый из них позволит нам познать некоторый уголок Вселенной.

Вот в таком виде представляется широкой публике или учащимся, получающим первые познания по физике, происхождение научной достоверности. Так они понимают роль опыта и математики. Так же понимали ее сто лет тому назад и многие ученые, мечтавшие построить мир, заимствуя из опыта возможно меньше материала.

Но, вдумавшись, заметили, что математик, а тем более экспериментатор, не может обойтись без гипотезы. Тогда возник вопрос, достаточно ли прочны все эти построения, и явилась мысль, что при малейшем дуновении они могут рухнуть. Быть скептиком такого рода значит быть только поверхностным. Сомневаться во всем, верить всему — два решения, одинаково удобные: и то и другое избавляет нас от необходимости размышлять.

Итак, вместо того чтобы произносить огульный приговор, мы должны тщательно исследовать роль гипотезы; мы узнаем тогда, что она не только необходима, но чаще всего и законна. Мы увидим также, что есть гипотезы разного рода: одни допускают проверку и, подтвержденные опытом, становятся плодотворными истинами; другие, не приводя нас к ошибкам, могут быть полезными, фиксируя нашу мысль, наконец, есть гипотезы, только кажущиеся таковыми, но сводящиеся к определениям или к замаскированным соглашениям.

Последние встречаются главным образом в науках математических и соприкасающихся с ними. Отсюда именно и проистекает точность этих наук; эти условные положения представляют собой продукт свободной деятельности нашего ума, который в этой области не знает препятствий. Здесь наш ум может утверждать, так как он здесь предписывает; но его предписания налагаются на нашу науку, которая без них была бы невозможна, они не налагаются на природу. Однако произвольны ли эти предписания? Нет; иначе они были бы бесплодны. Опыт предоставляет нам свободный выбор, но при этом он руководит нами, помогая выбрать путь, наиболее удобный. Наши предписания, следовательно, подобны предписаниям абсолютного, но мудрого правителя, который советуется со своим государственным советом.

Некоторые были поражены этим характером свободного соглашения, который выступает в некоторых основных началах наук. Они предались неумеренному обобщению и к тому же забыли, что свобода не есть произвол. Таким образом, они пришли к тому, что называется *номинализмом*, и пред ними возник вопрос, не одурачен ли ученый своими определениями и не является ли весь мир, который он думает открыть, простым созданием его прихоти[1]). При таких условиях наука была бы достоверна, но она была бы лишена значения.

Если бы это было так, наука была бы бессильна. Но мы постоянно видим перед своими глазами ее плодотворную работу. Этого не могло бы быть, если бы она не открывала нам чего-то реального; но то, что она может постичь, не суть вещи в себе, как ду-

[1]) См. Le Roy. Science et Philosophie//Revue de Metaphysique et de Morale. — 1901.

мают наивные догматики, а лишь отношения между вещами; вне этих отношений нет познаваемой действительности.

Таково заключение, к которому мы придем; но для этого нам придется подвергнуть беглому обзору ряд наук от арифметики и геометрии до механики и экспериментальной физики.

Какова природа умозаключения в математике? Действительно ли она дедуктивна, как думают обыкновенно? Более глубокий анализ показывает нам, что это не так, — что в известной мере ей свойственна природа индуктивного умозаключения и потому-то она столь плодотворна. Но от этого она не теряет своего характера абсолютной строгости, что прежде всего мы и покажем.

Познакомившись ближе с одним из орудий, которые математика дает в руки естествоиспытателя, мы обратимся к анализу другого основного понятия — понятия математической величины. Находим ли мы ее в природе или сами вносим ее в природу? И в последнем случае не подвергаемся ли мы риску все извращать? Сличая грубые данные наших чувств и то крайне сложное и тонкое понятие, которое математики называют величиной, мы вынуждены признать их различие; следовательно, эту раму, в которую мы хотим заключить все, создали мы сами; но мы создали ее не наобум, мы создали ее, так сказать, по размеру и потому-то мы можем заключать в нее явления, не искажая в существенном их природы.

Другая рама, которую мы налагаем на мир, — это пространство. Откуда происходят первоначальные принципы геометрии? Предписываются ли они логикой? Лобачевский, создав неевклидовы геометрии, показал, что нет. Не открываем ли мы пространства при помощи наших чувств? Тоже нет, так как то пространство, которому могут научить нас наши чувства, абсолютно отлично от пространства геометра. Проистекает ли вообще геометрия из опыта? Глубокое исследование покажет нам, что нет. Мы заключим отсюда, что эти принципы суть положения условные; но они не произвольны, и если бы мы были перенесены в другой мир (я называю его неевклидовым миром и стараюсь изобразить его), то мы остановились бы на других положениях.

В механике мы придем к аналогичным заключениям и увидим, что принципы этой науки, хотя и более непосредственно опираются на опыт, все-таки еще разделяют условный характер геометрических постулатов. До сих пор преобладает номинализм; но вот мы приходим к физическим наукам в собственном смысле. Здесь картина меняется; мы встречаем гипотезы иного рода и видим всю их плодотворность. Без сомнения, они с первого взгляда кажутся нам хрупкими, и история науки показывает нам, что они недолговечны; но они не умирают целиком, и от каждой из них нечто остается. Это нечто и надо стараться распознать, потому что здесь, и только здесь, лежит истинная реальность.

Метод физических наук основывается на индукции, заставляющей нас ожидать повторения какого-нибудь явления, когда воспроизводятся обстоятельства, при которых оно произошло в первый раз. Если бы могли повториться вместе *все* эти обстоятельства, то этот принцип мог бы быть применим без всякого опасения; но этого никогда не случится: всегда некоторые из обстоятельств будут отсутствовать. Абсолютно ли мы уверены, что они не имеют значения? Конечно, нет. Это может быть вероятно, но не может быть строго достоверно. Отсюда — значительная роль, которую играет в физических науках понятие вероятности. Таким образом, исчисление вероятностей не есть только забава или руководство для игроков в баккара, и мы должны стараться точнее обосновать его принципы. В этом отношении я мог дать лишь неполные результаты, поскольку тот неясный инстинкт, который руководит нами при решении вопроса о вероятности, мало поддается анализу.

Изучив условия, в которых работает физик, я счел нужным показать его за работой. Для этого я взял несколько примеров из истории оптики и электричества. Мы увидим, откуда вышли идеи Френеля, Максвелла и какие гипотезы бессознательно создавали Ампер и другие основатели электродинамики.

Часть I

ЧИСЛО И ВЕЛИЧИНА

Глава I

О ПРИРОДЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ

I

Самая возможность математического познания кажется неразрешимым противоречием. Если эта наука является дедуктивной только по внешности, то откуда у нее берется та совершенная строгость, которую никто не решается подвергать сомнению? Если, напротив, все предложения, которые она выдвигает, могут быть выведены один из других по правилам формальной логики, то каким образом математика не сводится к бесконечной тавтологии? Силлогизм не может нас научить ничему существенно новому, и если все должно вытекать из закона тождества, то все также должно к нему и приводиться. Но неужели возможно допустить, что изложение всех теорем, которые заполняют столько томов, есть не что иное, как замаскированный прием говорить, что A есть A!

Конечно, можно добраться до аксиом, которые лежат в источнике всех этих рассуждений. И если, с одной стороны, держаться того мнения, что их нельзя свести к закону противоречия, с другой — не желать видеть в них только факты опыта, которые не могли бы обладать характером математической необходимости, то имеется еще надежда отнести их к числу синтетических априорных суждений. Но это не значит разрешить затруднение; это значит только дать ему название: даже если бы природа синтетических суждений перестала быть для нас тайной, все же противоречие не было бы устранено, оно было бы только отодвинуто; силлогистическое умозаключение неспособно прибавить что-либо к тем данным, которые ему предоставляются; эти данные сводятся к нескольким аксиомам, и, кроме них, ничего нового нельзя было бы найти в заключениях.

Никакая теорема не должна была бы являться новой, если в ее доказательство не входила бы новая аксиома; умозаключение могло бы только возвращать нам истины, непосредственно очевидные, имеющие источником интуицию; оно являлось бы только промежуточным пустословием. Тогда, пожалуй, возник бы вопрос: не служит ли вообще силлогистический аппарат единственно для того, чтобы маскировать делаемые нами заимствования?

Противоречие поразит нас еще больше, если мы откроем какую-нибудь математическую книгу: на каждой странице автор будет выражать намерение обобщить уже известную теорему. Значит ли это, что математический метод ведет от частного к общему, и каким образом можно называть его тогда дедуктивным?

Наконец, если бы наука о числе была чисто аналитической или могла вытекать аналитически из небольшого числа синтетических суждений, то достаточно сильный ум мог бы, по-видимому, с первого взгляда заметить все содержащиеся в них истины; более того: можно было бы даже надеяться, что когда-нибудь для их выражения будет изобретен язык настолько простой, что эти истины будут непосредственно доступны и заурядному уму.

Если отказаться от допущения этих выводов, то необходимо придется признать, что математическое умозаключение само в себе заключает род творческой силы и что, следовательно, оно отличается от силлогизма.

И отличие это должно быть глубоким. Так, например, мы не найдем ключа к тайне в многократном применении того правила, по которому одна и та же операция, одинаково примененная к двум равным числам, дает тождественные результаты.

Все эти формы умозаключения — все равно, приводимы ли они к силлогизму в собственном смысле или нет, — сохраняют аналитический характер и поэтому являются бессильными.

II

Вопросы этого рода обсуждаются давно. Еще Лейбниц пытался доказать, что 2 да 2 составляют 4; рассмотрим вкратце его доказательство.

Я предполагаю, что определены число 1 и операция $x+1$, состоящая в прибавлении 1 к данному числу x. Эти определения, каковы бы они ни были, не будут входить в последующие рассуждения.

Я определяю затем числа 2, 3 и 4 равенствами:

$$(1)\quad 1+1=2; \qquad (2)\quad 2+1=3; \qquad (3)\quad 3+1=4.$$

Я определяю также операцию $x+2$ соотношением

$$(4)\quad x+2=(x+1)+1.$$

Установив это, мы имеем

$$\begin{aligned} &2+2=(2+1)+1 &&\text{(определение (4))},\\ &(2+1)+1=3+1 &&\text{(определение (2))},\\ &3+1=4 &&\text{(определение (3))}, \end{aligned}$$

откуда

$$2+2=4 \text{ (что и требовалось доказать).}$$

Нельзя отрицать того, что это рассуждение является чисто аналитическим. Но спросите любого математика, и он вам скажет: «Это, собственно говоря, не доказательство, а проверка». Мы просто ограничились сближением двух чисто условных определений и констатировали их тождество; ничего нового мы не узнали. *Проверка* тем именно и отличается от истинного доказательства, что, будучи чисто аналитической, она остается бесплодной. Она бесплодна, потому что заключение есть только перевод предпосылок на другой язык. Истинное же доказательство, наоборот, плодотворно, ибо в нем заключение является в некотором смысле более общим, чем посылки.

Равенство $2+2=4$ могло подлежать проверке только потому, что оно является частным случаем. Всякое частное выражение в математике всегда может быть таким образом проверено. Но если бы математика должна была сводиться к ряду таких проверок, то она не была бы наукой. Ведь шахматист, например, не создает еще науки тем, что он выигрывает партию. Всякая наука есть наука об общем.

Можно даже сказать, что точные науки имеют своей задачей избавить нас от необходимости таких прямых проверок.

III

Итак, посмотрим на математика за его делом и постараемся объяснить себе успешность его приемов. Задача эта не лишена трудностей; недостаточно открыть случайно попавшееся сочинение и проанализировать там какое-нибудь доказательство.

Мы должны прежде всего исключить геометрию, где вопрос усложняется трудными задачами, относящимися к роли постулатов, к природе и к происхождению понятия пространства. По аналогичным основаниям мы не можем обращаться и к анализу бесконечно малых. Нам надо искать математическую мысль там, где она осталась чистой, т. е. в арифметике.

Надо еще продолжить отбор; в высших отделах теории чисел первоначальные математические понятия подверглись столь глубокой разработке, что становится трудно их анализировать.

Следовательно, именно в началах арифметики мы должны надеяться найти искомое объяснение; но как раз в доказательстве наиболее элементарных теорем авторы классических сочинений обнаружили меньше всего точности и строгости. Не надо ставить им это в вину; они подчинялись необходимости; начинающие не подготовлены к настоящей математической строгости; они усмотрели бы в ней только пустые и скучные тонкости; было бы бесполезной тратой времени пытаться скорее внушить им бóльшую требовательность; надо, чтобы они быстро, без остановок, прошли путь, который некогда медленно проходили основатели науки.

Почему же нужна столь продолжительная подготовка, чтобы привыкнуть к этой совершенной строгости, которая, кажется, должна была бы быть от природы присущей всякому нормальному уму? Это логическая и психологическая проблема, которая достойна обсуждения.

Но мы не будем останавливаться на ней; она является посторонней для нашего предмета. Я буду лишь помнить, что нам надо, из опасения не достигнуть цели, привести заново доказательства наиболее элементарных теорем и вместо той грубой формы, которую им придают, чтобы не утомить начинающих, придать такую, которая может удовлетворить ученого-математика.

Определение сложения. Я предполагаю, что предварительно была определена операция $x+1$, состоящая в прибавлении числа 1 к данному числу x. Это определение, каково бы оно ни было, не будет играть никакой роли в последующих рассуждениях.

Дело идет теперь об определении операции $x+a$, состоящей в прибавлении числа a к данному числу x.

Предположим, что определена операция

$$x+(a-1).$$

Тогда операция $x+a$ будет определена равенством

$$x+a=[x+(a-1)]+1. \tag{1}$$

Таким образом, мы узна́ем, что такое $x+a$, когда будем знать, что такое $x+(a-1)$; а так как я вначале предположил, что известно, что такое $x+1$, то можно определить последовательными «рекурренциями» операции $x+2$, $x+3$ и т. д.[1])

Это определение заслуживает некоторого внимания, так как оно имеет особенную природу, отличающую его от определения чисто логического; в самом деле, равенство (1) содержит бесчисленное множество различных определений, и каждое из них имеет смысл только тогда, когда известно другое, ему предшествующее.

Свойства сложения. *Ассоциативность.* Я утверждаю, что

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

В самом деле, теорема справедлива для $c=1$; в этом случае она изображается равенством

$$a+(b+1)=(a+b)+1.$$

---

[1]) Термином «рекурренция» (recurrence) обозначается логическая операция возврата к своему началу. — *Примеч. ред.*

А это — помимо различия в обозначениях — есть не что иное, как равенство (1), при помощи которого я только что определял сложение.

Предположим, что теорема будет справедлива для $c = \gamma$; я говорю, что она будет справедлива и для $c = \gamma + 1$; пусть, в самом деле,

$$(a + b) + \gamma = a + (b + \gamma);$$

отсюда следует

$$[(a + b) + \gamma] + 1 = [a + (b + \gamma)] + 1$$

или в силу определения (1)

$$(a + b) + (\gamma + 1) = a + (b + \gamma + 1) = a + [b + (\gamma + 1)],$$

а это показывает с помощью ряда чисто аналитических выводов, что теорема верна для $\gamma + 1$.

Но так как она верна для $c = 1$, то последовательно усматриваем, что она верна для $c = 2$, для $c = 3$ и т. д.

Коммутативность. 1. Я утверждаю, что

$$a + 1 = 1 + a.$$

Теорема, очевидно, справедлива для $a = 1$; путем чисто аналитических рассуждений можно проверить, что если она справедлива для $a = \gamma$, то она будет справедлива для $a = \gamma + 1$; но раз она справедлива для $a = 1$, то она будет справедлива и для $a = 2$, для $a = 3$ и т. д.; это выражают, говоря, что высказанное предложение доказано путем рекурренции.

2. Я утверждаю, что

$$a + b = b + a.$$

Теорема только что была доказана для $b = 1$; можно аналитически *проверить*, что если она справедлива для $b = \beta$, то она будет справедлива для $b = \beta + 1$.

Таким образом, предложение доказано путем рекурренции.

Определение умножения. Мы определим умножение при помощи равенств

$$a \times 1 = a,$$
$$a \times b = [a \times (b - 1)] + a. \qquad (2)$$

Равенство (2), как и равенство (1), заключает в себе бесчисленное множество определений; после того как дано определение $a \times 1$, оно позволяет определить последовательно $a \times 2$, $a \times 3$ и т. д.

Свойства умножения. *Дистрибутивность.* Я утверждаю, что

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c).$$

Мы проверяем аналитически справедливость этого равенства для $c = 1$; а потом проверяем, что если теорема справедлива для $c = \gamma$, то она будет справедлива и для $c = \gamma + 1$.

Предложение опять доказано рекурренцией.

Коммутативность. 1. Я утверждаю, что

$$a \times 1 = 1 \times a.$$

Теорема очевидна для $a = 1$.

Проверяем аналитически, что если она справедлива для $a = \alpha$, то она будет справедлива и для $a = \alpha + 1$.

2. Я утверждаю, что

$$a \times b = b \times a.$$

Теорема только что была доказана для $b = 1$. Аналитически проверяем, что если она справедлива для $b = \beta$, то она будет справедлива и для $b = \beta + 1$.

IV

Здесь я прерываю этот монотонный ряд рассуждений. Но именно эта монотонность и способствовала лучшему выделению того однообразного процесса, который мы находим на каждом шагу.

Этот процесс есть доказательство путем рекурренции. Сначала формулируется теорема для $n = 1$; потом доказывается, что если она справедлива для $n - 1$, то она справедлива и для n, и отсюда выводится заключение о справедливости ее для всех целых чисел.

Мы только что видели, как можно воспользоваться этим для доказательства правил сложения и умножения, т. е. правил алгебраического вычисления; это вычисление есть орудие преобразования, которое применяется в гораздо большем числе разнообразных комбинаций, чем простой силлогизм; но это орудие еще чисто аналитическое, оно неспособно научить нас ничему новому. Если бы математика не имела ничего другого, она тотчас же остановилась бы в своем развитии; но она получает новое средство в том же процессе, т. е. в рассуждении путем рекурренции, и потому может непрерывно продолжать свое поступательное движение.

В каждом шаге, если его хорошенько рассмотреть, мы находим этот способ рассуждения — или в той простой форме, которую мы только что ему придали, или в форме более или менее видоизмененной.

В нем, следовательно, по преимуществу заключается математическое рассуждение, и нам следует изучить его ближе.

V

Существенная черта умозаключения путем рекурренции заключается в том, что оно содержит в себе бесчисленное множество силлогизмов, сосредоточенных, так сказать, в одной формуле.

Чтобы лучше можно было себе это уяснить, я сейчас расположу эти силлогизмы один за другим в виде некоторого каскада. Это, в сущности,— гипотетические силлогизмы.

Теорема верна для числа 1.

Если же она справедлива для 1, то она справедлива для 2.

Следовательно, она верна для 2.

Если же она верна для 2, то она верна для 3.

Следовательно, она верна для 3 и т. д.

Очевидно, что заключение каждого силлогизма служить следующему меньшей посылкой.

Бóльшие посылки всех наших силлогизмов могут быть приведены к одной формуле:

Если теорема справедлива для $n-1$,

то она справедлива для n.

Таким образом, очевидно, что в рассуждении путем рекурренции ограничиваются выражением меньшей посылки первого силлогизма и общей формулы, которая в виде частных случаев содержит в себе все бóльшие посылки.

Этот никогда не оканчивающийся ряд силлогизмов оказывается приведенным к одной фразе в несколько строк.

Теперь легко понять, почему всякое частное следствие, вытекающее из теоремы, может быть, как я изложил выше, проверено чисто аналитическим процессом.

Если, вместо того чтобы доказывать справедливость нашей теоремы для всех чисел, мы желаем обнаружить ее справедливость, например, только для числа 6, для нас будет достаточно обосновать 5 первых силлогизмов нашего последовательного ряда; если бы мы пожелали доказать теорему для числа 10, надо было бы взять их 9; для большого числа надо было бы взять их еще больше; но как бы велико ни было это число, мы всегда в конце концов его достигли бы, и аналитическая проверка была бы возможна.

Однако как бы далеко мы ни шли, мы никогда не могли бы дойти до общей применимой ко всем числам теоремы, которая одна только и может быть предметом науки. Чтобы ее достигнуть, понадобилось бы бесконечно большое число силлогизмов — нужно перескочить бездну, которую никогда не будет в состоянии заполнить терпение аналитика, ограниченное одними средствами формальной логики.

Вначале я поставил вопрос, почему нельзя было бы вообразить ум, достаточно мощный для того, чтобы сразу подметить всю совокупность математических истин.

Ответ теперь нетруден; шахматный игрок может рассчитать вперед четыре, пять ходов, но, каким бы необыкновенным его ни представляли, он всегда предусмотрит только конечное число ходов; если он применит свои способности к арифметике, то он не будет в состоянии подметить в ней общих истин путем одной непосредственной интуиции; он не будет в состоянии обойтись без помощи рассуждения путем рекурренции при доказательстве самой незначительной теоремы, ибо это и есть то орудие, которое позволяет переходить от конечного к бесконечному.

Это орудие всегда полезно, ибо оно позволяет нам сразу пройти любое число ступеней и избавляет нас от долгих, скучных и однообразных проверок, которые скоро стали бы практически невыполнимыми.

Но оно делается неизбежным, раз мы имеем в виду общую теорему, к которой аналитическая проверка нас непрерывно приближала бы, никогда не позволяя ее достигнуть.

В этой области арифметики кто-нибудь, пожалуй, счел бы себя далеким от анализа бесконечно малых; между тем мы сейчас видели, что идея математической бесконечности уже здесь играет весьма важную роль, и без нее не было бы арифметики как науки, так как не было бы идеи общего.

VI

Суждение, на котором основан способ рекурренций, может быть изложено в других формах; можно сказать, например, что в бесконечно большом собрании различных целых чисел всегда есть одно, которое меньше всех других. Можно легко переходить от одного выражения к другому и таким образом создавать иллюзию доказательства законности рассуждения путем рекурренции. Но в конце концов всегда придется остановиться; мы всегда придем к недоказуемой аксиоме, которая, в сущности, будет не что иное, как предложение, подлежащее доказательству, но только переведенное на другой язык.

Таким образом, нельзя не прийти к заключению, что способ рассуждения путем рекурренции несводим к закону противоречия.

Это правило не может происходить и из опыта; опыт нас может научить только тому, что это правило справедливо, например, для 10, для 100 первых чисел; он не может простираться на бесконечный ряд чисел, а лишь на бо́льшую или меньшую часть этого ряда, всегда ограниченную.

Если бы дело шло только об этом, закон противоречия был бы достаточен — он всегда позволил бы нам развить столько силлогизмов, сколько мы желаем; лишь когда дело идет об охвате бесконечности одной формулой, лишь перед бесконечным рушится этот закон; но там становится бессилен и опыт. Это правило, недоступное ни для аналитического, ни для опытного доказательства, есть истинный образец синтетического априорного суждения. С другой стороны, нельзя видеть в нем только соглашение, как в некоторых постулатах геометрии.

Почему же это суждение стоит перед нами с непреодолимой очевидностью? Здесь сказывается только утверждение могущества разума, который способен постичь бесконечное повторение одного и того же акта, раз этот акт оказался возможным однажды. В силу этого могущества разум обладает непосредственной интуицией, а опыт может быть для него только поводом воспользоваться ею и осознать ее.

Но скажут: если чистый опыт не может оправдать суждения путем рекурренции, то будет ли то же самое относительно опыта, поддерживаемого индукцией? Мы последовательно видим, что теорема верна для чисел 1, 2, 3 и т. д.; мы говорим: *закон очевиден*, и присваиваем ему тот же ранг, какой свойствен всякому физическому закону, опирающемуся на наблюдения, число которых очень велико, но все же ограничено.

Нельзя не признать, что здесь существует поразительная аналогия с обычными способами индукции. Однако есть и существенное различие. Индукция, применяемая в физических науках, всегда недостоверна, потому что она опирается на веру во всеобщий порядок Вселенной — порядок, который находится вне нас. Индукция математическая, т. е. доказательство путем рекурренции, напротив, представляется с необходимостью, потому что она есть только подтверждение одного из свойств самого разума.

VII

Выше я сказал, что математики стараются всегда *обобщать* полученные ими предложения; например, мы только что доказали равенство

$$a + 1 = 1 + a,$$

а затем воспользовались им для обоснования равенства

$$a + b = b + a,$$

которое, очевидно, является более общим.

Таким образом, математика, как и другие науки, может идти от частного к общему.

Это — факт, который в начале этого сочинения казался нам непонятным, но который теряет всю таинственность для нас, после того как была установлена аналогия между доказательством путем рекурренции и между обычной индукцией.

Нет сомнения, что математическое рассуждение посредством рекурренции и индуктивное физическое рассуждение покоятся на различных основаниях; но ход их параллелен — они движутся в том же направлении, т. е. от частного к общему.

Рассмотрим это несколько ближе. Чтобы доказать равенство

$$a+2=2+a,$$

нам достаточно применить два раза правило

$$a+1=1+a \tag{1}$$

и написать

$$a+2=a+1+1=1+a+1=1+1+a=2+a. \tag{2}$$

Однако равенство (2), выведенное таким образом чисто аналитически из равенства (1), не есть просто его частный случай: это нечто иное.

Поэтому нельзя сказать, что мы даже в действительно аналитической и дедуктивной части математических рассуждений двигались от общего к частному в обычном смысле слова.

Два члена равенства (2) суть просто сочетания, более сложные, чем два члена равенства (1), и анализ служит только для отделения элементов, которые входят в эти сочетания, и для изучения их соотношений.

Следовательно, математики действуют, применяя процесс «конструирования»; они «конструируют» сочетания все более и более сложные. Возвращаясь затем путем анализа этих сочетаний — этих, так сказать, совокупностей — к их первоначальным элементам, они раскрывают отношения этих элементов и выводят отсюда отношения самих совокупностей.

Это — процесс чисто аналитический, однако он направлен не от общего к частному, ибо совокупности, очевидно, не могут быть рассматриваемы как нечто более частное, чем их составные элементы.

Этому процессу «конструирования» справедливо приписывали большое значение и желали в нем видеть необходимое и достаточное условие прогресса точных наук.

Несомненно, что оно необходимо; но оно не является достаточным.

Для того чтобы конструирование могло быть полезным, чтобы оно не было бесплодным трудом для разума, чтобы оно могло служить опорой для дальнейшего поступательного движения, надо, чтобы оно прежде всего обладало некоторым родом единства, которое позволяло бы видеть в нем нечто иное, чем простое наращивание составных частей. Говоря точнее, надо, чтобы в анализе конструкции выявлялось некоторое преимущество сравнительно с анализом ее составных элементов.

В чем же может заключаться это преимущество?

Зачем, например, надо рассуждать не об элементарных треугольниках, а о многоугольнике, который ведь всегда разложим на треугольники?

Это делается потому, что существуют свойства, принадлежащие многоугольникам с каким угодно числом сторон, которые можно непосредственно применить к любому частному многоугольнику.

Весьма часто, напротив, только ценой продолжительных усилий можно бывает найти эти свойства, изучая непосредственно соотношения элементарных треугольников. Знание общей теоремы освобождает нас от этих усилий.

Если четырехугольник есть не что иное, чем соединенные рядом два треугольника, то это потому, что он принадлежит к роду многоугольников.

Конструирование становится интересным только тогда, когда его можно сравнить с другими аналогичными конструкциями, образующими виды того же родового понятия.

Необходимо еще, чтобы было возможно доказывать родовые свойства, не будучи вынужденным обосновывать их последовательно для каждого вида.

Чтобы достигнуть этого, необходимо вновь подняться от частного к общему, пройдя одну или несколько ступеней.

Аналитический процесс «конструирования» не вынуждает нас опускаться ниже, а оставляет все на том же уровне.

Мы можем подняться выше только благодаря математической индукции, которая одна может научить нас чему-либо новому. Без помощи такой индукции, отличной в известных отношениях от индукции физической, но столь же плодотворной, как и последняя, процесс конструирования был бы бессилен создать науку.

Заметим, наконец, что эта индукция возможна только тогда, когда одна и та же операция может повторяться бесконечное число раз. Вот причина, почему теория шахматной игры никогда не может стать наукой; там различные ходы одной и той же партии не похожи друг на друга.

Глава II

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕЛИЧИНА И ОПЫТ

Если вы хотите знать, что понимают математики под непрерывностью, то ответа следует спрашивать не у геометра. Геометр всегда так или иначе старается представить себе фигуры, которые он изучает, но его представления являются для него только орудием; занимаясь геометрией, он употребляет пространство так же, как употребляет мел; поэтому следует остерегаться приписывать слишком большое значение случайностям, которые часто имеют не больше значения, чем белизна мела.

Чистому аналитику нечего бояться этой опасности. Он освободил математическую науку от всех посторонних элементов и может ответить на ваш вопрос: что представляет собой на самом деле та непрерывность, о которой рассуждают математики? Многие из них, умеющие размышлять о своей науке, уже сделали это, как например Таннери в своем «Введении в теорию функций одной переменной».

Будем исходить из последовательности целых чисел; между двумя соседними числами вставим одно или несколько промежуточных чисел, потом между этими числами вставим еще новые и так далее до бесконечности. Мы будем иметь, таким образом, неограниченное число членов: это будут числа, называемые дробно-рациональными или соизмеримыми. Но этого еще недостаточно; между этими членами, число которых однако уже бесконечно, надо вставить еще другие, так называемые иррациональные или несоизмеримые.

Прежде чем идти дальше, сделаем одно важное замечание. Непрерывность, понимаемая таким образом, есть не более чем собрание отдельных единиц, расположенных в известном порядке, правда, в бесконечном числе, но *внешних* друг другу. Это не соответствует обычной концепции, которая между элементами непрерывного предполагает некоторый род внутренней связи, составляющей из них целое,— где не точка предшествует существованию линии, а линия предшествует существованию точки. От знаменитой формулы: непрерывность есть единство во множественности — остается только множественность; единство исчезло. Это обстоятельство не лишает аналитиков основания определять свою непрерывность так, как они это делают, ибо, рассуждая именно об этом, они постоянно спорят друг с другом по поводу строгости. Но для нас достаточно указать, что настоящая математическая непрерывность есть нечто совсем иное, чем непрерывность физиков или непрерывность метафизиков.

Быть может, скажут, что математики, которые довольствуются этим определением, обмануты словами, что надо было бы точно сказать, что представляет собой каждый из промежуточных членов, выяснить, как надо их вставить, и показать, что эта операция возможна. Но это было бы несправедливо; единственным свойством этих членов, входящим в рассуждения о них [1]), является свойство находиться прежде или после таких-то других членов; поэтому оно только и должно входить в их определение.

Таким образом, нечего беспокоиться о том, каким способом следует вставлять промежуточные члены; с другой стороны, никто не усомнится, что эта операция возможна, если только не забывать, что это последнее слово на математическом языке означает просто: свободна от противоречия.

Все же наше определение непрерывности не полно, и я возвращаюсь к нему после этого слишком длинного отступления.

[1]) Сюда входят специальные соглашения, служащие для определения сложения; о них мы будем говорить ниже.

Определение несоизмеримых величин. Математики Берлинской школы, и в частности Кронекер, занимаются построением этой непрерывной последовательности дробных и иррациональных чисел, не пользуясь никаким другим материалом, кроме целого числа. С этой точки зрения математическая непрерывность явится чистым созданием разума, в котором опыт совершенно не участвует.

Понятие рационального числа для них не представляет затруднения; предметом их особенных усилий служит определение несоизмеримого числа. Но прежде чем воспроизвести здесь это определение, я должен сделать одно замечание, чтобы предупредить удивление, которое оно не замедлило бы вызвать у читателей, мало знакомых с математическими обычаями.

Математики изучают не предметы, а лишь отношения между ними; поэтому для них безразлично, будут ли одни предметы замещены другими, лишь бы только не менялись их отношения. Для них не важно материальное содержание; их интересует только форма.

Кто забудет это, тот не поймет, что Дедекинд под именем *несоизмеримого числа* разумеет простой символ, т. е. нечто, совершенно отличное от представления, которое создают себе обыкновенно относительно величины, считая ее измеряемой, почти осязаемой.

Итак, вот каково определение Дедекинда: *соизмеримые числа могут быть бесконечным числом способов распределены на два класса при соблюдении условия, что любое число первого класса должно быть больше любого числа второго класса.*

Может случиться, что между числами первого класса будет одно, которое меньше всех других; например, если поместим в первый класс все числа, бóльшие чем 2, и само 2, а во второй класс — все числа, меньшие чем 2, то ясно, что 2 будет наименьшее из всех чисел первого класса. Число 2 может быть принято в качестве символа этого распределения.

Можно представить себе, напротив, что между числами второго класса имеется одно, большее всех других; так, это имеет место, если первый класс заключает все числа, бóльшие чем 2, а второй — все числа, меньшие чем 2, и само 2. Здесь опять число 2 могло бы быть избрано как символ этого распределения.

Но может также случиться, что нельзя будет найти ни в первом классе число, меньшее чем все другие, ни во втором — число, большее чем все другие. Предположим, например, что в первом классе помещают все соизмеримые числа, квадрат которых больше чем 2, а во втором все те, квадрат которых меньше чем 2. Известно, что нет такого числа, квадрат которого в точности был бы равен 2. И в первом классе не будет, очевидно, числа, меньшего чем все другие, потому что, как бы ни был квадрат некоторого числа близок к 2, всегда можно найти соизмеримое число, квадрат которого будет еще ближе к 2.

С точки зрения Дедекинда, несоизмеримое число

$$\sqrt{2}$$

есть не что иное, как символ этого особого способа распределения соизмеримых чисел; таким образом, каждому способу распределения соответствует одно число — соизмеримое или несоизмеримое,— которое и служит символом распределения.

Но удовольствоваться этим значило бы совсем забыть о происхождении этих символов; остается еще выяснить, каким образом математики пришли к тому, что приписали им особого рода конкретное существование, и, с другой стороны, не появляется ли трудность уже и в отношении дробных чисел? Могли бы мы иметь понятие об этих числах, если бы заранее не знали о материи, которую мы понимаем как нечто делимое до бесконечности, т. е. как непрерывность?

Физическая непрерывность. Итак возникает вопрос, не заимствовано ли понятие математической непрерывности просто из опыта. Если бы это было так, то это означало бы, что данные непосредственного опыта, каковыми являются наши ощущения, доступны измерению.

Может явиться искушение поверить, что это и в самом деле так, потому что в последнее время пытались измерить их, и был даже сформулирован закон, известный под именем закона Фехнера, по которому ощущение пропорционально логарифму раздражения.

Но если ближе присмотреться к опытам, которыми пытались обосновать этот закон, то можно прийти к совершенно противоположному заключению. Например, было замечено, что вес A, равный 10 граммам, и вес B, равный 11 граммам, производят тождественные ощущения, что вес B нельзя отличить от веса C, равного 12 граммам; но что вес A можно легко отличить от веса C. Таким образом, непосредственные результаты опыта могут быть выражены следующими соотношениями:

$$A = B, \quad B = C, \quad A < C,$$

которые можно рассматривать как формулу физической непрерывности. Эта формула заключает в себе недопустимое разногласие с законом противоречия; необходимость избежать его и заставила нас изобрести идею математической непрерывности.

Итак, необходимо заключить, что это понятие всецело создано разумом, но что опыт доставил ему повод для этого.

Мы не можем допустить, что два количества, равные одному и тому же третьему, не равны между собой; и это обстоятельство вынуждает нас предположить, что A отличается от B и B от C, но несовершенство наших чувств не позволило нам этого заметить.

Создание математической непрерывности. *Первая стадия.* До сих пор, чтобы изобразить действительность, нам достаточно было бы вставить между A и B небольшое число отдельных членов. Но что произойдет, если мы для возмещения несовершенства наших чувств прибегнем к какому-нибудь инструменту, например, если мы воспользуемся микроскопом? Члены A и B, которых ранее мы не могли отличить друг от друга, теперь нам представятся различными; но между A и B, которые стали различимыми, поместится новый член D, который мы не будем в состоянии отличить ни от A ни от B. Несмотря на употребление самых совершенных методов, непосредственные результаты нашего опыта будут всегда сохранять свойства физической непрерывности с присущим ей противоречием.

Мы освободимся от этого противоречия только тем, что будем беспрестанно помещать новые члены между членами, уже *различенными*, и эта операция должна будет продолжаться до бесконечности. Мы могли бы подумать, что она будет остановлена, если мы представим себе некое орудие, достаточно мощное для разложения физической непрерывности на раздельные элементы, подобно тому как телескоп разлагает Млечный Путь на звезды. Но мы не можем так думать. В самом деле, инструментами мы пользуемся всегда при помощи наших чувств; так, увеличенное микроскопом изображение мы рассматриваем нашим глазом, следовательно, оно должно всегда сохранять характер зрительного ощущения, а потому сохранять и характер физической непрерывности.

Длина, рассматриваемая непосредственно, ничем не отличается от половины этой длины, удвоенной микроскопом. Целое однородно с частью; здесь заключается новое противоречие, или скорее это было бы противоречием, если бы число членов предполагалось конечным; в самом деле, ясно, что часть, которая содержит менее членов сравнительно с целым, не может быть подобной целому.

Противоречие снимается лишь тогда, когда число членов рассматривается как бесконечное; ничто, например, не мешает рассматривать совокупность целых чисел подобной совокупности четных чисел, которая представляет собою однако только часть всего ряда; в самом деле, каждому целому числу соответствует в этом ряду одно четное число, которым является то же число, увеличенное вдвое.

Однако разум приходит к созданию понятия о непрерывном, образованном из бесконечного числа членов, не только для того, чтобы избавиться от этого противоречия, содержащегося в эмпирических данных.

Дело обстоит совершенно так же, как для ряда целых чисел. Мы обладаем способностью понять, что единица может быть прибавлена к собранию единиц; благодаря опыту мы имеем повод упражнять эту способность и сознавать ее: но с этого момента мы чувствуем, что наше могущество не имеет предела и что мы могли бы считать бесконечно, хотя бы и имели для счета всегда только конечное число предметов.

Точно так же, как только мы пришли к идее поместить между двумя последовательными членами некоторого ряда промежуточные члены, мы пришли к выводу, что эта операция может быть продолжена беспредельно и что нет, так сказать, никакого существенного основания для остановки.

Я позволю себе упростить речь, назвав математической непрерывностью первого порядка всякую совокупность членов, образованных по тому же закону, что и последовательность соизмеримых чисел. Если мы затем поместим в ней новые промежуточные члены, следуя закону образования несоизмеримых чисел, мы получим то, что мы назовем непрерывностью второго порядка.

Вторая стадия. До сих пор мы сделали только первый шаг: мы объяснили происхождение непрерывностей первого порядка; теперь надо убедиться, почему их было еще недостаточно и почему понадобилось изобретать несоизмеримые числа.

Если мы хотим представить себе линию, то это возможно сделать, только пользуясь свойствами физической непрерывности; т. е. ее можно представить себе не иначе, как обладающей некоторой шириной. Две линии явятся для нас тогда в форме двух узких полос, и если удовольствоваться этим грубым изображением, то очевидно, что при пересечении две линии будут иметь общую часть.

Но чистый геометр делает еще одно усилие: не отказываясь совершенно от помощи своих чувств, он хочет дойти до понятия линии без ширины, точки без протяжения. Он может достичь этого, только рассматривая линию как предел, к которому стремится полоса, все более и более суживающаяся, и точку — как предел, к которому стремится площадь, все более и более уменьшающаяся. Тогда наши две полосы, как бы узки они ни были, всегда будут иметь общую площадь, тем меньшую, чем меньше будет их ширина, и пределом ее будет то, что чистый геометр называет точкой.

Вот почему говорят, что две пересекающиеся линии имеют общую точку, и эта истина представляется интуитивной.

Но она содержала бы противоречие, если бы понимать линии как непрерывности первого порядка, т. е. если на линиях, проводимых геометром, должны находиться только точки, координаты которых — рациональные числа. Противоречие станет очевидным, лишь только установят, например, существование прямых и кругов.

В самом деле, ясно, что если бы в качестве действительных рассматривались только точки с соизмеримыми координатами, то круг, вписанный в квадрат, и диагональ этого квадрата не пересекались бы, потому что координаты точки их пересечения несоизмеримы.

Этого еще недостаточно, потому что таким образом мы имели бы не все несоизмеримые числа, а только некоторые из них.

Но представим себе прямую, разделенную на две полупрямые. Каждая из этих полупрямых явится в нашем воображении как полоса известной ширины; притом эти полосы будут покрывать одна другую, потому что между ними не должно быть никакого промежутка. Когда мы пожелаем воображать наши полосы все более и более узкими, общая часть представится нам точкой, которая будет существовать постоянно; так что мы допустим в качестве интуитивной истины, что если прямая разделена на две полупрямые, то общая граница этих двух прямых есть точка; мы узнаем здесь концепцию Кронекера, согласно которой несоизмеримое число рассматривается как граница, общая двум классам рациональных чисел.

Таково происхождение непрерывности второго порядка, которая и является математической непрерывностью в собственном смысле.

Вывод. В итоге можно сказать, что разум обладает способностью создавать символы; благодаря этой способности он построил математическую непрерывность, *которая представляет собой только особую систему символов.* Его могущество ограничено лишь необходимостью избегать всякого противоречия; однако разум пользуется своей силой исключительно в том случае, когда опыт доставляет ему для этого основание.

В занимающем нас случае этим основанием было понятие физической непрерывности, выведенное из непосредственных данных чувственного восприятия.

Но это понятие приводит к ряду противоречий, от которых надо последовательно освобождаться. Таким образом, мы вынуждены воображать все более и более усложненную систему символов. Та система, на которой мы, наконец, останавливаемся, не только свободна от внутреннего противоречия — ведь она уже оказалась такой на всех пройденных этапах,— но она также не противоречит различным так называемым интуитивным положениям, которые извлечены из более или менее обработанных эмпирических понятий.

Измеримая величина. Величины, изучавшиеся нами до сих пор, не были *измеримыми*, мы умели сказать, которая из двух величин является большей, но в два ли, в три ли раза она больше — этого мы не умели сказать.

В самом деле, до сих пор я занимался только порядком, в котором наши члены были размещены. Но для большинства применений этого недостаточно. Надо научиться сравнивать промежутки, отделяющие два каких-нибудь члена. Только при этом условии непрерывность делается измеримой и в ней оказывается возможным применить арифметические операции.

Это можно сделать только при помощи нового и особого *соглашения*. *Условливаются*, что в таком-то случае интервал, заключенный между членами A и B, равен интервалу, отделяющему C от D. Так, в начале нашей работы мы исходили из последовательности целых чисел и предполагали, что между двумя последовательными членами ее помещены n промежуточных; эти-то новые члены будут теперь в силу соглашения рассматриваться как равноотстоящие.

Отсюда-то и вытекает способ определения сложения двух величин; так, если интервал AB по определению равен интервалу CD, то интервал AD по определению будет суммой интервалов AB и CD.

Это определение в весьма значительной мере произвольно. Однако оно произвольно не вполне. Оно подчинено известным соглашениям, например правилам коммутативности и ассоциативности сложения. Но как только выбранное определение удовлетворяет этим правилам, выбор делается безразличным, и более точное определение — бесполезным.

Различные замечания. Мы можем поставить перед собой несколько важных вопросов:

1. Исчерпывается ли творческое могущество разума созданием математической непрерывности?

Нет: труды Дюбуа-Реймона служат поразительным доказательством этого.

Известно, что математики различают бесконечно малые разных порядков, так что бесконечно малые второго порядка не только бесконечно малы в абсолютном смысле, но еще и являются таковыми по отношению к бесконечно малым первого порядка. Нетрудно представить себе бесконечно малые дробного и даже иррационального порядка, и, таким образом, мы снова находим ту последовательность математической непрерывности, которой посвящены предшествующие страницы. Более того: существуют такие бесконечно малые величины, которые бесконечно малы по отношению к бесконечно малым первого порядка и, напротив, бесконечно велики по отношению к бесконечно малым порядка $1+\varepsilon$, как бы ни было мало ε. Итак, вот еще новые члены, разместившиеся в нашем ряду; и если мне будет позволено вернуться к терминологии, которой я недавно держался и которая является достаточно удобной, хотя еще и не используется широко, я скажу, что этим создан вид непрерывности третьего порядка.

Легко было бы идти дальше, но это было бы бесполезной игрой ума; пришлось бы воображать себе одни символы без возможности их применения; на это никто не отважится. Даже непрерывность третьего порядка, к которой приводит рассмотрение различных порядков бесконечно малых, сама по себе является слишком мало полезной, чтобы приобрести право быть упоминаемой, и геометры рассматривают ее только просто как курьез. Разум пользуется своей творческой силой только тогда, когда опыт принуждает его к этому.

2. Раз мы обладаем понятием математической непрерывности, гарантированы ли мы от противоречий, аналогичных тем, которые положили начало этому понятию?

Нет; и я сейчас дам этому пример.

Надо быть очень сведущим, чтобы не считать очевидным, что каждая кривая имеет касательную:

и в самом деле, если представлять себе эту кривую и некоторую прямую как две узкие полосы, то всегда можно расположить их так, что они будут иметь общую часть, не пересекаясь. Теперь вообразим себе, что ширина этих двух полос бесконечно уменьшается; существование их общей части будет всегда возможным, и в пределе, так сказать, две линии будут иметь общую точку, не пересекаясь, т. е. они будут взаимно касаться друг друга.

Геометр, рассуждающий таким образом, сделал бы — сознательно или нет — то же самое, что мы сделали раньше, желая доказать, что две пересекающиеся линии имеют общую точку; и его интуиция могла бы показаться такой же законной.

Между тем она его обманула бы. Можно доказать, что существуют кривые, не имеющие касательных, если эта кривая определена как аналитическая непрерывность второго порядка.

Несомненно, какая-нибудь уловка, аналогичная раньше изученным нами, позволила бы устранить противоречие, но так как оно встречается только в весьма исключительных случаях, то им и не занимаются. Вместо того чтобы стараться примирить интуицию с анализом, удовольствовались тем, что пожертвовали одним из двух; и так как анализ должен остаться непогрешимым, то всю вину отнесли на счет интуиции.

Физическая непрерывность нескольких измерений. Выше я исследовал физическую непрерывность такою, какой она вытекает из непосредственных данных наших чувств или, если угодно, из прямых результатов опытов Фехнера; я показал, что эти результаты резюмируются противоречивыми формулами

$$A = B, \quad B = C, \quad A < C.$$

Посмотрим теперь, как это понятие было обобщено и как оказалось возможным вывести из него понятие непрерывностей многих измерений.

Рассмотрим две любые группы ощущений. Мы или будем в состоянии различить их или нет, подобно тому как в опытах Фехнера вес в 10 граммов можно было отличить от веса в 12 граммов, но не от веса в 11 граммов. Ничего другого не нужно для построения непрерывности многих измерений.

Назовем *элементом* одну из этих групп ощущений. Это будет нечто аналогичное математической *точке*, однако не совсем то же самое. Мы не можем определить размеры нашего элемента, так как мы не умеем отличить его от соседних элементов, он как бы окутан туманом. Если бы можно было употребить астрономическое сравнение, наши «элементы» были бы подобны туманностям, между тем как математические точки уподоблялись бы звездам.

Если так, то система элементов образует *непрерывность*, раз есть возможность перейти от любого из них к какому угодно другому через ряд последовательных элементов — таких, что каждый из них не мог бы быть различен от предыдущего. Этот *линейный ряд* является по отношению к *линии* математика тем же, чем является изолированный *элемент* по отношению к точке.

Прежде чем идти дальше, я должен разъяснить, что такое *купюра*. Рассмотрим непрерывность C и возьмем у нее некоторые из ее элементов, которые на одно мгновение будем рассматривать не принадлежащими больше к этой непрерывности. Совокупность элементов, взятых таким образом, будет называться купюрой. Может статься, что вследствие этой операции C окажется *подразделенной* на несколько отдельных непрерывностей, так как совокупность остающихся элементов не будет более составлять единую непрерывность.

Тогда у C найдутся два элемента A и B, которые необходимо будет считать принадлежащими двум различным непрерывностям; мы узнаем это потому, что нельзя будет найти в C линейный ряд последовательных элементов (каждый из этих элементов не может отличаться от предыдущего; за первый возьмем A, а за последний B), *если хоть один из элементов этого ряда не будет неотличим от одного из элементов купюры.*

Может, напротив, случиться, что реализация купюры будет недостаточна для подразделения непрерывности C. В целях классификации физических непрерывностей мы должны исследовать, каковы должны быть купюры, которые необходимы для подразделения непрерывности.

Если физическую непрерывность C можно подразделить, реализуя купюру, состоящую из конечного числа различимых один от другого элементов (и не образующую ни одной непрерывности, ни нескольких непрерывностей), то мы скажем, что C есть непрерывность *одного измерения*.

Если, напротив, можно подразделить C только при помощи купюр, которые сами представляют собой непрерывности, то мы скажем, что C — непрерывность нескольких измерений. Если это достигается купюрами, которые являются непрерывностями одного измерения, то мы скажем, что C имеет два измерения; если достаточно купюр, имеющих два измерения, то мы скажем, что C имеет три измерения, и т. д.

Таким образом, понятие физической непрерывности многих измерений оказывается определенным благодаря тому весьма простому факту, что две группы ощущений могут быть различимыми или же неразличимыми.

Математическая непрерывность нескольких измерений. Понятие математической непрерывности n измерений вытекает отсюда совершенно естественно при помощи процесса, вполне подобного тому, который мы изучили в начале этой главы. Точка подобной непрерывности, как известно, представляется нам определенной при помощи системы n различных величин, называемых ее координатами.

Не всегда необходимо, чтобы величины эти были измеримыми. В геометрии имеется целая отрасль, в которой отвлекаются от измерения этих величин; в ней занимаются, например, только изучением вопроса, лежит ли точка B на кривой ABC между точками A и C, и не стараются узнать, равна ли дуга AB дуге BC, или она в два раза больше ее. Это — так называемый Analysis Situs [1]).

В этом вся сущность учения, привлекшего к себе внимание величайших геометров, учения, из которого вытекает ряд замечательных теорем. Эти теоремы отличаются от теорем обыкновенной геометрии тем, что они являются чисто качественными, и они остались бы справедливыми, если бы фигуры копировались не-

[1]) Analysis Situs — анализ положения, в современной терминологии — топология.— *Примеч. ред.*

искусным чертежником, который грубо нарушал бы их пропорции и заменял бы прямые линии более или менее искривленными.

Когда в только что определенную нами непрерывность пожелали ввести меру, эта непрерывность превратилась в пространство: родилась геометрия. Но я откладываю это исследование для второй части.

Часть II

ПРОСТРАНСТВО

Глава III

НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Всякое заключение предполагает наличие посылок; посылки же эти или сами по себе очевидны и не нуждаются в доказательстве, или могут быть установлены, только опираясь на другие предположения. Но так как этот процесс не может продолжаться беспредельно, то всякая дедуктивная наука, и в частности геометрия, должна основываться на некотором числе недоказуемых аксиом. Поэтому все руководства по геометрии прежде всего излагают эти аксиомы. Но между этими аксиомами приходится делать различие; некоторые их них, как, например, аксиома: «две величины, равные одной и той же третьей, равны между собой», суть предложения не геометрии, а анализа. Я рассматриваю их как аналитические априорные суждения и не буду заниматься ими. Но я должен остановиться на других аксиомах, которые относятся к геометрии. Большинство руководств излагают три такие аксиомы:

1. Между двумя точками можно провести лишь одну прямую.

2. Прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками.

3. Через данную точку можно провести лишь одну прямую, параллельную данной.

Хотя вообще и обходятся без доказательства второй из этих аксиом, но было бы возможно вывести ее из двух остальных и из тех гораздо более многочисленных аксиом, которые допускаются скрыто, как я выясню это далее.

Долгое время тщательно искали доказательства третьей аксиомы, известной под названием *постулата Евклида*. Сколько было потрачено сил в этой химерической надежде, положительно не поддается описанию. Наконец, в начале прошлого столетия и почти одновременно двое ученых, русский — Лобачевский и венгерский — Бояи, установили неопровержимо, что это доказательство невозможно; этим они почти совсем избавили нас от изобретателей геометрии без постулата Евклида; с тех пор парижская Академия наук получает не более одного-двух новых доказательств в год. Но вопрос не был исчерпан; его разработка не замедлила сделать новый большой шаг с опубликованием знаменитого мемуара Римана «Über die Hypothesen, welche der Geometrie zum Grunde liegen»[1]). Эта маленькая работа вызвала к жизни большинство новых работ, о которых я буду говорить дальше и среди которых следует назвать работы Бельтрами и Гельмгольца.

Геометрия Лобачевского. Если бы возможно было вывести постулат Евклида из других аксиом, то, отбрасывая этот постулат и допуская другие аксиомы, мы, очевидно, должны были бы прийти к следствию, заключающему в себе противоречие; поэтому было бы невозможно на таких положениях построить цельную геометрическую систему.

Но как раз это и сделал Лобачевский. Он допускает сначала, что

Через точку можно провести несколько прямых, параллельных данной прямой.

Кроме этой, все другие аксиомы Евклида он сохраняет. Из этих гипотез он выводит ряд теорем, между которыми нельзя указать никакого противоречия, и строит геометрию, непогрешимая логика которой ни в чем не уступает евклидовой геометрии. Теоремы, конечно, весьма отличаются от тех, к которым мы привыкли, и вначале кажутся несколько странными.

Так, сумма углов треугольника всегда меньше двух прямых углов; разность между этой суммой и двумя прямыми углами пропорциональна площади треугольника.

Невозможно построить фигуру, подобную данной, но имеющую иные размеры.

---

[1]) См. русский перевод: Риман Б. О гипотезах, лежащих в основании геометрии//Об основаниях геометрии. — М.: Гостехиздат, 1956. — С. 309. — *Примеч. ред.*

Если разделить окружность на n равных частей и провести в точках деления касательные, то эти n касательных образуют многоугольник, если радиус окружности достаточно мал; но если этот радиус достаточно велик, они не встретятся.

Бесполезно было бы увеличивать число этих примеров; теоремы Лобачевского не имеют никакого отношения к евклидовым, но тем не менее они логически связаны между собой.

Геометрия Римана. Вообразим себе мир, заселенный исключительно существами, лишенными толщины, и предположим, что эти «бесконечно плоские» существа расположены все в одной плоскости и не могут из нее выйти. Допустим далее, что этот мир достаточно удален от других миров, чтобы не подвергаться их влиянию. Раз мы начали делать такие допущения, ничто не мешает нам наделить эти существа способностью мышления и считать их способными создать геометрию. В таком случае они, конечно, припишут пространству только два измерения.

Но предположим теперь, что эти воображаемые существа, оставаясь все еще лишенными толщины, имеют форму поверхности шара, а не форму плоскости, и расположены все на одной и той же сфере, с которой не могут сойти. Какую геометрию они могут построить? Прежде всего, ясно, что они припишут пространству только два измерения; роль прямой линии для них будет играть кратчайшее расстояние от одной точки до другой на сфере, т. е. дуга большого круга; одним словом, их геометрия будет геометрией сферической.

То, что они назовут пространством, будет эта сфера, с которой они не могут сойти и на которой происходят все явления, доступные их познанию. Их пространство будет *безгранично*, так как по сфере всегда можно безостановочно идти вперед, и тем не менее оно будет *конечно*; никогда нельзя дойти до края, но можно совершить кругообразное движение.

Геометрия Римана есть не что иное, как сферическая геометрия, распространенная на три измерения. Чтобы построить ее, немецкий математик должен был отбросить не только постулат Евклида, но, кроме того, еще и первую аксиому: *через две точки можно провести только одну прямую.*

На сфере через две данные точки можно провести *вообще* один большой круг (который, как мы сейчас видели, играл бы роль прямой для наших воображаемых существ); но есть одно исключение: если две данные точки диаметрально противоположны, то через них можно провести бесконечное множество больших кругов. Так и в геометрии Римана (по крайней мере в одной из ее форм) через две точки вообще можно провести только одну прямую; но есть исключительные случаи, когда через две точки можно провести бесконечное количество прямых.

Между геометриями Римана и Лобачевского существует в некотором смысле противоположность.

Так, сумма углов треугольника:

равна двум прямым в геометрии Евклида;

меньше двух прямых в геометрии Лобачевского;

больше двух прямых в геометрии Римана.

Число линий, которые можно провести через данную точку параллельно данной прямой:

равно единице в геометрии Евклида;

нулю в геометрии Римана;

бесконечности в геометрии Лобачевского.

Прибавим, что пространство Римана конечно, хотя и безгранично, в указанном выше смысле этих двух слов.

Поверхности с постоянной кривизной. Остается возможным одно возражение. Действительно, теоремы Лобачевского и Римана не содержат никакого противоречия; но как бы ни были многочисленны следствия, которые вывели из своих допущений эти два геометра, все же последние должны были остановиться, не исчерпав всех возможных выводов, потому что число их бесконечно. Но тогда кто поручится, что если бы они продолжали свои выводы далее, то все же не пришли бы к противоречию?

Это затруднение не существует для геометрии Римана, если ограничиваться двумя измерениями; в самом деле, геометрия Римана для двух измерений не отличается, как мы видели, от сферической геометрии, которая есть только ветвь обыкновенной геометрии и которая, следовательно, стоит вне всякой дискуссии.

Бельтрами, сведя также и геометрию Лобачевского для двух измерений к тому, что она стала только ветвью обыкновенной геометрии, опроверг таким же образом направленное против нее возражение. Вот как он пришел к этому. Рассмотрим на некоторой поверхности произвольную фигуру. Представим себе, что эта фигура начерчена на гибком и нерастяжимом полотне, наложенном на эту поверхность, так что, когда полотно перемещается и деформируется, различные линии этой фигуры могут изменять форму, не меняя длины. Вообще, эта гибкая и нерастяжимая фигура не может перемещаться, не оставляя поверхности; но есть некоторые особые поверхности, для которых подобное движение было бы возможно: это — поверхности с постоянной кривизной.

Возвратимся к сравнению, которое мы сделали выше, и вообразим себе существа без толщины, живущие на одной из таких поверхностей. Движение фигуры, все линии которой сохраняют постоянную длину, с их точки зрения будет возможно. Подобное движение, наоборот, казалось бы абсурдным для существ без толщины, живущих на поверхности с переменной кривизной.

Поверхности с постоянной кривизной бывают двух родов. Одни из них — поверхности *с положительной кривизной*; они могут быть деформированы так, что накладываются на сферу. Следовательно, геометрия этих поверхностей сводится к сферической геометрии, которая есть геометрия Римана. Другие — поверхности *с отрицательной кривизной.* Бельтрами показал, что геометрия этих поверхностей есть не что иное, как геометрия Лобачевского. Таким образом, геометрии двух измерений, как Римана, так и Лобачевского, оказываются связанными с евклидовой геометрией.

Истолкование неевклидовых геометрических систем. Таким образом, устраняется возражение, касающееся геометрических систем двух измерений.

Легко было бы распространить рассуждение Бельтрами на геометрии трех измерений. Умы, не отрицающие пространства четырех измерений, не увидят в этом никакой трудности, но таковых немного. Поэтому я предпочитаю поступить иначе.

Возьмем некоторую плоскость, которую я буду называть основной, и построим нечто вроде словаря, установив соответствие в двойном ряду членов, написанных в двух столбцах, таким же образом, как в обычных словарях соответствуют друг другу слова двух языков, имеющие одинаковое значение.

Пространство	Часть пространства, расположенная ниже основной плоскости.
Плоскость	Сфера, ортогонально пересекающая основную плоскость.
Прямая	Круг, ортогонально пересекающий основную плоскость.
Сфера	Сфера.
Круг	Круг.
Угол	Угол.
Расстояние между двумя точками	Логарифм ангармонического отношения этих двух точек и пересечений основной плоскости с кругом, проходящим через эти две точки и пересекающим ее ортогонально

и т. д.

Возьмем затем теоремы Лобачевского и переведем их с помощью этого словаря, как мы переводим немецкий текст с помощью немецко-французского словаря. *Мы получим таким образом теоремы обыкновенной геометрии.*

Например, теорема Лобачевского: «сумма углов треугольника меньше двух прямых» переводится так: «если криволинейный треугольник имеет сторонами дуги кругов, которые при продолжении пересекают основную плоскость ортогонально, то сумма углов этого криволинейного треугольника будет меньше двух прямых». Таким образом, как бы далеко мы ни развивали следствия из допущений Лобачевского, мы никогда не натолкнемся на противоречие. В самом деле, если бы две теоремы Лобачевского находились в противоречии, то то же самое имело бы место и для переводов этих двух теорем, сделанных при помощи нашего словаря; но эти переводы суть теоремы обыкновенной геометрии, а никто не сомневается, что обыкновенная геометрия свободна от противоречий. Однако откуда происходит в нас эта уверенность и справедлива ли она? Это — вопрос, который я не буду разбирать здесь, так как он потребовал бы подробного развития. Во всяком случае, указанное выше возражение отпадает полностью.

Это еще не все. Геометрия Лобачевского, допускающая таким образом конкретное истолкование, перестает быть пустым логическим упражнением и может получить применение; я не имею времени говорить здесь ни об ее приложениях, ни о той пользе, которую Клейн и я извлекли из нее для интегрирования линейных уравнений.

Указанное истолкование, впрочем, не единственное. Можно было бы установить несколько словарей, аналогичных предыдущему, и все они позволяли бы простым «переводом» преобразовывать теоремы Лобачевского в теоремы обыкновенной геометрии.

Скрытые аксиомы. Являются ли аксиомы, явно формулируемые в руководствах, единственными основаниями геометрии? Мы можем убедиться в противном, замечая, что даже если одну за другой отвергнуть эти аксиомы, все-таки еще останутся нетронутыми некоторые предложения, общие теориям Евклида, Лобачевского и Римана. Эти предложения должны опираться на некоторые предпосылки, которые геометры допускают в скрытой форме. Интересно попытаться выделить их из классических доказательств.

Стюарт Милль утверждал, что всякое определение содержит аксиому, так как, определяя, скрыто утверждают существование определяемого предмета. Это значило бы заходить слишком далеко; редко бывает, чтобы математики давали определение, не доказав существования определяемого объекта; если же они избавляют себя от этого труда, то обыкновенно в тех случаях, когда читатель сам легко может сделать соответствующее дополнение. Но не следует забывать, что слово «существование» имеет различный смысл тогда, когда речь идет о математическом объекте, и тогда, когда вопрос касается материального предмета. Математический объект существует, если его определение не заключает противоречия ни в самом себе, ни с предложениями, допущенными раньше.

Но если замечание Стюарта Милля не может быть приложено ко всем определениям, оно тем не менее остается справедливым для некоторых из них. Например, плоскость иногда определяют так: плоскость есть поверхность такого рода, что прямая, соединяющая две любые точки ее, укладывается целиком на этой поверхности.

Это определение, очевидно, скрывает в себе новую аксиому; правда, можно было бы его изменить, и это было бы лучше, но тогда надо было явно указать эту аксиому.

Другие определения могут дать повод к размышлениям, не менее важным.

Таково, например, определение равенства двух фигур: две фигуры равны, когда их можно наложить одну на другую. Чтобы сделать это, надо одну из них перемещать до тех пор, пока она не совпадет с другой; но как надо ее перемещать? Если мы зададим этот вопрос, то, без сомнения, нам ответят, что надо сделать это, не деформируя ее, — как если бы дело шло о неизменяемом твердом теле. Но тогда порочный круг будет очевиден.

Фактически это определение ничего не определяет; оно не имело бы никакого смысла для существа, обитающего в мире, где имеются только жидкости. Если оно кажется нам ясным, то просто потому, что мы привыкли к свойствам реальных твердых тел, которые не отличаются значительно от свойств идеальных твердых тел, сохраняющих все свои размеры неизменными.

Между тем, как ни несовершенно это определение, оно скрывает в себе некоторую аксиому.

Возможность движения неизменной фигуры не есть истина, очевидная сама по себе; порядок очевидности ее во всяком случае не превышает порядка очевидности постулата Евклида и несравним с порядком очевидности аналитических априорных суждений.

Впрочем, изучая геометрические определения и доказательства, мы видим, что приходится допустить без доказательства не только возможность этого движения, но и еще некоторые из его свойств. И прежде всего — то, которое вытекает из определения прямой линии. Ей дано много несовершенных определений, но истинным является следующее, подразумеваемое во всех доказательствах, где используется прямая линия:

«Может случиться, что движение неизменной фигуры будет таково, что все точки некоторой линии, принадлежащей этой фигуре, остаются неподвижными, между тем как все точки, расположенные вне этой линии, движутся. Подобная линия будет называться прямой». В этой формулировке мы намеренно отделили определение от аксиомы, которую оно скрывает в себе.

Многие из доказательств — как, например, доказательства равенства треугольников, доказательство возможности опустить перпендикуляр из точки на прямую — предполагают предложения, которые прямо не указываются, так как они требуют допущения возможности переносить фигуру в пространстве определенным образом.

Четвертая геометрия. Среди этих скрытых аксиом, мне кажется, есть одна, которая заслуживает некоторого внимания, так как, опуская ее, можно построить четвертую геометрию, столь же свободную от внутренних противоречий, как и геометрии Евклида, Лобачевского и Римана.

Чтобы доказать, что всегда можно восставить из точки A перпендикуляр к прямой AB, рассматривают прямую AC, вращающуюся около точки A и сначала сливающуюся с неподвижной прямой AB; ее поворачивают около A до тех пор, пока она не образует продолжения AB.

Таким образом допускаются два предположения: во-первых, что подобное вращение возможно и, во-вторых, что можно продолжать его до тех пор, пока две прямые не составят продолжение одна другой. Если мы допустим первое и откинем второе, то придем к ряду теорем, еще более странных, чем теоремы Лобачевского и Римана, но в такой же степени свободных от противоречия.

Я приведу только одну из этих теорем и притом не из самых странных: *действительная прямая может быть перпендикулярна сама к себе.*

Теорема Ли. Число аксиом, скрытым образом введенных в классические доказательства, больше, чем это необходимо. Было бы интересно свести это число к минимуму. Можно спросить себя сначала, осуществимо ли это желание — не беспредельно ли и число необходимых аксиом и число воображаемых геометрий. В этого рода исследованиях первое место занимает теорема Софуса Ли. Ее можно выразить так:

Предположим, что допускаются следующие положения:

1. Пространство имеет n измерений.
2. Движение неизменяемой фигуры возможно.

3. Необходимо p условий, чтобы определить положение этой фигуры в пространстве.

Число геометрий, совместимых с этими положениями, будет ограниченное.

Я могу даже прибавить, что если n дано, то для p можно указать высший предел.

Следовательно, если допустить возможность движения неизменяемой фигуры, то можно будет придумать лишь конечное число (и даже довольно ограниченное) геометрических систем трех измерений.

Геометрии Римана. Между тем этот результат, по-видимому, находится в противоречии с заключениями Римана, так как этот ученый построил бесчисленное множество различных геометрий (та, которой обыкновенно дают его имя, есть не более чем частный случай).

Все зависит, говорит Риман, от способа, которым определяют длину кривой. Но существует бесконечное множество способов определять эту длину, и каждый из них может сделаться точкой отправления новой геометрии. Это совершенно верно; но большинство этих определений несовместимо с движением неизменяемой фигуры, которое предполагается возможным в теореме Ли. Эти геометрии Римана, столь интересные с различных точек зрения, могут быть лишь чисто аналитическими, и они не поддаются доказательствам, которые были бы аналогичны евклидовым.

Геометрии Гильберта. Наконец, Веронезе и Гильберт придумали новые, еще более странные геометрии, которые они назвали *неархимедовыми.* Они построили их, устранив аксиому Архимеда, в силу которой любая данная протяженность, умноженная на целое достаточно большое число, в конечном счете превзойдет любую данную протяженность, сколь бы велика она ни была. На неархимедовой прямой существуют все точки нашей обычной геометрии, но имеются множества других, которые вставляются между ними, так что между двумя отрезками, которые геометры старой школы рассматривали как смежные, оказывается возможным поместить множество новых точек. Одним словом, неархимедовы пространства уже не являются более непрерывностью второго порядка, если применять язык предыдущей главы, они суть непрерывность третьего порядка.

О природе аксиом. Большинство математиков смотрят на геометрию Лобачевского как на простой логический курьез; но некоторые из них идут дальше. Раз возможно несколько геометрий, то достоверно ли, что наша геометрия есть истинная? Без сомнения, опыт учит нас, что сумма углов треугольника равна двум прямым; но это потому, что мы оперируем треугольниками слишком малыми; разность, по Лобачевскому, пропорциональна площади треугольника; не может ли она сделаться заметной, когда мы будем оперировать большими треугольниками или когда наши измерения сделаются более точными? Таким образом, евклидова геометрия была бы только временной геометрией.

Чтобы обсудить это мнение, мы должны сначала спросить себя, в чем состоит природа геометрических аксиом. Не являются ли они синтетическими априорными суждениями, как говорил Кант?

Будь это так, они навязывались бы нам с такой силой, что мы не могли бы ни вообразить себе положение противоположного содержания, ни основать на нем теоретическое построение. Неевклидовых геометрий не могло бы быть.

Чтобы убедиться в этом, возьмем настоящее синтетическое априорное суждение, например то, которое, как мы видели в первой главе, играет первенствующую роль: *если теорема верна для числа* 1 *и если доказано, что раз она справедлива для* n, *то она верна и для* $n+1$; *в таком случае она будет справедлива для всех положительных целых чисел.*

Попытаемся затем отвлечься от этого положения и, откинув его, построить ложную арифметику по аналогии с неевклидовой геометрией. Это нам не удастся. Сначала было даже стремление рассматривать эти суждения как аналитические.

С другой стороны, обратимся снова к нашим воображаемым существам без толщины; могли ли бы мы допустить, чтобы эти существа, если бы их ум был устроен по образу нашего, приняли евклидову геометрию, которая противоречила бы всему их опыту?

Итак, не должны ли мы заключить, что аксиомы геометрии суть истины экспериментальные? Но над идеальными прямыми или окружностями не экспериментируют; это можно делать только над материальными объектами. К чему же относятся опыты, которые служили бы основанием геометрии?

Ответ ясен. Выше мы видели, что рассуждения ведутся постоянно так, как если бы геометрические фигуры были подобны твердым телам. Следовательно, вот что заимствовала геометрия у опыта: свойства твердых тел.

Свойства света и его прямолинейное распространение также были поводом, из которого вытекли некоторые предложения геометрии, в частности предложения проективной геометрии; так что с этой точки зрения можно было бы сказать, что метрическая геометрия есть изучение твердых тел, а проективная геометрия — изучение света.

Но трудность остается в силе, и она непреодолима. Если бы геометрия была опытной наукой, она не была бы наукой точной и должна была бы подвергаться постоянному пересмотру. Даже более, она немедленно была бы уличена в ошибке, так как мы знаем, что не существует твердого тела абсолютно неизменного.

Итак, *геометрические аксиомы не являются ни синтетическими априорными суждениями, ни опытными фактами.* Они суть *условные положения* (соглашения): при выборе между всеми возможными соглашениями мы *руководствуемся* опытными фактами, но самый выбор остается *свободным* и ограничен лишь необходимостью избегать всякого противоречия. Поэтому-то постулаты могут оставаться *строго* верными, даже когда опытные законы, которые определяли их выбор, оказываются лишь приближенными.

Другими словами, *аксиомы геометрии* (я не говорю об аксиомах арифметики) *суть не более чем замаскированные определения.*

Если теперь мы обратимся к вопросу, является ли евклидова геометрия истинной, то найдем, что он не имеет смысла. Это было бы все равно, что спрашивать, какая система истинна — метрическая или же система со старинными мерами, или какие координаты вернее — декартовы или же полярные. Никакая геометрия не может быть более истинна, чем другая; та или иная геометрия может быть только *более удобной.* И вот, евклидова геометрия есть и всегда будет наиболее удобной по следующим причинам:

1. Она проще всех других; притом она является таковой не только вследствие наших умственных привычек, не вследствие какой-то, я не знаю, непосредственной интуиции, которая нам свойственна по отношению к евклидову пространству; она наиболее проста и сама по себе, подобно тому как многочлен первой степени проще многочлена второй степени; формулы сферической тригонометрии сложнее формул прямолинейной тригонометрии, и они показались бы еще более сложными для аналитика, который не был бы знаком с геометрическими обозначениями.

2. Она в достаточной степени согласуется со свойствами реальных твердых тел, к которым приближаются части нашего организма и наш глаз и на свойстве которых мы строим наши измерительные приборы.

Глава IV

ПРОСТРАНСТВО И ГЕОМЕТРИЯ

Начнем с маленького парадокса.

Существа, разум которых был бы подобен нашему и которые имели бы такие же органы чувств, как и мы, но которые не получили бы никакого предварительного воспитания, могли бы получить от соответственно подобранного внешнего мира такие впечатления, что им пришлось бы построить геометрию иную, чем евклидова, и разместить явления этого внешнего мира в пространстве неевклидовом или даже в пространстве четырех измерений.

Для нас, ум которых сформировался под влиянием окружающего нас мира, не составило бы никакой трудности отнести к нашему евклидову пространству явления этого нового мира, если бы мы были в него внезапно перенесены. И, напротив, если бы существа из того мира были перенесены к нам, они должны были бы отнести наши явления к неевклидову пространству.

Но ведь с небольшими усилиями этого же могли бы достигнуть и мы.

Тот, кто всю свою жизнь посвятил бы такой задаче, может быть, оказался бы в состоянии представить себе четвертое измерение.

Пространство геометрическое и пространство представлений. Часто говорят, что образы внешних предметов локализованы в пространстве, что они даже не могут образоваться иначе как при этом условии. Говорят также, что это пространство, которое таким образом служит готовым *кадром* наших ощущений и представлений, тождественно с пространством геометров, всеми свойствами которого оно обладает.

Всем, кто так думает, предыдущая фраза должна показаться крайне странной. Но надо рассмотреть, не обманываются ли они некоторой иллюзией, которую более глубокий анализ мог бы рассеять.

Каковы, прежде всего, свойства пространства в собственном смысле? Я хочу сказать — того пространства, которое является предметом геометрии и которое я назову *пространством геометрическим*. Вот некоторые из наиболее существенных его свойств:

1. Оно непрерывно.
2. Оно бесконечно.
3. Оно имеет три измерения.
4. Оно однородно, т. е. все точки его тождественны между собой.
5. Оно изотропно, т. е. все прямые, которые проходят через одну и ту же точку, тождественны между собой.

Сравним теперь его с кадром наших представлений и ощущений, который я мог бы назвать *пространством представлений*.

Пространство визуальное. Рассмотрим сначала чисто зрительное впечатление, обусловливаемое изображением, возникающим на сетчатке. Краткий анализ показывает, что это изображение непрерывно, но обладает только двумя измерениями; это уже составляет отличие между пространством геометрическим и тем, что можно было бы назвать *чисто визуальным пространством*. Далее, этот образ заключен в ограниченном кадре.

Наконец, существует еще одно отличие, не менее важное: *это чисто визуальное пространство неоднородно.* Различные точки сетчатки — независимо от изображений, которые могут на них возникать,— играют не одну и ту же роль. Никак нельзя считать желтое пятно тождественным с точкой, лежащей у края сетчатки. В самом деле, здесь не только самый предмет производит гораздо более живые впечатления, но здесь, как и во всяком *ограниченном* кадре, точка, занимающая центр кадра, не будет казаться тождественной с точкой, близкой к одному из кадров.

Более глубокий анализ, без сомнения, показал бы нам, что эта непрерывность визуального пространства и его два измерения суть не более чем иллюзия; этот анализ еще более отдалил бы визуальное пространство от геометрического. Но мы ограничимся здесь только этим замечанием, следствия из которого были достаточно рассмотрены в главе II.

Однако зрение позволяет нам оценивать расстояния и, следовательно, воспринимать третье измерение. Но всякий знает, что это восприятие третьего измерения сводится к ощущению усилия, сопровождающему аккомодацию, которую надо выполнить, и к ощущению, сопровождающему то схождение обеих глазных осей, которое необходимо для отчетливого восприятия предмета.

Мы имеем здесь мускульные ощущения, совершенно отличные от ощущений зрительных, которые дали нам познание первых двух измерений. Таким образом, третье измерение выступит перед нами не в той же роли, какую играют два других. А следовательно, то, что можно назвать *полным визуальным пространством*, не есть пространство изотропное.

Правда, оно имеет как раз три измерения, т. е. элементы наших зрительных ощущений (по крайней мере те из них, которые, слагаясь, образуют представление протяженности) будут вполне определены, когда известны три из них; выражаясь математическим языком, они будут функциями трех независимых переменных.

Но исследуем предмет несколько ближе. Третье измерение открывается нам двумя различными способами: благодаря усилию при аккомодации и вследствие схождения глазных осей.

Эти два рода показаний, без сомнения, всегда согласованы друг с другом. Между ними существует постоянное соотношение; выражаясь математически, две переменные, измеряющие оба типа мускульного ощущения, не выступают перед нами в качестве независимых, или еще,— чтобы не прибегать к математическим понятиям достаточно высокой сложности,— мы можем снова воспользоваться языком предыдущей главы и выразить тот же факт следующим образом: если два ощущения схождения осей A и B неразличимы, то и два соответственно сопровождающих их ощущения аккомодации A' и B' будут также неразличимы.

Но такое соотношение ощущений — это, так сказать, опытный факт; ничто не мешает á priori допустить обратное, и если окажется, что это обратное действительно имеет место, если эти два типа мускульных ощущений изменяются независимо один от другого, то мы должны будем ввести новую независимую переменную, и «полное визуальное пространство» выступит перед нами как физическая непрерывность четырех измерений.

Я даже прибавлю, что это представляет собою факт *внешнего* опыта. Ничто не мешает предположить, что существо, имеющее ум, подобный нашему, и такие же органы чувств, как и мы, помещено в мире, куда свет достигает, только пройдя через преломляющие среды сложной формы. Тогда два показания, служащие нам для оценки расстояний, перестали бы быть связанными постоянным соотношением. Существо, которое получило бы в подобном мире воспитание своих чувств, без сомнения, приписало бы полному визуальному пространству четыре измерения.

Пространство тактильное и пространство моторное. «Тактильное пространство» еще более сложно, чем визуальное, и еще более, чем оно, удаляется от пространства геометрического. Бесполезно было бы повторять для осязания анализ, проведенный мною относительно зрения.

Но вне данных зрения и осязания существуют другие ощущения, которые так же, как и эти ощущения, и даже более способствуют образованию понятия пространства. Это — те всем известные ощущения, которыми сопровождаются все наши движения и которые обыкновенно называются мускульными.

Соответствующий им кадр (le cadre) образует то, что можно назвать *моторным пространством*.

Каждый мускул дает происхождение особому ощущению, способному делаться больше или меньше, так что совокупность наших мускульных ощущений будет зависеть от стольких переменных, сколько у нас мускулов. С этой точки зрения *моторное пространство имело бы столько измерений, сколько мы имеем мускулов.*

Я знаю, мне тотчас скажут, что если мускульные ощущения способствуют образованию понятия пространства, то это потому, что мы имеем чувство *направления* каждого движения, и оно является составной частью ощущения. Если бы это было так, если бы мускульное ощущение не могло зародиться иначе, как сопутствуемое геометрическим чувством направления, то геометрическое пространство было бы формой, присущей нашей способности к ощущению. Но когда я анализирую свои ощущения, я этого совершенно не замечаю. Я вижу, что ощущения, соответствующие движениям того же направления, связаны в моем уме простой *ассоциацией идей.* К этой ассоциации идей и сводится то, что мы называем «чувством направления». Следовательно, этого чувства нельзя было бы найти в единичном ощущении.

Эта ассоциация крайне сложна, так как сокращение того же мускула может отвечать, смотря по положению членов, движениям самых различных направлений.

Она, кроме того, очевидно, является приобретенной; как все ассоциации идей, она есть результат *привычки*; эта привычка сама вытекает из крайне многочисленных *опытов*; не подлежит никакому сомнению, что если бы воспитание наших чувств происходило в иной среде, где мы получали иные впечатления, то возникли бы иные привычки, и наши мускульные ощущения были бы ассоциированы по иным законам.

Характерные черты пространства представлений. Таким образом, пространство представлений в своих трех формах — визуального, тактильного и моторного пространства — существенно отличается от геометрического пространства.

Оно ни однородно, ни изотропно; нельзя даже сказать, что оно имеет три измерения.

Часто говорят, что мы «проектируем» в геометрическое пространство предметы наших внешних восприятий, что мы «локализуем» их. Имеет ли это смысл и какой? Должно ли это обозначать, что мы *представляем* себе внешние предметы в геометрическом пространстве?

Наши представления суть только воспроизведение наших ощущений, поэтому они могут разместиться только в том же кадре, в каком и последние, т. е. в пространстве представлений.

Нам так же невозможно представить себе внешние тела в геометрическом пространстве, как невозможно художнику рисовать на плоской картине предметы с их тремя измерениями.

Пространство представлений есть только образ геометрического пространства — образ, видоизмененный некоторым родом перспективы; мы не можем представить себе предметы иначе, как подчиняя их законам этой перспективы.

Мы не *представляем* себе, следовательно, внешних тел в геометрическом пространстве, но мы *рассуждаем* об этих телах, как если бы они были помещены в геометрическом пространстве.

С другой стороны, когда говорят, что мы «локализуем» данный предмет в данной точке пространства, что хотят этим сказать?

Это просто означает, что мы представляем себе движения, которые надо совершить, чтобы достигнуть этого предмета.

И пусть не говорят, что для того, чтобы представить себе эти движения, их надо проектировать сначала в пространство и что понятие пространства должно, следовательно, существовать раньше.

Когда я говорю, что мы представляем себе эти движения, я хочу сказать только, что мы представляем себе мускульные ощущения, которые сопровождают их и которые вовсе не имеют геометрического характера, а следовательно, отнюдь не предполагают предсуществования понятия пространства.

Изменения состояния и изменения положения. Но скажут, если идея геометрического пространства не присуща нашему уму и, с другой стороны, если никакое из наших ощущений не может нам доставить ее, то как она могла возникнуть?

Это — тема нашего ближайшего исследования. Оно потребует у нас некоторого времени; но я могу резюмировать в нескольких словах конечную цель рассуждения, которое мне предстоит развить.

Никакое из наших ощущений, взятое в отдельности, не могло бы привести нас к идее пространства; мы пришли к ней, только изучая законы, по которым эти ощущения следуют друг за другом. Мы видим прежде всего, что наши впечатления подвержены изменению; но между изменениями, которые мы констатируем, мы скоро бываем вынуждены делать различие.

Мы говорим, или что некоторые предметы, вызывающие эти впечатления, изменили свое состояние, или что они изменили свое положение — что они просто переместились.

Меняет ли предмет свое состояние или только положение, это передается нам всегда одним и тем же способом: *изменением во всем составе впечатлений.*

Каким же образом мы могли прийти к различию обоих изменений? Если произошло только изменение положения, то мы можем восстановить прежнюю совокупность впечатлений, совершая движения, ставящие нас в то же *относительное* положение к подвижному предмету. Мы *компенсируем* таким образом происшедшее изменение, восстанавливая начальное состояние обратным изменением.

Так, если речь идет о зрении и если предмет перемещается перед нашими глазами, мы можем за ним «следить глазами» и удерживать его изображение в той же точке сетчатки посредством соответственных движений глазного яблока.

Эти движения мы сознаем, так как они являются волевыми и сопровождаются мускульными ощущениями; но это не значит, что мы представляем их происходящими в геометрическом пространстве.

Именно этим характеризуется изменение положения, и оно отличается от изменения состояния тем, что всегда может быть *компенсировано* указанным способом.

Следовательно, может случиться, что мы переходим от системы впечатлений A к системе B двумя различными способами: 1) непроизвольно и без каких-либо мускульных ощущений — когда перемещается предмет; 2) произвольно и при наличии мускульных ощущений — когда предмет неподвижен, но перемещаемся мы таким образом, что предмет имеет по отношению к нам относительное движение.

Если дело происходит указанным образом, то переход от системы впечатлений A к системе B есть только изменение положения.

Отсюда следует, что зрение и осязание не могли бы нам дать понятие пространства без помощи «мускульного чувства».

Это понятие не могло бы образоваться не только из единичного ощущения, но даже *из ряда* ощущений; кроме того, существо *неподвижное* никогда не могло бы приобрести его, так как, если бы оно не имело возможности *компенсировать* своими движениями эффектов, зависящих от изменений положения внешних предметов, оно не имело бы никакого основания отличать их от изменений состояния. Оно не могло бы также приобрести это понятие, если бы движения его не были произвольными или если бы они не сопровождались некоторыми ощущениями.

Условия компенсации. Каким образом возможно явление такого рода, что два изменения, не зависящие друг от друга, взаимно компенсируются?

Ум, *знакомый уже с геометрией,* рассуждал бы так. Для того чтобы произошла компенсация, очевидно, нужно, чтобы различные части внешнего предмета, с одной стороны, и различные органы наших чувств, с другой, приходили после двойного изменения опять в то же *относительное* положение. А для этого надо, чтобы различные части внешнего предмета равным образом сохранили друг к другу то же самое относительное положение и чтобы то же имело место для взаимного расположения различных частей нашего тела.

Другими словами, при первом изменении внешний предмет должен перемещаться как неизменное твердое тело; то же самое должно произойти с системой нашего тела при втором изменении, компенсирующем первое.

При этих условиях компенсация может произойти. Но мы, *не будучи еще знакомы с геометрией,*— потому что у нас еще не образовалось понятие пространства,— не можем рассуждать таким образом; мы не можем предвидеть á priori, возможна ли компенсация. Но опыт учит нас, что она иногда имеет место, и это — тот опытный факт, из которого мы исходим для различения изменений состояния от изменений положения.

Твердые тела и геометрия. Среди окружающих нас предметов есть такие, которые часто испытывают перемещения, способные быть компенсированными *соответственным* (коррелятивным) движением нашего собственного тела. Это — *тела твердые.*

Другие предметы, форма которых способна изменяться, испытывают подобные перемещения (изменения положения без изменения формы) только в исключительных случаях. Когда тело перемещается, *изменяя форму*, мы уже не можем соответственными движениями привести органы наших чувств в то же *относительное* положение к этому телу; следовательно, мы более не в состоянии восстановить начальную совокупность впечатлений.

Только позднее и вследствие новых опытов мы научаемся разлагать тела переменной формы на меньшие элементы такого рода, что каждый из них перемещается почти по тем же законам, что и твердые тела. Мы таким образом отличаем «деформации» от других изменений состояния; при таких деформациях каждый элемент испытывает простое изменение положения, которое может быть компенсировано, но изменение, испытываемое всей совокупностью элементов, более глубоко и уже не способно компенсироваться коррелятивным движением [1]).

Подобное понятие, будучи уже очень сложным, могло явиться только относительно поздно; кроме того, оно не могло бы зародиться, если бы наблюдение твердых тел уже не научило нас отличать изменения положения.

Следовательно, если бы не было твердых тел в природе, не было бы и геометрии.

Другое замечание также заслуживает того, чтобы на нем остановиться. Вообразим твердое тело, занимающее сначала положение α и затем переходящее в положение β; в первом своем положении оно про-

---

[1]) То есть коррелятивным движением нашего собственного тела (см. выше). — *Примеч. ред.*

изведет на нас систему впечатлений A и во втором — систему впечатлений B. Пусть имеется теперь второе твердое тело, качественно вполне отличное от первого, например, иного цвета. Предположим еще, что оно переходит от положения α', в котором оно производит на нас систему впечатлений A', к положению β', в котором оно вызывает в нас систему впечатлений B'.

Вообще, ни система A не будет иметь ничего общего с системой A', ни система B с системой B'. Переход от системы A к системе B и переход от системы A' к системе B' суть, следовательно, два изменения, которые *сами по себе*, вообще говоря, ничего общего не имеют. Между тем и то и другое изменение мы рассматриваем как перемещения; более того, мы рассматриваем их как *то же самое* перемещение. Каким образом это происходит?

Это — просто потому, что и то и другое перемещение может быть компенсировано *одним и тем же* коррелятивным движением нашего тела.

Следовательно, не что иное, как «коррелятивное движение», составляет *единственную связь* между двумя явлениями, которые иначе мы никогда и не подумали бы сближать.

С другой стороны, наше тело, благодаря огромному числу его сочленений и мускулов, может предпринимать множество различных движений; но не все они способны «компенсировать» изменение внешних предметов; к этому способны только те, при которых или все наше тело, или по крайней мере те из органов наших чувств, которых касается дело, перемещаются как целое, т. е. не изменяя относительных положений, — подобно твердому телу.

Итак:

1. Мы должны прежде всего различать две категории явлений. Одни, непроизвольные, не сопровождаемые мускульными ощущениями, приписываются нами внешним предметам; это суть внешние изменения. Другие, противоположного характера, которые мы приписываем движениям нашего собственного тела, суть изменения внутренние.

2. Мы замечаем, что известные изменения каждой из этих категорий могут быть компенсированы коррелятивным изменением другой категории.

3. Среди внешних изменений мы отличаем те, которые имеют коррелятивное изменение в другой категории; мы называем их перемещениями; среди изменений внутренних мы также отличаем те, которые имеют коррелятивное изменение в первой категории. Таким образом, благодаря этой взаимности определяется особый класс явлений, которые мы называем перемещениями.

Законы этих явлений и составляют предмет геометрии.

Закон однородности. Первый из этих законов есть закон однородности.

Предположим, что благодаря внешнему изменению α мы пришли от системы впечатлений A к системе B; потом это изменение α компенсировано соответственным волевым движением β так, что мы пришли опять к системе A.

Предположим теперь, что другое внешнее изменение α' снова приводит нас от системы A к системе B.

Опыт учит нас тогда, что это изменение α', как и α, способно компенсироваться коррелятивным волевым движением β' и что это движение β' соответствует тем же мускульным ощущениям, что и движение β, которое компенсировало α.

Именно этот факт и выражается обыкновенно словами: *пространство однородно и изотропно.*

Можно сказать также, что движение, происшедшее один раз, может повториться второй раз, третий раз и т. д., не меняя своих свойств.

В первой главе, где мы изучали природу математического умозаключения, мы видели, какое важное значение следует приписать возможности повторять неопределенное число раз одну и ту же операцию.

Именно от этого повторения математическое умозаключение приобретает свою силу; и если эта сила распространяется также на геометрические факты, то это — благодаря закону однородности.

Для полноты изложения надо было бы присоединить к закону однородности множество других аналогичных законов; я не хочу входить по поводу их в подробности, но математики резюмируют их одним словом, говоря, что перемещения образуют «группу».

Неевклидов мир. Если бы геометрическое пространство выступало в качестве кадра для *каждого* нашего представления, взятого в отдельности, то было бы невозможно представить себе образ, отделенный от этого кадра, и мы не могли бы ничего изменить в нашей геометрии.

На деле это не так: геометрия есть только резюме законов, по которым эти образы *следуют друг за другом.* В таком случае ничто не мешает нам вообразить себе ряд представлений, во всем подобных нашим обычным представлениям, но следующих друг за другом по законам, отличным от тех, к которым мы привыкли.

Поэтому понятно, что существа, умственное воспитание которых проходило бы в такой среде, где эти законы не выполняются, могли бы иметь геометрию, в значительной степени отличную от нашей.

Вообразим, например, мир, заключенный внутри большой сферы и подчиненный следующим законам. Температура здесь не равномерна; она имеет наибольшее значение в центре и понижается по мере удаления от него, делаясь равной абсолютному нулю на шаровой поверхности, которая является границей этого мира.

Я определю в точности даже закон, по которому изменяется эта температура. Пусть R будет радиус граничной поверхности, r — расстояние рассматриваемой точки от центра сферы. Абсолютная температура пусть будет пропорциональна $R^2 - r^2$.

Я предположу далее, что в этом мире все тела имеют один и тот же коэффициент расширения, именно такой, что длина какой-нибудь линейки пропорциональна абсолютной температуре.

Наконец, я предположу, что предмет, перенесенный из одной точки в другую, где температура иная, тотчас же приходит в состояние теплового равновесия со своей новой средой. В этих допущениях нет ничего ни противоречивого, ни немыслимого.

В таком случае движущийся предмет будет все уменьшаться по мере приближения к граничной сфере. Теперь заметим, что хотя этот мир ограничен с точки зрения нашей обычной геометрии, тем не менее он будет казаться бесконечным для его обитателей.

В самом деле, когда они пожелали бы приблизиться к граничной сфере, они охлаждались бы и становились бы все меньше и меньше. Поэтому шаги их постоянно укорачивались бы, и они никогда не могли бы достигнуть граничной сферы.

Если для нас геометрия есть не что иное, как изучение законов, по которым движутся неизменные твердые тела, то для этих воображаемых существ она была бы изучением законов, по которым движутся твердые тела, *изменяющиеся вследствие тех различий в температуре*, о которых я только что говорил.

Без сомнения, и в нашем мире реальные твердые тела также испытывают изменения формы и объема вследствие нагревания и охлаждения. Но устанавливая основы геометрии, мы пренебрегаем этими изменениями, так как, помимо того, что они крайне незначительны, они еще беспорядочны и, следовательно, кажутся нам случайными.

В воображаемом нами мире это было бы уже не так; эти изменения следовали бы правильным и очень простым законам. С другой стороны, различные твердые составные части тела обитателей этого мира испытывали бы такие же изменения формы и объема.

Я сделаю еще другое допущение. Я предположу, что свет здесь проходит через среды различной преломляющей способности, именно такие, что показатель преломления обратно пропорционален $R^2 - r^2$. Легко видеть, что в этих условиях световые лучи были бы не прямолинейными, а круговыми.

Чтобы оправдать все предыдущее, мне остается показать, что известные изменения, происходящие в положении внешних предметов, могут быть *компенсированы* коррелятивными движениями чувствующих существ, которые заселяют этот воображаемый мир; таким образом, может быть восстановлен первоначальный комплекс впечатлений, испытываемых этими существами.

Предположим в самом деле, что предмет перемещается, деформируясь: не как неизменное твердое тело, но как твердое тело, испытывающее неравномерные расширения, в точности соответствующие допущенному выше закону изменения температур.

Для краткости я позволю себе называть подобное движение *неевклидовым перемещением.*

Если по соседству находится чувствующее существо, его впечатления будут изменены благодаря перемещению предмета, но оно будет в состоянии восстановить их в прежнем виде, передвигаясь само надлежащим образом. Достаточно, чтобы в результате система, состоящая из предмета и чувствующего существа, рассматриваемая как одно тело, испытывала одно из тех особых перемещений, которые я назвал неевклидовыми. Это возможно, если допустить, что члены этих существ расширяются по тому же закону, что и другие тела заселяемого ими мира.

Хотя с точки зрения нашей обычной геометрии тела окажутся после такого перемещения деформированными и различные их части отнюдь не возвратятся в прежнее относительное расположение, но мы увидим, что впечатления чувствующего существа окажутся теми же.

В самом деле, если взаимные расстояния различных частей и могли измениться, тем не менее части, бывшие вначале в соприкосновении, опять будут в соприкосновении. Следовательно, осязательные впечатления не изменятся. С другой стороны, если учесть гипотезу о преломлении и кривизне световых лучей, мы убедимся, что и зрительные впечатления останутся прежними.

Итак, наши воображаемые существа должны будут, как и мы, классифицировать наблюдаемые ими явления и выделить из них «изменения положения», которые можно компенсировать соответственным волевым движением.

Если они создадут геометрию, то она не будет, подобно нашей, изучением движений наших неизменных твердых тел; это будет наука об изменениях положения, изменениях, которые они выделят в особую группу и которые будут представлять не что иное, как «неевклидовы перемещения». *Это будет неевклидова геометрия.*

Таким образом, такие же существа, как мы, воспитание которых происходило бы в подобном мире, имели бы геометрию, отличную от нашей.

Мир четырех измерений. Так же, как неевклидов мир, можно представить себе мир четырех измерений.

Чувство зрения, даже при единственном глазе, в соединении с мускульными ощущениями, сопровождающими движения глазного яблока, могло бы оказаться достаточным для познания пространства трех измерений.

Образы внешних предметов рисуются на сетчатке, которая является картиной двух измерений; это — *перспективные изображения.*

Но так как эти предметы, а также и наш глаз, подвижны, то мы последовательно видим различные перспективные изображения одного и того же тела, схваченные с нескольких различных точек зрения.

В то же время мы убеждаемся, что переход от одного перспективного изображения к другому часто сопровождается мускульными ощущениями. Если переходы от перспективы A к перспективе B и от перспективы A' к перспективе B' сопровождаются одними и теми же мускульными ощущениями, то мы сближаем их между собой как операции одной и той же природы.

Изучая затем законы, по которым сочетаются между собой эти операции, мы убеждаемся в том, что они образуют группу, которая имеет такую же структуру, как и группа движений неизменных твердых тел.

Но мы видели, что именно из свойств этой группы мы извлекли понятие геометрического пространства и пространства трех измерений.

Мы понимаем, таким образом, как идея пространства трех измерений могла возникнуть из наблюдения этих перспективных изображений, хотя каждое из них имеет только два измерения; дело в том, что *они следуют друг за другом по определенным законам.*

Теперь таким же образом, как на плоскости можно сделать перспективное изображение фигуры трех измерений, можно сделать изображение фигуры четырех измерений на экране трех (или двух) измерений. Для геометра эта задача в высшей степени простая.

Можно также получить несколько перспективных изображений одной и той же фигуры с нескольких различных точек зрения. Мы можем легко представить себе эти перспективные изображения, так как они имеют только три измерения.

Вообразим, что различные перспективные изображения одного и того же предмета следуют одно за другим и что переход от одного к другому сопровождается мускульными ощущениями.

Ясно, что два из таких переходов будут рассматриваться нами как две операции одной и той же природы, если они будут связаны с такими же мускульными ощущениями.

Теперь ничто не мешает нам вообразить себе, что эти операции сочетаются по любому заданному закону, например так, что образуют группу такой же структуры, как и группа движений неизменного твердого тела четырех измерений.

В таком представлении нет ничего невозможного, и однако это как раз такие же ощущения, которые испытывало бы существо, обладающее сетчаткой двух измерений и возможностью перемещаться в пространстве четырех измерений.

В этом именно смысле допустимо говорить о возможности представить себе четвертое измерение.

Было бы невозможно представить себе этот вид пространства Гильберта, о котором мы говорили в предыдущей главе, так как это пространство уже не является непрерывностью второго порядка. Следовательно, оно слишком глубоко отличается от нашего обычного пространства.

Выводы. Мы видим, что опыт играет необходимую роль в происхождении геометрии; но было бы ошибкой заключить, что геометрия — хотя бы отчасти — является экспериментальной наукой.

Если бы она была экспериментальной наукой, она имела бы только временное, приближенное — и весьма грубо приближенное! — значение. Она была бы только наукой о движении твердых тел. Но на самом деле она не занимается реальными твердыми телами; она имеет своим предметом некие идеальные тела, абсолютно неизменные, которые являются только упрощенным и очень отдаленным отображением реальных тел.

Понятие об этих идеальных телах целиком извлечено нами из недр нашего духа, и опыт представляет только повод, побуждающий нас его использовать.

Предмет геометрии составляет изучение лишь частной «группы» перемещений, но общее понятие группы существует раньше в нашем уме* (dans notre esprit), по крайней мере в виде возможности. Оно присуще нам не как форма нашего восприятия, а как форма нашей способности суждений. Надо только среди всех возможных групп выбрать ту, которая служила бы, так сказать, *эталоном*, с которым мы соотносили бы реальные явления. Опыт направляет нас при этом выборе, но не делает его для нас обязательным; он показывает нам не то, какая геометрия наиболее правильна, а то, какая наиболее *удобна*.

Читатель заметит, что я был бы в состоянии описывать фантастические миры, которые я представлял себе выше, *не переставая пользоваться языком обыкновенной геометрии.*

И в самом деле, мы не изменили бы его, даже если бы были перенесены в такой мир.

Существа, получившие там свое развитие, нашли бы без сомнения более удобным создать геометрию, отличную от нашей, которая лучше соответствовала бы их впечатлениям. Что же касается нас, то наверное даже при наличии *тех же* впечатлений мы нашли бы более удобным не изменять наших привычек.

Глава V

ОПЫТ И ГЕОМЕТРИЯ

1. В предыдущем я уже неоднократно старался показать, что принципы геометрии не являются фактами опыта и что, в частности, постулат Евклида не мог бы быть доказан опытом. Какими бы доказательными ни представлялись мне вышеприведенные соображения, я считаю нужным еще остановиться на этом вопросе, так как здесь мы встречаем ложную идею, глубоко укоренившуюся во многих умах.

2. Пусть мы изготовили материальный круг, измерили его радиус и окружность и желаем убедиться, равно ли отношение этих величин числу π. Что мы делаем в этом случае? Мы производим опыт не над свойствами пространства, а над свойствами как того материала, из которого приготовлен этот *диск*, так и того, из которого сделан метр, служащий для измерений.

3. **Геометрия и астрономия.** Но вопрос ставят еще иначе. Если справедлива геометрия Лобачевского, то параллакс очень удаленной звезды будет конечным; если справедлива геометрия Римана, то он будет отрицательным. Эти результаты, по-видимому, допускают опытную проверку; можно было надеяться, что астрономические наблюдения могут решить выбор между тремя геометриями.

Но то, что в астрономии называется прямой линией, есть просто траектория светового луча. Если, следовательно, сверх ожидания, удалось бы открыть отрицательные параллаксы или доказать, что все параллаксы больше известного предела, то представлялся бы выбор между двумя заключениями: мы могли бы или отказаться от евклидовой геометрии, или изменить законы оптики и допустить, что свет распространяется не в точности по прямой линии. Бесполезно добавлять, что всякий счел бы второе решение более удобным.

Таким образом, евклидовой геометрии нечего опасаться новых опытов.

4. Можно ли утверждать, будто некоторые явления, возможные в евклидовом пространстве, невозможны в неевклидовом, так что опыт, констатируя эти явления, прямо противоречил бы гипотезе о неевклидовом пространстве? По моему мнению, подобный вопрос не может возникнуть. С моей точки зрения, он вполне равносилен следующему вопросу, нелепость которого всякому бросится в глаза: существуют ли длины, которые можно выразить в метрах и сантиметрах, но которых нельзя измерить туазами, футами и дюймами,— так что опыт, констатируя существование этих длин, прямо противоречил бы тому допущению, что существуют туазы, делящиеся на 6 футов.

Рассмотрим вопрос ближе. Допустим, что прямая линия в евклидовом пространстве обладает некоторыми двумя свойствами, которые я назову *A* и *B*; что в неевклидовом пространстве она по-прежнему обладает свойством *A*, но уже не обладает свойством *B*;

допустим, наконец, что в евклидовом — как и в неевклидовом — пространстве прямая линия есть единственная линия, обладающая свойством A.

Если бы это было так, то опыт мог бы решить выбор между гипотезами Евклида и Лобачевского. Представим себе, что мы констатировали бы, что известный конкретный предмет, доступный опыту, например пучок световых лучей, обладает свойством A; отсюда мы заключили бы, что он прямолинейный, и исследовали бы затем, обладает он свойством B или нет.

Но *это не так*; не существует свойства, которое могло бы, как это свойство A, быть абсолютным критерием, позволяющим признать, что данная линия есть прямая, и отличить ее от всякой другой линии.

Скажут, например, что это свойство следующее: «прямая линия есть такая линия, что фигура, часть которой она составляет, может двигаться без изменения взаимных расстояний ее точек, причем все точки этой линии остаются неподвижными».

В самом деле, здесь мы имеем свойство, которое и в евклидовом и в неевклидовом пространстве принадлежит прямой и только прямой. Но как узнать на опыте, обладает ли этим свойством тот или другой конкретный предмет? Для этого понадобится измерить расстояния между некоторыми его точками, но как убедиться, что та конкретная величина, которую я измерил своим материальным прибором, в точности представляет собой абстрактное расстояние между этими точками?

Таким образом, мы лишь отодвинули трудность.

И действительно, свойство, которое я изложил, не есть свойство лишь одной прямой линии, оно есть свойство как прямой, так и расстояния. Чтобы оно могло служить абсолютным критерием, надо иметь возможность установить не только то, что оно не принадлежит никакой иной линии, кроме прямой, и принадлежит расстоянию, но еще то, что оно не принадлежит никакой другой линии, кроме прямой, и никакой другой величине, кроме расстояния. А именно это неверно.

Поскольку невозможно указать конкретный опыт, который мог бы быть истолкован в евклидовой системе и не мог бы быть истолкован в системе Лобачевского, то я могу заключить: никогда никакой опыт не окажется в противоречии с постулатом Евклида, но зато и никакой опыт не будет никогда в противоречии с постулатом Лобачевского.

5. Итак, евклидова (или неевклидова) геометрия никогда не может оказаться в прямом противоречии с опытом. Но этого недостаточно. Возникает вопрос: не может ли случиться, что ее можно будет согласовать с опытом лишь путем нарушения принципа достаточного основания и принципа относительности пространства?

Объясняюсь подробнее. Рассмотрим какую-нибудь материальную систему; мы обратим внимание, с одной стороны, на «состояние» различных тел этой системы (например, на их температуру, электрический потенциал и т. д.), с другой стороны — на их положение в пространстве; и среди данных, которые позволяют определить это положение, мы различим еще взаимные расстояния этих тел, определяющие их относительные положения, и условия, которые определяют абсолютное положение системы и ее абсолютную ориентировку в пространстве.

Законы явлений, которые будут происходить в этой системе, могут зависеть от состояния этих тел и их взаимных расстояний; но вследствие относительности и пассивности пространства они не будут зависеть от абсолютного положения и абсолютной ориентировки системы.

Другими словами, состояние тел и их взаимные расстояния в какой-нибудь момент будут зависеть от состояния этих же тел и их взаимных расстояний в начальный момент; но они ни в каком случае не будут зависеть от абсолютного начального положения системы и ее абсолютной начальной ориентировки. Это свойство для краткости я буду называть *законом относительности.*

Я говорил до сих пор как геометр, следующий Евклиду. Всякий опыт, как я уже сказал, допускает истолкование на почве евклидовой гипотезы; но он допускает его и на почве гипотезы неевклидовой. Мы произвели ряд опытов; мы их истолковали на основании евклидовой гипотезы и нашли, что это истолкование согласно с «законом относительности».

Истолкуем их теперь по неевклидовой гипотезе. Это всегда возможно; отличие же лишь в том, что в этом новом истолковании неевклидовы расстояния между отдельными телами вообще не будут теми же, что евклидовы расстояния в первом истолковании.

Но будут ли истолкованные таким новым способом опыты по-прежнему оставаться в согласии с нашим «законом относительности»? И если это согласие не сохранится, то не будем ли мы все-таки вправе сказать, что опыт доказал неправильность неевклидовой геометрии?

Легко видеть, что это опасение напрасно; в самом деле, для того чтобы можно было приложить закон относительности во всей строгости, надо было бы приложить его ко всей Вселенной. Если же иметь в виду только часть этой Вселенной и если абсолютное положение этой части изменилось, то и расстояния ее относительно других тел Вселенной также изменились, следовательно, их влияние на рассматриваемую часть Вселенной могло увеличиться или уменьшиться; а это может изменить законы происходящих здесь явлений.

Но если система, о которой у нас идет речь, есть вся Вселенная, то опыт бессилен дать нам указания о ее абсолютном положении и ориентировке в пространстве. Все, что могут обнаружить наши инструменты, сколь бы совершенны они ни были,— это состояние различных частей Вселенной и их взаимные расстояния.

Таким образом, наш закон относительности может быть формулирован так:

Отсчеты, которые мы можем производить в какой-нибудь момент на наших инструментах, будут зависеть только от отсчетов, которые мы могли бы произвести на тех же инструментах в начальный момент.

Но подобная формулировка не зависит ни от какого истолкования опытов. Если закон верен в евклидовом истолковании, он будет верен также и в неевклидовом истолковании.

Я позволю себе по этому поводу сделать маленькое отступление. Выше я говорил о данных, определяющих положение различных тел системы; мне следовало бы сказать также о данных, определяющих их скорости; тогда мне пришлось бы различать, с одной стороны, скорость, с которой изменяются взаимные расстояния различных тел, а с другой — скорости переноса и вращения системы, т. е. скорости, с которыми изменяются ее абсолютное положение и ориентировка.

Для полного удовлетворения ума надо было бы закон относительности формулировать так:

Состояние тел и их взаимные расстояния в какой-нибудь момент, так же, как и скорости, с которыми изменяются эти расстояния в тот же момент, зависят только от состояния этих тел, их взаимных расстояний в начальный момент, а также от скоростей, с которыми последние изменялись в этот начальный момент; но они не будут зависеть ни от начального абсолютного положения системы, ни от ее абсолютной ориентировки, ни от скоростей, с которыми изменялись это абсолютное положение и ориентировка в начальный момент.

К сожалению, закон, сформулированный таким образом, не находится в согласии с опытами, по крайней мере с обычным их истолкованием.

Представим себе человека, перенесенного на некоторую планету, где небо постоянно закрыто густым покровом облаков, так что никогда не видно других светил; пусть жизнь этой планеты течет так, как если бы она была изолирована в пространстве. Все же этот человек мог бы заметить ее вращение, измеряя, например, ее сжатие (это производится обыкновенно при помощи астрономических наблюдений, но могло бы быть произведено и средствами чисто геодезическими) или повторяя опыт Фуко с маятником. Следовательно, абсолютное вращение этой планеты могло бы быть обнаружено.

Факт этот смущает философа, но физик вынужден его принять.

Известно, что из этого факта Ньютон заключил о существовании абсолютного пространства; я никак не могу согласиться с таким заключением; причины этого я покажу в третьей части, так как я не хотел бы касаться такого трудного вопроса мимоходом.

Таким образом, мне поневоле пришлось в формулировку закона относительности ввести скорости всякого рода среди данных, определяющих состояние тел.

Во всяком случае, трудность эта остается одной и той же как для геометрии евклидовой, так и для геометрии Лобачевского; поэтому я особенно не был обеспокоен ею и упомянул о ней только к случаю. Что важно, так это вывод: опыт не может решить выбор между Евклидом и Лобачевским.

Итак, как ни взглянуть на дело, невозможно найти разумное основание для геометрического эмпиризма.

6. Опыты обнаруживают только взаимные отношения тел; никакой опыт не даст и не может дать указаний об отношениях тел к пространству или о взаимных отношениях различных частей пространства.

«Да,— скажете вы на это,— единичный опыт недостаточен, так как он дает только одно уравнение со многими неизвестными; но когда я произведу достаточное количество опытов, я буду иметь достаточно уравнений, чтобы вычислить все мои неизвестные».

Но недостаточно знать высоту грот-мачты,— возражаю я,— чтобы вычислить возраст капитана. Определив все размеры корпуса корабля, вы будете иметь много уравнений, но все-таки вы не узнаете этого возраста. Все ваши измерения, относящиеся к частям корабельного корпуса, не могут обнаружить вам ничего, кроме того, что касается этих частей. Точно так и ваши опыты, как бы многочисленны они ни были: указывая только на взаимные отношения тел, они не скажут нам ничего о взаимных отношениях различных частей пространства.

7. Вы скажете, что если опыты относятся к телам, то они относятся по крайней мере к геометрическим свойствам тел.

Но, прежде всего,— что вы понимаете под геометрическими свойствами тел? Допустим, что здесь речь идет об отношениях тел к пространству; но эти свойства недоступны опытам, которые касаются только взаимного отношения между телами. Одного этого замечания было бы достаточно, чтобы показать, что речь идет о другом.

Постараемся прежде всего понять смысл выражения: геометрические свойства тел. Когда я говорю, что тело слагается из нескольких частей, я думаю, что этим я не высказываю суждения о геометрическом свойстве; это осталось бы справедливым, даже если бы я условился пользоваться неподходящим названием точек для наименьших рассматриваемых мною частей.

Когда я говорю, что такая-то часть такого-то тела находится в соприкосновении с такой-то частью другого какого-нибудь тела, я высказываю предложение, касающееся взаимных отношений этих двух тел, но не их отношений к пространству.

Я думаю, вы согласитесь со мной, что здесь мы имеем дело не с геометрическими свойствами; по крайней мере, вы, наверно, согласитесь, что эти свойства независимы от каких бы то ни было понятий метрической геометрии.

После этого представим себе, что имеется твердое тело, состоящее из восьми тонких железных стержней OA, OB, OC, OD, OE, OF, OG и OH, соединенных вместе своими концами O.

Пусть, с другой стороны, мы имеем второе твердое тело, например кусок дерева, на котором отметим чернилами три маленьких пятнышка; я назову их α, β, γ.

Пусть мы убедились затем, что можно привести в соприкосновение $\alpha\beta\gamma$ с AGO (т. е. одновременно α с A, β с G и γ с O), потом — что последовательно можно привести в соприкосновение $\alpha\beta\gamma$ с BGO, CGO, DGO, EGO, FGO, затем с AHO, BHO, CHO, DHO, EHO, FHO, потом $\alpha\gamma$ последовательно с AB, BC, CD, DE, EF, FA.

Вот опытные факты, в которых можно удостовериться, не имея наперед никакого знания о форме или метрических свойствах пространства. Они никоим образом не относятся к «геометрическим свойствам тел». И эти факты будут невозможны, если тела, над которыми экспериментируют, движутся, следуя группе такой же структуры, как группа Лобачевского (я хочу сказать — по законам движения твердых тел в геометрии Лобачевского). Значит, достаточно этих фактов, чтобы убедиться, что тела эти движутся, следуя евклидовой группе, или, по крайней мере, что они движутся не в соответствии с группой Лобачевского.

Что эти факты совместимы с евклидовой группой, легко убедиться: стоит только представить себе $\alpha\beta\gamma$ неизменяемым твердым телом нашей обычной геометрии, имеющим форму прямоугольного треугольника, а точки A, B, C, D, E, F, G, H — вершинами многогранника, образованного двумя правильными шестигранными пирамидами нашей обыкновенной геометрии, имеющими общим основанием $ABCDEF$, а вершинами — одна G, другая H.

Предположим теперь, что вместо предыдущих фактов мы наблюдали, что можно опять-таки наложить $\alpha\beta\gamma$ последовательно на AGO, BGO, CGO, DGO, EGO, FGO, AHO, BHO, CHO, DHO, EHO, FHO, а потом можно $\alpha\beta$ (отнюдь не $\alpha\gamma$) наложить последовательно на AB, BC, CD, DE, EF и FA.

Вот опытные факты, которые можно было бы наблюдать, если бы неевклидова геометрия была правильна и если бы $\alpha\beta\gamma$ и $OABCDEFGH$ были неизменяемыми твердыми телами: первое — в форме прямоугольного треугольника, а второе — в форме двойной правильной шестигранной пирамиды соответствующих размеров.

Итак, эти новые факты невозможны, раз тела движутся, следуя евклидовой группе; но они стали бы возможны, если бы допустить, что тела движутся подобно группе Лобачевского. Их было бы, следовательно, достаточно (если бы они наблюдались), чтобы убедиться, что рассматриваемые тела не движутся, следуя евклидовой группе.

Таким образом, не вводя никакой гипотезы о форме и природе пространства, об отношениях тел к пространству, не приписывая телам никакого геометрического свойства, я нашел факты, позволяющие мне показать, что доступные опытам тела в одном случае движутся, следуя структуре группы Евклида, в другом — следуя структуре группы Лобачевского.

Однако нельзя сказать, что первый ряд фактов может составить опыт, доказывающий, что пространство является евклидовым, а второй — опыт, доказывающий, что пространство неевклидово.

В самом деле, можно было бы представить себе тела, движущиеся таким образом, что они осуществляют второй ряд фактов. Доказательством служит то, что любой механик мог бы их построить, если бы он захотел взять на себя этот труд и если бы придавал этому значение. Однако из этого вы не заключили бы, что пространство неевклидово, тем более, что обыкновенные твердые тела продолжали бы существовать и тогда, когда механик построил бы странные тела, упомянутые мною: так что пришлось бы даже заключить, что пространство является одновременно евклидовым и неевклидовым.

Предположим, например, что мы имеем большую сферу радиуса R и что температура убывает от центра к поверхности этой сферы по закону, о котором я говорил, описывая неевклидов мир.

Мы могли бы иметь тела, расширением которых можно было бы пренебречь и которые вели бы себя как обыкновенные неизменяемые твердые тела; с другой стороны, мы могли бы иметь тела очень растяжимые, которые вели бы себя как неевклидовы твердые тела. Мы могли бы иметь две двойные пирамиды $OABCDEFGH$ и $O'A'B'C'D'E'F'G'H'$ и два треугольника $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha'\beta'\gamma'$. Первая двойная пирамида была бы прямолинейной, вторая — криволинейной; треугольник $\alpha\beta\gamma$ был бы сделан из нерастяжимого, а треугольник $\alpha'\beta'\gamma'$ — из очень растяжимого вещества.

Тогда можно было бы обнаружить первый ряд фактов с двойной пирамидой OAH и треугольником $\alpha\beta\gamma$ и второй — с двойной пирамидой $O'A'H'$ и треугольником $\alpha'\beta'\gamma'$. И тогда опыт, по-видимому, убеждал бы сначала, что евклидова геометрия истинна, а затем — что она ложна.

Таким образом, опыты относятся не к пространству, а к телам.

8. Добавление. Для полноты мне следовало бы еще сказать о вопросе очень тонком, который потребовал бы подробного развития; я ограничусь здесь только резюмированием того, что я изложил в «Revue de Métaphysique et de Morale» и в «The Monist». Что мы хотим сказать, когда говорим, что пространство имеет три измерения?

Мы видели важность тех «внутренних изменений», которые нам открываются нашими мускульными ощущениями. Они могут служить для характеристики различных *положений* нашего тела. Возьмем за начальное одно из этих положений A. Когда мы переходим от этого начального положения к какому-нибудь другому положению B, мы испытываем ряд мускульных ощущений S, и этим рядом S определится B. Однако заметим, что часто мы рассматриваем два ряда S и S' как определяющие одно и то же положение B (потому что начальное и конечное положение A и B остаются теми же, но промежуточные положения и соответствующие ощущения могут различаться). Как же мы узнаем об эквивалентности этих двух рядов? Это возможно потому, что они могут служить для компенсации одного и того же внешнего изменения, или, более общо, потому, что когда речь идет о компенсации внешнего изменения, один из рядов может быть заменен другим.

Среди этих рядов мы выделили те, которые одни могут компенсировать внешнее изменение и которые мы назвали «перемещениями». Так как мы не можем различать два слишком близких перемещения, то совокупность этих перемещений представляет характерные черты физической непрерывности; опыт учит нас, что эта физическая непрерывность имеет шесть измерений; но мы не знаем еще, сколько измерений имеет пространство само по себе; нам надо решить сначала другой вопрос.

Что такое точка пространства? Все думают, что знают это, но это только иллюзия. Когда мы стараемся представить себе точку пространства, то она выступает в виде черного пятна на белой бумаге или как белое пятно от мела на черной доске; это всегда объект. Поэтому вопрос должен быть поставлен следующим образом: что значит, когда я говорю, что предмет B находится в той же точке, которую только что занимал предмет A? И еще: какой критерий позволит мне узнать это?

Я хочу этим сказать, что *хотя сам я не шевелился* (о чем свидетельствует мое мускульное чувство), но мой указательный палец, который только что касался предмета A, теперь касается предмета B. Я мог бы воспользоваться другими критериями, например средним пальцем или чувством зрения. Но первый критерий достаточен, я знаю, что если он отвечает утвердительно, то все другие критерии дадут тот же ответ. Я знаю это *из опыта* — я не могу знать этого à priori.

Поэтому-то я говорю также, что осязание не может действовать на расстоянии; это — только другой способ выражения того же экспериментального факта. И если я говорю, наоборот, что зрение действует на расстоянии, то это значит, что критерий, доставляемый зрением, может отвечать утвердительно, тогда как другие отвечают отрицательно.

В самом деле, пусть некоторый предмет даже после удаления дает свое отображение в той же точке сетчатки. Тогда зрение дает положительный ответ: предмет пребывает в той же точке, но осязание отвечает отрицательно, ибо палец, только что касавшийся предмета, теперь уже больше его не касается. Если бы опыт показал нам, что касание одним пальцем дает отрицательный ответ, тогда как касание другим — положительный, то мы сказали бы то же самое: что осязание действует на расстоянии.

Итак, для каждого положения моего тела мой указательный палец определяет некоторую точку; это и только это определяет точку пространства.

Каждому положению соответствует, таким образом, одна точка; но часто бывает, что та же точка соответствует нескольким различным положениям (например, в том случае, когда мы говорим, что наш палец не двигался, между тем как остальная часть тела переместилась). Мы выделяем, следовательно, среди изменений положения такие, при которых палец не двигается. Как мы приходит к этому? Только благодаря тому, что мы часто замечаем, как при этих изменениях предмет, находящийся в контакте с пальцем, не разрывает этого контакта.

Отнесем к одному и тому же классу все те положения, которые вытекают одни из других путем одного из выделенных нами таким образом изменений. Всем положениям одного и того же класса будет соответствовать одна и та же точка пространства. Поэтому каждому классу будет соответствовать точка, и каждой точке — класс. Но можно сказать: то, к чему относится опыт, не есть точка; это есть указанный класс изменений или лучше — соответственный класс мускульных ощущений.

И когда мы говорим, что пространство имеет три измерения, мы хотим просто сказать, что совокупность этих классов выступает перед нами с характерными чертами физической непрерывности трех измерений.

Мог бы показаться заманчивым тот вывод, что именно опыт показал нам, сколько измерений имеет пространство. Но в действительности наши опыты имели здесь дело еще не с пространством, а с нашим телом и с его отношениями к соседним предметам. Кроме того, они слишком грубы.

В нашем уме предсуществовала скрытая идея известного числа групп: это — те группы, теорию которых создал Ли. Какую из них мы выберем в качестве как бы эталона, с которым будем сравнивать реальные явления? И, выбрав эту группу, какую из ее подгрупп мы возьмем для характеристики точки пространства? Раньше нами руководил опыт, показывая, какой выбор лучше соответствует свойствам нашего тела. Но тут его роль ограничивается.

Опыт предков. Часто говорят, что если индивидуальный опыт не мог породить геометрию, то это не относится к опыту всего человеческого вида. Но что под этим понимается? Не хотят ли этим сказать, что если мы не в состоянии доказать постулат Евклида, то наши предки могли это сделать? Ни в коем случае. Этим хотят сказать, что в силу естественного отбора наш ум приспособился к условиям внешнего мира, что он усвоил себе геометрию, наиболее выгодную для вида, или, другими словами, наиболее удобную. Но это соответствует нашим выводам о том, что геометрия не истинна, а только выгодна.

Часть III

СИЛА

Глава VI

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Англичане преподают механику как науку экспериментальную; на континенте же ее всегда излагают как науку более или менее дедуктивную и априорную. Бесспорно, правы англичане; но как же оказалось возможным так долго держаться другого способа изложения? Почему ученые на континенте, старавшиеся избежать привычек своих предшественников, чаще всего оказывались не в состоянии полностью от них освободиться?

С другой стороны, если принципы механики не имеют иного источника, кроме опыта, не являются ли они в силу этого только приближенными и временными? Не могут ли новые опыты когда-нибудь заставить нас видоизменить эти принципы или даже совсем отказаться от них?

Трудность решения этих естественно возникающих вопросов происходит главным образом от того, что руководства по механике не вполне ясно различают, где опыт, где математическое суждение, где условное соглашение, где гипотеза.

Это еще не все:

1) Абсолютного пространства не существует; мы познаем только относительные движения; между тем механические факты чаще всего излагают так, как если бы существовало абсолютное пространство, к которому их можно было бы отнести.

2) Не существует абсолютного времени; утверждение, что два промежутка времени равны, само по себе не имеет смысла и можно принять его только *условно.*

3) Мы не способны к непосредственному восприятию не только равенства двух промежутков времени,

но даже простого факта одновременности двух событий, происходящих в различных местах; я разъяснил это в статье, озаглавленной «La mesure du temps» [1]).

4) Наконец, наша евклидова геометрия есть лишь род условного языка; мы могли бы изложить факты механики, относя их к неевклидову пространству, которое было бы основой, менее удобной, но столь же законной, как и наше обычное пространство; изложение слишком осложнилось бы, но осталось бы возможным.

Таким образом, абсолютное пространство, абсолютное время, даже сама геометрия не имеют характера вещей, обусловливающих собой механику; они так же мало предваряют существование механики, как мало французский язык логически предваряет существование истин, выражаемых по-французски.

Можно было бы попытаться изложить основные законы механики на языке, независимом от всех этих соглашений; тогда, без сомнения, можно было бы лучше отдать себе отчет в том, что представляют эти законы сами по себе; как раз это и попытался сделать (по крайней мере отчасти) Андрад в своих «Leçons de Mécanique physique».

Формулировка этих законов оказалась бы, конечно, гораздо более сложной, потому что все указанные выше соглашения и созданы именно для того, чтобы сократить и упростить эту формулировку.

Здесь я оставляю в стороне все эти трудности, за исключением вопроса об абсолютном пространстве. Я далек от мысли пренебрегать ими; но мы достаточно разобрали их в двух первых частях.

Итак, я допущу *временно* абсолютное время и евклидову геометрию.

Принцип инерции. Тело, на которое не действует никакая сила, может двигаться только прямолинейно и равномерно.

Есть ли это истина, присущая à priori нашему разуму? Если бы это было так, то как же не знали ее

---

[1]) Revue de Métaphysique et de Morale. — Janvier, 1898. — T. 6. — P. 1—13. Статья вошла в виде второй главы книги «Ценность науки», см. наст. изд., с. 218. Ранее перевод ее публиковался: Пуанкаре А. Избранные труды, т. III. — М.: Наука, 1974. — С. 419; Принцип относительности. — М.: Атомиздат, 1973. — С. 12. — *Примеч. ред.*

греки? Как могли они думать, что движение прекращается, как только перестает действовать вызвавшая его причина, или что всякое тело, не встречающее никаких препятствий со стороны, принимает круговое движение, как наиболее совершенное из всех движений?

Говорят, что скорость тела не может измениться, раз нет основания для ее изменения; но не можем ли мы с таким же правом утверждать, что не может измениться положение тела или кривизна его траектории, раз внешняя причина не вызывает их изменения?

Если принцип инерции не принадлежит к числу априорных истин, то не значит ли это, что мы имеем в нем экспериментальный факт? Но разве когда-нибудь экспериментировали над телами, на которые не действовала никакая сила? И как можно было бы получить уверенность, что на эти тела не действует никакая сила? Обыкновенно ссылаются на пример бильярдного шара, очень долгое время катящегося по мраморному столу; но на каком основании мы говорим, что на него не действует никая сила? Не на том ли, что он слишком удален от всех других тел, чтобы испытывать от них сколько-нибудь заметное действие? Однако он не дальше от земли, чем в том случае, если бы был свободно брошен в воздухе; а всякий знает, что в таком случае он подвергся бы влиянию тяжести, обусловленному земным притяжением.

Преподаватели механики обычно быстро излагают пример с шаром; но они прибавляют, что принцип инерции проверяется косвенно в своих следствиях. Это — неправильное выражение; очевидно, они хотят сказать, что можно проверить различные следствия более общего принципа, по отношению к которому принцип инерции является только частным случаем.

Этот общий принцип я предложу сформулировать так:

Ускорение тела зависит только от положения этого тела и соседних тел и от их скоростей. Математик сказал бы, что движения всех материальных частиц Вселенной определяются дифференциальными уравнениями второго порядка.

Чтобы уяснить, что здесь мы имеем дело с естественным обобщением закона инерции, я позволю себе привести один воображаемый случай. Выше я указывал, что закон инерции не присущ нам à priori; другие законы были бы столь же хорошо, как и он, совместимы с принципом достаточного основания. Когда на тело не действует никакая сила, то мы могли бы вообразить, что неизменным является не скорость его, а его положение или его ускорение.

Итак, представим себе на минуту, что один из этих двух гипотетических законов есть закон природы и заступает место нашего закона инерции. Каково было бы его естественное обобщение? Поразмыслив минуту, мы это уясним.

В первом случае пришлось бы допустить, что скорость тела зависит только от его положения и от положения соседних тел; во втором — что изменение ускорения тела зависит только от положения этого тела и соседних тел, от их скоростей и от их ускорений.

Или, говоря математическим языком, дифференциальные уравнения движения были бы в первом случае первого порядка, во втором — третьего.

Видоизменим несколько наш воображаемый пример. Представим себе мир, аналогичный нашей Солнечной системе, лишь с тем отличием, что здесь все орбиты планет благодаря чистой случайности не имеют эксцентриситетов и наклонений. Представим себе далее, что массы этих планет слишком ничтожны, чтобы их взаимные возмущения были ощутимы. Астрономы, населяющие одну из этих планет, не преминули бы заключить, что орбита светила может быть только круговой и параллельной определенной плоскости; тогда положения светила в данный момент было бы достаточно для определения его скорости и всей его траектории. Закон инерции, который они установили бы, был бы первый из двух гипотетических законов, о которых я только что говорил.

Вообразим теперь, что вдруг через эту систему проходит с огромной скоростью массивное тело, пришедшее из отдаленных созвездий. Все орбиты окажутся сильно возмущенными. Но это еще не очень смутило бы наших астрономов; они догадались бы, что это новое светило является единственным виновником всего зла. Стоит ему удалиться,— сказали бы они,— и порядок восстановится сам собой; конечно, расстояния планет от Солнца уже не станут вновь такими же, какими они были до катастрофы, но когда не будет более возмущающего светила, орбиты снова станут круговыми. И только тогда, когда возмущающее тело было бы уже далеко, а орбиты, вместо того чтобы опять стать круговыми, превратились бы в эллиптические,— только тогда эти астрономы заметили бы свою ошибку и необходимость переделать всю свою механику.

Я несколько подробнее остановился на этих гипотезах, потому что, как мне думается, уяснить себе содержание нашего обобщенного закона инерции можно, только сопоставляя его с противоположным допущением.

Мы возвращаемся теперь к этому обобщенному закону инерции. Спрашивается, проверен ли он в настоящее время на опыте, и возможно ли это вообще? Когда Ньютон писал свои «*Начала*» [1]), он смотрел на эти истину как на выработанную и доказанную экспериментально. Таковой она была в его глазах не только благодаря антропоморфному представлению, о котором речь будет дальше, но благодаря трудам Галилея; она была таковой и в силу законов Кеплера; действительно, согласно этим законам траектория планеты полностью определяется ее начальными положением и скоростью; а это как раз то, чего требует наш обобщенный принцип инерции.

Чтобы этот принцип оказался истинным только по внешнему виду, чтобы можно было опасаться, что когда-нибудь он будет заменен одним из принципов, которые я сейчас противопоставлял ему, пришлось бы допустить, что мы введены в заблуждение какой-нибудь удивительной случайностью вроде той, которая в развитом мною выше примере ввела в заблуждение наших воображаемых астрономов.

Подобная гипотеза слишком неправдоподобна, чтобы на ней останавливаться. Никто не поверит в возможность таких случайностей. Конечно, вероятность того, чтобы два эксцентриситета были как раз

---

[1]) N e w t o n I. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1686. Русский перевод: Н ь ю т о н И. Математические начала натуральной философии/Пер. А. Н. Крылова//Собрание трудов академика А. Н. Крылова, т. VII. — М.; Л.: Изд. АН СССР, 1936. — *Примеч. ред.*

равны нулю (в пределах погрешностей наблюдения), не меньше, чем вероятность того, чтобы один был равен, например, 0,1, а другой 0,2 (тоже в пределах погрешностей наблюдения). Вероятность простого события не меньше вероятности сложного; и тем не менее, когда такое простое событие наступает, мы не согласимся приписать его случайности; мы не захотим верить, что природа умышленно ввела нас в заблуждение. Устраняя гипотезу о возможности заблуждений такого рода, мы можем признать, что, поскольку дело касается астрономии, наш закон был проверен на опыте.

Но астрономия еще не составляет всей физики. Не можем ли мы опасаться, что какой-нибудь новый опыт когда-нибудь обнаружит несостоятельность закона в том или другом отделе физики? Экспериментальный закон всегда подвержен пересмотру; мы всегда должны быть готовы к тому, что он может быть заменен другим законом, более точным.

Однако никто не выражает серьезных опасений, что закон, о котором идет речь, когда-нибудь придется отклонить или исправить. Почему же? Именно потому, что его никогда нельзя будет подвергнуть решающему испытанию.

Прежде всего, для полноты такого испытания было бы необходимо, чтобы по истечении известного времени все тела Вселенной вернулись вновь к своим начальным положениям и к своим начальным скоростям. Тогда мы увидели бы, примут ли они с этого момента вновь те траектории, по которым они уже следовали один раз.

Но такое испытание невозможно: его можно осуществить только в отдельных частях и при этом всегда будут тела, которые не вернутся к своему начальному положению; таким образом, всякое нарушение этого закона легко найдет себе объяснение.

Но это не все: в астрономии мы *видим* тела, движения которых изучаем, и мы в большинстве случаев допускаем, что они не подвержены действию других тел, которых мы не видим. Таковы те условия, в которых проверяется наш закон.

В физике дело обстоит не совсем так: если в основе физических явлений и лежит движение, то это — движение молекул, которых мы не видим. В таком случае, если ускорение одного из видимых тел представится нам зависящим от *чего-то иного*, кроме положений или скоростей других видимых тел или невидимых молекул, существование которых мы должны были допустить раньше, то ничто не помешает нам допустить, что это *что-то иное* есть положение или скорость других молекул, присутствия коих мы до сих пор не подозревали. Закон окажется спасенным.

Я позволю себе на минуту воспользоваться математическим языком, чтобы выразить ту же мысль в иной форме. Я допускаю, что мы наблюдаем n молекул и констатируем, что их $3n$ координат удовлетворяют системе $3n$ дифференциальных уравнений четвертого порядка (не второго, как того требовал бы закон инерции). Мы знаем, что, вводя $3n$ вспомогательных переменных, мы можем свести систему $3n$ уравнений четвертого порядка к системе $6n$ уравнений второго порядка. Тогда стоит допустить, что эти $3n$ вспомогательных переменных представляют координаты n невидимых молекул, и результат снова окажется в согласии с законом инерции.

Итак, этот закон, проверенный экспериментально в некоторых частных случаях, может быть без опасения распространен на самые общие случаи, так как мы знаем, что в этих общих случаях опыт уже не может ни подтвердить его, ни быть с ним в противоречии.

Закон ускорения. Ускорение тела равно действующей на него силе, деленной на его массу.

Можно ли проверить на опыте этот закон? Для этого нужно было бы измерить три величины, входящие в его выражение: ускорение, силу и массу.

Отвлекаясь от трудности, связанной с измерением времени, допустим, что возможно измерить ускорение. Но как измерить силу или массу? Мы не знаем даже, что это такое.

Что такое *масса*? Это, отвечает Ньютон, произведение объема на плотность. Лучше сказать, возражают Томсон и Тэт, что плотность есть частное от деления массы на объем. Что такое *сила*? Это, отвечает Лагранж, причина, производящая или стремящаяся произвести движение тела. Это, скажет Кирхгоф, произведение массы на *ускорение*. Но тогда почему не сказать, что масса есть частное от деления силы на ускорение.

Эти трудности непреодолимы. Определяя силу как причину движения, мы становимся на почву метафизики, и если бы таким определением пришлось удовольствоваться, оно было бы абсолютно бесплодно. Чтобы определение могло быть к чему-нибудь пригодно, оно должно научить нас *измерению* силы; к тому же этого условия и достаточно; нет никакой необходимости, чтобы определение научило нас тому, что такое сила *сама по себе*, или тому, есть ли она причина или следствие движения.

Итак, прежде всего надо определить равенство двух сил. Когда говорят, что две силы равны? Тогда, отвечают нам, когда, будучи приложены к одной и той же массе, они сообщают ей одно и то же ускорение или когда, будучи прямо противоположно направлены, они взаимно уравновешиваются. Но это определение совершенно призрачно. Силу, приложенную к данному телу, нельзя отцепить от него и прицепить затем к другому телу вроде того, как отцепляют локомотив, чтобы сцепить его с другим поездом. Поэтому и нельзя знать, какое ускорение данная сила, приложенная к данному телу, сообщила бы другому телу, *если бы была* к нему приложена. Нельзя также знать, каково было бы действие двух сил, не прямо противоположных, в том случае, *если бы* они были прямо противоположны.

Это именно определение и стараются, так сказать, материализовать, когда измеряют силу динамометром или уравновешивают ее грузом. Две силы F и F', которые я для простоты предположу вертикальными и направленными снизу вверх, приложены соответственно к двум телам C и C'; я подвешиваю одно и то же тело веса P сначала к телу C, потом к C'; если в обоих случаях имеет место равновесие, то я заключу, что две силы F и F', будучи обе равны весу P, равны между собою.

Но уверен ли я, что тело P сохранило тот же вес, когда я перенес его от первого тела ко второму? Вовсе нет, *я уверен как раз в противном*; я знаю, что напряжение силы тяжести меняется при переходе от одной точки к другой и что оно, например, больше на полюсе, чем на экваторе. Бесспорно, эта разница ничтожна, и на практике я не стал бы принимать ее в расчет; но правильное определение должно обладать математической точностью, а этой точности здесь нет. Сказанное относительно тяжести, очевидно, применимо и к упругой силе динамометра, которая может меняться в зависимости от температуры и от многих других обстоятельств.

Это не все: нельзя сказать, что вес тела P приложен к телу C и прямо уравновешивает силу F. То, что приложено к телу C, есть действие A тела P на тело C; тело P в свою очередь находится под действием, с одной стороны, своего собственного веса, с другой — противодействия R тела C на тело P. В результате сила F равна силе A, потому что уравновешивает ее; сила A равна R в силу принципа равенства действия противодействию; наконец, сила R равна весу P, потому что его уравновешивает. Уже как следствие этих трех равенств мы выводим равенство F и веса P.

Таким образом, при определении равенства двух сил нам приходится опираться на принцип равенства действия и противодействия; *значит, этот последний принцип мы должны считать уже не как экспериментальный закон, а как определение.*

Итак, устанавливая равенство двух сил, мы пользуемся двумя правилами: равенством двух взаимно уравновешивающихся сил и равенством действия противодействию. Но выше мы видели, что этих двух правил недостаточно; мы вынуждены прибегнуть к третьему правилу и допустить, что некоторые силы, как, например, вес тела, постоянны по величине и направлению. Но это третье правило, как я сказал, представляет собой экспериментальный закон и оно верно лишь приближенно; *опирающееся на него определение — плохое определение.*

Итак, нам приходится вернуться к определению Кирхгофа: *сила равна массе, умноженной на ускорение.* Теперь этот «закон Ньютона» выступает уже не как экспериментальный закон, а только как определение. Но это определение еще недостаточно, так как мы не знаем, что такое масса. Правда, он позволяет нам вычислить отношение двух сил, приложенных к одному и тому же телу в разные моменты, но он ничего не сообщает нам об отношении двух сил, приложенных к двум различным телам.

Для дополнения его придется снова прибегнуть к третьему закону Ньютона (равенство действия и противодействия), рассматривая последний опять-таки не как экспериментальный закон, а как определение. Два тела A и B действуют друг на друга; ускорение A, умноженное на массу A, равно действию B на A, таким же образом, произведение ускорения B на его массу равно противодействию A на B. И так как по определению действие равно противодействию, то массы A и B будут обратно пропорциональны ускорениям двух этих тел. Этим отношение наших двух масс определено, и дело опыта — проверить, что это отношение постоянно.

Все было бы хорошо, если бы два тела A и B были единственными, с которыми приходится считаться, и были изолированы от действия остального мира. Но этого нет; ускорение тела A зависит не только от действия тела B, но и от действия множества других тел: C, D и т. д. Поэтому, чтобы применить предыдущее правило, нужно было бы разложить ускорение тела A на несколько составляющих и выделить из них ту, которая обусловлена действием тела B.

Это разложение было бы еще возможно, если бы мы *допустили*, что действие C на A просто прикладывается к действию B на A, так что присутствие тела C не изменяет действия B на A и присутствие B не изменяет действия C на A; следовательно, если бы мы допустили, что любые два тела притягиваются, что их взаимное действие направлено по соединяющей их прямой и зависит только от их расстояния, словом — если бы мы допустили *гипотезу центральных сил*.

Известно, что для определения масс небесных тел пользуются совершенно иным принципом. Закон тяготения учит нас, что притяжение двух тел пропорционально их массам; если r есть расстояние между ними, m и m' — их массы, K — некоторая постоянная, то притяжение их будет равно

$$\frac{Kmm'}{r^2}.$$

То, что измеряют в этом случае, не есть масса как отношение силы к ускорению — это есть масса притягивающая; это — не инерция тела, а его притягательная способность.

Применение такого косвенного приема не является теоретически необходимым. Легко могло бы случиться, что притяжение было бы обратно пропорционально квадрату расстояния, не будучи пропорционально произведению масс; оно равнялось бы

$$\frac{f}{r^2},$$

но равенство

$$f = Kmm'$$

не имело бы места.

При таких условиях все-таки было бы возможно на основании наблюдений над *относительными* движениями небесных тел измерять их массы.

Но имеем ли мы право допускать гипотезу центральных сил? Верна ли она в точности? Можно ли быть уверенным, что она никогда не окажется в противоречии с опытом? Кто взял бы на себя смелость утверждать это? А ведь если нам придется оставить эту гипотезу, то рушится и все здание, воздвигнутое с таким трудом. И тогда мы уже не имеем более права говорить о составляющей ускорения A, зависящей от действия B. Мы не имеем никакого средства отличить ее от той, которая обусловлена действием C или другого тела. Правило для измерения масс становится неприложимым.

Что же тогда остается от принципа равенства действия и противодействия? Если гипотеза центральных сил отброшена, то этот принцип, очевидно, должен быть сформулирован так: геометрическая равнодействующая всех сил, приложенных к различным телам системы, изолированной от всякого внешнего воздействия, равна нулю. Или, иными словами: *движение центра тяжести этой системы является прямолинейным и равномерным.*

Здесь-то, казалось бы, мы имеем средство определить массу: положение центра тяжести зависит, очевидно, от значений, какие мы припишем массам; надо распределить эти значения таким образом, чтобы движение центра тяжести было прямолинейно и равномерно; если третий закон Ньютона верен, это всегда возможно и может быть выполнено вообще только одним способом.

Однако дело в том, что не существует системы, которая была бы изолирована от всякого внешнего воздействия; все части Вселенной подвержены более или менее сильному воздействию со стороны всех других частей. *Закон движения центра тяжести строго верен только в применении ко всей Вселенной в целом.*

Но в таком случае, чтобы извлечь из него значения масс, нужно было бы наблюдать движение центра тяжести Вселенной. Нелепость этого следствия очевидна; мы знаем только относительные движения; движение центра тяжести Вселенной навсегда останется для нас неизвестным.

Итак, у нас не остается ничего, и все наши усилия были напрасны; нет иного выхода, как остановиться на следующем определении, которое является только признанием нашего бессилия: *массы суть коэффициенты, которые удобно ввести в вычисления.*

Мы могли бы перестроить всю механику, приписывая всем массам другие значения. Эта новая механика не была бы в противоречии ни с опытом, ни с общими принципами динамики (принципом инерции, пропорциональностью сил массам и ускорениям, равенством действия и противодействия, прямолинейным и равномерным движением центра тяжести, законом площадей). Только уравнения этой новой механики были бы *менее просты.* Говоря точнее, менее просты были бы только первые члены, т. е. те, которые нам уже открыл опыт. Быть может, удалось бы изменять массы в пределах малых величин так, чтобы простота *полных* уравнений ничего бы не теряла и не приобретала.

Герц задался вопросом, строго ли верны принципы динамики. «Многим физикам, — говорит он, — покажется немыслимым, чтобы самый отдаленный опыт мог когда-нибудь что-нибудь изменить в незыблемых принципах механики; однако же то, что исходит из опыта, всегда может быть и поправлено опытом».

После того, что мы сейчас говорили, все эти опасения являются излишними. Принципы динамики выступали перед нами сначала как опытные истины; но мы вынуждены были пользоваться ими как определениями. Только *по определению* сила равна произведению массы на ускорение; вот принцип, который отныне поставлен вне пределов досягаемости любого будущего опыта. Точно так же и действие равно противодействию только по определению. Но тогда, скажут, эти недоступные проверке принципы абсолютно лишены всякого значения; опыт не может им противоречить; но они не могут и научить нас ничему полезному; зачем же тогда изучать динамику?

Такой слишком поспешный приговор был бы несправедлив. Правда, в природе нет системы, *совершенно* изолированной, совершенно изъятой от всякого внешного воздействия; но есть системы *почти* изолированные.

Наблюдая подобную систему, можно изучать не только относительное движение ее различных частей — одних по сравнению с другими, — но и движение ее центра тяжести относительно других частей Вселенной. Тогда мы убеждаемся, что движение этого центра тяжести *почти* прямолинейно и равномерно сообразно с третьим законом Ньютона.

Это — опытная истина; но она не может быть поколеблена опытом. В самом деле, что мог бы открыть нам более точный опыт? Он открыл бы, что закон только приближенно верен; но это мы уже знаем.

Теперь выясняется, каким образом опыт, с одной стороны, мог служить основанием для принципов механики, а с другой — никогда не будет в состоянии стать с ними в противоречие.

Антропоморфная механика. Кое-кто скажет: Кирхгоф только поддался общей склонности математиков к номинализму; талант, присущий ему как физику, не предохранил его от этого. Он сделал попытку дать определение силы и взял для этого первое попавшееся предложение; но в определении силы мы и не нуждаемся: идея силы есть понятие первичное, которое ни к чему не сводится и через что-либо не определяется, мы все знаем, что́ это такое, — мы имеем его в прямой интуиции. Эта прямая интуиция проистекает из понятия усилия (de la notion d'effort), хорошо знакомого нам с детства.

Но если бы даже эта прямая интуиция и открывала нам истинную природу силы самой по себе, она была бы недостаточна для обоснования механики; мало того, она была бы совсем бесполезна. Не важно знать, что́ такое сила, а важно знать, как ее измерить.

Все, что не научает нас измерять силу, так же бесполезно механику, как было бы, например, бесполезно субъективное понятие теплого и холодного для физика, изучающего теплоту. Это субъективное понятие не может быть переведено на язык чисел; значит, оно бесполезно: ученый, у которого кожа была бы абсолютно дурным проводником тепла и который, следовательно, никогда не испытывал бы ощущений ни холода, ни тепла, мог бы не хуже других наблюдать термометр, и этого ему было бы достаточно, чтобы построить всю теорию тепла.

Так и непосредственное понятие усилия не может служить нам для измерения силы; ясно, например, что, поднимая тяжесть в пятьдесят килограммов, я утомился бы сильнее, чем человек, привыкший таскать тяжести. Более того: это понятие усилия не открывает нам истинной природы силы; оно сводится в конце концов к воспоминанию мускульных ощущений; но никто не стал бы утверждать, что Солнце испытывает мускульное ощущение, притягивая Землю.

Все, что можно найти в нем, есть символ, менее точный и менее удобный, чем стрелки, которыми пользуются геометры, но столь же далекий от действительности.

Антропоморфизм сыграл важную историческую роль в происхождении механики; быть может, он доставит иной раз символ, который покажется некоторым умам удобным; но он не может обосновать ничего, что имело бы истинно научный или истинно философский характер.

«Школа нити». Андрад в своих «Лекциях по физической механике» возродил антропоморфную механику. Школе механиков, к которой принадлежит Кирхгоф, он противополагает ту, которую он довольно своеобразно называет школой нити.

Эта школа стремится свести все к «рассмотрению некоторых материальных систем с ничтожно малой массой, находящихся в состоянии напряжения и способных передавать значительные силы отдаленным телам, — систем, идеальным типом которых является *нить*».

Нить, передающая какую-нибудь силу, под действием ее слегка удлиняется; направление нити указывает нам направление силы, а величина последней измеряется удлинением нити.

Поэтому можно предпринять, например, такой опыт. Тело A прикреплено к нити; к другому ее концу прилагают силу, величину которой изменяют до тех пор, пока нить не получит удлинения α; замечают ускорение тела A; затем отвязывают A и прикрепляют тело B; снова прилагают ту же или другую силу и изменяют ее до тех пор, пока нить снова получит удлинение α; замечают ускорение тела B. Затем опыт повторяют как с телом A, так и с телом B, но уже таким образом, чтобы нить получала удлинение β. Четыре отмеченных ускорения должны быть пропорциональными. Таким образом получается опытная проверка сформулированного выше закона ускорения.

Далее подвергают тело совместному действию нескольких тождественных нитей, равно натянутых, и исследуют на опыте, как должны быть расположены все эти нити, чтобы тело оставалось в равновесии. Получается опытная проверка правила сложения сил.

Однако чего же мы достигли в конце концов? Мы определили силу, приложенную к нити, деформацией, испытываемой этою нитью, — это довольно основательно; мы допустили затем, что если тело привязано к нити, то сила, передаваемая ему этой нитью, равна действию, которое это тело оказывает на нить; в конце концов мы воспользовались принципом равенства действия противодействию, рассматривая его не как опытную истину, но как само определение силы.

Это определение совершенно так же условно, как и определение Кирхгофа, но оно гораздо менее общо. Не все силы могут быть передаваемы при помощи нитей (к тому же для возможности сравнивать их необходимо было бы, чтобы все они передавались совершенно одинаковыми нитями). Если бы даже допустить, что Земля привязана к Солнцу какой-нибудь невидимой нитью, то по меньшей мере надо согласиться с тем, что мы не имеем никакого средства измерить ее удлинение.

Следовательно, в девяти случаях из десяти наше определение было бы недостаточно; ему нельзя было бы придать никакого смысла и пришлось бы вернуться к определению Кирхгофа.

Но тогда к чему же весь этот окольный путь? Вы допускаете известное определение силы, которое имеет смысл только в некоторых частных случаях. В этих случаях вы убеждаетесь при помощи опыта, что оно приводит к закону ускорения. Опираясь на этот опыт, вы принимаете затем закон ускорения за определение силы во всех других случаях.

Не проще ли было бы смотреть на закон ускорения как на определение во всех случаях и рассматривать перечисленные опыты не как подтверждение этого закона, а как проверку принципа противодействия или как доказательство того, что деформации упругого тела зависят только от сил, действующих на это тело? Мы не говорим уже о том, что условия, в которых ваше определение могло бы быть принято, никогда не выполняются в совершенстве — что нить никогда не бывает лишена массы, что она никогда не бывает изолирована от действия других сил, кроме противодействия тел, привязанных к ее концам.

Тем не менее идеи Андрада очень интересны; хотя они не удовлетворяют нашей логической потребности, зато они позволяют лучше понять историческое происхождение основных механических понятий. Размышления, которые они вызывают у нас, показывают нам, как человеческий ум поднимался от наивного антропоморфизма к современным научным идеям.

В точке отправления мы видим опыт, имеющий весьма частное значение и вообще довольно грубый; в конечной точке имеем совершенно точный закон, достоверность коего мы принимаем за абсолютную. Этой достоверностью наделили его мы сами, — так сказать, по доброй воле, — рассматривая его как результат соглашения.

Значит, закон ускорения, правило сложения сил — только произвольные соглашения? Да, это соглашения, но не произвольные. Они были бы произвольными, если бы мы потеряли из виду те опыты, которые привели основателей науки к их принятию и которые, как бы несовершенны они ни были, достаточны для их оправдания. Хорошо, если время от времени наше внимание бывает обращено на опытное происхождение этих соглашений.

Глава VII

ДВИЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЕ И ДВИЖЕНИЕ АБСОЛЮТНОЕ

Принцип относительного движения. Были попытки связать закон ускорения с некоторым более общим принципом. Движение всякой системы должно подчиняться одним и тем же законам независимо от того, относить ли его к неподвижным осям или к подвижным, перемещающимся прямолинейно и равномерно. Это — принцип относительного движения, который внушается нам двумя обстоятельствами: во-первых, его подтверждает самый обыденный опыт, и, во-вторых, противоположное допущение совершенно противоречило бы нашему разуму.

Итак, допустим его и рассмотрим тело, находящееся под действием силы. Относительное движение этого тела для наблюдателя, перемещающегося с постоянной скоростью, равной начальной скорости тела, должно быть таким же, каким было бы абсолютное движение этого тела, если бы оно выходило из состояния покоя. Из этого заключают, что ускорение тела не должно зависеть от его абсолютной скорости, и отсюда пытаются извлечь доказательство закона ускорения.

Долгое время следы этого доказательства сохранялись в экзаменационных программах на степень бакалавра философских наук. Но эта попытка, очевидно, безнадежна. Препятствие, мешавшее нам доказать закон ускорения, было обусловлено отсутствием определения силы, и оно нисколько не устраняется, так как приведенный принцип не дает требуемого определения.

Но принцип относительного движения от этого не делается менее интересным; он заслуживает изучения сам по себе. Постараемся прежде всего дать ему точную формулировку.

Выше мы сказали, что ускорения различных тел, входящих в состав изолированной системы, зависят только от их скоростей и положений (относительных, а не абсолютных), если только подвижные оси, к которым отнесено движение, перемещаются прямолинейно и равномерно. Или, если угодно, эти ускорения зависят только от разностей скоростей и разностей координат тел, а не от абсолютных значений этих скоростей и координат.

Если этот принцип верен для относительных ускорений (или, лучше сказать, для разностей ускорений), то, сочетая его с законом противодействия, можно вывести, что он верен также и для абсолютных ускорений.

Остается, таким образом, рассмотреть, как можно доказать, что разности ускорений зависят только от разностей скоростей и координат или, говоря математическим языком, что эти разности координат удовлетворяют дифференциальным уравнениям второго порядка.

Можно ли это доказательство вывести из опытов или же из априорных соображений?

Припоминая сказанное выше, читатель сам даст на это ответ. В самом деле, в такой формулировке принцип относительного движения очень похож на то, что выше я назвал обобщенным принципом инерции. Это не совсем то же самое, потому что здесь речь идет о разностях координат, а не о самих координатах. Следовательно, новый принцип учит нас кое-чему большему сравнительно с прежним. Однако те же рассуждения приложимы и к нему, и они привели бы к тем же заключениям; возвращаться к этому было бы бесполезно.

Аргумент Ньютона. Здесь мы сталкиваемся с вопросом, крайне важным и в какой-то степени внушающим беспокойство. Я сказал, что принцип относительного движения не только был для нас результатом опыта, но и что à priori никакая иная гипотеза не допускается нашим разумом.

Но тогда почему принцип верен только в случае прямолинейного и равномерного движения подвижных осей? Казалось бы, он должен внушаться нам с той же силой и в случае, когда это движение переменно или, по крайней мере, когда оно сводится к равномерному вращению. Однако в этих двух случаях принцип неверен.

Я не стану подробно останавливаться на том случае, когда движение осей прямолинейно, но не равномерно; парадокс устраняется сейчас же при исследовании. Я нахожусь в вагоне, и если поезд, натолкнувшись на какое-нибудь препятствие, внезапно останавливается, я буду отброшен на противоположную скамейку, хотя прямо на меня не действовала никакая сила. Здесь нет ничего загадочного: я не подвергся действию никакой внешней силы, зато поезд испытал внешний толчок. Нет ничего парадоксального в том, что относительное движение двух тел оказывается возмущенным, раз движение того или другого тела изменено внешней причиной.

Остановлюсь подробнее на случае относительных движений, относимых к равномерно вращающимся осям. Если бы небо было беспрестанно покрыто тучами, если бы мы не имели никакого средства наблюдать светила, мы все-таки могли бы заключить, что Земля вращается; мы узнали бы об этом по ее сжатию или — еще лучше — из опыта с маятником Фуко.

Однако имело ли бы смысл говорить в этом случае, что Земля вращается? Если нет абсолютного пространства, то как можно вращаться, не вращаясь по отношению к чему-либо, а с другой стороны, как могли бы мы принять заключение Ньютона и верить в абсолютное пространство?

Но недостаточно констатировать, что все возможные решения одинаково не удовлетворяют нас; надо для каждого из них проанализировать основания, по которым мы отвергаем его, чтобы сделать наш выбор сознательно. Да простятся мне поэтому последующие длинные рассуждения.

Вернемся к нашему воображаемому случаю: густые тучи скрывают звезды от людей, и те не могут наблюдать их и даже не знают об их существовании. Как эти люди узнают, что Земля вращается? Еще увереннее, чем наши предки, они будут считать Землю, которая носит их, неподвижной и непоколебимой; им придется слишком долго ждать появления Коперника. Но, наконец, этот Коперник все-таки явится. Почему же это должно случиться?

Механики воображаемого нами мира сначала не натолкнулись бы ни на какое безусловное противоречие. В теории относительного движения рассматривают, кроме реальных сил, две фиктивные силы, которые называются: одна — обыкновенной, а другая — сложной центробежной силой. Наши воображаемые ученые могли бы, следовательно, все объяснить, рассматривая эти две силы как реальные, и они не увидели бы здесь противоречия с обобщенным принципом инерции, так как эти силы зависели бы: одна, подобно действительно существующему притяжению, от относительных положений различных частей системы; другая, подобно реальному трению, от их относительных скоростей.

Тем не менее некоторые трудности не замедлили бы пробудить их внимание. Если бы им удалось осуществить изолированную систему, то движение центра тяжести этой системы по траектории, почти прямолинейной, не имело бы места. Для объяснения этого факта они могли бы сослаться на центробежные силы, которые они рассматривали бы как реальные и которые они, несомненно, приписали бы взаимным действиям тел. Но они увидели бы, что эти силы не уничтожаются на значительных расстояниях, т. е. по мере того, как изоляция становилась бы совершенной: напротив, центробежная сила бесконечно возрастает с расстоянием.

Это затруднение казалось бы им уже довольно значительным; однако оно не остановило бы их надолго. Они не замедлили бы вообразить себе какую-нибудь среду, крайне тонкую, вроде нашего эфира, в которой плавали бы все тела и которая оказывала бы на них отталкивающее действие.

Но это не все. Пространство симметрично, а между тем законы движения не представляли бы симметрии; эти законы должны были бы отличать правую сторону от левой. Увидели бы, например, что циклоны вращаются всегда в одну и ту же сторону, между тем как по симметрии можно было бы ожидать этого вращения как в ту, так и в другую сторону, безразлично в какую. Если бы ценой труда наши ученые пришли к представлению о совершенной симметрии своей Вселенной, то эта симметрия не осуществлялась бы, хотя и не было бы никакого видимого основания для преимущественного нарушения ее в одну определенную сторону.

Без сомнения, они нашлись бы и здесь: они придумали бы что-нибудь, во всяком случае не более странное, чем хрустальные сферы Птолемея, и так нагромождали бы все более сложные построения, пока долгожданный Коперник не устранил бы одним ударом все эти нагромождения, сказав: гораздо проще допустить, что Земля вращается.

И совершенно так же, как наш Коперник сказал нам: удобнее предположить, что Земля вращается, потому что тогда законы астрономии выражаются более простым языком, тот Коперник сказал бы: удобнее предположить, что Земля вращается, потому что тогда законы механики выражаются более простым языком.

Это не противоречит тому, что абсолютное пространство — та, так сказать, веха, к которой надо было бы отнести Землю, чтобы знать, действительно ли она вращается, — объективно не существует. Ведь и утверждение: «Земля вращается» не имеет никакого смысла, ибо никакой опыт не позволит проверить его; ибо такой опыт не только не мог бы быть ни осуществлен, ни вызван смелой фантазией Жюля Верна, но даже не мог бы быть понят без противоречия! Или, лучше сказать, два положения: «Земля вращается» и «удобнее предположить, что Земля вращается» имеют один и тот же смысл; в одном ничуть не больше содержания, чем в другом.

Может быть, кто-нибудь останется еще недоволен этим и найдет даже что-то неприятно поражающее в том, что среди всех гипотез или — лучше — среди всех соглашений, которые мы можем сформулировать относительно этого предмета, есть одно, которое удобнее других.

Но если мы без труда допустили это, когда речь шла о законах астрономии, почему это должно смущать, если дело касается механики?

Мы видели, что координаты тел определяются дифференциальными уравнениями второго порядка, и то же самое имеет место для разностей этих координат. Это — то, что мы назвали обобщенным принципом инерции и принципом относительного движения.

Если бы расстояния этих тел определялись также дифференциальными уравнениями второго порядка, то, кажется, ум должен бы быть вполне удовлетворен. В какой мере он получает это удовлетворение и почему он им не довольствуется?

Чтобы дать себе в этом отчет, лучше всего взять простой пример. Вообразим систему, аналогичную нашей Солнечной системе, но такую, что из нее нельзя было бы видеть неподвижных звезд, не принадлежащих к этой системе, так что астрономы могли бы наблюдать только взаимные расстояния планет и Солнца, но не абсолютные долготы планет. Если мы выведем непосредственно из закона Ньютона дифференциальные уравнения, определяющие изменение этих расстояний, то эти уравнения не будут второго порядка. Я хочу сказать, что если бы, кроме закона Ньютона, были известны начальные значения этих расстояний и их производных по времени, то этого было бы достаточно для определения значений тех же расстояний для какого-нибудь последующего момента. Недоставало бы еще одного данного, и этим данным могло бы быть, например, то, что астрономы называют константой площадей.

Но здесь можно стать на две различные точки зрения; мы можем различать два рода констант. В глазах физика мир сводится к ряду явлений, зависящих единственно, с одной стороны, от начальных явлений, с другой — от законов, связывающих последующие явления с предыдущими. Если теперь наблюдение откроет нам, что некоторая величина есть константа, то нам представится выбор между двумя точками зрения.

Или мы допустим, что существует закон, требующий неизменяемости этой величины, но дело случая, что она в начальный момент имела именно такое значение, а не иное,— значение, которое она должна была потом сохранять. Такую величину можно было бы назвать тогда *случайной* константой.

Или, напротив, мы допустим, что существует закон природы, сообщающий этой величине именно такое значение, а не иное. Здесь мы будем иметь то, что можно назвать *существенной* константой.

Например, в силу законов Ньютона время обращения Земли должно быть постоянно. Но если оно равно 366 звездным суткам с дробью, а не 300 или 400, то это — результат какой-то неизвестной мне начальной случайности. Это — случайная константа. Если, напротив, показатель степени расстояния, входящий в выражение гравитационной силы, равен 2, а не 3, то это не случайно — этого требует закон Ньютона. Это — существенная константа.

Я не знаю, будет ли законно само по себе придавать какое-то значение случайности и не является ли такое разграничение искусственным; во всяком случае, пока в природе существуют тайны, оно будет применяться с широким произволом, всегда оставаясь ненадежным.

Что касается константы площадей, то мы привыкли рассматривать ее как случайную. Так ли поступили бы наши воображаемые астрономы? Если бы они имели возможность сравнивать две различные Солнечные системы, то у них появилась бы идея, что эта константа может иметь различные значения; но я как раз предположил вначале, что их система изолирована и они не могли наблюдать никакого светила, не принадлежащего к их системе. В этих условиях они могли бы знать единственную константу, которая имела бы единственное, абсолютно неизменяемое значение; без сомнения, они были бы склонны рассматривать ее как константу существенную.

Выскажу попутно несколько слов в предупреждение возражений: обитатели нашего воображаемого мира не могли бы ни наблюдать, ни определить константу площадей, как это делаем мы, потому что абсолютные долготы были бы им недоступны; но это не помешало бы им скоро подметить определенную константу, которая естественно входила бы в их уравнения и которая была бы не чем иным, как тем, что мы называем константой площадей.

Но тогда бы имело место следующее. Если рассматривать константу площадей как существенную, как обусловленную законом природы, то для вычисления расстояний планет в любой момент достаточно знать начальные значения этих расстояний и их первых производных. С этой новой точки зрения расстояния будут определяться дифференциальными уравнениями второго порядка.

Однако был ли бы ум этих астрономов вполне удовлетворен? Я не думаю; прежде всего, они скоро заметили бы, что, продифференцировав свои уравнения и таким образом повысив их порядок, они привели бы их к более простой форме. В особенности они были бы поражены трудностью, связанной с симметрией. Пришлось бы допускать различные законы, смотря по тому, представляет ли совокупность планет фигуру какого-либо определенного многогранника, в частности симметричного многогранника; этого следствия можно было бы избегнуть, только рассматривая константу площадей как случайную.

Я взял довольно частный пример, вообразив астрономов, которые совсем не занимаются земной механикой и кругозор которых ограничен Солнечной системой. Но наши заключения приложимы ко всем случаям. Наша Вселенная шире по сравнению с их миром, потому что у нас есть неподвижные звезды, но она все же ограничена, и поэтому мы могли бы так же рассуждать о нашей Вселенной, взятой в целом, как эти астрономы — о своей Солнечной системе.

В конце концов, как из всего этого видно, пришлось бы заключить, что порядок уравнений, определяющих расстояния, выше второго. Почему бы это могло смущать нас, почему мы находим вполне естественным, что ряд явлений зависит от начальных значений первых производных расстояний, и в то же время не решаемся допустить, что они могут зависеть от начальных значений вторых производных? Это может быть только следствием известных привычек, выработанных в нашем сознании постоянным изучением обобщенного принципа инерции и его следствий.

Значения расстояний во всякий момент зависят от их начальных значений, начальных значений их первых производных и еще от чего-то другого. Чем же является это *другое*?

Если не хотят признать в этом просто одну из вторых производных, то остается только выбор гипотез. Обыкновенно полагают, что это «другое» есть абсолютная ориентация Вселенной в пространстве или быстрота, с которой ориентация изменяется. Возможно и даже несомненно, что такая гипотеза является самой удобной для геометра; но она никак не самая удовлетворительная с точки зрения философа, потому что такой ориентации не существует.

Можно допустить, что это «другое» есть положение или скорость какого-нибудь невидимого тела: так и поступали те, которые даже дали этому телу название «альфа-тело», хотя нам и не суждено ничего знать об этом теле, кроме его названия. Это — уловка, совершенно аналогичная той, о которой я говорил в конце параграфа, посвященного моим размышлениям о принципе инерции.

Однако в конечном счете указанные трудности имеют искусственный характер. Все, что необходимо, — это то, чтобы будущие показания наших инструментов определялись только теми показаниями, которые они нам дали или могли дать прежде. Но в этом отношении мы можем быть спокойны.

Глава VIII

ЭНЕРГИЯ И ТЕРМОДИНАМИКА

Энергетическая система. Трудности, возникшие в классической механике, побудили некоторые умы отдать предпочтение новой системе — так называемой *энергетике*. Энергетическая система получила свое начало вслед за открытием принципа сохранения энергии. Окончательная форма была ей дана Гельмгольцем.

Начнем с определения двух величин, которые играют фундаментальную роль в этой теории. Это следующие величины: во-первых, *кинетическая энергия*, или живая сила; во-вторых, *потенциальная энергия*.

Все перемены, какие могут происходить с телами природы, управляются двумя экспериментальными законами:

1) Сумма кинетической энергии и потенциальной энергии не меняется. Это — принцип сохранения энергии.

2) Если система тел в момент t_0 имеет конфигурацию A, а в момент t_1 — конфигурацию B, то переход от первой конфигурации ко второй всегда совершается таким путем, что *среднее* значение разности между двумя видами энергии за промежуток времени от t_0 до t_1 является величиной, самой малой из всех возможных. Это — принцип Гамильтона, представляющий одну из форм принципа наименьшего действия.

Энергетическая теория сравнительно с классической имеет следующие преимущества:

1) она является более полной, т. е. принцип сохранения энергии и принцип Гамильтона сообщают

нам больше, чем сообщали основные принципы классической теории; они исключают некоторые движения, которые не реализуются в природе, но совместимы с классической теорией;

2) она освобождает нас от атомистической гипотезы, которую было почти невозможно избежать в классической теории.

Но в свою очередь энергетическая система создает и новые трудности. Именно, определение двух видов энергии представляет почти столь же значительные трудности, как и определение силы и массы в первой системе. Однако избавиться от них легче, по крайней мере в наиболее простых случаях.

Представим себе изолированную систему, состоящую из некоторого числа материальных точек; пусть эти точки находятся под действием сил, зависящих только от их расстояний и относительного расположения, но не зависящих от их скоростей. В силу принципа сохранения энергии система должна иметь силовую функцию.

В этом простом случае выражение принципа сохранения энергии крайне просто. Некоторая доступная измерению величина должна оставаться постоянной. Эта величина представляет собой сумму двух членов; первый зависит только от положения материальных точек и не зависит от их скоростей; второй представляет собой линейную функцию квадратов скоростей. Такое разложение может быть сделано только одним способом. Первый член, который я обозначу через U, будет потенциальной энергией, второй, который я обозначу через T, будет кинетической энергией.

Конечно, если $T+U$ равняется постоянной величине, то это же самое будет иметь место для любой функции величины $T+U$, т. е. для

$$\varphi(T+U).$$

Но эта функция $\varphi(T+U)$ не будет суммой двух членов, из которых один был бы независим от скоростей, а другой зависел бы линейно от их квадратов. Между функциями, сохраняющими постоянную величину, есть только одна, обладающая таким свойством, а именно $T+U$ (или любая линейная функция $T+U$ — это не имеет значения, ибо такая линейная функция всегда может быть приведена к виду $T+U$ путем преобразования масштаба и перемены начала). Это выражение мы и назовем энергией; первый член будет иметь значение кинетической энергии, второй — значение потенциальной энергии. Таким образом, определение обоих видов энергии может быть доведено до конца без всякой двусмысленности. Точно так же может быть дано определение масс. Кинетическая энергия, или живая сила, весьма просто выражается через массы материальных точек и через их скорости, соотнесенные к какой-нибудь одной из них. Эти относительные скорости доступны наблюдению, и если мы будем знать выражение кинетической энергии как функции относительных скоростей, то массы представятся коэффициентами этого выражения.

Итак, в этом простом случае определение основных понятий является делом легким. Но трудности опять возникают в более сложных случаях, как например, если силы зависят не только от расстояний, но и от скоростей. Вебер предполагает, что взаимодействие двух электрических частиц зависит не только от их расстояния, но также от их скорости и ускорения. Если бы материальные точки притягивались по тому же закону, U зависело бы от скоростей и могло бы содержать член, пропорциональный квадрату скорости. Но как в этом случае можно было бы среди членов, пропорциональных квадратам скоростей, отличить те, которые относятся к T, и те, которые относятся к U? Как, следовательно, различить два вида энергии? Даже больше того, как определить самую энергию? Ведь теперь мы не имеем уже никаких оснований предпочесть $T+U$ какой-либо другой функции $T+U$, раз исчезло свойство, отличавшее $T+U$ и состоявшее в возможности разделения ее на два слагаемых специальной формы.

Однако это не все. Необходимо принять в расчет не только механическую энергию в собственном смысле, но также другие виды энергии: теплоту, химическую энергию, электрическую энергию и другие. Тогда принцип сохранения энергии примет вид

$$T+U+Q=\mathrm{const},$$

где T означает воспринимаемую кинетическую энергию, U — потенциальную энергию положения, зависящую исключительно от расположения тел, Q — внутреннюю молекулярную энергию в тепловой, химической или электрической форме.

Все шло бы хорошо, если бы эти три члена можно было резко различить: если бы T было пропорционально квадратам скоростей, U не зависело ни от скоростей, ни от состояния тела, Q зависело не от скоростей и расположения тел, а исключительно от их внутреннего состояния. Тогда выражение энергии допускало бы только единственное разложение на три члена указанной формы. На самом деле это не так; рассмотрим наэлектризованные тела: электростатическая энергия, обусловленная их взаимодействием, будет, очевидно, зависеть от их заряда, т. е. от их состояния, но также и от их расположения. Если эти тела находятся в движении, то они будут действовать друг на друга электродинамически, и электродинамическая энергия будет зависеть не только от их состояния и их расположения, но и от их скоростей. Таким образом, у нас не оказывается никакого средства выделить три подразделения энергии, рассортировав члены так, чтобы каждый относился к T, U и Q в отдельности.

Если $T+U+Q$ есть постоянная величина, то постоянной будет и любая ее функция

$$\varphi(T+U+Q).$$

Если бы $T+U+Q$ имело вышеуказанную специальную форму, неопределенности не могло бы возникнуть; между всеми функциями $\varphi(T+U+Q)$, сохраняющими постоянную величину, нашлась бы только одна, имеющая этот частный вид, и она была бы тем, что̀ мы условились называть энергией. Но это, по вышесказанному, не выполняется: между функциями, сохраняющими неизменную величину, нет таких, которые бы в точности подходили под нашу специальную форму, — следовательно, как найти между ними ту, которую следует именовать энергией? У нас нет никакой путеводной нити для этих поисков.

Поэтому нам остается выразить принцип сохранения энергии только таким образом: *есть нечто, сохраняющее неизменную величину.* Но в такой форме он оказывается вне пределов досягаемости опыта и сводится к некоторого рода тавтологии, ибо ясно, что если мир управляется законами, то существуют некоторые величины, которые остаются постоянными. Подобно принципам Ньютона (и по тем же основаниям), принцип сохранения энергии, основанный на опыте, не может быть опровергнут этим последним.

Это исследование показывает, что с переходом от классической системы к системе энергетической осуществляется известный прогресс, но что в то же время этот прогресс недостаточен.

Еще более серьезным кажется мне другое возражение: принцип наименьшего действия приложим к обратимым процессам; но он оказывается совершенно недостаточным, коль скоро речь идет о необратимых процессах. Попытка Гельмгольца распространить его на эту область явлений не имела и не могла иметь успеха: здесь все еще принадлежит будущему.

Самая формулировка принципа наименьшего действия имеет в себе нечто, неприятно поражающее наш ум. При переходе от одной точки к другой материальная частица [1]), не подверженная действию какой-либо силы, но подчиненная условию не сходить с некоторой поверхности, движется по геодезической линии, т. е. по кратчайшему пути. Эта частица как будто бы знает ту точку, куда ее желают привести, предвидит время, которое она затратит, следуя по тому или иному пути, и, наконец, выбирает путь наиболее подходящий. В такой формулировке принципа частица представлена нам как бы одушевленным существом, обладающим свободой воли. Ясно, что следовало бы заменить эту формулировку другой, более подходящей, в которой, выражаясь языком философа, конечные причины не становились бы явным образом на место причин действующих.

Термодина́мика [2]). Значение двух основных принципов термодинамики для всех областей физики становится с каждым днем все более важным. Оставляя предложенные сорок лет назад претенциозные теории, насыщенные молекулярными гипотезами, мы

---

[1]) В подлиннике une molécule.— *Примеч. ред.*

[2]) Следующие строки представляют собой частичное воспроизведение предисловия в моей книге «Термодинамика».

пытаемся ныне воздвигнуть все здание математической физики единственно на термодинамической основе.

Способны ли два принципа — Майера и Клаузиуса — сообщить этому зданию на известное время достаточную прочность? В этом никто не сомневается; но откуда мы получаем такую уверенность?

Один выдающийся физик говорил мне однажды по поводу закона погрешностей: «Все крепко верят в него: математики считают его результатом наблюдений, а наблюдатели — математической теоремой». В течение долгого времени можно было сказать то же самое относительно принципа сохранения энергии. Но в настоящее время всем уже известно, что он представляет собою экспериментальный факт.

Но в таком случае, что дает нам право приписывать самому принципу бóльшую общность и точность сравнительно с теми опытами, которые послужили для его доказательства? Это равносильно вопросу: законны ли делаемые на каждом шагу обобщения эмпирических данных? У меня не хватает смелости разбирать этот вопрос после того, как столько философов тщетно искали его решения. Достоверно одно: если бы мы не имели способности к обобщению, наука не могла бы существовать или, по крайней мере, свелась бы к простой описи, к установлению единичных фактов, — она не имела бы для нас никакой ценности, так как не могла бы удовлетворить наше стремление к порядку и гармонии и в то же время была бы неспособна делать предсказания. Обстоятельства, предшествовавшие известному факту, по всей вероятности, никогда более не повторятся в своей совокупности: поэтому первое обобщение необходимо уже просто для того, чтобы предвидеть, повторится ли этот факт после того, как произойдет самое незначительное изменение в этих обстоятельствах.

Но всякое положение можно обобщить бесчисленным множеством способов. Между всеми возможными обобщениями нам необходимо выбрать только одно, а именно, самое простое. Таким образом, мы вынуждены поступать так, как если бы простой закон при прочих равных условиях имел бóльшую вероятность сравнительно со сложным законом.

Полвека тому назад было общераспространенным убеждение, что природа любит простоту. С тех пор мы имели от нее много опровержений. Ныне мы такой тенденции уже не приписываем природе и сохраняем от этой тенденции лишь то, что необходимо, чтобы наука не уклонялась со своего пути. Таким образом, формулируя общий, простой и точный закон на основании сравнительно малочисленных и не абсолютно точных опытов, мы лишь повинуемся необходимости, которой не может избежать человеческий ум. Но здесь имеется и кое-что большее, и это объясняет, почему я так настойчив.

Никто не сомневается в том, что принципу Майера предстоит пережить все частные законы, из которых он был извлечен, подобно тому как закон Ньютона пережил законы Кеплера, послужившие его источником и являющиеся лишь приближенными, если принять в расчет возмущения. Спрашивается, почему же этот принцип занимает привилегированное положение среди всех физических законов?

Для этого имеется ряд оснований — не очень значительных. Прежде всего, полагают, что мы не можем его отвергнуть, даже сомневаться в его абсолютной строгости, без того чтобы не допустить возможности «вечного движения»; мы, разумеется, не боимся такой перспективы, но считаем, что осторожнее признать принцип Майера, чем его отрицать. Быть может, это и не вполне точно: невозможность «вечного движения» влечет за собой сохранение энергии лишь для обратимых явлений.

Величавая простота принципа Майера также способствует укреплению нашей веры в него. В законе, выведенном непосредственно из опыта, каков, например, закон Мариотта, подобная простота внушала бы нам скорее недоверие. Но здесь это не так. Здесь мы видим, как элементы, которые на первый взгляд кажутся лишенными взаимной связи, неожиданно упорядочиваются, образуя гармоническое целое; и мы отказываемся думать, чтобы эта непредвиденная гармония была следствием простого случая. Наше приобретение как будто делается тем дороже для нас, чем бóльших усилий оно нам стоило; мы как будто тем сильнее убеждаемся в том, что действительно исторгли у природы ее тайну, чем ревнивее она, казалось, скрывала эту тайну от нас.

Однако все это — не слишком веские доводы; чтобы возвести закон Майера в ранг абсолютного принципа, нужно было бы представить более глубокий разбор вопроса. Но пытаясь выполнить это, мы видим, что этот абсолютный принцип нелегко даже сформулировать. В каждом частном случае мы ясно видим, что́ такое энергия, и можем определить ее — по крайней мере предварительно; но найти общее определение ее невозможно. Как только мы хотим выразить принцип во всей его общности и приложить его ко Вселенной, мы видим, что он, так сказать, испаряется и от него остается только следующее: *существует нечто, что́ остается постоянным.*

Но имеет ли это какой-нибудь смысл? По детерминистской гипотезе состояние Вселенной определяется чрезвычайно большим числом n параметров, которые я обозначу $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если известны значения параметров для одного какого-нибудь момента, а также производные этих параметров по времени, то можно высчитать значения их для всякого другого момента, предшествующего или последующего. Другими словами, наши n параметров удовлетворяют n дифференциальным уравнениям первого порядка. Эти уравнения имеют $n-1$ интегралов, не содержащих времени; таким образом, существует $n-1$ функций от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, сохраняющих неизменную величину. Поэтому, говоря, что *существует нечто, что остается постоянным*, мы высказываем простую тавтологию. Трудно было бы даже сказать, которому из этих интегралов должно принадлежать название энергии.

Впрочем, принцип Майера понимается иначе, когда он прилагается к ограниченной системе. В этом случае принимают, что p из наших n параметров изменяются под влиянием самостоятельных причин, так что мы имеем всего $n-p$ уравнений (вообще линейных) между нашими n параметрами и их производными.

Для большей простоты предположим, что сумма работ внешних сил равна нулю, так же как и сумма рассеянных системой количеств тепла. В таком случае принцип получит следующее выражение: *существует такое сочетание этих $n-p$ уравнений, первый член которого является точным дифференциалом*; так как в силу наших $n-p$ соотношений этот дифференциал равен нулю, то интеграл его равняется постоянной величине, и этот интеграл есть то, что называется энергией.

Но каким образом возможно, что некоторые из параметров обнаруживают изменения, независимые от остальных? Это имеет место лишь под воздействием внешних сил (хотя мы для простоты и предположили, что алгебраическая сумма работ этих сил равна нулю). В самом деле, если бы система была совершенно изолирована от всякого внешнего воздействия, то знания величин наших n параметров в данный момент было бы достаточно для определения состояния системы в любой последующий момент (предполагая, что мы по-прежнему держимся детерминистской гипотезы), т. е. мы опять встретили бы прежнюю трудность.

Если будущее состояние системы не вполне определяется ее настоящим состоянием, то это значит, что оно зависит еще от состояния тел, внешних по отношению к системе. Но в таком случае правдоподобно ли, чтобы между параметрами x, определяющими положение системы, существовали уравнения, не зависящие от состояния этих внешних тел? И если в некоторых случаях мы, по-видимому, можем их составить, то не является ли это лишь следствием нашего незнания, следствием того, что влияние этих тел слишком слабо, чтобы наш опыт мог его обнаружить?

Если система не рассматривается как вполне изолированная, то вероятно, что строго точное выражение ее внутренней энергии должно зависеть от состояния внешних тел. Кроме того, выше мы предположили, что сумма внешних работ равна нулю; если бы мы пожелали освободиться от этого несколько искусственного ограничения, формулировка принципа стала бы делом еще более трудным. Поэтому для формулировки принципа Майера в абсолютном смысле необходимо распространять его на всю Вселенную, а тогда перед нами встает та самая трудность, которой мы желали избежать. Говоря кратко и обычным языком, закон сохранения энергии может иметь только один смысл, а именно: существует некоторое свойство, присущее всем возможностям; но по детерминистской гипотезе существует лишь единственная возможность, а тогда закон теряет свой смысл.

Напротив, при допущении индетерминистской гипотезы он имел бы смысл и тогда, когда бы мы пожелали придать ему абсолютное значение: он представился бы ограничением, наложенным на свободу.

Но слово «свобода» напоминает мне, что я выхожу за пределы физико-математической области. Поэтому я останавливаюсь и от всего предыдущего обсуждения сохраняю только один вывод: закон Майера является формой достаточно гибкой, чтобы можно было вложить в нее почти все, что угодно. Я не хочу этим сказать, ни то, что он не соответствует никакой объективной реальности, ни то, что он сводится к простой тавтологии, так как в каждом частном случае он имеет совершенно ясный смысл, если только не пытаются возвести его до степени абсолютного принципа.

Самая гибкость его дает основание верить в его высокую жизнеспособность; а так как, с другой стороны, он не может исчезнуть иначе, как растворившись в гармонии высшего порядка, то мы с доверием можем опираться на него в наших работах, наперед зная, что наш труд не пропадет даром.

Почти все сказанное выше применимо к принципу Клаузиуса. Различие в том, что последнее выражается неравенством. Кто-нибудь мог бы сказать, что это — свойство всех физических законов, так как точность их всегда ограничена погрешностями наблюдения. Но законы эти имеют притязание быть по меньшей мере первым приближением, и есть надежда на постепенное замещение их другими, все более точными. Напротив, если принцип Клаузиуса сводится к неравенству, то причина этого лежит не в несовершенстве наших средств наблюдения, а в самой природе вопроса.

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ ИЗ ТРЕТЬЕЙ ГЛАВЫ

Итак, принципы механики представляются нам в двух различных аспектах. С одной стороны, это — истины, обоснованные опытом, подтверждающиеся весьма приближенно для систем почти изолированных. С другой стороны, это — постулаты, которые прилагаются ко всей Вселенной и считаются строго достоверными.

Если эти постулаты обладают общностью и достоверностью, каких недостает экспериментальным истинам, из которых они извлекаются, то это оттого, что они в результате проведенного анализа сводятся к простому соглашению, которое мы имеем право сформулировать, будучи заранее уверены, что никакой опыт не станет с ним в противоречие. Однако это соглашение не абсолютно произвольно; оно не вытекает из нашей прихоти; мы принимаем его, потому что известные опыты доказали нам его удобство. Так объясняется и то, почему опыт был в состоянии создать принципы механики, и то, почему он не сможет их ниспровергнуть.

Проведем сравнение с геометрией. Основные положения геометрии, как, например, постулат Евклида, суть также не что иное, как соглашения, и было бы настолько же неразумно доискиваться, истинны ли они или ложны, как задавать вопрос, истинна или ложна метрическая система. Эти соглашения только удобны, и в этом нас убеждают известные опыты.

На первый взгляд аналогия является полной: роль опыта представляется в обоих случаях одной и той же. Кто-нибудь мог бы сказать: либо механика должна быть признаваема за науку экспериментальную, и тогда то же самое следует сказать про геометрию; либо, наоборот, геометрия является наукой дедуктивной, и тогда механика должна быть такой же.

Но подобное заключение было бы незаконно. Опыты, которые привели нас к принятию основных соглашений геометрии в качестве наиболее удобных, относятся к вещам, которые не имеют ничего общего с объектами изучения геометрии, они относятся к свойствам твердых тел, к прямолинейному распространению света. Это — опыты механические и оптические; их отнюдь нельзя рассматривать как опыты геометрические. А главное основание, по которому наша геометрия представляется нам удобной,— это то, что различные части нашего тела, наш глаз, наши члены обладают в точности свойствами твердых тел. В этом смысле нашими основоположными опытами являются прежде всего физиологические опыты, которые относятся не к пространству, составляющему предмет изучения для геометра, но к нашему собственному телу, т. е. к орудию, которым мы должны пользоваться при этом изучении.

Напротив, основные соглашения механики и те опыты, которыми доказывается их удобство, относятся к одним и тем же или к аналогичным предметам. Эти условные и общие принципы являются естественным и прямым обобщением принципов экспериментальных и частных.

Пусть не говорят, что здесь я провожу искусственные границы между науками; что если я отделяю геометрию в собственном смысле от изучения твердых тел, то я мог бы точно так же воздвигнуть стену между экспериментальной механикой и конвенциональной механикой общих принципов. В самом деле, кто не заметит, что, разделяя эти две науки, я исказил бы и ту и другую, что изолированная конвенциональная механика представляла бы собой нечто малозначащее, никак не могущее сравниться с величественным зданием геометрической науки?

Понятно теперь, почему преподавание механики должно оставаться экспериментальным. Только при таком методе оно может сделать понятным генезис науки, а это необходимо для полного понимания самой науки. Кроме того, механику изучают, чтобы ее применять; это возможно только при условии, что она остается объективной. Но, как мы видели, принципы механики, выигрывая в общности и достоверности, теряют в своей объективности. При первом ознакомлении с принципами особенно уместно подходить к ним с их объективной стороны; это можно сделать, только двигаясь от частного к общему, но не наоборот.

Принципы — это соглашения и скрытые определения. Тем не менее они извлечены из экспериментальных законов; эти последние были, так сказать, возведены в ранг принципов, которым наш ум приписывает абсолютное значение.

Некоторые философы довели процесс обобщения до крайностей; по их мнению, принципы составляют всю науку, которая, таким образом, вся принимает характер условного знания. Это парадоксальное учение, называемое номинализмом, не выдерживает критики.

Каким образом закон может стать принципом? Он выражал соотношение между двумя реальными членами *A* и *B*. Но он не был строго верным, а лишь приближенным. Мы произвольно вводим промежуточный, более или менее фиктивный член *C*, и *C в силу определения* связано с *A точным* отношением, которое выражено в законе. Таким образом, наш закон разложился на абсолютный, строгий принцип, выражающий соотношение *A* и *C*, и на приближенный, подлежащий пересмотру экспериментальный закон, который выражает соотношение между *C* и *B*. Ясно, что как бы далеко ни простиралось это расчленение, такие законы всегда будут иметь место.

Мы вступаем теперь в область законов в собственном смысле.

Часть IV

ПРИРОДА

Глава IX

ГИПОТЕЗЫ В ФИЗИКЕ[1])

Значение опыта и обобщения.— Опыт — единственный источник истины: только опыт может научить нас чему-либо новому, только он может вооружить нас достоверностью. Эти два положения никто не может оспорить.

Однако если опыт — все, то какое место остается для математической физики? Зачем экспериментальной физике это пособие, которое кажется бесполезным, а может быть, даже опасным? Тем не менее математическая физика существует; она оказала нам неопровержимые услуги. Это — факт, нуждающийся в объяснении.

Дело в том, что одних наблюдений недостаточно; ими надо пользоваться, а для этого необходимо их обобщать. Так всегда и поступали; однако поскольку память о бывших ошибках делала человека все более осмотрительным, то наблюдать стали все больше, а обобщать все меньше.

Каждое поколение смеется над предыдущим, обвиняя его в слишком поспешных и слишком наивных обобщениях. Декарт выражал сожаление по адресу философов-ионийцев; в свою очередь он вызывает улыбку у нас; без сомнения, когда-нибудь наши потомки посмеются над нами.

Но в таком случае нельзя ли нам уже теперь избрать путь, который устранил бы эти предвидимые нами насмешки? Нельзя ли нам удовольствоваться одним только чистым опытом?

Нет, это невозможно; такое стремление свидетельствовало бы о полном незнакомстве с истин-

---

[1]) Главы IX и X представляют собой доклады А. Пуанкаре на Международном конгрессе физиков в Париже в 1900 г.— *Примеч. ред.*

ным характером науки. Ученый должен систематизировать; наука строится из фактов, как дом из кирпичей; но простое собрание фактов столь же мало является наукой, как куча камней — домом.

И, прежде всего, ученый должен предвидеть. Карлейль[1]) в одном месте пишет примерно так: «Только факт имеет ценность; Иоанн Безземельный прошел здесь: вот что заслуживает удивления, вот реальность, за которую я отдал бы все теории мира». Карлейль был соотечественником Бэкона; подобно последнему он постоянно пропагандировал свою веру *for the God of Things as they are*[2]); но Бэкон не сказал бы предыдущих слов. Это — язык историка. Физик скорее выразился бы так: «Иоанн Безземельный прошел здесь; это меня мало интересует, потому что больше это не повторится».

Все мы знаем, что опыты бывают хорошие и плохие. Накопление плохих опытов совершенно бесполезно; будь их сотни или тысячи — все равно, довольно появиться единственному труду настоящего мастера, каковым был, например, Пастер, чтобы все они потонули в забвении. Это хорошо понимал Бэкон, изобретший термин experimentum crucis[3]). Но Карлейль этого не понял бы. Факт — всегда факт: студент сделал отсчет по своему термометру, не приняв никаких предосторожностей; пусть так — все же он сделал отсчет, и если во внимание принимаются одни только факты, то вот перед нами реальность такого же ранга, как странствования короля Иоанна Безземельного.

Почему же факт, который сообщил этот студент, не представляет интереса, между тем как факт, который умелый физик изложит в лекции, будет, напротив, очень важным? Это потому, что из первого сообщения мы не в состоянии сделать никакого вывода. Что же такое — хороший опыт? Это — опыт, который дает нам нечто большее по сравнению с единичным фактом; это — опыт, дающий нам возможность предвидеть, т. е. позволяющий делать обобщение.

---

[1]) Т. Карлейль (1795—1881) — английский философ и историк. Пантеист. Защищал идеи диктатуры буржуазии. Основные работы относятся к первой половине XIX в. — *Примеч. ред.*

[2]) В бога вещей, каковы они суть (*англ.*). — *Примеч. ред.*

[3]) Решающий эксперимент (*лат.*). — *Примеч. ред.*

В самом деле, без обобщения невозможно и предвидение. Условия произведенного опыта никогда не повторяются в точности. Наблюденный факт никогда не начнется сначала; единственное, что можно утверждать,— это что при аналогичных условиях произойдет аналогичное явление. Поэтому, чтобы предвидеть, надо по крайней мере опираться на аналогию, т. е. обобщать.

Как бы робок ни был исследователь, ему необходимо делать интерполяцию; опыт дает нам лишь некоторое число отдельных точек: их надобно соединить непрерывной линией, и это — настоящее обобщение. Этого мало: проводимую кривую строят так, что она проходит между наблюденными точками — близ них, но не через них. Таким образом, опыт не только обобщается, но и подвергается исправлению; а если бы физик захотел воздержаться от этих поправок и на самом деле удовольствоваться голым опытом, то ему пришлось бы высказывать очень странные законы.

Итак, голые факты не могут нас удовлетворить; иными словами, нам нужна наука упорядоченная, или, лучше сказать, организованная.

Нередко говорят, что следует экспериментировать без предвзятой идеи. Это невозможно; это не только сделало бы всякий опыт бесплодным, но это значило бы желать невозможного. Всякий носит в себе свое миропредставление, от которого не так-то легко освободиться. Например, мы пользуемся языком, а наш язык пропитан предвзятыми идеями и этого нельзя избежать; притом эти предвзятые идеи неосознанны, и поэтому они в тысячу раз опаснее других.

Можно ли сказать, что, допустив вторжение вполне осознанных нами предвзятых идей, мы этим усиливаем вред? Не думаю; по моему мнению, они скорее будут служить друг другу противовесом, так сказать, противоядием; они вообще будут плохо уживаться друг с другом; одни из них окажутся в противоречии с другими, и, таким образом, мы будем вынуждены рассматривать проблему с различных точек зрения. Этого достаточно для нашего высвобождения; кто может выбирать себе господина, тот уже больше не раб.

Итак, благодаря обобщению каждый наблюденный факт позволяет нам предвидеть множество других; однако не следует забывать, что из них только один первый достоверен, а все другие только вероятны. Как бы прочно обоснованным ни казалось нам наше предвидение, все же мы никогда не имеем *абсолютной* уверенности в том, что оно не будет опровергнуто опытом, предпринятым в целях его проверки. Однако вероятность часто бывает достаточно велика, чтобы практически мы могли ею удовлетвориться. Лучше предвидеть без абсолютной уверенности, чем не предвидеть вовсе.

Из предыдущего ясно, что не следует упускать ни одного случая выполнить проверочные опыты. Но всякое экспериментальное исследование продолжительно и сопряжено с трудностями; работников мало; число же фактов, которые нам нужно предвидеть, неизмеримо: в сравнении с количеством их число возможных для нас проверок всегда будет величиной ничтожно малой.

Из того немногого, что может быть нами достигнуто непосредственно, нужно извлечь возможно бóльшую пользу; нужно, чтобы каждый опыт позволял нам возможно больше увеличить как численность, так и вероятность предвидимых нами фактов. Задача состоит в том, чтобы повысить производительность научного познания.

Я позволю себе сравнить науку с библиотекой, которая должна беспрерывно расширяться; но библиотекарь располагает для своих приобретений лишь ограниченными кредитами; он должен стараться не тратить их понапрасну. Такая обязанность делать приобретения лежит на экспериментальной физике, которая одна лишь в состоянии обогащать библиотеку. Что касается математической физики, то ее задача состоит в составлении каталога. Если каталог составлен хорошо, то библиотека не делается от этого богаче, но читателю облегчается пользование ее сокровищами. С другой стороны, каталог, указывая библиотекарю на пробелы в его собраниях, позволяет ему дать его кредитам рациональное употребление; а это тем более важно ввиду их совершенной недостаточности.

Итак, вот в чем значение математической физики. Она должна руководить обобщением, руководить так, чтобы от этого увеличивалась производительность науки. Нам остается рассмотреть, какими путями она этого достигает и как может она это выполнить без опасных уклонений с правильного пути.

Единство природы. Заметим прежде всего, что всякое обобщение до известной степени предполагает веру в единство и простоту природы. Допущение единства не представляет затруднений. Если бы различные части Вселенной не относились между собой как органы одного и того же тела, они не обнаруживали бы взаимодействий — они, так сказать, взаимно игнорировали бы друг друга, и мы, в частности, знали бы только одну из них. Поэтому мы должны задавать вопрос не о том, едина ли природа, а о том, каким образом она едина.

Относительно второго положения дело обстоит сложнее, нельзя быть уверенным, что природа проста. Можем ли мы без опасения считать это допущение справедливым?

Было время, когда простота закона Мариотта служила аргументом в пользу его точности. Сам Френель, сказавший однажды в беседе с Лапласом, что природа не беспокоится об аналитических трудностях, считал себя обязанным дать по этому поводу объяснения, чтобы не встать в слишком резкое противоречие с господствовавшим тогда мнением.

С тех пор взгляды сильно изменились; однако те, которые не верят, что законы природы должны быть просты, все же часто бывают вынуждены поступать так, как если бы они разделяли эту веру. Они не могли бы совершенно отрешиться от этой необходимости, не разрушая тем самым всякой возможности обобщения, а следовательно, и науки.

Ясно, что любой факт может быть обобщен бесконечным множеством способов, из которых надо выбирать, а при выборе можно руководствоваться только соображениями простоты. Возьмем самый обыденный пример — интерполяцию. Между точками, полученными из наблюдений, мы проводим непрерывную, возможно более плавную линию. Отчего мы избегаем угловых точек и слишком резких поворотов? Отчего мы не чертим кривую в виде ряда самых причудливых зигзагов? Оттого, что мы заранее знаем (или считаем, что знаем), что закон, который нужно отобразить, не может быть очень сложным.

Массу Юпитера можно определять или из движений его спутников, или из возмущений больших планет, или из возмущений малых планет. Беря среднюю из величин, полученных по каждому способу, найдем три числа, весьма близкие друг к другу, но все же разные. Можно было бы объяснить этот результат, предположив, что коэффициент притяжения не является одинаковым в этих трех случаях; тогда, конечно, наблюдения были бы воспроизведены гораздо лучше. Почему же мы устраняем такое объяснение? Не потому, что оно было бы нелепо, а потому, что оно страдает бесполезной сложностью. Его примут лишь тогда, когда оно станет обязательным; а пока этого еще нет.

Словом, любой закон обычно считается простым, пока не доказано противоположное. Я только что указал основания, которые внушили физикам это воззрение; но как оправдать его, стоя лицом к лицу с открытиями, каждый день указывающими нам новые детали явлений, все более сложные, все более обильные? Помимо этого, как примирить его с допущением единства природы? Ибо если все вещи находятся во взаимной зависимости, то отношения, в которых принимает участие такая масса объектов, не могут быть просты.

Изучая историю науки, мы замечаем два явления, которые можно назвать взаимно противоположными: то за кажущейся сложностью скрывается простота, то, напротив, видимая простота на самом деле таит в себе чрезвычайную сложность.

Что может быть сложнее запутанных движений планет и что может быть проще закона Ньютона? Природа, играя (как говорил Френель) аналитическими трудностями, комбинацией простых элементов создает тут какие-то гордиевы узлы. Вот пример скрытой простоты, которую надо было обнаружить.

Примерам обратных случаев нет числа. В кинетической теории газов рассматриваются быстро движущиеся частицы, траектории которых, вследствие постоянных столкновений, принимают самые причудливые формы; они бороздят пространство по всем направлениям. Доступный наблюдению результат есть простой закон Мариотта, каждый отдельный факт был сложным, но закон больших чисел восстанавливает простоту в средних величинах. Эта простота — кажущаяся; лишь грубость наших чувств мешает нам видеть действительную сложность.

Множество явлений повинуется закону пропорциональности — почему? Потому что в них встречается какая-нибудь весьма малая величина. Выведенный из наблюдений простой закон является в этом случае лишь применением общего аналитического правила, по которому исчезающе малый прирост функции пропорционален приросту независимой переменной. Так как в действительности наблюдаемые нами приросты не бесконечно малы, а только очень малы, то закон пропорциональности является лишь приближенным и простота — кажущейся. То же самое применимо к правилу суперпозиции малых движений, столь плодотворному по своим применениям и образующему, между прочим, основу оптики.

А сам закон Ньютона? Простота его, так долго остававшаяся скрытой, быть может, просто кажущаяся. Кто знает, не лежит ли в основании управляемых им явлений некоторый сложный механизм (может быть, соударения тонкой материи, возбужденной беспорядочными движениями), и не есть ли простота этого закона лишь следствие игры средних величин и больших чисел? Во всяком случае, трудно удержаться от мысли, что истинный закон содержит добавочные члены, которые делаются значительными на малых расстояниях. Если в астрономии ими можно пренебрегать сравнительно с основным членом, так что здесь закон Ньютона является во всей своей простоте, то это имеет место лишь вследствие огромности небесных расстояний.

Нет сомнения, что если бы наши методы исследования становились все более и более проникающими, то мы открывали бы простое под сложным, потом сложное под простым, потом опять простое под сложным и т. д., причем невозможно было бы предвидеть, каково будет последнее звено. Где-нибудь да необходимо остановиться; и чтобы наука была возможна, надо остановиться, когда мы пришли к простоте. Простота — единственная почва, на которой мы можем воздвигнуть здание наших обобщений. Но если эта простота только кажущаяся, то будет ли такая почва достаточно надежной? Это — вопрос, заслуживающий исследования. Итак, рассмотрим, какую роль играет в наших обобщениях уверенность в простоте. Пусть мы установили, что некоторый простой закон подтверждается для достаточно большого числа отдельных случаев; тогда мы отказываемся допустить, что такое удачное совпадение было простой случайностью, и заключаем отсюда, что закон этот должен быть верен вообще.

Кеплер заметил, что все наблюденные Тихо Браге положения одной из планет лежат на одном и том же эллипсе. Ему ни на мгновение не приходит мысль, что благодаря странной игре случая Тихо смотрел на небо как раз в те моменты, когда истинная траектория планеты пересекала этот эллипс.

В таком случае не все ли равно, реальна ли простота или за ней скрывается сложная истина. Пусть простота будет следствием влияния больших чисел, которое сглаживает индивидуальные различия, или пусть она зависит от малости некоторых величин, позволяющей пренебрегать некоторыми членами,— как бы то ни было, она не случайна. Реальна ли эта простота или призрачна — она всегда имеет причину. Мы можем рассуждать таким образом всегда, и если простой закон был подтвержден большим числом отдельных наблюдений, то у нас есть законное право предположить, что он и впрямь будет верен в аналогичных случаях. Отказаться от этого — значило бы для нас приписать случайности недопустимую роль.

Однако имеется одно отличие. Простота реальная, глубоко коренящаяся, устояла бы перед увеличением точности наших измерительных средств. Если бы мы считали природу простою в основе, мы должны были бы сделать заключение от простоты приближенной к простоте строгой. Так прежде и поступали; но мы больше не имеем на это права.

Так, например, простота законов Кеплера — только кажущаяся. Это обстоятельство не мешает нам со значительным приближением прилагать эти законы ко всем системам, подобным Солнечной системе, но оно препятствует им быть строго точными.

Роль гипотезы. Всякое обобщение есть гипотеза. Поэтому гипотезе принадлежит необходимая, никем никогда не оспаривавшаяся роль. Она должна лишь как можно скорее подвергнуться и как можно чаще подвергаться проверке.

Если она этого испытания не выдерживает, то, само собой разумеется, ее следует отбросить без всяких сожалений. Так вообще и делают; но иногда не без некоторой досады. Но это чувство ничем не оправдано; напротив, физик, который пришел к отказу от одной из своих гипотез; должен был бы радоваться, потому что тем самым он нашел неожиданную возможность открытия. Я предполагаю, что его гипотеза не была выдвинута необдуманно, что она принимала в расчет все известные факторы, могущие помочь раскрыть явление! Если она не оправдывается, то это свидетельствует о чем-то неожиданном, необыкновенном; это значит, что предстоит найти нечто неизвестное, новое.

И была ли опровергнутая таким образом гипотеза бесплодной? Нисколько! Она, можно сказать, принесла больше пользы, чем иная верная гипотеза: не только потому, что она вызвала решающий опыт, но и потому, что, не будь ее, этот опыт был бы произведен наудачу, и в нем не увидели бы ничего чрезвычайного; только в списке фактов прибавился бы один лишний, не влекущий за собой никаких следствий.

Теперь выясним, при каком условии пользование гипотезой не представляет опасности? Одного твердого намерения руководиться опытом еще недостаточно; этим еще не исключается возможность влияния опасных гипотез; такими в особенности являются те, которые вводятся неосознанно, принимаются молчаливо, почему мы и не можем от них избавиться. Здесь-то и обнаруживается еще одна услуга, которую нам может оказать математическая физика. По свойственной ей точности она вынуждает нас формулировать все гипотезы, которые мы иначе могли бы допустить, сами не подозревая этого.

Заметим, с другой стороны, что весьма важно не множить гипотез чрезмерно и вводить их только одну после другой. Если мы создали теорию, основанную на множестве гипотез, и если опыт осуждает ее, то как найти между нашими предпосылками ту, которая должна быть изменена? Открыть ее было бы невозможно. И наоборот, если опыт согласуется с теорией, то можно ли считать, что подтверждены сразу все гипотезы? Можно ли надеяться из одного уравнения определить несколько неизвестных?

Равным образом нужно тщательно отличать различные виды гипотез. В числе их бывают, прежде всего, такие, которые вполне естественны и которых почти невозможно избежать; так, например, трудно не предположить, что влияние очень удаленных тел ничтожно, что малые движения подчинены линейной зависимости, что действие является непрерывной функцией причины. То же я скажу об условиях, вытекающих из понятия симметрии. Все эти гипотезы, так сказать, образуют общий фонд всех теорий математической физики. Если бы их пришлось оставить, то это уже после всех других.

Гипотезы второй категории я назову безразличными. В большинстве вопросов исследователь в самом начале своих вычислений предполагает, либо что материя непрерывна, либо, наоборот, что она состоит из атомов. Он мог бы изменить свое предположение на обратное, не меняя этих выводов; лишь получение их стало бы более трудным. Если теперь опыт подтверждает его заключения, станет ли он думать, что ему удалось доказать, например, реальность атомов?

В оптических теориях вводятся два вектора, из которых один рассматривается как скорость поступательного движения, другой — как вихрь (tourbillon). Это — пример безразличной гипотезы, так как те же самые выводы получаются и при обратном предположении; поэтому здесь согласие с опытом не может доказать, что действительно первый вектор есть поступательная скорость; оно подтверждает лишь, что величина, о которой идет речь, есть действительно вектор,— а это и есть единственная гипотеза, фактически введенная в число предпосылок. Мы рассматриваем этот вектор либо как скорость, либо как вихрь просто потому, что ограниченность нашего ума вынуждает нас облекать наши представления в некоторую конкретную форму. Пусть нам необходимо обозначить этот вектор буквой x или же y; подобно тому как результат опыта, каков бы он ни был, не дает оснований к тому, чтобы рассматривать вектор как скорость, он не может быть истолкован в том смысле, что его надо обозначать через x, а не через y.

Этого рода безразличные гипотезы никогда не представляют опасности, лишь бы только природа их была ясно понимаема. Они могут быть полезными то в качестве вычислительного приема, то как некоторая конкретная опора для нашей мыслительной способности. Поэтому нет оснований их осуждать.

Гипотезы третьей категории являются обобщениями в настоящем смысле слова. Дело опыта — подтвердить их или опровергнуть. Как в том, так и в другом случае они являются плодотворными; но, по изложенным мною основаниям, это имеет место лишь при условии ограниченности их числа.

Происхождение математической физики. Пойдем дальше, займемся более пристальным рассмотрением обстоятельств, обусловивших развитие математической физики. Прежде всего мы обнаруживаем, что усилия ученых всегда были направлены к тому, чтобы разложить сложное явление, данное непосредственно в опыте, на весьма большое число элементарных явлений.

Это осуществляется тремя различными способами. Сначала о разложении во времени: вместо того чтобы охватывать последовательное развитие явления в его целостности, стараются установить связь каждого момента с моментом, непосредственно предшествующим. Так, например, допускают, что нынешнее состояние мира полностью обусловливается его ближайшим прошлым, что на него, если можно так выразиться, прямо не влияет воспоминание об отдаленном прошлом. Благодаря этому постулату вместо непосредственного изучения всей последовательности явлений можно ограничиться составлением их «дифференциального уравнения», на место законов Кеплера становится закон Ньютона.

Далее стремятся расчленить явление по отношению к пространству. Опыт дает нам запутанную совокупность фактов, происходящих в пространстве некоторого объема. Надо постараться распознать в ней элементарное явление, которое, напротив, было бы локализовано в пределах весьма малой части пространства.

Несколько примеров, быть может, помогут лучше понять мою мысль. Никогда не достиг бы цели тот, кто захотел бы прямо изучить сложное распределение температур в охлаждающемся теле. Но все упрощается, если принять во внимание, что ни одна точка тела не может непосредственно передавать теплоту удаленной точке; теплота будет передаваться лишь точкам, лежащим в непосредственном соседстве; лишь постепенно тепловой поток достигнет других точек тела. Здесь элементарным явлением служит обмен теплоты между двумя смежными точками; этот процесс заключен в тесные пространственные пределы и является относительно простым, если ввести естественное допущение, что на него не влияет температура частиц, лежащих на заметном расстоянии.

Другой пример. Я сгибаю стержень; он принимает весьма сложную форму, прямое изучение которой было бы невозможно; я смогу приступить к ее исследованию, если замечу, что сгибание стержня является результатом деформации весьма малых элементов стержня и что деформация каждого из них зависит исключительно от сил, непосредственно к нему приложенных, а не от сил, действующих на другие элементы.

В этих примерах, которые можно было бы множить без труда, заключено допущение, что не существует действия на расстоянии (по крайней мере на значительном расстоянии). Это — гипотеза; она не всегда является верной — примером служит закон тяготения; поэтому ее надлежит подвергнуть проверке; если она подтверждается хотя бы приближенно, то она ценна, потому что она позволит нам обосновать математическую физику по крайней мере путем последовательных приближений.

Если такая гипотеза не выдерживает проверки, следует искать что-либо аналогичное, ибо есть и другие средства дойти до элементарных явлений. Если несколько тел действуют вместе, то возможно, что их действия независимы и просто складываются друг с другом либо как векторы, либо как скалярные величины. В таком случае элементарным явлением будет действие отдельного тела. В иных случаях задачу сводят к малым движениям, или — более общо — к малым вариациям, которые подчинены известному закону суперпозиции. Наблюденное движение разложится тогда на простые движения, например звук — на гармонические тоны, белый свет — на монохроматические составляющие.

Какими же средствами можно уловить элементарное явление после того как выяснилось, с какой стороны следует его искать?

Прежде всего, часто случается, что, для того чтобы его угадать или — лучше — чтобы угадать то, что есть в нем полезного для нас, вовсе нет необходимости проникать в самый механизм его; достаточно будет применить закон больших чисел. Обратимся опять к примеру распространения теплоты: каждая частица излучает по направлению к каждой соседней частице, но по какому закону — этого нам нет необходимости знать; всякое предположение относительно этого было бы гипотезой безразличной, а следовательно, бесполезной и не поддающейся проверке. В самом деле, благодаря свойствам средних величин и вследствие симметричности среды все различия сглаживаются и результат оказывается всегда одним и тем же, какая бы гипотеза ни была предложена.

Подобное имеет место в теории упругости и в теории капиллярных явлений: близкие друг к другу молекулы притягиваются и отталкиваются, но нам нет нужды знать по какому закону. Достаточно того, что это притяжение действует только на малых расстояниях, что число частиц весьма велико, что среда симметрична, а далее остается лишь пустить в ход закон больших чисел.

В приведенных примерах простота элементарного явления таилась под сложностью непосредственно наблюдаемого результата; но эта простота в свою очередь является призрачной и скрывает за собою весьма сложный механизм.

Лучшим средством дойти до элементарного явления был бы, очевидно, опыт. С помощью искусных экспериментальных приемов нужно было бы разъединить ту сложную связанность, какую природа предоставляет нашему исследованию, а затем тщательно изучать найденные и доведенные до возможной степени чистоты составные элементы. Примером может служить разложение естественного белого луча призмой на монохроматические лучи и поляризатором — на поляризованные лучи.

К несчастью, это не всегда возможно и достаточно. Иногда необходимо, чтобы умозрение предшествовало опыту. Я ограничусь одним примером, который всегда поражал меня: разлагая белый свет, я могу выделить узкую полосу спектра, но, как бы мала она ни была, она будет иметь известную ширину. Точно так же естественные *монохроматические источники* света дают нам линию тонкую, но не до бесконечности. Кто-нибудь мог бы предположить, что, подвергая экспериментальному изучению эти естественные источники, употребляя все более и более тонкие спектральные линии и в конце концов переходя, так сказать, к пределу, удалось бы достигнуть знания свойств строго монохроматического света. Но это было бы неточно. Пусть мы имеем два луча, испускаемые одним и тем же источником; пусть мы сначала поляризуем их во взаимно перпендикулярных плоскостях, затем приведем к одной плоскости поляризации и, наконец, заставим интерферировать. Интерференция произошла бы, если бы свет был *строго* монохроматичен; но при наших лишь приближенно монохроматических источниках интерференция не произойдет, как бы узка ни была взятая спектральная линия; чтобы явление имело место, она должна была бы быть во много миллионов раз у́же, чем самые тонкие известные нам линии.

Таким образом, в этом случае переход к пределу обманул бы нас; здесь теоретическая мысль должна была идти впереди опыта, и если она успела в этом, то лишь потому, что инстинктивно руководилась соображением простоты.

Знание элементарного факта позволяет нам сформулировать задачу в виде уравнения; отсюда путем некоторых комбинаций остается только вывести заключение о сложном факте, подлежащем наблюдению и проверке. Это — не что иное, как *интегрирование*, которое уже составляет дело математика.

Можно задать вопрос: почему в физических науках обобщение так охотно принимает математическую форму? Причина этого теперь понятна: она состоит не только в том, что приходится выражать числовые законы, но и в том, что наблюдаемое явление есть результат суперпозиции большого числа элементарных явлений, *подобных друг другу:* значит, здесь вполне естественно появиться дифференциальным уравнениям.

Однако недостаточно, чтобы каждое элементарное явление подчинялось простым законам; все подлежащие сочетанию явления должны подчиняться одному и тому же закону. Только в этом случае математика может принести пользу, потому что она научит нас сочетать подобное с подобным. Цель ее — предсказывать результат сочетания, не проделывая его шаг за шагом на самом деле. Когда приходится повторять несколько раз одну и ту же операцию, математика позволяет нам избежать этого повторения и путем особого рода индукции заранее узнать нужный результат. Я изложил этот прием выше, в главе о математическом умозаключении. Однако для этого необходимо, чтобы все эти операции были подобны друг другу; в противном случае, очевидно, пришлось бы на деле выполнить их одну за другой и помощь математики оказалась бы ненужной.

Таким образом, возможность рождения математической физики обусловлена приблизительной однородностью изучаемого предмета. Это условие не выполняется в биологических науках: здесь мы не находим ни однородности, ни относительной независимости разнородных частей, ни простоты элементарного явления. Вот почему биологи вынуждены прибегать к иным приемам обобщения.

Глава X

ТЕОРИИ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ

Значение физических теорий. Люди, стоящие в стороне от научной работы, поражаются кажущейся эфемерностью научных теорий. Они видят их постепенный упадок после нескольких лет процветания, видят нагромождение все новых руин, предвидят, что и модные теперь теории в свою очередь скоро подвергнутся той же судьбе, и выводят отсюда заключение об их полной бесполезности. Они называют это *банкротством науки.* Но такой скептицизм поверхностен. Эти люди не отдают себе никакого отчета в том, что составляет цель и назначение научных теорий, иначе они поняли бы, что и руины еще могут быть для чего-нибудь полезны.

Казалось, не было теории более прочной, чем теория Френеля, которая рассматривала свет как движение в эфире. Однако теперь ей предпочитают теорию Максвелла. Значит ли это, что труды Френеля были бесполезны? Нет, ибо Френель не ставил своей целью узнать, существует ли реально эфир, имеет ли он атомистическое строение, так ли или иначе движутся его атомы; его цель была иная — предвидеть оптические явления. А этому требованию теория Френеля удовлетворяет теперь точно так же, как и до Максвелла. Ее дифференциальные уравнения всегда верны; способы интегрирования их всегда одни и те же, и получающиеся отсюда интегралы всегда сохраняют свое значение.

Пусть не говорят, что мы таким образом низводим физические теории до степени простых практических рецептов. Уравнениями выражаются отношения, и если уравнения остаются справедливыми, то это означает, что и эти отношения сохраняют свою реальность. Теперь, как и раньше, уравнения Френеля показывают нам наличие такого-то отношения между одной вещью и некоторой другой вещью; но только то, что мы прежде называли *движением*, теперь называем *электрическим током*. Но названия эти были просто образными выражениями [1]), мы подставляем их вместо реальных предметов, которые природа навсегда утаила от нас. Истинные отношения между этими реальными предметами представляют собой единственную реальность, которую мы можем постигнуть; единственное условие состоит в том, чтобы те же самые отношения имели место как между этими предметами, так и между образными выражениями, которыми нам пришлось их заместить. Раз отношения нам известны, то уже не существенно, какое образное выражение мы считаем удобным применить.

Действительно ли некоторое периодическое явление (например, электрическое колебание) представ-

---

[1]) Стоящий во французском тексте термин Image переводчики издания 1904 г. (А. И. Бачинский и Н. М. и Р. М. Соловьевы) и издания 1906 г. (А. В. Чернявский) перевели по смыслу: *символ*. — *Примеч. ред.*

ляет собой результат колебательного движения какого-то атома; действительно ли этот атом, как маятник, перемещается в том или ином направлении — это и не известно с достоверностью, и не интересно. Но что между электрическим колебанием, движением маятника и всеми периодическими явлениями существует внутреннее, глубоко реальное родство, что это родство, это подобие или — еще лучше — этот параллелизм простирается до мельчайших подробностей, что он является следствием более общих принципов — принципа сохранения энергии и принципа наименьшего действия,— это мы можем утверждать; это — истина, которая навсегда останется одной и той же, в какую бы одежду нам ни заблагорассудилось ее облечь.

Было предложено много теорий дисперсии; более ранние были несовершенны и содержали лишь малую долю истины. Затем явилась теория Гельмгольца; потом ее изменяли на разные лады, и сам Гельмгольц построил другую теорию, основанную на принципах Максвелла. Но при этом весьма замечательно, что все ученые после Гельмгольца приходили к одним и тем же уравнениям, хотя исходные позиции их были, по-видимому, весьма различны. Я решаюсь сказать, что все эти теории одновременно справедливы, не только потому, что они позволяют нам предвидеть одни и те же явления, но и потому, что они обнаруживают очевидность действительно существующего отношения между абсорбцией и аномальной дисперсией. То, что есть верного в предпосылках этих теорий, является общим для всех авторов: именно — это утверждение того или иного отношения между некоторыми вещами, носящими у одних одно название, у других другое.

Кинетическая теория газов дала повод для многих возражений, на которые трудно было бы ответить, если бы мы имели претензию видеть в ней абсолютную истину. Но все эти возражения не уничтожат того, что она оказалась полезной, и это, в частности, проявилось в том, что она открыла нам истинное отношение между газовым и осмотическим давлением, — отношение, которое без того было бы глубоко сокрытым. В этом смысле ее можно назвать истинной.

Если физик констатирует противоречие между двумя теориями, одинаково дорогими ему, он иногда говорит: не станем об этом беспокоиться; пусть промежуточные звенья цепи скрыты от нас — мы будем крепко держать ее концы. Этот аргумент, напоминающий запутавшегося богослова, был бы смешон, если бы физическим теориям приписывался тот смысл, какой им придают профаны. Тогда в случае противоречия по меньшей мере одна из них должна была бы быть признана ложной. Это не необходимо, если искать в них только то, что́ следует искать. Может случиться, что и та и другая теории выражают действительные отношения, а противоречие лежит лишь в символах, в которые мы обрядили реальность.

Если кто-нибудь найдет, что этим слишком суживается область, доступная ученому, я отвечу: те вопросы, которых мы вам запрещаем касаться и о которых вы сожалеете, не только неразрешимы — они призрачны, они лишены смысла.

Пусть какой-то философ претендует на то, чтобы объяснять все физические процессы взаимными столкновениями атомов. Если бы он просто хотел этим указать, что в области физических явлений имеют место такие же отношения, как в случае взаимных столкновений большого числа шаров, и ничего более, то его утверждение было бы доступно проверке и могло бы оказаться справедливым. Но он хочет сказать еще нечто сверх того; и нам кажется, что мы его понимаем, потому что нам представляется, будто мы знаем, что́ такое удар; а это почему? просто потому, что мы часто видели, как играют на бильярде. Станем ли мы думать, что бог, созерцающий свое творение, испытывает те же ощущения, что и мы при виде бильярдной партии? Если мы, с одной стороны, не хотим вкладывать в рассматриваемое утверждение столь странный смысл, а с другой — отказываемся от только что данного ограничительного толкования, которое является правильным, то это утверждение теряет всякий смысл.

Гипотезам подобного рода свойствен лишь метафорический смысл. Ученому нет надобности воздерживаться от них, подобно тому как и поэт не избегает метафор; но он должен ясно сознавать их истинное значение. Они могут быть полезны как средство достигнуть известного умственного удовлетворения; они безвредны, пока остаются безразличными гипотезами.

Предыдущие соображения разъясняют нам, почему некоторые теории, считавшиеся оставленными и бесповоротно осужденными опытом, вдруг возрождаются к новой жизни. Причина здесь та, что они выражали реальные отношения и не утратили этого свойства даже после того, как мы по тем или иным основаниям сочли нужным выражать те же отношения другим языком. Таким образом, они сохраняли некоторую скрытую жизнеспособность.

В течение последних пятнадцати лет, что было более смешного, наивного и устарелого, чем жидкости Кулона? И вот они теперь возрождаются под именем *электронов.* Чем отличаются эти постоянно наэлектризованные частицы от электрических частиц Кулона? Правда, у электронов электричество имеет носителя в виде некоторого крайне незначительного количества материи; иными словами, электроны обладают массой (впрочем, в настоящее время оспаривается и это их свойство). Но и Кулон не отрицал у своих жидкостей свойства обладать массой или по крайней мере делал это неохотно. Опрометчиво было бы утверждать, что вера в электроны более не померкнет; тем не менее было любопытно констатировать это неожиданное возрождение.

Но наиболее поразительным примером является принцип Карно. Карно установил его, исходя из ложных гипотез. Когда обнаружили, что теплота не обладает свойством неуничтожаемости, но что она может быть преобразована в работу, идеи Карно были совершенно оставлены; но затем Клаузиус возвратился к ним и доставил им окончательное торжество. Теория Карно в ее первоначальном виде выражала рядом с верными отношениями также и другие, которые были неточны, являлись обломками старых идей; но присутствие последних не нарушало реальности первых. Клаузиус просто откинул эти последние, как срезают у дерева засохшие ветви, и в результате появился второй основной закон термодинамики. Это были все те же отношения, хотя по крайней мере внешне они были отношениями уже между другими предметами. Даже рассуждения Карно не потеряли от этого своей пригодности — они ошибочно применялись к ложному содержанию, но форма, т. е. самое существенное, была правильна.

Из предыдущего выясняется также значение общих принципов, каковыми являются принцип наименьшего действия и принцип сохранения энергии.

Эти принципы имеют весьма высокую ценность; они были получены путем отыскания того, что является общим элементом в множестве физических законов; поэтому они образуют как бы квинтэссенцию бесчисленной массы наблюдений. Однако из их общности вытекает следствие, на которое я обращал внимание читателя в главе VIII и которое состоит в том, что они не могут не подтвердиться. Так как мы не можем дать общее определение энергии, то принцип сохранения энергии просто означает, что существует *нечто*, что остается постоянным. Если так, то сколько бы новых сведений о мире ни дал нам будущий опыт, мы заранее уверены, что будет нечто, остающееся постоянным, что мы сможем назвать *энергией*.

Значит ли это, что рассматриваемый принцип лишен смысла, что он обращается в тавтологию? Нисколько: он означает, что различные вещи, которым мы даем наименование *энергии*, связаны истинным сродством; он утверждает между ними реальное отношение. Но если принцип имеет смысл, то он может оказаться ложным; возможно, что мы не имеем права распространять до бесконечности область его применения, и тем не менее оправдание его, пока он рассматривается в узком смысле слова, является заранее обеспеченным. По какому же признаку мы узна́ем, что достигнут крайний предел его законного распространения? Просто потому, что он перестанет быть нам полезным, т. е. перестанет давать нам возможность верно предвидеть новые явления. Тогда мы будем уверены, что утверждаемое отношение не является уже реальным, ибо иначе оно было бы и плодотворным; опыт, не противореча непосредственному новому расширению принципа, тем не менее осудит его.

Физика и механицизм. Большинство теоретиков обнаруживает постоянное предрасположение к объяснениям, заимствованным из области механики или динамики. Одни были бы довольны, если бы могли свести все явления к движению частиц, взаимно притягивающихся по известным законам. Другие более требовательны: они хотели бы устранить действия на расстоянии, у них частицы двигались бы по прямолинейным путям и сходили бы с этих путей только вследствие столкновений. Иные же, подобно Герцу, устраняют также и силы, но при этом подчиняют частицы геометрическим связям, похожим, например, на те, которые имеют место в наших суставах; они некоторым образом хотели бы свести динамику к своего рода кинематике. Словом, все хотели бы втиснуть природу в определенную форму, вне которой их ум не может найти удовлетворения. Но является ли природа достаточно гибкой для этого?

Мы исследуем этот вопрос в главе XII по поводу теории Максвелла. Мы увидим, что всякий раз, когда выполняются принцип сохранения энергии и принцип наименьшего действия, существует не только одно механическое истолкование, но и бесконечное множество их. На основании известной теоремы Кёнига о механизмах можно было бы показать, что существует бесконечное множество объяснений явлений как связями по способу Герца, так и с помощью центральных сил. Несомненно, столь же легко было бы доказать, что все явления всегда можно объяснить простыми соударениями.

Разумеется, для этого надо принять, что нельзя удовольствоваться общераспространенным представлением о материи [1]) в том виде, как о ней дают нам знать наши чувства и движения которой мы наблюдаем непосредственно. Пришлось бы или предположить, что эта материя состоит из атомов, внутренние движения которых ускользают от нас, а доступным нашим чувствам оказывается лишь перемещение целого, или пришлось бы постулировать одну из тонких субстанций, которые под названием *эфира* или под каким-либо другим названием во все времена играли столь значительную роль в физических теориях.

Часто идут еще далее: рассматривают эфир как единственную первичную материю или даже как единственную истинную материю. Наиболее умерен-

---

[1]) Под термином «материя» Пуанкаре имеет в виду вещество. — *Примеч. ред.*

ные считают обычную материю конденсированным эфиром — утверждение, не имеющее в себе ничего шокирующего ум; но другие ограничивают ее значение еще более и видят в ней только геометрическое место некоторых особенностей состояний эфира. Например, по лорду Кельвину, то, что мы называем *материей*, есть лишь место точек, где эфир испытывает вихревое движение; по Риману, это — место точек, в которых эфир постоянно уничтожается; у других, более современных авторов, Вихерта или Лармора, это — место точек, где эфир подвергается кручению совершенно особого рода. Я спросил бы желающих присоединиться к одной из этих точек зрения, по какому праву на выдаваемый за истинную материю эфир можно распространять механические свойства, наблюдаемые у обычной материи, которая [по этому воззрению] является ненастоящей.

Прежние невесомые жидкости — теплород, электричество и пр. — были оставлены, когда замечено было, что теплоте не свойственна неуничтожаемость. Но тут было и другое основание. Возведением их в ранг субстанций утверждалась их индивидуальность; они становились как бы разделенными друг от друга глубокой пропастью. Эту пропасть потребовалось засыпать, когда стало живее чувствоваться единство природы, когда были замечены тесные внутренние связи между всеми ее частями. Прежние физики размножением своих жидкостей не только создавали ненужные субстанции, но и разрывали реальные связи. Недостаточно, чтобы теория не утверждала неверных соотношений; надо, чтобы она не скрывала истинных соотношений.

А наш эфир — существует ли он в действительности? Известно, откуда явилась уверенность в его существовании. Свету требуется несколько лет, чтобы дойти до нас от удаленной звезды. В это время он *уже* не находится на звезде и *еще* не находится на Земле. Надо допустить, что он где-то находится, что он имеет, так сказать, некоторый материальный носитель

Можно выразить ту же идею в более математической и более абстрактной форме. Мы констатируем лишь изменения, которым подвергаются частицы материи; например, мы видим, как наша фотографическая пластинка испытывает влияние процессов, совершавшихся в раскаленной массе звезды много лет назад. Но в обычной механике состояние изучаемой системы определяется состоянием ее в непосредственно предшествующий момент; благодаря этому система удовлетворяет известным дифференциальным уравнениям.

Напротив, если бы мы отрицали эфир, то состояние материального мира зависело бы не только от непосредственно предшествующего состояния, но и от состояний гораздо более давнего времени; такая система удовлетворяла бы уравнениям в конечных разностях. Чтобы избегнуть этого отклонения от общих законов механики, мы и придумали эфир.

Изложенное выше заставляет нас наполнить эфиром только междупланетное пространство, но не пропитать им внутренность самих материальных сред. Физо идет дальше. В своем опыте, заставляя интерферировать лучи, прошедшие через движущийся воздух или воду, он, по-видимому, показывает нам две различные среды, проникающие друг друга и смещающиеся одна относительно другой. Можно сказать, что здесь вы касаетесь эфира пальцем.

Однако можно вообразить опыты, которые ввели бы нас в еще более тесное соприкосновение с ним. Предположим, что закон Ньютона, утверждающий равенство действия и противодействия, будучи приложен *только* к материи, оказался неверным, и нам удалось это установить. Геометрическая сумма всех сил, приложенных ко всем материальным частицам, не равнялась бы нулю. Тогда пришлось бы либо изменить всю механику, либо ввести эфир так, чтобы действие, испытываемое материей, компенсировалось противодействием, оказываемым материей на что-то другое. Или далее, пусть будет доказано, что световые и электрические явления видоизменяются вследствие движения Земли. Тогда пришлось бы заключить, что ход этих явлений может указать не только относительные перемещения материальных тел, но и так называемые их абсолютные движения.

В таком случае стало бы необходимым допустить существование эфира, чтобы эти «абсолютные» перемещения были отнесены не к пустому пространству, а к некоторой конкретной вещи.

Придем ли мы к нему когда-нибудь? Я не надеюсь и сейчас скажу, почему; однако надежда на это не так нелепа, раз она свойственна другим.

Так, если бы теория Лоренца, о которой я буду говорить подробнее в главе XIII, была справедлива, то закон Ньютона прилагался бы не к *одной только* материи и отклонения от него не были бы очень далеки от значений, доступных наблюдению.

С другой стороны, влияние движений Земли на электрические и оптические явления служило предметом многих исследований. Результаты всегда были отрицательными. Но уже одно то, что эти опыты были предприняты, показывает, что не было твердой уверенности в результатах, а по господствующим теориям компенсация является лишь приближенной, и можно надеяться, что более точные методы принесут положительные результаты.

Я считаю такие надежды призрачными; тем не менее любопытно показать, что успех этого рода опытов некоторым образом открыл бы нам новый мир.

Теперь я позволю себе сделать отступление, чтобы объяснить, почему я, вопреки Лоренцу, не думаю, что когда-нибудь более точные наблюдения могут обнаружить что-либо иное, кроме относительных перемещений материальных тел. Произведенные ранее опыты имели целью обнаружить члены первого порядка. Результат был отрицательный; могло ли это быть делом случая? Этого никто не мог допустить; стали искать общее объяснение, и Лоренц нашел его: он показал, что члены первого порядка взаимно уничтожаются. Это не имело места для членов второго порядка. Тогда были произведены более точные опыты, которые снова дали отрицательный результат. Это опять не могло произойти случайно — требовалось объяснение, которое и было дано. За объяснением дело никогда не станет: гипотезы представляют собой неисчерпаемый фонд.

Это не все: кто не почувствует, что здесь случайности предоставляется очень большая роль? Разве не случайным является то странное совпадение, благодаря которому известное обстоятельство явилось как раз вовремя, чтобы уничтожить члены первого порядка, а другое, совершенно отличное, но столь же благоприятное обстоятельство взяло на себя труд уничтожить члены второго порядка? Нет, следует найти одно и то же объяснение для обоих случаев, и тогда естественно явится мысль, что то же будет иметь место равным образом и для членов высших порядков и что взаимное уничтожение всех членов будет точным и абсолютным.

Современное состояние науки. В истории развития физики можно различать две противоположные тенденции. С одной стороны, ежеминутно открываются новые связи между предметами, которые, казалось, должны были навсегда остаться разделенными; отдельные факты перестают быть чуждыми друг другу; они стремятся систематизироваться в величественном синтезе. Наука движется по направлению к единству и простоте.

С другой стороны, наблюдение ежедневно открывает нам новые явления; они долго ждут своего места в системе, и иногда для этого бывает нужно сломать один из ее углов. Даже в хорошо известных явлениях, которые нашими грубыми чувствами воспринимаются как однородные, мы с каждым днем замечаем все более разнообразные подробности; то, что мы считали простым, делается сложным, и наука, повидимому, идет по пути возрастания сложности и многообразия.

Какая из этих двух тенденций, которые, как кажется, поочередно торжествуют победу, в конце концов одержит верх? Если первая, то наука возможна; но à priori этого доказать нельзя, и можно опасаться, что после тщетных попыток насильно подчинить природу нашему идеалу единства мы, затопляемые постоянно повышающейся волной новых приобретений, будем принуждены отказаться от классификации их, оставить наш идеал и свести науку к простой регистрации бесчисленного множества рецептов.

На этот вопрос мы не можем ответить. Мы можем только сравнивать науку, какою она является сегодня, с ее вчерашним состоянием. Из такого рассмотрения, несомненно, можно извлечь некоторые предположения.

Вот уже полвека, как зародились самые широкие ожидания. Благодаря открытию закона сохранения энергии и ее превращений тогда только что было обнаружено единство сил природы. Оно показало также, что тепловые явления могут быть объяснены движениями молекул. Какова природа этих движений — этого точно еще не знали, но не сомневались, что скоро это станет известным. Относительно света задача казалась окончательно решенной.

Успехи в области электричества были не столь значительны. Связь электричества с магнетизмом была только что установлена. Это был значительный и окончательный шаг к единству. Но как электричество в свою очередь могло бы приобщиться ко всеобщему единству, в какой форме вошло бы оно во вселенский механизм? Относительно этого еще не было никакой идеи. Однако никто не сомневался, что такое сведение к единству возможно,— все в это верили. Наконец, что касается молекулярных свойств материальных тел, то приведение их к общему единству казалось еще более легким; однако все детали оставались в тумане. Словом, это были большие живые, но не вполне ясные надежды.

Что же мы видим теперь?

Прежде всего — первый прогресс, и прогресс огромный. Теперь известны отношения между электричеством и светом: три области — свет, электричество и магнетизм,— прежде разделенные, объединились в одну и, по всей видимости, объединились окончательно.

Однако этот триумф стоил нам некоторых жертв. Световые явления входят в область электрических как частный случай; пока они оставались изолированными, легко было объяснять их движениями, которые считались известными во всех деталях; но теперь объяснение может быть принято лишь тогда, когда оно может без труда охватить всю область электричества. А вот это не обходится без трудностей.

Наиболее удовлетворительной из всего, что мы имеем, является теория Лоренца; эта теория, как мы это увидим в последней главе, объясняет электрический ток движением малых наэлектризованных частиц; она, бесспорно, лучше всех истолковывает известные нам факты, освещает больше реальных отношений, чем любая другая, и свойственные ей черты войдут в наибольшем числе в будущее окончательное построение. Тем не менее ей свойствен отмеченный уже выше крупный недостаток: она противоречит ньютонову закону действия и противодействия; или, точнее, по мнению Лоренца, этот закон приложим не только к самой материи; чтобы он оправдывался, надо принимать в расчет действие эфира на материю и противодействие, оказываемое материей на эфир. Но до новых открытий представляется вероятным, что положение вещей не таково.

Как бы то ни было, благодаря Лоренцу результаты, полученные Физо при исследовании оптических свойств движущихся тел, законы нормальной и аномальной дисперсии и законы поглощения света оказываются связанными как между собой, так и с другими свойствами эфира, и эта связь без сомнения более не порвется. Посмотрите, с какой легкостью новое явление Зеемана нашло в этой теории готовое место и даже помогло ввести в систему фарадеево магнитное вращение, не повиновавшееся усилиям Максвелла; эта легкость доказывает, что теория Лоренца не есть искусственное построение, обреченное на разрушение. Ее, возможно, придется изменить, но не разрушить.

Однако Лоренц не имел иных притязаний, как только обобщить в едином целом всю оптику и электродинамику движущихся тел; он не имел в виду дать им механическое истолкование. Лармор идет дальше: сохраняя существенные черты теории Лоренца, он, так сказать, прививает к ней идеи Мак-Кёллафа (MacCullagh) о направлении движений эфира. С его точки зрения, скорость эфира имеет те же направление и величину, что и магнитная сила. Тем самым становится известной скорость эфира, поскольку свойства магнитной силы доступны опыту. Как бы остроумна ни была эта попытка, недостатки теории Лоренца здесь сохраняются и даже увеличиваются. По Лоренцу, мы не знаем характера движений эфира и благодаря этому незнанию можем предполагать их такими, чтобы, компенсируясь движениями материи, они восстанавливали равенство действия и противодействия. По Лармору, мы знаем движения эфира и можем констатировать, что компенсация не имеет места.

Если попытка Лармора, как я считаю, не имела успеха, то означает ли это невозможность механического истолкования? Нисколько: я уже говорил раньше, что раз данное явление подчиняется принципу сохранения энергии и принципу наименьшего действия, оно допускает бесчисленное множество механических истолкований: то же самое имеет место и для световых и электрических явлений. Но этого недостаточно: чтобы механическое истолкование было пригодным, надо, чтобы оно было простым; для отбора между всеми возможными истолкованиями надо иметь еще и другие основания, кроме простой необходимости отбора. И вот, теории, которая удовлетворяла бы этому условию и, следовательно, могла бы быть на что-нибудь пригодной, мы еще не имеем. Следует ли сожалеть об этом? Это означало бы забыть, какую цель мы преследуем; истинная, единственная цель науки — раскрытие не механизма, а единства.

Поэтому нам следует ограничить наши притязания: не будем гнаться за механическим истолкованием, удовлетворимся указанием на то, что мы всегда могли бы его достигнуть, если бы пожелали. В этом мы имели бы успех: принцип сохранения энергии постоянно подтверждается; к нему присоединился и второй принцип, принцип наименьшего действия, облеченный в подходящую для физики форму. Он также постоянно подтверждался, по крайней мере для обратимых явлений, подчиненных уравнениям Лагранжа, т. е. наиболее общим законам механики.

Необратимые явления гораздо более непокорны. Однако и они упорядочиваются и стремятся войти в общее единство; озаривший их свет исходил из принципа Карно. Термодинамика долгое время ограничивалась изучением расширения тел и изменения их состояния. С некоторого времени она стала смелее и значительно расширила свою область. Мы обязаны ей теорией гальванического элемента и теорией термоэлектрических явлений; во всей физике нет ни одного уголка, не исследованного ею; она захватила даже химию. Повсюду царят одни и те же законы; повсюду под кажущимся разнообразием мы открываем принцип Карно и удивительное по своей абстрактности понятие энтропии, которое имеет столь же универсальный характер, как и понятие энергии, и которому, как и понятию энергии, по-видимому, соответствует какая-то реальность. Казалось, лучистая теплота должна была избежать такого подчинения;

но в последнее время мы видели, что и она покорилась тем же законам.

На этом пути нам открылись новые аналогии, которые часто простираются до деталей: омическое сопротивление уподобляется вязкости жидкостей; гистеризис — трению твердых тел. Во всех случаях трение является образцом, которому подражают разнообразнейшие необратимые явления, и это сродство отличается реальностью и глубиной.

И для этих явлений искали механическое истолкование в собственном смысле, но почти без успеха. Чтобы найти его, нужно было предположить, что необратимость есть лишь видимость, что элементарные явления обратимы и подчиняются известным законам динамики. Но число элементов чрезвычайно велико; они постоянно перемешиваются между собой, так что нашему грубому зрению кажется, что все стремится к однообразию, т. е. что все движется в одном направлении без надежды на возврат. Таким образом, кажущаяся необратимость есть лишь следствие закона больших чисел. Лишь существо, одаренное бесконечно острыми чувствами, как воображаемый Максвеллом демон, могло бы распутать этот запутанный клубок и повернуть мировой процесс в обратном направлении.

Это представление, связанное с кинетической теорией газов, стоило больших усилий и все же в общем было не очень плодотворно; быть может, оно еще станет таковым. Здесь не место рассматривать, не ведет ли оно к противоречиям и соответствует ли оно истинной природе вещей.

Во всяком случае, отметим оригинальные идеи Гуи (Gouy) о броуновском движении. Согласно Гуи, это своеобразное движение избежало бы подчинения принципу Карно. Колеблемые им частицы меньше по размерам, чем петли нашего запутанного клубка; поэтому эти частицы были бы в состоянии распутать их и таким образом дать задний ход мировой машине. Тем самым как бы была видна работа максвеллова демона.

Резюмируя предыдущее, скажем, что известные раньше явления систематизируются все лучше и лучше. Но и новые явления требуют себе места; большинство их, подобно явлению Зеемана, нашло его тотчас же. Но мы имеем также катодные лучи, рентгеновские лучи, лучи урана и радия. Тут целый мир, о существовании которого никто и не догадывался. Всех этих неожиданных гостей надо определить к месту!

Никто не может еще предвидеть, какое именно место они займут. Но я думаю, что они не разрушат общего единства, а скорее дополнят его собою. В самом деле, с одной стороны, новые излучения представляются связанными с явлениями люминесценции; они не только возбуждают флюоресценцию, но иногда возникают при тех же условиях, что и эта последняя. Далее, они состоят в родстве с теми причинами, которые заставляют проскакивать искру под действием ультрафиолетового света. Наконец (и это особенно важно), во всех этих явлениях предполагают участие настоящих ионов, правда, обладающих несравненно более значительными скоростями, чем скорости ионов в электролитах. Все это довольно неясно; но точность придет со временем.

Фосфоресценция, действие света на искру были до сих пор областями, сравнительно изолированными и поэтому менее привлекавшими исследователей. Теперь можно надеяться, что мы близки к построению нового пути, который облегчит их связь с универсальной наукой.

Мы не только обнаруживаем новые явления, но и в тех, которые считались известными, нам открываются неожиданные аспекты. В свободном эфире законы сохраняют свою величественную простоту; но материя в собственном смысле представляется все более и более сложной; все, что о ней говорится, всегда имеет только приближенное значение, и наши формулы ежеминутно требуют все новых членов.

Тем не менее это не разрушает общего плана. Отношения, установленные между вещами в предположении простоты последних, сохраняются и после того, как мы узнаем об их сложности,— а только это и важно. Правда, наши уравнения становятся все более и более сложными, для того чтобы по возможности ближе подойти к сложности природы; но в отношениях, которые позволяют выводить одни уравнения из других, не произошло никаких перемен. Одним словом, форма уравнений устояла.

Возьмем в качестве примера законы отражения света. Френель вывел их из простой и увлекательной теории, которая, по-видимому, подтверждалась опытом. Впоследствии более точные исследования доказали, что это подтверждение было лишь приближенным, и обнаружили повсюду следы эллиптической поляризации. Но тотчас же благодаря той точке опоры, которую мы имели в первом приближении, найдена была причина этих аномалий, состоящих в наличии поглощающего слоя: в существенных чертах теория Френеля сохранила свое значение.

Здесь только нельзя удержаться от следующего соображения. Все эти отношения остались бы незамеченными, если бы с самого начала существовала догадка о сложности взаимодействующих объектов. Давно уже было сказано, что если бы инструменты Тихо были в десять раз точнее, то мы никогда не имели бы ни Кеплера, ни Ньютона, ни астрономии. Для научной дисциплины составляет несчастье возникнуть слишком поздно, когда средства наблюдения стали слишком совершенными. В таком положении ныне находится физическая химия: третий и четвертый десятичные знаки причиняют большие затруднения ее основателем; по счастью, это — люди крепкой веры.

По мере того как продвигается изучение свойств материи, мы видим, как вступает в свои права идея непрерывности. Со времени работ Эндрюса и ван-дер-Ваальса мы уяснили способ, каким происходит переход от жидкого состояния к газообразному: этот переход не является внезапным. Точно так же нет и пропасти между жидким и твердым состояниями; в Трудах последнего съезда физиков наряду с работой о затвердевании жидкостей мы встречаем доклад о текучести твердых тел.

При такой тенденции простота, без сомнения, утрачивается: прежде некоторое явление изображалось несколькими прямыми, теперь приходится состыковывать эти прямые при помощи более или менее сложных кривых. Зато очень выигрывает единство. Эти разрозненные категории успокаивали ум, но не удовлетворяли его.

Наконец, физические методы завоевали новую область — химию; возникла физическая химия. Она еще очень молода, но уже видно, что она позволит нам связать друг с другом такие явления, как электролиз, осмос, движение ионов.

Что можно заключить из этого беглого очерка? То, что в итоге произошло приближение к единству; правда, движение было не таким быстрым, как этого ожидали пятьдесят лет назад, самые пути не всегда совпадали с ожидаемыми; но в конце концов приобретения оказались весьма значительными.

Глава XI

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Без сомнения, читатель будет удивлен, встретив здесь размышления об исчислении вероятностей.

Какое отношение может оно иметь к методу физических наук? А между тем вопросы, которые я хочу поднять, не разрешая их, естественно встают перед философом, желающим размышлять о физике, и уже в двух предыдущих главах я принужден был несколько раз использовать выражения: «вероятность» и «случайность».

Предвидение фактов, говорил я выше, может быть только вероятностным. «Как бы прочно обоснованным ни казалось нам наше предвидение, все же мы никогда не имеет *абсолютной* уверенности в том, что оно не будет опровергнуто опытом, предпринятым в целях его проверки. Однако вероятность часто бывает достаточно велика, чтобы практически мы могли ею удовлетвориться».

Затем несколько дальше я добавил:

«Рассмотрим, какую роль играет в наших обобщениях уверенность в простоте. Пусть мы установили, что некоторый простой закон подтверждается для достаточно большого числа отдельных случаев; тогда мы отказываемся допустить, что такое удачное совпадение было простой случайностью...»

Таким образом, во множестве случаев физик находится в таком же положении, как игрок, рассчитывающий свои шансы. Всякий раз, когда он применяет метод индукции, он более или менее сознательно пользуется исчислением вероятностей.

Ввиду этого я принужден сделать отступление и прервать наше изучение метода физических наук, чтобы подробнее рассмотреть, какое значение имеет это исчисление и какого доверия оно заслуживает.

Уже одно название «исчисление вероятностей» представляет собой пародокс; вероятность, в противоположность достоверности, есть то, чего не знают; как же можно вычислять то, о чем нет никаких знаний? Между тем многие выдающиеся ученые занимались этим вычислением, и никто не станет отрицать, что наука уже извлекла из него некоторую пользу. Как же объяснить это явное противоречие?

Была ли определена вероятность? И может ли она быть определена? И если нет, то как мы решаемся рассуждать о ней? Определение,— скажут,— очень просто: вероятность какого-нибудь события есть отношение числа случаев, благоприятствующих этому событию, к полному числу возможных случаев.

Простой пример даст нам понять, как неполно это определение. Я бросаю две игральные кости; какова вероятность того, что по крайней мере на одной из них выпадет 6? Каждая кость может выпасть шестью различными способами: число возможных случаев есть $6 \times 6 = 36$; число благоприятствующих случаев есть 11, вероятность равна $^{11}/_{36}$.

Таково правильное решение. Но не могу ли я с таким же успехом сказать: числа очков, выпавшие на обеих костях, могут образовать $\frac{6 \times 7}{2} = 21$ различных комбинаций; среди этих комбинаций 6 благоприятствующих; вероятность равна $^{6}/_{21}$.

Почему первый способ рассчитывать возможные случаи более законен, чем второй? Во всяком случае наше определение нам этого не указывает.

Таким образом, приходится дополнить это определение, говоря: «...к полному числу возможных случаев при условии, чтобы эти случаи были равновероятны». И вот мы пришли к определению вероятного при помощи вероятного же.

Как мы узнаем, что два возможных случая равновероятны? Не является ли это результатом некоторого условного соглашения? Если мы в начале каждой проблемы явно укажем условное соглашение, то все пойдет хорошо; нам придется только применять правила арифметики и алгебры, и мы доведем вычисление до конца так, что результат не оставит места никакому сомнению. Но если мы желаем сделать малейшее применение этого результата, то необходимо будет доказать, что наши условные соглашения были законны, и мы как раз натолкнемся на то затруднение, которое думали обойти.

Нам могут сказать: простого здравого смысла достаточно чтобы указать, какое соглашение следует допустить. Но вот Бертран, курьеза ради, разобрал простую задачу: «Какова вероятность того, чтобы в окружности хорда была больше стороны вписанного равностороннего треугольника?» Знаменитый геометр допустил последовательно два соглашения, одинаково, по-видимому, внушаемые здравым смыслом, и нашел в одном случае $^1/_2$, в другом $^1/_3$.

Заключение, которое по всей видимости вытекает из всего этого, состоит в том, что исчисление вероятностей есть наука бесполезная, что нужно с недоверием относиться к тому неясному инстинкту, который мы называем здравым смыслом и к которому обращаемся при установлении наших соглашений.

Тем не менее мы не можем подписаться под этим заключением; мы не можем обойти этот неясный инстинкт; без него наука была бы невозможна, без него мы не могли бы ни открыть закон, ни применять его. Имеем ли мы, например, право говорить о законе Ньютона? Без сомнения, многочисленные наблюдения согласуются с ним; но не есть ли это результат простой случайности? И далее, откуда мы знаем, что этот закон, верный на протяжении стольких веков, будет верным и на будущий год? На это возражение вы можете лишь ответить: «это очень мало вероятно».

Но примем некий закон; я верю, что, опираясь на него, я могу вычислить положение Юпитера на целый год. Однако имею ли я на это право? Кто мне сказал, что за это время какая-нибудь гигантская масса, наделенная огромной скоростью, не пройдет вблизи Солнечной системы и не произведет непредвиденных возмущений? И здесь ничего не остается ответить, как только: «это очень мало вероятно».

С этой точки зрения все науки суть только бессознательные приложения исчисления вероятностей;

осудить это исчисление — значит осудить всю науку в целом.

Я не стану долго останавливаться на научных проблемах, где участие исчисления вероятностей является более очевидным.

Такова прежде всего задача интерполяции, где по известному числу значений функции стараются определить промежуточные значения. Упомяну также о знаменитой теории погрешностей наблюдений (к которой еще вернусь позднее), о кинетической теории газов — этой общеизвестной гипотезе, по которой предполагается, что каждая газовая молекула описывает крайне сложную траекторию, но где по свойству закона больших чисел явления, взятые в среднем — в форме, единственно доступной для наблюдения,— подчиняются простым законам, каковы законы Мариотта и Гей-Люссака.

Все эти теории покоятся на законах больших чисел, так что падение исчисления вероятностей, очевидно, увлекло бы их за собой. Правда, они представляют только частный интерес и, за исключением интерполяции, это были жертвы, с которыми можно было бы примириться. Но, как я указал выше, речь шла бы не об этих только частных жертвах — речь шла бы о всей науке, законность которой была бы подвергнута сомнению.

Я знаю, что мне могли бы сказать: «Мы ничего не знаем и все-таки мы должны действовать. Но мы не имеем времени заняться исследованием, достаточным для того, чтобы рассеять наше незнание; кроме того, подобное исследование потребовало бы бесконечного времени. Следовательно, мы должны решаться, не обладая знанием; надо действовать наудачу и следовать правилам, не слишком им доверяя. Я знаю не то, что такая-то вещь истинна, но то, что для меня все же лучше действовать так, как если бы она была истинна». Исчисление вероятностей и, следовательно, наука имели бы не более как только практическое значение.

К сожалению, таким путем трудность не была бы устранена. Игрок желает попытать счастья, он спрашивает у меня совета. Если я ему дам совет, я буду руководствоваться исчислением вероятностей, но я не гарантирую ему успеха. Это то, что я назову *субъ-*

ективной вероятностью. В этом случае можно было бы довольствоваться объяснением, которое я привел выше. Но предположим, что при игре присутствует наблюдатель, который отмечает все ходы, и что игра продолжается долгое время; когда он подведет итог в своей записной книжке, он констатирует, что события распределены согласно законам исчисления вероятностей. Это — то, что я назову *объективной вероятностью*, и именно это явление нужно объяснить.

Существует множество страховых обществ, которые применяют правила исчисления вероятностей; они выдают своим акционерам дивиденды, объективную реальность которых невозможно оспорить. Чтобы объяснить это, недостаточно ссылаться на наше незнание и на необходимость действовать.

Таким образом, абсолютный скептицизм не может быть принят; мы должны быть осторожны, но не должны все огульно осуждать; необходимо подробное исследование.

I. Классификация проблем вероятности. Чтобы классифицировать проблемы, которые касаются такой темы, как вероятность, можно стать на несколько различных точек зрения и прежде всего на *точку зрения общности.*

Выше я сказал, что вероятность есть отношение числа благоприятствующих случаев к числу возможных случаев. То, что за недостатком лучшего термина я называют общностью, будет возрастать с числом возможных случаев. Это число может быть конечным, как, например, в случае, когда рассматривается бросание костей, где число возможных случаев есть 36. Это — первая степень общности.

Но если мы спросим, например, какова вероятность того, что точка, расположенная внутри круга, окажется лежащей также внутри вписанного квадрата, то число возможных случаев будет таково же, как число точек в круге, т. е. бесконечно. Это — вторая степень общности. Общность может быть распространена еще далее: можно задаться вопросом о вероятности того, что функция удовлетворяет данному условию; в этом случае существует столько возможных случаев, сколько можно вообразить различных функций. Это — третья степень общности, до которой восходят, например, когда стараются определить наиболее вероятный закон по конечному числу наблюдений.

Можно стать на совершенно иную точку зрения. Абсолютное знание, будучи тождественным достоверности, не оставило бы места для вероятности. Но и абсолютное незнание не привело бы к вероятности: ведь надо все же иметь хоть какую-нибудь осведомленность, чтобы прийти даже к этой недостоверной науке. Проблемы вероятности могут быть, таким образом, классифицированы по большей или меньшей глубине незнания.

Уже в области математики могут возникать проблемы вероятности. Какова вероятность того, что пятый десятичный знак логарифма, взятого наудачу из таблиц, будет 9? Никто не затруднится ответить, что эта вероятность есть $^1/_{10}$. Здесь мы обладаем всеми данными проблемы; мы могли бы вычислить наш логарифм, не прибегая к таблицам, но мы не хотим заниматься этим. Это — первая степень незнания.

В физических науках наше незнание уже больше. Состояние системы в данный момент зависит от двух обстоятельств: от ее начального состояния и от закона, по которому это состояние изменяется. Если бы мы сразу знали и этот закон и это начальное состояние, то нам нужно было бы разрешить только математическую проблему и мы снова пришли бы к первой степени незнания.

Но часто бывает, что нам известен закон, начальное же состояние неизвестно. Спрашивается, например, каково действительное распределение малых планет; мы знаем, что во всякое время они подчинены законам Кеплера, но мы знаем, каково было их начальное распределение.

В кинетической теории газов предполагается, что все газовые молекулы движутся по прямолинейным траекториям и подчиняются законам удара упругих тел; но, так как их начальные скорости неизвестны, то ничего неизвестно и об их действительных скоростях. Только исчисление вероятностей позволяет предвидеть средние явления, которые будут результатом комбинации этих скоростей. Это — вторая степень незнания.

Возможно, наконец, что не только начальные условия, но и самые законы будут неизвестны; тогда мы будем иметь третью степень незнания и вообще ничего не сможем утверждать относительно вероятности явления.

Часто бывает, что стараются предсказать не событие по более или менее несовершенному знанию закона, а, наоборот, зная события, стараются предсказать закон; таким образом, выводят не действия из причин, а причины на основании действий.

Это — так называемые проблемы *вероятности причин*, наиболее интересные с точки зрения их научных приложений.

Я играю в экарте [1]) с человеком, которого знаю как вполне порядочного; он сдает карты. Какова вероятность того, что он откроет короля? Эта вероятность равна $^1/_8$; это — проблема вероятности событий. Я играю с человеком, которого не знаю; он 10 раз сдавал карты и 6 раз открывал короля; какова вероятность того, что это шулер? Это — проблема вероятности причин.

Можно сказать, что это — главная проблема экспериментального метода. Я наблюдал n значений для x и соответственные значения для y; я константировал, что отношение вторых к первым является заметно постоянным. Вот событие; какова его причина? Вероятно ли, чтобы существовал общий закон, по которому y пропорционально x, и чтобы небольшие отклонения были обусловлены погрешностями наблюдений? Вот вопрос, который постоянно ставит перед собой исследователь и который он бессознательно решает всякий раз, когда занимается наукой.

Теперь я займусь обсуждением различных категорий проблем и рассмотрю сначала то, что я выше назвал субъективной вероятностью, а затем то, что назвал вероятностью объективной.

II. Вероятность в математических науках. Невозможность квадратуры круга доказана в 1883 году; но уже много раньше этой близкой к нам даты все геометры рассматривали эту невозможность как столь «вероятную», что Академия наук оставляла без рассмотрения мемуары (к сожалению, слишком многочисленные), посылаемые ей каждый год какими-то неудачниками.

---

[1]) Карточная игра. — *Примеч. ред.*

Была ли Академия права? Конечно, да; она хорошо знала, что, поступая так, она нисколько не рискует затормозить важное открытие. Она не могла бы доказать, что она права; но она знала, что ее инстинкт не обманывает ее. Если бы вы спросили академиков, они бы вам ответили:

«Мы сравнили вероятность того, что неизвестный ученый нашел истину, которую тщетно искали уже столь долгое время, с вероятностью того, что число умалишенных людей увеличилось на единицу; вторая вероятность показалась нам больше». Эти соображения очень хороши, но они не имеют в себе ничего математического; они — чисто психологического характера.

А если бы вы спрашивали их более настойчиво, они прибавили бы: «Почему вы желаете, чтобы частное значение трансцендентной функции было алгебраическим числом? И если бы π было корнем алгебраического уравнения, то почему вы желаете, чтобы только этот корень был периодом функции $\sin 2x$ и чтобы ими не были другие корни того же уравнения?». Словом, они сослались бы на принцип достаточного основания в его наиболее неопределенной форме.

Но что они бы могли извлечь из этого? В лучшем случае — практическое правило для употребления времени, которое с большей пользой могло бы быть потрачено на их обычные работы, чем на изучение вымученного сочинения, внушающего законное недоверие. Но то, что я назвал выше объективной вероятностью, не имеет никакого отношения к этой первой проблеме.

Иначе обстоит дело со второй проблемой. Возьмем 10 000 первых логарифмов, которые я нахожу в таблицах. Среди этих 10 000 логарифмов я беру наудачу один; какова вероятность, что его третий десятичный знак есть четное число? Вы не затруднитесь ответить: $1/2$ — и в самом деле, если вы просмотрите в таблице третьи десятичные знаки этих 10 000 чисел, вы найдете приблизительно столько же четных цифр, сколько и нечетных.

Или, если желаете, напишем 10 000 чисел, по количеству наших логарифмов; каждое из этих чисел пусть равно $+1$, если третий десятичный знак четный, и -1 в обратном случае. Возьмем затем среднюю величину из этих 10 000 чисел. Я не затруднюсь сказать, что эта средняя величина, вероятно, равна нулю; если бы я произвел вычисление в действительности, я убедился бы, что она очень мала.

Но эта проверка даже бесполезна. Я мог бы строго доказать, что это среднее меньше 0,003. Чтобы установить этот результат, мне пришлось бы привести довольно длинное вычисление, для которого здесь мало места, и поэтому я ограничусь ссылкой на статью, опубликованную мною в «Revue générale des Sciences» 15 апреля 1899 г. Единственный пункт, на который я должен обратить внимание, следующий: в этом вычислении я опирался только на два факта, а именно, что первая и вторая производные логарифма в рассматриваемом промежутке остаются заключенными в известных пределах.

Отсюда первое следствие: что это свойство справедливо не только для логарифма, но для какой угодно непрерывной функции, так как производные всякой непрерывной функции заключены в определенных пределах.

Если я уже заранее был уверен в результате, то это прежде всего потому, что я часто замечал аналогичные факты для других непрерывных функций; затем потому, что я — более или менее бессознательно и несовершенно — провел в уме рассуждение, которое привело меня к предыдущим неравенствам, подобно тому как опытный вычислитель, не доведя до конца умножения, соображает, что «получится приблизительно столько-то».

И кроме того, так как то, что я назвал бы моей интуицией, есть лишь несовершенный образ истинного рассуждения, то, как выяснилось, наблюдение подтвердило мои догадки, и объективная вероятность оказалась в согласии с вероятностью субъективной.

В качестве третьего примера я выберу следующую проблему: пусть число u взято наудачу, n — данное очень большое целое число; каково вероятное значение $\sin nu$? Эта проблема сама по себе не имеет никакого смысла. Чтоб придать ей смысл, необходимо условное допущение: мы *условимся*, что вероятность того, что число u заключено между a и $a + da$, равна $\varphi(a)da$; что она, следовательно, пропорциональна величине бесконечно малой разности da и равна этой величине, умноженной на функцию $\varphi(a)$, зависящую только от a. Что касается этой функции, то я выбираю ее произвольно, но надо предположить ее непрерывной. Так как значение $\sin nu$ остается тем же, когда u возрастает на 2π, то я могу, не ограничивая общности, допустить, что u заключено между 0 и 2π, и таким образом приду к допущению, что $\varphi(a)$ есть периодическая функция с периодом 2π.

Искомое вероятное значение легко выражается простым интегралом, и легко показать, что этот интеграл меньше чем

$$2\pi \frac{M_k}{n^k},$$

где M_k — наибольшее значение k-й производной функции $\varphi(u)$. Итак, мы видим, что если k-я производная конечна, то наша вероятная величина стремится к нулю, когда n возрастает беспредельно, и притом быстрее чем

$$1/n^{k-1}.$$

Итак, вероятное значение $\sin nu$ для очень большого n есть нуль; чтобы определить это значение, мне необходимо было сделать условное допущение, но результат остается тем же, *каково бы ни было это условное допущение*. Я наложил лишь небольшие ограничения, допуская, что функция $\varphi(a)$ есть непрерывная и периодическая, и эти гипотезы столь естественны, что неясно, как можно было бы их избежать.

Обсуждение трех предыдущих примеров, столь различных во всех отношениях, до некоторой степени обнаруживает, с одной стороны, значение того, что философы называют принципом достаточного основания, а с другой — важность того факта, что некоторые свойства являются общими для всех непрерывных функций. Изучение вероятности в физических науках приведет нас к тому же результату.

III. Вероятность в физических науках. Перейдем теперь к проблемам, относящимся к тому, что я назвал выше второй степенью незнания; это — те проблемы, в которых известен закон, но неизвестно начальное состояние системы. Я мог бы умножать число примеров, но я возьму только один: каково в настоящее время вероятное распределение малых планет на зодиаке?

Мы знаем, что они подчиняются законам Кеплера: мы можем даже, не изменяя ничего в природе проблемы, допустить, что все их орбиты круговые и расположены в одной и той же известной нам плоскости. Зато мы совершенно не знаем, каково было их начальное распределение. И все же мы, не колеблясь, можем утверждать, что теперь это распределение приблизительно равномерно. Почему?

Пусть b будет долготой малой планеты в начальный момент, т. е. в момент, равный нулю, пусть a — средняя скорость ее движения; ее долгота в настоящий момент t будет $at + b$. Сказать, что распределение планет в настоящий момент равномерно, это все равно, что сказать, что средняя величина из синусов и косинусов кратного аргумента $at + b$ есть нуль. Почему же мы утверждаем это?

Изобразим каждую малую планету точкой на плоскости, именно точкой, координаты которой в точности суть a и b. Все эти изображающие точки будут заключены в некоторой области плоскости, но так как их очень много, то эта область окажется усеянной точками. Впрочем, мы ничего не знаем о распределении этих точек.

Как приложить исчисление вероятностей в данном случае? Какова вероятность того, что одна или несколько изображающих точек находятся в такой-то части плоскости? Вследствие нашего незнания нам приходится ввести произвольную гипотезу. Чтобы выяснить природу этой гипотезы, я использую вместо математической формулы грубый, но конкретный образ.

Представим себе, что поверхность нашей плоскости покрыта воображаемой материей, плотность которой переменна, но изменяется она непрерывно. Условимся принять, что вероятное число изображающих точек, приходящихся на данную часть плоскости, пропорционально количеству находящейся здесь воображаемой материи. Поэтому, если мы имеем на плоскости две области одинаковых размеров, то вероятности того, что точка, изображающая одну из наших малых планет, находится в той или другой из этих областей, будут относиться, как средние плотности воображаемой материи в той или другой области.

Вот, следовательно, два распределения: одно — действительное, где изображающие точки крайне многочисленны, крайне скучены, но разделены, как молекулы материи по атомистической гипотезе; другое — расходящееся с действительностью, где наши изображающие точки заменены воображаемой непрерывной материей. Относительно последней мы знаем, что она не может быть реальной, но наше незнание вынуждает нас принять ее.

Если бы затем мы имели какое-нибудь представление о действительном распределении изображающих точек, то мы могли бы условиться так, чтобы во всякой области плотность этой воображаемой непрерывной материи была приблизительно пропорциональна числу изображающих точек или, если угодно, числу атомов, заключающихся в этой области. Но и этот прием невозможен, наше незнание столь велико, что мы принуждены выбирать произвольно функцию, определяющую плотность нашей воображаемой материи. Мы вынуждены принять только одну гипотезу, которой мы почти не в состоянии избежать,— мы предположим эту функцию непрерывной. Этого, как мы увидим, достаточно для того, чтобы мы могли сделать некоторое заключение.

Каково вероятное распределение малых планет в момент t? Или, иначе, каково вероятное значение синуса долготы в момент t, т. е. $\sin(at+b)$? Мы начали с произвольного соглашения; если мы примем его, то это вероятное значение вполне определено. Разобьем плоскость на элементы площади. Рассмотрим значение $\sin(at+b)$ в центре каждого из этих элементов; умножим эту величину на площадь элемента и на соответствующую плотность воображаемой материи; составим затем сумму для всех элементов плоскости. Эта сумма по определению будет искомой вероятной средней величиной, которая окажется, таким образом, выраженной при помощи двойного интеграла.

Можно сначала подумать, что эта средняя величина будет зависеть от выбора функции φ, определяющей плотность воображаемой материи, и что так как эта функция φ произвольна, то в зависимости от произвольного выбора, который мы сделаем, мы можем получить какую угодно среднюю величину. Но это совсем не так.

Простое вычисление показывает, что наш двойной интеграл очень быстро убывает с возрастанием t.

Таким образом, я совершенно не знал, какую гипотезу мне допустить относительно вероятности того или иного начального распределения; но каково бы ни было сделанное допущение, результат будет тот же: это и выводит меня из затруднения.

Какова бы ни была функция φ, средняя величина стремится к нулю с возрастанием t, и так как малые планеты, конечно, совершили очень большое число обращений, то я могу утверждать, что эта средняя величина очень мала.

Я могу выбрать φ по своему желанию, однако с одним ограничением: эта функция должна быть непрерывной; и в самом деле, с точки зрения субъективной вероятности выбор прерывной функции был бы неразумным; какое основание имел бы я, например предполагать, что начальная долгота может быть равна именно 0°, но что она не может быть заключена между 0° и 1°?

Но трудность возникает вновь, если стать на точку зрения объективной вероятности — если мы перейдем от нашего воображаемого распределения, где воображаемая материя предполагалась непрерывной, к действительному распределению, где наши изображающие точки образуют собой как бы дискретные атомы.

Среднее значение $\sin(at + b)$ представится просто через

$$\frac{1}{n} \sum \sin (at + b),$$

где n — число малых планет. Вместо двойного интеграла, относящегося к непрерывной функции, мы имеем сумму дискретных членов, и между тем никто серьезно не усомнится в том, что это среднее значение будет на самом деле очень мало.

Именно вследствие того, что наши изображающие точки крайне скучены, наша дискретная сумма вообще будет очень мало отличаться от интеграла.

Интеграл есть предел, к которому стремится сумма членов, когда число этих членов беспредельно возрастает. Если членов очень много, то сумма будет очень мало отличаться от своего предела, т. е. от интеграла, и то, что я сказал о последнем, будет справедливо и для суммы.

Тем не менее существуют исключительные случаи. Если бы, например, для всех малых планет имело место равенство $b = \frac{\pi}{2} - at$, то в момент t долгота всех планет равнялась бы $\pi/2$ и среднее значение было бы, очевидно, равно 1. Для этого было бы необходимо, чтобы в момент $t = 0$ все малые планеты были размещены на некоторой спирали особенной формы с крайне тесно сближенными витками. Всякий признáет, что подобное начальное распределение крайне невероятно (и даже если допустить его в действительности, то распределение было бы неравномерным для некоторого момента, например, 1 января 1900 г., но оно перешло бы в равномерное через несколько лет).

Однако почему мы признаем такое начальное распределение невероятным? Необходимо это выяснить, так как если бы мы не имели основания отбросить эту нелепую гипотезу как не заслуживающую доверия, то все бы рушилось и мы уже ничего не могли бы утверждать относительно вероятности того или иного действительного распределения.

Мы опираемся здесь опять-таки на принцип достаточного основания, принцип, к которому постоянно приходится возвращаться. Мы могли бы допустить, что вначале планеты были распределены приблизительно на прямой линии или что они были расположены неравномерно; но, как нам кажется, нет достаточного основания предполагать, что неизвестная причина, породившая их, действовала, следуя столь правильной и в то же время столь сложной кривой, которая представлялась бы выбранной умышленно как раз для того, чтобы нынешнее распределение не было равномерным.

IV. Красное и черное. Вопросы теории азартных игр, например игры в рулетку, в сущности вполне аналогичны тем, которые мы только что рассматривали.

Представим себе циферблат, разделенный на большое число равных делений, попеременно красных и черных; в центре его укреплена вращающаяся стрелка; после сильного разгона эта стрелка, сделав значительное число оборотов, остановится против одного из делений. Вероятность того, что это деление красное, очевидно, равна $^1/_2$.

Стрелка повернулась на угол Θ, заключающий в себе несколько окружностей: я не знаю, какова вероятность того, что стрелка отброшена с такой силой, чтобы этот угол был заключен между Θ и $\Theta + d\Theta$; но я могу ввести условное положение — могу допустить, что эта вероятность равна $\varphi(\Theta)d\Theta$; что касается функции $\varphi(\Theta)$, то я могу выбрать ее вполне произвольно, нет ничего, что могло бы руководить мной в этом выборе; однако я, естественно, буду предполагать эту функцию непрерывной.

Пусть ε — длина (она считается по окружности радиуса, равного единице) каждого красного или черного деления. Надо вычислить интеграл от $\varphi(\Theta)d\Theta$, распространяя его, с одной стороны, на все красные деления, с другой — на все черные, и затем сравнить полученные результаты.

Рассмотрим промежуток 2ε, заключающий одно красное деление и следующее за ним черное. Пусть M и m — наибольшее и наименьшее значения функции $\varphi(\Theta)$ в этом промежутке. Интеграл, распространенный на красные деления, будет меньше $\Sigma M\varepsilon$; интеграл, распространенный на черные деления, будет больше $\Sigma m\varepsilon$; следовательно, разность их будет меньше $\Sigma(M - m)\varepsilon$. Но если функция φ предположена непрерывной, если, с другой стороны, промежуток ε очень мал сравнительно с полным углом, описанным стрелкой, то разность $M - m$ будет крайне мала. Поэтому и разность двух интегралов будет очень мала и вероятность будет очень близка к $^1/_2$.

Всякому понятно, что, не зная ничего о функции φ, я должен действовать так, как если бы вероятность была равна $^1/_2$. Ясно, с другой стороны, что если, становясь на объективную точку зрения, я буду наблюдать известное число выпадений, наблюдение даст мне приблизительно столько же выпадений черного, сколько и красного. Все игроки знают этот объективный закон, но он вовлекает их в одну странную ошибку, которая им часто указывалась, но в которую они всегда впадают снова. Когда красное выпало, например, шесть раз подряд, они ставят на черное, рассчитывая на верный выигрыш; ведь очень редко бывает, говорят они, чтобы красное выпадало семь раз подряд.

В действительности вероятность выигрыша и в этом случае остается равной $^1/_2$. Правда, наблюдение показывает, что серии из семи последовательных красных крайне редки; но серия из шести красных, за которой следует один черный, является столь же редкой. Им бросилась в глаза редкость серий из семи красных; но они не обращали внимания на редкость серий из шести красных и одного черного единственно потому, что подобные сочетания меньше поражают внимание.

V. Вероятность причин. Я перехожу к проблемам вероятности причин — проблемам, наиболее важным с точки зрения их применений в науке. Пусть, например, две звезды расположены на небесной сфере очень близко друг к другу. Не является ли эта видимая близость результатом простой случайности, и не находятся ли эти звезды — хотя они расположены почти на одном и том же луче зрения — на очень различных расстояниях от Земли, а следовательно, на значительном отдáлении одна от другой? Или мы имеем здесь действительную близость? Вот это и есть проблема вероятности причин. Прежде всего я напомню, что всякий раз, обсуждая проблемы вероятности событий, которыми мы занимались до сих пор, мы всегда должны были выдвигать некоторое условное положение, более или менее оправдываемое. И если чаще всего результат был в известной мере независим от этого условного положения, то это лишь в силу известных гипотез, которые позволили нам à priori отбросить, например, разрывные функции или некоторые нелепые соглашения.

Нечто аналогичное встретим мы, занимаясь вероятностью причин. Некоторое действие может быть произведено причиной *A* или причиной *B*. Действие наблюдалось; ищется вероятность того, что оно обусловлено причиной *A*; это — вероятность причины à posteriori. Но я не мог бы вычислить ее, если бы некоторое более или менее оправдывающееся условное положение не позволило мне *наперед* знать, какова *априорная* вероятность того, что причина *A* вступит в действие; я подразумеваю здесь вероятность этого события для того, кто еще не наблюдал самого действия.

Для большей ясности я возвращусь к примеру игры в экарте, к которому я прибегал выше; мой партнер сдает карты в первый раз и открывает короля — какова вероятность, что это шулер? Обычное применение формул дает $^8/_9$ — результат, очевидно, крайне удивительный. Если исследовать дело ближе, то вычисление оказывается выполненным так, как если бы я, *еще не садясь за игорный стол*, уже признал, что у меня один шанс против двух за то, что мой партнер — нечестный игрок. Такая гипотеза нелепа, ибо в этом случае я, конечно, не стал бы с ним играть; этим выясняется и нелепость заключения.

Условное положение об априорной вероятности было неоправданным; поэтому и вычисление апостериорной вероятности привело меня к недопустимому результату. Отсюда видна важность предварительного условного положения. Я прибавлю еще, что если совсем не вводить условного положения, то проблема вероятности à posteriori не имела бы никакого смысла; всегда приходится это делать либо явно, либо молчаливо.

Перейдем к примеру более научного характера. Я хочу определить некоторый экспериментальный закон; когда я будут знать его, его можно будет представить с помощью некоторой кривой; я делаю несколько отдельных наблюдений; пусть каждое из них изобразится некоторой точкой. Получив ряд различных точек, я провожу между ними кривую, стараясь возможно меньше уклоняться от них и в то же время сохранить для моей кривой правильную форму, без угловых точек, без слишком резких изгибов, без внезапного изменения радиуса кривизны. Эта кривая представит мне вероятностный закон, и я допускаю, что она не только дает мне значения функции, промежуточные между наблюдаемыми, но что и самые наблюдаемые значения она дает точнее, чем прямое наблюдение (потому-то я и проводил ее вблизи моих точек, но не через самые точки).

Такова проблема вероятности причин. Действиями здесь являются зарегистрированные мною результаты измерений; они зависят от сочетания двух причин — истинного закона явления и погрешностей наблюдения. Задача состоит в том, чтобы, зная действия, отыскать вероятность того, что явление подчиняется такому-то закону, и вероятность того, что наблюдения искажены такой-то погрешностью. Тогда наиболее вероятный закон соответствует проведенной кривой, и наиболее вероятная ошибка наблюдения представится расстоянием соответствующей точки от этой кривой.

Но проблема не имела бы никакого смысла, если бы я до всякого наблюдения не составил себе идею о вероятности à priori того или иного закона и о шансах ошибки, которую я могу совершить.

Если мои инструменты хороши (и это я знал бы до наблюдения), то я не позволю моей кривой значительно уклоняться от точек, представляющих непосредственные измерения. Если же они плохи, то я мог бы отступить от этих точек несколько больше, лишь бы получить кривую, менее извилистую, в целях упорядоченности я мог бы принести и бо́льшую жертву.

Однако почему же я стараюсь провести кривую без извилин? Потому, что закон, представляемый непрерывной функцией (или функцией, у которой производные высшего порядка малы), я уже à priori рассматриваю как более вероятный сравнительно с законом, не удовлетворяющим этому условию. Без этой уверенности рассматриваемая проблема не имела бы никакого смысла; интерполяция была бы невозможна; нельзя было бы вывести закон из конечного числа наблюдений; наука не существовала бы.

Пятьдесят лет тому назад физики рассматривали более простой закон как более вероятный, чем закон сложный, при прочих равных условиях. Они ссылались на этот принцип в защиту закона Мариотта против опытов Реньо. Теперь они отказались от этой веры; и между тем как часто они бывают вынуждены поступать так, как если бы они сохранили эту веру! Как бы то ни было, именно от этого направления осталась вера в непрерывность, и мы только что видели, что если бы эта вера в свою очередь исчезла, то экспериментальная наука стала бы невозможной.

VI. Теория погрешностей. Мы пришли, таким образом, к обсуждению теории погрешностей, которая находится в непосредственной связи с проблемой вероятности причин. И здесь мы снова констатируем *следствия*, — а именно, известное число расходящихся между собою наблюдений — и стараемся разгадать *причины*, которыми вызываются, с одной стороны, истинное значение измеряемых величин, с другой — ошибки, допущенные в каждом отдельном наблюдении. Надо было бы вычислить, какова à posteriori вероятная величина каждой ошибки и затем каково вероятное значение измеряемой величины.

Но, как я уже выяснил, нельзя было бы предпринять это вычисление, если не допустить à priori, т. е. до всякого наблюдения, некоторого закона вероятности погрешностей. Существует ли какой-либо закон погрешностей?

Закон погрешностей, принятый всеми вычислителями, есть закон Гаусса, который представляется некоторой трансцендентной кривой, известной под названием «колокола».

Но прежде всего следует напомнить классическое различие между ошибками систематическими и случайными. Если мы измеряем некоторую длину слишком длинной мерой, мы всегда получим число слишком малое, и бесполезно будет повторять измерение несколько раз; это — ошибка систематическая. Если мы измеряем точным метром, мы можем тем не менее ошибиться, но мы будем ошибаться то в ту, то в другую сторону, и когда мы возьмем среднее из большого числа измерений, ошибка будет стремиться к уменьшению. Это — ошибки случайные.

С самого начала ясно, что систематические ошибки не могут удовлетворять закону Гаусса; но удовлетворяют ли ему случайные ошибки? Были многочисленные попытки доказать это; но почти все они являются грубо ошибочными умозаключениями. Тем не менее закон Гаусса можно доказать, опираясь на следующие гипотезы: общая ошибка есть результирующая очень большого числа частных и независимых ошибок; каждая из частных ошибок очень мала и, кроме того, подчиняется закону вероятности — какому угодно, при одном непременном условии: что вероятность положительной ошибки та же, что и вероятность ошибки, равной и противоположной по знаку. Очевидно, что эти условия будут выполняться часто, хотя и не всегда, и мы можем сохранить название случайных за теми ошибками, которые им удовлетворяют.

Отсюда видно, что метод наименьших квадратов является законным не во всех случаях; вообще физики доверяют ему меньше, чем астрономы. Несомненно это зависит от того, что астрономы, кроме систематических ошибок, с которыми они встречаются наравне с физиками, принуждены еще бороться с одной крайне важной и вполне случайной причиной ошибок: я имею в виду атмосферные колебания.

Очень любопытно послушать физика, беседующего с астрономом о методе наблюдения: физик, убежденный, что одно хорошее измерение стоит многих плохих, прежде всего со всей предосторожностью заботится о том, чтобы исключить все систематические ошибки до последней; астроном возражает ему: «но таким образом вы сможете наблюдать лишь небольшое число звезд; случайные ошибки не исчезнут».

Какой вывод следует из этого? Можно ли и впредь применять метод наименьших квадратов? Мы должны рассуждать так: мы исключили все систематические ошибки, какие только могли подозревать; мы хорошо знаем, что существуют еще и другие, но мы не можем их открыть; между тем надо сделать выбор и принять какую-то окончательную величину, которая должна быть рассматриваема как вероятная; очевидно, лучшее, что мы можем сделать для этого, — это применить метод Гаусса. Таким образом, мы применим только практическое правило, относящееся к субъективной вероятности. Больше сказать нечего.

Но некоторые хотят идти дальше и утверждают не только то, что вероятная величина равна тому-то, но еще то, что вероятная ошибка, вошедшая в результат, равна тому-то. *Это совершенно незаконно.* Это было бы верно лишь в том случае, если бы мы были уверены, что исключены все систематические ошибки; но мы об этом совершенно ничего не знаем. Пусть мы имеем два ряда наблюдений; прилагая правило наименьших квадратов, мы находим, что вероятная ошибка, относящаяся к первому ряду, вдвое меньше, чем во втором. Однако второй ряд может быть предпочтительнее, чем первый, так как первый может быть искажен большой систематической ошибкой. Все, что мы можем сказать, — это то, что первый ряд, *вероятно*, предпочтительнее второго, так как его случайная ошибка меньше и так как мы не имеем никакого основания утверждать, что систематическая ошибка для одного ряда больше, чем для другого: ведь мы об этом решительно ничего не знаем.

VII. Заключения. В настоящей главе я изложил немало проблем, не разрешив ни одной из них. Тем не менее я не сожалею о том, что написал о них, так как это, может быть, побудит читателя поразмыслить над этими тонкими вопросами.

Как бы то ни было, существует несколько пунктов, по-видимому, твердо установленных. Чтобы предпринять какое-либо вычисление вероятности — даже просто для того, чтобы это вычисление имело смысл, — надо взять в качестве исходной точки некоторую гипотезу или условное положение, которые всегда содержат известную долю произвола. При выборе этого условного положения мы не можем руководствоваться ничем, кроме принципа достаточного основания. К несчастью, этот принцип очень неопределенен и растяжим и, как мы видели в нашем беглом обзоре, принимает различные формы. Форма, под которой мы встречаем его чаще всего, — это вера в непрерывность: вера, которую трудно было бы оправдать убедительным рассуждением, но без которой никакая наука не была бы возможна. Наконец, исчисление вероятностей может быть с пользой применено в тех проблемах, в которых результат не зависит от принятой вначале гипотезы, лишь бы только эта гипотеза удовлетворяла условию непрерывности.

Глава XII

ОПТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСТВО [1]

Теория Френеля. Самый лучший пример, какой только можно избрать для иллюстрации всего ска-

[1]) Эта глава представляет собою частичное воспроизведение предисловий к двум моим сочинениям: «Математическая теория света» (Париж, 1889) и «Электричество и оптика» (Париж, 1901).

занного выше о методе физических наук и о значении гипотезы, представляет собой теория света и ее связь с теорией электричества. Благодаря Френелю оптика стала наиболее разработанной частью физики; так называемая волновая теория представляет собой нечто целое, действительно удовлетворяющее ум; не следует лишь требовать от нее того, чего она дать не может.

Математические теории не имеют целью открыть нам истинную природу вещей; такая претензия была бы безрассудной. Единственная цель их — систематизировать физические законы, которые мы узнаем из опыта, но которых мы не могли бы даже и выразить без помощи математики.

Для нас не так важно, существует ли эфир в действительности — пусть это решают метафизики; для нас важнее то обстоятельство, что все происходит так, как если бы он существовал, и что эта гипотеза удобна для истолкования явлений. А в конце концов, есть ли у нас другие основания для веры в существование самих материальных объектов? Вера в их существование — точно так же лишь удобная гипотеза. Только она никогда не перестанет существовать, тогда как гипотеза эфира, без сомнения, когда-нибудь будет отвергнута как бесполезная.

Но даже и тогда законы оптики и уравнения, выражающие их на языке анализа, останутся верными, по крайней мере в первом приближении. Поэтому всегда будет полезно изучать доктрину, которая связывает все эти уравнения в одно целое.

Волновая теория основывается на молекулярной гипотезе. Те, кто надеются за законами раскрыть причины, видят в этой гипотезе преимущество; для других же она служит основанием скептицизма. Но скептицизм вторых представляется мне столь же мало обоснованным, как и иллюзии первых.

Гипотезы этого рода играют лишь второстепенную роль. От них можно было бы отказаться; обычно этого не делают, потому что без них была бы потеряна ясность изложения, и это — единственное основание. В самом деле, при внимательном анализе можно убедиться, что теория Френеля заимствует у молекулярных гипотез лишь два положения: а) принцип сохранения энергии и б) линейную форму уравнений, которая является общим законом малых движений, как и всех малых изменений вообще. Вот почему бо́льшая часть выводов Френеля сохраняет свое значение и после принятия электромагнитной теории света.

Теория Максвелла. Как известно, Максвелл впервые установил тесную связь между оптикой и электричеством — двумя областями физики, до тех пор совершенно чуждыми друг другу. Но растворившись в более обширном целом, в гармонии высшего порядка, оптика Френеля не утратила своей жизненности. Различные части ее продолжают существовать, и взаимосвязи их остаются все теми же. Изменился лишь язык, которым мы пользуемся для их выражения, и, с другой стороны, Максвелл открыл нам новые и неожиданные отношения между различными частями оптики и областью электричества.

Когда французский читатель в первый раз открывает книгу Максвелла, к его восхищению вначале примешивается чувство беспокойства и часто даже недоверия. Его удается рассеять лишь ценою многих усилий, после продолжительного изучения; у некоторых выдающихся умов это чувство сохраняется навсегда.

Почему же идеи английского ученого воспринимаются у нас с таким трудом? Несомненно потому, что умственное воспитание, полученное большинством образованных французов, приучило их ценить точность и логическую строгость выше всех других качеств. Прежние теории математической физики давали нам в этом смысле полное удовлетворение. Все наши великие мастера, начиная с Лапласа и кончая Коши, действовали согласно одному и тому же методу. Исходя из ясно выраженных гипотез, они с математической строгостью выводили из них все следствия и затем сверяли эти следствия с опытом. Они как будто хотели каждой области физики придать точность, свойственную небесной механике.

Ум, привыкший восхищаться таким методом, нелегко удовлетворяется какой-нибудь теорией. Он не только не потерпит в ней ни малейшего признака внутреннего противоречия; он потребует, чтобы отдельные части ее были логически связаны друг с другом и чтобы число гипотез было сведено до минимума.

Это не все: он предъявит еще и другие требования — менее основательные, по моему мнению. Позади той материи, которая доступна нашим чувствам и которая нам знакома из опыта, он хочет видеть другую — единственно истинную, на его взгляд, — которая имела бы лишь чисто геометрические свойства и атомы которой были бы математическими точками, подчиненными исключительно динамическим законам. И тем не менее, бессознательно противореча самому себе, он будет стремиться представить себе эти невидимые и бесцветные атомы, тем самым возможно более сближая их с обычной материей. Только тогда он и будет вполне удовлетворен и сочтет, что проник в тайну Вселенной. Если это удовлетворение и обманчиво, от него нелегко отказаться.

Итак, раскрывая книгу Максвелла, французский читатель ожидает найти в ней теоретическое целое, столь же логическое и точное, как и физическая оптика, основанная на гипотезе эфира; тем самым он заранее готовит себе разочарование, от которого я желал бы избавить читателя, сразу предупредив его о том, чтó он должен искать у Максвелла и чего он не может у него найти.

Максвелл не дает какого-либо механического истолкования электричества и магнетизма; он ограничивается доказательством того, что такое истолкование возможно. Он указывает также, что оптические явления представляют собой лишь частный случай электромагнитных явлений. Поэтому из всякой теории электричества можно непосредственно вывести теорию света.

Обратное, к сожалению, неверно; имея полное объяснение световых явлений, мы не всегда можем извлечь полное объяснение электрических явлений. В частности, это нелегко сделать, исходя из теории Френеля; без сомнения, это не невозможно; но и тогда пришлось бы задуматься над вопросом, не окажемся ли мы вынужденными отказаться от удивительных результатов, которые, казалось, были окончательным приобретением. Это похоже на шаг назад; и многие выдающиеся умы не захотели бы с этим смириться.

Если же читатель согласится ограничить, таким образом, свои ожидания, он столкнется еще с другими трудностями. Английский ученый не пытается построить здание, которое имело бы цельный и окончательный вид, все части которого были бы подчинены общему плану; скорее он как бы возводит множество предварительных, независимых одна от другой построек, сообщение между которыми затруднительно, а иногда и невозможно.

Возьмем, например, главу, где электростатические притяжения объясняются давлениями и натяжениями в диэлектрической среде. Эту главу можно было бы изъять без ущерба для ясности и полноты всей остальной части книги; с другой стороны, она содержит теорию, которая существует сама по себе, и ее можно было бы понять, не прочитав ни одной строки из всего предшествующего и последующего. Но она не только лишена органической связи с остальной частью сочинения: ее даже трудно согласовать с основными идеями книги; и Максвелл не пытается достичь этого согласования, он просто говорит: «I have not been able to make the next step, namely, to account by mechanical considerations for these stresses in the dielectric»[1]).

Этот пример достаточно поясняет мою мысль. Я мог бы привести много других: например, кто мог бы предположить, читая страницы, посвященные магнитному вращению плоскости поляризации, что оптические и магнитные явления идентичны?

Итак, не следует обольщать себя надеждой избежать всякого противоречия, с этим надо примириться. В самом деле, две противоречащие друг другу теории могут обе явиться полезными орудиями исследования, лишь бы их не перепутывали и не искали в них сущности вещей. И, быть может, изучение Максвелла было бы менее поучительным, если бы оно не открывало нам такого множества новых расходящихся друг от друга путей.

Но основная идея книги вследствие этого несколько затемнена, так что в большинстве популярных изложений она представляет собой единственный пункт, который остается совершенно в стороне.

---

[1]) «Я не был в состоянии сделать следующий шаг, а именно, объяснить эти напряжения в диэлектрике с помощью механических соображений» (*англ.*). — *Примеч. ред.*

Чтобы показать ее важность, я считаю себя обязанным изложить, в чем состоит эта основная идея. В этих целях мне придется сделать небольшое отступление.

О механическом истолковании физических явлений. Во всяком физическом явлении мы можем проследить известное число параметров, обнаруживаемых непосредственным опытом и доступных измерению. Я буду называть их параметрами q.

Наблюдение позволяет нам узнать законы изменения этих параметров. Эти законы вообще могут быть выражены в форме дифференциальных уравнений, связывающих между собой параметры q и время.

В чем состоит механическое истолкование подобного явления?

Его стараются объяснить или некоторыми движениями обыкновенной материи, или движениями одного или нескольких гипотетических флюидов. Принимается, что эти флюиды состоят из очень большого числа отдельных частиц m.

Когда же мы можем сказать, что у нас имеется полное механическое истолкование явления? С одной стороны, когда нам станут известны дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют координаты гипотетических частиц m, причем предполагается, что эти уравнения согласуются с принципами динамики; с другой стороны, когда мы будем знать соотношения, определяющие координаты частиц m в функции параметров q, доступных опыту. Повторяю, что уравнения должны согласоваться с принципами динамики, в частности с принципом сохранения энергии и с принципом наименьшего действия.

Первое из них гласит, что полная энергия остается постоянной и что она состоит из двух частей:

1) кинетической энергии или живой силы; она зависит от масс гипотетических частиц m и от их скоростей, — я обозначу ее через T — и

2) потенциальной энергии; она зависит исключительно от координат этих частиц — я обозначу ее через U. Сумма двух энергий T и U остается постоянной.

Далее, чему же учит нас принцип наименьшего действия? Он учит нас тому, что для перехода из начального состояния, соответствующего моменту t_0, в конечное состояние, соответствующее моменту t_1, система должна двигаться таким путем, чтобы за промежуток времени между моментами t_0 и t_1 средняя величина «действия» (т. е. *разности* двух энергий T и U) была минимальной. Впрочем, первый из двух принципов является следствием второго.

Если обе функции T и U известны, этот принцип оказывается достаточным для определения уравнений движения. В самом деле, между всеми путями, позволяющими совершить переход от одного состояния к другому, есть, очевидно, один, для которого средняя величина действия меньше, чем для всех других. Далее, существует *только* один такой путь, и отсюда следует, что принцип наименьшего действия достаточен для определения *действительного* пути, а следовательно, для определения уравнений движения. Таким приемом мы приходим к так называемым уравнениям Лагранжа. В этих уравнениях роль независимых переменных играют координаты гипотетических частиц m; но я теперь предполагаю, что в качестве переменных приняты доступные прямому опыту параметры q.

Обе части энергии должны тогда выражаться в функции параметров q и их производных; ясно, что именно в таком виде они представляются экспериментатору: он, естественно, будет стремиться определить потенциальную и кинетическую энергию с помощью величин, которые он может непосредственно наблюдать [1]).

Таким образом, система всегда будет переходить из одного состояния в другое таким путем, что средняя величина действия окажется наименьшей. При этом несущественно, что T и U теперь выражены через параметры q и их производные, несущественно, что с помощью этих же параметров мы определяем начальное и конечное состояние; принцип наименьшего действия остается справедливым во всяком случае. И здесь из всех путей, могущих служить пере-

---

[1]) Добавим, что U будет зависеть только от q; T будет зависеть от q и от их производных по времени и представится однородным многочленом второй степени относительно этих производных.

ходом от начального состояния к конечному, найдется один и только один, для которого средняя величина действия будет наименьшая. Таким образом, принцип наименьшего действия достаточен для нахождения дифференциальных уравнений, определяющих изменения параметров q. Получаемые этим приемом уравнения представляют собой другую форму уравнений Лагранжа.

Для того чтобы составить эти уравнения, нам нет надобности знать ни соотношений, которые связывают параметры q с координатами гипотетических частиц, ни масс этих частиц, ни выражения U в функции координат этих частиц. Все, что нам нужно знать, это выражение U в функции q и выражение T в функции q и их производных, т. е. выражения кинетической и потенциальной энергий в функциях экспериментальных данных.

Затем будет иметь место одно из двух: либо для надлежащим образом выбранных функций T и U уравнения Лагранжа, составленные в соответствии с только что сказанным, окажутся тождественными с дифференциальными уравнениями, выведенными из опыта; либо же вовсе не будет таких функций T и U, для которых такое согласие имело бы место. Ясно, что во втором случае никакое механическое истолкование невозможно.

Итак, *необходимое* условие возможности механического истолкования состоит в том, чтобы можно было выбрать функции T и U, которые удовлетворяли бы принципу наименьшего действия и вытекающему из него принципу сохранения энергии.

Впрочем, это условие и *достаточно*; в самом деле, пусть удалось найти функцию U параметров q, представляющую одну из частей энергии; пусть другая часть энергии, обозначенная нами через T, является функцией q и их производных и имеет вид однородного многочлена второй степени относительно этих производных; и, наконец, пусть лагранжевы уравнения, образованные с помощью этих двух функций T и U, согласуются с данными опыта.

Что же нужно для получения отсюда механического истолкования? Для этого нужно лишь, чтобы U можно было рассматривать как потенциальную энергию системы, а T — как живую силу той же системы.

В отношении U здесь нет никаких трудностей; но можно ли T рассматривать как живую силу материальной системы? Легко показать, что это всегда возможно, и притом бесчисленным множеством способов. За подробностями я отсылаю читателя к предисловию моего сочинения «Электричество и оптика».

Итак, если нельзя удовлетворить принципу наименьшего действия, то невозможно и механическое истолкование; если же можно ему удовлетворить, то существует бесконечное множество таковых. Отсюда следует, что коль скоро имеется одно механическое истолкование, то возможно бесконечное множество других механических истолкований.

Еще одно замечание.

Одни из величин, доступных нашему непосредственному опыту, мы примем за функции координат наших гипотетических частиц (molécules): это — те же параметры q; другие из них мы будем считать зависящими не только от координат, но и от скоростей, или, что то же, от производных параметров q, или от некоторых сочетаний этих параметров и их производных.

Теперь возникает вопрос: как из всех величин, доступных опыту и измерению, выбрать те, которые будут играть роль параметров q и какие мы будем рассматривать в качестве производных этих параметров? Выбор этот остается в широкой степени произвольным: достаточно иметь возможность выполнить его так, чтобы не нарушалось согласие с принципом наименьшего действия — и механическое истолкование будет возможным.

И вот Максвелл задал себе вопрос, может ли он сделать этот выбор и выбор двух энергий T и U таким образом, чтобы электрические явления удовлетворяли упомянутому принципу? Опыт показывает нам, что энергия электромагнитного поля распадается на две части: энергию электростатическую и энергию электродинамическую. Максвелл показал, что если первую из них принять за потенциальную энергию U, вторую — за кинетическую энергию T, если, далее, электростатические заряды проводников рассматривать как параметры q, а силы токов — как производные параметров q, то при этих условиях, говорю я, Максвелл признавал, что электрические явления удовлетворяют принципу наименьшего действия. Поэтому стала несомненной возможность механического истолкования. Если бы Максвелл изложил эту мысль в начале своей книги, вместо того чтобы помещать ее в отдаленном углу второго тома, то она не ускользнула бы от внимания большинства читателей.

Таким образом, если некоторое явление допускает какое-либо одно полное механическое истолкование, то оно допускает и бесконечное число других, которые одинаково хорошо будут объяснять все особенности, обнаруживаемые опытом.

Это находит свое подтверждение в истории всех областей физики; например, в оптике Френель считал световые колебания перпендикулярными к плоскости поляризации, Нейман же рассматривал их как параллельные этой плоскости. Долгое время искали «experimentum crucis», который позволил бы решить спор двух теорий, но найти его так и не могли. Приведем другой пример, из области электричества: как теория двух жидкостей, так и теория одной жидкости с совершенно одинаковым успехом могут служить основой для объяснения электростатических явлений. Все факты подобного рода легко объясняются при помощи указанных выше свойств лагранжевых уравнений.

Теперь нетрудно понять, в чем состоит основная идея Максвелла. Для доказательства возможности механического истолкования электрических явлений нам нет необходимости заботиться об описании самого истолкования: достаточно знать выражение двух функций T и U — двух частей энергии, затем с помощью этих функций составить уравнения Лагранжа и, наконец, сравнить эти уравнения с экспериментальными законами.

Как же нам сделать выбор между всеми этими возможными механическими истолкованиями, если опыт отказывает нам в помощи? Может быть, настанет время, когда физики потеряют интерес к такого рода вопросам, недоступным для позитивных методов, и предоставят их метафизикам. Но это время еще не пришло: человеку не так-то легко покориться неизбежности вывода — никогда не узнать сущность вещей.

Итак, при нашем выборе мы можем руководствоваться лишь такими соображениями, в которых большую роль играет личная оценка; есть такие решения, которые будут всеми отвергнуты вследствие их причудливости, в то время как другие привлекут всех своей простотой.

Что касается области электричества и магнетизма, то Максвелл воздержался от решительного выбора. Это не означает, что он систематически уклонялся от всего недоступного для позитивных методов: время, посвященное им развитию кинетической теории газов, достаточно убеждает в противном. Добавлю, что хотя в своем большом труде он не развивает полного детального истолкования, но раньше он попытался дать нечто подобное — в статье, опубликованной в Philosophical Magazine. Необычность и сложность гипотез, которые он при этом должен был сделать, побудили его потом отказаться от этой попытки.

На всем протяжении его книги господствует один и тот же дух: все существенное, т. е. все, что должно остаться общим для всех теорий, выдвинуто на первый план; все, что относится лишь к специальным теориям, почти всегда обходится молчанием. Таким образом, читатель видит перед собой некоторую форму, почти лишенную содержания, форму, которая вначале производит впечатление чего-то мимолетного и неуловимого, как тень. Однако трудности, которые он вынужден преодолевать, побуждают сильнее работать его мысль, и в конце концов он начинает понимать, сколь часто искусственными были теоретические построения, которыми он прежде восхищался.

Глава XIII

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

С нашей точки зрения, история электродинамики особенно поучительна. Ампер дал своему бессмертному труду такое название: «Теория электродинамических явлений, основанная *исключительно* на опыте». Он полагал, следовательно, что он не создал *ни одной* гипотезы; но как мы вскоре увидим, он их создал; только он сделал это, сам того не замечая. Однако эти гипотезы были замечены его преемниками, так как внимание их было привлечено слабыми местами исследований Ампера. Они создали новые гипотезы, на этот раз вполне сознательно. Однако сколько перемен произошло здесь, пока не установилась система, которая ныне считается классической, но которая, быть может, тоже еще не является окончательной! Мы сейчас это увидим.

I. Теория Ампера. В своих экспериментальных исследованиях взаимодействий токов Ампер имел и мог иметь дело только с замкнутыми токами.

Это не значит, что он отрицал возможность незамкнутых токов. Если мы соединим проволокой два противоположно заряженных проводника, то появится ток, идущий от одного из них к другому и продолжающийся до тех пор, пока потенциалы обоих не сравняются. Согласно идеям, господствовавшим во времена Ампера, такой ток считался незамкнутым; наличие тока от первого проводника ко второму было очевидно; тока, который шел бы от второго к первому, не замечали.

Токи подобной природы (например, токи, возникающие при разряде конденсаторов) Ампер рассматривал как незамкнутые; но он не мог сделать их предметом своих опытов, так как длительность их слишком мала.

Можно представить себе еще и другой вид незамкнутого тока. Пусть имеются два заряженных проводника A и B, соединенных проволокой AMB. Пусть небольшие подвижные проводящие тела приходят сначала в соприкосновение с проводником B, отнимают у него часть заряда, затем контакт их с B прекращается, они движутся по пути BNA, перенося с собой свой заряд, приходят в соприкосновение с A и передают ему этот заряд, который затем снова возвращается в B, переходя по проволоке AMB. Мы имеем здесь в некотором смысле замкнутый ток, потому что электричество циркулирует по замкнутому пути $BNAMB$; но две части этого тока весьма различны между собой: в проволоке AMB электричество перемещается *по* твердому проводнику подобно гальваническому току, преодолевая омическое сопротивление и выделяя теплоту; принято говорить, что здесь имеет место *ток проводимости*; в части BNA электричество *переносится* подвижным проводником: это — так называемый *конвекционный ток.*

Если теперь рассматривать конвекционный ток как совершенно аналогичный току проводимости, то контур *BNAMB* является замкнутым: если, напротив, конвекционный ток не является «настоящим током», например, если он не оказывает действия на магниты, то остается лишь ток проводимости *AMB*, который будет *незамкнутым.*

Пример подобного процесса может быть осуществлен, если соединить проволокой два полюса машины Гольца: вращающийся заряженный круг переносит электричество путем конвекции от одного полюса к другому; затем оно по проволоке возвращается к первому полюсу, осуществляя ток проводимости. Но получение подобных токов сколько-нибудь значительной силы является делом весьма трудным; при тех средствах, какими располагал Ампер, это было прямо невозможно. Одним словом, Ампер мог составить себе идею о двух типах незамкнутых токов, но он не был в состоянии подвергнуть опытному исследованию как те, так и другие, так как или сила их была слишком ничтожна, или длительность их была слишком мала.

Итак, на опыте он мог обнаружить лишь действие замкнутого тока на другой замкнутый ток или, точнее, действие одного замкнутого тока на *часть* другого, так как можно пропустить ток по *замкнутому* контуру, состоящему из одной части подвижной и другой — неподвижной. В этом случае возникает возможность изучать перемещения подвижной части под действием другого замкнутого тока. Что касается действий незамкнутого тока как на замкнутый ток, так и на другой незамкнутый ток, то изучить их Ампер не имел никакого средства.

1. *Случай замкнутых токов.* В случае взаимодействия двух замкнутых токов Ампер нашел из опыта замечательно простые законы. Я бегло возобновлю в памяти читателя те из них, которые будут нам впоследствии полезны.

а) *Если сила токов поддерживается постоянной* и если два контура, подвергавшиеся каким угодно перемещениям и деформациям, возвращаются затем к своей начальной конфигурации, то полная работа электродинамических сил будет равна нулю. Другими словами, здесь существует *электродинамический потенциал* двух контуров, который пропорционален произведению сил токов и зависит от формы и относительного положения контуров; работа электродинамических сил равна изменению этого потенциала.

б) Действие замкнутого соленоида равно нулю.

в) Действие контура C на другой контур C' определяется исключительно «магнитным полем», присущим контуру C. В самом деле, в каждой точке пространства можно определить по величине и направлению некоторую силу, так называемую *магнитную силу*, обладающую следующими свойствами:

а) сила, с которой контур C действует на магнитный полюс, приложена к этому полюсу; она равна магнитной силе, умноженной на магнитную массу полюса;

б) магнитная стрелка весьма малых размеров стремится принять направление магнитной силы, и пара, которая стремится привести ее в это положение, пропорциональна произведению магнитной силы, магнитного момента стрелки и синуса угла отклонения;

в) если контур C' перемещается, то работа электродинамической силы, с которой C действует на C', равна приращению «магнитного силового потока», пронизывающего этот контур.

2. *Действие замкнутого тока на элемент тока.* Не будучи в состоянии осуществить незамкнутый ток в собственном смысле слова, Ампер имел лишь одно средство изучать действие замкнутого тока на элемент тока. Оно состояло в использовании контура C', составленного из двух частей — одной неподвижной, другой подвижной. Роль подвижной части играла, например, подвижная проволока $\alpha\beta$, концы которой α и β могли скользить вдоль другой проволоки, укрепленной неподвижно. В одном из положений подвижной проволоки конец α лежал на точке A неподвижной проволоки, а конец β — на точке B ее. Ток шел из α в β, или — это все равно — из A в B, вдоль подвижной проволоки, а из B в A возвращался по неподвижной. *Таким образом, это был замкнутый ток.*

В другом положении, в которое подвижная проволока приходит после некоторого скольжения, конец α

лежит в другой точке A' неподвижной проволоки, конец β — также в другой точке B' ее. Ток идет теперь из α в β, или — это все равно — из A' в B', вдоль подвижной проволоки, а затем вдоль неподвижной возвращается из B' в B, из B в A, наконец, из A в A'. Здесь ток снова остается замкнутым.

Если подобный контур подвергается действию замкнутого тока C, то подвижная часть будет перемещаться, как если бы она находилась под действием некоторой силы. Ампер *допускает*, что зависящая от C воображаемая сила, которая как бы действует в этом случае на подвижную часть $\alpha\beta$ замкнутого тока, будет совершенно такою же, как если бы по $\alpha\beta$ проходил незамкнутый ток, выходящий из α и останавливающийся в β, вместо того чтобы совершить замкнутый путь, возвратившись из β в α по неподвижной части контура.

Эта гипотеза может казаться довольно естественной, и Ампер ввел ее, сам того не замечая; тем не менее *она не обязательна*, и, как мы увидим позднее, Гельмгольц ее отбросил. Как бы то ни было, она позволила Амперу, несмотря на то, что он никогда не мог осуществить незамкнутый ток, формулировать законы действия замкнутого тока на другой, незамкнутый, или даже на элемент тока.

Законы эти по-прежнему просты:

а) сила, действующая на элемент тока, приложена к этому элементу; она перпендикулярна к элементу и к магнитной силе и пропорциональна нормальной к элементу слагающей этой магнитной силы;

б) действие замкнутого соленоида на элемент тока равно нулю.

Но в этом случае уже не существует электродинамического потенциала; т. е. если ток замкнутый и ток незамкнутый, при условии постоянства их сил, возвращаются к начальной конфигурации, то полная работа уже не будет равна нулю.

3. *Непрерывные вращения.* В числе электродинамических опытов наиболее курьезными являются те, в которых оказалось возможным осуществить непрерывное вращение (они иногда называются *униполярной индукцией*). Пусть у нас имеется магнит, могущий вращаться вокруг своей оси; ток проходит сначала по неподвижной проволоке, затем вступает

в магнит через один из полюсов, проходит через половину длины магнита, выходит через скользящий контакт и возвращается в неподвижную проволоку. В этом случае магнит получает непрерывное вращательное движение, никогда не достигая положения равновесия. Этот опыт был произведен Фарадеем.

Как же это возможно? Если бы мы имели два контура неизменной формы: один неподвижный C, другой C', способный вращаться около оси, то этот последний никогда не мог бы получить непрерывное вращательное движение. В самом деле, существует электродинамический потенциал; поэтому необходимо существует положение равновесия: именно то, при котором потенциал принимает наибольшее значение.

Итак, непрерывное вращение возможно лишь в том случае, если контур C' состоит из двух частей: одной неподвижной, другой, способной вращаться вокруг оси, как это имеет место в опыте Фарадея. Следует отметить еще одно различие. Переход электричества с неподвижной части на подвижную или обратно может происходить или путем простого контакта (определенная точка подвижной части находится в постоянном соприкосновении с определенной точкой неподвижной части), или при помощи скользящего контакта (одна и та же точка подвижной части последовательно приходит в соприкосновение с различными точками неподвижной части).

Только во втором случае может иметь место непрерывное вращение. Вот что здесь происходит: система стремится достичь положения равновесия; но по мере ее перемещения скользящий контакт связывает подвижную часть все с новыми точками неподвижной части; благодаря этому меняются связи, а следовательно, и условия равновесия; положение равновесия, так сказать, убегает от системы, которая стремится его настичь, и в результате вращение может продолжаться без конца.

Ампер допускает, что действие контура на подвижную часть C' будет совершенно таким же, как если бы неподвижной части C' не существовало, следовательно, как если бы ток, циркулирующий в подвижной части, был незамкнутым. Отсюда он заключает, что действие замкнутого тока на ток незамкнутый (или наоборот) может повести к непрерывному вращению. Но это заключение зависит от указанной мною выше гипотезы, не принятой Гельмгольцем.

4. *Взаимодействие двух незамкнутых токов.* Опытов, которые относились бы к взаимодействию двух незамкнутых токов или, в частности, двух элементов тока, совершенно не существует. Ампер прибег к гипотезе. Он предположил: 1) что взаимодействие двух элементов сводится к силе, направленной по прямой, их соединяющей; 2) что взаимодействие двух замкнутых токов представляется как результирующая взаимодействий их различных элементов, причем эти взаимодействия принимаются такими же, как если бы элементы имели независимое друг от друга существование.

Замечательно, что и здесь Ампер ввел эти две гипотезы, не заметив этого. Как бы то ни было, эти гипотезы, соединенные с опытами над замкнутыми токами, достаточны для полного определения закона взаимодействия двух элементов.

Но в этом случае бóльшая часть простых законов, найденных нами для случая замкнутых токов, теряет свою силу. Прежде всего, здесь не будет существовать электродинамического потенциала; впрочем, так было уже и в случае действия замкнутого тока на незамкнутый ток.

Далее, здесь, собственно говоря, нет и магнитной силы. В самом деле, выше мы дали для этой силы три различных определения:

1) по действию на магнитный полюс,

2) по действию пары, направляющей магнитную стрелку,

3) по действию на элемент тока.

Но в интересующем нас теперь случае эти три определения не только более не согласуются друг с другом, но каждое из них лишено смысла. В самом деле:

1) магнитный полюс уже не просто подвержен действию одной приложенной к нему силы; действительно, мы видели, что сила, представляющая действие элемента тока на полюс, приложена не к полюсу, а к элементу; впрочем, она может быть заменена силой, приложенной к полюсу, и парой;

2) пара, действующая на магнитную стрелку, больше не является простой направляющей парой, так

как момент ее относительно оси стрелки не равен нулю; эта пара разлагается на направляющую пару в собственном смысле и добавочную пару, стремящуюся произвести непрерывное вращение, о котором говорилось выше;

3) наконец, сила, действующая на элемент тока, не будет нормальной к этому элементу.

Иными словами, *единство магнитной силы исчезло.*

Это единство состоит в следующем. Две системы, оказывающие одинаковое действие на магнитный полюс, будут оказывать одинаковое действие и на бесконечно малую магнитную стрелку, и на элемент тока, если предположить, что они помещены в той же точке пространства, где был магнитный полюс. Это справедливо, если наши две системы состоят исключительно из замкнутых токов; но по Амперу это уже не будет верным, если в эти системы входят незамкнутые токи.

Достаточно, например, заметить, что если магнитный полюс помещается в A, а элемент тока в B, причем ток направлен вдоль прямой AB, то этот элемент, не оказывая никакого действия на полюс A, напротив, будет действовать как на помещенную в точке A магнитную стрелку, так и на помещенный в точке A элемент тока.

5. *Индукция.* Известно, что открытие электродинамической индукции последовало вскоре за бессмертными трудами Ампера.

Пока речь идет только о замкнутых токах, всякая трудность отсутствует. Гельмгольц заметил даже, что принцип сохранения энергии позволяет вывести законы индукции из электродинамических законов Ампера. Однако, как показал Бертран, при этом приходится допустить также некоторое число гипотез. Тот же принцип позволяет еще сделать подобный вывод в случае незамкнутых токов, хотя полученный при этом результат, конечно, нельзя подвергнуть контролю опыта ввиду невозможности осуществить подобные токи.

Но если бы мы пожелали приложить этот метод анализа к амперовой теории незамкнутых токов, то получили бы совершенно неожиданные результаты.

Прежде всего, индукцию нельзя было бы вывести из изменения магнитного поля по формуле, хорошо известной ученым и техникам; в самом деле, как мы сказали выше, здесь, собственно, нельзя говорить о магнитном поле.

Мало того. Пусть в контуре *C* наводится электродвижущая сила изменениями, происходящими в гальванической системе *S*. Если система *S* перемещается и деформируется произвольным образом, и силы токов в этой системе меняются по произвольному закону, но в конце концов система возвращается в свое начальное состояние, то естественно ожидать, что *средняя* электродвижущая сила, наведенная в контуре *C*, равна нулю.

Это справедливо, если контур *C* замкнут и если система *S* состоит исключительно из замкнутых токов; но это уже было бы неверно с точки зрения теории Ампера, если бы некоторые из токов были незамкнутыми. Таким образом, индукция уже не только не выражалась бы изменением магнитного силового потока в каком-либо обычном смысле слова, но и вообще она не могла бы быть представлена изменением чего бы то ни было.

II. Теория Гельмгольца. Я особенно подробно остановился на следствиях теории Ампера и на его трактовке действия незамкнутых токов. Трудно не признать парадоксального и искусственного характера предположений, которыми он руководствовался; невольно думается, что «так не должно быть».

Легко понять, почему Гельмгольц решился искать другие пути. Он отверг основную гипотезу Ампера, в силу которой взаимодействие двух элементов тока сводится к силе, направленной по прямой, их соединяющей. Он принял гипотезу, что элемент тока находится под действием не одной силы, а силы и пары. Именно это допущение вызвало его знаменитую полемику с Бертраном.

Гипотезу Ампера Гельмгольц заменяет следующей: два элемента тока всегда допускают электродинамический потенциал, зависящий исключительно от их положения и направления; работа сил взаимодействия между ними равна изменению этого потенциала. Таким образом, и Гельмгольц, подобно Амперу, не может обойтись без гипотезы, но он по крайней мере ясно выражает ее.

Обе теории дают согласующиеся результаты в единственном доступном для опыта случае замкнутых токов; во всех прочих случаях они расходятся.

Прежде всего, вопреки предположению Ампера, сила, которая как бы действует на подвижную часть замкнутого тока, не тождественна с силой, которая действовала бы на ту же подвижную часть, если бы она была изолирована и представляла собой незамкнутый ток. Представим себе снова наш прежний контур C', образованный подвижной проволокой $\alpha\beta$, скользящей по неподвижной проволоке; в расположении, которое только и осуществимо на опыте, подвижная часть $\alpha\beta$ не является изолированной, а составляет часть замкнутого контура. Когда она из положения AB переходит в $A'B'$, полный электродинамический потенциал изменяется по двум причинам: во-первых, он подвергается первому приращению потому, что потенциал $A'B'$ относительно контура C не одинаков с потенциалом AB; во-вторых, он подвергается второму приращению потому, что увеличиваются потенциалы элементов AA' и $B'B$ относительно C. Это *двоякое* приращение и представляет собой работу силы, которая как бы действует на часть AB. Если бы, напротив, $\alpha\beta$ была изолирована, то потенциал получил бы лишь первое приращение, и этим первым приращением измерялась бы работа силы, действующей на AB.

Во-вторых, не может быть непрерывного вращения без скользящего контакта; действительно, как мы видели при рассмотрении случая замкнутых токов, вращение — непосредственное следствие существования электродинамического потенциала.

Если в опыте Фарадея магнит укреплен неподвижно, а часть тока, внешняя относительно магнита, проходит по подвижной проволоке, то эта подвижная часть сможет прийти в непрерывное вращение. Но отсюда не следует, что если мы устраним контакты проволоки с магнитом и пропустим по ней *незамкнутый* ток, то проволока опять получит непрерывное вращение: действительно, я только что сказал, что *изолированный* элемент не испытывает такого же воздействия, как подвижный элемент, образующий часть замкнутого контура.

Другое отличие: действие замкнутого соленоида на замкнутый ток равно нулю, как показывает опыт, а также обе теории; действие же его на незамкнутый ток равно нулю по Амперу и не равно нулю по Гельмгольцу.

Отсюда — важное следствие. Выше мы дали три определения магнитной силы. Третье из них не имеет здесь никакого смысла, так как элемент тока не находится уже под действием одной силы. Точно так же теряет смысл и первое. В самом деле, что такое магнитный полюс? Это — конец чрезвычайно длинного линейного магнита. Магнит этот может быть заменен бесконечно длинным соленоидом. Для того чтобы определение магнитной силы имело смысл, нужно, чтобы действие незамкнутого тока на бесконечно длинный соленоид зависело только от положения конца этого соленоида, т. е. чтобы действие на замкнутый соленоид равнялось нулю. Но это, как мы только что видели, не оправдывается.

Зато ничто не мешает нам принять второе определение, основанное на измерении пары, направляющей магнитную стрелку. Но если мы его примем, то ни явления индукции, ни электродинамические явления не будут зависеть только от распределения силовых линий такого магнитного поля.

III. Трудности, возникающие в этих теориях. Теория Гельмгольца представляет собой шаг вперед по сравнению с теорией Ампера; однако и в ней устранены не все трудности. Как в той, так и в другой термин «магнитное поле» не имеет смысла; если же придать ему условный, более или менее искусственный смысл, то обиходные, столь привычные для всех электриков законы уже не будут иметь места; так, например, наведенная в проволоке электродвижущая сила уже не будет измеряться числом силовых линий, пересекаемых этой проволокой.

И наша антипатия не зависит только от того, что трудно отказаться от привычных закоснелых форм языка и мышления, происходит еще нечто иное. Если мы не верим в действие на расстоянии, то электродинамические явления необходимо объяснить изменениями среды. Эти изменения среды и называются магнитным полем; таким образом, электродинамические эффекты должны зависеть только от этого поля.

Все эти трудности лежат в гипотезе незамкнутых токов.

IV. Теория Максвелла. Таковы были трудности, возникшие в господствующих теориях, когда появился Максвелл, который устроил их одним росчерком пера. По его теории нет иных токов, кроме замкнутых.

Максвелл принимает, что если электрическое поле в диэлектрической среде начинает изменяться, то этот диэлектрик делается ареной особого явления, которое оказывает на гальванометр действие, подобное действию тока, и которое он назвал *током смещения*.

Если два противоположно заряженных проводника соединяются проволокой, то во время разряда в этой проволоке возникнет незамкнутый ток проводимости; но в это самое время в окружающем диэлектрике возбуждаются токи смещения, которые замыкают этот ток проводимости.

Как известно, теория Максвелла привела к объяснению оптических явлений, основой которых принимаются чрезвычайно быстрые электрические колебания.

В то время подобное воззрение было лишь смелой гипотезой, которая не могла опереться ни на какой опыт. Но к концу второго десятка лет идеи Максвелла получили экспериментальное подтверждение. Герцу удалось осуществить систему электрических колебаний, воспроизводящих все свойства света и отличающихся от световых лишь длиной волны, т. е. тем же, чем фиолетовый свет отличается от красного. В некотором роде Герц произвел синтез света. Каждый знает о беспроволочном телеграфе.

Нам могли бы сказать, что Герц не дал прямого подтверждения основной идеи Максвелла: способности тока смещения действовать на гальванометр. В известном смысле это справедливо; все непосредственно обнаруженное им сводится к тому, что электромагнитная индукция распространяется не мгновенно, как думали прежде, а со скоростью, равной скорости света.

Но предположение, что токов смещения не бывает, а индукция распространяется со скоростью света, *равносильно предположению*, что явления индукции производятся токами смещения, распространение же индукции происходит мгновенно. Это сразу не очевидно, но это доказывается при помощи анализа, говорить о котором здесь я не имею возможности.

V. Опыты Роуленда. Как я сказал выше, бывает два вида незамкнутых токов проводимости: это, во-первых, разрядные токи в конденсаторе или в любом проводнике; во-вторых, сюда относятся случаи, когда электрические заряды описывают замкнутый путь, перемещаясь в одной части контура посредством электропроводности, а в другой части — путем конвекции.

Для незамкнутых токов первого рода вопрос мог считаться решенным: они «замыкаются» токами смещения. Для токов второго типа решение представлялось еще более простым: если ток был замкнут, то это, казалось, могло происходить исключительно благодаря конвекционному току. Для этого достаточно было допустить, что «конвекционный ток», т. е. движущийся заряженный проводник, может действовать на гальванометр.

Однако опытного доказательства недоставало. На деле представлялось трудным получить достаточную силу тока, даже сколь возможно увеличивая заряды и скорости проводников.

Роуленд, чрезвычайно искусный экспериментатор, первый разрешил эту трудность. Он сообщил диску сильный электростатический заряд и весьма значительную скорость вращения. А статическая магнитная система, помещенная сбоку диска, обнаруживала отклонение. Этот опыт был сделан Роулендом дважды: один раз в Берлине, другой в Балтиморе; затем он был повторен Химстедтом. Оба эти физика считали возможным даже заявить, что им удалось произвести количественные измерения.

В течение двадцати лет этот закон Роуленда все физики признавали как бесспорный. Действительно, всё, по-видимому, его подтверждало. Искра, несомненно, производит магнитное действие, но разве не правдоподобно, что искровой разряд происходит благодаря тому, что от одного из электродов отрываются частицы и вместе с их зарядом переносятся к другому электроду? Не доказывается ли это уже спектром искры, в котором наблюдаются линии, принадлежащие металлу электрода? А в таком случае искра была бы настоящим конвекционным током.

С другой стороны, принимают, что в электролитах электричество переносится движущимися ионами. Следовательно, ток в электролите также был бы конвекционным; действует же он на магнитную стрелку.

То же самое верно для катодных лучей: Крукс рассматривал их как поток весьма тонкой материи, заряженной отрицательным электричеством и несущейся с весьма большой скоростью, иными словами, видел в них конвекционные токи и этот взгляд в наше время общепринят. Но катодные лучи отклоняются магнитом. По закону действия и противодействия они в свою очередь должны отклонять магнитную стрелку.

Правда, Герц считал, будто ему удалось доказать, что катодные лучи не переносят отрицательного электричества и не действуют на магнитную стрелку. Но Герц ошибался; сначала Перрену удалось собрать электричество, переносимое этими лучами, существование которого Герц отрицал (по-видимому, немецкий ученый был введен в заблуждение действием тогда еще неизвестных X-лучей); наконец, в самое последнее время с очевидностью было доказано и действие катодных лучей на магнитную стрелку.

Итак, все перечисленные явления, рассматриваемые как конвекционные токи,— искры, токи в электролитах, катодные лучи — одинаково действуют на гальванометр в соответствии с законом Роуленда.

VI. Теория Лоренца. Вскоре пошли еще далее. По теории Лоренца сами токи проводимости представляют настоящие конвекционные токи: электричество находится в постоянной и неразрывной связи с некоторыми материальными частицами, так называемыми *электронами*; гальванический ток состоит в переносе электронов вдоль проводника; проводники отличаются от изоляторов тем, что первые пропускают сквозь себя электроны, тогда как последние задерживают их движение.

Теория Лоренца очень заманчива; она очень просто истолковывает ряд явлений, которые не могли удовлетворительно объяснить прежние теории, в том числе и теория Максвелла в ее первоначальной форме. К числу этих явлений относятся: аберрация света, частичное увлечение световых волн, магнитная поляризация, явление Зеемана.

Существовали еще некоторые возражения. Явления, происходящие в некоторой системе, казалось, должны были зависеть от абсолютной скорости перемещения центра тяжести этой системы, что противоречит развиваемой нами идее относительности пространства. Липпман, поддерживаемый Кремьё, придал этому возражению наглядную и остроумную форму. Представим себе два заряженных проводника, движущихся поступательно с одной и той же скоростью. Они находятся в относительном покое; однако так как каждый из них равносилен конвекционному току, то они должны притягиваться, а, измерив это притяжение, можно было бы определить их абсолютную скорость.

Нет, возражали последователи Лоренца, таким образом была бы измерена не абсолютная скорость их, а скорость их *относительно эфира*; принцип относительности таким образом не нарушается. Впрочем, впоследствии Лоренц дал ответ, более тонкий и гораздо более удовлетворительный.

Каковы бы ни были эти последние возражения, здание электродинамики казалось окончательно построенным, по крайней мере в своих главных чертах; все представлялось в самом удовлетворительном виде; теории Ампера и Гельмгольца, созданные для случая несуществующих незамкнутых токов, казалось, сохраняли только чисто исторический интерес.

История этих изменений (в теориях электродинамики) не менее поучительна для нас; она показывает нам, какие ловушки встречает ученый на своем пути и как он может надеяться их избежать.

Глава XIV *)

КОНЕЦ МАТЕРИИ [1])

Одно из самых удивительных открытий, о котором физики объявили в эти последние годы, состоит

---

*) Настоящая глава добавлена в позднейших изданиях. Публикуется по изданию: Poincaré H., La Science et l'Hypothèse — Paris· Flammarion, 1923. — *Примеч. ред*

[1]) См. Évolution de la Matière, par Gustave le Bon.

в том, что материи не существует. Поспешим сказать, что это открытие еще не окончательное. Существенным свойством материи является ее масса, ее инерция. Масса — это то, что всюду и всегда остается постоянной, это то, что продолжает существовать, когда химическое преобразование изменяет все чувственно воспринимаемые качества материи, так что кажется, что мы имеем дело с разными телами. Следовательно, если обнаруживается, что масса, инерция материи в действительности ей не свойственна, что это — приобретенная роскошь, которой она себя украшает, что эта масса, константа по определению, все же сама подвержена изменению, то можно сказать, что материи не существует. А именно об этом и было объявлено.

Скорости, которые мы могли наблюдать до сих пор, очень малы; даже у небесных тел, которые далеко оставляют позади все наши автомобили, они едва равны 60 или 100 километрам в секунду; правда, скорость света в 3000 раз больше, но свет — не материя, которая перемещается, это — возмущение, совершающее свой путь сквозь относительно неподвижную субстанцию, подобно тому как это делает волна на поверхности океана. Все наблюдения, произведенные с такими малыми скоростями, показывали постоянство массы, и никто не задавался вопросом, будет ли то же самое при гораздо бóльших скоростях. Рекорд Меркурия, планеты наиболее быстрой, побили бесконечно малые величины; я хочу сказать о движении корпускул, создаваемых катодными лучами и лучами радия. Утверждают, что эти излучения появляются в результате настоящей бомбардировки молекул. Снарядами, выбрасываемыми в этой бомбардировке, являются заряды отрицательного электричества, в этом можно убедиться, наблюдая, как это электричество накапливается в банке Фарадея. В силу того, что эти снаряды обладают зарядом, они отклоняются как магнитным полем, так и электрическим; сравнение этих отклонений позволяет нам узнать их скорость и отношение их заряда к их массе.

Так вот эти измерения свидетельствуют, с одной стороны, что их скорость огромна, что она составляет от одной десятой до одной третьей части скорости света, в тысячу раз больше скорости планеты, а с другой стороны, их заряд очень значителен сравнительно с их массой. Каждая корпускула, находящаяся в движении, представляет собой, следовательно, заметный электрический ток. Но мы знаем, что электрические токи обладают некоторым видом особой инерции, названной *самоиндукцией*. Однажды возникнув, ток стремится сохраниться; в силу этого, когда, желая прервать ток, разрезают проводник, в месте разрыва появляются брызжущие искры. Таким образом, ток стремится сохранить свою интенсивность, подобно тому как находящиеся в движении тела стремятся сохранить свою скорость. Следовательно, наша катодная корпускула будет сопротивляться причинам, стремящимся изменить ее скорость, по двум основаниям: прежде всего в силу своей инерции, а затем в силу самоиндукции, потому что любое изменение скорости будет в то же самое время и изменением интенсивности соответствующего тока. Следовательно, корпускула, или, как говорят, *электрон*, обладает двумя типами инерции: инерцией механической и инерцией электромагнитной.

Абрахам и Кауфман, один — теоретик, а другой — экспериментатор, объединили свои усилия для того, чтобы определить, какую долю составляет каждая из них. Для решения этой проблемы они должны были допустить одну гипотезу; они полагали, что все отрицательные электроны идентичны, что они несут один и тот же заряд, существенно постоянный, что различия, которые наблюдаются между ними, происходят единственно от различия скоростей, которыми они обладают. Когда скорость меняется, реальная масса, масса механическая, остается постоянной, это следует из самого ее определения; но электромагнитная инерция, которая способствует образованию кажущейся массы, увеличивается со скоростью соответственно определенному закону. Следовательно, должна существовать связь между скоростью и отношением массы к заряду; величины эти, как мы уже говорили, можно подсчитать, наблюдая за отклонением лучей под действием магнита или электрического поля; а изучение этого отношения позволит определить долю обоих видов инерций. Полученный результат оказался неожиданным: *реальная масса равна нулю*. Это верно, что все началось с гипотезы, но согласованность теоретической кривой и экспериментальной кривой достаточно велика, чтобы эту гипотезу признать весьма правдоподобной.

Таким образом, эти отрицательные электроны, собственно говоря, не имеют массы; если они кажутся наделенными массой, то это потому, что они не могут изменить скорости без возмущения эфира. Их кажущаяся инерция есть лишь заимствование, она связана не с ними, а с эфиром.

Но отрицательные электроны не исчерпывают материю; стало быть вне их имеется настоящая материя, наделенная собственной инерцией. Существуют некоторые излучения — таковы каналовые лучи Гольдштейна, альфа-лучи радия, — которые также представляют собой множество снарядов, но снарядов, заряженных положительно; что же эти положительные электроны также лишены массы? Сказать о них этого нельзя, поскольку по сравнению с отрицательными электронами они слишком тяжелы и обладают слишком небольшой скоростью.

И в то же время обе гипотезы остаются приемлемыми: или эти электроны более тяжелые и потому, кроме электромагнитной заимствованной инерции, они обладают чисто механической инерцией, и в таком случае они представляют собой истинную материю; или же они не обладают обычной массой, и если кажутся нам более тяжелыми, то это потому, что они очень малы. Я говорю очень малы, хотя это может показаться парадоксальным, потому что в этой концепции корпускула будет только пустотой в эфире, единственно реальном, единственно наделенном инерцией.

До сих пор материя не является лишним компромиссом; мы еще можем принять первую гипотезу или даже считать, что, кроме положительных и отрицательных электронов, существуют нейтральные атомы. Недавние исследования Лоренца вынуждают нас принять эту последнюю возможность. Мы увлекаемся очень быстрым движением Земли, не должны ли при этом переносе изменяться оптические и электрические явления? В течение долгого времени в это верили и предполагали, что наблюдения обнаружат различия, связанные с ориентацией аппаратуры по отношению к движению Земли. Но этого не было, самые тщательные измерения не обнаружили ничего подобного. Эти опыты могли бы оправдать общую неприязнь ко всем физикам; если бы был обнаружен какой-то эффект, то можно было бы узнать не только относительное движение Земли по отношению к Солнцу, но и ее абсолютное движение в эфире. И вот многие люди были огорчены, так как полагали, что любой опыт может дать больше, чем только относительное движение; они с бо́льшей охотой примирились бы с верой в то, что материя не имеет массы.

Однако не следует слишком удивляться получению отрицательных результатов; они противоречили теориям, которым обучали, но они потворствовали глубокому инстинкту, предшествовавшему всем этим теориям. Еще нужно было последовательно модифицировать эти теории, чтобы привести их в гармонию с фактами. Это и сделал Фицджеральд с помощью удивительной гипотезы: он предположил, что все тела испытывают сокращение приблизительно на одну стомиллионную часть в направлении движения Земли. Совершенная сфера превращается при этом в сплющенный эллипсоид, при обращении она деформируется так, что малая ось эллипсоида всегда остается параллельной скорости Земли. Поскольку измерительные инструменты подвергаются тем же самым деформациям, что и объекты, подлежащие измерению, то ничего нельзя заметить, если только в голову не придет идея определить время, которое требует свет для прохождения вдоль длины объекта.

Эта теория описывает наблюдаемые факты. Но этого недостаточно; наступит день, когда наблюдения станут еще более точными; не будут ли результаты на этот раз положительными, не позволят ли эти измерения определить абсолютное движение Земли? Лоренц так не думал; он верил, что такое решение никогда не будет возможным; обычный инстинкт у всех физиков выражается в том, что постоянно испытываемые ими неудачи являются для них достаточной гарантией. Но попробуем рассмотреть эту невозможность в качестве обобщенного закона природы; примем его как постулат. Какие из этого вытекают следствия? Именно это и отыскивал Лоренц, и он нашел, что все атомы, все положительные и отрицательные электроны должны иметь изменяющуюся со скоростью инерцию и как раз соответственно таким законам. Таким образом, материальные атомы будут образованы из положительных электронов, малых и тяжелых, и отрицательных электронов, больших и легких, и если ощущаемая нами материя не кажется наэлектризованной, то это потому, что оба сорта электронов почти равны по числу. И те, и другие лишены массы и имеют только заимствованную инерцию. В этой системе нет истинной материи, она — не более как только узел (особая точка) в эфире.

По Ланжевену материя уподоблялась сжижающемуся эфиру и теряла свои свойства; когда такая материя перемещается, это уже не будет одна и та же расплывающаяся масса, проходящая сквозь эфир; сжижение мало-помалу будет распространяться ко все новым частям эфира, в то время как позади сжиженные вначале частицы снова восстанавливают свое первоначальное состояние. Такая материя в своем движении не сохраняла бы своей идентичности.

Вот какой вопрос стоял некоторое время. Но вот Кауфман опубликовал результаты новых опытов. Отрицательный электрон, скорость которого огромна, должен был бы испытать сокращение Фицджеральда и отношение между скоростью и массой оказалось бы измененным. Новые же опыты не подтверждают это предположение. Но тогда все построение разваливается, и материя снова восстанавливает свое право на существование.

Но опыты — дело тонкое, и окончательное заключение сегодня было бы преждевременным.

ЦЕННОСТЬ НАУКИ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Отыскание истины должно быть целью нашей деятельности; это — единственная цель, которая достойна ее. Несомненно, сначала мы должны постараться облегчить человеческие страдания, но — зачем? Отсутствие страданий—это идеал отрицательный, который вернее был бы достигнут с уничтожением мира. Если мы все более и более хотим избавить человека от материальных забот, так это затем, чтобы он мог употребить свою отвоеванную свободу на исследование и созерцание истины.

Однако истина иногда пугает нас. В самом деле, мы знаем, что она порой обманчива, что это — какой-то призрак, который на мгновение показывается перед нами только затем, чтобы беспрестанно исчезать, что надо гнаться за ней все дальше и дальше и что никогда невозможно достигнуть ее. А между тем, чтобы действовать, нужно остановиться ('αν'αγκη στῆαι[1])), как сказал какой-то грек — Аристотель или кто-то другой. Мы знаем также, как она бывает подчас жестока, и мы спрашиваем себя, не является ли иллюзия не только более утешительной, но и более надежной. Ведь она дает нам уверенность. Если бы исчезла иллюзия, осталась ли бы у нас надежда и хватило ли бы у нас мужества действовать? Так, запряженная на выездке лошадь, наверное, отказалась бы двигаться вперед, если бы ей предварительно не завязали глаза. И потом — чтобы отыскивать истину, нужно быть независимым, вполне независимым. Напротив того, если мы хотим действовать, если хотим быть сильными, нам бывает нужно соединяться. Вот почему многие из нас пугаются истины;

[1]) Нужно остановиться (*греч.*). — *Примеч. ред.*

они видят в ней причину слабости; и все же не надо бояться истины, потому что только она прекрасна.

Если я говорю здесь об истине, то нет сомнения, что я прежде всего хочу говорить об истине научной; но вместе с тем я хочу говорить и об истине моральной, по отношению к которой то, что зовется справедливостью, есть только один из видов. Кажется, что я злоупотребляю словами и под одним и тем же названием соединяю две вещи, не имеющие ничего общего; что научная истина, которая доказывается, ни под каким видом не может сближаться с истиной моральной, которая чувствуется.

Тем не менее я не могу отделять их, и те, которые любят одну, не могут не любить и другую. Для того чтобы найти одну, так же как и для того, чтобы найти другую, нужно постараться полностью освободить свою душу от предубеждения и пристрастия, нужно достигнуть абсолютной искренности. Эти оба рода истины, однажды открытые, приводят нас в одинаковое восхищение; и та и другая, лишь только их усмотрели, сияют одним и тем же светом, так что нужно или видеть их, или закрыть глаза. Наконец, обе они и привлекают нас и ускользают от нас; они никогда не фиксированы жестко: когда кто-нибудь подумает, что достиг их,— сейчас же увидит, что еще нужно идти, и тот, кто стремится постичь их, осужден никогда не знать покоя.

Следует прибавить, что тот, кто боится одной, побоится и другой; ибо такие люди во всяком деле прежде всего заботятся о последствиях. Одним словом, я сближаю две истины, потому что одинаковые мотивы заставляют нас любить их и одинаковые мотивы побуждают нас бояться их.

Если мы не должны бояться моральной истины, то тем более не следует страшиться истины научной. Прежде всего, она не может быть во вражде с моралью. У морали и науки свои собственные области, которые соприкасаются друг с другом, но не проникают друг друга. Первая показывает нам, какую цель мы должны преследовать; вторая — при данной цели — открывает нам средства к достижению ее. Следовательно, они никогда не могут оказаться в противоречии друг с другом, так как они не могут сталкиваться. Не может быть аморальной науки, точно так же, как не может быть научной морали.

Но если иные боятся науки, то главным образом потому, что она не может дать нам счастья. Это очевидно — она не может нам дать его, и можно спросить себя, не меньше ли страдает животное, чем человек. Но можем ли мы жалеть о том земном рае, где звероподобный человек был поистине бессмертен, потому что он не знал, что должен умереть? Если вкусили яблока, то никакое страдание не в силах заставить позабыть его вкус, и к нему возвращаются всегда. Могло ли быть иначе? Ведь это почти то же, что спрашивать, мог ли бы тот, кто видел, стать слепым и не чувствовать тоски по свету. Итак, человек не может быть счастлив наукой, но теперь он еще менее может быть счастлив без нее.

Но если истина есть единственная цель, которая заслуживает того, чтобы к ней стремиться, то можем ли мы надеяться достигнуть ее? Вот в чем позволительно сомневаться. Читатели моей книжки «Наука и гипотеза» уже знают, что я думаю об этом. Истина, которую нам позволено предвидеть, не совсем то, что большинство людей называют этим именем. Значит ли это, что наше самое законное и самое настойчивое стремление есть в то же время самое тщетное? Или же мы можем наперекор всему приближаться к истине с какой-нибудь стороны? Вот это и следует рассмотреть. Прежде всего, каким орудием располагаем мы для завоевания истины? Не может ли человеческий разум — или, вводя ограничение, разум ученого — быть до бесконечности разнообразным? Можно было бы написать много томов, все же не исчерпав этого предмета; я только слегка коснулся его на нескольких страницах. Что ум математика мало похож на ум физика или натуралиста, с этим согласятся все; но математики сами не похожи друг на друга; одни признают только неумолимую логику, другие обращаются к интуиции и в ней видят единственный источник открытий. Это может быть основанием для сомнения. Могут ли даже математические теоремы представиться в одном и том же свете столь несходным между собой умам? Истина, которая не является одной и той же для всех, есть ли истина? Но, всматриваясь ближе, мы видим, как эти столь различные между собой работники сотрудничают в одном общем деле, которое не могло бы совершаться без их содействия. И это уже ободряет нас.

Затем нужно исследовать те кадры, в которые кажется нам заключенной природа и которые мы называем временем и пространством. В «Науке и гипотезе» я уже показал, сколь относительно их значение; не природа навязывает их нам, а мы налагаем их на природу, потому что мы находим их удобными; но я говорил только о пространстве и главным образом о пространстве, так сказать, количественном, т. е. о тех математических отношениях, совокупность которых составляет геометрию. Необходимо показать, что о времени можно сказать то же, что и о пространстве, и что то же самое можно сказать и о «качественном пространстве»; в частности, необходимо исследовать, почему мы приписываем пространству три измерения. Поэтому да простят мне, если я еще раз вернусь к этим важным вопросам.

Не есть ли математический анализ, главным предметом которого является изучение этих пустых кадров, только бесполезная игра ума? Он может дать физику только удобный язык; не является ли это посредственной услугой, без которой, строго говоря, можно было бы обойтись; и даже не следует ли опасаться, что этот искусственный язык будет завесой, опущенной между реальностью и глазом физика? Далеко не так; без этого языка бо́льшая часть глубоких аналогий вещей осталась бы навсегда неизвестной для нас, и мы никогда не знали бы о той внутренней гармонии мира, которая, как мы увидим, есть единственная настоящая объективная реальность.

Наилучшее выражение этой гармонии — это закон; закон есть одно из самых недавних завоеваний человеческого ума; существуют еще народы, которые живут среди непрерывного чуда и которые не удивляются этому. Напротив, мы должны были бы удивляться закономерности природы. Люди просят своих богов доказать их существование чудесами; но вечное чудо — в том, что чудеса не совершаются беспрестанно. Потому-то мир и божественен, что он полон гармонии. Если бы он управлялся произволом, то что́ доказывало бы нам, что он не управляется случаем?

Этим завоеванием закона мы обязаны астрономии, и оно-то и создает величие этой науки, еще большее, чем материальное величие изучаемых ею предметов.

Итак, вполне естественно, что небесная механика была первым образцом математической физики; но потом эта наука развилась; она еще развивается и развивается очень быстро. Теперь уже необходимо изменить в некоторых пунктах ту картину, которую я набросал в 1900 г. и которая составила две главы «Науки и гипотезы». На конференции, состоявшейся на выставке в Сент-Луисе в 1904 г., я попытался измерить пройденный путь; читатель увидит дальше, каков был результат этого исследования.

Оказалось, что прогресс науки подвергает опасности самые устойчивые принципы — даже те принципы, которые рассматриваются как фундаментальные. Однако ничто не доказывает, что их не удастся сохранить; и если будет осознано только их несовершенство, они будут еще существовать в преобразованной форме. Движение науки нужно сравнивать не с перестройкой какого-нибудь города, где старые здания немилосердно разрушаются, чтобы дать место новым постройкам, но с непрерывной эволюцией зоологических видов, которые беспрестанно развиваются и в конце концов становятся неузнаваемыми для простого глаза, но в которых опытный глаз всегда откроет следы предшествовавшей работы прошлых веков. Итак, не нужно думать, что вышедшие из моды теории были бесплодны и не нужны.

Если бы мы остановились тут, мы нашли бы на этих страницах некоторые основания поверить в ценность науки, но еще больше оснований не верить в нее; и мы оставались бы еще под гнетом сомнения. Надо теперь изложить дело по существу.

Некоторые преувеличили роль условных соглашений в науке; они дошли до того, что стали говорить, что закон и даже научный факт создаются учеными. Это значит зайти слишком далеко по пути номинализма. Нет, научные законы — не искусственные изобретения; мы не имеем никаких оснований считать их случайными, хотя мы и не могли бы доказать, что они не таковы.

Но та гармония, которую человеческий разум полагает открыть в природе, существует ли она вне человеческого разума? Без сомнения — нет; невозможна реальность, которая была бы полностью независима от ума, постигающего ее, видящего, чувствующего ее. Такой внешний мир, если бы даже он и существовал, никогда не был бы нам доступен. Но то, что мы называем объективной реальностью, в конечном счете есть то, что общо нескольким мыслящим существам и могло бы быть общо всем [1]). Этой общею стороной, как мы увидим, может быть только гармония, выражающаяся математическими законами.

Следовательно, именно эта гармония и есть единственная объективная реальность, единственная истина, которой мы можем достигнуть; а если я прибавлю, что универсальная гармония мира есть источник всякой красоты, то будет понятно, как мы должны ценить те медленные и тяжелые шаги вперед, которые мало-помалу открывают ее нам.

---

[1]) Разъяснение этого заблуждения Пуанкаре дано в статье «Анри Пуанкаре и наука начала XX века», с. 680.— *Примеч. ред.*

Часть I

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Глава I

ИНТУИЦИЯ И ЛОГИКА В МАТЕМАТИКЕ

I

Изучая труды великих и даже рядовых математиков, невозможно не заметить и не различить две противоположные тенденции — или скорее два рода совершенно различных умов. Одни прежде всего заняты логикой; читая их работы, хочется думать, что они шли вперед лишь шаг за шагом, по методу какого-нибудь Вобана, который предпринимает свою атаку против крепости, ничего не вверяя случаю. Другие вверяют себя интуиции и подобно смелым кавалеристам авангарда сразу делают быстрые завоевания, впрочем, иногда не совсем надежные.

Не предмет, о котором они трактуют, внушает им тот или другой метод. Если часто говорят о первых, что они *аналитики*, и если других называют *геометрами*, то это не мешает одним оставаться аналитиками даже тогда, когда они работают в геометрии, точно так же как другим быть геометрами, если даже они занимаются чистым анализом. Самая природа их ума делает из них сторонников логики или интуиции и они не в силах отрешиться от нее, когда приступают к новому предмету.

И не воспитание развило в них одну из этих двух склонностей и заглушило другую. Математиками родятся, а не делаются, и, по-видимому, также родятся геометрами или родятся аналитиками.

Мне хотелось бы привести примеры, и в них конечно не будет недостатка; но, чтобы подчеркнуть контраст, я хотел бы начать с крайнего примера; пусть мне простят, если я возьму для него двух еще находящихся в живых математиков.

Так, Мере хочет доказать, что двучленное уравнение всегда имеет корень, или, говоря просто, что всегда можно разделить угол на части. Если есть истина, которую мы могли бы узнать непосредственной интуицией, то она здесь. Кто станет сомневаться, что угол всегда можно разделить на какое угодно число равных частей? Мере думает не так; в его глазах это предложение нисколько не очевидно, и чтобы доказать это, ему нужно несколько страниц.

Напротив, посмотрите на Клейна: он изучает один из самых абстрактных вопросов теории функций; требуется узнать, всегда ли существует на данной поверхности Римана функция, допускающая данные сингулярности. Что делает знаменитый немецкий геометр? Он заменяет поверхность Римана металлической поверхностью, электропроводность которой меняется по известным законам, и соединяет две точки ее с двумя полюсами элемента. Ток, говорит он, непременно пройдет, и распределение этого тока по поверхности определит функцию, особыми свойствами которой будут именно те, которые предусмотрены условием.

Без сомнения, Клейн знает, что он дал здесь лишь наглядный очерк; и все-таки он не задумался опубликовать его; вероятно, он надеялся найти здесь если не строгое доказательство, то по крайней мере как бы нравственную уверенность. Логик с ужасом отбросил бы подобную концепцию или — вернее — ему и не нужно было бы ее отбрасывать, потому что она никогда не могла бы возникнуть в его уме.

Позвольте мне еще сравнить двух людей, которые составляют гордость французской науки; они недавно умерли, но давно уже стяжали себе бессмертие. Я говорю о Бертране и Эрмите. Они воспитывались в одной школе и в одно и то же время; получили одно воспитание и подверглись одним и тем же влияниям; и однако какое различие — не только в их сочинениях, но и в их преподавании, в их манере говорить, в самой их внешности! Эти две личности запечатлелись в памяти всех их учеников неизгладимыми чертами; воспоминание о них еще свежо у всех тех, кто имел счастье слушать их лекции; нам легко восстановить его.

Когда говорил Бертран, он все время находился в движении; то он как будто боролся с каким-то внешним врагом, то движением руки чертил фигуры, которые он изучал. Очевидно, он видел их и хотел изобразить, поэтому он и прибегал к жесту. Что касается Эрмита, то это совершенная противоположность; глаза его как бы избегали соприкосновения с миром; не вне, а внутри искал он образ истины.

Между немецкими геометрами той же эпохи два имени пользуются особенной славой; это имена тех двух ученых, которые основали общую теорию функций, Вейерштрасса и Римана. Вейерштрасс все сводит к рассмотрению рядов и к их аналитическим преобразованиям; можно сказать, он превращает анализ как бы в продолжение арифметики; можно перелистать все его сочинения и не встретить в них ни одного чертежа. Напротив, Риман постоянно прибегает к помощи геометрии; каждая концепция его есть образ, который никто не может позабыть, раз его смысл понят.

Возьмем примеры более свежие. Ли был интуитивистом. При чтении его трудов могли возникнуть сомнения, но все они исчезали после беседы с ним; сейчас же было видно, что он мыслит в образах. Ковалевская была логиком.

У наших студентов мы замечаем те же самые различия; одни больше любят решать задачи «аналитически», другие — «геометрически». Первые не способны «представлять в пространстве», последние скоро утомились бы и запутались бы в длинных вычислениях. Оба рода умов одинаково необходимы для прогресса науки; как логики, так и интуитивисты создали великие вещи, которых не могли бы создать другие. Кто осмелится сказать, что, на его взгляд, было бы лучше, если бы Вейерштрасс никогда не писал, или что он предпочел бы, чтобы Римана не существовало? Итак и анализ, и синтез играют каждый свою законную роль. Но интересно поближе рассмотреть, какое место в истории науки отводится одному и какое — другому.

II

Интересная вещь! Если мы перечитаем сочинения древних, у нас явится склонность причислить всех их к интуитивистам. И однако природа всегда остается одной и той же; мало вероятно, что она только в нашу эпоху начала создавать расположенные к логике умы.

Если бы мы могли снова вникнуть в ход тех идей, которые господствовали в их время, мы узнали бы, что многие из древних геометров по своему направлению были аналитиками. Например, Евклид воздвиг здание науки, в котором его современники не могли найти недостатка. В этом обширном построении — каждая часть которого все же была обусловлена интуицией — мы можем еще и теперь без особого труда признать творчество логика.

Изменились не умы, а идеи; интуитивные умы остаются все теми же, но их читатели потребовали от них больше уступок.

Какова же причина этой эволюции?

Нетрудно обнаружить ее. Интуиция не может дать нам ни строгости, ни даже достоверности — это замечается все больше и больше.

Приведем несколько примеров. Мы знаем, что существуют непрерывные функции, не имеющие производных. Ничто так не подрывает доверие к интуиции, как эта внушенная нам логикой теорема. Наши отцы не преминули бы сказать: «очевидно, что любая непрерывная функция имеет производную, потому что любая кривая имеет касательную».

Почему же интуиция может обмануть нас в этом случае? А потому, что когда мы стараемся вообразить кривую, мы не можем представить себе ее без толщины; то же самое — когда мы представляем себе прямую, мы видим ее в форме прямолинейной полосы известной ширины. Мы отлично знаем, что эти линии не имеют толщины; мы силимся вообразить их все более и более тонкими и таким образом приблизиться к пределу; до некоторой степени нам это удается, но мы никогда не достигнем этого предела.

Теперь ясно, что мы всегда будем в состоянии представить себе эти две узкие полосы — одну прямолинейную, другую криволинейную — в таком положении, что они будут слегка захватывать друг друга, не пересекаясь.

Таким образом, мы поневоле придем, — если не будем предупреждены строгим анализом, — к заключению, что кривая всегда имеет касательную.

Для другого примера я возьму принцип Дирихле, на котором основано так много теорем математической физики; теперь он доказывается самыми строгими, но очень длинными рассуждениями; напротив, прежде довольствовались одним кратким пояснением. Определенный интеграл, зависящий от произвольной функции, никогда не может обращаться в нуль. Отсюда заключали, что он должен иметь минимум. Недостаток этого рассуждения непосредственно очевиден для нас, потому что мы употребляем абстрактный термин «функция» и потому что мы освоились со всеми особенностями, которые могут иметь функции, когда это слово понимается в самом общем значении.

Но этого бы не было, если бы мы пользовались конкретными образами — если бы, например, смотрели на эту функцию как на электрический потенциал; можно было бы справедливо утверждать, что электростатическое равновесие может быть достигнуто. Однако, может быть, сравнение из физики возбудило бы некоторое смутное недоверие. Но если бы постараться перевести рассуждение на язык геометрии, средний между языком анализа и физики, то этого недоверия, без сомнения, не возникало бы и, таким образом, может быть, можно было бы еще теперь обмануть многих непредубежденных читателей.

Итак, интуиция не дает нам достоверности. Вот почему должна была возникнуть эволюция; теперь посмотрим, как она возникла.

Вскоре заметили, что строгость не могла бы иметь места в рассуждениях, если не ввести ее сначала в определения.

Долгое время предметы, которыми занимаются математики, были по большей части плохо определены; думали, что знают их, потому что представляли себе их при помощи чувств или воображения; но получался только грубый образ, а не ясная идея, на которой можно было бы строить рассуждение.

Вот сюда-то прежде всего логики и должны были направить свои усилия.

Точно то же произошло и для иррационального числа.

Смутная идея непрерывности, которой мы обязаны интуиции, разрешилась в сложную систему неравенств, касающуюся целых чисел.

Благодаря ей трудности при переходе к пределу или при рассмотрении бесконечно малых окончательно устраняются.

Теперь в анализе остаются только целые числа или конечные и бесконечные системы целых чисел, связанных между собой сетью отношений равенства или неравенства.

Математика, как говорят, арифметизировалась.

III

Прежде всего возникает вопрос: закончилась ли эта эволюция?

Достигли ли мы наконец абсолютной строгости? Ведь на каждой стадии эволюции наши предки также верили в то, что достигли ее. Если они ошибались, то не ошибаемся ли и мы подобно им?

Мы надеемся уже не прибегать в наших рассуждениях к интуиции; философы скажут нам, что это иллюзия. Чистая логика всегда приводила бы нас только к тавтологии; она не могла бы создать ничего нового; сама по себе она не может дать начало никакой науке.

Эти философы правы в одном смысле: для того чтобы создать геометрию или какую бы то ни было науку, нужно нечто другое, чем чистая логика. Для обозначения этого другого у нас нет иного слова, кроме слова «интуиция». Но сколько различных идей скрывается под одним и тем же словом?

Сравним такие четыре аксиомы:

1) Две величины, равные третьей, равны между собой.

2) Если теорема справедлива для 1 и если доказывается, что она справедлива для $n+1$, когда справедлива для n, то она будет справедлива для всех целых чисел.

3) Если точка C лежит на прямой между A и B, а точка D между A и C, то точка D будет лежать между A и B.

4) Через одну точку можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой.

Все четыре аксиомы должны быть приписаны интуиции, и однако же первая является выражением одного из правил формальной логики; вторая — настоящее синтетическое суждение à priori, это — основание строгой математической индукции; третья есть обращение к воображению; четвертая — скрытое определение.

Интуиция не основывается неизбежно на свидетельстве чувств; чувства скоро оказались бы бессильными; мы не можем, например, представить себе тысячеугольника и однако же интуитивно рассуждаем о многоугольниках вообще, а они включают в себя как частный случай и тысячеугольник.

Вам известно, что подразумевал Понселе под *принципом непрерывности*. То, что справедливо для действительной величины, говорил Понселе, должно быть справедливо и для мнимой; то, что справедливо для гиперболы, асимптоты которой действительны, должно быть поэтому справедливо и для эллипса, асимптоты которого мнимые. Понселе был одним из самых интуитивных умов в этом веке; он был страстным интуитивистом и чуть ли не гордился этим; он видел в принципе непрерывности одну из самых смелых своих концепций, и, однако, этот принцип не покоился на свидетельстве чувств — уподоблять гиперболу эллипсу было скорее противоречием этому свидетельству. Здесь имело место лишь какое-то поспешное инстинктивное обобщение, что, впрочем, я не хочу отстаивать.

Итак, мы имеем несколько родов интуиции; сначала обращение к чувствам и воображению; затем обобщение посредством индукции, так сказать, срисованное с приемов экспериментальных наук; наконец, мы имеем интуицию чистого числа, ту интуицию, из которой вышла вторая из только что приведенных мною аксиом и которая может дать начало настоящему математическому умозаключению.

Две первые не могут дать достоверности, выше я показал это на примерах; но кто станет серьезно сомневаться относительно третьей, кто станет сомневаться в арифметике?

В новейшем анализе, — если пожелаем взять на себя труд быть строгими, — находят место лишь силлогизмы и обращения к этой интуиции чистого числа, единственной интуиции, которая не может обмануть нас. Можно сказать, что ныне достигнута абсолютная строгость.

IV

Философы приводят еще другое возражение: «То, что вы выигрываете в строгости, — говорят они, — вы теряете в объективности. Вы можете подняться к вашему логическому идеалу, только порвав те связи, которые соединяют вас с реальностью. Ваша наука непогрешима, но она может оставаться такою, только замыкаясь в свою раковину и запрещая себе всякое сношение с внешним миром. При малейшем же применении ей надо выходить оттуда».

Я хочу, например, доказать, что такое-то свойство принадлежит такому-то объекту, понятие которого кажется мне сначала неопределимым, потому что оно интуитивно. Я сначала затрудняюсь или бываю должен удовлетвориться приближенными доказательствами; наконец, я решаюсь дать моему объекту точное определение — то, которое позволяет мне установить это свойство безукоризненным образом.

«Что же после, — говорят философы, — ведь остается еще доказать, что отвечающий этому определению объект есть тот же самый, который открыт вам интуицией; или еще, что такой-то реальный и конкретный объект, сходство которого с вашей интуитивной идеей вы думаете узнать непосредственно, отвечает вашему новому определению. Только тогда вам будет можно утверждать, что он имеет данное свойство. Вы только переместили затруднение».

Это неточно; затруднение не перемещено, оно разделено. Предложение, которое нужно было обосновать, в действительности состояло из двух различных истин, которые не сразу были отличены друг от друга. Первая — математическая истина, и теперь она строго обоснована. Вторая — истина экспериментальная. Только опыт может научить нас, что такой-то реальный, конкретный объект отвечает или не отвечает такому-то абстрактному определению. Эта вторая истина не доказывается математически, но она и не может доказываться, точно так же, как не могут доказываться эмпирические законы физических и естественных наук. Было бы безрассудно требовать большего.

Но разве не большой шаг вперед — различить то, что долгое время неправильно смешивали?

Не значит ли это, что нужно совсем откинуть это возражение философов? Этого я не хочу сказать; сделавшись строгой, математическая наука получает искусственный характер, который поражает всех; она забывает свое историческое происхождение; видно, как вопросы могут разрешаться, но уже не видно больше, как и почему они ставятся.

Это указывает нам на то, что недостаточно одной логики; что наука доказывать не есть еще вся наука и что интуиция должна сохранить свою роль как дополнение — я сказал бы, как противовес или как противоядие логики.

Я уже имел случай указать то место, какое должна иметь интуиция в преподавании математических наук. Без нее молодые умы не могли бы проникнуться пониманием математики; они не научились бы любить ее и увидели бы в ней лишь пустое словопрение; без нее особенно они никогда не сделались бы способными применять ее.

Но теперь я хотел бы говорить прежде всего о роли интуиции в самой науке. Если она полезна для студента, то она еще более полезна для творческого ума ученого.

V

Мы ищем реальность, но что такое реальность?

Физиологи учат нас, что организмы образуются из клеточек; химики прибавляют, что сами клеточки образуются из атомов. Значит ли это, что эти атомы или клеточки составляют реальность или по крайней мере единственную реальность? Тот типичный способ, по которому упорядочиваются эти клеточки и который порождает единство индивидуума, не есть ли также реальность, гораздо более интересная, чем реальность отдельных элементов, и стал ли бы думать какой-нибудь натуралист, что он достаточно знает слона, если бы он всегда изучал это животное только под микроскопом?

Но в математике есть нечто аналогичное. Логик, так сказать, разлагает каждое доказательство на множество элементарных операций; когда рассмотрят одну за другой эти операции и констатируют, что каждая из них правильна, можно ли думать, что поймут истинный смысл доказательства? Поймут ли его даже тогда, когда напряжением памяти будут в состоянии повторить это доказательство, воспроизведя все эти элементарные операции в том же порядке, в каком их разместил изобретатель?

Очевидно, нет, мы еще не овладеем всецело реальностью; то нечто, что́ создает единство доказательства, совсем ускользнет от нас.

Чистый анализ предоставляет в наше распоряжение много приемов, гарантируя нам их непогрешимость; он открывает нам тысячу различных путей, которым мы смело можем вверяться; мы уверены, что не встретим там препятствий; но какой из всех этих путей скорее всего приведет нас к цели? Кто скажет нам, какой следует выбрать? Нам нужна способность, которая позволяла бы видеть цель издали, а эта способность есть интуиция. Она необходима для исследователя в выборе пути, она не менее необходима и для того, кто идет по его следам и хочет знать, почему он избрал его.

Если вы присутствуете при шахматной партии, чтобы понять ее, вам недостаточно будет знать правила ходов фигур. Это только позволило бы вам знать, что каждый ход сделан по правилам игры, а это преимущество, конечно, не имело бы большой цены. Однако в таком положении был бы читатель математической книги, если бы он был только логиком. Совсем другое дело — понимать партию; это значит знать, почему игрок выдвигает одну фигуру раньше другой, которую он мог бы подвинуть, не нарушая правил игры. Это значит подметить скрытую мысль, которая делает из этого ряда последовательных ходов нечто вроде организованного целого. Тем более эта способность необходима для самого игрока, т. е. для изобретателя.

Оставим это сравнение и вернемся к математике. Посмотрим, что произошло, например, с идеей непрерывной функции. Вначале это был только чувственный образ, например образ непрерывной черты, проведенной мелом на черной доске. Потом мало-помалу она стала очищаться: скоро воспользовались ею для построения сложной системы неравенств, которая воспроизводила, так сказать, все черты первообраза; когда это построение было окончено, тогда освободили ее от «строительных лесов», отбросив то грубое представление, которое служило ей некоторое время подпорой, а теперь стало бесполезным; не осталось больше ничего, кроме самого построения, безупречного в глазах логика. Однако же если бы первообраз совершенно исчез из нашей памяти, как бы мы угадали, по какой прихоти были построены так, одно за другим, эти неравенства?

Вы найдете, может быть, что я злоупотребляю сравнениями; однако позвольте мне сделать еще одно. Вы, конечно, видели те тонкие соединения кремнистых игл, которые образуют скелет известных губок. Когда органическая материя исчезла, остается только хрупкое, изящное кружево. Правда, тут только кремнезем, но что интересно, так это та форма, которую принял этот кремнезем, и мы не можем понять ее, если мы не знаем живой губки, которая именно и придала ему такую форму. Так, старые интуитивные понятия наших отцов даже тогда, когда мы оставили эти понятия, придают еще форму логическим построениям, которыми мы заменили их.

Этот вид целого необходим для изобретателя; он одинаково необходим и для того, кто хочет действительно понять изобретателя; может ли логика дать нам его?

Нет; названия, которое дают ей математики, было бы достаточно для того, чтобы доказать это. В математике логика называется *анализом*, анализ же значит *разделение, рассечение.* Поэтому она не может иметь никакого другого орудия, кроме скальпеля и микроскопа.

Таким образом, логика и интуиция играют каждая свою необходимую роль. Обе они неизбежны. Логика, которая одна может дать достоверность, есть орудие доказательства; интуиция есть орудие изобретательства.

VI

Но едва только я сформулировал этот вывод, как меня охватывает сомнение.

Вначале я различал два рода математических умов: одни — логики и аналитики, другие — интуитивисты и геометры. Но ведь и аналитики также были изобретателями. Имена, которые я привел в начале этой главы, избавляют меня от необходимости настаивать на этом.

Здесь есть какое-то, по крайней мере кажущееся, противоречие, которое необходимо разъяснить.

Прежде всего, думаем ли мы, что эти логики всегда шли от общего к частному, как, казалось бы, побуждали их к этому законы формальной логики? Но так они не могли бы расширить границы науки; научное завоевание можно делать только с помощью обобщения.

В одной из глав «Науки и гипотезы» я имел случай исследовать природу математического умозаключения; я показал, как это умозаключение, не переставая быть безусловно строгим, могло поднимать нас от частного к общему при помощи процесса, который я назвал *математической индукцией*.

Благодаря этому-то процессу аналитики и двигали вперед науку и если разобраться в самых деталях их доказательств, то можно в любой момент найти его там рядом с классическим силлогизмом Аристотеля.

Итак, мы уже видим, что аналитики — не просто искусные мастера силлогизмов, вроде схоластов.

С другой стороны, можно ли поверить тому, что они всегда шли шаг за шагом, не имея пред своими взорами той цели, которой они хотели достигнуть? Им нужно было угадывать дорогу, которая привела бы их к этой цели, они нуждались в путеводителе.

Этот путеводитель — прежде всего аналогия.

Например, одно из любимых рассуждений аналитиков основано на применении возрастающих функций. Известно, что оно помогло разрешению многих проблем; тогда в чем состоит роль изобретателя, который хочет применить его к новой проблеме? Нужно прежде всего, чтобы он признал аналогию этого вопроса с теми вопросами, которые были уже разрешены с помощью этого метода; потом нужно, чтобы он заметил, чем отличается этот новый вопрос от других, и чтобы он вывел отсюда те видоизменения, которым должен подвергнуться метод.

Но как подметить эти аналогии и различия?

В только что приведенном мною примере они почти всегда очевидны, но я мог бы подыскать другие примеры, где они гораздо более скрыты, и, для того чтобы открыть их, часто требуется незаурядная проницательность.

Чтобы не упустить из виду этих скрытых аналогий, т. е. чтобы иметь возможность изобретения, аналитики должны, без помощи чувств и воображения, иметь непосредственное ощущение того, что создает единство умозаключения, что, так сказать, создает его душу и внутреннюю жизнь.

Когда беседовали с Эрмитом, он никогда не прибегал к чувственному образу, и однако вы скоро заметили бы, что самые абстрактные сущности были для него живыми существами. Он не видел их, но чувствовал, что они не представляют собой искусственного подбора, что у них есть какой-то принцип внутреннего единства.

Но, скажут, здесь опять интуиция. Станем ли мы заключать отсюда, что сделанное вначале различение было только кажущимся, что есть только один род умов и все математики — интуитивисты, по крайней мере те, которые способны изобретать?

Нет, наше различение соответствует некоторой действительности. Выше я сказал, что есть несколько видов интуиции. Я сказал, насколько интуиция чистого числа — та, из которой может вытекать строгая математическая индукция, — отличается от чувственной интуиции, для которой работает воображение в собственном смысле.

Менее ли глубока, чем кажется с первого взгляда, пропасть, которая разделяет их? Окажется ли при внимательном рассмотрении, что эта чистая интуиция сама по себе не может обойтись без помощи чувств? Это дело психолога и метафизика, и я не стану обсуждать этот вопрос. Но довольно и того, что дело подлежит сомнению, чтобы я имел право признавать и утверждать существенное различие между двумя родами интуиции; у них не один и тот же объект и они, по-видимому, пользуются двумя различными способностями нашей души; можно сказать, что это два прожектора, наведенные на два чуждые друг другу мира.

Интуиция чистого числа, интуиция чистых логических форм как раз озаряет и направляет тех, кого мы назвали *аналитиками*.

Она-то и позволяет им не только доказывать, но еще и изобретать. Через нее-то они и подмечают сразу общий план логического здания, и это — без всякого вмешательства со стороны чувств.

Отказываясь от помощи воображения, которое, как мы видели, не всегда бывает непогрешимо, они могут двигаться вперед, не боясь ошибиться. Счастливы же те, которые могут обойтись без этой поддержки! Мы должны удивляться им; но как они редки!

Итак, среди аналитиков есть изобретатели, но их немного.

Большинство из нас, если бы захотели смотреть вдаль с помощью одной чистой интуиции, тотчас почувствовали бы головокружение. Наша слабость нуждается в более прочной поддержке, и, несмотря на исключения, о которых мы только что говорили, тем не менее верно то, что чувственная интуиция есть самое обыкновенное орудие изобретения в математике. По поводу последних моих размышлений выдвигается вопрос, для которого у меня нет времени ни решить его, ни даже изложить с надлежащими подробностями.

Уместно ли сделать новое разделение и отличать среди аналитиков тех, которые пользуются главным образом этой чистой интуицией, и тех, для которых на первом месте стоит формальная логика?

Например, Эрмит, которого я неоднократно упоминал, не может быть причислен к геометрам, которые применяют чувственную интуицию; но он также и не логик в собственном смысле этого слова. Он не скрывает своего отвращения к чисто дедуктивным процессам, которые исходят от общего и направляются к частному.

Глава II

ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕНИ [1])

I

Пока мы не выходим из области сознания, понятие времени относительно ясно. Мы не только без труда отличаем настоящее ощущение от воспомина-

[1]) См. сноску на с. 80. — *Примеч. ред.*

ния прошлых ощущений или предвидения будущих, но мы вполне знаем, что́ мы хотим сказать, когда утверждаем, что из двух явлений сознания, которые у нас сохранились в памяти, одно было раньше другого или же что из двух предвидимых явлений сознания одно будет раньше другого.

Когда мы говорим, что два факта сознания одновременны, этим мы хотим сказать, что они глубоко проникают друг друга, так что анализ не может разделить их, не искажая их.

Порядок, в котором мы размещаем явления сознания, не терпит никакого произвола. Он предписан нам, и мы ничего не можем изменить в нем.

Я должен прибавить только одно замечание. Для того чтобы какая-нибудь совокупность ощущений сделалась воспоминанием, которое могло бы быть распределено во времени, нужно, чтобы она перестала быть актуальной, чтобы она утратила для нас значение своей бесконечной сложности, иначе она оставалась бы актуальной. Нужно, чтобы она, так сказать, кристаллизовалась вокруг центра ассоциаций идей, который будет как бы меткой. Только тогда мы можем распределять во времени наши воспоминания, когда они потеряют, таким образом, всякую жизненность, — подобно тому, как ботаник распределяет в своем гербарии цветы, когда они уже высушены. Но число меток может быть только конечным. При учете этого психологическое время было бы прерывным. Откуда же возникает представление, что между двумя некоторыми мгновениями существуют еще и другие мгновения? Мы распределяем наши воспоминания во времени, но мы знаем, что продолжают пребывать и пустые промежутки. Как это могло бы быть, если бы время не было формой, ранее существовавшей в нашем сознании? Как мы узнали бы о наличии пустых промежутков, если возбуждать наше сознание они в состоянии не иначе, как только через свое содержание?

II

Но это не все; мы хотим вложить в эту форму не только явления нашего сознания, но и явления, ареной которых служат другие сознания. Более того, мы хотим вложить в нее физические факты, то́, чем мы заселяем пространство, которое ни одно сознание не воспринимает непосредственно. Это необходимо, потому что без этого наука не могла бы существовать. Одним словом, нам дано психологическое время, и мы хотим создать научное и физическое время. Здесь-то и начинается трудность, или скорее трудности, потому что их две.

Вот перед нами два сознания, как два непроницаемые друг для друга мира. По какому праву мы хотим заключить их в одну и ту же форму, измерить их одной и той же мерой? Не похоже ли это на то, что мы хотим мерить длину с помощью грамма или взвесить с помощью метра?

И потом, почему мы говорим об измерении? Мы, может быть, знаем, что такой-то факт предшествует такому-то другому, но не знаем, *насколько* он предшествует.

Итак, есть две трудности:

Первая. Можем ли мы преобразовать психологическое время, которое есть время качественное, во время количественное?

Вторая. Можем ли мы измерить одной и той же мерой факты, которые совершаются в различных мирах?

III

Первая трудность была замечена уже давно; она была предметом долгих дискуссий, и можно сказать, что этот вопрос разрешен.

Мы не имеем непосредственной интуиции равенства двух промежутков времени. Тот, кто думает, что обладает такой интуицией, обманут иллюзией.

Когда я говорю: от двенадцати часов дня до часа проходит то же время, что и от двух до трех, какой смысл имеет это утверждение?

При малейшем размышлении обнаруживается, что оно само по себе не имеет никакого смысла. Оно получит только тот смысл, какой мне угодно будет ему придать с помощью определения, допускающего конечно, известную степень произвола.

Психологи могли бы обойтись без такого определения; физики, астрономы — не могли бы; посмотрим, как они справились с этим.

Для измерения времени они пользуются маятником и принимают по определению, что все циклы колебаний этого маятника имеют равную длительность. Но это только первое приближение; температура, сопротивление воздуха, барометрическое давление изменяют ход маятника. Если бы мы избавились от этих причин, то добились бы гораздо большего приближения, но все же это было бы только приближение. Новые причины, которыми мы до сих пор пренебрегали,— электрические, магнитные или иные — не замедлили бы внести свои мало заметные возмущения.

В самом деле, самые лучшие часы время от времени требуют поправки, и эти поправки делаются с помощью астрономических наблюдений; уславливаются, что звездные часы отмечают один и тот же час, когда одна и та же звезда проходит через меридиан. Другими словами, именно звездные сутки, т. е. время оборота Земли, и есть постоянная единица времени. По новому определению, заменяющему то, которое было взято из колебаний маятника, допускается, что два полных оборота Земли вокруг своей оси имеют одинаковую длительность.

Однако астрономы не удовлетворились и этим новым определением. Многие из них думают, что морские приливы и отливы действуют как тормоз на наш земной шар и что вращение Земли становится все более и более замедленным. Таким образом, можно было бы объяснить видимое ускорение движения Луны, движение которой оказывалось быстрее, чем это допускает теория, потому что наши часы, т. е. Земля, отставали бы.

IV

Все это, скажут, маловажно; без сомнения, наши измерительные инструменты несовершенны, но довольно и того, что мы можем представить некий совершенный инструмент. Этого идеала невозможно достигнуть, но достаточно будет понять его и, таким образом, ввести строгость в определение единицы времени.

К сожалению, этой строгости здесь нет. Какой же постулат мы неявно допускаем, когда для измерения времени мы пользуемся маятником?

Тот, что *длительность двух идентичных явлений одна и та же*; или, если угодно, что одни и те же причины требуют одного и того же времени, чтобы произвести одни и те же действия.

На первый взгляд это — хорошее определение равенства двух длительностей.

Однако будем осторожны. Не может ли случиться так, что в один прекрасный день опыт опровергнет наш постулат?

Объяснюсь: я предполагаю, что в некотором пункте мира происходит явление α, приводящее в конце известного времени к следствию α'. В другом пункте мира, весьма удаленном от первого, происходится явление β, которое влечет за собой следствие β'. Явления α и β одновременны, так же как и следствия α' и β'.

В позднейшую эпоху явление α повторяется почти в тождественных условиях, и *одновременно* в очень отдаленном пункте мира также повторяется почти в тех же условиях явление β.

Следствия α' и β' тоже повторяются. Я предполагаю, что следствие α' будет иметь место значительно раньше следствия β'.

Если бы опыт засвидетельствовал такую картину, наш постулат оказался бы опровергнутым.

В самом деле, опыт учил бы нас, что первая длительность $\alpha\alpha'$ равна первой длительности $\beta\beta'$ и что вторая длительность $\alpha\alpha'$ короче второй длительности $\beta\beta'$. Напротив, наш постулат требовал бы, чтобы обе длительности $\alpha\alpha'$ были равны между собой — точно так же, как и обе длительности $\beta\beta'$. Равенство и неравенство, выведенные из опыта, были бы несовместимы с двумя равенствами, которые получены из постулата.

А можем ли мы утверждать, что только что высказанные мной гипотезы абсурдны? Они ничуть не нарушают закона противоречия. Без сомнения, они не могли бы осуществиться, не нарушив закона достаточного основания. Но, для того чтобы оправдать столь фундаментальное определение, я предпочел бы другую гарантию.

V

Но это не все.

В физической реальности следствие вызывает не одна причина; его возникновению способствует множество различных причин, причем нет никакого средства различить вклад каждой из них.

Физики стараются найти это различие; но они находят его лишь приближенно, и, какого бы прогресса они ни достигли, они всегда будут находить его только приближенно. Приближенно верно, что колебание маятника обусловлено единственно притяжением Земли; но, строго говоря, даже притяжение Сириуса влияет на маятник.

При этих условиях ясно, что причины, вызвавшие некоторое следствие, будут воспроизводиться всегда лишь приближенно.

А в таком случае нам следует изменить на постулат и наше определение. Вместо того чтобы говорить:

«Одним и тем же причинам требуется одно и то же время, чтобы произвести одни и те же следствия», мы должны сказать: «Почти идентичным причинам требуется почти одно и то же время, чтобы произвести почти одни и те же следствия».

Итак, наше определение есть не более чем приближенное.

Кроме того, как вполне справедливо замечает Калинон в недавнем мемуаре (Calinon A. Étude sur les diverses grandeurs. — Paris: Gauthier-Villars, 1897): «Одно из обстоятельств, сопровождающих любое явление, есть скорость вращения Земли; если эта скорость меняется, то при воспроизведении этого явления она составляет обстоятельство, которое уже не остается тождественным себе. Но предполагать, что эта скорость вращения постоянна, значит предполагать, что мы умеем измерять время».

Следовательно, наше определение еще не удовлетворительно; оно, конечно, не совпадает с тем, которое неявно принимают вышеупомянутые астрономы, когда они утверждают, что вращение Земли идет, все замедляясь.

Какой смысл имеет в их устах это утверждение? Мы можем понять это, только проанализировав те доводы, которые они приводят в пользу своего предложения.

Прежде всего они говорят, что приливное трение, производя теплоту, должно поглощать живую силу. Поэтому они ссылаются на принцип живых сил или принцип сохранения энергии.

Потом они говорят, что вековое ускорение Луны, вычисленное по закону Ньютона, было бы меньше, чем выведенное из наблюдений, если бы не вводили поправку на замедление вращения Земли.

Итак, они ссылаются на закон Ньютона. Другими словами, они определяют длительность следующим образом: время должно быть определено так, чтобы оправдывались закон Ньютона и закон живых сил.

Закон Ньютона есть истина экспериментальная; как таковая она только приближенна, а это указывает на то, что мы имеем пока еще только приближенное определение.

Если мы предположим теперь, что принимается другой способ измерения времени, то опыты, на которых основан закон Ньютона, тем не менее отчасти сохранят свой смысл. Только формулировка закона будет иной, потому что она будет выражена на другом языке; очевидно, она будет гораздо менее простой.

Поэтому определение, неявно принимаемое астрономами, может быть резюмировано так:

Время должно быть определено так, чтобы уравнения механики были возможно более просты.

Другими словами, нет способа измерения времени, который был бы истиннее другого; общепринятый способ измерения является только более *удобным*.

Мы не имеем права сказать о двух часах, что одни идут хорошо, а другие плохо; мы можем сказать только, что выгоднее положиться на показания первых.

На трудность, которую мы только что рассмотрели, как я сказал, часто указывалось; среди новейших работ, где затрагивается этот вопрос, я укажу, кроме небольшого сочинения Калинона, на курс механики Андрада.

VI

Вторая трудность привлекала до сих пор гораздо меньше внимания; однако она вполне аналогична предыдущей; и даже с логической точки зрения я должен был бы прежде говорить о ней.

В двух различных сознаниях происходят два психологических явления; когда я говорю, что они одновременны, то что я хочу этим сказать?

Когда я говорю, что некоторое физическое явление, которое происходит вне всякого сознания, предшествует психологическому явлению или следует за ним, то что я хочу этим сказать?

В 1572 г. Тихо Браге заметил в небе новую звезду. Огромный взрыв произошел на некотором весьма отдаленном светиле; но он произошел задолго перед тем; потребовалось по меньшей мере двести лет, прежде чем свет, испущенный этой звездой, достиг нашей Земли. Стало быть, этот взрыв предшествовал открытию Америки.

Итак, когда я говорю это, когда я рассматриваю это гигантское явление, которое не имело, быть может, ни одного свидетеля, — потому что на спутниках этой звезды может быть не было обитателей, — когда я говорю, что это явление предшествовало образованию в сознании Христофора Колумба зрительного представления острова Эспаньолы, то что я хочу этим сказать?

Достаточно немного поразмыслить, чтобы понять, что все эти утверждения сами по себе не имеют никакого смысла.

Они получают смысл только в силу соглашения [1].

VII

Прежде всего мы должны спросить себя, как могла явиться мысль ввести в один и тот же кадр столько непроницаемых друг для друга миров.

Мы хотим представить себе внешний мир, и только такой ценой мы надеемся узнать его.

---

[1]) См. по этому поводу статью «Анри Пуанкаре и наука начала XX века», с. 681—682. — *Примеч. ред.*

Этим представлением мы никогда не будем обладать, мы знаем это: слишком велика наша немощь.

Мы хотим по крайней мере, чтобы можно было постигнуть тот бесконечный разум, для которого было бы возможно это представление — что-то вроде великого сознания, которое все видело бы и все распределяло бы *в своем времени*, подобно тому как мы распределяем в *нашем времени* то немногое, что мы видим.

Такая гипотеза очень груба и несовершенна, потому что этот высший разум был бы только полубогом; бесконечный в одном смысле, он был бы ограничен в другом, потому что он имел бы лишь несовершенное воспоминание о прошлом; и у него не могло бы быть другого, так как без этого все воспоминания были бы для него одинаково настоящими и для него не существовало бы времени.

Однако когда мы говорим о времени для всего, что происходит вне нас, не принимаем ли мы бессознательно эту гипотезу; не ставим ли мы себя на место этого несовершенного бога; и сами атеисты не ставят ли себя на то место, которое занимал бы бог, если бы он существовал?

То, что я сейчас говорил, может быть, показывает нам, почему мы постарались ввести в один и тот же кадр все физические явления. Но это нельзя считать определением одновременности, потому что этот гипотетический разум, если бы даже он существовал, был бы для нас непостижим.

Итак, надо искать что-то иное.

VIII

Обычные определения, которые годятся для психологического времени, нас уже не могли бы удовлетворить. Два одновременных психологических факта столь тесно связаны между собой, что анализ не может их разделить, не искажая их. То же ли самое бывает для двух физических фактов? Не ближе ли мое настоящее к моему вчерашнему прошлому, чем к настоящему Сириуса?

Говорили также, что два факта должны рассматриваться как одновременные, если порядок их последовательности может быть по желанию переставлен. Очевидно, что это определение не может быть пригодно для двух физических фактов, которые совершаются на больших расстояниях друг от друга, и,— что касается их,— непонятно даже то, что́ такое может представлять эта обратимость; впрочем, надо было бы определить сначала самую последовательность.

IX

Итак, попытаемся отдать себе отчет в том, что подразумевается под одновременностью или предшествованием, а для этого разберем некоторые примеры.

Я написал письмо; потом это письмо было прочитано другом, которому я его послал. Вот два факта, имевшие ареной два различных сознания. В то время, как я писал это письмо, я обладал его зрительным образом, и в свою очередь мой друг получил тот же самый образ, читая это письмо.

Хотя оба эти фактора происходят в непроницаемых друг для друга мирах, я не колеблясь, смотрю на первый факт как на предшествовавший второму, потому что я верю, что он является причиной последнего.

Я слышу гром и заключаю, что произошел электрический разряд; я, не колеблясь, смотрю на это физическое явление как на предшествовавшее звуковому представлению, возникшему в моем сознании, потому что я верю, что оно было причиной последнего.

Следовательно, вот правило, которому мы следуем,— единственное правило, которому мы можем следовать: когда одно явление кажется нам причиной другого, мы смотрим на него как на предшествовавшее.

Итак, через причину мы определяем время; но очень часто два факта являются связанными постоянным соотношением, и тогда, как узнаем мы, какой из них — причина и какой — следствие? Мы допускаем, что предшествующий факт есть причина другого факта — последующего. Но тогда причину мы определяем через время. Как освободиться от этого petitio principii [1])? Мы говорим то *post hoc, ergo propter hoc* [2]), то *propter hoc, ergo post hoc* [3]); можно ли выйти из этого заколдованного круга?

X

Посмотрим же, не как достигают выхода из него,— ибо вполне достигнуть этого нельзя,— но как ищут этого выхода.

Я совершаю произвольный акт A и потом испытываю ощущение D, которое я считаю следствием акта A; с другой стороны, я заключаю на каком-нибудь основании, что это следствие не является непосредственным, но что вне моего сознания совершилось два факта B и C, свидетелем которых я не был, и совершились так, что B было следствием A, C — следствием B, и D — следствием C.

Но почему так? Если я имею основание считать четыре факта A, B, C, D связанными между собой причинной связью, то почему надо располагать их в причинном порядке $ABCD$ и в то же время в хронологическом порядке $ABCD$ скорее, чем во всяком другом?

Ясно, что в акте A я ощущал активность, тогда как, испытывая ощущение D, я пассивен. Поэтому я считаю A начальной причиной и D — конечным следствием; поэтому я и помещаю A в начале цепи и D в конце; но почему ставить B перед C, а не C перед B?

Когда предлагается такой вопрос, обыкновенно отвечают: хорошо известно, что B есть причина C, потому что *всегда* видят B происходящим прежде C. Оба эти явления, когда есть свидетель, протекают в известном порядке; если аналогичные явления происходят без свидетеля, то нет основания нарушать этот порядок.

Это так; но здесь надо быть осторожным; мы никогда не знаем физических явлений B и C непосред-

[1]) Аргумент, основанный на выводе из положения, которое само требует доказательства (*лат.*). — *Примеч. ред.*

[2]) После этого, следовательно, по причине этого (*лат.*). — *Примеч. ред.*

[3]) По причине этого, следовательно, после этого (*лат.*). — *Примеч. ред.*

ственно; то, что мы знаем,— это отношения B' и C', вызванные соответственно явлениями B и C. Наше сознание непосредственно говорит нам, что B' предшествует C', и мы *принимаем*, что B и C следуют в том же порядке.

Это правило на самом деле кажется весьма естественным, и однако его приходится часто нарушать. Мы слышим раскат грома только спустя несколько секунд после электрического разряжения облака. Из двух громовых ударов — одного отдаленного, другого близкого — не может ли первый предшествовать второму, хотя раскат второго мы услышали прежде раската первого?

XI

Новая трудность: имеем ли мы достаточное право говорить о причине явления? Если все части Вселенной в известной степени взаимосвязаны, то любое явление будет не следствием единственной причины, а результатом бесконечного множества причин; оно, как часто говорят, есть следствие состояния Вселенной в предшествующий момент.

Как выразить правила, применяемые к столь сложным обстоятельствам? И однако только ценой учета этих обстоятельств правила могут стать общими и строгими.

Чтобы нам не растеряться в этой бесконечной сложности, сделаем более простое предположение; рассмотрим три светила, например Солнце, Юпитер и Сатурн, а для большей простоты будем считать их сжатыми в материальные точки и изолированными от остального мира.

Достаточно знать положения и скорости трех тел в данный момент, чтобы определить положения и скорости их в следующий момент, а следовательно, и в какой угодно момент. Положения их в момент t определяют их положения в момент $t+h$, а также их положения в момент $t-h$.

Даже более того; положение Юпитера в момент t, взятое вместе с положением Сатурна в момент $t+a$, определяет положение Юпитера и Сатурна в какой угодно момент. Совокупность положений, которые занимают Юпитер в момент $t+\varepsilon$ и Сатурн в момент

$t + a + \varepsilon$, связана с совокупностью положений, которые занимают Юпитер в момент t и Сатурн в момент $t + a$, законами, столь же точными, как закон Ньютона, хотя и более сложными.

Но тогда почему же считать одну из этих совокупностей причиною другой, что привело бы к заключению об одновременности момента t Юпитера и момента $t + a$ Сатурна?

Здесь могут иметь место только соображения удобства и простоты, которые и в самом деле очень важны.

XII

Но перейдем к примерам менее искусственным; чтобы дать отчет в определении, которое неявно допускается учеными, посмотрим на их работу и поищем, на основании каких правил они определяют одновременность.

Я возьму два простых примера: измерение скорости света и определение долгот.

Когда астроном говорит мне, что такое-то звездное явление, видимое в его телескопе в настоящий момент, произошло, однако, пятьдесят лет тому назад, я пытаюсь понять, что́ он хочет сказать, и прежде всего спрашиваю у него, откуда он это знает, т. е. как он измерил скорость света.

Он начал с того, что *принял* скорость света постоянной и, в частности, одинаковой во всех направлениях. Это и есть постулат, без которого не могло бы быть произведено никакое измерение этой скорости. Этот постулат никогда нельзя будет проверить непосредственно на опыте; последний мог бы его опровергнуть, если бы результаты различных измерений не согласовывались между собой. Мы должны считать себя счастливыми тем, что этого противоречия нет и что те небольшие расхождения, которые могут возникнуть, легко объяснимы.

Во всяком случае этот постулат, согласующийся с законом достаточного основания, был принят всеми; для меня важно то, что он дает нам новое правило для отыскания одновременности, совершенно отличное от того, которое мы изложили выше.

Допустив этот постулат, посмотрим, как была измерена скорость света. Известно, что Рёмер пользовался затмениями спутников Юпитера и отыскивал, насколько событие опаздывало сравнительно с предсказанием.

Но как получалось это предсказание? При помощи астрономических законов, например закона Ньютона.

Нельзя ли было бы так же хорошо объяснить наблюдаемые факты, если бы приписать скорости света величину, несколько отличную от принятой, и допустить, что закон Ньютона является лишь приближенным? Пришлось бы только заменить закон Ньютона другим, более сложным.

Таким образом, для скорости света принимается такая величина, чтобы астрономические законы, совместимые с этой величиной, были по возможности наиболее простыми.

Когда моряки или географы определяют долготу, им приходится решать как раз ту проблему, которая занимает нас; они должны, не находясь в Париже, вычислять парижское время.

Как они делают это?

Или они берут выверенный в Париже хронометр. Качественная проблема одновременности сводится к количественной проблеме измерения времени. Мне не надо говорить о трудностях, присущих этой последней проблеме, потому что я достаточно настаивал на них выше.

Или же они наблюдают такое астрономическое явление, как затмение Луны, и допускают, что это явление замечается одновременно во всех точках земного шара.

Это не совсем верно, потому что распространение света не мгновенно; если бы требовалась абсолютная точность, то нужно было бы сделать поправку, применяя некоторое сложное правило.

Или же, наконец, они пользуются телеграфом. Прежде всего, ясно, что получение сигнала, например, в Берлине происходит позже отправления того же сигнала из Парижа. Это — правило причины и следствия, разобранное выше.

Но насколько позже? Обычно длительностью передачи пренебрегают и оба события считаются одновременными. Но, соблюдая строгость, следовало бы вводить еще небольшую поправку при помощи сложного вычисления; на практике она не вводится, потому что она была бы гораздо менее значительна, чем ошибки наблюдения; но этим не устраняется теоретическая необходимость ее учета с нашей точки зрения, т. е. с точки зрения строгого определения.

В конце этого исследования я хочу отметить два обстоятельства: 1) применяемые правила весьма разнообразны; 2) трудно отделить качественную проблему одновременности от количественной проблемы измерения времени; при этом безразлично, будем ли мы пользоваться хронометром или учитывать скорость передачи, например скорость света, ибо невозможно измерить скорость, не *измерив* времени.

XIII

Пора сделать выводы.

Мы не обладаем непосредственно ни интуицией одновременности, ни интуицией равенства двух промежутков времени.

Если мы думаем, что имеем эту интуицию, то это иллюзия.

Мы заменяем ее некоторыми правилами, которые применяем, почти никогда не отдавая себе в том отчета.

Но какова природа этих правил?

Нет правила общего, нет правила строгого; есть множество ограниченных правил, которые применяются в каждом отдельном случае.

Эти правила не предписаны нам и можно было бы позабавиться, изобретая другие; однако невозможно было бы уклониться от них, не усложнив сильно формулировку законов физики, механики и астрономии. Следовательно, мы выбираем эти правила не потому, что они истинны, а потому, что они наиболее удобны, и мы можем резюмировать их так:

«Одновременность двух событий или порядок их следования, равенство двух длительностей должны определяться так, чтобы формулировка естественных законов была по возможности наиболее простой. Другими словами, все эти правила, все эти определения — только плод неосознанного стремления к удобству».

Глава III

ПОНЯТИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Введение

В моих прежних статьях, посвященных пространству, я особенно останавливался на проблемах, выдвигаемых неевклидовой геометрией, оставляя почти совсем в стороне другие, более трудные для разрешения вопросы, как, например, вопросы, касающиеся числа измерений. Все геометрии, которые я рассматривал, имели, таким образом, общее основание — континуум трех измерений,— которое было одно и то же для всех и различалось лишь вычерчиваемыми в нем фигурами или результатами предпринимаемых в нем измерений.

В этом первоначально аморфном континууме можно вообразить сеть линий и поверхностей, затем можно условиться считать клетки этой сети равными между собой и только после такого условия этот континуум, сделавшись измеримым, становится евклидовым или неевклидовым пространством. Стало быть, из этого аморфного континуума может получиться или то или другое из двух пространств — так же, как на белом листе бумаги можно начертить либо прямую, либо круг.

В пространстве мы знаем прямолинейные треугольники, сумма углов которых равна двум прямым; но мы знаем также криволинейные треугольники, сумма углов которых меньше двух прямых. Существование одних не более сомнительно, чем существование других. Дать сторонам первых название прямых — значит принять евклидову геометрию; дать сторонам последних название прямых — значит принять неевклидову геометрию. Поэтому вопрос, какую геометрию следует принимать, равносилен вопросу: какой линии следует дать название прямой.

Очевидно, что опыт не может разрешить подобный вопрос; ведь мы, например, не обратимся к опыту за решением вопроса, как назвать прямую: *AB* или *CD*. С другой стороны, я не могу также сказать, чтобы я не имел права дать название прямых сторонам неевклидовых треугольников, потому что они не отвечают вечной идее прямой, которой я обладаю по интуиции.

Пусть я имею интуитивную идею стороны евклидова треугольника; но я также имею интуитивную идею стороны неевклидова треугольника. Почему я вправе прилагать название прямой к первой из этих идей, а не ко второй? В чем заключалось бы участие этих слогов в деле составления этой интуитивной идеи? Очевидно, когда мы говорим, что евклидова прямая есть *истинная* прямая и что неевклидова прямая не есть истинная прямая, мы просто хотим сказать, что первая интуитивная идея соответствует *более замечательному* объекту, чем вторая. Но как мы решаем, что этот объект является более замечательным? Это я исследовал в «Науке и гипотезе».

Мы видели там вмешательство опыта; если евклидова прямая более замечательна, чем неевклидова, то это прежде всего означает, что она мало отличается от некоторых замечательных естественных предметов, от которых сильно отличается неевклидова прямая. Но, скажут, определение неевклидовой прямой искусственно; попробуем на время принять его, мы увидим тогда, что два круга разных радиусов оба получат название неевклидовых прямых, тогда как относительно двух кругов одного и того же радиуса возможно, что один будет удовлетворять определению, а другой нет, и тогда, если мы перенесем одну из этих так называемых прямых, не деформируя ее, то она перестает быть прямой. Но по какому праву мы считаем равными две фигуры, которые евклидовы геометры называют двумя кругами одного и того же радиуса? Это мы считаем потому, что перенося одну из них без деформации, мы можем наложить ее на другую так, чтобы она совпала с последней. Но почему мы говорим, что это перенесение происходит без деформации? Этому невозможно дать достаточное обоснование. Среди всех постижимых движений есть такие, о которых евклидовы геометры говорят, что они не сопровождаются деформацией; но есть и другие, о которых неевклидовы геометры сказали бы, что они не сопровождаются деформацией. В первых, так называемых евклидовых движениях евклидовы прямые остаются евклидовыми прямыми, а неевклидовы прямые не остаются неевклидовыми прямыми; в движениях второго рода, или в движениях неевклидовых, неевклидовы прямые остаются неевклидовыми прямыми, а евклидовы прямые не остаются евклидовыми прямыми. Следовательно, не доказано, что было бы нелепо называть прямыми стороны неевклидовых треугольников; доказано только, что это было бы неосновательно, если бы продолжали называть движениями без деформации евклидовы движения; но так же можно было бы показать, что неосновательно было бы называть прямыми стороны евклидовых треугольников, если бы движениями без деформации назывались неевклидовы движения.

Теперь, что мы хотим сказать, когда говорим, что евклидовы движения суть *истинные* движения без деформации? Мы просто хотим сказать, что они *более замечательны*, чем другие; а почему они более замечательны? Потому что некоторые замечательные естественные тела — твердые тела — испытывают приблизительно такие движения.

И когда мы спрашиваем: можно ли себе представить неевклидово пространство? — то это значит: можно ли для нас представить себе мир, в котором были бы замечательные естественные предметы, представляющие приближенно форму неевклидовых прямых, и замечательные естественные тела, часто претерпевающие движения, приблизительно подобные неевклидовым движениям? Я показал в «Науке и гипотезе», что на этот вопрос надо ответить утвердительно.

Часто делалось замечание о том, что если бы все тела Вселенной начали одновременно и в одинаковой пропорции расширяться, то у нас не было бы никаких средств заметить это, потому что все наши измерительные инструменты увеличивались бы одновременно с самими предметами, для измерения которых они служат. После этого расширения мир продолжал бы свой ход и ничто не говорило бы нам, что произошло столь важное событие.

Другими словами, два мира, которые были бы подобны друг другу (понимая «подобие» в смысле третьей книги «Геометрии»), были бы совершенно неразличимы. Мало того: миры не только будут неразличимы, если они одинаковы или подобны, т. е. если можно перейти от одного к другому, меняя оси координат или меняя масштаб, служащий для измерения длин; они будут также неразличимы, если можно перейти от одного к другому путем какого бы ни было «точечного преобразования». Объяснюсь подробнее. Я предполагаю, что каждой точке одного соответствует одна и только одна точка другого и обратно; и, сверх того, пусть координаты одной точки будут непрерывными функциями, *безразлично какими*, координат соответствующей точки. Затем я предполагаю, что каждому предмету первого мира соответствует во втором предмет той же природы, помещающийся как раз в соответствующей точке. Я предполагаю, наконец, что это соответствие, осуществившееся в начальный момент, сохраняется на неопределенное время. Тогда у нас не было бы никакого средства отличить эти два мира один от другого. Когда говорят об *относительности пространства*, обычно понимают ее не в таком широком смысле, тогда как ее следовало бы понимать именно таким образом.

Если один из этих миров есть наш евклидов мир, тогда то, что обитатели его назовут прямою, будет наша евклидова прямая, а то, что обитатели второго мира назовут прямою, будет кривая, обладающая такими же свойствами по отношению к тому миру, который они населяют, и по отношению к тем движениям, которые они назовут движениями без деформации; потому их геометрией будет евклидова геометрия, но их прямая не будет наша евклидова прямая. Это будет своя прямая, преобразованная путем того точечного преобразования, которое позволяет переходить от нашего мира к их миру; прямые этих людей не будут наши прямые, но они будут иметь между собой те же самые отношения, как наши прямые между собой; вот в каком смысле я говорю, что их геометрией будет наша геометрия. Тогда, если мы захотим решительно объявить, что они ошибаются, что их прямая не есть истинная прямая, если мы не пожелаем признать, что подобное утверждение не имеет никакого смысла, то мы по крайней мере должны будем признать, что у этих людей нет каких-либо средств заметить свою ошибку.

§ 2. Качественная геометрия

Все это сравнительно легко для понимания, и я уже так часто повторял это, что считаю бесполезным дальше распространяться об этом предмете. Евклидово пространство не есть форма, наложенная на нашу чувственность, потому что мы можем вообразить себе неевклидово пространство; но оба пространства — евклидово и неевклидово — имеют одно общее основание, тот аморфный континуум, о котором я говорил вначале; из этого континуума мы можем извлечь то евклидово пространство, то пространство Лобачевского — так же как, реализуя соответствующее градуирование, мы можем из неградуированного термометра сделать либо термометр Фаренгейта, либо термометр Реомюра.

Тогда возникает вопрос: не является ли этот аморфный континуум, который наш анализ оставил существующим, формой, наложенной на нашу чувственность? Мы расширили бы тюрьму, в которой заключена наша чувственность, но это все-таки была бы тюрьма.

Эта непрерывность обладает известным числом свойств, свободных от всякой идеи измерения. Исследование этих свойств составляет предмет науки, разработанной несколькими великими геометрами, в особенности Риманом и Бетти, и получившей название Analysis Situs. В этой науке отвлекаются от всякой количественной идеи; например, если констатируется, что точка B лежит на некоторой линии между точками A и C, то довольствуются этим утверждением и не трудятся узнать, прямая ли линия ABC или кривая, равна ли длина AB длине AC или вдвое больше ее.

Поэтому теоремы Analysis Situs имеют ту особенность, что они остались бы справедливыми, если бы фигуры чертились неискусной рукой, которая грубо искажала бы все пропорции и заменяла бы прямые более или менее извилистыми линиями. Выражаясь математически, они не менялись бы от какого бы то ни было «точечного преобразования». Часто говорили, что метрическая геометрия — геометрия количественная, тогда как проективная геометрия — геометрия чисто качественная; это не совсем верно: то, что отличает прямую от других линий, это — еще свойства, остающиеся в некоторых отношениях количественными. Следовательно, настоящая качественная геометрия есть Analysis Situs.

Те же самые вопросы, которые возникали по поводу истин евклидовой геометрии, снова возникают относительно теорем Analysis Situs. Можно ли их получить путем дедуктивного рассуждения? Не являются ли они скрытыми соглашениями? Или они суть экспериментальные истины? Являются ли они свойствами формы, наложенной на нашу чувственность или на наш разум?

Я просто замечу, что два последних решения исключают друг друга; это не всегда ясно сознавали. Мы не можем допустить одновременно, что невозможно представить себе пространство четырех измерений и что опыт доказывает нам, что пространство имеет три измерения. Экспериментатор ставит природе вопрос: то или другое? — И он не может ставить его, не представляя себе в то же время двух сторон альтернативы. Если бы невозможно было представить себе одну из этих сторон, то было бы бесполезно да и невозможно обращаться к опыту. Мы не нуждаемся в наблюдении для того, чтобы знать, что часовая стрелка не стоит на 15-м делении циферблата, потому что мы заранее знаем, что делений только 12, и мы не могли бы взглянуть на 15-е деление, чтобы проверить, находится ли там стрелка, потому что такого деления нет.

Заметим также, что здесь эмпирики свободны от одного из самых сильных возражений, какое можно направить против них,— от возражения, которое заранее делает совершенно напрасными все их усилия приложить свой тезис к истинам евклидовой геометрии. Эти истины строги, а всякий опыт может быть только приближенным. В Analysis Situs бывает достаточно и приближенных опытов, чтобы дать строгую теорему; например, если мы видим, что пространство не может иметь ни двух или менее двух измерений, ни четырех или более четырех измерений, то мы уверены, что оно имеет их три, ибо не может иметь два с половиной или три с половиной.

Из всех теорем Analysis Situs самая важная — та, которая выражается словами: пространство имеет три измерения. Этой теоремой мы сейчас займемся, причем поставим вопрос в таком виде: что мы хотим сказать, когда говорим, что пространство имеет три измерения?

§ 3. Физическая непрерывность многих измерений

В «Науке и гипотезе»[1]) я выяснил, откуда у нас появляется понятие физической непрерывности и как из него могло возникнуть понятие математической непрерывности. Случается, что мы бываем способны отличать друг от друга два впечатления, не будучи в состоянии отличить каждое из них от одного и того же третьего. Так мы легко можем отличить вес 12 граммов от веса 10 граммов, тогда как невозможно отличить вес 11 граммов ни от того, ни от другого.

Подобное утверждение символически можно представить так:

$$A = B, \quad B = C, \quad A < C.$$

Это была бы формула физической непрерывности, как дает ее нам непосредственный опыт. Происходящее отсюда нетерпимое противоречие устраняется введением математической непрерывности. Эта последняя представляет собой лестницу с бесконечно большим числом ступеней (числа соизмеримые или несоизмеримые), причем эти ступени занимают по отношению друг к другу внешнее положение, а не захватывают друг друга, как это имеет место, сообразно с предыдущей формулой, между элементами физической непрерывности.

Физическая непрерывность есть, так сказать, неразрешенная (неразложенная на составные элементы) туманность, и самые совершенные инструменты не могли бы разрешить ее. Конечно, если бы мы определяли вес с помощью хороших весов, а не просто рукою, то мы бы отличили вес 11 граммов от весов 10 и 12 граммов, и тогда наша формула представилась бы так:

$$A < B, \ B < C, \ A < C.$$

Но между A и B и между B и C всегда нашлись бы такие новые элементы D и E, что

$$A = D, \quad D = B, \quad A < B; \qquad B = E, \quad E = C, \quad B < C;$$

трудность только передвинулась бы; туманность всегда оставалась бы неразрешенной; разрешить ее может только мышление — и математическая непре-

[1]) См. с. 27 и след.

рывность есть именно туманность, разрешенная на отдельные звезды.

Однако до сих пор мы не вводили понятия о числе измерений. Что мы хотим сказать, когда говорим, что математическая непрерывность или физическая непрерывность имеет два или три измерения?

Нам надо прежде всего ввести понятие *купюры*, приспособляя это понятие сначала к исследованию физических непрерывностей. Мы видели, чем характеризуется физическая непрерывность; каждый элемент этой непрерывности состоит из совокупности впечатлений; может случиться: либо что один элемент не может быть отличен от другого элемента той же непрерывности, если этот новый элемент соответствует совокупности слишком мало разнящихся впечатлений, либо, напротив, что отличение возможно; наконец, может быть и так, что два элемента, неотличимые от одного и того же третьего, тем не менее могут быть отличены друг от друга.

После этого, если A и B суть два различимых элемента непрерывности C, то можно найти ряд элементов

$$E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_n$$

принадлежащих той же самой непрерывности C и притом таких, что каждый из них неотличим от предыдущего; так E_1 будет элементом, неотличимым от A, а E_n — от B. Поэтому можно будет переходить от A к B непрерывным путем, в то же время не выходя из C. Если это условие выполнено для двух любых элементов A и B непрерывности C, то мы можем сказать, что эта непрерывность C *односвязна*.

Теперь выделим некоторые из элементов C, которые могут или все быть отличены друг от друга, или же могут сами образовать одну или несколько непрерывностей. Совокупность элементов, таким образом произвольно выбранных из всех элементов C, даст то, что я назову *купюрой* или *купюрами*.

Возьмем снова на C два любых элемента A и B. Тогда или можно будет найти еще ряд элементов

$$E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_n$$

таких, чтобы: 1) все они принадлежали C; 2) чтобы каждый из них был неотличим от следующего; E_1

неотличим от A и E_n — от B; 3) *кроме того, чтобы каждый из элементов E отличался от каждого из элементов купюры.* Или же, напротив, во всех рядах E_1, E_2, ..., E_n, удовлетворяющих первым двум условиям, будет содержаться элемент E, неотличимый от одного из элементов купюры. В первом случае мы можем идти от A к B непрерывным путем, не выходя из C и *не встречая купюр*; во втором случае это невозможно.

Итак, если для любых двух элементов A и B непрерывности C всегда находит себе место первый случай, мы скажем, что C остается *односвязной*, несмотря на купюры.

Следовательно, если мы известным, впрочем произвольным, образом выберем купюры, то может случиться, что непрерывность или останется, или не останется односвязной; в последнем случае мы скажем, что она *разделена* купюрами.

Нельзя не заметить, что все эти определения основаны единственно на том простом факте, что две совокупности впечатлений то могут, то не могут быть различаемы.

Если для *разделения* непрерывности достаточно бывает рассматривать в качестве купюр известное число элементов, отличимых друг от друга, то говорят, что эта непрерывность *одного измерения*; если же, напротив, для разделения непрерывности необходимо брать в качестве купюр систему элементов, которые сами образуют одну или несколько непрерывностей, то мы скажем, что эта непрерывность *многих измерений.*

Если для разделения непрерывности C достаточно купюр, образующих одну или несколько непрерывностей одного измерения, то мы скажем, что C есть непрерывность *двух измерений*; если достаточно купюр, образующих одну или несколько непрерывностей самое большее двух измерений, то мы скажем, что C есть непрерывность *трех измерений*, и т. д.

Чтобы оправдать это определение, надо посмотреть, так ли геометры вводят понятие трех измерений в начале своих работ. Что же мы видим? Чаще всего они начинают с определения поверхностей как пределов объемов или частей пространства, линий как пределов поверхностей, точек как пределов линий и утверждают, что тот же самый процесс не может идти дальше.

Здесь та же идея; чтобы разделить пространство, нужны купюры, которые называются поверхностями; чтобы разделить поверхности, нужны купюры, которые называются линиями: чтобы разделить линии, нужны купюры, которые называются точками; дальше идти нельзя, и точка не может быть разделена, точка не есть непрерывность; тогда линии, которые можно делить купюрами, не представляющими собой непрерывностей, будут непрерывностями одного измерения; поверхности, которые можно делить купюрами — непрерывностями одного измерения, — будут непрерывностями двух измерений; наконец, пространство, которое можно делить купюрами — непрерывностями двух измерений,— будет непрерывностью трех измерений.

Таким образом, определение, которое я только что дал, по существу не отличается от обычных определений; я только хотел сообщить ему форму, применимую не к математической непрерывности, а к физической, которая одна только доступна для представления, и вместе с тем хотел сохранить всю его точность.

Впрочем, видно, что это определение приложимо не только к пространству, что во всем том, что воспринимается нашими чувствами, мы встречаем характерные признаки физической непрерывности, что и допускает возможность одной и той же классификации; легко было бы найти примеры непрерывностей четырех, пяти измерений в смысле предыдущего определения; эти примеры возникают в уме сами собой.

Наконец, я мог бы изложить, если бы у меня было на это время, как наука, о которой я говорил выше и которую Риман назвал Analysis Situs, учит нас различать непрерывности одного и того же числа измерений и как классификация этих непрерывностей опирается по-прежнему на рассмотрение купюр.

Из этого понятия произошло понятие математической непрерывности многих измерений тем же способом, каким физическая непрерывность одного измерения произвела математическую непрерывность одного измерения. Формула

$$A > C, \quad A = B, \quad B = C,$$

которая резюмировала грубые данные опыта, содержала в себе нетерпимое противоречие. Чтобы избавиться от него, нужно было ввести новое понятие, впрочем, принимая во внимание существенные свойства физической непрерывности многих измерений. Математическая непрерывность одного измерения допускает единственную шкалу с бесконечным числом ступеней, которые соответствуют разным соизмеримым или несоизмеримым значениям одной и той же величины. Для того чтобы получить математическую непрерывность n измерений, достаточно взять n подобных шкал, ступени которых будут соответствовать различным значениям n независимых величин, называемых координатами. Таким образом, получится изображение физической непрерывности n измерений, и это изображение — насколько это возможно — будет верным, если только не желают допустить существование того противоречия, о котором я говорил выше.

§ 4. Понятие точки

Теперь, по-видимому, решен вопрос, который мы поставили себе вначале. Когда мы говорим, что пространство имеет три измерения, то мы, скажут нам, подразумеваем, что совокупность точек пространства удовлетворяет определению, которое мы только что дали для физической непрерывности трех измерений. Удовлетвориться этим значило бы предположить, что мы знаем, что такое совокупность точек пространства или даже что такое одна точка пространства.

А это не так просто, как кажется. Все думают, что знают, что такое точка; и мы даже полагаем, что нет нужды в ее определении именно потому, что мы слишком хорошо знаем ее. Конечно, нельзя требовать от нас умения определить ее, потому что при переходе от определения к определению необходимо должен наступить момент, когда приходится остановиться. Но когда же следует остановиться?

Прежде всего, остановка произойдет тогда, когда дойдем до предмета, который поддается восприятию наших чувств или который можно себе представить; тогда определение станет бесполезным; ребенку ведь не определяют барана, ему говорят: *вот* баран.

Но тогда мы должны спросить себя, возможно ли представить себе точку пространства. Те, которые отвечают «да», не думают, что на самом деле они представляют себе белую точку, начерченную мелом на черной доске, или черную точку, сделанную пером на белой бумаге, и что они могут представить себе только предмет или — лучше — те впечатления, которые этот предмет может производить на их чувства.

Когда они стараются представить себе точку, они представляют себе те впечатления, которые возбуждаются весьма малыми предметами. Нет необходимости прибавлять, что два различных предмета, хотя бы и весьма малые, могут производить совершенно различные впечатления, но я не останавливаюсь на этой трудности, которая потребовала бы некоторого обсуждения.

Однако дело не в этом; недостаточно представлять себе *какую-то* точку, нужно представить себе *такую-то* точку и иметь средство отличать ее от *другой* точки. И в самом деле, для того чтобы мы могли применить к непрерывности то правило, которое я изложил выше и благодаря которому можно узнать число ее измерений, мы должны опереться на тот факт, что два элемента этой непрерывности то могут, то не могут быть различены. Следовательно, нужно, чтобы мы могли в некоторых случаях представлять себе *такой-то* элемент и отличать его от *другого* элемента.

Вопрос состоит в том, чтобы знать: одинаковы ли точка, которую я представлял себе час тому назад, и точка, которую я представляю себе теперь, или они различны. Другими словами, как нам узнать, является ли той же самой точка, занимаемая предметом A в момент α, что и точка, занимаемая предметом B в момент β, или — еще лучше — что это значит?

Я сижу в своей комнате, предмет лежит на моем столе; я не двигаюсь с места в продолжение одной секунды, никто не касается предмета; мне хочется сказать, что точка A, которую занимал этот предмет в начале этой секунды, тождественна с точкой B, которую он занимал в конце; но это совсем не так: от точки A до точки B — 30 километров, потому что предмет принимал участие в движении Земли. Будь предмет мал или велик, мы не можем узнать, не переменил ли он абсолютное положение в пространстве;

и не только мы не можем утверждать этого, но самое это утверждение не имеет никакого смысла и во всяком случае не может соответствовать никакому представлению.

Но тогда мы можем спросить себя, изменилось ли относительное положение предмета по отношению к другим предметам, и прежде всего — по отношению к нашему телу; если впечатления, производимые на нас этим предметом, не изменились, то мы будем склонны думать, что это относительное положение также не изменилось; если впечатления изменились, то мы решим, что этот предмет переменил либо состояние, либо относительное положение. Остается выбрать одно из двух решений. В «Науке и гипотезе» я выяснил, как мы пришли к различению перемен положения. Впрочем, в дальнейшем я опять возвращусь к этому. Итак, мы приходим к знанию того, осталось ли относительное положение предмета по отношению к нашему телу тем же самым или нет.

Если теперь мы видим, что два предмета сохранили свое относительное положение по отношению к нашему телу, то мы заключаем, что относительное положение этих двух предметов по отношению друг к другу не изменилось; но мы приходим к такому заключению лишь путем косвенного рассуждения. Единственная вещь, которую мы знаем непосредственно,— это относительное положение предметов по отношению к нашему телу.

И *тем более* только в силу косвенного рассуждения мы верим (и еще сама эта вера обманчива), будто знаем, изменилось ли абсолютное положение предмета.

Словом, система координатных осей, к которым мы естественно относим все внешние предметы,— это система осей, неизменно связанная с нашим телом, которую мы и носим всюду с собой.

Невозможно представить себе абсолютное пространство; когда я хочу представить себе одновременно предметы и самого себя в движении в абсолютном пространстве, в действительности я представляю себя неподвижным наблюдателем движения вокруг меня различных предметов и человека, который находится вне меня, но которого я условно называю «я».

Будет ли трудность разрешена, если условимся все относить к этим осям, связанным с нашим телом? Знаем ли мы на этот раз, что́ такое точка, определенная таким образом своим относительным положением по отношению к нам? Многие ответят «да» и скажут, что они «локализуют» внешние предметы.

Что это значит? Локализовать предмет — значит просто представить себе те движения, которые нужно было бы сделать, чтобы достигнуть его; объяснюсь подробнее: дело не в том, чтобы представлять себе самые движения в пространстве, но только те мускульные ощущения, которыми сопровождаются эти движения и которые не предполагают предсуществование понятия пространства.

Если мы предположим, что два различных предмета последовательно займут одно и то же относительное положение по отношению к нам, то впечатления, которые вызовут в нас эти два предмета, будут весьма различны; мы локализуем их в одной и той же точке просто потому, что нужно сделать одни и те же движения, чтобы достигнуть их; кроме того, не видно, что еще они могли бы иметь общего.

Но при данном предмете можно вообразить многие различные виды движений, которые одинаково позволяли бы достигнуть его. Тогда, если мы представим себе точку, представляя ряд мускульных ощущений, которыми сопровождались бы движения, позволяющие достигнуть этой точки, то мы будем иметь много совершенно различных способов представлять себе одну и ту же точку. Если мы не захотим довольствоваться этим решением, если пожелаем ввести рядом с мускульными ощущениями, например, зрительные ощущения, то будем иметь еще один или два способа представлять себе ту же самую точку, и трудность только увеличится. Относительно всех способов возникает такой вопрос: почему мы думаем, что все эти столь различные между собой представления все же воспроизводят одну и ту же точку?

Другое замечание: я только что сказал, что мы естественно относим внешние предметы к нашему собственному телу; что мы, так сказать, всюду носим с собой систему осей, к которым мы относим все точки пространства, и что эта система осей как бы неизменно связана с нашим телом. Следует заметить, что строго говорить о неизменно связанных с нашим телом осях можно было бы только при условии, если бы различные части нашего тела сами были неизменно связаны друг с другом. Так как этого нет, то прежде чем относить внешние предметы к этим фиктивным осям, мы должны предположить, что наше тело может быть снова приведено в то же самое положение.

§ 5. Понятие перемещения

В «Науке и гипотезе» я указал на ту первенствующую роль, которую играют движения нашего тела в генезисе понятия пространства. Для существа совершенно неподвижного не было бы ни пространства, ни геометрии; напрасно вокруг него перемещались бы внешние предметы; перемены в его впечатлениях, вызванные этими перемещениями, это существо приписывало бы не изменениям положения, а простым изменениям состояния; у такого существа не было бы никаких средств различить эти два рода изменений, и это различие, основное для нас, для него не имело бы никакого смысла.

Движения, которые мы сообщаем нашим членам, в результате вызывают перемену впечатлений, производимых внешними предметами на наши чувства; другие причины также могут вызвать эту перемену, но мы научаемся отличать изменения, производимые собственными нашими движениями, и легко распознаем их по двум причинам: 1) потому что они суть движения волевые; 2) потому что они сопровождаются мускульными ощущениями.

Таким образом, мы естественно подразделяем изменения, которым могут подвергаться наши впечатления, на две категории, которым я, быть может, дал неподходящее название: 1) изменения внутренние — волевые и сопровождающиеся мускульными ощущениями; 2) изменения внешние — противоположного характера.

Мы замечаем затем, что среди внешних изменений есть такие, которые могут быть исправлены благодаря внутреннему изменению, которым все приводится в первоначальное состояние; и есть другие, которые не могут быть исправлены таким образом (так, когда внешний предмет переместился, мы можем, перемещаясь сами, занять по отношению к этому предмету то же самое относительное положение и таким образом восстановить совокупность первоначальных впечатлений; если же этот предмет не переместился, но изменил свое состояние, то это становится невозможным). Отсюда новое различие между внешними изменениями: те, которые могут быть исправлены указанным способом, мы назовем изменениями положения, а другие — изменениями состояния.

Предположим, например, шар, одно полушарие которого будет синим, а другое — красным; сначала он обращен к нам синим полушарием; потом он повертывается к нам красным полушарием. Затем вообразим шарообразный сосуд, содержащий в себе синюю жидкость, которая вследствие химической реакции становится красной. В обоих случаях ощущение красного сменяет ощущение синего; наши чувства испытали одни и те же впечатления, последовавшие в одном и том же порядке, и однако же эти два изменения мы рассматриваем как совершенно различные; первое есть перемещение, второе — изменение состояния. Почему?

Потому что в первом случае мне достаточно обойти вокруг шара, чтобы занять место против красного полушария и таким образом восстановить первоначальное ощущение красного.

Сверх того, если бы два полушария вместо того, чтобы быть красным и синим, были желтым и зеленым, то в какой форме тогда сообщалось бы мне вращение шара? Раньше красный цвет следовал за синим, а теперь зеленый следует за желтым; а между тем я говорю, что оба шара испытывали одно и то же вращение, что и тот и другой повернулись вокруг своей оси; но ведь я не могу сказать, чтобы зеленый цвет был в том же отношении к желтому, как красный к синему; почему же тогда я пришел к заключению, что оба шара подверглись *одному и тому же* перемещению? Очевидно, потому, что как в том, так и в другом случае я могу восстановить первоначальное ощущение, обойдя вокруг шара и делая одни и те же движения; а что я выполнил одни и те же движения, это я знаю потому, что я испытал одни и те же мускульные ощущения; следовательно, для того чтобы знать это, мне нет нужды раньше знать геометрию и представлять себе движения моего тела в геометрическом пространстве.

Другой пример. Перед моим глазом перемещается предмет: изображение его сначала было в центре сетчатки, потом оно образуется на краю ее; прежнее ощущение передавалось мне нервным волокном, примыкающим к центру сетчатки; новое ощущение передается мне *другим* нервным волокном, исходящим от края сетчатки; эти два ощущения качественно различны, иначе, как бы мог я различить их? Тогда почему я прихожу к тому заключению, что эти два качественно различных ощущения представляют одно и то же перемещающееся изображение? Это потому, что я могу *следовать глазом за предметом*, волевым и сопровождающимся мускульными ощущениями перемещением глаза отводить изображение в центр сетчатки и таким образом восстанавливать первоначальное ощущение.

Предположим, что изображение красного предмета перешло из центра сетчатки A на край ее B, затем что изображение синего предмета также переходит из центра сетчатки A на край ее B; я буду думать, что эти два предмета подверглись *одному и тому же* перемещению. Почему? Потому что и в том и в другом случае я могу восстановить первоначальное ощущение, для чего я должен буду совершить *одно и то же* движение глаза, и я буду знать, что мой глаз совершил одно и то же движение, потому что я испытал *одни и те же* мускульные ощущения.

Если бы я не мог двигать глазом, то на каком основании я допускал бы, что ощущение красного в центре сетчатки так относится к ощущению красного на краю сетчатки, как ощущение синего в центре к ощущению синего на краю? Я имел бы только четыре качественно различные ощущения, и если бы спросили меня, связаны ли они отношением, которое я только что высказал, то вопрос показался бы мне смешным — все равно, как если бы меня спросили, существует ли аналогичное отношение между слуховым ощущением, осязательным ощущением и обонятельным ощущением.

Теперь рассмотрим внутренние изменения, т. е. такие, которые произведены волевыми движениями нашего тела и сопровождаются мускульными изменениями; они дадут место следующим двум замечаниям, аналогичным тем, которые мы только что сделали относительно внешних изменений.

1) Я могу предположить, что мое тело перенесено из одного пункта в другой, сохраняя при этом ту же самую позу; таким образом, все части этого тела сохранили или снова приняли то же самое *относительное* положение, хотя абсолютное положение их в пространстве изменилось; я могу также предположить, что не только место моего тела переменилось, но что его поза стала другой, например, что мои руки, которые только что были сложены, теперь вытянуты.

Итак, я должен различать простые перемены места без изменения позы и изменения позы. И те и другие являются мне в виде мускульных ощущений. Как же я прихожу к различению их? Благодаря тому, что первые могут служить для исправления внешнего изменения, последние же не могут; в крайнем случае они могут дать лишь несущественную поправку.

Это последнее обстоятельство я буду сейчас объяснять так, как я объяснял бы его тому, кто уже знаком с геометрией; но не следует заключать отсюда, что для того, чтобы делать это различие, надо уже знать геометрию; прежде чем я познакомлюсь с ней, я констатирую факт (так сказать, экспериментально), не будучи в состоянии объяснить его. Но чтобы различать эти два рода изменения, мне не нужно *объяснять* факт, мне достаточно *констатировать* его.

Как бы то ни было, объяснить его нетрудно.

Предположим, что внешний предмет переместился; если мы хотим, чтобы различные части нашего тела снова заняли по отношению к этому предмету свое первоначальное относительное положение, нужно, чтобы эти различные части заняли равным образом свое первоначальное относительное положение по отношению друг к другу. Только те внутренние изменения, которые удовлетворят этому последнему условию, будут в состоянии исправить внешнее изменение, произведенное перемещением этого предмета. Таким образом, если относительное положение моего глаза по отношению к моему пальцу изменилось, то я могу отвести глаз в его первоначальное относительное положение по отношению к предмету и восстановить таким образом первоначальные зрительные ощущения; но тогда изменится относительное положение пальца по отношению к предмету и осязательные ощущения не будут восстановлены.

2) Равным образом мы констатируем, что одно и то же внешнее изменение может быть исправлено двумя внутренними изменениями, соответствующими различным мускульным ощущениям. И здесь я могу констатировать это, не зная геометрии; я не нуждаюсь и ни в чем другом; но я буду объяснять факт, пользуясь геометрическим языком. Чтобы перейти из положения A в положение B, я могу воспользоваться несколькими путями. Одному из этих путей будет соответствовать один ряд мускульных ощущений S; другому будет соответствовать другой ряд мускульных ощущений S'', которые вообще будут совершенно иными, потому что в действие будут приведены другие мускулы.

Почему я должен считать эти два ряда S и S'' соответствующими одному и тому же перемещению AB? Потому, что эти два ряда способны исправить одно и то же внешнее изменение. За исключением этого, они не имеют ничего общего.

Рассмотрим теперь два внешних изменения α и β, которые представляют, например, вращение шара, наполовину синего и наполовину красного, и вращение шара, наполовину желтого и наполовину зеленого; эти два изменения не имеют ничего общего, потому что одно воспринимается нами как переход от синего к красному, а другое — как переход от желтого к зеленому. С другой стороны, рассмотрим два ряда внутренних изменений S и S''; они также не имеют ничего общего. И, однако, я говорю, что α и β соответствуют одному и тому же перемещению и что S и S'' также соответствуют одному и тому же перемещению.

Почему? Очень просто — потому, что S может исправить β так же, как α, и потому, что α может быть исправлено посредством S'' так же, как посредством S. Тогда возникает вопрос: если я констатировал, что S исправляет α и β и что S'' исправляет α, то уверен ли я в том, что S'' исправляет также β? Только опыт может открыть нам, подтверждается ли этот закон. Если бы он не подтверждался по крайней мере приближенно, то не было бы геометрии, не было бы пространства, потому что нам не для чего было бы классифицировать внешние и внутренние изменения, как я это только что делал, и отличать, например, изменения состояния от изменения положения.

Интересно посмотреть, какова была во всем этом роль опыта. Опыт показал мне, что некоторый закон подтверждается приближенно. Он не открыл мне, ни *как* существует пространство, ни что последнее удовлетворяет условию, о котором идет речь. В самом деле, я знал до всякого опыта, что пространство или удовлетворит этому условию, или нет; я не могу также сказать, чтобы опыт научил меня, что геометрия возможна; я прекрасно вижу, что геометрия возможна, потому что она не содержит в себе противоречия; опыт научил меня только тому, что геометрия полезна.

§ 6. Визуальное пространство

Хотя двигательные впечатления, как я только что объяснил, имели преобладающее влияние в генезисе понятия пространства, так что это понятие никогда бы не возникло без них, но интересно исследовать также роль зрительных впечатлений и установить, сколько измерений имеет «визуальное пространство», применив с этой целью к указанным впечатлениям определение § 3.

Первое затруднение налицо; рассмотрим ощущение красного цвета, возникающее в некоторой точке сетчатки; и, с другой стороны,— ощущение синего цвета, возникающее в той же самой точке сетчатки. Нам нужно некоторое средство, чтобы узнать, что эти два качественно различных ощущения имеют нечто общее. По соображениям, изложенным в предыдущем параграфе, мы могли узнать это только из движений глаза и из тех наблюдений, к которым они приводили. Если бы глаз был неподвижен или если бы мы не сознавали своих движений, то мы не могли бы узнать, что у этих двух качественно различных ощущений есть что-нибудь общее; мы не могли бы усмотреть в них то, что наделяет их геометрическим характером. Поэтому зрительные ощущения без мускульных ощущений не имели бы ничего геометрического, так что можно сказать, что нет чистого визуального пространства. Для того чтобы устранить это затруднение, рассмотрим только однородные ощущения, например ощущения красного (цвета), различающиеся друг от друга только той точкой сетчатки, в которой они возникают. Ясно, что у меня нет никакого основания делать столь произвольный выбор из всех возможных зрительных ощущений, чтобы соединить в одном и том же классе все ощущения одного и того же цвета, в какой бы точке сетчатки они ни возникали. Я никогда не подумал бы об этом, если бы не был научен раньше — тем способом, который мы только что видели,— отличать перемены состояния от перемен положения, т. е. если бы мой глаз был неподвижен. Два ощущения одного и того же цвета, возникающие в двух разных частях сетчатки, представлялись бы мне качественно различными, как и два ощущения разных цветов.

Ограничиваясь ощущениями красного, я, таким образом, налагаю на себя искусственное ограничение и систематически пренебрегаю главной стороной вопроса; но благодаря только этой уловке я и могу анализировать визуальное пространство, не примешивая к нему двигательного ощущения.

Вообразим линию, проведенную на сетчатке и разделяющую поверхность ее на две части; оставим в стороне ощущения красного, возникающие в точках этой линии, или ощущения, которые слишком мало разнятся от них, чтобы можно было их отличить. Совокупность этих ощущений образует род купюры, которую я обозначу через C; ясно, что достаточно этой купюры, чтобы разделить совокупность возможных ощущений красного, и что если я возьму два ощущения красного, возникающие в двух точках, расположенных по одну и по другую сторону линии, то я не могу перейти от одного из этих ощущений к другому непрерывным путем, не переходя в известный момент через ощущение, принадлежащее данной купюре.

Поэтому, если купюра имеет n измерений, то вся совокупность моих ощущений красного, или, если угодно, полное визуальное пространство, будет иметь $n+1$ измерение.

Теперь я различаю ощущения красного, возникающие в какой-нибудь точке купюры C. Совокупность этих ощущений образует новую купюру C'. Ясно, что эта купюра *разделит* купюру C, если понимать слово «разделит» в том же самом смысле.

Следовательно, если купюра C' имеет n измерений, то купюра C будет иметь $n+1$, а полное зрительное пространство $n+2$ измерения.

Если бы все ощущения красного, возникающие в одной и той же точке сетчатки, рассматривались как тождественные, то купюра C', сводясь к одному элементу, имела бы 0 измерений, а визуальное пространство имело бы 2 измерения.

Однако очень часто говорят, что глаз сообщает нам ощущение третьего измерения и позволяет до некоторой степени узнавать расстояние до предметов. Если пытаются проанализировать это ощущение, то констатируют, что оно сводится или к осознанию схождения глазных осей, или к осознанию того усилия при аккомодации, которое делает ресничный мускул для того, чтобы привести изображение в фокус.

Поэтому два ощущения красного цвета, возникающие в одной и той же точке сетчатки, будут рассматриваться как тождественные только в случае, если они сопровождаются тем же ощущением схождения и тем же ощущением усилия при аккомодации — или по крайней мере ощущениями схождения и аккомодации, настолько мало отличающимися, что их нельзя распознать.

Поэтому купюра C' сама является непрерывностью, а купюра C имеет более одного измерения.

Но именно опыт учит нас, что когда два зрительных ощущения сопровождаются одним и тем же ощущением схождения, они сопровождаются также одним и тем же ощущением аккомодации.

Тогда, если мы образуем новую купюру C'' из всех тех ощущений купюры C', которые сопровождаются известным ощущением схождения, то по предыдущему закону они все будут неразличимы и могут рассматриваться как тождественные; поэтому C'' не будет непрерывностью и будет иметь 0 измерений; а так как C'' разделяет C', то отсюда следует, что C' имеет одно измерение, C — два и *полное визуальное пространство — три измерения.*

Но было бы то же самое, если бы опыт показал нам обратное и если бы известное ощущение схождения не всегда сопровождалось одним и тем же ощущением аккомодации? В таком случае два ощущения, возникающие в одной и той же точке сетчатки и сопровождающиеся одним и тем же ощущением схождения,— два ощущения, которые, следовательно, принадлежали бы оба купюре C'', — могли бы тем не менее быть различимы, потому что сопровождались бы двумя различными ощущениями аккомодации. Поэтому C'' было бы в свою очередь непрерывностью и имело бы (по меньшей мере) одно измерение; тогда C' имело бы два измерения, C — три, а *полное визуальное пространство имело бы четыре измерения.*

Можно ли сказать, что именно опыт научает нас тому, что пространство имеет три измерения, что именно, исходя из экспериментального закона, нам пришлось приписать ему три измерения? Но мы произвели здесь только, так сказать, физиологический опыт; и если бы даже достаточно было приспособить для глаз стекла подходящей конструкции, чтобы нарушить согласие между ощущениями схождения и аккомодации, то скажем ли мы, что достаточно надеть такие очки — и пространство будет иметь четыре измерения и что оптик, который построил бы их, придал бы пространству еще одно измерение? Очевидно, нет; мы можем только сказать: опыт научил нас, что удобно приписывать пространству три измерения. Но визуальное пространство есть только часть пространства, и в самом понятии этого пространства есть нечто искусственное, как я выяснил это вначале. Истинное пространство есть пространство моторное; им-то мы и займемся в следующей главе.

Глава IV

ПРОСТРАНСТВО И ЕГО ТРИ ИЗМЕРЕНИЯ

§ 1. Группа перемещений

Изложим вкратце полученные результаты. Мы задались целью исследовать, какой смысл имеют слова: пространство имеет три измерения. Прежде всего мы спросили себя, что такое физическая непрерывность и когда можно сказать, что она имеет n измерений. Если мы рассматриваем различные системы впечатлений и сравниваем их между собой, то мы часто убеждаемся, что две из этих систем впечатлений не могут быть различены (что обыкновенно выражается словами, что они слишком близки одна к другой и что наши чувства слишком грубы для того, чтобы мы могли различать их), и, сверх того, мы констатируем, что две из этих систем иногда могут быть отличены одна от другой, хотя они неотличимы от одной и той же третьей. Если это так, то говорят, что совокупность этих систем впечатлений образует физическую непрерывность C. И каждая из этих систем будет называться *элементом* непрерывности C.

Сколько измерений имеет эта непрерывность? Возьмем сначала из C два элемента A и B и предположим, что существует ряд элементов Σ, принадлежащих непрерывности C, таких, что A и B суть два крайних члена этого ряда и что каждый член ряда неотличим от предыдущего. Если можно будет найти такой ряд Σ, то мы скажем, что A и B *связаны* между собой; а если в C два каких угодно элемента связаны между собой, мы скажем, что C односвязна.

Теперь выберем вполне произвольно на непрерывности C некоторое число элементов. Совокупность этих элементов будет называться *купюрой*. Среди рядов Σ, которые связывают A с B, мы будем различать ряды, один элемент которых будет неотличим от одного из элементов купюры (мы скажем, что это — ряды, которые *пересекают* купюру), и ряды, *все* элементы которых будут отличимы от всякого элемента купюры. Если все ряды Σ, связывающие A с B, пересекают купюру, то мы скажем, что A и B *отделены* друг от друга купюрой и что купюра *разделяет* C. Если невозможно найти на C два элемента, которые были бы отделены друг от друга купюрой, то мы скажем, что купюра *не разделяет* C.

Если, по установлении этих определений, непрерывность C может быть разделена купюрами, которые сами не образуют непрерывность, то эта непрерывность C имеет только одно измерение; в противном случае она имеет несколько измерений. Если для того, чтобы разделить C, достаточно купюры, образующей непрерывность одного измерения, то C будет иметь два измерения; если достаточно купюры, образующей непрерывность двух измерений, то C будет иметь три измерения, и т. д.

Благодаря этим определениям всегда можно будет узнать, сколько измерений имеет любая физическая непрерывность. Остается только найти физическую непрерывность, которая была бы так сказать эквивалентна пространству так, чтобы каждой точке пространства соответствовал элемент этой непрерывности и чтобы точкам пространства, очень близким друг к другу, соответствовали неразличимые элементы. Тогда пространство будет иметь столько измерений, сколько и эта непрерывность.

Переход через эту физическую непрерывность, доступную представлению, неизбежен, потому что мы не можем представить себе пространство, и это по многим основаниям. Пространство есть математическая непрерывность, оно бесконечно, а мы можем представлять себе только физические непрерывности и конечные предметы. Различные элементы пространства, которые мы называем точками, все сходны между собой, а для того чтобы применить наше определение, нам нужно уметь отличать один элемент от другого, по крайней мере если они не слишком близки. Наконец, абсолютное пространство есть бессмыслица, и нам с самого начала приходится относить его к системе осей, неизменно связанных с нашим телом (которое мы должны предполагать всегда приведенным в одно и то же положение).

Затем я постарался образовать с помощью наших зрительных ощущений эквивалентную пространству физическую непрерывность; это, без сомнения, легко, и этот пример в особенности пригоден для исследования числа измерений; это исследование дало нам возможность видеть, в какой степени можно говорить, что «визуальное пространство» имеет три измерения. Однако это решение не полно и искусственно — я уже объяснил почему, и не к визуальному, а к моторному пространству надо нам приложить свои усилия.

Потом я напомнил, каково происхождение различия, которое мы делаем между изменениями положения и изменениями состояния.

Среди изменений, происходящих в наших впечатлениях, мы различаем сначала изменения *внутренние* — волевые и сопровождающиеся мускульными ощущениями — и изменения *внешние*, характер которых противоположен.

Мы констатируем возможность того, что внешнее изменение будет *исправляться* внутренним изменением, которое восстанавливает начальные ощущения. Внешние изменения, которые можно исправить посредством внутреннего изменения, называются *изменениями положения*; внешние изменения, которые нельзя исправить таким образом, называются *изменением состояния*. Внутренние изменения, способные исправить внешнее изменение, называются *перемещениями всего тела*; прочие — *изменениями позы*.

Теперь пусть α и β будут два внешних изменения, α' и β' — два внутренних изменения. Положим, что α может быть исправлено или посредством α' или посредством β' и что α' может исправить как α, так и β; тогда опыт учит нас, что и β' может исправить β. В таком случае мы скажем, что α и β соответствуют *одному и тому же* перемещению, равно как α' и β' соответствуют *одному и тому же* перемещению.

Если так, то мы можем вообразить физическую непрерывность, которую мы назовем *непрерывностью* или *группой перемещений* и которую определим следующим образом. Элементами этой непрерывности будут внутренние изменения, способные исправить внешнее изменение. Два из этих внутренних изменений α' и β' будут рассматриваться как неразличимые: 1) если они по природе таковы, т. е. если они слишком близки друг к другу; 2) если α' может исправить то же самое внешнее изменение, какое исправляется третьим внутренним изменением, по природе неотличимым от β'. Во втором случае они будут неразличимы, так сказать, в силу соглашения, т. е. если условимся не принимать в расчет тех обстоятельств, которые могли бы создать их различие.

Наша непрерывность теперь вполне определена, потому что мы знаем ее элементы и выяснили себе, при каких условиях они могут рассматриваться как неразличимые. Таким образом, мы имеем все, что необходимо для того, чтобы применить наше определение и определить, сколько измерений имеет эта непрерывность. Мы узнаем, что она имеет *шесть* измерений. Следовательно, непрерывность перемещений не эквивалентна пространству, потому что число измерений здесь другое; она только родственна пространству.

Откуда же мы знаем, что эта непрерывность перемещений имеет шесть измерений? Мы знаем это *из опыта*.

Легко было бы описать опыты, благодаря которым мы могли бы прийти к такому результату. Мы бы увидели, что в этой непрерывности можно брать купюры, которые, разделяя ее, оставались бы непрерывностями; что можно разделять эти купюры другими купюрами второго порядка, которые еще остаются непрерывностями, и что пришлось бы остановиться только после купюр шестого порядка, которые уже не были бы непрерывностями. Согласно нашим определениям это значило бы, что группа перемещений имеет шесть измерений.

Это было бы легко, сказал я, но это было бы довольно длинно; и не оказалось ли бы это несколько поверхностно? Эта группа перемещений, как мы видели, родственна пространству и можно было бы вывести из нее пространство, но она не эквивалентна пространству, потому что она не имеет того же числа измерений; и когда мы покажем, как может образоваться понятие этой непрерывности и как можно вывести отсюда понятие пространства, тогда можно будет всегда спросить себя, почему пространство трех измерений нам гораздо более привычно, чем эта непрерывность шести измерений, и, следовательно, усомниться в том, что именно таким окольным путем образовалось в человеческом уме понятие пространства.

§ 2. Тождество двух точек

Что такое точка? Как мы узнаем, тождественны ли две точки пространства или различны? Или, другими словами, что значит, когда я говорю: «предмет A находился в момент α в точке, в которой находится предмет B в момент β».

Такова проблема, которую мы поставили перед собой в предыдущей главе, § 4. Как я уже выяснил, речь идет не о сравнении положений предметов A и B в абсолютном пространстве; в последнем случае вопрос, очевидно, не имел бы никакого смысла; речь идет о сравнении положений этих двух предметов относительно осей, неизменно связанных с моим телом; при этом всегда предполагается, что это тело приведено в одну и ту же позу.

Я предполагаю, что между моментами α и β я не двигал ни своего тела, ни своего глаза, о чем мне дает знать мое мускульное чувство. Я не двигал также ни головой, ни рукой, ни кистью. Я устанавливаю, что в момент α впечатления, которые приписывались мною предмету A, сообщались мне: иные — одним из волокон моего зрительного нерва, иные — одним из нервов моего пальца, передающих чувство осязания; я устанавливаю, что в момент β мне сообщились другие впечатления, которые я приписываю предмету B, одни — тем же самым волокном зрительного нерва, другие — тем же самым осязательным нервом.

Здесь мне необходимо остановиться для пояснения; откуда я узнал, что впечатление, которое я приписываю A, и впечатление, которое я приписываю B, — впечатления качественно различные — передаются мне одним и тем же нервом?

Следует ли предполагать — если взять, например, зрительные ощущения, — что A производит два одновременных ощущения, одно чисто световое a и другое цветовое a', что B производит также одновременно световое ощущение b и цветовое b', что если эти различные ощущения передаются мне одним и тем же волокном сетчатки, то a тождественно с b, но что вообще цветовые ощущения a' и b', произведенные различными телами, различны? В этом случае тождество ощущения a, сопровождающего a', с ощущением b, сопровождающим b', именно и свидетельствовало бы о том, что все эти ощущения переданы мне одним и тем же волокном.

Какова бы ни была эта гипотеза, — и хотя я склонен предпочесть ей другие, значительно более сложные, — достоверно, что мы каким-то образом узнаем, что есть нечто общее между этими ощущениями $a + a'$ и $b + b'$, без чего у нас не было бы никаких средств узнать, что предмет B занял место предмета A.

Итак, я, не останавливаясь больше на этом, возвращаюсь к только что сделанному предположению: пусть я констатировал, что впечатления, которые я приписываю B, передаются мне в момент β теми же самыми зрительными и осязательными нервами, которыми в момент α были переданы мне впечатления, приписанные мною A. Если это так, то мы, не колеблясь, признаем, что точка нахождения B в момент β тождественна с точкой нахождения A в момент α.

Я только что высказал два условия тождественности этих точек: одно относится к зрению, другое — к осязанию. Рассмотрим их в отдельности. Первое условие необходимо, но не достаточно. Второе — сразу и необходимо и достаточно. Всякий, кто знаком с геометрией, легко истолковал бы это следующим образом. Пусть O — точка сетчатки, где в момент α образуется изображение тела A; пусть M — точка пространства, занимаемая этим телом A в момент α; пусть M' — точка пространства, занимаемая телом B в момент β. Для того чтобы это тело B образовало свое изображение в O, не необходимо, чтобы точки M и M' совпадали: так как зрение действует на расстоянии, то достаточно, чтобы три точки O, M, M' лежали на прямой линии. Поэтому условие, чтобы два предмета давали свое изображение в O, есть необходимое, но не достаточное для того, чтобы точки M и M' совпадали. Пусть теперь P есть точка, занимаемая моим пальцем, и пусть палец остается в ней неподвижным. Так как осязание не может действовать на расстоянии, то если тело A касается моего пальца в момент α, это значит, что M и P совпадают; если B касается моего пальца в момент β, это значит, что M' и P совпадают. Следовательно, совпадают M и M'. Поэтому-то условие, что если A касается моего пальца в момент α, то B касается его в момент β, является одновременно необходимым и достаточным для того, чтобы M и M' совпадали.

Но раз мы еще не знакомы с геометрией, мы не можем рассуждать так; мы можем только констатировать опытным путем, что может быть выполнено первое условие, относящееся к зрению, без выполнения второго условия, относящегося к осязанию, но что второе условие не может быть выполнено без того, чтобы не было выполнено первое.

Предположим, что опыт научил бы нас противоположному. Это возможно, и в этом предположении нет ничего нелепого. Итак, пусть мы констатировали опытным путем, что условие, относящееся к осязанию, может быть выполнено, хотя не выполнено условие зрения, и что, напротив, условие зрения не может быть выполнено без того, чтобы не было выполнено условие осязания. Ясно, что если бы это было так, то мы пришли бы к заключению, что осязание может действовать на расстоянии, а зрение на расстоянии не действует.

Но это не все; до сих пор я предполагал, что для определения места предмета я пользуюсь только глазом и одним пальцем; но совершенно так же я мог бы воспользоваться и другими средствами, например всеми другими моими пальцами.

Я предполагаю, что мой первый палец получает в момент α осязательное впечатление, которое я приписываю предмету A. Я делаю ряд движений, соответствующий ряду мускульных ощущений S. Следом за этими движениями в момент α' мой *второй* палец получает осязательное впечатление, которое я приписываю также A. Потом в момент β, в то время как я остаюсь неподвижным, о чем мне дает знать мое мускульное чувство, тот же самый второй палец опять передает мне осязательное впечатление, которое я приписываю на этот раз предмету B; затем я делаю ряд движений, соответствующий ряду мускульных ощущений S'. Я знаю, что этот ряд S' есть обратный ряду S и соответствует противоположным движениям. Я знаю это потому, что многократные прежние опыты часто показывали мне, что если я последовательно делаю два ряда движений, соответствующие S и S', то первоначальные впечатления восстанавливаются, т. е. два ряда взаимно компенсируются. Если так, то должен ли я надеяться, что в момент β', когда окончится второй ряд движений, мой *первый палец* получит осязательное впечатление, приписываемое предмету B?

Чтобы ответить на этот вопрос, тот, кто был уже знаком с геометрией, стал бы рассуждать таким образом. Есть вероятность, что предмет A не пошевелился между моментами α и α', а также предмет B — между моментами β и β'; допустим это. В момент α предмет A занимал некоторую точку пространства M. Но в этот момент он касался моего первого пальца, и *так как осязание не действует на расстоянии*, то мой первый палец был также в точке M. Затем я сделал ряд движений S и в конце этого ряда в момент α' констатировал, что предмет A касается моего второго пальца. Я заключил отсюда, что этот второй палец находился тогда в M, т. е. что движениями S второй палец был приведен на место первого. В момент β предмет B пришел в соприкосновение с моим вторым пальцем; так как я не шевелился, то этот второй палец остался в M; поэтому предмет B пришел в M; по предположению он не двигается до момента β'. Но между моментами β и β' я сделал движения S'; так как эти движения обратны движениям S, то они должны в результате привести первый палец на место второго. В момент β' первый палец, следовательно, будет в M; и так как предмет B также находится в M, то этот предмет B коснется моего первого пальца. Таким образом, на предложенный вопрос надо ответить утвердительно.

Мы, не знакомые еще с геометрией, не можем рассуждать таким образом, но мы констатируем, что это предположение обыкновенно осуществляется, а исключения мы всегда можем объяснить тем, что предмет A между моментами α и α' или предмет B между моментами β и β' пошевелился.

Но не мог ли бы опыт дать противоположный результат — и явился ли бы этот последний сам по себе нелепым? Очевидно, нет. Как бы мы поступили в том случае, если бы опыт дал этот противоположный результат? Сделалась ли бы невозможной всякая геометрия? Ничуть! Мы ограничились бы заключением, что *осязание может действовать на расстоянии*.

Когда я говорю, что осязание не действует на расстоянии, зрение же действует на расстоянии, то это утверждение имеет только следующий смысл. Для того чтобы узнать, занимает ли B в момент β точку, которую занимал A в момент α, я могу пользоваться множеством различных критериев; в один входит мой глаз; в другой — мой первый палец, в третий — мой второй палец и т. д. Так вот, достаточно, чтобы критерий, относящийся к одному из моих пальцев, был удовлетворен, чтобы были удовлетворены все прочие критерии; но этого не достаточно, чтобы был удовлетворен критерий, относящийся к глазу. Вот смысл моего утверждения; я ограничиваюсь утверждением экспериментального факта, который обыкновенно подтверждается.

В конце предыдущей главы мы сделали анализ визуального пространства; мы видели, что для того, чтобы создать это пространство, нужно ввести ощущения сетчатки, ощущение схождения глазных осей и ощущение аккомодации; что если бы два последних ощущения не были всегда в согласии между собой, то визуальное пространство имело бы четыре измерения вместо трех и что, с другой стороны, если бы вводились только ощущения сетчатки, то получилось бы «чистое визуальное пространство», которое обладало бы только двумя измерениями. С другой стороны, рассмотрим тактильное пространство, ограничиваясь ощущениями только одного пальца, т. е. вообще совокупностью положений, которые может занимать этот палец. Это тактильное пространство, которое мы подвергнем анализу в следующем параграфе и о котором поэтому я попрошу позволения пока не распространяться, имеет три измерения. Почему пространство в собственном смысле имеет столько же измерений, сколько тактильное пространство, и более, чем чистое визуальное пространство? Потому, что осязание не действует на расстоянии, тогда как зрение действует на расстоянии. Эти два утверждения имеют только один и тот же смысл, и мы сейчас видели, каков он.

Теперь я возвращусь к тому пункту, которого я только слегка коснулся, чтобы не прерывать исследования. Откуда мы знаем, что впечатления, произведенные A на нашу сетчатку в момент α и B — в момент β, переданы нам одним и тем же волокном сетчатки, хотя эти впечатления качественно различны? Я высказал простую гипотезу, но прибавил, что другие, значительно более сложные, кажутся мне более вероятными. Вот в чем состоят эти гипотезы, о которых я уже упоминал. Откуда мы знаем, что имеют нечто общее впечатления, произведенные красным предметом A в момент α и синим предметом B в момент β, если эти два предмета образовали свое изображение в одной и той же точке сетчатки? Можно отбросить простую гипотезу, которую я высказал выше, и допустить, что эти два качественно различных впечатления переданы мне двумя различными, хотя и смежными, нервными волокнами.

Тогда каким средством обладаю я для того чтобы знать, что эти волокна смежны? Вероятно, мы не имели бы никакого средства, если бы глаз был неподвижен. Движения глаза научили нас, что отношение между ощущением синего в точке A и ощущением синего в точке B сетчатки то же, что между ощущением красного в точке A и ощущением красного в точке B. Они действительно показали нам, что те же самые движения, соответствующие тем же самым мускульным ощущениям, осуществляют переход от первого ко второму или от третьего к четвертому. Я не останавливаюсь на этих соображениях, которые, очевидно, находятся в связи с вопросом о местных знаках, поднятым Лоце.

§ 3. Тактильное пространство

Итак, я умею распознавать тождественность двух точек — точки, занимаемой A в момент α, и точки, занимаемой B в момент β, но *при условии*, что между моментами α и β я остаюсь неподвижным. Этого недостаточно для нашей цели. Предположим же, что я совершил в промежутке между этими двумя моментами какое-нибудь движение; как я узнаю, тождественна ли точка, занимаемая A в момент α, точке, занимаемой B в момент β? Я предполагаю, что в момент α предмет A находился в соприкосновении с моим первым пальцем и что в момент β предмет B также касается этого первого пальца; но в то же время мое мускульное чувство сообщило мне, что в промежутке мое тело пошевелилось. Выше я рассмотрел два ряда мускульных ощущений S и S' и сказал, что иногда приходится рассматривать два подобных ряда S и S' как обратные друг другу вследствие того, что мы часто наблюдали восстановление наших первоначальных ощущений, когда эти два ряда следуют один за другим.

Пусть мое мускульное чувство сообщило мне, что между моментами α и β я пошевелился, но так, что я последовательно почувствовал два ряда мускульных ощущений S и S', которые я считаю обратными; тогда я сделаю еще вывод — как если бы я не шевелился, — что точки, занимаемые A в момент α и B в момент β, тождественны, если я констатирую, что мой первый палец касается A в момент α и B в момент β.

Такое решение еще не вполне достаточно, как это сейчас будет видно. В самом деле, посмотрим, сколько измерений оно побуждало бы нас приписывать пространству. Я хочу сравнить две точки, занимаемые A и B в моменты α и β, или (что то же самое, потому что я предполагаю, что мой палец касается A в момент α и B — в момент β) я хочу сравнить две точки, занимаемые моим пальцем в два момента α и β. Единственное средство, которым я располагаю для этого сравнения, есть ряд мускульных ощущений Σ, которым сопровождались движения моего тела между этими двумя моментами. Различные мыслимые ряды Σ, очевидно, образуют физическую непрерывность, число измерений которой очень велико. Условимся, как я это сделал раньше, не считать различными два ряда Σ и $\Sigma + S + S'$, когда два ряда S и S' будут взаимно обратными в том смысле, какой я придал этому слову выше; несмотря на такое условие, совокупность различных рядов Σ образует еще физическую непрерывность, число измерений которой будет меньше, но будет еще очень велико.

Каждому из этих рядов Σ соответствует точка пространства: таким образом, двум рядам Σ и Σ' будут соответствовать две точки M и M'. Средства, которыми мы располагаем до сих пор, позволяют нам узнать, что M и M' неразличимы в двух случаях: 1) если Σ тождествен с Σ'; 2) если $\Sigma' = \Sigma + S + S'$, причем S и S' взаимно обратимы. Если бы во всех других случаях мы считали M и M' различными, то совокупность точек имела бы столько измерений, сколько и совокупность различных рядов Σ, т. е. гораздо больше 3.

Для тех, кто уже знаком с геометрией, легко было бы уяснить это следующим образом. Между рядами мыслимых мускульных ощущений есть такие, которые соответствуют рядам движений, при которых палец не шевелится. Я говорю, что если не считать различными ряды Σ и $\Sigma + \sigma$, где ряд σ соответствует таким движениям, при которых палец не шевелится, то совокупность рядов составит непрерывность трех измерений, но если ряды Σ и Σ' считать различными, исключая тот случай, когда $\Sigma' = \Sigma + S + S'$, где S и S' обратимы, то совокупность рядов составит непрерывность более чем трех измерений.

В самом деле, пусть мы имеем в пространстве поверхность A, на этой поверхности линию B, на этой линии точку M; пусть C_0 — совокупность всех рядов Σ; пусть C_1 — совокупность всех таких рядов Σ, что в конце соответствующих движений палец находится на поверхности A; пусть также C_2 и C_3 — совокупности таких рядов Σ, что в конце палец оказывается на B и в M. Прежде всего, ясно, что C_1 составит купюру, которая разделит C_0, и что C_2 будет купюрой, которая разделит C_1, и C_3 — купюра, которая разделит C_2. Отсюда следует, по нашим определениям, что если C_3 есть непрерывность n измерений, то C_0 будет физической непрерывностью $n + 3$ измерений.

Пусть же Σ и $\Sigma' = \Sigma + \sigma$ будут два ряда, входящие в состав C_3; для обоих в конце движений палец находится в M; отсюда следует, что в начале и в конце ряда σ палец находится в той же точке M; следовательно, ряд σ — один из тех рядов, которые соответствуют движениям, когда палец не шевелится. Если Σ и $\Sigma + \sigma$ не считать различными, то все ряды C_3 сольются в один, поэтому C_3 будет иметь 0 измерений и C_0, как я хотел доказать, будет иметь 3 измерения. Если же, напротив, Σ и $\Sigma + \sigma$ я не считаю сливающимися (исключая тот случай, когда $\sigma = S + S'$, где S и S' обратимы), то ясно, что C_3 будет содержать в себе множество рядов различных ощущений, ибо при полной неподвижности пальца тело может принимать много различных положений. Тогда C_3 образует непрерывность и C_0 будет иметь более трех измерений, а это я и хотел доказать.

Не будучи еще знакомы с геометрией, мы не можем рассуждать таким образом; мы можем только констатировать. Но тогда возникает вопрос, как, еще не зная геометрии, мы научились отличать от других те ряды σ, где палец остается неподвижным; ведь в самом деле, только установив это различие, мы получим возможность рассматривать Σ и $\Sigma + \sigma$ как тождественные, а только при таком условии, как мы видели, можно прийти к пространству трех измерений.

Мы научились различать ряды σ, потому что часто бывает, что когда мы совершили движения, которые соответствуют этим рядам мускульных ощущений σ, тогда осязательные ощущения, переданные нам нервом пальца, который мы назвали первым пальцем, продолжаются, и эти движения не изменяют их. Опыт учит нас этому, и только он один мог научить нас этому.

Ряды мускульных ощущений $S + S'$, образованные соединением двух обратных рядов, мы отличали потому, что они сохраняли совокупность наших впечатлений; если теперь мы различаем ряды σ, так это потому, что они сохраняют *некоторые* из наших впечатлений. (Когда я говорю, что ряд мускульных ощущений S «сохраняет» одно из наших впечатлений A, то я хочу сказать, что мы устанавливаем, что если испытываем впечатление A, а потом мускульные ощущения S, то мы *еще* будем испытывать впечатление A *после* этих ощущений S.)

Выше я сказал — *часто* бывает, что ряды σ не изменяют осязательных впечатлений, испытываемых нашим первым пальцем; я сказал — *часто*, но не сказал — *всегда*; это мы выражаем на нашем обычном языке, говоря, что осязательное впечатление не изменилось бы, если бы палец не пошевелился, *при условии*, что предмет A, который соприкасался с этим пальцем, также не пошевелился. Ранее знакомства с геометрией мы не можем дать этого объяснения; мы можем только констатировать, что впечатление удерживается часто, но не всегда.

Но уже достаточно того, что оно часто удерживается, чтобы ряды σ представились нам *примечательными*, чтобы нам пришлось причислить к одному и тому же классу ряды Σ и $\Sigma + \sigma$ и затем не считать их различными. При этих условиях, как мы видели, они произведут физическую непрерывность трех измерений.

Вот, следовательно, пространство трех измерений, порожденное моим первым пальцем. Каждый из моих пальцев породит ему подобное. Останется исследовать, как мы пришли к тому, что рассматриваем их как тождественные визуальному пространству и тождественные геометрическому пространству.

Но прежде чем идти дальше, мы остановимся на одном размышлении; по предыдущему мы узнаем о точках пространства или — более общо — о *конечном* положении нашего тела только при посредстве рядов мускульных ощущений, открывающих нам те движения, которые перевели нас из некоторого начального положения в это конечное положение. Но ясно, что это конечное положение будет зависеть, с одной стороны, от этих движений, а *с другой стороны, от того начального положения*, из которого мы вышли. Эти движения открываются нам нашими мускульными ощущениями; но нам неоткуда узнать о начальном положении; мы ничем не можем отличить его от всех других возможных положений. Вот что ясно доказывает существенную относительность пространства.

§ 4. Тождество различных пространств

Итак, мы пришли к сравнению двух непрерывностей C и C', которые произведены, например, одна при посредстве моего первого пальца D, другая при посредстве моего второго пальца D'. И та и другая из этих двух непрерывностей имеют три измерения. Каждому элементу непрерывности C или, если угодно, каждой точке первого осязательного пространства соответствует ряд мускульных ощущений Σ, которые заставляют меня переходить из некоторого начального положения в некоторое конечное положение[1]). Сверх того, одна и та же точка этого первого пространства будет соответствовать Σ и $\Sigma + \sigma$, если σ

[1]) Вместо того чтобы говорить, что мы относим пространство к осям, неизменно связанным с нашим телом, быть может, было бы лучше сказать, сообразно с предыдущим, что мы относим его к осям, неизменно связанным с начальным положением нашего тела.

представляет собой ряд, о котором мы знаем, что он не вызывает движения со стороны пальца D.

Также и каждому элементу непрерывности C' или каждой точке второго тактильного пространства соответствует ряд ощущений Σ', и одна и та же точка будет соответствовать Σ' и $\Sigma' + \sigma'$, если σ' представляет собой ряд, который не вызывает движения со стороны пальца D'.

Итак, различать ряды σ и σ' нас заставляет то обстоятельство, что первые не изменяют осязательных впечатлений, испытываемых пальцем D, а вторые сохраняют впечатления, которые испытывает палец D'.

И вот что мы констатируем: вначале мой палец D' испытывает ощущение A'; я делаю движения, которые вызывают мускульные ощущения S; мой палец D испытывает впечатление A; я делаю движения, которые вызывают ряд ощущений σ; мой палец D продолжает испытывать впечатление A, потому что таково характерное свойство рядов σ; затем я делаю движения, которые вызывают ряд мускульных ощущений S', *обратный* S в том же смысле, какой мы дали этому слову выше. Тогда я констатирую, что мой палец D' испытывает снова впечатление A' (разумеется, для этого нужно, чтобы S был выбран надлежащим образом).

Это значит, что ряд $S + \sigma + S'$, сохраняющий осязательные впечатления пальца D', есть один из тех рядов, которые я обозначил через σ'. Обратно, если взять какой-нибудь ряд σ', то $S' + \sigma' + S$ будет одним из тех рядов, которые мы обозначаем через σ.

Итак, если S надлежаще выбран, то $S + \sigma + S'$ будет рядом σ' и, варьируя σ всеми возможными способами, можно получить все возможные ряды σ'.

Не будучи еще знакомы с геометрией, мы ограничиваемся констатацией этого, но вот как объяснили бы факт те, кто знает геометрию.

Сначала мой палец D' находится в точке M в соприкосновении с предметом a, который сообщает ему впечатление A'; я делаю движения, соответствующие ряду S, я сказал, что этот ряд должен быть надлежаще выбран; я должен произвести этот выбор так, чтобы эти движения приводили палец D в точку, первоначально занимаемую пальцем D', т. е. в точку M; таким образом, этот палец D будет соприкасаться с предметом a, который сообщит ему впечатление A.

Потом я делаю движения, соответствующие ряду σ; среди этих движений, по предположению, положение пальца D не меняется, следовательно, этот палец остается в соприкосновении с предметом a и продолжает испытывать впечатление A. Наконец, я делаю движения, соответствующие ряду S'. Так как S' обратен S, то эти движения приведут палец D' в точку, которую раньше занимал палец D, т. е. в точку M. Если, как это можно предположить, предмет a не пошевелился, то этот палец D окажется в соприкосновении с этим предметом и снова испытает впечатление A', что и требовалось доказать.

Посмотрим, что отсюда вытекает. Я рассматриваю ряд мускульных ощущений Σ; этому ряду будет соответствовать одна точка M первого тактильного пространства. Теперь возьмем два ряда S и S', взаимно обратные, о которых мы только что говорили, Ряду $S+\Sigma+S'$ будет соответствовать одна точка N второго тактильного пространства, потому что какому-нибудь ряду мускульных ощущений, как мы сказали, соответствует одна точка либо в первом, либо во втором пространстве.

Я намерен рассматривать две определенные таким образом точки M и N как соответствующие друг другу. Что дает мне право на это? Для того чтобы это соответствие было допустимо, нужно, чтобы при существовании тождества двух точек M и M', соответствующих в первом пространстве рядам Σ и Σ', было также тождество двух соответствующих точек N и N' второго пространства, т. е. тождество двух точек, соответствующих двум рядам $S+\Sigma+S'$ и $S+\Sigma'+S'$. И мы сейчас увидим, что это условие выполнено.

Сделаем сначала одно замечание. Так как S и S' взаимно обратимы, то $S+S'=0$, следовательно,

$$S+S'+\Sigma=\Sigma+S+S'=\Sigma,$$

или еще

$$\Sigma+S+S'+\Sigma'=\Sigma+\Sigma';$$

но из этого не следует, чтобы $S+\Sigma+S'=\Sigma$; потому что, хотя мы и воспользовались знаком сложения для того, чтобы представить последовательность наших ощущений, однако ясно, что порядок этой последовательности не безразличен; поэтому мы не можем, как в обыкновенном сложении, менять порядок членов; короче говоря, наши операции ассоциативны, но не коммутативны.

Если так, то для того, чтобы Σ и Σ' соответствовали той же самой точке $M = M'$ первого пространства, необходимо и достаточно, чтобы $\Sigma' = \Sigma + \sigma$; тогда будем иметь

$$S + \Sigma' + S' = S + \Sigma + \sigma + S' = S + \Sigma + S' + S + \sigma + S'.$$

Но мы только что констатировали, что $S + \sigma + S'$ есть один из рядов σ'. Следовательно, получим

$$S + \Sigma' + S' = S + \Sigma + S' + \sigma',$$

а это значит, что ряды $S + \Sigma' + S'$ и $S + \Sigma + S'$ соответствуют одной и той же точке $N = N'$ второго пространства, что и требовалось доказать.

Итак два наших пространства соответствуют друг другу, точка — точке; они могут быть «преобразованы» одно в другое; они изоморфны; как мы пришли к заключению об их тождестве?

Рассмотрим два ряда σ и $S + \sigma + S' = \sigma'$. Я сказал, что часто, но не всегда, ряд σ сохраняет осязательное впечатление A, испытываемое пальцем D; а также часто (но не всегда) бывает, что ряд σ' сохраняет осязательное впечатление A', испытываемое пальцем D'. И я констатирую, что *очень часто* (т. е. гораздо чаще, чем то, что я сейчас назвал «часто») бывает, что если ряд σ сохранил впечатление A пальца D, то ряд σ' сохраняет в то же самое время впечатление A' пальца D'; и обратно — что если первое впечатление изменилось, то изменилось и второе. Это бывает *очень часто*, но не всегда.

Мы объясняем этот экспериментальный факт, говоря, что неизвестный предмет a, который вызывает ощущение A в пальце D, тождествен с неизвестным предметом a', который вызывает ощущение A' в пальце D'. И в самом деле, когда первый предмет шевелится, о чем нам дает знать исчезновение впечатления A, второй также шевелится, потому что впечатление A' также исчезает. Когда первый предмет остается неподвижным, неподвижным остается и второй предмет. Если эти два предмета тождественны, то — так как первый находится в точке *M* первого пространства, второй же в точке *N* второго пространства, — это значит, что эти две точки тождественны. Вот как мы пришли к представлению о тождестве этих двух пространств; или — лучше — вот, что мы хотим сказать, когда говорим, что они тождественны.

Сказанное только что о тождестве двух тактильных пространств избавляет нас от исследования вопроса о тождестве тактильного пространства и пространства визуального, так как он рассматривался бы тем же самым способом.

§ 5. Пространство и эмпиризм

Можно подумать, что я скоро дойду до заключений, согласных с идеями эмпириков. Действительно, я старался изложить роль опыта и проанализировать те экспериментальные факты, которые оказывают влияние на происхождение пространства трех измерений. Но какова бы ни была важность этих фактов, есть одно обстоятельство, которого нам не следует забывать и на которое, впрочем, я не один раз обращал внимание. Эти экспериментальные факты сбываются часто, но не всегда. Очевидно, это не значит, что пространство часто, но не всегда имеет три измерения.

Я хорошо знаю, что легко отделаться от этого; если факты не подтверждаются, то это легко объяснить тем, что внешние предметы не остались неподвижными. Если опыт удается, то говорят, что он дает нам сведения о пространстве; если он не удается, то сваливают вину на внешние предметы, говоря, что они не остались неподвижными; другими словами, если он не удается, то применяют искусственный прием.

Эти ухищрения законны; я вполне согласен с этим; но раз они есть, то мы знаем, что свойства пространства не суть экспериментальные истины в собственном смысле этого слова. Если бы мы захотели оправдать другие законы, то могли бы также достигнуть этого, пользуясь другими аналогичными ухищрениями. Разве мы не могли бы всегда оправдывать эти ухищрения теми же самыми доводами? В крайнем случае нам могли бы сказать: «ваши ухищрения без сомнения законны, но вы злоупотребляете ими; к чему так часто заставлять двигаться внешние предметы?».

Словом, опыт не доказывает нам, что пространство имеет три измерения; он доказывает, что удобно приписывать ему три измерения, потому что именно таким образом число ухищрений сводится к минимуму[1]).

Прибавлю, что опыт всегда заставлял нас приходить в соприкосновение только с пространством представлений, которое является физической непрерывностью, а не с геометрическим пространством, которое есть непрерывность математическая. Самое большее, он мог бы научить нас, что удобно наделять геометрическое пространство тремя измерениями, чтобы оно имело столько же измерений, сколько и пространство представлений.

Эмпирический вопрос может представиться в другом виде. Можно ли воспринимать явления физические, например механические явления, иначе, чем в пространстве трех измерений? Если нет, то мы имели бы, таким образом, объективное экспериментальное доказательство, так сказать, не зависящее от нашей физиологии, от наших способов представления.

Но это не так; я не стану рассматривать здесь вопрос полностью, а ограничусь тем, что напомню разительный пример, который дает нам механика Герца.

Известно, что великий физик не верил в существование сил в собственном смысле слова; он полагал, что видимые материальные точки подчинены некоторым невидимым связям, соединяющим их с другими невидимыми точками и что именно действие этих невидимых связей мы и приписываем силам.

Но это только одна часть его идей. Вообразим систему, составленную из n материальных — видимых или невидимых — точек; это даст всего-навсего $3n$ координат; будем рассматривать их как координаты *единственной* точки в пространстве $3n$ измерений. Эта единственная точка была бы принуждена оставаться на поверхности (какого-нибудь числа измерений, ко-

---

[1]) Это субъективистское толкование было подвергнуто справедливой критике В. И. Ленина, о чем говорится в статье «Анри Пуанкаре и наука начала XX века» (с. 681—682).

торое меньше $3n$) в силу тех связей, о которых мы только что говорили; для того чтобы передвинуться на этой поверхности с одного места на другое, точка всегда избирала бы кратчайший путь; это был бы единственный принцип, который резюмировал бы всю механику.

Что бы ни думать об этой гипотезе — прельщаться ли ее простотой, возмущаться ли ее искусственностью, — достаточно одного того факта, что Герц мог придумать ее и считать ее более удобной, чем наши обычные гипотезы, чтобы доказать, что наши обычные идеи, и в частности три измерения пространства, ничуть не необходимо навязываются механику.

§ 6. Ум и пространство

Следовательно, опыт сыграл только одну роль, он послужил поводом. Но тем не менее эта роль была очень важна, и я счел необходимым отметить ее. Эта роль была бы бесполезна, если бы существовала априорная форма, налагаемая на наше чувственное восприятие в виде пространства трех измерений.

Существует ли эта форма, или, если угодно, можем ли мы представить себе пространство более чем трех измерений? И, прежде всего, что означает этот вопрос? В прямом смысле слова ясно, что мы не можем представить себе ни пространства четырех, ни пространства трех измерений; прежде всего, мы не можем представить себе их пустыми, и так же мы не можем представить себе какой-нибудь предмет ни в пространстве четырех, ни в пространстве трех измерений: 1) потому что оба эти пространства бесконечны, и мы не могли бы представить себе фигуру *в* пространстве, т. е. часть *в* целом, не представляя себе целого, а это невозможно, потому что это целое бесконечно; 2) потому что оба эти пространства суть математические непрерывности, а мы можем представить себе только физическую непрерывность; 3) потому что оба эти пространства однородны, а те кадры, в которые мы заключаем наши ощущения, будучи ограниченными, не могут быть однородными.

Итак, поставленный вопрос можно понимать только одним образом: можно ли вообразить, что при различных результатах опытов, которые были изложены выше, мы должны были бы приписывать пространству более чем три измерения — вообразить, например, что ощущение аккомодации не всегда находится в согласии с чувством схождения глазных осей или же что те опыты, о которых мы говорили в § 2 и результат которых мы выразили в словах «осязание не действует на расстоянии», привели бы нас к обратному заключению.

И тогда очевидно: да, это возможно; в момент, когда воображают опыт, тем самым воображают два противоположных результата, которые он может дать. Это возможно, но и трудно, потому что нам надо преодолеть множество ассоциаций идей, являющихся плодом долгого личного опыта и еще более долгого родового опыта. Не эти ли ассоциации (или по крайней мере те из них, которые мы унаследовали от предков) составляют ту априорную форму, чистую интуицию которой мы будто бы имеем? Тогда я не вижу, почему же признавать ее неподчиняющейся анализу и лишать меня права искать ее происхождение.

Когда говорят, что наши ощущения «протяженны», то можно под этим подразумевать только одну вещь — это то, что они всегда оказываются ассоциированными с идеей известных мускульных ощущений, соответствующих тем движениям, которые позволяли бы достигнуть вызывающего их предмета, другими словами, которые позволяли бы защищаться от этих предметов. И именно потому, что эта ассоциация полезна для самозащиты организма, и является она столь древней в истории вида, именно поэтому она кажется нам извечной. Тем не менее это только ассоциация — и можно вообразить, что она нарушена; так что нельзя говорить, что ощущение не может войти в сознание без того, чтобы не войти в пространство, но можно сказать, что оно в действительности не входит в сознание без того, чтобы не войти в пространство, т. е. без того, чтобы эта ассоциация не захватила его.

Я не могу также понять, когда говорят, что идея времени логически следует за пространством, потому что мы можем представить себе время только в виде прямой; это почти то же, что сказать: время логически следует за обработкой полей, потому что обычно его представляют вооруженным косой. Что нельзя представить себе одновременно различные части времени, это само собой понятно, потому что существенное свойство этих частей — именно не быть одновременными. Но это не значит, что нет интуиции времени. Если бы было так, то не было бы также и интуиции пространства, потому что ведь и его невозможно представить себе в собственном смысле слова — по причинам, которые я высказал. То, что мы представляем себе под названием прямой, есть грубый образ, который так же плохо походит на геометрическую прямую, как и на время.

Почему говорят, что всякая попытка приписать пространству четвертое измерение всегда приводит последнее к одному из трех других? Это легко понять. Рассмотрим наши мускульные ощущения и те «ряды», которые они могут образовывать. Вследствие многочисленных опытов идеи этих рядов ассоциированы между собой в очень сложную связь, наши ряды *классифицированы*. Пусть позволят мне для удобства речи выразить мою мысль очень грубым и даже неточным способом; а именно — я говорю, что наши ряды мускульных ощущений классифицированы в трех классах, соответствующих трем измерениям пространства. Конечно, эта классификация на самом деле гораздо сложнее, но достаточно будет и этого, чтобы сделать понятным мое рассуждение. Если я пожелаю вообразить четвертое измерение, то я предположу другой ряд мускульных ощущений, составляющий часть четвертого класса. Но так как *все* мои мускульные ощущения уже были причислены к одному из трех предсуществующих классов, то я могу представить себе только ряд, принадлежащий к одному из этих трех классов, так что мое четвертое измерение сводится к одному из трех других.

Что это доказывает? То, что надо было бы прежде уничтожить прежнюю классификацию и заменить ее новой, где ряды мускульных ощущений были бы разложены на четыре класса. Трудность исчезла бы.

Иногда ее представляют в более разительном виде. Предположим, что я заперт в комнате между шестью непроницаемыми перегородками, образуемыми четырьмя стенами, потолком и полом; мне невозможно будет выйти из нее и вообразить, что я выхожу из нее. — Простите, не можете ли вы вообразить, что открывается дверь или что две из этих стен раздвигаются? — Но, конечно, ответят, нужно предположить, что эти стены остаются неподвижными. — Да, но очевидно, что я-то имею право шевелиться; и тогда стены, предполагаемые нами в абсолютном покое, будут относительно меня в относительном движении. — Да, но подобное относительное движение не может быть каким угодно, когда предметы в покое, — относительное движение их относительно каких-нибудь осей есть движение неизменного твердого тела; кажущиеся же движения, которые вы воображаете, не согласуются с законами движения неизменного твердого тела. — Да, но ведь только опыт научил нас законам движения неизменного твердого тела; ничто не помешало бы *вообразить*, что они различны. Короче говоря, чтобы представить себе, что я выхожу из своей тюрьмы, мне надо только представить себе, что стены кажутся раздвигающимися, когда я двигаюсь.

Поэтому я думаю, что если мы под пространством разумеем математическую непрерывность трех измерений, хотя бы аморфную, так это ум создает его, но создает не из ничего, ему нужны материалы и модели. Эти материалы и модели предсуществуют в нем. Но нет такой единственной модели, которая бы предписывалась ему; за ним *выбор*; он может выбирать, например, между пространством четырех и пространством трех измерений. В чем же тогда роль опыта? Он дает уму указания, согласно которым последний делает свой выбор.

Другое дело: откуда является у пространства его количественный характер? Он вытекает из той роли, которую играют в его происхождении ряды мускульных ощущений. Эти ряды могут *повторяться*, и именно от повторения их происходит число; пространство бесконечно именно потому, что они могут повторяться бесконечно. И наконец, мы видели в конце § 3, что именно поэтому пространство относительно. Итак, именно повторяемость и дала пространству его существенные свойства; но повторяемость предполагает время; этого достаточно, чтобы сказать, что время логически предшествует пространству.

§ 7. Роль полукружных каналов

Я не говорил до сих пор о роли известных органов, которым физиологи основательно приписывают выдающееся значение. Я имею в виду полукружные каналы. Многочисленные опыты достаточно показали, что эти каналы необходимы для нашего чувства ориентировки; но физиологи не вполне согласны между собой: предложены две противоположные теории, одна — теория Маха — Делажа, другая — Циона.

Цион — физиолог, прославивший свое имя важными открытиями относительно инервации сердца; однако я не могу разделять его идеи в вопросе, который нас занимает. Не будучи физиологом, я не решаюсь критиковать опыты, которые он направил против противоположной теории Маха — Делажа; однако мне кажется, что они не убедительны, потому что в большинстве из них давление изменялось *во всем* канале, тогда как — физиологически — изменяется *разность* давлений на двух концах канала; в других опытах органы были глубоко повреждены, что должно было изменить их функции.

Впрочем, это маловажно; если бы опыты были безупречны, то они могли бы убедительно говорить против старой теории — но *не в пользу* новой. В самом деле, если я хорошо понял теорию, то мне будет достаточно изложить ее, чтобы стало понятно, что невозможно вообразить опыт, который подтверждал бы ее.

У трех пар каналов была бы единственная функция — извещать нас, что пространство имеет три измерения. Японские мыши имеют только две пары каналов; по-видимому, они думают, что пространство имеет только два измерения, и обнаруживают это мнение удивительнейшим образом; они строятся в круг, причем каждая из них прячет свой нос под хвост предыдущей, и, построившись таким образом, они начинают быстро кружиться. Миноги, обладая только одной парой каналов, думают, что пространство имеет только одно измерение, но их проявления менее беспорядочны

Очевидно, что подобная теория неприемлема. Назначение органов чувств — извещать нас о тех *изменениях*, которые происходят во внешнем мире. Было бы непонятно, для чего творец дал бы нам органы, назначение которых беспрестанно кричать нам: помни, что пространство имеет три измерения, потому что число этих трех измерений не подлежит изменению.

Следовательно, мы должны вернуться к теории Маха — Делажа. Нервы каналов могут сообщать нам о разности давления на двух концах одного и того же канала, и, следовательно:

1) о направлении вертикали по отношению к трем осям, неизменно связанным с головой;

2) о трех слагающих ускорения поступательного движения центра тяжести головы;

3) о центробежных силах, развивающихся вследствие вращения головы;

4) об ускорении вращательного движения головы.

Из опытов Делажа вытекает, что это последнее показание есть и самое важное — без сомнения, потому, что нервы менее чувствительны к разности давления самой по себе, чем к резким изменениям этой разности. Таким образом, тремя первыми показаниями можно пренебречь.

Зная ускорение вращательного движения головы в каждый момент, мы бессознательным интегрированием выводим отсюда окончательную ориентацию головы, отнесенную к некоторой исходной ориентации, принятой за начало. Следовательно, полукружные каналы, подобно мускульным ощущениям, помогают нам узнавать о сделанных нами движениях. Поэтому, когда выше мы говорили о ряде S или о ряде Σ, мы должны были бы сказать, что это были не только ряды мускульных ощущений, но ряды мускульных ощущений и ощущений, происходящих от полукружных каналов. Кроме этого добавления, нам не пришлось бы ничего изменять в предыдущем.

В этих рядах S и Σ ощущения полукружных каналов, очевидно, занимают весьма важное место. Однако их одних не было бы достаточно, потому что они могут извещать нас только о движениях головы, но ничего не говорят нам об относительных движениях туловища или членов по отношению к голове. Кроме того, кажется, что они извещают нас только о поворотах головы, но не об испытываемых ею поступательных движениях.

Часть II

ФИЗИЧЕСКИЕ НАУКИ

Глава V

АНАЛИЗ И ФИЗИКА

I

Несомненно, вам неоднократно задавали вопрос: для чего нужна математика? Не являются ли все эти тонкие построения, которые мы полностью черпаем из своего ума, искусственным плодом нашей прихоти?

Я должен установить различие между людьми, задающими подобные вопросы. Люди практические требуют от нас только способов наживы денег. Эти люди не заслуживают ответа. Скорее следовало бы их спросить, для чего накапливают они богатства и нужно ли тратить время на их приобретение и пренебрегать искусством и наукой, которые только и делают наш дух способным наслаждаться, et propter vitam vivendi perdere causam [1]).

К тому же наука, созданная исключительно в прикладных целях, невозможна; истины плодотворны только тогда, когда между ними есть внутренняя связь. Если ищешь только тех истин, от которых можно ждать непосредственных результатов, то связующие звенья ускользают и цепь распадается.

Люди, относящиеся с полным презрением к теории, тем не менее, не колеблясь, извлекают из нее постоянные выгоды; если бы они лишились этих выгод, то это быстро остановило бы прогресс, и мы застыли бы в косности, подобно Китаю.

Но не будем больше говорить об этих неисправимых практиках. Рядом с ними существуют люди, стремящиеся исключительно к познанию природы, которые обращаются к нам с вопросом, в состоянии ли мы

---

[1]) И ради сохранения жизни утратить ее смысл (*лат.*, из Ювенала). — *Примеч. ред.*

оказать им помощь в более глубоком понимании природы.

Чтобы ответить этим людям, нам достаточно только указать на два уже воздвигнутых монументальных сооружения — небесную механику и математическую физику.

Нет сомнения, — с нами согласятся, что эти сооружения сто́ят положенного на них труда; но этого не достаточно.

Математика преследует троякую цель. Она должна давать орудие для изучения природы. Но это не все: она преследует цель философскую, и — я решаюсь сказать — эстетическую.

Математика должна помогать философу углубляться в понятия числа, пространства и времени.

Люди, посвященные в ее тайны, вкушают наслаждения, подобные тем, которые дает нам живопись и музыка. Они восторгаются изящной гармонией чисел и форм; они приходят в восхищение, когда какое-нибудь новое открытие раскрывает перед ними неожиданные перспективы. Разве в наслаждениях, испытываемых этими людьми, нет эстетического характера, несмотря даже на то, что чувства в этих состояниях не принимают никакого участия? Правда, только немногие избранные призваны к тому, чтобы вполне вкусить эти наслаждения. Но разве это не имеет места и в случае наиболее благородных искусств?

Поэтому я, не колеблясь, скажу, что математика заслуживает развития сама по себе и что теории, которые не могут быть применимы в физике, должны развиваться так же, как и другие. Если бы даже цели физики и цели эстетики не совпадали между собой, мы не должны были бы приносить в жертву ни тех, ни других. Более того, эти два рода целей неразделимы, и лучшее средство достигнуть одних — это преследовать другие или, по крайней мере, никогда не упускать их из виду. Я постараюсь доказать это, точно определяя сущность взаимного отношения между чистой наукой и ее приложениями.

Математик не должен быть простым поставщиком формул для физика; между ними необходимо более тесное сотрудничество

Математическая физика и чистый анализ не только граничат друг с другом, как две державы, сохраняющие отношения доброго сеседства, но они проникают друг в друга и имеют одну и ту же душу. Это станет более понятным, когда я укажу, что́ приобретает физика от математики и чем, наоборот, математика пользуется от физики.

II

Физик не может обращаться к аналитику с требованием открыть ему какую-либо новую истину. В лучшем случае аналитик мог бы помочь ему предугадать ее.

Уже давно никто не помышляет больше опережать опыт или строить целое мироздание на основании нескольких незрелых гипотез. От всех этих построений, которыми наивно удовлетворялись еще столетие тому назад, ныне не осталось ничего, кроме развалин.

Итак, все законы выводятся из опыта. Но для выражения их нужен специальный язык. Обиходный язык слишком беден, кроме того, он слишком неопределенен для выражения столь богатых содержанием точных и тонких соотношений.

Таково первое основание, по которому физик не может обойтись без математики; она дает ему единственный язык, на котором он в состоянии изъясняться.

Точно определенный язык — вещь весьма не безразличная. Возьмем пример из области той же физики. Неизвестный изобретатель слова «теплота» ввел в заблуждение целые поколения. Теплоту стали рассматривать как вещество (просто потому, что она была названа именем существительным) и стали считать ее неуничтожаемой.

Но, с другой стороны, тот, кто ввел в науку слово «электричество», снискал незаслуженную честь подарить физике новый закон — закон сохранения электричества, который, благодаря чистой случайности, оказался точным; так, по крайней мере, было до настоящего времени.

Писатели, украшающие язык и относящиеся к нему как к объекту искусства, этим самым делают из него орудие более гибкое, более приспособленное для передачи всех оттенков мысли. Так и аналитик, преследующий чисто эстетические цели, содействует созиданию языка, более приспособленного к тому, чтобы удовлетворить физика.

Это еще не все. Закон вытекает из опыта, но он следует из него не непосредственно. Опыт индивидуален, а закон, который из него извлекается, имеет характер общности. Опыт бывает только приближенным; закон является точным или, по крайней мере, имеет притязание на точность. Опыт всегда осуществляется в сложных условиях — формулировка закона исключает их; это называется «исправлением систематических погрешностей». Словом, чтобы вывести закон из опыта, необходимо обобщать; этой необходимости подчиняется даже наиболее осмотрительный наблюдатель.

Но каким образом строить эти обобщения? Каждая частная истина, очевидно, может быть широко истолкована бесчисленным множеством способов. Из тысячи путей, открывающихся перед нами, необходимо сделать выбор, по крайней мере предварительный; кто будет руководить нами в этом выборе?

Этим руководителем может быть только аналогия. Но как неопределенно это слово! Человек с примитивным мировоззрением знает только грубые аналогии, действующие на чувства, аналогии в красках и звуках. Он не стал бы думать, например, об установлении связи между светом и лучистой теплотой.

Но кто же научил нас познанию истинных, глубоких аналогий таких, которых не видит глаз, но которые отгадывает разум?

Этому научил нас математический ум, который пренебрегает содержанием, чтобы иметь дело только с чистой формой. Это он научил нас называть одним и тем же именем все сущности, отличающиеся только своим содержанием; он научил нас называть одним именем, например, умножение кватернионов и умножение целых чисел.

Если бы кватернионы, о которых я только что упомянул, не нашли столь скорого применения у английских физиков, многие без сомнения увидели бы в них только праздное мечтание; но все же они, научая нас сближать то, что по внешнему виду так различно, сделали нас более способными проникать в тайны природы.

Таковы услуги, которых физик должен ожидать от анализа. Но для того, чтобы эта наука могла их ему оказать, ей необходимо развиваться самым широким образом, без непосредственной заботы о пользе; необходимо, чтобы математик работал, как артист. Мы обращаемся к нему только с одной просьбой — помочь нашему зрению, помочь нам отыскать путь в развертывающемся перед нами лабиринте. Но всего лучше видит тот, кто поднялся всех выше. Примеров множество; я ограничусь только наиболее разительными.

Первый пример покажет нам, как бывает достаточно изменить язык, чтобы заметить обобщения, которых раньше никто не подозревал.

В то время, когда закон Ньютона заменил закон Кеплера, было известно только эллиптическое движение. По отношению к этому движению оба закона разнятся между собой только по форме; можно перейти от одного к другому простым дифференцированием.

Но между тем из закона Ньютона можно путем непосредственного обобщения вывести все эффекты возмущений и всю небесную механику. Напротив, если бы сохранился способ выражения, данный Кеплером, то никто не стал бы рассматривать возмущенные орбиты планет — эти сложные кривые линии, для которых никто никогда не писал уравнения, — как естественные обобщения эллипса. Весь прогресс наблюдений послужил бы только усилению веры в хаос.

Второй пример также заслуживает подробного размышления.

В то время, когда Максвелл начал свои труды, законы электродинамики, принятые до него, объясняли все известные явления. Он приступил к работе не потому, чтобы какой-либо новый опыт ограничил значение этих законов. Но рассматривая их под новым углом зрения, Максвелл увидел, что уравнения становятся более симметричными, если в них ввести некоторый член, хотя, с другой стороны, этот член был слишком мал, чтобы вызвать явления, который могли бы быть оценены прежними методами.

Известно, что априорные взгляды Максвелла ждали своего экспериментального подтверждения в течение двадцати лет; если вам больше нравится другое выражение, — Максвелл опередил опыт на двадцать лет. Как он достиг этого триумфа?

Это произошло благодаря тому, что Максвелл был глубоко проникнут чувством математической симметрии; могло ли это быть, если бы до него другие не искали этой симметрии ради ее собственной красоты?

Это произошло благодаря тому, что Максвелл привык «мыслить векторами». Но векторы вошли в анализ через посредство теории мнимых величин. А те, кто изобрел мнимые величины, нисколько и не подозревали, что ими воспользуются для изучения реального мира: на это указывает достаточно ясно самое название этих величин.

Максвелл, быть может, и не был искусным аналитиком, но эта опытность была бы для него бесполезным и стеснительным бременем. Зато он в высшей степени обладал внутренним чувством математических аналогий. Вот почему он стал хорошим математическим физиком.

Пример Максвелла учит нас еще и другому.

Как следует нам обращаться с уравнениями математической физики? Должны ли мы просто выводить из них все следствия и рассматривать их как неощущаемые реальности? Нет, далеко не так. Главным образом они должны нас учить тому, что можно и что следует в них изменять. Только таким образом мы можем извлечь из них что-либо полезное.

Третий пример покажет нам, каким образом можем мы заметить математические аналогии в ряду явлений, с физической точки зрения не состоящих ни в кажущемся, ни в реальном соотношении такого рода, чтобы законы одного из этих явлений помогали нам догадываться о законах другого.

Одно и то же уравнение Лапласа встречается в теориях ньютоновского тяготения, движения жидкостей, электрического потенциала, в теории магнетизма, в теории теплопроводности и еще во многих других.

Что отсюда следует? Эти теории кажутся изображениями, скопированными одно с другого; они взаимно освещают одна другую, заимствуя друг у друга свой язык. Спросите у специалистов по теории электричества, не радуются ли они изобретению понятия о силовом потоке, внушенного гидродинамикой и теорией теплоты. Итак, математические аналогии не только дают нам возможность предчувствовать физические аналогии, но не перестают быть полезными и в том случае, когда последние оказываются ошибочными.

Резюмируем сказанное. Цель математической физики заключается не только в том, чтобы облегчить физику вычисление некоторых постоянных или интегрирование некоторых дифференциальных уравнений. Она состоит еще в том, чтобы знакомить физика со скрытой гармонией вещей, показывая их ему под новым углом зрения.

Из всех сторон анализа наиболее возвышенны, наиболее, так сказать, прозрачны как раз те, которые будут наиболее плодотворны в руках, умеющих ими пользоваться.

III

Посмотрим теперь, чем анализ обязан физике.

Нужно было бы окончательно забыть историю науки, чтобы не помнить, что стремление познать природу имело самое постоянное и самое счастливое влияние на развитие математики.

Во-первых, физик ставит перед нами проблемы, решения которых он ждет от нас. Но задавая нам эти проблемы, он тем самым уже щедро оплачивает услугу, которую мы ему можем оказать, если нам удастся их разрешить.

Я позволю себе продолжить сравнение с изящными искусствами. Если бы чистый математик забыл о существовании внешнего мира, то он уподобился бы художнику, который умеет гармонически сочетать краски и формы, но у которого нет моделей. Его творческая сила скоро иссякла бы.

Числа и символы могут образовать бесконечное множество сочетаний. Как нам выбрать из этого множества те сочетания, которые заслуживали бы нашего внимания? Подчинимся ли мы исключительно руководству нашей прихоти? Эта прихоть, которая к тому же сама скоро выдохлась бы, увлекла бы нас, без сомнения, далеко друг от друга, и мы скоро перестали бы понимать друг друга.

Но это еще менее важная сторона вопроса.

Физика, без сомнения, помешает нам впасть в заблуждение, но она предохранит нас от еще более грозной опасности; она воспрепятствует нам безостановочно вращаться в одном и том же кругу. История показывает, что физика не только побуждала нас к выбору из целого множества представлявшихся нам проблем; она также ставила перед нами такие проблемы, о которых мы без нее никогда и не подумали бы.

Как ни разнообразна фантазия человека, природа еще в тысячу раз богаче. Чтобы следовать за нею, нам приходится вступать на пути, на которые мы не обращали внимания; а эти пути приводят нас часто к вершинам, откуда мы открываем новые кругозоры. Что может быть более полезно!

О математических символах можно сказать то же, что о физических реальностях. Только сравнивая различные стороны вещей, мы будем в состоянии понять их внутреннюю гармонию, которая одна только прекрасна и, следовательно, достойна наших трудов.

Первый пример, какой я приведу, настолько стар, что могло бы явиться искушение его забыть. Тем не менее он важнее всех прочих.

Единственный естественный предмет математической мысли есть целое число. Непрерывность была внушена нам внешним миром. Она, без сомнения, изобретена нами, но изобрести ее нас вынудил внешний мир.

Без него не было бы анализа бесконечно малых. Все математическое знание свелось бы к арифметике или к теории подстановок.

Но мы, напротив, посвятили изучению непрерывности почти все наше время, почти все наши силы. Кто пожалеет об этом? Кто станет считать, что это время и эти силы были потеряны?

Анализ развертывает перед нами безграничные перспективы, о которых не подозревает арифметика. Он показывает нам с одного взгляда грандиозный ансамбль, распорядок которого прост и симметричен, напротив того — в теории чисел, где царит непредвиденность, взор встречает препятствия на каждом шагу.

Вам, без сомнения, скажут, что вне целого числа нет строгости, а следовательно, нет математической истины, что оно скрывается всюду и что нужно стараться разоблачить его покровы, хотя бы для этого пришлось обречь себя на нескончаемые повторения.

Но мы не будем столь строги; мы будем признательны непрерывности, которая, если даже *всё* исходит из целого числа, одна только была способна извлечь из него *так много.*

Нужно ли напоминать, как Эрмит получил поразительные результаты от введения непрерывных переменных в теорию чисел? Таким образом, подверглась вторжению область целого числа в собственном смысле, и это вторжение водворило порядок в царстве хаоса.

Всем этим мы обязаны непрерывности, а следовательно, физической природе.

Ряд Фурье является ценным инструментом, постоянно употребляемым в анализе. Благодаря именно этому средству оказалось возможным изображать прерывные функции. Но Фурье изобрел его, имея целью решение одной физической проблемы, касающейся распространения тепла. Если бы не была естественным образом поставлена эта проблема, никогда бы не решились отдать должное прерывности и долго бы еще смотрели на непрерывные функции как на единственные истинные функции.

Благодаря этому понятие функции значительно расширилось и получило у некоторых аналитиков-логиков непредвиденное развитие.

Эти аналитики пустились в области, где царствует наиболее чистая абстракция, и удалились от реального мира настолько, насколько это возможно. Однако повод к этому им был доставлен физической проблемой.

Вслед за рядом Фурье в область анализа вошли другие аналогичные ряды. Они вошли в ту же дверь: они были придуманы в прикладных целях.

Теория уравнений второго порядка с частными производными имела подобную же историю. Она развивалась главным образом через физику и для нее. Она может принимать множество форм, ибо для определения неизвестной функции недостаточно одного подобного уравнения: необходимо добавить дополнительные так называемые граничные условия; отсюда вытекает много разных проблем. Если бы аналитики предались своим естественным стремлениям, они знали бы из них только одну — ту самую, которая рассмотрена Софьей Ковалевской в ее знаменитом мемуаре[1]). Все множество других проблем осталось бы неизвестным.

Каждая физическая теория — теория электричества, теория теплоты — представляет нам эти уравнения под новым видом. Итак, можно сказать, что без них мы не знали бы уравнений с частными производными.

Бесполезно было бы множить примеры. Сказанного достаточно, чтобы вывести такое заключение: когда физики требуют от нас решения проблемы, они не бремя возлагают на нас, но, напротив, заслуживают нашей благодарности.

IV

Но это не все. Физика не только дает нам повод к решению проблем; она еще помогает нам найти к этому средства. Это происходит двояким путем.

Во-первых, она дает нам предчувствие решения; во-вторых, подсказывает нам ход рассуждений.

Выше я уже говорил об уравнении Лапласа, которое встречается во множестве весьма далеких друг от друга физических теорий. Его же находим мы в геометрии (в теории конформного преобразования) и в чистом анализе (в теории мнимых величин).

Таким образом, аналитик, изучающий функции комплексных переменных, кроме обычного своего орудия — геометрического представления, — находит ряд физических образов, которые он может использовать с таким же успехом.

Благодаря этим образам он в состоянии сразу видеть то, что было бы лишь постепенно обнаружено путем чистой дедукции. Так, он соединяет разрозненные элементы решения и путем некоторого рода интуиции

---

[1]) Вероятно, имеется в виду мемуар Софьи Ковалевской, посвященный вращению твердого тела вокруг фиксированной точки, за который Парижская Академия наук присудила ей в 1888 г. премию Бордена. Позднее этой проблеме были посвящены труды С. А. Чаплыгина, Н. Е. Жуковского, Леви-Чивита и др.

Перевод мемуара опубликован в книге «Движение твердого тела вокруг неподвижной точки» (М.; Л., 1940), посвященной памяти С. В. Ковалевской. См. также: Ковалевская С. В. Научные работы. — М., 1948. — *Примеч. ред.*

догадывается о том, что будет доказано лишь впоследствии.

Догадка предшествует доказательству! Нужно ли указывать, что именно так были сделаны все важные открытия?

Сколько истин позволяют нам предчувствовать физические аналогии, оправдать которые путем строгого рассуждения мы были бы не в состоянии!

Вот пример. Математическая физика употребляет множество разложений в ряды. Никто не сомневается в сходимости этих рядов, несмотря на отсутствие математической достоверности. Будущие исследователи одержат здесь несомненные победы.

С другой стороны, физика дает нам не только решения; в известной мере она дает нам и метод рассуждения. Достаточно напомнить, как Клейн воспользовался свойствами электрических токов при исследовании одного вопроса, относящегося к поверхностям Римана. Правда, рассуждения этого рода не строги в том смысле, в каком термин «строгость» употребляется аналитиками.

В связи с этим можно поставить вопрос: как может физик удовлетворяться доказательством, которое не достаточно строго с точки зрения аналитика?

По-видимому, не может быть двух степеней строгости; либо строгость налицо, либо ее нет; там, где ее нет, не может быть и умозаключения. Мы лучше поймем этот кажущийся парадокс, вспомнив те условия, при которых число находит применение к явлениям природы.

В чем, вообще говоря, источник затруднений, с которыми встречаются требования точности? На них почти всегда натыкаются в то время, когда хотят доказать, что такая-то величина стремится к такому-то пределу или что известная функция непрерывна, или что она имеет производную.

Но числа, которые физик измеряет в опыте, всегда бывают известны ему лишь приближенно; с другой стороны, произвольная функция всегда сколь угодно мало отличается от некоторой прерывной функции, и в то же время она также сколь угодно мало отличается от непрерывной функции.

Поэтому физик может по произволу предполагать изучаемую функцию прерывной или непрерывной, имеющей производную или не имеющей ее; у него нет оснований опасаться стать в противоречие с каким бы то ни было опытом, ни современным, ни будущим. При такой свободе он, понятно, смеется над трудностями, удерживающими аналитика.

Он всегда может рассуждать так, как если бы все функции, входящие в его выкладки, были целыми многочленами.

Итак, беглый взгляд, достаточный для физики, не есть то умозаключение, к которому стремится анализ. Отсюда не следует, что первый не был в состоянии помочь отыскать второе. В форму строгих доказательств превращено столь много физических заключений, что теперь это превращение делается легко. Я мог бы привести множество примеров, если бы не опасался утомить внимание читателя.

Я надеюсь, что мною сказано достаточно для оправдания мысли: чистый анализ и математическая физика могут приносить друг другу пользу без какой-либо жертвы со своей стороны; каждая из этих наук должна радоваться всякому возвышению другой.

Глава VI

АСТРОНОМИЯ

Правительства и парламенты должны считать астрономию одной из самых дорогих наук: самый малый инструмент стоит сотни тысяч франков, самая небольшая обсерватория — миллионы; каждое затмение влечет за собой дополнительные кредиты. И все это — ради светил, которые так далеки, которые совершенно чужды нашим избирательным распрям и, вероятно, никогда не примут в них никакого участия. Для этого нашим политическим деятелям надо сохранять остатки идеализма, смутное влечение к величественному. По правде говоря, я думаю, что на них немало клевещут. Следует ободрить их, показать им ясно, что этот инстинкт не обманывает их, что они не обмануты своим идеализмом.

Можно было бы, конечно, рассказать им о морском деле, важность которого признается всеми и для которого необходима астрономия. Но это значило бы обращать внимание на менее важную сторону вопроса.

Астрономия полезна, потому что она возвышает нас над нами самими; она полезна, потому что она величественна; она полезна, потому что она прекрасна,— вот что надо говорить. Именно она являет нам, как ничтожен человек телом и как он велик духом, ибо ум его в состоянии объять сияющие бездны, где его тело является лишь темной точкой, в состоянии наслаждаться их безмолвной гармонией. Так приходим мы к сознанию своей мощи. Здесь никакая цена не может быть слишком дорогой, потому что это сознание делает нас сильнее

Но прежде всего я хотел бы показать вам, в какой степени астрономия облегчила дело других наук, приносящих более непосредственную пользу, облегчила тем, что сообщила нашей душе способность понимать природу.

Можете ли вы представить себе, насколько ниже стояло бы человечество, если бы, живя под небом, постоянно покрытым облаками, как небо Юпитера, оно никогда не знало бы звезд? Думаете ли вы, что в таком мире мы стали бы тем, что мы есть? Я согласен, что под этим мрачным небосводом мы были бы лишены солнечного света, необходимого для таких организмов, как обитающие на Земле. Но, если угодно, допустим, что эти облака фосфоресцируют, рассеивая приятный и постоянный свет: раз мы стоим на пути гипотез, ничего не стоит ввести одну лишнюю. Итак, я повторяю свой вопрос: полагаете ли вы, что в таком мире мы стали бы тем, что́ мы есть?

Звезды шлют нам не только видимый и грубо ощущаемый свет, действующий на наше телесное око; от них исходит также иной, более тонкий свет, проясняющий наш ум. Я попытаюсь обнаружить перед вами его действия. Вы знаете, что представлял собою человек на Земле за несколько тысяч лет до нашего времени, и что представляет он теперь. Один, окруженный природой, где все для него было тайной, смущаемый каждым неожиданным проявлением непостижимых для него сил, он был неспособен видеть в мировом процессе что-либо кроме произвола; он относил все явления к действию множества мелких духов, своенравных и взыскательных, и чтобы воздействовать на мир, он старался склонить их к себе средствами, подобными тем, которые употребляются с целью снискать расположение министра или депутата. Даже его неудачи не просвещали его, подобно тому как проситель, которого выпроводили, еще не бывает обескуражен до такой степени, чтобы прекратить свои искания.

В настоящее время мы уже не обращаемся к природе с просьбами: мы приказываем ей благодаря тому, что мы открыли некоторые из ее тайн и ежедневно открываем новые. Мы приказываем ей во имя законов, которых она не может не принять, ибо это ее законы; мы не обращаемся к ней с нелепым требованием изменить эти законы — мы первые готовы подчиняться им. Naturae non imperatur nisi parendo [1]).

Какому изменению должен был подвергнуться наш ум, чтобы перейти от одного состояния к другому! Можно ли думать, что он переродился бы столь быстро без влияния уроков небесных светил, под тем вечно облачным небом, которое я только что предложил? Возможно ли было бы превращение или, по крайней мере, не сделалось ли бы оно гораздо более медленным?

Это астрономия прежде всего открыла нам существование законов. Халдеи, которые раньше других народов стали смотреть на небо с некоторым вниманием, ясно заметили, что это множество светящихся точек представляет собой не рассеянную толпу, блуждающую по воле случая, а дисциплинированную армию. Без сомнения, законы этой дисциплины не были ясны для них, но гармонического зрелища звездной ночи было достаточно для того, чтобы дать им впечатление упорядоченности, и это уже много значило. Гиппарх, Птолемей, Коперник, Кеплер разложили эту упорядоченность на отдельные элементы, и, наконец, почти излишне вспоминать, как Ньютоном был высказан самый старый, самый точный, самый простой, самый общий из всех законов природы.

И тогда, наученные этим примером, мы стали пристальнее всматриваться в наш земной мирок и, под

---

[1]) Природой невозможно повелевать, не подчиняясь ей (*лат.*). — *Примеч. ред.*

кажущимся беспорядком, нашли и здесь гармонию, которую открыло нам изучение неба. Здесь та же упорядоченность, то же подчинение неизменным законам; но эти законы более сложны, одни из них кажущимся образом противоречат другим, и непривычный глаз увидел бы здесь лишь хаос и царство случая или произвола. Если бы мы не знали звезд, то, быть может, некоторые смелые умы стремились бы предвидеть физические явления; но они терпели бы постоянные неудачи, возбуждая тем лишь насмешку толпы. Так и теперь на наших глазах обманываются иногда метеорологи, и некоторые люди смеются над этим.

Сколько раз физики могли пасть духом от множества испытываемых неудач, если бы в них не поддерживал веры блестящий пример успеха астрономов! Этот успех показывал им, что природа подчинена законам; им оставалось лишь узнать эти законы: для этого им нужно было только терпение, и они имели право требовать, чтобы скептики оказали им доверие.

Мало того. Астрономия не только открыла нам существование законов; она научила нас, что эти законы непреложны, что идти против них невозможно. Сколько времени понадобилось бы нам для усвоения этой мысли, если бы мы знали только земной мир, где каждая элементарная сила всегда представляется нам как бы в борьбе с другими силами? Астрономия открыла нам, что законы беспредельно точны, и если мы выражаем их лишь приближенно, то это потому, что плохо знаем их. Аристотель, наиболее ученый ум древности, еще допускал участие случая, случайности и, по-видимому, думал, что законы природы — по крайней мере на Земле — определяют лишь общие черты явлений. Как много содействовала возрастающая точность астрономических предсказаний тому, чтобы осудить это ошибочное воззрение, которое сделало бы природу непостижимой!

Но, быть может, эти законы имеют лишь местное значение, меняясь от одной точки к другой, подобно законам, которые создают люди? То, что истинно в одном уголке Вселенной, например на Земле или в нашей небольшой Солнечной системе, быть может, стало бы ложным несколько далее? А в таком случае можно спросить себя: законы, зависящие от пространства, не зависят ли также от времени, не являются ли они просто как бы навыками, следовательно, преходящими и эфемерными? На этот вопрос отвечает опять-таки астрономия. Посмотрите на двойные звезды: все они описывают конические сечения; таким образом, всюду, куда только достигает телескоп, беспредельно простирается область подчинения закону Ньютона. Все в этом законе, включая и самую простоту его, поучительно для нас. Сколько сложных явлений содержится в двух строчках, составляющих его выражение! Люди, не знающие небесной механики, могут составить представление об этом хотя бы по объему трактатов, посвященных этой науке. Но в таком случае позволительно надеяться, что за сложностью физических явлений точно так же скрывается некоторая простая причина, неизвестная до сих пор.

Итак, именно астрономия открыла нам, в чем состоят общие черты явлений природы. Но в числе этих черт есть одна, которая тоньше всех и важнее всех. Я позволю себе остановиться на ней.

Как понимали мировой порядок древние, например Пифагор, Платон или Аристотель? Это был или неизменный, раз навсегда установленный тип, или идеал, к которому мир стремится приблизиться. Так думал еще Кеплер, например, когда он отыскивал связь между расстояниями планет от Солнца и пятью правильными многогранниками. В этой идее не было ничего нелепого, но она была бесплодна, потому что природа не такова. Не кто иной, как Ньютон, показал нам, что закон есть лишь необходимое соотношение между настоящим состоянием мира и состоянием, непосредственно следующим. Все другие законы, открытые позднее, дают то же самое: это — в итоге — дифференциальные уравнения. Именно астрономия дала нам первую модель, без которой мы, конечно, очень долго витали бы в заблуждениях.

Она же прочнее всего внушила нам не доверять видимости. В тот день, когда Коперник показал, что то, что считалось наиболее устойчивым, находится в движении, а что считалось подвижным, покоится, тогда обнаружилось, как могут быть обманчивы детские рассуждения, являющиеся прямыми следствиями непосредственных данных наших чувств. Его идеи восторжествовали, конечно, не без труда. Но после этого торжества уже нет такого застарелого предрассудка, от которого мы не в силах были бы освободиться. Как оценить приобретенное таким образом новое оружие?

Древние считали, что все существует для человека. Надо думать, что эта иллюзия очень упорна, потому что с ней постоянно приходится бороться. Тем не менее надо от нее отрешиться, иначе пришлось бы навсегда остаться близорукими, неспособными видеть истину. Чтобы понимать природу, надо уметь, так сказать, выйти из себя и созерцать ее с нескольких различных точек зрения, иначе мы всегда будем знать лишь одну ее сторону. Но не может выйти из себя тот, кто все относит к себе. Кто же освободил нас от этой иллюзии? Те, кто показал нам, что Земля есть лишь одна из самых малых планет Солнечной системы и что сама Солнечная система — только незаметная точка в беспредельных пространствах звездной Вселенной.

В то же время астрономия научила нас не пугаться больших чисел. Это было необходимо не только для познания неба, но и для познания Земли; и это было не столь легко, как представляется нам теперь.

Попробуем мысленно вернуться в былое и представить себе, что подумал бы древний грек, если бы ему сказали, что красный свет соответствует четыремстам миллионам миллионов колебаний в секунду. Без всякого сомнения, подобное утверждение показалось бы ему чистой нелепицей, и он никогда бы не подумал заняться его проверкой. В настоящее время гипотеза уже не покажется нам нелепой только оттого, что она заставляет нас воображать объекты, значительно бóльшие или меньшие в сравнении с теми, которые доступны нашим чувствам. Мы уже не понимаем тех сомнений, которые останавливали наших предков и мешали им открыть некоторые истины просто потому, что они пугались этих истин. А это произошло оттого, что мы видели беспредельное расширение небесной сферы; оттого, что мы знаем, что Солнце отстоит на 150 миллионов километров от Земли и что расстояния до наиболее близких звезд еще в сотни тысяч раз больше этого. Привыкнув к созерцанию бесконечно большого, мы стали способны понимать бесконечно малое. Благодаря полученному воспитанию, наше воображение может смотреть в лицо истине, подобно орлу, чей глаз не ослепляется Солнцем.

Итак, не имел ли я права сказать, что именно астрономия сообщила нашей душе способность понимать природу; что под небом, вечно облачным, лишенным звезд, самая Земля была бы для нас навсегда непостижима; что мы видели бы здесь лишь произвол и беспорядок и что, не зная мира, мы не могли бы подчинить его себе. Какая же наука могла быть более полезна? Говоря так, я становлюсь на точку зрения тех, кто ценит лишь практические применения. Это, конечно, не моя точка зрения. Напротив, если я удивлюсь завоеваниям техники, то это прежде всего потому, что они, освобождая нас от материальных забот, дадут некогда всем досуг созерцать природу. Я не говорю: наука полезна потому, что она научает нас создавать машины; я говорю: машины полезны, потому, что, работая для нас, они некогда оставят нам больше времени для научных занятий. Наконец, не безразлично отметить, что между двумя точками зрения нет несогласия и что если человек преследует бескорыстную цель, то прочее ему приложится.

Огюст Конт где-то сказал, что тщетно было бы стараться узнать состав Солнца, так как это знание не могло бы принести никакой пользы для социологии. Как он мог быть так близорук? Не видели ли мы только что, как благодаря именно астрономии человечество перешло,— употребляя его способ выражения, — от фазы теологической к фазе позитивной. В этом-то он отдавал себе отчет, так как это был факт. Но как он не понимал, что подлежащее еще осуществлению не менее значительно и должно принести не меньше выгод! Физическая астрономия, которую он, по-видимому, осуждает, начала уже приносить нам плоды и принесет еще много других — ведь она родилась только вчера.

Прежде всего, мы узнали природу Солнца, которую основатель позитивизма хотел сделать запретной для нас, и нашли там вещества, существующие на Земле, которые мы раньше здесь не замечали: например, гелий, газ, почти столь же легкий, как водород. Это уже было первой ошибкой Конта. Но мы обязаны спектроскопии гораздо более драгоценными сведениями: на самых отдаленных звездах она открывает нам все те же вещества. Можно было поставить вопрос: не произошли ли земные элементы благодаря случайности, которая, сблизив более мелкие индивидуумы, произвела более сложное построение, носящее у химиков имя атома? Не могли ли в других областях Вселенной другие случайные встречи произвести построения, совершенно отличные? Мы знаем теперь, что это не так, что законы нашей химии — общие законы природы, и что они ничем не связаны со случайностью, поселившей нас на Земле.

Но, скажут, астрономия дала другим наукам все, что могла, и теперь, когда небо предоставило орудия, позволяющие изучать земную природу, оно могло бы без вреда закрыться навечно. После того, что сказано, есть ли надобность отвечать на это возражение? Можно было бы рассуждать так в эпоху Птолемея; и тогда уже верили в полноту знания, между тем почти все знание было еще впереди.

Небесные тела — грандиозные лаборатории, гигантские тигли, о каких не мог бы грезить ни один химик. Там царствуют температуры, осуществление которых невозможно для нас. Одна беда — что они слишком далеки; но телескоп приблизит их к нам, и тогда мы увидим, каково на них состояние вещества. Какой счастливый случай для физика и химика!

Вещество представится нам здесь в тысяче различных состояний — от разреженных газов, по-видимому, образующих туманности, сверкающих светом какого-то таинственного происхождения, вплоть до раскаленных звезд и планет, столь близких к нашей и все же отличных от нее. Возможно, даже, что некогда небесные тела откроют нам что-нибудь о происхождении жизни. Это кажется безумной грезой, и я совершенно не вижу, как она могла бы осуществиться; но разве сто лет тому назад не показалась бы безумной грезой и химия небесных тел?

Однако ограничим наши взгляды менее отдаленными горизонтами. У нас впереди обязательства, менее гадательные и все же очень привлекательные. Если прошлое много дало нам, то мы можем быть уверены, что будущее даст еще больше.

В итоге трудно поверить, в какой степени вера в астрологию оказалась полезной для человечества. Ежели Кеплер и Тихо Браге могли существовать, то это благодаря тому, что они продавали наивным королям предсказания, основанные на сочетаниях звезд. Если бы эти владетели не были столь легковерны, то мы, быть может, продолжали бы думать, что природа подчинена произволу, и до сих пор коснели бы в невежестве.

Глава VII

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ[1]

Прошедшее и будущее физики. Каково современное состояние математической физики? В чем состоят проблемы, к постановке которых она пришла? Каково ее будущее? Стоит ли ее развитие у поворотной точки? Предстанут ли десять лет спустя цель и методы этой науки пред нашими ближайшими преемниками в том же освещении, как перед нами, или, напротив, нам придется быть свидетелями коренного преобразования? Таковы те вопросы, которые мы вынуждены задать, приступая сегодня к нашему исследованию.

Если поставить их легко, то ответить на них трудно. Если бы мы почувствовали искушение вступить на рискованный путь предсказаний, то этому искушению легко было бы оказать противодействие, вспомнив все те нелепости, какие произносились сто лет тому назад самыми выдающимися учеными в ответ на вопрос: чем будет наука в XIX веке. Они считали свои предсказания смелыми; но какими робкими находим мы их теперь, после того как события произошли! Поэтому не ждите от меня пророчеств.

Но если я, подобно благоразумному врачу, отказываюсь делать прогноз, то все же не могу освободить себя от краткого диагноза: да, в самом деле имеются признаки серьезного кризиса, и нам как будто следует ждать близких перемен. Однако не

[1] Главы VII, VIII и IX представляют собой перепечатку известного доклада автора L'état actuel et l'avenir de la Physique mathématique на Конгрессе искусств и науки в Сент-Луисе в сентябре 1904 г. — *Примеч. ред.*

будем чересчур беспокоиться. Мы уверены, что больная не умрет; мы можем даже надеяться, что этот кризис будет благотворным, ибо история прошлого, по-видимому, дает в этом гарантию. Действительно, такой кризис происходит не в первый раз, и чтобы его понять, надобно вспомнить предыдущие. Поэтому простите, если я сделаю несколько кратких исторических замечаний.

Физика центральных сил. Как мы знаем, математическая физика родилась из небесной механики: эта последняя породила ее в конце XVIII века, в ту пору, когда сама она только что достигла полного развития. В течение первых лет дитя поразительно походило на мать.

Вселенная, изучаемая астрономами, состоит из масс, несомненно очень огромных, но разделенных столь необъятными расстояниями, что нам они представляются просто материальными точками; эти точки притягивают друг друга с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, и это притяжение есть единственная сила, влияющая на их движения. Но если бы наши чувства были достаточно утонченны, чтобы показать нам все детали строения тел, изучаемых физиками, то картина, которая открывалась бы нам, едва ли отличалась бы от той, которую наблюдает астроном. И здесь мы увидели бы материальные точки, отделенные друг от друга расстояниями, огромными сравнительно с их размерами, и описывающие орбиты согласно определенным законам. Эти бесконечно малые звезды не что иное, как атомы. Как настоящие звезды, они притягиваются или отталкиваются между собой, и это притяжение или отталкивание, направленное по прямой, их соединяющей, зависит только от расстояния. Закон, согласно которому эта сила меняется в зависимости от расстояния, быть может, не есть закон Ньютона, но он аналогичен ему; вместо показателя степени 2 мы имеем здесь, вероятно, другой показатель, и именно от этой перемены показателя происходит все разнообразие физических явлений, многообразие качеств и ощущений, весь мир, окружающий нас, мир красок и звуков, словом — вся природа.

Такова первоначальная концепция во всей ее чистоте. Остается лишь искать в различных случаях, какое значение следует приписать показателю степени, чтобы описать все наблюдаемые факты.

По этому образцу, например, Лаплас построил свою изящную теорию капиллярности; он рассматривает капиллярность просто как частный случай действия сил притяжения или, как он говорит, всемирного тяготения, и никто не изумляется, находя ее в середине одного из пяти томов небесной механики. Позднее Брио полагал, что он проник в последнюю тайну оптики, доказывая, что атомы эфира притягиваются обратно пропорционально 6-й степени расстояния; и даже сам Максвелл в одном месте говорит, что атомы газов отталкиваются обратно пропорционально 5-й степени расстояния. Мы имеем показатель 6 или 5 вместо 2, но, во всяком случае, показатель налицо.

Между теориями этой эпохи только одна представляет исключение — теория Фурье, относящаяся к распространению тепла; здесь есть, конечно, атомы, взаимодействующие на расстоянии; они передают друг другу тепло, но они не притягиваются, они не двигаются с места. С этой точки зрения теория Фурье должна была представляться его современникам и даже ему самому несовершенной и предварительной.

Изложенная концепция не лишена величия; она была привлекательной, и многие из наших современников не отказались от нее окончательно; они знают, что последних элементов вещей нельзя достигнуть иначе, как терпеливым распутыванием сложного узла, который дают нам наши чувства, что идти вперед нужно шаг за шагом, не пропуская ни одной промежуточной ступени, что наши предшественники заблуждались, думая достигнуть цели одним переходом; однако они верят, что когда мы придем к этим последним элементам, мы опять найдем здесь величественную простоту небесной механики.

Эта концепция отнюдь не была бесполезна; она оказала нам неоценимую услугу, так как помогла получить точную формулировку одного из фундаментальных понятий — понятия физического закона. Поясню мою мысль. Как понимали *закон* древние? Для них это была внутренняя гармония, так сказать,— статическая и неизменная; или же это была как бы модель, которой природа стремится подражать. Для нас же закон — нечто совсем иное: это — постоянное соотношение между тем, что происходит сегодня, и тем, что будет завтра; словом, это есть дифференциальное уравнение.

Такова идеальная форма физического закона; и впервые в нее был облачен закон Ньютона. Если впоследствии эта форма прочно обосновалась в физике, то это произошло благодаря возможно более точному копированию ньютонова закона, т. е. благодаря подражанию небесной механике. В этом и состоит мысль, которую я старался провести в шестой главе.

Физика принципов. Однако настал день, когда концепция центральных сил оказалась уже недостаточной, и это был первый из кризисов, упомянутых мною.

Как тогда поступили? Отказались от попыток проникнуть в детали строения Вселенной, от изоляции составных частей этого огромного механизма, от анализа каждой отдельной силы, действующей на эти части, и удовлетворились тем, что взяли в качестве руководства некоторые общие принципы, значение которых как раз состоит в том, что они освобождают нас от этих кропотливых исследований. Как же это возможно? Пусть перед нами какая-то машина; нам видны лишь ее первое и последнее колесо, а все передачи, все промежуточные колеса, передающие движение от одного колеса к другому, скрыты внутри и ускользают от нашего взгляда; мы не знаем, производится ли передача при помощи зубчатых колес или ремней, при помощи шатунов или еще как-нибудь иначе. Разве мы скажем, что мы не в состоянии ничего понять в этой машине до тех пор, пока нам не позволят ее разобрать? Конечно, нет, ведь принцип сохранения энергии дает нам возможность решить самый интересный вопрос: мы легко устанавливаем, что выходное колесо вращается в десять раз медленнее входного, поскольку оба эти колеса нам видны; отсюда мы можем заключить, что пара сил, действующая на первое, будет уравновешивать в десять раз бóльшую пару, приложенную ко второму. Для этого нет никакой нужды проникать в механизм такого равновесия и узнавать, каким образом силы будут уравновешиваться внутри машины; достаточно знать, что это уравновешивание не может не произойти.

Ту же самую услугу может оказать нам принцип сохранения энергии по отношению к Вселенной. Это — тоже машина; она гораздо сложнее всех машин, применяемых в технике, и почти все ее составные части глубоко скрыты от нас; но наблюдая движение тех, которые для нас видимы, мы можем при помощи этого принципа сделать выводы, которые остаются справедливыми, каковы бы ни были детали невидимого механизма, приводящего их в движение.

Принцип сохранения энергии (или принцип Майера) есть, без сомнения, самый важный, но не единственный. Имеются другие, из которых мы можем извлечь ту же пользу. Это именно:

принцип Карно, или *принцип рассеяния энергии* [1]);

принцип Ньютона, или *принцип равенства действия и противодействия*;

принцип относительности, согласно которому законы физических явлений должны оставаться теми же как для неподвижного наблюдателя, так и для наблюдателя, увлекаемого равномерным поступательным движением, так что мы не имеем и не можем иметь никакого средства различить, находимся ли мы в таком движении или нет;

принцип сохранения массы, или принцип Лавуазье.

Я добавил бы еще *принцип наименьшего действия.*

Приложение этих пяти или шести общих принципов к различным физическим явлениям является достаточным средством узнать то, на познание чего мы можем разумно рассчитывать. Наиболее замечательный пример этой новой математической физики есть, несомненно, электромагнитная теория света, созданная Максвеллом. Что такое эфир, как расположены его молекулы, притягиваются они или отталкиваются? Мы об этом ничего не знаем; но мы знаем, что эта среда одновременно передает как световые возмущения, так и возмущения электрические; мы знаем, что эта передача должна совершаться в соответствии с общими принципами механики, и этого оказывается

---

[1]) В подлиннике, de la dégradation de l'energie. — *Примеч. ред.*

достаточно, чтобы вывести уравнения электромагнитного поля.

Эти принципы суть результат опытов, обобщенных в сильной степени; но, по-видимому, сама их общность придает им высокую степень достоверности. Действительно, чем они более общи, тем чаще представляется случай проверять и контролировать их, и результаты проверок, накопляясь, принимая самые разнообразные, самые неожиданные формы, в конце концов уже не оставляют места сомнению.

Полезность старой физики. Таков второй период истории математической физики, и мы еще не вышли за его пределы. Скажем ли мы, что первый период был бесполезен, что в течение пятидесяти лет наука шла неправильным путем и что нам остается лишь забыть все огромные усилия, заведомо обреченные на неудачу вместе с ошибочной концепцией? Ни в коем случае. Неужели вы думаете, что второй период мог бы наступить, минуя первый? Гипотеза центральных сил содержала в себе все принципы; она заключала их в себе в качестве необходимых следствий; из нее вытекали и принцип сохранения энергии, и принцип сохранения масс, и равенство действия и противодействия, и принцип наименьшего действия. Правда, эти положения выступали не как экспериментальные истины, а как теоремы, и формулировка их была одновременно более точной и менее общей, чем современная.

И именно математическая физика наших отцов мало-помалу сроднила нас с этими различными принципами, приучила узнавать их под разнообразными одеяниями, в которые они маскируются. Эти принципы были сопоставлены с опытными данными; было выяснено, какие видоизменения их формы необходимы для того, чтобы привести их в соответствии с этими данными; это расширило и укрепило их содержание. Таким образом, появился взгляд на них как на экспериментальные истины; концепция центральных сил стала тогда бесполезной и даже стесняющей, так как свойственный ей гипотетический характер передавался и принципам.

Таким образом, основа научных идей благодаря своей гибкости не подверглась ломке, но расширилась; наши отцы, устанавливая ее, трудились не напрасно; общий характер намеченного ими плана мы узнаем в науке нашего времени.

Глава VIII

СОВРЕМЕННЫЙ КРИЗИС МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Новый кризис. Предстоит ли нам теперь вступить в третий период? Должны ли мы ожидать второго кризиса? Будут ли принципы, на которых мы построили все, в свою очередь разрушаться? С некоторого времени мы имеем основание ставить такие вопросы.

Мои слова, несомненно, вызывают у вас мысль о радии, этом великом революционере нашего времени, и, действительно, я вскоре к нему обращусь; но этого мало: дело идет не только о сохранении энергии; опасности подвергаются и все другие принципы, как это мы сейчас увидим при последовательном обозрении их.

Принцип Карно. Начнем с принципа Карно. Это — единственный принцип, который не следует непосредственно из гипотезы центральных сил; более того, по-видимому, он если и не противоречит прямо этой гипотезе, то по крайней мере может быть согласован с ней лишь путем определенных усилий. Если бы физические явления обусловливались исключительно движениями атомов, взаимные притяжения которых зависели бы только от расстояния, то, кажется, все эти явления должны быть обратимыми; если бы все начальные скорости были заменены прямо противоположными, то атомы, находясь под действием все тех же сил, должны были бы описывать свои траектории в обратном направлении точно так же, как Земля стала бы описывать в обратном направлении ту же самую эллиптическую орбиту, какую она описывает в прямом направлении, если бы начальные условия ее движения были заменены противоположными. В силу этого, если некоторое физическое явление оказывается возможным, то должно быть возможным и обратное ему, и должна существовать возможность обратить вспять течение времени. Однако в природе дело обстоит не так, и этому как раз учит нас принцип Карно: тепло может перейти от теплого тела к холодному, но невозможно заставить его затем совершить обратный путь и вновь осуществить исчезнувшую разность температур. Движение может быть полностью рассеяно и посредством трения превращено в теплоту; обратное же превращение может быть осуществлено только частично.

Были попытки примирить это кажущееся противоречие. Если Вселенная стремится к единообразию, то это не потому, что ее мельчайшие части, вначале различные, стремятся сделаться все более сходными, но потому что они, перемещаясь случайным образом, в конце концов перемешиваются. Для глаза, который различал бы все элементы, различие все еще оставалось бы столь же большим; каждая крупинка сохраняет свою оригинальность и не будет похожа на своих соседок; но когда они перемешиваются все более тесно, наши грубые чувства воспринимают уже только однообразие. Вот почему, например, температуры стремятся выравниться, и обратный процесс оказывается невозможным.

Пусть капля вина падает в стакан воды; каков бы ни был закон внутреннего движения жидкости, мы вскоре увидим, как она окрашивается в однообразный розоватый цвет. С этого момента, как бы сильно мы ни трясли сосуд, вино и вода уже не смогут разделиться. Вот другой типичный пример необратимого физического явления: нетрудно спрятать ячменное зерно в ворохе ржи, но практически невозможно отыскать и извлечь его оттуда. Все это было разъяснено Максвеллом и Больцманом, но наиболее точно изложил этот вопрос Гиббс в своих «Основных принципах статистической механики» — книге, несколько трудной для чтения и поэтому слишком мало распространенной.

Для тех, кто принял эту точку зрения, принцип Карно есть принцип несовершенный — нечто вроде уступки слабости наших органов чувств: только потому, что глаза наши недостаточно остры, мы не различаем элементов в смесях, лишь оттого, что наши руки слишком грубы, мы не можем эти элементы разделить; демон, придуманный Максвеллом, который мог бы сортировать отдельные молекулы, сумел бы дать Вселенной обратный ход. Не исключено, что это случится само собой; однако вероятность этого бесконечно мала. Нам, вероятно, долго пришлось бы ждать такого стечения обстоятельств, которое допускало бы обратный ход; но рано или поздно оно осуществится, хотя на это может потребоваться такое число лет, для написания которого понадобились бы миллионы цифр. Однако такие оговорки имеют чисто теоретический характер; они не внушают особого беспокойства, и принцип Карно сохраняет все свое практическое значение. Но вот где картина меняется. Биолог, вооруженный микроскопом, уже давно заметил в своих препаратах беспорядочные движения мелких взвешенных частиц; это так называемое броуновское движение. Вначале он полагал, что это движение есть проявление жизни; но скоро обнаружилось, что неодушевленные тела танцуют с не меньшей энергией, тогда явление перешло в ведение физиков. К сожалению, физики долго не проявляли интереса к этому вопросу, они размышляли так: для освещения микроскопического препарата концентрируют свет; но света без теплоты не бывает; это создает неравенства температуры и внутренние потоки в жидкости; эти потоки и вызывают движения, о которых идет речь.

Гуи решил исследовать вопрос более тщательно; он пришел к выводу, что такое объяснение не подходит; движения становятся тем быстрее, чем мельче частицы, а способ освещения на них не влияет. Итак, если эти движения не прекращаются или, лучше сказать, беспрестанно возобновляются, не получая энергии у какого-либо внешнего источника, то что же нам следует думать? Несомненно, это не дает нам основания отрицать принцип сохранения энергии, но мы видим, как в наших глазах то движение в результате трения превращается в теплоту, то наоборот, теплота превращается в движение, и это происходит без каких-либо потерь, так как движение продолжается все время. Это противоречит принципу Карно. Если так, то нам более не нужен бесконечно изощренный глаз максвеллова демона, чтобы видеть обратный ход мирового механизма: достаточно нашего микроскопа. Тела значительных размеров, например в десятую долю миллиметра, подвергаются со всех сторон ударам движущихся атомов, но сами не приходят в движение, так как эти удары столь многочисленны, что они компенсируют друг друга по закону случайных явлений; частицы же более мелкие получают слишком мало ударов для того, чтобы компенсация осуществлялась наверняка, и потому они беспрестанно колеблются. И вот один из наших принципов уже находится в опасности.

Принцип относительности. Обратимся к принципу относительности. Его не только подтверждает ежедневный опыт; он не только является необходимым следствием гипотезы центральных сил, он непререкаемым образом навязывается нашему здравому рассудку; однако и в нем пробита брешь. Вообразим два наэлектризованных тела; хотя они кажутся нам покоящимися, однако оба они увлекаются движением Земли. Как доказал Роуленд, движущийся электрический заряд эквивалентен току; поэтому два таких заряженных тела будут равносильны двум параллельным токам, направленным одинаково; а такие два тока должны притягивать друг друга. Измеряя это притяжение, мы измерим скорость Земли: не скорость ее относительно Солнца или неподвижных звезд, а ее абсолютную скорость.

Я хорошо знаю, что мне на это возразят: здесь, скажут, изменяется не абсолютная скорость Земли, а скорость ее по отношению к эфиру. Как мало удовлетворяет такой довод! Разве не очевидно, что при таком понимании принципа из него уже ничего нельзя извлечь? Он уже не мог бы нас ничему научить с достоверностью, потому что для него не было бы более опасным никакое опровержение. Произведя то или иное измерение, мы всегда могли бы сказать: это де — не абсолютная скорость, и если это — не скорость по отношению к эфиру, то всегда это может быть скоростью относительно какой-то новой неизвестной жидкости, которой мы можем заполнить пространство.

Да и опыт опровергает такое толкование принципа относительности; все попытки измерить скорость Земли относительно эфира дали отрицательный результат. На этот раз экспериментальная физика оказалась более верной принципу, чем физика математическая; теоретики не стали бы им дорожить, чтобы согласовать другие свои общие взгляды, но опыт настойчиво его подтверждает. Применялись различные приемы, наконец Майкельсон довел точность до последних пределов, все же ничего не было обнаружено. И вот, чтобы объяснить эти упрямые факты, математики вынуждены теперь изощрять все свое остроумие.

Их задача была нелегкой. Если Лоренц преодолел затруднения, то только путем нагромождения гипотез.

Наибольшим остроумием отличалась идея местного времени. Вообразим двух наблюдателей, которые желают выверить свои часы при помощи световых сигналов; они обмениваются сигналами, но, зная, что свет распространяется не мгновенно, дают их, так сказать, перекрестным способом. Когда наблюдатель в пункте B принимает сигнал из пункта A, его часы должны показывать не то время, которое показывали часы в пункте A в момент отправления сигнала, а время, увеличенное на некоторую постоянную, представляющую собой длительность передачи. Пусть, например, из пункта A посылается сигнал, когда часы в нем показывают время 0, а в пункте B сигнал принимается, когда часы в нем показывают время t. Часы выверены, если запаздывание, равное t, представляет собой длительность передачи сигнала; чтобы это проверить, из пункта B посылается сигнал, когда часы в нем показывают время 0; в пункте A должны получить его, когда часы в нем показывают время t. Тогда показания часов согласованы. И действительно, они показывают одно и то же время в одно и то же физическое мгновение, но при условии, что оба пункта были неподвижны. В противном случае длительность передачи не будет одинакова в обоих направлениях: в случае, когда, например, пункт A движется навстречу оптическому возмущению, исходящему из B, и тогда, когда пункт B удаляется от возмущения, исходящего из A. Выверенные таким способом часы не будут показывать истинное время, они будут показывать так называемое местное время: одни часы будут отставать от других. Но это несущественно, поскольку у нас нет никакого средства заметить это. Все явления, происходящие, например, в A, будут запаздывать, но запаздывать одинаково, и наблюдатель не заметит этого, потому что его часы отстают; таким образом, как это следует из принципа относительности, у него не будет никакого средства узнать, находится ли он в покое или в абсолютном движении.

Этого, к сожалению, недостаточно, необходимы дополнительные гипотезы; надо допустить, что движущиеся тела испытывают однородное сокращение в направлении движения: например, один из диаметров Земли укорачивается на одну двухсотмиллионную долю вследствие движения нашей планеты, тогда как другой диаметр сохраняет свою нормальную длину. Этим предположением компенсируются последние малые различия. Но затем нужна еще гипотеза о силах. В мире, движущемся равномерно-поступательно, силы, независимо от их происхождения, будут ли это силы тяготения или упругости, должны в определенной пропорции уменьшаться. Точнее, должны уменьшаться их компоненты, перпендикулярные к направлению движения; параллельные же компоненты не изменяются. Теперь вернемся к нашему примеру двух наэлектризованных тел; эти тела отталкивают друг друга, но в то же время, если вся система находится в равномерно-поступательном движении, они эквивалентны двум параллельным токам одного направления, которые притягиваются.

Таким образом, это электродинамическое притяжение уменьшает электростатическое отталкивание, и результирующее отталкивание оказывается слабее, чем если бы оба тела были в покое. Но так как для измерения этого отталкивания мы должны уравновесить его другой силой и так как все другие силы испытывают уменьшение в одной и той же пропорции, то мы не замечаем ничего. Тем самым все, кажется, приведено в порядок, но все ли сомнения уже устранены? Что произошло бы, если бы можно было сообщаться путем сигналов иной природы, чем световые, скорость распространения которых отличалась бы от скорости света? Если бы, выверив часы оптическим способом, мы захотели бы сверить наши часы при помощи этих новых сигналов, мы обнаружили бы расхождения, с очевидностью говорящие о совместном поступательном движении обоих пунктов. А разве нельзя себе представить подобные сигналы, если вместе с Лапласом мы примем, что всемирное тяготение распространяется в миллион раз быстрее света.

Итак, в последнее время принцип относительности был мужественно защищен. Но уже та энергия, какая потребовалась для этой защиты, показывает, сколь серьезна была атака.

Принцип Ньютона. Теперь поговорим о принципе Ньютона, о равенстве действия и противодействия. Этот принцип тесно связан с предыдущим, и, по-видимому, падение одного повлекло бы за собой падение другого. Поэтому мы не должны удивляться, встречая здесь те же трудности.

Я уже раньше указал, что новые теории не склонны дорожить этим принципом.

По теории Лоренца электрические явления обусловлены смещением мелких заряженных частиц, так называемых электронов, погруженных в среду, которую мы называем эфиром. Движения этих электронов производят возмущения в окружающем эфире; эти возмущения распространяются во все стороны со скоростью света, и другие электроны, первоначально бывшие в покое, в свою очередь приходят в колебания, когда возмущение достигает частей эфира, соприкасающихся с ними. Таким образом, электроны взаимодействуют между собой, но это взаимодействие не прямое, оно совершается через посредство эфира. Может ли при таких условиях осуществляться равенство действия противодействию, по крайней мере для наблюдателя, учитывающего только движения материи, т. е. электронов, и не принимающего в расчет движений невидимого для него эфира? Очевидно, нет. Даже если бы эта компенсация была точной, она не могла бы осуществляться одновременно. Возмущение распространяется с конечной скоростью; поэтому оно достигает второго электрона лишь тогда, когда первый уже давно вернулся в состояние покоя. Таким образом, второй электрон подвергнется воздействию первого с некоторым запозданием, но, конечно, в этот момент он не окажет на него никакого противодействия, поскольку вокруг первого электрона ничто уже не движется.

Анализ фактов позволит нам сделать изложение еще более точным. Вообразим излучатель Герца, подобный тем, которые употребляются в беспроволочной телеграфии. Он излучает энергию во все стороны, но мы можем снабдить его параболическим зеркалом, как это делал Герц со своими небольшими излучателями, и направить всю производимую энергию в каком-то одном направлении. Что должно произойти тогда согласно теории? Аппарат должен испытать отдачу, как если бы он был пушкой, а испущенная им энергия была бы снарядом; но это противоречит принципу Ньютона, потому что здесь снаряд не имеет массы, он является не веществом [1]), а энергией. То же самое имеет место и в прожекторе, снабженном рефлектором, поскольку свет есть не что иное, как возмущение электромагнитного поля. Такой прожектор должен испытывать отдачу, как если бы испускаемый свет был снарядом. Какая сила вызывает эту отдачу? Это то, что называют давлением Масквелла — Бартольди, оно очень мало, и его трудно обнаружить даже при помощи самых чувствительных радиометров; но важно то, что оно существует.

Если вся энергия, вышедшая из нашего излучателя, попадает в приемник, то последний испытывает как бы механический толчок, который в некотором смысле представляет собой компенсацию отдачи, испытанной излучателем; противодействие будет равно действию, но оно не будет с ним одновременно; приемник оттолкнется, но не в тот момент, когда излучатель испытает отдачу. Если же энергия распространяется беспредельно, не встречая приемника, то компенсация не произойдет никогда.

Но, быть может, можно сказать, что пространство между излучателем и приемником, в котором возмущение распространяется от первого ко второму, не является пустым, а что оно наполнено не только эфиром, а и воздухом или (в междупланетных пространствах) некоторым весьма тонким, но все же весомым флюидом; что это вещество, как и приемник, испытывает толчок в момент падения на него энергии, а также отдачу, когда возмущение оставляет его? Это спасло бы принцип Ньютона, но это неверно; если бы энергия в процессе распространения всегда была связана с некоторым вещественным субстратом, то движущееся вещество увлекало бы свет. Однако Физо показал, что это не так, по крайней мере для воздуха. Впоследствии это подтвердили Майкельсон и

[1]) В оригинале: ce n'est pas de la matière. — *Примеч. ред.*

Морли. Можно также предположить, что движения вещества в собственном смысле точно компенсируются движениями эфира, но это привело бы нас к тем соображениям, какие только что рассмотрены. Принцип, понимаемый таким образом, будет в состоянии объяснить все, ибо каковы бы ни были видимые движения, всегда можно придумать гипотетические движения, их компенсирующие. Но если он и может все объяснить, то он не позволяет нам ничего предвидеть, он не позволяет нам выбирать между различными возможными гипотезами, поскольку он все объясняет заранее. Стало быть, он становится бесполезным.

Кроме того, предположения, которые пришлось бы сделать о движениях эфира, не очень удовлетворительны. Так, естественно было бы предположить, что если электрические заряды удваиваются, то скорости различных атомов эфира также удваиваются; но для компенсации необходимо, чтобы средняя скорость эфира учетверилась.

Вот почему я долгое время считал, что эти теоретические выводы, противоречащие принципу Ньютона, в конце концов будут отвергнуты. Однако новейшие опыты, в которых исследовалось движение электронов, испускаемых радием, скорее их подтверждают.

Принцип Лавуазье. Перехожу к принципу Лавуазье, касающемуся сохранения масс. Конечно, это — принцип такого рода, что его нельзя затронуть без того, чтобы не поколебать механику. И тем не менее теперь некоторые думают, что он кажется нам верным только потому, что в механике рассматриваются не слишком большие скорости, но что он перестал бы быть верным для тел, обладающих скоростями, сравнимыми со скоростью света. Но в настоящее время такие скорости считаются осуществленными: катодные лучи и лучи радия состоят из весьма малых частиц или из электронов, летящих со скоростью, которая, без сомнения, меньше скорости света, но все же составляет от одной десятой до одной трети ее.

Эти лучи отклоняются как в электрическом, так и в магнитном поле; сравнивая то и другое отклонение, можно одновременно измерить скорость электронов и их массу (или, вернее, отношение их массы к их заряду). Но оказалось, что когда эти скорости приближаются к скорости света, необходимо вносить поправки. Эти частицы, будучи заряжены, не могут перемещаться, не приводя в колебание эфир; чтобы привести их в движение, необходимо преодолеть инерцию двоякого рода — инерцию самой частицы и инерцию эфира. Поэтому полная или наблюдаемая масса, которую именно и измеряют, состоит из двух частей: из действительной или механической, массы частицы и из электродинамической массы, выражающей инерцию эфира.

Вычисления Абрагама и опыты Кауфмана показали, что механическая масса в собственном смысле равна нулю и что масса электронов — по крайней мере отрицательных электронов — имеет исключительно электродинамическое происхождение. Это вынуждает нас изменить определение массы: мы не можем уже проводить различие между массой механической и массой электродинамической, так как тогда первая исчезает. Нет иной массы, кроме массы, связанной с электродинамической инерцией. Но в таком случае масса уже не может быть постоянной, она увеличивается со скоростью; мало того, она зависит от направления, так что тело, имеющее значительную скорость, оказывает разное сопротивление силам, стремящимся отклонить его с его пути, и силам, ускоряющим или замедляющим его движение.

Есть еще один выход: последними элементами тел являются электроны, одни из них заряжены отрицательно, другие — положительно.

Отрицательные электроны не имеют массы — это установлено; но электроны положительные, согласно тому немногому, что о них известно, гораздо более крупны. Быть может, они, кроме их электродинамической массы, имеют также настоящую механическую массу. В таком случае истинная масса тела была бы суммой механических масс его положительных электронов: отрицательные электроны не принимаются в расчет. Определенная таким образом масса еще могла бы быть постоянной.

Увы! И этот выход ускользает от нас. Вспомним то, что было сказано по поводу принципа относительности и усилий, предпринятых для его спасения. И дело не только в том, чтобы спасти принцип, но и в несомненных результатах опытов Майкельсона. Как мы видели, Лоренцу пришлось для истолкования этих результатов предположить, что в среде, движущейся равномерно-поступательно, все силы независимо от их происхождения уменьшаются в одной и той же пропорции; мало того, такое уменьшение должно иметь место не только для реальных сил, но и для сил инерции. Таким образом, говорит Лоренц, необходимо, чтобы *массы всех частиц при поступательном движении испытывали такое же изменение, какое испытывают электромагнитные массы электронов.*

Итак, механические массы должны изменяться по тем же законам, что и массы электродинамические: следовательно, они не могут быть постоянными.

Легко понять, что падение принципа Лавуазье повлекло бы за собой падение принципа Ньютона. Этот последний между прочим означает, что центр тяжести изолированной системы движется прямолинейно; но если не существует постоянной массы, то нет и центра тяжести, и мы больше не можем сказать, что это такое. Вот почему выше я сказал, что опыты с катодными лучами, по-видимому, подтверждают сомнения Лоренца, относящиеся к принципу Ньютона.

Если бы все эти результаты получили подтверждение, то из них возникла бы совершенно новая механика, для которой было бы особенно характерно то положение, что не может существовать скорость, бóльшая, чем скорость света [1]), подобно тому как невозможно получить температуру ниже абсолютного нуля. С точки зрения наблюдателя, увлекаемого поступательным движением, о котором он не подозревает, никакая кажущаяся скорость точно так же не могла бы превзойти скорость света; здесь можно было бы усмотреть противоречие, если бы мы не вспомнили, что этот наблюдатель пользуется не теми же часами, какими пользуется неподвижный наблюдатель, а часами, показывающими «местное время».

Здесь мы встречаемся с вопросом, относительно которого я ограничусь только его постановкой. Если масса больше не существует, то во что обращается закон Ньютона?

---

[1]) Потому, что тела противопоставляли бы возрастающую инерцию причинам, которые стремятся ускорить их движение, и эта инерция становилась бы бесконечной при приближении скорости тел к скорости света.

Масса имеет два аспекта: во-первых, это — коэффициент инерции; во-вторых, это — тяготеющая масса, входящая в качестве множителя в формулу ньютонианского тяготения. Если коэффициент инерции не является постоянным, может ли быть постоянной притягивающая масса? Вот вопрос, встающий перед нами.

Принцип Майера. У нас еще оставался по крайней мере принцип сохранения энергии. Уж он-то казался наиболее прочным. Надо ли напоминать, что и он в свою очередь подвергся сомнению? Это событие наделало больше шуму, чем все предыдущие, что отмечено во всех статьях. После первых работ Беккереля, а в особенности после того, как супруги Кюри открыли радий, обнаружилось, что любое радиактивное тело является неисчерпаемым источником излучений. Представлялось, что его активность сохраняется без изменения на протяжении месяцев и лет. Это уже было ударом для принципов: эти излучения представляли собой энергию, которая непрестанно выделялась из одной и той же крупицы радия. Но эти количества энергии были слишком малы, чтобы их можно было измерить; так по крайней мере думали и поэтому не очень беспокоились.

Положение изменилось после того, как Кюри догадались поместить радий в калориметр: тогда оказалось, что количество непрерывно выделяемой теплоты весьма значительно.

Было предложено много объяснений. Но нельзя сказать, чтобы в подобных случаях излишек не приносил вреда. Пока одно из объяснений не возьмет верх над другими, мы не можем быть уверены в том, что среди них есть хотя бы одно пригодное. Однако с некоторого времени одно из этих объяснений, по-видимому, берет верх, и можно надеяться, что ключ от тайны находится в наших руках.

Сэр У. Рамсей сделал попытку показать, что радий подвергается превращению, что он обладает хотя и огромным, но исчерпываемым запасом энергии. В таком случае при превращении радия производится в миллион раз больше теплоты, чем при всех других известных превращениях. Радий должен истощиться за время в 1250 лет; итак, по крайней мере через несколько сот лет, дело наверное выяснится. Пока мы этого ждем, наши сомнения остаются в силе.

Глава IX

БУДУЩЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Принципы и опыт. Что же остается нетронутым среди всех этих руин? Принцип наименьшего действия стоит нерушимо до сих пор, и Лармор, по-видимому, считает, что этот принцип надолго переживет все остальные; он действительно и самый неопределенный и самый общий.

Какую же позицию должна занять математическая физика при наличии этого всеобщего разгрома принципов? Прежде чем начинать волноваться, нам следует спросить себя, действительно ли все сказанное верно. Все нарушения принципов встречаются лишь в области бесконечно малого: чтобы видеть броуновское движение, нужен микроскоп: электроны чрезвычайно легки; радий очень редок, его никогда не бывает в нашем распоряжении больше нескольких миллиграммов сразу, а в таком случае можно спросить себя нет ли рядом с тем бесконечно малым, которое мы увидели, еще много бесконечно малого, которого не видим, и которое составляет противовес первому?

Возникший вопрос имеет такой характер, что его может разрешить один только опыт. Поэтому нам остается лишь обратиться к экспериментаторам и в ожидании, пока они окончательно разрешат спор, не слишком озабочиваться этими тревожными вопросами, а спокойно продолжать нашу работу, как если бы принципы были еще бесспорными. В самом деле нам еще много предстоит сделать в той области, где их можно применить с полной уверенностью; нам есть к чему приложить нашу деятельность в течение этого периода сомнений.

Роль аналитика. Однако верно ли, что мы ничего не можем сделать для освобождения науки от этих сомнений? Необходимо сказать, что они порождены не одной экспериментальной физикой; и математическая физика тоже внесла свой вклад. Экспериментаторы обнаружили, что радий выделяет энергию; зато теоретики раскрыли все трудности, которые связаны с описанием распространения света в движущихся средах, без них мы, вероятно, об этих трудностях не узнали бы. Но если они сделали все, чтобы поставить нас в затруднительное положение, то надо, чтобы они же помогли нам и выйти из него.

Они должны подвергнуть критическому анализу все описанные мною новые взгляды; и надо, чтобы они отклоняли принципы не раньше, чем будут исчерпаны все средства для их спасения. Что же они могут сделать в этом смысле? Это я и попытаюсь объяснить[1]).

Среди наиболее интересных проблем математической физики особое место следует отвести проблемам, связанным с кинетической теорией газа. Многое уже сделано для их решения, но многое еще остается сделать Эта теория — какой-то вечный парадокс. В посылках мы имеем обратимость, в результатах — необратимость, а между ними — пропасть. Достаточно ли статистических соображений, закона больших чисел, чтобы ее заполнить? Есть много темных мест, к которым надо вернуться и, вероятно, не один раз. Их разъяснение поможет лучше понять смысл принципа Карно и его место среди динамических законов, и тогда мы будем лучше вооружены для того, чтобы объяснить любопытный опыт Гуи, о котором я говорил выше.

Не должны ли мы прежде всего позаботиться о том, чтобы создать более удовлетворительную электродинамику движущихся тел? Выше я показал, что именно здесь накопилось особенно много трудностей; как ни нагромождай гипотезы, сразу невозможно удовлетворить всем принципам; до сих пор удавалось спасти некоторые из них не иначе, как жертвуя другими; но еще не вполне утрачена надежда на получение лучших результатов. Поэтому примем теорию Лоренца, всесторонне рассмотрим ее и будем понемногу видоизменять; быть может, постепенно все уладится.

Так, вместо того чтобы предполагать, что движущиеся тела испытывают сжатие в направлении движения и что это сжатие не зависит ни от природы тел, ни от других сил, действующих на них, нельзя ли было бы предложить другую гипотезу, более простую и более естественную? Можно было бы, например,

---

[1]) Следующий абзац из доклада в Сент-Луисе в книгу не вошел. Мы воспроизводим в тексте его перевод. — *Примеч. ред.*

допустить, что происходит изменение в состоянии эфира, когда он движется относительно погруженной в него материальной среды, и что это его изменение таково, что он уже более не передает возмущений с одной и той же скоростью по всем направлениям. Можно предположить, что возмущения, распространяющиеся параллельно движению тела (безразлично, в каком из этих противоположных направлений), передаются эфиром с большей скоростью, а распространяющиеся перпендикулярно — с меньшей. В таком случае волновые поверхности были бы не сферами, а эллипсоидами, и можно было бы обойтись без этого столь необычного сжатия всех тел.

Я указываю это лишь в качестве примера, ибо очевидно, что можно было бы испробовать бесконечное число вариантов.

Аберрация и астрономия. Возможно также, что астрономия предоставит нам со временем данные по этой проблеме: ведь в сущности именно она первая возбудила вопрос, познакомив нас с явлением аберрации света. Строя грубую теорию аберрации, мы приходим к весьма курьезному результату. Видимые положения звезд отличаются от их действительных положений вследствие движения Земли, и так как это движение меняется, то меняются и эти видимые положения. Действительного положения мы узнать не можем, но мы можем наблюдать изменения видимого положения. Поэтому наблюдения над аберрацией показывают нам не движение Земли, а изменения этого движения; следовательно, они не могут дать нам сведений об абсолютном движении Земли.

Это верно, по крайней мере в первом приближении; но если бы мы могли измерять углы с точностью до тысячных долей секунды, то это было бы уже неверно. Мы увидели бы тогда, что амплитуда колебаний зависит не только от изменений скорости, изменений, которые хорошо известны, поскольку они обусловлены движением нашей планеты по ее эллиптической орбите, но также и от среднего значения этого движения, так что константа аберрации уже не была бы совершенно одинаковой для всех звезд, и наблюдение различий дало бы нам возможность узнать абсолютное движение Земли в пространстве. Это означало бы падение принципа относительности, реализуемое в несколько иной форме. Правда, мы далеко не в состоянии оценивать тысячные доли секунды; но со всем тем, как говорят некоторые, полная абсолютная скорость Земли может в конце концов значительно превышать ее скорость относительно Солнца; если бы она составляла, например, 300 километров в секунду вместо 30, то этого было бы достаточно для возможности наблюдать явление.

Я полагаю, что такие рассуждения основаны на принятии слишком упрощенной теории аберрации. Как я уже упомянул, Майкельсон показал, что физические процессы не в состоянии обнаружить абсолютное движение; я убежден, что это верно и для астрономических методов, какова бы ни была степень точности.

Но как бы то ни было, данные, которые астрономия предоставит нам по этому вопросу, когда-нибудь будут иметь неоценимое значение для физика. Я полагаю, что теоретики могут ожидать отрицательный результат, имея в виду опыт Майкельсона; думаю, что они совершили бы полезное дело, создав теорию абберации, которая учитывала бы это заранее.

Электроны и спектры. Но вернемся на Землю. Здесь мы также могли бы помочь экспериментаторам. Мы можем, например, подготовить почву, тщательно исследуя динамику электронов, не придерживаясь при этом какой-то одной гипотезы, а, наоборот, увеличивая, насколько возможно, их число. Используя наши работы, физики могли бы тогда предложить решающий опыт, который позволил бы отдать предпочтение одной из них [1]).

К динамике электрона существуют разные подходы. Но в числе путей, ведущих к ней, есть один, который был в некотором пренебрежении, хотя он как раз из числа тех, которые обещают наибольшие неожиданности. Дело в том, что спектральные линии излучения порождаются движениями электронов, как это доказывает эффект Зеемана; то, что колеблется в раскаленном теле, испытывает действие магнита и, следовательно, наэлектризовано. Это очень важный исходный пункт; но пока далее его не пошли. Почему

---

[1]) Первый абзац этого раздела, опущенный в книге, взят из доклада в Сент-Луисе. — *Примеч. ред.*

спектральные линии распределены соответственно точному закону? Экспериментаторы до мельчайших деталей изучили эти законы, они весьма точны и сравнительно просты. Первые исследования этих распределений включали идею о гармонических соотношениях, встречающихся в акустике; однако различие оказалось значительным; не только частоты не представляют собой последовательных кратных одного и того же числа, но мы даже не находим здесь ничего соответствующего корням тех трансцендентных уравнений, к которым нас приводят многие задачи математической физики, например задача о колебаниях упругого тела произвольной формы, задача о герцевских колебаниях в излучателе произвольной формы, задача Фурье об охлаждениях твердого тела.

Законы спектральных линий более просты, но природа их совершенно иная; ограничусь лишь одним примером такого различия: для гармоник высшего порядка число колебаний стремится к конечному пределу вместо того, чтобы бесконечно возрастать.

Эти явления еще не объяснены, и я думаю, что здесь перед нами одна из наиболее важных тайн природы. Японский физик Нагаока предложил недавно свое объяснение: по его мнению, атомы состоят из большого положительного электрона, окруженного кольцом из весьма большого числа весьма малых отрицательных электронов. Такова планета Сатурн со своим кольцом Это очень интересное, но еще не вполне удовлетворительное объяснение, его следовало бы развить. Мы проникаем, так сказать, в самые глубины вещества; с той частной позиции, которую мы занимаем сегодня, представляется, что когда мы узна́ем, почему колебания раскаленных тел так отличаются от обычных упругих колебаний, почему электроны ведут себя иначе, чем обычное вещество, тогда мы лучше поймем динамику электронов и, может быть, нам будет легче согласовывать ее с принципами.

Условные положения перед лицом опыта. Теперь предположим, что все эти усилия потерпят неудачу (чего, учитывая все обстоятельства, я не допускаю); что должны мы делать тогда? Нужно ли будет попытаться исправлять поколебленные принципы при помощи какого-нибудь ухищрения? Это, очевидно, всегда возможно, и я не беру назад ничего из сказанного раньше. Если бы вы захотели спорить со мной, вы могли бы сказать: «Не написано ли у вас, что принципы — несмотря на их опытное происхождение — в настоящее время лежат вне досягаемости опыта, потому что они стали условными соглашениями[1]). А теперь вы нам говорите, что последние достижения опыта подвергают эти принципы опасности. Так вот, я был прав раньше, но и теперь я не ошибаюсь. Я был прав раньше — и то, что происходит ныне, служит тому новым доказательством. Возьмем, например, калориметрический опыт, который произвел Кюри с радием. Можно ли согласовать его с принципом сохранения энергии? Этого пытались достигнуть многими способами, и на один из них я хотел бы обратить ваше внимание; это — не то объяснение, которое ныне одерживает верх, но все же одно из предложенных. В нем предполагается, что радий есть всего лишь посредник, что он только концентрирует излучения неизвестной природы, которые бороздят пространство по всем направлениям, проникая сквозь все тела, кроме радия, никак не воздействуя на них и не изменяя своей природы. Один только радий способен поглощать часть энергии этих излучений и затем в различных формах отдавать ее нам.

Какое удачное объяснение, и как оно удобно! Во-первых, его нельзя проверить, а следовательно, и опровергнуть. Во-вторых, оно может служить для объяснения каких угодно нарушений принципа Майера: оно заранее дает ответ не только на возражение Кюри, но и на любые другие возражения, какие могут быть представлены экспериментаторами в будущем. Эта новая неизвестная энергия могла бы служить для всевозможных целей.

Это как раз то, о чем я говорил в свое время; и это доказывает, что наш принцип вне досягаемости опыта Но в конце концов что же приобрели мы с помощью такой уловки? Принцип сохранен, но чему он может служить с этих пор? Раньше он позволял нам предвидеть, что в таких-то обстоятельствах мы можем рассчитывать на такое-то полное количество энергии; он нас ограничивал; но теперь после того, как

---

[1]) См, например, Наука и гипотеза. Общие выводы из III части (с. 112—115). — *Примеч. ред.*

в наше распоряжение предоставлен неопределенный запас новой энергии, мы уже не ограничены ничем. А если, как я писал в «*Науке и гипотезе*», какой-нибудь принцип перестает быть плодотворным, то опыт, не противореча ему непосредственно, тем не менее осудит его.

Будущая математическая физика. Поэтому надо было бы поступать не так; мы должны были бы перестраивать все сызнова. Впрочем, если бы такая необходимость и возникла, то мы могли бы найти себе утешение. Отсюда еще не следовало бы заключать, что научный труд — труд Пенелопы, что наука способна лишь к эфемерным построениям, которые ей вскоре же приходится разрушать собственными руками до самого основания.

Как я говорил, мы однажды уже прошли через подобный кризис. Я указывал, что в математической физике второго периода — физике принципов — встречаются следы предшествующей физики, физики центральных сил. То же самое будет иметь место, если нам придется познакомиться с физикой третьего периода. Так, линяющее животное разрывает свой слишком тесный панцирь и заменяет его новым, но и под новой оболочкой легко узнать существенные черты прежнего организма.

Мы не в состоянии предвидеть, в каком направлении пойдет дальнейшее развитие. Быть может, кинетическая теория газов расширится и послужит образцом для других теорий. В таком случае факты, вначале казавшиеся нам простыми, были бы уже только результатом суммирования огромного числа элементарных фактов, которые, управляясь единственно законами случая, стремились бы к одной и той же цели. Тогда физический закон получил бы совершенно новый вид: он не был бы уже только дифференциальным уравнением, но приобрел бы характер статистического закона. Возможно также, что придется создать совершенно новую механику, которую мы сейчас лишь смутно предугадываем. В этой механике инерция возрастала бы вместе со скоростью, и скорость света являлась бы непреодолимым пределом. Обычная, более простая, механика сохранила бы значение первого приближения, так как она была бы верна для не очень больших скоростей: таким образом, старая динамика еще содержалась бы в новой. Мы не имели бы причин жалеть о том, что верили принципам: в практической области было бы даже самым верным продолжать действовать так, как если бы мы сохранили эту веру, ибо скорости, чересчур большие и не допускающие применения старых формул, встречались бы всегда лишь в качестве исключения. Эти принципы столь полезны, что за ними надо было бы сохранить их место. Желать полного их исключения значило бы лишить себя ценного оружия. В заключение я хотел бы сказать, что мы еще не дошли до этого; еще ничто не доказывает, что они не выйдут из борьбы победоносными и неизмененными.

Часть III

ОБЪЕКТИВНАЯ ЦЕННОСТЬ НАУКИ

Глава X

ИСКУССТВЕННА ЛИ НАУКА?

§ 1. Философия Леруа[1])

Мы видели много оснований для скептицизма; должны ли мы довести этот скептицизм до конца или остановиться на пути? Идти до конца — это самое соблазнительное, самое удобное решение вопроса; многие приняли его, отчаявшись что-либо спасти от крушения.

Среди сочинений, внушенных таким стремлением, необходимо поставить на первом месте труды Леруа. Этот мыслитель является не только философом и заслуженным писателем; он также обладает глубоким знанием точных наук, в частности физических; кроме того, он обнаружил ценную способность к математическому изобретательству.

Изложим в немногих словах его учение, давшее повод к большим спорам.

Наука состоит из одних условных положений, и своей кажущейся достоверностью она обязана единственно этому обстоятельству; научные факты и *тем более* законы суть искусственное творение ученого; поэтому наука отнюдь не в состоянии открыть нам истину, она может служить нам только как правило действия.

Мы узнаем здесь философскую теорию, известную под именем номинализма. Не все в этой теории ложно; ей нужно предоставить область, принадлежащую ей по праву, но не следует позволять ей переходить эти пределы.

[1]) Леруа (Le Roi) Эдуард (1879—1954) — французский реакционный философ-идеалист; последователь интуитивизма А. Бергсона; пытался осуществить «органический синтез» философии, естествознания и религии.— *Примеч. ред.*

Но учение Леруа не только номиналистично: ему свойственна еще другая черта, явившаяся, несомненно, благодаря влиянию Бергсона: оно антиинтеллектуалистично. С точки зрения Леруа, ум искажает все, к чему он прикасается; это еще более справедливо по отношению к его необходимому инструменту — «рассудочности». Реальность присуща только нашим беглым и изменяющимся впечатлениям, и даже эта реальность исчезает при первом прикосновении к ним.

Однако Леруа — не скептик. Если он объявляет разум непоправимо бессильным, то лишь для того, чтобы уделить побольше места для других источников познания, — например для сердца, чувства, инстинкта или веры.

Как ни уважаю я талант Леруа, как ни остроумно это положение, я не мог бы принять его полностью. Конечно, во многих отношениях я согласен с Леруа, и он даже цитировал для поддержки своей точки зрения различные места из моих сочинений, от которых я нисколько не намерен отказываться. Я лишь считаю своей обязанностью разъяснить, почему я не могу последовать за ним до конца.

Леруа часто жалуется на то, что его обвиняют в скептицизме. Иначе и быть не могло, хотя это обвинение, вероятно, несправедливо. Разве все улики не против него? Номиналист в теории, но реалист в сердце, он спасается от абсолютного номинализма, по-видимому, лишь актом отчаявшейся веры.

Дело в том, что антиинтеллектуалистическая философия, отвергая анализ и «рассудочность», тем самым обрекает себя на невозможность быть передаваемой; это — философия, по существу, замкнутая в себе: если же что-нибудь и может быть здесь передаваемо, то только отрицания. Поэтому можно ли удивляться, что с точки зрения внешнего наблюдателя она принимает вид скептицизма?

В этом — слабое место философии Леруа. Если она желает остаться верной себе, то всю свою мощь она исчерпает в отрицании и вопле энтузиазма. Каждый автор может повторять это отрицание и этот вопль, разнообразить их вид, но он не в силах ничего прибавить.

И еще, не было ли бы более последовательным умолкнуть? Вот вы написали несколько длинных статей: для этого вам необходимо было пользоваться словами. А благодаря этому не стали ли вы гораздо более «рассудочным», а следовательно, и гораздо удаленнее от жизни и от истины, чем животное, которое просто живет, не философствуя? Не будет ли это животное истинным философом?

Если никакой художник не в состоянии написать совершенно похожий портрет, то должны ли мы из этого заключать, что самая лучшая живопись состоит в том, чтобы не писать вовсе? Когда зоолог рассекает животное, он, конечно, его «искажает». Да, рассекая его, он обрекает себя на невозможность когда-либо узнать о нем все; но не рассекая его, он обрек бы себя на невозможность когда-либо узнать о нем хоть что-нибудь, а следовательно, и на невозможность когда-либо сказать что-нибудь.

Конечно, в человеке имеются другие силы, кроме его ума: не было такого безумца, который бы отрицал это. Первый встречный приводит в действие эти слепые силы или позволяет им действовать. Но философ должен *говорить* о них: чтобы о них говорить, он должен знать о них то немногое, что можно знать; следовательно, он должен *рассматривать* их действия. Какими же глазами будет он их рассматривать, если не своим умом? Сердце, инстинкт могут руководить умом, но не могут сделать его бесполезным; они в состоянии направлять взгляд, но не в состоянии заменить глаз. Что сердце — рабочий, а ум — только орудие, с этим можно согласиться. Но без этого орудия нельзя обойтись; оно нужно нам если не для действия, то во всяком случае для философствования. Вот почему невозможно, чтобы истинная философия была антиинтеллектуалистической. Быть может, мы должны вывести заключение о «примате» действия; во всяком случае такое заключение будет делать наш ум. Уступая первое место действию, он сохраняет за собой превосходство «мыслящего тростника». Это — также «примат», котрым не следует пренебрегать.

Я прошу простить мне эти краткие размышления, а также и то, что я лишь поверхностно коснулся вопроса. Я намерен рассуждать не о спорах об интеллектуализме; я хочу говорить о науке и, без сомнения, в защиту ее. Она будет или не будет интеллектуалистична, так сказать, в силу определения. Речь идет как раз о том, чтобы узнать, будет ли она такою.

§ 2. Наука как правило действия

С точки зрения Леруа наука есть лишь правило действия. Мы бессильны что-либо узнать, тем не менее мы принимаем участие в множестве обстоятельств, нам нужно действовать, и мы на всякий случай установили для себя правила. Совокупность этих правил и составляет то, что называют наукой.

Подобно этому люди, желая развлекаться, установили правила игр, например игры в трик-трак; эти правила могли бы в большей даже степени, чем сама наука, опираться на такой довод, как всеобщее согласие.

Точно так же люди, принужденные делать выбор, но не имеющие для него данных, бросают в воздух монету, чтобы открыть решетку или орла.

Конечно, правило игры в трик-трак есть правило действия, подобно науке, но можно ли считать это сравнение правильным, и не бросается ли в глаза различие? Правила игры представляют собой произвольное соглашение; можно было бы принять соглашение противоположного содержания, *которое оказалось бы не хуже.* Напротив, наука есть такое правило действия, которое приводит к успеху, по меньшей мере вообще, и я добавлю, тогда, когда противоположное правило не имело бы успеха.

Когда я говорю: «для добывания водорода действуйте кислотой на цинк», я формулирую правило, приводящее к успеху. Я мог бы сказать: «действуйте дистиллированной водой на золото»; это было бы также правило, но оно не вело бы к успеху.

Таким образом, если научные «рецепты» имеют ценность как правило для действия, то это потому, что в общем и целом они, как мы знаем, имеют успех. Знать это — значит уже знать кое-что, а раз так, то какое вы имеете право говорить нам, что мы не можем ничего знать?

Наука предвидит; и именно потому, что она предвидит, она может быть полезной и может служить правилом действия. Я хорошо знаю, что ее предвидения часто опровергаются фактами: это доказывает, что наука несовершенна, и если я добавлю, что она всегда останется такою, то я уверен, что по крайней мере это предвидение никогда не будет опровергнуто. Во всяком случае ученый обманывается реже, чем предсказатель, который предрекал бы наудачу. С другой стороны, прогресс хотя и медлен, но непрерывен; так что ученые, становясь смелее и смелее, обманываются все менее и менее. Это мало, но этого достаточно.

Я знаю, Леруа в одном месте сказал, что наука обманывалась чаще, чем думают, что кометы порой насмехались над астрономами, что ученые, как вообще свойственно людям, неохотно говорят о своих неудачах, а если бы они говорили о них, то число поражений оказалось бы значительнее числа побед.

На этот раз Леруа явно преувеличил. Если бы наука не преуспевала, то она не могла бы служить правилом действия; откуда черпала бы она свою ценность? Из того ли, что она «выжила», т. е. что мы любим ее и верим в нее? У алхимиков были рецепты для приготовления золота, они любили их и верили в них; однако правильными являются именно наши рецепты, потому что они приводят к успеху, хотя бы наша вера и не была очень сильна.

Нет средств уйти от этой дилеммы. Либо наука не дает возможности предвидеть, в таком случае она лишена ценности в качестве правила действия; либо она позволяет предвидеть (более или менее несовершенным образом), и тогда она не лишена значения в качестве средства к познанию.

Нельзя даже сказать, чтобы действие было целью науки. Должны ли мы осудить исследования, произведенные над Сириусом, под тем предлогом, что мы, вероятно, никогда не предпримем никаких действий по отношению к этой звезде?

С моей точки зрения, наоборот: знание есть цель, а действие есть средство. Когда я радуюсь развитию техники, то это не потому только, что оно доставляет удобный для защитников науки аргумент, но в особенности потому, что оно внушает ученому веру в себя самого, а также представляет огромное поле для его опытов, где он сталкивается с силами, чересчур колоссальными, чтобы можно было отделаться какой-нибудь фокуснической уловкой. Не будь этого балласта, кто знает, быть может, он покинул бы Землю, увлеченный призраком какой-нибудь новой схоластики, или впал бы в отчаяние, поверив, что все его труды — только греза?

§ 3. «Голый» факт и научный факт

Что наиболее парадоксально в сочинении Леруа, так это утверждение, что *ученый создает факт*. Здесь мы в то же время имеем существенный пункт, один из тех, которые вызвали наибольшие возражения.

Он говорит (я уверен, что это уже уступка): голые факты, быть может, и не создаются ученым; но во всяком случае научные факты им создаются.

Это различение голых и научных фактов само по себе не кажется мне незаконным. Но я сожалею, во-первых, о том, что между ними не проводится определенной и резкой границы; во-вторых, о том, что автор, по-видимому, подразумевал, будто голый факт, не будучи научным, лежит вне науки.

Наконец, я не могу признать, что ученый свободно творит научные факты: потому что их внушает ему голый факт.

Примеры, приведенные Леруа, чрезвычайно удивили меня. Первый из них относится к понятию атома. Атом, избранный как пример факта! Признаюсь, этот выбор так смутил меня, что я предпочитаю не говорить о нем ничего. Очевидно, я плохо понял мысль автора и не мог бы возражать против нее с пользой.

В качестве второго примера приведен случай затмения. Здесь голым явлением служит смена темноты и света; вмешательство астронома непременно приводит сюда два посторонних элемента, именно часы и закон Ньютона.

Наконец, Леруа называет вращение Земли. Ему возразили, что это — не факт. Он отвечал, что вращение Земли было фактом для Галилея, который подтверждал его, и точно так же для инквизитора, который его отрицал. Во всяком случае, это — факт не того же ранга, как первые два; дать им всем одно и то же имя — значит вызвать ряд недоразумений.

Итак мы имеем следующие четыре ступени:

1) Становится темно, говорит человек неученый,

2) Затмение наступило в девять часов, говорит астроном.

3) Затмение наступило в момент, который можно было бы указать из таблиц, построенных на основании законов Ньютона, говорит он еще.

4) Это зависит от того, что Земля вращается вокруг Солнца, говорит, наконец, Галилей.

Где же граница между голым фактом и фактом научным? Читая Леруа, можно было бы подумать, что она лежит между первой и второй ступенью; но кто же не видит, что между второй и третьей расстояние больше, а между третьей и четвертой — еще больше.

Я позволю себе привести два примера, которые, быть может, несколько разъяснят дело.

Я наблюдаю отклонение гальванометра с помощью подвижного зеркальца, которое отбрасывает световое изображение или «зайчик» на проградуированную шкалу. Голый факт таков: я вижу перемещение зайчика по шкале. Научный факт будет: в цепи проходит ток. Или еще: когда я произвожу какой-нибудь опыт, я должен подвергнуть результат некоторым поправкам, так как мне известно, что я должен был сделать погрешности. Эти погрешности бывают двух сортов: одни случайные, и я исправлю их, взяв среднюю; другие систематические, и я не буду в состоянии их исправить без глубокого исследования их причин.

Итак, первый полученный результат представляет собой голый факт, тогда как научным фактом будет окончательный результат после выполнения поправок.

Размышляя над этим последним примером, мы приходим к необходимости подразделить нашу вторую ступень, и вместо того, чтобы сказать:

2) затмение наступило в девять часов,

мы скажем:

2а) затмение наступило, когда мои часы показывали девять,

2б) так как мои часы отстают на десять минут, то затмение наступило в девять часов десять минут.

Это не все: первая ступень также должна быть подразделена, и расстояние между этими двумя подразделениями будет значительно. Необходимо проводить различие между впечатлением темноты, которое испытывает свидетель затмения, и утверждением: *становится темно*, которое вызывается у него этим впечатлением. В известном смысле только первое есть настоящий голый факт; второе уже представляет род научного факта.

Итак, наша лестница имеет теперь шесть ступеней, и хотя нет никаких оснований останавливаться на этой цифре, но мы ее удержим.

Меня поражает, во-первых, следующее. На первой из наших шести ступеней факт, будучи вполне голым, является, так сказать, индивидуальным — он совершенно отличен от всех иных возможных фактов. Со второй ступени уже начинается иное. Выражение данного факта могло бы пригодиться для тысячи других фактов. Коль скоро на сцену выступает речь, я располагаю лишь ограниченным числом терминов для выражения бесконечного числа оттенков, в которые могут облекаться мои впечатления. Когда я говорю «становится темно», это хорошо выражает впечатления, которые я испытываю, присутствуя при затмении; но даже впечатление темноты может иметь множество оттенков, и если бы вместо оттенка, осуществляющегося в действительности, имел место другой, несколько отличный, то все-таки я бы еще выразил этот *другой* факт словами «становится темно».

Другое замечание. Уже на второй ступени выражение факта может быть только *верным или неверным.* Этого нельзя сказать про любое предложение; если предложением выражается условное соглашение, то нельзя сказать, что это выражение *верно* в собственном смысле слова, так как оно не могло бы быть верно помимо моей воли: оно верно лишь потому, что я этого хочу.

Когда я, например, говорю «единица длины есть метр», это — решение, которое я принимаю, а не констатация, которая мне предписывается. Точно так же обстоит дело, например, по отношению к постулату Евклида, что я и доказал в другом месте.

Когда меня спрашивают, становится ли темно, я всегда знаю, ответить ли «да» или «нет».

Хотя бесчисленное множество возможных фактов будет восприниматься через то же самое выражение: становится темно, — однако я всегда буду знать, входит ли осуществившийся факт в число тех, которые соответствуют этому выражению, или нет. Факты поделены на категории, и если меня спрашивают, входит ли констатируемый мною факт в такую-то категорию или нет, я не затруднюсь ответом.

Без сомнения, такая классификация является достаточно произвольной, чтобы предоставить широкое участие свободе или прихоти человека. Словом, эта классификация есть соглашение. *Раз принято это соглашение*, то, если меня спрашивают, имел ли место определенный факт, я всегда сумею дать ответ, и мой ответ будет мне предписан свидетельством моих чувств.

Итак, если во время затмения спросят, становится ли темно, — всякий ответит утвердительно. Без сомнения, отрицательный ответ дали бы те, кто говорит на языке, на котором свет зовется тьмой, а тьма — светом. Но может ли это иметь какое-либо значение?

То же самое имеет место в математике: *когда я установил определения и постулаты, являющиеся условными соглашениями*, всякая теорема уже может быть только верной или неверной. Но для ответа на вопрос, *верна ли эта теорема*, я прибегну уже не к свидетельству моих чувств, а к рассуждению.

Словесное выражение факта всегда может быть проверено, и для проверки мы прибегаем или к свидетельству наших чувств или к воспоминанию об этом свидетельстве. Этим собственно и характеризуется факт. Если вы зададите мне вопрос, верен ли такой-то факт, то я сначала попрошу вас, если понадобится, уточнить условия разговора, иными словами, спрошу вас, на каком языке вы говорите; затем, раз это будет установлено, я обращусь к своим чувствам и отвечу вам «да» или «нет». Ответ будет дан моими чувствами, воспринимающими факт, но вовсе не *вами* в ваших словах: независимо от того, выразил ли я его по-английски или по-французски.

Подлежит ли здесь что-либо изменению при переходе к дальнейшим ступеням? Пусть я наблюдаю гальванометр; если я, подобно только что сказанному, спрошу у посетителя, не знакомого с делом, идет ли ток, то он станет смотреть на проволоку, стараясь увидеть, не идет ли что-нибудь по ней; но если я задам тот же вопрос своему помощнику, понимающему мой язык, то он будет знать, что вопрос означает, перемещается ли световой зайчик, и он станет смотреть на шкалу.

Но в таком случае в чем состоит различие между выражением голого факта и выражением научного факта? В том же, в чем состоит различие между выражением одного и того же голого факта на французском языке и на языке немецком. Научное выражение есть перевод «голой» формулы на язык, особенное отличие которого от обычного немецкого или французского языка состоит в том, что на нем говорит гораздо меньшее число людей.

Однако не станем спешить. Для измерения тока я могу пользоваться весьма разнообразными типами гальванометра, а также электродинамометром. Поэтому, когда я говорю: «по этой цепи проходит ток во столько-то ампер», — это значит: если я включу в эту цепь определенный гальванометр, то я увижу световой зайчик на делении *a*; но это равным образом значит: если я включу в эту цепь определенный электродинамометр, то я увижу зайчик на делении *b*. Та же фраза будет означать и множество других вещей, ибо ток может проявлять себя не только механическими действиями, но также действиями химическими, тепловыми, световыми и т. п.

Итак, мы здесь видим, что одно и то же высказывание соответствует весьма большому числу совершенно различных фактов. Почему? Потому что я допускаю закон, согласно которому при осуществлении известного механического действия одновременно осуществляется также и определенное химическое действие. Все множество прошлых опытов всегда подтверждало этот закон, и поэтому я составил убеждение, что можно одним и тем же предложением выражать два факта, столь неизменно связанные друг с другом.

Когда меня спрашивают, идет ли ток, я могу понять вопрос так: наступило ли определенное механическое действие? Но я могу понять его также иначе: наступило ли определенное химическое действие? Поэтому я стану наблюдать за осуществлением либо механического, либо химического действия: это безразлично, ибо в обоих случаях ответ должен быть один и тот же.

Но если бы однажды закон был признан ложным? Если бы оказалось, что согласованность двух действий — механического и химического — не постоянна, Тогда пришлось бы изменить научный язык, устранить из него опасную двусмысленность.

Что же потом? Разве кто-нибудь думает, что обычный язык, с помощью которого мы выражаем факты обыденной жизни, свободен от двусмысленности?

Но следует ли из этого, что факты обыденной жизни — создание грамматиков?

Вы спрашиваете меня: есть ли ток? Я ищу, есть ли механическое действие, нахожу его и отвечаю: да, ток есть. Вы сразу понимаете, что наличие механического действия означает также и наличие химического действия, которого я не искал. Допустим теперь невозможное: вообразим, что закон, который мы считали верным, неверен, что химического действия в этом случае нет. При таком предположении мы будем иметь два различных факта: один, наблюденный непосредственно, верен; другой, выведенный [путем умозаключения], ложен. Точнее будет сказать, что второй факт создан нами. Так что ошибочна та часть, которая связана с личным участием человека в выработке научного факта.

Но если мы можем сказать, что факт, о котором идет речь, ложен, то это как раз потому, что он не является свободным и произвольным созданием нашего ума, не является замаскированным соглашением. В последнем случае он не был бы ни истинным, ни ложным. На самом же деле его можно было проверить; я не сделал проверки, но я мог бы ее выполнить. Если я дал неверный ответ, то это потому, что я хотел ответить слишком поспешно, не допросив природу, которая одна знала тайну.

Когда после опыта я исправляю случайные и систематические ошибки с целью получить в чистоте научный факт, это опять то же самое; научный факт всегда будет не более чем голым фактом, переведенным на другой язык. Когда я говорю: «теперь такой-то час», — это сокращенный способ речи вместо: «существует такое-то соотношение между временем, которое показывают мои часы, и временем, которое они показывали в момент прохождения такой-то звезды и такой-то другой звезды через меридиан». И раз эта условная речь общепринята, то уже не от меня будет зависеть дать положительный или отрицательный ответ на вопрос: «такой ли час теперь?».

Перейдем к предпоследней ступени: затмение произошло в момент, даваемый таблицами, основанными на законах Ньютона. Это опять — условный способ выражения, совершенно ясный для тех, кто знает небесную механику, или просто для тех, у кого есть астрономические таблицы. Меня спрашивают: произошло ли затмение в предсказанный час? Я ищу в la Connaissanse des Temps [1]), вижу, что затмение было предсказано в девять часов, и соображаю, что вопрос имеет смысл: произошло ли затмение в девять часов? И здесь опять нам нечего изменять в наших выводах. *Научный факт есть не что иное, как голый факт в переводе на удобный язык.*

Правда, на последней ступени дело меняется. Вращается ли Земля? Доступен ли проверке этот факт? Можно ли было Галилею и Великому Инквизитору прибегнуть, с целью соглашения, к свидетельству своих чувств? Нет: они были согласны в том, что касается видимости, и, каков бы ни был накопленный опыт, они остались бы согласными относительно видимости, не приходя ни к какому соглашению относительно ее истолкования. Поэтому-то им пришлось прибегнуть к столь ненаучным приемам спора.

Итак, я полагаю, что преметом их разногласия был не *факт*; мы не имеем права давать одно и то же имя и вращению Земли, о котором они спорили, и голым или научным фактам, рассмотренным нами до сих пор в нашем обзоре.

После всего сказанного представляется лишним исследовать, лежит ли голый факт вне области науки. Наука не могла бы сущестовать без научного факта, а научный факт — без голого факта: ведь первый есть лишь пересказ второго.

А в таком случае, имеем ли мы право сказать, что ученый создает научный факт? Он, прежде всего, не создает его *из ничего*: он вырабатывает его с помощью голого факта. Значит, он не производит его свободно и *по своей прихоти*. Как бы ни был искусен работник, его свобода всегда ограничена свойствами первичного материала, над которым он работает.

Итак, что же вы хотите сказать, говоря о свободном творчестве научного факта и приводя пример

[1]) Известный астрономический календарь. — *Примеч. ред.*

астронома, который, принеся свои часы, принимает активное участие в явлении затмения? Хотите ли вы этим сказать, что затмение произошло в девять часов, но если бы астроном пожелал, чтобы оно случилось в десять часов, то это вполне зависело бы от него: ему стоило бы только перевести свои часы на один час вперед.

Но если бы астроному пришла в голову эта дурная шутка, то это было бы очевидное злоупотребление двусмысленностью. Когда он говорит мне: «затмение произошло в девять часов»,— я понимаю, что «девять часов» обозначают время, выведенное из грубого показания часов при помощи ряда обычных поправок. Если мне дают лишь это грубое показание или если сделанные поправки не согласуются с общепринятыми правилами, то это значит, что условный язык без моего ведома подвергся изменениям. Если же меня позаботились предупредить об этом, то у меня нет оснований жаловаться; но тогда мы имеем все тот же факт, выраженный другим языком.

Резюмируем сказанное: *вся творческая деятельность ученого по отношению к факту исчерпывается высказыванием, которым он выражает этот факт.* Если он предсказывает какой-нибудь факт, он употребит это высказывание, и его предсказание будет совершенно недвусмысленно для всех тех, кто умеет употреблять и понимать язык науки. Но раз ученый сделал это предсказание, то, очевидно, не от него зависит, осуществится ли оно или нет.

Что же в таком случае остается от положения, высказанного Леруа? Остается следующее: ученый принимает активное участие в выборе фактов, которые заслуживают наблюдения. Отдельный факт сам по себе не представляет никакого интереса; факт привлекает к себе внимание тогда, когда есть основание думать, что он поможет предсказать другие факты, или же в том случае, когда он, будучи предсказан и затем подтвержден, приведет к установлению закона. Кто отбирает факты, которые, удовлетворяя этим условиям, заслуживали бы права гражданства в науке? Свободная деятельность ученого.

Это не все. Я сказал, что научный факт есть перевод голого факта на некоторый язык; мне следовало бы добавить, что любой научный факт образован из нескольких голых фактов. Это с достаточной ясностью обнаруживается в приведенных выше примерах. Так в начале затмения мои часы показывали время α; они показывали время β в момент последнего прохождения через меридиан некоторой звезды, которую мы берем за начало прямых восхождений; они показывали время γ в момент предпоследнего прохождения той же звезды. Вот три различных факта (заметим еще, что каждый из них в свою очередь представляет собой результат двух одновременных голых фактов, но не будем на этом останавливаться). Вместо этого я говорю: затмение произошло в момент $24\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}$ — и три факта оказываются сосредоточенными в едином научном факте. Я решил, что три отсчета α, β, γ, сделанные по моим часам в три различные момента, не представляют интереса и что единственной интересной вещью является сочетание $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}$ этих трех отсчетов. В этом суждении проявляется свободная деятельность моего ума.

Но этим исчерпывается моя мощь; я не могу достигнуть того, чтобы это сочетание $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}$ имело такое, а не какое-либо иное числовое значение, ибо я не в состоянии влиять на числовые значения величин α, β, γ, которые суть голые факты, не зависящие от меня.

Итог: факты суть факты; *если бывает, что они согласуются с предсказанием, то это не является результатом нашей свободной деятельности.* Не существует резкой грани между голым фактом и научным фактом; можно только назвать одно выражение факта *более голым* или, наоборот, *более научным*, чем другое.

§ 4. «Номинализм» и «универсальный инвариант»

Ясно, что если мы от фактов переходим к законам, то участие свободной деятельности ученого станет гораздо более значительным. Но все-таки не преувеличивается ли оно у Леруа? Займемся исследованием этого вопроса.

Обратимся сначала к приводимым у него примерам. Когда я говорю: «фосфор плавится при 44°», — я считаю, что высказываю закон; на самом же деле это — определение фосфора. Если бы было открыто тело, которое, обладая всеми прочими свойствами фосфора, не плавилось бы при 44°, ему дали бы другое название и только. Закон остался бы верным.

Так же, когда я говорю: «тяжелые тела в свободном падении проходят пути, пропорциональные квадратам времен», — я просто даю определение свободного падения. Всякий раз, как условие не будет выполнено, я скажу, что падение не свободно, так что закон никогда не окажется ошибочным.

Ясно, что если бы законы сводились к этому, то они не могли бы служить для предсказания; следовательно, они не были бы пригодны ни к чему — ни в качестве орудий познания, ни в качестве оснований деятельности.

Когда я говорю: «фосфор плавится при 44°», — я хочу этим сказать: «всякое тело, обладающее такими-то свойствами (подразумеваются все признаки фосфора, за исключением точки плавления), плавится при 44°». При таком понимании мое предложение есть, конечно, закон, и этот закон может мне принести пользу, ибо если я встречу тело, обладающее этими свойствами, то смогу предсказать, что оно будет плавиться при 44°.

Без сомнения, может обнаружиться, что этот закон ошибочен. Тогда мы прочтем в трактатах по химии: «Существуют два тела, которые в течение долгого времени смешивались химиками под названием фосфора; эти два тела отличаются друг от друга только температурой плавления». Очевидно, это был бы не первый случай того, как химики приходят к разделению двух тел, которых раньше они не умели отличить друг от друга; таковы, например, неодим и празеодим, которые в течение долгого времени смешивались под названием дидима.

Я не думаю, чтобы химики сколько-нибудь опасались подобной неприятности по отношению к фосфору. Но если бы это сверх ожидания произошло, то упомянутые два тела, наверное, не имели бы *в точности одинаковой* плотности, *в точности одинаковой* удельной теплоты и т. д.; поэтому, тщательно определив, например, плотность, мы еще были бы в состоянии предвидеть температуру плавления.

Впрочем, это не столь важно: достаточно заметить, что мы имеем здесь закон и что этот закон, будь он верен или ошибочен, не сводится к одной тавтологии.

Нам, быть может, возразят, что если мы не знаем на Земле тела, которое, имея все прочие свойства фосфора, не плавилось бы при 44°, то ведь неизвестно, не существует ли его на других планетах. Это без сомнения возможно, и тогда пришлось бы вывести заключение, что хотя рассматриваемый закон и может служить правилом действия для нас, обитателей Земли, однако с точки зрения познания он не имеет общего значения, и весь интерес к нему обязан только случайностью, поселившей нас на земном шаре. Это возможно, но если бы это было так, то закон не имел бы значения не потому, что он сводится к условному соглашению, но потому, что он тогда был бы ложен.

То же самое относится к падению тел. Мне не к чему было бы давать название «свободного падения» падению, совершающемуся согласно с законами Галилея, если бы я в то же время не знал, что в известных условиях падение будет, *вероятно*, свободно или *почти* свободно. Итак это — закон, который может быть верен или неверен, но который уже не сводится к условному соглашению.

Предположим, что астрономы открыли, что небесные тела не подчиняются в точности закону Ньютона. Тогда у них будет выбор между двумя точками зрения: они могут сказать или что тяготение не в точности обратно пропорционально квадрату расстояния, или что небесные тела, кроме тяготения, подчинены еще другой силе, имеющей отличную от него природу.

В этом втором случае закон Ньютона будет рассматриваться как определение тяготения. Это будет точка зрения номинализма. Выбор между двумя точками зрения остается свободным и делается по соображениям удобства, хотя чаще всего эти соображения бывают столь влиятельными, что свобода выбора на практике почти исчезает.

Мы можем разложить предложение: «(1) небесные тела подчиняются закону Ньютона» на два других; «(2) тяготение следует закону Ньютона»; «(3) тяготение есть единственная сила, действующая на небесные тела». В таком случае предложение (2) есть простое определение и оно ускользает от опытной проверки, но тогда можно будет подвергнуть проверке предложение (3). Это, конечно, необходимо, ибо вытекающее из него предложение (1) предсказывает голые факты, допускающие проверку.

Благодаря этому приему в духе неосознанного номинализма ученые поставили выше законов то, что они называют принципами. Когда некоторый закон получил достаточное опытное подтверждение, мы можем занять по отношению к нему одну из двух позиций: или подвергать его непрерывным проверкам и пересмотрам (которые в конце концов несомненно докажут, что он является лишь приближенным), или же возвысить его в ранг *принципов*, принимая при этом такие соглашения, чтобы предложение было несомненно истинным. Это делается всегда одним и тем же приемом. Первоначальный закон выражал соотношение между двумя голыми фактами A и B; между этими двумя голыми фактами вводится промежуточный отвлеченный факт C, более или менее фиктивный (в предыдущем примере эта роль принадлежит неуловимой сущности тяготения). Тогда мы имеем соотношение между A и C, которое можем считать строго точным и которое есть *принцип*; и другое — между C и B, которое продолжает существовать как *закон*, могущий быть пересмотренным.

Принцип, который с этих пор как бы кристаллизовался, уже не подчинен опытной проверке. Он ни верен, ни неверен; он удобен.

В таком образе действий часто находят большую выгоду; но ясно, что если бы *все* законы были преобразованы в принципы, то от науки не осталось бы *ничего*. Каждый закон может быть разложен на принцип и закон; но из предыдущего очевидно, что законы продолжают существовать всегда, как бы далеко ни проводить это разложение.

Итак, номинализм имеет границы; и можно этого не осознавать, если понимать в буквальном смысле утверждения Леруа.

Беглый обзор наук позволит нам лучше уяснить себе, каковы эти границы. Точка зрения номинализма оправдывается лишь тогда, когда она удобна. Когда это бывает?

Опыт знакомит нас с отношениями между телами; это — голый факт. Эти отношения чрезвычайно сложны. Вместо того чтобы прямо рассматривать отношение между телом A и телом B, мы вводим между ними промежуточный элемент — пространство — и рассматриваем три различные отношения: отношение между телом A и пространственным образом A', отношение между телом B и пространственным образом B', отношение двух пространственных образов A' и B' между собой. Почему этот окольный путь является выгодным? Потому что отношение между A и B было сложно, но мало отличалось от отношения между A' и B', отличающегося простотой; следовательно, это сложное отношение может быть заменено простым отношением между A' и B' и двумя другими отношениями, из которых мы узнаем, что разности между A и A', с одной стороны, и между B и B', с другой, *очень малы*. Например, если A и B будут два естественных твердых тела, которые перемещаются, слегка деформируясь, то мы будем рассматривать два *неизменных* подвижных образа A' и B'. Законы относительных перемещений этих образов A' и B' будут весьма просты; это будут законы геометрии. А затем мы добавим, что тело A, которое всегда весьма мало отлично от A', расширяется под действием тепла и сгибается в силу упругости. Для нашего ума будет сравнительно легко изучить эти расширения и сгибания именно вследствие того, что они весьма малы. Но подумайте, на какое усложнение речи пришлось бы нам пойти, если бы мы захотели включить в одно изложение перемещение твердого тела, его расширение и его сгибание?

Отношение между A и B было грубым законом; оно разложено. Мы имеем теперь два закона, выражающих отношения между A и A', B и B', и принцип, выражающий отношение между A' и B'. Совокупность принципов этого рода называют геометрией.

Еще два замечания. Мы имеем отношение между двумя телами A и B, которое мы заменили отношением между двумя образами A' и B', но это самое отношение между теми же образами A' и B' может быть с выгодой заменено отношением между двумя другими телами A'' и B'', совершенно отличающимися от A и B. И это может быть выполнено множеством способов. Если бы принципы и геометрия не были изобретены (inventé), то после изучения связи между A и B нужно было бы ab ovo[1]) возобновлять изучение связи между A'' и B''. Вот почему столь драгоценна геометрия. Геометрическое отношение может с выгодою заменить отношение, которое, будучи рассматриваемо в грубом виде, представляется как механическое; оно не может заменить и другое, которое могло бы рассматриваться как оптическое, и т. д.

Но пусть не говорят нам: это доказывает, что геометрия — опытная наука; отделяя ее принципы от законов, из которых они извлечены, вы искусственно отделяете ее от наук, которые ее произвели. Другие науки также имеют принципы, но это не устраняет необходимости называть их экспериментальными.

Надо признаться, что трудно было бы не сделать этого разделения, которое выглядит искусственным. Известно, какую роль сыграла кинематика твердых тел в генезисе геометрии; но следует ли отсюда, что геометрия есть только ветвь экспериментальной кинематики? И законы прямолинейного распространения света также содействовали формированию ее принципов. Следует ли поэтому рассматривать геометрию в одно и то же время как ветвь кинематики и как ветвь оптики? Я напомню еще, что наше евклидово пространство, которое, собственно, является предметом геометрии, было выбрано по соображениям удобства из некоторого числа типов, которые ранее существовали в нашем сознании и которым присвоено название групп.

Переходя к механике, мы видим и здесь великие принципы, имеющие аналогичное происхождение; но так как их «сфера действия» (так сказать) менее значительна, то уже нет оснований отделять их от механики в собственном смысле и рассматривать эту науку как дедуктивную.

Наконец, в физике роль принципов еще более суживается. Действительно, их вводят лишь тогда, когда это бывает выгодно. Но они приносят выгоду как раз только потому, что они малочисленны, потому, что каждый из них заменяет довольно значительное число законов. Поэтому размножать их невыгодно. Кроме того, надо учесть, что здесь в конце

---

[1]) С самого начала (*лат.*). — *Примеч. ред.*

концов приходится покидать абстракции, чтобы войти в контакт с реальностью.

Таковы пределы номинализма, и они тесны.

Однако Леруа настойчив, и он ставит вопрос в другой форме.

Так как формулировка наших законов может меняться вместе с соглашениями, которые мы принимаем, и так как эти соглашения могут видоизменять сами естественные отношения этих законов, то существует ли во всей совокупности этих законов нечто такое, что не зависело бы от указанных соглашений и могло бы, так сказать, играть роль *универсального инварианта*? Можно вообразить, например, существа, которые, получив умственное воспитание в мире, отличном от нашего, приходят к созданию неевклидовой геометрии. Если бы затем эти существа были вдруг перенесены в наш мир, то они наблюдали бы те же законы, что и мы, но выражали бы их совершенно иным способом. Правда, между двумя способами формулировок еще оставалось бы кое-что общее, но это потому, что эти существа еще недостаточно отличны от нас. Можно вообразить существа, еще более странные, и тогда часть, общая двум системам формулировок, будет суживаться все более и более. Может ли она уменьшиться таким образом до нуля, или же окажется несократимый остаток, который тогда и будет искомым универсальным инвариантом?

Надо уточнить постановку вопроса. Хотим ли мы, чтобы эта общая часть содержания могла быть выражена словами? В таком случае ясно, что не существует слов, общих всем языкам, и мы не можем иметь притязаний построить какой-то универсальный инвариант, который был бы в одно время понятен и для нас, и для тех воображаемых неевклидовых геометров, о которых только что шла речь, — точно так же, как нельзя построить фразу, которая была бы понятна сразу немцам, не знающим французского языка, и французам, не знающим немецкого языка. Но у нас есть неизменные правила, позволяющие нам переводить французскую речь на немецкий и обратно. Для этого-то и составляются грамматики и словари. Так же существуют неизменные правила для перевода евклидова языка на неевклидов, и если бы их не было, то их можно было бы составить.

Но даже если бы не существовало ни переводчика, ни словаря и если мы, немцы и французы, прожив века в разделенных друг от друга мирах, вдруг пришли в соприкосновение, можно ли думать, что не оказалось бы ничего общего между наукой немецких книг и наукой книг французских? В конце концов немцы и французы, конечно, стали бы понимать друг друга, подобно тому как американские индейцы поняли язык своих победителей-испанцев.

Но, скажут нам, конечно, французы были бы способны понять немцев, даже не изучая немецкий язык; однако это потому, что между французами и немцами есть нечто общее: те и другие — люди. Так же можно было бы столковаться с нашими гипотетическими неевклидовыми существами (хотя они уже больше не люди), так как они еще сохранили бы нечто человеческое. Но во всяком случае некоторый минимум человеческого необходим.

Возможно, что это так; но я, во-первых, замечу, что небольшой доли человеческих признаков, остающейся у неевклидовых существ, было бы достаточно не только для того, чтобы перевести *немногое* из их языка, но и чтобы перевести *весь* их язык.

Что же касается необходимости минимума, то с этим я согласен. Предположим, что существует некоторый флюид, наполняющий промежутки между частицами нашей материи, не оказывающий на последнюю никакого действия и не подвергающийся никакому действию с ее стороны. Допустим, что некоторые существа были бы восприимчивы к воздействию этого флюида и невосприимчивы к воздействию нашей материи. Ясно, что наука этих существ совершенно отличалась бы от нашей, и было бы напрасно искать «инвариант», общий обеим этим наукам. То же самое, если бы эти существа не признавали нашей логики, отрицая, например, принцип противоречия.

Однако, по моему мнению, не представляет интереса углубляться в подобные гипотезы.

В таком случае, если мы не будем заходить столь далеко по пути этих странных допущений, если будем воображать лишь существа, обладающие чувствами, аналогичными нашим чувствам, и восприимчивые к тем же впечатлениям, что и мы, а с другой стороны, допускающие принципы нашей логики, то мы можем заключить, что их язык, как бы он ни отличался от нашего, всегда был бы доступен для перевода.

Но возможность перевода означает существование инварианта. Перевести как раз и означает: выделить этот инвариант. Подобно этому дешифрировать криптографический документ — значит отыскать то, что остается в этом документе неизменным при перемене его знаков.

Теперь легко понять, какова природа этого инварианта. Это выражается в двух словах. Инвариантные законы суть отношения между голыми фактами, тогда как отношения между «научными фактами» всегда остаются в зависимости от некоторых условных соглашений.

Глава XI

НАУКА И РЕАЛЬНОСТЬ

§ 5. Случайность и детерминизм

Я не имею в виду рассматривать здесь вопрос о случайности законов природы — вопрос, который, очевидно, неразрешим и о котором уже так много писали.

Я хотел бы лишь обратить внимание на то, сколько различных значений давали слову «случайность» и как было бы полезно отличать эти значения друг от друга.

Рассматривая какой-либо частный закон, мы наперед можем быть уверены, что он является только приближенным. В самом деле, он выведен на основании опытных проверок, а эти последние были и могли быть только приближенными. Надо быть постоянно готовым к тому, что более точные измерения заставят нас добавить к нашим формулам новые члены. Так это было, например, по отношению к закону Мариотта.

Более того, формулировка любого закона неизбежно бывает неполной. Эта формулировка должна была бы включать перечисление *всех* предшествующих событий, в силу которых происходит данное следствие. Мне следовало бы сначала описать *все* условия производимого опыта; тогда закон выразился бы так: если все условия выполнены, то будет иметь место такое-то явление.

Но мы лишь тогда можем быть уверены в том, что *ни одно* из этих условий не забыто нами, если опишем состояние всей Вселенной в момент t: в самом деле, все части этой Вселенной могут оказывать более или менее значительное влияние на явление, которому предстоит произойти в момент $t + dt$.

Но ясно, что подобное описание не могло бы иметь места в выражении закона; а если бы его и выполнить, то закон стал бы неприменимым; требуя выполнения стольких условий одновременно, мы имели бы весьма малую вероятность того, что в какой-то момент они все осуществятся.

Но раз мы никогда не можем быть уверены в том, что какое-нибудь существенное условие не забыто нами, то мы не будем иметь возможности говорить: «при осуществлении таких-то условий произойдет такое-то явление». Можно только сказать: «вероятно, что при осуществлении таких-то условий произойдет приблизительно такое-то явление».

Возьмем закон тяготения, наименее несовершенный из всех известных законов. Он позволяет нам предвидеть движения планет. Когда я пользуюсь им, например, для вычисления орбиты Сатурна, я пренебрегаю действием звезд и, поступая так, сохраняю уверенность в своей правоте, ибо знаю, что эти звезды слишком удалены, чтобы их действие было ощутимо.

Итак, я заявляю якобы с достоверностью, что в такое-то время координаты Сатурна будут заключаться между такими-то пределами. Однако абсолютна ли эта достоверность?

Разве не может существовать во Вселенной некоторой гипотетической массы, гораздо более значительной, чем все известные звезды, действие которой могло бы стать заметным на больших расстояниях? Положим, что эта масса обладает колоссальной скоростью, и пусть, после того как она обращалась все время на таких расстояниях от нас, что ее влияние до сих пор оставалось для нас незаметным, она вдруг проходит вблизи нас. Она, наверное, произведет в нашей Солнечной системе огромные возмущения, которых мы совершенно не могли бы предвидеть. Все, что можно об этом сказать, это то, что подобный случай совершенно невероятен, и тогда вместо того, чтобы говорить: «Сатурн будет близ такой-то точки неба», мы должны будем ограничиться заявлением: «Сатурн, вероятно, будет вблизи такой-то точки неба». Хотя эта вероятность на практике равносильна достоверности, все же это только вероятность.

На этом основании всякий частный закон всегда будет лишь приближенным и вероятным. Ученые никогда не забывали этой истины; однако они, основательно или нет, верят в то, что всякий закон можно будет заменить другим, более приближенным и более вероятным, что этот новый закон в свою очередь будет лишь временным, но что такой процесс можно будет продолжать бесконечно, так что наука, прогрессируя, будет обладать законами, все более и более вероятными, и, наконец, приближенность и вероятность будут сколь угодно мало отличаться от точности и достоверности.

Если ученые, думая так, правы, то можно ли всетаки сказать, что *вообще* законы природы случайны, хотя *каждый* закон, взятый в отдельности, может быть признан случайным?

Или же, прежде чем сделать вывод о случайности законов природы *вообще*, придется поставить требование, чтобы упомянутый мною прогресс имел границу, чтобы ученый в конце концов был остановлен в своем искании все бóльших приближений и чтобы за известным пределом он встречал в природе один лишь произвол?

С точки зрения, о которой я только что сказал (и которую я назову научной точкой зрения), всякий закон является лишь несовершенной и временной формулировкой; но он должен быть с течением времени заменен другим, более совершенным законом, по отношению к которому он лишь грубое подобие. Поэтому для вмешательства свободной воли не остается места.

Мне кажется, что кинетическая теория газов предоставляет нам поразительный пример.

Известно, что эта теория объясняет все свойства газов при помощи простой гипотезы. Предполагается, что все молекулы в газах движутся с большими скоростями во всех направлениях по прямолинейным путям, которые терпят изменения лишь тогда, когда молекула проходит очень близко от стенок сосуда или от другой молекулы. Те эффекты, которые доступны для наблюдения с помощью наших грубых чувств, суть *средние* эффекты; в этих средних большие отклонения скомпенсируются; по крайней мере, весьма невероятно, чтобы они не скомпенсировались; поэтому наблюдаемые явления подчинены простым законам, каковы законы Мариотта и Гей-Люссака. Но эта компенсация отклонений является лишь вероятной. Молекулы беспрестанно меняют места, и при этих непрерывных перемещениях образуемые ими фугуры последовательно проходят через все возможные комбинации. Число этих комбинаций чрезвычайно велико; почти все они согласуются с законом Мариотта и только некоторые от него отклоняются. Когда-нибудь реализуются и они; но только этого надо было бы очень долго дожидаться. Если бы мы стали следить за газом в течение достаточно продолжительного времени, то в конце концов, наверное, увидели бы его в течение весьма короткого промежутка времени уклоняющимся от закона Мариотта. Сколько времени пришлось бы этого выжидать? Если бы мы пожелали вычислить вероятное число лет, то оно оказалось бы столь большим, что для одного письменного изображения числа его знаков понадобилось бы около дюжины цифр. Это не важно: для нас достаточно, что оно будет конечным.

Я не хочу обсуждать здесь ценность этой теории. Ясно, что если ее принять, то закон Мариотта будет представляться нам уже только случайным, так как наступит время, когда он больше не будет верным. Однако следует ли думать, что сторонники кинетической теории являются противниками детерминизма? Напротив, это — самые непримиримые из механистов. Их молекулы следуют строго по определенным траекториям, отклоняясь от них лишь под влиянием сил, меняющихся с расстоянием по совершенно определенному закону. В их системе не остается малейшего места ни для свободы, ни для какого-либо фактора эволюции в собственном смысле, ни для чего бы то ни было, подходящего под название случайности. Во избежание недоразумений я добавлю, что здесь нет также эволюции самого закона Мариотта: через какое-то множество веков он перестает быть верным, но спустя какую-то долю секунды он становится опять верным и это — на неисчислимое множество веков.

Надо устранить еще одно недоразумение, связанное со словом «эволюция», которое я употребил. Часто говорят: быть может, законы природы эволюционируют, быть может, откроется, что в каменноугольную эпоху они были не теми, какими они являются сегодня. Что под этим подразумевают? Все, что мы полагаем знать о прошедшем земного шара, мы выводим из его теперешнего состояния. Эти выводы делаются именно при посредстве законов, предполагаемых известными. Закон, как отношение между условием и следствием, одинаково позволяет нам выводить как следствие из условия, т. е. предвидеть будущее, так и условие — из следствия, т. е. заключать от настоящего к прошедшему. Астроном, знающий настоящее положение светил, может при помощи закона Ньютона вывести отсюда будущее их положение (именно это он делает при построении эфемерид), а равно и прошедшее их положение. Вычисления, которые ему придется делать при этом, не могут показать ему, что закон Ньютона когда-нибудь перестанет быть верным, ибо как раз этот закон служит его исходной точкой; точно так же они не могут открыть ему, что закон был неверен в прошедшем. По отношению к будущему его эфемериды еще могут быть когда-нибудь подвергнуты проверке, и наши потомки, быть может, признают, что они были неверны. Но по отношению к прошлому — геологическому прошлому, очевидцев которого не существует, — результаты его вычислений (как вообще результаты всех умозрений, посредством которых мы стремимся вывести прошлое из настоящего) по самой своей природе ускользают от всякого подобия проверки. Поэтому, если законы природы были в каменноугольный период не те, что в современную эпоху, то мы никогда не будем в состоянии это узнать, ибо мы можем узнать об этом периоде только то, что мы выводим из предположения неизменности этих законов.

Пожалуй, мне возразят, что эта гипотеза может привести к противоречивым результатам и что тогда придется от нее отказаться. Так, в вопросе о происхождении жизни можно прийти к заключению, что живые существа были всегда, так как современный мир всегда показывает нам, что жизнь рождается из жизни; но можно также заключить, что они существовали не всегда, потому что применение современных физических законов к настоящему состоянию земного шара показывает нам, что было время, когда земной шар был столь сильно нагрет, что жизнь на нем была невозможна. Однако противоречия этого рода всегда могут быть устранены двумя способами: можно допустить, что современные законы природы не в точности таковы, какими мы их принимаем; или же можно допустить, что законы природы в настоящее время таковы, какими мы их принимаем, но что так было не всегда.

Ясно, что современные законы никогда не будут известны достаточно хорошо, чтобы нельзя было принять первое из этих двух решений и таким образом избегнуть необходимости вывода об эволюции естественных законов.

С другой стороны, допустим такую эволюцию: примем, если угодно, что человечество живет достаточно долго, так что эта эволюция могла иметь очевидцев. Пусть, например, *то же самое* условие влечет различные следствия в каменноугольную эпоху и в четвертичную эпоху. Это, очевидно, означает, что условия приблизительно одинаковы; если бы все обстоятельства были тождественны, каменноугольная эпоха была бы неразличима от четвертичной; очевидно, это — не то, что мы предполагаем. Остается заключить, что такое-то условие, сопровождаемое таким-то побочным обстоятельством, производит такое-то следствие, а то же самое условие, сопровождаемое другим побочным обстоятельством, производит другое следствие. Время не играет здесь никакой роли.

Недостаточно развившаяся наука формулирует закон, согласно которому определенное условие всегда вызывает определенное следствие. Такой закон, не учитывающий побочных обстоятельств, является не более как приближенным и вероятным, и он должен быть заменен другим законом, который учтет эти побочные обстоятельства и явится более приближенным и более вероятным. Таким образом, мы постоянно приходим опять к тому же процессу, который был рассмотрен выше, и если бы человечество открыло что-нибудь в этом роде, то оно не сказало бы, что законы испытали эволюцию, но сказало бы, что обстоятельства видоизменились.

Таковы различные значения слова «случайность». Леруа сохраняет их все, не различая их достаточно, и еще вводит новое. Экспериментальные законы являются лишь приближенными; если некоторые из них представляются нам точными, то это потому, что мы искусственно преобразовали их в то, что я выше назвал принципом. Это преобразование сделано нами свободно, и так как произвол, в силу которого мы совершили его, есть нечто в высшей степени случайное, то эту случайность мы сообщили самому закону. В этом смысле мы имеем право сказать, что детерминизм предполагает свободу, так как мы становимся детерминистами свободно. Быть может, найдут, что такая точка зрения предоставляет слишком большую роль номинализму и что введение этого нового смысла слова «случайность» не принесет большой помощи при решении всех вопросов, которые естественно возникают здесь и о которых мы только что сказали несколько слов.

Я отнюдь не хочу исследовать здесь основания принципа индукции; я очень хорошо знаю, что я не имел бы успеха: оправдать этот принцип так же трудно, как и обойтись без него. Я хочу лишь показать, как ученые его применяют или бывают вынуждены применять.

Когда воспроизводится одно и то же условие, должно воспроизводиться то же самое следствие; такова обычная формулировка. Но в такой форме этот принцип не мог бы оказать никаких услуг. Для того чтобы можно было сказать, что воспроизведено то же самое условие, необходимо воспроизведение *всех* обстоятельств, так как ни одно из них не является абсолютно безразличным, и притом воспроизведение должно быть *точным*. А так как этого никогда не будет, то принцип не мог бы иметь никакого применения.

Поэтому мы должны видоизменить формулировку и сказать: если однажды условие A произвело следствие B, то условие A', мало отличающееся от A, произведет следствие B', мало отличающееся от B. Но как нам узнать, что условия A и A' «мало отличаются» друг от друга? Если одно из обстоятельств может быть выражено числом и если это число в двух случаях имеет весьма близкие друг к другу значения, то смысл слов «мало отличающийся» относительно ясен; принцип означает тогда, что следствие есть непрерывная функция предшествующего условия. А в качестве практического правила приходим к выводу, что мы вправе производить интерполяцию. В самом деле, ученые производят ее на каждом шагу; без интерполяции наука была бы невозможна.

Однако заметим одно обстоятельство. Искомый закон может быть представлен кривою. Опыт указал нам некоторые точки этой кривой. В силу только что изложенного принципа мы полагаем, что эти точки могут быть соединены непрерывной линией. Мы чертим эту линию на глаз. Новые опыты дадут нам новые точки кривой. Если эти точки лежат вне начерченной раньше линии, то нам придется видоизменить нашу кривую, но не отказаться от нашего принципа. Всегда можно провести непрерывную кривую через любое число как угодно расположенных точек. Если эта кривая будет чересчур причудлива, то мы, несомненно, будем смущены (и даже станем подозревать погрешности опыта), но принцип не будет заподозрен в ошибочности.

Кроме того, между обстоятельствами известного явления всегда бывают такие, которые мы считаем несущественными, и мы будем считать, что A и A' мало отличаются друг от друга, если они отличаются лишь этими побочными обстоятельствами. Пусть я, например, установил, что водород с кислородом соединяется под действием электрической искры; я уверен, что эти два газа будут соединяться снова, хотя долгота Юпитера успела за это время значительно измениться. Мы допускаем, например, что состояние удаленных тел не может иметь заметного влияния на земные явления, и эта мысль действительно как бы с неизбежностью навязывается нам; но бывают случаи, когда выбор таких практически безразличных обстоятельств сопряжен с большей степенью произвола или, если угодно, требует большего чутья

Еще одно замечание. Принцип индукции был бы неприложим, если бы в природе не существовало большого числа тел, сходных или почти сходных между собой, и если бы, например, по одному куску фосфора нельзя было заключать о другом куске фосфора.

Если мы призадумаемся над этими соображениями, то проблема детерминизма и случайности явится нам в новом свете.

Положим, что мы могли бы охватить совокупность всех явлений мира за всю длительность времени. Мы могли бы рассматривать то, что можно было бы назвать *следованиями*: я подразумеваю соотношения между предшествующим и последующим. Я не имею в виду говорить о постоянных соотношениях или законах, я рассматриваю в отдельности, — так сказать, индивидуально — различные осуществляемые следования.

Мы убедились бы тогда, что между этими следованиями нет даже двух, которые были бы совершенно подобны друг другу. Но если справедлив принцип индукции (в той форме, в какой мы его выразили), то между ними будут такие, которые будут почти подобны и которые могут быть причислены к одному и тому же классу. Иными словами, можно создать классификацию следований.

К возможности и законности подобной классификации и сводится в конечном счете детерминизм. Это все, что остается от него после предыдущего анализа. Быть может, в этой скромной форме он покажется моралисту менее ужасным.

Несомненно, мне скажут, что, таким образом, мы окольным путем возвращаемся к тому же самому выводу Леруа, который, по-видимому, только что отвергали: детерминиста создает свобода. Действительно, всякая классификация предполагает деятельное участие классифицирующего. Пожалуй, это так; все же мне кажется, что этот окольный путь небесполезен и кое-что нам разъясняет.

§ 6. Объективность науки

Перехожу к вопросу, поставленному в заглавии этого параграфа: какова объективная ценность науки? И, прежде всего, что мы должны понимать под объективностью?

Гарантией объективности мира, в котором мы живем, служит общность этого мира для нас и для других мыслящих существ. Посредством сношений, происходящих у нас с другими людьми, мы получаем от них готовые умозаключения; мы знаем, что эти умозаключения не исходят от нас, и в то же время мы признаем их произведением мыслящих существ, подобных нам. И так как эти умозаключения представляются приложимыми к миру наших ощущений, то мы считаем себя вправе заключить, что эти мыслящие существа видели то же, что мы; отсюда-то мы и узнаем, что мы не грезим.

Таково, следовательно, первое условие объективности; что объективно, то должно быть обще многим умам и, значит, должно иметь способность передаваться от одного к другому; а так как эта передача может происходить лишь «дискурсивным» путем (который внушает такое недоверие Леруа), то мы вынуждены сделать заключение: путь к объективности есть путь общения посредством речи (рассуждений, логики) [1]) (pas de discours, pas d'objectivité) [2]).

Ощущения другого индивидуума будут для нас навечно закрытым миром. У нас нет никакого средства удостовериться, что ощущение, которое я выражаю словом «красное», есть то же самое, которое связывается с этим словом у соседа.

Допустим, что вишня и цветок мака вызывают у меня ощущение A, а у другого ощущение B и что, наоборот, древесный лист вызывает у меня ощущение B, а у него ощущение A. Ясно, что мы об этом никогда ничего не узнаем: ибо я буду обозначать ощущение A словом «красное» и ощущение B словом

---

[1]) По поводу ошибочности такого понимания Пуанкаре объективности внешнего мира см статью «Анри Пуанкаре и наука начала XX века», с 680 — *Примеч. ред*

[2]) Лат discursus — рассуждение, дискурсивный — рассудочный, логический. Франц le discours — речь, разговор — *Примеч. ред.*

«зеленое», тогда как он первое назовет словом «зеленое», а второе словом «красное». Зато мы будем в состоянии установить, что как у него, так и у меня вишня и цветок мака вызывают *одно и то же* ощущение, ибо мы оба даем одно и то же название испытываемым в этом случае ощущениям. Итак, ощущения непередаваемы, или — точнее — все то из них, что является чистым качеством, непередаваемо и навсегда недоступно. Но нельзя того же сказать об отношениях между ощущениями.

С этой точки зрения все, что объективно, лишено всякого «качества», является только чистым отношением. Я не стану, конечно, говорить, что объективность есть только чистое «количество» (это значило бы слишком суживать природу рассматриваемых отношений), но вы понимаете, что я уже не знаю, как можно позволить себе увлечься до того, чтобы сказать, что мир есть не более как дифференциальное уравнение.

Соблюдая всяческую осторожность по отношению к этому парадоксальному предложению, мы должны тем не менее допустить, что объективно лишь то, что поддается передаче, и, следовательно, что объективную ценность могут иметь только одни отношения между ощущениями.

Могу сказать, что эстетические эмоции, которые общи у всех людей, доказывают нам, что качества наших ощущений тоже одни и те же для всех людей и тем самым объективны. Но, поразмыслив, мы увидим, что доказательства этому нет; доказано только то, что известная эмоция вызвана у Жана и у Пьера ощущениями (или сочетаниями соответствующих ощущений), которым Жан и Пьер дают одно и то же название, причем возможно, что эта эмоция у Жана ассоциируется с ощущением *A*, которое Жан обозначает словом «красное», а у Пьера она параллельно этому ассоциируется с ощущением *B*, которое Пьер обозначает словом «красное»; возможно также, что эта эмоция вызвана не самими качествами ощущений, но гармоническим сочетанием их отношений и испытанным нами неосознанным впечатлением.

Известное ощущение бывает «красиво» не потому, что оно обладает определенным качеством, но потому, что оно занимает определенное место в ткани, образуемой ассоциациями наших идей: его нельзя задеть без того, чтобы не привести в колебания «приемник», который находится на другом конце нити и который соответствует художественной эмоции.

Вопрос представляется всегда одним и тем же, станем ли мы на моральную, эстетическую или научную точку зрения. Объективно лишь то, что является тождественным для всех; но о таком тождестве можно говорить лишь в том случае, если возможно сравнение, если результат этого сравнения поддается переводу на «разменную монету», которая может быть передана от одного сознания другому. Поэтому ничто не будет иметь объективной ценности, кроме того, что может быть передано посредством речи, т. е. того, что может быть понимаемо.

Но это лишь одна сторона вопроса. Абсолютно беспорядочная совокупность не могла бы иметь объективной ценности, потому что она была бы недоступна пониманию; но и упорядоченная совокупность не может иметь объективной ценности, если она не соответствует действительно испытываемым ощущениям. Мне представляется излишним напоминать это условие; я не стал бы говорить о нем, если бы в последнее время не стали утверждать, что физика — не экспериментальная наука. Хотя это воззрение не имеет никаких шансов на успех как у физиков, так и у философов, однако не мешает о нем знать, чтобы не соскользнуть на ту наклонную плоскость, которая приводит к нему. Таким образом, существует два необходимых условия: если первое отделяет реальность[1]) от грезы, то второе отличает ее от романа.

Но что же такое наука? Как я разъяснил в предыдущем параграфе, это прежде всего некоторая классификация, способ сближать между собой факты, которые представляются разделенными, хотя они связаны некоторым естественным скрытым родством. Иными словами, наука есть система отношений. Но, как мы только что сказали, объективность следует искать только в отношениях, тщетно было бы искать

---

[1]) Я употребляю здесь слово «реальное» как синоним *объективного*. Сообразуясь в этом с обычным словоупотреблением, быть может, я не прав в том отношении, что наши грезы реальны, хотя и не объективны.

ее в вещах, рассматриваемых изолированно друг от друга.

Сказать, что наука не может иметь объективной ценности потому, что мы узнаем из нее только отношения, — значит рассуждать навыворот, так как именно только отношения и могут рассматриваться как объективные.

Так, например, внешние предметы, для которых было изобретено слово *объект*, суть действительно *объекты*, а не одна беглая и неуловимая видимость: ибо это — не просто группы ощущений, но и группы, скрепленные постоянной связью. Эта связь — и только эта связь — и является в них объектом; и связь эта есть отношение.

Поэтому, когда мы задаем вопрос о том, какова объективная ценность науки, то это не означает: открывает ли нам наука истинную природу вещей? Но это означает: открывает ли она нам истинные отношения вещей?

Никто не поколебался бы ответить отрицательно на первый вопрос. Я думаю, что можно пойти и дальше: не только наука не может открыть нам природу вещей; ничто не в силах открыть нам ее, и если бы ее знал какой-нибудь бог, то он не мог бы найти слов для ее выражения. Мы не только не можем угадать ответа, но если бы даже нам дали его, то мы не были бы в состоянии сколько-нибудь понять его; я даже готов спросить, хорошо ли мы понимаем самый вопрос.

Поэтому когда научная теория обнаруживает притязание научить нас тому, что́ такое теплота, или что́ такое электричество, или что́ такое жизнь, она наперед осуждена; все, что она может нам дать, есть не более как грубое подобие. Поэтому она является временной и шаткой.

Первый вопрос устранен, остается второй. Может ли наука открыть нам истинные отношения вещей? Подлежит ли разделению то, что она сближает, и подлежит ли сближению то, что она разделяет?

Чтобы понять смысл этого нового вопроса, нужно возвратиться к сказанному выше об условиях объективности. Вопрос о том, имеют ли эти отношения объективную ценность, означает: являются ли эти отношения одинаковыми для всех? будут ли они теми же самыми и для наших потомков?

Ясно, что они не одинаковы для ученого и для профана. Но это не важно, ибо если профан не видит их сейчас, то ученый может заставить его увидеть их при помощи ряда опытов и рассуждений. Существенно, что есть пункты, относительно которых могут согласиться все, обладающие достаточной осведомленностью и опытом

Вопрос в том, чтобы узнать: будет ли продолжительно это согласие и сохранится ли оно у наших потомков. Можно спросить себя, будут ли те сближения, которые делает сегодняшняя наука, подтверждены наукой завтрашнего дня. К доказательству верности этого положения не может быть привлечен никакой априорный довод; вопрос решается фактами; и наука уже прожила достаточно долго для того, чтобы, обращаясь к ее истории, можно было узнать, противятся ли влиянию времени воздвигаемые ею здания или же они не отличаются от эфемерных построений.

Что же мы видим? Сначала нам представляется, что теории живут не долее дня и что руины нагромождаются на руины. Сегодня теория родилась, завтра она в моде, послезавтра она делается классической, на третий день она устарела, а на четвертый — забыта. Но если всмотреться ближе, то увидим, что так именно падают, собственно говоря, те теории, которые имеют притязание открыть нам сущность вещей. Но в теориях есть нечто, что чаще всего выживает. Если одна из них открыла нам истинное отношение, то это отношение является окончательным приобретением; мы найдем его под новым одеянием в других теориях, которые будут последовательно водворяться на ее месте.

Ограничимся одним примером. Теория эфирных волн учила нас, что свет есть движение. В настоящий момент благосклонная мода на стороне электромагнитной теории, которая учит, что свет есть ток. Не станем исследовать, нельзя ли их примирить, сказав, что свет есть ток, а ток есть движение. Так как, во всяком случае, вероятно, что это движение не будет тождественно с тем, какое допускали сторонники прежней теории, то можно было бы считать себя вправе сказать, что прежняя теория развенчана. Тем не менее от нее остается нечто, ибо между гипотетическими токами, допускаемыми у Максвелла, имеют место те же отношения, как и между гипотетическими движениями, которые допускал Френель. Таким образом, есть нечто, что остается нерушимым, и именно это нечто существенно Этим объясняется, почему современные физики без малейшего затруднения перешли от языка Френеля к языку Максвелла.

Несомненно, что многие сопоставления, считавшиеся прочно установленными, были потом отвергнуты; но значительное большинство их остается и, по-видимому, останется и впредь. Что касается их, то каков критерий их объективности?

Да совершенно тот же самый, как и критерий нашей веры во внешние предметы. Эти предметы реальны, поскольку ощущения, которые они в нас вызывают, представляются нам соединенными, я не знаю, каким-то неразрушимым цементом, а не случаем дня. Так и наука открывает нам между явлениями другие связи, более тонкие, но не менее прочные; это — нити, столь тонкие, что на них долгое время не обращали внимания; но коль скоро они замечены, их нельзя уже не видеть. Итак, они не менее реальны, чем те, которые сообщают реальность внешним предметам. Не имеет значения то обстоятельство, что о них позже узнали, так как они не могут погибнуть ранее других.

Можно сказать, например, что эфир имеет не меньшую реальность, чем какое угодно внешнее тело. Сказать, что такое-то тело существует, — значит сказать, что между цветом этого тела, его вкусом, его запахом есть глубокая, прочная и постоянная связь. Сказать, что эфир существует, — значит сказать, что есть естественное родство между всеми оптическими явлениями. Из двух предложений, очевидно, одно имеет не меньшую ценность, чем другое.

Продукты научного синтеза в некотором смысле имеют даже бо́льшую реальность, чем плоды синтетической деятельности здравого смысла, так как первые охватывают большее число членов и стремятся поглотить частичные синтезы.

Нам скажут, что наука есть лишь классификация и что классификация не может быть верною, а только удобною Но это верно, что она удобна; верно, что она является такой не только для меня, но и для всех людей; верно, что она останется удобной для наших потомков; наконец, верно, что это не может быть плодом случайности.

В итоге единственной объективной реальностью являются отношения вещей, отношения, из которых вытекает мировая гармония. Без сомнения, эти отношения, эта гармония не могли бы быть восприняты вне связи с умом, который их воспринимает или чувствует.

Тем не менее они объективны, потому что они общи и останутся общими для всех мыслящих существ.

Это позволит нам вернуться к вопросу о вращении Земли; мы будем иметь здесь случай пояснить сказанное примером.

§ 7. Вращение Земли

В моем сочинении «Наука и гипотеза»[1]), я сказал: «...утверждение: «Земля вращается» не имеет никакого смысла... или, лучше сказать, два положения: «Земля вращается» и «удобнее предположить, что Земля вращается» — имеют один и тот же смысл».

Эти слова подали повод к самым странным толкованиям. Некоторые надумали видеть в этом реабилитацию птолемеевой системы и, пожалуй, даже оправдание суда над Галилеем.

Однако тот, кто внимательно прочел всю книгу, не мог впасть в ошибку. Истина «Земля вращается» была там поставлена наряду, например, с постулатом Евклида; значило ли это отвергать ее? Более того: на том же языке можно было бы с полным основанием сказать, что два положения — «внешний мир существует» и «удобнее предположить, что внешний мир существует» — имеют один и тот же смысл. Таким образом, гипотеза о вращении Земли имела бы ту же степень достоверности, что и самое существование внешних предметов.

Но после того, что изложено в четвертой части, мы можем пойти дальше. Мы сказали: физическая теория бывает тем более верна, чем больше верных от-

[1]) См. с. 99.— *Примеч. ред.*

ношений из нее вытекает. Исследуем занимающий нас вопрос в свете этого нового принципа.

Абсолютного пространства нет. Поэтому с точки зрения кинематики из двух противоречивых положений — «Земля вращается» и «Земля не вращается» — одно не более верно, чем другое. Принимать одно, отвергая другое, в *кинематическом смысле* значило бы допускать существование абсолютного пространства.

Однако если одно из них открывает нам верные отношения, которые не вытекают из другого, то можно считать первое физически более верным, чем другое, потому что оно имеет более богатое содержание. И в этом отношении не может быть никаких сомнений.

Перед нами видимое суточное движение звезд, суточное движение других небесных тел, а с другой стороны — сплющение Земли, вращение маятника Фуко, вращение циклонов, пассатные ветры и т. д. Для последователя Птолемея все эти явления ничем не связаны между собой; с точки зрения последователя Коперника они производятся одной и той же причиной. Говоря: «Земля вращается», я утверждаю, что все эти явления по существу находятся в тесном соотношении друг с другом, и *это верно*; и это останется верным, хотя нет и не может быть абсолютного пространства.

Сказав о вращении самой Земли, перейдем теперь к ее обращению вокруг Солнца. Здесь также налицо три явления, которые для сторонника Птолемея совершенно независимы и которые, с точки зрения последователя Коперника, восходят к одному и тому же началу; это именно. видимые перемещения планет на небесной сфере, аберрация неподвижных звезд, их параллакс. Случайно ли, что все планеты допускают неравенство, период которого равняется году, и что этот период в точности равен периоду аберрации и также в точности равен периоду параллакса? Принять птолемееву систему — значит ответить «да», принять систему Коперника — ответить «нет». Принимая вторую, мы утверждаем наличие связи между тремя явлениями, и это верно, несмотря на то, что абсолютного пространства нет.

В системе Птолемея движения небесных тел не могут быть объяснены действием центральных сил;

небесная механика невозможна. Глубокие соотношения между небесными явлениями, раскрываемые нам небесною механикой, суть отношения верные; утверждать неподвижность Земли значило бы отрицать эти соотношения, а следовательно, заблуждаться.

Таким образом, истина, за которую пострадал Галилей, остается истиной, хотя она имеет и не совсем тот смысл, какой представляется профану, и хотя ее настоящий смысл гораздо утонченнее, глубже и богаче.

§ 8. Наука для науки

Не против Леруа намереваюсь я защищать науку для науки. Быть может, он осуждает ее, но все же он ее развивает, потому что он любит истину, ищет ее и не мог бы жить без нее. Я просто хочу высказать несколько соображений.

Мы не можем познать все факты; необходимо выбирать те, которые достойны быть познанными. Если верить Толстому, ученые делают этот выбор наудачу вместо того, чтобы делать его, имея в виду практические применения, что было бы благоразумно. В действительности это не так: ученые считают определенные факты более интересными в сравнении с другими, потому что они дополняют незаконченную гармонию или потому, что они позволяют предвидеть большое число других фактов. Если ученые ошибаются, если эта неявно предполагаемая ими иерархия фактов есть лишь пустая иллюзия, то не могло бы существовать науки для науки и, следовательно, не могло бы быть науки. Что касается меня, то я думаю, что они правы, и выше я на примере показал высокую ценность астрономических фактов, которая определяется не практической применимостью их, а их величайшей поучительностью.

Уровень цивилизации зависит от науки и искусства. Формула «наука для науки» возбуждала удивление; а между тем это, конечно, стоит «жизни для жизни», если жизнь не жалка и ничтожна, и даже «счастья для счастья», если не держаться того взгляда, что все удовольствия равноценны, если не считать, что цель цивилизации состоит в том, чтобы доставлять алкоголь охотникам до выпивки.

Всякое действие должно иметь цель. Мы должны страдать, должны трудиться, должны платить за наше место в спектакле, чтобы видеть, или, по крайней мере, чтобы другие увидели свет.

Все, что́ не есть мысль, есть чистое ничто, ибо мы не можем мыслить ничего, кроме мысли, и все слова, которыми мы располагаем для разговора о вещах, не могут выражать ничего, кроме мыслей. Поэтому сказать, что существует нечто иное, чем мысль, значило бы высказать утверждение, которое не может иметь смысла.

Однако (странное противоречие с точки зрения тех, кто верит во время) геологическая история показывает нам, что жизнь есть лишь беглый эпизод между двумя вечностями смерти и что в этом эпизоде прошедшая и будущая длительность сознательной мысли — не более, как мгновение. Мысль — только вспышка света посреди долгой ночи.

Но эта вспышка — всё.

НАУКА
И МЕТОД

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе я собрал различные этюды, более или менее непосредственно относящиеся к вопросам научной методологии. Научный метод заключается в наблюдении и в экспериментировании. Если бы ученый располагал бесконечным запасом времени, то оставалось бы только сказать ему: «Смотри и смотри хорошо!» Но так как время не позволяет обозреть все, а в особенности все обозреть хорошо, — с другой же стороны, лучше вовсе не смотреть, чем смотреть плохо, — то ученый вынужден делать выбор. Первый вопрос заключается, следовательно, в том, как он должен производить свой выбор. Этот вопрос равно возникает перед физиком, как и перед историком; с ним приходится считаться и математику, и принципы, которыми должны руководствоваться вы и другие ученые, не лишены аналогии. Ученый обыкновенно следует здесь инстинкту; но, вдумываясь в эти принципы, можно предвидеть, каково должно быть будущее математики.

Мы еще лучше отдадим себе в этом отчет, если будем наблюдать ученого в его творческой деятельности; прежде всего необходимо знать психологический механизм творчества и, в частности, математического творчества. Наблюдения над процессом работы математика особенно поучительны для психолога.

Во всех опытных науках необходимо считаться с ошибками, обусловливаемыми несовершенством наших чувств и наших инструментов. К счастью, можно допустить, что при некоторых условиях эти ошибки часто компенсируются, так что в средних результатах они вовсе исчезают; эта компенсация обусловливается случайностью. Но что такое случайность? Это понятие не только трудно установить точно, его вообще трудно определить; и при всем том то, что я сейчас сказал относительно ошибок наблюдения, показывает, что ученый не может обойтись без этого понятия. Нужно, следовательно, дать по возможности точное определение этого понятия, столь же необходимого, как и неуловимого.

Все это суть общие соображения, которые в целом применяются во всех науках; механизм математического творчества, например, не отличается существенно от механизма какого бы то ни было иного творчества. Я обращаюсь затем к вопросам, которые носят более частный характер и находят себе применение в некоторых специальных науках и прежде всего в чистой математике.

В главах, посвященных чистой математике, мне приходится говорить о предмете очень абстрактном. Мне приходится прежде всего говорить о пространстве Все знают, что пространство относительно, вернее, все это говорят; а между тем множество людей фактически в своем мышлении принимают его за нечто абсолютное. Достаточно немного поразмыслить, чтобы сообразить, к каким противоречиям эти люди должны приходить.

Вопросы преподавания важны прежде всего сами по себе, а затем и по другим причинам: размышлять о том, каким образом лучше всего внедрить новые понятия в девственный ум ребенка,— значит в то же время размышлять о том, каким образом эти понятия были приобретены нашими предками; значит, следовательно, размышлять об их истинном происхождении, а это, по существу, значит размышлять об их истинной природе. Почему дети обыкновенно ничего не понимают в тех определениях, которые удовлетворяют ученого? Почему им необходимо давать другие определения? Именно этот вопрос я ставлю себе в следующей главе; решение его могло бы, на мой взгляд, навести на весьма плодотворные размышления философов, которые занимаются логикой науки.

С другой стороны, многие геометры полагают, что математику можно свести к правилам формальной логики. В этом направлении были сделаны неимоверные усилия; чтобы достигнуть этой цели, не останавливались, например, даже перед тем, чтобы опрокинуть весь порядок исторического развития наших представлений, чтобы определить конечное через бесконечное. Я полагаю, что мне удалось показать всякому непредубежденному читателю, что это лишь обманчивая иллюзия. Я надеюсь, что читатель поймет всю важность вопроса и не поставит мне в вину той страстности, с которой написаны относящиеся к этому страницы.

Последние главы, относящиеся к астрономии и механике, легче по содержанию.

Механика переживает, по-видимому, момент полного переворота. Понятия, которые казались установленными наиболее прочно, были разбиты дерзкими новаторами. Конечно, было бы поспешно признать их уже правыми только потому, что они являются новаторами. Но интересно познакомить читателей с их учением, что я и пытался сделать. По возможности, я держался исторической последовательности: новые идеи показались бы слишком странными, если не видеть, откуда они зародились.

Астрономия развертывает перед нами гигантские картины и подымает грандиозные вопросы. Нечего и думать о том, чтобы подвергнуть их непосредственно экспериментальному изучению; наши лаборатории слишком малы для этого. Но аналогии с явлениями, доступными экспериментальному исследованию, могут тем не менее служить для астронома путеводной нитью. Так, например, Млечный путь представляет собой скопление солнц, движение которых представляется на первый взгляд совершенно капризным. Но нельзя ли сравнить это огромное скопление с молекулами газа, свойства которых развивает кинетическая теория газов? Таким образом, методы физиков могут косвенным путем прийти на помощь астроному.

Наконец, я хотел в немногих чертах набросать историю развития французской геодезии.

Я показал, ценою каких настойчивых усилий, ценою каких опасностей геодезисты снабдили нас теми немногими сведениями, которыми мы владеем относительно формы Земли. Есть ли это вопрос метода? Да, без сомнения, ибо эта история учит нас, какими предосторожностями должно быть обставлено серьезное научное предприятие, сколько необходимо времени и труда, чтобы установить лишний десятичный знак.

Книга I

УЧЕНЫЙ И НАУКА

Глава I

ВЫБОР ФАКТОВ

Граф Толстой где-то объясняет, почему «наука для науки» в его глазах представляется идеей, лишенной смысла. Мы не можем знать всех фактов, ибо число их в действительности безгранично. Необходимо, следовательно, делать между ними выбор. Можем ли мы руководствоваться при производстве этого выбора исключительно капризами нашего любопытства? Не лучше ли руководствоваться полезностью, нашими нуждами, практическими и в особенности моральными? Разве нет у нас лучшего дела, чем считать божьих коровок, живущих на нашей планете?

Ясно, что для него слово «польза» не имеет того значения, какое ему обычно приписывают деловые люди, а за ними и бóльшая часть наших современников. Он мало озабочен применением науки к промышленности, чудесами электричества или автомобильного спорта, на которые он смотрит скорее как на препятствие к моральному прогрессу; полезным является исключительно то, что делает человека лучшим.

Что касается меня, то нужно ли мне говорить, что я не мог бы удовлетвориться ни тем, ни другим идеалом? Я не желал бы ни этой плутократии, жадной и ограниченной, ни этой демократии, добродетельной и посредственной, всегда готовой подставить левую щеку; демократии, среди которой жили бы мудрецы, лишенные любознательности, люди, которые, избегая всякого излишества, не умирали бы от болезни, но наверняка погибали бы от скуки. Впрочем, все это дело вкуса, и не об этом, собственно, я хотел говорить.

Вопрос, поставленный выше, тем не менее остается в силе, и на нем мы и должны сосредоточить свое внимание. Если наш выбор может определяться только капризом или непосредственной пользой, то не может существовать наука для науки, но не может, вследствие этого, существовать и наука вообще. Так ли это? Что выбор сделать необходимо, этого нельзя оспаривать; какова бы ни была наша деятельность, факты идут быстрее нас, и мы не можем за ними гнаться, в то время как ученый открывает один факт, в каждом кубическом миллиметре его тела их происходит миллиарды миллиардов. Желать, чтобы наука охватывала природу, значило бы заставить целое войти в состав своей части.

Но ученые все-таки полагают, что есть известная иерархия фактов и что между ними может быть сделан разумный выбор; и они правы, ибо иначе не было бы науки, а наука все-таки существует. Достаточно только открыть глаза, чтобы убедиться, что завоевания промышленности, обогатившие стольких практических людей, никогда не увидели бы света, если бы существовали только люди практики, если бы последних не опережали безумные бессеребреники, умирающие нищими, никогда не думающие о своей пользе и руководимые все же не своим капризом, а чем-то другим.

Эти именно безумцы, как выразился Мах, сэкономили своим последователям труд мысли. Те, которые работали бы исключительно в целях непосредственного приложения, не оставили бы ничего за собой; стоя перед новой нуждой, нужно было бы заново все начинать сначала. Но бо́льшая часть людей не любит думать, и, может быть, это и к лучшему, ибо ими руководит инстинкт, и руководит он ими обыкновенно лучше, чем интеллектуальные соображения, по крайней мере во всех тех случаях, когда люди имеют в виду одну и ту же непосредственную цель. Но инстинкт — это рутина, и если бы его не оплодотворяла мысль, то он и в человеке не прогрессировал бы больше, чем в пчеле или в муравье. Необходимо, следовательно, чтобы кто-нибудь думал за тех, кто не любит думать; а так как последних чрезвычайно много, то необходимо, чтобы каждая из наших мыслей приносила пользу столь часто, сколь это возможно, и именно поэтому всякий закон будет тем более ценным, чем более он будет общим.

Это нам показывает, как мы должны производить выбор. Наиболее интересными являются те факты, которые могут служить свою службу многократно, которые могут повторяться. Мы имели счастье родиться в таком мире, где такие факты существуют. Представьте себе, что существовало бы не 60 химических элементов, а 60 миллиардов и что между ними не было бы обыкновенных и редких, а что все были бы распространены равномерно. В таком случае всякий раз, как нам случилось бы подобрать на земле булыжник, была бы большая вероятность, что он состоит из новых, нам неизвестных, элементов. Все то, что мы знали бы о других камнях, могло бы быть совершенно неприменимо к нему. Перед каждым новым предметом мы стояли бы, как новорожденный младенец; как и последний, мы могли бы подчиняться только нашим капризам и нашим нуждам. В таком мире не было бы науки; быть может, мысль и сама жизнь в нем были бы невозможны, ибо эволюция не могла бы развивать инстинктов сохранения рода. Слава богу, дело обстоит не так! Как всякое счастье, к которому мы приспособились, мы не оцениваем и этого во всем его значении. Биолог был бы совершенно подавлен, если бы существовали только индивидуумы и не было бы видов, если бы наследственность не воспроизводила детей, похожих на их отцов.

Каковы же те факты, которые имеют шансы на возобновление? Таковыми являются, прежде всего, факты простые. Совершенно ясно, что в сложном факте тысячи обстоятельств соединены случаем, и лишь случай, еще гораздо менее вероятный, мог бы их объединить снова в той же комбинации. Но существуют ли простые факты? А если таковые существуют, то как их распознать? Кто удостоверит нам, что факт, который мы считаем простым, не окажется ужасно сложным? На это мы можем только ответить, что мы должны предпочитать те факты, которые нам *представляются* простыми, всем тем, в которых наш грубый глаз различает несходные составные части; и тогда одно из двух: либо эта простота действительная, либо же элементы так тесно между собою соединены, что мы не в состоянии их отличать один от другого. В первом случае мы имеем шансы встретить снова тот же самый простой факт либо непосредственно во всей его чистоте, либо как составную часть некоторого сложного комплекса. Во втором случае эта однородная смесь имеет больше шансов на новое воспроизведение, чем совершенно разнородный агрегат. Случай может образовать смесь, но он не может ее разделить, и чтобы из разнообразных элементов соорудить упорядоченное сооружение, в котором можно было бы нечто различать, нужно его строить сознательно. Поэтому есть очень мало шансов, чтобы агрегат, в котором мы нечто различаем, когда-либо повторился. Напротив, есть много шансов, чтобы смесь, представляющаяся на первый взгляд однородной, возобновлялась многократно. Факты, которые представляются простыми, даже в том случае, когда они не являются таковыми в действительности, все же легче возобновляются случаем.

Вот что оправдывает метод, инстинктивно усвоенный ученым, и, быть может, еще больше его оправдывает то обстоятельство, что факты, которые мы чаще всего встречаем, представляются нам простыми именно потому, что мы к ним привыкли.

Но где же они — эти простые факты? Ученые искали их в двух крайних областях: в области бесконечно большого и в области бесконечно малого. Их нашел астроном, ибо расстояния между светилами громадны, настолько громадны, что каждое из светил представляется только точкой; настолько громадны, что качественные различия сглаживаются, ибо точка проще, чем тело, которое имеет форму и качество. Напротив, физик искал элементарное явление, мысленно разделяя тело на бесконечно малые кубики, ибо условия задачи, которые испытывают медленные непрерывные изменения, когда мы переходим от одной точки тела к другой, могут рассматриваться как постоянные в пределах каждого из этих кубиков. Точно так же и биолог инстинктивно пришел к тому, что он смотрит на клетку как на нечто более интересное, чем целое животное, и этот взгляд в дальнейшем действительно подтвердился, ибо клетки, принадлежащие к самым различным организмам, оказываются гораздо более схожими для того, кто умеет это сходство усматривать, чем самые эти организмы. Социолог находится в более затруднительном положении: люди, которые для него служат элементами, слишком различны между собой, слишком изменчивы, слишком капризны, словом, слишком сложны; и история не повторяется. Как же здесь выбрать интересный факт, т. е. тот, который возобновляется? Метод — это, собственно, и есть выбор фактов; и прежде всего, следовательно, нужно озаботиться изобретением метода; и этих методов придумали много, ибо ни один из них не напрашивается сам собой. Каждая диссертация в социологии предлагает новый метод, который, впрочем, каждый новый доктор опасается применять, так что социология есть наука, наиболее богатая методами и наиболее бедная результатами.

Итак, начинать нужно с фактов, систематически повторяющихся; но коль скоро правило установлено и установлено настолько прочно, что никакого сомнения не вызывает, то те факты, которые вполне с ним согласуются, не представляют уже для нас никакого интереса, так как они уже не учат ничему новому. Таким образом, интерес представляет лишь исключение. Мы вынуждены прекратить изучение сходства, чтобы сосредоточить свое внимание прежде всего на возможных здесь различиях, а из числа последних нужно выбрать прежде всего наиболее резкие, и притом не только потому, что они более всего бросаются в глаза, но и потому, что они более поучительны. Простой пример лучше пояснит мою мысль. Положим, что мы желаем определить кривую по нескольким наблюдаемым ее точкам. Практик, который был бы заинтересован только непосредственными приложениями, наблюдал бы исключительно такие точки, которые были бы ему нужны для той или иной специальной цели; но такого рода точки были бы плохо распределены на кривой; они были бы скоплены в одних областях, были бы разрежены в других, так что соединить их непрерывной линией было бы невозможно, нельзя было бы воспользоваться ими для каких-либо иных приложений. Совершенно иначе поступил бы ученый. Так как он желает изучить кривую саму по себе, то он правильно распределит точки, подлежащие наблюдению, и, как только он их будет знать, он соединит их непрерывной линией и тогда будет иметь в своем распоряжении кривую целиком. Но что же он для этого сделает? Если он первоначально определил крайнюю точку кривой, то он не будет оставаться все время вблизи этой точки, а, напротив, он перейдет прежде всего к другой крайней точке. После двух конечных точек наиболее интересной будет середина между ними и т. д.

Итак, если установлено какое-нибудь правило, то прежде всего мы должны исследовать те случаи, в которых это правило имеет больше всего шансов оказаться неверным. Этим, между прочим, объясняется интерес, который вызывают факты астрономические, а также факты, которые относятся к прошлому геологических эпох. Уходя далеко в пространстве и во времени, мы можем ожидать, что наши обычные правила там совершенно рушатся. И именно это великое разрушение часто может помочь нам лучше усмотреть и лучше понять те небольшие изменения, которые могут происходить вблизи нас, в том небольшом уголке Вселенной, в котором мы призваны жить и действовать. Мы познаем лучше этот уголок, если побываем в отдаленных странах, в которых нам, собственно, нечего делать.

Однако мы должны сосредоточить свое внимание главным образом не столько на сходствах и различиях, сколько на тех аналогиях, которые часто скрываются в кажущихся различиях. Отдельные правила кажутся вначале совершенно расходящимися, но, присматриваясь к ним поближе, мы обыкновенно убеждаемся, что они имеют сходство. Различные по материалу, они имеют сходство в форме и в порядке частей. Таким образом, когда мы взглянем на них как бы со стороны, мы увидим, как они разрастаются на наших глазах, стремясь охватить все. Это именно и составляет ценность многих фактов, которые, заполняя собой одни комплексы, оказываются в то же время верными изображениями других известных нам комплексов.

Я не могу останавливаться на этом более, но, я полагаю, из сказанного достаточно ясно, что ученый не случайно выбирает факты, которые он должен наблюдать. Он не считает божьих коровок, как говорил граф Толстой, ибо число этих насекомых, как бы они ни были интересны, подвержено чрезвычайно капризным колебаниям. Он старается сконцентрировать много опытов, много мыслей в небольшом объеме, и поэтому-то небольшая книга по физике содержит так много опытов, уже произведенных, и в тысячу раз больше других возможных опытов, результаты которых мы знаем наперед.

Но мы рассмотрели пока только одну сторону дела. Ученый изучает природу не потому, что это полезно; он исследует ее потому, что это доставляет ему наслаждение, а это дает ему наслаждение потому, что природа прекрасна. Если бы природа не была прекрасной, она не стоила бы того, чтобы быть познанной; жизнь не стоила бы того, чтобы быть прожитой. Я здесь говорю, конечно, не о той красоте, которая бросается в глаза, не о красоте качества и видимых свойств; и притом не потому, что я такой красоты не признаю, отнюдь нет, а потому, что она не имеет ничего общего с наукой. Я имею в виду ту более глубокую красоту, которая кроется в гармонии частей и которая постигается только чистым разумом. Это она создает почву, создает, так сказать, остов для игры видимых красот, ласкающих наши чувства, и без этой поддержки красота мимолетных впечатлений была бы весьма несовершенной, как все неотчетливое и преходящее. Напротив, красота интеллектуальная дает удовлетворение сама по себе, и, быть может, больше ради нее, чем ради будущего блага рода человеческого, ученый обрекает себя на долгие и тяжкие труды.

Так вот именно эта особая красота, чувство гармонии мира, руководит нами в выборе тех фактов, которые наиболее способны усиливать эту гармонию, подобно тому, как артист разыскивает в чертах своего героя наиболее важные, которые сообщают ему о его характере и жизни; и нечего опасаться, что это бессознательное, инстинктивно предвзятое отношение отвлечет ученого от поисков истины. Можно мечтать о мире, полном гармонии, но как далеко его все же оставит за собой действительный мир! Наиболее великие художники, которые когда-либо существовали,— греки — создавали свое небо, но как оно убого по сравнению с нашим действительным небом.

И это потому, что прекрасна простота, прекрасна грандиозность; потому, что мы предпочтительнее ищем простые и грандиозные факты, потому, что нам доставляет наслаждение то уноситься в гигантскую область движения светил, то проникать при помощи микроскопов в таинственную область неизмеримо малого, которое все же представляет собой нечто величественное, то углубляться в геологические эпохи, изыскивая следы прошлого, которое именно потому нас и привлекает, что оно очень отдалено.

Мы видим, таким образом, что поиски прекрасного приводят нас к тому же выбору, что и поиски полезного; и совершенно таким же образом экономия мысли и экономия труда, к которым, по мнению Маха, сводятся все стремления науки[1]), являются источниками как красоты, так и практической пользы. Мы больше всего удивляемся тем зданиям, в которых архитектор сумел соразмерить средства с целью, в которых колонны как бы без усилия свободно несут возложенную на них тяжесть, как грациозные кариатиды Эрехтейона[2]).

В чем же заключается причина этого совпадения? Обусловливается ли это просто тем, что именно те вещи, которые кажутся нам прекрасными, наиболее соответствуют нашему разуму и потому являются в то же самое время орудием, которым разум лучше всего владеет? Или может быть, это игра эволюции или естественного отбора? Разве народы, идеалы которых наиболее соответствовали их правильно понятым интересам, вытеснили другие народы и заняли их место? Как одни, так и другие преследовали свои идеалы, не отдавая себе отчета о последствиях; но в

---

[1]) В И. Ленин обстоятельнейшим образом анализирует попытки Маха и Авенариуса положить в основу теории познания «принцип экономии мышления» и определяет подобные потуги как стремление под новым соусом протащить субъективный идеализм В И Ленин подчеркивает « Принцип экономии мышления, если его действительно положить *«в основу* теории познания», не может вести *ни к чему* иному, кроме субъективного идеализма. «Экономнее» всего «мыслить», что существую только я и мои ощущения, — это неоспоримо, раз мы вносим в *гносеологию* столь нелепое понятие . Только при отрицании объективной реальности, т. е при отрицании *основ* марксизма, можно всерьез говорить об экономии мышления в теории познания!» (Ленин В И Материализм и эмпириокритицизм.— Полн. собр, соч , т. 18, с 175—176) — *Примеч ред*

[2]) Эрехтейон — древнегреческий храм в Афинах, архитектура которого отличается изяществом и тонкой красотой. — *Примеч. ред.*

то время как эти поиски приводили одних к гибели, они давали другим владычество. Можно думать и так: если греки восторжествовали над варварами и если Европа, наследница греческой мысли, властвует над миром, то это потому, что дикие любили яркие цвета и шумные звуки барабана, которые занимали только их чувства, между тем как греки любили красоту интеллектуальную, которая скрывается за красотой чувственной, которая именно и делает разум уверенным и твердым.

Несомненно, такого рода триумф вызвал бы ужас у Толстого, который ни за что не признал бы, что он может быть действительно полезным. Но это бескорыстное искание истины ради ее собственной красоты несет в себе здоровое семя и может сделать человека лучше. Я знаю, что здесь есть исключения, что мыслитель не всегда почерпнет в этих поисках чистоту души, которую он должен был бы найти, что есть ученые, имеющие весьма дурной характер.

Но следует ли из этого, что нужно отказаться от науки и изучать только мораль? И разве моралисты, когда они сходят со своей кафедры, остаются на недосягаемой высоте?

Глава II

БУДУЩЕЕ МАТЕМАТИКИ

Лучший метод для предвидения будущего развития математических наук заключается в изучении истории и нынешнего состояния этих наук.

Но разве такой прием исследования не является для нас, математиков, некоторым образом профессиональным? Ведь мы привыкли *экстраполировать*, т. е. выводить будущее из прошедшего и настоящего; а так как ценность этого приема нам хорошо известна, то мы и не рискуем впасть в заблуждение относительно надежности тех результатов, которые мы получим с его помощью.

В свое время не было недостатка в прорицателях несчастья. Они охотно повторяли, что все проблемы, допускающие решение, уже были разрешены и что следующим поколениям придется довольствоваться кое-какими не замеченными ранее мелочами. К счастью, пример прошлого нас успокаивает. Уже не раз математики полагали, что все проблемы ими разрешены или, по крайней мере, что ими установлен перечень задач, которые допускают решение. Но вслед, за тем смысл самого слова «решение» расширялся, проблемы, считавшиеся неразрешимыми, становились наиболее интересными; уму представлялись новые задачи, о которых раньше никто и не думал. Для греков хорошим решением было такое, которое выполняется только линейкой и циркулем; потом хорошим стали считать решение в том случае, если оно получается с помощью извлечения корней; наконец, ограничились требованием употреблять для решения исключительно алгебраические или логарифмические функции. Таким образом, предсказания пессимистов ни разу не сбылись, они вынуждены были делать уступку за уступкой, так что в настоящее время, я полагаю, их больше нет.

Но если их уже нет, то я не собираюсь с ними сражаться. Мы все уверены, что развитие математики будет продолжаться; весь вопрос в том, в каком именно направлении. Мне могут ответить: «во всех направлениях»,— и это будет отчасти справедливо; но если бы это было верно вполне, то это нас несколько устрашило бы. Быстро возрастая, наши богатства вскоре образовали бы нечто столь громоздкое, что мы оказались бы перед этой непостижимой грудой не в лучшем положении, чем были раньше перед неизвестной нам истиной.

Историку и даже физику приходится делать выбор между фактами; мозг ученого — этот маленький уголок вселенной — никогда не сумеет вместить в себя весь мир целиком; поэтому среди бесчисленных фактов, которыми нас засыпает природа, необходимо будут такие, которые мы оставим в стороне, и будут другие, которые мы сохраним. То же самое, a fortiori, имеет место и в математике: математик тоже не в состоянии воспринять все факты, которые в беспорядке представляются его уму, тем более, что здесь ведь он сам — я хочу сказать, его прихоть — создает эти факты. Ведь это он строит новую комбинацию из отдельных ее частей, сближая между собой их элементы; лишь в редких случаях природа приносит ему вполне готовые комбинации.

Бывают, конечно, и такие случаи, когда математик берется за ту или иную проблему, желая удовлетворить тем или иным требованиям физики; случается, что физик или инженер предлагают математику вычислить какое-нибудь число, которое им нужно знать для того или иного применения. Следует ли отсюда, что все мы, математики, должны ограничиться выжиданием таких требований и, вместо того чтобы свободно культивировать удовольствия, не иметь другой заботы, как применяться ко вкусам нашей клиентуры? Не должны ли математики, имея единственной целью приходить на помощь испытателям природы, только от последних ждать распоряжений? Можно ли оправдать такой взгляд? Конечно, нет! Если бы мы не культивировали точных наук ради них самих, то мы не создали бы математического орудия исследования, и в тот день, когда от физика пришел бы требовательный приказ, мы оказались бы безоружными.

Ведь физики приступают к изучению того или другого явления не потому, что какая-нибудь неотложная потребность материальной жизни сделала это изучение необходимым, и они правы. Если бы ученые XVIII столетия забросили электричество по той причине, что оно в их глазах было только курьезом, лишенным всякого практического интереса, то мы не имели бы в XX столетии ни телеграфа, ни электрохимии, ни электротехники. Будучи вынуждены сделать выбор, физики, таким образом, не руководствуются при этом единственно вопросом полезности. Как же именно поступают они, выбирая среди фактов природы? Нам нетрудно ответить на этот вопрос: их интересуют именно те факты, которые могут привести к открытию нового закона; другими словами, те факты, которые сходны с множеством других фактов, те, которые представляются нам не изолированными, а как бы тесно связанными в одно целое с другими фактами. Отдельный факт бросается в глаза всем — и невежде и ученому. Но только истинный физик способен подметить ту связь, которая объединяет вместе многие факты глубокой, но скрытой аналогией. Анекдот о яблоке Ньютона знаменателен, хотя он, вероятно, и не соответствует истине; будем поэтому говорить о нем как о действительном факте. Но ведь и до Ньютона, надо полагать, немало людей видели, как падают яблоки; а между тем никто не сумел сделать отсюда никакого вывода. Факты остались бы бесплодными, не будь умов, способных делать между ними выбор, отличать те из них, за которыми скрывается нечто, и распознавать это нечто, умов, которые под грубой оболочкой факта чувствуют, так сказать, его душу.

Буквально то же самое проделываем мы и в математике. Из различных элементов, которыми мы располагаем, мы можем создать миллионы разнообразных комбинаций; но какая-нибудь одна такая комбинация, сама по себе, абсолютно лишена значения; нам могло стоить большого труда создать ее, но это ничему не служит, разве что может быть предложено в качестве школьного упражнения. Другое будет дело, когда эта комбинация займет место в ряду аналогичных ей комбинаций, и когда мы подметим эту аналогию, перед нами будет уже не факт, а закон. И в этот день истинным творцом-изобретателем окажется не тот рядовой работник, который старательно построил некоторые из этих комбинаций, а тот, кто обнаружил между ними родственную связь Первый видел один лишь голый факт, и только второй познал душу факта. Часто для обнаружения этого родства бывает достаточно изобрести одно новое слово, и это слово становится творцом; история науки может доставить нам множество знакомых вам примеров.

Знаменитый венский философ Мах сказал, что роль науки состоит в создании экономии мысли [1]), подобно тому как машина создает экономию силы. И это весьма справедливо. Дикарь считает с помощью своих пальцев или собирая камешки. Обучая детей таблице умножения, мы избавляем их на будущее от бесчисленных манипуляций с камешками. Кто-то как-то узнал, с помощью ли камней или как-либо иначе, что 6 раз 7 составляет 42; ему пришла идея отметить этот результат, и вот благодаря этому мы не имеем больше надобности повторять вычисление сначала. Этот человек не потерял понапрасну своего времени даже в том случае, если он вычислял единственно ради собственного удовольствия; его

---

[1]) См. сноску на с. 379

манипуляция отняла у него не более двух минут, а между тем потребовалось бы целых два миллиарда минут, если бы миллиард людей должен был после него повторять ту же манипуляцию.

Итак, важность какого-нибудь факта измеряется его продуктивностью, т. е. тем количеством мысли, какое он позволяет нам сберечь.

В физике фактами большой продуктивности являются те, которые входят в очень общий закон, ибо благодаря этому они позволяют предвидеть весьма большое количество других фактов; то же мы видим и в математике. Я занялся сложным вычислением и, наконец, после большого труда пришел к некоторому результату; я не был бы вознагражден за свой труд, если бы благодаря полученному результату я не оказался в состоянии предвидеть результаты других подобных вычислений и уверенно направлять их, избегая тех блужданий ощупью, на которые я должен был обречь себя в первый раз. И наоборот, мое время не было бы потеряно, если бы эти самые блуждания привели меня к открытию глубокой аналогии изучаемой мною проблемы с гораздо более обширным классом других проблем; если бы благодаря этим блужданиям я узрел одновременно сходства и различия, словом, если бы они обнаружили передо мной возможность некоторого обобщения. Я приобрел бы тогда не новый факт, а новую силу. Простым примером, который раньше других приходит на ум, является алгебраическая формула, которая дает нам решение всех численных задач определенного типа, так что достаточно лишь заменить буквы числами. Благодаря такой формуле алгебраическое вычисление, однажды выполненное, избавляет нас от необходимости повторять без конца все новые и новые численные выкладки. Но это уже очень грубый пример; всем известно, что существуют такие аналогии, которые невозможно выразить какой-либо формулой, а между тем они-то и являются наиболее ценными.

Новый результат мы ценим в том случае, если, связывая воедино элементы давно известные, но до тех пор рассеянные и казавшиеся чуждыми друг другу, он внезапно вводит порядок там, где до тех пор царил, по-видимому, хаос. Такой результат позволяет нам видеть одновременно каждый из этих элементов и место, занимаемое им в общем комплексе. Этот новый факт имеет цену не только сам по себе, но он — и только он один — придает сверх того значение всем старым фактам, связанным им в одно целое. Наш ум так же немощен, как и наши чувства; он растерялся бы среди сложности мира, если бы эта сложность не имела своей гармонии: подобно близорукому человеку, он видел бы одни лишь детали и должен был бы забывать каждую из них, прежде чем перейти к изучению следующей, ибо он не был бы в состоянии охватить разом всю совокупность частностей. Только те факты достойны нашего внимания, которые вводят порядок в этот хаос и делают его, таким образом, доступным нашему восприятию.

Математики приписывают большое значение изяществу своих методов и результатов, и это не просто дилетантизм. Что, в самом деле, вызывает в нас чувство изящного в каком-нибудь решении или доказательстве? Гармония отдельных частей, их симметрия, их счастливое равновесие,— одним словом, все то, что вносит туда порядок, все то, что сообщает этим частям единство, то, что позволяет нам ясно их различать и понимать целое в одно время с деталями. Но ведь именно эти же свойства сообщают решению большую продуктивность; действительно, чем яснее мы будем видеть этот комплекс в его целом, чем лучше будем уметь обозревать его одним взглядом, тем лучше мы будем различать его аналогии с другими, смежными объектами, тем скорее мы сможем рассчитывать на открытие возможных обобщений. Впечатление изящного может быть вызвано неожиданностью сближения таких вещей, которые мы не привыкли сближать; и в этом случае изящность плодотворна, ибо благодаря ей обнажаются родственные отношения, которых мы не замечали до тех пор; она плодотворна и в том случае, если она обусловливается единственно контрастом между простотой средств и сложностью проблемы; она заставляет нас в этом случае задуматься о причине такого контраста и чаще всего позволяет нам увидеть, что причина не случайна, а таится в том или ином законе, которого мы не подозревали раньше. Одним словом, чувство изящного в математике есть чувство удовлетворения, не скажу, какое именно, но обязанное какому-то взаимному приспособлению между только что найденным решением и потребностями нашего ума; в силу такого именно приспособления найденное решение может служить орудием в наших руках[1]). Следовательно, такое эстетическое удовлетворение находится в связи с экономией мышления Подобно этому, например, кариатиды Эрехтейона[2]) кажутся нам изящными по той причине, что они ловко и, так сказать, весело поддерживают громадную тяжесть и вызывают в нас чувство экономии силы.

По той же причине, когда мы с помощью довольно длинных выкладок приходим к какому-нибудь поразительному по своей простоте результату, мы до тех пор не чувствуем себя удовлетворенными, пока не покажем, что мы могли бы предвидеть, если не весь результат в целом, то по крайней мере его наиболее характерные черты. Чем же это объясняется? Что мешает нам удовольствоваться вычислением, раз оно, по-видимому, дало нам все, что мы хотели знать? Объясняется это тем, что в новом аналогичном случае прежнее длинное вычисление не могло бы помочь нам; иначе обстоит дело с рассуждением, наполовину интуитивным, которое позволило бы нам предвидеть результат наперед. Несложность такого

---

[1]) Подробный анализ гносеологического значения принципов простоты и красоты, их эвристических возможностей и ограниченности их применения дан в работах советских исследователей: Крутов В Ф. К вопросу об обосновании принципа простоты//Философские исследования Уч зап Ленинградск. пед. ин-та — 1968 — Т. 365. — С. 304—317, Кузнецов Б Г. Об эстетических критериях в современном физическом мышлении//Художественное и научное творчество — Л, 1972 — С. 84—90; Мамчур Е А Ленинское понимание познания и проблема эвристической простоты//Вопросы философии — 1969 — № 10.— С. 16—27, Мамчур Е. А, Илларионов С В Регулятивные принципы построения теории//Синтез современного научного знания — М.: Наука, 1973. — С. 355—389, Панкевич Г. И. К вопросу о взаимном проникновении естественнонаучных и эстетических принципов в современном познании//Философские проблемы естествознания. — М, 1971 — С 147—157; Позднеева С П. К вопросу об эстетических критериях оценки научных теорий//Вопросы эстетики — Саратов, 1969.— Вып 3 — С. 75—87. Сухотин А К. Соотношение критериев простоты и истинности знания//Актуальные проблемы диалектической логики — Алма-Ата. Наука, 1971.— С 263—267 — *Примеч ред.*

[2]) См. сноску на с. 379.

рассуждения позволяет одним взглядом охватить все его части, благодаря чему непосредственно бросается в глаза то, что следует в нем изменить для приспособления его ко всем могущим представиться проблемам того же рода. Позволяя, кроме того, предвидеть, насколько просто будет решение этих проблем, такое рассуждение показывает по крайней мере, стоит ли браться за подробное вычисление.

Только что сказанного достаточно, чтобы показать, насколько было бы тщетно пытаться заменить свободную инициативу математика каким-нибудь механическим приемом.

Для получения действительно ценного результата недостаточно нагромоздить кучу выкладок или иметь машину для приведения всего в порядок; имеет значение не порядок вообще, а порядок неожиданный. Машина может сколько угодно кромсать сырой фактический материал, но то, что мы назвали душой факта, всегда будет ускользать от нее.

Начиная с середины истекшего столетия, математики все больше и больше стремятся к достижению абсолютной строгости, и в этом они вполне правы. Это стремление выступает все ярче и ярче. В математике строгость еще не составляет всего, но где ее нет, там нет ничего; нестрогое доказательство — это ничто! Думаю, что с этим никто спорить не станет. Но если толковать эту истину слишком буквально, то окажется, что, например, до 1820 г. не было вовсе математики — утверждение, несомненно, преувеличенное; математики того времени охотно подразумевали то, что мы излагаем в пространных рассуждениях. Это не значит, что они вовсе не замечали этого, но они проходили мимо слишком поспешно; а чтобы хорошо разглядеть проблему, надо было бы взять на себя труд хотя бы высказать ее.

Но есть ли необходимость каждый раз подробно останавливаться на этой точности? Те, которые первые выдвинули требование строгой точности на первый план, дали нам образцы рассуждений, которым мы можем стараться подражать; но если будущие доказательства нужно будет всегда строить по этим образцам, то математические трактаты станут чересчур уж длинными; если я боюсь слишком длинных рассуждений, то не из одного только страха перед переполнением библиотек, а главным образом потому, что наши доказательства, все более удлиняясь, потеряют ту внешнюю видимую гармонию, о полезной роли которой я только что говорил.

Надо иметь в виду экономию мысли; недостаточно только дать образцы для подражания. Надобно, чтобы после нас смогли обойтись без этих образцов, и вместо повторения однажды построенного рассуждения могли бы резюмировать его в нескольких строках. В этом отношении уже сделаны кое-какие успехи. Был, например, некоторый тип сходных между собой рассуждений; они встречались повсюду; они были абсолютно строги, но страдали растянутостью И вот в один прекрасный день придуман был новый термин «равномерная сходимость», и уже одно это выражение сделало все прежние рассуждения бесполезными; не было больше необходимости повторять их, так как они подразумевались под этим термином. Творцы таких решительных и быстрых приемов преодоления трудностей могут оказать нам двоякую услугу: во-первых, мы учимся поступать в случае надобности подобно им, а во-вторых,— и это наиболее важно — их пример и результаты позволяют нам, и очень часто, не проделывать того, что пришлось делать им, ничем, однако, не жертвуя по отношению к строгости.

Только что мы видели пример того значения, какое в математике имеют слова и выражения; я мог бы привести еще много других примеров. Трудно поверить, какую огромную экономию мысли — как выражается Мах — может осуществить одно хорошо подобранное слово. Я, кажется, уже высказал как-то ту мысль, что математика — это искусство давать одно и то же название различным вещам. Объяснимся подробнее. Надо, чтобы эти вещи, различные по своему содержанию, были сходны по форме, надо, чтобы они, так сказать, могли войти в одну и ту же форму для отливки. Когда названия хорошо подобраны, вдруг с удивлением замечаешь, что все доказательства, проведенные для одного какого-нибудь предмета, непосредственно могут быть приложены к множеству новых предметов, причем не приходится даже ничего в них изменять, даже отдельных слов, ибо названия остались те же.

Очень часто бывает достаточно одного удачно подобранного слова, чтобы устранить те исключения, которые содержались в правилах, выраженных на старом языке. С этой именно целью придуманы были отрицательные и мнимые количества, точки в бесконечности и т. д. А ведь исключения вредны, ибо они заменяют законы.

Итак, одним из характерных признаков, отличающих факты большой продуктивности, является их свойство допускать эти счастливые нововведения в языке. Сам по себе голый факт часто бывает лишен особенного значения; его можно не раз отмечать, не оказывая этим наукам сколько-нибудь значительной услуги; свое значение он приобретает лишь с того дня, когда более проницательный мыслитель подметит сходство, которое он извлекает на свет и символически обозначает тем или другим термином.

У физиков мы встречаемся с совершенно таким же приемом. Они, например, придумали слово э н е р г и я, и это слово оказалось удивительно плодотворным. Изгнав исключения, оно тоже создало закон; оно дало также одно название вещам, различным по содержанию, но сходным по форме.

Из слов, имевших наиболее счастливое влияние, я отмечу названия «группа» и «инвариант». Эти слова позволили нам проникнуть в сущность многих математических рассуждений. Они нам показали, как часто древние математики рассматривали группы, сами того не замечая, как они, считая себя отдаленными друг от друга целой пропастью, вдруг сходились вместе, не понимая, как это могло случиться. Теперь мы сказали бы, что они рассматривали так называемые «изоморфные группы». Мы теперь знаем, что в группе нас мало интересует содержание, материал, что одна только форма имеет значение и что когда одна группа хорошо изучена, тем самым становятся известными все группы, с нею изоморфные. Благодаря этим словам — группа, изоморфизм,— резюмирующим в нескольких слогах этот трудно уловимый закон и делающим его сразу для всех знакомым, переход от одной группы к другой, с нею изоморфной, оказывается непосредственным и совершается с большой экономией в работе мысли. С другой стороны, идея группы тесно примыкает к идее преобразования. Почему же приписывают такое громадное значение открытию нового преобразования? Да потому, что из одной какой-нибудь теоремы это преобразование позволяет вывести десятки других теорем; оно имеет такое же значение, как нуль, приставленный справа к целому числу.

Вот чем до сих пор обусловливалось направление, в котором развивалась математика; этим же оно, несомненно, будет определяться и в будущем. Но равным образом имеет значение и природа тех проблем, которые требуют своего разрешения. Мы не должны забывать, что должно быть нашей целью; мне она представляется двоякой Ведь наша наука одновременно граничит и с физикой и с философией; для этих двух наших соседок мы и работаем. Соответственно этому мы всегда видели и будем видеть, что математики движутся в двух прямо противоположных направлениях.

С одной стороны, математике приходится размышлять о себе самой, а это полезно, так как, размышляя о себе, она тем самым размышляет о человеческом уме, создавшем ее, тем более что среди всех своих творений он создал математику с наименьшими заимствованиями извне. Вот чем полезны некоторые математические исследования, каковы, например, исследования о постулатах, о воображаемых геометриях, о функциях со странным ходом. Чем более эти размышления уклоняются от наиболее общепринятых представлений, а следовательно, и от природы и прикладных вопросов, тем яснее они показывают нам, на что способен человеческий ум, когда он постепенно освобождается от тирании внешнего мира, тем лучше мы ум познаем в его внутренней сущности.

Но все же главные силы нашей армии приходится направлять в сторону противоположную, в сторону изучения природы.

Здесь мы встречаемся с физиком или инженером, которые говорят нам: «будьте любезны проинтегрировать такое-то дифференциальное уравнение; через неделю мне понадобится решение ввиду такого-то сооружения, которое должно быть закончено к такому-то сроку».— «Но это уравнение,— отвечаем мы,— не входит ни в один тип интегрируемых уравнений;

последних, как вам известно, весьма немного» — «Да, это мне известно, но какой тогда в вас толк?» В большинстве случаев бывает достаточно понять друг друга; в самом деле, инженер не имеет нужды в интеграле конечной формы; ему надо лишь знать общий ход интегральной функции или попросту ему нужно определенное числовое значение, которое без труда можно было бы найти, если бы интеграл уравнения был известен. Обыкновенно, хотя последний и неизвестен, но можно вычислить, и не зная его, требуемое числовое значение, если только точно известно, какое именно значение нужно инженеру и с какой степенью точности.

В былое время уравнение считалось решенным лишь в том случае, если решение выражалось с помощью конечного числа известных функций; но это едва ли возможно даже в одном случае из ста. Однако мы всегда можем или, вернее, должны стремиться узнать общий вид кривой, изображающей неизвестную функцию.

Затем остается найти количественное решение задачи; если неизвестное нельзя определить с помощью конечного вычисления, то его всегда можно представить при помощи бесконечного сходящегося ряда, который и позволит его вычислить. Но можно ли это считать настоящим решением? Рассказывают, что Ньютон сообщил Лейбницу приблизительно такую анаграмму: aaaaabbb eeeeii и т. д. Лейбниц, разумеется, ничего в ней не понял. Но нам теперь известен ключ, и мы знаем, что эта анаграмма в переводе на современный язык гласит: «я умею интегрировать все дифференциальные уравнения». Казалось бы, что либо Ньютону сильно повезло, либо он странным образом обманулся. Но в действительности он попросту хотел сказать, что он умеет образовывать (по способу неопределенных коэффициентов) степенной ряд, формально удовлетворяющий предложенному уравнению.

Но нас подобное решение не удовлетворило бы, и вот почему: во-первых, такой ряд сходится очень медленно; во-вторых, члены его следуют друг за другом без всякого закона. Напротив, ряд Θ, например, не оставляет желать ничего лучшего как потому, что он сходится очень быстро (это важно для практика, желающего получить нужное ему число как можно скорее), так и потому, что мы можем подметить с первого взгляда закон образования членов этого ряда (это служит для удовлетворения эстетических потребностей теоретика).

Но в таком случае нет более проблем решенных и проблем нерешенных; есть только проблемы более или менее решенные, смотря по быстроте сходимости ряда, являющегося их решением, или по большей или меньшей гармоничности закона, управляющего образованием членов этих рядов. Иногда случается, что одно несовершенное решение приводит нас к другому, более совершенному. Иногда же ряд сходится так медленно, что вычисление практически невыполнимо, и, таким образом, удается лишь доказать возможность проблемы. Но инженер считает такой ответ насмешкой над собой, и он прав, ибо действительно такой ответ ему нисколько не поможет окончить сооружение к назначенному сроку. Инженеру мало дела до того, окажет ли это решение услугу инженерам XXII столетия: но мы, математики, держимся другого мнения; часто мы бываем более счастливы, если нам удалось сберечь один день труда наших внуков, чем когда мы сберегаем один час для наших современников.

Иногда ощупью, так сказать эмпирически, мы приходим к достаточно быстро сходящейся формуле. «Чего же вам больше?» — говорит инженер, но мы хотели предвидеть эту сходимость Почему? Да потому, что если бы мы сумели предвидеть ее однажды, мы сумели бы сделать это и в другой раз. На этот раз мы удачно справились с вопросом; но это для нас не имеет большого значения, если мы не надеемся серьезно на повторение удачи и в другой раз.

По мере развития науки становится все более трудным охватить ее всю; тогда стараются разбить ее на части и довольствоваться одной такой частью, словом, специализироваться. Но если бы так продолжалось всегда, то это было бы значительным препятствием для прогресса науки. Как мы говорили уже, этот прогресс осуществляется именно благодаря неожиданным сближениям между различными частями науки. А между тем слишком отдаться специализации — значит закрыть себе дорогу к этим сближениям. Будем же надеяться, что конгрессы, подобные

Гейдельбергскому и Римскому, создавая между нами общение, откроют перед каждым из нас картину деятельности его соседей, заставят его сравнить их деятельность с его собственной, выйти несколько за пределы своей деревушки и окажутся, таким образом, лучшим средством против отмеченной мною опасности.

Но я слишком долго останавливаюсь на общих идеях; пора перейти к деталям.

Сделаем обзор различных дисциплин, совокупность которых образует математику. Посмотрим, что сделала каждая из них, каковы ее стремления и чего можно от нее ожидать. Если взгляды, изложенные выше, соответствуют действительности, то мы должны будем увидеть, что в прошлом главные успехи достигались в тех случаях, когда две такие дисциплины сближались к сознанию сходства их форм, невзирая на различие материала, когда они отливались одна по образу другой, благодаря чему каждая из них могла использовать успехи другой. Вместе с тем в сближениях подобного рода мы должны предвидеть и прогресс будущего.

Арифметика

Прогресс в области арифметики совершался медленнее, чем в области алгебры и анализа, и легко понять почему. Арифметисты лишены драгоценного руководителя, каким является чувство непрерывности; каждое целое число стоит отдельно от других целых чисел, оно, так сказать, обладает своей собственной индивидуальностью; каждое из них представляет своего рода исключение; вот почему в области чисел так редки общие теоремы, а те, которые существуют, оказываются сравнительно более глубоко скрытыми и дольше ускользают от внимания исследователей.

Но если арифметика отстала от алгебры и анализа, то лучшее, что она может сделать,— это постараться уподобиться этим наукам, чтобы воспользоваться их успехами. Итак, арифметист должен взять в руководители аналогии с алгеброй. Эти аналогии многочисленны, и если во многих случаях они еще не изучены настолько, чтобы их можно было использовать, то во всяком случае их существование предчувствовалось с давних пор; самый язык обеих наук показывает, что эти аналогии были подмечены. Так, говорят о трансцендентных числах и при этом отдают себе отчет в том, что будущая классификация этих чисел имеет своим прообразом классификацию трансцендентных функций, и в то же время пока еще не видно, как можно будет перейти от одной классификации к другой, но ведь, будь это вполне ясным, этот переход был бы уже выполнен, а не был бы делом будущего.

Как пример, мне прежде всего приходит на ум теория сравнения, в которой мы видим совершенный параллелизм с теорией алгебраических уравнений. Несомненно, что этот параллелизм будет еще пополнен, например, параллелизмом между теорией алгебраических кривых и теорией сравнений с двумя переменными. А когда проблемы относительно сравнений с многими переменными будут разрешены, это будет первым шагом на пути к решению многих вопросов неопределенного анализа.

Область арифметики, совершенно лишенную всякого единства, представляет собой теория простых (первоначальных) чисел. Здесь найдены только асимптотические законы, да других и нельзя ожидать; но эти законы оказываются изолированными; к ним можно прийти лишь по различным путям, между которыми, по-видимому, невозможно никакое сообщение. Мне кажется, что я предвижу, откуда придет желанное единство, но, конечно, не вполне ясно; несомненно, что все сведется к изучению семейства трансцендентных функций, которые дадут возможность путем изучения их особых точек и с помощью метода Дарбу[1]) вычислить асимптотически известные функции очень больших чисел.

Алгебра

Теория алгебраических уравнений еще долго будет привлекать к себе внимание математиков; к ней можной подойти со многих различных между собой сторон, самой важной является, несомненно, теория

---

[1]) Известный французский математик, современник Пуанкаре. — *Примеч. ред.*

групп. Но остается еще вопрос о численном определении корней и об исследовании числа действительных корней. Лагерр [1]) показал, что Штурм [2]) не сказал последнего слова по этому вопросу.

Лет сорок назад казалось, что изучение инвариантов алгебраических форм поглотит всю алгебру; теперь оно почти заброшено, хотя предмет далеко еще не исчерпан; надо только его расширить, не ограничиваясь, например, инвариантами, относящимися к линейным преобразованиям, но захватывая все те, которые относятся к какой-либо группе. Таким образом, прежде добытые теоремы наведут нас на мысль о других более общих, которые будут группироваться вокруг них, подобно тому, как кристалл растет в растворе.

Не следует думать, что алгебра закончена, раз она дала нам правила образования всех возможных комбинаций; остается еще разыскание интересных комбинаций, удовлетворяющих тому или другому условию. Таким путем может образоваться своего рода неопределенный анализ, в котором неизвестными будут не целые числа, а многочлены. Но здесь уже алгебра будет брать пример с арифметики, руководствуясь аналогией целого числа либо с целым многочленом с произвольными коэффициентами, либо с целым многочленом с целыми же коэффициентами.

Геометрия

По-видимому, геометрия не может содержать ничего такого, чего не было бы уже в алгебре или в анализе: ведь геометрические факты — это те же факты алгебры или анализа, но только выраженные на другом языке. Казалось бы, поэтому, что после того обзора, который мы сделали, не остается больше ничего сказать, специально относящегося к геометрии. Но думать так — значило бы проглядеть важность самого языка, когда он удачно создан, значило бы не понимать того, что прибавляет к вещам способ обо-

---

[1]) Французский математик, преподававший в Политехнической школе в то время, когда там учился Пуанкаре. — *Примеч. ред*

[2]) Французский математик, работавший в области математической физики, оптики и механики. — *Примеч. ред.*

значения этих вещей и, следовательно, способ их группирования.

И прежде всего геометрические рассуждения приводят нас к постановке новых проблем; конечно, это, если угодно, аналитические проблемы, но анализ никогда не привел бы нас к их постановке. Однако анализ извлекает для себя из этого выгоду, как и из того, что он вынужден разрешать проблемы для удовлетворения потребностей физики.

Большое преимущество геометрии состоит именно в том, что в ней чувства могут прийти на помощь рассудку и помогают отгадать нужный путь, так что многие предпочитают приводить проблемы анализа к их геометрической форме. К несчастью, наши чувства не могут вести нас особенно далеко, они покидают нас, лишь только мы обнаруживаем желание унестись за три классические измерения. Значит ли это, что, выйдя из той области, в которой они нас, по-видимому, хотят удержать, мы не вправе более рассчитывать на что-либо, кроме чистого анализа, и что всякая геометрия более чем трех измерений тщетна и бесцельна? Величайшие умы предшествующего нам поколения ответили бы: «да»; мы же теперь так освоились с этим понятием, что можем говорить о нем даже в университетском курсе, не вызывая особенного удивления.

Но к чему оно нам? Ответ очевиден: оно дает нам прежде всего весьма удобный способ выражения, язык, который в очень немногих словах выражает то, что при обыкновенном аналитическом языке потребовало бы пространных фраз. Мало того: этот язык побуждает нас называть одним и тем же именем сходные между собой вещи и закрепляет аналогии, делая невозможным забвение их. Он дает нам возможность ориентироваться в этом пространстве, слишком громадном для нас, которого мы не можем обнять иначе, как вызывая перед собой постоянно образ видимого пространства, хотя последнее есть лишь весьма несовершенное его изображение. И тут, как и в предыдущих примерах, аналогия с тем, что просто, помогает нам понять то, что сложно.

Эта геометрия пространств, имеющих более трех измерений, не является простой аналитической геометрией; она имеет характер не исключительно количественный, но также и качественный, и этим-то она особенно интересна. Есть дисциплина, которую называют «Analysis situs» и предметом изучения которой являются соотношения расположений различных элементов фигуры независимо от их величины. Эта геометрия — чисто качественная: ее теоремы остались бы справедливыми, если бы точные фигуры были заменены грубыми изображениями, созданными ребенком. Можно построить также Analysis situs более чем трех измерений. Важность Analysis situs огромна, и я не думаю, чтобы его значение могло быть преувеличено; это достаточно подтверждается той пользой, которую из него извлек Риман[1]), один из главных творцов этой дисциплины. Нужно дойти до ее полного построения в пространствах высшего порядка; тогда у нас будет в руках такое орудие, которое позволит действительно видеть в гиперпространстве и расширить область наших чувственных восприятий.

Быть может, проблемы Analysis situs не были бы даже поставлены, если бы пользовались только языком анализа; впрочем, нет, я ошибаюсь: они были бы, несомненно, поставлены, ибо их разрешение необходимо для множества вопросов анализа, но наверное изолированно, так что нельзя было бы вовсе усмотреть их общей связи. Особенно содействовало недавнему успеху геометрии введение понятия о преобразованиях и группах. Благодаря этому понятию геометрия перестала быть агрегатом теорем, более или менее интересных, но следующих одна за другой без всякого сходства между ними, она приобрела единство. А с другой стороны, история не должна забывать того, что именно по поводу геометрии начали систематически исследовать непрерывные преобразования, так что чистые геометры со своей стороны также содействовали развитию идеи группы, идеи, столь полезной в других отраслях математики.

Канторизм

Выше я говорил о представляющейся нам необходимости постоянно восходить к основным принципам

---

[1]) Б Риман (1826—1866) — выдающийся немецкий математик, выдвинувший ряд основных идей топологии. Имеет многочисленные труды по разнообразным разделам математики. — *Примеч. ред.*

нашей науки и о той пользе, которую отсюда может извлечь наука о человеческом духе. Эта потребность породила два стремления, занявшие весьма обширное место на самых последних страницах истории математики. Первое из них — канторизм, заслуги которого перед наукой известны. Одна из характерных черт канторизма состоит в том, что вместо того, чтобы подниматься к общему, строя все более и более сложные конструкции, и вводить определения через построения, он исходит из genus supremum [1]) и дает определения только per genus proximum et differentiam specificam [2]), как сказали бы схоластики. Этим объясняется тот ужас, который он некоторое время тому назад вызвал в иных умах, например у Эрмита, излюбленной идеей которого является сравнение математических наук с естественными. У большинства из нас эти предубеждения уже рассеялись, но случилось так, что натолкнулись на некоторые парадоксы, которые привели бы в восторг Зенона Элейского [3]) и мегарскую школу [4]). И тогда все пустились в поиски за противоядием. Я держусь того мнения — и не я один,— что важно вводить в рассмотрение исключительно такие вещи, которые можно вполне определить при помощи конечного количества слов. Но какое бы противоядие ни было признано действительным, мы можем предвкушать наслаждение врача, имеющего возможность наблюдать интересный патологический случай.

Поиски постулатов

С другой стороны, мы видим попытки перечислить те более или менее скрытые аксиомы и постулаты, которые служат основанием для различных математических теорий. Самые блестящие результаты полу-

---

[1]) Высший род (*лат.*). — *Примеч. ред.*

[2]) Через родовое сходство и видовое отличие (*лат.*). — *Примеч. ред.*

[3]) Зенон из Элеи (ок. 490—430 гг. до н. э.) — древнегреческий философ, известен своими знаменитыми парадоксами «Ахиллес», «Стрела» и другие. — *Примеч. ред.*

[4]) Одна из школ древнегреческой философии, представителям которой приписывают рождение многих известных софизмов. — *Примеч. ред.*

чил Гильберт. На первый взгляд эта область кажется довольно ограниченной; кажется, что когда перечень будет закончен — а это не замедлит произойти,— нечего будет больше делать. Но когда все будет перечислено, тогда найдется множество приемов для классификации всего материала; хороший библиотекарь всегда находит себе занятие, а каждая новая классификация будет поучительна для философа.

Этим я кончаю мой обзор, которого я не мог и рассчитывать сделать полным по множеству причин, и прежде всего потому, что я и без того уже слишком злоупотребил вашим вниманием. Думаю, что приведенных примеров будет достаточно, для того чтобы показать вам, в чем состоял механизм прогресса математических наук в прошлом и в каком направлении они должны будут двигаться в будущем.

Глава III

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ТВОРЧЕСТВО

Вопрос о процессе математического творчества должен возбуждать в психологе самый живой интерес. В этом акте человеческий ум, по-видимому, заимствует из внешнего мира меньше всего; как орудием, так и объектом воздействия здесь является только он сам, так по крайней мере кажется; поэтому, изучая процесс математической мысли, мы вправе рассчитывать на проникновение в самую сущность человеческого ума.

Это было понято давно; и вот несколько месяцев тому назад журнал «Математическое образование», редактируемый профессорами Лезаном и Фером, предпринял анкету по вопросу о привычках ума и приемах работы различных математиков. Но мое сообщение в главных чертах было уже готово, когда были опубликованы результаты этой анкеты, так что я совершенно не мог ими воспользоваться. Скажу только, что большинство свидетельств подтверждало мои заключения, я не говорю — все, так как нельзя рассчитывать на единогласие ответов, когда вопрос ставится на всеобщее голосование.

I

Начнем с одного факта, который должен нас изумлять или, вернее, должен был бы изумлять, если бы мы к нему не привыкли. Чем объяснить то обстоятельство, что некоторые люди не понимают математических рассуждений? Если эти рассуждения основаны на одних лишь правилах логики, правилах, признаваемых всеми нормальными умами, если их очевидность основывается на принципах, которые общи всем людям и которых никто в здравом уме не станет отрицать, то как возможно существование столь многих людей, совершенно к ним неспособных?

Что не всякий способен на творчество, в этом нет ничего удивительного. Что не всякий может запомнить доказательство, однажды им узнанное, с этим также можно примириться. Но что не всякий может понимать математическое рассуждение в тот момент, когда ему его излагают, вот что кажется в высшей степени поразительным, когда начинаешь в это вдумываться. А между тем тех, которые лишь с трудом могут следить за таким рассуждением, большинство; это неоспоримый факт, и опыт учителей средней школы наверное ему не противоречит.

Но мало того: как возможна ошибка в математическом рассуждении? Здравый ум не должен допускать логических ошибок, а между тем иные острые умы, безошибочные в тех кратких рассуждениях, которые приходится делать при обычных повседневных обстоятельствах, оказываются неспособными следить или повторить без ошибок математические доказательства, которые, хотя и более длинны, но, в сущности, представляют собой лишь нагромождение маленьких рассуждений, совершенно подобных тем, что даются им так легко. Нужно ли добавлять, что и хорошие математики далеко не непогрешимы?

Ответ представляется мне очевидным. Представив себе длинную цепь силлогизмов, в которой заключения предыдущих силлогизмов служат посылками для последующих; мы способны понять каждый силлогизм в отдельности, и при переходе от посылок к заключению мы не рискуем впасть в ошибку. Но между моментом, когда мы в первый раз встретили какое-нибудь предложение в виде заключения некоторого силлогизма, и тем моментом, когда мы вновь с ним встречаемся как посылкой другого силлогизма, иногда проходит много времени, в течение которого были развернуты многочисленные звенья цепи; и вот может случиться, что за это время мы либо вовсе забыли это предложение, либо, что еще хуже, забыли его смысл. Таким образом, возможно, что мы его заменим другим, несколько отличным от него предложением или, сохраняя его словесное выражение, припишем ему несколько иной смысл; в том и в другом случае мы рискуем ошибиться.

Часто математику приходится пользоваться много раз одним и тем же правилом: в первый раз он, конечно, доказывает себе его справедливость; пока это доказательство остается в его памяти вполне ясным и свежим, пока он совершенно точно представляет себе смысл и широту охвата этого правила, до тех пор нет никакого риска в его употреблении. Но когда в дальнейшем наш математик, полагаясь на свою память, продолжает применять правило уже совершенно механически, тогда какой-нибудь изъян в памяти может привести к ложному применению правила. Так, если взять простой, почти избитый пример, мы иногда делаем ошибки в счете по той причине, что забыли нашу таблицу умножения.

С этой точки зрения специальная способность в математике должна обусловливаться очень верной памятью или скорее необычайной напряженностью внимания. Это качество можно было бы сравнить со способностью игрока в вист запоминать вышедшие карты, или, чтобы взять более сильную степень, со способностью шахматиста обозревать и предвидеть очень большое число комбинаций и удерживать их в памяти. С этой точки зрения всякий хороший математик должен был бы быть в то же время хорошим шахматистом, и наоборот; равным образом, он должен быть силен в числовых выкладках. Конечно, иногда так и бывает; так, Гаусс одновременно был гениальным геометром и очень искусным и уверенным вычислителем.

Но бывают исключения; впрочем, я ошибаюсь, говоря «исключения», ибо тогда исключения окажутся многочисленнее случаев, подходящих под правило. Напротив, именно Гаусс и представляет собой исключение. Что же касается, например, меня лично, то я должен сознаться, что неспособен сделать без ошибки сложение. Равным образом, из меня вышел бы плохой шахматист; я, быть может, хорошо рассчитал бы, что, играя таким-то образом, я подвергаюсь такой-то опасности; я бы разобрал много других ходов, которые отверг бы по тем или другим причинам; но в конце концов я, наверное, сделал бы ход, уже рассмотренный, забыв тем временем о той опасности, которую я раньше предусмотрел

Одним словом, память у меня неплохая, но она была бы недостаточна для того, чтобы я мог стать хорошим игроком в шахматы.

Почему же она не изменяет мне в трудном математическом рассуждении, в котором растерялось бы большинство шахматистов? Очевидно, по той причине, что здесь моей памятью руководит общий ход рассуждения. Математическое доказательство представляет собой не просто какое-то нагромождение силлогизмов: это силлогизмы, *расположенные в известном порядке*, причем этот порядок расположения элементов оказывается гораздо более важным, чем сами элементы. Если я обладаю чувством, так сказать, интуицией этого порядка, так что могу обозреть одним взглядом все рассуждения в целом, то мне не приходится опасаться, что я забуду какой-нибудь один из элементов; каждый из них сам по себе займет назначенное ему место без всякого усилия памяти с моей стороны.

Далее, когда я повторяю усвоенное доказательство, мне часто кажется, что я мог бы и сам придумать его; быть может, часто это только иллюзия; но если даже у меня недостаточно сил, чтобы самостоятельно найти такое доказательство, то я по меньшей мере самостоятельно создаю его всякий раз, когда мне приходится его повторять.

Понятно, что это чувство, этот род математической интуиции, благодаря которой мы отгадываем скрытые гармонии и соотношения, не может быть принадлежностью всех людей Одни не обладают ни этим тонким, трудно оценимым чувством, ни силой памяти и внимания выше среднего уровня, и тогда они оказываются совершенно неспособными понять сколько-нибудь сложные математические теории.

Другие, обладая этим чувством лишь в слабой степени, одарены в то же время редкой памятью и большой способностью внимания. Они запомнят наизусть частности, одну за другой; они смогут понять математическую теорию и даже иной раз сумеют ее применить, но они не в состоянии творить. Наконец, третьи, обладая в более или менее высокой степени той специальной интуицией, о которой я только что говорил, не только смогут понять математику, не обладая особенной памятью, но они смогут оказаться творцами, и их поиски новых открытий будут более или менее успешны, смотря по степени развития у них этой интуиции.

В чем, в самом деле, состоит математическое творчество? Оно заключается не в создании новых комбинаций с помощью уже известных математических объектов. Это может сделать мало ли кто; но число комбинаций, которые можно найти этим путем, было бы бесконечно, и даже самое большое их число не представляло бы ровно никакого интереса. Творчество состоит как раз в том, чтобы не создавать бесполезных комбинаций, а строить такие, которые оказываются полезными; а их ничтожное меньшинство. Творить — это отличать, выбирать.

Как следует производить этот выбор, я объяснил в другом месте; в математике фактами, заслуживающими изучения, являются те, которые ввиду их сходства с другими фактами способны привести нас к открытию какого-нибудь математического закона, совершенно подобно тому, как экспериментальные факты приводят к открытию физического закона. Это именно те факты, которые обнаруживают родство между другими фактами, известными с давних пор, но ошибочно считавшимися чуждыми друг другу.

Среди комбинаций, на которые падает выбор, часто наиболее плодотворными оказываются те, элементы которых взяты из наиболее удаленных друг от друга областей. Я не хочу сказать, что для нового открытия достаточно сблизить возможно глубже различающиеся предметы; большинство комбинаций, построенных таким образом, оказались бы совершенно бесплодными; но некоторые, правда, очень немногие из них, бывают наиболее плодотворными.

Творить, изобретать, сказал я, значит выбирать; но это слово, пожалуй, не вполне подходит. Оно вызывает представление о покупателе, которому предлагают громадное число образчиков и который их пересматривает один за другим, имея в виду сделать свой выбор. Здесь число образчиков было бы так велико, что всей жизни не хватило бы для пересмотра всех их. Но в действительности это обстоит иначе. Бесплодные комбинации даже и не представляются уму изобретателя. В поле его сознания появляются лишь действительно полезные комбинации, да еще некоторые другие, которые он, правда, отбросит в сторону, но которые не лишены характера полезных комбинаций. Все происходит подобно тому, как если бы изобретатель был экзаменатором второй ступени, имеющим дело лишь с кандидатами, успешно прошедшими через первое испытание.

II

К тому, что мною сказано до сих пор, можно прийти посредством наблюдения или вывода при чтении произведений математиков, если только вдумчиво это делать.

Теперь пора вникнуть глубже и посмотреть, что происходит в самой душе математика. Лучшее, что я могу сделать с этой целью, — это, я полагаю, обратиться к моим личным воспоминаниям. Впрочем, я ограничусь тем, что расскажу вам, как я написал мой первый мемуар о фуксовых функциях. Прошу у вас извинения, ибо мне придется употребить несколько технических выражений; но они не должны вас пугать: вам, собственно, незачем их понимать. Например, я скажу так: я нашел доказательство такой-то теоремы при таких-то обстоятельствах; эта теорема будет носить варварское название, которое для большинства из вас не будет понятно, но это совершенно неважно; все, что интересно здесь для психолога, — это условия, обстоятельства.

В течение двух недель я старался доказать, что невозможна никакая функция, которая была бы подобна тем, которым я впоследствии дал название фуксовых функций; в то время я был еще весьма далек от того, что мне было нужно. Каждый день я усаживался за свой рабочий стол, проводил за ним один-два часа, перебирал большое число комбинаций и не приходил ни к какому результату. Но однажды вечером я выпил, вопреки своему обыкновению, чашку черного кофе; я не мог заснуть; идеи возникали во множестве; мне казалось, что я чувствую, как они сталкиваются между собой, пока, наконец, две из них, как бы сцепившись друг с другом, не образовали устойчивого соединения. Наутро я установил существование класса функций Фукса, а именно тех, которые получаются из гипергеометрического ряда; мне оставалось лишь сформулировать результаты, что отняло у меня всего несколько часов.

Я захотел затем представить эти функции в виде частного двух рядов; это была вполне сознательная и обдуманная мысль; мною руководила аналогия с эллиптическими функциями. Я задал себе вопрос; каковы должны быть свойства этих рядов, если они существуют, и я пришел без труда к образованию рядов, названных мною тета-фуксовыми функциями.

В эту пору я покинул Кан, где я тогда жил, чтобы принять участие в геологической экскурсии, организованной Горным институтом. Среди дорожных перипетий я забыл о своих математических работах; по прибытии в Кутанс мы взяли омнибус для прогулки; и вот в тот момент, когда я заносил ногу на ступеньку омнибуса, мне пришла в голову идея — хотя мои предыдущие мысли не имели с нею ничего общего, — что те преобразования, которыми я воспользовался для определения фуксовых функций, тождественны с преобразованиями неевклидовой геометрии. Я не проверил этой идеи; для этого я не имел времени, так как, едва усевшись в омнибус, я возобновил начатый разговор, тем не менее я сразу почувствовал полную уверенность в правильности идеи. Возвратясь в Кан, я сделал проверку; идея оказалась правильной.

Вслед за тем я занялся некоторыми вопросами арифметики, по-видимому, без особенного успеха; мне и в голову не приходило, что эти вопросы могут иметь хотя бы самое отдаленное отношение к моим предыдущим исследованиям. Раздосадованный неудачей, я решил провести несколько дней на берегу моря и стал думать о совершенно других вещах. Однажды, когда я бродил по прибрежным скалам, мне пришла в голову мысль, опять-таки с теми же характерными признаками: краткостью, внезапностью и непосредственной уверенностью в ее истинности, что арифметические преобразования неопределенных квадратичных трехчленов тождественны с преобразованиями неевклидовой геометрии.

Возвратившись в Кан, я стал размышлять над этой мыслью и сделал из нее некоторые выводы; пример квадратичных форм показал мне, что, помимо фуксовых групп, которые соответствуют гипергеометрическому ряду, существуют еще и другие; я увидел, что к ним можно приложить теорию тета-фуксовых рядов и что, следовательно, существуют еще иные фуксовы функции, помимо тех, которые происходят из гипергеометрического ряда и которые только и были известны мне до тех пор. Понятно, я задался целью образовать все такие функции; я повел правильную осаду и овладел одним за другим всеми наружными фортами; но один все еще держался; его падение должно было повлечь за собой сдачу крепости. Однако все мои усилия приводили лишь к большему убеждению в трудности задачи; но и это уже имело некоторое значение. Вся эта работа происходила вполне сознательно.

Тут мне пришлось уехать в Мон-Валерьен, где я должен был отбывать воинскую повинность; конечно, я был поглощен разнообразнейшими делами. Однажды я шел по бульвару, как вдруг мне представилось решение занимавшей меня задачи. Я не стал тогда же вникать в этот вопрос; это я сделал лишь по окончании военной службы. В руках у меня были все необходимые данные, оставалось только собрать их вместе и расположить в надлежащем порядке. Теперь я уже в один присест без всякого усилия написал свой окончательный мемуар.

III

Я ограничусь одним только этим примером; было бы бесполезно увеличивать их число, о многих других исследованиях мне пришлось бы повторять почти то же самое; наблюдения, сообщаемые другими математиками в ответе на анкету журнала «Математическое образование», тоже лишь подтвердили бы сказанное.

Прежде всего, поражает этот характер внезапного прозрения, с несомненностью свидетельствующий о долгой предварительной бессознательной работе; роль этой бессознательной работы в процессе математического творчества кажется мне неоспоримой; следы ее можно было бы найти и в других случаях, где она является менее очевидной. Часто, когда думаешь над каким-нибудь трудным вопросом, за первый присест не удается сделать ничего путного, затем, отдохнув более или менее продолжительное время, садишься снова за стол Проходит полчаса и все так же безрезультатно, как вдруг в голове появляется решающая мысль. Можно думать, что сознательная работа оказалась более плодотворной благодаря тому, что она была временно прервана, и отдых вернул уму его силу и свежесть. Но более вероятно, что это время отдыха было заполнено бессознательной работой, результат которой потом раскрывается перед математиком, подобно тому как это имело место в приведенных примерах; но только здесь это откровение приходит не во время прогулки или путешествия, а во время сознательной работы, хотя в действительности независимо от этой работы, разве только разматывающей уже готовые изгибы; эта работа играет как бы только роль стимула, который заставляет результаты, приобретенные за время покоя, но оставшиеся за порогом сознания, облечься в форму, доступную сознанию.

Можно сделать еще одно замечание по поводу условий такой бессознательной работы; а именно: эта работа возможна или по меньшей мере плодотворна лишь в том случае, если ей предшествует и за нею следует период сознательной работы. Никогда (и приведенные мною примеры достаточны для такого утверждения) эти внезапные внушения не происходят иначе, как после нескольких дней волевых усилий, казавшихся совершенно бесплодными, так что весь пройденный путь в конце концов представлялся ложным. Но эти усилия оказываются в действительности не такими уж бесплодными, как это казалось; это они пустили в ход машину бессознательного, которая без них не стала бы двигаться и ничего бы не произвела.

Необходимость второго периода сознательной работы представляется еще более понятной. Надо пустить в действие результаты этого вдохновения, сделать из них непосредственные выводы, привести их в порядок, провести доказательства; а прежде всего их надо проверить. Я говорил вам о чувстве абсолютной достоверности, сопровождающем вдохновение; в приведенных примерах это чувство меня не обмануло, и так оно бывает в большинстве случаев; но следует остерегаться мнения, что так бывает всегда; подчас это чувство нас обманывает, хотя оно и в этих случаях ощущается не менее живо; ошибка обнаруживается лишь тогда, когда хочешь провести строгое доказательство. Это, по моим наблюдениям, особенно часто имееет место с мыслями которые приходят в голову утром или вечером, когда я лежу в постели в полусонном состоянии.

IV

Таковы факты; они наводят нас на следующие размышления. Бессознательное или, как еще говорят, подсознательное «я» играет в математическом творчестве роль первостепенной важности; это явствует из всего предшествующего. Но это подсознательное «я» обычно считают совершенно автоматическим. Между тем мы видели, что математическая работа не есть простая механическая работа; ее нельзя доверить никакой машине, как бы совершенна она ни была. Дело не только в том, чтобы применять известные правила и сфабриковать как можно больше комбинаций по некоторым установленным законам. Полученные таким путем комбинации были бы невероятно многочисленны, но бесполезны и служили бы лишь помехой. Истинная творческая работа состоит в том, чтобы делать выбор среди этих комбинаций, исключая из рассмотрения те, которые являются бесполезными, или даже в том, чтобы освобождать себя от труда создавать эти бесполезные комбинации.

Но правила, руководящие этим выбором, — крайне тонкого, деликатного характера; почти невозможно точно выразить их словами; они явственно чувствуются, но плохо поддаются формулировке; возможно ли при таких обстоятельствах представить себе решето, способное просеивать их механически?

А в таком случае представляется правдоподобной такая гипотеза: «я» подсознательное нисколько не «ниже», чем «я» сознательное; оно отнюдь не имеет исключительно механического характера, но способно к распознаванию, обладает тактом, чувством изящного; оно умеет выбирать и отгадывать. Да что там! Оно лучше умеет отгадывать, чем «я» сознательное, ибо ему удается то, перед чем другое «я» оказывается бессильным. Одним словом, не является ли подсознательное «я» чем-то более высшим, чем «я» сознательное? Вам понятна вся важность этого вопроса. Бутру в лекции, прочитанной месяца два тому назад, показал, каким образом к тому же вопросу приводят совершенно другие обстоятельства и к каким следствиям привел бы положительный ответ на него.

Приводят ли нас к этому положительному ответу те факты, которые я только что изложил? Что касается меня, то я, признаюсь, отнесся бы к такому ответу далеко не сочувственно. Пересмотрим же вновь факты и поищем, не допускают ли они другого объяснения.

Несомненно, что те комбинации, которые представляются уму в момент какого-то внезапного просветления, наступающего после более или менее продолжительного периода бессознательной работы, в общем случае оказываются полезными и плодотворными, являясь, по-видимому, результатом первого отбора. Но следует ли отсюда, что подсознательное «я», отгадавшее с помощью тонкой интуиции, что эти комбинации могут быть полезны, только эти именно комбинации и построило, или, может быть, оно построило еще множество других, оказавшихся лишенными всякого интереса и потому не переступивших порога сознания?

С этой второй точки зрения все комбинации создаются благодаря автоматизму подсознательного «я», но только те из них, которые могут оказаться интересными, проникают в поле сознания. И это представляется еще более таинственным. В чем причина того, что среди тысяч продуктов нашей бессознательной деятельности одним удается переступить порог сознания, тогда как другие остаются за его порогом? Случайно ли даруется такая привилегия? Очевидно, нет; например, среди всех раздражений наших чувств только самые интенсивные остановят на себе наше внимание, если только оно не привлекается еще и другими причинами. Вообще, среди несознаваемых явлений привилегированными, т. е. способными стать сознаваемыми, оказываются те, которые прямо или косвенно оказывают наибольшее воздействие на нашу способность к восприятию.

Может показаться странным, что по поводу математических доказательств, имеющих, по-видимому, дело лишь с мышлением, я заговорил о восприятии. Но считать это странным значило бы забыть о чувстве прекрасного в математике, о гармонии чисел и форм, о геометрическом изяществе. Всем истинным математикам знакомо настоящее эстетическое чувство. Но ведь здесь мы уже в области чувственного восприятия.

Но какие же именно математические предметы мы называем прекрасными и изящными, какие именно предметы способны вызвать в нас своего рода эстетические эмоции? Это те, элементы которых расположены так гармонично, что ум без труда может охватить целое, проникая в то же время и в детали. Эта гармония одновременно удовлетворяет нашим эстетическим потребностям и служит подспорьем для ума, который она поддерживает и которым руководит. И в то же время, давая нам зрелище правильно расположенного целого, она вызывает в нас предчувствие математического закона. А ведь мы видели, что единственными математическими фактами, достойными нашего внимания и могущими оказаться полезными, являются как раз те, которые могут привести нас к открытию нового математического закона. Таким образом, мы приходим к следующему заключению: полезными комбинациями являются как раз наиболее изящные комбинации, т. е. те, которые в наибольшей степени способны удовлетворять тому специальному эстетическому чувству, которое знакомо всем математикам, но которое до того непонятно профанам, что упоминание о нем вызывает улыбку на их лицах.

Но что же тогда оказывается? Среди тех крайне многочисленных комбинаций, которые слепо создает мое подсознательное «я», почти все оказываются лишенными интереса и пользы, но именно поэтому они не оказывают никакого воздействия на эстетическое чувство, и сознание никогда о них не узнает; лишь некоторые среди них оказываются гармоничными, а следовательно, полезными и прекрасными в то же время; они сумеют разбудить ту специальную восприимчивость математика, о которой я только что говорил; последняя же, однажды возбужденная, со своей стороны, привлечет наше внимание к этим комбинациям и этим даст им возможность переступить через порог сознания.

Это не более как гипотеза; но вот наблюдение, решительно говорящее в ее пользу: когда ум математика испытывает внезапное просветление, то большей частью оно его не обманывает; но иногда все же случается, как я уже говорил, что пришедшие таким образом в голову идеи не выдерживают проверочных операций; и вот замечено, что почти всегда такая ложная идея, будь она верна, была бы приятна нашему естественному инстинкту математического изящества.

Таким образом, именно это специальное эстетическое чувство играет роль того тонкого критерия, о котором я говорил выше; благодаря этому становится понятным и то, почему человек, лишенный этого чувства, никогда не окажется истинным творцом.

V

Однако такое объяснение не устраняет всех затруднений; сознательное «я» в крайней степени ограничено; что же касается подсознательного «я», то нам неизвестны его границы, и потому нет ничего неестественного в предположении, что оно может за небольшой промежуток времени создать больше различных комбинаций, чем может охватить сознательное существо за целую жизнь. Но тем не менее эти пределы существуют; в таком случае правдоподобно ли, чтобы это подсознательное «я» могло образовать все возможные комбинации, число которых ужаснуло бы всякое воображение? И, однако, это представляется необходимым, ибо если оно создает лишь небольшую часть этих комбинаций, да и то делает на авось, то будет очень уж мало шансов на то, что среди них окажется удачная комбинация, т. е. та, которую надо найти.

Но, быть может, объяснения следует искать в том периоде сознательной работы, который всегда предшествует плодотворной бессознательной работе? Позвольте мне прибегнуть к грубому сравнению. Представим себе будущие элементы наших комбинаций чем-то вроде крючкообразных атомов Эпикура. Во время полного бездействия ума эти атомы неподвижны, как если бы они были повешены на стену; таким образом, этот полный покой ума может продолжаться неопределенно долго, и за все это время атомы не сблизятся ни разу и, следовательно, не осуществится ни одна комбинация.

В противоположность этому, в течение периода кажущегося покоя и бессознательной работы некоторые из атомов отделяются от стены и приходят в движение. Они бороздят по всем направлениям то пространство, в котором они заключены, подобно рою мошек или, если вы предпочитаете более ученое сравнение, подобно молекулам газа в кинетической теории газов. Тогда их взаимные столкновения могут привести к образованию новых комбинаций.

Какова же тогда роль предварительной сознательной работы? Очевидно, она заключается в том, чтобы привести некоторые атомы в движение, сорвав их со стены. Когда мы, пытаясь собрать воедино эти элементы, на тысячу ладов ворочаем их во все стороны, но не находим в конце концов удовлетворительного сопоставления, тогда мы бываем склонны отрицать всякое значение такой работы. А между тем атомы после того возбуждения, в которое их привела наша воля, отнюдь не возвращаются в свое первоначальное состояние покоя. Они продолжают, теперь уже свободно, свою пляску.

Но ведь наша воля взяла их не наугад, она при этом преследовала вполне определенную цель, так что пришли в движение не какие-нибудь атомы вообще, но такие, от которых можно с некоторым основанием ожидать искомого решения. Раз придя в движение, атомы начинают испытывать столкновения, которые приводят к образованию комбинаций этих атомов либо между собой, либо с другими, неподвижными атомами, с которыми они сталкиваются на своем пути. Я еще раз прошу у вас извинения; мое сравнение довольно грубо, но я не знаю иного способа сделать понятной мою мысль.

Как бы там ни было, но единственными комбинациями, образование которых представляется вероятным, являются те, хоть один элемент которых оказывается в числе атомов, свободно выбранных нашей волей. Но ведь очевидно, что именно среди них находится та комбинация, которую я только что назвал удачной. Быть может, здесь мы имеем средство смягчить то, что представлялось парадоксальным в первоначальной гипотезе.

Другое замечание. Никогда не случается, чтобы бессознательная работа доставила вполне готовым результат сколько-нибудь продолжительного вычисления, состоящего в одном только применении определенных правил. Казалось бы, что абсолютное «я» подсознания в особенности должно быть способно к такого рода работе, являющейся в некотором роде исключительно механической. Казалось бы, что, думая вечером о множителях какого-нибудь произведения, можно надеяться найти при пробуждении готовым самое произведение или, еще иначе, что алгебраическое вычисление, например проверка, может быть выполнено помимо сознания. Но в действительности ничего подобного не происходит, как то доказывают наблюдения.

От таких внушений, являющихся продуктами бессознательной работы, можно ожидать только исходных точек для подобных вычислений; самые же вычисления приходится выполнять во время второго периода сознательной работы, который следует за внушением и в течение которого проверяются результаты этого внушения и делаются из них выводы. Правила этих вычислений отличаются строгостью и сложностью; они требуют дисциплины, внимания, участия воли и, следовательно, сознания. В подсознательном же «я» господствует, в противоположность этому, то, что я назвал бы свободой, если бы только можно было дать это имя простому отсутствию дисциплины и беспорядку, обязанному своим происхождением случаю. Только этот самый беспорядок делает возможным возникновение неожиданных сближений.

Сделаю последнее замечание. Излагая выше некоторые мои личные наблюдения, я рассказал, между прочим, об одной бессонной ночи, когда я работал как будто помимо своей воли; подобные случаи бывают нередко, и для этого нет необходимости в том, чтобы нормальная мозговая деятельность была вызвана каким-нибудь физическим возбудителем, как то имело место в описанном мною случае. И вот в таких случаях кажется, будто сам присутствуешь при своей собственной бессознательной работе, которая, таким образом, оказалась отчасти доступной перевозбужденному сознанию, но нисколько вследствие этого не изменила своей природе. Тогда отдаешь себе в общих чертах отчет в том, что различает оба механизма или, если вам угодно, методы работы обоих «я». Психологические наблюдения, которые я, таким образом, имел возможность сделать, подтверждают те взгляды, которые я только что изложил.

А в подтверждении они конечно нуждаются, так как, вопреки всему, они остаются весьма гипотетическими; однако вопрос столь интересен, что я не раскаиваюсь в том, что изложил вам эти взгляды.

Глава IV

СЛУЧАЙНОСТЬ

I

«Как можно говорить о законах случайности? Разве случайность не представляет собой противоположности всякой закономерности?» Этим вопросом Бертран начинает свое «Исчисление вероятностей». Вероятность противоположна достоверности; вероятность — это то, чего мы не знаем и чего поэтому мы, казалось бы, не можем вычислять. В этом содержится противоречие, по крайней мере кажущееся, о котором уже много писали.

Прежде всего, что такое случайность? Древние различали явления, которые, как им казалось, повинуются гармоничным законам, установленным раз навсегда, и другие явления, которые приписывались случаю. К последним относили все то, чего нельзя было предвидеть, что было противно всякому закону. В каждой области точные законы регулировали отнюдь не все. Они намечали лишь границы, в пределах которых возможна игра случая. С этой точки зрения слово «случайность» приобрело объективный смысл. То, что было случайностью для одного, должно было быть случайностью и для других, даже для богов.

Однако в настоящее время мы уже не придерживаемся этого взгляда. Мы сделались абсолютными детерминистами, и даже те, которые склонны сохранить за человеком свободу воли, признают неограниченное господство детерминизма в области неорганического мира. Всякое явление, сколь бы оно ни было незначительно, имеет свою причину, и бесконечно мощный дух, беспредельно осведомленный в законах природы, мог бы его предвидеть с начала веков. С такого рода духом, если бы он существовал, нельзя было бы играть ни в какую азартную игру, не теряя всего состояния.

Для него слово «случайность» не имело бы смысла или, вернее, для него вовсе не существовало бы случайности. Лишь вследствие нашей слабости, вследствие нашего невежества случайность для нас существует. Можно даже оставить в стороне слабость человеческой природы; то, что представляется случайным для невежды, отнюдь не будет таковым для ученого. Случайность является, таким образом, как бы мерой нашего невежества. Случайными явлениями, согласно этому определению, будут те, законы которых нам неизвестны.

Но достаточно ли это определение? Когда первые халдейские пастухи следили за движением светил, они не знали еще законов астрономии; но приходило ли им в голову сказать, что движение светил предоставлено случаю?

Когда современный физик изучает новое явление, закон которого он открыл во вторник, то говорил ли он в понедельник, что это явление случайное? Но мало того. Не прибегают ли часто для предсказания явления к тому, что Бертран называет законом случайностей? Так, например, в кинетической теории газов мы приходим к известным законам Мариотта и Гей-Люссака именно благодаря той гипотезе, что скорости молекул газа меняются совершенно случайно. Наблюдаемые законы, скажут физики, были бы менее просты, если бы скорости регулировались простым элементарным законом, если бы молекулы были, как говорят, организованы, если бы они подчинялись какому-нибудь распорядку. Именно благодаря господству случая, т. е. именно благодаря нашему невежеству, мы имеем возможность делать заключения. И далее, если слово «случай» является простым синонимом нашего невежества, то что же это значит? Надо ли это толковать, примерно, следующим образом.

«Вы желаете, чтобы я предсказал вам явления, которые должны произойти? Если бы я имел несчастье знать законы этих явлений, то я мог бы этого достигнуть разве только путем непроходимого леса вычислений, и я должен был бы отказаться от ответа. Но так как, к счастью, я этих законов не знаю, то я вам сейчас отвечу, и, что наиболее странно, мой ответ будет верен».

Ясно, что случайность должна быть чем-то иным, не одним лишь названием, которое мы даем собственному невежеству. Ясно, что между явлениями, истинные причины которых нам неизвестны, мы должны были бы различать случайные явления, относительно которых вероятностные расчеты дадут нам некоторые предварительные сведения, и явления, которые не являются случайными и относительно которых мы не можем сказать ничего, пока не узнаем законов, которые ими управляют.

Что касается явлений случайных, то ясно, что сведения, которые нам дает о них теория вероятностей, не перестанут быть справедливыми в тот день, когда мы получим об этих явлениях больше сведений.

Директор общества страхования жизни не знает, когда умрет каждое из застрахованных у него лиц, но он вычисляет на основании теории вероятностей и по закону больших чисел и при этом не ошибается, поскольку он делит дивиденды между акционерами. Эти дивиденды не исчезли бы даже и в том случае, если бы какой-либо врач, столь же прозорливый, сколь и нескромный, после подписания полисов осведомлял бы директора о шансах на жизнь застрахованных лиц. Такой врач рассеял бы неосведомленность директора, но он не оказал бы влияния на дивиденды, которые, очевидно, вовсе не являются продуктами этой неосведомленности.

II

Чтобы найти лучшие определения случайности, нам необходимо исследовать некоторые из тех фактов, которые обыкновенно принято считать случайными и к которым, по-видимому, применяется теория вероятностей.

Первым примером, на котором мы остановимся, будет вопрос о неустойчивом равновесии. Если конус стоит на вершине, то мы знаем, что он опрокинется, но мы не знаем, в какую сторону. Нам представляется, что это полностью зависит от случая. Если бы конус был совершенно симметричен, если бы ось его была совершенно вертикальна, если бы он не был подвержен действию никакой силы, кроме тяжести, то он не упал бы вовсе. Но малейший изъян в симметрии заставил бы его слегка наклониться в ту или иную сторону; наклонившись же, хотя бы и весьма незначительно, он упадет в сторону наклона окончательно. Если бы даже симметрия была совершенна, то самого легкого дрожания, легчайшего дуновения ветерка было бы достаточно, чтобы наклонить его на несколько секунд дуги; и этим не только было бы решено его падение, было бы предопределено и направление этого падения, которое совпало бы с направлением первоначального наклона. Таким образом, совершенно ничтожная причина, ускользающая от нас по своей малости, вызывает значительное действие, которого мы не можем предусмотреть, и тогда мы говорим, что это явление есть результат случая.

Если бы мы знали точно законы природы и состояние Вселенной в начальный момент, то мы могли бы точно предсказать состояние Вселенной в любой последующий момент. Но даже и в том случае, если бы законы природы не представляли собой никакой тайны, мы могли бы знать первоначальное состояние только приближенно. Если это нам позволяет предвидеть дальнейшее ее состояние с тем же приближением, то это все, что нам нужно. Мы говорим, что явление было предвидено, что оно управляется законами. Но дело не всегда обстоит так; иногда небольшая разница в первоначальном состоянии вызывает большое различие в окончательном явлении. Небольшая погрешность в первом вызвала бы огромную ошибку в последнем. Предсказание становится невозможным, мы имеем перед собой явление случайное.

Второй пример, на котором мы остановимся, будет в большой мере аналогичен первому; мы заимствуем его из метеорологии. Почему метеорологам так трудно предсказать погоду сколько-нибудь достоверно? Почему выпадение дождя, наступление грозы всегда представляется нам делом случая, так что многие люди находят естественным молиться о ниспослании дождя или хорошей погоды, те самые люди, которые считали бы смешным испрашивать молитвой затмение. Мы видим, что большие пертурбации бывают обыкновенно в тех местах, где атмосфера находится в состоянии неустойчивого равновесия. Метеорологи часто хорошо видят, что равновесие неустойчиво, что образуется циклон, но где именно, они не в состоянии сказать. Лишняя десятая градуса в какой-либо точке — и циклон разражается здесь, а не там; он бушует над странами, которые были бы пощажены, если бы не эта десятая. Если бы мы могли знать эту десятую градуса, то мы могли бы это предсказать; но сеть наблюдений недостаточно густа и сами наблюдения недостаточно точны, а именно поэтому нам и кажется, что все обусловлено случаем. Здесь мы вновь находим то же несоответствие между мельчайшей, неощутимой наблюдателем причиной и значительным эффектом, вызывающим иногда страшные последствия.

Перейдем к другому примеру — к распределению малых планет по зодиаку. Их начальные долготы могли быть какие угодно, но их средние движения были различны, и они двигались уже так долго, что в настоящее время можно спокойно сказать, что они распределены вдоль зодиака совершенно случайно. Незначительные разности в их начальных расстояниях от Солнца и, что сводится к тому же, в их среднем движении в конце концов дали огромное различие в долготах, которые они теперь имеют. В самом деле, разница в одну тысячную долю секунды их суточного пути дает уже секунду за три года, градус — приблизительно за 10 000 лет и целую окружность — за три-четыре миллиона лет; но что это составляет по сравнению со временем, которое протекло с тем пор, как малые планеты отделились от туманности Лапласа! Перед нами опять ничтожная причина и большой эффект или, иначе, небольшие разности в причине и большие — в действии.

Игра в рулетку отличается от этого примера меньше, чем это может казаться на первый взгляд. Представим себе иглу, которая вращается на шпиле в центре циферблата, разделенного на сто секторов, попеременно красных и черных. Если игла останавливается на красном секторе, то игра выиграна, в противном случае — проиграна. Все, очевидно, зависит от толчка, который мы первоначально сообщаем игле. Игла сделает, скажем, 10 или 20 оборотов, но остановится она раньше или позже, смотря по тому, толкнул ли я ее сильнее или слабее. Однако достаточно, чтобы толчок изменился на тысячную или на две тысячных доли, и игла остановится на черном или соответственно на следующем красном секторе. Это — различия, которые не могут быть восприняты мускульным чувством, которые ускользают даже и от более тонких инструментов. Я лишен, следовательно, возможности предвидеть, что произойдет с иглой, которую я только что толкнул, а потому мое сердце бьется, и я с нетерпением ожидаю, что мне даст случай. Разность в причине совершенно неощутима, разность в результате имеет для меня чрезвычайно большую важность, потому что речь идет о всей моей ставке.

III

Позвольте мне теперь сделать отступление, несколько странное для моей темы. Один философ несколько лет тому назад сказал, что будущее определено прошлым, но что прошлое не определено будущим. Иными словами: зная настоящее, мы могли бы сделать заключение относительно будущего, но не относительно прошлого, ибо, сказал бы он, определенная причина всегда должна привести к одному результату, но один и тот же результат может быть вызван множеством различных причин. Ясно, что ни один ученый не подпишется под этим выводом. Законы природы связывают предшествующее с последующим таким образом, что предшествующее определено последующим так же, как последующее предшествующим. Но в чем же может заключаться источник ошибки, допущенной этим философом? Как известно, в силу принципа Карно физические явления необратимы, и мир стремится к полному однообразию. Когда два тела различной температуры находятся в соприкосновении, то более теплое уступает тепло холодному; мы можем, таким образом, предвидеть, что температура сравняется. Но когда температура уже сравняется, и нас спросят о том, что было раньше, что сможем мы ответить? Мы скажем, конечно, что одно тело было более нагрето, а другое менее, но мы не сумеем угадать, какое из них было прежде более теплым.

Между тем в действительности температуры никогда не сделаются совершенно равными. Разность температур стремится к нулю лишь асимптотически, и наступает момент, когда наши термометры уже неспособны ее распознать. Но если бы мы имели термометры в тысячу раз, в сто тысяч раз более чувствительные, то мы убедились бы, что есть еще небольшая разница и что одно из двух тел осталось более теплым, чем другое, и тогда мы могли бы утверждать, что именно это тело было некогда более теплым.

Мы видим здесь, в противоположность предыдущим примерам, большие различия в причинах и ничтожные — в результатах. Фламмарион придумал както наблюдателя, который удаляется от Земли со скоростью большей, чем скорость света. Для него время изменило бы знак, история потекла бы вспять, и Ватерлоо предшествовало бы Аустерлицу. Ясно, что для такого рода наблюдателя результаты и причины заменили бы друг друга, неустойчивое равновесие не было бы исключением, вследствие общей необратимости явлений ему казалось бы, что все исходит из какого-то хаоса в неустойчивом равновесии. Вся природа казалась бы ему предоставленной случаю.

IV

Мы обратимся теперь к другим примерам, в которых мы увидим совершенно другие свойства. Начнем с кинетической теории газов. Как должны мы представлять себе сосуд, наполненный газом? Бесчисленные молекулы, несущиеся с большими скоростями, бороздят сосуд во всех направлениях. В любой момент они ударяются о стенки и друг о друга, и эти столкновения происходят в самых разнообразных условиях. Здесь нас больше всего поражает не столько малость причин, сколько их сложность. И все-таки первоначальный элемент находится здесь и играет важную роль. Если бы молекула уклонилась налево или направо от своей траектории на очень малую величину, сравнимую с радиусом действия молекул газа, то она избежала бы толчка или таковой произошел бы при совершенно иных условиях, а это могло бы изменить на 90° или 180° направление скорости после толчка. И это еще не все. Как мы видели, достаточно отклонить молекулу до толчка на бесконечно малое расстояние, чтобы она после толчка отклонилась на конечное расстояние. Поэтому, если бы молекула подверглась двум последовательным столкновениям, то ей достаточно было бы сообщить до первого толчка бесконечно малое уклонение второго порядка, чтобы мы получили после первого столкновения бесконечно малое уклонение первого порядка, а после второго — конечное. Между тем молекула испытывает не только два столкновения, а весьма большое число их в секунду. Поэтому, если первый толчок умножает отклонение на весьма большое число A, то после n столкновений оно будет умножено на A^n. Оно сделается, следовательно, весьма большим не только потому, что A очень велико, т. е. потому, что малые причины производят большие следствия, но и потому, что показатель n велик, т. е. потому, что столкновения весьма многочисленны и причины очень сложны.

Обратимся теперь к другому примеру. Почему нам кажется во время ливня, что капли дождя распределены совершенно случайно? Это опять-таки происходит оттого, что причины, которыми обусловливается их образование, очень сложны. Ионы были распространены в атмосфере задолго до ливня, задолго до него они были подвержены постоянно меняющимся токам воздуха, они были увлечены в вихри весьма малых размеров, так что окончательное распределение их не находилось уже ни в каком соответствии с начальным. Затем температура внезапно понижается, туман сгущается, и каждый из этих ионов становится центром капли дождя. Чтобы установить, каково будет распределение капель и сколько их упадет на каждый камень мостовой, недостаточно было бы узнать начальное положение ионов.

Необходимо было бы учесть действие тысячи слабых и прихотливых воздушных течений.

Совершенно то же имеет место, когда пылинки взвешены в воде. Сосуд изборожден токами, законы которых нам неизвестны. Мы знаем только, что они очень сложны; по истечении некоторого времени пылинки будут распределены случайно, т. е. равномерно по всему сосуду: и это обусловливается именно сложностью потоков. Если бы они подчинялись простому закону, если бы, например, сосуд был круглый и токи описывали круги вокруг оси сосуда, то дело обстояло бы иначе, ибо каждая пылинка оставалась бы на той же высоте и на том же расстоянии от оси.

Мы пришли бы к тому же результату, если бы мы рассматривали смесь двух жидкостей или смесь двух мелко истолченных порошков. Чтобы привести еще грубый пример, скажем, что приблизительно то же самое происходит, когда мы тасуем игральные карты. При каждой перетасовке карты подвергаются перемещению (аналогичному тому, которое мы изучаем в теории перестановок). Какое же расположение карт получится в результате? Вероятность того, что получится некоторое определенное расположение (например, то, при котором на n-м месте оказывается карта, занимавшая до перетасовки $\varphi(n)$-е место), зависит от привычки игрока. Но если игрок тасует карты довольно долго, то образуется множество последовательных перестановок, и окончательный порядок уже зависит исключительно от случая. Я хочу сказать, что все возможные порядки будут равновероятны. Это обусловлено большим числом последовательных перестановок, т. е. сложностью всего явления.

Еще два слова о теории ошибок. Здесь причины особенно сложны и особенно многообразны. Сколько ловушек должен избежать наблюдатель, располагая даже лучшими инструментами. Он должен приучить себя замечать наиболее опасные и избегать их. Их называют систематическими ошибками. Но даже когда он их устранил, — допуская, что это ему удалось, — остается много мелких ошибок, которые, накапливаясь, могут оказаться опасными. Таким образом, возникают случайные ошибки; мы приписываем их случаю, потому что причины их слишком сложны и многочисленны; и здесь мы имеем только мелкие причины, каждая из которых производит незначительный эффект, но вследствие их взаимодействия и вследствие значительного их числа результаты становятся серьезными.

V

Можно стать еще на третью точку зрения, которая имеет меньшее значение, чем предыдущие, и на которой я буду менее настаивать. Когда хотят предсказать какой-либо факт и исследуют подготавливающие его обстоятельства, стараются получить сведения о предшествующем состоянии. Но этого ведь нельзя сделать по отношению ко всей Вселенной. Мы ограничиваемся поэтому местами, соседними с пунктом, где наше явление должно произойти, и тем, что, по-видимому, имеет связь с этим явлением. Выяснение обстоятельств не может быть полным, и нужно уметь сделать выбор. Но при таких условиях легко может случиться, что мы оставили в стороне такого рода факты, которые на первый взгляд казались совершенно чуждыми предусматриваемому явлению, которым нам даже в голову не приходило приписать какое-либо влияние на это явление и которые тем не менее, помимо нашего предвидения, играют здесь важную роль.

Человек проходит по улице, отправляясь по своим делам. Лицо, которое было бы в курсе этих дел, могло бы сказать, почему он прошел в таком-то часу по такой-то улице. На крыше работает кровельщик; подрядчик, который его нанял, вероятно, в известной мере мог бы предвидеть, что он там делает. Но прохожий, о котором была речь выше, не думает вовсе о кровельщике, как и кровельщик не думает о прохожем. Они принадлежат точно двум совершенно отдельным мирам; и тем не менее кровельщик уронил черепицу, которая убила прохожего. Мы, не колеблясь, скажем, что это дело случая.

Наши слабые силы не дают нам возможности охватить всей Вселенной, и это заставляет нас разрезать ее на слои. Мы стараемся выполнить это наименее искусственно, и тем не менее иногда оказывается, что два различных слоя влияют один на другой.

Результаты такого взаимодействия мы склонны приписывать случаю.

Есть ли это особая третья точка зрения на случайность? Не всегда; в большей части случаев мы здесь возвращаемся к первой или ко второй точке зрения. Если два мира, вообще совершенно отличные один от другого, оказывают иногда друг на друга влияние, то законы этого взаимодействия неизбежно должны быть весьма сложны; а с другой стороны, достаточно весьма слабого изменения в начальных условиях, и взаимодействие между этими двумя мирами не имело бы места. Как мало было бы нужно, чтобы прохожий прошел на одну секунду раньше или чтобы кровельщик уронил свою черепицу на одну секунду позже.

VI

Все изложенное до сих пор еще не объясняет, почему случай повинуется законам. Достаточно ли, чтобы причины были незначительны или чтобы они были сложны, для того чтобы мы могли уже предвидеть если не результаты каждого случая, то по крайней мере средние результаты. Чтобы ответить на этот вопрос, лучше всего обратиться к одному из приведенных уже выше примеров.

Я начну с рулетки. Я сказал, что точка, на которой остановится игла, будет зависеть от начального толчка, который ей дан. Какова вероятность того, что этот толчок будет иметь ту или другую величину? Я об этом ничего не знаю, но мне трудно не допустить, что эта вероятность выражается непрерывной аналитической функцией. Тогда вероятность того, что толчок содержится между a и $a+\varepsilon$, будет практически такая же, как и вероятность того, что он заключен между $a+\varepsilon$ и $a+2\varepsilon$, лишь бы ε было очень мало. Это общее свойство всех аналитических функций: небольшие изменения функций будут пропорциональны небольшим изменениям переменных.

Но, как мы предположили, весьма малого изменения силы толчка будет достаточно для изменения цвета сектора, перед которым в конце концов остановится игла. При интервале от a до $a+\varepsilon$ это будет красный сектор, при интервале от $a+\varepsilon$ до $a+2\varepsilon$

это будет черный сектор. Вероятность каждого красного сектора такая же, как и вероятность следующего за ним черного, и общая вероятность красного та же, что и общая вероятность черного.

Данной в этой задаче является аналитическая функция, которая выражает вероятность определенного начального толчка. Но теорема остается справедливой, каково бы ни было это данное, так как она зависит от свойства, общего всем аналитическим функциям. Отсюда следует, что в конечном результате данное нам вовсе не нужно.

То, что мы сказали о рулетке, применяется также к примеру малых планет. Мы можем смотреть на зодиак как на громадную рулетку, по которой Творец разбросал большое число шариков, сообщив им различные начальные скорости, меняющиеся согласно закону, вообще говоря, произвольному. В настоящее время они распределены равномерно, независимо от этого закона, по той же причине, что и в предыдущем случае. Мы видим также, почему явления повинуются законам случая, когда незначительные разницы в причинах способны вызвать большие различия в результатах. Вероятности этих малых разностей мы можем в этом случае считать пропорциональными самим разностям именно потому, что эти разности очень малы, и незначительные приращения непрерывной функции пропорциональны приращениям переменной.

Перейдем теперь к совершенно другому примеру, где главную роль играет сложность причин. Я предположу, что игрок тасует колоду карт. При каждой перетасовке он меняет порядок карт и может это сделать несколькими способами. Предположим для простоты, что мы имеем только три карты. Карты, которые вначале были расположены в порядке 1 2 3, могут после перетасовки оказаться в одном из шести расположений:

$$123,\ 231,\ 312,\ 321,\ 132,\ 213.$$

Каждая из этих шести гипотез возможна и соответственно имеет вероятность

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6.$$

Сумма этих шести чисел равна единице, но это и все, что мы о них знаем. Эти шесть вероятностей зависят от привычек игрока, которых мы не знаем.

При второй тасовке повторится то же и притом в тех же условиях. Я хочу этим сказать, что p_4 попрежнему выражает возможность того, что три карты, которые после n-го взмаха были расположены в порядке 123, расположатся после $n+1$-го взмаха в порядке 321; и это остается справедливым, каково бы ни было число n, ибо привычки игрока, его манера тасовать остаются теми же.

Но если число взмахов очень велико, то карты, которые до первого взмаха были расположены в порядке 123, могут после последнего взмаха иметь любое из расположений

$$123,\quad 231,\quad 312,\quad 321,\quad 132,\quad 213,$$

и вероятность этих шести гипотез в доступных нам пределах будет одна и та же, т. е. 1/6; и это будет справедливо, каковы бы ни были числа p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, которых мы не знаем. Большое число взмахов, т. е. сложность причин, вызвало это единообразие.

Это без изменения относится и к тому случаю, когда число карт больше трех, но даже и при трех картах доказательство было бы сложно. Я ограничусь тем, что проведу его для случая только двух карт. Тогда мы имеем лишь две гипотезы

$$12,\quad 21$$

с соответственными вероятностями p_1 и $p_2 = 1 - p_1$. Предположим теперь, что сделано n взмахов и что я выигрываю один франк, если карты оказываются в конце концов в первоначальном порядке, и столько же теряю, если они окажутся расположенными в обратном порядке. В таком случае мое математическое ожидание составит

$$(p_1 - p_2)^n.$$

Разность $p_1 - p_2$, конечно, меньше единицы. Вследствие этого, если n слишком велико, то мое ожидание сведется к нулю. Мы не имеем нужды знать p_1 и p_2, мы и без того знаем, что игра должна кончиться вничью.

Есть, однако, одно исключение — именно, когда одно из чисел p_1 и p_2 равно единице, а другое нулю.

В этом случае дело будет обстоять иначе, потому что начальные гипотезы слишком просты.

Изложенное относится не только к смеси карт, но и ко всяким смесям, в том числе и к смесям порошков и жидкостей; оно относится и к смесям газовых молекул в кинетической теории газов. Чтобы перейти от изложенных примеров к этой теории, представим себе газ, молекулы которого не могут взаимно сталкиваться, но могут отклоняться только при ударах о стенки сосуда, в который они заключены. Если сосуд имеет достаточно сложную форму, то распределение молекул и скоростей не замедлит стать однородным; этого, однако, не будет, если сосуд имеет форму шара или прямоугольного параллелепипеда. Почему же? Потому что в первом случае расстояние центра от каждой траектории остается постоянным. Во втором случае постоянной остается абсолютная величина угла, составляемого каждой траекторией с гранями параллелепипеда.

Мы видим также, что нужно понимать под очень простыми условиями. Это те условия, которые сохраняют нечто неизменное, которые допускают инварианты. Не слишком ли просты дифференциальные уравнения задачи, чтобы мы могли применить к ней законы случая? На первый взгляд вопрос кажется лишенным точного смысла, но теперь мы понимаем его содержание. Эти дифференциальные уравнения слишком просты, если они сохраняют что-то постоянным, если они допускают общий интеграл. Если что-то из начальных условий остается неизменным, то ясно, что конечное состояние не сможет быть независимым от начального.

Обратимся теперь к теории ошибок. Чем обусловливаются случайные ошибки, мы не знаем, и именно потому, что мы этого не знаем, мы уверены, что они будут подчиняться закону Гаусса. Таков парадокс. Он объясняется приблизительно так же, как и предыдущий случай. Нам нужно знать только одно: что ошибки очень многочисленны, что они очень малы, что каждая из них может столь же легко оказаться отрицательной, как и положительной. Какова кривая вероятностей каждой из них, мы этого не знаем; мы только предполагаем, что это симметричная кривая. Тогда мы можем доказать, что окончательная ошибка будет следовать закону Гаусса, и этот окончательный закон не зависит от частных законов, которые остались для нас неизвестными. Здесь опять-таки простота результата обусловливается сложностью данных.

VII

Однако мы еще не покончили с парадоксами. Выше я воспользовался выдумкой Фламмариона о человеке, который движется быстрее света и для которого время вследствие этого меняет знак. Я сказал, что ему все явления представлялись бы случайными. С известной точки зрения это справедливо; и все эти явления в некоторый определенный момент не были бы распределены согласно законам случая потому, что они в действительности были бы распределены так же, как и для нас, на глазах которых они разматываются гармонично, не возникая из какого-то первичного хаоса, а мы отнюдь не считаем их результатом случая. Что же это значит? Люмену, человеку Фламмариона, кажется, что незначительные причины приводят к большим эффектам. Почему же явления не протекают для него так же, как для нас, когда мы полагаем, что видим большие результаты, обусловливаемые малыми причинами. Нельзя ли и к его случаю применить то же самое рассуждение?

Возвратимся же к этому рассуждению. Почему в тех случаях, когда незначительные изменения причин вызывают большую разницу в результатах, последние распределяются по законам случайностей? Допустим, что разница в один миллиметр в причине вызывает разницу в один километр в результате. Если я выигрываю всякий раз, когда результат будет соответствовать километру, занумерованному четным числом, то вероятность выигрыша составит половину. Почему же так? Потому, что для этого необходимо, чтобы причина соответствовала миллиметру с четным номером. Между тем, по всей видимости, вероятность, что причина будет меняться в известных пределах, пропорциональна расстоянию между этими пределами, если только последнее очень мало. Не делая этого допущения, мне было бы совершенно невозможно выражать вероятность непрерывной функцией.

Что же произойдет теперь, когда большие причины будут вызывать мелкие результаты. В этом случае мы не приписывали бы явления случаю, между тем как Люмен считал бы их случайными. При разнице в километр в причине мы имели бы разницу в один миллиметр в результате. Будет ли и теперь пропорциональна n вероятность того, что причина заключается в интервале длиною n километров? Мы не имеем никаких оснований это предполагать, ибо расстояние в n километров весьма велико. Но вероятность того, что следствие останется в пределах n миллиметров, будет совершенно та же; она не будет потому пропорциональна числу n, несмотря на то, что расстояние в n миллиметров очень мало. В этом случае закон вероятности результатов невозможно, следовательно, представить непрерывной кривой. Заметим, однако, что в аналитическом смысле слова эта кривая может оставаться непрерывной, т. е. *бесконечно малым* изменениям абсциссы соответствовали бы *бесконечно малые* изменения ординаты. Но практически она не будет непрерывной, ибо *очень малым* изменениям абсциссы не будут соответствовать *очень малые* изменения ординаты. Я хочу сказать, что нарисовать такую кривую карандашом было бы невозможно.

Что же мы должны отсюда заключить? Люмен не имеет права утверждать, что вероятность причины (его причины, которая для нас является результатом) непременно должна выражаться непрерывной функцией. Но в таком случае почему же имеем на это право мы? Потому, что то состояние неустойчивого равновесия, которое мы выше назвали начальным, само представляет собой конечный момент долгой предшествующей истории. В продолжение этой истории сложные причины действовали и действовали долго: именно они содействовали тому, что образовалось смешение элементов, они стремились придать всему однородный характер, по крайней мере на небольшой части пространства; они закругляли углы, нивелировали горы, заполняли долины: как бы капризна и неправильна ни была первоначальная кривая, которая была им дана, они затратили столько труда на то, чтобы сделать ее правильной, что мы в конце концов получим непрерывную кривую. Вот почему мы можем совершенно спокойно допустить ее непрерывность.

Однако Люмен не имел бы права сделать такое заключение; ему сложные причины не представлялись бы факторами правильности и нивелирования; напротив, с его точки зрения они вели бы только к дифференциации и к неравенству; в его глазах из первоначального хаоса разрастался бы мир, все более и более разнородный; изменения, которые он наблюдал бы, были бы для него неожиданными; предусмотреть их он бы не мог; ему казалось бы, что они обусловлены бог весть каким капризом, но это был бы каприз, совершенно не похожий на нашу случайность; он был бы противоположен всякой закономерности, между тем как наши случайности имеют свои законы. Полное выяснение всего этого требовало бы еще более продолжительного изложения, которое, быть может, содействовало бы лучшему пониманию необратимости мироздания.

VIII

Мы старались определить, что такое случайность. Теперь будет уместно спросить: определив таким образом случайность, можем ли мы утверждать, что она имеет объективный характер?

Можно задать себе этот вопрос. Я говорил о причинах, весьма малых и весьма сложных, но не будет ли то, что кажется малым одному, весьма большим для другого, и не будет ли то, что представляется весьма сложным одному, казаться простым другому. Я уже отчасти ответил на этот вопрос, потому что я выше точно указал, в каком случае дифференциальные уравнения становятся слишком простыми, чтобы законы случая оставались применимыми. Но будет полезно вдуматься несколько глубже в этот вопрос, так как возможны и другие точки зрения.

Что означает слово «весьма малый»? Чтобы уяснить его себе, нужно обратиться к тому, что мы сказали выше. Разница весьма мала, интервал весьма мал, если в пределах этого интервала вероятность остается приблизительно постоянной. Но почему же эта вероятность может считаться постоянной в таком небольшом интервале? Именно потому, что мы допускаем, что закон вероятности выражается непрерывной кривой и притом непрерывной не только в аналитическом смысле этого слова, но и практически, как я это старался выяснить выше.

Что же дает нам право делать такое предположение? Как было сказано выше, это происходит оттого, что с начала веков имеются сложные причины, неизменно действующие в одном и том же смысле и постоянно направляющие мир к однородному состоянию, возврат от которого для него невозможен. Эти именно причины мало-помалу отбили выступы и заполнили впадины, и по этой-то причине наши кривые вероятности имеют лишь слабые колебания. Через миллиарды миллиардов веков мы сделаем еще шаг вперед по направлению к единообразию, и эти колебания сделаются еще в десять раз медленнее. Радиус средней кривизны нашей кривой сделается в десять раз больше. И тогда длина, которая сейчас не представляется для нас очень малой, так как на нашей кривой дуга такой длины не может считаться прямолинейной, будет в ту эпоху признана весьма малой, ибо кривизна уменьшится в десять раз и дуга такой длины может быть в доступных нам пределах уподоблена прямой.

Таким образом, понятие о весьма малом все-таки остается относительным; но относительным оно оказывается не по отношению к тому или иному лицу, а по отношению к настоящему состоянию мира. Оно изменит смысл, когда мир станет более единообразным, когда все еще больше смешается, но тогда, несомненно, люди уже не смогут больше жить и должны будут уступить место другим существам, более крупным или более мелким — могу ли я это предсказать? Таким образом, наш критерий остается справедливым для всех людей, и в этом смысле он должен быть признан объективным.

С другой стороны, что должно означать слово «очень сложный»? Я уже дал ответ на этот вопрос и повторил его в начале этой главы. Но возможны и другие толкования. Как мы сказали, сложные причины вызывают все более и более тесное смешение; но сколько же нужно времени, чтобы эта смесь нас удовлетворила? В какой момент мы признаем достаточным накопление сложных элементов? Когда мы признаем достаточной тасовку карт? Если мы смешиваем два порошка — белый и голубой, то наступает момент, когда окраска смеси представляется нам однородной. Это обусловливается, однако, несовершенством наших чувств. Смесь может оказаться уже однородной для дальнозоркого, который должен рассматривать ее издалека, но она не будет таковой для близорукого. Если она станет уже однородной для всякого глаза, то можно будет эту границу отодвинуть еще далее, если мы будем пользоваться оптическими инструментами. Нет, конечно, никаких шансов на то, чтобы какой-нибудь человек мог когда-либо различать все бесконечное многообразие, которое скрывается под видимой однородностью газа, если только верна кинетическая теория. И все же, если принять идеи Гуи о броуновском движении, то микроскоп, по-видимому, находится уже на той ступени, что может обнаружить нам такого рода вещи.

Этот критерий таким же образом является относительным, как и первый; и если он сохраняет характер объективности, то это происходит оттого, что люди одарены приблизительно одними и теми же чувствами, что силы наших инструментов ограничены и что мы пользуемся ими лишь в виде исключения.

IX

С тем же обстоятельством мы встречаемся в гуманитарных науках и, в частности, в истории. Историк должен делать выбор между событиями эпохи, которую он изучает. Он рассказывает только о тех, которые ему кажутся более важными. Он довольствуется поэтому тем, что изложит, скажем, наиболее значительные события XVI века и также наиболее важные факты, относящиеся к XVII веку. Если первых оказывается достаточно, чтобы объяснить вторые, то говорят, что последние согласуются с законами истории. Но если великое событие XVII столетия имеет своей причиной незначительный факт XVI столетия, о котором не сообщает ни один историк и который все оставили в пренебрежении, то говорят, что это событие обусловливается случаем, и слово это имеет, таким образом, то же значение, что в физических науках. Оно означает, что незначительные причины произвели большие действия.

Что может быть в большей мере явлением случайности, как не рождение великого человека! Только случай свел две клетки различных полов, которые содержали каждая со своей стороны те элементы, взаимодействие которых было необходимо для создания гения. Все согласятся, что эти элементы вообще должны быть редки, а такое совпадение должно было быть еще реже. Как мало было бы нужно, чтобы уклонить с пути сперматозоид, который его нес, достаточно было бы отклонить его на десятую долю миллиметра, и Наполеон не родился бы, и судьбы целого материка изменились бы. Никакой другой пример не может лучше выяснить истинных признаков случайности.

Еще несколько слов относительно парадоксов, к которым привело применение теории вероятностей в гуманитарных науках. Доказывали, что ни одна Палата не должна была бы включать ни одного оппозиционного депутата, или по крайней мере это должно было бы быть явлением настолько редким, что за это можно было бы спокойно биться об заклад, ставя при этом миллион против одного су. Кондорсе пытался выяснить, сколько должно быть присяжных, для того чтобы судебная ошибка была практически невозможна. Если мы, однако, вздумали бы пользоваться результатами этого вычисления, то нас, несомненно, ожидало бы такое же разочарование, как и в случае, если бы мы держали пари, основываясь на вычислениях, по которым оппозиция не должна была бы иметь ни одного представителя в Палате.

Законы случая не применяются к этим вопросам. Если суд не всегда руководствуется справедливыми доводами, то он, во всяком случае, пользуется методами Бридуа [1]) меньше, чем это можно думать; может быть, это дурно, ибо тогда система Кондорсе избавила бы нас от судебных ошибок.

Что же это значит? Мы пытались приписать случаю факты этого рода, потому что причины их весьма

---

[1]) Бридуа — комическая фигура судьи в романе Ф. Рабле «Гаргантюа и Пантагрюэль», выносившего приговоры с помощью игральных костей. — *Примеч. ред.*

темны. Но здесь нет настоящей случайности. Причины остаются нам, правда, неизвестными; верно и то, что они сложны; но они не в достаточной мере сложны, ибо они нечто сохраняют неизменным. Мы видели, что этим именно и отличаются причины «слишком простые». Когда люди сталкиваются, они не предоставлены уже случаю независимо один от другого, они воздействуют друг на друга. Многочисленные причины оказывают свое влияние, они толкают людей, увлекают их вправо и влево; но есть нечто, чего они не в состоянии разрушить: это их привычки панургова стада [1]). Именно это и сохраняется.

X

Применение теории вероятностей к точным наукам также сопряжено с большими трудностями. Почему десятичные знаки таблицы логарифмов или числа π распределены по законам случайности? Я занимался исследованием этого вопроса в другом месте — в применении к логарифмам. Ясно, что небольшая разница в аргументе должна дать незначительную разницу в логарифме, но это может выразиться большой разницей в шестом или седьмом десятичном знаке. Мы приходим, таким образом, к тому же критерию. Но что касается числа π, то здесь представляется затруднение, о котором я не могу сказать ничего путного.

Пришлось бы разобрать много других вопросов, если бы я хотел к ним приступить, не разрешив того, который я себе специально поставил. Когда мы обнаруживаем простой результат, например, когда мы получаем круглое число, мы говорим, что такого рода результат не может быть делом случая, и мы ищем для его объяснения причину не случайную. И действительно, вероятность того, чтобы из десяти тысяч чисел случай привел нас к круглому числу, скажем, именно к числу 10 000, очень незначительна; она составляет один шанс из десяти тысяч. Но есть также один шанс из десяти тысяч, что мы пришли бы к любому из остальных чисел. И все-таки такой резуль-

---

[1]) Имеется в виду эпизод из романа Ф. Рабле «Гаргантюа и Пантагрюэль», в котором Панург бросил с корабля в море барана, и за ним устремилось за борт все стадо. — *Примеч. ред.*

тат нас не удивит, и мы спокойно припишем его случаю. И это только потому, что он менее бросается в глаза.

В чем же тут дело? Есть ли это простая иллюзия с нашей стороны или бывают случаи, в которых эта точка зрения законна? Нужно думать, что это так, ибо иначе никакая наука не была бы возможна. Что делаем мы, когда хотим проконтролировать какую-либо гипотезу? Мы не можем проверить все ее выводы, потому что таковых имеется бесчисленное множество. Мы ограничиваемся тем, что выверяем некоторые и в благоприятном случае объявляем гипотезу установленной, ибо такое число совпадений не могло быть делом случая. По существу это то же самое рассуждение.

Я не имею возможности здесь вполне его оправдать, так как это потребовало бы слишком много времени, но я могу сказать по крайней мере следующее. Мы стоим перед двумя гипотезами: либо здесь действует простая причина, либо же совокупность сложных причин, которую мы называем случаем. Мы считаем естественным допустить, что первая вызывает простой результат; поэтому, когда мы констатируем простой результат, например круглое число, нам представляется гораздо более правдоподобным приписать его простой причине, которая почти наверное должна была к нему привести, чем случайности, которая могла его дать только с вероятностью один на десять тысяч. Иначе будет обстоять дело, когда мы обнаружим не простой результат. Случай, конечно, тоже приведет к нему с вероятностью один на десять тысяч, но зато простая причина не имеет шансов его воспроизвести.

Книга II

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ РАССУЖДЕНИЕ

Глава I

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА

I

Совершенно невозможно представить себе пространство пустым. Все наши усилия представить себе чистое пространство, из которого были бы исключены изменчивые образы материальных предметов, могут заканчиваться только тем, что мы составляем себе, например, представление, в котором сильно окрашенные поверхности заменены линиями со слабой окраской; и идти в этом направлении до конца нет возможности без того, чтобы все не уничтожалось, не свелось на нет. Отсюда и возникает неустранимая относительность пространства.

Если кто говорит об абсолютном пространстве, то он употребляет слово, лишенное смысла. Эту истину высказывали уже давно все, кто размышлял по этому вопросу, но ее слишком часто забывают и по сей день.

Я нахожусь в определенной точке Парижа, скажем на площади Пантеона, и говорю: «я возвращусь сюда завтра». Если меня спросить: «разумеете ли вы, что возвратитесь в ту же точку пространства», то я буду склонен ответить: «да!»; и все же я буду неправ, ибо в течение этого времени Земля будет двигаться, унося с собой и площадь Пантеона, которая пробежит, таким образом, свыше двух миллионов километров. Если же я пожелал бы учесть это обстоятельство и выразиться точнее, то это все-таки ни к чему бы не привело; в самом деле, эти два миллиона километров Земля пробежала относительно Солнца; но Солнце перемещается относительно Млечного Пути, а Млечный Путь в свою очередь, несомненно, имеет движение, скорости которого мы не можем знать. Таким образом, мы совершенно не знаем и не будем знать никогда, на какое собственно расстояние перемещается площадь Пантеона в течение суток. Все, что я хотел сказать, сводится, таким образом к следующему: «завтра я снова увижу купол и фасад Пантеона», и если бы не было Пантеона, то моя фраза потеряла бы всякий смысл — пространство свелось бы на нет.

Это одна из наиболее тривиальных форм идеи относительности пространства; но есть и другая точка зрения, которую особенно отстаивал Дельбёф. Вообразим себе, что за одну ночь все размеры Вселенной возросли в тысячу раз. Мир остался бы подобен самому себе, если разуметь под подобием то, что указано в третьей книге «Геометрии». Все сведется к тому, что предмет, имевший метр в длину, будет измеряться километром; предмет, имевший миллиметр, возрастет до метра. Постель, на которой я лежал, и само мое тело возрастут в одной и той же пропорции. Что же почувствую я на следующее утро, проснувшись после такого поразительного превращения? Я попросту ничего не замечу. Самые точные измерения не будут в состоянии ни в малейшей мере обнаружить этот поразительный переворот, ибо метры, которыми я буду пользоваться, изменятся в совершенно том же отношении, что и предметы, которые я буду измерять. В действительности переворот существует только для тех, которые рассуждают так, как будто бы пространство было абсолютным. Если бы я стал на минуту рассуждать, как они, то лишь для того, чтобы обнаружить, что их точка зрения необходимо содержит противоречие. В действительности было бы лучше сказать, что ввиду относительности пространства не произошло, собственно говоря, ничего, и именно потому мы ничего не заметили.

Можем ли мы, таким образом, сказать, что мы знаем расстояние между точками. Нет, ибо это расстояние может подвергнуться огромным изменениям, и мы могли бы их не заметить, если бы другие расстояния изменились в той же пропорции. Если я говорю: «я буду здесь завтра», то, как мы видели только что, я не хочу этим сказать, что я буду завтра в той же точке пространства, где сегодня; я имею в виду только, что я буду завтра на том же расстоянии от Пантеона, что и сегодня. Но, строго говоря, и эта формулировка недостаточно ясна. Я, собственно, должен был бы сказать: «завтра, как и сегодня, расстояние от меня до Пантеона составит столько-то раз взятую длину моего тела».

Но это не все; я предположил, что размеры мира изменятся, но что этот мир останется по крайней мере подобен самому себе. Но в этом направлении можно идти гораздо дальше, и одна из наиболее поразительных теорий современных физиков дает нам к этому повод. По теории Лоренца и Фицджеральда все тела, увлекаемые движением Земли, подвергаются деформации. Эта деформация в действительности весьма мала, потому что все размеры, параллельные движению Земли, должны уменьшиться на одну стомиллионную часть, между тем как размеры, перпендикулярные этому движению, совсем не должны измениться. Но для нас даже неважно, что эти изменения ничтожны; достаточно того, что они существуют, чтобы сделать вывод, который я имею в виду. Да к тому же, когда я говорю, что изменения ничтожны, я в действительности об этом ничего не знаю; я обнаруживаю только, что становлюсь сам жертвой упорной иллюзии, рисуя себе абсолютное пространство. Я размышлял о движении Земли вокруг Солнца по ее эллиптической орбите, и я принял скорость, равную 30 километрам. Но ее истинная скорость (я разумею на этот раз не абсолютную скорость, которая не имеет никакого смысла, а скорость по отношению к эфиру) мне совершенно неизвестна, и я не имею никаких средств ее узнать; она может быть в 10, 100 раз больше; а тогда и деформация будет в 100 или в 10 000 раз больше.

Можем ли мы обнаружить эту деформацию? Конечно, нет. Вот перед нами куб, ребро которого равно одному метру; вследствие перемещения Земли куб испытывает деформацию; одно из ребер, то, которое параллельно движению, становится меньше, другие же не изменяются. Если я хочу в этом убедиться при помощи метра, то я измерю сначала одно из ребер, перпендикулярных движению, и найду, что мой метр точно совпадает с этим ребром; и, в самом деле, ни одна из этих величин ведь не изменилась, так как обе они перпендикулярны движению. Я хочу затем измерить другое ребро, параллельное движению: для этого я перемещаю свой метр и поворачиваю его, чтобы наложить на это ребро. Но метр, изменив свое направление и сделавшись параллельным движению, в свою очередь претерпел деформацию; таким образом, хотя длина ребра не равна более одному метру, последний точно совпадает с ребром, и я ровно ничего не замечу.

Меня спросят в таком случае, в чем же польза гипотезы Лоренца и Фицджеральда, если она не может быть проверена опытом? Но мое изложение не было полное, я говорил только об измерениях, которые могут быть произведены при помощи метра; но длину можно измерять и при помощи времени, которое нужно свету, чтобы ее пробежать, в предположении, что скорость света постоянна и не зависит от направления. Лоренц мог бы дать объяснение того же факта, допустив, что скорость света по направлению движения Земли больше, чем скорость света в перпендикулярном направлении. Он предпочел допустить, что скорость эта одинакова во всех направлениях, но что тела в одних направлениях обладают меньшими размерами, чем в других. Если бы поверхности световой волны испытали те же деформации, что и материальные тела, то мы не заметили бы деформации Лоренца — Фицджеральда.

Как в одном случае, так и в другом нет речи об абсолютной величине, а лишь об измерении этой величины посредством какого-нибудь инструмента; этим инструментом может быть метр или же путь, пройденный светом; мы измеряем только отношение величины к инструменту, и, если это отношение изменилось, мы никоим образом не можем узнать, что именно изменилось — измеряемая величина или инструмент.

Но я хочу лишь показать, что при деформации, о которой идет речь, мир не остался себе подобным: квадраты обратились в прямоугольники или в параллелограммы, круги — в эллипсы, сферы — в эллипсоиды. И, однако, мы ни в каком случае не можем знать, реальна ли эта деформация.

Очевидно, что в этом направлении можно было бы пойти гораздо дальше: вместо деформации Лоренца — Фицджеральда, законы которой чрезвычайно просты, мы могли бы вообразить какую-нибудь совершенно произвольную деформацию. Тела могли бы изменяться по законам, сколь угодно сложным, и мы бы этого не заметили, если бы все тела без исключения подчинялись тем же законам. Говоря «все тела», я разумею, конечно, в том числе и наше тело и световые лучи, исходящие от разных предметов. Если бы мы рассматривали мир в одном из тех зеркал сложной формы, которые самым причудливым образом изменяют предметы, то взаимные отношения различных частей мира от этого не изменялись бы; если, в самом деле, два реальных предмета касаются друг друга, то их изображения также будут касаться друг друга. Собственно говоря, когда мы смотрим в такое зеркало, мы замечаем происшедшую деформацию, но это потому, что реальный мир существует рядом с его измененным образом, и если бы даже этот реальный мир был от нас скрыт, то все же осталось бы нечто, что от нас не было бы скрыто: это мы сами; мы не можем не видеть или по крайней мере не чувствовать нашего тела и наших членов, которые не испытали деформации и продолжают служить нам орудием измерения. Но если бы мы вообразили, что наше тело изменилось и притом стало таким, каким оно показалось бы в зеркале, то у нас исчезло бы орудие измерения, и деформация не могла бы быть обнаружена.

Вот два мира, из которых каждый является изображением другого; всякому предмету P мира A соответствует в мире B предмет P', который и есть его изображение; координаты изображения являются определенными функциями координат предмета P; эти функции могут, конечно, быть какими угодно; я предполагаю только, что они выбраны раз и навсегда. Между положением P и положением P' существует постоянное соотношение; неважно, каково это соотношение; достаточно, что оно постоянное.

При таких условиях эти два мира не будут отличимы друг от друга. Я хочу сказать, что первый будет для своих обитателей тем же, чем является второй мир для своих.

И так будет до тех пор, пока два мира останутся обособленными друг от друга. Допустим, что мы обитаем в мире A, что мы построили нашу науку и, в частности, нашу геометрию. В это же время обитатели мира B также построят науку и, так как их мир есть образ нашего мира, то их геометрия будет также образом нашей геометрии, или, лучше сказать, она будет такой же, как и наша. Но если в один прекрасный день перед нами откроется окно в мир B, нас охватит чувство жалости: «несчастные, — скажем мы, — они думают, что построили геометрию, но то, что они называют этим именем, есть не что иное, как смешной и странный образ нашей геометрии, их прямые искривлены, их круги искажены буграми, их сферы усажены капризными неровностями». И мы не сомневаемся в том, что они скажут то же самое о нас, и никогда нельзя будет сказать, кто прав.

Ясно, таким образом, в каком широком смысле нужно понимать относительность пространства. В действительности пространство аморфно, и форму ему сообщают те вещи, которые в нем находятся. Что же можно сказать о той непосредственной интуиции, которую мы как будто имеем о прямой линии и о расстоянии? Мы столь мало обладаем интуицией расстояния самого по себе, что, как мы уже сказали, в течение ночи расстояние может увеличиваться в тысячу раз незаметно для нас, если только все другие расстояния испытывают то же самое изменение. И в течение ночи же мир B может стать на место мира A, причем мы этого решительно не будем знать; вместе с тем прямые линии перестанут быть прямыми и мы этого совершенно не заметим.

Одна часть пространства сама по себе и в абсолютном смысле слова не равна другой части пространства; ибо если она равна для нас, она не равна для обитателей мира B; а эти последние могут иметь такое же точно право отвергнуть наше воззрение, какое имеем мы для того, чтобы отвергнуть их воззрение.

Я указал в другом сочинении, какие последствия вытекают из этих фактов для того представления, которое мы должны себе составить о неевклидовой геометрии и о других аналогичных геометриях; я не буду к ним возвращаться. Теперь же я стану на несколько иную точку зрения.

II

Если эта интуиция расстояния, направления, прямой линии, словом, если эта непосредственная интуиция пространства не существует, то почему нам кажется, что мы ее имеем? Если здесь только иллюзия, то почему эта иллюзия держится так прочно? Этот вопрос требует исследования. Непосредственной интуиции величины, сказали мы, не существует, и мы в состоянии только определить отношение этой величины к нашим измерительным инструментам. Мы не были бы способны построить пространство, если бы мы не имели инструмента для его измерения. А инструмент, к которому мы все относим, которым мы инстинктивно пользуемся, — это наше собственное тело. По отношению к нашему телу мы располагаем внешние предметы, и единственные пространственные отношения этих предметов, какие мы можем себе представить, суть их отношения с нашим телом. Наше тело служит, так сказать, системой осей координат.

Например, в один момент α присутствие предмета A обнаруживается мною органом зрения. В другой момент β присутствие другого предмета B обнаруживается мною при помощи другого органа чувств, например слуха или осязания. Я заключаю, что предмет B занимает то же место, что и предмет A. Что же это значит? Прежде всего, это не значит, что оба предмета занимают в два различных момента одну и ту же точку в абсолютном пространстве; такое пространство, если бы и существовало, ускользало бы от нашего сознания, ибо между моментами α и β Солнечная система переместилась, а мы этого перемещения не знаем. Это значит только, что оба предмета занимают одно и то же положение по отношению к нашему телу.

Но какое же содержание имеет это утверждение? Впечатления, которые мы получили от этих предметов, шли по совершенно различным путям: по зрительному нерву для предмета A, по слуховому нерву для предмета B. С точки зрения качественной эти впечатления не имеют ничего общего. Представления, которые мы можем себе составить об этих двух предметах, являются абсолютно разнородными, друг к другу не сводимыми. Но я знаю только, что мне стоит известным образом протянуть правую руку, и я ухвачу тело A; если даже я воздерживаюсь от соответствующего движения, то я представляю себе мускульные ощущения и другие аналогичные ощущения, которыми сопровождается это движение. Такое представление и ассоциируется с представлением предмета A.

Я знаю, однако, что могу достать тело B, протягивая тем же самым образом правую руку, причем это движение сопровождается таким же рядом мускульных ощущений. И только это я и разумею, когда утверждаю, что оба предмета занимают одно и то же положение.

Я знаю также, что мог бы достать предмет A при помощи другого подходящего движения левой руки, и я представляю себе те мускульные ощущения, которыми сопровождалось бы это движение; и при помощи того же движения левой руки, влекущего за собою те же ощущения, я мог бы достать предмет B.

Это очень важно, потому что именно этим путем я могу защитить себя против опасностей, которыми мне могут угрожать предметы A и B. Каждому удару, который может быть нам нанесен извне, природа противопоставила один или несколько ответных ударов, которые имеют для нас предохранительное значение. Одним и тем же парированием можно отвечать на несколько ударов; например, одним и тем же движением правой руки можно будет защитить себя в момент α против предмета A и в момент β против предмета B. Точно так же один и тот же удар может быть отражен несколькими приемами, и, например, как мы уже указали, предмет A можно достать при помощи известного движения либо правой, либо левой руки.

Все эти ответные удары не имеют между собою ничего общего, кроме того, разве, что они дают возможность избежать одного и того же удара, и только об этом-то идет речь, когда мы говорим о них как о движениях, заканчивающихся в одной и той же точке пространства. Равным образом, то общее, которое заключается в предметах, когда мы говорим, что они занимают одно и то же место пространства, выражается лишь в том, что для защиты от них может быть употреблен один и тот же ответный удар.

Другими словами, представим себе сеть бесчисленных телеграфных проволок, из которых одни имеют центробежное, другие центростремительное направление. Центростремительные проволоки предупреждают нас о бедах, совершившихся во внешнем мире, центробежные должны принести помощь. Соединения установлены таким образом, что когда по одной из центростремительных проволок пробегает ток, он действует на электрический прибор, реле, и вызывает ток в одной из центробежных проволок. При этом несколько центростремительных проволок могут действовать на одну и ту же центробежную, если один и тот же вид помощи применим в разных несчастных случаях, и одна центростремительная проволока может поколебать разные центробежные проволоки либо одновременно, либо в каком-нибудь последовательном порядке, если одно и то же бедствие может быть исправлено несколькими средствами.

Вот эта-то сложная система связей, этот, если можно так сказать, распределительный щит и есть вся наша геометрия или, иначе говоря, все то истинктивное, что заключается в нашей геометрии. То, что мы называем интуицией прямой линии или расстояния, и есть реализация в нашем сознании этих связей и их управляющего характера.

Легко понять, откуда вытекает этот управляющий характер. Связь нам кажется тем более неразрушимой, чем древнее ее происхождение. Но эти связи в большинстве случаев не являются приобретениями индивидуума, ибо в зачаточном состоянии они заметны уже у новорожденного. Эти связи — приобретения расовые[1]). Естественный отбор должен был упрочить их тем скорее, чем они более необходимы.

В числе последних на первом месте должны были быть, конечно, те приобретения, о которых мы говорили, потому что без них защита организма была бы невозможна. Как только клетки вышли из стадии простого наложения и стали вступать в стадию взаимного служения друг другу, должен был создаться механизм, аналогичный тому, который мы выше описали, для того чтобы это служение не уклонялось от должного пути и направлялось против опасности.

Если пустим каплю кислоты на кожу обезглавленной лягушки, то последняя старается снять эту каплю лапой, ближайшей к тому месту, где упала капля; а если эта лапа ампутирована, то лягушка пользуется другой лапой. Вот пример того дублирования ответного удара, о котором я только что говорил и которое позволяет бороться с бедствием вторым средством, ес-

---

[1]) Под расой Пуанкаре имеет в виду человеческий род — *Примеч ред.*

ли первое вышло из строя. Именно эта множественность ответных ударов и координация, которая из нее вытекает, образуют в своей совокупности пространство.

Мы видим, в какие глубины бессознательного надобно спуститься, чтобы найти первые следы пространственных связей, ибо в них играют роль простейшие и низшие части нервной системы. Можно ли после этого удивляться сопротивлению, которое мы оказываем каждой попытке разъединить то, что уже так давно соединено? Но это сопротивление и есть то, что мы называем очевидностью геометрических истин, эта очевидность есть не что иное, как то тягостное чувство противления, которое мы обыкновенно испытываем, когда отказываемся от очень старых привычек, с коими нам всегда легко жилось.

III

Созданное таким образом пространство имеет малые размеры: оно не простирается дальше того места, которое достигается моей рукой. Границы пространства расширяются благодаря вмешательству памяти. Имеются такие точки, которые навсегда останутся для меня недостижимыми, какие бы усилия я ни употреблял, протягивая руку. Если бы я был прикреплен к почве наподобие, например, гидроидного полипа, который может протягивать свои щупальца, то все эти точки оставались бы вне пространства, потому что те ощущения, которые мы можем испытывать благодаря действию тел, помещенных в этих точках, не были бы ассоциированы ни с какой-либо идеей движения, необходимого для достижения этих тел, ни с каким-либо соответствующим ответным ударом. Нам казалось бы, что эти ощущения не имеют пространственного характера, и мы не старались бы их локализовать.

Но, в отличие от низших животных, мы не прикреплены к почве. Если враг находится далеко от нас, то мы можем до него дойти и, приблизившись, протянуть руку. Это тоже ответный удар, но дальнего действия. Кроме того, это сложный ответный удар и в представление, которое мы о нем себе составляем, входит представление о мускульных ощущениях, вызванных движением ног, представление о мускульных ощущениях, вызванных конечным движением руки, представление об ощущениях полукружных каналов и т. д. Мы должны, кроме того, представить себе не комплекс одновременных ощущений, а комплекс ощущений последовательных, сменяющих друг друга в определенном порядке, и вот почему я указал выше на необходимость вмешательства памяти.

Заметим еще, что для того, чтобы прийти к одной и той же точке, я могу очень близко подойти к цели, которую мне нужно достигнуть, и лишь немного вытянуть руку. Что же еще мне известно? Не один, а тысячу ответных ударов могу я противопоставить одной и той же опасности. Все эти удары образованы из ощущений, которые могут не иметь между собой ничего общего, но мы их рассматриваем как определяющие одну и ту же точку пространства, потому что они могут отвечать одной и той же опасности и все ассоциированы с понятием об этой опасности. Возможность парировать один и тот же удар и сообщает этим различным ответным ударам единство, подобно тому как возможность быть парированным одним и тем же способом сообщает единство различного рода ударам, которые могут угрожать нам из одной и той же точки пространства. Именно это двоякое единство и создает индивидуальность каждой точки пространства, а понятие о точке ничего, кроме этого, в себе не заключает.

Пространство, которое я рассматривал в предыдущем разделе, и которое я мог бы назвать ограниченным пространством, было отнесено к осям координат, связанным с моим телом; эти оси были постоянны, так как мое тело не двигалось, а перемещались лишь мои члены. Каковы же оси, к которым может быть отнесено расширенное пространство, т. е. то пространство, которое я только что определил? Мы определяем точку при помощи ряда движений, которые необходимо совершать для ее достижения, исходя при этом из определенного начального положения тела. Оси, следовательно, связаны с этим начальным положением.

Но положение, которое я называю начальным, может быть произвольно избрано среди всех тех положений, которые мое тело последовательно занимало; если более или менее бессознательное воспоминание об этих последовательных положениях необходимо для генезиса понятия пространства, то это воспоминание может простираться более или менее далеко в прошлое. Отсюда получается известная неопределенность в самом определении пространства и этой именно неопределенностью обусловливается его относительность.

Итак, нет абсолютного пространства, а есть только пространство, отнесенное к известному начальному положению тела. Для сознательного существа, которое, как низшие животные, было бы прикреплено к почве и которому, следовательно, было бы знакомо лишь ограниченное пространство, это пространство также было бы относительным, так как оно было бы отнесено к его телу; но такое существо не сознавало бы этой относительности, потому что оси, к которым оно относило ограниченное пространство, не изменялись бы! Конечно, скала, к которой это существо было бы приковано, не оставалась бы неподвижной, так как она увлекалась бы движением нашей планеты; для нас, следовательно, эти оси изменялись бы в каждое мгновение; но для него они оставались бы неизменными. Мы обладаем способностью относить наше расширенное пространство то к положению A нашего тела, рассматриваемому как начальное, то к положению B, которое наше тело приобрело несколькими мгновениями позже и которое совершенно свободно можем также рассматривать как начальное; мы, следовательно, каждое мгновение производим бессознательное изменение координат. Этой способности не было бы у нашего воображаемого существа; лишенное возможности путешествовать, оно почитало бы пространство абсолютным. В каждое мгновение его система в действительности изменялась бы, но для него она оставалась бы одной и той же, так как она была бы единственной его системой. Не то для нас, обладающих в каждое мгновение несколькими системами, между которыми мы можем произвольно выбирать, и сохраняющих воспоминания, которые могут нас переносить в более или менее далекое прошлое.

Но это не все. Ограниченное пространство не было бы однородным; различные точки этого пространства не могли бы рассматриваться как эквивалентные, потому что для достижения одних потребовались бы величайшие усилия, для достижения других — незначительные. Напротив, наше беспредельное пространство кажется нам однородным, и мы говорим, что все его точки эквивалентны. Что же это, собственно, значит?

Если мы исходим из известного положения A, то мы можем совершить известные движения M, характеризуемые известным комплексом мускульных ощущений. Но, исходя из другого положения B, мы сможем совершить движения M', характеризуемые теми же мускульными ощущениями. Обозначим буквой a положение определенной точки тела, например конца указательного пальца правой руки при начальном положении A, и обозначим буквой B положение того же пальца после того, как, исходя из этого положения A, мы совершили движения M. Пусть a' будет положение того же пальца в B, а b' — положение того же пальца после совершения движений M'.

Так вот, при таких условиях я обыкновенно говорю, что точки пространства a и b относятся друг к другу как точки a' и b', а это обозначает только, что два ряда движений M и M' сопровождаются одними и теми же мускульными ощущениями. И так как я сознаю, что при переходе из положения A в B мое тело сохранило способность к одним и тем же движениям, то я знаю, что есть точка пространства, которая по отношению к точке a' составляет то же, что произвольно выбранная точка B относительно точки a, и что, таким образом, обе точки a и a' эквивалентны. И вот поэтому пространство в то же время относительно, ибо его свойства остаются одними и теми же, когда оно отнесено к осям A или к осям B. Таким образом, относительность пространства и его однородность — это одно и то же.

Теперь, если я захочу перейти к огромному пространству, которое служит уже не только для меня, но в котором я могу себе представить всю Вселенную, я прибегну к акту воображения. Я представлю себе, что испытал бы великан, который несколькими шагами достиг бы планет или, если это угодно, что испытал бы я сам перед лицом миниатюрного мира, в котором планеты были бы заменены маленькими шариками, и на одном из них суетился бы лилипут, и этим лилипутом был бы я. Но вот акт воображения был бы для меня невозможен, если бы я не построил предварительно и притом для собственного обихода своего ограниченного и своего обширного пространства.

IV

Теперь возникает вопрос; почему все эти пространства имеют три измерения? Обратимся к «распределительному щиту», о котором мы говорили выше. Мы имеем, с одной стороны, список возможных опасностей: обозначим их A_1, A_2 и т. д.; с другой стороны — список разных средств защиты, которые мы обозначим B_1, B_2 и т. д. Мы имеем, таким образом, связи между элементами первого и второго списков, так что, когда, например, сработает сигнализатор опасности A_3, он приведет или может привести в действие реле, соответствующее ответному удару B_3.

Так как я говорил выше о центростремительных и центробежных проволоках, то я опасаюсь, как бы во всем этом не усмотрели не простое сравнение, а описание нервной системы. Но моя мысль не такова. Прежде всего я не позволил бы себе высказать мнение относительно структуры нервной системы, которой я не знаю, между тем как лица, изучавшие ее, высказываются о ней с большой осторожностью. Затем, несмотря на мою некомпетентность, я чувствую, что эта схема была бы слишком упрощенной, и, наконец, в моем списке ответных ударов имеются некоторые очень сложные; как мы выше видели, когда речь шла об обширном пространстве, некоторые ответные удары могут включать в себя ряд движений ног, сопровождающихся движением руки. Дело, следовательно, идет не о физической связи между двумя реальными проводниками, но о психологической связи между двумя рядами ощущений.

Если сигнализаторы A_1 и A_2, например, связаны один и другой с ответным ударом B_1, и если A_1 связан также с ответным ударом B_2, то обыкновенно случается, что A_2 и B_2 также связаны. Если бы этот основной закон не был вообще справедлив, то произошло бы неимоверное смешение, и ничего схожего с понятием о пространстве или с геометрией не могло бы составиться. В самом деле, вспомним, как мы определяли точку пространства. Мы это сделали двояко: с одной стороны, мы имели совокупность сигнализаторов A, которые связаны с одним и тем же ответным ударом B, с другой — совокупность ответных ударов B, связанных с одним и тем же сигнализатором A. Если бы наш закон не был справедлив, следовало бы сказать, что A_1 и A_2 отвечают одной и той же точке, потому что оба они связаны с ответным ударом B_1, но, равным образом, следовало бы также сказать, что они не отвечают одной и той же точке, потому что A_1 связан с B_2, а A_2 не связан с B_2. Это было бы противоречием.

Но, с другой стороны, если бы закон был строго и всегда правилен, пространство было бы отлично от того, каким оно является. Мы имели бы резко очерченные категории, между которыми распределились бы, с одной стороны, сигнализаторы A и с другой — ответные удары B; эти категории были бы чрезвычайно многочисленны, но они были бы друг от друга совершенно отделены. Пространство было бы составлено из очень многочисленных, но раздельных точек, оно было бы прерывным. Не было бы оснований предпочесть один порядок расположения точек другому, не было бы, следовательно, оснований приписывать пространству три измерения.

Но дело обстоит не так. Да будет мне позволено воспользоваться на мгновение языком людей, уже знающих геометрию. Это даже необходимо, потому что именно такой язык наиболее понятен читателям, которых я имею в виду, поясняя свою мысль. Когда я хочу отразить удар, я стараюсь достигнуть той точки, откуда удар исходит, но для этого достаточно, чтобы я приблизился к точке на надлежащее расстояние. В таком случае ответный удар B_1 может отвечать ударам A_1 и A_2, если только точка, отвечающая B_1, одновременно достаточно близка к точкам, отвечающим A_1 и A_2. Но может случиться, что точка, отвечающая другому ответному удару B_2, окажется достаточно близкой к точке, отвечающей A_1, но недостаточно близкой к точке, отвечающей A_2. Таким образом, ответный удар B_2 будет соответствовать A_1 и не соответствовать A_2.

Для того, кто не знает еще геометрии, все это покажется просто нарушением формулированного выше закона Для него дело будет происходить таким образом: два ответных удара B_1 и B_2 будут связаны с одним и тем же сигнализатором A_1 и с еще бо́льшим числом сигнализаторов, которые мы включили в ту же категорию, в какой находится A_1, и которые мы отнесем к одной и той же точке пространства. Но мы сможем найти сигнализаторы A_2, которые будут связаны с B_2, не будучи связанными с B_1, и которые зато связаны с B_3, причем B_3 не связан с A_1, и т. д. Итак, мы можем писать ряд B_1, A_1, B_2, A_2, B_3, A_3, B_4, A_4, в котором каждый член связан со следующим и с предыдущим, но не связан с членами, отстоящими от него дальше.

Излишне прибавлять, что каждый из членов этих рядов не является изолированным, а составляет часть очень многочисленной категории других сигнализаторов или других ответных ударов. Эта категория имеет такие же связи, как и первый член, и ее можно рассматривать как относящуюся к одной и той же точке пространства. Основной закон, несмотря на исключения, остается, следовательно, почти всегда верным. Но благодаря этим исключениям упомянутые категории вместо того, чтобы оставаться совершенно обособленными, захватывают друг друга некоторыми частями, проникают одни в другие, и пространство, таким образом, становится непрерывным.

С другой стороны, порядок, в котором категории должны быть размещены, не оказывается уже произвольным. Обращаясь к предыдущему ряду, легко заметить, что B_2 должен быть помещен между A_1 и A_2 и, следовательно, между B_1 и B_3, но не может быть помещен, например, между B_3 и B_4.

Итак, существует порядок, в котором естественно располагаются категории, отвечающие точкам пространства И опыт нас учит, что этот порядок представляется в виде таблицы с тремя входами, вот почему пространство имеет три измерения.

V

Характерная особенность пространства, выражающаяся в том, что оно обладает тремя измерениями, есть, таким образом, особенность нашего распределительного щита, есть, так сказать, внутреннее свойство человеческого ума. Достаточно было бы разрушить некоторые из соединений, т. е. некоторые ассоциации идей, чтобы получить другой распределительный щит, а этого было бы достаточно, чтобы пространство приобрело четвертое измерение. Такой результат может удивить некоторых. Ведь внешний мир, скажут они, должен же играть здесь какую-то роль. Если число измерений зависит от того, как мы созданы, то можно предположить, что мыслящие существа, живущие в нашем мире, но созданные иначе, чем мы, полагали бы, что пространство имеет больше или меньше трех измерений. И не утверждал ли Цион, что японские мыши, имеющие только две пары полукружных каналов, думают, что пространство имеет два измерения? А подобное мыслящее существо, если бы оно было способно создать физику, разве не построило бы физики двух или четырех измерений, физики, которая, в известном смысле, была бы такою же, как и наша, ибо она описывала бы другим языком тот же самый мир?

В самом деле, не представляет, по-видимому, никаких затруднений перевести нашу физику на язык геометрии четырех измерений. Осуществить действительно такую задачу значило бы потратить много усилий с ничтожной пользой, и я ограничусь лишь указанием на механику Герца, в которой мы имеем нечто, напоминающее такой перевод. Но такой перевод, по-видимому, всегда был бы сложнее текста и всегда обнаруживал бы свою заимствованную природу, тогда как язык трех измерений кажется наиболее приспособленным к описанию нашего мира, хотя это описание может быть точно выполнено и на другом языке.

Однако наш распределительный щит возник не случайно. Имеется связь между сигналом A_1 и ответным ударом B_1, это — внутреннее свойство нашего ума. Но чем объясняется эта связь? Тем, что ответный удар B_1 позволяет действительно защититься против опасности A_1, а это — факт, внешний для нас, это — свойство внешнего мира. Таким образом, наш распределительный щит есть лишь выражение совокупности внешних фактов; если он имеет три измерения, то это потому, что он приспособлен к миру, имеющему определенные свойства, и главное из этих свойств заключается в том, что в этом мире существуют твердые тела, перемещающиеся по таким законам, которые мы называем законами движения неизменяющихся твердых тел. Если, следовательно, язык трех измерений лучше всего позволяет нам описать наш мир, то мы не должны этому удивляться. Этот язык скопирован с нашего распределительного щита, а этот щит установлен для того, чтобы можно было жить в этом мире.

Я сказал, что мы могли бы представить себе мыслящие существа, живущие в нашем мире и обладающие распределительным щитом четырех измерений; такие существа мыслили бы сверхпространство. Но не может быть уверенности в том, что такие существа, если бы и рождались, могли бы выжить и защититься против тысяч опасностей, которыми они были бы окружены в этом мире.

VI

В заключение несколько замечаний. Существует разительный контраст между грубостью той примитивной геометрии, которая сводится к распределительному щиту, и безграничной точностью геометрии геометров. И, однако, последняя — плод первой. Но не ее одной; она должна была быть оплодотворена присущей нам способностью к построению математических понятий, как, например, понятия о группах; нужно было среди этих чистых понятий найти наиболее приспособленное к этому грубому пространству, генезис которого я пытался объяснить на предшествующих страницах и которое является общим у нас и у высших животных.

Очевидность некоторых геометрических постулатов, сказали мы, есть не что иное, как наша косная неспособность отказаться от очень старых привычек. Но эти постулаты чрезвычайно точны, тогда как привычки заключают в себе нечто по существу зыбкое. И, как только мы хотим мыслить, мы испытываем нужду в этих чрезвычайно точных постулатах, так как лишь с их помощью мы можем избежать противоречия. Но среди всех возможных систем постулатов имеются такие, которые мы отказываемся принять, потому что они не согласуются с нашими привычками; как ни зыбки, как ни эластичны эти привычки, все же они имеют предел этой эластичности.

Мы видим, что если геометрия не есть экспериментальная наука, то это все же наука, рожденная в связи с опытом; мы создали пространство, которое она изучает, но мы приспособили его к миру, в котором мы живем. Мы сделали выбор наиболее удобного пространства, но этим выбором руководил опыт. И так как выбор был бессознателен, то нам кажется, что он для нас необходим; одни говорят, что он сделался для нас необходимым путем опыта, другие говорят, что мы рождаемся с вполне сложившимся представлением о пространстве. Из предыдущих рассуждений явствует, какая доля истины и ошибки заключается в этих двух суждениях.

Очень трудно определить участие индивида и участие расы[1]) в том эволюционном процессе воспитания, который закончился построением пространства. В какой мере кто-нибудь из нас, будучи перенесен с момента рождения в другой совершенно мир, где, например, преобладали бы тела, перемещающиеся по законам движения, свойственным неевклидовским твердым телам, в какой мере, повторяю, мог бы он отказаться от пространства предков, чтобы построить совершенно новое пространство?

Участие расы кажется преобладающим. Однако если мы и обязаны ему грубым пространством, зыбким пространством высших животных, о котором я говорил выше, то не обязаны ли мы бессознательному опыту индивида тем безгранично точным пространством, которое имеет геометр? Этот вопрос нелегко разрешается. Укажем, однако, на факт, который показывает, что пространство, завещанное нам предками, сохраняет известную пластичность. Некоторые охотники научиваются ловить рыбу под водой, хотя изображение этих рыб вследствие преломления несколько приподнято. Они учатся этому инстинктивно: они сумели, следовательно, изменить свой прежний инстинкт направления. Или, если хотите, они сумели на место связи A_1, B_1 поставить другую связь A_1, B_2, потому что опыт показал им, что с первой связью нельзя достигнуть цели.

---

[1]) См. сноску на с. 444.

Глава II

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕПОДАВАНИЕ

1. Я должен говорить здесь об общих определениях в математических науках; по крайней мере к этому меня обязывает название настоящей главы. Но мне невозможно будет оставаться в рамках предмета в такой мере, в какой это требовалось бы правилом единства действия; я не смогу трактовать вопроса, не затрагивая отчасти других ближайших вопросов, и потому прошу простить мне уклонения вправо и влево, которые встретятся в дальнейшем.

Что разумеют под хорошим определением? Для философа или для ученого это есть определение, которое приложимо ко всем определяемым предметам и только к ним; такое определение удовлетворяет правилам логики. Но при преподавании дело обстоит иначе. Здесь хорошим определением будет то, которое понято учениками.

Чем объяснить, что многие умы отказываются понимать математику? Не парадоксально ли это? В самом деле, вот наука, которая апеллирует только к основным принципам логики, например к принципу противоречия, апеллирует к тому, что составляет, так сказать, скелет нашего разумения, к тому, от чего нельзя отказаться, не отказываясь вместе с тем от самого мышления, и все же встречаются люди, которые находят эту науку темной! И этих людей большинство! Пусть бы они оказались неспособными изобретать — это еще допустимо. Но они не понимают доказательств, которые им предлагают, они остаются слепыми, когда им подносят свет, который для нас горит чистым и ярким пламенем, — вот что чрезвычайно странно.

А между тем достаточно и небольшого опыта, доставляемого экзаменами, чтобы убедиться в том, что эти слепые отнюдь не являются исключениями. Здесь имеется проблема, которая не легко решается, но которая должна занимать всех, желающих посвятить себя делу преподавания.

Что значит понимать? Имеет ли это слово для всех одно и то же значение? Понять доказательство теоремы — значит ли это рассмотреть последовательно каждый из силлогизмов, из коих составляется доказательство, и констатировать, что он правилен и согласуется с ходом задачи? Точно так же понять определение — значит ли это только признать, что смысл всех употребленных в нем терминов уже известен, и констатировать, что определение не заключает в себе никакого противоречия?

«Да», — скажут одни, которые, констатировав отсутствие противоречия в определении, говорят «мы его поняли». «Нет», — скажет большинство. Почти все люди оказываются более требовательными; они хотят не только знать, правильны ли все силлогизмы доказательства, но еще и знать, почему силлогизмы связываются в данном, а не в другом порядке. Пока им кажется, что эта связь рождена капризом, а не разумом в постоянном сознании преследуемой цели, они думают, что не поняли доказательства.

Без сомнения, они сами не отдают себе отчета в том, чего они собственно требуют, и не могут формулировать своего желания; но если они не находят удовлетворения, то они смутно чувствуют, что чего-то им недостает. Что же тогда происходит? Вначале они еще схватывают те очевидные вещи, которые представляются их взору; но, так как последние связаны чрезвычайно тонкой нитью с предшествующими и последующими, то они не оставляют никакого следа в их мозгу; они тотчас забываются. Освещенные на одно мгновение, они сейчас же исчезают в сумраке вечной ночи. А когда эти люди следят за дальнейшим развитием доказательства, для них исчезает и прежняя эфемерная ясность, так как теоремы опираются одна на другую, а теоремы, которые им нужны, уже забыты. Таким образом, эти люди становятся неспособными понимать математику.

Не всегда здесь виной преподаватель; зачастую ум людей, нуждающийся в руководящей нити, слишком ленив для поисков ее. Но, чтобы помочь непонимающим, мы должны сначала хорошо узнать то, что их останавливает.

Другие же спросят, для чего все это служит; они не поймут силлогизмов, если они не нашли вокруг себя на практике или в природе основания для того или иного математического понятия. Под всяким словом они хотят разглядеть чувственный образ; необходимо, чтобы определение вызывало этот образ, чтобы на каждой стадии доказательства они видели его превращения и эволюцию. Лишь при таком условии они поймут и удержат в памяти доказательство. Такие люди часто заблуждаются относительно самих себя; они не слушают рассуждений, а рассматривают фигуры, они воображают, что поняли, тогда как они только видели.

2. Сколько различных тенденций! Нужно ли с ними бороться? Или нужно ими воспользоваться? А если мы хотим с ними бороться, то какой из них должны мы благоприятствовать? Нужно ли доказывать тем, которые довольствуются чистой логикой, что они видят только одну сторону вещей? Или, напротив, нужно доказывать тем, которые не удовлетворяются так легко, что то, чего они требуют, не является необходимостью?

Другими словами, должны ли мы принуждать молодых людей к тому, чтобы они изменяли природу своего ума? Такая попытка была бы бесплодна. Мы не обладаем философским камнем, который дал бы нам возможность превращать один в другой вверенные нам металлы; все, что мы можем сделать, — это работать, приспосабливаясь к их свойствам.

Многие дети неспособны стать математиками, тем не менее им необходимо преподавать математику. Да и сами математики не все отлиты по одной и той же модели. Достаточно прочитать их труды, чтобы заметить существование умов двух типов: логиков, как Вейерштрасс, и интуитивистов, как Риман. Такая же разница наблюдается и среди студентов. Одни любят разрабатывать задачи, как они выражаются, «путем анализа», другие — «путем геометрии».

Было бы бесполезно пытаться изменить что-либо в этом отношении, да и, помимо того, было ли бы это желательно?

Хорошо, что существуют логики и интуитивисты; кто рискнет утверждать, что он предпочел бы, чтобы Вейерштрасс никогда не писал или чтобы Римана не было? Таким образом, мы должны примириться с разнообразием умов или, еще лучше, мы должны ему радоваться.

3. Так как слово «понимать» имеет несколько значений, то определения, наиболее понятные для одних

людей, не будут совпадать с определениями, которые подходят для других. Мы имеем такие определения, которые стараются вызвать в нас образ, и такие, которые лишь комбинируют пустые формы, доступные интеллекту, но только ему одному, определения, которые по своей абстрактности лишены всякого материального содержания.

Я не знаю, нужно ли приводить примеры. Однако мы приведем некоторые, и прежде всего мы остановимся на определении дробей, которое даст нам крайний пример. В начальных школах, чтобы определить дробь, разрезают яблоко или пирог; конечно, разрезание происходит в уме, а не в действительности, ибо я не думаю, чтобы бюджет начальной школы позволял такую расточительность. В высшей нормальной школе или на факультетах, напротив, скажут: дробь — это совокупность двух целых чисел, разделенных горизонтальной чертой; определят при помощи соглашений те операции, которым можно подвергать эти символы; докажут, что правила для этих операций те же, какие употребляются в исчислении целых чисел и, наконец, обнаружат, что, умножая, согласно этим правилам, дробь на знаменатель, мы находим числитель. Такое определение будет здесь уместным, потому что его преподносят молодым людям, которые уже давно освоились с понятием о дробях — они уже делили яблоки и другие предметы; ум которых уже изощрен математической эрудицией; которые хотят, наконец, получить чисто логическое определение. Но как был бы ошеломлен начинающий, к которому подошли бы с подобным определением.

Таковы же определения, которые вы найдете в удивительной и несколько раз премированной книге Гильберта «Основания геометрии». Посмотрим, как он начинает: вообразим три системы вещей, которые мы назовем точками, прямыми и плоскостями. Что это за «вещи» — мы не знаем, да и незачем нам это знать. Было бы даже греховно стараться это узнать. Все, на что мы можем претендовать, сводится к тому, чтобы мы усвоили относящиеся к ним аксиомы, например следующую: две различные точки всегда определяют прямую, и комментарий к ней: вместо «определяют» мы можем сказать, что прямая проходит через две точки, или соединяет эти две точки, или что две точки расположены на прямой. Значит, фраза «точки расположены на прямой» является просто синонимом фразы «точки определяют прямую». Вот книга, которую я очень высоко ценю, но которую я не рекомендую лицеисту. Впрочем, я мог бы это сделать без опаски, так как в чтении ее он ушел бы не очень далеко.

Я взял крайние примеры; никакой преподаватель, конечно, не предложил бы таких определений. Но разве не остается такая же опасность и тогда, когда мы стоим ближе к действительности?

Вот в четвертом классе. Преподаватель диктует: «окружность — это геометрическое место точек на плоскости, находящихся на одном и том же расстоянии от одной внутренней точки, именуемой центром». Хороший ученик вписывает эту фразу в свою тетрадь; плохой ученик рисует в ней «человечков», но ни тот, ни другой ничего не поняли. Тогда преподаватель берет мел и рисует круг на доске. «Ага, — думают ученики, — почему он не сказал сразу: окружность — это кружок, и мы бы сразу поняли». Без сомнения, преподаватель прав. Определение учеников не имело бы никакой ценности, потому что не могло бы служить ни для какого доказательства, и в особенности не привило бы им спасительной привычки анализировать свои понятия. Но им надобно было бы доказать, что они не понимают того, что им кажется понятным, надобно было бы заставить их отдать себе отчет в грубости их первоначального представления, сделать так, чтобы они сами пожелали очистить и улучшить это представление.

4. Я еще вернусь ко всем этим примерам. Я хотел лишь показать вам две противоположные идеи: между ними имеется самый резкий контраст, причина которого нам раскрывается историей науки. Если мы читаем книгу, написанную пятьдесят лет назад, то рассуждения, которые мы в ней находим, кажутся нам большей частью лишенными логической строгости.

В ту эпоху допускали, что непрерывная функция не может изменить знак, не проходя через нуль; теперь это доказывают. Допускали, что обыкновенные правила счисления приложимы к несоизмеримым числам, теперь это доказывают. Допускали еще и другие вещи, которые порою оказывались ложными.

Доверялись интуиции. Но интуиция не может дать ни строгости суждений, ни уверенности в их правильности, в этом убеждались все более и более. Интуиция, например, учит нас, что всякая кривая имеет касательную, т. е. что каждая непрерывная функция имеет производную, и, однако, это положение ложно. А так как знание стремилось к уверенности, то приходилось все более и более ограничивать роль интуиции. Каким образом свершилась эта необходимая эволюция? Вскоре было замечено, что рассуждения лишь тогда приобретут строго доказательную силу, когда эта строгость будет предварительно внесена в определения.

Объекты, которыми занимаются математики, долгое время не имели хороших определений; эти предметы казались известными потому, что их себе представляли при помощи чувств или воображения; но в действительности их образы отличались грубостью; не было точных идей, на которые могли бы опереться доказательства. Вот в эту сторону логики вынуждены были направить свои усилия. Примером могут служить несоизмеримые числа.

Неопределенная идея непрерывности, которой мы обязаны интуиции, разрешилась в сложную систему неравенств, имеющих дело с целыми числами. Благодаря этому исчезли, наконец, все те трудности, которые пугали наших отцов, когда они размышляли об основаниях исчисления бесконечно малых величин.

Теперь анализ имеет дело только с целыми числами или же с конечными или бесконечными системами целых чисел, связанных совокупностью равенств и неравенств.

Математические науки, как говорят, арифметизировались.

5. Но можно ли думать, что эти науки достигли абсолютной строгости, ничем со своей стороны не жертвуя? Ничуть; то, что они выиграли в строгости, они потеряли в объективности. Они приобретали совершенную чистоту, удаляясь от реальности. Теперь можно свободно обозреть всю область математического знания, которая раньше была усеяна преградами, но эти преграды не исчезли. Они были лишь

перенесены на границу; и если мы хотим перейти эту границу, чтобы вступить в область практики, то мы должны снова преодолеть эти препятствия.

Прежде мы обладали лишь неясными понятиями, составленными из несвязанных элементов, из которых одни были априорны, другие вытекали из более или менее уясненного опыта; мы думали, что главные их свойства узнаны интуитивным путем. Теперь эмпирические элементы отвергаются и сохраняются лишь элементы априорные, для определения берется одно из свойств, все другие выводятся из него путем строгого рассуждения. Это хорошо, но остается еще доказать, что свойство, ставшее определением, принадлежит действительно тем реальным объектам, с которыми нас познакомил опыт и из которых мы вывели наше ясное интуитивное понятие. Чтобы это доказать, необходимо обратиться к опыту или прибегнуть к усилию интуиции; если же мы этого не докажем, то наши теоремы будут совершенно строгими, но и совершенно бесполезными.

Логика приводит часто к уродствам. На протяжении полувека мы видели, как возникло множество причудливых функций; эти новые функции как будто старались возможно менее походить на те благородные функции, которые чему-нибудь да служат. Таковы, например, функции непрерывные, но без производных, и т. д. Более того, с точки зрения логической эти именно причудливые функции и являются наиболее общими; те же функции, которые мы находим без долгих поисков, образуют как бы частный случай. Для них остается лишь маленький уголок. Некогда при нахождении новых функций имелась в виду какая-нибудь практическая цель. Теперь функции изобретаются специально для того, чтобы обнаружить недостаточность рассуждения наших отцов, никакого иного вывода, кроме этого, из них нельзя извлечь.

Если бы логика была единственным руководителем педагога, то нужно было бы начинать с наиболее общих, т. е. наиболее причудливых функций. Именно начинающего следовало бы в таком случае отдать во власть этого музея уродств. «Если вы этого не делаете, — могли бы сказать логики, — то вы достигнете надлежащей строгости лишь после целого ряда этапов».

6. Быть может, это и так; но мы не можем не дорожить реальностью. Я разумею здесь не только реальность чувственного мира, который, впрочем, имеет свою ценность уже потому, что девять десятых ваших учеников ищут у вас орудий именно для борьбы с этой реальностью. Но есть реальность более утонченная, которая составляет жизнь математических субстанций и которая все-таки не логика.

Наше тело составлено из клеток, клетки — из атомов. Составляют ли эти клетки и эти атомы все, что есть реального в человеческом теле? Не представляет ли собою способ, каким эти клетки собраны и который обусловливает единство индивида, также реальности и реальности гораздо более интересной. Мог бы натуралист, изучавший слона только под микроскопом, думать, что он достаточно познакомился с этим животным?

То же самое в области математики. Когда логик разложил всякое доказательство на множество элементарных операций, вполне правильных, он еще не уловил реальности в ее целом; то неизвестное мне, что составляет единство доказательства, совершенно от него ускользнуло.

Сто́ит ли в здании, возведенном нашими учителями, удивляться работе каменщика, если мы не понимаем плана архитектора? Но общий взгляд не дается нам чистой логикой; чтобы получить его, мы должны обратиться к интуиции.

Возьмем для примера идею непрерывной функции. Сначала это не что иное, как чувственный образ, след, начертанный мелом на черной доске. Мало-помалу эта идея очищается. Ею пользуются для построения сложной системы неравенств, воспроизводящей все линии примитивного образа. Когда построение закончено; кружала[1]) снимаются, как это делается после сооружения свода, то грубое представление, которое стало отныне бесполезным, исче-

[1]) Кружало — деревянное сооружение, устанавливаемое под сводом перед его кладкой. Служит для придания своду надлежащей кривизны и предохраняет его от падения до отвердения цемента. — *Примеч. ред.*

зает, остается лишь само здание, безупречное в глазах логика. И, однако, если бы преподаватель не влил содержания в первоначальные образы, если бы он не установил на время кружал, разве мог бы ученик догадаться, по какому капризу все эти неравенства определенным образом нанизывались одно на другое? Определение было бы правильным с логической стороны, но оно не раскрыло бы ученику настоящей реальности.

7. Мы должны вернуться назад. Без сомнения, учителю неприятно вести преподавание в рамках, которые его не вполне удовлетворяют. Но удовлетворение учителя — не единственная цель обучения; нужно прежде всего считаться с умом ученика и с тем, что из него желают сделать.

Зоологи утверждают, что эмбриональное развитие животного резюмирует вкратце историю его предков в разные геологические периоды. Воспитатель должен заставить ребенка пройти через те ступени, которые были пройдены его предками, пройти быстрее, но без пропуска промежуточных этапов. В этом смысле история науки должна быть нашим первым руководителем.

Наши предки думали, что знают, что такое дробь, непрерывность, площадь кривой поверхности; лишь мы заметили, что они этого не знали. Точно так же наши ученики думают, что они это знают, когда уже принимаются серьезно за изучение математики. Если я, без предварительной подготовки, скажу им: «нет, вы этого не знаете, вы не понимаете того, что вам казалось понятным; я должен вам доказать то, что вы считали очевидным», — и если я в своих доказательствах буду опираться на посылки, которые им кажутся менее очевидными, чем заключения, то что подумают эти несчастные? Они подумают, что математическая наука есть не что иное, как произвольно собранная груда бесполезных умствований; и они либо почувствуют к ней отвращение, либо будут забавляться ею, как игрою, и в умственном отношении уподобятся греческим софистам.

Напротив, позже, когда ученик освоится с математическим суждением и ум его созреет в этой продолжительной работе, сомнения станут возникать сами собой, и тогда ваше доказательство будет своевременным. Оно разбудит новые сомнения, и вопросы предстанут перед юношей в той последовательности, в какой они представлялись нашим отцам; и это будет продолжаться до тех пор, пока он не разобьется в такой мере, что его будут удовлетворять только совершенно строгие определения. Недостаточно еще во всем сомневаться, нужно знать, почему возникает сомнение.

8. Главная цель обучения математике — это развить известные способности ума, а между этими способностями интуиция отнюдь не является наименее ценной. Благодаря ей мир математических образов остается в соприкосновении с реальным миром; и если чистая математика может обойтись без нее, то она всегда необходима, чтобы заполнить пропасть, которая отделяет символы от реального мира; к нему будет постоянно обращаться практик, а ведь на одного чистого геометра приходится сто практиков.

Инженер должен получить полное математическое образование, но для чего оно ему? Для того чтобы видеть различные стороны вещей, видеть их быстро. У него нет времени гоняться за мелочами. В сложных физических предметах, которые представляются его взору, он должен быстро найти точку, к которой могут быть приложены данные ему в руки математические орудия. Как бы он это сделал, если бы между предметами и орудиями оставалась та пропасть, которую вырыли логики?

9. Наряду с будущими инженерами имеются ученики, не столь многочисленные, которые должны стать учителями. Последние должны дойти до конца; для них прежде всего обязательно глубокое и строгое изучение основных принципов. Но отсюда не следует, что в них не надо культивировать интуиции. Ибо они могут составить себе ложное представление о науке, если всегда будут смотреть на нее с одной только стороны, и они не сумеют развить в своих питомцах того качества, которым сами не обладают.

Для чистого геометра эта способность необходима. Доказывают при помощи логики, изобретают при помощи интуиции. Хорошо уметь критиковать, еще лучше — уметь творить. Вы способны распознать, правильна ли данная комбинация, и это недурно, раз вы не обладаете искусством сделать выбор между всеми возможными комбинациями. Логика нам говорит, что на таком-то пути мы можем быть уверены, что не встретим препятствий; она не говорит, какой путь ведет к цели. Для этого необходимо видеть цель издалека, и интуиция есть та способность, которая этому нас учит. Без нее геометр походил бы на писателя, который был бы прикован к грамматике, но не имел бы идей. Но как может развиться такая способность, раз ее преследуют и изгоняют, лишь только она обнаруживается, раз приучают относиться к ней с недоверием еще раньше, чем убедились в пользе, которую она может принести.

Позвольте мне здесь мимоходом остановиться на важности письменных работ. Эти работы занимают, быть может, слишком мало места на экзаменах, например, в Политехнической школе. Мне говорят, что такие работы закрыли бы доступ хорошим ученикам, которые понимают пройденные курсы, хорошо их знают, но не способны сделать из них ни малейшего применения. Я сказал выше, что слово «понимать» имеет несколько значений: эти ученики «понимают» определения в первом из указанных мною значений этого слова; но мы видели, что такого понимания недостаточно ни для инженера, ни для геометра. А так как здесь необходимо сделать выбор, то я предпочитаю выбрать тех, которые понимают вполне.

10. Но искусство правильно рассуждать разве не есть драгоценное качество, которое преподаватель математики должен прежде всего культивировать? Я этого не забываю. Об этом нужно позаботиться с самого начала. Я был бы в отчаянии, если бы увидел, что геометрия выродилась в какую-то тахеометрию [1]) нижайшего уровня, и нисколько не подписываюсь под крайними доктринами некоторых немецких обер-учителей. Но при изучении математики и именно тех отделов ее, где указанные выше неудобства не встречаются, бывает немало случаев, которые дают место для упражнения учеников в правильном рассуждении. У нас имеются длинные сцепления

---

[1]) Тахеометрия — раздел геодезии, посвященный изучению методов измерения на земной поверхности с помощью специального прибора — тахеометра. — *Примеч. ред.*

теорем, в которых абсолютная логика сразу и как будто естественно заняла господствующее положение и которые, как образцы, вышедшие из рук первых геометров, достойны всякого удивления и подражания.

Именно в изложении основных принципов нужно избегать излишних тонкостей. Здесь они и не привились бы и к тому же были бы бесполезны. Нельзя все доказать и нельзя все определить. Приходится всегда делать заимствование у интуиции. Неважно, сделаем ли мы это заимствование немного раньше или немного позже, будет ли оно немного больше или меньше, лишь бы мы, правильно пользуясь теми посылками, которые даны нам интуицией, научились правильно рассуждать.

11. Можно ли, однако, удовлетворить столь противоположным условиям? Возможно ли это в особенности тогда, когда приходится дать определение? Как найти такую краткую формулировку, которая одновременно удовлетворяла бы непреклонным правилам логики, нашему желанию понять то место, которое занимает новое понятие в совокупности знаний, нашей необходимости мыслить образами? Чаще всего такой формулировки найти нельзя, и вот почему недостаточно высказать определение: необходимо его подготовить и необходимо его оправдать.

Что я хочу этим сказать? Вы знаете, как часто говорят: всякое определение включает в себя аксиому, так как оно утверждает существование определенного объекта. Определение будет, следовательно, оправдано с точки зрения логической лишь тогда, когда будет доказано, что оно не находится в противоречии ни с терминами, ни с ранее допущенными истинами.

Но это не все. Определение теперь называют соглашением; но большинство умов возмутится, если вы захотите навязать это определение как соглашение произвольное. Они успокоятся только тогда, когда вы им дадите ответ на многочисленные вопросы, которые у них возникнут.

Чаще всего математические определения, как это показал Лиар, суть целые построения, составленные при помощи простейших понятий. Но почему эти элементы соединены именно данным образом, когда возможна еще тысяча других способов соединения? Каприз ли это? А если нет, то почему данная комбинация имеет больше прав на существование, чем все прочие? Какой необходимости она отвечает? Как можно было предвидеть, что она сыграет важную роль в развитии науки, что она сократит наши суждения и наши вычисления? Существует ли в природе некоторый особый предмет, который является, так сказать, неясным и грубым прообразом такой комбинации?

Это не все. Если вы ответите на эти вопросы удовлетворительно, то мы увидим, что принятую комбинацию нужно окрестить каким-либо именем. Но выбор имени не является произвольным. Нужно объяснить, какими аналогиями руководились, избирая имя. Если же аналогичное имя присваивалось различным вещам, то нужно показать, что эти вещи отличаются между собой только материально, по форме же близки друг к другу, что их свойства подобны и, так сказать, параллельны.

Вот какой ценой можно удовлетворить всем притязаниям. Если формулировка достаточно правильна, чтобы удовлетворить логика, то ее оправдание удовлетворит интуитивиста. Но лучше поступить иначе: необходимо, чтобы оправдание во всех случаях, когда это возможно, предшествовало формулировке и подготовляло ее; изучение нескольких частных примеров лучше всего приводит к общей формулировке.

Еще другое обстоятельство: каждая часть формулированного определения имеет целью установить отличие определяемого объекта от класса других близких предметов. Определение будет понято лишь тогда, когда вы покажете не только определяемый предмет, но и те соседние предметы, от которых его надобно отличать; когда вы сделаете явственным это отличие и при этом прибавите: «вот для чего я внес в определение то-то и то-то».

Теперь нам нужно перейти от общих суждений к исследованию вопроса, каким образом все изложенные мною несколько абстрактные принципы могут быть приложены в арифметике, геометрии, анализе и механике.

Арифметика

12. Нет нужды определять целое число; но зато обыкновенно определяют действия над целыми числами. Я предполагаю, что ученики выучивают определения наизусть и не связывают с ними никакого смысла. Для этого у меня есть два основания: во-первых, учеников заставляют заучивать определения слишком рано, когда их ум не чувствует в этом никакой потребности; во-вторых, даваемые им определения неудовлетворительны с логической точки зрения. Для сложения нельзя найти хорошее определение просто потому, что нельзя же все определить и необходимо где-нибудь остановиться. Сказать: «сложение заключается в прибавлении» — не значит дать определение. Все, что можно сделать, это взять за исходный пункт некоторое число конкретных примеров и сказать: «действие, которое мы сделали, называется сложением».

Иное дело при вычитании; его можно логически определить как действие, обратное сложению. Но следует ли с этого и начинать? И здесь надобно начать с примеров, выяснить на них взаимность этих двух действий; тогда определение будет и подготовлено и оправдано.

То же самое нужно сказать об умножении. Надо взять частную задачу и показать на ней, что она может быть разрешена, если складывать между собой равные числа. Затем уже можно показать, что к такому же результату можно прийти посредством умножения, т. е. посредством действия, которое учениками уже усвоено, и тогда логическое определение выяснится само собой.

Деление необходимо определить как действие, обратное умножению; но начать нужно с примера, заимствованного из повседневного обихода, например с деления какого-нибудь предмета на равные доли, и на этом примере показать, что делимое получается посредством умножения.

Остаются действия над дробями. Некоторые затруднения здесь представляет только умножение. Лучше изложить сначала теорию пропорций, так как только из нее можно извлечь логическое определение.

Но для того чтобы стали приемлемы те определения, которые встречаются в начале этой теории, необходимо предварительно воспользоваться многими примерами, заимствованными из классических задач на тройное правило, вводя в них дробные величины. Можно без боязни прибегать к геометрическим образам для ознакомления учеников с понятием о пропорции; для этого либо нужно вызвать в их памяти воспоминания, если они уже занимались геометрией, либо обращаться к их непосредственной интуиции, что, между прочим, подготовит их к занятию геометрией. Прибавлю, наконец, что, дав определение умножения дробей, необходимо оправдать это определение, показав, что умножение является действием переместительным, сочетательным и распределительным, а также указать при этом, что такое доказательство приводится для оправдания определения.

Отсюда видно, какую роль играют во всем этом геометрические образы, и эта роль оправдывается философией и историей науки. Если бы арифметика не имела никакой геометрической примеси, она знала бы только целые числа; для приспособления к нуждам геометрии она кроме них изобрела еще и нечто другое.

Геометрия

В геометрии мы встречаемся на первых шагах с понятием о прямой линии. Можно ли определить прямую линию? Обычное определение ее как кратчайшего расстояния от одной точки до другой меня не удовлетворяет. Я исходил бы просто из линейки и показал бы ученику, как можно проверить линейку, повернув ее другой стороной, такая проверка есть истинное определение прямой линии: прямая линия — это ось вращения. Затем надобно ученику показать, что линейку можно проверить посредством скольжения, и при этом обнаружится одно из наиболее важных свойств прямой линии. Что же касается того свойства, что прямая линия есть кратчайшее расстояние между двумя точками, то это уже теорема, которая может быть доказана аподиктически[1]), но это доказательство слишком тонко, чтобы найти себе мéсто в курсе средней школы. Лучше было бы показать, что линейка, предварительно проверенная, налагается на натянутую проволоку. При всех затруднениях такого рода можно без опасений умножать число аксиом, оправдывая их даже на грубых примерах. Некоторое число аксиом необходимо должно быть допущено, и если число их немного превосходит то, которое строго необходимо, то беда еще невелика. Главное — это научить правильно рассуждать при помощи раз допущенных аксиом. Дедушка Сарсей[2]) часто говорил, что в театре зритель охотно принимает те постулаты, которые ему навязаны сначала, но раз занавес поднят, он становится неумолимым в своей логической требовательности. То же самое происходит в математике.

Для определения круга можно исходить из циркуля. Ученики с первого взгляда узнают начерченную кривую. Затем им покажут, что расстояние между двумя точками инструмента остается постоянным, что одна из этих точек неподвижна, а другая движется, и таким образом ученики естественно придут к логическому определению. Определение плоскости содержит в себе аксиому, этого не нужно скрывать. Возьмем рисовальную доску и покажем, что движущаяся линейка постоянно накладывается на эту плоскость, сохраняя при этом три степени свободы. Сравним затем плоскость с цилиндром и конусом, с поверхностями, на которые прямая может быть наложена только при сохранении двух степеней свободы. Возьмем далее три рисовальные доски и покажем сначала, что они, будучи наложены одна на другую, могут скользить при трех степенях свободы. И, наконец, чтобы установить различие между плоскостью и сферой, покажем, что две доски, накладывающиеся порознь на третью, накладываются также друг на друга.

Быть может, вас удивит это постоянное применение подвижных инструментов. Это не грубый прием, он более философский, чем это кажется с первого

---

[1]) Аподиктическим (*греч.*) называется такое доказательство, которое исключает возможность противного. — *Примеч. ред.*

[2]) Франциск Сарсей (1828—1899) — известный в то время французский театральный критик и журналист. — *Примеч. ред.*

взгляда. Что такое геометрия для философа? Это изучение некоторой группы. Какой именно? Группы движений твердых тел. Каким же образом определить эту группу, не заставляя двигаться некоторые твердые тела?

Должны ли мы сохранить классическое определение параллельных линий и сказать, что параллельными называются такие прямые, которые расположены в одной плоскости и никогда не встречаются, сколько бы их ни продолжали? Нет, ибо это определение отрицательное, оно не может быть проверено опытом и не может быть, следовательно, рассматриваемо как непосредственное данное интуицией. Определение это не может быть сохранено особенно еще потому, что оно совершенно чуждо понятию о группе, чуждо идее о движении твердых тел, которая, как я уже сказал, является истинным источником геометрии. Не лучше ли определить сначала прямолинейное переносное движение какой-либо неизменяемой фигуры как такое движение, в котором все точки этой фигуры описывают прямолинейные траектории, показать, что подобное перемещение возможно, когда треугольник скользит по линейке? Из экспериментального констатирования этого факта, возведенного в аксиому, легко было бы вывести как понятие о параллельной прямой, так и сам евклидов постулат.

Механика

Мне нет надобности останавливаться на определении скорости или ускорения, а также и других кинематических понятий; они с большим удобством могут быть отнесены к определению производной. Я остановлюсь, напротив, на динамических понятиях о силе и массе.

Одна вещь меня поражает, а именно: сколь многие молодые люди, получившие среднее образование, далеки от того, чтобы применять к реальному миру те механические законы, которые им были преподаны. И это не только потому, что они к этому неспособны, но и потому, что об этом даже и не думают. Для них мир науки и мир реальности отделены друг от друга непроницаемой перегородкой. Нередко можно видеть господина, прилично одетого, вероятно, бакалавра, сидящего в карете и воображающего, что он помогает ей двигаться, толкая ее вперед, вопреки принципу действия и противодействия.

Если мы попытаемся проанализировать душевное состояние наших учеников, то это нас менее удивит. Каково в их глазах настоящее определение силы? Не то определение, которое они произносят наизусть, но то скрытое в далеком углу их разума, которое из него всем управляет? Вот это определение: силы суть стрелы, при помощи которых составляются параллелограммы. Эти стрелы суть воображаемые существа, которые ничего общего не имеют с тем, что существует в природе. Но этого не случилось бы, если бы раньше, чем изображать силы при помощи стрелок, ученикам показали бы их в действительности.

Как же определить силу? Логическое определение, как я это показал в другом месте, вряд ли уместно. Есть определение антропоморфное: ощущение мускульного усилия, но оно поистине слишком грубо и ничего полезного из него извлечь нельзя.

Вот тот путь, по которому нужно следовать. Для того чтобы познакомить с понятием силы, нужно показать в последовательном порядке все виды этого понятия. Эти виды очень многочисленны и разнообразны, как-то: давление жидкостей на стенки сосудов, в которых они заключаются; напряжение проволок; упругость пружины; тяжесть, которая действует на все молекулы тела; трение; взаимное нормальное действие и противодействие двух твердых тел, касающихся друг друга.

Это определение, конечно, только качественное. Нужно научиться измерять силу. Здесь надобно сначала показать, что можно одну силу заменить другой, не нарушая равновесия. Первый пример такой замены мы найдем в рычажных весах и в двойном взвешивании Борда [1]. Мы покажем затем, что данный вес может быть заменен не только другим весом, но и силами, отличающимися по своей природе; на-

[1]) Борда (1733—1799) — французский ученый. Усовершенствовал способы точного взвешивания тел. — *Примеч. ред.*

пример, нажим Прони[1]) позволяет нам заменить вес трением.

Из всего этого вытекает понятие об эквивалентности двух сил.

Необходимо теперь определить направление силы. Если сила F эквивалентна другой силе F', приложенной к данному телу через посредство натянутой проволоки, так что сила F может быть заменена силой F' без всякого нарушения равновесия, то точка приложения проволоки будет, согласно определению, точкою приложения силы F' и, следовательно, эквивалентной силы F. Направление проволоки будет направлением силы F' и направлением эквивалентной силы F.

Отсюда мы переходим к сравнению величины сил. Если одна сила может заместить две другие одного и того же направления, значит, она равна их сумме; показать это можно на примере с гирей в 20 граммов, замещавшей две гири по 10 граммов.

Достаточно ли этого? Нет еще. Мы умеем сравнивать интенсивность двух сил, имеющих одно и то же направление и одну и ту же точку приложения. Нужно уметь производить сравнения и в том случае, когда направления различны. Для этого вообразим проволоку, перекинутую через блок и натянутую при помощи гири; мы скажем тогда, что натяжение обеих частей проволоки одинаково и равно весу натягивающего груза.

Вот наше определение. Оно позволяет нам сравнить натяжение двух частей проволоки или нити и, пользуясь предыдущими определениями, сравнить любые две силы, имеющие то же направление, что и обе нити. Нужно оправдать его, показав, что натяжение второй части нити остается тем же при том же натягивающем весе, каковы бы ни были число и расположение направляющих блоков. Нужно дополнить еще это определение, указав, что оно верно лишь в тех случаях, когда блоки не производят трения.

Дав эти определения, нужно показать, что точка приложения, направление и интенсивность достаточны

---

[1]) Прони (1755—1839) — французский ученый и инженер, которому принадлежит целый ряд работ по прикладной механике. Предложил нажим с рычагом для измерения работ машин. — *Примеч. ред.*

для определения силы; что две силы, у коих эти три элемента одинаковы, всегда эквивалентны и всегда могут друг друга заменить как в состоянии равновесия, так и в состоянии движения, и притом независимо от других сил, привходящих в систему.

Нужно показать, что две сходящиеся силы всегда могут быть заменены одной равнодействующей и что эта равнодействующая остается одной и той же как в том случае, когда тело остается в покое, так и в случае его движения, и притом независимо от других приложенных к нему сил.

Нужно показать, наконец, что силы, определенные таким образом, как мы показали, удовлетворяют принципу равенства действия и противодействия.

Все это есть опыт, но только опыт и может нас этому научить.

Достаточно привести несколько примеров из тех обычных действий, которые ученики без всяких колебаний производят ежедневно, и сделать на их глазах несколько простых и хорошо подобранных опытов.

Когда ученики прошли по всем этим обходным путям, можно перейти к изображению сил при помощи стрелок, но я считал бы желательным, чтобы воспитатели, развивая в учениках способность рассуждать, возвращались время от времени от символа к реальности. Не представит труда, например, иллюстрировать параллелограмм сил при помощи прибора, составленного из трех нитей, проходящих через блоки и натянутых посредством грузов, которые уравновешивают друг друга в одной и той же точке.

Зная силу, легко определить массу. На этот раз определение должно быть заимствовано из динамики. Иначе этого сделать нельзя, так как цель, которой здесь хотят достигнуть, заключается в уяснении различия между массой и весом. Здесь определение также должно быть подготовлено рядом опытов. У нас есть машина, которая, как будто, нарочно создана для того, чтобы познать, что такое масса, это — машина Атвуда. Затем следует напомнить о законах падения тел, о том, что ускорение тяжести остается одним и тем же для тяжелых и легких тел, что оно изменяется вместе с географической широтой и т. д.

Если вы мне теперь скажете, что методы, которые я пропагандирую, давно уже применяются в лицеях, я буду более обрадован, чем удивлен. Я знаю, что в общем у нас обучение математике поставлено удовлетворительно. Я не хочу, чтобы оно было нарушено, это меня опечалило бы, я желаю лишь медленных прогрессивных улучшений. Это обучение не должно подвергаться крутым колебаниям и капризу преходящей моды. Его высокая воспитательная ценность померкла бы в такой буре. Здравая и прочная логика должна по-прежнему лежать в его основании. Определение, внушаемое при помощи примеров, всегда необходимо, но оно должно подготовлять определение, а не заменять его; оно должно по крайней мере выяснить желательность такого логического определения в тех случаях, когда это последнее с пользой для дела может быть дано лишь на ступени высшего обучения.

Вы, конечно, понимаете, что изложенными соображениями я отнюдь не отказываюсь от того, что писал раньше. Я часто имел случай критиковать некоторые определения, которые я теперь сам же предлагаю. Эта критика сохраняет всю свою силу. Определения, о которых идет речь, могут быть только предварительными. Но пройти через эти определения необходимо.

Глава III

МАТЕМАТИКА И ЛОГИКА

Введение

Можно ли математику свести к логике, не обращаясь предварительно к тем принципам, которые ей, математике, свойственны? Существует школа математиков, которая со всей страстью и верой в дело стремится доказать это. Она выработала специальный язык, в котором нет больше слов, а имеются одни только знаки. Этот язык понятен только немногим посвященным, так что профаны склонны преклоняться перед категорическими утверждениями горячих адептов. Небесполезно, однако, ближе исследовать эти утверждения, чтобы убедиться, насколько оправдывается тот категорический тон, с которым они высказываются.

Но чтобы понять сущность вопроса, необходимо познакомиться с историческими деталями дела и в особенности вспомнить характер работ Кантора.

Понятие бесконечности уже давно было введено в математику. Но эта бесконечность была такой, какую философы называют потенциальной. В математике бесконечность обозначала количество, способное расти выше или ниже какого бы то ни было предела; это было изменяющееся количество, о котором можно было сказать, что оно перейдет все пределы, но нельзя было сказать, что оно их перешло. Кантор решил ввести в математику актуальную бесконечность, т. е. количество, не только способное перейти все пределы, но уже перешедшее через них. Он поставил себе вопросы вроде следующих: существует ли больше точек в пространстве, чем целых чисел? Существует ли больше точек в пространстве, чем точек на плоскости? И так далее.

Число целых чисел, число точек в пространстве и т. д. составляет то, что Кантор назвал кардинальным трансфинитным числом, т. е. таким количественным числом, которое больше всех обыкновенных количественных чисел. Кантор затем занялся сравнением этих кардинальных трансфинитных чисел. Размещая в соответствующем порядке элементы в совокупности, составленной из бесконечного числа таких элементов, он изобрел так называемые порядковые трансфинитные числа, на которых я не буду здесь останавливаться.

Многие математики последовали за Кантором и поставили ряд аналогичных вопросов. Они в такой степени освоились с трансфинитными числами, что готовы поставить теорию конечных чисел в зависимость от теории кардинальных чисел Кантора. По их мнению, чтобы вести преподавание арифметики по действительно логическому методу, необходимо начать с установления общих свойств кардинальных трансфинитных целых чисел, а затем выделить из них очень небольшой класс обыкновенных целых чисел. Этим способом можно было бы достигнуть цели, т. е. доказать все предложения, относящиеся к этому небольшому классу (т. е. всю нашу арифметику и нашу алгебру), не прибегая ни к какому началу, лежащему вне логики.

Этот метод, очевидно, противоречит всякой здоровой психологии. Конечно, не этим путем шел человеческий ум, создавая математику; и адепты нового метода, я полагаю, не думают ввести его на ступени среднего образования. Но по крайней мере логичен ли этот метод или, лучше сказать, безошибочен ли он? В этом можно усомниться.

Однако геометры, пользовавшиеся этим методом, очень многочисленны. Они собрали массу формул. Написав мемуары, в которых формулы не чередовались со словесными объяснениями, как это делается в обыкновенных математических книгах, а в которых, следовательно, такие объяснения совершенно отсутствуют, они вообразили, что освободились от всего того, что не представляет собой чистой логики. К несчастью, они пришли к противоречивым результатам. Это так называемые антиномии Кантора, к которым мы еще вернемся. Эти противоречия, однако, их не обескуражили, и они попытались внести такие изменения в свои правила, при которых обнаружившиеся уже противоречия исчезли; но мы при этом не приобрели уверенности в том, что не обнаружатся новые противоречия.

Настало время для справедливой оценки этих преувеличений. Я не надеюсь убедить упомянутых математиков: слишком долго дышали они своей атмосферой. Да и, кроме того, если вы опровергли одно из их доказательств, вы можете быть уверены, что оно возродится лишь в слегка измененном виде. Некоторые из доказательств уже несколько раз возрождались из пепла, наподобие той лернейской гидры[1]), у которой вырастали новые головы. Геркулес выпутался из затруднения, потому что его гидра имела девять голов, если не одиннадцать; но здесь слишком много голов: они имеются в Англии, в Германии, в Италии, во Франции, и Геркулес должен был бы отказаться от состязания. Я обращаюсь поэтому только к непредубежденным людям, обладающим здравым смыслом.

---

[1]) Чудовищная девятиголовая змея, которая, как говорят древнегреческие мифы, жила в Лернейском болоте. На месте отрубленных голов у нее вырастали новые.— *Примеч. ред.*

I

В последние годы появилось много трудов, посвященных чистой математике и философии математики, имевших своей задачей выделить и изолировать логические элементы математического рассуждения. Эти труды были ясно изложены и исследованы в работе Кутюра, озаглавленной: «Основания математических наук».

По мнению Кутюра, новейшие труды, в особенности работы Рассела и Пеано, окончательно разрешили давний спор между Лейбницем и Кантом[1]). Они показали, что не существует синтетического априорного суждения (этим именем Кант называл суждения, которые не могут быть ни доказаны аналитически, ни сведены к тождествам, ни установлены экспериментально); они показали, что математические науки целиком могут быть сведены к логике и что интуиция не играет в них никакой роли.

Все это Кутюра изложил в названном выше сочинении. Еще отчетливее высказал он это в речи, произнесенной на юбилее Канта, высказал так убедительно, что мой сосед сказал в полголоса: «мы видим ясно, что истекло столетие со дня смерти Канта».

Можем ли мы подписаться под этим решительным приговором? Я этого не думаю и постараюсь ниже показать, почему я этого не думаю.

II

Что нам сразу бросается в глаза в новой математике, так это ее чисто формальный характер. «Вообразим, — говорит Гильберт, — три рода вещей, которые мы назовем точками, прямыми и плоскостями; условимся, что прямая будет определяться двумя точками, и вместо того, чтобы сказать, что данная

---

[1]) Имеется в виду не действительный спор между ними, который был бы невозможен, поскольку они жили в разное время, а противопоставление взглядов Лейбница и Канта на математику. Лейбниц считал, что все математические науки можно воплотить в некотором универсальном логическом исчислении, Кант же утверждал, что математические положения могут доказываться только путем обращения к наглядному представлению, которое дается априорными формами чувственности. — *Примеч. ред.*

прямая определяется данными двумя точками, мы будем говорить, что она проходит через эти две точки или что эти две точки расположены на этой прямой». Что́ это за вещи, мы не только не знаем, но и не должны стремиться узнать. Нам этого не нужно, и всякий, кто никогда не видел ни точки, ни прямой, ни плоскости, так же легко мог бы построить геометрию, как и мы. Слова «проходят через» или «расположены на» не должны вызывать у нас никакого образа, ибо первые являются синонимом слова «определяться», вторые — синонимом слова «определять».

Таким образом, для доказательства теоремы не нужно и даже бесполезно знать, что она хочет сказать. Геометра можно было бы заменить «логической машиной», выдуманной Стенли Джевонсом. Или, если угодно, можно было бы выдумать машину, в которую через один конец были бы введены аксиомы, а в другом конце ее были бы собраны теоремы, наподобие той легендарной машины в Чикаго, в которую вкладывают живых поросят и из которой извлекают окорока и сосиски. Математик, как и эта машина, отнюдь не должен понимать, что он делает.

Я не ставлю в вину Гильберту этот формальный характер его геометрии. Он должен был прийти к ней, разрешая ту проблему, которую он себе ставил. Он хотел довести до минимума число основных аксиом геометрии и перечислить их все без остатка. Но в тех суждениях, в которых наш ум обнаруживает активность, в которых интуиция еще играет роль, трудно отделаться от внесения постулата или аксиомы, которые незаметно входят в суждение. Лишь в случае, если бы все геометрические суждения приняли чисто механическую форму, Гильберт мог бы быть уверенным в том, что он исполнил свое намерение и успешно закончил свою задачу.

То, что Гильберт сделал в геометрии, другие захотели сделать в арифметике и в анализе. Однако если бы они в этом даже и успели, то разве кантианцы были бы осуждены на полное молчание? Может быть, и нет, ибо когда мы сообщаем математической мысли пустую форму, эта мысль, конечно, подвергается искажению. Допустим даже, что удалось установить, что все теоремы могут быть выведены из конечного числа аксиом путем чисто аналитических приемов, путем простых логических комбинаций, и что эти аксиомы суть не что иное, как соглашения. Философ, однако, сохранил бы за собой право исследовать происхождение этих условий и определить, почему эти условия оказались предпочтительными перед противоположными им.

Кроме того, не одна только логическая правильность суждений, ведущих от аксиом к теоремам, должна нас занимать. Разве вся математика исчерпывается правилами совершенной логики? Это было бы все равно, как если бы мы сказали, что все искусство шахматного игрока сводится к правилам хода пешек. Из всех построений, которые могут быть скомбинированы из материалов, доставляемых логикой, нужно сделать выбор. Настоящий геометр и производит этот выбор здраво, руководствуясь верным инстинктом или же некоторым смутным сознанием о — я не знаю какой именно — более глубокой и более скрытой геометрии, которая одна и составляет ценность воздвигнутого здания.

Искать происхождение этого инстинкта, изучать законы этой глубокой геометрии, которые чувствуются, но словесно не формулируются — вот прекрасная задача для философов, которые не допускают, что логикой исчерпывается все. Но не на эту точку зрения хочу я стать, не так хочу я ставить вопрос. Инстинкт, о котором мы только что говорили, необходим изобретателю, но на первый взгляд кажется, будто при изучении уже созданной науки можно обойтись и без него. И вот я хочу исследовать, можно ли, приняв однажды принципы логики, я уж не говорю открыть, но даже доказать все математические истины, не прибегая снова к интуиции.

III

На этот вопрос я однажды уже дал отрицательный ответ (см. «Наука и гипотеза», глава I). Должен ли я этот ответ изменить ввиду появившихся новых трудов? Если я в то время ответил отрицательно, то это потому, что «принцип совершенной индукции» казался мне, с одной стороны, необходимым для математика, а с другой стороны, не сводимым к логике.

Известно, что этот принцип заключается в следующем.

«Если какое-либо свойство справедливо относительно числа 1 и если установлено, что оно справедливо относительно числа $n+1$, коль скоро оно справедливо относительно числа n, то оно будет верно для всех целых чисел».

В этом я по преимуществу видел математическое суждение. Я не хотел этим сказать, как некоторые это думали, что все математические суждения могут быть сведены к приложению этого принципа. Исследуя эти суждения ближе, можно заметить, что в них применяются многие другие аналогичные принципы, обладающие теми же существенными признаками. В их ряду принцип полной индукции является лишь простейшим, и вот почему я остановился на нем как на типичном.

Название принципа совершенной индукции, упрочившееся за этой формой суждения, не может быть признано правильным. Этот способ суждения представляет настоящую математическую индукцию, которая отличается от обыкновенной индукции только степенью своей достоверности.

IV

Определения и аксиомы

Существование подобных принципов ставит непримиримых логиков в затруднительное положение. Но как думают они выпутаться из него? Принцип полной индукции, говорят они, не есть аксиома в собственном смысле слова или априорное синтетическое суждение, он есть просто определение целого числа. Следовательно, этот принцип является простым соглашением. Чтобы разобраться в этой точке зрения, нужно подробнее исследовать отношения между определениями и аксиомами.

Обратимся сначала к статье Кутюра о математических определениях, появившейся в выходящем в Женеве журнале «Математическое образование». Мы найдем здесь различие между прямым определением и определением при помощи постулатов.

«Определение при помощи постулатов, — говорит Кутюра, — применяется не к одному понятию, а к системе понятий; оно заключается в перечислении основных соотношений, их связывающих и позволяющих доказать все прочие их свойства; эти соотношения и суть постулаты»...

Если предварительно были определены все эти понятия, за исключением одного, то это последнее и будет по определению тем объектом, который проверяет эти постулаты.

Итак, некоторые недоказуемые аксиомы математики суть лишь скрытые определения. Такая точка зрения часто правомерна, и я сам ее принял, когда шел вопрос, например, о постулате Евклида. Другие аксиомы геометрии недостаточны для полного определения расстояния между двумя точками. Ввиду этого из всех величин, удовлетворяющих этим остальным аксиомам, расстояние будет по определению той именно величиной, которая удовлетворяет постулату Евклида.

Так вот логики в применении к принципу совершенной индукции допускают то же самое, что я допускаю относительно постулата Евклида; они хотят видеть в этом принципе только скрытое определение.

Но они вправе это сделать лишь при двух условиях. Стюарт Милль сказал, что всякое определение заключает в себе одну аксиому, а именно ту, которая утверждает существование определяемого объекта. В таком случае не аксиома будет скрытым определением, а, напротив, определение будет скрытой аксиомой. Милль понимал слово «существование» в эмпирическом и материальном смысле слова. Он хотел сказать, что, определяя круг, утверждают тем самым, что в природе имеются круглые предметы.

В таком виде его мнение неприемлемо. Математика независит от существования материальных объектов. В математике слово «существующее» имеет только один смысл и обозначает: «свободное от противоречия». При такой поправке мысль Стюарта Милля становится точной; определяя какой-нибудь объект, мы утверждаем, что определение не заключает противоречия.

Если, следовательно, мы имеем систему постулатов и если мы можем доказать, что эти постулаты не заключают противоречия, то мы вправе рассматривать их как определения одного из тех понятий, которые фигурируют в этой системе предложений. Если мы этого доказать не можем, то мы допускаем понятие без доказательства. Тогда мы имеем аксиому; и если мы искали определение в постулатах, то мы обратно находим аксиому в определении.

Чаще всего, для того чтобы доказать, что определение не заключает противоречия, прибегают к методу примеров: пытаются создать пример предмета, удовлетворяющий определению. Возьмем определение, выражаемое при помощи постулатов. Мы хотим определить понятие A и говорим, что, согласно определению, A есть всякий предмет, для которого известные постулаты истинны. Если мы можем прямо доказать, что все эти постулаты истинны для известного предмета B, то определение будет оправдано, и предмет B будет примером понятия A. Мы будем уверены, что постулаты непротиворечивы, так как имеются случаи, в которых все они оказываются истинными.

Но такое прямое доказательство при помощи примера не всегда возможно.

Чтобы установить, что постулаты не содержат в себе противоречия, нужно рассмотреть все предложения, которые могут быть выведены из данных постулатов как посылок, и показать, что среди этих предложений нет двух, противоречащих друг другу. Если число этих предложений конечное, то прямая проверка возможна. Но такой случай и встречается редко, и интереса не представляет.

Если же число этих предложений оказывается неограниченным, то прямая проверка уже невозможна. Тогда необходимо обратиться к таким способам доказательства, в которых вообще нельзя обойтись без принципа полной индукции, т. е. того принципа, который именно и надлежит проверить.

Мы указали на одно условие, которому логики должны были удовлетворить, и мы увидим ниже, что они ему не удовлетворили.

V

Есть еще другое условие. Если мы даем определение, то мы делаем это для того, чтобы им пользоваться.

В пределах некоторого рассуждения, например, мы неоднократно встречаемся с определяемым словом. Возникает вопрос: вправе ли мы в отношении к предмету, который мы в этом рассуждении называем нашим термином, утверждать тот постулат, который послужил для его определения? Очевидно, вправе, если термин сохранил свой смысл, если мы неявно (implicite) не приписали ему другого значения. Но иногда такое изменение смысла имеет место и при этом чаще всего остается незамеченным. Необходимо убедиться, каким путем это слово проникло в наше рассуждение, не вошло ли оно в другом определении, отличающемся от того, которое было формулировано первоначально.

Это затруднение встречается во всех приложениях математического знания. Математическое понятие получило вполне чистое и строгое определение, которое не возбуждает никаких колебаний в чистой математике. Но, когда мы его применяем, например, к физическим наукам, тут мы уже имеем дело не с этим чистым понятием, но с конкретным предметом, который зачастую является лишь грубым образом этого понятия. Сказать, что этот предмет удовлетворяет, хотя бы приблизительно, определению, это значит высказать новую истину, которая может быть подтверждена только опытом и которая уже не имеет характера условного постулата.

Но то же затруднение встречается и в пределах чистой математики.

Вы даете тонкое определение числа. Но, однажды дав его, вы о нем больше не думаете, ибо в действительности не из этого определения вы узнали, что такое число, а вам это уже давно было известно; и когда в дальнейшем вы употребляете слово «число», вы приписываете ему такое же значение, какое ему дает первый встречный. Чтобы узнать, каково это значение и остается ли оно одним и тем же в той или другой фразе, необходимо проследить, что заставило вас заговорить о числе и ввести это слово в обе фразы. Я не буду больше здесь по этому поводу распространяться, так как нам еще представится случай вернуться к этому вопросу.

Итак, вот слово, которому мы явно (explicite) дали некоторое определение A; затем мы пользовались им в рассуждении таким образом, что неявно (implicite) внесли другое его определение *B*. Возможно, что оба определения обозначают одно и то же. Но самая эта возможность есть уже новая истина, которую нужно либо доказать, либо допустить как независимую аксиому.

Мы увидим ниже, что логики столь же мало удовлетворили второму условию, сколько первому.

VI

Определения числа чрезвычайно многочисленны и разнообразны; я отказываюсь даже перечислить имена авторов, давших эти определения. В этом нет ничего удивительного. Если бы одно из них было удовлетворительно, не было бы нужды в прочих. Если всякий новый философ, занимавшийся этим вопросом, считал необходимым изобрести другое определение, то это потому, что определения предшественников его не удовлетворяли, а не удовлетворяли они его потому, что он усматривал в них petitio principii [1]).

Когда я читал труды, посвященные этой проблеме, я всегда испытывал чувство беспокойства; я ожидал, что натолкнусь на petitio principii, и если не встречал этой логической ошибки с самого начала, то всегда опасался, что просмотрел ее.

И это потому, что невозможно дать определение, не выражая его при помощи фразы; с другой стороны, трудно сказать фразу, не вводя в нее слова «число», или слова «несколько», или, наконец, какого-либо слова во множественном числе. И вот уже готова наклонная плоскость; в каждое мгновение мы рискуем впасть в petitio principii.

В дальнейшем я остановлюсь только на тех определениях, в которых petitio principii наиболее искусно скрыто.

VII

Пасиграфия

Символический язык, который создал Пеано, играет большую роль в новых исследованиях. Этот

[1]) Аргумент, основанный на выводе из положения, которое само требует доказательства. — *Примеч. ред.*

язык может оказать некоторые услуги, но мне кажется, что Кутюра приписывает ему такое преувеличенное значение, которое удивило бы и самого Пеано.

Существенным элементом в этом языке являются определенные алгебраические знаки, представляющие собой различные союзы: «если», «и», «или», «следовательно». Возможно, что эти знаки и удобны, но призваны ли они обновить всю философию — это совершенно другой вопрос. Трудно допустить, чтобы слово «если», изображенное при помощи знака ɔ, приобрело особенное свойство, которого оно не имело раньше.

Это изобретение Пеано названо было сначала пасиграфией, т. е. искусством писать математические трактаты, не употребляя ни одного слова из житейского словаря. Это название очень точно определяет и меру важности самого искусства. Но позже изобретению Пеано было предписано более высокое достоинство, и ему дали название логистики. Последнее слово, кажется, употребляется в военных школах для обозначения искусства квартирмейстера, искусства передвижения и распределения войск; но здесь нет никакого основания опасаться смешения понятий, и сразу видно, что новое слово выражает намерение революционизировать логику.

Применение нового метода можно видеть в математическом мемуаре Бурали-Форти, озаглавленном: «Вопрос о трансфинитных числах» и помещенном в XI томе «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo».

Я должен прежде всего сказать, что этот мемуар чрезвычайно интересен, и потому именно беру его в качестве примера, что он является важнейшим из всех трудов, написанных на новом языке. К тому же и люди непосвященные легко могут его читать благодаря имеющемуся в нем междустрочному итальянскому переводу.

Важность этого мемуара заключается в том, что в нем дан первый пример тех антиномий, которые встречаются в изучении трансфинитных чисел и которые на протяжении нескольких лет приводили в отчаяние математиков. Цель настоящего мемуара, говорит Бурали-Форти, это показать, что могут быть два трансфинитных числа (порядковых) a и b, причем a не будет ни равно, ни больше, ни меньше b.

Пусть читатель будет спокоен; чтобы понять рассуждение, которое последует, ему нет необходимости знать, что такое порядковое трансфинитное число.

Между тем Кантор точно показал, что между двумя трансфинитными числами, как и между двумя конечными числами, не может быть другого отношения, кроме равенства либо неравенства в ту или другую сторону. Но не о сути этого мемуара хочу я здесь говорить, это увлекло бы меня далеко от моего предмета. Я хочу лишь заняться формой и задаюсь вопросом, много ли выиграл автор в строгости положений, применяя эту форму, и вознаграждает ли она за те усилия, которые писатель и читатель должны употребить.

Мы видим, что Бурали-Форти определяет число 1 следующим образом:

$$1 = \iota T' \{\mathrm{Ko} \frown (u,\ h)\, \varepsilon\, (u \varepsilon\, \mathrm{Un})\}.$$

Это определение в высшей степени подходит для того, чтобы дать представление о числе 1 тем лицам, которые никогда о нем ничего не слышали!

Я слишком мало понимаю приверженцев Пеано, чтобы рискнуть его критиковать; но я опасаюсь, что это определение заключает petitio principii, так как я вижу цифру 1 в первой части и изображенное буквами слово «один» (Un) во второй части равенства.

Как бы то ни было, Бурали-Форти исходит из этого определения и после коротких вычислений приходит к уравнению

$$1 \varepsilon NO, \tag{27}$$

которое дает нам понять, что «один» есть число.

Так как нам теперь приходится иметь дело с определениями простых чисел, то мы напомним, что Кутюра также определил 0 и 1.

Что такое нуль? Это число элементов нулевого класса. А что такое нулевой класс? Это класс, который не содержит никакого элемента.

Определять нуль при помощи нулевого класса, а нулевой класс при помощи термина «никакой» — это значит поистине злоупотреблять богатством языка; поэтому Кутюра ввел усовершенствование в свое определение, написав:

$$0 = \iota\Lambda : \varphi x = \Lambda . \supset . \Lambda = (x \varepsilon \varphi x),$$

что обозначает: нуль есть число предметов, удовлетворяющих такому условию, которое никогда не выполняется.

Но так как «никогда» обозначает «ни в одном случае», то я не вижу значительного успеха в этой замене.

Спешу прибавить, что определение, которое Кутюра дает числу 1, более удовлетворительно.

«Один,— говорит он,— в сущности, есть число элементов класса, два любых элемента коего тождественны».

Это определение более удовлетворительно, как я сказал, в том смысле, что для определения понятия 1 автор не пользуется словом «один». Но зато он пользуется словом «два». И я боюсь, что если спросить у Кутюра, что такое «два», то он должен будет в ответе воспользоваться словом «один».

VIII

Вернемся к мемуару Бурали-Форти. Я сказал, что его заключения прямо противоположны выводам Кантора. Но однажды меня посетил Адамар. Разговор коснулся этой антиномии.

— Не кажется ли вам,— сказал я,— что рассуждение Бурали-Форти безупречно?

— Нет, напротив, я не вижу в нем никаких возражений Кантору. Кроме того, Бурали-Форти не имел права говорить о совокупности всех порядковых чисел.

— Простите, он имел это право, потому что всегда мог написать:

$$\Omega = T' (\mathrm{No}, \ \bar{\varepsilon} >).$$

— Я хотел бы знать, кто бы мог ему в этом воспрепятствовать, и можно ли сказать, что предмет не существует, если его назвали Ω?

Мои старания были тщетны, убедить Адамара я не мог (противоположное было бы, впрочем, очень прискорбно, так как он был прав). Потому ли это было, что я не говорил достаточно красноречиво на языке Пеано? Возможно; но, между нами говоря, я этого не думаю.

Таким образом, несмотря на весь этот пасиграфический аппарат, вопрос не был разрешен. Что это доказывает? Когда вопрос идет только о том, чтобы доказать, что один есть число, пасиграфия достаточна; но если представляется затруднение, если возникает антиномия, требующая разрешения, то пасиграфия становится бессильной.

Глава IV

НОВЫЕ ЛОГИКИ

I

Логика Рассела

Чтобы оправдать свои притязания, логика должна была преобразоваться. Народились новые логики, среди которых наиболее интересной является логика Рассела. Казалось бы, что в области формальной логики ничего нового нельзя сказать и что Аристотель давно узрел ее основы. Но поле действия, которое Рассел отводит логике, бесконечно шире, чем поле классической логики, и Рассел сумел высказать в этом отношении оригинальные и часто правильные взгляды.

Между тем как логика Аристотеля была преимущественно логикой классов и за исходную точку брала отношение субъекта к предикату, Рассел прежде всего подчиняет логику классов логике предложений. Классический силлогизм «Сократ — человек и т. д.» уступает место гипотетическому силлогизму: если *A* истинно, то *B* истинно, но если *B* истинно, то *C* истинно и т. д.; и эта идея, на мой взгляд, одна из наиболее счастливых, ибо классический силлогизм легко свести к гипотетическому, тогда как обратное превращение представляет затруднение.

Но это не все: логика предложений Рассела есть этюд о законах, по которым комбинируются союзы «если», «и», «или» и отрицание «не». Это значительное расширение старой логики. Свойства классического силлогизма без труда распространяются на гипотетический силлогизм, и в формах последнего легко узнаются схоластические формы. Мы находим здесь то, что является существенным в классической логике. Но теория силлогизма есть еще не что иное, как синтаксис союза «если» и, быть может, отрицания.

Присоединяя два других союза — «и» и «или»,— Рассел открывает логике новую область. Знаки «и», «или» подчиняются тем же законам, что и знаки $\times$ и $+$, т. е. переместительному, сочетательному и распределительному законам. Таким образом, «и» представляет логическое умножение, тогда как «или» представляет логическое сложение. Это также весьма интересно.

Рассел приходит к выводу, что какое-нибудь ложное предложение заключает в себе и все прочие истинные или ложные предложения. Кутюра говорит, что этот вывод покажется на первый взгляд парадоксальным. Но кто исправлял плохую кандидатскую математическую работу, тот мог заметить, насколько правильно смотрит на дело Рассел. Кандидат часто много трудится для того, чтобы найти первое ложное уравнение; но лишь только он его получил, для него уже не представляет никакого труда сделать из него самые неожиданные выводы, из которых иные могут оказаться и точными.

II

Отсюда ясно, насколько новая логика богаче классической логики. Символы разрослись и сочетаются в разнообразные комбинации, число которых уже неограничено. Вправе ли мы так сильно расширять смысл слова «логика». Разбирать этот вопрос и вступать с Расселом в спор о слове — занятие бесцельное. Признаем то, чего требует Рассел, но не будем удивляться, если окажется, что некоторые истины, которые мы считали несводимыми к логике в старом смысле этого слова, теперь сводятся к новой логике, которая совершенно отличается от прежней.

Мы ввели большое число новых понятий, и эти понятия не были простыми комбинациями старых. Рассел на этот счет не обманывался; не только в начале первой главы, т. е. логики предложений, но в начале второй и третьей глав, т. е. логики классов и отношений, он вводит новые слова, которые принимает как определению не подлежащие.

Но это не все, он вводит также принципы, которые признает недоказуемыми. Но эти недоказуемые принципы являются обращениями к интуиции, являются априорными синтетическими суждениями. Мы принимали их за интуитивные, когда встречали их в более или менее явной форме в математических трактатах. Но изменился ли их характер от того, что смысл слова «логика» расширился и что мы находим их теперь в книге, носящей заголовок «Трактат по логике»? Они не изменили своей природы, они изменили лишь свое место.

III

Можно ли рассматривать эти принципы как скрытые определения?

Чтобы дать положительный ответ на этот вопрос, нужно было бы быть в состоянии доказать, что они не заключают в себе противоречия. Нужно установить, что, как бы далеко мы ни проводили ряд дедукций, мы никогда не впадем в противоречие с собой.

Можно было бы попытаться рассуждать таким образом. Мы можем проверить, что операции новой логики, будучи приложены к посылкам, не заключающим противоречия, приводят только к следствиям, также свободным от противоречия. Если, следовательно, после n операций мы не пришли к противоречию, то мы не придем к противоречию после $n+1$ операций. Невозможно, следовательно, наступление такого момента, когда противоречие началось бы, а это доказывает, что мы никогда не можем к нему прийти. Вправе ли мы так рассуждать? Нет, ибо это значило бы прибегнуть к полной индукции; принцип же полной индукции, будем это помнить, еще нам неизвестен.

Мы не вправе, следовательно, рассматривать эти аксиомы как скрытые определения, и нам остается только один исход: допустить для каждой из них новый акт интуиции. И такова именно, я думаю, мысль Рассела и Кутюра.

Таким образом, каждое из девяти неопределяемых понятий и каждое из двадцати недоказуемых предложений (я думаю, что если бы я считал, то насчитал бы их несколько больше), которые составляют основу новой логики, логики в широком смысле слова, предполагают акт новый, независимый от нашей интуиции, предполагают — почему этого не сказать? — настоящее синтетическое априорное суждение. В этом вопросе все, кажется, согласны. Но Рассел утверждает, что этими обращениями к интуиции дело и закончится, что в других обращениях не будет более нужды и можно будет построить всю математику, не вводя никакого нового элемента. Это мне и кажется сомнительным.

IV

Кутюра часто повторяет, что эта новая логика совершенно не зависит от идеи о числе. Я не стану подсчитывать, как часто в его изложении встречаются числительные, как количественные, так и порядковые, или неопределенные прилагательные, как, например, «несколько». Процитируем, однако, некоторые примеры:

«Логическое произведение двух или нескольких предложений есть...».

«Все предложения допускают только двоякую оценку: как истинные или как ложные».

«Относительное произведение двух отношений есть отношение».

«Отношение имеет место между двумя терминами» и т. д.

В некоторых случаях можно было бы избежать неудобства такого выражения, но иногда оно требуется существом дела. Отношение не может быть понято без двух терминов; нельзя иметь интуиции отношения, не имея в то же время интуиции двух его терминов; мало того, мы должны усмотреть, что есть два термина, ибо для того, чтобы можно было постигнуть отношение, необходимо, чтобы этих терминов было два и только два.

V

Арифметика

Я подхожу к тому, кто Кутюра называет теорией расположения (или порядка) и что является основанием арифметики в собственном смысле этого слова.

Кутюра начинает с формулировки пяти аксиом Пеано, независимость которых доказали Пеано и Падоа.

1. Нуль есть целое число.

2. Нуль не следует ни за каким целым числом.

3. Следующее за целым числом есть целое число; к этому следовало бы прибавить: всякое целое число имеет следующее за ним число.

4. Два целых числа равны, если равны следующие за ними числа.

Пятая аксиома есть принцип полной индукции.

Кутюра смотрит на эти аксиомы как на скрытые определения; они содержат выраженные при помощи постулатов определения нуля, целого числа и «следующего числа».

Но, как мы видели, для того чтобы основанное на постулатах определение могло быть принято, необходимо установить, что оно не заключает противоречия.

Имеем ли мы дело здесь с таким именно случаем? Нисколько.

Доказательства этого нельзя дать с помощью примера. Нельзя выбрать часть всех целых чисел, например первые три числа, и доказать, что они удовлетворяют определению.

Если я возьму ряд 0, 1, 2, то увижу, что он удовлетворяет аксиомам 1, 2, 4, 5. Но, для того чтобы он удовлетворял третьей аксиоме, необходимо еще, чтобы 3 было целым числом, следовательно, чтобы ряд 0, 1, 2, 3 удовлетворял всем аксиомам. При проверке окажется, что ряд 0, 1, 2, 3 удовлетворяет аксиомам 1, 2, 4, 5, но третья аксиома требует, сверх того, чтобы 4 было целым числом и чтобы ряд 0, 1, 2, 3, 4 удовлетворял всем аксиомам, и т. д.

Нет, следовательно, возможности доказать аксиомы для нескольких целых чисел, не доказывая их для всех. Приходится отказаться от доказательства путем примера.

Остается собрать все выводы из наших аксиом и рассмотреть, не заключают ли они в себе противоречия. Если бы число этих выводов было конечное, то это было бы легко сделать; но число выводов бесконечно велико, они охватывают всю математику или по крайней мере всю арифметику. Что же делать? Быть может, повторить рассуждение, указанное в разделе III.

Но мы уже сказали, что это рассуждение основано на полной индукции, а между тем дело идет именно о том, чтобы оправдать принцип полной индукции.

VI

Логика Гильберта

Я перехожу теперь к тому капитальному труду Гильберта, о котором последний сделал сообщение на Математическом конгрессе в Гейдельберге. Французский перевод этого труда, сделанный Пьером Бутру, появился в «Математическом образовании»; английский перевод, сделанный Халстедом, появился в «The Monist». В этом труде, изобилующем самыми глубокими мыслями, автор преследует такую же цель, как и Рассел, но во многих случаях отклоняется от своего предшественника.

«Если мы присмотримся ближе,— говорит он,— то мы заметим, что логические принципы, в той форме, в какой их обыкновенно представляют, уже включают в себя известные арифметические понятия, как, например, понятие совокупности, а, в некоторой мере, и понятие о числе. Таким образом, мы находимся как бы в заколдованном круге, и вот почему, во избежание всякого парадокса, мне кажется необходимым развивать одновременно логику и принципы арифметики».

Как мы видели выше, то, что Гильберт говорит о принципах логики в той форме, в какой их себе обыкновенно представляют, одинаково приложимо и к логике Рассела. Для Рассела логика предшествует арифметике; для Гильберта они «одновременны». Мы встретимся ниже с другими, более глубокими различиями, но мы будем их отмечать по мере того, как они перед нами предстанут; я предпочитаю следить шаг за шагом за развитием мысли Гильберта и цитировать текстуально наиболее важные места его работы.

«Рассмотрим прежде всего предмет 1». Заметим, что в это рассмотрение мы отнюдь не включаем понятия о числе, ибо само собой разумеется, что 1 в данном случае является только символом и что мы не стремимся узнать его значение. «Группы, образованные этим предметом, повторенным два, три или несколько раз...» Ну, здесь уже дело меняется; если мы вводим слова «два», «три», и, в особенности, «несколько», мы вводим понятие числа, а в таком случае понятие конечного целого числа, к которому нас приведет это рассуждение, окажется запоздалым. Автор был слишком предусмотрителен, чтобы не заметить этого petitio principii. В конце своего труда он пытается загладить погрешность.

Гильберт вводит затем два простых предмета 1 и =, рассматривает все комбинации из этих двух предметов, затем комбинации этих комбинаций и т. д. Само собой разумеется, что при этом нужно забыть обычное значение этих двух знаков, не нужно приписывать им никакого значения. Затем Гильберт распределяет эти комбинации в два класса, в класс «сущего» и в класс «не сущего», и впредь до следующего соглашения это распределение совершенно произвольно. Всякое утвердительное предложение показывает нам, что комбинация принадлежит классу сущего; всякое отрицательное предложение показывает, что известная комбинация относится к классу не сущего.

VII

Отметим теперь некоторое различие, имеющее важное значение. Для Рассела какой-нибудь предмет, который он обозначает буквой x, есть предмет абсолютно неопределенный, относительно которого он не делает никаких предположений; для Гильберта этот предмет есть одна из комбинаций, составленных из символов 1 и = не нужно представлять, будто здесь вводится что-либо новое помимо комбинации уже определенных предметов. Гильберт, впрочем, формулирует свою мысль самым точным образом, и я считаю необходимым воспроизвести его слова полностью: «Неопределенные, которые фигурируют в аксиомах (вместо понятий «нечто» и «все» обыкновенной логики), представляют собой исключительно совокупность предметов и комбинаций, которыми мы уже владеем при данном состоянии теории или которые мы начинаем вводить. Как только мы из рассматриваемых аксиом начнем выводить предложения, мы получим право заменять упомянутые предметы только этими предметами и этими комбинациями. Но если мы увеличиваем число основных предметов, то не нужно забывать, что тем самым аксиомы также испытывают новое расширение, и они, следовательно, должны быть снова проверены и, в случае нужды, изменены».

Здесь мы имеем полный контраст с точкой зрения Рассела. В той постановке, в какой вопрос ставится у этого философа, мы можем на место x ставить не только известные нам, но и какие угодно предметы. Рассел остается верным своей точке зрения, именно точке зрения понятия. Он исходит из общей идеи существующего и обогащает ее, придавая ей новые качества. Напротив, Гильберт считает существенными одни только комбинации известных уже предметов, так что (имея в виду лишь одну сторону его идеи) можно сказать, что Гильберт стоит на точке зрения объема понятий.

VIII

Проследим за изложением идей Гильберта. Он вводит две аксиомы, которые формулирует на своем символическом языке, но которые на языке таких профанов, как мы, обозначают, что всякое количество равно самому себе и что всякая операция, произведенная над двумя тождественными количествами, дает тождественные результаты. В такой формулировке аксиомы очевидны, но выразить их в таком виде значило бы исказить мысль Гильберта. С точки зрения Гильберта, математика комбинирует только чистые символы, и настоящий математик должен рассуждать о них, не заботясь об их смысле. Его аксиомы не являются для него тем же, чем они являются для обыкновенного человека.

Он рассматривает эти аксиомы как выраженное при помощи постулатов определение символа =, не опороченного еще каким-либо значением. Но чтобы оправдать это определение, необходимо доказать, что эти две аксиомы не ведут ни к какому противоречию.

Для этого Гильберт пользуется рассуждением, изложенным у него в разделе III, не замечая, по-видимому, что он прибегает к полной индукции.

IX

Конец мемуара Гильберта совершенно загадочен, и мы на нем не будем подробно останавливаться. Противоречия здесь умножаются; чувствуется, что автор сознает смутно petitio principii, в которое он впал, и что он напрасно старается замазать трещины своего рассуждения.

Что же это значит? В тот момент, когда необходимо доказать, что определение целого числа при помощи аксиомы полной индукции не влечет противоречия, Гильберт от этого отделывается, как отделываются Рассел и Кутюра, ибо трудность слишком велика.

X

Геометрия

Геометрия, говорит Кутюра, есть обширная область доктрин, в которой не фигурирует принцип полной индукции. В известной мере это верно; нельзя сказать, чтобы он совсем не входил, но он входит мало. Если обратиться к «Rational Geometry», написанной Халстедом (N. Y., John Wiley and Sons, 1904) и построенной на принципах Гильберта, то можно заметить, что принцип полной индукции появляется в первый раз на с. 114, если только я не пропустил его раньше, что очень возможно.

Таким образом, геометрия, которая еще несколько лет тому назад казалась областью, в которой господство интуиции бесспорно, является теперь областью, в которой торжествует логистика. Этим лучше всего измеряется важность геометрических трудов Гильберта и тот глубокий отпечаток, который они оставили на наших понятиях.

Но не нужно поддаваться обману. Какова в конце концов основная теорема геометрии? Она заключается в том, что аксиомы геометрии не заключают в себе противоречия, а это не может быть доказано без принципа индукции.

Как же Гильберт доказывает этот существенный пункт? Опираясь на анализ, через анализ на арифметику и через арифметику на принцип индукции.

И если когда-нибудь изобретут другое доказательство, то придется все же опереться на этот принцип, потому что выводов из тех аксиом, логическую совместимость которых нужно доказать, может быть бесконечное множество.

XI

Заключение

Наш вывод заключается прежде всего в том, что на принцип индукции нельзя смотреть как на скрытое определение целого числа.

Вот три истины:

принцип полной индукции;

постулат Евклида;

физический закон, согласно которому фосфор плавится при 44° (приводится у Леруа).

Говорят, что эти истины являются скрытыми определениями: первое есть определение целого числа, второе — прямой линии, третье — фосфора.

Я принимаю это для второй истины, но не принимаю для двух других. Объясню причину такой кажущейся непоследовательности.

Мы видели прежде всего, что определение приемлемо лишь в случае, если установлено, что оно не заключает в себе противоречия. Мы доказали также, что такое доказательство невозможно для первого определения; для второго, наоборот, Гильберт дал полное доказательство.

Что же касается третьего определения, то оно, очевидно, не заключает противоречия; но значит ли это, что определение, как это требовалось бы, с несомненностью свидетельствует о существовании определенного предмета? Мы выходим здесь из области математических наук и вступаем в область физических наук. Слово «существование» не имеет уже того смысла, что раньше, оно не обозначает отсутствия противоречия, а обозначает объективное существование.

Вот уже первое основание для различия, которое я делаю между вышеприведенными тремя случаями. Есть еще другое основание. Эти три понятия находят последующие применения; имеют ли эти понятия в применениях то значение, которое установлено этими тремя постулатами?

Возможные применения принципа индукции бесчисленны. Возьмем для примера одно из указанных нами выше применений, где мы стремились установить, что некоторая совокупность аксиом не может вести к противоречию. Для этого следует рассмотреть один из рядов силлогизмов, которые можно построить, исходя из этих аксиом как посылок.

Когда мы закончили n-й силлогизм, мы видим, что можно еще составить $(n+1)$-й силлогизм. Таким образом, число n служит для счета ряда последовательных операций, это — число, которое может быть получено путем последовательных прибавлений. Другими словами, это есть число, исходя из которого, можно прийти к единице путем последовательных вычитаний. Этого, очевидно, нельзя было бы достигнуть, если бы мы имели равенство $n = n - 1$, потому что в таком случае мы при вычитании всегда получали бы то же самое число. Таким образом, способ, при помощи которого мы пришли к рассмотрению этого числа n, заключает в себе определение конечного целого числа, и это определение гласит: конечное целое число есть такое число, которое может быть получено путем последовательных сложений, это есть число n, которое не равняется $n - 1$.

Приняв это, что делаем мы дальше? Мы показываем, что если нет противоречия с n-м силлогизмом, то не будет противоречия с $(n+1)$-м и не будет такого противоречия никогда. Вы скажете: я вправе сделать такое заключение, потому что целые числа по определению представляют собой такие именно числа, для которых подобное рассуждение законно. Но это приводит к другому определению целого числа, а именно к следующему: целое число есть такое число, о котором можно рассуждать в рекуррентном порядке. В данном случае это — число, о котором можно сказать следующее: если отсутствие противоречия в момент силлогизма, имеющего целый номер, влечет за собой отсутствие противоречия для силлогизма, имеющего следующий целый номер, то нет оснований опасаться противоречия для любого из силлогизмов, имеющего целый номер.

Оба определения не тождественны; они эквивалентны, без сомнения, но они таковы в силу априорного синтетического суждения: нельзя прийти от одного к другому путем чисто логических операций. Мы не вправе, следовательно, принять второе определение, раз мы ввели целое число, следуя такому пути, который предполагает первое определение.

Посмотрим, напротив, как обстоит дело с прямой линией. Я так часто уже говорил об этом, что не решаюсь снова повторять то же самое.

Мы не имеем здесь, как это было в предыдущем случае, двух эквивалентных определений, логически друг к другу несводимых. Мы имеем только одно определение, выраженное словами. Могут сказать, что мы имеем еще другое определение, которое мы чувствуем, но не можем выразить, потому что мы имеем интуицию прямой линии, или потому, что мы представляем себе прямую линию. Но, прежде всего, мы не можем представить себе этой линии в геометрическом пространстве, а можем представить лишь в пространстве, имеющемся в нашем представлении; и затем мы легко можем представить себе объекты, которые обладают всеми другими свойствами прямой линии, кроме того свойства, которое удовлетворяет постулату Евклида. Эти объекты суть «неевклидовы прямые», которые с известной точки зрения отнюдь не являются чем-то, лишенным смысла, но представляют собой окружности (настоящие окружности в настоящем пространстве), ортогональные к определенной сфере. Если из этих объектов, которые мы также можем себе представить, мы считаем прямыми первые, т. е. евклидовы прямые, а не последние, т. е. неевклидовы прямые, то это обусловливается определением.

Если мы, наконец, обратимся к третьему примеру, к определению фосфора, то мы увидим, что истинное определение будет таково: фосфор — это кусок вещества, который я вижу вот в этом флаконе.

XII

Остановившись уже на этом примере, скажу еще несколько слов. Относительно истины, касающейся фосфора, я выше сказал: «это предложение есть настоящий физический закон, доступный проверке, так как оно обозначает: все тела, которые обладают всеми прочими свойствами фосфора, помимо точки его плавления, плавятся, как и фосфор при 44°». На это мне ответили: «нет, этот закон не может быть проверен, потому что, если бы после проверки оказалось, что два тела, похожие на фосфор, плавятся одно при 44°, а другое при 50°, то всегда можно было бы сказать, что, кроме точки плавления, наверное, имеется еще и другое неизвестное свойство, благодаря которому эти тела друг от друга отличаются».

Это было не совсем то, что я хотел сказать. Я должен был бы написать: все тела, которые обладают такими-то и такими-то свойствами в конечном числе (а именно теми свойствами фосфора, которые перечислены в руководствах по химии, за исключением точки плавления), плавятся при 44°.

Чтобы сделать более очевидной разницу между примером с прямой линией и примером с фосфором, сделаем еще одно замечание. Прямая линия имеет в природе несколько более или менее несовершенных образов, между которыми главные суть световой луч и ось вращения твердого тела. Я допускаю, что каким-нибудь образом было бы установлено, что световой луч не удовлетворяет постулату Евклида (т. е. было бы, например, доказано, что звезда имеет отрицательный параллакс), что сделаем мы дальше? Заключим ли мы отсюда, что прямая, будучи по определению траекторией света, не удовлетворяет постулату или, наоборот, что раз прямая по определению удовлетворяет постулату, то световой луч не представляет собой прямой линии?

Конечно, мы свободны в выборе того или другого определения и, следовательно, того или иного заключения. Но принять первое заключение было бы нелепо, потому что световой луч удовлетворяет лишь несовершенным образом, вероятно, не только постулату Евклида, но и другим свойствам прямой линии; если он отклоняется от евклидовой прямой, то он также отклоняется и от оси вращения твердых тел, которая является другим несовершенным образом прямой линии; и, наконец, он, без сомнения, подвержен изменениям: будучи прямым вчера, он перестает быть таковым завтра, если какое-нибудь физическое условие изменилось.

Предположим, что было бы найдено, что фосфор плавится не при 44°, а при 43,9°. Заключим ли мы отсюда, что это новое тело, которое мы назвали фосфором, не есть настоящий фосфор, ибо последний, согласно определению, есть тело, которое плавится при 44° или, напротив, мы заключим, что фосфор плавится при 43,9°?

В этом случае мы также свободны в выборе того или другого определения, а следовательно, того или другого заключения. Но было бы нелепо принять первое заключение, так как нельзя же менять наименование тела каждый раз, когда удается определить лишний десятичный знак в его температуре плавления.

XIII

В итоге Рассел и Гильберт сделали большие усилия. Тот и другой написали книги, изобилующие оригинальными, глубокими и часто очень правильными взглядами. Эти две книги дают нам большой материал для размышления; из них мы можем многому научиться. Некоторые и даже многие из выводов, к которым приходят авторы, прочны и будут жить.

Но, очевидно, было бы неправильно сказать, что они окончательно разрешили спор между Кантом и Лейбницем [1]) и разрушили кантову теорию математики. Я не знаю, стоят ли они сами на этой точке зрения, но если они это думают, то они ошибаются.

Глава V

ПОСЛЕДНИЕ УСИЛИЯ ЛОГИСТИКОВ

I

Логистики пытались ответить на все приведенные выше соображения. Для такого ответа им надобно было преобразовать логистику [2]), и Рассел в особенности видоизменил в некоторых отношениях первона-

---

[1]) См. сноску на с. 478.

[2]) В начале XX века под логистикой понимали математическую логику. — *Примеч. ред.*

чальные ее точки зрения. Не входя в детали дела, я хочу остановиться только на двух вопросах, на мой взгляд, наиболее важных.

Дали ли правила логистики действительно доказательства своей плодотворности и непогрешимости? Верно ли, что они имеют возможность доказать принцип полной индукции, совершенно не обращаясь к интуиции?

II

Непогрешимость логистики

Что касается плодотворности, то Кутюра, по-видимому, строит наивные иллюзии. Логистика, по его мнению, дает изобретательности в ее распоряжение «леса и крылья». А на следующей странице он говорит: «десять лет тому назад Пеано опубликовал первое издание своего «Formulaire» [1]).

Как, уже десять лет, как вы имеете крылья, и вы еще не полетели!

Я питаю величайшее уважение к Пеано, который сделал превосходные работы (например, его кривая, которая заполняет целую площадь), но в конце концов он не ушел ни дальше, ни выше, ни быстрее, чем бóльшая часть бескрылых математиков, и этот путь он мог бы ведь проделать так же хорошо на своих ногах.

Я, напротив, вижу в логистике только помеху для изобретателя; с ее помощью мы отнюдь не выигрываем в сжатости; если нужны 27 уравнений, для того чтобы установить, что 1 есть число, то сколько нужно будет уравнений, чтобы доказать настоящую теорему? Если мы различаем вместе с Уайтхедом индивид x, класс, единственный член коего есть x и который называется ιx, затем — класс, единственный член которого есть класс с единственным членом x и который называется $\iota\iota x$, то можно ли думать, что эти различия, как бы ни были они полезны, облегчат нам движение вперед?

---

[1]) По-видимому, речь идет о первых томах «Математического формуляра» Дж. Пеано, пять томов которого издавались с 1895 по 1903 годы. — *Примеч. ред.*

Логистика заставляет нас сказать все то, что обыкновенно подразумевается; она заставляет нас двигаться шаг за шагом; это, быть может, делает движение более верным, но не более быстрым.

Вы даете нам не крылья, а детские помочи. Но тогда мы имеем право требовать, чтобы эти помочи не давали нам падать. В такой помощи — единственное их оправдание. Если ценное имущество не приносит крупных доходов, то нужно по крайней мере, чтобы оно было в надежных руках.

Нужно ли следовать вашим правилам слепо? Конечно, да, иначе нам могла бы помочь разобраться в них одна только интуиция. Но в таком случае необходимо, чтобы эти правила были непогрешимы; слепое доверие можно питать только к непогрешимому авторитету. Для вас это необходимость. Вы должны быть непогрешимы, или вас не будет.

Вы не вправе сказать нам: «мы ошибаемся — это правда, но вы также ошибаетесь». Но наша ошибка для нас — несчастье, большое несчастье, для вас — это смерть.

Еще менее вправе вы сказать: «Разве непогрешимость арифметики препятствует ошибкам сложения? Правила счета непогрешимы, и все же мы видим, как ошибаются те, которые их применяют». Однако, просматривая их переделки, легко заметить, в какой момент они уклонились от правил. Здесь же совсем не то; логистики применили свои правила и впали в противоречие. Это настолько верно, что они готовы изменить правила и «пожертвовать понятием класса». Зачем же изменять правила, если они были непогрешимы?

«Мы не обязаны,— говорите вы,— разрешать hic et nunc [1]) все возможные проблемы». О, мы от вас не требуем столь многого; если бы вы, разрешая проблему, не давали никакого решения, мы ничего не сказали бы; но вы, напротив, даете нам два решения, которые друг другу противоречат и из которых, следовательно, по крайней мере одно ложно. А это банкротство.

Рассел старается примирить эти противоречия и признает, что для такого примирения необходимо

[1]) Здесь и сейчас (*лат.*) (означает категорическое требование). — *Примеч. ред.*

«ограничить понятие класса или даже пожертвовать им». Кутюра же, учитывая успех этой попытки, прибавляет: «если логистики достигнут того, что не удавалось другим, Пуанкаре не откажется воспомнить эту фразу и воздать должное решению логистики».

Но это не так: логистика существует, она имеет свое уложение, вышедшее уже в четырех изданиях; или, правильнее, это уложение и есть сама логистика. Готов ли Рассел показать, что по крайней мере одно из двух противоречивых суждений вышло за пределы уложения? Отнюдь нет; он готов изменить эти законы, а некоторые из них и уничтожить. Если он успешно выполнит свою попытку, то я воздам должное интуиции Рассела, но не логистике Пеано, которую он таким образом разрушит.

III

Отсутствие противоречия

Я привел выше два главных возражения против того определения целого числа, которое принято в логистике. Какой ответ дает Кутюра на первое возражение?

Что обозначает в математике слово существовать? Оно обозначает, сказал я, отсутствие противоречия. Кутюра возражает против этого. Он говорит: «Логическое существование есть нечто отличное от отсутствия противоречия. Оно заключается в том факте, что некоторый класс не пуст; сказать: «элементы a существуют» — значит, согласно определению, утверждать, что класс не есть нулевой». И, само собой разумеется, утверждать, что класс a не есть нулевой, значит, согласно определению, утверждать, что элементы a существуют. Но одно из этих утверждений так же лишено смысла, как и другое, если только они оба не обозначают либо то, что можно это a видеть или осязать, либо то, что можно постигнуть a, не впадая в противоречие. Но в первом случае мы имеем дело с утверждением, которое принимают физики и натуралисты; во втором случае — с утверждением, которое выставляют логики и математики.

Для Кутюра не отсутствие противоречия доказывает бытие, а бытие доказывает отсутствие противоречия. Чтобы установить существование класса, нужно установить при помощи примера, что есть какой-нибудь индивид, принадлежащий к этому классу. «Но,— скажут,— как доказать существование такого индивида? Не надобно ли, чтобы это существование было установлено для того, чтобы мы из него могли вывести существование класса, к которому принадлежит индивид? Совсем нет. Как ни покажется парадоксальным такое утверждение, нужно сказать, что никогда не доказывают существования индивида. Индивиды уже по одному тому, что они индивиды, всегда рассматриваются как существующие. Абсолютно говоря, нет нужды высказывать, что индивид существует, а нужно лишь сказать, что он существует в классе». Кутюра находит свое собственное утверждение парадоксальным, и, конечно, не он один найдет его таковым. Это утверждение, однако, должно иметь свой смысл. Кутюра, без сомнения, хочет сказать, что существование индивида, который является единственным в мире и о котором ничего не утверждается, не может повлечь противоречия; пока он остается единственным, он, очевидно, никого не стесняет. Пусть так; допустим, «абсолютно говоря», существование индивида; но с этим существованием нам нечего делать; нам нужно будет доказать существование индивида «в классе», а для этого надобно будет доказать, что утверждение «такой-то индивид принадлежит к такому-то классу» не стоит в противоречии ни с самим собой, ни с другими принятыми постулатами.

«Утверждать, что определение лишь тогда имеет действительное значение, когда раньше доказано, что оно непротиворечиво, это значит,— продолжает Кутюра, — предъявлять произвольное и неправильное требование». Капитуляция в вопросе об отсутствии противоречия выражена здесь в словах как нельзя более энергичных и самонадеянных. «Во всяком случае onus probandi [1]) падает на тех, кто полагает, что эти принципы противоречивы». Постулаты предполагаются совместимыми друг с другом до тех пор, пока не доказано противоположное, подобно тому, как обвиняемый по презумпции предполагается невиновным.

[1]) Бремя доказательств (*лат.*). — *Примеч. ред.*

Излишне говорить, что я не подписываюсь под этой капитуляцией. Но, говорите вы, доказательство, которого вы от нас требуете, невозможно, вы не должны от нас требовать, чтобы мы «схватили Луну зубами» [1]). Простите, оно невозможно для вас, но не для нас, допускающих принцип индукции в качестве априорного синтетического суждения. И оно так же необходимо вам, как и нам.

Чтобы доказать, что система постулатов не заключает противоречия, необходимо применить принцип полной индукции; этот способ суждения не только не «странный», но единственно правильный. Отнюдь нельзя считать «неправдоподобными» случаи его применения; и нетрудно найти соответствующие «примеры и прецеденты». Я цитировал в моей статье два таких примера, заимствованных из брошюры Гильберта. Но он не один применял такой способ; те же, которые его избегали, были неправы. Я упрекал Гильберта не в том, что он к нему прибегал (как настоящий математик, Гильберт не мог не увидеть, что здесь необходимо было доказательство и что данное им доказательство было единственно возможное), но в том, что, прибегая к нему, он не признавал в нем суждения по рекуррентному методу.

IV

Второе возражение

Я отметил вторую ошибку логистиков в статье Гильберта. Теперь Гильберт отлучен, и Кутюра более не считает его логистиком. Он меня спросит, нашел ли я ту же самую ошибку у логистиков-ортодоксов. Нет, я не встречал ее на тех страницах, которые прочитал; но я не знаю, не встречу ли я ее на трехстах страницах, которые написаны ортодоксами и которые у меня нет желания читать.

Но логистикам придется впасть в эту ошибку, как только они захотят сделать из математической науки какое-нибудь приложение. Эта наука не имеет единственной целью вечное созерцание своего собственного пупа; она приближается к природе, и раньше

---

[1]) Галлицизм, обозначающий: сделать невозможное. — *Примеч. ред.*

или позже она придет с ней в соприкосновение; в этот момент необходимо будет отбросить чисто словесные определения, которыми нельзя будет более довольствоваться.

Вернемся к примеру Гильберта. Дело идет все о том же рекуррентном суждении и о том, заключает ли система постулатов противоречие. Кутюра скажет, без сомнения, что это его не касается; но это заинтересует, быть может, тех, кто не отказывается, как он, от доказательства отсутствия противоречия.

Мы хотим установить, как мы говорили выше, что не встретим противоречия после сколь угодно большого числа суждений, раз это число будет конечным. Для этого необходимо применить принцип индукции. Должны ли мы под конечным числом понимать здесь всякое число, к которому по определению применим принцип индукции? Очевидно, нет, так как в противном случае мы пришли бы к следствиям, которые нас чрезвычайно затруднили бы.

Для того чтобы мы имели право установить систему постулатов, мы должны быть уверены, что постулаты непротиворечивы. Это — истина, принятая большинством ученых, я бы сказал «всеми учеными» до того, как прочел последнюю статью Кутюра. Но что обозначает эта истина? Имеется ли в виду: необходимо, чтобы мы были уверены в том, что не встретим противоречия после конечного числа предложений, причем конечным по определению будет такое число, которое обладает всеми свойствами рекуррентного характера, так что, если одно из этих свойств отсутствует, если мы, например, натолкнемся на противоречие, то мы условимся говорить, что данное число не есть конечное?

Другими словами, хотим ли мы сказать: необходимо, чтобы мы были уверены в том, что мы не встретим противоречия при условии, что мы согласимся остановиться в тот момент, когда такое противоречие начнет обрисовываться? Достаточно сформулировать такое предложение, чтобы тут же его осудить.

Таким образом, рассуждение Гильберта не только предполагает принцип индукции, но оно предполагает, что этот принцип нам дан не как простое определение, а как априорное синтетическое суждение.

Резюмируем:

доказательство необходимо;

единственно возможное доказательство есть рекуррентное доказательство;

оно законно только тогда, когда допускают принцип индукции и когда его рассматривают не как определение, а как синтетическое суждение.

V

Канторовские антиномии

Я обращаюсь теперь к рассмотрению нового мемуара Рассела. Этот мемуар был написан с целью преодолеть трудности, поднятые теми канторовскими антиномиями, на которые я неоднократно намекал выше. Кантор думал, что можно построить науку бесконечного; другие пошли по пути, открытому Кантором, но скоро натолкнулись на странные противоречия. Возникшие антиномии уже многочисленны, но наиболее известны следующие:

1° Антиномия Бурали-Форти.

2° Антиномия Цермело — Кёнига.

3° Антиномия Ришара.

Кантор доказал, что порядковые числа (речь идет о порядковых трансфинитных числах, т. е. о новом понятии, введенном Кантором) могут быть размещены в один линейный ряд, т. е. доказал, что из двух неравных порядковых чисел одно число всегда меньше другого. Бурали-Форти доказывает противоположное. В самом деле, говорит он, если бы все порядковые числа можно было разместить в один ряд, то этот ряд определял бы порядковое число, которое было бы больше, чем все другие, но к нему можно было бы прибавить единицу, и тогда получилось бы порядковое число, которое было бы еще больше, а это приводит к противоречию. Мы вернемся позднее к антиномии Цермело — Кёнига, которая имеет несколько отличную природу.

Но вот антиномия Ришара (Revue Generale des Sciences.— 1905, 30 juin). Рассмотрим все десятичные числа, которые можно определить при помощи конечного числа слов. Эти десятичные числа образуют совокупность E, и легко видеть, что это есть исчислимая совокупность, т. е. можно перенумеровать различные десятичные числа этой совокупности от 1 до бесконечности. Допустим, что это уже произведено, и определим число N следующим образом. Если n-я цифра n-го числа совокупности E есть

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,$$

то n-я цифра числа N будет соответственно

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 1,\ 1.$$

Как мы видим, N не равно n-му числу совокупности E, а так как n есть произвольное число, то N не принадлежит совокупности E; между тем N должно ей принадлежать, так как мы определили N при помощи конечного числа слов.

Мы увидим ниже, что Ришар сам дал объяснение своего парадокса, обнаружив при этом большую проницательность, и что его объяснение может быть mutatis mutandis [1]) распространено на другие аналогичные парадоксы. Рассел цитирует еще другую довольно любопытную антиномию.

Каково то наименьшее целое число, которое нельзя определить при помощи фразы, имеющей менее ста французских слов?

Такое число существует. И в самом деле, числа, которые могут быть определены такой фразой, имеются, очевидно, в конечном количестве, ибо слова французского языка имеются также в конечном количестве. Следовательно, между этими числами будет одно такое, которое меньше всех прочих.

Но, с другой стороны, это число не существует, так как определение его заключает противоречие. Действительно, это число определяется самой фразой, напечатанной выше в разрядку и состоящей менее, чем из ста слов, а по определению это число не может быть определено подобной фразой.

---

[1]) После необходимых изменений (*лат.*).— *Примеч. ред.*

VI

Теория зигзагов и теория неклассов

Какую позицию занимает Рассел ввиду этих противоречий? Рассмотрев те, о которых мы только что говорили, указав еще на другие и придав им форму, которая заставляет вспомнить об Эпимениде, он без колебаний заключает:

«A propositional function of one variable does not always deter mine a class». Пропозициональная функция (т. е. определение) одной переменной не всегда определяет класс. «Пропозициональная функция», или «норма», может быть «непредикативной». И это не значит, что такие непредикативные предложения определяют пустой класс, нулевой класс; это не значит, что нет такой величины x, которая удовлетворяла бы определению и могла бы быть одним из элементов класса. Элементы существуют, но они не могут соединяться для образования класса.

Но это только начало, нужно еще быть в состоянии узнать, является ли определение предикативным или нет. Разрешая эту проблему, Рассел колеблется между тремя теориями, которые он называет:

A. теория зигзага (the zigzag theory);

B. теория ограничения размера (the theory of limitation of size);

C. теория неклассов (the no classes theory).

Согласно теории зигзагов «определения (пропозициональные функции) определяют класс, когда они очень просты, и перестают определять таковой, когда они становятся сложными и неясными». Кто же решит вопрос: можно ли рассматривать данное определение как достаточно простое, для того чтобы оно было приемлемо? На этот вопрос нет ответа, если не считать таковым форменное признание в полном бессилии: «правила, которые позволили бы распознавать, являются ли эти определения предикативными, были бы чрезвычайно сложны и рекомендовать их не было бы целесообразным ни с какой точки зрения. Это недостаток, который можно было бы исправить только при большой изобретательности или при помощи таких отличий, которые еще не намечены. Но до настоящего момента я в поисках этих правил не мог найти другого руководящего принципа, кроме отсутствия противоречия».

Эта теория остается, таким образом, довольно темной. В этой ночи — единственный проблеск, и этот проблеск есть слово «зигзаг». То, что Рассел называет «zigzag-giness», является, без сомнения, тем особенным свойством, которым отличается аргумент Эпименида.

Согласно теории of limitation of size класс теряет право на существование, если он слишком обширен. Он может даже быть бесконечным, но не должен быть «чрезмерно» бесконечным.

Мы и здесь встречаемся все с тем же затруднением: в какой же именно момент класс начинает становиться слишком бесконечным? Само собой разумеется, это затруднение не разрешено, и Рассел переходит к третьей теории.

В no classes theory запрещено произносить слово «класс». Оно должно замещаться разнообразными перифразами. Какой это крупный переворот для логистиков, которые только и говорят о классах и о классах классов! Необходимо переделать всю логистику. Представляют ли себе эти авторы, какой вид примет страница логистики, если в ней будут уничтожены все предложения, в которых идет речь о классах? Кроме нескольких строк, переживших такую операцию, на белой странице ничего не останется.

Как бы то ни было, мы видим, каковы колебания Рассела, видим изменения, которым он подвергает принятые им же основные принципы. Необходимы были критерии, чтобы решить, является ли определение слишком сложным или слишком обширным, а эти критерии не могут быть оправданы иначе, как обращением к интуиции.

Рассел в конце концов склоняется к теории неклассов.

Как бы там ни было, логистика должна быть переделана, и неизвестно, что в ней может быть спасено. Бесполезно прибавлять, что на карту поставлены только канторизм и логистика. Истинные математические науки, т. е. те, которые чему-нибудь служат, могут продолжать свое развитие согласно свойственным им принципам, не заботясь о тех бурях, которые бушуют вне их; они будут шаг за шагом делать свои завоевания, которые являются окончательными и от которых им никогда не будет нужды отказываться.

VII

Правильное решение

Какой же выбор должны мы сделать между этими различными теориями? Мне кажется, что решение заключается в письме Ришара, о котором я уже говорил и которое помещено в «Revue Generale des Sciences» от 30 июня 1905 г. Изложив антиномию, которую я назвал антиномией Ришара, последний дает ей и объяснение.

Вернемся к тому, что мы сказали об этой антиномии в разделе V. Пусть E будет совокупностью всех чисел, которые можно определить при помощи конечного числа слов, не вводя при этом понятия о самой совокупности E. В противном случае определение E заключало бы ложный круг: нельзя определять E при помощи самой же совокупности E.

Далее мы определили число N, правда, при помощи конечного числа слов, но мы опирались на понятие о совокупности E. Вот почему N и не составляет части E.

В примере, избранном Ришаром, вывод представляется с полной очевидностью, и очевидность эта станет еще более ясной, если обратиться к самому тексту письма. Но это же объяснение годится, как в том легко убедиться, и для других антиномий.

Итак, те определения, которые должны быть рассматриваемы как непредикативные, заключают ложный круг. Предшествовавшие примеры достаточно показали, что я под этим разумею. Не это ли Рассел обозначает названием «zigzag-giness»?

Я ставлю вопрос, не разрешая его.

VIII

Доказательства принципа индукции

Рассмотрим теперь мнимые доказательства принципа индукции и в особенности доказательства Уайтхеда и Бурали-Форти. Поговорим сначала о доказательстве Уайтхеда и воспользуемся некоторыми новыми и удачными обозначениями, которые Рассел ввел в своем последнем мемуаре.

Назовем рекуррентным классом всякий класс чисел, который содержит 0 и который содержит $n+1$, если он содержит n.

Назовем индуктивным числом всякое число, которое составляет часть всех рекуррентных классов.

При каком условии это последнее определение, играющее существенную роль в доказательстве Уайтхеда, будет «предикативным» и, следовательно, приемлемым?

Согласно предшествующему изложению под всеми рекуррентными классами надо понимать все классы, в определение которых не входит понятие об индуктивном числе.

Без этого можно впасть в ложный круг, который и породил антиномии.

Но Уайтхед не принял этой предосторожности.

Его рассуждение ложно; именно оно и повело к антиномиям; оно было незаконным, когда давало ложные результаты, и остается незаконным, когда приводит случайно к правильному результату.

Определение, которое содержит заколдованный круг, ничего не определяет. Не к чему говорить: мы уверены, что, какой бы смысл ни был дан нашему определению, все же существует по крайней мере нуль, который принадлежит классу индуктивных чисел. Дело не в том, чтобы узнать, пуст ли этот класс, а в том, чтобы его строго отграничить. «Непредикативный» класс — это не пустой класс, а класс, в котором граница оказывается неопределенной.

Излишне прибавлять, что это частное возражение оставляет в силе те общие возражения, которые приложимы ко всем доказательствам.

IX

Бурали-Форти представил другое доказательство в своей статье «Конечные классы» (Atti di Torino.— Т. 32), но он вынужден допустить два постулата.

Первый утверждает, что существует по крайне мере один бесконечный класс, Второй гласит

$$u\varepsilon K(K-\iota\Lambda).\supset.u < v'u.$$

Первый постулат не более очевиден, чем принцип, подлежащий доказательству. Второй не только не очевиден, но и ложен, как это показал Уайтхед и как это, впрочем, заметил бы любой лицеист математического класса, если бы аксиома была выражена на понятном языке. Ибо эта аксиома означает: число комбинаций, которые можно образовать из нескольких предметов, менее числа этих предметов.

X

Аксиома Цермело

В известном доказательстве Цермело опирается на следующую аксиому:

В какой-либо совокупности (или даже в каждой из совокупностей некоторой совокупности совокупностей) мы можем всегда выбрать наудачу один элемент (даже тогда, когда эта совокупность совокупностей обнимает бесконечно много совокупностей). Тысячу раз применяли эту аксиому, не высказывая ее. Но лишь только она была высказана, как появились сомнения. Одни математики, как Борель, ее отвергают, другие восхищаются ею. Посмотрим, что об этом думает Рассел в своей последней статье.

Он не высказывается, но те размышления, которым он предается, очень знаменательны.

Однако сначала один наглядный пример. Допустим, что мы имеем столько пар сапог, сколько есть целых чисел, так что мы можем нумеровать пары от 1 до бесконечности. Сколько мы будем иметь сапог? Будет ли число сапог равно числу пар? Да, если в каждой паре правый сапог отличается от левого, ибо в таком случае достаточно будет обозначить номером $2n-1$ правый сапог n-й пары, а номером $2n$ — левый сапог n-й пары. Нет, если правый сапог подобен левому, так как в этом случае такая операция будет невозможна. Иначе придется допустить аксиому Цермело, потому что тогда можно в каждой паре выбрать наудачу сапог, который будет рассматриваться как правый.

XI

Заключение

Доказательство, действительно основанное на принципах аналитической логики, будет составляться из ряда предложений. Одни из них, которые служат посылками, будут тождествами или определениями; другие будут последовательно выведены из первых. Но, хотя связь между каждым предложением и последующим замечается непосредственно, трудно будет с первого взгляда увидеть, как мог совершиться переход от первого предложения к последнему, и явится соблазн рассматривать это последнее как новую истину. Но если последовательно заменить фигурирующие в нем различные выражения их определениями, если провести эту операцию насколько можно далеко, то в итоге останутся только тождества, так что все сведется к бесконечной тавтологии. Логика, следовательно, окажется бесплодной, если не будет оплодотворена интуицией.

Вот что я уже писал давно. Логистики исповедуют противоположную точку зрения и думают, что доказали ее, показав действительно новые истины. Но каким образом?

Почему, применяя к их рассуждениям описанный только что прием, т. е. заменяя определенные термины их определениями, мы не видим, чтобы они сливались в тождества, как это бывает с обыкновенными рассуждениями? Значит, этот прием к ним неприменим. А почему? Потому что их определения непредикативные и дают тот заколдованный круг, который я отметил выше; непредикативные определения не могут стать на место определяемого термина. В этих условиях логистика является уже не бесплодной, она родит антиномию.

Вера в существование актуальной бесконечности дала начало этим непредикативным определениям. Я объяснюсь. В этих определениях фигурирует слово «все», как это видно из приведенных выше примеров. Слово «все» имеет достаточно точный смысл, когда речь идет о бесконечном [1]) числе предметов; для того

---

[1]) В оригинале опечатка, следует читать «конечном». — *Примеч. ред.*

чтобы оно имело также смысл, когда предметов имеется бесчисленное множество, необходимо, чтобы существовало актуально бесконечное. В противном случае на все эти предметы нельзя было бы смотреть как на данные до их определения; вместе с тем определение понятия N, если оно зависит от всех предметов A, может страдать пороком заколдованного круга, раз между предметами A имеются такие, которые нельзя определить без помощи самого понятия N.

Правила формальной логики выражают просто свойства всех возможных классификаций. Но для того чтобы эти правила были приложимы, необходимо, чтобы классификации оставались неизменными, чтобы их не приходилось изменять на протяжении рассуждений. Если приходится распределять конечное число предметов, то легко сохранить эти классификации без изменения. Если же предметы имеются в неопределенном количестве, т. е. если имеется возможность постоянного и внезапного появления новых предметов, то может случиться, что такое появление обяжет к изменению классификации. Отсюда опасность антиномий.

Нет актуальной бесконечности. Канторианцы забыли это и впали в противоречие. Верно то, что теория Кантора оказала услуги, но это было тогда, когда она применялась к истинной проблеме, термины которой были отчетливо определены; тогда можно было подвигаться вперед без опасений.

И логистики, подобно канторианцам, забыли об этом и встретились с теми же затруднениями. Но нужно знать, попали ли они на этот путь случайно или по необходимости.

Для меня вопрос не представляет сомнений. Вера в актуально бесконечное является существенной в логике Рассела. Этим она отличается от логистики Гильберта. Гильберт становится на точку зрения объема именно для того, чтобы избежать канторовских антиномий; Рассел становится на точку зрения содержания. Для него, следовательно, род предшествует виду и summum genus[1]) предшествует всему. Это не представляло бы неудобства, если бы summum genus был конечным; но если он бесконе-

[1]) Первый, главный род (*лат.*). — *Примеч. ред.*

чен, то приходится бесконечное ставить перед конечным, т. е. рассматривать бесконечное как актуальное.

Но мы имеем не только бесконечные классы. Когда мы переходим от рода к виду, суживая понятие введением новых условий, то эти условия тоже появляются в бесконечном числе. Ибо они вообще выражают, что рассматриваемый предмет находится в том или ином отношении ко всем предметам бесконечного класса.

Однако все это уже устаревшая история. Рассел заметил опасность. Он ее обдумает. Он все изменит. Он готов, запомним это, не только ввести новые принципы, которые позволяют производить не разрешенные никогда операции, но готов запретить операции, которые считал некогда законными. Он не довольствуется поклонением тому, что сжигал; он готов сжечь то, чему поклонялся, что еще тяжелее. Он не прибавляет нового крыла к зданию, он подрывает его основание.

Старая логистика умерла, а zigzag-theory и no classes theory оспаривают друг у друга преемственность. Чтобы судить о новой логистике, мы подождем, когда она образуется.

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

На предыдущих страницах я старался объяснить, каким образом ученый должен производить выбор между бесчисленными фактами, раскрывающимися перед ним; ведь уже одна естественная немощность ума заставляет его делать такой выбор, хотя бы этот выбор и всегда представлял собой жертву. Сначала я искал оснований для этого в общих соображениях, указывая, с одной стороны, природу проблемы, подлежащей разрешению, с другой, — выясняя причину человеческого ума, этого главного орудия для разрешения. Затем я привел ряд пояснительных примеров. Я не умножал их до бесконечности; я сам должен был произвести между ними выбор и, естественно, выбрал вопросы, мною наиболее изученные. Другие на моем месте, без сомнения, сделали бы другой выбор; но это не имеет значения, потому что они пришли бы, я думаю, к тем же выводам.

Существует иерархия фактов. Одни факты не имеют значения; все то, чему они нас учат, касается их одних. Ученый, который констатировал их, не познал ничего более, как один факт, и не сделался способным предвидеть новые. Эти факты как бы происходят однажды, и повториться им не суждено.

С другой стороны, существуют факты большого значения. Каждый из них учит нас новому закону. И так как ученому предстоит сделать выбор, то именно к такого рода фактам он должен обратиться.

Без сомнения, такая классификация относительна и зависит от слабости нашего ума. Факты малого значения суть факты сложные, на которые могут оказывать очень чувствительное влияние различные обстоятельства, слишком многочисленные и многообразные, для того чтобы мы были способны уловить их. Но я должен прибавить, что эти факты мы считаем сложными потому, что запутанная связь влияющих обстоятельств превосходит пределы нашего ума. Без сомнения, ум более обширный и тонкий, чем наш, судил бы об этом иначе. Но все это несущественно; пользоваться мы можем не этим высшим умом, а нашим собственным.

Факты большого значения — это те, которые мы считаем простыми, потому ли, что они таковы в действительности, что на них, следовательно, оказывает влияние небольшое число вполне определенных обстоятельств, или же потому, что они кажутся простыми, и, следовательно, те многочисленные обстоятельства, от которых они зависят, подчиняются законам случая и таким образом друг друга компенсируют. Так, собственно, чаще всего и бывает. Вот почему мы должны были несколько ближе исследовать вопрос о том, что представляет собой случай. Факты, к которым приложимы законы случая, становятся доступны ученому, отступающему в унынии перед чрезвычайной сложностью тех проблем, к которым эти законы неприложимы.

Мы видели, что эти соображения приложимы не только к физическим, но и к математическим наукам. Метод доказательства не один и тот же для физика и для математика. Но методы открытия истины чрезвычайно сходны. В том и в другом случае они заключаются в восхождении от факта к закону и к разысканию фактов, способных вести к закону.

Чтобы сделать этот пункт очевидным, я проследил за творческой деятельностью математика и притом в трех ее формах: за деятельностью математика-изобретателя и творца; за умственным процессом бессознательного геометра, который у наших далеких предков или в смутные годы нашего детства строил наше инстинктивное понятие пространства; за умом юноши, перед которым наставники средней школы раскрывают первые основы науки и которому они стараются объяснить основные определения. Везде мы видели роль интуиции и обобщающего ума, без которых эти, если мне позволено будет так выразиться, три вида математиков были бы осуждены на одинаковое бессилие.

Но и в области доказательств логика еще не составляет всего. Настоящее математическое рассуждение есть настоящая индукция, во многих отношениях отличная от индукции физической, но, как и она, идущая от частного к общему. Все усилия, направленные на то, чтобы опрокинуть этот порядок и свести математическую индукцию к правилам логики, закончились без успеха, и эту неудачу трудно было скрыть под маской особого языка, недоступного профанам.

Примеры, которые я заимствовал из физических наук, ознакомили нас с разнообразными фактами большого значения. Опыт Кауфмана над лучами радия революционизирует сразу механику, оптику и астрономию. Почему? Потому что по мере того, как эти науки развивались, мы лучше познали соединяющие их связи; и тогда мы подметили нечто вроде общей схемы, представляющей собой карту универсальной науки. Существуют факты, общие и нескольким наукам, которые напоминают общие источники вод, направляющихся во все стороны; их можно сравнить с тем Сен-Готардским узлом, откуда выходят воды, питающие четыре различных бассейна.

Но мы можем произвести выбор между фактами с бо́льшим сознанием, чем наши предшественники, которые смотрели на эти бассейны как на обособленные и отделенные друг от друга непроходимыми преградами. Мы должны избирать всегда простые факты; но из массы этих простых фактов мы должны отдавать предпочтение тем, которые уподобляются, по месту своего положения, упомянутым выше узлам Сен-Готарда.

Если науки и не имеют непосредственной связи, то они взаимно освещают друг друга путем аналогии. Когда изучили законы, которым подчиняются газы, стало очевидным, что мы подошли к факту крупного значения; однако размер этого значения оценивался ниже действительного; между тем с известной точки зрения в газах мы имели прообраз Млечного пути, а факты, которые могли, как казалось, интересовать только физиков, должны открыть новые горизонты в астрономии, сверх ее ожидания.

ПОСЛЕДНИЕ МЫСЛИ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I

ЭВОЛЮЦИЯ ЗАКОНОВ

Бутру в своих работах о случайности законов природы задает такой вопрос: не подвержены ли изменению законы природы? Возможно ли, чтобы весь мир непрерывно эволюционировал, а сами законы, т. е. правила, по которым эта эволюция совершается, одни оставались совершенно неизменными? Ученые, конечно, никогда не согласятся с тем, что законы могут быть подвержены изменению; в том смысле, в каком они понимали бы эту идею, они не могли бы признать ее, не отрицая законности и даже возможности науки. Но философ может с полным правом поставить такой вопрос, рассмотреть различные решения, им допускаемые, и заключения, к которым они приводят, и попытаться согласовать их с законными требованиями ученых. Мне хотелось бы рассмотреть этот вопрос с нескольких точек зрения; при этом я, собственно говоря, выскажу не заключения, но различные размышления, не лишенные, быть может, интереса. Читатель простит меня, если я попутно буду слишком долго останавливаться на некоторых смежных вопросах.

I

Встанем сначала на точку зрения математика. Предположим на минуту, что законы природы в течение веков подвергались изменениям, и спросим себя, имеем ли мы возможность обнаружить эти изменения? Прежде всего, надо иметь в виду, что до тех сравнительно немногих веков, в течение которых человек жил и мыслил, прошли неизмеримо более долгие периоды, когда человека еще не было, а в будущем наступят другие времена, когда наш род исчезнет. Желая признать эволюцию законов, мы должны ее считать, конечно, очень медленной, так что в течение тех немногих веков, когда человек мыслил, законы природы могли испытать лишь незначительные изменения. Если они эволюционировали в прошлом, то мы должны понимать это прошлое в геологическом смысле. Были ли законы природы вчера такими же, как и сегодня, и останутся ли они такими же и завтра? В каком смысле понимаем мы слова «прежде», «сегодня» и «завтра» в подобном вопросе? Сегодня — это те времена, о которых история сохранила нам воспоминание; прежде — это миллионы лет, предшествовавшие истории, времена, когда спокойно жили ихтиозавры, чуждые философии, а завтра — это миллионы лет того будущего, когда Земля остынет, и не будет человека с его глазами, которые видят, и с его мозгом, который мыслит.

Спрашивается: что такое закон? Закон — это постоянная связь между предыдущим и последующим, между современным состоянием мира и непосредственно наступающим состоянием. Идеальный ученый, которому были бы известны все законы природы, имел бы определенные правила, с помощью которых он мог бы, зная настоящее состояние любой части Вселенной, определить, в каком состоянии эти же части будут находиться завтра. Само собою разумеется, что этот процесс можно продолжать неограниченно: из состояния мира в понедельник он выведет состояние его во вторник, отсюда тем же способом можно будет определить состояние мира в среду и т. п. Но это еще не все; если существует постоянная связь между состоянием мира в понедельник и его состоянием во вторник, то из первого можно вывести второе, но можно также поступить наоборот: зная состояние во вторник, можно определить состояние в понедельник, из состояния мира в понедельник можно будет тем же самым образом вывести заключение о состоянии его в воскресенье и т. д.; одинаково можно будет проникать как в глубь прошлого, так и в даль будущего. Зная мир в настоящий момент и законы, можно предсказать будущее, но равным образом можно отгадать и прошлое; используемый для этой цели прием, по существу, обратим.

Ввиду того, что мы теперь стоим на точке зрения математика, мы должны дать этой концепции возможно более точное выражение, и с этой целью мы прибегнем к языку математики. Мы скажем поэтому, что совокупность законов равносильна системе дифференциальных уравнений, которые связывают скорости изменения различных элементов Вселенной с их величинами в данный момент времени.

Как известно, такая система имеет бесконечное множество решений, но при задании начальных значений всех элементов, т. е. значений в момент $t = 0$ (то, что на обычном языке называется настоящим), решение становится вполне определенным, так что мы можем вычислить значения всех элементов в любой момент как для $t > 0$, что соответствует будущему, так и для $t < 0$, т. е. для прошлого. При этом важно заметить, что от настоящего к прошедшему мы заключаем совершенно таким же образом, как и от настоящего к будущему.

Но если дело обстоит так, то какими средствами располагаем мы для того, чтобы узнать геологическое прошлое, т. е. историю тех времен, в течение которых законы могли изменяться? Это прошлое недоступно нашему непосредственному наблюдению, и мы можем знать о нем только по тем следам, которые были им оставлены в настоящем, мы можем узнать его лишь через настоящее, и притом дедуктивно вывести его из настоящего мы можем лишь посредством только что мною изложенного процесса; этот же процесс позволяет нам равным образом из настоящего вывести будущее. Но можем ли мы при помощи этого процесса открыть изменения в законах? Очевидно, нет! Ведь мы можем применять эти законы, лишь предполагая, что они остались неизменными; непосредственно мы знаем, например, только состояние мира в понедельник и правила, связывающие это состояние с состоянием в воскресенье, и, применяя эти правила, мы определяем состояние в воскресенье; но если нам захочется идти дальше и вывести отсюда состояние в субботу, то для этого, несомненно, нужно допустить, что сами правила, при помощи которых мы перешли от понедельника к воскресенью, остались теми же самыми между воскресеньем и субботой. В противном случае мы имели бы право сделать только один вывод: невозможно знать происшедшее в субботу. Если, стало быть, постоянство законов входит в предпосылки всех наших умозаключений, то мы не можем не найти его снова в выводе.

Зная современные орбиты планет, Леверье вычисляет, предположим, на основе закона Ньютона, каковы они будут через 10 000 лет. Какие бы способы вычислений он ни применял, он ни в коем случае не мог бы прийти к заключению, что по истечении стольких-то тысячелетий закон Ньютона перестанет быть верным. Он мог бы, изменив в своих формулах знак перед временем, вычислить, каковы были эти орбиты 10 000 лет тому назад, но, как он уверен заранее, никогда не обнаружит, что закон Ньютона не всегда был один и тот же.

Итак, для того чтобы мы могли кое-что узнать о прошлом, мы непременно должны допустить, что законы остались совершенно без всяких изменений; если мы это допустим, то вопрос об эволюции законов отпадет; при отказе от этого допущения данный вопрос станет неразрешимым, так же, как и всякий другой вопрос, относящийся к прошлому.

II

Мне могут возразить: разве не может случиться так, что применение предыдущего приема приведет к противоречию или, другими словами, что наши дифференциальные уравнения не будут иметь решения? Так как исходная посылка всех наших рассуждений, т. е. гипотеза о неизменности законов, привела бы нас, таким образом, к абсурдному следствию, то мы доказали бы путем приведения к абсурду, что законы эволюционировали, хотя для нас и осталось бы навсегда скрытым, в каком именно направлении они изменились.

Так как процесс, к которому мы прибегаем, обратим, то сказанное нами выше применимо и к будущему, и возможны, по-видимому, случаи, когда мы могли бы утверждать, что к такому-то сроку мир должен погибнуть или изменить свои законы; например, может случиться, что одна из величин, с которыми мы должны были иметь дело, согласно вычислению обращается в бесконечность или получает физически невозможное значение. Погибнуть или изменить свои законы — это почти одно и то же; мир, законы которого отличались бы от наших, был бы уже не нашим миром, а каким-то другим.

Возможно ли, чтобы изучение современного мира и его законов привело нас к формулам, не свободным от подобных противоречий? Законы выводятся из опыта; если они говорят нам, что состояние A в воскресенье влечет за собой состояние B в понедельник, то, значит, оба состояния A и B были наблюдаемы и ни одно из них не является физически невозможным. Если мы продолжаем этот процесс дальше и делаем выводы, переходя каждый раз от одного дня к следующему, от состояния A к состоянию B, от состояния B к состоянию C, от состояния C к состоянию D и т. д., то все эти состояния физически возможны. Действительно, если бы состояние D, например, не было возможным, то не был бы возможен опыт, который доказывает, что состояние C по истечении дня порождает состояние D. Поэтому, как бы далеко мы ни зашли в нашем процессе дедукции, мы никогда не натолкнемся на физически невозможное состояние, т. е. на противоречие. Если же какая-либо из наших формул приведет нас к противоречию, то это значит, что мы вышли за границы опыта, т. е. произвели экстраполяцию. Предположим, например, что при известных условиях температура, как показывает наблюдение, понижается за день на один градус; если в данный момент температура равна, например, 20 градусам, то мы заключаем, что через 300 дней она будет —280°; это абсурд и физически невозможно, так как —273° есть абсолютный нуль. Что же отсюда вытекает? Показывало ли наблюдение, что в некоторый день температура изменилась от —279° до —280°? Конечно, нет! Ведь обе эти температуры не существуют. Наблюдение показало, например, что закон был приблизительно верен между 0° и 20°, и отсюда мы сделали необоснованное заключение, что он должен оставаться таким же до температуры —273° и даже ниже; это — незаконная экстраполяция. Но экстраполировать формулу, выведенную из опытов, можно неисчислимым множеством способов, и между ними всегда можно выбрать такую экстраполяцию, которая исключает физически невозможные состояния.

Законы нам известны только приблизительно; опыт лишь ограничивает наш выбор, и между всеми законами, которые он позволяет нам выбрать, мы всегда можем подобрать такие, которые не приведут нас к противоречию наподобие описанного выше, так что мы не будем вынуждены сделать заключение об изменяемости законов. Итак, этот способ также не дает нам возможности доказать эволюцию законов — ни в будущем, ни в прошлом.

III

Теперь нам могут возразить: «Вы говорите, что, переходя при помощи наших законов от настоящего к прошлому, мы никогда не придем к противоречию, а тем не менее ученым пришлось уже натолкнуться на противоречия, и разрешить их не так легко, как вы предполагаете. Я допускаю даже, что эти противоречия лишь кажущиеся и со временем они, по всей вероятности, будут разрешены; но ведь из ваших рассуждений следует, что даже кажущееся противоречие должно было бы быть исключено».

Поясним это примером. Если по законам термодинамики вычислить время, в течение которого Солнце могло снабжать нас теплом, то мы найдем приблизительно 50 000 000 лет. Этот период геологи считают недостаточным: не говоря уже о том, что эволюция органических видов должна была совершаться гораздо медленнее (это вопрос спорный), но на отложение тех пластов, где находятся остатки растений и животных, которые не могли бы существовать без Солнца, требуется по крайней мере в десять раз большее число лет.

Причина этого противоречия заключается в том, что рассуждение, на котором основывает свое доказательство геолог, носит совершенно иной характер, чем рассуждение математика. Наблюдая одинаковые явления, мы приходим к выводу об одинаковости причин; например, найдя ископаемые остатки животных, которые относятся к ныне живущему семейству, мы заключаем, что в эпоху, когда происходило отложение пласта, содержащего эти остатки, условия, без которых животные этого семейства не могли бы жить, были все в наличии.

На первый взгляд то же самое делает и математик, на точку зрения которого мы становились в предыдущих параграфах; он также делал заключение, что одинаковые явления могут быть порождены лишь одинаковыми причинами, если только законы не изменились. Однако здесь все-таки есть весьма значительная разница. Рассмотрим состояние мира в данный момент и в некоторый предшествующий; состояние мира или даже весьма малой части его есть нечто, в высшей степени сложное и зависящее от очень большого числа элементов. Но для простоты предположим, что таких элементов всего два, так что двух данных достаточно, чтобы определить это состояние. Данные эти в первый момент будут, например A' и B', а в последующий момент — A и B.

Формула математика, построенная на основании всех законов, открытых наблюдением, учит его, что состояние AB может быть порождено лишь предшествующим состоянием $A'B'$, но если ему известно лишь одно из двух данных, например A, и ему неизвестно, сопутствует ли ему второе данное B, то его формула не дает ему возможности прийти к какому бы то ни было заключению. В лучшем случае, если явления A и A' покажутся ему связанными между собою и сравнительно не зависящими от B и B', он сделает заключение от A к A', но никогда он не выведет двух данных A' и B' из единственного данного A. Геолог же, напротив, наблюдая единственное явление A, выведет, что оно могло быть порождено лишь совокупностью причин A' и B', которые часто порождают его на наших глазах, так как в большинстве случаев это явление A отличается столь специфичным характером, что другая совокупность причин, которая привела бы к тому же результату, была бы абсолютно неправдоподобной.

Если два организма одинаковы или сходны, то это сходство не может быть случайным, и мы с достаточным основанием можем сказать, что они жили в сходных условиях; найдя остатки такого организма, мы можем быть уверены не только в том, что прежде существовал зародыш, сходный с тем, из которого в настоящее время развивается подобное существо, но также и в том, что внешняя температура была не выше той, при которой этот зародыш может развиваться. В противном случае пришлось бы прийти к заключению, что эти остатки представляют собой «игру природы», как предполагали в XVII веке; нет надобности доказывать, что подобное заключение ни в коем случае не вяжется с логикой. Существование органических окаменелостей есть лишь наиболее яркий случай, и мы могли бы привести примеры такого же рода, не выходя за пределы минерального царства.

Таким образом, геолог может делать выводы в тех случаях, когда это невозможно для математика. Но зато в противоположность математику он рискует впасть в противоречие. Если из одного-единственного обстоятельства геолог делает заключение о нескольких предыдущих, если объем заключения в некотором смысле больше, чем объем предпосылок, то может случиться, что заключение, выведенное из одного наблюдения, находится в противоречии с заключением, к которому приводит другое наблюдение. Каждый изолированный факт становится как бы центром излучения. Математик из каждого отдельного факта выводит только один факт, геолог же выводит несколько фактов; из имеющейся у него светящейся точки он делает светящийся кружок большей или меньшей величины; две светящиеся точки, стало быть, дадут ему два кружка, которые могут накладываться один на другой, откуда и следует возможность противоречия. Например, если геолог находит в пласте моллюсков, которые не могут жить при температуре ниже 20°, то он приходит к заключению, что моря того времени были теплыми; но если затем другой геолог откроет в той же формации других животных, которые не могли бы выжить при температуре выше 5°, то он придет к выводу, что эти моря были холодными.

Быть может, есть основание надеяться, что наблюдения в действительности не приведут к противоречию или что противоречия не окажутся непреодолимыми, но сами правила формальной логики не гарантируют, так сказать, от противоречия. Если дело обстоит так, то возникает вопрос: не придем ли мы, рассуждая подобно геологам, к столь абсурдному заключению, что будем вынуждены заключить об изменяемости законов?

IV

Я позволю себе сделать здесь отступление. Только что мы видели, что геолог обладает оружием, которого математик не имеет и которое дает геологу возможность заключать от настоящего к прошлому. Почему бы этому же орудию не позволить нам заключить и от настоящего к будущему? Когда я вижу двадцатилетнего человека, то я уверен, что он прошел все этапы от младенчества до зрелости, и, следовательно, за последние 20 лет на Земле не произошло такой катастрофы, которая уничтожила бы все живое; но я отнюдь не могу заключить из этого, что такая катастрофа не произойдет в ближайшие 20 лет. Имеющиеся у нас средства познания прошлого оказываются непригодными, когда дело идет о будущем, и потому будущее кажется нам более таинственным, чем прошлое.

Здесь мне приходится сослаться на одну статью, которую я написал на тему о случайности [1]); я там привел взгляд Лаланда, который в противоположность общераспространенному мнению высказал следующее положение: если будущее и определяется прошлым, то прошлое, однако, не определяется будущим; одна и та же причина может привести только к одному результату, тогда как один и тот же результат может быть вызван многими различными причинами. Если мы согласимся с этим мнением, то должны будем признать, что будущее узнать легко, и лишь прошлое является таинственным.

Я не мог согласиться с этим мнением, но я выяснил, каким образом оно могло возникнуть. Принцип Карно учит нас, что энергия, которую ничто не в состоянии уничтожить, стремится рассеяться. Температуры выравниваются, и мир стремится к однородности, т. е. к смерти. Стало быть, значительные различия в причинах приводят к малым различиям в следствиях. Когда различия в следствиях становятся столь малыми, что наши наблюдения уже неспособны их распознать, то мы теряем всякую возможность обнаружить различия, некогда имевшие место в причинах, которые вызвали эти следствия, сколь бы велики не были эти различия.

---

[1]) См. «Наука и метод», книга I, глава IV. — *Примеч. ред.*

Но именно благодаря тому, что все стремится к смерти, жизнь представляет исключение, которое нуждается в объяснении.

Если камни, предоставленные произволу случая, скатываются с горы, то они рано или поздно упадут в долину; если мы находим камень у самого подножия горы, то это тривиальный факт и ничего не говорит нам о предыдущей истории камня; мы не можем узнать, в каком месте горы находился камень до падения.

Но если нам придется встретить камень вблизи вершины, то мы можем быть уверены в том, что он всегда там находился; если бы камень лежал на склоне горы, то он скатился бы вниз к самому подножию горы; к такому выводу мы могли бы прийти с тем бо́льшим основанием, чем исключительнее случай и чем меньше его вероятность.

V

Я только попутно затрагиваю этот вопрос; о нем стоило бы поразмышлять, но мне не хочется слишком далеко уклоняться от моей темы.

Можно ли считать вероятным, что противоречия геологов когда-нибудь приведут ученых к заключению об эволюции законов? Прежде всего необходимо заметить, что науки лишь в своем неразвитом состоянии прибегают к тем заключениям по аналогии, которыми вынуждена довольствоваться современная геология. По мере своего развития науки приближаются к тому состоянию, которое, по-видимому, уже достигнуто астрономией и физикой и в котором законы допускают математическую формулировку. С этого момента то, что мы говорили в начале этой статьи, будет верным без всяких ограничений. Но многие полагают, что рано или поздно все науки должны будут пройти через ту же самую эволюцию. В таком случае трудности, которые могли бы нам встретиться, имеют лишь временный характер и должны отпасть, как только науки выйдут из неразвитого состояния.

Но у нас нет даже надобности ждать этого неопределенного будущего.

В чем состоит заключение по аналогии, к которому прибегает геолог? Факт из геологического прошлого кажется ему столь схожим с современным, что он не может признать это сходство случайным. Он считает невозможным объяснить его иначе, как допустив, что эти два факта вызваны совершенно одинаковыми условиями. Возможно ли, чтобы он представлял себе, будто условия были совершенно одинаковы, за исключением лишь того маленького обстоятельства, что вследствие изменения законов природы, происшедшего за это время, весь мир изменился до неузнаваемости? Он утверждал бы, что температура должна была остаться неизменной, тогда как вследствие ниспровержения всей физики влияния температуры претерпели бы радикальное изменение, так что само слово «температура» потеряло бы всякий смысл. Как легко видеть, ни в каком случае он никогда не согласится остановиться на подобной концепции; это абсолютно не согласуется с его логикой.

VI

Но, может быть, человечество будет существовать дольше, чем мы предположили, столь долго, что оно сумеет заметить, как на его глазах происходит изменение законов? Или, быть может, человечество изобретет столь чувствительные инструменты, что это изменение, несмотря на его медленность, можно будет обнаружить через несколько поколений? Об изменении законов мы тогда узнали бы не путем индукции или умозаключения, а из непосредственного наблюдения. Не теряют ли в таком случае предыдущие рассуждения своего значения? Мемуары, в которых излагаются опыты наших предшественников, представляли бы собой лишь следы прошлого, которые давали бы нам только косвенные сведения об этом прошлом.

Старые документы для историка имеют такое же значение, как окаменелости для геолога, а труды прежних ученых являются старыми документами. О мыслях этих ученых они говорят нам лишь постольку, поскольку люди прежних времен походили на нас. Если бы произошло изменение естественных законов, то это отразилось бы на всех частях Вселенной, и человечество также не могло бы ускользнуть от него; если предположить, что ему удалось бы выжить в новых условиях, то оно должно было бы подвергнуться изменению, чтобы приспособиться. Тогда язык прежних людей стал бы для нас непонятным; слова, которые они употребляли, не имели бы для нас смысла или, в лучшем случае, имели бы для нас не тот смысл, что для них. Не происходит ли это уже и теперь по истечении нескольких столетий, хотя законы физики остаются постоянными?

Итак, каждый раз мы возвращаемся к одной и той же дилемме: либо свидетельства прежних веков являются для нас вполне ясными, мир остался неизменным, и ни о чем другом они нам не могут сказать; либо же эти документы являются для нас непонятными, и мы ничего не узнаем из них, не узнаем даже, что законы изменились; мы прекрасно понимаем, что требуется не очень много, чтобы эти документы превратились для нас в мертвую букву.

Кроме того, люди прошлого, как и мы, имели только фрагментарное знание законов природы. Мы всегда найдем способ согласовать два таких фрагмента, даже если бы они сохранились нетронутыми, а тем более если из древности нам остается только слабое, туманное, наполовину стертое изображение.

VII

Встанем теперь на другую точку зрения. Законы, которые выведены нами из непосредственных наблюдений, представляют собой только результирующие. Возьмем, например, закон Мариотта. Большинству физиков он представляется лишь как следствие кинетической теории газов: молекулы газа движутся со значительными скоростями, они описывают сложные траектории, точные уравнения которых мы могли бы написать, если бы знали, по каким законам они взаимно притягиваются или отталкиваются. Рассматривая эти траектории с точки зрения теории вероятностей, можно доказать, что плотность газа пропорциональна его давлению.

Таким образом, законы, которым подчиняются доступные наблюдению тела, представляют собою не что иное, как следствия молекулярных законов. Их простота лишь кажущаяся, за ней скрывается чрезвычайно сложная действительность, так как степень ее сложности измеряется числом самих молекул. Но именно благодаря тому, что это число очень велико, отличия в деталях взаимно уравновешиваются, и мы верим в гармоническое соотношение.

Но сами молекулы в свою очередь могут быть целыми мирами; их законы, может быть, также имеют характер результирующих, и, чтобы найти их основание, пришлось бы спуститься к молекулам молекул и т. д.; неизвестно, где можно было бы остановиться.

Таким образом, законы, которые открыты благодаря наблюдению, зависят от двух обстоятельств: от молекулярных законов и от расположения молекул. Неизменяемостью отличаются молекулярные законы, так как это истинные законы, а другие — только кажущиеся. Но расположение молекул может меняться, а с ним изменяются и наблюдаемые законы. Это могло бы служить доводом в пользу эволюции законов.

VIII

Представим себе мир, различные части которого обладают столь совершенной теплопроводностью, что между ними постоянно поддерживается тепловое равновесие. Жители этого мира не имели бы никакого представления о том, что мы называем разностью температур; в их сочинениях по физике совершенно отсутствовала бы глава, посвященная термометрии. За исключением этого пункта, их теории могли бы быть довольно полными и содержали бы множество законов, даже более простых, чем наши.

Предположим теперь, что этот мир медленно охлаждается вследствие излучения: температура его остается везде одинаковой, но понижается с течением времени. Допустим, что один из обитателей этого мира впадает в летаргический сон и просыпается лишь через несколько веков; предположим еще, раз уж мы так щедры на предположения, что он может жить в охладевшем мире и что он сохранил память о прошлом. Он увидит, что его потомки по-прежнему пишут сочинения по физике и, как и раньше, ничего не говорят о термометрии, но законы, которые они учат, совершенно отличны от тех, которые были ему известны. Например, в свое время его учили, что вода кипит при давлении в 10 миллиметров ртутного столба, тогда как по наблюдениям новых физиков вода закипает лишь, если понизить давление до 5 миллиметров. То тело, которое он прежде знал в виде жидкости, теперь будет встречаться лишь в твердом состоянии и т. д. Все взаимодействия между различными частями Вселенной зависят от температуры, и с изменением температуры все изменяется до неузнаваемости.

Спрашивается: а нет ли такой физической сущности, столь же непознаваемой для нас, как температура для обитателей нашего фантастического мира? Не подвержена ли эта сущность постоянному изменению, подобно температуре шара, теряющего тепло через излучение, и не влечет ли это изменение за собой изменение всех законов?

IX

Вернемся к нашему воображаемому миру и спросим себя: не могли бы его обитатели, не повторяя истории спящих жителей Эфеса, заметить эту эволюцию? Как бы ни была совершенна теплопроводность на их планете, она, несомненно, не была бы абсолютной, так что чрезвычайно малые разности температур на ней были бы еще возможны. Долгое время они ускользали бы от наблюдения, но однажды могли бы изобрести более чувствительные измерительные приборы, и какой-нибудь гениальный физик доказал бы существование этих ничтожных разностей. Была бы построена теория, и оказалось бы, что эти разности температур влияют на все физические явления, и, наконец, какой-нибудь философ, взгляды которого показались бы большинству его современников смелыми и безрассудными, выступил бы с утверждением, что в прошлом могло произойти изменение средней температуры Вселенной, а вместе с ней и всех известных законов.

Не могли бы и мы сделать нечто подобное? Например, долгое время основные законы механики считались абсолютными. В настоящее время многие физики утверждают, что они должны быть изменены или, лучше сказать, расширены, что они верны приблизительно, только для тех скоростей, к которым мы привыкли, и что они теряют силу для скоростей, сравнимых со скоростью света; в подкрепление своих взглядов они ссылаются на некоторые опыты, выполненные с помощью радия. Тем не менее старые законы динамики остаются практически верными для окружающего нас мира. Нельзя ли, однако, с некоторой правдоподобностью утверждать, что вследствие постоянного рассеяния энергии скорости тел должны стремиться убывать, так как их живая сила стремится превратиться в тепло, и что, возвращаясь к достаточно отдаленному прошлому, мы дошли бы до эпохи, когда скорости, сравнимые со скоростью света, не были исключением, так что законы классической динамики тогда не были верны?

Допустим, с другой стороны, что законы, открываемые наблюдением, имеют лишь характер результирующих, зависящих как от молекулярных законов, так и от расположения молекул. Со временем, когда мы благодаря прогрессу науки постигнем эту зависимость, мы, несомненно, сможем прийти к выводу, что в силу самих молекулярных законов расположение молекул в прежнее время должно было быть не таким, как теперь, и, следовательно, законы, открываемые наблюдением, не всегда были одинаковыми. Мы пришли бы к заключению об изменяемости законов, но, отметим это особо, основанием для такого заключения послужило бы не что иное, как принцип их неизменности! Мы утверждали бы, что видимые законы изменились, но делали бы это лишь в силу того, что молекулярные законы, которые мы отныне рассматривали бы как истинные, были бы признаны постоянными.

X

Итак, нет ни одного закона, о котором мы могли бы с уверенностью сказать, что в прошлом он был верен с той же степенью приближения, что и сейчас. Больше того, не существует ни одного закона, про который мы могли бы с уверенностью сказать, что невозможно доказать его несправедливость в прошлом. Тем не менее в этом нет ничего такого, что могло бы помешать ученым сохранить свою веру в принцип неизменности, так как всегда, когда закон низводится до степени временного закона, он заменяется другим законом, более общим и более универсальным; своим разжалованием всякий закон обязан именно воцарению нового закона, и, таким образом, не может наступить междуцарствие, и принципы остаются неприкосновенными; только для них и совершаются перемены, и сами перевороты служат лишь блестящим подтверждением принципов.

Дело обстоит не так, что изменения законов обнаруживаются сначала путем индукции и опыта, а мы лишь потом стараемся их объяснить, подводя их во что бы то ни стало под более или менее искусственный синтез. Нет, синтез идет прежде всего, и если мы приходим к заключению об изменении законов, то лишь для того, чтобы не нарушить синтеза.

XI

До сих пор мы не задавали вопроса о том, изменяются ли законы в действительности, мы лишь спрашивали, могут ли люди считать, что законы изменяются. Но являются ли законы неизменными сами по себе, если рассматривать их как существующие вне разума, который их создал или наблюдал? Такой вопрос не только неразрешим, но и не имеет никакого смысла. К чему нам задаваться вопросом, могут ли законы изменяться со временем в мире вещей в себе, если в таком мире само понятие времени, может быть, не имеет смысла? О том, что собой представляет этот мир, мы ничего не можем ни сказать, ни думать, мы можем только говорить о том, чем он представляется или может представляться уму, не слишком отличающемуся от нашего.

Вопрос, поставленный таким образом, может быть решен. Представим себе два ума, сходные с нашим и наблюдающие Вселенную в две различные эпохи, например, отделенные друг от друга миллионами лет; каждый из них построит науку, т. е. систему законов, выведенных из фактов, открываемых наблюдением. Вполне возможно, что эти науки будут сильно отличаться одна от другой, и в этом смысле можно будет сказать, что законы эволюционировали. Но как бы ни было велико различие, мы всегда можем вообразить ум, который, как и первые два, имеет ту же природу, что и наш, но гораздо бо́льшую силу или наделен гораздо большей долговечностью, чем мы; такой ум будет в состоянии произвести синтез и соединить в одну-единственную формулу, лишенную противоречий, обе частные и приближенные формулы, полученные нашими двумя недолговечными исследователями за тот короткий промежуток времени, которым они располагали. Для этого ума законы останутся неизменными и наука будет непреложной, лишь окажется, что ученые не располагали достаточным материалом.

Разъясним это геометрическим сравнением. Предположим, что изменение мира можно представить аналитической кривой. Каждый из нас видит лишь очень малую дугу этой кривой. Если бы кто-то обладал точным знанием кривой, то он мог бы составить ее уравнение и неограниченно продолжать ее. Но он имеет только приближенное знание дуги и может ошибиться в уравнении кривой; если он попытается продолжить кривую, то линия, которую он проведет, будет отклоняться от действительной кривой и тем сильнее, чем меньше протяжение известной ему дуги и чем дальше он будет продолжать эту дугу. Другой наблюдатель будет знать только другую дугу и притом лишь приближенно.

Если оба наблюдателя будут находиться на большом удалении друг от друга, то продолжения дуг, которые они проведут, не совпадут; но это вовсе не значит, что новый, более дальнозоркий наблюдатель, который непосредственно видит более длинный отрезок кривой и, таким образом, охватывает своим взглядом одновременно обе дуги, не будет в состоянии написать более точное уравнение и согласовать обе формулы; как бы ни была замысловата действительная кривая, всегда можно найти такую аналитическую кривую, которая на протяжении произвольно заданной длины будет сколь угодно мало отклоняться от действительной кривой.

Многие читатели, несомненно, будут возражать против того, что я постоянно заменяю мир системой простых символов. Но я это делаю не только лишь по профессиональной привычке математика, к этому меня вынуждает и сама природа рассматриваемого вопроса. Мир Бергсона [1]) не имеет законов, иметь их могут

---

[1]) Анри Бергсон (1859—1941) — французский философ-идеалист, представитель антиинтеллектуалистического интуитивизма. — *Примеч. ред.*

лишь более или менее искаженные картины мира, которые создают ученые. Когда говорят, что природа подчиняется законам, под этим подразумевают, что такой портрет обладает достаточной степенью сходства. О нем и только о нем мы можем размышлять, не опасаясь, что сама идея закона, составляющая предмет нашего изучения, обратится в ничто. С другой стороны, эта картина мира может быть разложена: ее можно разбить на элементы и отличить в ней один от другого разные внешние признаки, независимые части. Если я иногда эти элементы упрощал и сводил рассуждения к очень малому числу элементов, то это только вопрос сложности; это ничего не изменяло ни в природе, ни в содержании моих рассуждений, лишь изложение становилось более сжатым.

Глава II

ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ

Одной из причин, побудивших меня вернуться к вопросу, которым я занимался неоднократно, является происшедший недавно переворот в наших взглядах на механику. Разве принцип относительности, как его понимает Лоренц, не должен заставить нас принять совершенно новые представления о пространстве и времени и разве он не заставит нас тем самым оставить уже окончательно установленные, казалось бы, выводы? Разве мы не говорили, что геометрия была создана нашим умом, конечно, в связи с опытом, но не из опыта, как нечто принудительно навязанное им, так что, однажды построенная, она уже недоступна никакой проверке, не боится никаких новых покушений со стороны опыта? И, однако, не кажется ли, что опыты, на которых основана новая механика, поколебали и геометрию? Чтобы разобраться во всем этом, я должен кратко напомнить некоторые из основных идей, которые я пытался развить в моих прежних работах.

Прежде всего я устраню понятие о мнимом чувстве пространства, которое будто бы позволяет нам локализовать наши ощущения в каком-то совершенно готовом пространстве, понятие о котором существует до всякого опыта и которое до всякого опыта уже имеет все свойства пространства геометра. Что такое в сущности это мнимое чувство пространства? Какой опыт должны мы поставить, когда желаем убедиться, обладает ли им какое-нибудь животное? Мы помещаем поблизости от этого животного различные вещи, которых оно очень хочет, и наблюдаем, сумеет ли оно произвести сразу, без пробы, движения, необходимые для достижения этих вещей. А как убеждаемся мы в том, что другие люди обладают этим замечательным чувством пространства? Точно так же, замечая, что они способны сокращать надлежащим образом свои мускулы и достигать предметов, о присутствии которых им сообщили определенные ощущения. Наконец, как уверяемся мы в наличии этого чувства пространства в нашем собственном сознании? Здесь также, имея различные ощущения, мы знаем, что в состоянии произвести движения, позволяющие нам достигнуть предметов, в которых мы видим источник этих ощущений, и тем самым воздействовать на наши ощущения, заставить их исчезнуть или сделать их более интенсивными. Вся разница заключается лишь в том, что для этого нам нет надобности действительно производить эти движения, достаточно лишь представить их себе. Это чувство пространства, которого будто бы не в силах выразить интеллект, могло бы быть разве лишь какой-то особенной силой, заключенной в глубинах подсознательного, а в таком случае сила эта могла бы стать нам известной только через вызываемые ею действия; но эти действия и суть как раз те движения, о которых я только что говорил. Таким образом, чувство пространства сводится к некоторой постоянной ассоциации между определенными ощущениями и определенными движениями или к представлению этих движений (нужно ли во избежание постоянно повторяющихся, несмотря на мои неоднократные объяснения, недоразумений сказать еще раз, что я под этим понимаю не представление этих движений в пространстве, а представление сопутствующих им ощущений?).

Почему же и в какой мере пространство относительно? Ясно, что если бы наше тело и все окружающие нас предметы, равно как и наши измерительные инструменты, были перенесены в другую часть пространства, причем их взаимные положения не изменились бы, то мы бы этого вовсе не заметили. В действительности это и имеет место, ибо мы уносимся, даже не догадываясь об этом, вместе с Землей в ее движении. Точно так же мы ничего не заметили бы, если бы все предметы увеличились в одно и то же число раз и если бы то же самое произошло с нашими измерительными инструментами. Таким образом, мы не только не можем знать абсолютного положения в пространстве какого-либо предмета, так что сами эти слова «абсолютное положение в пространстве» не имеют никакого смысла и следует говорить лишь о его относительном положении по отношению к другим предметам, но и выражения «абсолютная величина предмета», «абсолютное расстояние между двумя точками» также не имеют никакого смысла; можно говорить лишь об отношении двух величин, об отношении двух расстояний. Больше того, предположим, что все предметы деформируются согласно некоторому закону, более сложному, чем предыдущий, согласно, скажем, совершенно произвольному закону, и предположим, далее, что в то же самое время наши измерительные инструменты деформируются по тому же самому закону. Мы и этого не могли бы заметить, так что пространство гораздо более относительно, чем это обыкновенно думают. Мы можем заметить лишь те изменения формы предметов, которые отличаются от одновременных изменений формы наших измерительных инструментов.

Наши измерительные инструменты представляют собой твердые тела или же состоят из нескольких твердых тел, подвижных друг относительно друга, относительные перемещения которых отмечаются особыми реперами, помещенными на этих телах, или указателями, перемещающимися по градуированным шкалам; пользование инструментом сводится к отсчету этих показаний. Мы, таким образом, можем узнать, переместился ли наш инструмент наподобие неизменного твердого тела или нет, так как в этом случае рассматриваемые отсчеты не должны были измениться. В состав наших инструментов входят также и оптические трубы, с помощью которых мы производим отсчеты, таким образом, можно сказать, что лучи света тоже принадлежат к нашим инструментам.

Способна ли наша интуиция пространства дать нам нечто большее? Мы видели, что она сводится к некоторой постоянной связи между определенными ощущениями и определенными движениями. Это значит, что те члены, с помощью которых мы производим эти движения, играют, так сказать, тоже роль измерительных инструментов. Инструменты эти, менее точные, чем инструменты ученого, достаточны, однако, для нашей повседневной жизни. Именно с их помощью ребенок или первобытный человек измерили или, вернее, построили себе пространство, которым они довольствуются в нуждах своей повседневной жизни. Наше тело — наш первый измерительный инструмент. Как и прочие инструменты, оно состоит из нескольких твердых частей, подвижных друг относительно друга, причем определенные ощущения предупреждают нас об относительных перемещениях этих частей. Благодаря этому мы, как и в случае искусственных инструментов, можем узнать, переместилось ли наше тело наподобие неизменного твердого тела или нет. Словом, все наши инструменты, как те, которыми ребенок обязан природе, так и те, которыми ученый обязан своему гению, имеют в качестве основных частей твердое тело и световой луч.

Спрашивается, имеет ли при таких условиях пространство геометрические свойства, независимые от инструментов, которые служат для его измерения? Пространство может, как мы сказали, подвергнуться любой деформации, и ничто не откроет нам этого, если наши инструменты испытали ту же самую деформацию. Таким образом, пространство в действительности аморфно; оно рыхлая, лишенная твердости форма, которую можно приложить ко всему; оно не имеет своих собственных свойств. Заниматься геометрией — это значит изучать свойства наших инструментов, т. е. свойства твердого тела.

Но в таком случае, поскольку наши инструменты несовершенны, геометрия, казалось бы, должна изменяться со всяким новым усовершенствованием инструментов. Конструкторы должны были бы иметь право извещать в своих проспектах: «Предлагаю пространство гораздо более высокого качества, чем пространства моих конкурентов, гораздо более простое, более удобное, более комфортабельное». Но мы знаем, что это не имеет места. Хотелось бы сказать, что геометрия — это учение о свойствах, которые имели бы инструменты, если бы они были совершенными. Но для этого надо было бы знать, что представляет собой совершенный инструмент, а мы этого не знаем, потому что таких инструментов нет и потому что мы могли бы определить идеальный инструмент лишь с помощью геометрии, т. е. впадая в порочный круг. Поэтому мы скажем, что геометрия представляет собой исследование определенной системы законов, мало отличающихся от тех, которым подчиняются в действительности наши инструменты, но гораздо более простых, законов, которым реально не подчиняется никакой естественный предмет, но которые постижимы умом. В этом смысле геометрия есть некоторое условное соглашение, своего рода компромисс между нашей любовью к простоте и нашим желанием не слишком удаляться от того, что нам сообщают наши иструменты. Это соглашение определяет одновременно как пространство, так и совершенный инструмент.

То, что мы сказали о пространстве, применимо и ко времени. Говоря это, я имею в виду не время, как его понимают ученики Бергсона, не ту длительность, которая не является чистым количеством, лишенным всякого качества, но которая является, так сказать, самим качеством, длительность, различные части которой, взаимно проникая друг друга, качественно друг от друга отличаются. Эта длительность не могла бы быть инструментом ученого; она могла бы стать им, лишь подвергнувшись коренному преобразованию, лишь «опространствившись», как говорит Бергсон. Действительно, необходимо, чтобы она стала измеримой; то, что недоступно измерению, не может быть и объектом науки. Но измеримое время по существу также относительно. Если бы все процессы в природе замедлились и если бы то же самое произошло с нашими часами, то мы бы ничего не заметили; это произошло бы при любом законе замедления, лишь бы оно было одним и тем же для всех решительно процессов и для всех часов. Таким образом, свойства времени — только свойства часов, подобно тому как свойства пространства — только свойства измерительных инструментов.

Это еще не все. Психологическое время, длительность Бергсона, из которой произошло время ученых, служит для классификации явлений, происходящих в одном и том же сознании. Оно непригодно для классификации двух психологических явлений, происходящих в двух различных сознаниях, а тем более двух физических явлений. Допустим, что некоторое событие происходит на Земле, другое — на Сириусе. Как узнать, происходит ли первое раньше второго, одновременно с ним или после него? Это может быть лишь делом условного соглашения.

Можно, однако, рассматривать относительность времени и пространства с совершенно иной точки зрения. Рассмотрим законы, которым подчиняется мир; они могут быть выражены с помощью дифференциальных уравнений. Мы констатируем, что эти уравнения не изменяются, если так изменить прямоугольную координатную систему, что она остается неподвижной, точно так же, как и при изменении начала времени или при замене прямоугольной системы неподвижных осей координат такими же, но подвижными осями, движущимися прямолинейно и равномерно. Позвольте мне назвать относительность психологической, если она рассматривается с первой точки зрения, и физической, если она рассматривается со второй точки зрения. Вы сразу же видите, что физическая относительность гораздо у́же психологической. Мы сказали, например, что ничего не изменится, если умножить все длины на одну и ту же постоянную величину, лишь бы умножение распространялось на все предметы и на все инструменты. Но если мы умножим все координаты на одну и ту же величину, то возможно, что наши дифференциальные уравнения изменятся. Они изменятся, например, если мы введем подвижные вращающиеся оси, потому что в этом случае придется ввести в уравнения простую и составную центробежные силы. Таким именно образом опыт Фуко показал наглядно вращение Земли. В этом есть нечто, противоречащее нашим основным идеям об относительности пространства, идеям, основанным на психологической относительности. Это несогласие смущало многих философов.

Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее. Все части мира связаны между собой, и как ни далек

Сириус, он все-таки несколько действует на то, что происходит у нас. Поэтому если мы захотим написать дифференциальные уравнения, управляющие миром, то они или не будут точными или же должны будут зависеть от состояния всего мира. Не будет отдельной системы уравнений для мира Земли, а другой — для мира Сириуса; будет одна система, применимая ко всей Вселенной.

Но мы не наблюдаем непосредственно дифференциальных уравнений; мы наблюдаем лишь конечные уравнения, которые являются непосредственными выражениями наблюдаемых явлений и из которых дифференциальные уравнения получаются дифференцированием. Дифференциальные уравнения не изменяются, когда производят одну из тех замен координатных осей, о которых мы говорили выше. Иное происходит в случае конечных уравнений: изменение осей заставило бы нас изменить постоянные интегрирования. Таким образом, принцип относительности применяется не непосредственно к наблюдаемым конечным уравнениям, но к уравнениям дифференциальным. Но как перейти от конечных уравнений к тем дифференциальным уравнениям, интегралами которых они являются? Необходимо знать несколько частных интегралов, отличающихся друг от друга величинами постоянных интегрирования, и исключить эти постоянные дифференцированием. Только одно из этих решений осуществлено в природе, хотя их возможно бесчисленное множество. Чтобы построить дифференциальное уравнение, необходимо знать не только то решение, которое осуществлено, но также и все остальные, возможные.

Но если мы имеем лишь одну систему законов, применимую ко всей Вселенной, то опыт может дать нам только одно-единственное решение, то самое, которое фактически осуществлено, ведь Вселенная существует в одном экземпляре. Это — первая трудность.

Кроме того, в силу психологической относительности пространства мы можем наблюдать лишь то, что могут измерить наши инструменты. Они дают нам, например, расстояние между звездами или между различными рассматриваемыми нами телами. Они не дадут нам их координат по отношению к некоторым подвижным или неподвижным осям, существование которых лишь дело условия. Если наши уравнения и содержат эти координаты, то только благодаря некоторой фикции, которая может быть удобной, но которая все же остается фикцией. Если мы желаем, чтобы наши уравнения прямо выражали то, что мы наблюдаем, то необходимо, чтобы расстояния непосредственно фигурировали в числе наших независимых переменных и тогда остальные переменные исчезнут сами собой. Это будет наш принцип относительности, но теперь уже лишенный всякого смысла. Он означает просто, что мы ввели в наши уравнения вспомогательные, добавочные переменные, не представляющие ничего осязаемого, и что их можно исключить.

Эти трудности исчезают, если не придерживаться абсолютной строгости. Различные части мира связаны между собой, но как только расстояние становится достаточно большим, их взаимодействие делается столь слабым, что мы вправе им пренебречь. А тогда наши уравнения разделятся на отдельные системы, причем одна окажется применимой только к земному миру, другая — к солнечному миру, третья — к миру Сириуса или даже к гораздо меньшим мирам, например таким, как лабораторный стол.

В таком случае уже нельзя сказать, что Вселенная существует лишь в одном экземпляре: в лаборатории может быть много столов, можно будет вновь провести известный опыт, изменив его условия. Тогда уже будет найдено не одно-единственное решение, осуществленное в действительности, но целый ряд возможных решений, и можно будет легко перейти от конечных уравнений к дифференциальным уравнениям.

С другой стороны, мы будем знать не только взаимные расстояния различных тел одного из этих маленьких миров, но также и их расстояния до тел соседних маленьких миров. Мы можем сделать так, что будут меняться только вторые расстояния, а первые останутся неизменными. Это все равно, как если бы мы изменили оси, к которым отнесен наш первый маленький мир. Звезды слишком удалены от нас, чтобы заметно воздействовать на наш земной мир, но мы их видим и благодаря этому можем относить земной мир к осям, связанным с этими звездами. Мы имеем способ измерить сразу взаимные расстояния земных тел и координаты этих тел по отношению к системе осей, чуждой земному миру. Принцип относительности в этом случае приобретает определенный смысл, он становится доступным проверке.

Заметим, однако, что мы получили этот результат, пренебрегая известными действиями, но тем не менее мы не считаем наш принцип только приближенным, а приписываем ему абсолютное значение. Действительно, заметив, что он остается верным, как бы ни были удалены друг от друга наши маленькие миры, мы условно соглашаемся говорить, что он остается истинным для точных уравнений Вселенной. И это условное соглашение никогда нельзя будет опровергнуть, ибо принцип наш, взятый в применении ко всей Вселенной, недоступен проверке.

Вернемся теперь к случаю, о котором мы только что говорили. Дана некоторая система, относимая то к неподвижным, то к вращающимся осям. Изменяются ли при этом уравнения, выражающие ее движение? Да, отвечает обычная механика. Но верно ли это? Ведь то, что мы наблюдаем, — это не координаты тел, а их взаимные расстояния. Мы могли бы попытаться составить уравнения, которым подчиняются эти расстояния, исключив другие величины, являющиеся лишь добавочными, недоступными наблюдению переменными. Такое исключение всегда возможно. Но дело в том, что при сохранении координат мы получим дифференциальные уравнения второго порядка. Если же мы исключим все то, что недоступно наблюдению, то дифференциальные уравнения будут уже третьего порядка, так что останется значительно больше места для различных возможностей. При таком условии принцип относительности будет применим и в этом случае; при переходе от неподвижных осей к вращающимся эти уравнения третьего порядка не изменятся. Будут изменяться лишь уравнения второго порядка, определяющие координаты. Но эти уравнения второго порядка являются, так сказать, интегралами первых, и, как во все интегралы дифференциальных уравнений, в них входят постоянные интегрирования; эти-то постоянные и изменяются при переходе от неподвижных осей к вращающимся. Но так как мы предполагаем, что наша система совершенно изолирована в пространстве, т. е. рассматриваем ее как всю Вселенную, то мы не имеем никакой возможности убедиться в том, вращается ли она. Значит, именно дифференциальные уравнения третьего порядка выражают то, что мы наблюдаем.

Вместо того чтобы брать всю Вселенную в целом, рассмотрим теперь наши маленькие разделенные миры, не имеющие механического воздействия друг на друга, но видные один другому. Если один из этих миров вращается, то мы заметим его вращение. Мы найдем, что значение, которое следует приписать постоянной, о которой мы только что говорили, зависит от скорости вращения. Тем самым будет оправдано соглашение, обычно принимаемое механиками.

Мы видим, таким образом, каков смысл принципа физической относительности. Он уже не является больше простым условным соглашением, он доступен проверке и, значит, может быть опровергнут опытом. Он — экспериментальная истина. Каков же смысл этой истины? Его легко вывести из предыдущих соображений. Принцип этот означает, что взаимодействие двух тел стремится к нулю, когда эти тела удаляются бесконечно друг от друга. Он означает, что два удаленных друг от друга мира ведут себя так, как если бы они были независимы друг от друга. Теперь более понятно, почему принцип физической относительности менее универсален, чем принцип психологической относительности. Мы уже не видим в нем необходимости, вытекающей из самой природы нашего ума. Это — экспериментальная истина, которой опыт указывает границы.

Принцип физической относительности может служить нам для определения пространства. Он дает нам, так сказать, новый измерительный инструмент. Объяснюсь. Как может твердое тело служить нам для измерения или, правильнее, для построения пространства? Дело обстоит здесь следующим образом: перенося твердое тело из одного места в другое, мы замечаем, таким образом, что его можно приложить сперва к одной фигуре, потом к другой, и мы соглашаемся считать эти фигуры равными. Из этого соглашения родилась геометрия. Каждому возможному перемещению твердого тела в этом случае соответствует некоторое преобразование пространства самого в себя, не изменяющее форм и величин фигур. Геометрия есть не что иное, как учение о взаимных соотношениях этих преобразований или, выражаясь математическим языком, учение о строении группы, образованной этими преобразованиями, т. е. группы движений твердых тел.

Возьмем теперь другую группу, группу преобразований, не изменяющих наших дифференциальных уравнений. Мы получаем новый способ определения равенства двух фигур. Мы уже не скажем более: две фигуры равны, когда одно и то же твердое тело может быть приложено и к одной и к другой. Мы скажем: две фигуры равны, когда одна и та же механическая система, удаленная от соседних систем настолько, что ее можно рассматривать как изолированную, будучи помещена сперва таким образом, что ее материальные точки воспроизводят первую фигуру, а затем таким образом, что они воспроизводят другую фигуру, ведет себя во втором случае так же, как и в первом.

Отличаются ли друг от друга существенным образом оба эти взгляда? Нет. Твердое тело принимает свою форму под влиянием взаимных притяжений и отталкиваний составляющих его молекул, и эта система сил должна быть в равновесии. Определить пространство таким образом, что твердое тело сохраняет свою форму при перемещении, — это все равно, что определить его тем, что уравнения равновесия этого тела не изменяются при изменении осей. Но эти уравнения равновесия представляют собой только частный случай общих уравнений динамики, которые в силу принципа физической относительности не должны изменяться при таком изменении осей.

Твердое тело — это такая же механическая система, как и всякая другая. Вся разница между нашими прежним и новым определениями пространства заключается в том, что последнее шире, позволяя заменить твердое тело любой другой механической системой. Более того, наше новое условное соглашение определяет не только пространство, но и время. Оно объясняет нам, что такое два одновременных момента, что такое два равных промежутка времени или же что такое промежуток времени, вдвое больший другого промежутка.

Еще одно замечание. Принцип физической относительности, сказали мы выше, является экспериментальным фактом в том же смысле, в каком им являются свойства данных в природе твердых тел. Как таковой, он подвержен непрерывному пересмотру. Между тем геометрия не подлежит такому пересмотру, поэтому она должна быть условным соглашением, и принцип относительности должен рассматриваться как условное соглашение. Мы сказали выше, каков его экспериментальный смысл: он означает, что взаимодействие двух весьма удаленных друг от друга систем стремится к нулю, когда их взаимное расстояние бесконечно возрастает. Опыт показывает нам, что это приблизительно верно. Он не может показать нам, что это верно в точности, потому что расстояние между системами всегда останется конечным. Но ничто не мешает нам считать его в точности верным; ничто не помешало бы нам предположить это даже в том случае, если бы опыт обнаружил в принципе кажущуюся ошибку. Предположим, что взаимодействие двух тел, уменьшавшееся сперва с ростом расстояния, затем начало возрастать. Ничто не помешает нам предположить, что для еще большего расстояния оно снова начнет убывать, стремясь в пределе к нулю. В этом случае наш принцип получает характер условного соглашения и избавляется, таким образом, от посягательств опыта. Это — условное соглашение, которое подсказывает нам опыт, но которое мы принимаем добровольно.

В чем же заключается переворот, происшедший под влиянием новейших успехов физики? Принцип относительности в его прежней форме должен быть отвергнут, он заменяется принципом относительности Лоренца. Именно преобразования «группы Лоренца» не изменяют дифференциальных уравнений динамики. Если мы предположим, что наша система отнесена не к неподвижным осям, а к осям, обладающим переносным движением, то приходится допустить, что все тела деформируются, что шар, например, превращается в эллипсоид, малая ось которого совпадает с направлением переносного движения осей координат. В этом случае и само время испытывает глубокие изменения. Возьмем двух наблюдателей, из которых первый связан с неподвижными осями, второй — с движущимися, но оба считают себя находящимися в покое. Мы найдем, что не только та геометрическая фигура, которую первый считает шаром, будет казаться второму эллипсоидом, но что два события, которые первый будет считать одновременными, не будут таковыми для второго.

Все происходит так, как если бы время было четвертым измерением пространства и как если бы четырехмерное пространство, получающееся из соединения обычного пространства и времени, могло вращаться не только вокруг какой-нибудь оси обычного пространства, так что время при этом остается неизменным, но и вокруг любой оси. Чтобы сравнение было математически верным, этой четвертой координате пространства следует приписать чисто мнимое значение. Четырьмя координатами какой-нибудь точки нашего нового пространства уже будут не x, y, z и t, но x, y, z и $t\sqrt{-1}$. Но я не буду настаивать на этом пункте; важно лишь отметить, что в этом новом представлении пространство и время не являются уже двумя совершенно различными сущностями, которые можно рассматривать отдельно друг от друга, но двумя частями одного и того же целого, столь тесно связанными, что их не легко отделить друг от друга.

Другое замечание. Когда-то я пытался определить отношение между двумя событиями, происшедшими в двух различных местах, говоря, что одно можно считать предшествующим другому, если его можно рассматривать как причину этого другого. Это определение становится теперь недостаточным. В новой механике нет действий, которые переносятся мгновенным образом. Максимальная скорость передачи действия — это скорость света. При этих условиях может случиться, что событие A не может быть (при одном лишь рассмотрении пространства и времени) ни действием, ни причиной события B, если расстояние между теми местами, в которых они происходят, таково, что свет не может перенестись в надлежащее время ни от места B к месту A, ни от места A к месту B.

Каково же будет наше отношение к этим новым представлениям? Заставят ли они нас изменить наши заключения? Нисколько; мы приняли известное условное соглашение потому, что оно казалось нам удобным, и сказали, что ничто не заставит нас от него отказаться. Теперь некоторые физики хотят принять новое условное соглашение. Это не значит, что они были вынуждены это сделать; они считают это новое соглашение более удобным — вот и все. А те, кто не придерживается их мнения и не желает отказываться от своих старых привычек, могут с полным правом сохранить старое соглашение. Между нами говоря, я думаю, что они еще долго будут поступать таким образом.

Глава III

ПОЧЕМУ ПРОСТРАНСТВО ИМЕЕТ ТРИ ИЗМЕРЕНИЯ

1. Analysis situs и непрерывность

Обыкновенно геометры различают два вида геометрий; первую они называют геометрией метрической, а вторую — проективной. Метрическая геометрия основана на понятии расстояния; две фигуры в ней считаются эквивалентными, когда они «равны» в том смысле, какой придают этому слову математики. Проективная же геометрия основана на понятии прямой линии. Чтобы две фигуры в ней рассматривались как эквивалентные, нет нужды, чтобы они были равными; достаточно того, чтобы можно было перейти от одной из них к другой с помощью проективного преобразования, т. е. чтобы одна из них была перспективой другой. Нередко эту вторую дисциплину называли качественной геометрией, и она действительно такова, если противопоставлять ее первой, метрической геометрии, ибо ясно, что измерение и количество играют в ней менее важную роль. Но все-таки она еще не полностью качественная. Тот факт, что какая-нибудь линия представляет собой прямую, не есть еще нечто чисто качественное. Нельзя убедиться в том, что какая-нибудь линия представляет собой прямую, не производя измерений или не налагая на эту линию линейки, являющейся особым измерительным инструментом.

Но есть третья геометрия, из которой совершенно изгнано количество и которая носит чисто качественный характер. Это — Analysis situs. В этой дисциплине две фигуры считаются эквивалентными всякий раз, когда можно непрерывной деформацией перейти от одной из них к другой независимо от того, каков бы ни был закон этой деформации, лишь бы он не нарушал непрерывности. Так, круг эквивалентен эллипсу или даже любой замкнутой кривой, но он не эквивалентен отрезку прямой, так как этот отрезок не замкнут. Шаровая поверхность эквивалентна любой выпуклой поверхности, но не эквивалентна тору, потому что в торе есть отверстие, которого нет у шара. Представим себе какую-нибудь модель и копию с нее, сделанную неискусным художником. Пропорции здесь искажены, прямые, проведенные дрожащей рукой, имеют ненужные отклонения и представляют собой всякого рода искривления. С точки зрения метрической или даже проективной геометрии обе фигуры не эквивалентны, но они эквивалентны с точки зрения Analysis situs.

Analysis situs представляет собой очень важную для геометра науку. Она приводит к целому ряду теорем, столь же тесно связанных между собой, как и теоремы Евклида. На совокупности этих теорем Риман построил одну из самых замечательных и наиболее абстрактных теорий чистого анализа. Чтобы показать природу этой науки, я приведу две из этих теорем: две замкнутые плоские кривые пересекаются в четном числе точек; если многогранник выпуклый, т. е. если на его поверхности невозможно провести замкнутой кривой, не деля ее на две части, то число его ребер равно числу вершин плюс число граней без двух. Это верно даже тогда, когда ребра и грани этого многогранника кривые.

Analysis situs представляет для нас интерес тем, что именно здесь проявляется роль геометрической интуиции в чистом виде. Если в какой-нибудь теореме метрической геометрии обращаются к этой интуиции, то это делается потому, что невозможно изучать метрические свойства фигуры, отвлекаясь от ее качественных свойств, т. е. от тех свойств, которые составляют собственно предмет Analysis situs. Нередко говорят, что геометрия есть искусство хорошо рассуждать над плохо сделанными чертежами. Это — не просто шутливое замечание, это — истина, достойная того, чтобы над ней задумались. Но что такое плохо сделанный чертеж? Это такой чертеж, который может сделать тот неискусный художник, о котором мы говорили выше. Он искажает более или менее грубо все пропорции, его прямые линии все в изгибах, его круги имеют уродливые горбы, все это нисколько не меняет дела и нисколько не смущает геометра, все это не помешает ему правильно рассуждать.

Но не следует допускать, чтобы неопытный художник изобразил замкнутую кривую в виде незамкнутой, три пересекающиеся в одной точке линии — в виде трех линий, вовсе не имеющих общих точек, поверхность с отверстием — поверхностью без отверстия. В этом случае невозможно было бы уже пользоваться его чертежом, и рассуждение оказалось бы невозможным. Интуиции не мешают недостатки чертежа, затрагивающие метрическую или проективную геометрию, но она станет невозможной, как только эти недостатки затронут Analysis situs.

Это простое замечание показывает нам истинную роль геометрической интуиции. Именно чтобы помочь интуиции, геометр пользуется чертежами фигур или по крайней мере мысленно их себе представляет. Но если он легко поступается метрическими или проективными свойствами этих фигур, если он оказывает исключительное внимание их чисто качественным свойствам, то это потому, что здесь мы имеем дело с геометрической интуицией в чистом виде. Я не хочу сказать, что метрическая геометрия основана на чистой логике, что в ней вовсе не играют роли интуитивные истины. Но это — интуиции совсем другого рода, они аналогичны тем, которые играют значительную роль в арифметике и в алгебре.

Основное положение Analysis situs состоит в том, что пространство есть непрерывность трех измерений. Каково происхождение этого положения, я уже рассмотрел в другом месте, но очень кратко, и мне кажется не лишним остановиться на нем еще раз несколько подробнее, чтобы разъяснить некоторые пункты.

Пространство относительно. Я хочу этим сказать не только то, что мы можем быть перенесены в другую область пространства и не заметим этого (фактически это и происходит, ибо мы не замечаем переносного движения Земли), и не только то, что размеры всех предметов могут быть увеличены в одном и том же отношении, и мы не сможем этого заметить, если наши измерительные инструменты подвергнутся такому же увеличению; но я хочу сказать также, что пространство может быть деформировано по любому закону, лишь бы и наши измерительные инструменты были деформированы в точности по тому же самому закону.

Эта деформация может быть любой, однако она должна быть непрерывной, т. е. быть такой, которая преобразует какую-либо фигуру в другую, эквивалентную ей с точки зрения Analysis situs. Следовательно, пространство, рассматриваемое независимо от наших измерительных инструментов, не имеет ни метрических, ни проективных свойств. Оно имеет лишь топологические свойства (т. е. свойства, которые изучает Analysis situs). Оно аморфно, т. е. оно не отличается от такого пространства, которое может быть выведено из него произвольной непрерывной деформацией. Чтобы пояснить свою мысль, я воспользуюсь математическим способом выражения. Рассмотрим два пространства E и E'. Точка M в пространстве E соответствует точке M' в пространстве E'. Точка M имеет прямоугольные координаты x, y и z; точка M' имеет прямоугольные координаты в виде трех каких-либо непрерывных функций x, y и z. С интересующей нас точки зрения оба эти пространства не отличаются друг от друга.

В другом месте я подробно разъяснил, как введение наших измерительных инструментов и в особенности твердых тел позволяет уму определить и более полно организовать это аморфное пространство, как оно позволяет проективной геометрии провести в нем сеть прямых линий, а метрической геометрии измерить расстояния между его точками, какую существенную роль играет в этом процессе основное понятие группы. Я считаю все эти вопросы разобранными и не буду к ним возвращаться.

Единственным нашим предметом здесь является аморфное пространство, изучаемое Analysis situs, единственное пространство, не зависящее от наших измерительных инструментов, и его основное свойство (я чуть было не сказал, его единственное свойство) быть непрерывностью трех измерений.

2. Непрерывность и сечения

Но что такое непрерывность n измерений? Чем отличается она от непрерывности с меньшим или большим числом измерений? Напомним сначала некоторые результаты, полученные учениками Кантора. Можно установить однозначное соответствие между точками какой-нибудь прямой и точками какой-нибудь плоскости или, более общо, между точками непрерывности n измерений и точками непрерывности p измерений. Это возможно, пока мы не связываем себя условием, чтобы двум бесконечно близким точкам этой прямой соответствовали две бесконечно близкие точки плоскости, т. е. пока мы не придерживаемся условия непрерывности.

Следовательно, можно, деформируя плоскость, получить прямую, лишь бы эта деформация не была непрерывной. Наоборот, это было бы невозможно при непрерывной деформации. Таким образом, вопрос о числе измерений тесно связан с понятием непрерывности и теряет всякий смысл для того, кто отвлекся бы от этого понятия.

Для определения непрерывности n измерений мы имеем прежде всего аналитическое определение: непрерывность n измерений — это совокупность n координат, т. е. совокупность n величин, которые могут изменяться независимо друг от друга и принимать все вещественные значения, удовлетворяющие некоторым неравенствам.

Хотя это определение безупречно с математической точки зрения, однако оно не может нас вполне удовлетворить. В непрерывности различные координаты не просто расположены, так сказать, одна около другой; они связаны между собой, образуя различные аспекты одного целого. Изучая пространство, мы в каждый момент производим то, что называется изменением координат. Например, мы изменяем прямоугольные оси координат или даже переходим к криволинейным координатам. Изучая другую непрерывность, мы также изменяем координаты, т. е. заменяем наши n координат какими-либо n непрерывными функциями этих координат. Для нас, извлекающих понятие о непрерывности n измерений не из указанного выше аналитического определения, а из некоторого более глубокого источника, эта операция вполне естественна; мы чувствуем, что она не искажает того, что существенно в непрерывности. Наоборот, для тех, кто знал бы непрерывность из ее аналитического определения, эта операция была бы, без сомнения, допустимой, но странной и непонятной.

Наконец, это определение с легкостью жертвует интуитивным происхождением понятия непрерывности и всеми богатствами, заключающимися в этом понятии. Оно относится к категории тех определений, которые стали столь частыми в математике с тех пор, как стремятся «арифметизировать» эту науку. Эти определения, как мы сказали, безупречные с точки зрения математика, не могут удовлетворить философа. Они заменяют определяемый предмет и интуитивное понятие этого предмета конструкцией, сделанной из более простых материалов. Мы видим, что действительно из этих материалов можно выполнить такую конструкцию, но в то же время видно, что из них можно было бы сделать и множество других конструкций. Из самой конструкции непонятно, в силу каких глубоких соображений собрали эти материалы именно таким, а не каким-нибудь иным образом. Я не хочу сказать, что эта «арифметизация» математики — плохая вещь, я утверждаю лишь, что она не составляет всего.

Я попытаюсь обосновать определение числа измерений на понятии сечения. Представим себе замкнутую кривую, т. е. непрерывность одного измерения. Если мы отметим на этой кривой две какие-нибудь точки, через которые мы запретим себе переступать, то кривая окажется разделенной на две части, и невозможно будет перейти из одной части в другую, оставаясь на кривой и не переходя через запретные точки. Возьмем, наоборот, замкнутую поверхность, образующую непрерывность двух измерений. Мы можем отметить на этой поверхности одну, две, любое число запретных точек, поверхность от этого не окажется разбитой на две части. Можно будет перейти от одной ее точки к другой, не встречая препятствий, так как всегда можно будет обойти запретные точки.

Но если мы проведем на нашей поверхности одну или несколько замкнутых кривых и если мы будем рассматривать их как сечения, которые нельзя переступать, то поверхность может быть рассечена на несколько частей.

Перейдем теперь к случаю пространства. Его невозможно разделить на несколько частей, запрещая переступать через отдельные точки или через отдельные линии: эти препятствия всегда можно обогнуть. Здесь следует запретить переступать через определенные поверхности, т. е. через сечения двух измерений. Вот почему мы говорим, что пространство имеет три измерения.

Мы теперь знаем, что такое непрерывность n измерений. Непрерывность имеет n измерений, когда ее можно разбить на несколько частей, произведя в ней одно или несколько сечений, которые сами являются непрерывностями $n-1$ измерений. Таким образом, непрерывность n измерений определяется через непрерывность $n-1$ измерений. Это — рекуррентное определение.

Что мне внушает доверие к этому определению и показывает, что именно таким образом вещи естественно представляются уму, это прежде всего то, что многие авторы элементарных учебников, не мудрствуя лукаво, поступают аналогичным образом в начале своих сочинений. Объемы они определяют как части пространства, поверхности — как границы объемов, линии — как границы поверхностей, точки — как границы линий. После этого они останавливаются, и аналогия очевидна. Лишь впоследствии в других частях Analysis situs мы встречаемся снова с понятием сечения, имеющим огромное значение. Все здесь основано на сечении. Что, например, по Риману, отличает тор от сферы? То, что на сфере нельзя провести замкнутую кривую, не рассекая эту поверхность на две части, в то время как существуют замкнутые кривые, которые не рассекают тор на две части; на нем нужно провести два замкнутых сечения, не имеющих общей точки, чтобы быть уверенным в том, что тор разделен.

Остается рассмотреть еще один вопрос. Непрерывности, о которых мы только что говорили, — это математические непрерывности; каждая из их точек абсолютно отлична от других и к тому же абсолютно неделима. Непрерывности же, которые даются нам непосредственно нашими чувствами и которые я назвал бы физическими непрерывностями, совсем иного рода. Законом этих непрерывностей служит закон Фехнера, который я освобожу от украшающего его пышного математического наряда и сведу к простой формулировке лежащих в его основе экспериментальных данных. Взвешивая на руке, можно отличить вес в 10 граммов от веса в 12 граммов, но нельзя отличить вес в 11 граммов ни от веса в 10 граммов, ни от веса в 12 граммов. Возьмем более общий случай: могут быть две совокупности ощущений, которые мы отличаем друг от друга, но которые мы не можем отличить от некоторой третьей подобной же совокупности ощущений. В таком случае мы можем вообразить себе непрерывную цепь совокупностей ощущений такого рода, что каждая из них неотличима от следующей, хотя оба конца цепи легко отличимы. Это будет физическая непрерывность одного измерения. Мы можем также представить себе более сложные физические непрерывности. Элементами этих физических непрерывностей будут по-прежнему совокупности ощущений (но предпочитаю употреблять более простое слово «элемент»). Когда, в этом случае, вправе мы будем сказать, что система S подобных элементов представляет физическую непрерывность? Тогда, когда можно рассматривать два любых элемента ее как концы некоторой непрерывной цепи, подобной той, о которой я говорил, и все элементы которой принадлежат системе S. Это так же, как непрерывна поверхность, если можно соединить две ее любые точки непрерывной линией, не покидающей этой поверхности.

Можем ли мы распространить понятие сечения и на физические непрерывности и определить таким образом число их измерений? Разумеется, да. Положим, что мы сделали запретными некоторые из элементов S и все те элементы, которые нельзя от них отличить. Эти запретные элементы могут быть в конечном числе или образовывать в своей совокупности одну или несколько непрерывностей. Совокупность этих запретных элементов и составит сечение. Может случиться, что, произведя это сечение, мы разделим непрерывность S на несколько других непрерывностей так, что нельзя будет перейти непрерывным образом от одного какого-нибудь элемента S к другому какому-нибудь ее элементу по непрерывной цепи, притом таким образом, чтобы ни один элемент этой цепи не был неотличим от какого-нибудь элемента сечения.

Физическая непрерывность, которую можно разбить таким образом на несколько частей, сделав запретными конечное число элементов, будет иметь одно измерение. Физическая непрерывность будет иметь n измерений, если можно разбить ее, проведя сечения, представляющие собой в свою очередь физические непрерывности $n-1$ измерений.

3. Пространство и чувство

Вопрос, кажется, решен. Нам остается, по-видимому, лишь применить это правило или к физической непрерывности, являющейся грубым изображением пространства, или же к соответствующей математической непрерывности, являющейся его очищенным изображением и вместе с тем представляющей собой пространство геометра. Но это иллюзия. Так можно было бы поступить в том случае, если бы физическая непрерывность, из которой мы извлекаем пространство, давалась нам непосредственно чувствами, но на самом деле это не так.

Действительно, посмотрим, как можно вывести физическую непрерывность из множества наших ощущений. Каждый элемент физической непрерывности является некоторой совокупностью ощущений, и проще всего рассматривать сначала совокупность одновременных ощущений — некоторое состояние сознания. Но каждое из наших состояний сознания — это нечто чрезвычайно сложное, так что вряд ли можно рассчитывать найти когда-нибудь два неразличимых состояния сознания; между тем, согласно предыдущему, для построения физической непрерывности весьма существенно, чтобы можно было в известных случаях рассматривать два ее элемента как неразличимые. Но никогда не случится так, чтобы мы могли сказать: «я не могу отличить моего теперешнего состояния души от ее состояния третьего дня в этот же самый час».

Следовательно, мы должны допустить непосредственное вмешательство разума и, отвлекаясь от различий двух состояний сознания, условиться рассматривать их как тождественные. Мы, например, можем, и это проще всего, отвлечься от данных некоторых чувств. Я говорил выше, что я не в состоянии отличить вес в 10 граммов от веса в 11 граммов. Возможно, однако, что если я проводил когда-нибудь этот опыт, то ощущение давления, вызываемое весом в 10 граммов, сопровождалось различными обонятельными и слуховыми ощущениями, которые изменились, когда вес в 10 граммов был заменен весом в 11 граммов. Только отвлекаясь от этих посторонних ощущений, я и могу сказать, что эти два состояния сознания неразличимы.

Можно принять другие, более сложные соглашения; можно также принять за элементы нашей непрерывности не только совокупности одновременных ощущений, но и совокупности последовательных ощущений, последовательности ощущений. Затем придется установить основное соглашение и сказать, каковы общие признаки, которыми должны обладать два элемента непрерывности (безразлично, будут ли они двумя совокупностями одновременных или последовательных ощущений), чтобы их можно было рассматривать как тождественные.

Таким образом, чтобы определить физическую непрерывность, необходимо сделать двойной выбор: 1) надо выбрать совокупности одновременных или последовательных ощущений, которые могли бы служить элементами этой непрерывности; 2) надо выбрать основное соглашение, которое определило бы случаи, когда два таких элемента нужно рассматривать как тождественные.

Как следует произвести этот двойной выбор, чтобы получить пространство? Можем ли мы ограничиться рассмотрением совокупности одновременных ощущений или же необходимо рассматривать последовательности ощущений? Можем ли мы, в частности, довольствоваться наиболее простым и естественным основным соглашением, заключающимся в том, чтобы абстрагироваться от данных некоторых чувств? Нет.

Подобное абстрагирование невозможно. Мы не можем выбрать среди наших чувств такие, которые дадут нам все пространство и ничего больше. Нет такого чувства, которое могло бы дать нам пространство без содействия других чувств. Нет также ни одного чувства, которое бы не давало нам множества вещей, не имеющих никакого отношения к пространству.

Если, например, мы станем анализировать данные осязания в собственном смысле слова, то мы заметим следующее: опыт показывает нам, что если прикоснуться к коже двумя остриями, то сознание различает эти два укола только тогда, когда они достаточно удалены друг от друга, и перестает их различать, когда они очень сблизятся. Впрочем, то наименьшее расстояние, на котором их еще можно отличать друг от друга, зависит от части тела. Кожа, как обыкновенно говорят, разделена на участки, каждый из которых обладает одним чувствительным нервом. Если оба острия попадают на один и тот же участок, то возбуждается лишь один нерв, и мы воспринимаем только одно прикосновение; если же оба острия попадают в различные участки, то возбуждаются два нерва, и мы различаем два острия. Это объяснение не вполне удовлетворительно; таким путем мы не найдем признаков физической непрерывности. Предположим, что мы перемещаем оба острия, оставляя их на чрезвычайно малом, но постоянном расстоянии друг от друга. Так как расстояние очень мало, то есть вероятность того, что оба острия попадут на один и тот же участок, и мы будем ощущать только одно прикосновение. Но если мы станем их постепенно перемещать, то должен будет наступить момент, когда одно острие выйдет за пределы участка, в то время как другое еще останется в нем. В этот момент мы должны были бы почувствовать два прикосновения. В действительности этого не наблюдается. Следовательно, таким способом мы не получим представления о физической непрерывности, а лишь о дискретной совокупности, состоящей из стольких элементов, сколько имеется участков. Лучше предположить, что прикосновение острия возбуждает не только ближайший нерв, но и соседние нервы с силою, убывающей по мере увеличения расстояния. Допустим теперь, что сравниваются действия двух острий. Если расстояние между ними невелико, то ими возбуждаются те же самые нервы. Конечно, сила возбуждения одного и того же нерва одним острием и другим будет различной, но эта разница будет слишком ничтожной, чтобы ее можно было воспринять согласно общему правилу Фехнера. Если один нерв возбужден острием A и не возбужден острием B, то возбуждение от острия *A* будет слишком мало, и раздражение окажется ниже «порога сознания». Действия обоих уколов будут, таким образом, неразличимы.

В этом случае мы имеем все, что необходимо для построения физической непрерывности. Для этого нам достаточно водить двумя остриями по поверхности кожи и отмечать те случаи, когда сознание их различает. Мы отвлекаемся (и это я назвал выше нашим основным соглашением) от множества обстоятельств, от силы возбуждения каждого из чувствующих нервов, от большего или меньшего давления, оказываемого на кожу остриями, от способа прикосновения. Все эти обстоятельства даются нам осязанием, но мы их исключаем и оставляем только те, которые имеют геометрический характер. Получаем ли мы таким способом пространство? Нет. Во-первых, построенная таким образом непрерывность имеет лишь два измерения, как и сама поверхность кожи. Затем мы отлично знаем, что наша кожа подвижна и что одна и та же точка кожи не соответствует всегда одной и той же точке пространства; расстояние между двумя точками нашей кожи изменяется, когда наше тело деформируется. Можно думать, что моллюски воспринимают пространство таким образом, но оно не имеет никакого отношения к нашему пространству.

То же самое имеем мы и в случае зрения. Два пучка света, попадающих в две точки сетчатки, дадут нам впечатление одного или двух световых пятен в зависимости от большего или меньшего расстояния между обеими точками. Мы имеем аналогию с только что рассмотренными прикосновениями острий, и мы можем воспользоваться этим для построения физической непрерывности, абстрагируясь от цвета и от силы света. Эта физическая непрерывность будет иметь два измерения, как и поверхность сетчатки. Третье измерение получают, вводя явление конвергенции глаз при бинокулярном зрении, и вот это-то и называют зрительным пространством. Оно совершеннее осязательного пространства, с одной стороны, потому, что при желании ему можно придать три измерения, а с другой стороны, потому, что если сетчатка и подвижна, то как твердое тело, между тем, как кожа может изгибаться во всех направлениях. Здесь появляется искушение сказать, что это и есть то истинное пространство, в котором мы пытаемся локализовать все наши другие ощущения. Но это еще далеко не так. Вследствие подвижности глаза одной и той же точке сетчатки при одной и той же величине конвергенции глаз не всегда соответствует одна и та же точка пространства. Но это не все: непонятно, почему было введено третье измерение, столь отличное от двух других измерений, и почему пространство слепых тождественно с нашим пространством.

Если пожелаем скомбинировать зрительное пространство с осязательным, то получим 5 измерений вместо 3 или 2. Тогда необходимо объяснить, как эти 5 измерений сводятся к 3. Если же ввести в комбинации еще и другие чувства, то число измерений возрастет еще больше.

Словом, остается объяснить, почему зрительное и осязательное пространства представляют собой одно и то же пространство.

4. Пространство и движения

По-видимому, нельзя построить пространство, рассматривая совокупности одновременных ощущений, и нужно рассмотреть последовательности ощущений. Необходимо вернуться к тому, что мною уже было сказано. Почему некоторые изменения представляются нам как изменения положения, в то время как другие изменения представляются изменениями состояния, не имеющими геометрического характера? Чтобы понять это, мы должны сначала различать изменения внешние, не произвольные и не сопровождаемые мускульными ощущениями, и внутренние изменения, которые являются движениями нашего тела и которые мы отличаем от других потому, что они произвольны и сопровождаются мускульными ощущениями. Внешнее изменение всегда может быть исправлено внутренним изменением, например, когда мы следим глазами за движущимся предметом и таким образом приводим всегда его изображение на одно и то же место сетчатки. Внешнее изменение, которое может быть исправлено подобным образом, представляет собой изменение положения; если оно недоступно такому исправлению, то это есть изменение состояния.

Два внешних изменения, которые с качественной точки зрения совершенно различны, считаются соответствующими одному и тому же изменению положения, если они могут быть исправлены одним и тем же внутренним изменением. Точно так же два внутренних изменения могут состоять из последовательных рядов совершенно различных мускульных ощущений и в то же время соответствовать одному и тому же изменению положения, если они могут исправить одно и то же внешнее изменение. Это то, что на нашем обычном языке мы выражаем словами: «из одной точки в другую можно прийти многими путями». Что в этом случае важно, так это те движения, которые необходимо произвести, чтобы достичь определенного объекта, причем сознание этих движений есть для нас не что иное, как совокупность сопутствующих им мускульных ощущений.

Теперь положим, что некоторый предмет касается одного из моих пальцев, например указательного пальца правой руки. Этот факт вызывает у меня осязательное ощущение T. Но в то же время я получаю от этого предмета и зрительное ощущение V. Предмет удаляется, ощущение T исчезает, ощущение V заменяется новым зрительным ощущением V'. Это — внешнее изменение. Я хочу исправить отчасти это внешнее изменение, восстановив ощущение T, т. е. хочу привести мой указательный палец в соприкосновение с предметом. Для этого я должен выполнить определенные движения, которые выражаются для меня некоторой последовательностью мускульных ощущений S. Я это знаю, так как многочисленные опыты, произведенные частью мною самим, частью — моими предками, научили меня, что если ощущение T пропадает, а зрительное ощущение переходит из V, в V', то можно восстановить ощущение T движениями, соответствующими последовательному ряду S. Я знаю также, что мог бы получить тот же самый результат с помощью других движений, выражающихся для меня уже не последовательностью S, но другими последовательностями S' и S''.

Все эти последовательные ряды мускульных ощущений S, S', S'', ... не имеют, может быть, ни одного общего элемента. Я сближаю их между собой потому, что и те и другие позволяют мне восстановить ощущение T всякий раз, как ощущение V изменилось на V'. На нашем обычном языке, будучи знакомы с геометрией, мы скажем, что у различных последовательных рядов движений, соответствующих последовательным рядам мускульных ощущений S, S', S'', общим будет то, что у всех у них начальное и конечное положения моего указательного пальца одинаковы. Во всем остальном могут быть различия.

Таким образом, я поневоле перестаю различать эти различные последовательности S, S', S'' и начинаю рассматривать их как нечто одно. Точно таким же образом я перестаю различать последовательности мускульных ощущений, слишком мало от них отличающиеся. В таком случае у меня есть из чего строить физическую непрерывность. Действительно, я нашел элементы непрерывности, которые являются последовательностями мускульных ощущений, и я обладаю «основным соглашением», которое указывает мне, в каких случаях я должен считать два таких элемента тождественными. Именно эта непрерывность и обладает тремя измерениями.

Но это не все. Выше мы описали некоторую непрерывность, которая является настоящим пространством. Это — пространство, описанное одним из моих пальцев. Но у меня несколько пальцев (а с интересующей нас точки зрения любая точка моей кожи могла бы служить таким пальцем). Опишут ли мои различные пальцы одно и то же пространство? Конечно, да, но что, собственно, это значит? Это предполагает определенную совокупность свойств, которую было бы нелегко выразить на обычном языке, но я надеюсь ее объяснить, если мне позволят прибегнуть к некоторым символам. Я рассматриваю два пальца, которые я назову α и β. Пусть пальцем α будет, например, указательный палец правой руки, которым мы воспользовались для определения последовательностей S, S', S'', ... Мы запишем это так:

$$S \equiv S' \pmod{\alpha}.$$

Это означает, что если движения, соответствующие S, восстанавливают осязательное ощущение пальца α, то то же самое действие окажут и движения, соответствующие S', и наоборот. Аналогичным образом я напишу:

$$S_1 = S_1' \pmod{\beta},$$

чтобы выразить этим, что если движения, соответствующие S_1, восстанавливают осязательное ощущение пальца β, то то же самое произведут и движения, соответствующие S_1'.

Теперь я предположу, что существуют две особенные последовательности мускульных ощущений s и s_1, определяемые следующим образом: я предполагаю, что палец β испытывает осязательное ощущение от прикосновения к некоторому предмету; произведем движения, соответствующие s, это ощущение исчезнет, но в конце концов ощущение от прикосновения испытает палец α. Я знаю по опыту, что это будет иметь место всякий раз, когда перед тем, как произошли эти движения, палец β испытывал прикосновение, или по крайней мере почти всякий раз (я говорю «почти», ибо для удачи опыта необходимо, чтобы за время между двумя прикосновениями предмет не сдвинулся с места). На нашем обычном языке (который был бы понятнее для нас, но который я не смею употреблять, так как говорю о существах, не знающих еще геометрии) мы бы сказали, что движения, соответствующие s, привели палец α на место, занятое первоначально пальцем β. В случае s_1, наоборот, соответствующие движения приводят палец β на место, первоначально занимаемое пальцем α. Если две эти последовательности s и s_1 существуют, то соотношение

$$S \equiv S' \pmod{\alpha}$$

будет иметь следствием соотношение

$$s + S + s_1 \equiv s + S' + s_1 \pmod{\beta}.$$

В этом легко убедиться непосредственно, вспомнив смысл этих символов. Отсюда можно вывести без труда, что два пространства, образованные α и β, изоморфны и, в частности, они имеют одно и то же число измерений.

Дело обстояло бы иначе, если бы последовательности s и s_1 не существовали. Действительно, допустим, что невозможно найти такую последовательность движений, при которой на смену ощущения прикосновения пальца β к некоторому предмету появлялось бы ощущение прикосновения пальца α к тому же предмету. Как бы мы стали рассуждать в этом случае? Мы сказали бы, что палец β ощущает предмет, не находясь с ним в одной и той же точке пространства, что он его ощущает на расстоянии. Если бы это было не так, то всякий раз, когда палец β ощущал бы предмет, последний должен был бы находиться в одной и той же с ним точке A пространства. В таком случае должна была бы существовать последовательность движений, приводящих палец α в точку A. И так как предмет находится в точке A, то палец α должен был бы ощущать предмет, и это должно было бы происходить всегда. Итак, предполагая, что нет последовательности движений, обладающей этим свойством, приходится допустить, что палец ощущает предмет на расстоянии, т. е. что ощущения, испытываемого этим пальцем, недостаточно для определения положения предмета в пространстве, т. е., наконец, что пространство должно обладать бо́льшим числом измерений, чем физическая непрерывность, полученная с помощью пальца β указанным нами способом.

Я предположу, например, что пространство имеет четыре измерения, и обозначу буквами x, y, z, t четыре координаты. Я предположу, что палец β ощущает прикосновение предмета всякий раз, когда три координаты x, y и z одни и те же для пальца и предмета, каково бы ни было значение четвертой координаты; с другой же стороны, я предположу, что палец α ощущает прикосновение предмета всякий раз, когда три координаты x, y, t одни и те же для предмета и для пальца, какова бы ни была при этом координата z. Воспользуемся теперь нашими правилами для построения физической непрерывности, образованной с помощью β. Так как координата t не играет никакой роли, то мы найдем у этой непрерывности лишь три измерения, соответствующие трем координатам x, y, z. Точно так же физическая непрерывность, полученная с помощью α, будет иметь три измерения, соответствующие координатам x, y и t. Но мы не сможем найти такой последовательности движений, соответствующей последовательности мускульных ощущений s, которая бы заменяла ощущение прикосновения α ощущением прикосновения β.

Действительно, пусть x_1, y_1, z_1, t_1 будут координаты предмета, x_0, y_0, z_0, t_0 — координаты пальца β до движения, x'_0, y'_0, z'_0, t'_0, — координаты пальца α после движения. Мы выразим, что палец β ощущает прикосновение до движения, написав

$$x_0 = x_1, \quad y_0 = y_1, \quad z_0 = z_1. \tag{1}$$

Мы выразим, что α ощущает прикосновение после движения, написав

$$x'_0 = x_1, \quad y'_0 = y_1, \quad t'_0 = t_1. \tag{2}$$

Для того чтобы существовало s, необходимо, чтобы мы могли выбрать x_0, y_0, z_0, t_0, x'_0, y'_0, z'_0, t'_0 такими, чтобы соотношения (1) влекли за собой соотношения (2), каковы бы ни были x_1, y_1, z_1, t_1. Ясно, что это невозможно. Именно невозможность образовать s и показывает нам в подобном случае, что пространство будет иметь 4 измерения, а не 3, как физическая непрерывность, образованная с помощью β.

Мы, впрочем, и наблюдаем нечто подобное, когда привлекаем к рассмотрению чувство зрения. Рассмотрим какую-нибудь точку сетчатки. Мы можем заставить ее играть ту же роль, что и наши пальцы α и β. Мы можем рассмотреть последовательность движений, необходимых для того, чтобы привести изображение какого-нибудь предмета в эту точку γ сетчатки, или же последовательность соответствующих мускульных ощущений S. Мы можем воспользоваться этой последовательностью, для того чтобы определить физическую непрерывность, аналогичную той, которая была получена с помощью α или β. Эта непрерывность будет иметь только два измерения. Но мы не можем построить последовательности, аналогичной s, т. е. последовательности движений, которые наверняка вызовут вслед за зрительным ощущением в точке γ осязательное ощущение пальца α. Иными словами, недостаточно констатировать, что зрительное изображение предмета дается в γ, чтобы иметь возможность определить движения, необходимые для того, чтобы привести наш палец в соприкосновение с этим предметом. Нам недостает одного данного —

расстояния до предмета. Вот почему мы говорим, что ви́дение происходит на расстоянии и что пространство имеет три измерения, т. е. на одно больше, чем непрерывность, образованная с помощью β.

В этом кратком изложении мы показали, каковы те экспериментальные факты, которые заставляют нас приписывать пространству три измерения. Ввиду этих фактов нам было удобнее приписать ему три измерения, а не четыре или два. Но слово «удобный», пожалуй, в данном случае недостаточно сильно. Существо, которое приписало бы пространству два или четыре измерения, оказалось бы в мире, подобном нашему, менее приспособленным к борьбе за существование. Что это значит в действительности? Я позволю себе вернуться к моим символам, например к соотношениям

$$S \equiv S' \pmod{\alpha},$$

смысл которых я объяснил выше. Приписать пространству два измерения — это значило бы допустить такие соотношения, которых мы, люди, не допускаем. В этом случае пришлось бы предположить возможность заменить движения S, достигающие цели, движениями S', которые цели не достигают. Приписать же пространству четыре измерения значило бы, наоборот, отбросить такие соотношения, которые мы, люди, допускаем. В этом случае пришлось бы отказаться от возможности заменить движения S другими движениями S', точно так же достигающими цели, которые могли бы при известных обстоятельствах представить некоторые особые удобства.

5. Пространство и природа

Но вопрос может быть поставлен и с совершенно иной точки зрения. Мы до сих пор рассматривали его с чисто субъективной, чисто психологической или, если угодно, физиологической стороны. Мы рассматривали лишь отношения между пространством и нашими чувствами. Можно было бы, наоборот, встать на точку зрения физики и спросить себя: нельзя ли локализовать явления природы в пространстве, отличном от нашего, например в пространстве двух или четырех измерений? Физические законы выражаются дифференциальными уравнениями, а в этих уравнениях фигурируют три координаты материальных точек. Разве невозможно выразить эти же самые законы другими уравнениями, в которых на этот раз фигурировали бы другие материальные точки, имеющие четыре координаты? Или, может быть, это и возможно, но полученные таким образом уравнения не оказываются ли менее простыми? Или, наконец, если эти уравнения столь же просты, как и наши обычные уравнения, то не отбрасываем ли мы их только потому, что они нарушают наши умственные привычки?

Что, собственно, хотим мы сказать, говоря о выражении тех же самых законов другими уравнениями? Предположим, что перед нами два мира M и M'. Мы можем установить между явлениями, которые происходят в этих мирах или которые могли бы в них происходить, такого рода соответствие, что всякому явлению Ф первого мира будет соответствовать вполне определенное явление Ф′ второго мира, которое было бы, так сказать, его изображением. Если теперь я предположу, что необходимым следствием явления Ф в силу законов, управляющих миром M, оказывается определенное явление $Ф_1$, а необходимым следствием явления Ф′, изображения Ф, в силу законов, управляющих миром M', будет $Ф'_1$, точное изображение явления $Ф_1$, то мы сможем сказать, что оба мира подчиняются одним и тем же законам. Нас мало интересует качественная природа явлений Ф и Ф′, нам достаточно лишь, чтобы был возможен «параллелизм».

Действительно, эта качественная природа явлений затрагивает лишь наши чувства, а мы условились встать на внепсихологическую точку зрения, следовательно, условились абстрагироваться от данных наших чувств и обращать внимание только на взаимоотношения явлений. Так именно и поступает физик, когда он, например, заменяет газы, данные нам в опыте и вызывающие у нас ощущения давления и теплоты, газами кинетической теории, являющимися просто движущимися материальными точками, или когда он заменяет свет, получаемый в опыте и вызывающий у нас цветовые ощущения, колебаниями эфирной среды.

Достаточно рассмотреть какой-нибудь простой случай, например астрономические явления и закон Ньютона. Мы наблюдаем не координаты небесных светил, а только их взаимные расстояния. Поэтому естественным выражением законов их движения будут дифференциальные уравнения, связывающие эти расстояния со временем. Но расстояние между двумя точками в пространстве представляет собой известную простую функцию координат этих двух точек. Преобразуем наши дифференциальные уравнения, подставив в них эту функцию вместо всех расстояний. Мы получим тогда эти уравнения в их обычной форме, где фигурируют сами координаты светил.

Но мы могли бы заменить эти расстояния другими функциями и получили бы тогда другие формы этих уравнений. Все эти формы были бы одинаково правомерны с интересующей нас точки зрения, так как в них соблюден «параллелизм» между явлениями. Представим себе звезды расположенными в четырехмерном пространстве, так что положение каждой из них определяется уже не тремя, а четырьмя координатами. Заменим далее в наших уравнениях величину, представлявшую для нас до сих пор расстояние между двумя светилами, какой-нибудь функцией восьми координат этих двух светил. Нет никакой необходимости, чтобы эта функция была той самой, которая представляет расстояние между двумя точками в четырехмерном пространстве; она может быть совершенно произвольной, так как это нисколько не нарушает «параллелизма».

Мы получим, таким образом, некоторую форму наших уравнений, в которых будут фигурировать координаты светил в четырехмерном пространстве. Это будет новое выражение астрономических законов, основанное на гипотезе четырехмерного пространства, и выражение это будет вполне правомерно, потому что условие «параллелизма» соблюдено. Ясно только, что полученные таким образом уравнения будут гораздо менее простыми, чем наши обычные уравнения.

То же самое, без сомнения, будет и с другими законами физики. Нет ли какого-нибудь общего основания тому факту, что во всех разделах физики гипотеза трех измерений дает уравнениям наипростейшую форму? И имеет ли это основание что-нибудь общее с развитыми выше соображениями, в силу которых живые существа вынуждены верить в три измерения или поступать так, как если бы они верили в это под угрозой ослабления в борьбе за существование?

Здесь необходимо небольшое отступление. Вернемся на минуту к нашему старому обычному пространству. Мы говорим, что оно относительно, и это значит, что законы физики одни и те же во всех частях этого пространства или, на математическом языке, что дифференциальные уравнения, выражающие эти законы, не зависят от выбора осей координат.

Если рассматривать совершенно изолированную систему, то это не имеет никакого смысла: ведь наблюдать координаты точек этой системы невозможно, можно наблюдать только их взаимные расстояния. Наблюдение не может сообщить нам о том, зависят ли свойства этой системы от ее абсолютного положения в пространстве, так как это положение недоступно наблюдению.

Если же система не изолирована, то опять-таки, если мы станем рассуждать вполне строго, то окажемся в затруднении, потому что невозможно станет выражать законы, управляющие этой системой, не считаясь с действием внешних тел. Но существуют системы, почти изолированные, окруженные телами, достаточно близкими, чтобы их можно было видеть, но достаточно удаленными, чтобы действием их можно было пренебречь. Именно это и имеем мы в случае Земли и звезд. Мы можем тогда выражать законы нашего земного мира так, как если бы звезды не существовали, и в то же время относить этот мир к системе координатных осей, вполне определенной и неизменно связанной с этими звездами. Опыт показывает, что выбор этих осей не играет никакой роли и что уравнения не изменятся, если произвести замену осей. Совокупность возможных изменений осей образует, как известно, группу шести измерений.

Откажемся теперь от нашего обычного пространства, заменим наши уравнения другими, эквивалентными им в том смысле, что будет соблюден «параллелизм» явлений. Всякий раз, когда мы будем иметь дело с почти изолированной системой, обнаружится некоторый общий факт, именно существование определенного свойства инвариантности. Обнаружится определенная группа преобразований, которые не изменяют уравнений; эти преобразования уже не будут означать изменения осей координат, их смысл может быть любым, но группа, образованная этими преобразованиями, должна оставаться всегда изоморфной группе шести измерений, о которой мы говорили выше, ибо в противном случае не было бы параллелизма.

Так как эта группа играет во всех случаях важную роль, так как она изоморфна группе преобразования координат в обычном пространстве, так как она вследствие этого тесно связана с нашим трехмерным пространством, то в силу всего этого наши уравнения получают наипростейшую форму, когда эту группу выдвинут самым естественным образом, т. е. введя пространство трех измерений.

И так как эта группа сама изоморфна группе перемещений каждого из наших членов, рассматриваемых как твердое тело, так как свойство твердых тел двигаться, подчиняясь законам группы, есть в конечном счете лишь частный случай свойства инвариантности, на котором я остановил свое внимание, то, как мы видим, нет существенного различия между физическим основанием, побуждающим нас приписывать пространству три измерения, и психологическими основаниями, развитыми в первых параграфах этой главы.

6. Analysis situs и интуиция

Я хотел бы добавить еще одно замечание, которое лишь косвенным образом связано со всем предыдущим. Мы видели выше, сколь велико значение Analysis situs, и я объяснил, что именно он представляет настоящую область геометрической интуиции. Но существует ли эта интуиция? Я напомню, что были сделаны попытки обойтись без нее и что Гильберт пытался основать геометрию, которую назвали рациональной, так как она свободна от всякого обращения к интуиции. Она основана на определенном числе аксиом или постулатов, которые рассматриваются не как интуитивные истины, но как неявные определения. Эти аксиомы разбиты на пять групп. Относительно четырех из этих групп я имел уже случай сказать, в какой мере законно принимать их лишь за неявные определения.

Я хотел бы остановиться здесь на одной из этих групп, на второй группе «аксиом порядка». Чтобы было понятно, в чем здесь дело, я приведу одну из этих аксиом. Если на какой-нибудь линии точка C находится между A и B, а точка D — между A и C, то точка D будет находиться между A и B. Для Гильберта это вовсе не интуитивная истина. Мы условно соглашаемся говорить, что в известных случаях C находится между A и B, но мы не знаем, что это значит, точно так же, как мы не знаем, что такое точка или линия. На основе нашего соглашения мы сможем употреблять это слово «между», чтобы выразить некоторое отношение между тремя точками, лишь бы только это отношение удовлетворяло аксиомам порядка. Таким образом, эти аксиомы являются для нас как бы определением слова «между».

В таком случае можно пользоваться этими аксиомами, доказав предварительно, что они не противоречат друг другу, и можно будет, основываясь на них, построить геометрию, в которой не будет необходимости в фигурах и которую сможет понять человек, не имеющий ни зрения, ни осязания, ни мускульных ощущений и представляющий лишь один чистый интеллект.

Да, человек этот, может быть, понял бы ее в том смысле, что увидел бы, как положения этой геометрии логически вытекают одно из другого, но совокупность этих положений показалась бы ему искусственной и странной, и он не понял бы, почему предпочли именно ее множеству других возможных совокупностей.

Если мы не испытываем такого же удивления, то это потому, что аксиомы эти не являются для нас в действительности простыми определениями или произвольными соглашениями, но соглашениями рациональными, целесообразными. Что касается аксиом других групп, то я считаю их целесообразными в том смысле, что именно они лучше всего согласуются с некоторыми привычными нам опытными фактами, а поэтому они и оказываются для нас наиболее удобными. Что же касается аксиом порядка, то мне кажется, что в них скрывается нечто большее, что это настоящие интуитивные истины, относящиеся к Analysis situs. Тот факт, что точка C расположена между двумя другими точками какой-нибудь линии, связан с фактом рассечения непрерывности одного измерения с помощью сечений, образованных из запретных точек.

Но тогда возникает вопрос: истины типа аксиом порядка даны нам интуицией, но идет ли здесь речь об интуиции пространства или же об интуиции математической или физической непрерывности вообще? В пользу первого решения говорит то, что мы легко рассуждаем о пространстве и с гораздо бо́льшим трудом рассуждаем о более сложных непрерывностях, непрерывностях более чем трех измерений, которые нельзя представить в пространстве. Если бы это первое решение было принято, то все наши рассуждения оказались бы излишними. Мы бы приписывали пространству три измерения просто потому, что непрерывность трех измерений была бы единственной ясной интуицией, которую бы мы имели.

Но ведь существует Analysis situs более чем трех измерений. Я не скажу, что это — легкая наука. Я посвятил ей достаточно много усилий, чтобы убедиться во встречающихся здесь трудностях. Но во всяком случае эта наука возможна, и она не опирается исключительно на анализ; ею невозможно успешно заниматься без постоянных обращений к интуиции. Следовательно, существует интуиция непрерывностей более чем трех измерений, и если она требует более напряженного внимания, чем обыкновенная геометрическая интуиция, то это, без сомнения, дело привычки и результат быстро возрастающего усложнения свойств непрерывностей по мере увеличения числа измерений. Разве мы не встречаем в школах учеников, которые сильны в планиметрии и «не видят в пространстве»? Это не значит, что им не хватает интуиции трехмерного пространства, это значит лишь, что они не привыкли ею пользоваться и что для этого им необходимо некоторое усилие. Кроме того, разве не случается со всеми нами, что, желая представить себе какую нибудь фигуру в пространстве, мы представляем себе различные проекции этой фигуры?

В заключение я скажу, что все мы обладаем интуицией непрерывности любого числа измерений, ибо мы имеем способность построить физическую и математическую непрерывности, что эта способность существует в нас до всякого опыта, потому что без нее опыт в собственном смысле слова был бы невозможен и сводился бы к непосредственным ощущениям, не поддающимся никакой организации, что эта интуиция есть лишь сознание того, что мы обладаем такой способностью. Однако способность эта могла бы развиваться в различных направлениях; она могла бы позволить нам построить пространство четырех измерений точно таким же образом, как и пространство трех измерений. Только внешний мир, только опыт побуждают нас развивать эту способность именно в одном, а не в другом направлении.

Глава IV

ЛОГИКА БЕСКОНЕЧНОСТИ

1. Чем должна быть классификация

Могут ли обычные правила логики применяться без изменения в тех случаях, когда рассматриваются совокупности, содержащие бесконечное число предметов? Раньше этот вопрос не возникал, но им пришлось заняться, когда математики, сделавшие своей специальностью изучение бесконечности, неожиданно натолкнулись на некоторые противоречия, быть может, и кажущиеся. Происходят ли эти противоречия от того, что были неверно применены правила логики, или же от того, что эти правила перестают быть правомерными вне их собственной области, т. е. области совокупностей, составленных только из конечного числа объектов? Мне кажется, что будет не лишним сказать здесь по этому поводу несколько слов и дать читателю понятие о тех спорах, к которым привел этот вопрос.

Формальная логика есть не что иное, как учение о свойствах, общих для всякой классификации. Она учит нас, что два солдата, числящихся в одном полку, тем самым принадлежат к одной и той же бригаде, а следовательно, и к одной и той же дивизии; к этому-то и сводится вся теория силлогизмов. Каково же условие, при котором правила этой логики имеют силу? Для этого необходимо, чтобы принятая классификация была неизменной. Мы знаем, что два солдата служат в одном полку, и отсюда заключаем, что они принадлежат к одной и той же бригаде. Мы имеем на это право, так как полагаем, что за то время, пока мы рассуждаем, ни один солдат не был переведен из одного полка в другой.

Отмеченные выше недоразумения произошли из-за того, что забыли это простое условие и опирались на классификацию, которая не могла быть таковой. Ее постарались объявить неизменной, но этого недостаточно; необходимо было сделать ее действительно неизменной, а существуют случаи, когда это невозможно.

Позвольте мне заимствовать пример у Рассела. Кстати, он использовал его против меня. Он хотел показать, что трудности возникают не от введения актуальной бесконечности, так как они могут появиться даже при рассмотрении только конечных чисел. Я впоследствии вернусь к этому пункту, в данный момент речь идет не об этом, и я выбрал этот пример, поскольку он интересен и хорошо поясняет отмеченный мною факт.

Каково наименьшее целое число, которое не может быть определено фразой, состоящей менее чем из ста французских слов? И существует ли такое число?

Да, так как с помощью ста французских слов можно построить только конечное число фраз, а число слов в словаре французского языка конечно. Среди этих фраз будут и такие, которые не имеют никакого смысла и не определяют никакого целого числа Но каждая из них может определить не больше одного целого числа. Количество целых чисел, которые могут быть таким образом определены, очевидно, конечно; следовательно, наверняка найдутся целые числа, которые не могут быть определены, и среди этих чисел найдется одно, которое будет меньше всех остальных.

Нет, так как если бы это целое число существовало, то его существование являлось бы противоречием, поскольку оно определялось бы фразой, состоящей менее чем из ста французских слов, т. е. той самой фразой, которая утверждает, что этого не может быть[1]).

Это рассуждение основано на классификации целых чисел на две категории: таких, которые могут быть определены фразой, состоящей менее чем из ста французских слов, и таких, которые не могут быть ею определены. Ставя вопрос, мы неявно объявляем эту классификацию неизменной, и должны рассуждать уже после того, как окончательно это установили. Но это невозможно. Классификация не может быть окончательной ранее того, как мы пересмотрим все фразы менее чем из ста слов, отбросим те из них, которые лишены смысла, и установим смысл тех, которые его имеют. Но среди этих фраз есть и такие, которые не могут иметь смысла до того, как классификация будет установлена; такими являются те фразы, в которых речь идет о самой классификации. Итак, классификация чисел может быть установлена только после окончания разбора фраз, а этот разбор может быть закончен только после установления классификации. Таким образом, ни классификация, ни выбор фраз не могут быть никогда прекращены. Эти затруднения начинают встречаться особенно часто, как только дело касается бесконечных совокупностей. Положим, хотят классифицировать элементы подобной совокупности, и положим, что принцип этой классификации основывается на некоторой зависимости между классифицируемыми элементами и всем их собранием в целом. Может ли подобная классификация считаться когда-либо оконченной? Актуальной бесконечности нет, и когда мы говорим о бесконечной совокупности, этим мы хотим сказать, что она обладает тем свойством, что к ней без конца можно прибавлять новые элементы (подобно подписному листу, который никогда не будет закрыт в ожидании новых подписчиков). Но классифицирование никогда не может быть прекращено окончательно до тех пор, пока

---

[1]) Имеется в виду фраза, с помощью которой сформулирован сам вопрос. — *Примеч. ред.*

этот лист не будет закрыт. Всякий раз, как к этой совокупности прибавляют новые элементы, совокупность меняется; может измениться зависимость между этой совокупностью и уже классифицированными элементами, а так как по этой зависимости элементы распределялись в тот или иной ящик, то может случиться, что при изменении этой зависимости элементы уже не окажутся правильно распределенными, и их придется переместить из одних ящиков в другие. Пока могут быть еще введены новые элементы, следует опасаться того, что всю работу придется выполнять заново, а мы никогда не придем к такому моменту, когда больше не будет новых элементов, которые нужно вводить в совокупность; следовательно, классификация никогда не будет окончена.

Отсюда вытекает различие между двумя видами классификаций, применимых к элементам бесконечных совокупностей: классификациями предикативными, которые не нарушаются введением новых элементов, и классификациями непредикативными, которые без конца изменяются под влиянием введения новых элементов.

Предположим, например, что распределяют целые числа на два семейства в зависимости от их величин. Можно убедиться в том, больше или меньше какое-то число чем 10, не рассматривая зависимостей этого числа от совокупности других целых чисел. Когда, предположим, определили 100 первых чисел, то будет известно, какие из них больше и какие меньше чем 10. Если затем введем 101 число или какое-либо из следующих чисел, то те из 100 предыдущих, которые были меньше 10, так и останутся меньшими 10; те, которые были больше, останутся бо́льшими; это — классификация предикативная.

Наоборот, положим, что хотят классифицировать точки пространства и отделяют те из них, которые могут быть определены конечным числом слов, от тех, которые не могут быть так определены. Среди возможных фраз будут такие, которые содержат указания на всю совокупность, т. е. на пространство или на его части. Когда мы введем новые точки в пространство, эти фразы изменят смысл и не будут уже определять ту же самую точку, или же вовсе потеряют всякий смысл, а то еще и приобретут такой смысл, которого они раньше не имели. В таком случае точки, которые не поддавались определению, окажутся доступными для определения, а другие, которые были определены, перестанут быть таковыми. Они должны будут переместиться из одной категории в другую. Классификация не будет предикативной.

Существуют хорошие мыслители, которые считают, что единственными объектами, о которых можно рассуждать, являются такие объекты, которые могут быть определены конечным числом слов; с моей стороны тем более невежливо не считать их хорошими мыслителями, что скоро я сам буду отстаивать их взгляды. Можно считать, что предыдущий пример плохо выбран, но его легко изменить.

Чтобы классифицировать целые числа или точки пространства, я рассмотрю фразу, определяющую каждое целое число или каждую точку. Так как может случиться, что одно и то же число или одна и та же точка будут определены несколькими фразами, то я расположу эти фразы в алфавитном порядке и выберу из них первую. Далее, эта фраза может оканчиваться гласной или согласной, и этим критерием можно воспользоваться для классификации. Но эта классификация не будет предикативной; при введении новых целых чисел или новых точек фразы, не имевшие никакого смысла, приобретут его. Тогда в таблицу фраз, определяющих целое число или точку, необходимо будет вписать новые фразы, которые до сих пор были лишены смысла, но теперь получили его и определяют именно эту точку. Может случиться, что такая фраза окажется во главе алфавитного списка и будет оканчиваться гласной, тогда как старая фраза кончалась согласной. А тогда наше целое число или наша точка, которая только что находилась в одной категории, должна будет перейти в другую.

Если же, наоборот, мы распределим точки пространства по величине их координат, если мы условимся собрать вместе те из них, абсцисса которых меньше 10, то введение новых точек ничем не изменит классификацию; уже введенные точки, соответствовавшие этому условию, не перестанут ему соответствовать после введения новых. Классификация будет предикативной.

То, что мы говорили о классификациях, непосредственно применяется и к определениям. Всякое определение в действительности является классификацией. Оно отделяет предметы, удовлетворяющие определению, от тех, которые ему не удовлетворяют, и разбивает их на два различных класса. Если оно действует, как говорили схоластики, per proximum genus et differentiam specificam[1]), то, очевидно, оно основано на делении рода на виды. Определение, как и всякая классификация, следовательно, может быть или не быть предикативным.

Но здесь возникает затруднение. Вернемся к предыдущему примеру. Целые числа принадлежат к классу A или к классу B в зависимости от того, больше они или меньше чем 10,5. Я определил некоторые целые числа α, β, γ, ... и распределил их между двумя классами A и B. Я определяю и ввожу новые целые числа. Я сказал, что распределение не изменится и, следовательно, что классификация будет предикативной. Но чтобы положение числа α в классификации не изменялось, недостаточно неизменности порядка классификации; необходимо еще, чтобы число α осталось тем же, т. е. чтобы его определение было предикативным. Поэтому не следует говорить, что классификация является абсолютно предикативной относительно некоторого способа определения.

2. Кардинальное число

Не следует забывать предыдущих рассуждений при определении кардинального числа. Если мы рассматриваем две совокупности, то можем попытаться найти такой закон соответствия, что всякому объекту первой совокупности будет соответствовать объект второй совокупности и притом только один, и наоборот. Если это возможно, то говорят, что обе совокупности имеют одинаковое кардинальное число.

Но здесь предполагается также, что этот закон соответствия предикативный. Если имеют дело с двумя бесконечными совокупностями, то никогда нельзя будет считать эти две совокупности исчерпанными.

---

[1]) Через ближайший род и видовое отличие (*лат.*). — *Примеч. ред.*

Предположим, что мы взяли в первой совокупности определенное число объектов; закон соответствия позволит нам определить соответствующие объекты второй. Если мы затем введем новые объекты, то может случиться, что введение изменит смысл закона соответствия таким образом, что объект A' второй совокупности, который до этого введения соответствовал объекту A первой совокупности, не будет больше ему соответствовать. В этом случае закон соответствия не будет предикативным.

Мы поясним это на двух примерах противоположного смысла. Я рассматриваю совокупность целых чисел и совокупность четных чисел. Каждому целому n я могу привести в соответствие четное число $2n$. Когда я ввожу новые целые числа, всегда $2n$ будет соответствовать n. Закон соответствия предикативный, и так обстоит дело во всех случаях, которые представляет Кантор, когда, например, доказывает, что кардинальное число рациональных чисел равно кардинальному числу целых чисел или кардинальное число точек в пространстве равно кардинальному числу точек прямой.

Предположим, наоборот, что сравнивают совокупность целых чисел с совокупностью точек пространства, которые могут быть определены конечным числом слов, и предположим, что я устанавливаю между ними следующее соответствие: я составляю таблицу всех возможных фраз, располагаю их по числу, помещая в алфавитном порядке те, которые имеют одинаковое число слов. Затем зачеркиваю в ней те фразы, которые не имеют никакого смысла, которые не определяют никакой точки, и те, которые определяют точку, уже определенную одной из предыдущих фраз. Каждой точке я привожу в соответствие ту фразу, которая ее определяет, и номер, под которым находится эта фраза в образованной таким образом таблице.

Когда я введу новые точки, то может случиться, что фразы, которые раньше были лишены смысла, приобретут его; их придется тогда восстановить в таблице, из которой их вычеркнули; и номера всех остальных фраз окажутся измененными. Наши соответствия окажутся совершенно измененными; наш закон соответствия не является предикативным.

Если не обращать внимания на это условие при сравнении кардинальных чисел, то можно прийти к замечательным парадоксам. Следовательно, необходимо изменить определение кардинальных чисел замечанием, что закон соответствия, на котором основано это определение, должен быть предикативным.

Всякий закон соответствия основывается на двойной классификации. Необходимо классифицировать объекты двух совокупностей, которые собираются сравнивать, и обе классификации должны быть параллельными. Если, например, объекты первой совокупности распределяются по классам, которые в свою очередь подразделяются на разряды, а эти — на семейства и т. д., то то же самое должно быть сделано и с объектами второй совокупности. Каждому классу первой классификации должен соответствовать класс второй классификации и притом только один, каждому разряду — разряд и т. д. до тех пор, пока не придем к отдельным индивидуумам. И тогда будет видно, каково должно быть условие, чтобы закон соответствия был предикативным. Необходимо, чтобы две классификации, на которых основан этот закон, сами были предикативными.

3. Мемуар Рассела

Рассел опубликовал в American Journal of Mathematics, том XXX, под названием «Математическая логика, основанная на теории типов» мемуар, где он основывается на рассуждениях, вполне аналогичных предыдущим. Вспомнив несколько парадоксов, наиболее знаменитых у логиков, он ищет их происхождение и находит его вполне справедливо в некотором порочном кругу. Пришли к несуразностям потому, что рассматривали совокупности, содержащие объекты, в определение которых входит понятие самой совокупности. Пользовались непредикативным определением, смешали, говорит Рассел, слова all и any, что мы можем выразить по-французски словами tous (все) и quelconque (любой).

Таким образом, он приходит к необходимости рассмотреть то, что он называет иерархией типов. Допустим, что некоторое положение справедливо для некоторого индивида определенного класса. Под некоторым индивидом мы должны сначала понимать все индивиды этого класса, которые можно определить, не пользуясь указанным положением. Я их назову некоторыми индивидами 1-го порядка. Когда я буду утверждать, что положение применимо для всех этих индивидов, я буду этим определять положение 1-го порядка. Некоторый индивид 2-го порядка в этом случае будет такой индивид, в определении которого может войти упоминание этого положения 1-го порядка. Если я считаю положение верным относительно всех индивидов 2-го порядка, то получу положение 2-го порядка. Индивидами 3-го порядка будут те, в определение которых может входить упоминание об этом положении 2-го порядка, и т. д.

Возьмем пример Эпименида. Лжецом 1-го порядка будет тот, который лжет всегда, за исключением случая, когда он говорит: «я лжец 1-го порядка». Лжецом 2-го порядка будет тот, который лжет всегда, даже и тогда, когда говорит: «я лжец 1-го порядка», но который не лжет, говоря: «я лжец 2-го порядка», и т. д.

Таким образом, когда Эпименид скажет нам: «я лжец», мы можем его спросить: «какого порядка?» И только после того, как он ответит на этот законный вопрос, его утверждение будет иметь смысл.

Перейдем к более научному примеру и рассмотрим определение целого числа. Говорят, что свойство рекуррентно, если оно присуще нулю и если оно не может быть присущим n, не будучи присущим $n+1$. Говорят, что все числа, обладающие рекуррентным свойством, образуют рекуррентный класс. В этом случае целое число по определению является числом, обладающим всеми рекуррентными свойствами, т. е. принадлежащим всем рекуррентным классам.

Можно ли из этого определения заключить, что сумма двух целых чисел является целым числом? Казалось бы, что да, так как если n — данное целое число, то числа x такие, что $n+x$ — целое число, образует рекуррентный класс. Число x не было бы целым, если бы им не было $n+x$. Но определение рекуррентного класса, о котором мы только что говорили, не является предикативным, так как в это определение (которое говорит нам, что $n+x$

должно быть целым) входит понятие целого числа, которое предполагает упоминание о всех рекуррентных классах.

Возникает необходимость прибегнуть к следующему обходному приему: назовем рекуррентными классами 1-го порядка все те, которые можно определить, не упоминая о целом, и целыми 1-го порядка — числа, принадлежащие ко всем рекуррентным классам 1-го порядка; затем назовем рекуррентными классами 2-го порядка те, которые можно определить, пользуясь понятием о целых 1-го порядка, но не пользуясь понятием целых высшего порядка; назовем целыми 2-го порядка числа, принадлежащие ко всем рекуррентным классам 2-го порядка, и т. д. Тогда мы можем доказать не то, что сумма двух целых есть целое, а что сумма двух целых порядка k есть целое порядка $k-1$.

Этих примеров, я думаю, достаточно, для того чтобы объяснить, что понимает Рассел под иерархией типов. Однако в таком случае возникают различные вопросы, на которых автор не остановился.

1. В этой иерархии без труда вводятся предложения 1-го, 2-го порядка и т. д. и вообще n-го порядка, где n — некоторое конечное целое число. Можно ли также рассматривать предложения порядка α, где α — порядковое трансфинитное число? Таким образом, Кёниг предложил теорию, которая не слишком отличается от теории Рассела. Он пользуется в ней специальным обозначением: объекты 1-го порядка обозначаются $A(NV)$, объекты 2-го порядка — $A(NV)^2$ и т. д., NV — инициалы выражения ne varietur[1]). Он без колебания вводит $A(NV)^{\alpha}$, где α трансфинитно, и при этом не определяет достаточно четко, что он под этим понимает.

2. Если ответят на первый вопрос «да», то необходимо будет объяснить, что понимают под объектом порядка ω, где ω — обыкновенная бесконечность, иными словами, первое трансфинитное порядковое число, или под объектами порядка α, где α — некоторое трансфинитное порядковое число.

3. Если же, напротив, отвечают «нет» на первый вопрос, то как можно будет обосновать на теории

---

[1]) Не изменяться (*лат.*). — *Примеч. ред.*

типов разницу между конечными и бесконечными числами, поскольку теория эта лишена смысла, если предположить, что это различие уже сделано.

4. Вообще, ответят ли на первый вопрос «да» или «нет», теория типов останется непонятной, если не предположить уже построенной теорию порядковых чисел. Каким же образом основать теорию порядковых чисел на теории типов?

4. Аксиома сводимости

Рассел вводит новую аксиому, которую называет axiom of reducibility (аксиома сводимости). Я предоставляю слово автору, так как не уверен в том, что правильно понял его мысль. «We assume, that every function is equivalent, for all its value to some predicative function of the same argument.»[1]). Но чтобы понять это утверждение, необходимо вернуться к определениям, данным в начале мемуара. Что такое функция и что такое предикативная функция? Если предложение присвоено данному объекту a, то это частное предложение; если его присваивают некоторому неопределенному предмету x, то это пропозициональная функция x. Предложение будет определенного порядка в иерархии типов, и этот порядок не будет одним и тем же, каково бы ни было x, так как он будет зависеть от порядка x. Функция будет называться предикативной, если она порядка $k+1$, когда x порядка k.

После этих определений смысл аксиомы все еще не очень ясен, и несколько примеров не помешают. Рассел их не дал, и я колеблюсь давать их по собственному усмотрению, так как боюсь исказить его мысль, которую я возможно не совсем точно уловил. Но даже и не уловив ее, в одном не сомневаюсь, а именно в том, что речь идет о новой аксиоме. С помощью этой аксиомы надеются доказать принцип математической индукции; что это возможно, я менее всего хотел бы отрицать, поскольку подозреваю, что эта аксиома является лишь другой формой указанного принципа.

---

[1]) Мы предполагаем, что всякая функция эквивалентна для всех ее значений некоторой предикативной функции того же аргумента (*англ.*). — *Примеч. ред.*

В этом случае я не могу удержаться от того, чтобы не вспомнить всех тех, кто пытается доказать постулат Евклида, опираясь на одно из его следствий и считая это следствие очевидной истиной. Что они выиграли? Как бы ни была ясна эта истина, будет ли она более очевидной, чем сам постулат?

Итак, мы ничего не выигрываем в числе постулатов; выигрываем ли мы по крайней мере в их качестве? И что нового дает аксиома по отношению к принципу индукции?

1. Доступен ли он для более ясной и простой формулировки? Возможно, так как то, что дает Рассел, наверное, может быть усовершенствовано; но это мало вероятно.

2. Является ли аксиома сводимости более общей, чем принцип индукции, в том отношении, что ее нельзя доказать, исходя из этого принципа?

3. Или же, наоборот, аксиома является, по-видимому, менее общей, чем принцип, так что не сразу замечают, что последний содержится в ней, хотя в действительности дело обстоит так?

4. Применение этой аксиомы может быть более соответствует естественным склонностям нашего ума; можно ли его [1]) оправдать психологически?

Я ограничиваюсь постановкой этих вопросов; мне недостает основ для их разрешения, так как я не мог даже достичь полного понимания смысла этой аксиомы. Но хотя я не могу, основываясь на чересчур общих указаниях Рассела, рассчитывать полностью постичь этот смысл, я позволю себе по крайней мере сделать несколько предположений. Вот, например, предложение — определение целого числа: конечное целое есть число, принадлежащее всем рекуррентным классам. Это предложение само по себе не имеет смысла; оно будет его иметь, как только определят порядок рекуррентных классов, о которых идет речь. Но, к счастью, получается следующее: всякое целое 2-го порядка a fortiori (тем более) является целым 1-го порядка, так как оно будет принадлежать ко всем рекуррентным классам двух первых порядков и, следовательно, ко всем рекуррентным классам 1-го

---

[1]) Имеется в виду принцип математической индукции. — *Примеч. ред.*

порядка; точно так же всякое целое k-го порядка будет a fortiori целым $k-1$-го порядка. Таким образом, мы приходим к определению ряда все более и и более ограниченных классов целых 1-го, 2-го, ... n-го порядов, каждый из которых содержится в предыдущем. Я назову целым порядка ω всякое число, принадлежащее сразу всем этим классам; и это определение целого порядка ω будет иметь смысл и может быть рассматриваемо как равнозначное первоначально предложенному определению целого числа, не имевшему смысла. Не в этом ли заключается правильное применение аксиомы сводимости, как ее понимает Рассел? Я предлагаю этот пример очень неуверенно.

Примем его пока что и вернемся к теореме относительно суммы целых. Мы выяснили, что сумма двух целых k-го порядка есть целое $k-1$-го порядка, и мы хотим вывести из этого, что если x и n — два целых порядка ω, то сумма $n+x$ — также целое порядка ω. Фактически для этого достаточно доказать, что оно будет целым порядка k, как бы велико ни было это k. Но если n и x — целые порядка ω, они a fortiori (тем более) будут целыми порядка $k+1$; итак, вследствие уже доказанной теоремы $n+x$ будет целым порядка k, что и требовалось доказать.

Не таким ли образом можно пользоваться аксиомой Рассела? Я чувствую, что это не совсем то и что Рассел придал бы рассуждению совершенно иную форму, но суть осталась бы прежней. Я не хочу разбирать здесь законность этого способа доказательства; ограничусь пока следующими замечаниями. Мы ввели, кроме понятия объектов порядка n, объекты порядка ω и думается, что нам удалось определить это новое понятие в отношении целых чисел. Но это удается не всегда; например, это вовсе не получится для примера Эпименида. Успех обеспечивало следующее обстоятельство. Изученная классификация не была предикативной, и прибавление новых элементов заставляло изменять классификацию элементов, уже введенных и классифицированных. Однако это изменение могло происходить только в одном направлении: могло оказаться необходимым переносить объекты из класса A в класс B (именно из класса целых в класс нецелых), но никогда из класса B в класс A. Для определения порядка ω необходимо новое соглашение в тех случаях, когда изменение должно происходить как в одном направлении, так и в другом. Далее, определение целых порядка ω не то же самое, что и определение целых порядка k, где k конечное. Целые порядка k определяют посредством рекуррентности, выводя понятие целого порядка k из понятия целого порядка $k - 1$. Целые порядка ω определяют переходом к пределу, вводя зависимость этого нового понятия от бесконечного числа предыдущих понятий целых всех конечных порядков. Два определения могли бы быть непонятными для того, кто не знает еще, что такое конечное число; эти определения предполагают различие между конечными и бесконечными числами. Следовательно, нельзя надеяться основать на них это различие.

5. Мемуар Цермело

Совершенно в другом направлении ищет Цермело разрешения тех затруднений, которые мы отметили. Он пытается установить систему аксиом a priori, которые позволили бы ему выяснить все истины математики без противоречий. Можно по-разному понимать роль аксиом; их можно рассматривать как произвольные предписания, которые являются не чем иным, как скрытыми определениями основных положений. Таким способом Гильберт в своей геометрии вводит вначале «предметы», которые он называет точками, прямыми, плоскостями, и, забывая или делая вид, что забывает на один момент житейский смысл этих слов, он устанавливает между этими предметами различные зависимости, которые их определяют. Чтобы это было законно, необходимо доказать, что аксиомы, введенные таким образом, не противоречат друг другу, и Гильберт вполне преуспел в том, что касается геометрии, так как он предполагал анализ уже созданным и мог пользоваться им в этом доказательстве. Цермело не доказал, что его аксиомы свободны от противоречий, и не мог этого сделать, так как для этого ему было бы необходимо опираться на другие истины, уже установленные. Но при наличии уже установленных истин, при уже образованной науке он предполагает, что их еще нет; он начинает с чистой доски и хочет, чтобы его аксиомы полностью удовлетворялись друг другом.

Но нельзя произвольно снабжать смыслом постулаты; необходимо, чтобы они были очевидны сами по себе. Поэтому нам не нужно доказывать эту очевидность, так как она недоказуема, но нужно стараться проникнуть в тот психологический механизм, который вызвал это ощущение очевидности. Здесь-то и возникает затруднение: Цермело принимает ряд аксиом и отбрасывает другие, которые на первый взгляд могут казаться столь же очевидными, как и те, которые он сохраняет. Если бы он сохранил их все, то он впал бы в противоречия, следовательно, ему необходимо было сделать выбор; но можно спросить, каковы основания его выбора, и это-то требует некоторого внимания.

Он начинает с того, что отбрасывает определение Кантора: множество есть собрание каких-либо различных объектов, образующих нечто целое. Я, конечно, не имею права говорить о множестве всех объектов, удовлетворяющих тем или иным условиям. Эти объекты не образуют множества, Menge, но вместо отбрасываемого определения необходимо принять какое-нибудь другое. Цермело ограничивается словами: рассмотрим область (Bereich) каких-либо объектов; может случиться, что между двумя из этих объектов x и y существует зависимость вида $x \in y$; мы скажем в таком случае, что x есть элемент y и что y есть множество, Menge.

Очевидно, что это не является определением; кто-либо, не знающий, что такое Menge, не узнает ничего, если ему скажут, что оно изображается символом $\in$, так как он не знает, что такое $\in$. Это могло бы еще сойти, если бы этот символ $\in$ в будущем определялся самими аксиомами, рассматриваемыми как произвольные предписания. Но мы только что видели, что эта точка зрения недопустима. Необходимо, чтобы мы знали заранее, что такое Menge, чтобы имели его интуицию, и именно эта интуиция позволит нам понять, что такое $\in$, которое без этого будет только лишенным смысла символом, относительно которого нельзя будет утверждать никаких очевидных самих по себе свойств. Но чем же может быть эта интуиция, как не тем определением Кантора, которое мы презрительно отбросили? Оставим это затруднение, которое мы попытаемся осветить несколько дальше, и перечислим аксиомы, принятые Цермело; их семь:

1. Два Menge, имеющие одни и те же элементы, тождественны.

2. Существует одно Menge, не содержащее ни одного элемента,— это Nullmenge; если существует один объект a, то существует Menge (a), единственным элементом которого является этот объект; если существуют два объекта a и b, то существует Menge (a, b), единственными элементами которого являются эти объекты.

3. Множество всех элементов какого-либо Menge M, удовлетворяющих условию x, образуют подмножество Untermenge M.

4. Каждому Menge T соответствует другое Menge UT, образованное из всех Untermengen T.

5. Рассмотрим Menge T, все элементы которого сами являются Mengen; существует Menge ST, элементы которого являются элементами элементов T. Если, например, T имеет три элемента A, B, C, которые сами являются Mengen, и если A имеет два элемента a и a', B — два элемента b и b', C — два элемента c и c', то ST будет иметь шесть элементов a, b, c, a', b', c'.

6. Если имеется Menge T, все элементы которого сами является Mengen, то можно выбрать в каждом из этих элементарных Mengen по элементу, и множество выбранных таким образом элементов образует Untermenge ST.

7. Существует по крайней мере одно бесконечное Menge.

Прежде чем разбирать эти аксиомы, я должен ответить на один вопрос: почему в их формулировке я сохранил немецкое слово Menge вместо того, чтобы перевести его по-французски словом ensemble (множество)? Потому что я не уверен в том, что слово Menge сохраняет свой интуитивный смысл, без которого было бы затруднительно отбросить определение Кантора; французское же слово ensemble внушает этот интуитивный смысл чересчур навязчиво, чтобы его можно было употреблять без помехи и в том случае, когда смысл изменился.

На седьмой аксиоме я остановлюсь лишь немного; при этом я должен сказать несколько слов, чтобы отметить весьма оригинальный способ, которым Цермело ее высказывает. Он в действительности не удовлетворился данной мною формулировкой и говорит: существует Menge M, которое не может содержать элемента a, не включая в себя в то же время в качестве элемента Menge (a), т. е. такое, единственным элементом которго является a. И тогда, если M содержит элемент a, то оно будет содержать еще и ряд других элементов, а именно: Menge, единственным элементом которого является a, Menge, единственным элементом которого является Menge, единственным элементом которого является a, и т. д. Достаточно хорошо видно, что число этих элементов должно быть бесконечным. На первый взгляд, этот обходной путь кажется очень странным и очень искусственным; так оно в действительности и есть. Но Цермело хотел избежать слова «бесконечный», так как он рассматривает свои аксиомы как предшествующие отличению конечного от бесконечного.

Перейдем к шести первым аксиомам. Их можно рассматривать как очевидные, если только слову Menge будет дан его интуитивный смысл и если при этом будут рассматриваться предметы только в конечном числе. Но они являются таковыми не больше чем следующая аксиома, откровенно отброшенная автором:

8. Какие бы то ни было объекты образуют Menge.

В таком случае нам приходится задать вопрос: почему очевидность 8-й аксиомы исчезает, как только дело касается бесконечных совокупностей, в то время как очевидность шести первых имеет место?

Если для решения этого вопроса мы обратимся к формулировке аксиом, то прежде всего мы убедимся, что все эти аксиомы без исключения не дают нам ничего иного, кроме одного: определенные совокупности, образованные по определенным законам, составляют Mengen; таким образом, эти аксиомы окажутся для нас не чем иным, как правилами, предназначенными для расширения смысла слова Menge, чистыми определениями слова. И это одинаково верно как для 8-й аксиомы, которую мы отбрасываем, так и для первых семи аксиом, которые мы принимаем.

Мы одинаково быстро убеждаемся, что это первое впечатление ошибочно; подобные определения слова не поставят нас перед противоречием, его можно опасаться только в том случае, если мы имеем другие аксиомы, утверждающие, что некоторые совокупности не являются Mengen, а мы этих аксиом не имеем. В то же время, если мы отбрасываем 8-ю аксиому, то мы это делаем для того, чтобы избежать противоречия; Цермело говорит это открыто.

Поэтому отсюда необходимо заключить, что он не рассматривал свои аксиомы как простые определения слова, а связывал со словом Menge интуитивный смысл, существовавший до формулирования аксиом, хотя и немного отличный от обычного смысла. Его нельзя не заметить, исследуя, как автор пользуется им в своих рассуждениях. Menge — это нечто, о чем можно рассуждать, это нечто в определенной мере прочное и неизменное. Определить множество, Menge, некоторую совокупность — это всегда значит произвести классификацию, отделить предметы, принадлежащие этому множеству, от тех, которые не участвуют в нем. Тогда мы скажем, что это множество не есть Menge, если соответствующая классификация не предикативная, и что оно является Menge, если эта классификация предикативная или если относительно нее можно рассуждать так, как если бы она была таковой.

Если мы обрасываем 8-ю аксиому, то потому, что какие бы то ни было объекты, конечно, образуют совокупность, но совокупность, которая никогда не будет замкнутой и порядок которой может быть в любой момент нарушен введением непредвиденных членов; это такая совокупность, которая не предикативна. И, наоборот, когда мы, например, говорим, что каждому Menge T соответствует другое Menge UT или ST, определенное неким способом, то мы утверждаем, что это определение предикативно, или что мы имеем право работать с ним, как если бы оно было таким.

Здесь уместно поговорить об одном различии, которое играет существенную роль в теории Цермело: «Eine Frage oder Aussage E, über deren Gültigkeit oder Ungültigkeit die Grundbeziehungen des Bereiches vermöge der Axiome und der allgemeingültigen logischen

Gesetze ohne Willkür unterscheiden, heisst definit»[1]). Слово «definit» — здесь в большой степени синоним слова «предикативный». Так, предположим, например, что этот вопрос E будет заключаться в следующем: обладает ли такой-то элемент, принадлежащий Menge M, такими-то зависимостями по отношению ко всем другим элементам того же Menge, и можем ли мы согласиться говорить, что все элементы, относительно которых следует сказать да, образуют класс K? Для меня, и я думаю, что также и для Рассела, подобный вопрос не является определенным, так как другие элементы M бесконечны числом, так как можно будет без конца вводить новые из них и так как среди введенных новых могут быть такие, в определение которых входит понятие класса K, т. е. совокупности элементов, обладающих свойством E. Для Цермело этот вопрос был дефинитным, и я не знаю точно, где строгое разграничение между вопросами, которые дефинитны и которые таковыми не являются. Ему кажется, что для того, чтобы узнать, обладает ли некоторый элемент свойством E относительно всех других элементов M, достаточно проверить, обладает ли он им относительно каждого из них. Если вопрос оказывается дефинитным относительно каждого из этих элементов, то он будет таковым ipso facto (тем самым) и относительно всех этих элементов.

Здесь-то и выявляется расхождение наших взглядов. Цермело запретил себе рассматривать множество всех объектов, удовлетворяющих некоторому определенному условию, так как ему кажется, что это множество никогда не бывает замкнутым, что всегда можно ввести в него новые объекты. Наоборот, он не стесняется говорить о множестве объектов, составляющих часть определенного Menge M и удовлетворяющих, кроме того, некоторому условию. Ему кажется, что он не может получить Menge, не получив одновременно все его элементы. Среди этих элементов он выберет те, которые удовлетворяют данному условию, и произведет этот выбор достаточно спокойно, не боясь

[1]) Вопрос или положение E, справедливость или несправедливость которого может быть без всякого произвола установлена основными соотношениями данной области на основании аксиом или общих логических законов, называется дефинитным (*нем.*). — *Примеч. ред.*

нарушить его введением новых и непредвиденных элементов, так как что касается этих элементов, то они все уже у него в руках. Образовав заранее свое Menge M, он воздвиг монастырские стены, которые останавливают непрошенных, могущих прийти извне. Но он не спросил себя, не могут ли появиться непрошенные внутренние посетители, которых он заключил вместе с собой в своих стенах. Если Menge M имеет бесконечное число элементов, это должно значить не то, что эти элементы могут рассматриваться как существующие все вместе с самого начала, а то, что без конца могут появляться новые; они появятся внутри стен вместо того, чтобы появиться вне их, вот и все. Когда я говорю о всех целых числах, я хочу говорить как о всех уже изобретенных числах, так и о тех, которые могут быть когда-нибудь изобретены; когда я говорю о всех точках пространства, то я хочу говорить о всех точках, координаты которых выражаются рациональными числами, или алгебраическими числами, или интегралами, или всеми другими способами, какие могут быть изобретены. И это-то «могут быть» и есть бесконечность. Но можно будет изобрести такие, которые будут определяться многими способами, и если мы вернемся, как раньше, к нашему вопросу E и классу K, то вопрос E возникает вновь всякий раз, как определят новый элемент M; среди этих элементов, которые мы сможем определить, найдутся такие, определение которых будет зависеть от этого класса K. Таким образом, порочный круг не может быть обойден.

Вот почему аксиомы Цермело меня не удовлетворяют. Они не только не кажутся мне очевидными, но когда меня спросят, свободны ли они от противоречий, я не буду знать, что ответить. Автор думал избежать наиболее существенного парадокса, запретив себе всякие спекуляции за пределами полностью замкнутого Menge; он думал избежать парадокса Ришара, не ставя никаких вопросов, кроме дефинитных, что по тому смыслу, который он вкладывает в это выражение, исключает всякое рассмотрение объектов, которые могут быть определены конечным числом слов. Но если он хорошо запер свою овчарню, то я не убежден в том, что он не запер туда и волка. Я не успокоюсь до тех пор, пока он не покажет, что он укрыт от противоречий; я прекрасно знаю, что он не может этого сделать, так как он должен был бы опираться, например, на принцип индукции, который он, без сомнения, не признал бы, но который он предполагал доказать далее. Он должен был бы идти дальше; это произошло бы ценой логической ошибки, но по меньшей мере мы в этом были бы уверены.

6. Употребление бесконечности

Можно ли рассуждать об объектах, которые не могут быть определены конечным числом слов? Можно ли даже говорить о них, зная, о чем говорят, и произнося нечто иное, чем пустые слова? Или же, наоборот, их следует рассматривать как непознаваемые? Что касается меня, то я не колеблюсь ответить, что они просто не существуют.

Все объекты, которые мы сможем когда-нибудь себе представить, или будут определены конечным числом слов, или же будут определены только несовершенно и останутся неотделимыми от массы других объектов; и мы не сможем исследовать их логически строго до того, как мы их отделим от этих других объектов, с которыми они связаны, т. е. до того, как мы придем к определению их конечным числом слов.

Если мы рассмотрим множество и захотим определить различные его элементы, то это определение, очевидно, разобьется на две части: первая часть определения, общая всем элементам множества, научит нас отделять их от элементов, чуждых этому множеству; это будет определение множества; вторая часть научит нас отличать одни от других различные элементы множества.

Каждая из этих двух частей должна будет складываться из конечного числа слов. Если говорят о всех элементах того множества, определение которого хотят дать, то хотят говорить о всех объектах, удовлетворяющих первой части определения, которые могут быть окончательно определены такой фразой из конечного числа слов, какая будет желательна. Вам дают только половину определения, вы можете затем ее дополнить, выбрать по своему желанию вторую половину, но необходимо, чтобы вы ее дополнили. Когда я утверждаю некоторое положение, касающееся всех объектов множества, я хочу этим сказать, что если один объект удовлетворяет первой части определения, то предложение в части, касающейся этого объекта, останется справедливым, какими бы способами вы ни формулировали вторую часть; но так как вы можете ее высказать по своему желанию, то необходимо, чтобы вы и высказали, без этого объект был бы немыслим и предложение не имело бы смысла.

Это не значит, что нельзя сделать или что не сделаны некоторые замечания по поводу этой точки зрения. Фразы из конечного числа слов всегда могут быть перечислены, так как, например, их можно расположить в алфавитном порядке. Если все мыслимые объекты следует определить подобными фразами, то им также можно будет присвоить определенный номер. Следовательно, мыслимых объектов будет не больше, чем целых чисел; и если рассматривают, например, пространство, если из него исключают точки, которые не могут быть определены конечным числом слов и которые просто не существуют, то точек останется не больше, чем имеется целых чисел. Кантор же доказал противное.

Но это только обман зрения; представить точки пространства определяющими их фразами, распределить эти фразы и соответствующие им точки по буквам, из которых они составлены, — это значит построить классификацию, которая является непредикативной, которая влечет за собой все неудобства, все параллогизмы, все противоречия, о которых я говорил в начале этой главы. Что хотел сказать Кантор и что он в действительности доказал? Нельзя найти между целыми числами и точками пространства, определяемыми конечным числом слов, закон соответствия, удовлетворяющий следующим условиям: 1) этот закон может быть высказан конечным числом слов; 2) для любого заданного целого числа всегда можно найти соответствующую точку пространства, и эта точка будет полностью и однозначно определена; определение этой точки складывается из двух частей: определения целого числа и выражения закона соответствия, и сведется к конечному числу слов, так как наше целое число может быть определено, а закон выражен конечным числом слов; 3) для заданной точки пространства P, которую я предполагаю определенной конечным числом слов (не запрещая себе допускать в это определение ссылки на сам закон соответствия, что существенно в доказательстве Кантора), найдется целое число, которое будет однозначно определено законом соответствия и определением точки P; 4) закон соответствия должен быть предикативным, т. е. если он приводит в соответствие точку P и целое число, то это соответствие тому же целому числу не должно нарушиться, когда введут новые точки пространства. Вот что доказал Кантор, и это остается всегда справедливым; ясно, насколько сложен смысл, скрытый в кратком предложении: число точек пространства больше, чем число целых чисел.

Что же мы должны отсюда заключить? Всякая теорема математики должна быть доступна проверке. Когда я высказываю эту теорему, я утверждаю, что все проверки, которые я испробую, приведут к желаемому результату, и даже если одна из этих проверок требует труда, превосходящего человеческие силы, я утверждаю, что если много поколений сочтут нужным заняться этой проверкой, то и в этом случае она удастся. Теорема не имеет другого смысла; это остается верным и тогда, когда в ее формулировке говорится о бесконечных числах; но так как проверки могут быть проведены только для конечных чисел, то отсюда следует, что всякая теорема, относящаяся к бесконечным числам или вообще к тому, что называется бесконечным множеством, или трансфинитным количественным, или трансфинитным порядковым и т. д., не может быть чем-либо иным, как сокращенным способом формулирования предложений, относящихся к конечным числам. Если дело обстоит иначе, то эта теорема недоказуема, а если она недоказуема, то она не будет иметь смысла.

Следовательно, нельзя найти очевидные аксиомы, относящиеся к бесконечным числам; всякое свойство бесконечных чисел есть лишь перевод какого-либо свойства конечных чисел; именно это последнее может быть очевидным, тогда как первое необходимо доказать, сравнивая его с последним и показывая, что перевод точен.

7. Заключение

Противоречия, к которым пришли некоторые логики, происходят из-за того, что они не смогли избежать известных порочных кругов. Это случалось с ними, когда они рассматривали конечные совокупности, но еще более часто это случалось, когда они имели претензию рассматривать бесконечные совокупности. В первом случае они могли легко избежать той ловушки, в которую попали; или, точнее, они сами поставили ловушку, развлекались, попадая в нее, и даже были вынуждены тщательно следить за тем, чтобы не попасть мимо ловушки; одним словом, в этом случае противоречия являются только забавами. Совершенно другого рода те противоречия, которые вызваны понятием бесконечности; часто случается, что в них попадают совершенно нечаянно, и даже когда бывают предупреждены об их существовании, и тогда еще не бывают вполне спокойными.

Попытки выйти из этих затруднений интересны больше по заглавию, но они не вполне удовлетворительны.

Цермело пожелал построить безгрешную систему аксиом; но эти аксиомы не могут быть рассматриваемы как произвольные предписания, так как необходимо было доказать, что эти положения непротиворечивы, и так как, когда начинаешь с совершенно чистой доски, не остается ничего, на чем можно было бы основывать подобное доказательство. Необходимо поэтому, чтобы аксиомы были очевидны сами по себе. Но каков тот механизм, с помощью которого их строили? Взяли аксиомы, справедливые для конечных совокупностей; распространить их все на бесконечные совокупности нельзя было, и это распространение было сделано только для определенного их числа, выбранного более или менее произвольно. Впрочем, по-моему, как я уже говорил выше, ни одно предложение, относящееся к бесконечным совокупностям, не может быть очевидным интуитивно.

Рассел лучше понял природу того затруднения, которое нужно побороть, но, однако, полностью он с ним не справился, так как его иерархия типов предполагает уже готовую теорию порядковых чисел.

Что же касается меня, то я предполагаю держаться следующих правил:

1) представлять себе только такие объекты, которые могут быть определены конечным числом слов;

2) никогда не упускать из виду, что все предложения, относящиеся к бесконечности, должны быть пе-

реводом, сокращенным выражением предложений, относящихся к конечному;

3) избегать непредикативных классификаций и определений.

Все исследования, о которых мы говорили, имеют общий характер. Предлагается преподавать математику ученику, который еще не знает разницы между бесконечным и конечным; ему не торопятся преподать, в чем заключается эта разница, начинают с того, что показывают ему все то, что можно знать относительно бесконечности, не занимаясь этой разницей; затем в ограниченном районе того поля, которое ему дали обозреть, открывают ему маленький уголок, где прячутся конечные числа.

Мне это кажется психологически неверным; естественно, человеческий ум идет не так, и даже если бы пришлось отклониться от этого без особо неприятных противоречий, то тем не менее это был бы метод, противоречащий всякой здравой психологии.

Рассел, без сомнения, мне скажет, что он занимается не психологией, а логикой и эпистемологией; я же вынужден буду ответить, что нет логики и эпистемологии, независимых от психологии; и это признание, вероятно, прекратит спор, так как выявит непоправимое расхождение взглядов.

Глава V

МАТЕМАТИКА И ЛОГИКА

Несколько лет тому назад я имел случай предложить некоторые идеи, относящиеся к логике бесконечного, к применению бесконечности в математике, к тому употреблению, которое сделали ей вслед за Кантором; я объяснил, почему я не считаю законным некоторые способы рассуждений, которыми считали себя вправе пользоваться различные выдающиеся математики[1]). Естественно, я вызвал против себя строгие реплики; эти математики не считают, что они ошиблись, и они считают, что имели право делать то, что делали. Полемика затянулась, но не потому, что без конца приводились новые аргументы, а потому, что

[1]) См. главу IV этой работы. — *Примеч. ред.*

все время вертелись в одном и том же круге, каждый повторял то, что он уже говорил, как будто не слыша того, что ему говорил противник. Поминутно мне присылали новое доказательство оспариваемого принципа, чтобы оградиться, как говорили, от всяких возражений; но это доказательство было все тем же самым, лишь слегка загримированным. Конечно же, не пришли ни к какому заключению; сказать, что я этим удивлен, значило бы дать весьма печальное представление о моей психологической проницательности. При таких условиях приходится еще раз повторить свои аргументы, которым я, пожалуй, могу придать новую форму, но сущности которых я не могу изменить, так как мне кажется, что их даже не пытались опровергнуть. Мне кажется, что предпочтительнее выяснить, в чем основа этого расхождения мыслей, порождающего подобное различие взглядов. Я скажу, что эти непримиримые разногласия меня не удивили, что предвидел их с самого же начала, но это не избавляет нас от поисков объяснения; можно предвидеть факт после ряда повторных опытов и затрудняться в объяснении его.

Попытаемся же изучить психологию двух спорящих школ с точки зрения вполне объективной, как будто мы сами находимся вне этих школ, как будто мы описываем войну двух муравейников. Прежде всего заметим, что среди математиков существуют две противоположные тенденции в способе представления бесконечности. Для одних бесконечность происходит из конечного; бесконечность существует потому, что существует бесконечное множество всевозможных конечных предметов; для других же бесконечность существует раньше конечного; конечное получается отрезанием маленького кусочка от бесконечности.

Теорема должна быть проверяемой, но так как мы сами конечны, то мы можем оперировать только с конечными объектами; даже если в формулировке теоремы участвует понятие бесконечности, необходимо, чтобы при проверке его не употребляли, иначе проверка станет невозможной. В качестве примеров я возьму следующие теоремы: последовательность простых чисел бесконечна, ряд $\Sigma\, 1/n^2$ сходящийся и т. д.; каждая из них может быть выражена равенствами, в которых фигурируют только конечные числа. Эти теоремы связаны с бесконечностью не потому, что одна из возможных проверок связана с нею, а потому, что число возможных проверок бесконечно.

Высказав теорему, я утверждаю, что все эти проверки будут успешны; очевидно, что всех их не проделывают; я их называю возможными потому, что их можно проделать за конечное время, но практически они могут быть невозможными, так как потребуют многих лет работы. Для меня достаточно того, что можно представить себе такого достаточно богатого и сумасбродного человека, который занялся бы этим, оплачивая достаточное число помощников. Доказательство теоремы как раз и имеет задачей сделать ненужным это сумасбродство.

Имеет ли смысл теорема, которая не приводит ни к какому проверяемому выводу? Или, выражаясь более общо, имеет ли смысл теорема без тех проверок, которые она вызывает? В этом вопросе математики разделились. Принадлежащие к первой школе, я их назову прагматистами (ведь нужно же дать им какое-нибудь имя), отвечают «нет», и когда им предлагают теорему без указания способа ее проверки, они смотрят на нее как на нечто невразумительное. Они не желают ничего представлять себе, кроме объектов, которые могут быть определены конечным числом слов. Когда в рассуждении им говорят об объекте A, удовлетворяющем определенным условиям, они усматривают под этим объект, который удовлетворяет этим условиям, каковы бы при этом ни были слова, использованные для его окончательного определения, лишь бы их было конечное число.

Принадлежащие к другой школе, их я назову для краткости канторианцами, не желают принимать этого; человек, каким бы он ни был болтуном, никогда в своей жизни не произнесет более миллиарда слов; а тогда исключим ли мы из науки объекты, определение которых содержит миллиард и одно слово? И если мы их не исключим, то почему же мы исключим те объекты, которые могут быть определены только бесконечным числом слов, ведь построение как одних, так и других превосходит человеческие способности?

Но эти аргументы, как известно, не трогают прагматистов; как бы ни был болтлив один человек, человечество будет еще более болтливо, и так как мы не знаем, сколько времени оно будет существовать, то мы не можем заранее ограничить поле его изысканий; мы знаем только одно, что это поле будет всегда оставаться ограниченным; и даже если бы мы могли определить дату исчезновения человечества, то существуют другие звезды, которые смогут принять неоконченный труд Земли; прагматисты даже согласны без особого отвращения представить себе человечество, несравненно более болтливое, чем наше, сохраняя все-таки за ним кое-что человеческое; но они отказываются рассуждать по поводу гипотезы уж я не знаю какого божества, бесконечно болтливого и могущего мыслить бесконечное число слов в конечное время. Канторианцы же, наоборот, предполагают, что объекты существуют в своего рода большом складе, независимо от всего человечества или всякого божества, которое могло бы о них говорить или думать; в этом магазине мы, без сомнения, можем выбирать, но, наверное, мы не имеем достаточно аппетита или средств, чтобы купить все; при этом инвентарь магазина не зависит от ресурсов покупателей. Из этого-то исходного недоразумения следуют всевозможные разногласия в деталях.

Возьмем для примера теорему Цермело, по которой пространство может быть преобразовано во вполне упорядоченное множество. Канторианцы будут пленены строгостью, действительной или кажущейся, доказательства; прагматисты им ответят: «вы говорите, что можете преобразовать пространство в хорошо упорядоченное множество: хорошо! Преобразуйте». «Это будет слишком долго». «Тогда по крайней мере покажите нам, что кто-либо, имеющий достаточно времени и терпения, мог бы произвести это преобразование». «Нет, мы этого не можем, так как число операций, которые необходимо проделать, бесконечно, оно больше даже, чем алеф-нуль». «Можете ли вы показать, как можно будет выразить конечным числом слов закон, который позволил бы упорядочить пространство?» «Нет». И прагматисты заключают, что теорема лишена смысла или неверна, или по крайней мере не доказана.

Прагматисты становятся на точку зрения расширения, а канторианцы — на точку зрения выделения. Когда речь идет о конечной совокупности, это различие может интересовать только теоретиков формальной логики; но оно кажется нам гораздо более глубоким, когда речь идет о бесконечных совокупностях. Если встать на точку зрения расширения, совокупность образуется последовательными прибавлениями новых членов; мы можем, комбинируя старые объекты, создавать новые, затем с помощью этих — еще более новые, и если совокупность бесконечна, то только потому, что нет причин, чтобы остановиться.

С точки зрения выделения, наоборот, мы исходим из совокупностей, в которых находятся предсуществующие объекты, которые кажутся нам сначала неразличимыми; но мы, наконец, начинаем различать некоторые из них потому, что мы снабжаем их этикетками и распределяем по ящикам; однако объекты предшествуют этикеткам, и совокупность существовала бы даже тогда, когда не нашлось бы коллекционера для ее классификации.

Для канторианцев понятие кардинального числа не составляет тайны. Две совокупности имеют одинаковое кардинальное число, когда их можно расположить в одних и тех же ящиках; нет ничего проще этого, поскольку обе совокупности предсуществуют и поскольку точно так же можно рассматривать как предсуществующую совокупность ящиков, независимых от коллекционера, заинтересовавшегося распределением по ним объектов. Для прагматистов это не так; совокупность не предсуществует, она каждый день обогащается: новые объекты без конца прибавляются к ней так, что их нельзя было бы определить, не опираясь на понятие объектов, уже ранее классифицированных, и на способ их классификации. При каждом новом приобретении коллекционер может быть вынужденным перерыть свои ящики, чтобы найти способ пристроить его на место; никогда не будет известно, могут ли две совокупности расположиться в тех же ящиках, так как всегда можно ожидать необходимости произвести среди них перемещения. Например, прагматисты принимают только объекты, которые могут быть определены конечным числом слов. Возможные определения, выражаемые с помощью фраз, всегда могут быть перенумерованы порядковыми числами от одного до бесконечности, поэтому у них будет возможно только одно бесконечное количественное число алеф-нуль. Почему тогда, спросим мы, мощность континуума не такая же, как и мощность целых чисел? Да, когда даны все точки пространства, которые мы умели определять словами в конечном числе, мы можем представить себе закон, выражаемый также конечным числом слов, который приводит их в соответствие с последовательностью целых чисел. Но рассмотрим теперь фразы, где фигурирует формулировка этого закона соответствия; только что они не имели никакого смысла, так как этот закон еще не был изобретен, и они не могли служить для определения точек пространства; теперь они приобрели смысл, они позволяют нам определить новые точки пространства, но эти новые точки не будут уже иметь места в принятой классификации, и это заставит нас изменить ее. Это-то мы и хотим сказать, когда, следуя прагматистам, говорим, что мощность континуума не та же, что мощность целых чисел. Мы хотим сказать, что невозможно найти такой закон соответствия между этими двумя совокупностями, который был бы защищен от подобных изменений в том смысле, как это можно сделать, например, когда речь идет о прямой и плоскости. И в таком случае, собственно говоря, прагматисты не уверены в том, что некоторое множество имеет кардинальное число или же что для двух заданных множеств всегда можно узнать, имеют ли они одну и ту же мощность или одно из них имеет мощность бо́льшую, чем другое. Таким образом, они приходят к сомнению в существовании числа алеф-один.

Другой источник разногласия возникает в способе понимания определений. Существуют определения многих видов; прямое определение может быть сделано как по genus proximum et differentiam specificam [1]), так и по построению.

Отметим попутно, что имеются определения, неполные в этом смысле: они определяют не один индивидуум, но сразу целый род; они законны, и именно они являются определениями, которыми чаще всего пользуются. Но, следуя прагматистам, под ними нужно дополнительно понимать совокупность индивидуумов, которые удовлетворяют определению и которые можно полностью определить конечным числом слов;

---

[1]) См. сноску на с. 585.

для канторианцев это ограничение является искусственным и лишенным значения.

Если бы были только прямые определения, то бессилие чистой логики было бы неоспоримо. В этом случае можно было бы в любом предложении заменить каждый из его членов определением; если бы произвели такую подстановку, то или предложение не свелось бы к тождеству, и тогда оно было бы недоступно чисто логическому доказательству, или же оно свелось бы к тождеству, и тогда оно было бы не чем иным, как тавтологией, более или менее искусно замаскированной.

Но мы имеем еще другой вид определений: определения через постулат. Обычно мы будем знать, что определяемый объект принадлежит к некоторому роду, но когда дело пойдет о том, чтобы высказать специфическое различие, то его выскажут не прямо, а с помощью «постулата», которому должен удовлетворять определяемый объект. Именно таким образом математики могут определить количество x посредством явного уравнения $x = f(y)$ или неявного $F(x, y) = 0$.

Определение через постулат имеет значение только тогда, когда доказано существование определяемого объекта; на языке математики это означает, что постулат не содержит противоречий; этим условием мы не имеем права пренебрегать; нужно либо предположить отсутствие противоречия как интуитивную истину, как аксиому, с помощью некоторого акта веры, но тогда нужно отдавать себе отчет в том, что делаешь, и знать, что увеличен список недоказуемых аксиом; либо же следует построить доказательство по правилам: или с помощью примера или применить рекуррентное рассуждение. Это не значит, что такое доказательство было бы менее необходимо в случае прямого определения, но оно в этом случае более просто.

Некоторые прагматисты окажутся более требовательными: чтобы рассматривать определение как законное, им недостаточно того, чтобы оно не приводило к противоречию в терминах, им еще будет нужно, чтобы оно имело смысл с той особой их точки зрения, которую я пытался определить выше.

Как бы то ни было, но останется ли логика бесполезной после введения определений через постулаты?

Мы не можем при задании предложения заменить в нем некоторый член через его определение; все, что мы можем сделать,— это исключить этот член при помощи предложения и постулата, служащего ему определением. Если эта операция, сделанная, как говорят, по правилам логического исключения, не приводит нас к тождеству, то это показывает, что предложение недоказуемо посредством чистой логики; если она приводит к тождеству, то это значит, что оно только тавтология. Нам не нужно ничего изменять в наших предыдущих заключениях.

Но существует третий вид определений, который является началом нового недоразумения между прагматистами и канторианцами. Это все еще определения через постулат, но постулатом здесь является некоторое отношение между определяемым объектом и всеми индивидуумами класса, к которому по предположению принадлежит определяемый объект (или же к которому по предположению принадлежат объекты, которые сами могут быть определены через определяемый объект). Это происходит, когда мы устанавливаем следующие два постулата:

X (определяемый объект) так-то связан со всеми индивидуумами рода G,

X входит в состав рода G.

Или же следующие три постулата:

X так-то связан со всеми индивидуумами рода G,

Y так-то связан с X,

Y входит в состав G.

С точки зрения прагматистов подобное определение вовлекает в порочный круг. Нельзя определить X, не зная всех индивидуумов рода G и, следовательно, не зная X, которое является одним из этих индивидуумов. Канторианцы смотрят иначе: род G нам дан, следовательно, мы знаем все индивидуумы; определение имеет целью только выделить из этих индивидуумов тот, который находится со всеми своими товарищами в указанной зависимости. Нет, отвечают их противники, знание вида и рода не дает вам знания всех его индивидуумов, оно дает вам только возможность построить их все или — лучше — построить их столько, сколько вы пожелаете. Они будут существовать не ранее, чем вы их построите, т. е. после того, как они будут определены; X существует только после определения, которое имеет смысл только после того, как мы наперед знаем все индивидуумы G и, в частности, X. Не имеет никакого значения, прибавляют они, утверждение, что определять X через его зависимость с X не будет порочным кругом и что эта зависимость в итоге не является постулатом, который может служить для определения X; необходимо предварительно доказать, что этот постулат не содержит в себе противоречия, но этого обыкновенно не делают в определениях такого рода. Прежде всего доказывают, что, каков бы ни был род G, все индивидуумы которого предполагаются известными, существует сущность X, которая связана с видом рассматриваемой зависимостью, т. е. что существование этой сущности не влечет за собой противоречия. Остается показать, что нет противоречий между существованием этой сущности и гипотезой, что эта сущность сама входит в состав рода.

Спор мог бы длиться долго, но вопрос, который я хочу выяснить, заключается в том, что если бы этот род определений был принят, логика уже не была бы бесплодной, и доказательством этого служит то, что было построено много рассуждений с целью доказать предложения, которые вовсе не были тавтологиями уже потому, что есть люди, которые задаются вопросом, не ложны ли они. И вот тогда удивляешься силе, которую может иметь одно слово.

Вот объект, о котором ничего нельзя было сказать, пока он не был окрещен; достаточно было дать ему имя, чтобы произошло чудо. Каким образом это происходит? Это происходит потому, что, давая ему имя, мы тем самым неявно утверждаем, что объект существует (т. е. свободен от всех противоречий) и что он полностью определен. Но это нам ничего не даст из того, что требуют прагматисты. Каков же механизм, делающий доказательство плодотворным? Очень простой: отвергают доказываемое предложение и показывают, что в таком случае получается противоречие с существованием объекта X; но это правильно только в том случае, когда уверены в его существовании и, с другой стороны, когда знают, что объект полностью определен. Действительно, если X вывести из рода G по определению и если затем дополнить род G, прибавляя к нему объект X и другие индивидуумы того же рода, которые могут быть из него произведены, если назвать G' дополненный таким способом род и назвать X' то, что получится из G' по определению тем же способом, каким X выводится из G, то необходимо, чтобы была уверенность в тождественности X' с X. Если бы это было не так, то, отвергнув доказываемое предложение, пришли бы к двум противоречащим формулировкам:

$$\varphi_1(X) = 0, \quad \varphi_2(X) = 0.$$

Каким образом можно убедиться, что как в одной, так и в другой X совершенно одно и то же? Если бы в одном выражении фигурировало X, а в другом X', то оба утверждения записались бы в виде

$$\varphi_1(X) = 0, \quad \varphi_2(X') = 0$$

и не были бы противоречащими друг другу.

Почему же прагматисты делают такое возражение? Потому, что род G представляется только как совокупность, которая может бесконечно увеличиваться по мере того, как будут строиться новые индивидуумы, обладающие необходимыми свойствами. Таким образом, никогда нельзя считать, что G ne varietur (неизменно), как это делают канторианцы, и никогда нельзя быть уверенным в том, что путем новых прибавлений оно не превратится в G'.

Я старался объяснить, как только мог, ясно и беспристрастно, в чем заключается расхождение между двумя школами математиков, и мне кажется, что мы уже замечаем действительную причину. Ученые этих двух школ имеют противоположное направление мыслей: те, которых я назвал прагматистами,— идеалисты, канторианцы же — реалисты.

Одно обстоятельство укрепит нас в нашей точке зрения. Мы видим, что канторианцы (да простят мне это удобное название, хотя я и хочу говорить здесь не о математиках, следующих взглядам Кантора, может быть, даже не о философах, ссылающихся на него, но только о тех, кто независимо от него имеет те же тенденции), что канторианцы, говорю я, постоянно говорят об эпистемологии [1]), т. е. об учении о науках, и

---

[1]) Пуанкаре в данном контексте использует понятие «эпистемология» не в традиционном его понимании (теория познания, гносеология), а для обозначения воззрений логицистов. Го-

хорошо известно, что эта эпистемология совершенно независима от психологии, т. е. что она учит нас, чем бы была наука, если бы не было ученых. Мы должны изучать эту науку, конечно, не предполагая, что ученых нет, но по крайней мере не предполагая, что они есть. Таким образом, не только природа есть реальность, независимая от физика, который стремится ее изучить, но и сама физика есть реальность, которая существовала бы и тогда, когда не было бы физика. В этом ведь и заключается реализм.

Почему прагматисты отказываются признавать объекты, которые нельзя определить конечным числом слов? Потому что они считают, что объект существует, только когда о нем подумали, и что нельзя сознавать мыслимый объект независимо от мыслящего. А в этом-то и заключается идеализм. И так как мыслящим является человек или что-либо похожее на человека, следовательно, существо конечное, то бесконечность и не может иметь другого смысла, кроме возможности создать столько конечных предметов, сколько нам угодно.

В этом случае можно сделать довольно любопытное замечание. Реалисты обычно встают на физическую точку зрения: независимое существование они приписывают материальным объектам или индивидуальным душам, или тому, что они называют субстанциями. Мир для них существовал до сотворения человека и даже ранее всех живых существ и существовал бы и в том случае, если бы не было ни бога

воря о «реализме» канторианцев, он подчеркивает платонистский характер истолковывания ими математических объектов. Например, Г. Фреге заявлял, что математик, подобно географу, открывает математические сущности, которые существуют так же, как материки и острова. Платонистский «привкус» канторовской теоретико-множественной установки раскрывает Г. И. Рузавин: «Легко обнаружить сходство между божественным миром идей Платона, куда он помещает математические сущности, и внемировым бытием Кантора, где реализуется актуальная бесконечность. Но дело не только в идейном и терминологическом сходстве. Платонистская концепция в неявном виде содержится в самих основах «наивной», некантоловской теории множеств» (Рузавин Г. И. Теория отражения и некоторые гносеологические проблемы математики//Ленинская теория отражения и современность. — София: Наука и искусство, 1969. — С. 556.) Критика Пуанкаре платонистского понимания математических объектов была энергично поддержана интуиционистами и в первую очередь Л. Брауэром и Г. Вейлем. — *Примеч. ред.*

и никакой другой мыслящей сущности. Это точка зрения здравого смысла, и только размышление может заставить отказаться от нее. Сторонники физического реализма — обычно финитисты; в вопросе о канторовских антиномиях они принимают тезы, они считают, что мир ограничен. Таков, например, взгляд Эвеллина. Напротив, идеалисты не имеют таких предрассудков и близки к тому, чтобы подписаться под антитезами.

Но канторианцы — реалисты именно в том, что относится к сущностям математики; эти сущности кажутся им имеющими независимое существование; геометр их не создает, он их открывает. Эти объекты, так сказать, существуют, не существуя, так как они сводятся к чистым отвлечениям; но поскольку по природе своей эти объекты бесконечны числом, то сторонники математического реализма — гораздо более инфинитисты, чем идеалисты; их бесконечность не есть будущее, так как она предшествует в своем существовании открывшему ее уму; принимают ли они ее или отрицают, они должны верить в действительную бесконечность.

Мы узнаем в этом теорию идей Платона. Может показаться странным видеть Платона среди реалистов, однако пока нет ничего более противоположного современному идеализму, чем платонизм, хотя эта доктрина в то же время очень далека от физического реализма.

Я никогда не знал математика, большего реалиста в платоновском смысле, чем Эрмит, и, однако, я должен признаться, что я не встречал человека, более непокорного учению Кантора. В этом есть кажущееся противоречие, тем более, что он часто повторял: я антиканторианец, потому что я реалист. Он упрекал Кантора за то, что тот создавал объекты вместо того, чтобы удовлетворяться тем, чтобы их открывать. Без сомнения, вследствие своих религиозных убеждений, он считал грешным желание в полной мере проникнуть в область, объять которую может один бог, и не дожидаться, пока он сам откроет нам эти тайны поодиночке. Он сравнивал математические науки с естественными науками. Натуралист, который попытался бы отгадать секрет бога, вместо того чтобы обратиться к опыту, казался ему не только самонадеянным, но и не почтительным к божественному величию. Канторианты, казалось ему, стремятся действовать именно так в математике. Поэтому-то он, реалист в теории, был идеалистом на практике. Существует познаваемая реальность, она вне нас и не зависит от нас; но все то, что мы можем о ней знать, зависит от нас — это не что иное, как будущее, некоторого рода наслаивание последовательных побед. Остаток реален, но вечно непознаваем.

Однако случай Эрмита особый, и я о нем не буду больше говорить. Во все времена в философии были противоположные течения, и не видно, чтобы эти течения стремились примириться. Без сомнения, существуют различные души, и мы ничего не можем в них изменить. Нет никакой надежды увидеть установившееся согласие между прагматистами и канторианцами. Люди не понимают друг друга потому, что они не говорят на одном и том же языке, и потому, что есть языки, которые не могут быть изучены.

В то же самое время в математике имеют обыкновение понимать друг друга; и это именно благодаря тому, что я назвал проверками; они являются окончательными судьями, и перед ними склоняется всякий. Но там, где этих проверок нет, математики не проникают дальше простых философов. Когда речь идет о том, имеет ли смысл непроверяемая теорема, кто может выносить суждение, если проверять ее запрещено по определению? Остается только привести своего противника к противоречию. Но попытка была сделана и ничего не достигла.

Было отмечено много противоречий, и несогласие осталось; никто не был убежден. От противоречий всегда можно избавиться удачным приемом, а именно: distinguo[1]).

Глава VI

ВЗАИМООТНОШЕНИЯ МАТЕРИИ И ЭФИРА

Когда Абрагам просил меня заключить серию собраний, организованных французским Физическим обществом, я сперва хотел отказаться. Мне казалось,

[1]) Латинское выражение, означающее «я различаю». — *Примеч. ред.*

что все вопросы были полностью разобраны и что я не мог бы ничего прибавить к тому, что было так хорошо сказано. Мне ничего не оставалось, как постараться резюмировать впечатление, создавшееся под влиянием совокупности этих работ, и это впечатление такое ясное, что каждый из вас должен был его испытать в такой же степени, как и я, и я не смогу дать ему большей ясности, пытаясь выразить его словами. Но Абрагам так любезно настаивал, что я вынужден был поступиться неизбежными затруднениями, из которых наибольшим является необходимость повторять то, что каждый из вас уже давно обдумал, и наименьшим — необходимость пробежать множество различных вопросов, не имея времени на них остановиться.

Первое впечатление должно было ошеломить всех слушателей: старые механистические и атомистические гипотезы в последнее время приобрели такую прочность, что почти перестают казаться гипотезами; атомы более уже не являются удобными фикциями; нам кажется, что мы, так сказать, видим их с тех пор, как научились их считать. Гипотеза укрепляется и выигрывает в правдоподобии, когда она объясняет новые факты, но это происходит многими способами; чаще всего она должна расшириться, чтобы объяснить новые факты, и иногда она теряет в строгости при таком расширении, иногда бывает необходимо привить к ней дополнительную гипотезу, которая к ней очень подходит, которая не слишком отличается от основной гипотезы, но которая все же является чем-то посторонним, придуманным нарочно для достижения определенной цели, которая, одним словом, является выходом из положения. В этом случае нельзя сказать, что опыт подтвердил первоначальную гипотезу, но все же он ей и не противоречит. Или, еще лучше, между фактами новыми и старыми, для которых первоначально и была придумана гипотеза, существует такая тесная связь, что всякая гипотеза, объясняющая одни факты, должна тем самым объяснять и другие; таким образом, проверяемые факты являются только внешне новыми.

Не то мы имеем, когда опыт открывает совпадение, которое можно было предвидеть и которое произошло не случайно и особенно, если дело идет о численном совпадении. Действительно, совпадения такого рода мы имеем среди явившихся в течение последнего времени подтверждений атомистических идей.

Кинетическая теория газов получила, образно выражаясь, неожиданные подкрепления. Новые идеи точно укладываются в нее; с одной стороны, это теория растворов, с другой — электронная теория металлов. Молекулы растворенного вещества, так же как и свободные электроны, которым металлы обязаны своей электрической проводимостью, ведут себя как газовые молекулы в содержащих их оболочках. Параллелизм полный и может быть продолжен до численных совпадений. Этим сомнительное обращается в возможное; каждая из этих трех теорий, если бы она была изолированной, казалась бы нам только остроумной гипотезой, которую можно заменить другими объяснениями, столь же правдоподобными; но так как в каждом из этих случаев понадобились различные объяснения, то отмеченные совпадения нельзя было приписывать лишь случаю; это является неприемлемым, так как три кинетические теории делают эти совпадения необходимыми. Далее теория растворов заставляет нас естественным образом перейти к теории броуновского движения, где невозможно рассматривать тепловое движение как мысленную фикцию, потому что его непосредственно видно в микроскоп.

Блестящие определения числа атомов, произведенные Перреном, дополнили этот триумф атомизма. Многочисленные согласия между результатами, полученными совершенно различными способами, упрочивают наше убеждение. Еще очень недавно считали себя счастливыми, видя, что найденные числа имеют одинаковое число цифр; тогда даже не требовали, чтобы первая значащая цифра была та же; сейчас эта первая цифра найдена, и что особенно замечательно, так это то, что пользовались самыми разнообразными свойствами атома. В способах, вытекающих из броуновского движения, или в тех, которые связаны с законом излучения, считают не непосредственно атомы, а степени свободы; там, где говорят о голубом цвете неба, уже не механические свойства атома идут в расчет, а рассматривают атомы как причину оптической дискретности; наконец, когда пользуются радием, считают испускаемые частицы. Если бы в этом пункте были разногласия, то согласовать их было бы очень трудно, но, к счастью, их не было.

Атом химика — сейчас реальность, но это не значит, что мы близко подошли к первичному элементу вещей. Когда Демокрит предложил атомы, он считал их абсолютно неделимыми, помимо которых ничего не остается искать. Именно это и должно значить само слово по-гречески, и именно для этой цели оно и было придумано; за атомом не должно быть больше тайны. Следовательно, атом химика не дал бы ему полного удовлетворения, так как этот атом вовсе не является неделимым, он не является истинным элементом, он не свободен от тайны, этот атом — целый мир. Демокрит сказал бы, что после всех перенесенных для его отыскания трудов мы не продвинулись дальше, чем в самом начале; эти философы никогда не бывают довольны.

Ведь, и в этом заключается второе наше впечатление, всякое новое открытие физики выявляет нам новое усложнение атома. Прежде всего, тела, которые считали простыми и которые во многих отношениях вели себя совсем как простые тела, способны разлагаться на еще более простые тела. Атом распадается на более мелкие атомы. То, что называют радиоактивностью, есть не что иное, как непрерывный распад атома. Иногда, говоря о преобразовании элементов, выражаются не вполне точно, так как в действительности элемент не превращается в другой, а разлагается на несколько других. Продукты этого разложения все еще остаются химическими атомами, подобными во многих отношениях тем, которые, разрушаясь, их произвели. Таким образом, явление могло бы быть выражено, подобно самой обычной реакции, химическим уравнением, которое приняли бы без особых страданий самые консервативные химики.

Но это не все, в атомах мы находим многое другое: прежде всего мы в них находим электроны. Каждый атом в таком случае представляется нам в некотором роде Солнечной системой, где маленькие отрицательные электроны, играющие роль планет, движутся вокруг положительного электрона, играющего роль центрального Солнца. Взаимное притяжение этих зарядов с противоположными знаками является связью системы, образующей из нее одно целое; именно она управляет периодами планет, а эти периоды определяют длину волны света, излучаемого атомом. Индукции конвекционных токов, вызванных движением этих электронов, атом, который из них образован, обязан своей видимой инерцией, которую мы называем его массой. Кроме этих связанных электронов, существуют и свободные электроны, такие, которые подчиняются тем же законам, что и газовые молекулы, и которые делают металлы проводниками. Последние сравнимы с кометами, которые движутся от одной звездной системы к другой и которые производят свободный обмен энергией между этими удаленными системами.

Но мы все еще не у предела; после электронов или атомов электричества пришел магнетон или атом магнетизма, который входит сейчас двумя различными путями: через изучение магнитных тел и через изучение спектров простых тел. Мне не нужно напоминать вам здесь превосходного сообщения Вейса и отношения соизмеримости, которую столь неожиданным образом выявили его опыты. Там также существуют численные соотношения, которые нельзя приписать случаю, и объяснение которых следует искать.

В то же время нужно объяснить столь странные законы распределения линий в спектре. Из работ Бальмера, Рунге, Кейзера, Ридберга следует, что эти линии распределяются в серии и в каждой серии подчиняются простым законам. Ближайшей мыслью является сопоставить эти законы с гармоническими. Так же, как дрожащая струна имеет бесконечное число степеней свободы, что позволяет ей дать бесконечное число звуков, частоты которых являются кратными основной частоты; так же, как звучащее тело сложной формы дает гармоники, законы которых аналогичны законам предыдущих, но, однако, менее простые; так же, как резонатор Герца способен на бесконечное число различных периодов, не может ли и атом по идентичным причинам дать бесконечное число различных излучений? Вы знаете, что эта столь простая мысль потерпела банкротство потому, что по законам спектроскопии частота, а не ее квадрат, выражается так просто, потому что частота не становится бесконечной для гармоник бесконечно высокого порядка Эта мысль должна быть изменена или отброшена. До сих пор она не поддавалась никаким ухищрениям и отказывалась согласоваться; это-то и заставило Рица ее отбросить. Он представляет себе колеблющийся атом образованным из вращающегося электрона и из множества магнетонов, расположенных один за другим. В таком случае уже не взаимное электростатическое притяжение электронов управляет длинами волн, а магнитное поле, создаваемое этими магнетонами.

Эту мысль принять несколько трудно, в ней есть, не знаю, что-то искусственное; но все-таки приходится ее принять хотя бы временно, потому что пока не найдено ничего другого, а искали хорошо.

Почему атомы водорода могут в спектре давать несколько линий? Это происходит не потому, что каждый из них мог бы давать все линии водородного спектра и что он действительно дает ту или другую линию в зависимости от начальных условий движения, а потому, что существуют атомы водорода нескольких сортов, которые различаются числом соответствующих им магнетонов, и потому, что каждый из этих сортов атомов дает различные линии. Спрашивается, могут ли эти атомы преобразовываться один в другой и как? Как может атом терять магнетоны (а это как будто происходит, когда переходят от одного аллотропического вида железа к другому)? Может ли магнетон выйти из атома, или же может ли часть магнетонов покинуть строй, чтобы расположиться неправильно?

Это расположение магнетонов друг за другом является существенной чертой гипотезы Рица; идеи Вейса, во всяком случае, должны сделать ее нам менее чуждой. Необходимо, чтобы магнетоны располагались если не друг за другом, то во всяком случае параллельно, так как они складываются арифметически или по крайней мере алгебраически, но не геометрически.

Что же такое магнетон? Является ли он чем-либо простым? Нет, если не желают отказываться от гипотезы элементарных токов Ампера; магнетон в таком случае есть вихрь электронов, и вот наш атом все более и более усложняется.

Лучше всего позволяют нам понять сложность атома соображения Дебьерна в заключительной части его сообщения. Дело шло об объяснении закона радиоактивных преобразований. Это очень простой показательный закон, но если обратить внимание на его форму, то можно заметить, что это статистический закон, на нем видна печать случая. Здесь случай не есть следствие случайных встреч с другими атомами или другими внешними агентами. Причины преобразования лежат внутри самого преобразующегося атома; я имею в виду как случайную, так и основную причины. Внешние же обстоятельства, например температура, не оказывают влияния на коэффициент времени в показателе; этот коэффициент замечательно постоянен, и Кюри предлагает пользоваться им для абсолютного измерения времени.

Случай, управляющий этими преобразованиями, есть случай внутренний. Таким образом, атом радиоактивного вещества есть мир, и мир, подчиненный случаю. Но нужно помнить, что говорящий о случае говорит о больших числах; мир, образованный из малого количества элементов, будет подчиняться более или менее сложным законам, но эти законы не будут статистическими законами. Следовательно, атом должен быть сложным миром; верно то, что этот мир замкнутый (или по крайней мере почти замкнутый), он защищен от внешних возмущений, которые мы можем произвести. Так как существует внутренняя атомная статистика и, следовательно, термодинамика, то мы можем говорить о внутренней температуре атома. И что же! Она не имеет никакой тенденции прийти в равновесие с внешней температурой, как будто бы атом полностью закрыт абсолютно нетеплопроводной оболочкой. И именно потому, что он замкнут, потому, что его функции, ясно очерченные, охраняются строгими таможнями, атом и оказывается индивидуумом.

На первый взгляд эта сложность атома не представляет ничего поразительного для ума; казалось бы, что она не должна вызывать никакого смущения. Однако небольшое размышление не замедлит показать нам те трудности, которые мы обошли. Когда мы считали атомы, мы считали степени свободы; мы неявно предположили, что каждый атом имеет их только три; это мы вывели из рассмотрения теплоемкостей. Но каждое новое усложнение должно вводить новую степень свободы, и тогда мы сильно отстаем в счете. Это затруднение не ускользнуло от создателей теории равномерного распределения энергии; их уже удивляло число линий в спектре, но, не находя никакого выхода, они взяли на себя смелость пойти дальше.

Естественным объяснением является представление атома как сложного мира, но мира замкнутого; внешние возмущения вовсе не отражаются на том, что происходит внутри атома, а то, что происходит внутри, вовсе не влияет на то, что происходит снаружи. Но это не будет вполне правильно, в таком случае мы навсегда игнорируем все то, что происходит внутри атома, и атом должен был бы нам представляться как простая материальная точка. Правильнее будет считать, что можно заглянуть внутрь атома, но только через маленькое окошко, что практически не существует обмена энергией между наружным и внутренним миром, а следовательно, и тенденции к равномерному распределению энергии между обоими мирами. Внутренняя температура, как я только что указывал, не стремится к равновесию с внешней температурой, поэтому-то теплоемкость является такой, какой бы она была, если бы этой внутренней сложности вовсе и не существовало. Представим себе сложное тело в виде полой сферы, стенки которой изнутри совершенно непроницаемы для тепла, и внутри нее массу разнообразных тел; наблюдаемая теплоемкость этого сложного тела будет теплоемкостью сферы, независимой от всех заключенных в нее тел.

Дверь, запирающая внутренний мир атома, однако, время от времени приотворяется; это происходит, когда, испуская частицу гелия, атом разрушается и спускается на один ранг в иерархии радиоактивности. Что же тогда происходит? Чем отличается это разложение от обычного химического разложения? Почему атом урана, образованный из гелия и других вещей, имеет больше прав на имя атома, чем, например, полумолекула циана, которая в столь многих отношениях похожа на простое тело, состоящее из углерода и азота? Без сомнения потому, что атомная теплоемкость урана (я не знаю, измерена ли она) подчиняется закону Дюлонга и Пти и потому, что эта теплоемкость — именно теплоемкость простого атома; тогда она должна удваиваться в момент испускания гелия, когда первоначальный атом разбивается на два вторичных. Вследствие этого разложения атом приобретает новые степени свободы, способные действовать на внешний мир, и эти новые степени свободы выразятся в увеличении теплоемкости. Каково же будет следствие этой разницы между общей теплоемкостью составляющих и теплоемкостью соединения? Тепло, освобожденное при этом разложении, должно будет быстро изменяться с температурой, так что образование радиоактивных молекул, существенно эндотермическое при обычных температурах, становится экзотермическим при высоких температурах. Таким образом, до некоторой степени мы можем объяснить радиоактивные образования, которые все же остаются несколько таинственными.

Как бы то ни было, но это представление о маленьких замкнутых или только немного приоткрытых мирах недостаточно для полного решения вопроса. Необходимо, чтобы закон равномерного распределения энергии неограниченно царил вне этих замкнутых миров, за исключением тех случаев, когда одна из дверей приотворяется, но в действительности этого не происходит.

Теплоемкость твердых тел с понижением температуры быстро уменьшается. Дело происходит так, как если бы некоторые из их степеней свободы постепенно отмирали, так сказать, замерзали или, если вам больше нравится, как если бы они теряли всякое соприкосновение с внешним миром и в свою очередь прятались, уж я не знаю, за какую-то оболочку в неизвестный мне замкнутый мир.

С другой стороны, закон черного излучения не тот, которого ожидает теория равномерного распределения. Законом, который согласуется с этой теорией, является закон Рэлея, и этот закон, который несет в себе противоречие, так как он приводит к общему бесконечному излучению, совершенно противоречит опыту. В излучении черного тела света короткой длины волны во много раз меньше, чем этого требует гипотеза равномерного распределения. Поэтому Планк и предложил свою теорию квантов, из которой следует, что обмен энергией между обыкновенной материей и теми маленькими резонаторами, колебания которых порождают свет раскаленных тел, не может происходить иначе, как внезапными скачками; любой из этих резонаторов не может приобретать или терять энергию непрерывно, он не может получить долю кванта, он должен получить или целый квант, или ничего.

Тогда почему теплоемкость твердого тела уменьшается при низкой температуре, почему некоторые степени свободы как будто не играют роли? Это происходит потому, что запас энергии, который им предоставлен при низкой температуре, недостаточен для того чтобы снабдить каждую из них квантом; некоторые из них будут иметь право только на часть его, но так как они хотят получить все или ничего, то они ничего и не получают и остаются как бы парализованными.

Точно так же в излучении некоторые резонаторы, которые не могут получить целый квант, не получают ничего и остаются неподвижными, так что излученного света гораздо меньше при низкой температуре, чем было бы без этого обстоятельства. А так как требуемый квант тем больше, чем меньше длина волны, но и резонаторы короткой длины волны затихают прежде всего, так что количество света короткой длины волны оказывается гораздо меньшим, чем того требует закон Рэлея.

Заявлять, что подобная теория вызывает много трудностей, было бы величайшей наивностью; когда высказывают столь смелую идею, конечно, ожидают встречи с трудностями, ибо прекрасно понимают, что ею переворачивают все воззрения прошлого, и уже не удивляются никакому препятствию, наоборот, будут удивляться, не находя их. Таким образом, эти затруднения не кажутся вескими возражениями. Я все-таки возьму на себя смелость отметить вам некоторые из них; я не стану выбирать самые большие и самые очевидные, которые представляются всякому уму, это и действительно не нужно, так как всякий понимает их сразу; я просто хочу рассказать вам те последовательные состояния духа, через которые я прошел.

Я спросил себя: в чем заключается ценность предложенных доказательств? Я увидел, что вычисляли вероятности различных распределений энергии, просто их перечисляя, потому что благодаря сделанной гипотезе число этих состояний конечное, но я неясно видел, почему их рассматривали как равновероятные. Затем вводили известные зависимости между температурой, энтропией и вероятностью; последние предполагают возможность термодинамического равновесия, так как эти зависимости доказаны в предположении возможности этого равновесия. Я прекрасно знаю, что это равновесие возможно, как показывает опыт, но меня это не удовлетворяло; необходимо было показать, что это равновесие совместимо со сделанной гипотезой и даже что оно является необходимым ее следствием. Я не имел ясно выраженных сомнений, но я чувствовал необходимость яснее разобраться, а для этого необходимо было несколько углубиться в детали механизма.

Чтобы могло существовать распределение энергии между резонаторами различной длины волны, колебания которых являются причиной излучения, необходимо, чтобы они могли обмениваться энергией; без этого первоначальное распределение будет существовать бесконечно, и так как это первоначальное распределение произвольно, то не может быть и речи ни о каком законе излучения. Резонатор не может передать эфиру и не может получить от него ничего, кроме света вполне определенной длины волны. Если бы, следовательно, резонаторы не могли механически, т. е. без посредства эфира, действовать один на другой, если бы, с другой стороны, они были закреплены и замкнуты в определенной оболочке, то каждый из них мог бы излучать или поглощать только свет определенного цвета. Он мог бы обмениваться энергией лишь с теми резонаторами, с которыми он находится в совершенном резонансе, и первоначальное распределение оставалось бы неизменным. Но мы можем представить себе два способа обмена, которые не вызовут такого возражения. С одной стороны, атомы и свободные электроны могут двигаться от одного резонатора к другому, ударять резонатор, сообщать ему и получать от него энергию. С другой стороны, свет, отражаясь от подвижных зеркал, меняет свою длину волны согласно принципу Доплера — Физо.

Свободны ли мы в выборе этих двух механизмов? Нет. Очевидно, что как один, так и другой должны быть приняты во внимание, и необходимо, чтобы как один, так и другой приводили нас к одному и тому же закону излучения. Действительно, что бы произошло, если бы результаты были противоречивы, если бы, например, механизм ударов, действуя самостоятельно, стремился к созданию определенного закона излучения, например закона Планка, в то время как механизм Доплера—Физо стремился бы к другому? А вот что произошло бы: оба эти механизма, действуя одновременно, но попеременно перевешивая в зависимости от случайных обстоятельств, заставили бы мир постоянно колебаться от одного закона к другому; он бы уже не стремился к определенному конечному состоянию, к термической смерти, где бы он уже не знал больше изменений, второе начало термодинамики не было бы уже верным.

Таким образом, я решил последовательно исследовать оба процесса и начал с механического действия, с удара. Вы знаете, почему старые теории настойчиво приводят нас к закону равномерного распределения: это происходит потому, что они предполагают, что все уравнения механики выражаются в форме Гамильтона и, следовательно, что они предполагают единицу последним множителем в смысле Якоби. Приходится предположить, что законы столкновения свободного электрона с резонатором не заключаюся в этой форме и что последний множитель уже не единица, а какой-то другой. Необходимо, чтобы они имели последний множитель, иначе второе начало термодинамики не будет верным, и мы встретим то же самое затруднение, что и выше, но не следует, чтобы этот множитель был равен единице.

Именно последний множитель и измеряет вероятность данного состояния системы (лучше сказать то, что можно было бы назвать плотностью вероятности). В гипотезе квантов этот множитель не может быть непрерывной функцией, так как вероятность состояния должна быть равна нулю всякий раз, как соответствующая ему энергия не является кратным кванта. В этом скрывается очевидное затруднение, но оно принадлежит к таким, с которыми мы заранее примирились, и я на нем не остановился. Тогда я довел вычисление до конца и нашел закон Планка, полностью подтверждая тем самым взгляды немецкого физика.

Затем я перешел к механизму Доплера—Физо. Представим себе оболочку, образованную из тела насоса и поршня с идеально отражающими стенками. В этой оболочке заключено некоторое количество световой энергии с некоторым распределением длин волн, но не заключен источник света; световая энергия в ней заключена раз и навсегда.

Пока поршень остается неподвижным, распределение не может измениться, так как свет при отражении сохраняет свою длину волны; но при передвижении поршня распределение изменяется. Пока скорость поршня очень мала, процесс обратим, и энтропия должна оставаться постоянной. Таким образом, мы вновь производим анализ Вина и находим его закон, но мы не продвинулись дальше, так как этот закон общий и для старой, и для новой теорий. Когда же скорость поршня не слишком мала, процесс становится необратимым, так что термодинамический анализ уже приводит нас не к равенствам, а к простым неравенствам, из которых нельзя извлечь выводы.

Кажется, однако, что можно рассуждать следующим образом: положим, начальным распределением энергии будет распределение энергии черного тела; оно, очевидно, такое, которое соответствует максимуму энтропии. Если сообщить несколько толчков поршню, то первоначальное распределение должно сохраниться, иначе энтропия уменьшится; и даже при любом начальном распределении после очень большого числа движений поршня конечное распределение должно быть таким, которое дает максимальную энтропию, т. е. излучением черного тела. Такое рассуждение не представляет ценности.

Распределение стремится приблизиться к распределению черного излучения; оно не может отклониться от него, так же как тепло не может переходить от холодного тела к теплому, т. е. это не может произойти без уравновешивающего действия. В самом деле, здесь есть обратное действие: давая движение поршню, производят работу, которая выражается в возрастании световой энергии, замкнутой в насосе, т. е. преобразуется в тепло.

Такого затруднения мы не встретим, если движущиеся тела, от которых происходит отражение света, будут бесконечно малы и бесконечны числом, так как тогда их живая сила уже не будет механической работой, а будет теплом; тогда уже невозможно будет компенсировать уменьшение энтропии, соответствующее изменению в распределении длин волн, преобразованием этой работы в тепло и тогда мы будем иметь право заключить, что если начальным распределением является распределение черного излучения, то это распределение и должно будет оставаться бесконечно.

Представим себе оболочку с отражающими неизменяемыми стенками; заключим в нее не только световую энергию, но и газ; тогда молекулы газа будут играть роль подвижных зеркал. Если распределение длин волн является соответствующим черному излучению при температуре газа, то это состояние должно быть устойчивым, т. е.:

1) действие света на молекулы не заставит их менять температуру;

2) действие молекул на свет не нарушит распределения.

Эйнштейн изучал действие света на молекулы; эти молекулы действительно подвергаются чему-то, напоминающему давление излучения. Эйнштейн, однако, не встал на эту простую точку зрения; он сравнил эти молекулы с малыми подвижными резонаторами, способными обладать сразу и живой силой движения, и энергией электрических колебаний. Результат во всех случаях был один и тот же, он нашел закон Рэлея.

Что касается меня, то я поступил наоборот, т. е. изучил влияние молекул на свет. Молекулы слишком малы, чтобы дать правильное отражение; они производят только рассеяние. Что представляет собой это рассеяние, когда не принимают во внимание движение молекул, мы знаем как на опыте, так и теоретически; оно дает голубой цвет неба. Это рассеяние не изменяет длины волны, но оно тем интенсивней, чем длина волны меньше.

Теперь необходимо перейти от действия молекулы в покое к действию движущейся молекулы, чтобы принять во внимание тепловое движение. Это просто, нам нужно только применить принцип относительности Лоренца; из него следует, что различные пучки одной и той же действительной длины волны, приходя к молекуле по различным направлениям, не будут иметь одинаковой длины волны с точки зрения наблюдателя, считающего молекулу покоящейся. Кажущаяся длина волны не изменится путем дифракции, но не так обстоит дело с действительной длиной волны.

Таким образом, мы приходим к интересному закону; световая энергия, отраженная или рассеянная, не равна падающей световой энергии; оказывается, что не энергия, а произведение энергии на длину волны остается неизменным. Сперва я был очень доволен. Действительно, из этого вытекало, что падающий квант дает рассеянный квант, так как квант обратно пропорционален длине волны. К несчастью, это ничего не дало.

Этот анализ привел меня к закону Рэлея; я это предвидел, но надеялся, что, видя, как я приду к закону Рэлея, я замечу более отчетливо, какие изменения необходимо сделать в гипотезах, чтобы получить закон Планка. Эта надежда не сбылась.

Моей первой мыслью было искать что-либо похожее на гипотезу квантов. Было бы действительно удивительно, чтобы два совершенно различных объяснения истолковывали одно и то же отклонение от закона равномерного распределения в зависимости от того механизма, который вызывал это отклонение. Как могла сказываться дискретная структура энергии? Можно было бы предположить, что эта дискретность принадлежит самой световой энергии, когда она движется в свободном эфире, что, следовательно, свет падает на молекулы не компактной массой, а отдельными небольшими порциями. Легко увидеть, что это не изменит результата.

Или же можно было бы предположить, что дискретность образуется в самый момент рассеяния, что рассеивающая молекула преобразует свет не непрерывно, а последовательными квантами; но это не подходит, потому что, если трансформируемый свет должен был бы ожидать, как если бы имели дело с омнибусом, который дожидается пополнения, то в результате неизбежно получилось бы опоздание. Теория же лорда Рэлея учит, что рассеяние света молекулами, когда оно происходит без изменения направления падающего луча, производит просто обыкновенное преломление, т. е. что рассеянный свет правильно интерферирует с падающим, что было бы невозможно, если бы была потеря фазы.

Если мы беспристрастно будем искать то из наших допущений, которое следует отбросить, то мы все-таки окажемся в недоумении: не видно, как можно было бы отказаться от принципа относительности. Не нужно ли в таком случае изменить закон рассеяния покоящимися молекулами? Это также достаточно трудно, ведь не можем же мы фантазировать в такой мере, чтобы перестать верить в голубой цвет неба.

Я останусь в этом недоумении и закончу следующим соображением. По мере прогресса науки становится все труднее найти место новому факту, который не пристраивается естественным образом. Старые теории основываются на большом числе количественных совпадений, которые не могут быть приписаны случаю. Мы не можем расторгнуть того, что они соединили; мы больше не можем разбивать рамок, мы должны стараться их изогнуть, но они не всегда этому поддаются.

Теория равномерного распределения объясняла столько фактов, что должна содержать долю истины. С другой стороны, она верна не полностью, потому что она не объясняет всего. Ее нельзя ни отбросить, ни сохранить неизменной, а изменения, которые напрашиваются, столь странны, что не решаешься с ними примириться. При современном состоянии науки мы можем только отметить эти затруднения, а не разрешить.

Глава VII

НОВЫЕ КОНЦЕПЦИИ МАТЕРИИ

Поскольку настоящая лекция составляет часть цикла, предметом которого является материализм, то, может быть, некоторые из вас ждут, что́ же я отвечу на часто задаваемый ученым вопрос: ведет ли наука к материализму? Но подобный вопрос не допускает исчерпывающего ответа, и я признаюсь вам, что не вполне ясно понимаю его смысл. Не совсем ясно я представляю себе и смысл слова «материалист». Если материалистом оказываются всякий раз, когда материи отводят главенствующую роль, то очевидно, что наука материалистична, поскольку науки о природе, и в частности физика и химия, имеют своим объектом именно материю. Это, однако, не означает, что все ученые — сплошь материалисты хотя бы уже потому, что их научная деятельность не равнозначна всей их жизни. Несколько лучше я понимаю смысл слова «детерминист», хотя при более глубоком размышлении я не остаюсь в прежней уверенности, что хорошо понимаю его. Но в случае науки — о да, наука явно детерминистична, она такова по определению. Недетерминистической науки не может существовать, а мир, в котором не царит детерминизм, был бы закрыт для ученых. И когда задают вопрос о том, каковы пределы детерминизма, то это равнозначно вопросу, как далеко может простираться область науки и где находятся границы, за пределами которых она бессильна.

В этой связи всякий прогресс науки — это успех для детерминизма, и если достижениям ученых не может быть когда-либо положен предел, то напрашивается вывод о том, что в результате не останется места для свободы и, следовательно, для разума. Может показаться, что это случится весьма скоро. Однако, поскольку наука неабсолютна, то свобода сохранит за собой некоторое скромное место и, даже если оно должно непрерывно уменьшаться, его все же будет достаточно, чтобы свобода оставалась направляющей силой. Итак, наука всегда будет несовершенной и не только потому, что наши способности ограничены. Она будет несовершенной по определению, и для всех, кто имеет дело с наукой, неизбежна и проблема дуализма познающего разума и познаваемого им объекта. И как долго существует эта дуальность, как долго разум будет отличаться от своего объекта, до тех пор разум не сможет в совершенстве познать объект, ибо он будет видеть в нем только его внешнюю сторону. Вопрос о материализме и в не меньшей степени вопрос о детерминизме, которые я не отделяю друг от друга, в конечном счете не могут быть решены собственно наукой.

Разумеется, это не меняет того обстоятельства, что среди физических теорий имеются такие, которые, если можно так выразиться, особенно критичны для проблемы материализма, и это именно те теории, которые наиболее близки физикам, потому что в них выражено стремление к простоте, ясности и устранению, насколько это только возможно, всего таинственного. К таковым относятся теории, основанные на представлениях атомизма и механицизма. Со времен Демокрита атомизм всегда имел своих приверженцев, и следует признать, что он действительно весьма соблазнителен. Разум не любит плохо задуманных исследований, не оставляющих никакой надежды довести их до конца, — ему предпочтительно полагать, что в один прекрасный день он сумеет обнаружить простейшие первоэлементы мироздания, а затем ему останется лишь почивать на лаврах. Есть только два способа понимать атомизм. Атомы можно считать первоэлементами в абсолютном смысле этого слова, представляя их совершенно неделимыми в соответствии с этимологическим смыслом самого слова «атом». В этом случае, проникнув вплоть до атома, мы могли бы удовлетвориться и достигнуть полного метафизического душевного спокойствия. К сожалению, такое состояние блаженства не может быть длительным, ибо, если фундаментальная потребность нашего разума находить первоэлементы и получает удовлетворение, нам присущи еще и другие потребности. Нам недостаточно понимать — мы хотим еще и видеть, нам недостаточно пересчитать все атомы — мы хотим их представлять себе, мы приписываем им некоторую форму и этого уже довольно для того, чтобы мы могли рассматривать их как неделимые лишь для средств, располагаемых нами сейчас, но не для более мощных средств, которые мы можем себе вообразить. Этого довольно и для того, чтобы перед нами неизбежно вставал вопрос: не существуют ли первоэлементы, составляющие атом, так сказать «атомы атомов»?

Аналогично обстоит дело и с механицизмом. Нам представляется, что мы лучше понимаем передачу действия путем соприкосновения, нежели действие на расстоянии. Это последнее содержит в себе нечто таинственное, естественно наводящее на мысль о некотором вмешательстве в наш мир извне и именно поэтому я говорю сейчас, что механицизм пронизан материализмом. Призвание ученых состоит в том, чтобы устранять все таинственное и тем самым всегда продвигаться хотя бы немного вперед. Безусловно, ученые испытывают тем большее удовлетворение, чем более значительно это продвижение, — именно этим объясняется то, что почти все ученые, если даже их личные философские убеждения были весьма далеки от материализма, всегда имели пристрастие к механистическим объяснениям. И когда где-нибудь обнаруживают действие на расстоянии, стремятся представить себе и промежуточную среду, которая обладает свойством передавать это действие от точки к ближайшей точке. Однако на этом пути продвинулись не слишком-то далеко, ибо если эта среда непрерывна, то это не дает никакого удовлетворения нашей привязанности к простоте, т. е. нашей потребности все понимать. Если же она состоит из атомов, то атомы не могут находиться в постоянном соприкосновении, хотя они и расположены на очень малых расстояниях друг от друга, равных, по всей вероятности, одной миллиардной миллиметра. Но это все-таки конечное расстояние и его значение такого же характера, как и километра, — для философа это в принципе одно и то же. Ведь необходимо, чтобы действие передавалось от одного атома к другому — только так оно становится действием на расстоянии. Это означает, что когда-нибудь потребуется между атомами нашей первой среды вообразить вторую, более тонкую среду, предназначенную для передачи действия между ними.

Эти доводы поясняют, почему *наука всегда обречена периодически переходить от атомизма к непрерывности, от механицизма к динамизму и обратно* и почему *эти колебания никогда не прекратятся*. Однако это не должно мешать нам подводить итог современному положению вещей и задавать вопрос, в какой же фазе колебания мы находимся теперь, хотя мы и уверены, что через некоторое время окажемся в противоположной фазе.

И вот я, не колеблясь, утверждаю, что в данный момент мы продвигаемся в сторону атомизма, а механицизм преображается, уточняется, «обрастает мясом» и мы сейчас увидим, в какой мере. Тридцать лет тому назад мои заключения были бы совершенно другими. В то время, казалось, вернулись надежды и энтузиазм предыдущего периода, хотя они и представлялись нам даже несколько наивными. Доводы, которые тогда приводили в пользу дискретности материи, были ценны в том отношении, что они давали нам набор удобных гипотез. Но им уже не приписывали доказательной силы и искали способ избежать их. Многие были склонны следовать г-ну Дюгему, который стремился обосновать некую термодинамику, свободную от гипотез и основанную исключительно на эксперименте, по принципу hypotheses non fingo (гипотез не измышляю), — термодинамику, в которой было много интегралов и не было атомов. Что же произошло затем?

Великой твердыней механицизма является кинетическая теория газов. Но что же такое газ? Некоторые отвечают, что ничего не знают об этом. Очевидно, что это наиболее осторожный, но ни к чему не обязывающий ответ и он предохраняет нас от ошибки только потому, что не оставляет никаких шансов обнаружить истину, — ведь решение не двигаться под предлогом, что можно сбиться с пути, не является средством для достижения цели. Но тех, которые отвечают так, становится все меньше и меньше, а все остальные сходятся на том, что газ — это собрание большого числа молекул, которые произвольно движутся с большими скоростями, ударяясь о стенки сосуда и сталкиваясь между собой. Подобно этому ведет себя рой мошкары, летящей наугад в закрытой комнате и сталкивающейся со стенками, потолком или окнами. Ударяясь о стенки, эти молекулы оказывают давление на них и вызывают их смещение, если они не закреплены неподвижно. С возрастанием плотности соответственно растет число столкновений, потому что больше мошкары ударяется о стены, и в результате возрастает давление — это закон Мариотта; при нагревании газа скорости молекул возрастают и столкновения становятся более сильными, и если стенки остаются неподвижными и не позволяют газу расшириться, давление также растет — это закон Гей-Люссака.

В итоге общие свойства газов легко объяснялись таким способом, но на пути детального описания оставалось достаточно трудностей, которые ставили в тупик некоторых ученых и заставляли задуматься, не является ли достигнутое объяснение весьма упрощенным. Исследование растворов, например водного раствора соли, привело к неожиданному сопоставлению. Было установлено, что растворенные в воде молекулы соли ведут себя в стакане воды аналогично молекулам газа, наполняющего закрытый сосуд, — т. е. подобно рою мошкары, попавшей в зал. Совпадения в количественном описании обоих явлений не могли быть отнесены к случайности и их можно было уже рассматривать как подтверждение существования молекул, но следует отметить, что все еще не удалось увидеть молекулы соли, как и молекулы газа, из-за малости их размеров.

Уже довольно давно один натуралист рассматривал в микроскоп органические жидкости и увидел в них частицы, подверженные беспорядочным и очень быстрым движениям. Такое явление было названо броуновским движением. Этот исследователь считал, что имеет дело с живыми существами. Но вскоре было замечено, что инертные частицы, например пылинки краски кармина, ведут себя с не меньшим пылом. Натуралисты уклонились от объяснения этого явления, считая это делом физиков. В свою очередь физики не считали нужным изучать его. Эти натуралисты, говорили они уверенно, не умеют рассуждать и делать выводы. Они же сильно освещают свой препарат в микроскопе, а освещая его, они его нагревают, и тепло вызывает в жидкости нерегулярные течения. Но, наконец, Гуи решил рассмотреть это явление. Его результат не имел ничего общего с прежними мнениями. Это было совершенно новое явление. Видимые частицы совершают движения, и с первого взгляда можно подумать, что они не находятся под действием какой-либо движущей силы и что налицо вечное движение. В действительности же именно столкновения невидимых молекул раствора с видимыми частицами приводят их в движение. Так вот, если мы вернемся к нашей мошкаре (хотя наши глаза недостаточно хороши, чтобы ее видеть) и если среди нее находятся несколько больших мух, то мы могли бы наблюдать их движения и делать выводы о движениях мошкары в случае, если эти мухи не меняют свой путь движения по своему намерению так, чтобы догнать или разминуться с теми насекомыми, которые невидимы для нас из-за малости их размеров.

И все же на сей раз их увидели и я хотел бы пояснить вам, каким способом сосчитали число молекул. Теория учит нас, что вследствие непрекращающихся столкновений скорости молекул перераспределяются до достижения некоторого усредненного распределения этих скоростей, которое затем сохраняется бесконечно долго. В том распределении большие молекулы движутся менее быстро по сравнению с малыми, поскольку выполняется условие равенства в среднем для движущей силы у молекул любых размеров. А видимые нами частицы, испытывающие броуновское движение,— наши большие мухи — это на самом деле очень большие молекулы. Мы знаем их скорость по наблюдениям их движений и мы знаем их размеры, ибо видим их. С другой стороны, теория обеспечивает нам значения скоростей малых молекул, и поскольку движущая сила одних должна быть такой же, как и у других, то известное правило дает нам массу малых молекул, собственно говоря, просто молекул.

Перрен подошел к этой задаче, используя несколько иной метод. Возьмем для примера земную атмосферу. По мере подъема вверх давление и плотность воздуха в ней уменьшаются, температура также уменьшается. Однако во всех последующих рассуждениях мы будем предполагать, что в результате некоторого процесса нагревания в атмосфере поддерживается одинаковая и постоянная температура. Вы хорошо понимаете, что с помощью элементарных законов физики очень легко представить себе поведение этой условной атмосферы с поддерживаемой в ней постоянной температурой, не обращая внимания на то, что наша реальная атмосфера ведет себя совершенно иначе. Если нашу атмосферу, рассматриваемую при постоянной температуре, полагать состоящей из водорода, то ее плотность будет падать медленнее, ибо молекулы водорода имеют значительно меньшие размеры, чем молекулы кислорода или азота. Размеры же атмосферы из водорода возрастают в соответствующей пропорции, но они, напротив, уменьшились бы в случае атмосферы из более тяжелых, чем у кислорода и азота, молекул. Так вот, возьмем видимые глазом частицы — «большие мухи» и рассмотрим их как броуновские частицы, находящиеся во взвешенном состоянии в воде, — таким образом мы получим некую атмосферу в миниатюре, которую мы можем изучать и которая имеет постоянную температуру, поскольку она погружена в воду. Сравнивая ее с атмосферой из водорода при такой же температуре, мы установим пропорциональность между ними, т. е. определим, во сколько раз взятые нами частицы массивнее молекул водорода.

Именно таким путем Перрен смог установить число атомов в одном грамме водорода. Оно оказалось значительно меньше, чем это полагали ранее, а именно, в нем их всего лишь шестьсот восемьдесят три тысячи миллиардов миллиардов. Однако не будем пока говорить, что мы видим атомы только потому, что мы их пересчитали, — ведь когда делают расчет, то заранее хорошо знают, что в результате получат некую цифру, и не следует слишком обольщаться тем, что она получена. Это еще не является доказательством того, что атомы существуют.

Но вот нечто более серьезное. Имеется еще другой способ увидеть атомы — он обеспечивается прибором, называемым спинтарископом. Он устроен так: берется небольшое количество радия и на некотором расстоянии от него ставится фосфоресцирующий экран, например, из сернистого цинка. Наблюдая за экраном, время от времени видят вспышку, что-то вроде звездочки. Эти звездочки вполне отличимы одна от другой и их можно пересчитать. Сэр У. Крукс полагал, что каждая звездочка — это атом гелия, который отделяется от радия и бомбардирует экран из сернистого соединения. Однако оставалось сомнение: не является ли вспышка свойством самого сернистого соединения, перетерпевающего скачкообразное изменение после того, как в нем постепенно накапливается достаточное количество энергии и которая, так сказать, «прорывается» в результате довольно длительного нагревания (а это, конечно, не означает, что все тепло было получено в виде одноразовой порции)?

Однако обратим внимание на следующее: поскольку мы располагаем другим способом подсчета молекул, абсолютно не зависимым от метода Перрена, нам остается сравнить их результаты. Второй метод дает число шестьсот пятьдесят тысяч миллиардов миллиардов. Это блестящее и совершенно неожиданное согласие. Вы видите, что разница не превышает нескольких тысяч миллиардов миллиардов.

На этот раз есть чем восхищаться: более дюжины методов, совершенно независимых друг от друга и которые я не буду перечислять, чтобы не утомить вас, приводят к одному и тому же результату. Если бы в одном грамме было больше или меньше молекул, то голубизна неба была бы совсем иной, раскаленные тела излучали бы в большей или меньшей мере и т. д. Теперь несомненно, что мы видим атомы.

А сейчас я остановлюсь для некоторого образного сравнения. Вообразим себе гиганта, вооруженного необычно большим телескопом. Он движется из глубины темной бездны неба, направляясь к некоему подобию облака, которое светится сиянием молочного цвета. Это наш Млечный путь, и мы знаем, что это именно он, ибо мы находимся внутри него. Мы знаем, что он образован из миллиардов миров, похожих на нашу Вселенную. Но наш гигант теряется в догадках и он не без оснований задает себе вопрос: образовано ли это облако из непрерывной материи или оно состоит из атомов? Тем временем он все более приближается к облаку и в один прекрасный день его телескоп демонстрирует ему мириады светящихся точек. «А! На этот раз вот они,— говорит он себе,— они тут, я обнаружил атомы!» Но этому несчастному невдомек, что эти атомы являются на самом деле Солнцами, что каждое из них — центр некой системы планет, что на каждой планете живут миллионы существ, которые ведут нескончаемые дискуссии, стремясь узнать, не образованы ли они сами из атомов.

Так вот, в таком же положении находимся и мы. Мы только что узрели атомы, и сразу же для этих атомов возникает такая же проблема, как и для тел больших размеров, которую поставил перед нами наш разум: не представляет ли собой каждый из атомов некий мир и из каких элементов построен каждый из этих миров? К счастью, мы все-таки опередили в развитии нашего гиганта, ибо мы уже распознаем сложное устройство каждого атома, мы начинаем видеть его внутренние детали, и все ученые ответят удивленным пожиманием плеч на попытки убеждать их в том, что атомы химиков, именно те, которые мы только что подсчитывали, представляют собой математические точки, неделимые сущности, как это представляет себе древний грек.

И прежде всего мы буквально видим, как наши прежние атомы распадаются на части на наших глазах. Радиоактивные вещества, именно вследствие их активности, все время претерпевают превращения. Если мы возьмем уран, то увидим, что он постоянно испускает гелий, и именно эта непрерывная эмиссия обусловливает его излучающие свойства; он превращается в радий, и этот последний в свою очередь испускает гелий и после нескольких этапов переходит в полоний. Несомненно, что цепочка распада не кончается на этом, ибо конец наступит только при переходе к некоему обычному веществу, не обладающему радиоактивностью. Но здесь мы все еще имеем дело с обычным распадом химических элементов, отличающихся от привычных медленных превращений только чрезвычайно большой выделяемой теплотой и сопутствующими загадочными явлениями. И этот процесс может быть описан, как и все химические реакции, неким уравнением, поскольку продуктами распада являются вполне осязаемые тела, уже известные науке и записанные в каталоги. Здесь все дело в том, что некоторые тела, которые считались простыми, оказались составными — вот и все. Старая же атомная доктрина осталась незыблемой.

Но если мы посмотрим глубже, то увидим, что атом распадается на гораздо более мелкие части, которые называют электронами. Вы все знаете трубки, используемые физиками и медиками для получения X-лучей и для целей радиографии. Это большие стеклянные ампулы, внутри которых создан вакуум и в которые вставлены электроды, присоединенные к источнику электричества. При прохождении тока внутри трубки ее стеклянные стенки светятся сильным зеленоватым светом. С отрицательного электрода — катода — испускается специфическое излучение, называемое катодными лучами, и именно эти лучи при столкновении со стенками стеклянной трубки вызывают ее свечение и именно они при столкновении с антикатодом, т. е. электродом, противоположно размещенным по отношению к катоду, образуют X-лучи, о которых я не буду сейчас более распространяться. Что же такое катодные лучи? Это пучок направленно движущихся отрицательно заряженных частиц, заряд которых может быть измерен,— эти частицы называют электронами. Исследуя действие магнитных и электрических сил на поведение катодных лучей, можно измерить скорость этих частиц, которая чрезвычайно велика, а также отношение их заряда к их массе. Имеются основания полагать, что этот заряд такой же, как и переносимый атомом в процессе диссоциации соляных растворов при пропускании через них электрического тока. В результате установили, что масса электрона в тысячи раз меньше массы атома водорода. Это приводит к представлению, что атом в некотором смысле подобен Солнечной системе, в центре которой находится относительно массивное тело с положительным зарядом, и вокруг него, как вокруг небесного светила, вращаются некие подобия планет, значительно меньшие и заряженные отрицательно,— они и являются электронами. Центральное Солнце притягивает эти планеты потому, что оно заряжено положительно, и потому, что положительные и отрицательные заряды взаимно притягиваются,— перед нами аналог ньютоновской гравитации, которая управляет нашей Солнечной системой. И кроме того, для нас, наблюдающих атом извне, он не представляется заряженным, потому что он несет равные количества положительного электричества на центральном теле и отрицательного — на подобиях планет.

Этот новый шаг вперед явился еще одной победой атомизма. Теперь уже не только вещество, но и электричество перестало быть делимым до бесконечности и предстало в виде неких недробимых элементов, ибо мы не располагаем каким-либо средством разрезать электрон на две половины, отнять у него и перенести половину его заряда. Электрон — это истинный атом электричества.

И тем не менее мы не можем остановиться на достигнутом этапе, на котором первоэлементы представляются маленькими частицами с малой массой и неизменным электрическим зарядом. Некоторых ученых уже привлекал вопрос о происхождении массы этих частиц, и они пришли к выводу, что существует лишь видимость массы, что масса обусловлена исключительно электромагнитными эффектами, вызванными изменениями в окружающем эфире вследствие смещения электрического заряда. К сожалению, я не имею возможности дать вам представление об их доводах и потому изложил только их результат. Если и имеется некий атрибут, который органически должен быть присущ материи, то это, конечно, масса. Эта связь настолько существенна, что сами слова «масса» и «материя» воспринимаются почти как синонимы — с весами в руках Лавуазье, показав неизменность массы, продемонстрировал неуничтожимость материи.

Но вот мы пришли к тому, что масса — всего лишь только видимость и что многие факторы, и в первую очередь скорость, могут изменять ее. Одним ударом у материи была отобрана ее активная роль и перенесена на эфир — этот истинный кладезь явлений, ранее относимых на счет массы. Теперь уже нет более прежней материи, а есть только дырки в эфире. А поскольку эти дыры не могут перемещаться без возмущения окружающего их эфира, то требуется приложить усилие для их перемещения. Следовательно, хотя они и кажутся обладающими инерцией, в действительности эта инерция принадлежит эфиру.

Все это напоминает нам о ранее забытом нами эфире. Итак, эфир представляется нам в виде непрерывной среды, и возможно, что он состоит из атомов. Но это всего лишь зыбкая гипотеза, ибо мы не видим атомы эфира, как мы видим теперь те атомы, с которыми имеет дело химия,— в действительности же мы можем их только воображать себе. На этом уровне мы будем считать, по крайней мере временно, что в эфирной среде, в этой единственной по-настоящему активной среде, восстановлена непрерывность.

И заканчивая, я должен сказать несколько слов о последней перипетии борьбы между атомистами и поборниками непрерывности, представляющей совершенно неожиданный и самый изумительный эпизод во всей этой истории. Планк считает, что имеются достаточные основания для вывода, что обмен теплом между соседними телами, совершаемый посредством излучения, может происходить только скачками — прерывистыми порциями. Именно это он называет теорией квантов. Мне трудно судить, насколько вы отдаете себе отчет в странности этой гипотезы и, пытаясь сделать ее как можно более понятной для вас, я воспользуюсь ее крайними следствиями, к которым, как мне представляется, она должна нас неизбежно привести. Итак, мир более не изменяется непрерывным образом, бесконечно малыми неощутимыми порциями — он изменяется скачками. Эти скачки очень малы для регистрации их глазами таких близоруких существ, как человек, и именно их малость создавала нам иллюзию непрерывности — известно, что близорукие, глядя на страницу печатного текста, с некоторого расстояния не различают черных букв и остального белого поля листа, а видят одну однородную серую поверхность. Теперь уже нельзя говорить, что «природа не делает скачков» (Natura non facit saltus),— на самом деле она поступает именно наоборот. И не только материя, возможно, сводится к атомам, а даже и мировая история и, я скажу, даже само время, поскольку два мгновения, заключенные в интервале между двумя скачками, не могут быть различимы, ибо они принадлежат одному и тому же состоянию мира.

Однако не следует слишком спешить, ибо сейчас очевидно лишь то, что мы весьма далеки от завершения борьбы между двумя стилями мышления — одного, характерного для атомистов, верящих в существование простейших первоэлементов, очень большого, но конечного числа комбинаций которых достаточно для объяснения всего разнообразия аспектов Вселенной, и другого, присущего приверженцам идей непрерывности и бесконечности. Эта борьба будет длиться все время, пока люди будут заниматься наукой, пока мыслит человечество. Она обусловлена противоборством двух непримиримых потребностей человеческого разума, от которых он не может избавиться, не перестав быть таковым, — потребности понимать, — а мы можем понять только конечное, и потребность видеть, — а мы можем видеть только протяженное, которое есть бесконечное.

Если эта борьба и не должна привести к окончательной победе одной из борющихся сторон, то это вовсе не означает, что она бесплодна, ибо при каждом новом сражении перемещается само поле сражения и в результате каждый раз совершается шаг вперед — завоевание, достающееся не одному из противников, а всему человечеству.

Глава VIII

НОВАЯ МЕХАНИКА

Я должен извиниться за то, что вынужден сегодня говорить по-французски. Хотя на предыдущих моих лекциях я объяснялся по-немецки, но объяснялся слишком плохо: говорить на чужом языке так же трудно, как хромому ходить; нужны костыли. До сих пор моими костылями были математические формулы, и вы не можете себе представить, какая это поддержка для оратора, который встречает затруднения в выражении своих мыслей. Сегодня я не хочу пользоваться формулами, я остаюсь без костылей и поэтому должен говорить по-французски.

Всем известно, что в этом мире нет ничего окончательно установленного, неизменного. Самые великие, самые могущественные государства не вечны; это — излюбленная тема пророков. Научные теории, так же как и государства, не могут быть уверены в завтрашнем дне. Вряд ли вы найдете другую теорию, которая казалась бы менее подверженной разрушительной силе времени, чем механика Ньютона; она представлялась неколебимым монументом. И вот в настоящее время, если нельзя еще сказать, что монумент повержен на землю — это было бы преждевременно,— то во всяком случае он сильно пострадал под ударами великих разрушителей. Один из них, Макс Абрагам, находится среди вас, другой — голландский физик Лоренц. Я хотел бы сказать вам несколько слов о развалинах старого здания и о новой постройке, которую хотят воздвигнуть на его месте.

Прежде всего можно задать вопрос: что характеризует старую механику? Старую механику характеризует следующий простой факт: я беру тело, находящееся в покое, и сообщаю ему импульс, другими словами, прилагаю к нему в течение определенного промежутка времени определенную силу. Тело приходит в движение и приобретает некоторую скорость; когда эта скорость достигнута, прилагаем снова ту же силу в течение такого же времени — скорость удвоится; если мы будем повторять это, то скорость утроится после того, как мы сообщим телу такой же импульс в третий раз. Если мы будем производить подобное действие достаточно большое число раз, то тело в конце концов приобретет весьма большую скорость, которая может превзойти всякий предел, тело может получить бесконечную скорость.

В новой механике, наоборот, предполагают, что телу, выведенному из равновесия, невозможно сообщить скорость, превосходящую скорость света. Что же при этом происходит? Я буду рассматривать то же самое тело, находящееся в покое, и сообщу ему первый импульс той же величины, что и в предыдущем случае; тело получит ту же скорость. Сообщим второй раз ему тот же импульс, скорость еще увеличится, но не удвоится; третий импульс произведет подобное же действие; скорость будет увеличиваться, но все менее и менее, тело оказывает все большее и большее сопротивление. Это сопротивление изменению движения, или инерцию, обычно называют массой тела. Таким образом, в новой механике все происходит так, как будто масса тела не остается постоянной, а возрастает вместе со скоростью.

Мы можем представить графически описанные явления: в старой механике тело получает после первого импульса скорость, изображенную отрезком Ov_1; после второго импульса скорость Ov_1 увеличивается на отрезок, который равен первому отрезку, и при каждом последующем импульсе скорость возрастает в одинаковой степени, и отрезок, представляющий ее увеличение, имеет постоянную длину. В новой механике первый отрезок, изображающий скорость, увеличивается на отрезки v'_1v_2, $v'_2v'_3$, которые становятся все меньше и меньше, но таким образом, что сумма не может превзойти некоторой предельной скорости, а именно, скорости света.

Как же пришли к подобным заключениям? Делались ли прямые опыты? Разногласие между обеими теориями может обнаружиться лишь при наблюдении тел, движущихся с весьма большой скоростью; только в этом случае указанные выше различия могут быть заметными. Но что нужно считать большой скоростью? Можно ли считать, что большой скоростью обладает автомобиль, делающий 100 километров в час? Если автомобиль мчится с такой скоростью по улице, этим можно восхищаться, но с нашей точки зрения эта скорость все же мала, это скорость улитки. Значительно бóльшие скорости мы найдем в астрономии: Меркурий, самая быстрая из планет, пробегает по орбите около 100 километров, но не в час, а в секунду. Тем не менее и эта скорость недостаточно велика, чтобы обнаружить те различия, которые мы хотим наблюдать. Я уж не говорю о пушечных снарядах — они летят быстрее автомобиля, но гораздо медленнее Меркурия. Однако вы знаете, что недавно был обнаружен род артиллерии, ядра которой имеют скорость, значительно бóльшую, чем указанные выше скорости. Я имею в виду радий, который посылает во все стороны энергию, посылает снаряды. Быстрота полета этих снарядов несравненно бóльшая, начальная скорость их около 100 000 километров в секунду, т. е. она равна трети скорости света. Правда, калибр этих снарядов и их вес весьма незначительны, и мы не можем рассчитывать на эту артиллерию, если желаем увеличить боевую мощь наших армий.

Возникает вопрос: можно ли экспериментировать с этими ядрами? Были сделаны попытки осуществить подобные опыты; под влиянием электрического поля и магнитного поля происходит отклонение вылетающей из радия частицы, и это отклонение позволяет установить существование инерции и измерить ее. Таким способом можно было обнаружить, что масса зависит от скорости, и установить указанный выше закон механики: инерция тела возрастает со скоростью его движения, которая остается всегда меньшей скорости света, равной 300 000 километров в секунду.

Теперь я перехожу ко второму принципу — принципу относительности. Предположим, что какой-нибудь наблюдатель перемещается с постоянной скоростью вправо; в его глазах все происходит так, как будто бы он остается в покое, а окружающие его предметы перемещаются влево. Нет никакой возможности узнать, перемещаются ли на самом деле предметы, а наблюдатель является неподвижным, или же движется сам наблюдатель. Об этом говорится во всех курсах механики; в них всегда приводится пример путешественника, находящегося на пароходе, движущемся прямолинейно и равномерно; ему кажется, что берега реки проносятся перед ним, а корабль его неподвижен.

При более глубоком исследовании этот простой факт приобретает огромное значение: нет никакого средства для решения вопроса об абсолютном движении, нет ни одного опыта, который мог бы опровергнуть принцип, утверждающий, что нет абсолютного пространства и что мы можем наблюдать только относительные перемещения. Эти соображения хорошо известны философам, я уже имел случай однажды их высказать и даже приобрел этим известность, от которой охотно отказался бы. Все реакционные французские газеты приписывали мне, будто я доказываю, что Солнце вращается вокруг Земли; в знаменитом процессе Галилея с инквизицией вся вина оказывалась, таким образом, на стороне Галилея.

Вернемся к старой механике; она допускает принцип относительности, ее законы, вместо того чтобы быть основанными на опытах, могли быть выведены непосредственно из этого основного принципа. Этих принципов было достаточно для объяснения чисто механических явлений, но в применении к некоторым важным разделам физики, например к оптике, они уже отказывались служить. Как абсолютную можно рассматривать в оптике скорость света относительно эфира. Эту скорость можно было измерить и, следовательно, теоретически существовала возможность сравнить движение всякого тела с абсолютным движением, т. е. существовала возможность установить, находится ли тело в абсолютном движении или нет.

Такие опыты с чрезвычайно точными приборами, которые я не стану описывать вам, были совершены с целью осуществить на практике подобное сравнение; результат был нуль. Принцип относительности в новой механике не допускает никаких ограничений;

он имеет, если можно так выразиться, абсолютное значение.

Чтобы понять роль, которую играет принцип относительности в новой механике, мы прежде всего должны сказать несколько слов о местном, относительном времени, весьма остроумно введенном физиком Лоренцем. Представим себе двух наблюдателей: один A находится в Париже, другой B — в Берлине. A и B имеют одинаковые хронометры и хотят их сравнить; но наши наблюдатели необычайно педантичны, они требуют чрезвычайной точности. Они хотят, например, чтобы показания их хронометров не могли отличаться более чем на одну миллиардную долю секунды. Как они могут это сделать? Наблюдатель A посылает из Парижа в Берлин сигнал, и, если хотите быть вполне современными, он посылает сигнал по беспроволочному телеграфу. Наблюдатель B отмечает момент получения сигнала, и этот момент будет для обоих хронометров началом времени. Но сигналу нужно некоторое время, чтобы дойти от Парижа до Берлина; он распространяется со скоростью света; часы B будут отставать, но B — достаточно образованный человек, чтобы не считаться с этим, и он тотчас исправляет эту неточность. Дело на первый взгляд весьма просто: достаточно, чтобы A в свою очередь получил сигнал от B; взяв среднее арифметическое из двух данных, оба наблюдателя установят вполне точное соответствие между своими часами. Но так ли это? Мы предполагаем, что от A к B сигнал идет столько же времени, сколько и обратно. А между тем Земля уносит обоих наблюдателей в своем движении по отношению к эфиру, по которому распространяются электрические волны. Послав свой сигнал, A несется за ним, а B от него удаляется; время, необходимое для передачи сигнала, в данном случае будет больше, чем если бы наблюдатели находились в покое. Наоборот, от B к A сигнал передается быстрее, так как A движется ему навстречу. Таким образом, нет никакой возможности установить, показывают ли оба хронометра одно и то же время или нет. Какой бы метод ни применяли, затруднения остаются теми же самыми; астрономические наблюдения, как и любой оптический метод, встречают те же трудности; наблюдатель может знать только кажущуюся разность своего времени и времени другого наблюдателя, так сказать, местное время. Принцип относительности остается в полной силе.

Однако в старой механике из этого принципа выводили все новые законы. Можно ли в настоящее время воспроизвести классические доказательства и рассуждать следующим образом? Положим, что перед нами два наблюдателя, которым мы по-прежнему, согласно принятому в математике обыкновению, дадим имена A и B; допустим, что они движутся, удаляясь друг от друга; ни один из них не может обладать скоростью, большей скорости света; пусть A имеет скорость 200 000 километров в секунду, направленную вправо, а B — столько же влево. A может считать себя находящимся в покое, но тогда он должен приписать B скорость 400 000 километров в секунду. Если A знает новую механику, он скажет себе: B имеет по отношению ко мне скорость, которой он на самом деле не может достигнуть, следовательно, не только B движется, но и я нахожусь в движении. Может показаться, что у A есть данные для выяснения своего абсолютного движения. Но для этого ему необходимо наблюдать движение B.

Чтобы сделать это наблюдение, A и B прежде всего устанавливают свои хронометры, затем B посылает A телеграммы, чтобы сообщить ему о своих последовательных местонахождениях. Сопоставляя их, A может получить представление о движении B и может начертить кривую его движения. Но сигналы передаются со скоростью света; часы, которые показывают кажущееся время, постоянно изменяют свой ход, и все происходит так, как если бы часы B шли медленнее. B будет казаться, что он движется гораздо медленнее, и кажущаяся скорость, которую он будет иметь по отношению к A, не превзойдет предела, которого не может достичь скорость движения тела. Ничто не может открыть наблюдателю, находится ли он в движении или в абсолютном покое.

Необходимо далее сделать третью гипотезу, еще более поразительную и трудно допустимую, так как она плохо увязывается с нашими обычными представлениями. Все тела во время движения изменяют свою форму, сжимаясь в направлении движения; шар, например, превращается в тело, похожее на приплюснутый эллипсоид, малая ось которого параллельна движению. Мы не замечаем этих превращений на каждом шагу вследствие их малости. Земля в своем движении по орбите деформируется приблизительно на величину 1/200 000 000 своего радиуса. Чтобы наблюдать подобное явление, следовало бы иметь измерительные приборы чрезвычайной точности, но в нашем случае, если бы даже наблюдатель имел приборы бесконечной точности, он не получил бы существенных результатов, так как вследствие того же движения они испытывали бы то же самое изменение. Ничего нельзя было бы заметить; метр, который был бы использован для измерения, сделался бы более коротким в том же отношении, что и измеряемая длина. Можно узнать что-либо определенное об изменении формы тел, лишь сравнивая длину этих тел со скоростью света. В этом и состоят тонкие опыты, осуществленные Майкельсоном, на подробном описании которых я не буду останавливаться. Они привели к высшей степени замечательным результатам; как бы это ни казалось нам странным, но следует согласиться, что третья гипотеза вполне подтвердилась.

Таковы основы новой механики. Мы видим, что при допущении вышеприведенных гипотез она находится в полном согласии с принципом относительности. Но ее нужно еще связать с новейшими воззрениями на вещество.

Для современного физика атом уже не представляется простым элементом; он стал настоящим мирком, в котором ряд планет вращается вокруг мельчайшего центрального светила. Солнце и планеты здесь представляют собой положительно и отрицательно заряженные частицы. Физик называет их электронами и строит из них весь мир. Некоторые представляют себе нейтральный атом как центральную положительную массу, вокруг которой вращается большое число отрицательно заряженных электронов, общий электрический заряд которых равен по величине заряду центрального ядра. Это представление о материи позволяет легко объяснить увеличение массы тела со скоростью, которое мы отметили как одно из основных положений новой механики.

Так как любое тело представляет собой совокупность электронов, нам достаточно доказать изменение массы только для этих последних. Известно, что движение отдельного электрона в эфире создает электрический ток, т. е. электромагнитное поле. Этому полю соответствует некоторое количество энергии, находящееся не в электроне, а в эфире. Изменение величины или направления скорости электрона сопровождается изменением электромагнитной энергии эфира. В то время как в ньютоновской механике количество энергии движущегося тела зависит от инерции тела, находящегося в движении, здесь энергия зависит от того, что называют инерцией эфира по отношению к электромагнитным силам. Инерция эфира возрастает вместе со скоростью и становится бесконечно большой, когда скорость электрона приближается к скорости света. Таким образом, кажущаяся масса электрона возрастает вместе со скоростью; опыты Кауфмана показывают, что действительная масса электрона так ничтожна по сравнению с его кажущейся массой, что ее можно считать равной нулю.

При этом новом представлении постоянной массы материи не существует. Инерцией обладает не материя, а эфир; он один оказывает сопротивление движению, так что можно было бы сказать: нет материи, есть только дыры в эфире. Для стационарных и квазистационарных движений новая механика с той степенью точности, которую допускают наши измерения, не отличается от ньютоновской механики; различие только в том, что масса зависит от скорости и от угла между скоростью и направлением ускоряющей силы. Наоборот, значительные изменения скоростей, например, в случае быстрых колебаний вызывают возникновение волн Герца, которые поглощают часть энергии электрона, замедляя этим его движение. Таким образом, в беспроволочном телеграфе испускаемые волны обязаны своим происхождением колебаниям электронов при колебательном разряде.

Подобные же колебания имеют место в пламени, а также в раскаленном твердом теле. По теории Лоренца внутри раскаленного тела движется огромное число электронов, которые, не имея возможности выйти из него, летят во всех направлениях и отражаются от его поверхности. Их можно сравнить с множеством мошек, заключенных в сосуде, которые бьются крыльями о стенки своей тюрьмы. Чем выше температура, тем быстрее делается движение электронов и тем чаще их взаимные столкновения и отражения от поверхности. При каждом соударении и при каждом отражении испускается электромагнитная волна, и восприятие этих волн делает видимым для нас лучеиспускающее тело.

Движение электронов становится почти осязаемым в трубке Крукса; в ней происходит настоящая бомбардировка электронами, вылетающими из катода. Эти катодные лучи с большой силой ударяются об антикатод и, частично от него отражаясь, производят электромагнитное излучение, которое ряд физиков отождествляют с лучами Рентгена.

Нам остается еще рассмотреть отношение новой механики к астрономии. Если исчезает понятие о постоянной массе тела, то что же станет в этом случае с законом Ньютона? Этот закон останется в силе только для тел, находящихся в покое. Кроме того, придется считаться и с тем, что притяжение не распространяется мгновенно. Естественно задать себе вопрос: не усложнит ли новая механика астрономию, не дав в то же время большей точности, чем нам дает классическая небесная механика? Лоренц исследовал этот вопрос. Допуская правильность закона Ньютона для двух заряженных тел, находящихся в покое, он вычисляет электродинамическое действие токов, производимых этими телами при движении. Таким образом, он получает новый закон притяжения двух тел, зависящий от их скоростей. Прежде чем рассматривать, как этот закон прилагается к астрономическим явлениям, заметим еще, что ускорение небесных тел имеет следствием электромагнитное излучение, и благодаря проистекающей отсюда потере энергии должно происходить постепенное уменьшение их скоростей. В конце концов планеты упадут на Солнце, но эта мысль не должна нас пугать, так как катастрофа может произойти не раньше, чем через миллионы миллиардов веков. Возвращаясь снова к закону притяжения, мы ясно видим, что различие между обеими механиками будет тем больше, чем больше скорость планет. Наибольшая разница должна обнаружиться в теории движения Меркурия, самой быстрой из всех планет. Действительно, движение Меркурия представляет еще одну необъяснимую до сих пор аномалию: движение его перигелия более быстрое, чем вычисленное по классической теории. Разница составляет около 38″ в столетие. Леверье приписывал эту аномалию планете, которая еще не открыта, и один астроном-любитель утверждал, что наблюдал прохождение этой планеты по диску Солнца. С тех пор, однако, никто ее не видел, и, к сожалению, весьма вероятно, что эта замеченная планета была не что иное, как птица. Новая механика несколько исправляет ошибку в теории движения Меркурия, доведя ее до 32″, но не дает полного соответствия между наблюдением и вычислением. Если этот результат не является решающим в пользу новой механики, то он все же не является для нее неблагоприятным, так как поправка, вносимая в классическую теорию, по своему знаку правильна. Теория других планет не изменилась сколько-нибудь существенно в новой механике, и с той степенью точности, с какой производятся наблюдения, результаты ее совпадают с результатами классической механики.

Подводя итоги всему сказанному, нужно отметить, что, несмотря на большое значение аргументов и фактов, выдвинутых против классической механики, было бы преждевременно рассматривать ее как окончательно осужденную. Как бы то ни было, она во всяком случае останется механикой скоростей, очень малых по сравнению со скоростью света, остается, таким образом, механикой нашей практической жизни и нашей земной техники. Если тем не менее через несколько лет ее соперница — новая механика — восторжествует, я позволю себе отметить опасность, которая грозит преподаванию. Многие учителя, по крайней мере во Франции, излагая своим ученикам элементарную механику, поспешат им сообщить, что эта механика отжила свой век, что ее заменяет новая механика, где понятия массы и времени имеют совсем другой смысл; они будут относиться свысока к этой старой механике, преподавать которую их заставляют программы, и внушат ученикам презрение к ней, которое они сами к ней питают. Я думаю, однако, что эта презираемая классическая механика будет и в будущем так же необходима, как и теперь, и тот, кто не будет знать ее основательно, не будет в состоянии понять и новую механику.

Глава IX

МОРАЛЬ И НАУКА

В последнюю половину XIX века очень часто мечтали о создании научной морали. В то время не удовлетворялись восхвалениями воспитательной силы науки, преимущества, которое человеческая душа извлекает для своего совершенствования из непосредственных сношений с истиной. Считали, что наука неоспоримым образом выявит моральные истины, как это она сделала с теоремами математики и с законами, высказанными физиками.

Религии могут иметь большую власть над верующими душами, но не все верующие; вера имеет силу только над некоторыми, разум же — над всеми. Именно к разуму и необходимо обратиться, я не говорю к разуму метафизика, построения которого блестящи, но эфемерны, как мыльные пузыри, которыми один миг забавляются и которые лопаются. Одна наука строит прочно; она построила астрономию и физику, она сейчас строит биологию, тем же способом завтра она построит мораль. Ее предписания будут царить безраздельно, никто не посмеет ворчать против них, и больше не будут ни у кого мысли восставать против нравственного закона, как сейчас никто не помышляет выступать против теоремы трех перпендикуляров или закона тяготения.

С другой же стороны, были люди, видевшие в науке всевозможное воплощение зла, которые считали ее школой безнравственности. Не только потому, что она отводит слишком много места материи, что она лишает нас чувства почтения, так как почитают только то, на что не решаются смотреть. Но разве ее заключения не являются отрицанием морали? Она, как сказал не помню какой знаменитый автор, погасит небесные светила или по меньшей мере лишит их того, что они имеют таинственного, чтобы свести их к вульгарным газовым горелкам. Она выяснит нам фокусы создателя, который тем самым потеряет часть своего престижа; нехорошо позволять детям заглядывать за кулисы, это может вселить в них сомнение в существовании буки. Если разрешить действовать ученым, то скоро не будет морали.

Что должны мы думать о надеждах одних и опасениях других? Я не колеблюсь ответить: они напрасны, как одни, так и другие. Не может быть научной морали и тем более не может быть безнравственной науки. И причина этого очень проста; эта причина, как бы сказать, чисто грамматическая.

Если посылки силлогизма обе в изъявительном наклонении, то заключение будет равным образом в изъявительном наклонении. Чтобы заключение могло быть поставлено в повелительном наклонении, необходимо, чтобы по крайней мере одна из посылок была в повелительном наклонении. Принципы же науки, постулаты геометрии высказаны только в изъявительном наклонении, в этом же наклонении выражаются и экспериментальные истины, и в основе наук нет и быть не может ничего другого. Затем, наиболее острый диалектик может сколько угодно жонглировать с этими принципами, соединять их, нагромождать их друг на друга; все, что он из них получит, будет в изъявительном наклонении. Он никогда не получит предложения, которое говорило бы: делай это или не делай того, т. е. предложения, которое бы соответствовало или противоречило морали.

В этом-то и заключается трудность, с которой издавна сталкивались моралисты. Они стараются доказать нравственный закон; нужно им это простить, так как в этом состоит их ремесло; они хотят основать мораль на чем-либо, как будто она может опираться на что-либо иное, чем на саму себя. Наука показывает, что человек, живя, может только так или иначе разрушаться; а если я мало печалюсь своим разрушением, если я назову прогрессом то, что вы называете разрушением? Метафизика предлагает нам согласоваться с общим законом существа, на открытие которого она претендует. Можно будет ей ответить, что я предпочитаю подчиняться моему особому закону. Я не знаю, что она ответит, но могу вас уверить, что ее слово не будет последним.

Счастливее ли религиозная мораль, чем наука или метафизика? Подчиняйтесь, потому что так повелевает бог и потому что он хозяин, который может сломить любое сопротивление. Убедительно ли это и нельзя ли поддержать мысль, что это прекрасно — выступить против всемогущества и что в дуэли между Юпитером и Прометеем победителем явился израненный Прометей? И потом, это не столько послушание, сколько подчинение силе; повиновение сердца не может быть принудительным.

Также не можем мы основывать мораль на интересах общества, на понятии родины, на альтруизме, потому что остается недоказанной необходимость в случае нужды посвятить себя обществу, которому принадлежишь, или даже благу другого; и этого доказательства никакая логика, никакая наука не смогут нам дать. Больше того, мораль вполне понятной выгоды, мораль эгоизма была бы бессильной, так как в конце концов не известно точно, что удобнее быть эгоистом и что есть люди, которые таковыми вовсе не являются.

Всякая догматическая мораль, всякая мораль с доказательствами заранее обречена на верную неудачу; она, как машина, где есть только передача движения и нет движущей энергии. Моральным двигателем, таким, который мог бы привести в движение весь аппарат со всеми рычагами и зубчатками, может быть только чувство. Нельзя доказать нам, что мы должны иметь сострадание к несчастным, но стоит показать нам незаслуженную нищету, зрелище, которое — увы! — слишком часто, и мы почувствуем подымающееся в нас чувство возмущения. Я не знаю, какая энергия подымается в нас, она не будет слушать никаких рассуждений и будет влечь нас непреодолимо и как бы помимо нас.

Нельзя доказать, что нужно подчиняться богу, хотя бы нас убедили в том, что он всемогущ и что он может нас раздавить; хотя бы нас убедили в том, что он благ и что мы обязаны быть ему признательными; есть люди, которые считают, что право неблагодарности — самая ценная из наших свобод. Но если мы любим этого бога, то все доказательства будут излишними, и покорность ему покажется нам вполне естественной. Поэтому-то религии имеют власть, тогда как метафизические учения ее не имеют.

Если бы нас попросили оправдать рассуждением нашу любовь к родине, то мы могли бы оказаться в большом затруднении; но стоит нам мысленно представить себе наши армии разбитыми и Францию полоненной, как все наше сердце сожмется, на глазах покажутся слезы, и мы не станем уже ничего слушать. И если некоторые люди сейчас столь полны софизмами, то это, конечно, потому, что они не имеют достаточного воображения и не могут представить себе всех бедствий, и если несчастье или какое-нибудь небесное наказание пожелало бы, чтобы они его увидели своими глазами, то их души так же восстанут, как и наши

Итак, одна наука не может создать морали; тем более она не может сама и непосредственно пошатнуть или разрушить традиционную мораль. Но не может ли она оказать косвенного влияния? То, что я сказал, указывает, каким путем она может влиять. Она может породить новые чувства не потому, что чувства могут быть объектом доказательства, а потому, что всякая форма человеческой деятельности влияет на самого человека и создает ему новую душу. Существует профессиональная психология для всякого ремесла; чувства рабочего не являются чувствами финансиста, ученый, конечно, также имеет свою особую психологию, и он кое-что из нее рассеивает на тех, которые касаются науки лишь случайно.

С другой стороны, наука может пустить в дело чувства, которые существуют, очевидно, у всякого человека. Чтобы вернуться к нашему сравнению, построим сложную сеть рычагов и рукояток; машина не пойдет, пока не будет пара в котлах, но если пар в них есть, то работа, которую он произведет, не всегда будет одна и та же; она будет зависеть от механизма, к которому ее приложат. Точно так же можно сказать, что чувство дает только главную движущую силу нашему действию; оно дает главную посылку нашего силлогизма, которая, как это и должно быть, будет в повелительном наклонении. Наука, со своей стороны, дает малую посылку, которая будет в изъявительном наклонении, и выведет из них заключение, которое может быть в повелительном. Мы последовательно рассмотрим обе точки зрения, Сперва зададим вопрос: может ли наука явиться создательницей или вдохновительницей чувства, а то, что не может сделать наука, не может ли сделать любовь к науке?

Наука ставит нас в постоянное соприкосновение с чем-либо, что превышает нас; она постоянно дает нам зрелище, обновляемое и всегда более глубокое; позади того великого, что она нам показывает, она заставляет предполагать нечто еще более великое: это зрелище приводит нас в восторг, тот восторг, который заставляет нас забывать даже самих себя, и этим-то он высоко морален.

Тот, кто его вкусил, кто увидел хотя бы издали роскошную гармонию законов природы, будет более расположен пренебрегать своими маленькими эгоистическими интересами, чем любой другой. Он получит идеал, который будет любить больше самого себя, и это единственная почва, на которой можно строить мораль. Ради этого идеала он станет работать, не торгуя своим трудом и не ожидая никаких из тех грубых вознаграждений, которые являются всем для некоторых людей. И когда бескорыстие станет его привычкой, эта привычка будет следовать за ним всюду; вся жизнь его станет красочной. Тем более, что страсть, вдохновляющая его, есть любовь к истине, а такая любовь не является ли самой моралью? Есть ли что-либо более важное, чем борьба с ложью, с этим одним из наиболее распространенных пороков у примитивного человека и одним из самых позорных? Теперь же, когда мы приобретем привычку к научным методам с их скрупулезной точностью, опасением всякого случайного результата, могущего произойти при опыте, когда мы привыкаем бояться как верха бесчестья всякого упрека хотя бы в неумышленном искажении наших результатов, когда это станет нашей неизгладимой профессиональной чертой, второй природой, разве после этого мы не перенесем во все наши действия этого искания абсолютной искренности в столь сильной степени, что перестанем понимать причины, заставляющие других людей лгать, и разве это не лучший способ достигнуть наиболее редкого и наименее достижимого из всех видов искренности, того, который заключается в том, чтобы не обманывать самого себя?

В нашим слабостях величие нашего идеала нас поддержит; можно предпочесть ему другой, но в конце концов, не является ли бог ученого особенно великим потому, что он все более и более от нас удаляется? Правда, он неумолим, и многие души от него отрекутся, но по крайней мере он не разделяет нашей мелочности и нашей мизерной злопамятности, как это слишком часто делает бог теологов. Эта идея правила, более сильного, чем мы, от которого нельзя отрешиться и с которым необходимо во что бы то ни стало примириться, также может оказывать благотворное влияние; его можно по крайней мере выдерживать. Разве не было бы лучше, если бы наши крестьяне верили, что закон не может никогда измениться, вместо того чтобы думать, что власть изменит его в их пользу, стоит только им найти заступничество достаточно влиятельного депутата?

Наука, как сказал Аристотель, имеет предметом общее; во всяком частном случае она будет искать общий закон и требовать все более и более широкого обобщения. На первый взгляд кажется, что это только интеллектуальная привычка, но и интеллектуальные привычки имеют свой моральный отголосок. Если вы привыкнете мало обращать внимание на частность, на случайность, потому что ваш ум перестал ими интересоваться, то вы, естественно, придете к тому, что станете их мало ценить, не будете видеть в них желанную цель и будете без труда пренебрегать ими. Чем больше смотришь в даль, тем, так сказать, сильнее становишься дальнозорким, перестаешь видеть малое и, не видя его больше, теряешь желание сделать его целью жизни. Так естественно склоняются к подчинению частных интересов интересам общим, и в этом снова есть мораль.

Далее, наука служит нам и другую службу: она является коллективным творчеством и не может быть ничем иным; она как монументальное сооружение, строить которое нужно века и где каждый должен принести камень, а этот камень часто стоит ему целой жизни. Следовательно, она дает нам чувство необходимой кооперации, солидарности наших трудов с трудами наших современников, наших предшественников и наших последователей. Понимают, что человек есть только солдат, только маленькая частица всего.

Это то же чувство дисциплины, которое формирует военное сознание и которое так изменяет простую душу крестьянина или бессовестную душу авантюриста, что делает их способными на любой героизм и любое самопожертвование. В чрезвычайно различных условиях оно может равным образом оказать благодетельное действие. Мы чувствуем, что работаем для человечества, и человечество от этого становится нам более дорогим.

Вот за, а вот и против. Если вам наука уже не представляется бессильной над сердцами, индифферентной в морали, то не может ли она столь же хорошо, как полезное, оказывать и вредное действие? Прежде всего, всякая страсть исключительна, не заставит ли она нас потерять из виду все, что к ней не относится? Любовь к истине, — без сомнения, великое дело, но будет ли хорошо, если мы для того, чтобы ее добиться, пренебрежем гораздо бо́льшими драгоценностями, как то: доброта, сострадание, любовь к ближнему? При какой-нибудь новой катастрофе, землетрясении мы забудем стоны раненых, чтобы думать только о направлении и амплитуде толчков; мы, пожалуй, увидим даже счастье в этой катастрофе, если она выяснит некоторые неизвестные законы сейсмологии.

Вот напрашивающийся пример: физиологи без малого угрызения совести производят вивисекцию[1]), и с точки зрения большой части старых дам это преступление, которое не могут оправдать никакие прошлые или будущие благодеяния науки. Из этого заключают, что биологи, столь неумолимые в отношении животных, должны стать жестокими и в отношении людей. Но они без всякого сомнения ошибаются, я знал среди них очень мягкосердечных.

Вопрос вивисекции заслуживает того, чтобы на нем немного остановиться, хотя он меня и увлечет несколько в сторону от темы. Здесь выявляется один из тех конфликтов долга, которые практика жизни показывает нам на каждом шагу. Человек не может отказаться от знания, не опускаясь; поэтому-то интересы науки священны. Они таковы еще и потому, что они

[1]) Вивисекция (живосечение) — хирургическая операция на живом животном с целью изучения функций отдельных частей организма. — *Примеч. ред.*

могут излечивать или предотвращать болезни, количество которых неисчислимо. А с другой стороны, причинение страданий грешно (я не говорю смерти, я говорю страданий). Хотя низшие животные, конечно, менее чувствительны, чем человек, они все же заслуживают сострадания. Но из этого затруднения можно выйти только ценой компромиссов: биолог не должен предпринимать ничего in anima vili [1]) кроме действительно полезных опытов. Очень часто существуют способы свести страдания к минимуму, ими также следует пользоваться. Но в этом отношении нужно обращаться к своей совести, всякие законные вмешательства были бы несвоевременны и немного смешны. Парламент все может, говорят в Англии, кроме превращения мужчины в женщину; он все может, скажу я, кроме вынесения компетентного приговора в области науки. Нет такого авторитета, которые мог бы издать правила, определяющие полезность эксперимента.

Но я возвращаюсь к предмету. Есть люди, которые говорят, что наука сушит сердца, что она привязывает нас к материи, что она убивает поэзию — единственный источник всех общих чувств. Душа, которую она затронула, вянет и становится неспособной к высоким порывам, умилению, энтузиазму. Я этого не думаю и только что говорил противоположное; но это очень распространенное мнение, и оно должно иметь под собой некоторую почву. Оно доказывает, что одна и та же пища не всем подходит.

Что же мы должны заключить? Наука, широко понимаемая, преподаваемая учителями, которые ее понимают и любят, может играть очень полезную и важную роль в моральном воспитании. Но было бы ошибкой наделять ее исключительной ролью. Она может пробудить добродетельные чувства, которые могут служить моральным двигателем, но то же могут сделать и другие дисциплины; было бы глупостью отказываться от всякой помощи, нам не хватает и всех их совместных усилий. Существуют люди, не осведомленные в научных вещах; простое наблюдение показывает, что во всех классах есть ученики, которые «сильны» в литературе, но «слабы» в науке. Было бы странно

---

[1]) На живом организме (*лат.*). — *Примеч. ред.*

думать, что наука, ничего не говорящая их уму, могла бы что-либо говорить их сердцу!

Я перехожу к следующему пункту. Наука, как и всякий род деятельности, может не только вызывать новые чувства, но, кроме того, она может на старых чувствах, которые произвольно возникают в сердце человека, создавать новые построения. Нельзя себе представить силлогизма, в котором обе посылки были бы в изъявительном наклонении, а вывод — в повелительном, но можно представить себе такие, которые образованы по следующему типу: делай так или, если этого не делают, то, так как нельзя сделать того, делай это. И подобные заключения не лежат вне науки.

Чувства, на которые может опереться мораль, очень различны по природе, они не встречаются все в одинаковой мере в различных душах. У одних доминируют одни, и есть души, у которых другие струны всегда готовы звучать. Одни будут, прежде всего, сострадательны, их будет трогать страдание ближнего. Другие все подчиняют социальной гармонии, всеобщему благополучию, или даже они станут желать величия своей стране. Еще другие будут иметь идеалом красоту, и они будут считать, что нашей первой обязанностью является самим совершенствоваться, стараться сделаться сильнее, достигать совершенства в вещах, которые не безразличны для счастья, не унижаться в своих собственных глазах.

Все эти стремления похвальны, но они различны; может быть, из этого различия произойдет конфликт. Если наука показывает нам, что это разногласие не опасно, если она доказывает, что нельзя достичь одной из этих целей, не стремясь к другой (а это в ее компетенции), то она сослужит полезную службу, окажет моралистам большую помощь. Те отряды, которые до сих пор боролись неорганизованно и в которых каждый солдат стремился к своей особой цели, тогда сомкнут ряды, потому что им докажут, что победа каждого является общей победой. Их усилия станут направленными, и неорганизованная толпа станет дисциплинированной армией.

Не в этом ли направлении стремится наука? Можно надеяться, что это так. Она все более и более стремится показать нам солидарность различных частей Вселенной и выяснить ее гармонию, Является ли эта гармония действительной или же она есть потребность нашего ума и, следовательно, постулат науки? Это вопрос, который я не возьмусь разрешить. Всегда наука стремится к единству и заставляет нас стремиться к этому. Подобно тому, как собирает она частные законы и сводит их к общему закону, не соединит ли она воедино и интимные переживания наших сердец, внешне столь различные, столь капризные, столь чуждые друг другу?

Но если она потерпит крушение в этом стремлении, какой ужас, какое разочарование! Не может ли тогда она причинить столько зла, сколько могла бы сделать добра? Эти ощущения, эти чувства, столь хрупкие, столь нежные, вынесут ли они анализ? Малейший свет не выяснит ли нам их тщетность и не придем ли мы к вечному вопросу: для чего? Для чего сострадание, ведь чем больше его проявляешь к людям, тем требовательней они становятся, тем они, в свою очередь, становятся несчастнее; ведь сострадание может порождать не только неблагодарных, это не столь уж важно, но оно ожесточает души? Для чего любовь к родине, ведь ее величие — чаще всего позолоченная нищета? Зачем стремиться к самосовершенствованию, ведь живем-то мы всего один день? Если бы, к несчастью, наука предоставила свое авторитетное мнение в пользу этих софистов!

И далее, наши души — сложная ткань, где нити, образованные сочетаниями наших мыслей, перекрещиваются и путаются во всех направлениях. Разрезать одну из этих нитей — значит сделать в ней огромную прореху, которую никто не может предвидеть. Эту ткань делали не мы, она досталась нам из прошлого; часто наши наиболее благородные стремления незаметно для нас оказываются так сильно связанными с самыми старыми и самыми смешными предрассудками. Наука разрушит эти предрассудки, это ее естественная задача, это ее долг. Не пострадают ли от этого благородные стремления, которые связывались старыми привычками? Без сомнения, нет — у сильных духом. Но дух силен только у светлых умов, а есть ведь и простые души, которые рискуют не выдержать испытания.

Утверждают, что наука явится разрушительницей; пугаются тех развалин, которые она нагромоздит, и опасаются, что там, где она пройдет, не сможет жить общество. Нет ли в этих опасениях некоторого внутреннего противоречия? Если научно докажут, что тот или иной обычай, который считали необходимым для самого существования человеческих обществ, не имел в сущности того значения, которое ему приписывали и который представлялся нам таким только благодаря своей уважаемой древности, если докажут это, предполагая такое доказательство возможным, то не будет ли поколеблена моральная жизнь человечества? Одно из двух: или обычай полезен, и тогда никакие научные рассуждения не смогут доказать, что он не является таковым, или же он бесполезен, и тогда о нем нечего жалеть.

Как только мы положим в основу наших силлогизмов одно из великих чувств, приводящих к нравственности, то его же, а следовательно, и мораль должны мы будем найти в конце всей цепи наших рассуждений, если только они велись согласно правилам логики; погибнуть рискует только несущественное, только то, что было в нашей моральной жизни случайным; только важное может оказаться в заключениях, так как оно было в предпосылках.

Следует бояться только неполной науки, той, которая ошибается, той, которая нас приманивает пустыми видимостями и заставляет нас, таким образом, разрушить то, что мы затем пожелали бы восстановить, когда мы будем лучше осведомлены и когда будет слишком поздно. Есть люди, которые заражаются идеей не потому, что она правильна, но потому, что она нова, что она модна. Это ужасные разрушители, но они не... Я хотел сказать, что это не ученые, но я замечаю, что многие из них сослужили большую службу науке; следовательно, они ученые, только не по этой причине, а вопреки ей.

Истинная наука избегает скороспелых обобщений и теоретических выводов, если уж физик их остерегается, хотя он имеет дело с людьми сильными и стойкими. Но что же делать моралисту, социологу, когда так называемые теории, которые он имеет, в сущности сводятся к грубым сравнениям, подобным сравнению общества с организмом. Наука, напротив, является и может быть только экспериментальной, а экспериментом социологии является история прошлого, поэтому нужно критиковать традиции, а не уничтожать их.

Морали нечего бояться науки, воодушевленной истинным духом опыта. Подобная наука уважает прошлое, она противоположна тому научному снобизму, который так легко надуть нововведениями; она продвигается только шаг за шагом, но всегда в одном направлении и всегда в верном направлении. Лучшее лекарство против половинного знания есть наибольшее знание.

Существует еще другой способ установления взаимоотношений науки и морали. Нет ни одного предмета, который не мог бы быть объектом науки, так как нет ни одного, который бы не мог быть наблюдаем. Явления морального характера не ускользают от нее так же, как и другие. Натуралист изучает общества муравьев и пчел и изучает их спокойно; точно так же ученый старается судить о людях, как если бы он не был сам человеком: встать на место обитателя, не знаю какого, далекого Сириуса, для которого города будут лишь муравьиными кучами. Это его право, в этом ремесло ученого.

Наука об обычаях будет сперва чисто описательной: она нас научит обычаям людей и скажет нам, чем они являются, не говоря о том, чем они должны были бы быть. Затем она будет наукой сравнительной: она нас проведет в пространстве, чтобы позволить нам сравнить обычаи различных народов, как диких, так и цивилизованных, а также и во времени, чтобы мы могли сравнить вчерашние обычаи с обычаями сегодня. Наконец, она попытается сделаться объясняющей наукой, и в этом заключается естественная эволюция всякой науки.

Дарвинисты будут стараться нам объяснить, почему все известные народы подчиняются законам морали, говоря нам, что естественный отбор издавна уничтожал тех, которые были столь глупы, что воздерживались от них. Психологи объяснят нам, почему предписания морали не всегда согласны с общими интересами. Они скажут нам, что человек, захваченный вихрем жизни, не имеет времени обдумывать все последствия своих действий, что он может подчиняться только общим правилам, что против них будут тем менее спорить, чем они будут проще, и что для того, чтобы они были полезны, а следовательно, и чтобы их мог создать естественный отбор, достаточно, чтобы они как можно более часто совпадали с общим интересом. Историки объяснят нам, что из двух моралей, одна из которых подчиняет индивидуум обществу, а другая имеет сострадание к индивидууму и полагает в основу благо ближнего, именно вторая непрерывно развивалась по мере того, как общества становились менее дикими, более сложными и в конечном счете менее подверженными катастрофам.

Эта наука о нравах не есть мораль и никогда ею не будет; она может заменить мораль не более чем трактат по физиологии пищеварения может заменить хороший обед. То, что я до сих пор говорил, не позволяет мне настаивать.

Но дело не в этом. Эта наука — не мораль, но, может быть, она полезна, может быть, она опасна для морали? Одни скажут, что объяснить — это всегда значит, в некоторой мере, оправдать, и это можно с легкостью поддержать; другие скажут, наоборот, что не лишено опасности показывать нам мораль различных рас и местностей, что это научит нас разбирать то, что должно быть слепо принято, приучит видеть случайность в том, в чем следовало бы видеть только необходимость. Возможно, что они и не совсем правы. Но, откровенно говоря, не является ли преувеличением влияние теорий на людей, мало с ними соприкасающихся, для которых они всегда останутся посторонними абстракциями? Когда страсти, одни великодушные, другие низкие, борются в нашем сознании, то какое значение при столь властных противниках может иметь метафизическое различие случайного и необходимого?

Хотя мне уже скоро придется закончить свои рассуждения, я все же не могу обойти молчанием один важный пункт. Наука детерминистична, она является таковой a priori, она постулирует детерминизм, так как без него она не могла бы существовать. Она является таковой и a posteriori; если она постулировала его с самого начала как необходимое условие своего существования, то она затем строго доказывает его своим существованием, и каждая из ее побед является победой детерминизма. Может быть, примирение возможно. Можно ли предположить, что это продвижение детерминизма вперед будет продолжаться беспрепятственно и без отступления, не зная непреодолимой преграды, и что в то же время мы не имеем права перейти к пределу, как говорим мы — математики, и вывести абсолютный детерминизм, потому что в пределе детерминизм исчезнет в тавтологии или в противоречии? Это — вопрос, который изучали безнадежно в течение веков, и я не могу его развить в течение тех нескольких минут, которыми я располагаю.

Но мы стоим перед фактом: наука, ошибается ли она или нет, детерминистична; всюду, куда бы она ни проникала, она ведет за собой детерминизм. Пока дело идет только о физике или даже о биологии, это не имеет большого значения; область совести остается незатронутой. А если придет день, когда мораль в свою очередь станет объектом науки? Она неизбежно пропитается детерминизмом, и это, конечно, будет ее разрушением.

Все ли потеряно или же, если когда-нибудь мораль должна подчиниться детерминизму, то не могла бы она принять его, не умирая от этого? Без сомнения, столь глубокая революция в метафизике гораздо меньше отразилась бы на нравах, чем это думают. Вполне понятно, что не так обстояло бы дело с уголовным наказанием: то, что называли преступлением или наказанием, стали бы называть болезнью или профилактическим лечением, но общество сохранило бы неизменным свое право, которое состоит не в праве наказывать, а только в праве защищаться. Что важнее всего, так это то, что идея заслуги и вины должна была бы исчезнуть или измениться. Но стали бы продолжать любить человека добра, как любят все то, что красиво. Тогда бы уже не имели права ненавидеть порочного человека; он бы вселял только отвращение. Да разве это так уж необходимо? Достаточно, чтобы не переставали ненавидеть порок.

В остальном все пойдет по-старому; инстинкт сильнее всякой метафизики, и хотя бы его доказали, хотя бы разгадали секрет его силы, от этого его сила не ослабеет. Стало ли тяготение более преодолимым после Ньютона? Моральные силы, управлявшие нами, и будут продолжать управлять нами.

И если, как говорит Фулье, идея свободы сама является силой, то эта сила мало уменьшается, даже если бы когда-нибудь ученые доказали, что она основана на иллюзии. Эта иллюзия слишком прочна, для того чтобы ее можно было рассеять какими-нибудь рассуждениями. Самый непримиримый детерминист еще долго будет говорить в повседневном разговоре «я хочу» и даже «я должен», и притом в согласии с наиболее могущественной частью своей души, той, которая не познана и которая не рассуждает. Столь же невозможно действовать не так, как действует свободный человек, как невозможно рассуждать иначе, чем детерминист, когда строят науку.

Черт не так страшен, как его малюют, и, может быть, есть и другие причины его не бояться. Можно надеяться, что в абсолюте все примиряется и что для неограниченного разума поведение человека, который действует так, как если бы он был свободен, и человека, который думает так, как если бы свободы не существовало вовсе, покажутся равнозаконными.

Мы последовательно вставали на различные точки зрения, с которых можно рассмотреть взаимоотношения науки и морали; теперь следует перейти к заключениям. Нет и никогда не будет научной морали в собственном смысле слова, но косвенным путем наука может оказаться помощницей морали. Наука, широко понимаемая, может только ей служить; опасна лишь полунаука. Затем, одной науки недостаточно, так как она видит только часть человека или, если вы хотите, она видит все, но под одним углом и так как приходится думать о ненаучных умах. С другой стороны, опасения, как и слишком обширные надежды, кажутся мне одинаково химерическими. Мораль и наука по мере своего развития будут превосходно согласовываться друг с другом.

Глава X

МОРАЛЬНЫЙ СОЮЗ

Сегодняшнее собрание объединяет людей чрезвычайно различных взглядов, которых свели только добрая воля и одинаковое желание добра. Однако я не сомневаюсь, что они легко понимают друг друга, так как, если у них и различные мнения относительно способов, то они согласны в конечной цели их стремлений, а только это и необходимо.

Не так давно можно было видеть, да и теперь еще можно читать на стенах Парижа афиши, сообщающие о диспуте на тему «Конфликт моралей». Существует ли этот конфликт, должен ли он существовать? Нет. Мораль может опираться на множество доводов, есть среди них трансцендентные; возможно, они наилучшие и, наверняка, наиболее благородные, но именно о них спорят. Есть среди них по крайней мере один, быть может, несколько опошленный, к которому мы не можем не присоединиться.

Реальная жизнь человека есть непрерывная борьба, против него действуют слепые, конечно, силы, но опасные, которые живо свалили бы его на землю, которые его погубили бы, задавили бы тысячью несчастий, если бы он не был постоянно готов сопротивляться им.

Если мы иногда наслаждаемся относительным покоем, то это потому, что наши отцы много боролись; ослабевает на миг наша энергия, наша бдительность, и мы теряем все плоды их борьбы, все, чего добились для нас. Человечество подобно армии на войне, но всякая армия нуждается в дисциплине, и не достаточно того, чтобы она ей подчинялась в день сражения, она должна приучиться к ней со времен мира; без этой дисциплины гибель человечества очевидна, и никакая храбрость не сможет его спасти.

Все, что я сказал, вполне приложимо и к борьбе, которую человечество должно вести за свою жизнь; дисциплина, которую оно должно принять, называется моралью. В тот день, когда оно ее забудет, оно будет разбито и повержено в бездну горестей. Кроме того, в этот день оно переживет свое падение, почувствует себя менее прекрасным, так сказать, более маленьким. Пришлось бы огорчаться не только по причине тех бедствий, которые последуют, но и потому, что это было бы омрачением красоты.

Обо всем этом мы все мыслим одинаково, мы все знаем, куда нужно идти. Почему же мы разделяемся, когда речь идет о том, где нужно пройти? Если бы рассуждения могли что-либо сделать, согласие было бы легко достижимо. Математики никогда не спорят, когда дело идет о том, как доказать теорему, но здесь дело совершенно иное. Создавать рассуждением мораль значит растрачивать свой труд: в подобных вопросах нет мысли, на которую нельзя было бы возразить.

Объясняйте солдату, сколькими бедствиями грозит поражение и что оно грозит даже его личной безопасности, он всегда сможет ответить, что его безопасность будет лучше гарантирована, если сражаться будут другие. Если солдат так не отвечает, то потому, что он движим я не знаю какой силой, которая заставляет молчать все рассуждения. То, что нам нужно, и есть силы, подобные этой. Но человеческая душа — неистощимый резервуар сил, обильный и богатый источник движущих сил; этими движущими силами являются наши чувства, и нужно, чтобы моралисты взяли, так сказать, эти силы и направили их по правильному пути, точно так же, как инженеры покоряют естественные силы природы и направляют их на нужды промышленности.

Но здесь-то как раз и рождается различие. Чтобы привести в действие одну и ту же машину, инженеры могут применить либо силу пара, либо гидравлическую силу; так же и учителя морали могут по своему выбору пустить в ход одну или другую психическую силу. Каждый из них, естественно, выберет ту силу, которую он чувствует в себе; что же касается тех сил, которые могли бы прийти извне или которые он мог бы занять у соседа, то ими он распорядился бы неловко, в его руках они оказались бы безжизненными и недейственными; он их отбросит и будет прав. Их методы будут различными, потому что различно их оружие. Почему же они должны враждовать?

И, однако, они придерживаются одной и той же морали. Будете ли вы иметь в виду общую пользу, обратитесь ли вы к чувству жалости и человеческого достоинства, вы всегда придете к тем же правилам; к тем, которые нельзя забывать без того, чтобы не погибли нации, без того, чтобы одновременно не умножились страдания и не пал человек.

Почему же эти люди, которые разным оружием сражаются с одним и тем же врагом, так редко вспоминают, что они союзники? Почему они подчас приветствуют поражения других? Забывают ли они, что каждое такое поражение является триумфом вечного врага, уменьшением общего достояния? О, мы слишком нуждаемся во всех наших силах, чтобы не иметь права пренебрегать какой-либо! Поэтому не будем никого отталкивать, изгоним одну только ненависть.

Конечно, ненависть — тоже сила и очень могущественная, но мы не можем ею пользоваться потому, что она умаляет, потому, что она подобна лорнету, в который можно рассматривать лишь грубые очертания. Даже в отношениях между народами ненависть несправедлива, и не она родит истинных героев. Я не знаю, надеются ли по ту сторону некоторых границ, что ненависть увеличит патриотизм, но это противоречит инстинктам нашей расы и ее традициям. Французские войска всегда сражались за кого-либо или за что-либо, а не против кого-либо, и из-за этого они не сражались хуже.

Если внутри партии забывают великие идеи, составляющие их честь и смысл их существования, для того чтобы только и помнить о своей ненависти, если один говорит: «я противник этого», а другой отвечает: «я противник того», то горизонт немедленно сужается, как если бы опустившиеся облака закрыли вершины; пускаются в ход самые низкие средства, не отступают ни перед доносом, ни перед клеветой, а тот, кто станет этому удивляться, делается сам подозрительным. Мы замечаем появление людей, которые имеют ум только для того, чтобы лгать, и сердце для того, чтобы ненавидеть. А души, которые вовсе не вульгарны, как только они укроются под тем же знаменем, прячут богатства снисхождения, а иногда и удивления. И ввиду стольких противоположных ненавистей не решаются приветствовать поражение одной из них, которое явится триумфом других.

Вот все, что может сделать ненависть и чего мы по справедливости не желаем. Давайте же сблизимся в стремлении к общему идеалу, научимся понимать друг друга, а тем самым и ценить. Удержимся от предписания общих всем методов, это неосуществимо и, кроме того, это нежелательно: однообразие — это смерть, потому что оно закрывает дверь для всякого прогресса, и, кроме того, всякое принуждение бесплодно и жестоко.

Люди различны, среди них есть мятежные, которых может затронуть одно слово и на которых не произведет впечатления все остальное. Я не могу знать, не является ли этим решающим словом то самое, которое вы готовы сказать, и я вам запрещу его произнести!.. Но тогда вы видите опасность: эти люди, которые не получат того же воспитания, призваны получать удары в своей жизни. Под этими повторяющимися ударами их души задрожат, изменятся, может быть, изменят веру. Что произойдет, если эти новые идеи, к которым они присоединяться, окажутся теми, которые их старый учитель представлял им как отрицание самой морали? Не исчезнет ли когда-либо эта умственная привычка? В то же время их новые друзья не станут их учить только отказу от того, что они обожали, но будут учить презирать его. Они не сохранят для благородных идей, которые няньчили их душу, той нежной памяти, которая предшествует вере. В этом общем разрушении рискует погибнуть их моральный идеал; слишком старые для получения нового воспитания, они потеряют плоды старого!

Эта опасность была бы предотвращена или по крайней мере сдержана, если бы мы научились отзываться только с уважением об искренних усилиях, которые другие делают помимо нас; это уважение было бы для нас легким, если бы мы лучше знали друг друга.

Именно это и является задачей Лиги морального воспитания. Речи, которые вы услышите сегодня, в достаточной мере докажут вам, что можно иметь горячую веру и быть справедливым к вере ближнего и что в конце концов в различных формах, но мы являемся, так сказать, частями одной и той же армии, сражающимися бок о бок.

АНРИ ПУАНКАРЕ И НАУКА НАЧАЛА XX ВЕКА

М.И.Панов, А.А.Тяпкин
А.С.Шибанов

Огромные успехи науки последних десятилетий и осознание ее важной роли в развитии человеческого общества способствовали появлению особого интереса к творчеству и мировоззрению выдающихся ученых, которые заложили основы происшедшего грандиозного преобразования естествознания Пуанкаре был одним из тех немногих, кто принял непосредственное участие в величайшем научном перевороте, происшедшем в начале XX века. Его неутомимая деятельность в самых различных областях математики и физики оставила неизгладимый след в умах современников и до сих пор поражает обилием глубочайших идей и плодотворных методов

Анри Пуанкаре родился 29 апреля 1854 года в городе Нанси, в семье профессора медицины Еще в лицее он привлек к себе внимание выдающимися математическими способностями. В 1872 году ему присуждается первое место на Общем конкурсе по элементарной математике, проводившемся для всех лицеев Франции, а в следующем, 1873 году он занял первое место на Общем конкурсе по специальной математике Осенью того же года Пуанкаре поступает в Политехническую школу — наиболее прославленное высшее учебное заведение Франции. По правилам того времени вслед за Политехнической школой он оканчивает в начале 1879 года специальное высшее учебное заведение — Горную школу Проработав несколько месяцев горным инженером на шахтах Везуля, Анри Пуанкаре защищает в Париже диссертацию и отбывает в Кан, где преподает математический анализ на Факультете наук Блестящие достижения молодого ученого, связанные с открытием автоморфных функций, создали ему известность в европейских научных кругах. В 1881 году ему предлагают должность преподавателя в столичном университете, и он переезжает в Париж. С осени 1886 года Пуанкаре возглавляет кафедру математической физики и теории вероятностей Парижского университета, а в январе 1887 года его избирают членом Академии наук В 1889 году за исследование по небесной механике «О проблеме трех тел и об уравнениях динамики» ему присуждается международная премия короля Оскара II

Выдающиеся научные труды французского ученого получили признание во всем мире Многие зарубежные академии и университеты избрали его своим иностранным членом или членом-корреспондентом (в том числе Петербургская академия наук). В 1900 году ему вручают золотую медаль Королевского астрономического общества в Лондоне, а через год — медаль Сильвестра от Лондонского королевского общества. В 1904 году Казанское физико-математическое общество присуждает Пуанкаре золотую медаль Лобачевского [1]). А в 1905 году он удостаивается наиболее авторитетного научного приза того времени — премии имени Бояи Венгерской академии наук. Предназначалась она тому ученому, чьи достижения за последнюю четверть века внесли наибольший вклад в развитие математики.

Жизненный путь знаменитого математика, механика и физика оборвался 17 июля 1912 года; он скончался в Париже

---

[1]) Премия имени Н. И. Лобачевского была присуждена Д. Гильберту, а Пуанкаре был удостоен золотой медали за его высокоинтересный отзыв на работы Гильберта.

после перенесенной операции «Вместе с великим французским математиком от нас ушел единственный человек, разум которого мог охватить все, что создано разумом других людей, проникнуть в самую суть всего, что постигла на сегодня человеческая мысль, и увидеть в ней нечто новое. Преждевременная утрата столь поразительной интеллектуальной силы означает для нас катастрофу», — выразил тогда общее мнение известный ученый и политический деятель Поль Пенлеве [1])

Современники видели в Пуанкаре человека, обладающего наиболее обширной ученостью среди всех представителей науки. Но он не был энциклопедистом в общепринятом понимании этого слова. Не просто широкое собрание самых различных и разнородных знаний отличало этот великий ум. Пуанкаре овладевал науками во всей их глубине, проникая мысленным взором в тончайшие и сокровеннейшие нюансы их идей и методов, словно человек, целиком посвятивший свою жизнь изучению одной какой-нибудь научной дисциплины. Это позволило ему плодотворно творить сразу во многих областях физико-математического знания, двигаться вперед одновременно в нескольких направлениях.

К концу XIX века математика уже разрослась в грандиозное и обширное здание, состоящее из большого числа примыкающих друг к другу частей, творчески трудиться в которых могли только узкие специалисты. Даже выдающиеся умы ограничивались в своей деятельности лишь немногими из ее разделов. «Нет такого математика, даже среди обладающих самой обширной эрудицией, который бы не чувствовал себя чужеземцем в некоторых областях огромного математического мира, — пишет коллектив французских авторов под псевдонимом Бурбаки в своих «Очерках по истории математики», — что же касается тех, кто подобно Пуанкаре или Гильберту оставляет печать своего гения почти во всех его областях, то они составляют даже среди наиболее великих редчайшее исключение».

Исключительность разностороннего гения Пуанкаре отмечает и американский историк науки Е. Белл, назвав его «последним универсалистом». Последним, потому что им и Гильбертом замыкается шеренга великих математиков, снискавших славу «универсалистов». За тридцать с небольшим лет своей напряженной творческой деятельности Пуанкаре оставил первоклассные труды практически во всех областях математической науки. Его не смущал гигантски разросшийся лабиринт математики, в котором он смело, а порой и дерзновенно прокладывал новые пути в неизведанных еще направлениях. Фундаментальность и обилие работ сделали его общепризнанным лидером этой науки в глазах современников. «Первым авторитетом времени» величали его коллеги за Рейном. В библиографической книге К. Рид о Гильберте неоднократно подчеркивается, что только всемирная слава Пуанкаре не позволяла Гильберту занять первое место среди математиков начала XX века.

---

[1]) Более подробно о жизненном и творческом пути великого французского ученого рассказывается в книге А. Тяпкина и А. Шибанова «Пуанкаре», изданной в серии «Жизнь замечательных людей» издательством «Молодая Гвардия» в 1979 г.

Но круг проблем, охваченных Пуанкаре, не ограничивается только лишь математикой. Необратимость термодинамических процессов и дифракция света, космогонические гипотезы и природа рентгеновских лучей, теория морских приливов и десятичная мера времени — все волновало его всеобъемлющий ум, всюду оставил он неизгладимый след своего универсального дарования В самом конце XIX века Пуанкаре критически переосмыслил и обновил складывавшийся в течение двух столетий математический аппарат небесной механики. Первая же его работа в этом направлении произвела в научных кругах впечатление настоящей сенсации неожиданностью и значительностью достигнутых результатов «Значение мемуара столь велико, — писал патриарх немецкой математики К. Вейерштрасс, — что опубликование его откроет новую эру в истории небесной механики». Действительно, основополагающие методы Пуанкаре на многие десятилетия определили характер исследований в теории движения небесных тел, став незаменимым инструментом решения самых различных задач. С полным основанием мог заявить о нем один из министров народного просвещения Франции. «он олицетворял единство науки под бесконечной множественностью ее проявлений» На заре развития радиотехники Пуанкаре выступает с теоретическим анализом достигнутых в этой области результатов и читает лекции о беспроволочной телеграфии. А в двенадцатитомном «Курсе математической физики», прочитанном им в течение ряда лет в Сорбонне, рассмотрены все разделы современной ему теоретической физики

Начал он этот курс в годы, когда здание физики казалось прочно и незыблемо покоящимся на фундаменте классической ньютоновской механики. Последние же лекции приходятся на период, когда над развалинами старых научных представлений уже возносились стены новой теории, противоречившей всему, что было до того времени известно и принято Его творческая биография вместила в себя величайшую из всех революций, происходивших в естествознании. И гений Пуанкаре не остался в стороне от этой самой радикальной перестройки в науке Им были высказаны исходные принципы новой теории, пришедшей на смену классической механике и потребовавшей пересмотра физических представлений о времени и пространстве. Именно в его работах впервые были сформулированы в достаточно полной и ясной математической форме все основные положения специальной теории относительности. Он же первым поставил вопрос о необходимости кардинального изменения теории тяготения Ньютона в соответствии с требованиями нового принципа относительности и рассмотрел первый вариант такой релятивистской теории тяготения. Кроме того, в одной из своих последних статей он обосновывает неизбежность новых квантовых представлений в физике, вопрос о которых весьма оживленно обсуждался в то время научной общественностью. Поэтому с не меньшим основанием можно утверждать, что фигура Пуанкаре олицетворяет собой тот гигантский переворот в наших взглядах на мир, который произошел в начале XX века.

Даже если бы научная деятельность Пуанкаре ограничилась только разработкой специальной теории относительности, этого вполне было бы достаточно для того, чтобы навеки вписать его имя в летопись науки. Но революционные, основополагающие исследования Пуанкаре пронизывали самые различные области физико-математического знания, что позволяло уже современникам единодушно относить замечательного французского ученого к числу самых выдающихся представителей точного естествознания. Созданная им качественная теория дифференциальных уравнений стала одним из ведущих разделов современной математики, находя широкое применение в механике и физике. Рожденная его творческой мыслью новая математическая дисциплина — топология — ныне успешно развивается и прогрессирует, приковывая внимание специалистов из других областей знания Открытый молодым Пуанкаре новый класс функций, называемых теперь автоморфными, обогатил математиков новыми возможностями. А те плодотворные методы, которыми он вооружил специалистов по небесной механике, оказались столь действенными и столь универсальными, что до сих пор их причисляют к основным средствам теоретического исследования. Все это далеко не полностью охватывает его вклад в общий прогресс науки.

Необычайны творческая активность и поразительная, почти легендарная продуктивность выдающегося французского ученого. Одному человеку просто не под силу охватить ту огромную сумму знаний, которая составляет его научное наследие и содержится в более чем 500 статей и книг. Особое место среди них занимают статьи и доклады по общим вопросам науки В этих выступлениях Пуанкаре откликается на самые злободневные дискуссионные вопросы, возникающие в процессе развития современного ему естествознания, обсуждает происхождение тех или иных научных положений, дает критическую оценку наметившихся тенденций и путей преодоления трудностей в математике, механике и физике. При этом нередко он затрагивает фундаментальные методологические проблемы научного познания. Впоследствии эти статьи, написанные в разное время и по различным поводам, автор объединил в три отдельные книги, отличающиеся многогранностью и широтой содержания, глубиной и оригинальностью суждений

* * *

Книги Анри Пуанкаре по общим проблемам науки имели громкий успех. Впрочем, удивляться этому не приходится. Наука к тому времени превратилась уже в важнейший институт общественной жизни. Перестав быть монополией замкнутых каст людей, она вошла в коллективное сознание цивилизованных народов, стала достоянием всего культурного человечества. Сенсационные открытия в физике конца XIX века вызвали в самых различных кругах общества живейший интерес к собственно научным проблемам Все хотят знать. как изменили эти открытия картину мира? Куда идет наука в своем развитии? В широкой читательской публике пробудилась жажда обобщающих научно-познавательных произведений Особым спросом пользуются выступления корифеев науки, умеющих с высоким мастерством, доступно и в то же время с профессиональной глубиной рассказать о происходящих в физике драматических событиях. Значительное влияние на интеллектуальный климат того времени имели общенаучные книги Пуанкаре и немецкого ученого Оствальда. Но рассматривать произведения Пуанкаре (так же, как и Оствальда) только как научно-просветительские — это значит обеднить и исказить их подлинное значение. В этот переломный для науки период ученые ощущают потребность в общих методологических и гносеологических установках, которые позволили бы им ориентироваться в нагромождении новых, совершенно неожиданных открытий и фактов Надвигающееся столетие как бы приглашало ведущих естествоиспытателей к обобщающим выводам и предсказаниям, к мировоззренческому подходу в оценке сложившейся в науке ситуации. К этому обобщающему творчеству Пуанкаре идет от своих многообразных исследований по конкретным вопросам той или иной науки.

Вступление в новый век Пуанкаре отметил подведением некоторых итогов своей личной научной деятельности. У него вообще была склонность к упорядочиванию и к систематизации, теперь эта страсть обратилась на его собственное творчество. В 1901 году он составил «Аналитическое резюме» своих работ. Любопытный документ, быть может, не имеющий прецедента: ученый итожит созданное и сотворенное им за прошедший период. Одно только перечисление разделов науки, в которых плодотворно работала его мысль, уже говорит о многом: дифференциальные уравнения, теория функций, различные вопросы чистой математики, небесная механика, математическая физика, философия науки. Помимо этого есть еще седьмая, заключительная часть, озаглавленная: «Преподавание, популяризация, разное» Но это не просто перечисление и классификация изданных заметок и статей, а весьма содержательный и емкий анализ. Свои достижения Пуанкаре расставляет в системе наук так, как они ему видятся

Около 25 своих публикаций Пуанкаре отнес к разделу «Философия науки». Но довольно широкий круг рассмотренных в этих статьях проблем делает весьма условным объединение их в этом разделе Подобные работы ученых-естествоиспытателей нередко классифицируют как философские На самом же деле их авторы лишь отдельными своими высказываниями вторгаются в область собственно философии, как правило, не придерживаясь при этом сколько-нибудь последовательной системы. И ценность таких произведений заключается вовсе не в этих суждениях философского характера, а в тех методологических выводах и обобщениях естественнонаучного материала, для которых необходимы глубокие специальные знания и особая склонность к широкому охвату научных теорий и фактов Именно эти обобщения и выводы ученых составляют ценнейший материал для последующего философского анализа сложных разделов точного естествознания, для историко-научных и логико-методологических исследований Непоследовательность и противоречивость естествоиспытателей, путаница их философских воззрений, конечно, затрудняют такой анализ, создают опасность сбиться только на «гневные» обличения в идеализме Поэтому при чтении их трудов следует помнить, с какой тщательностью В И Ленин анализировал взгляды того или иного ученого, строго разграничивая философские, методологические и конкретнонаучные аспекты в его творчестве. «Сам В. И. Ленин очень хорошо отделял естественнонаучное (и ценное методологическое) содержание трудов ученых от уродливых философских наростов, которыми это содержание обрастает иногда в изложении самих открывателей, а чаще — их истолкователей и эпигонов»[1]). Все это в полной мере относится и к работам Пуанкаре из раздела «Философия науки», вошедшим в его знаменитые книги

Первая книга — «Наука и гипотеза» — вышла в 1902 году в парижском издательстве «Фламмарион» тиражом 16 тысяч экземпляров. Она была распродана в течение нескольких дней и сразу же стала редкостью По свидетельству виднейшего механика и математика П. Аппеля, люди, прочитав ее, передавали своим друзьям и знакомым, так что каждый экземпляр побывал в руках многих читателей. По его оценкам, в том же году с книгой ознакомились около ста тысяч человек Через четыре года вышло второе ее издание Громкий успех книги на родине автора привлек к ней внимание за рубежом. Очень скоро, буквально вслед за первым изданием, ее стали переводить на другие языки В России были изданы сразу два независимых перевода «Науки и гипотезы». Предисловие к одному из них написал известный физик Н. А. Умов.

Основное содержание первой книги Пуанкаре составили его доклады на философском, математическом и физическом международных конгрессах 1900 года, а также некоторые его более ранние статьи Вторая книга, выпущенная в 1905 году под названием «Ценность науки», включала в себя среди других работ статьи «Измерение времени», «Пространство и три его измерения» и доклад на Международном конгрессе в Сент-Луисе На долю этого произведения выпал такой же успех в широких читательских массах Еще три года спустя, в 1908 году, издается третья книга ставшего уже популярным автора, которая носит название «Наука и метод». В ней продолжен рассказ об общих проблемах науки

Четвертая книга «Последние мысли» была подготовлена и издана уже посмертно, в 1913 году. В нее включены статьи и доклады последних лет жизни Пуанкаре. Они естественно дополняют и развивают его взгляды по некоторым вопросам, обсуждаемым в первых книгах.

Каждая книга состоит из глав, посвященных различным, не связанным между собой темам. Однако ряд обсуждаемых научных проблем повторяется от книги к книге, например, тема относительности движения, проблема статуса геометрии и физических законов, вопрос о значении условно выбираемых соглашений для построения теоретических моделей физических явлений, проблема соотношения логического и интуитивного в математическом творчестве и другие. По этой причине мы сочли целесообразным вместо последовательного обсуждения отдельных книг рассмотреть излагаемые в них общие проблемы с учетом вносимых автором последующих уточнений и изменений

* * *

Начиная с последнего десятилетия XIX века Пуанкаре демонстрирует свою склонность к глубокому анализу общих

[1]) Ленин как философ. — М.: Политиздат, 1969. — С. 138.

проблем развития точных наук. Его неутомимый интеллект и в этой новой для него области творчества поразил всех обилием интереснейших мыслей и смелых суждений, которые может себе позволить только ученый, сочетающий широкий взгляд на процесс научного познания с глубоким и свободным владением идеями и методами конкретных наук. Но далеко не все его оригинальные высказывания философского характера заслужили в последующие годы всеобщее признание и одобрение, как это было с многочисленными естественнонаучными достижениями выдающегося математика, механика и физика. В своих философских отступлениях Пуанкаре довольно ярко проявляет непоследовательность, а порой и противоречивость. На страницах одной и той же его книги можно встретить прямо противоположные утверждения. Некоторые взгляды французского ученого были отвергнуты материалистической философией как явные заблуждения. В этом отношении В. И. Ленин вполне обоснованно высмеивал тех, кто пытался «брать его всерьез как философа» [1]), и убедительно доказывал, насколько ненадежный фундамент избрала себе «новейшая» реакционная философия, опирающаяся на общенаучные труды Пуанкаре, пестрящие противоречивыми суждениями.

Представляет интерес проследить, как сквозь все эти колебания философской позиции Пуанкаре проступает тенденция к сдвигу его взглядов в сторону материалистического толкования научного познания. Это можно было бы считать одним из частных проявлений того неминуемого отхода естествоиспытателей от физического идеализма, который, как указывал В. И. Ленин, является единственно верным выходом из кризиса науки начала XX века. Непрямолинейность пути Пуанкаре могла бы послужить наглядной иллюстрацией предсказанной В. И. Лениным особенности преодоления этого кризиса, когда физика «идет к единственно верному методу и единственно верной философии естествознания не прямо, а зигзагами, не сознательно, а стихийно, не видя ясно своей «конечной цели», а приближаясь к ней ощупью, шатаясь...» [2]).

Обсуждая вопрос о достоверности научного знания, Пуанкаре не мог избежать тесно связанного с ним вопроса об объективности истины. Всякое познание начинается с той информации, которая получается нами через ощущения. Но человек не может передавать свои ощущения другим лицам, в этом смысле ощущения субъективны. Как же тогда понимать объективность научных истин? «Гарантией объективности мира, в котором мы живем, служит общность этого мира для нас и для других мыслящих существ», — утверждает Пуанкаре на страницах книги «Ценность науки» (с. 356) [3]). По его мнению, «что объективно, то должно быть обще многим умам и, значит, должно иметь способность передаваться от одного к другому...» (с. 356). Понятие объективности он сводит к понятию общезначимости, даже не касаясь вопроса о том, существует ли внеш-

---

[1]) Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 309.

[2]) Там же, с. 332.

[3]) Здесь и далее в скобках указаны номера страниц настоящего издания.

ний мир, как источник наших ощущений. Что находится по ту сторону ощущений — это он старается не обсуждать.

Рассматриваемая сама по себе, вне связи с внешней реальностью, общезначимость не могла, конечно, привести Пуанкаре к объективности знания, содержание которого не зависит ни от отдельного человека, ни от всего человечества. Хотя объективной истине присущ элемент общезначимости, объективность ее к этому не сводится. Выступая против попыток некоторых теоретиков провести подобную трактовку объективности в марксистскую философию, В. И. Ленин с иронией замечал, что общезначима и религия, отрицающая объективную истину.

В тех случаях, когда мысль Пуанкаре все же прорывается за пределы человеческих ощущений, он говорит о реальности только отношений между вещами. «Истинные соотношения между этими реальными предметами представляют единственную реальность, которую мы могли бы постигнуть», — таково его мнение (с. 131). Порой он говорит о внутренней «гармонии мира», являющейся той самой истиной, которую постигает наш разум. «Наилучшее выражение этой гармонии — это закон» (с. 202).

Именно в трактовке сущности научных законов проявился совершенно новый, глубоко своеобразный взгляд Пуанкаре на научное познание. Уже в книге «Наука и гипотеза» он утверждает, что «некоторые основные начала» науки следует понимать как конвенции, то есть условно принятые соглашения, с помощью которых ученые выбирают конкретное теоретическое описание физических явлений среди ряда различных и одинаково возможных описаний. По убеждению Пуанкаре, эти конвенции, предписания, принимаемые ученым, должны быть взаимонепротиворечивыми и должны отражать отношения между вещами. Эти «предписания налагаются на нашу науку, которая без них была бы невозможна, они не налагаются на природу. Однако произвольны ли эти предписания? Нет, иначе они были бы бесплодны. Опыт предоставляет нам свободный выбор, но при этом он руководит нами, помогая выбрать путь, наиболее удобный» (с. 8). Если бы наука строилась на основе произвольных конвенций, то она «была бы бессильна. Но мы постоянно видим перед своими глазами ее плодотворную работу. Этого не могло бы быть, если бы она не открывала нам чего-то реального...» (с. 8).

Сами по себе естественнонаучные конвенции еще не означают конвенционализма как философского направления, и имеют только внутринаучное значение. Конвенциональность некоторых элементов научной теории, например, формы математического представления законов физических процессов, в наше время стала общепризнанной и не оспаривается ни философами, ни представителями точных наук. Но обоснованный Пуанкаре естественнонаучный конвенционализм тут же был распространен некоторыми приверженцами идеалистических взглядов на процесс познания в целом, развернут в философский конвенционализм, отрицающий объективное содержание в любых научных построениях и в науке вообще. И повод для таких идеалистических спекуляций, для извращения своей позиции давал порой сам Пуанкаре. Утверждая, что выбор той или иной формы теоретического описания среди ряда равноправных форм производится лишь на основе «удобства», «полезности», он породил толки о том, что ученые творят научные теории, подчиняясь своей прихоти или капризу. Построениям науки стали приписывать исключительно субъективный характер. Такое же субъективистское толкование научных положений можно найти и в отдельных высказываниях Пуанкаре, за что он был подвергнут В. И Лениным суровой и справедливой критике. «Пуанкаре, например, вполне в духе Маха выводит законы природы — вплоть до того, что пространство имеет три измерения, — из «удобства» [1]), — пишет он в своей книге «Материализм и эмпириокритицизм» [2]). Подобные суждения авторитетнейшего ученого тут же подхватывались и широко использовались идеалистами всех мастей, что способствовало рождению его славы, как основателя конвенционализма в идеалистическом понимании этого термина.

Представители идеалистической философии всегда стремились заручиться поддержкой крупнейших ученых, подкрепить свои позиции их авторитетным мнением. Любые неопределенности и недомолвки в выступлениях этих ученых они используют для того, чтобы представить их своими сторонниками в борьбе с материалистическим направлением. Об этой вероломной тактике своих противников писал В. И. Ленин: «...Идеалистические философы ловят малейшую ошибку, малейшую неясность в выражении у знаменитых естествоиспытателей, чтобы оправдать свою подновленную защиту фидеизма» [3]). Поэтому в трудах Пуанкаре по общим проблемам науки нужно строго разграничивать положения, касающиеся проблем естественнонаучного познания, и высказывания сугубо философского характера, в которых он был крайне непоследователен. С точки зрения сегодняшнего дня некоторые взгляды и суждения этого выдающегося представителя точных наук, казалось бы, свидетельствуют о его отступлении от материалистического понимания объективной истины. Но в то время, в начале нашего столетия, когда четкие и последовательные положения диалектического материализма еще не были известны подавляющей массе европейских ученых [4]), когда многие из них находились под влиянием позитивистских течений, главным образом, махизма, Пуанкаре своей позицией по ряду вопросов научного познания резко противо-

[1]) Ленин В. И Полн. собр. соч, т. 18, с. 314.

[2]) Впоследствии Пуанкаре и сам осознавал уязвимость использованного им термина «удобство». Так, в книге «Последние мысли», изданной в 1913 году, на которую, следовательно, В. И. Ленин не мог ссылаться в своем произведении «Материализм и эмпириокритицизм», Пуанкаре пишет по поводу трехмерности пространства: «Но слово «удобный», пожалуй, в данном случае недостаточно сильно. Существо, которое приписало бы пространству два или четыре измерения, оказалось бы в мире, подобном нашему, менее приспособленным к борьбе за существование» (с. 573).

[3]) Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 300—301.

[4]) Книга В. И. Ленина «Материализм и эмпириокритицизм» вышла на русском языке в 1909 году, но западным ученым она стала известна значительно позднее, когда некоторые из ведущих естествоиспытателей перешли на позиции марксизма.

стоял философам-идеалистам, проповедовавшим агностицизм и неверие в силу человеческого разума. К сожалению, не этим он был популярен среди большей части своих современников, читавших его общенаучные работы, и не на этом концентрировалось их внимание.

Общественная атмосфера того времени как нельзя более благоприятствовала расцвету агностицизма и неверия в возможности науки. Это было время кризиса во всем: в науке, в искусстве, в политике Ромен Роллан писал в те годы. «За последние полвека наш духовный мир преобразился больше, чем за предшествующие двадцать веков; меняются основы науки и верований: головокружительные открытия современной физики и химии колеблют представления, на основе которых люди жили прежде, сдвигают ось мира и получат в истории человечества гораздо более глубокий резонанс, нежели ссоры политических партий и наций..». Ученые сами отчасти были повинны в той сумятице умов, которую вызвали в обществе последние научные открытия. Еще совсем недавно они категорически объявляли законы Ньютона истиной в последней инстанции. Когда же стала очевидной иллюзорность этого убеждения, у широких масс непосвященных случилось некоторое головокружение, создавшее благодатную почву для процветания всякого рода идеалистических доктрин. Люди настолько привыкли к устоявшимся представлениям, что любое изменение воспринимали как катастрофу. Ведь у науки не было еще опыта таких крутых переломов и столь радикальных сдвигов.

Широкие круги читателей, далеких от научной деятельности, весьма избирательно воспринимали из знаменитых книг Пуанкаре именно критическую сторону его высказываний, всячески преувеличивали, гиперболизировали присутствовавший в них мотив сомнения. Если автор говорил о неизбежном падении старых физических теорий и замене их новыми, многим мерещились лишь дымящиеся «руины» поверженных научных теорий; когда он указывал на угрозу, нависшую над основными принципами науки, для многих это означало всеобщий разгром научных принципов. Толпе непосвященных нравилось видеть в выдающемся представителе естествознания вождя интеллектуального нигилизма, разрушителя всяких ценностей, созданных человеческим разумом. «Вы, с одной стороны, усомнились в официальной науке, с другой стороны, вы проникли в ее бездну. Ваш труд двойной: в математике вы создали научной истине храм, доступный редким посвященным, вашими же философскими минами вы заставили взлететь на воздух часовни, вокруг которых собираются для славословия чудес самозванной религии толпы рационалистов и свободомыслящих..., — с такими словами обращался к Пуанкаре в своем публичном выступлении член Французской академии Ф. Массон. — Какое побоище производят ваши доказательства... Аксиомы, мудрость веков, становятся там, где вы прошли, только определениями, законы — только гипотезами, а гипотезам этим вы даете только временное существование ...».

В своем докладе 1904 года на Международном конгрессе в Сент-Луисе (США) Пуанкаре действительно говорил о кризисе в физике и о предстоящем коренном изменении ее законов. Но заостряя внимание на этой части его выступления, широкие круги общественности искусственно отрывали ее от более важной позитивной части доклада, где автор, вопреки представлению о всеобщем крушении основ классической физики, утверждает неизбежность сохранения некоторых общих принципов, составляющих, по его мнению, остов любого нового теоретического построения. Игнорировались также высказанные там конкретные предсказания выдающегося ученого о новых физических теориях и о путях преодоления кризиса физики начала XX века. Между тем, уже в первой своей книге Пуанкаре замечает, что люди, представляющие как «банкротство науки» закономерный процесс обновления научных теорий, «не отдают себе никакого отчета в том, что составляет цель и назначение научных теорий, иначе они поняли бы, что и руины еще могут быть для чего-нибудь полезны» (с. 130—131).

Общенаучные работы Пуанкаре, на страницах которых сталкиваются весьма контрастные его мысли, сводятся стоустой молвой только к одному цвету, только к одному звучанию — к всеразъедающему скептицизму. В широких дилетантских кругах, не осознавших глубоко идей автора этих работ, он знаменит приписываемой ему всеразрушающей, ничего не щадящей силой. За Пуанкаре тянется длинный шлейф «пристегнутой» к нему славы неистового ниспровергателя научных истин, не оставляющего в науке камня на камне. И эта слава немало его беспокоит. Он вынужден порой публично выступать против тенденциозного восприятия некоторых своих высказываний.

Вскоре после выхода в свет книги «Наука и гипотеза» в широкой печати поднялась волна скандальной сенсации. Поводом для этого послужило одно неправильно понятое утверждение автора. Поскольку абсолютное пространство, введенное в науку Ньютоном, не существует, а наблюдению доступно лишь относительное движение, Пуанкаре приходит к заключению, что не существует никакой системы отсчета, к которой можно было бы отнести вращение Земли. «Если нет абсолютного пространства, то как можно вращаться, не вращаясь по отношению к чему-либо, а с другой стороны, как могли бы мы принять заключение Ньютона и верить в абсолютное пространство?» — вопрошает он (с. 97). Поэтому «утверждение: «Земля вращается» — не имеет никакого смысла, ибо никакой опыт не позволит проверить его, ибо такой опыт не только не мог бы быть ни осуществлен, ни вызван смелой фантазией Жюля Верна, но даже не мог бы быть понят без противоречия Или, лучше сказать, два положения: «Земля вращается» и «Удобнее предположить, что Земля вращается» — имеют один и тот же смысл; в одном ничуть не больше содержания, чем в другом» (с. 99). Широкие читательские круги, не способные вникнуть во все тонкости его рассуждений, перевели эту мысль на общедоступный язык в искаженном и категоричном виде: «Земля не вращается».

Вспоминая об этом эпизоде много лет спустя, Пуанкаре говорит, что, высказав мимоходом свои соображения, он «приобрел этим известность, от которой охотно отказался бы. Все реакционные французские газеты приписывали мне, будто я доказываю, что Солнце вращается вокруг Земли; в знаменитом процессе Галилея с инквизицией вся вина оказывалась, таким образом, на стороне Галилея» (с. 647).

В мае 1904 года он выступает в «Бюллетене астрономического общества Франции» со статьей «Вращается ли Земля?», в которой заявляет, что ему надоели та шумиха, которая поднята вокруг некоторых фраз, вырванных из его работы, и те нелепые мнения, которые ему приписывают. Пуанкаре пытается объяснить истинное положение дел Такие же разъяснения он приводит на страницах своей второй книги «Ценность науки». Говоря о том, что с кинематической точки зрения отдавать предпочтение утверждению «Земля вращается» перед утверждением «Земля не вращается» — это значит допускать существование абсолютного пространства, автор добавляет: «Однако, если одно из них открывает нам верные соотношения, которые не вытекают из другого, то можно считать первое физически более верным, чем другое, потому что оно имеет более богатое содержание. И в этом отношении не может быть никаких сомнений. Перед нами видимое суточное движение звезд, суточное движение других небесных тел, а с другой стороны — сплющение Земли, вращение маятника Фуко, вращение циклонов, пассатные ветры и так далее Для последователя Птоломея все эти явления ничем не связаны между собой, с точки зрения последователя Коперника они производятся одной и той же причиной Говоря: «Земля вращается», я утверждаю, что все эти явления по существу находятся в соответствии друг с другом, и это верно, и это останется верным, хотя нет и не может быть абсолютного пространства» (с. 363). Но вопреки всем стараниям Пуанкаре французские газеты не хотели так просто расстаться с сенсационной темой, щекочущей нервы широкой публики Немало еще было израсходовано по этому поводу чернил и типографской краски.

Не высокие завоевания науки попадают под прицел критики выдающегося математика, механика и физика, а только упрощенное, примитивное их понимание, и не ниспровергает он узаконенные разумом великие истины, а углубляет и уточняет их. «...Истина, за которую пострадал Галилей, остается истиною, хотя она имеет и не совсем тот смысл, какой представляется профану, и хотя ее настоящий смысл гораздо утонченнее, глубже и богаче» (с. 364).

Не только против мнения несведущей толпы выступает Пуанкаре, но и против тех философов-идеалистов, которые, используя неудачные высказывания выдающегося ученого, пытаются причислить его к своему лагерю. Одним из первых взялся трактовать на свой лад взгляды Пуанкаре реакционный французский философ Э. Леруа [1]). Именно он в серии публи-

[1]) Эдуард Леруа (1870—1954) отличался крайней эклектичностью взглядов и за долгую жизнь сменил множество философских «исповеданий»: был бергсонианцем, являлся лидером католического модернизма, пытался создать синтез идеалистических концепций самого различного толка. С 1909 года был профессором математики в Сент-Луисе, с 1921 года — профессором философии в Коллеж де Франс, где возглавлял бывшую кафедру Бергсона. Занимался палеонтологией и антропологией, оказал заметное влияние на философские воззрения Пьера Тейяра де Шардена, был избран членом Французской академии и Академии моральных и политических наук.

каций, помещенных в журнале «Revue de Metaphysique et de Morale» на рубеже веков, оформил конвенционализм как философское течение. Отталкиваясь от положений естественнонаучного конвенционализма, он приходит к крайне идеалистическому выводу о том, что вся наука — не более, чем искусственное, умственное построение ученых. Законы ее не в состоянии открыть нам истину, а служат лишь правилами действия, наподобие правил игры. Поэтому значение науки ограничено только определенной областью практических действий. Религия же призвана заполнить всю остальную часть человеческой деятельности и мировоззрение.

Критике взглядов Леруа посвящена целая глава второй книги Пуанкаре. Решительно отмежевываясь от столь идеалистического истолкования своих положений, он обращается к материалистической трактовке происхождения научного знания. Учение Леруа «антиинтеллектуалистично», пишет автор и противопоставляет критерий практики его доктрине неверия в объективность науки. «...Если научные «рецепты» имеют ценность как правило для действия, то это потому, что в общем и целом они, как мы знаем, имеют успех. Знать это — значит уже знать кое-что, а раз так, то какое вы имеете право говорить нам, что мы не можем ничего знать?» — полемизирует Пуанкаре с философом-идеалистом (с. 329). По его мнению, объективность научной теории раскрывается, помимо всего прочего, в ее предсказательной роли: «Наука предвидит; и именно потому, что она предвидит, она может быть полезной и служить правилом действия» (с. 329). Он исходит из безоговорочного признания ценности добытых наукой результатов, о критерии объективности которых Пуанкаре писал, что он «тот же самый, как и критерий нашей веры во внешние предметы Эти предметы реальны, поскольку ощущения, которые они в нас вызывают, представляются нам соединенными, я не знаю, каким-то неразрушимым цементом, а не случаем дня. Так и наука открывает нам между явлениями другие связи, более тонкие, но не менее прочные.. Они не менее реальны, чем те, которые сообщают реальность внешним предметам» (с 361). Имея в виду подобные высказывания французского физика, В. И. Ленин писал, что «теория» его, которую противопоставляли материализму, «при первом же натиске фидеизма *спасается под крылышко материализма*! Ибо это чистейший материализм, если вы считаете, что ощущения вызываются в нас реальными предметами и что «вера» в объективность науки такова же, как «вера» в объективное существование внешних предметов» [1]).

Крайности агностицизма — лишь одна сторона мишени, в которую нацелены критические стрелы Пуанкаре. «Сомневаться во всем или верить всему — два одинаково удобных решения: и то, и другое избавляют нас от необходимости размышлять»,— таково его мнение (с. 7). Одинаково неверно было бы сомневаться в истинности научных теорий или верить в абсолютную непогрешимость науки, отрицать ценность добытых учеными знаний или приписывать их творениям статус окончательной, непререкаемой истины. Он, не задумываясь, перешагивает тес-

[1]) Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 309.

ные границы застывших догм метафизического материализма, оказавшись впереди подавляющего большинства своих коллег.

Среди ученых, стоявших на стихийно материалистических позициях, вера в прежние грандиозные успехи научного познания порождала догматическую переоценку достигнутого. В их понимании дальнейший прогресс науки сводился лишь к незначительным изменениям уже существующих знаний, к постепенному уточнению уже доказанных истин. В XIX веке эти ограниченные представления не противоречили известным фактам о развитии точных наук, и естествоиспытатели могли безнаказанно оставаться в счастливом неведении диалектики познания. На рубеже веков перед наукой открылись новые области физических явлений, где действуют законы, принципиально отличные от прежних механистических представлений. Требовалось радикальное преобразование физической картины мира, что никак не согласовывалось с укоренившимися взглядами на развитие науки, как на непрерывный и монотонный процесс. Вот тогда-то незнание диалектики обернулось для естествоиспытателей тяжелым кризисом, из которого далеко не всем удалось благополучно выбраться. Крушение веры в свой идеал — механистическую картину мира — некоторые из них восприняли как «банкротство науки» вообще, кинувшись в противоположную крайность — полное неверие во что-либо прочное и незыблемое в научных знаниях.

Пуанкаре был одним из тех весьма немногих естествоиспытателей, которые еще до создания новых физических теорий заговорили о процессе познания на языке диалектики. В своей первой книге «Наука и гипотеза» он подчеркивает, что к научным теориям нужно относиться как к своего рода гипотезам, плодотворным подходам к истине, каждая из которых не умирает целиком, а оставляет нечто устойчивое, непреходящее, и «это нечто и надо стараться распознать, потому что здесь, и только здесь, лежит истинная реальность» (с. 10). Внятно и недвусмысленно звучит в его словах диалектика познания, относительность научных истин, если предыдущую цитату дополнить другой из той же книги: « материя в собственном смысле представляется все более и более сложной, все, что о ней говорится, всегда имеет только приближенное значение, и наши формулы ежеминутно требуют новых членов» (с. 145). Но непоколебима его вера в непрестанный прогресс научного познания, который «хотя и медлен, но непрерывен; так что ученые, становясь смелее и смелее, обманываются все менее и менее» (с. 330).

Наука для Пуанкаре есть вечно живой, развивающийся организм. Там, где представители метафизического материализма видели лишь навечно окостеневшую структуру научных знаний, он предрекает грядущие потрясения. На смену существующим физическим теориям придут новые, но обязательным и непременным условием останется, по его мнению, преемственность знаний. «Можно спросить себя, будут ли те приближения, которые делает сегодняшняя наука, подтверждены наукой завтрашнего дня, — обращается Пуанкаре к своим читателям. — .. Сначала нам представляется, что теории живут не долее дня, и что руины нагромождаются на руины. Сегодня теория родилась, завтра она в моде, послезавтра она делается классической, на третий день она устарела, а на четвертый — забыта. Но если всмотреться ближе, то увидим, что так именно падают, собственно говоря, те теории, которые имеют притязание открыть нам сущность вещей. Но в них есть нечто, что чаще всего выживает. Если одна из них открыла нам истинное отношение, то это отношение является окончательным приобретением; мы найдем его под новым одеянием в других теориях, которые будут последовательно водворяться на ее месте» (с. 360).

Пуанкаре предвосхищает будущий методологический принцип соответствия, требующий, чтобы каждая новая физическая теория находилась в определенном соответствии со старыми законами, подтвержденными опытами. Как своевременно было его выступление по этому вопросу в канун самой грандиозной перестройки всей теоретической физики! Каким образным становится его язык, когда он вскрывает глубочайшую закономерность диалектики научного познания: «Движение науки можно сравнивать не с перестройкой какого-нибудь города, где старые здания немилосердно разрушаются, чтобы дать место новым постройкам, но с непрерывной эволюцией зоологических типов, которые беспрестанно развиваются и, в конце концов, становятся неузнаваемыми для простого глаза, но в которых опытный глаз всегда откроет следы предшествовавшей работы прошлых веков. Итак, не нужно думать, что вышедшие из моды теории были бесплодны или не нужны» (с. 158).

Однако в последующем Пуанкаре, к сожалению, не всегда обнаруживал материалистическое понимание сложного, противоречивого процесса познания при обсуждении вопросов, связанных с проблемой соотношения абсолютной и относительной истин В речи на IV Международном конгрессе философов, состоявшемся в 1911 году, которая была включена в книгу «Последние мысли» под названием «Эволюция законов», Пуанкаре связывает изменчивость наших представлений о законах природы с относительностью знаний, что полностью соответствует его прежним установкам, а саму замену законов более общими и всеобъемлющими представляет основной целью научного познания. Но возможность такого бесконечного развития наших знаний он не обосновывает существованием объективных законов природы, присущих материи независимо от познания их человеком Он предпочитает говорить только о приближенности научных представлений, уходя от обсуждения того, что служит объектом для теоретических моделей и абсолютным пределом для всех приближенных законов природы.

В другой своей работе последних лет — «Новые концепции материи» — Пуанкаре, развивая очень интересную мысль о вечной борьбе концепций дискретности и непрерывности в физической картине мира, обосновывает это прозорливое суждение не присущими материи свойствами, а двумя непримиримыми потребностями разума, двумя стилями мышления. И несмотря на формальное признание в начале статьи материалистичности науки, «поскольку науки о природе, и в частности физика и химия, имеют своим объектом именно материю» (с. 632), в целом основной вывод автора о двух подходах в истолковании физических явлений получил идеалистическую окраску, как проистекающий из особенностей человеческого разума.

Мы не останавливаемся подробно на критическом анализе отступлений А. Пуанкаре в кантианство, априоризм, философский релятивизм и субъективный идеализм. Критика этих философских шатаний французского ученого блестяще дана В. И. Лениным в «Материализме и эмпириокритицизме» (см. Ленин В. И Пол собр соч., т. 18, с 47, 170, 190, 267, 271, 300, 308—310, 314—316, 321, 324, 327, 329) и в замечаниях на книге А. Рея «Современная философия» (см. Ленин В. И. Полн. собр соч, т. 29, с. 479—481, 489, 504). К тому же, эти вопросы обстоятельно рассмотрены в ряде исследований творчества Пуанкаре, приведенных в конце данной статьи.

Проявляя постоянство и последовательность в отрицании метафизических (недиалектических) воззрений на процесс научного познания, Пуанкаре, как и многие другие естествоиспытатели того времени, свою критику обращал против основ материализма, не сумев выделить в метафизическом материализме того ценного для теории познания материалистического начала, которое связано с признанием объективной реальности. Отсюда и проистекала вся непоследовательность ученого в трактовке объективного содержания научных истин. Тем не менее, отдельные идеалистические наслоения не могут помешать читателю, владеющему основами материалистической философии, увидеть в трудах Пуанкаре обилие ценных критических мыслей, сыгравших в свое время важную роль в освобождении естествознания от сковывающих его метафизических представлений.

Первым выступив с ценной конкретной критикой таких понятий, как механический эфир, абсолютное время и абсолютная одновременность, Пуанкаре первым же с диалектических позиций объяснил появление в науке таких умозрительных построений, за которыми не скрывается никакая реальность. Создавая свои теории, ученые нередко бывают вынуждены выходить за пределы установленных или подтвержденных на опыте фактов, мысленно дорисовывать физическую картину изучаемых явлений. Так в науку проникают гипотезы, недоступные на данном уровне ее развития экспериментальной проверке. Пуанкаре считал естественным и допустимым использование таких гипотез, помогающих человеческому разуму строить предположительные соображения о более полной картине физических явлений, чем это дает порой ограниченный опыт. Немало физических понятий зародилось первоначально именно в виде умозрительных предположений, остававшихся до поры, до времени за пределами возможностей эксперимента. Так вошли в науку атомы, эфир, поле и особая субстанция тепла — теплород Но подобные догадки о скрытой от нас объективной реальности человеческий разум склонен принимать за истинное проявление материи. Особенно характерно это для представителей метафизического материализма, претендовавших на полное познание сущности вещей и явлений.

Самым категоричным образом выступает Пуанкаре против маскировки этих умозрительных построений под научные положения, якобы вскрывающие сущность реальных вещей. Он строго разграничивает подлинные научные истины и вынужденные домыслы, представляющие неподтвержденные опытом гипотезы В этом проявилась необычайная острота его мысленного зрения, сумевшего распознать подлинную суть некоторых научных образований, легко сходивших за полноправные научные истины. Уяснение этих сторон научного познания было особенно важным в тот критический период, когда наука готовилась к решающему прыжку в глубь материи. В этих условиях первостепенное значение приобретал критический подход к широко распространенным (но научно необоснованным) представлениям о скрытых свойствах материальных объектов. Если вспомнить о том, что понятие эфира, ни разу не подвергнувшись прямой экспериментальной проверке, сумело прочно врасти в физику и даже рассматривалось одно время как естественнонаучная основа материализма, то станет ясно, сколь осторожно следовало подходить к утверждению, что за каждым физическим понятием стоит объективная реальность. Именно об этой осторожности в обращении с некоторыми научными понятиями и говорит Пуанкаре.

Но вскрыв природу этих гипотетических построений, Пуанкаре не учитывает подвижности границы, отделяющей вопросы, доступные научным методам познания, от гипотетических посылок о скрытых свойствах вещей. С развитием экспериментальной техники и теоретических подходов вчерашние гипотезы о «вещах в себе» воплощаются в конкретные соотношения между величинами, доступные опытной проверке. И тогда эти умозрительные понятия либо превращаются в строго научные, как это было с понятиями атома и электромагнитного поля, либо же оказываются отброшенными логикой научных фактов, как это было с теплородом и эфиром.

Весьма поразил современников, да и не только современников, его подход к вопросу о том, какая из геометрий соответствует нашему миру. Именно здесь особенно ярко и неожиданно проявился научный конвенционализм Пуанкаре. Казалось бы, ответ на этот вопрос должны дать опыты с физическими объектами, служащими реализацией геометрических понятий в пространстве Однако все оказалось гораздо сложнее и серьезнее, чем это предполагали. Именно Пуанкаре вскрыл истинную сущность данной проблемы. По его утверждениям, геометрия реального пространства в принципе не допускает экспериментальной проверки. Аргументирует он это тем, что ни в каком опыте нельзя проверить чистую геометрию, как таковую. Проверке подлежит только совокупность «геометрия плюс физика» в целом. Допустим, наблюдения показали, что распространяющийся в пространстве луч света искривляется. Объяснить этот факт можно различным образом: либо предполагая пространство неевклидовым, либо предполагая, что в евклидовом пространстве какая-то сила искривляет световой луч. Один и тот же экспериментальный результат совмещается с совершенно различными геометриями, можно выбирать любую из них. Но физические законы для этих двух геометрических картин будут различными. Ценой изменения, подгонки физики можно подобрать любую геометрию пространства для одного и того же наблюдаемого факта. Геометрия и физика дополняют друг друга — таков основной вывод Пуанкаре Поэтому он приходит к заключению, что «никакая геометрия не может быть более истинна, чем другая; она может быть *более удобной*» (с 49). Вопрос о выборе геометрического описания реального мира свелся для Пуанкаре исключительно к соглашению. Но поскольку евклидова геометрия обладает наибольшей простотой и удобством, то физики, по его мнению, всегда будут сохранять свою приверженность к ней. «Геометрия есть некоторое условное соглашение, — пишет он, — своего рода компромисс между нашей любовью к простоте и нашим желанием не слишком далеко удаляться от того, что нам сообщают наши инструменты» (с. 546).

Критерий «удобства», неоднократно использованный Пуанкаре для выбора предпочтительной геометрии и объяснения трехмерности пространства, стал причиной многих недоразумений. Не разъясняя смысл, вкладываемый им в этот неудачный термин, Пуанкаре давал повод для искажения своей позиции. В последующем ему не раз приходилось возражать против попыток явно субъективистски трактовать высказываемые им мысли. Однако в некоторых своих работах он все же отметил объективное основание выбора той или иной теоретической схемы из условий удобства. Так еще в 1887 году в работе «Об основных гипотезах геометрии», впервые поставив вопрос о выборе геометрии для описания физических явлений, Пуанкаре поясняет: «Мы выбрали между всеми возможными группами одну особенную для того, чтобы к ней относить физические явления, подобно тому как мы выбираем систему трех координатных осей, чтобы к ним относить геометрические фигуры Что же определило наш выбор? Это, во-первых, простота выбранной группы; но есть и другое основание: в природе существуют замечательные тела, называемые твердыми, и опыт говорит нам, что связь различных возможных перемещений этих тел выражается со значительной степенью приближения теми же самыми соотношениями, как и различные операции выбранной группы» [1]. Пуанкаре прямо указывает, что выбор геометрии и группы движений определяется соответствием их движению реальных тел. Почти то же самое пишет он 20 лет спустя в книге «Наука и метод» Язык трех измерений, по его убеждению, приспособлен «к миру, имеющему определенные свойства, и главное из этих свойств заключается в том, что в этом мире существуют твердые массы, перемещающиеся по таким законам, которые мы называем законами движения неизменяющихся твердых тел» (с. 452—453).

Пуанкаре ошибался, заранее предрекая выбор в пользу геометрии Евклида В то же время, он утверждал, что можно в принципе использовать любую другую внутренне непротиворечивую геометрию. Но эти общие соображения остались неподкрепленными конкретными физическими описаниями явлений на основе различных геометрий. Поэтому долгое время ученые, не принимая геометрический конвенционализм Пуанкаре, пытались его как-то преодолеть. И лишь в последние десятилетия исчезли сомнения в справедливости этого вывода о возможности описания одних и тех же явлений с применением различных геометрий пространства и времени.

То обстоятельство, что наблюдаемые физиками факты укладываются в рамки различных геометрий, вовсе не снимает вопроса о геометрической структуре пространства-времени, отвечающей установленным физическим законам движения материи.

[1]) Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. — М.: Гостехиздат, 1956, с. 398.

Разные геометрические представления одних и тех же физических явлений еще не свидетельствуют о произвольности и условности законов физики или пространственно-временных свойств реального мира, как не свидетельствуют об этом выбор различных единиц измерения физических величин или применение различных систем координат. Истинная или, вернее, естественная геометрия реального пространства-времени только одна, и выделена она тем, что наиболее полно отражая с ее помощью физические явления, ученые в то же время обходятся без вынужденного усложнения физической теории [1]). Используя другие, отличные от нее геометрии, они одновременно подправляют физические законы введением в них дополнительных сил, называемых универсальными, чтобы согласовать теоретическое описание с опытными данными. Эти универсальные силы, одинаковым образом действуя на все материальные объекты, например, на лучи света, на космические частицы, на кометы, позволяют объяснить различные особенности их движения силовым воздействием, а не искривлением пространства. Тем самым, физические теории, включающие универсальные силы, берут на себя часть «геометрической нагрузки». Их уравнения фактически учитывают некоторые геометрические свойства мира.

* * *

В своих работах Пуанкаре неоднократно обращался к обсуждению общих и методологических проблем математики и математического творчества. Ни один сколько-нибудь значительный вопрос из области математических наук, дискутировавшийся в то время научными кругами, не был обойден его вниманием. И нередко бывало, что именно он выступал инициатором такой дискуссии или же становился ее активным центром. Многие из рассмотренных им математических проблем и сейчас представляют немаловажный интерес. Так, до сих пор не получили однозначного разрешения обсуждавшиеся им проблемы, связанные с парадоксами теории множеств и классической логики, статусом аксиомы Цермело, взаимоотношением интуиции и логики в математическом познании и некоторые другие вопросы.

В начале нашего века острая полемика разгорелась вокруг весьма общей и принципиальной проблемы: откуда математика черпает свое основное содержание? Целый ряд ученых, отвергая роль интуиции и наглядных представлений, категорически утверждали, что математическое знание выводится чисто логическим путем. В конце XIX — начале XX веков складывается учение логицизма, сводившее всю математику к логике. В этот же период бурно развивается и математическая логика. Итальянский математик Пеано в пяти томах своего «Математического формуляра» дает комментированное изложение математики на

---

[1]) Тяпкин А. А. Конвенциональные определения и объективные инварианты//Вопросы философии. — 1970. — № 7. — С. 64—71; Денисов В. И., Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Полевая теория гравитации и новые представления о пространстве и времени//Элементарные частицы и атомное ядро.— 1981. — Т. 12, № 1. — С. 12—18.

языке логических действий с помощью разработанных им специальных обозначений для понятий логики, используемых в математических рассуждениях. В этом же направлении работают немецкие ученые Фреге и Дедекинд, а также англичане Рассел и Уайтхед. С развитием математической логики противники интуиции получили в свои руки (в дополнение к имеющимся доказательствам недостоверности ссылок на наглядность) мощное оружие, которое, как им казалось, дает возможность полностью и без всяких надежд на реабилитацию изгнать из математического познания столь опорочившее себя понятие — интуицию.

В 1901 году Рассел пишет статью «Новейшие работы о началах математики», где излагает развернутую программу логицизма. Затем выходят в свет знаменитые расселовские «Принципы математики» (Кембридж, 1903). Вскоре французский ученый Кутюра публикует несколько статей, в которых дает всестороннюю и детально разработанную оценку результатов Рассела и Пеано и яростно обрушивается на учение о математической интуиции.

Логицисты решили полностью изгнать из математики интуицию во всех ее видах. С их точки зрения многолетний заочный спор между Лейбницем и Кантом, то есть спор между логикой и интуицией в математике, благодаря трудам Пеано и Рассела раз и навсегда решен в пользу логики. В этом отношении примечательны взгляды Рассела, который считал, что интутивные способности «лучше развиты в детях, чем у взрослых, у собак их, вероятно, больше, чем когда-либо было у людей. Но кто в этих фактах увидел бы рекомендацию для интуиции, должен был бы сделать из них вывод и снова бегать дикарем в лесах, ярко размалеваться и питаться акридами и диким медом».

Не приходится удивляться тому, что логицисты с негодованием отмели саму мысль иметь дело с подобным понятием в математике. Вся математика, утверждали они, может быть выведена из нескольких неопределяемых понятий и недоказуемых предложений, которые кладутся в основу логики.

В это время, когда казалось, что интуиция окончательно будет изгнана из математики, Пуанкаре единственный из европейских ученых выступает с целой серией статей, в которых подверг сокрушительной критике программу логицизма. Часть этих статей вошла затем в виде отдельных глав в его книги «Ценность науки», «Наука и метод», «Последние мысли». Свое выступление против логицистов Пуанкаре сравнивает с борьбой Геракла против лернейской гидры, у которой на месте одной отрубленной головы вырастали две. Но и находясь, практически, в одиночестве, он не только защитил интуицию от необоснованных нападок, но и предсказал крах логицизма в пору его наивысшего расцвета, когда, по словам Рассела, «великие триумфы пробуждали великие надежды».

Пуанкаре выдвигает следующие принципиальные возражения против логицизма: новые результаты в математике нельзя получить только при помощи логики — нужна еще и интуиция; доказательство уже полученных математических истин невозможно без обращения к интуиции; символика логицистов является путами для математического творчества. И как общий итог этих возражений — невозможность сведения математики к логике и необходимость наличия интуиции в математическом познании. Пуанкаре не ограничивается только критикой программы логицистов, он одновременно рассматривает многие стороны проблемы интуиции и противопоставляет идеям логицистов хорошо разработанное учение. Пуанкаре не отрицал той роли, которую играет в математическом творчестве логический вывод. Но, по его мнению, одной только логикой математика никак не исчерпывается. Необходим еще один род творчества, который столь безапелляционно отвергли логицисты: интуиция. Логика может только разворачивать, раскрывать то знание, которое изначально заложено в исходных посылках. «Доказательство, основывающееся по-настоящему на принципах аналитической логики, должно состоять из ряда предложений; одни из них, служащие посылками, будут представлять тождества или определения, другие будут выводиться из первых шаг за шагом, но, хотя связь между каждым предложением и следующим замечается непосредственно, нельзя будет сразу же увидеть, как совершился переход от первого предложения к последнему, и явится искушение рассматривать его, как новую истину. Но, если последовательно заменять различные, фигурирующие в нем выражения их определениями и если продолжить эту операцию до тех пор, пока это возможно, то под конец останутся только тождества, так что все сведется к одной колоссальной тавтологии. Следовательно, логика, если только она не оплодотворена интуицией, остается бесплодной»[1]). Только интуиция, постижение истины не путем доказательства, а непосредственным интеллектуальным усмотрением ее содержания, позволяет сделать скачок к принципиально новому знанию.

В споре с Пеано, Расселом и их единомышленниками Пуанкаре использует термин «интуиция» в самых различных смыслах. При этом необходимо подчеркнуть, что интуиция Пуанкаре не имеет ни малейшего оттенка чего-то иррационального или мистического. Он, специально отмечая это, очень много внимания уделяет конкретному анализу роли интуиции. Неоднократно говорит он, например, об интеллектуальной и чувственной интуиции. Первая, по его мнению, лежит в основе математического творчества. Интеллектуальная интуиция позволяет математикам «не только доказывать, но еще и изобретать. Через нее-то они подмечают сразу общий план логического здания» (с. 218). Это очень редкий и благодатный дар, считает Пуанкаре, лишь немногие владеют им. В то же время, он далек от того, чтобы преувеличивать достоинства интуитивного метода. «Интуиция не может дать нам ни строгости, ни даже достоверности — это замечается все больше и больше» (с. 208). Поэтому неизбежен, по его мнению, логический элемент в математике. «Логика и интуиция имеют каждая свою необходимую роль. Обе они неизбежны. Логика, которая одна может дать достоверность, есть орудие доказательства, интуиция есть орудие изобретательства» (с. 215).

По Пуанкаре, разум — слуга двух господ: логика доказывает, а интуиция творит. И та, и другая равно необходимы в математических исследованиях. И все же, чаша весов заметно

---

[1]) Пуанкаре А. Математика и логика//Новые идеи в математике.— Пг.: Образование, 1915.— С. 146.

склоняется у Пуанкаре в пользу интуиции. Впрочем, это не удивительно. Ведь сколько раз именно интуиция приводила его к новым результатам, позволяла увидеть скрытые возможности. Об интуитивном характере своего творчества свидетельствует и он сам в знаменитом докладе 1908 года на заседании «Психологического общества», который вошел в книгу «Наука и метод» в виде главы под названием «Математическое творчество» Здесь Пуанкаре приводит примеры из раннего этапа своей научной деятельности, когда он работал над автоморфными функциями. Примеры эти стали ныне хрестоматийными и много раз уже цитировались в литературе о психологии научного творчества. Свидетельствуют они о том, что счастливая мысль осеняет творца, как правило, не в то время, когда он трудится над проблемой, а после того, как, не найдя решения и устав от бесплодных усилий, он временно откладывает задачу, забывает о ней. Идея рождается либо благодаря ничтожному намеку, либо же без всякого видимого толчка, свидетельствуя о подсознательной работе, совершающейся в мозгу независимо от воли и сознания. Эти наблюдения Пуанкаре полностью совпадают с тем, что сообщали до него Гельмгольц и Гаусс

Как и Гельмгольц, Пуанкаре отмечает, что «эти внезапные внушения не происходят иначе, как после нескольких дней волевых усилий, казавшихся совершенно бесплодными, так что весь пройденный путь в конце концов представлялся ложным. Но эти усилия оказываются в действительности не такими уж бесплодными, как это казалось, это они пустили в ход машину бессознательного, которая без них не стала бы двигаться и ничего бы не произвела» (с. 407). Скачок воображения лишь венчает длительные и упорные размышления над проблемой.

В процессе творческой работы, таким образом, Пуанкаре выделяет несколько этапов: после некоторого периода сознательной работы и неудачных попыток добиться результата наступает более или менее длительный перерыв, в течение которого бессознательная работа не прерывается, затем внезапно появляется решающая мысль. Наконец, последний этап — обязательная проверка результата. Известный голландский математик Бет сформулировал эту концепцию Пуанкаре так: «*Подготовка, инкубация, вдохновение и проверка*»[1]). Процесс инкубации идей или процесс бессознательной работы, как подчеркивал Пуанкаре, возможен, или, по меньшей мере, плодотворен, если ему предшествует и за ним следует период сознательной работы. Сознательная работа особенно необходима для обработки результатов вдохновения.

Не следует ли отсюда, что «я» подсознательное является чем-то высшим, чем «я» сознательное? — таким вопросом задается Пуанкаре после обсуждения своих примеров. Вопрос этот возник у него не даром. Именно к такому выводу пришел выступавший на заседании Психологического общества двумя месяцами раньше Эмиль Бутру, известный в то время философ-спиритуалист. По его мнению, бессознательное, к которому он относит и религиозное чувство, является источником наиболее

---

[1]) Beth E. W., Piaget J., Mathematical Epistemology and Psychology. — Dordrecht, 1966. — P. 89.

тонкого, истинного познания. Пуанкаре опасается, что доложенные им факты могут быть истолкованы как подтверждение идеалистических умозаключений Бутру. Поэтому он категорически заявляет: «Что касается меня, то я, признаюсь, отнесся бы к такому ответу далеко не сочувственно» (с. 409).

Столь же критически высказывается он о взглядах Бутру в другом своем докладе «Эволюция законов», сделанном им в 1911 году на IV Международном конгрессе по философии и включенном в книгу «Последние мысли». В целом ряде своих работ, например, «О случайности законов природы», «Об идее закона природы в современной науке и философии», Э. Бутру утверждает, что «законы природы не абсолютны, что их основа заключается в причинах, господствующих над ними, и что поэтому рассудочная точка зрения не может быть окончательной точкой зрения в познании вещей».

Пуанкаре был в прекрасных отношениях с самим Бутру, который был женат на его сестре, часто бывал в их доме и питал особую симпатию к их сыну, талантливому молодому математику Пьеру Бутру. Но это не мешало ему публично выступать, и неоднократно, против идеалистических философских доктрин Эмиля Бутру

Пуанкаре оказался прав, отдавая должную дань роли интуиции в математике и говоря о невыполнимости основной задачи логицизма — сведении математики к логике. Подход логицистов к математике был типично идеалистическим: все многообразие развития диалектически противоречивого реального мира они пытались втиснуть в прокрустово ложе формально логических принципов. Эта программа принципиально не могла быть реализована. Но прежде чем логицисты действительно столкнулись с неразрешимыми трудностями, Пуанкаре своей критикой уже развенчал их идеи [1]).

Борьба Пуанкаре против логицизма имела еще одно последствие. Она нанесла серьезный удар по логическому позитивизму, одной из опаснейших разновидностей неопозитивизма. Дело в том, что представители логического позитивизма, исходя из основных идей логицистов, пытаются свести философию к логике. Сущность философии, как заявлял Рассел, это формальная логика, и вообще, философия не отличима от логики И. С. Нарский справедливо подчеркивает, что основная идея логицизма — сведение математики к логике — для Рассела соответствовала отрицанию «роли математики, как науки о количественных и пространственных соотношениях объективного мира» [2]). Что же касается проводимого Расселом по аналогии сведения философии к логике, то подобная попытка превращала «философию в науку о формальных преобразованиях чувственного «мате-

---

[1]) Подробнее анализ взглядов Пуанкаре на роль интуиции в математическом познании, характеристика воздействия Пуанкаре на становление математического интуиционизма см. в работе: Панов М. И. Анри Пуанкаре как предшественник интуиционизма в учении о математической интуиции//Некоторые философские вопросы физики и математики. — Краснодар, 1971. — С. 112—136.

[2]) Нарский И. С. Философия Бертрана Рассела. — М.: Изд-во МГУ, 1962. — С. 27.

риала» познания, что уже соответствовало идеям неопозитивизма»[1]. Поэтому выступления Пуанкаре против приверженцев логицизма имели значение не только для самой математики, но и для философии, для критики современного неопозитивизма. «Выступления Пуанкаре с критикой логицизма, поддержанные Бутру, Мейерсоном, Бреншвигом, имели важнейшее значение для ориентации французской философии. Они преградили в ней дорогу неопозитивизму, одним из источников которого был именно логицизм. В этом заключается позитивное философское значение антилогистской позиции А. Пуанкаре, поскольку она была одновременно направлена против той идеалистической интерпретации, которую давали логицизму Рассел и Уайтхед»[2].

На раннем этапе своего научного творчества Пуанкаре весьма доброжелательно встретил канторовскую теорию множеств. Будучи молодым преподавателем Сорбонны, он участвовал в переводе на французский язык основополагающих работ Кантора и даже применял отдельные положения его теории в своих исследованиях по автоморфным функциям, по общей теории аналитических функций. Но в начале XX века Пуанкаре становится ярым противником теории множеств. Это сказалось на общем отношении к ней в среде математиков. Даже много лет спустя, в 1927 году, Д. Гильберт сетовал на то отрицательное влияние, которое оказали взгляды знаменитого французского ученого на научный престиж теории множеств: «К сожалению, Пуанкаре, самый плодовитый и богатый идеями среди математиков своего поколения, имел определенное предубеждение к теории Кантора, не позволившее составить справедливое мнение о великолепных понятиях, введенных Кантором»[3]. Но «предубеждение» Пуанкаре имело под собой довольно веское основание.

Как и многие другие математики, высшим критерием полноценности математической теории Пуанкаре считал ее непротиворечивость Но как раз на рубеже двух веков в теории множеств выявились вопиющие противоречия, к которым приводят совершенно правильные в логическом отношении рассуждения. Именно эти неразрешимые парадоксы оттолкнули Пуанкаре от этой теории. Он отказывал ей в праве на существование, поскольку отдельные ее положения противоречили друг другу. Впрочем, Пуанкаре был не одинок в своем категорическом подходе к этому вопросу. Не мало было в те годы предложений избавить математику от разрушительных катастроф, вызванных парадоксами теории множеств, отказавшись от самой теории

Пуанкаре выступал против трансфинитных чисел, введенных Кантором, против аксиоматики Цермело, против теории типов Рассела, критиковал непредикативные определения в математике. Аксиома Цермело, выдвинутая автором в 1904 году, привлекла особое внимание математиков. Ей посвящались и посвящаются многие сотни работ, включая целые книги. И это

---

[1]) Нарский И. С. Философия Бертрана Рассела.— М.: Изд-во МГУ, 1962.— С. 27.

[2]) Кузнецов В. Н. Французская буржуазная философия XX века. — М.: Мысль, 1970. — С 36.

[3]) Рид К. Гильберт. — М.: Наука, 1977. — С. 240.

не случайно. Поскольку эта аксиома выбора связана с более фундаментальными положениями математики, чем аксиома параллельности в геометрии, то непринятие ее привело бы к гораздо более глубокой перестройке традиционных представлений.

Последствия такого потрясения могли затронуть не только математику, но и вообще наши научные взгляды Подчеркивая важность этой аксиомы и распространенность ее в математических рассуждениях, Пуанкаре выражает мнение о безнадежности попыток Рассела доказать аксиому выбора. По его мнению, она представляет собой априорное синтетическое суждение.

Пуанкаре явился инициатором современной постановки проблемы непредикативности. В качестве непредикативных определений он рассматривает определения, построенные по принципу порочного круга, когда рассуждение, приводящее к требуемому результату, само опирается на то, что с его помощью нужно определить. Наиболее полно свои взгляды на непредикативные определения Пуанкаре развил в статье «Логика бесконечного», вошедшей в книгу «Последние мысли». Скрытым источником непредикативности и всех противоречий в теории множеств Пуанкаре считает основное понятие этой теории — актуальную бесконечность. Ее необходимо исключить из математического обихода. Только в устранении непредикативных определений видит он возможность выхода из парадоксов теории множеств.

Первый такой парадокс обнаружил в 1897 году итальянский математик Бурали-Форти. Хотя Бурали-Форти не сумел преодолеть обнаруженного им противоречия, дело еще не представлялось слишком серьезным. Казалось, что небольшой пересмотр доказательств теорем мог бы спасти положение. Не поколебала этой уверенности и еще одна антиномия, обнаруженная Кантором в 1899 году. Эти парадоксы как будто бы не затрагивали самой сути теории множеств и имели вид лишь досадных случайностей на фоне всеобщего признания учения Кантора.

Как раз в это время теория множеств «входит в моду» и ее методы все шире и шире применяются в различных областях математики. Триумфом новой теории стало ее признание на I Международном конгрессе математиков в Цюрихе (1897). В обстановке такого успеха парадокс Бурали-Форти выглядел как нелепая случайность. Однако вскоре по теории множеств был нанесен тяжелейший удар открытием парадокса Рассела. От этого парадокса уже нельзя было так просто отмахнуться, поскольку он был обнаружен не где-то в хитросплетениях абстрактных построений, а вытекал прямо из определения множества, данного Кантором. Не приходится удивляться той бурной реакции ученых, которую вызвало сообщение о парадоксе Рассела.

После открытия парадокса Рассела новые антиномии посыпались как из рога изобилия: парадокс Ришара (1905), парадокс Греллинга (1908) и другие. Оказалось даже, что в теории множеств имеет место парадокс «лжеца», известный еще древним грекам. Все это подорвало доверие к теории множеств среди ученых.

Если бы речь шла о парадоксах, затрагивающих какой-нибудь частный раздел математики, то можно было бы «отсечь» этот загнивший росток от «здорового» математического древа. Но с теорией множеств так нельзя было поступить, потому что она стала основанием практически всей математики. Ее понятия и методы широко использовались в самых различных областях математики, многие из разделов которой перестраивались на теоретико-множественной основе. Теория множеств превратилась в своего рода фундамент математики. Обнаружение парадоксов показало, что фундамент самого этого фундамента является весьма непрочным. Академик А. Д. Александров так характеризует создавшуюся тогда ситуацию: «Теоретико-множественная установка оказалась подорванной, и вместе с нею оказалось подорванным все стройное здание математики. В верхних его этажах шло энергичное строительство: кирпичики теорем, соединяемые цементом логики, укладывались в рамки уже определившихся разделов и воздвигались каркасы новых теорий, но в теоретико-множественном фундаменте обнаружились расширяющиеся трещины парадоксов и под ними зыбучие пески и топи логических трудностей» [1]).

Самые основы математики и логики оказались пораженными неразрешимыми противоречиями. Произошло крушение, казалось бы, незыблемых понятий и представлений. Налицо был кризис оснований математики. И даже не сами парадоксы говорят об этом кризисе. Гораздо более убедительно о кризисе свидетельствует тот факт, что попытки преодолеть антиномии выявили далеко идущие и неожиданные расхождения мнений по поводу самых основных математических понятий.

Этот кризис резко обострил борьбу между такими течениями как логицизм, интуиционизм и формализм. Выступления Пуанкаре против логицизма и допустимости актуальной бесконечности, разработка им учения о математической интуиции были одним из источников возникновения интуиционизма как одного из направлений в обосновании математики. Для сторонников интуиционизма характерно отвержение абстракции актуальной бесконечности и «чистых» теорем существования, а также неприятие неограниченного применения закона исключенного третьего. Интуиционисты рассматривают математические объекты как конструктивные. Большое внимание уделяется анализу роли интуиции в математическом познании.

Позиция Пуанкаре может рассматриваться как весьма близкая к интуиционизму. Близость идей Пуанкаре и основоположника интуиционизма Брауэра многие исследователи отражают даже в названиях взглядов Пуанкаре. Френкель и Бар-Хиллел определяют его позицию как ранний интуиционизм, Бет — как полуинтуиционизм. Сам Брауэр охарактеризовал Пуанкаре как одного из руководителей пред-интуиционистской школы [2]).

* * *

В книгах, посвященных общим вопросам науки, Пуанкаре уделил большое внимание проблемам теоретической физики того

---

[1]) Александров А. Д. Математика и диалектика. Сиб. мат. ж. — 1970. — Т. 11, № 2. — С. 247.

[2]) Brouwer L. E. J. Historical Background. Principles and Methods of Intuitionism//South African J. Sci. — 1952. — V. 49, № 3—4. — P. 140.

времени, оказавшейся неспособной дать объяснение целому ряду новых экспериментальных фактов. Особый интерес представляют те главы, в которые были включены его официальные доклады на международных конгрессах. Так, в книге «Наука и гипотеза» излагается доклад Пуанкаре на Международном физическом конгрессе 1900 года, в котором дается глубокий анализ назначения теоретической физики и той роли, которую играют в науке различные по своей сущности гипотезы. Эти общие вопросы теории познания и сейчас сохраняют свое актуальное значение.

Физический конгресс 1900 года, проходивший в дни Всемирной парижской выставки, был первым международным форумом физиков. Откликнувшись на призыв французского Физического общества, в Париж съехались почти все знаменитости этой науки. Рабочие заседания конгресса начались с доклада Пуанкаре. «Опыт — единственный источник истины: только опыт может научить нас чему-либо новому, только он может вооружить нас достоверностью», — провозглашает Пуанкаре (с. 116). Но уже в следующей фразе он ставит вопрос: если опыт есть все, то где же место теоретической физики? И автор последовательно и обстоятельно развивает свои взгляды на эту проблему.

«...Всякое обобщение до известной степени предполагает веру в единство и простоту природы. Допущение единства не представляет затруднений» (с. 120). Но вот тезис — «природа любит простоту» — постоянно оспаривается и подвергается сомнению. Между тем, по твердому убеждению Пуанкаре, «те, которые не верят, что законы природы должны быть просты, все же часто бывают вынуждены поступать так, как если бы они разделяли эту веру. Они не могли бы совершенно отрешиться от этой необходимости, не разрушая тем самым всякой возможности обобщения, а следовательно, и науки» (с. 120). Ведь если не руководствоваться критерием простоты, то невозможно выбрать какое-либо теоретическое обобщение из бесчисленного множества различных вполне осуществимых обобщений.

«Изучая историю науки, — отмечает Пуанкаре, — мы замечаем два явления, которые можно назвать взаимно противоположными: то за кажущейся сложностью скрывается простота, то, напротив, видимая простота на самом деле таит в себе чрезвычайную сложность» (с. 121). Но независимо от того, какая из этих ситуаций реализуется на самом деле, в науке, по мнению докладчика, в любом случае, следует предпочесть сначала простейшее обобщение. В дальнейшем более точные и совершенные опыты либо подтвердят истинность этой простоты, либо вынудят ученых пойти на усложнение и выбрать другое, более истинное обобщение. Иначе говоря, докладчик утверждает, что во всех случаях надо исходить из гипотезы простоты природы. Этот принцип построения физических теорий, который впоследствии стали называть «принципом простоты», особенно важно было уяснить в период глубокого кризиса физики, когда перед учеными встала проблема обобщения совершенно новых экспериментальных фактов и построения новых физических теорий.

Вслед за этим Пуанкаре рассмотрел различные типы гипотез, используемых в физике. Говоря о физических гипотезах, допускающих непосредственно экспериментальную проверку, он особо подчеркнул принципиальную важность того случая, когда гипотеза ученого оказывается опровергнутой опытом. «...Физик, который пришел к отказу от одной из своих гипотез, должен был бы радоваться, потому что тем самым он нашел неожиданную возможность открытия, — говорит Пуанкаре. — Я предполагаю, что его гипотеза не была выдвинута необдуманно, что она принимала в расчет все известные факторы, могущие помочь раскрыть явление! Если она не оправдывается, то это свидетельствует о чем-то неожиданном, необыкновенном; это значит, что предстоит найти нечто неизвестное, новое» (с. 121).

К особо опасным гипотезам Пуанкаре отнес те из них, которые принимаются неосознанно и незамеченными проникают в систему научных знаний.

Некоторые гипотезы докладчик назвал безразличными. Они никак не влияют на результат теоретического предсказания, а привлекаются либо из-за слабости человеческого разума, испытывающего затруднения в толковании некоторых явлений без вспомогательных представлений, либо для того, чтобы облегчить математическое решение задачи. «Этого рода безразличные гипотезы никогда не представляют опасности, лишь бы только природа их была ясно понимаема. Они могут быть полезными то в качестве вычислительного приема, то как некоторая конкретная опора для нашей мыслительной способности. Поэтому нет оснований их осуждать» (с. 126). К таким гипотезам Пуанкаре причислил предположение о непрерывности материи или противоположную ему гипотезу об атомарном ее строении, а также все предположения о физических свойствах «тонких субстанций, которые под именем эфира или под каким-либо другим именем во все времена играли столь значительную роль в физических теориях» (с. 136). Эфир, наделяемый механическими свойствами, он уподобляет некогда принятому в науке «теплороду» и ставит под сомнение его истинное существование. «Гипотезам этого рода свойствен лишь метафорический смысл... — утверждает Пуанкаре. — Они могут быть полезны, как средство достигнуть умственного удовлетворения» (с. 133).

Такой подход к проблеме эфира был в то время далеко не общепринятым Например, в докладе знаменитого лорда Кельвина, сделанном на том же пленарном заседании, проповедывались прямо противоположные взгляды.

И, конечно же, Пуанкаре не мог обойти молчанием все удивительные открытия последних лет — открытия лучей Рентгена, лучей, испускаемых ураном и радием. «Тут целый мир, о существовании которого никто и не догадывался. Всех этих неожиданных гостей надо определить к месту! Никто не может еще предвидеть, какое именно место они займут. Но я думаю, что они не разрушат общего единства, а скорее дополнят его собою», — уверенно заключает он (с. 145).

В этом обзорном докладе крупнейший теоретик и глубокий мыслитель поднимал важнейшие для того времени проблемы научного познания, в общих чертах намечая пути решения труднейших физических проблем. И это не были советы приверженца старых концепций, Пуанкаре в самом широком смысле рассматривал теоретическое обобщение опытных данных, не связывая его с механическим представлением. От будущих теорий он требовал лишь выполнения основных физических принципов, в которых усматривал самое общее проявление единства природы в котором посвятил основную часть своего доклада на одном из следующих международных конгрессов.

В книгу «Ценность науки» Пуанкаре включил свое выступление в сентябре 1904 года на Международном конгрессе искусства и науки, проходившем в городе Сент-Луисе (США). Он выступил тогда с программным докладом «Настоящее и будущее математической физики». Доклад этот замечателен не только глубоким анализом состояния физики накануне крупнейшего преобразования ее теоретических основ, но и необычайно точными предсказаниями предстоящих изменений физических законов.

Можно без преувеличения сказать, что этот обзор всех основных трудностей классической физики был не только первым, но и единственным в течение многих последующих лет. И раньше высказывались отдельные сомнения и слышались призывы искать новые пути преодоления встретившихся трудностей, но не было общей оценки сложившейся ситуации в физике, как кризисной. Только в этом докладе Пуанкаре впервые было подытожено состояние физики в целом и твердо заявлено: «есть признаки серьезного кризиса». После этого многие будут говорить о кризисе физики конца XIX — начала XX века. А не так давно авторитетнейший ученый того времени — лорд Кельвин — в одной из своих лекций благодушно сравнил физику с кораблем, благополучно миновавшим подводные рифы и мели и вошедшим в спокойную гавань. Лишь два небольших облачка, по его мнению, омрачали пока небосвод науки — это затруднения в теории излучения и в электродинамике движущихся тел. Но, как выяснилось впоследствии, именно эти два облачка явились теми грозовыми тучами, которые нависли над основами классической физики.

«. Имеются признаки серьезного кризиса, и нам как будто следует ждать близких перемен», — утверждает Пуанкаре (с. 300). При этом под сомнение ставится основа основ всей физики — ее принципы. К таким основополагающим принципам Пуанкаре относит: принцип сохранения энергии, принцип Карно, играющий роль второго начала термодинамики, принцип равенства действия противодействию, принцип относительности и принцип сохранения массы. К ним он добавляет еще принцип наименьшего действия. В этих принципах сконцентрирована вся накопленная веками мудрость физики как науки. «Приложение этих пяти или шести общих принципов к различным физическим явлениям является достаточным средством узнать то, на познание чего мы можем разумно рассчитывать» (с. 304). В чем сила достоверности этих принципов? В их общности, утверждает Пуанкаре. «Действительно, чем они более общи, тем чаще представляется случай проверять и контролировать их, и результаты проверок, накопляясь, принимая самые разнообразные, самые неожиданные формы, в конце концов уже не оставляют места сомнению» (с. 305). И вот над этими-то принципами нависла в последние годы угроза ниспровержения, причем над каждым из них в отдельности. Не только закон сохранения энергии подвергается сомнению; рассмотрев принципы физики один за другим, можно увидеть, что все они находятся в опасности. И далее Пуанкаре переходит к такому подробному рассмотрению.

До предела сгустив краски при описании тревожного состояния физики, Пуанкаре выразил уверенность в том, «что этот кризис будет благотворным, ибо история прошлого, по-видимому, дает в этом гарантию» (с. 301). При этом он вовсе не считает, что тревога была напрасной и классическая физика останется невредимой. Нет, он предсказывает самые неожиданные изменения законов физики и говорит о том, что принципы могут быть сохранены ценою огромных усилий, уже предпринятых и только еще предстоящих. Докладчик признает необходимость коренной перестройки многих существующих теорий для преодоления встретившихся трудностей, за исключением созданной Лоренцем электродинамики движущихся тел. Но эта ломка, по его убеждению, не должна отвергнуть основные принципы физики. Он допускает лишь возможность изменения их формы. Пуанкаре говорит о том, что оставшиеся среди руин старой физики общие принципы предстоит отыскивать в новом одеянии.

Теперь, когда давно отшумела буря над физикой и на ее могучем остове возникли стройные здания современных теорий, нелегко представить себе то смутное время сомнений в самых основных физических принципах Нужно забыть на минуту о всех возникших позже новых представлениях физики XX века, чтобы по достоинству оценить значение программного доклада Пуанкаре, в котором он дал ключевую основу для поиска новых физических закономерностей — совокупность основных принципов, сохраняющих свое значение и в новой физике. Особенно подчеркивал Пуанкаре незыблемость закона сохранения энергии, который, по его мнению, не смогут поколебать никакие будущие открытия. Это убеждение высказывалось им и раньше, на Первом физическом конгрессе в Париже.

В науке после этого произошла самая крупная революция за все время ее существования. Коренному преобразованию подверглись основные физические представления. Были установлены совершенно необычные физические законы, действующие при околосветовых скоростях и в мире мельчайших частиц. Но все отмеченные Пуанкаре общие принципы и по сей день сохраняют свое значение, действуя в современной физике в преобразованном виде[1]). Пуанкаре весьма проницательно наметил стержневую линию новой физики, ее остов из основных принципов, связывающих ее с классической физикой.

Вопреки своему намерению не делать прогнозы, из опасения допустить нелепость с точки зрения будущих поколений физиков, Пуанкаре дал в докладе удивительно меткие указания «горячих точек» физики, в которых следовало ожидать рождения принципиально новых закономерностей. И оправдались не просто многие из этих прорицаний, а буквально все. Современные ученые не находят ни одной нелепости в его смелых суждениях. История науки не знает другого такого труда, в кото-

[1]) Так, в современной релятивистской механике изменилось выражение энергии через скорость движения, а принцип сохранения масс тел стал относиться к полным массам с учетом их возрастания при увеличении скорости. При этом принцип сохранения масс слился с преобразованным принципом сохранения энергии.

ром с такой полнотой и с такой конкретностью были бы предсказаны грядущие преобразования в физике. Причем в своих предсказаниях Пуанкаре сохранял свойственную ему конкретность суждений, смягчая смелость детального прогнозирования предположительной формой своих высказываний.

Заключая доклад осторожным заявлением: «мы не в состоянии предвидеть, в каком направлении пойдет дальнейшее развитие», Пуанкаре тут же проявляет гениальную прозорливость: «Тогда физический закон получил бы совершенно новый вид: он не был бы уже только дифференциальным уравнением, но приобрел бы характер статистического закона» (с. 324). Столь же определенно предсказывал Пуанкаре и неизбежность открытия новых законов движения электронов в атомах, объясняющих загадочное распределение линий излучения в спектрах. «Эти явления еще не объяснены, — говорит он, — и я думаю, что здесь перед нами одна из наиболее важных тайн природы» (с. 322).

По поводу невозможности обнаружения абсолютного движения Пуанкаре высказал в конце доклада предположение: «Возможно также, что нам придется создать совершенно новую механику, которую мы сейчас лишь смутно предугадываем». Но это «смутное предугадывание» он характеризует весьма четким определением сущности будущей релятивистской теории: «В этой механике инерция возрастала бы вместе со скоростью, и скорость света являлась бы непреодолимым пределом» (с. 324).

В осуществлении своего пророчества Пуанкаре сам сыграл выдающуюся роль. Тема относительности движения неслучайно занимает важное место во всех четырех книгах. На протяжении многих лет он постоянно обращается к обсуждению этой проблемы, оказывая плодотворное влияние на других ученых, занятых ее решением. А в 1905 году Пуанкаре завершает наиболее полное и строгое в математическом отношении построение новой физической теории, получившей затем название теории относительности. С созданием этой теории был успешно преодолен один из самых тяжелых кризисов классической физики, связанный с крушением надежд на обнаружение движения тел относительно эфира.

Начиная с Ньютона, ученые XVIII и XIX веков мысленно заполняли все мировое пространство некоторой универсальной средой — эфиром, пронизывающим даже сплошные тела. Этот единый материальный носитель обуславливал все известные тогда явления физического мира, но сам был ненаблюдаемой субстанцией. В течение полутора столетий эфир так и оставался вне досягаемости физического эксперимента, а следовательно — за пределами научного знания. После того, как физикам стала ясна фундаментальность электромагнитных явлений, их несводимость к механическим явлениям, они отказались от безуспешных поисков проявлений механических свойств эфира. Он стал выступать материальным носителем свойств непосредственно самого электромагнитного поля. Но и в этом новом обличье эфир продолжал оставаться особой идеальной средой, невидимой и невесомой, недоступной опытному познанию. Только в последней четверти XIX века появилась, наконец, надежда окончательного решения этой проблемы, когда физики стали проводить на самом высоком уровне оптические и электромагнитные опыты, с помощью которых надеялись обнаружить движение Земли относительно неподвижного мирового эфира.

Одним из решающих экспериментов был знаменитый опыт Майкельсона — Морли Достигнутая в нем точность измерений обеспечивала возможность обнаружения эффектов, обусловленных «эфирным ветром» при движении Земли вокруг Солнца. Но вопреки ожиданиям опыт дал отрицательный результат, что поставило физику перед совершенно непреодолимыми, казалось бы, затруднениями. Распутать возникший клубок противоречий в большой степени помогло активное участие Пуанкаре в обсуждении всей проблемы. Его склонность к критическому анализу и способность находить правильные решения в самых запутанных обстоятельствах позволили ему раньше других ученых прийти к важным выводам и выдвинуть новые положения, которые легли в основу будущей теории относительности

В серии статей, опубликованных в 1895 году[1], он приходит к важному заключению о том, что принцип относительности строго выполняется для оптических и электромагнитных явлений. В докладе на Физическом конгрессе 1900 года Пуанкаре еще подробнее излагает свое критическое отношение к надеждам некоторых ученых обнаружить абсолютное движение Земли в более точных оптических и электрических опытах и говорит о необходимости экспериментального ответа на поставленный им прямой вопрос: «Что касается нашего эфира, то существует ли он в действительности?» Он считает необходимым допустить существование эфира лишь в том случае, если эксперимент покажет, что световые и электрические явления видоизменяются вследствие движения Земли. Наступит ли это когда-нибудь? На этот вопрос Пуанкаре склонен ответить отрицательно: « Я, вопреки Лоренцу, не думаю, чтобы когда-нибудь более точные наблюдения могли обнаружить нечто иное кроме относительных перемещений материальных тел» (см с 139)

Пуанкаре неоднократно обращал внимание на недостаточность придуманного Лоренцем объяснения результата, полученного Майкельсоном и Морли Вместе с тем он считает, что теория Лоренца является «наиболее удовлетворительной из всего, что мы имеем ; она, бесспорно, лучше всех истолковывает известные нам факты, освещает больше реальных отношений, чем любая другая, и свойственные ей черты войдут в наибольшем числе в будущее окончательное построение» (с 141) Эта ориентация, с одной стороны, на теорию Лоренца, в которой скорость света принималась не зависящей от движения его источника, а с другой стороны, на строгое выполнение принципа относительности, указывала тот единственно верный путь, который вел к созданию теории относительности Однако, намеченное Пуанкаре объединение теории Лоренца и принципа относительности упиралось в противоречие, которое в силу ограниченности существовавших тогда основных научных представлений казалось непреодолимым Поскольку скорость света в эфире была постоянной и не зависела от движения источника света, то в перемещающейся относительно эфира материальной системе свет должен был распространяться с различной скоростью в

[1]) Выдержки из этих статей опубликованы на русском языке в кн. Принцип относительности. — М.: Атомиздат, 1973.

разных направлениях Это явно расходилось с утверждением принципа относительности. Чтобы привести в соответствие эти два положения, необходимо было коренным образом изменить представление о пространстве и времени.

Первый решающий шаг в этом направлении был сделан Пуанкаре, который показал несостоятельность представлений об абсолютном времени и абсолютной одновременности для разноместных событий, опираясь на вполне конкретный экспериментальный факт — конечность скорости передачи самого быстрого материального сигнала, скорости света

В 1898 году один из выпусков широко известного тогда французского научного журнала открылся статьей Пуанкаре «Измерение времени». На протяжении почти тринадцати страниц автор основательно анализирует такие простые, казалось бы, понятия, как равенство двух промежутков времени и соответствие между собой моментов времени в разных точках пространства Его рассуждения показывают, что понятие времени казалось до сих пор очень простым только потому, что о нем серьезно не задумывались Принимая абсолютное время, классическая физика, оказывается, делала ряд неявных допущений, с которыми следовало бы расстаться после того, как убедились в конечном значении скорости света Даже определение скорости движения основывалось на представлении о равномерном и одинаково идущем во всех точках пространства времени Задание величины скорости подразумевает отсчет времени хотя бы в двух пространственно разделенных точках. Но полученный таким способом временной интервал имеет смысл только в том случае, когда решен вопрос о приведении в соответствие времен в разных точках пространства. Для этого недостаточно установить одинаковость хода времени в этих точках, необходимо также согласовать начало его отсчета или, как принято говорить, установить одновременность

Как же установить эти характеристики времени в реальной действительности, если самый быстрый процесс — это распространение света, скорость которого тоже конечна? Этот вопрос Пуанкаре подвергает детальному анализу, рассматривая те измерительные процедуры, с помощью которых понятию времени придается физический смысл Полученный им ответ казался его современникам весьма неожиданным и одиозным. абсолютного времени и абсолютной одновременности в природе не существует. Лишь на основе условного соглашения, конвенции, можно считать равными длительности двух промежутков времени и одновременными два явления, происшедшие в разных точках пространства.

Это было совершенно новое, «неклассическое» понимание времени и одновременности. Введенное в науку на самом закате прошлого века, знание это принадлежало уже надвигающемуся столетию и сыграло в нем первостепенную роль Только во второй половине нашего столетия и то после долгих лет сомнений и недопонимания получило должную оценку и другое положение, сформулированное Пуанкаре в статье 1898 года. Рассматривая взятое в качестве примера утверждение астронома о том, что «звездное явление, которое он видит в настоящее время, произошло 50 лет назад», автор вскрывает в нем неявное допущение о постоянстве скорости распространения света во всех направлениях. Принципиально невозможно измерить скорость распространения света в одном каком-нибудь направлении. Измерению подлежит лишь усредненная скорость прохождения светом некоторой протяженности в двух противоположных направлениях. Поэтому предположение о равенстве двух противоположных по направлению скоростей света является только условным соглашением. Это обстоятельство и сейчас еще нередко упускают из вида при обсуждении возможностей экспериментальной проверки отдельных положений теории относительности, что лишний раз характеризует всю глубину анализа, проведенного Пуанкаре в конце прошлого века.

В первой своей книге Пуанкаре ограничился лишь тезисами, отрицающими существование абсолютного времени и абсолютной одновременности, ссылаясь на работу «Измерение времени», где эта проблема подробно им рассмотрена. В следующей книге «Ценность науки» он счел необходимым привести целиком свою статью 1898 года. К сожалению, в этих книгах не отражен следующий этап его творчества: непосредственное участие Пуанкаре в создании теории относительности на основе выдвинутых им ранее исходных положений. Между тем, не оценив подлинный вклад французского ученого в создание этой теории, трудно понять и интерпретировать некоторые особенности его более поздних выступлений по теории относительности, включенных в настоящее издание (статьи «Пространство и время» и «Новая механика» в книге «Последние мысли»). Поскольку этот вопрос недостаточно освещен в научно-исторической и научно-популярной литературе, то мы решили уделить ему внимание в этой статье.

В самом конце XIX века были уже найдены новые преобразования пространственно-временных координат, составляющие основу будущей физической теории. Были получены также самые необычные следствия этой теории о сокращении длин отрезков и расширении временных интервалов В работах Г. А. Лоренца и английского физика Дж. Л. Лармора контуры новой теории, приводящей к революционному преобразованию всей физики, проступали весьма отчетливо. Но ограниченное применение в этих работах новых пространственно-временных преобразований лишь для уравнений электродинамики на самом деле не обеспечивало всеобщности принципа относительности. Например, неинвариантными относительно новых преобразований оставались законы механики. Поэтому-то в своем докладе на конгрессе в Сент-Луисе Пуанкаре специально подчеркивал, что может потребоваться совершенно новая механика быстрых движений. В этом состояло глубокое понимание французским ученым того факта, что проблема электродинамики движущихся тел затрагивает общие свойства физических процессов и требует пересмотра основ другой науки — механики.

Однако, необходимый шаг в этом направлении уже был сделан Лоренцем в апреле 1904 года, когда он предложил найденный им для электронов закон неограниченного возрастания массы при приближении их скорости к скорости света распространить на любые механические объекты. Аналогичное обобщение предлагалось для преобразования сил из одной системы координат в другую. Правда, идеи эти не были развиты до общих уравнений новой механики и даже высказаны они были как бы мимоходом. Но у Пуанкаре нет и тени сомнения в том, что статья Лоренца представляет собой смелое посягательство на незыблемые основы классической механики. Он усмотрел в ней четкую формулировку новых начал необычной механики сверхвысоких скоростей, и тут же подключился к дальнейшей разработке новой теории Найдя конкретное указание на необходимое изменение механики, Пуанкаре смог теперь соединить в единую стройную систему разрозненный и непоследовательно изложенный материал последней статьи Лоренца. В приведении механики в соответствие с теорией движения электронов он увидел окончательное доказательство невозможности наблюдения абсолютного движения. В этом понимании сути содержащегося в работе Лоренца полного решения проблемы электродинамики движущихся тел Пуанкаре далеко превзошел и самого автора, и всех других физиков того времени.

Как и обычно, первое сообщение о проведенном исследовании Пуанкаре сделал перед своими коллегами по Академии. Оно было опубликовано в «Comptes Rendus» от 5 июня 1905 года под названием «О динамике электрона». Прежде всего в статье отмечалось, что последняя работа Лоренца решила проблему невозможности обнаружить движение по отношению к эфиру. Собственные же результаты были охарактеризованы автором в весьма скромных тонах, как некоторое дополнение и видоизменение исследований Лоренца.

Чрезмерная сдержанность и умеренность в оценке плодов своего труда всегда были свойственны Пуанкаре, начиная с первых его работ по фуксовым функциям В этом же случае они оборачивались явной недооценкой собственного вклада в развитие новой физической теории. Между тем, даже из предварительного краткого изложения итогов его работы, помещенного в «Comptes Rendus», можно было понять, что речь идет о совершенно новых, принципиально важных результатах К ним относился вывод о том, что преобразования, связывающие пространственно-временные координаты двух систем отсчета, должны образовывать математическую группу, и что полученное Лоренцем преобразование удовлетворяет этому обязательному условию. К фундаментальным результатам относилась также впервые высказанная идея о необходимости привести теорию тяготения в соответствие с преобразованиями Лоренца. Примерно через полтора месяца в печать была направлена обширная статья под тем же названием «О динамике электрона», содержащая подробное изложение всех полученных Пуанкаре результатов.

Выведенные в этой работе соотношения для преобразования из одной системы координат в другую электрического заряда и тока позволили автору доказать в самом общем случае, что уравнения электромагнитного поля не изменяются при полученных ранее пространственно-временных преобразованиях, которые он предложил назвать «преобразованиями Лоренца». Неизменность, инвариантность уравнений электродинамики относительно этих преобразований становится в работе Пуанкаре прямым следствием принципа относительности. И это новое понимание выступает у него единым подходом ко всем областям физических явлений. Требование инвариантности всех законов физики относительно преобразований Лоренца являлось новой, более строгой в математическом отношении формулировкой универсального принципа относительности

Но наиболее кардинальным выглядело изменение законов тяготения, которое Пуанкаре представлял естественным следствием принятого во всей общности постулата относительности, как полного отрицания всякой возможности наблюдать эфир. Перестройка теории тяготения в соответствии с принципом относительности имела особое значение как начало становления новой, так называемой релятивистской теории гравитации.

Именно в изложении французского ученого новая физическая теория обрела строгую математическую форму. Он первым ввел в нее четырехмерное представление, добавив к трем пространственным координатам четвертую — собственное время системы отсчета, умноженное на скорость света и мнимую единицу Каждая точка в такой необычной геометрии изображала мгновенное событие, происходящее в определенном пункте пространства и в определенный момент времени. Этот формализм четырехмерной геометрии позволил Пуанкаре установить абсолютные величины новой теории, которым соответствовали инвариантные соотношения, остающиеся неизменными при всех преобразованиях из одной системы отсчета в другую. Наглядный геометрический смысл был установлен, например, для одного из важнейших инвариантов теории, который изображался четырехмерным интервалом, т. е расстоянием в четырехмерном мире между двумя его точками. Эта величина оказалась независящей от выбора системы координат. Сами же преобразования Лоренца удобно представлялись простым поворотом осей координат в четырехмерном пространстве. Позднее в работе Пуанкаре были обнаружены также и релятивистские уравнения аналитической механики.

Статья Лоренца, дав толчок для дальнейших теоретических исследований, не оказала сколько-нибудь существенного влияния на последующий процесс утверждения и признания новой теории Иначе и быть не могло, поскольку сам автор активно не признавал новаторское начало в своих исследованиях Но и работе Пуанкаре не удалось решить эту проблему. Слишком краткими были объяснения, содержащиеся в обеих его публикациях. Верный своему стилю написания научных работ Пуанкаре не повторял прежних своих разъяснений смысла «местного» времени и одновременности, их связи с постулатом о постоянстве скорости света. Между его теоретическим исследованием и работой Лоренца образовался трудный для понимания пробел. Это обстоятельство, а также публикация его подробной статьи в математическом журнале, мало читаемом физиками, в значительной мере объясняют, почему фундаментальное исследование Пуанкаре не оказало заметного влияния на взгляды широких кругов ученых в период осознания уже сложившейся теории относительности. Но эти причины не могли, конечно, помешать отдельным исследователям воспринять содержащиеся в работе Пуанкаре совершенно новые идеи. И мы действительно находим в трудах других ученых использование и дальнейшее развитие его идеи о преобразовании теории тяготения Ньютона с целью приведения ее в соответствие с принципом относительности, а также идеи четырехмерного представления теории относительности.

Для признания новой теории решающую роль сыграла работа неизвестного тогда в научных кругах автора. В 1905 году, в сентябрьском номере немецкого журнала «Анналы физики» появилась статья, написанная молодым экспертом швейцарского патентного бюро в Берне Альбертом Эйнштейном. В статье излагалась теория относительности, решавшая проблему электродинамики движущихся тел

Статья Эйнштейна поступила в редакцию журнала 30 июня 1905 года, то есть уже после того, как было опубликовано в «Comptes Rendus» краткое сообщение Пуанкаре, но опережала его более подробную статью, полученную редакцией итальянского журнала 23 июля того же года и вышедшую в свет в январе 1906 года Изложение велось молодым автором в довольно необычной для научных публикаций манере, без указания идей и результатов, заимствованных из других исследований, без сопоставления полученных выводов с итогами более ранних попыток решения той же проблемы Статья не содержала буквально ни одной литературной ссылки. При чтении ее создавалось впечатление о полной оригинальности как постановки, так и решения задачи, о первооткрытии всех изложенных там результатов. Только путем сопоставления фактически использованных в этой работе положений с ранее опубликованными статьями на данную тему можно установить несомненную связь развиваемых автором идей с высказываниями предшественников, и в первую очередь — с идеями, опубликованными за несколько лет до этого Пуанкаре По этой причине мы несколько задержимся на рассмотрении знаменитой работы Эйнштейна 1905 года

Что касается постановки задачи о теории, удовлетворяющей принципу относительности, то она, конечно же, совпадала во всех трех работах разных авторов: Лоренца, Пуанкаре и Эйнштейна Разница состояла лишь в том, что Лоренц указывает источник такой постановки — одно из ранних выступлений Пуанкаре по этому вопросу, а Эйнштейн дает обоснование принципа относительности без всякой ссылки на первоисточник. Всего несколько слов сказал он об экспериментальном обосновании этого принципа, не обсуждая конкретных опытов и даже не упоминая решающий эксперимент Майкельсона — Морли. Эта краткость вполне естественна, если признать, что он считал принцип относительности уже всесторонне обсужденным в научной литературе И действительно, у этой фундаментальной идеи был вполне конкретный автор — Анри Пуанкаре Ему пришлось неоднократно высказывать и с энтузиазмом отстаивать ее, поскольку она противоречила глубоко укоренившимся убеждениям о существовании светоносного эфира Удивительная проницательность Эйнштейна как раз в том и состояла, что он одним из немногих воспринял и осознал значение этой идеи. Заслуга Эйнштейна состояла также и в том, что он использовал идею принципа относительности в качестве исходного положения своей теоретической системы, то есть так, как и предлагал Пуанкаре. В этом состояло отличие его подхода от подхода Лоренца.

Для построения теории Эйнштейну понадобился еще один исходный постулат: о независимости скорости света от движения источника. Эта необходимая предпосылка никак им не обосновывалась. Появление ее в исследовании Эйнштейна нелегко объяснить, поскольку ничего еще не было известно об экспериментальном наблюдении такого факта, и, следовательно, опытом она не могла быть подсказана. В электродинамике Лоренца и Лармора, а следовательно, и в теоретических построениях Пуанкаре, внимательно следившего за их работами, это положение вытекало как естественное следствие из концепции неподвижного эфира Но Эйнштейн с самого начала отказался от всякого использования этого понятия Поэтому появление в его работе без всякой мотивировки постулата о независимости скорости света от движения источника, находившегося, к тому же, в кажущемся противоречии с первым исходным принципом его теории, было явно непоследовательным шагом. Происхождение этого постулата у Эйнштейна можно было бы объяснить анализом предшествующих работ по электродинамике движущихся тел. Но в его статье нет никаких указаний на этот счет. Только позднее Эйнштейн признался в том, что принцип постоянства скорости света был подсказан ему теориями, основывающимися на гипотезе неподвижного эфира. Так, в работе 1912 года он писал: «Чтобы заполнить этот пробел, мы ввели позаимствованный из лоренцевской теории покоящегося эфира принцип постоянства скорости света..» [1]).

Отличительной особенностью работы Эйнштейна была четкая постановка вопроса о решении проблемы электродинамики движущихся тел за счет пересмотра понятий, связанных с пространственно-временными соотношениями. Центральное место в его статье отводилось определению одновременности разноместных событий Отмечалось, что физическое описание движения подразумевает всегда использование времени в различных точках пространства, а это возможно только в том случае, если установлено временное соответствие между событиями в этих точках и выяснено, какие из этих событий являются одновременными. Затем автор приводит определение одновременности показаний двух часов, пользуясь мысленным экспериментом по синхронизации их с помощью светового сигнала и принимая при этом допущение о равенстве времен, затрачиваемых светом на прохождение расстояния между часами в прямом и обратном направлении.

Сама постановка вопроса об одновременности и определение этого понятия на основе постоянства скорости света — все это совпадало с объяснениями, приведенными впервые Пуанкаре еще в 1898 году в статье «Измерение времени». А мысленное оперирование вместо времени более конкретным понятием — часами, синхронизация которых производится световым сигналом, — это уже были детали, характерные исключительно для того истолкования «местного» времени Лоренца, которое было дано Пуанкаре в работе 1900 года и повторено затем на конгрессе в Сент-Луисе. Но в статье Эйнштейна изложение этих пунктов непосредственно предшествовало рассмотрению электродинамики движущегося тела, что значительно облегчало усвоение всей теории. Вот почему работа молодого ученого обратила

---

[1]) Эйнштейн А. Собрание научных трудов, т. 1. — М.: Наука, 1965. — С. 219.

на себя внимание и в дальнейшем способствовала усвоению идей теории относительности в большей мере, чем труды его знаменитых предшественников.

Самое существенное отличие работы Эйнштейна от предыдущих состояло в понимании того факта, что те же самые релятивистские эффекты возникают и для «покоящейся» системы, если, в свою очередь, ее сопоставить с движущейся системой. Об этом в статье была сказана всего одна фраза: «Ясно, что те же результаты получаются для тел, которые находятся в покое в «покоящейся» системе и которые рассматриваются из равномерно движущейся системы». Но именно эта фраза характеризовала другой уровень понимания открытых ранее эффектов теории относительности

Вопрос, связанный с обратными преобразованиями, в основной работе Пуанкаре получил лишь формальное освещение. Отмеченные им групповые свойства преобразований Лоренца включали и условие обратимости всех результатов Кроме того, при выводе самих преобразований Лоренца он непосредственно использовал сопоставление с обратным преобразованием. Однако Пуанкаре ни одним словом не пояснил, что из этого свойства группы Лоренца вытекает обратимость всех необычных свойств новых пространственно-временных соотношений. В своем теоретическом трактате он обошел этот вопрос молчанием, хотя его более ранние работы содержали все необходимые данные, чтобы прийти к такому выводу.

Дальнейшее существенное развитие теория относительности получила в работах геттингенского математика Германа Минковского В 1907 году он выступил в Геттингене с докладом «Принцип относительности», а в следующем году опубликовал на эту тему обширный трактат. Минковский существенно дополнил результаты Лоренца и Эйнштейна, внес в физику новое понимание необходимости синтеза пространственных и временных представлений. Но его работа в значительной мере перекрывалась ранее опубликованной статьей Пуанкаре. В исследовании инвариантов новой теории работа Пуанкаре превосходила даже более поздние выступления Минковского. Последний ни в одной из своих статей не отметил выдающихся результатов Пуанкаре в развитии математического аппарата теории относительности и ни словом не упомянул предложенную им идею четырехмерного представления этой теории.

Предлагаемые вниманию читателя книги Пуанкаре включают те его работы, в которых содержатся идеи, относящиеся к первому этапу создания новой физической теории. Но именно этот первый этап, этап зарождения новых идей — исходного пункта будущего теоретического построения — имеет особое значение для научных открытий, представляющих собой неожиданные скачки и резкие повороты в развитии ученой мысли. Об этом важнейшем периоде становления теории относительности принято порой говорить как о времени, когда необходимые, не неосознанные еще до конца идеи носились в воздухе, и недоставало лишь гения, который бы воспользовался ими для разработки новой физической теории В действительности же, само появление этих идей уже представляло собой решающий шаг, потребовавший коренного пересмотра основных положений классической физики.

В этот период становления теории относительности наибольший вклад в создание ее основ внес, несомненно, Пуанкаре. Он выдвинул принцип относительности, как обобщение опытных данных, и высказал убеждение, что именно электромагнитную теорию Лоренца необходимо согласовать с этим принципом, чтобы получить окончательное решение проблемы. Пуанкаре показал условность понятия одновременности, центрального понятия теории относительности, и предложил определение этой величины на основе постулата о постоянстве скорости света. Он дал также правильную физическую интерпретацию «местного» времени Лоренца. И хотя работы известного французского ученого, содержащие эти новаторские мысли, не были осмыслены подавляющим большинством физиков, не подготовленных еще к восприятию столь радикально новых взглядов, влияние их несомненно сказалось на тех немногих исследователях, которые участвовали затем в построении теории относительности. Например, Лоренц отмечал, что разработка теории, строго удовлетворяющей принципу относительности, была предпринята им под влиянием критики его прежних работ со стороны Пуанкаре.

Хоть мы и не находим в работах Эйнштейна аналогичного признания, однако известный из его биографии факт изучения им с товарищами книги Пуанкаре «Наука и гипотеза» объясняет детальные совпадения развиваемых в его последующих статьях положений с оригинальными новаторскими установками, высказанными французским ученым. Ведь в этой книге, в главе «Классическая механика», автор выделил в виде тезисов категорические утверждения об отсутствии абсолютного пространства и абсолютного времени, а к тезису о невозможности непосредственно установить одновременность двух разноместных событий дал ссылку на свою статью 1898 года.

После 1905 года Пуанкаре больше не возвращался к развитию новой механики больших скоростей. Для его научного творчества вообще была характерна быстрая и безболезненная смена тем и интересов Однако он неоднократно выступал в последующие годы с лекциями и статьями по поводу новой механики. Например, в апреле 1909 года его лекции слушают в Геттингене, куда он был приглашен Д. Гильбертом. Одна из этих лекций, шестая, включена в настоящее издание книги «Последние мысли».

Гёттингенская лекция Пуанкаре содержала лишь элементарное изложение особенностей новой механики и ее связи с принципом относительности. Но в упрощенную форму изложения автор облек более глубокое понимание всей проблемы по сравнению с широко распространенным тогда ее толкованием «Принцип относительности в новой механике не допускает никаких ограничений,— категорически заявил докладчик.— Он имеет, если так можно выразиться, абсолютное значение» (с. 647—648).

Пуанкаре обсуждает некоторые направления, в которых, по его мнению, будет расширяться область действия принципа относительности. Он говорит о необходимости связать новую механику с современными воззрениями на вещество, с представлениями об атоме, рассматривает также ее отношение к астрономии Новая теория тяготения, отмечает Пуанкаре, должна учесть несостоятельность прежнего представления о постоянстве массы тел; она должна считаться и с тем, что притяжение не мгновенно. Он предвидит, что новый закон притяжения двух тел, зависящий от их скоростей, может привести к незначительному отличию от закона Ньютона и что наибольшая разница должна обнаружиться в теории движения Меркурия, самой быстрой из всех планет. Пуанкаре указывает на необъясненную до сих пор аномалию в движении этой планеты. «Новая механика несколько исправляет ошибку в теории движения Меркурия, но не дает полного соответствия между наблюдением и вычислением», — подводит итоги докладчик (с. 653). И снова Пуанкаре даже не ссылается на свою работу 1906 года, в которой был изложен не только первый, но и единственный тогда вариант релятивистской теории притяжения.

Несовпадение теоретических результатов с астрономическими наблюдениями Пуанкаре расценивает как предостерегающий сигнал о том, что не следует торопиться с окончательным признанием справедливости новой механики. Еще более осторожен он в статье 1908 года, которая и легла в основу его гёттингенской лекции.

Заключительные слова этой статьи раскрывают истоки сомнений автора. Они были навеяны неясной тогда ситуацией с основным проверочным опытом Кауфмана по измерению отклонения электронов электрическими и магнитными полями. Столь же осмотрителен Пуанкаре в окончательной оценке новой теории и в своей берлинской лекции, с которой он выступил в марте 1910 года.

В этих двух лекциях по новой механике, обращенных к немецким научным кругам, Пуанкаре противопоставил свое мнение по ряду вопросов, связанных с новой физической теорией, тому освещению происшедшего в науке переворота, которое начало распространяться тогда в Германии.

Пуанкаре не мог не знать о попытках немецких авторов представить развитие Эйнштейном и Минковским пространственно-временного аспекта теории Лоренца, как создание новой физической теории. Но, видимо, такие притязания немецкой науки представлялись ему настолько необоснованными, что он не считал нужным делать специальные заявления по этому поводу. Французский ученый полагал, что достаточно рассказать об истинной сути происшедшего в науке переворота, чтобы развеять всякие недоразумения. А суть решения всей проблемы, по его глубокому убеждению, состояла в пересмотре Лоренцем механики с целью приведения ее в соответствие с электродинамикой и в создании нового по форме принципа относительности. Все же остальное он причислял к естественному развитию этой главной идеи и к развертыванию необычных следствий новой теории. Точно так же оценивалась им и его собственная работа.

Не признавая пространственно-временной аспект главным в решении проблемы абсолютного движения, Пуанкаре обходит полным молчанием работы Эйнштейна и Минковского. Даже в двух своих лекциях для немецких ученых он не произносит эти имена. Чтобы понять, насколько несвойственна его характеру эта позиция, достаточно вспомнить с какой предупредительностью признавал он малейшие заслуги любых авторов. В своих статьях Пуанкаре непременно упоминает всех, кто добился хоть каких-нибудь результатов в избранной им самим области исследования. Сколько ученых обязаны ему тем, что их имена увековечены в научных названиях! Именно по его инициативе в физику и математику вошли преобразования Лоренца, числа Бетти, клейновы группы и функции, устойчивость по Пуассону. Молчание его по отношению к Эйнштейну и Минковскому, столь усиленно превозносимым в то время немецкой школой физиков в качестве единственных создателей теории относительности, не имеет прецедента. Оно выглядело вопиющим и говорило красноречивее всяких слов Такой поступок со стороны прославленного ученого мог быть вызван только глубоко принципиальными соображениями Пуанкаре всегда воздавал должное заслугам немецких математиков и никогда не унижался до болезненной национальной конкуренции. Причина его молчания в данном случае была совсем иной.

С редкостным великодушием раздавая признания, Пуанкаре никогда не поступал беспринципно. Он признавал первенство лишь в том случае, когда видел действительную оригинальность в трудах своих коллег. Молчание его являлось формой протеста против усиленного представления Эйнштейна и Минковского единственными создателями новой теории. С точки зрения Пуанкаре это была, по-видимому, весьма резкая форма протеста, которую он мужественно противопоставил мнению наиболее авторитетной физической школы, какой являлась тогда немецкая физическая школа.

Не в его принципах было отстаивать свой приоритет в научных вопросах. Чтобы не быть ложно понятым, Пуанкаре полностью умалчивает и о своих исследованиях по теории относительности Но, обходя молчанием свои работы, он вольно или невольно приписывал Лоренцу свое понимание проблемы. Сам Лоренц, однако, не поддерживал те взгляды, которые так упорно отстаивал его французский коллега. Он по-прежнему верил, что именно в свойствах эфира следует искать объяснение всем особенностям физического мира, и в новой трактовке соотношений, полученных ранее им самим, он почему-то не узнавал своей же теории.

Трудно понять, что же заставило выдающегося голландского физика согласиться с явно необоснованной версией о возникновении будто бы двух различных физических теорий: квазиклассической теории, завершенной Лоренцем в 1904 году, и совершенно новой релятивистской теории пространства и времени, созданной Эйнштейном в 1905 году. Ведь ученый, обладающий столь проницательным умом и огромным опытом работы в теоретической физике, не мог не понимать, что такая постановка вопроса может быть оправдана только в том случае, если эти теории приводят к какому-либо доступному для опытной проверки различию, а без этого непременного условия речь может идти лишь о расхождениях в интерпретации соотношений и трактовке положений одной и той же физической теории Новой теорией в физике всегда считалось такое теоретическое построение, которое предсказывает ранее неизвестные проверяемые на опыте соотношения. Между тем, статья Эйнштейна, также как и работа Пуанкаре (если не говорить о содержащемся в ней первом варианте релятивистской теории тяготения), развивала строго удовлетворяющую принципу относительности теорию, все проверяемые на опыте соотношения которой уже были получены ранее в трудах Лоренца и Лармора. В ряде публикаций авторитетных ученых того времени, например Кауфмана, Лауэ и Эренфеста, подчеркивалось, что принципиально невозможен эксперимент, различающий теоретические построения Лоренца и Эйнштейна.

Но Лоренц оставил без внимания как эти категорические заявления, так и четкую установку Пуанкаре на признание в качестве основной теории лоренцевской, а не своих собственных теоретических исследований Между тем, работа Пуанкаре целиком включала содержание параллельной ей работы Эйнштейна и отчасти даже результаты более поздних работ Минковского, превосходя их по полноте исследования инвариантов новой теории. Такое поведение Лоренца выглядит не простым самоотречением или полным пренебрежением к приоритетным вопросам, а скорее, весьма странным потворствованием развернувшейся тогда кампании, тенденциозно приписывавшей одному Эйнштейну результаты коллективного труда нескольких выдающихся ученых Уступчивость Лоренца перед подобными целенаправленными усилиями может характеризовать и такой факт, как данное им разрешение использовать свое имя для сбора в международном масштабе частных денежных пожертвований в фонд Лоренца [1]). Это мероприятие, не имеющее прецедента, говорит о появлении тогда в околонаучной среде весьма деловых людей, организаторским действиям которых не сумел противостоять великий ученый.

В конце 1911 года Пуанкаре был приглашен на I Сольвеевский конгресс, на котором обсуждались проблемы, связанные с квантовой гипотезой Планка Сам факт приглашения выдающегося французского ученого на весьма узкое собрание ведущих физиков мира свидетельствует о международном признании плодотворного вмешательства Пуанкаре в проблему преодоления кризиса в физической науке На этом конгрессе в Брюсселе состоялась встреча Пуанкаре с Эйнштейном, единственная в их жизни.

Теория относительности, к сожалению, официально не рассматривалась на Сольвеевском конгрессе, несмотря на то, что в нем помимо создателей этой теории — Лоренца, Пуанкаре и Эйнштейна — приняли участие и другие ученые, способствовавшие ее признанию и развитию Планк, Ланжевен, Лауэ, Зоммерфельд. Конечно, тогда уже не существовало проблемы абсолютного движения, как таковой, однако обсуждение происшедшего в физике переворота могло бы устранить многие недоразумения и в трактовке теории, и в освещении истории ее возникновения В частных же беседах участники конгресса безусловно касались теории относительности Об этом свидетельствует одно из писем Эйнштейна, из которого, правда, можно только заключить о самом факте его разговора с Пуанкаре и о явном несогласии Эйнштейна с позицией своего собеседника Но это не должно вызывать особого удивления Стоит только сравнить статьи, написанные в те годы Пуанкаре и Эйнштейном, как станет очевидной невозможность какого-либо взаимопонимания между ними по целому ряду основных вопросов теории относительности.

---

[1]) Фредерикс В. К. Гендрик Антон Лоренц//Лоренц Г. А. Старые и новые проблемы физики. — М.: Наука, 1970. — С. 245.

Общение с участниками Сольвеевского конгресса послужило, видимо, основным стимулом для нового выступления Пуанкаре в печати с уточнением своей позиции по новой теории. Речь идет о его статье «Пространство и время», включенной в книгу «Последние мысли» и являющейся изложением сделанной им в мае 1911 года лекции в Лондонском университете.

В то время в работах многих физиков уже утвердилась тенденция представлять теорию относительности прежде всего как новую физику пространства и времени, затушевывая роль новой механики сверхбыстрых движений. Преобразования Лоренца стали трактовать как истинные преобразования пространственно-временных координат. Преобразования же Галилея получили статус приближенных, неприменимых при больших, околосветовых скоростях. В беседах с Эйнштейном и другими учеными Пуанкаре мог убедиться в том, насколько популярна такая упрощенная трактовка и как уверенно ее сторонники выдвигают на первое место именно пространственно-временной аспект, подчиняя ему законы движения физических объектов. С этим не мог согласиться ученый, затративший столько усилий на выяснение конвенциональности геометрии и условности временных характеристик И раньше он выделял новую механику, соответствующую единому принципу относительности, как первопричину всех пространственно-временных соотношений, возникающих в движущейся материальной системе. Теперь Пуанкаре счел необходимым дополнить свои прежние высказывания рядом утверждений, явно расходящихся с общепринятыми взглядами В своей статье он говорит о перевороте в науке, как о свершившемся факте. В этом, бесспорно, сказалось влияние на него убежденных сторонников новой теории, с которыми Пуанкаре встретился на Сольвеевском конгрессе. Но в отличие от них, французский ученый по-прежнему связывает происшедший переворот только с именем Лоренца, совсем не упоминая Эйнштейна.

В этом выступлении Пуанкаре вносит одно существенное новшество: он рассматривает две гипотетически возможные формы принципа относительности. Под старой формой подразумевается галилеевский принцип относительности. Если бы этот принцип был справедлив, то все законы физики были бы инвариантны относительно преобразований Галилея. В качестве новой формы принимается принцип относительности Лоренца, означающий инвариантность всех физических законов относительно преобразований Лоренца. Для обеих форм совершенно невозможно обнаружить абсолютное движение, но лоренцевский принцип обеспечивает еще независимость скорости света от движения его источника.

Представление принципа относительности в двух различных формах позволило Пуанкаре поставить вопрос: что же непосредственно подтверждается опытом — одна из этих разновидностей принципа относительности или же соответствующее ей пространственно-временное преобразование? Пуанкаре разъясняет, что принцип относительности в отличие от постулатов геометрии пространства — времени, «уже не является больше простым условным соглашением, он доступен проверке и, значит, может быть опровергнут опытом. Он — экспериментальная истина» (с. 551). Его главная мысль как раз в том и заключается, что новая механика отклоняет старый принцип Галилея и утверждает новую его форму — принцип Лоренца.

Обычно при объяснении переворота, произведенного теорией относительности в физике, исходят из общей формулировки принципа относительности как невозможности обнаружить абсолютное движение в любых физических опытах. При этом не учитывается допустимость различных форм реализации такого принципа. Поскольку дорелятивистская механика уже удовлетворяла галилеевскому принципу относительности, то основным достижением новой теории считалось распространение его действия на электродинамику Лоренца Совсем иначе представляется сущность происшедшей перестройки физики, если исходить из возможности различных форм принципа относительности. Уравнения электродинамики в том виде, как они с самого начала были получены Максвеллом, уже обладали свойством инвариантности относительно новых преобразований, которые еще предстояло открыть (преобразования Лоренца). Поэтому не принцип относительности, действующий в механике, был распространен на электродинамику, а наоборот, скрыто существовавшая в электродинамике новая форма принципа относительности была распространена на механику. При таком подходе преобразования Лоренца отличаются от старых преобразований тем, что законы физики относительно них инвариантны

В то же время Пуанкаре, как и другие авторы, обсуждает в статье релятивистские свойства пространственных отрезков и временных интервалов, проявляющиеся в сокращении длин тел и в растяжении времени. На этот раз он уже явно отмечает обратимость релятивистских эффектов. Заданное в покоящейся системе сферически симметричное тело воспринимается наблюдателем, находящимся в движущейся системе, как эллипсоидальное, говорится в статье, а одновременные в покоящейся системе события не оказываются таковыми для этого наблюдателя Таким образом, движущийся наблюдатель отмечает те же самые эффекты, что и неподвижный наблюдатель, следящий за движущейся системой Затем автор кратко касается четырехмерной геометрии, указывая на то, что «в этом новом представлении пространство и время не являются уже двумя совершенно различными сущностями, которые можно рассматривать отдельно друг от друга, но двумя частями одного и того же целого, столь тесно связанными, что их не легко отделить друг от друга» (с. 554).

В чем же тогда отличие трактовки Пуанкаре от общепринятой, если и в той, и в другой речь идет об одних и тех же свойствах пространства и времени? Прежде всего в источнике происхождения этих свойств. Пуанкаре считает первичным началом новую механику. Другие, наоборот, первичными считают необычные свойства масштабов и часов, получая из них релятивистскую механику, как это делали Эйнштейн и Планк. С точки зрения математического вывода конечных соотношений теории оба подхода допустимы Существенное различие между ними проявляется лишь в логике построения теории. Но на конкретный вопрос о том, можно ли использовать преобразования Галилея при высоких скоростях движения, эти трактовки дают прямо противоположный ответ.

Объяснив успешное использование преобразований Лоренца переходом физиков к новому более удобному соглашению, Пуанкаре заключает свою статью весьма неожиданным замечанием: «Это не значит, что они были вынуждены это сделать; они считают это новое соглашение более удобным — вот и все. А те, кто не придерживается их мнения и не желает отказываться от своих старых привычек, могут с полным правом сохранить старое соглашение. Между нами говоря, я думаю, что они еще долго будут поступать таким образом» (с. 554—555)

Такое утверждение озадачило тогда многих. Большинство восприняло его как отречение от новейшей физической теории пространства и времени: величайшее достижение научной мысли Пуанкаре хочет объяснить пресловутым удобством выбора теоретического описания физических явлений. А его слова о возможности сохранить старое соглашение, то есть использовать преобразования Галилея даже при высоких скоростях движения, представлялись попросту ошибочными Все были убеждены в том, что физический опыт непосредственно отрицает возможность непротиворечивого использования этих преобразований. Так считал Эйнштейн, который накануне брюссельской встречи с Пуанкаре в статье «Принцип относительности и его следствия» писал о едином времени галилеевских преобразований, как о произвольной гипотезе, не отвечающей действительности. Такой же точки зрения придерживались и другие физики.

На долгие годы в науке утвердилось мнение, что само развитие физики показало несостоятельность преобразований Галилея при околосветовых скоростях движения. Особому взгляду Пуанкаре на новую теорию не придали серьезного значения. Его сочли результатом ошибочного преувеличения роли конвенции в построении теории пространства и времени. Известный французский ученый Луи де Бройль, автор исходной идеи волновой механики, писал впоследствии: «...Именно эта философская склонность его ума к «номиналистическому удобству» помешала Пуанкаре понять значение идеи относительности во всей ее грандиозности!» Правда, несколькими строчками ниже де Бройль призывает к осторожному обращению с заблуждениями великих. «Всегда полезно поразмыслить над ошибками, сделанными великими умами, — предостерегает он, — поскольку они часто имели серьезные основания для того, чтобы их сделать, и поскольку эти великие умы всегда обладают проникновенной интуицией, возможно, что их утверждения, сегодня рассматриваемые как ошибочные, завтра окажутся истинными» [1]).

Это замечание французского физика оказалось на редкость проницательным. Много позднее, уже во второй половине XX века стало очевидным, что отвергавшееся утверждение Пуанкаре никакой фактической ошибки не содержит. Непонимание простого смысла его слов было результатом ограниченного толкования теории относительности Во всем смогли разобраться уже после того, как обратили внимание на его раннюю работу «Измерение времени». Именно условность одновременности, связанная с невозможностью измерить скорость света в одном направлении, позволяет одинаково строго описывать физические

---

[1]) Бройль Луи де. По тропам науки.— М.: ИЛ, 1962.— С. 307.

явления и на основе преобразований Галилея, и на основе преобразований Лоренца. Нужно лишь для каждого способа описания выбрать свое определение одновременности[1]).

Анри Пуанкаре был полностью прав, когда утверждал, что никакой физический опыт не может подтвердить истинность одних преобразований и отвергнуть другие, как недопустимые. Но он остался одиноким в своих взглядах. Хоть вопросы науки и не решаются большинством голосов, в тех случаях, когда возникают разногласия в понимании научных теорий, сложившееся умонастроение большинства может долгие годы сохранять господствующее положение. В течение нескольких десятилетий научная общественность не принимала точку зрения французского ученого, изложенную в статье «Пространство и время», считая ее ошибочной. Ничего бы не изменилось, если бы вместо публикации этой статьи Пуанкаре изложил свое мнение в виде послания, адресованного грядущим поколениям физиков, как это сделал Майкл Фарадей[2]). Впрочем, статья как раз и сыграла роль такого письма в будущее, поскольку изложенные в ней идеи не были восприняты на протяжении полувека. Это весьма красноречиво характеризует глубину мышления ее автора.

Истоки непонимания взглядов Пуанкаре кроются в забвении его ранней работы «Измерение времени», в которой он вскрывает условный характер одновременности. Это центральное понятие было введено в теорию относительности Эйнштейном без тех разъяснений его конвенциональной сущности, которые были даны французским ученым В результате стало возможным такое ошибочное в своей ограниченности понимание этой теории, при котором основное внимание акцентировалось на «несостоятельности» преобразований Галилея[3]). Ограниченными оказались связанные с этой трактовкой представления о существо-

---

[1]) Приняв одновременность, основанную на предположении о равенстве скоростей света в двух противоположных направлениях и свои для каждой системы, так называемые собственные эталоны длины и длительности, мы связываем пространственно-временные координаты двух движущихся систем преобразованиями Лоренца. Но если выбрать для всех систем единую одновременность и единые эталоны длины и длительности, то пространственно-временные координаты систем окажутся связанными преобразованиями Галилея.

[2]) В 1832 году Фарадей пришел к выводу, что магнитное воздействие и электрическая индукция должны распространяться в пространстве с конечной скоростью в виде волн. Но сознавая, насколько его взгляды опережают существовавшие тогда научные представления, он не стал публиковать свою идею, а направил в Королевское общество запечатанный конверт с надписью «Новые воззрения, подлежащие хранению в архивах Королевского общества», который был обнаружен и вскрыт лишь через 106 лет.

[3]) На самом же деле, затруднения классической физики состояли вовсе не в использовании преобразований Галилея, а в непонимании того обстоятельства, что необходимо отказаться от галилеевского принципа относительности, от инвариантности законов физики относительно этих преобразований.

вании в каждой системе своего само собой идущего времени и своих пространственных масштабов, истолковываемых в отрыве от общих свойств физических процессов. Это недопонимание нашло отражение в принятой логике построения теории относительности, когда из релятивистских свойств пространства и времени выводятся новые свойства движения при высоких скоростях.

На этот недостаток принятого им построения теории указал впоследствии и сам Эйнштейн, отметив в своей творческой автобиографии неправомерность отделения масштабов и часов от всего остального мира физических явлений. «Можно заметить,— писал он, — что теория вводит (помимо четырехмерного пространства) два рода физических предметов... Это в известном смысле нелогично; собственно говоря, теорию масштабов и часов следовало бы выводить из решений основных уравнений (учитывая, что эти предметы имеют атомную структуру и движутся), а не считать ее независимой от них» [1]). Этим высказыванием Эйнштейн фактически признал более логичным тот путь построения теории быстрых движений, который избрал Лоренц и который был в свое время признан лишь Пуанкаре.

Включив Пуанкаре в число участников Сольвеевского конгресса, его организаторы рассчитывали на чрезвычайно полезное участие французского ученого в обсуждении назревших проблем физической науки. Их надежды полностью оправдались В трех своих статьях, опубликованных в 1911—1912 годах, Пуанкаре выступил с теоретическими исследованиями, сыгравшими значительную роль в обосновании необходимости квантовой гипотезы. Они явились важным этапом на пути к дальнейшему развитию квантовых представлений. В другой своей статье — «Новые концепции материи» (опубликованной тогда в философском сборнике «Современный материализм» и включенной в настоящее издание) — Пуанкаре рассказал о постоянной борьбе между концепциями, представляющими материю непрерывной или же, наоборот, дискретной субстанцией; о последней победе идеи дискретности; о квантовой теории излучения Планка. Но автор призывает не торопиться с выводом об окончательном падении концепции непрерывности материи и предрекает ее возрождение на новом уровне в ходе вечной борьбы двух противоположных концепций. И действительно, идея дискретности излучения вскоре была дополнена не менее удивительной идеей об универсальных непрерывных свойствах материи, согласно которой каждой дискретной частице сопоставляется определенный волновой процесс в реальном физическом пространстве. На основе синтеза этих противоположных сущностей микрообъектов в 20-е годы нашего века возникла квантовая и волновая механика, в которой строгое теоретическое описание явлений атомного мира достигалось ценой отказа от основных положений классической механики Так полностью оправдалось предсказанное Пуанкаре еще в 1904 году открытие совершенно необычных законов, объясняющих спектральные линии излучения атомов. А его общие рассуждения о постоянной жизнеспособности непрерывной и

---

[1]) Эйнштейн А. Собр. научн. трудов, т. 4. — М.: Наука, 1967. — С. 280.

дискретной концепций материи воплотились в самое поразительное открытие физики XX века — в провозглашенный квантовой механикой дуализм корпускулярных и волновых свойств материи, который приобрел ныне решающее универсальное значение для всего микромира.

* * *

Научное наследие Пуанкаре поражает не только широтой охвата точных наук, но и огромным влиянием на их последующее развитие. Он прокладывал в науке новые направления, важность и актуальность которых нередко становились несомненными лишь через годы и десятилетия. Значение его трудов возрастало со временем по мере развертывания заложенных в них идей и методов. Например, в проведенных Пуанкаре исследованиях нелинейных уравнений небесной механики советский ученый А. А Андронов обнаружил готовый математический аппарат для решения проблемы нелинейных колебаний в радиотехнике, названных им автоколебаниями. Так, почти полвека спустя математические методы Пуанкаре помогли решить практически важную и актуальную задачу.

Точно такая же устремленность в будущее характерна и для физических исследований Пуанкаре. Еще в 1901 году он первым представил уравнения классической механики в групповых переменных, придав им новую, инвариантную форму. И в специальной теории относительности первый шаг в этом направлении был сделан именно Пуанкаре, четко сформулировавшим требование инвариантности законов физики относительно преобразований Лоренца. Таким образом, он первый провозгласил в физике новый, инвариантно-групповой подход, распространив идеи Ф. Клейна, изложенные в его «Эрлангенской программе» для геометрии, на новую область науки. Ныне требование инвариантности стало в физике уже нормой теоретического знания, а релятивистская инвариантность любой физической теории формулируется как инвариантность относительно группы Пуанкаре.

Отвечая на вопрос о том, кто был для него образцом творческой личности, академик А А. Логунов среди других знаменитых ученых назвал Анри Пуанкаре, особо отметив его современность как физика-теоретика. «В начале века он создал методы, которые физики-теоретики освоили гораздо позже», — говорит А. А. Логунов.

Порой трудно провести четкую границу между конкретными предвидениями Пуанкаре в математке и физике и его общими методологическими идеями, нацеленными на будущее развитие точных наук. Это и понятно, поскольку, как заметил академик А. Д. Александров, все действительно великие математики были в то же время и философами-мыслителями К таким математикам он относит, наряду с Пифагором, Декартом, Лейбницем, Ньютоном, Лобачевским, Риманом, Брауэром, Гильбертом. и Анри Пуанкаре. Удивительная прозорливость Пуанкаре в науке и верное предчувствие им правильных направлений, в которых должна двигаться физико-математическая мысль, делают некоторые его выводы и суждения по общим проблемам науки ценными ориентирами и для современных ученых Поэтому до сих пор не ослабевает интерес к творчеству выдающегося французского ученого, что видно на примере издания в последнее время его избранных трудов в трех томах, его работ по основаниям геометрии, его знаменитого этюда «Математическое творчество». Настоящее издание четырех книг Пуанкаре, посвященных общим проблемам физико-математического знания, будет безусловно полезным для советского читателя Вооруженный идеями материалистической диалектики, он сумеет отделить в них то, что имеет для науки непреходящую ценность, от некоторых философских непоследовательностей и заблуждений великого ученого.

ЛИТЕРАТУРА

Ленин В. И. Материализм и эмпириокритицизм. — Полн. собр. соч, т. 18, с 525.

Ленин В. И. Философские тетради. — Полн. собр. соч, т. 29, с. 782.

Александров П. С. Математические открытия и их восприятие//Научное открытие и его восприятие. — М.: Наука, 1971. — С. 68—72.

Александров П. С. Пуанкаре и топология//Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах, т. II.— М.: Наука, 1972.— С. 808—816

Александров П. С. Пуанкаре и топология//УМН. — 1972. — Т 27, № 1(63). — С. 147—158

Асмус В. Ф Проблемы интуиции в философии и математике (Очерк истории: XVII — начало XX в.). — М.: Мысль, 1965 (глава восьмая: Проблема интуиции в философии математики Пуанкаре, с. 236—257).

Визгин В. П. Ленинский анализ состояния физики на рубеже XIX—XX вв.//Ленинское философское наследие и современная физика. — М.: Наука, 1981. — С 222—262.

Добронравов И. Пуанкаре//Философская энциклопедия, т. 4. — М., 1967. — С. 432—433.

История философии в шести томах, т. V. — М.: Изд-во АН СССР, 1961 (глава четырнадцатая: Философская и социологическая мысль во Франции от начала эпохи империализма до конца первой мировой войны, § 1: Буржуазная философия в конце XIX — начале XX в, с. 599—612).

Кравченко А М. Значение работы В. И. Ленина «Материализм и эмпириокритицизм» для критики современных форм конвенционализма. Работа В И. Ленина «Материализм и эмпириокритицизм» и актуальные проблемы марксистско-ленинской философии.— Киев Наукова думка, 1979.— С. 314—340.

Кузнецов В. Н. Французская буржуазная философия XX века — М.: Мысль, 1970 (Пуанкаре и конвенционализм, с. 103—123).

Митропольский Ю. А Жюль-Анри Пуанкаре//Укр. философии. — Киев· Наукова думка, 1979. — С. 314—340.

Молчанов Ю. Б Четыре концепции времени в философии и физике — М.: Наука, 1977 (глава четвертая. Создание специальной теории относительности — триумф реляционной концепции времени, 1 2: Значение идей А. Пуанкаре, с. 106—110).

Мостепаненко А. М. «Дополнительность» физики и геометрии (Эйнштейн и Пуанкаре)//Эйнштейн и философские проблемы физики XX века. — М.: Наука, 1979. — С. 223—254.

Налчаджян А. А. Некоторые психологические и философские проблемы интуитивного познания (интуиция в процессе научного-творчества). — М.: Мысль, 1972 (глава II: Проблема интуитивного «озарения» в научном творчестве, с. 60—86).

Современная буржуазная философия. — М.: Изд-во МГУ, 1972 (глава II: Позитивизм конца XIX — начала XX в., § 6: Конвенционализм А. Пуанкаре, с. 95—102).

Старосельская-Никитина О. А. Роль Анри Пуанкаре в создании теории относительности//Вопросы истории естествознания и техники. — 1957. — Т. 5. — С. 39—49.

Чудинов Э. М. Теория относительности и философия. — М.: Политиздат, 1974 (глава четвертая: Геометрия и реальность, с. 132—159).

Чудинов Э. М. Послесловие //Грюнбаум А. Философские проблемы пространства и времени. — М.: Прогресс, 1969. — С. 553—568.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ [1])

---

[1]) В указатель включены имена и фамилии, встречающиеся в тексте произведений А. Пуанкаре. Упоминаемые в сносках фамилии помечены (сн.).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

[1]) Имеется в виду интеграл дифференциального уравнения

---

[1]) В современной математической терминологии — автоморфная функция.

[2]) В нашей научной литературе это направление получило название «энергетизм».

[3]) См. сноску на с. 36.

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

ПУАНКАРЕ Анри

О НАУКЕ

Заведующий редакцией *С. И. Зеленский*
Редактор *В. В Донченко*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *И. Ш. Аксельрод*
Корректоры *Л. С. Сомова, М. Н. Дронова*

ИБ № 41046

Сдано в набор 09.03.89. Подписано к печати 10.10.89. Формат 84×108¹/₃₂ Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная Печать высокая. Усл. печ л. 38,64. Усл. кр -отт. 38,64. Уч.-изд. л. 41,87. Тираж 31 000 экз Заказ № 89. Цена 3 р. 30 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им Евгении Соколовой Государственного комитета СССР по печати. 198052 г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.