

На книгу
И. А. Зыкина

Юрий Зыкин
1937.

И. Е. ТАММ

Профессор Второго московского университета

534
Т 17

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

Т О М

I

*Научно-технической секцией Государственного ученого совета
допущено в качестве пособия для высших учебных заведений*

НАУЧНАЯ
БИБЛИОТЕКА
М И Ф И

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА ★ 1929 ★ ЛЕНИНГРАД

О Т П Е Ч А Т А Н О
в 1-й Образцовой типографии
Гиза. Москва, Пятницкая, 71.
Главлит А-14749. Н. 20. Гиз 25523.
Заказ № 689. Тираж 3 000 экз.

ОГЛАВЛЕНИЕ

*

Стр.

Предисловие	IX
Список важнейших обозначений	XI
Введение	1

I. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ НЕПОДВИЖНЫХ ЗАРЯДОВ В ОТСУТСТВИИ ДИЭЛЕКТРИКОВ. НАЧАЛА ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

§ 1. Закон Кулона	3
§ 2. Электростатическое поле	7
§ 3. Поток вектора. Теорема Гаусса	9
§ 4. Некоторые применения теоремы Гаусса	16
§ 5. Проводники в электростатическом поле	22
§ 6. Преобразование поверхностного интеграла в объемный. Дивергенция	25
§ 7. Истоки электрического поля. Поверхностная дивергенция	32
§ 8. Работа электрических сил. Потенциал	36
§ 9. Емкость. Единицы потенциала и емкости	44
§ 10. Поверхности уровня. Градиент	49
§ 11. Градиент электростатического потенциала. Линии сил. Уравнение Пуассона.	56
§ 12. Дифференциальный оператор Гамильтона «набла». Пространственные производные	63
§ 13. Теорема Грина. Потенциал объемных и поверхностных зарядов	70
§ 14. Типичные задачи электростатики	79
§ 15. Двойной электрический слой	82
§ 16. Энергия электрического поля	87
§ 17. Пондеромоторные силы	98
§ 18. Неустойчивость электростатических систем. Связи	102

II. ДИЭЛЕКТРИКИ

§ 19. Диэлектрики с квазиупругими диполями	107
§ 20. Электростатическое поле в однородном диэлектрике	113
§ 21. Микро- и макроскопические значения физических величин	119
§ 22. Дифференциальные уравнения электростатического поля в произвольной среде	123
§ 23. Отличие «действующего на диполь» поля от среднего. Твердые диэлектрики	134
§ 24. Энергия электрического поля в диэлектриках	144
§ 25. Пондеромоторные силы в диэлектриках	152
§ 26. Сведение пондеромоторных сил к натяжениям	161

III. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Стр.

- § 27. Дифференциальные уравнения постоянного тока 170
 § 28. Сторонние электродвижущие силы. Квазилинейные токи 181
 § 29. Электронная теория электропроводности металлов 191

IV. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ В ОТСУТСТВИИ
НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ СРЕД

- § 30. Пондеромоторное взаимодействие элементов тока 200
 § 31. Магнитное поле токов 204
 § 32. Циркуляция вектора. Теорема Стокса. Ротор вектора 210
 § 33. Вектор-потенциал. Дифференциальные уравнения магнитного поля 219
 § 34. Магнитные силовые линии 225
 § 35. Топология вихревого (магнитного) поля. Фиктивные магнитные заряды. Магнитные листки 231
 § 36. Пондеромоторные силы, испытываемые в магнитном поле замкнутыми токами 244
 § 37. Лорентцова сила 261
 § 38. Абсолютная (Гауссова) и другие системы единиц 264

V. МАГНЕТИКИ (НАМАГНИЧИВАЮЩИЕСЯ СРЕДЫ)

- § 39. Намагниченные магнетиков. Пара-, диа- и ферро-магнетики 272
 § 40. Уравнения постоянного магнитного поля в магнетиках 276
 § 41. Поле постоянных магнитов. Пондеромоторные силы, испытываемые магнетиками 282
 § 42. Пондеромоторные силы, испытываемые токами. Взаимодействие и эквивалентность токов и магнитов 286
 § 43. Вывод уравнений магнитного поля с точки зрения электронной теории магнетиков 292
 § 44. Электронная теория намагничивания 300
 § 45. Магнитно-механические явления. Гипотеза вращающегося электрона 314

VI. КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

- § 46. Индукция токов в замкнутых контурах 319
 § 47. Квазистационарные токи; их индукционное взаимодействие. Энергия магнитного поля токов 329
 § 48. Объемное распределение энергии магнитного поля. Самоиндукция. Энергия поля магнитов 341
 § 49. Вихри электрического поля 351
 § 50. Токи смещения 360
 § 51. Конденсатор в цепи квазистационарного тока 367
 § 52. Скин-эффект 373

VII. ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ; ЕГО РАСПРОСТРАНЕНИЕ

- § 53. Система Максвелловых уравнений 381
 § 54. Теорема Пойнтинга. Поток энергии 387

	<i>Стр.</i>
§ 55. Однозначность решений Максвелловых уравнений	393
§ 56. Запоздывающие потенциалы электромагнитного поля	395
§ 57. Скорость распространения электромагнитных возмущений. Условия квази- стационарности	407
§ 58. Поле осциллятора. Его излучение	411
§ 59. Электромагнитная природа света. Плоские волны в диэлектрике	423
§ 60. Отражение и преломление плоских волн	429
§ 61. Поверхностные токи. Идеальные проводники	433
§ 62. Пример неквазистационарных токов — волны вдоль кабеля	441
§ 63. Приближенная теория быстропеременных токов	446
§ 64. Общая характеристика теорий близко- и далеко-действия	450
—————	
Решение задач	456
Важнейшие формулы векторного исчисления	468
Указатель	471

ПРЕДИСЛОВИЕ

*

Настоящая книга предназначена для лиц, владеющих дифференциальным и интегральным исчислением и векторной алгеброй; основы же векторного анализа излагаются в тексте по мере надобности.

Основной целью этого курса является выяснение *физического смысла и содержания* основных положений теории электричества; по сравнению с этой целью формально-логической стройности, строгости и общности изложения отводилась лишь соподчиненная роль.

Так например, изложение теории диэлектриков и магнетиков (главы II и V) базируется на основных представлениях электронной теории, вливающих наглядное физическое содержание в формулы классической электродинамики. Чтобы не затмевать физического содержания теории громоздкими математическими выкладками, я удовольствовался при этом упрощенной картиной явлений (уподобление молекул диэлектрика диполям, а молекул магнетика — элементарным постоянным токам), хотя конечно справедливость основных положений теории с этими специальными предположениями отнюдь не связана.

Не стремясь к полноте изложения, я опускал даже сравнительно важные вопросы, если они выпадали из общей нити изложения. В особенности это относится к тем явлениям, теория которых носит до сих пор преимущественно феноменологический характер (термоэлектрические явления, явление Холла и сродные ему, гистерезис и вообще свойства ферромагнетиков и т. д.). Впрочем, опущена также теория электролиза; в главе VII изложены лишь начатки электромагнитной теории света; за подробностями отсылаем читателя к специальным курсам. С другой стороны, на некоторых вопросах (например в теории диэлектриков и магнетиков) я позволил себе остановиться несколько подробнее, чем это обыкновенно принято. Технических приложений теории я не излагал, но стремился по возможности подготовить читателя к непосредственному переходу к изучению прикладной теории электричества.

Второй том курса будет в основном посвящен, во-первых, систематическому изложению электронной теории, и, во-вторых, явлениям в движущихся средах. Кроме того ко второму тому отнесены некоторые дополнительные вопросы, не нашедшие себе места в томе первом, как например электродинамика анизотропных сред и вывод выражений пондеромоторных сил из основных уравнений поля.

Ввиду неразработанности русской научной терминологии я принужден был ввести два новых термина: „сторонняя“ электродвижущая сила (*eingeprägte Kraft*, § 28) и „магнетик“ (§ 39). Кроме того я позволил себе уклониться от общепринятого, но устарелого и нерационального словоупотребления терминов „свободный“ и „связанный“ заряд (§ 20). Наконец Гауссову (симметрическую) систему единиц в отличие от электростатической и электромагнитной я называю просто абсолютной системой (без прилагательного).

Большинство помещенных в книге задач составляет органическую часть текста; решения многих задач необходимы для понимания последующего изложения.

В заключение не могу не выразить глубокой признательности проф. *Л. И. Мандельштаму*, советами которого я широко пользовался при написании книги; с его разрешения я заимствовал из читаемого им лекционного курса общий план изложения главы 2-й и первой половины главы 4-й. В частности возведение во главу угла учения о магнитном поле закона пондеромоторного взаимодействия элементов тока позволило, по моему мнению, значительно упростить вывод основных уравнений магнитного поля токов.

Я чрезвычайно благодарен также проф. *Я. Н. Шпильрейну* и аспирантам 1 МГУ *А. А. Андронову* и *М. А. Леонтовичу*, внимательно просмотревшим рукопись и корректуры и снабдившим меня рядом ценных указаний, и аспирантке *М. П. Свешниковой*, составившей решения задач.

И. Е. Тамм.

Список важнейших обозначений.

Векторы обозначаются жирным прямым шрифтом (например \mathbf{R}); та же буква светлым шрифтом означает численное значение соответствующего вектора (например R).

Интегралы любой кратности обозначаются одним единственным знаком \int (кроме первых 28 страниц) и различаются лишь обозначением элемента интегрирования:

элемент объема (трехкратного интеграла) — dV ,

элемент поверхности (двукратного интеграла) — dS ,

элемент линии (ординарного интеграла) — ds .

Знак \oint означает интеграл по замкнутой поверхности или по замкнутому контуру.

О смысле индексов a и q у знаков grad , div и т. д. см. стр. 53—55.

- A — работа.
 \mathbf{A} — вектор-потенциал.
 \mathbf{B} — магнитная индукция.
 c — электродинамическая постоянная = скорости света в вакууме.
 C — 1) емкость, 2) циркуляция вектора.
 \mathbf{D} — электрическая индукция.
 e — электрический заряд.
 E — напряженность электрич. поля.
 \mathcal{E} — напряжение.
 $\mathcal{E}^{стр}$ — сторонняя электродвижущая сила.
 \mathbf{f} — плотность сил.
 F — сила (пондеромоторная).
 \mathbf{H} — напряженность магнитного поля.
 \mathbf{i} — 1) единичный вектор по оси x ,
 2) плотность поверхностных токов.
 \mathbf{I} — намагничение (единицы объема).
 \mathbf{I}^0 — постоянное намагничение.
 \mathbf{j} — 1) единичный вектор по оси y ,
 2) плотность тока (объемного).
 J — сила тока.
 k — 1) постоянная Больцмана,

- 2) волновое число.
 \mathbf{k} — единичный вектор по оси z .
 \mathbf{K} — момент количества движения.
 L — кривая, в частности замкнутый контур.
 L_{ii} — коэффициент самоиндукции.
 L_{ik} — коэффициент взаимной индукции ($i \neq k$).
 m — (фиктивный) магнитный заряд.
 \mathbf{M} — магнитный момент.
 \mathbf{n} — единичный вектор нормали.
 N — 1) поток вектора, в частности электрического; 2) число молекул в единице объема.
 \mathbf{N} — 1) единичный вектор, 2) момент пары сил.
 ω — угловая скорость прецессии.
 \mathbf{p} — электрический момент диполя.
 P — работа сторонних электродвижущих сил.
 \mathbf{P} — 1) поляризация (единицы объема), 2) вектор Герца.
 Q — тепло, выделяемое током в единицу времени.

- R — сопротивление.
 \mathbf{R} — радиус вектор.
 \mathbf{r} — вектор кратчайшего расстояния от заданной оси.
 ds — элемент длины.
 S — поверхность.
 \mathbf{S} — вектор Пойнтинга.
 t — время.
 \mathbf{t} — единичный касательный вектор.
- α — 1) азимут, 2) поляризуемость единицы объема.
 α, β, γ — направляющие углы.
 β — поляризуемость молекулы.
 ϵ — диэлектрическая постоянная.
 θ — полярный угол.
 χ — 1) магнитная восприимчивость, 2) линейная плотность заряда.
 λ — 1) коэффициент электропроводности, 2) длина волны.
 μ — магнитная проницаемость.
 ρ — (объемная) плотность электричества.
- T — 1) абсолютная температура, 2) период колебаний.
 \mathbf{v} — скорость.
 U — потенциальная функция магнитного поля токов.
 \mathbf{v} — скорость.
 V — объем.
 w — плотность энергии.
 W — энергия.
- ρ_m — (объемная) плотность магнитных зарядов (фиктивных).
 σ — плотность поверхностных электрических зарядов.
 σ_m — плотность поверхностных магнитных зарядов (фиктивных).
 τ — плотность (масса единицы объема).
 ϕ — электрический потенциал.
 Φ — магнитный поток.
 ψ — магнитный скалярный потенциал.
 Ψ — поток магнитной индукции.
 ω — циклическая частота.
 ω, Ω — телесный угол.

ВВЕДЕНИЕ

*

Согласно современным воззрениям электричество состоит из неделимых частиц или атомов электричества: электронов (атомов отрицательного электричества) и протонов (атомов положительного электричества). Заряды электронов и протонов, отличаясь своим знаком, одинаковы по абсолютной величине и равны $4,77 \cdot 10^{-10}$ абс. эл.-стат. единиц электричества (или $1,59 \cdot 10^{-19}$ кулонов); масса же электронов примерно в 2 000 раз меньше массы протонов ($9,0 \cdot 10^{-28}$ и $1,66 \cdot 10^{-24}$). Эти частицы электричества представляют собой основную и единственную субстанцию, из которой построены все без исключения материальные тела. Нейтральные в электрическом отношении тела кажутся таковыми только потому, что они состоят из равного числа электронов и протонов, влияние противоположных зарядов которых взаимно нейтрализуется (по крайней мере, на расстояниях, достаточно больших по сравнению с расстоянием между отдельными электрическими частицами, входящими в состав нейтрального тела). Отрицательный заряд тела соответствует избытку числа находящихся в нем электронов над числом протонов, положительный — недостатку электронов. Перераспределение электрических зарядов и, в частности, электрический ток обуславливаются перемещением атомов электричества и притом большей частью электронов, а не протонов, ибо в состав атомов химических элементов всегда входит некоторое число „внешних“ электронов, сравнительно слабо связанных с массивной центральной частью атома и сравнительно легко от него отщепляющихся.

Исходя из этих представлений современная физика ставит своей задачей определить электрическую структуру всех встречающихся в природе веществ (число, расположение и характер движения входящих в состав их электрических частиц) и вывести законы всех физических и химических явлений из основных законов взаимодействия электрических зарядов. Единственная область явлений, остающаяся пока независимой от электродинамики, законы которой должны быть

поэтому включены в число основных физических законов, суть явления тяготения.

Первым шагом на пути к разрешению указанной задачи должно быть выяснение законов взаимодействия электрических зарядов, законов электромагнитного поля. Громадное большинство применяемых на практике способов наблюдения и измерения слишком грубы для того, чтобы с их помощью можно было обнаружить существование отдельных атомов электричества. Наименьшие электрические заряды, доступные наблюдению с помощью этих способов, содержат в себе многие миллионы и миллиарды частиц электричества, отделенных друг от друга ничтожными расстояниями. При таком суммарном или макроскопическом¹ изучении электрических явлений в масштабе, доступном непосредственному наблюдению, мы можем, не внося скольконибудь существенной ошибки в результаты рассуждений, вовсе не учитывать атомистического строения электричества и пользоваться представлением о непрерывно протяженных электрических зарядах. Иными словами, мы можем считать, что электрические заряды сплошным, непрерывным образом заполняют заряженные участки материальных тел (так называемые „объемные заряды“). Упрощая таким образом нашу задачу, мы лишь следуем примеру механики. Ввиду того, что изучение механики весомых тел при учете атомистической структуры вещества связано со значительными математическими трудностями, теория упругости, гидродинамика и аэродинамика оперируют с идеализированным представлением о непрерывно протяженных материальных телах. В известных, и притом довольно широких, пределах подобная замена вполне законна, и результаты, полученные при рассмотрении непрерывных сред, оказываются применимыми к реальным телам прерывного строения.

Следуя историческому ходу развития электродинамики, мы начнем с изложения макроскопической теории электромагнитных явлений, основанной на представлении о непрерывном распределении электрических зарядов. По накоплению известного количества сведений мы перейдем к параллельному изложению микроскопической теории, основанной на учете атомистического строения электричества (так называемая „электронная теория“), и покажем, что приближенные макроскопические законы суммарных явлений вытекают из более точных микроскопических законов явлений элементарных.

¹ Греческое «макрос» — большой и «скопейн» — видеть.

1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ НЕПОДВИЖНЫХ ЗАРЯДОВ В ОТСУТСТВИИ ДИЭЛЕКТРИКОВ. НАЧАЛА ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

*

§ 1. Закон Кулона.— В этой главе мы будем предполагать, что в электрическом поле неподвижных зарядов, кроме проводников электричества, никаких других материальных тел нет.

В основе теории электростатического поля лежит закон Кулона, являющийся обобщением данных опыта. Этот закон, как известно, гласит, что два помещенных в однородную среду (в частности в вакуум) заряженных тела бесконечно малых размеров (два точечных заряда) отталкиваются, если заряды их одноименны, и притягиваются, если они разноименны, причем сила их взаимодействия F пропорциональна $\frac{e_1 e_2}{\epsilon R_{12}^2}$:

$$F \propto \frac{e_1 e_2}{\epsilon R_{12}^2}, \quad 1$$

где e_1 и e_2 суть заряды первого и второго тела, R_{12} — расстояние между ними и, наконец, ϵ есть диэлектрическая постоянная, характеризующая свойства среды, в которую помещены рассматриваемые тела.

В настоящей главе мы ограничиваемся рассмотрением электростатического поля в вакууме, соответственно чему положим $\epsilon = 1$, так что формула (1) примет вид

$$F \propto \frac{e_1 e_2}{R_{12}^2}. \quad 1'$$

Конечно, абсолютный вакуум не осуществим на опыте и в эвакуируемых сосудах всегда остается некоторое, хотя бы и ничтожное количество воздуха. Однако это вовсе не значит, что законы электрического поля в вакууме недоступны опытному исследованию. Изучая изменения характера поля по мере уменьшения давления воздуха, можно установить тот предел, к которому стремятся свойства поля (например, силы взаимодействия зарядов) по мере приближения к абсолютному

вакууму. Эти предельные свойства (предельное значение силы) очевидно и будут характеризовать собою поле в абсолютном вакууме. Впрочем, как показывает опыт, при уменьшении плотности воздуха от нормальной до достижимого на опыте предела свойства поля изменяются столь незначительно, что если нет нужды в особой точности, то этими изменениями можно в большинстве случаев вовсе пренебречь и считать, что свойства поля в воздухе тождественны со свойствами поля в вакууме.

Выражаемая формулой (1') обратная пропорциональность силы взаимодействия зарядов квадрату их расстояния может быть непосредственно проверена на опыте. Что же касается зависимости этой силы от величины зарядов, то дело обстоит несколько сложнее, ибо самая величина зарядов в свою очередь может быть определена только путем измерения силы их взаимодействия. Однако, если число зарядов не меньше четырех, то искомая зависимость все же может быть проверена путем последовательного измерения попарных сил взаимодействия между ними. Предположим для простоты, что при этих измерениях исследуемые заряды всякий раз помещаются на одном и том же расстоянии друг от друга (остальные же заряды устраняются). При этом условии из уравнения (1') вытекают соотношения:

$$F_{23} : F_{13} = e_2 : e_1 \quad \text{и} \quad F_{24} : F_{14} = e_2 : e_1,$$

где F_{ik} есть сила взаимодействия зарядов e_i и e_k . Таким образом отношение $\frac{e_2}{e_1}$ (а также и отношения $\frac{e_3}{e_1}$, $\frac{e_4}{e_1}$ и т. д.) может быть определено из двух независимых рядов измерений (сил F_{13} и F_{23} , с одной стороны, и сил F_{14} и F_{24} — с другой). Совпадение результатов этих независимых измерений и дает нам право утверждать, что каждый заряд может быть охарактеризован некоторым постоянным числом e так, чтобы сила F_{ik} была пропорциональна произведению $e_i e_k$.

Конечно, путем измерения сил взаимодействия можно определить только отношение величин зарядов $\frac{e_i}{e_k}$, единица же заряда может быть выбрана по произволу. В абсолютной системе единиц единица заряда выбрана так, чтобы при измерении сил и расстояний в системе CGS фактор пропорциональности между F и $\frac{e_1 e_2}{R_{12}^2}$ равнялся единице, т. е. чтобы осуществлялось равенство

$$F = \frac{e_1 e_2}{R_{12}^2}.$$

Стало быть, абсолютная единица электричества есть такое количество электричества, которое действует на равное ему количество электричества, находящееся на расстоянии 1 см, с силой в 1 дину. В практической же системе единиц за единицу электричества принят кулон:

$$1 \text{ кулон} = 3 \cdot 10^9 \text{ абс. единиц электричества}^1.$$

Что касается знака зарядов, то чисто условно принято считать положительными те заряды, которые появляются на стекле при натирании его шелком или фланелью, а стало быть и те, которые отталкиваются этими зарядами на стекле.

Из уравнения (2) следует, что в абсолютной системе единиц размерность $[e]$ электрического заряда e , т. е. зависимость единицы заряда от единиц длины (L), времени (T) и массы (M), равна

$$[e] = [R\sqrt{F}] = L \cdot \sqrt{MLT^{-2}} = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}.$$

Весьма существенно, что закон Кулона (1) или (2) справедлив только для взаимодействия точечных зарядов, т. е. заряженных тел бесконечно малых размеров. Только в этом случае самое понятие расстояния между зарядами имеет вполне определенный, однозначный смысл и только в этом случае взаимодействие заряженных тел не зависит от их формы. Конечно, понятие бесконечно малого нужно понимать в этом случае, как и всегда в физике, не в строго математическом смысле слова. В физике выражение „бесконечно малая“ (или „бесконечно большая“) величина всегда понимается в смысле „достаточно малой“ (или „достаточно большой“) величины, достаточно малой по отношению к некоторой другой вполне определенной физической величине. Встречаясь с термином „бесконечный“ всегда необходимо давать себе ясный отчет в том, какая именно величина взята каждым отдельном случае в качестве меры.

¹ Заметим, что помимо той абсолютной (Гауссовой) системы единиц, которой мы будем пользоваться в настоящей книге, под названием «абсолютной системы» в физике и технике часто понимаются две других системы единиц — электростатическая и электромагнитная. Соотношение между этими системами будет рассмотрено в § 38; пока же достаточно заметить, что [абсолютные (Гауссовы) единицы электрических величин (заряд, напряженность поля, потенциал, сила тока и т. д.) совпадают с единицами электростатическими, а абсолютные единицы магнитных величин (напряженность магнитного поля, коэффициент самоиндукции, магнитный момент) — с единицами электромагнитными.

Далее и в отношении практических единиц необходимо различать между так называемыми «абсолютными» и «международными» практическими единицами (см. § 38). В этой книге мы будем пользоваться только первыми из этих единиц.

В формулировке закона Кулона бесконечная малость (точечность) размеров заряженных тел понимается в смысле достаточной их малости по отношению ко взаимному расстоянию этих тел; достаточной в том смысле, что при данном расстоянии тел и при заданной точности измерений сила их взаимодействия уже не изменяется при дальнейшем уменьшении их размеров и при произвольном изменении их формы. Поскольку мы пока ограничиваемся макроскопическим рассмотрением явлений, мы должны помнить, что физически бесконечно малый или „точечный“ заряд может в действительности содержать в себе чрезвычайно большое число отдельных электронов и протонов. Так, например, если бы возникла необходимость определить силу электрического взаимодействия двух заряженных электричеством звезд, то, несмотря на громадные размеры звезд, мы были бы в праве считать их точечными зарядами, ибо при колоссальном расстоянии между звездами размеры и форма их не могут сколько-нибудь существенно сказаться на силе их взаимодействия. С другой стороны, два заряженных бузиновых шарика радиуса 0,1 см, находящиеся на расстоянии 0,5 см друг от друга, не могут считаться точечными зарядами, и закон Кулона к ним непосредственно не применим. Чтобы определить силу их взаимодействия, нужно мысленно разбить эти шарики на бесконечно малые (т. е. достаточно малые по сравнению с расстоянием в 0,5 см) элементы объема и определить по закону Кулона взаимодействие между зарядами каждой пары этих элементов объема. Сила взаимодействия между шариками будет равна равнодействующей этих элементарных сил¹.

При определении равнодействующей электрических сил нужно, конечно, принять во внимание, что силы эти суть векторы, и применять к ним правила векторного исчисления. Мы будем обозначать векторы жирным шрифтом, а их численную величину — светлым. Так, например, \mathbf{R}_{12} будет обозначать радиус-вектор, проведенный из точки 1 в точку 2, а R_{12} — численную величину расстояния между точками 1 и 2. Очевидно, что $\mathbf{R}_{21} = -\mathbf{R}_{12}$, а $R_{21} = R_{12}$. При записи закона Кулона (2) в векторной форме необходимо отличать силу \mathbf{F}_{12} , с которой заряд e_1 действует на заряд e_2 , от силы \mathbf{F}_{21} , с которой заряд e_2 действует на

¹ В основе этого вычисления лежит допущение, что сила взаимодействия двух (точечных) зарядов не зависит от того, подвергаются ли эти заряды воздействию других зарядов или нет. Это предположение вместе с утверждением, что равнодействующая электрических сил равна векторной сумме этих сил, составляет содержание принципа наложения или суперпозиции электрических полей. Принцип этот является обобщением данных опыта.

заряд e_1 , ибо эти силы равны по величине, но обратны по направлению ($\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$). Если заряды e_1 и e_2 одноименны по знаку (отталкивание), то направления векторов \mathbf{F}_{12} и \mathbf{R}_{12} совпадают между собой, так что

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{e_1 e_2}{R_{12}^2} \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}} = \frac{e_1 e_2}{R_{12}^3} \mathbf{R}_{12}, \quad (1) \quad 3$$

ибо численная величина вектора $\frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}}$ равна единице, а произведение $e_1 e_2$ положительно. Очевидно, что это уравнение остается справедливым и для разноименных зарядов, ибо в этом случае произведение $e_1 e_2$ отрицательно, а сила \mathbf{F}_{12} направлена обратно вектору \mathbf{R}_{12} (притяжение). Наконец, очевидно, что

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = \frac{e_2 e_1}{R_{21}^3} \mathbf{R}_{21}.$$

Отметим в заключение, что решающее значение в вопросе о справедливости закона Кулона, как и вообще любого закона, лежащего в основе того или иного отдела теоретической физики, имеет не только непосредственная проверка этого закона, но также, что гораздо существеннее, и согласие с опытом всей совокупности выводов теории, одним из исходных пунктов которой является этот закон.

§ 2. Электрическое поле. — Если в точку P , находящуюся расстоянии R от заряда e , внести „пробный“ заряд e' , то можно обнаружить силу, действующую на этот пробный заряд и обусловленную присутствием заряда e . Сила эта обнаруживается только при наличии второго (пробного) заряда и можно считать, что она и возникает лишь при наличии обоих зарядов e' и e . Однако изучение электрических явлений чрезвычайно облегчается, если исходить из представления, что как в точке P , так и во всех точках пространства, окружающего заряд e , всегда существует электрическая сила, обусловленная присутствием этого заряда, вне зависимости от того, проявляется ли существование этой силы в воздействии ее на другой (пробный) заряд (в случае наличия такового) или же ни в чем не проявляется (в случае отсутствия других зарядов).

Пространство, в котором существуют электрические силы, обнаруживающиеся при внесении в него электрических зарядов, называется электрическим полем. В дальнейшем мы будем исходить из представления, что всякий заряд возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле. Пока мы остаемся в пределах электростатики, понятие поля может рассматриваться, как понятие чисто условное,

введенное лишь для удобства описания электрических явлений. Однако перейдя к учению о переменном электромагнитном поле, в частности, к учению об электромагнитных волнах, мы убедимся, что понятие поля имеет глубокий физический смысл и что электромагнитное поле есть физическая реальность.

Согласно закону Кулона сила, действующая на „пробный“ заряд e' при внесении его в поле других зарядов, пропорциональна величине этого пробного заряда e' . Поэтому силы электрического поля будут вполне определены, если определена в каждой точке этого поля сила, действующая на помещенный в ней единичный положительный заряд. Эта сила, действующая на заряд $e' = 1$, называется напряженностью или напряжением или силой электрического поля или же просто электрическим вектором, и обозначается обычно буквой \mathbf{E} . Мы будем пользоваться первым из этих терминов, сохранив термин „напряжение“ для совершенно иного понятия разности потенциалов и линейного интеграла вектора \mathbf{E} (см. § 28).

Как следует из закона Кулона (3), напряженность поля точечного заряда e на расстоянии \mathbf{R} от этого заряда равна

$$E = \frac{e}{R^2}, \quad \boxed{E = \frac{e}{R^2} \mathbf{R}}, \quad \text{4}$$

где \mathbf{R} есть радиус-вектор, проведенный из заряда e в рассматриваемую точку поля. Напряженность поля двух или нескольких зарядов равна векторной сумме напряженностей поля каждого из этих зарядов в отдельности.

Необходимо помнить, что напряженность или сила поля \mathbf{E} вовсе не является силой в обычном, употребляемом в механике, смысле этого слова. Механическая или, как ее иногда называют, пондеромоторная сила \mathbf{F} (от латинского „пондус“ = вес, „пондеромоторный“ = движущий весомые тела), действующая на заряженное тело, определяется произведением силы поля \mathbf{E} на заряд тела e :

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}. \quad \text{5}$$

Соответственно этому в абсолютной системе единиц напряженность или сила поля \mathbf{E} имеет размерность (см. стр. 5)

$$[E] = \frac{[F]}{[e]} = \frac{MLT^{-2}}{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}} = M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

На основании соотношения (5) одна из основных задач электростатики — определение механических сил взаимодействия заданной си-

стемы зарядов — сводится к определению поля E этих зарядов. Заметим при этом, что определить поле электрического вектора E , как и вообще определить поле любого вектора, значит определить значение вектора в каждой точке этого поля. В дальнейшем мы рассмотрим способы теоретического вычисления электрических полей, в отношении же экспериментального изучения этих полей отметим следующее.

Экспериментальное изучение электрического поля может быть осуществлено внесением в него пробного заряда известной величины и измерением пондеромоторных сил F , действующих на этот заряд в различных точках поля. Однако самый факт внесения в поле пробного заряда, вообще говоря, изменяет характер этого поля, ибо силы поля пробного заряда вызывают перераспределение зарядов на находящихся в поле проводниках (электростатическая индукция), сдвиг этих проводников и т. д. Чтобы избежать этого искажения первоначального характера поля, необходимо производить измерения с помощью бесконечно малых пробных зарядов, т. е. зарядов столь малых, что вызываемое их присутствием изменение распределения зарядов при заданной точности наблюдений не может сказаться на результатах измерения. Говоря о пробных зарядах, мы в дальнейшем всегда будем предполагать, что это условие выполнено (если не оговорено противное).

§ 3. Поток вектора. Теорема Гаусса. — 1. Если известно расположение зарядов, то поле E этих зарядов может быть определено путем суммирования Кулоновых полей типа (4), возбуждаемых каждым из элементов этих зарядов в отдельности. Такого рода непосредственное суммирование, вообще говоря, требует в каждом отдельном случае довольно сложных вычислений. Во многих случаях задача эта может быть, однако, чрезвычайно облегчена применением некоторых теорем, трактующих об общих свойствах электрического поля, к рассмотрению которых мы теперь и перейдем. Предварительно мы же введем важное вспомогательное понятие потока вектора.

В поле произвольного вектора a выделим мысленно бесконечно-малую плоскую площадку dS , т. е. площадку столь малую, что во всех ее точках вектор a с заданной степенью точности остается постоянным по величине и направлению. Проведем нормаль к этой площадке и условимся одно из направлений этой нормали n считать положительным или внешним, а другое — отрицательным или внутренним. Если задано направление обхода контура площадки, то направление положительной нормали мы будем выбирать так, чтобы нормаль эта образовывала вместе с контуром правовинтовую систему. Это

значит, что при повороте ручки буравчика правой нарезки по направлению заданного обхода контура острие буравчика пойдет по положительной нормали (рис. 1). Обратное, если задано направление внешней нормали, то мы будем соответственным образом выбирать направление положительного обхода контура площадки.

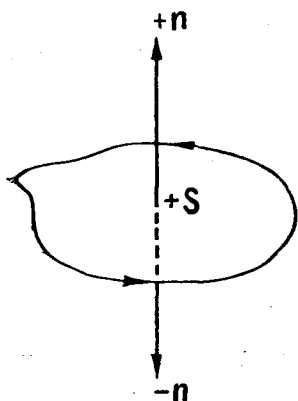


Рис. 1.

Наконец, если направление обхода контура и направление нормали к его плоскости заданы независимо друг от друга, то мы будем для краткости говорить, что направление обхода и направление нормали составляют правовинтовую систему, если они удовлетворяют упомянутому условию, и левовинтовую систему, если они ему не удовлетворяют.

Направление нормали мы будем характеризовать совпадающим с ней единичным вектором \mathbf{n} ($n=1$).

Потоком вектора \mathbf{a} через бесконечно малую площадку dS называется величина

$$\boxed{dN = \mathbf{a}\mathbf{n} dS} = a \cos(\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS = a_n dS, \quad (a) \quad 6$$

где \mathbf{a} есть значение вектора на площадке dS , а a_n — слагающая его по направлению \mathbf{n} . Площадка dS выбрана нами бесконечно малой именно для того, чтобы вектор \mathbf{a} имел на этой площадке одно определенное значение.

Чтобы определить поток вектора через поверхность конечных размеров нужно разбить ее на бесконечно малые площадки dS так, чтобы не только вектор \mathbf{a} оставался постоянным на каждой площадке, но чтобы и самые площадки могли считаться плоскими (рис. 2). Одну из сторон поверхности S назовем внутренней, а другую — внешней, и выберем соответственным образом направление внешних нормалей к каждому из элементов dS . Поток N вектора \mathbf{a} через поверхность S называется алгебраическая сумма потоков $a_n dS$

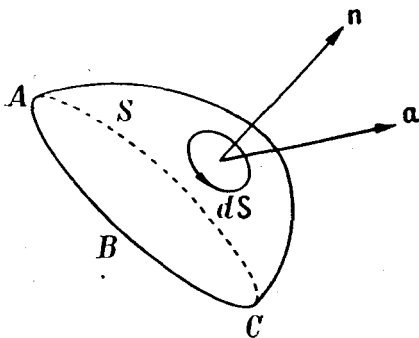


Рис. 2.

через отдельные элементы этой поверхности. Это суммирование тождественно с операцией нахождения определенного интеграла

$$N = \iint_S a_n dS$$

и называется интегрированием по поверхности S . Оно обозначается двойным интегралом потому, что поверхность имеет два измерения. Однако для упрощения записи мы в дальнейшем будем обозначать двукратные интегралы, как и интегралы однократные, одним единственным знаком интеграла:

$$N = \int_S a_n dS.$$

7

Во избежание же недоразумений условимся во всех поверхностных и только в поверхностных интегралах обозначать элемент интегрирования через dS .

Данное величине N название потока вектора взято из гидродинамики. В гидродинамике изучается векторное поле скорости жидкости: в каждый данный момент с каждой точкой заполненного жидкостью пространства связано определенное значение вектора скорости \mathbf{v} , а именно то значение этой скорости, которым обладает находящийся в этой точке элемент жидкости. Поток вектора скорости жидкости через элемент поверхности dS

$$dN = v_n dS \quad 6'$$

есть не что иное, как объем жидкости, протекающий через этот элемент за единицу времени в направлении внешней нормали к dS . Действительно, за единицу времени каждый элемент жидкости переместится на расстояние v ; стало быть через площадку dS пройдут все те и только те частицы жидкости, которые в начале рассматриваемого промежутка времени занимали цилиндрический объем с основанием dS и образующими \mathbf{v} ¹

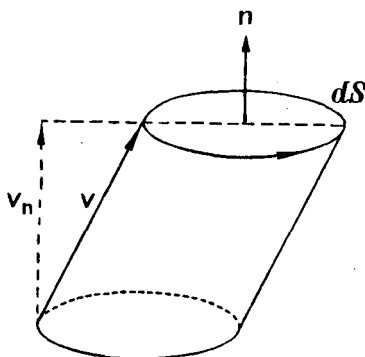


Рис. 3.

¹ Для простоты предполагаем, что скорость \mathbf{v} не зависит от времени и постоянна на всем протяжении этого цилиндра. В противном случае указанные рассуждения нужно применить не к единице времени, а к элементу времени dt , за время которого поток через площадку dS равен $v_n dS \cdot dt$.

(см. рис. 3). Объем этого цилиндра действительно равен $v_n dS$, ибо высота его равна v_n . Если векторы \mathbf{v} и \mathbf{n} образуют тупой угол, то $v_n < 0$ и поток жидкости отрицателен. Это значит, что жидкость протекает через dS в направлении, обратном внешней нормали \mathbf{n} .

Поток жидкости через конечную поверхность S равен очевидно потоку вектора скорости \mathbf{v} через эту поверхность:

$$N = \int_S v_n dS. \quad 7'$$

Часто приходится вычислять поток вектора через замкнутые поверхности (поверхность шара, куба и т. д.). При интегрировании по замкнутой поверхности мы будем отмечать это обстоятельство кружком у знака интеграла, так что, например, поток жидкости через замкнутую поверхность S запишется следующим образом:

$$N = \oint_S v_n dS. \quad 8$$

Очевидно, что поток этот равен количеству жидкости, вытекающей в единицу времени из объема, ограниченного замкнутой поверхностью S .

Если $N < 0$, то это значит, что внутрь поверхности втекает больше жидкости, чем вытекает из нее.

2. После этих пояснений возвратимся к электрическому полю и вычислим поток вектора напряженности поля \mathbf{E} через бесконечно малую площадку dS .

Предположим сначала, что поле \mathbf{E} возбуждается точечным зарядом e , находящимся в точке O , и что площадка dS перпендикулярна радиус-вектору \mathbf{R} , проведенному к ней из заряда e (рис. 4). На основании уравнения (4) получим:

$$dN = \mathbf{E} \mathbf{n} dS = \frac{e}{R^3} \mathbf{R} \mathbf{n} dS = \frac{e}{R^2} \cos(\mathbf{R}, \mathbf{n}) \cdot dS. \quad 9$$

Так как по условию dS перпендикулярно к \mathbf{R} , то $\cos(\mathbf{R}, \mathbf{n}) = \pm 1$ в зависимости от того, совпадает ли направление \mathbf{R} с направлением внешней нормали \mathbf{n} или же прямо противоположно ему. В первом

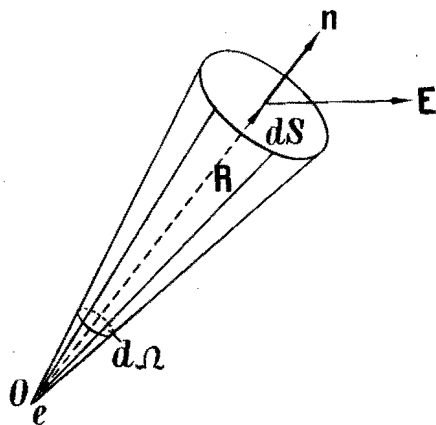


Рис. 4.

случае из точки O будет видна внутренняя сторона площадки dS , во втором — внешняя. Следовательно

$$dN = \pm \frac{e}{R^2} dS.$$

Перпендикулярная радиусу-вектору \mathbf{R} площадка dS совпадает с элементом шаровой поверхности радиуса R с центром в точке O . Если обозначить через $d\Omega$ тот телесный угол, под которым dS виден из O , то, как известно,

$$dS = R^2 d\Omega$$

и, стало быть,

$$dN = \pm e d\Omega.$$

Если, наконец, условиться приписывать телесному углу $d\Omega$, под которым площадка dS видна из точки O , положительный знак, если из O видна внутренняя сторона dS , и знак отрицательный, если видна ее внешняя сторона, то можно написать

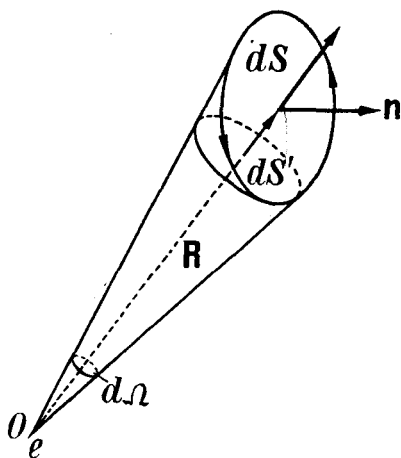
$$dN = E_n dS = e d\Omega. \quad (10)$$

Весьма существенно, что это простое соотношение остается справедливым и в том случае, если площадка dS не перпендикулярна радиусу-вектору \mathbf{R} . Действительно, уравнение (9) справедливо при любой ориентации площадки dS . Произведение же $\cos(\mathbf{R}, \mathbf{n}) \cdot dS$ равно проекции площадки dS на поверхность, перпендикулярную \mathbf{R} (рис. 5), причем эта проекция положительна, если из O видна внутренняя сторона площадки dS (угол (\mathbf{R}, \mathbf{n}) острый), и отрицательна, если видна ее внешняя сторона. Итак

$$dN = \frac{e}{R^2} \cos(\mathbf{R}, \mathbf{n}) dS = \pm \frac{e}{R^2} dS',$$

где dS' есть абсолютная величина перпендикулярной к \mathbf{R} проекции площадки dS . Очевидно, что эта проекция dS' видна из точки O под тем же телесным углом $d\Omega$, как и самая площадка dS , и что

$$dS' = R^2 d\Omega,$$



(Москва 1914) Рис. 5.

Следовательно,

$$dN = \pm e d\Omega.$$

Если, наконец, согласно упомянутому условию мы припишем углу $d\Omega$ определенный алгебраический знак, то мы вновь придем к формуле (10).

Итак, в поле точечного заряда e поток электрического вектора \mathbf{E} через произвольно ориентированную площадку dS зависит, помимо величины этого заряда, только от того телесного угла, положительного или отрицательного, под которым эта площадка видна из занимаемой зарядом точки O^1 .

3. Обращаясь к потоку N вектора \mathbf{E} через конечную поверхность S , получим

$$N = \int_S \mathbf{E}_n dS = e \int_S d\Omega = e\Omega, \quad 11$$

где Ω есть (положительный или отрицательный) телесный угол, под которым видна из заряда e вся поверхность S , т. е. телесный угол, образованный радиус-векторами, проведенными из e к краевой линии этой поверхности (рис. 6). Чрезвычайно существенно, что в том случае, если поверхность S замкнута, угол этот может иметь только одно из двух значений: 4π и 0 .

Действительно, точечный заряд может быть расположен либо внутри замкнутой поверхности, либо вне ее. Рассмотрение же точечного заряда, расположенного на самой поверхности, лишено физического смысла, ибо пользоваться представлением о точечном заряде можно лишь при условии, что действитель-

ные размеры заряда малы по сравнению с расстоянием его до рассматриваемых точек поля. Представление же о точечном заряде, рас-

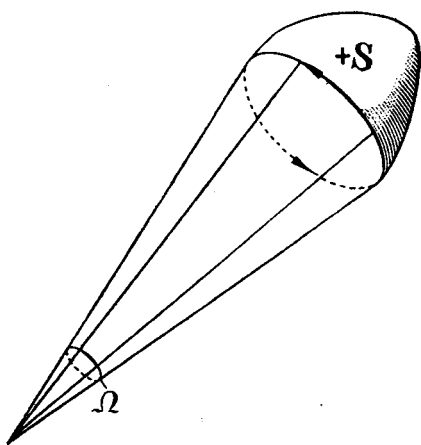


Рис. 6.

¹ Как явствует из вывода формулы (10), она является следствием того обстоятельства, что напряженность поля \mathbf{E} направлена радиально и при удалении от заряда убывает по тому же закону (обратно пропорционально R^2), по которому изменяется телесный угол $d\Omega$, соответствующий данной площадке dS . Поэтому для всех вообще центральных полей, обратных квадрату расстояния (например, поля тяготения, поля магнитных полюсов и т. д.), также будут справедливы формулы, аналогичные уравнению (10) и всем непосредственно вытекающим из него уравнениям.

положенном на поверхности, поток электрического вектора через которую мы определяем, этому условию очевидно не удовлетворяет.

Если заряд расположен внутри замкнутой поверхности S , то эта поверхность окружает его со всех сторон и, стало быть, видна из него под углом $\Omega = 4\pi$. Следовательно в этом случае

$$N = \oint_S E_n dS = 4\pi e. \quad 12$$

Если же заряд e находится в точке O , лежащей вне замкнутой поверхности S , то из O можно провести к поверхности S пучок касательных (рис. 7). Совокупность этих касательных образует конус, соприкасающийся с S вдоль некоторой замкнутой линии L , которая разделит поверхность S на две части S_1 и S_2 . Обе эти части поверхности S будут видны из точки O под одним и тем же телесным углом, соответствующим раствору касательного конуса, причем, однако, одна из этих частей будет видна с ее внутренней стороны, а другая — с внешней. Таким образом частям поверхности S_1 и S_2 будут соответствовать углы Ω_1 и Ω_2 , равные по величине и противоположные по знаку. Стало быть и потоки электрического вектора через S_1 и S_2 будут равны по величине и противоположны по знаку, и в сумме дадут нуль. Таким образом поток вектора E через всякую замкнутую поверхность, не охватывающую заряда e , равен нулю:

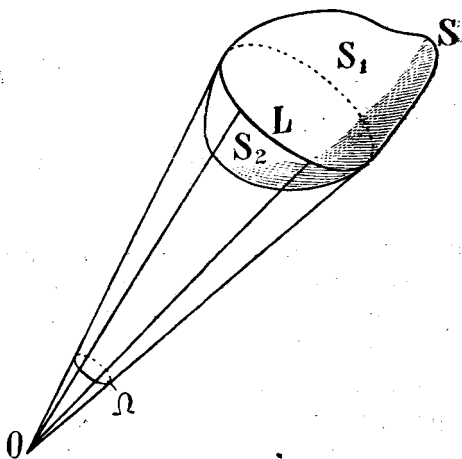


Рис. 7.

$$N = \oint_S E_n dS = 0. \quad 12$$

Оба этих возможных случая (заряд внутри и вне поверхности) могут быть охвачены одной единственной формулой

$$N = \oint_S E_n dS = 4\pi e, \quad \text{B M} \quad 13$$

если только условиться понимать в этой формуле под e величину заряда, расположенного в внутри поверхности S и стало быть полагать e равным нулю, если заряд расположен вне этой поверхности.

4. Отличающаяся чрезвычайной простотой формула (13), выведенная нами для поля, возбуждаемого одним единственным точечным зарядом, остается справедливой и для поля произвольной системы электрических зарядов. Действительно, любая система зарядов может быть разложена на совокупность элементарных (точечных) зарядов. Пусть E есть напряженность результирующего поля всей системы зарядов, а E_i — напряженность поля i -го элементарного заряда e_i . Тогда

$$E = \sum_i E_i$$

и

$$E_n = \sum_i E_{in}.$$

Стало быть,

$$N = \oint_S E_n dS = \sum_i \oint_S E_{in} dS = 4\pi \sum_i e_i, \quad 14$$

причем последняя сумма распространяется только на те заряды, которые расположены внутри поверхности S . Эта формула выражает собой фундаментальную теорему Гаусса: в произвольном электростатическом поле (в вакууме) поток электрического вектора E через произвольную замкнутую поверхность равен умноженной на 4π величине заряда, расположенного внутри этой поверхности. Эта величина заряда есть конечно алгебраическая сумма всех зарядов, находящихся внутри S .

§ 4. Некоторые применения теоремы Гаусса. — Применение теоремы Гаусса чрезвычайно упрощает решение ряда задач электростатики. Рассмотрим некоторые примеры, результатами решения которых нам придется пользоваться в дальнейшем.

Электрическое поле равномерно заряженной бесконечной плоскости. — Заряд бесконечной плоскости, общая величина которого бесконечна, характеризуется поверхностной плотностью заряда σ , т. е. зарядом, приходящимся на единицу площади поверхности.

Конечно, строго говоря, заряд всегда занимает известный объем и не может быть сосредоточен на бесконечно тонкой (геометрической) поверхности. Однако слой заряда, толщина которого достаточно мала по сравнению с его расстоянием от исследуемых точек поля, можно считать зарядом поверхностным с тем же правом, с каким мы рассматриваем заряды точечные.

Приступая к решению поставленной задачи, отметим прежде всего, что напряженность поля равномерно заряженной бесконечной плоскости P по соображениям симметрии должна быть перпендикулярна этой плоскости и должна иметь прямо противоположные направления по обеим сторонам от нее: она направлена от плоскости P , если ее заряд положителен (рис. 8), и к плоскости P , если он отрицателен. Численная же величина напряженности E в различных точках поля может зависеть лишь от расстояния их от плоскости P и должна быть одинаковой во всех точках любой плоскости, параллельной P .

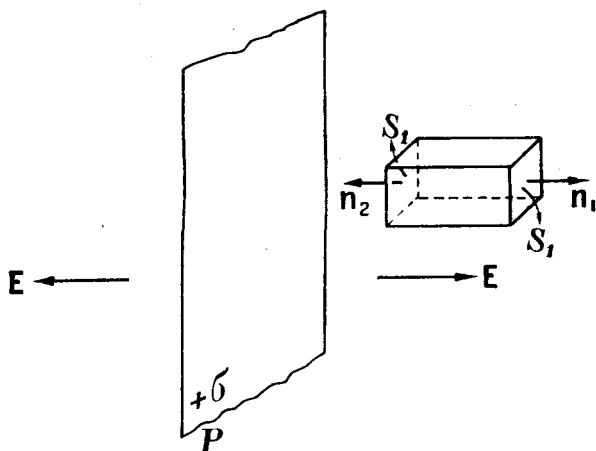


Рис. 8.

Выделим мысленно в поле плоскости P прямую призму основания S' с образующими, перпендикулярными P , и предположим сначала, что призма эта не пересекается плоскостью P . Так как внутри призмы нет зарядов, то поток электрического вектора E через ее поверхность S должен по теореме Гаусса равняться нулю

$$N = \oint_S E_n dS = 0.$$

С другой стороны, поток этот может быть вычислен непосредственно.

Поток через переднее основание призмы равен $E_1 \cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{n}_1) S'$, а через заднее $E_2 \cos(\mathbf{E}_2, \mathbf{n}_2) S'$, где E_1 и E_2 суть значения вектора E у соответствующих оснований призмы, а \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 суть внешние нормали к этим основаниям. Поток же вектора E через боковую поверхность призмы равен нулю, ибо E параллельно этой поверхности и стало быть $\cos(\mathbf{E}, \mathbf{n}) = 0$. Таким образом

$$N = \{ E_1 \cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{n}_1) + E_2 \cos(\mathbf{E}_2, \mathbf{n}_2) \} S' = 0.$$

Так как \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 параллельны друг другу, а направления нормалей \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 прямо противоположны, то $\cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{n}_1) = -\cos(\mathbf{E}_2, \mathbf{n}_2)$, и, стало быть, из $N=0$ следует, что

$$E_1 = E_2.$$

Так как положение оснований призмы может быть выбрано произвольным образом, то из этого равенства следует, что во всех точках ограниченного плоскостью P полупространства вектор \mathbf{E} постоянен по величине, а так как он постоянен и по направлению, то, следовательно,

$$\mathbf{E} = \text{const.}$$

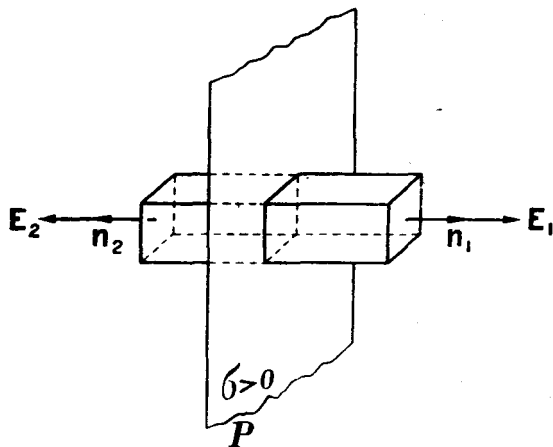


Рис. 9.

В другом же полупространстве вектор \mathbf{E} будет, очевидно, иметь ту же величину и противоположное направление.

Чтобы определить численную величину вектора \mathbf{E} поместим рассматривавшуюся нами призму так, чтобы она пере-

секалась плоскостью P , т. е. чтобы ее основания были расположены по разным сторонам этой плоскости (рис. 9). Поток вектора \mathbf{E} через ее поверхность будет попрежнему выражаться уравнением

$$N = \{ E_1 \cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{n}_1) + E_2 \cos(\mathbf{E}_2, \mathbf{n}_2) \} S',$$

но на этот раз внутри призмы будет находиться заряд $\sigma S'$, расположенный на вырезаемом призмой из заряженной плоскости P участке площади S' . Стало быть, по теореме Гаусса

$$N = \{ E_1 \cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{n}_1) + E_2 \cos(\mathbf{E}_2, \mathbf{n}_2) \} S' = 4\pi\sigma S'.$$

Так как по разным сторонам плоскости P вектор \mathbf{E} имеет одинаковую величину и противоположное направление, то $E_1 = E_2 = E$ и $\cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{n}_1) = -\cos(\mathbf{E}_2, \mathbf{n}_2)$. Таким образом из последнего уравнения следует

$$E \cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{n}_1) = 2\pi\sigma.$$

Но $\cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{n}_1)$ равен ± 1 в зависимости от того, заряжена ли плоскость положительно ($\sigma > 0$) или отрицательно ($\sigma < 0$). Следовательно, во всех точках поля бесконечной плоскости

$$E = 2\pi |\sigma|, \quad (1) \quad 15$$

где $|\sigma|$ есть абсолютная величина плотности заряда этой плоскости.

Заметим, что так как вектор \mathbf{E} имеет противоположные направления по различным сторонам заряженной плоскости, то из (15) следует, что при прохождении через эту плоскость вектор \mathbf{E} изменяется скачком на $4\pi\sigma$.

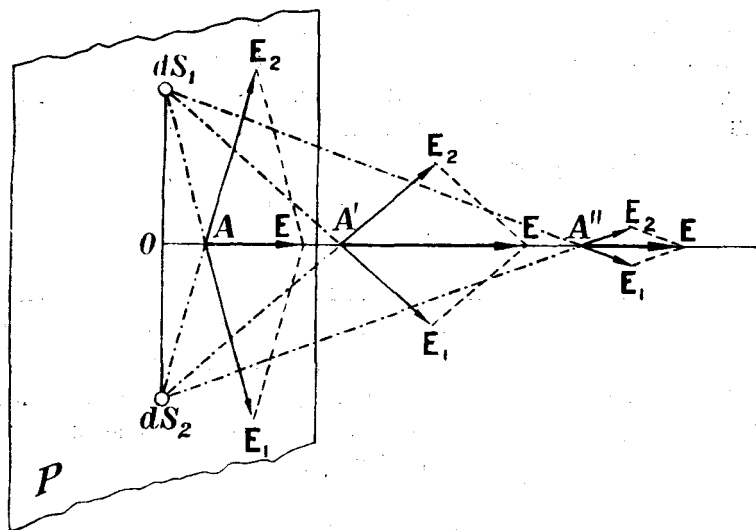


Рис. 10.

Постараемся теперь выяснить, почему при удалении от заряженной бесконечной плоскости напряженность ее поля не убывает, а остается постоянной. Пусть точки A , A' , A'' лежат на одном перпендикуляре к плоскости P (рис. 10). Рассмотрим напряженность поля, возбуждаемого в этих точках зарядами двух элементов плоскости dS_1 и dS_2 , расположенными симметрично относительно перпендикуляра OAA' на расстоянии R от его основания O . В более удаленных от плоскости точках напряженность полей \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 каждого из этих зарядов в отдельности будет меньше, чем в более близких, но зато и угол между \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 убывает при удалении от плоскости. Поэтому, несмотря на уменьшение слагаемых \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 при удалении от плоскости, величина их равнодействующей \mathbf{E} может благодаря уменьшению угла между ними не только убывать, но и увеличиваться в зависимости от соотношения

между расстояниями R и OA или OA' . Очевидно, что если точка A близка к O , то равнодействующая всех зарядов плоскости в этой точке определяется почти исключительно зарядами, расположенными вблизи O , ибо напряженности полей удаленных зарядов направлены почти параллельно плоскости P и в сумме дают нуль или почти нуль. По мере же удаления точки A от O параллельность эта нарушается, равнодействующая далеких зарядов увеличивается, а равнодействующая близких — уменьшается. В результате, как показывает непосредственное вычисление, напряженность результирующего поля всех зарядов бесконечной плоскости вовсе не меняется при удалении от этой плоскости. Вычисления этого мы приводить не будем, ибо результат его (ур. 15) был уже найден нами путем применения теоремы Гаусса.

Задача 1. — Поверхность бесконечно длинного кругового цилиндра равномерно заряжена электричеством так, что на единицу его длины приходится заряд λ . Доказать, что поле внутри цилиндра E_i и поле вне цилиндра E_e выражаются следующими формулами:

$$E_i = 0, \quad E_e = \frac{2\lambda r}{r^2}, \quad (2) \quad 16$$

где r есть вектор кратчайшего расстояния рассматриваемой точки поля от оси цилиндра. Показать, что скачок электрического вектора при прохождении через поверхность цилиндра равен $4\pi\lambda$.

Задача 2. — Заряд e равномерно распределен на шаровой поверхности произвольного радиуса. Доказать, что поле внутри и вне шара выражается соответственно формулами

$$E_i = 0, \quad E_e = \frac{eR}{R^3}, \quad (3) \quad 17$$

где R есть радиус-вектор, проведенный из центра шара в рассматриваемую точку поля, т. е. что поле вне равномерно заряженной шаровой поверхности таково, как если бы весь ее заряд был сосредоточен в ее центре. Показать, что скачок вектора E при прохождении через заряженную поверхность шара равен $4\pi\lambda$.

Задача 3. — Заряд e равномерно распределен с плотностью ρ по шаровому объему радиуса a . Показать, что поле E_e вне шара таково, как если бы весь заряд шара был сосредоточен в его центре, и что поле E_i внутри шара прямо пропорционально расстоянию от центра шара:

$$\left. \begin{aligned} R \geq a, \quad E_e &= \frac{eR}{R^3}; \\ R \leq a, \quad E_i &= \frac{eR}{a^3}; \end{aligned} \right\} \quad 18$$

или

$$\left. \begin{aligned} R \geq a, \quad E_e &= \frac{4}{3} \pi \rho \left(\frac{a}{R} \right)^3 \mathbf{R}; \\ R \leq a, \quad E_i &= \frac{4}{3} \pi \rho \mathbf{R}. \end{aligned} \right\} \quad (4) \quad 18'$$

Отметить, что в этом случае вектор \mathbf{E} всюду непрерывен.

В предыдущем мы в ряде отдельных случаев убедились, что скачок электрического вектора при прохождении через поверхностный заряд плотности σ равен $4\pi\sigma$. Во всех этих случаях вектор \mathbf{E} у заряженной поверхности был перпендикулярен к ней. Покажем теперь, что нормальная слагающая вектора \mathbf{E} испытывает скачок $4\pi\sigma$ при прохождении через любую заряженную поверхность вне зависимости от формы этой поверхности и от наличия или отсутствия зарядов вне ее.

Пусть поверхностная плотность заряда в рассматриваемой точке произвольной по-

верхности S равна σ . Как известно, в том случае, если заряд распределен по поверхности неравномерно, то плотностью его в данной точке поверхности называется предел отношения

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta e}{\Delta S} = \frac{de}{dS}, \quad 19$$

где Δe есть заряд элемента поверхности ΔS .

Построим около рассматриваемой точки заряженной поверхности прямую призму с образующими dl , перпендикулярными поверхности. Пусть эта призма вырезает из поверхности элемент dS столь малый, что его можно считать плоским и равномерно заряженным (рис. 11). Выберем произвольным образом направление \mathbf{n} внешней нормали к элементу dS . Поток вектора \mathbf{E} через поверхность призмы равен

$$N = E_{2n} dS - E_{1n} dS + N' = (E_{2n} - E_{1n}) dS + N',$$

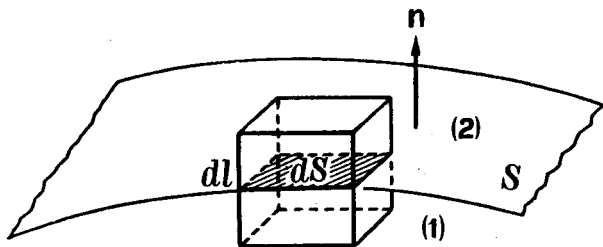


Рис. 11.

где E_1 и E_2 суть значения электрического вектора у внутреннего и внешнего (по направлению нормали \mathbf{n}) оснований призмы, E'_{1n} и E'_{2n} — их проекции на нормаль \mathbf{n} , а N' есть поток вектора \mathbf{E} через боковую поверхность призмы. На основании теоремы Гаусса получим

$$N = (E_{2n} - E_{1n}) dS + N' = 4\pi\sigma dS.$$

Будем теперь уменьшать высоту призмы dl , не изменяя при этом ее основания dS . Величина потока N' через безгранично уменьшающуюся боковую поверхность призмы стремится к нулю как бесконечно малая второго порядка (по сравнению с N), так что общий поток вектора через поверхность призмы сводится в пределе к потоку через ее основания:

$$N = (E_{2n} - E_{1n}) dS = 4\pi\sigma dS,$$

откуда

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma.$$

20

Стало быть, нормальные слагающие вектора \mathbf{E} в двух смежных точках поля, разделенных поверхностью S , действительно разнятся друг от друга на $4\pi\sigma$.

§ 5. Проводники в электростатическом поле. — Физический смысл изучения поля поверхностных зарядов коренится в том обстоятельстве, что в случае электростатического равновесия заряды проводников сосредотачиваются в весьма тонком поверхностном слое их, который в громадном большинстве случаев можно с достаточной точностью считать бесконечно тонким. Ведь и непосредственно ясно, что если сообщить металлическому телу, например, отрицательный заряд (избыток электронов), то благодаря взаимному отталкиванию элементов этого заряда (электронов) они сосредоточатся на его поверхности. Строгое же доказательство этому утверждению можно дать на основании того факта, что в случае электростатического равновесия электрическое поле внутри проводников равно нулю¹.

Действительно, проводник есть тело, отличающееся следующим свойством: если в какой-либо точке внутри проводника напряженность электрического поля \mathbf{E} отлична от нуля, то в проводнике возникает электрический ток, т. е. движение зарядов. Это свойство можно рассматривать, как определение термина „проводник электричества“. С точки зрения электронной теории важнейшего класса проводников (металлов) это свойство объясняется тем, что если металл

¹ См., впрочем, стр. 191.

находится в твердом (или жидком) состоянии, то часть электронов, входящих в состав его атомов, отщепляется от этих атомов. Оставшиеся после отщепления этих „свободных“ электронов положительные ионы металла образуют собой его твердый скелет (кристаллическую решетку), в промежутках же между ионами находятся „свободные“ электроны в форме своего рода „электронного газа“. Сколь угодно слабое внешнее электрическое поле вызывает движение этих „свободных“ электронов в направлении действующих на них сил, т. е. вызывает электрический ток¹. Ток этот длится до тех пор, пока напряженность поля внутри проводника не станет равной нулю, т. е. пока поле зарядов, перераспределившихся по объему проводника, не скомпенсирует внешнего поля.

Раз электрический вектор внутри проводника равен нулю, то равен нулю и поток этого вектора через любую замкнутую поверхность, расположенную внутри проводника. Стало быть, по теореме Гаусса, равен нулю и заряд, расположенный внутри всякой такой поверхности. А это и значит, что в случае электростатического равновесия зарядов внутри проводников нет (вернее, что положительные и отрицательные заряды внутри них взаимно нейтрализуются) и что все заряды расположены на их поверхности.

Таким образом поле заряженного металлического цилиндра или шара определяется теми же формулами (16) и (17), как и поле соответствующих заряженных поверхностей. В согласии с упомянутым общим законом из этих формул, в частности, следует, что внутри металлического заряженного шара или цилиндра $E = 0$. Что же касается формулы (20), то для случая зарядов, расположенных на поверхности проводников, формула эта значительно упрощается. Так как внутри проводников $E = 0$, то формула эта принимает вид

$$E_n = 4\pi\sigma,$$

$$E = 4\pi\sigma n$$

21

где E есть значение электрического вектора в непосредственной близости от поверхности проводника, а n — направление внешней нормали к его поверхности. Таким образом в случае электростатического равновесия нормальная слагающая напряженности поля вблизи проводника определяется только плотностью σ заряда на прилегающем элементе его поверхности и вовсе не зависит от распределения зарядов в других участках поля и т. п.

Пример. Определить поле между пластинами бесконечного плоского конденсатора. — Поле между пластинами бесконечного плоского

¹ Подробнее механизм тока будет рассмотрен в § 29.

конденсатора по соображениям симметрии должно быть направлено перпендикулярно его пластинам и должно быть постоянным во всех точках любой параллельной им плоскости. Как и в рассмотренном уже случае поля бесконечной плоскости из этого обстоятельства следует, что поле между пластинами конденсатора однородно, т. е. что вектор \mathbf{E} постоянен по величине и направлению во всех точках этого поля. Согласно же уравнению (21) численная величина вектора \mathbf{E} у поверхности пластин должна равняться

$$E = 4\pi|\sigma| \quad (5) \quad (22)$$

(ввиду того, что $E_n = \pm E$). Стало быть, таково будет значение E и во всем пространстве между пластинами.

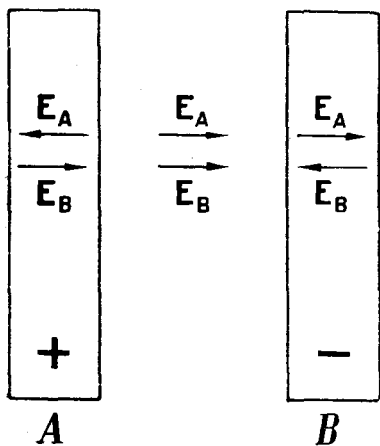


Рис. 12.

Очевидно, что в уравнении (22) под σ можно понимать плотность поверхностного заряда как положительной, так и отрицательной пластин конденсатора. Так как, с другой стороны, вектор \mathbf{E} имеет в пространстве между пластинами одно вполне определенное значение, то, следовательно, в случае электростатического равновесия абсолютная величина плотности заряда на обеих пластинах должна быть одинаковой.

Все эти результаты можно также непосредственно получить из уравнения (15). Поле \mathbf{E} конденсатора есть равнодействующая полей \mathbf{E}_A и \mathbf{E}_B двух заряженных бесконечных плоскостей, а именно внутренних поверхностей пластин конденсатора A и B. Стало быть, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B$, причем $E_A = 2\pi|\sigma_A|$ и $E_B = 2\pi|\sigma_B|$. Как явствует из рисунка 12, внутри каждой из металлических пластин векторы \mathbf{E}_A и \mathbf{E}_B направлены прямо противоположно, а между пластин одинаково. Так как внутри пластин E должно равняться нулю (проводник!), то $E_A = E_B$ и, стало быть, $\sigma_B = -\sigma_A = \sigma$. Поэтому в пространстве между пластин $E = 4\pi|\sigma|$, что и требовалось доказать.

В § 13 (формула 77') мы покажем, что у поверхности пластин конденсатора конечных размеров поле тоже перпендикулярно пластинам и равно $\pm 4\pi\sigma$. Если расстояние между пластинами мало по сравнению с их размерами, то в центральной части конденсатора поле будет практически однородным. Стало быть, формула (22) будет применима

ко всем точкам поля между пластин конденсатора, достаточно удаленным от его краев.

В случае конденсатора конечных размеров общий заряд e каждой пластины конечен и (средняя) плотность поверхностного заряда их равна

$$\sigma = \frac{e}{S},$$

где S поверхность пластины. Таким образом уравнение (22) принимает вид:

$$E = \frac{4\pi e}{S}. \quad 22'$$

Задача 4. — Показать, что в полости цилиндрического конденсатора (два коаксиальных цилиндра) напряженность поля определяется формулой (16):

$$E = \frac{2\lambda}{r^2} r,$$

где λ есть заряд единицы длины внутреннего цилиндра, причем заряд на внешнем цилиндре равен $-\lambda$.

Задача 5. — Показать, что в полости шарового конденсатора (две концентрических сферы) поле определяется формулой (17):

$$E = \frac{e}{R^3} R,$$

где e есть заряд внутренней сферы, причем заряд внешней сферы равен $-e$.

§ 6. Преобразование поверхностного интеграла в объемный. Дивергенция. — Как мы видели, теорема Гаусса в ряде случаев дает возможность сравнительно просто определить поле заданной системы зарядов. Однако это удается, вообще говоря, лишь при условии известной симметрии расположения зарядов. В противном случае с помощью формулы Гаусса (14) можно определить лишь поток вектора \mathbf{E} через замкнутую поверхность. Чтобы получить возможность определять значение самого вектора \mathbf{E} в каждой точке поля, необходимо преобразовать интегральное выражение (14) в дифференциальное уравнение. Чтобы подготовить это преобразование, мы предварительно покажем, что поток вектора через замкнутую поверхность может быть представлен в форме интеграла по ограниченному этой поверхностью

объему. Эта весьма важная теорема векторного анализа носит название теоремы Гаусса. В отличие от рассмотренной нами теоремы Гаусса (14), трактующей о свойствах электростатического поля, мы будем условно называть ее второй теоремой Гаусса.

1. Предположим, что вектор \mathbf{a} является непрерывной функцией точки, т. е. что значения вектора \mathbf{a} в бесконечно близких точках поля бесконечно мало отличаются друг от друга. Если ввести произвольно ориентированную систему декартовых координат x, y, z , то как сам вектор \mathbf{a} , так и его слагающие a_x, a_y, a_z выразятся в этом случае непрерывными функциями координат точки x, y, z . Во всем дальнейшем мы будем предполагать, если не оговорено противоположное, что все рассматриваемые нами векторы являются непрерывными функциями точки, и что производные $\frac{\partial a_x}{\partial x}, \frac{\partial a_x}{\partial y}, \frac{\partial a_x}{\partial z}$ и т. д. имеют в каждой точке поля вполне определенное конечное значение¹.

Рассмотрим поток dN непрерывного вектора \mathbf{a} через поверхность бесконечно малого параллелепипеда и выберем для удобства вычислений направление осей координат x, y, z так, чтобы они совпадали с ребрами этого параллелепипеда длины dx, dy, dz (рис. 13). Интеграл

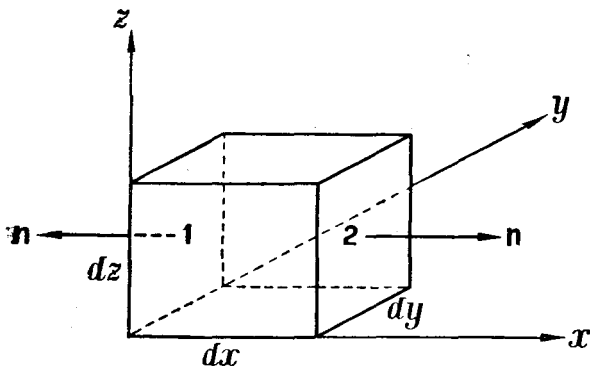


Рис. 13.

$$dN = \oint a_n dS$$

сведется в этом случае к сумме значений подынтегрального выражения на каждой

из шести граней параллелепипеда, ибо каждая из этих граней бесконечно мала и значение вектора \mathbf{a} на ней можно считать постоянным.

Рассмотрим сначала поток вектора \mathbf{a} через две параллельных грани 1 и 2, перпендикулярных оси x . Поток через переднюю грань 2 равен

$$a_{2n} dS = a_{2x} dy dz,$$

¹ Введенное нами в § 3 понятие потока вектора через поверхность также имеет определенный смысл лишь при определенных допущениях о непрерывности вектора (интегрируемость его).

где a_2 есть значение a на грани 2, поток же через заднюю грань 1 равен

$$a_{1n} dS = -a_{1x} dy dz,$$

где a_1 есть значение a на грани 1, ибо внешняя нормаль к этой грани направлена прямо противоположно оси x -ов. Стало быть, общий поток через грани 1 и 2 равен

$$(a_{2x} - a_{1x}) dy dz.$$

Разность $a_{2x} - a_{1x}$ есть приращение слагающей вектора a_x при изменении координаты x на расстояние dx между гранями 1 и 2. С точностью до бесконечно малых второго порядка приращение это равно

$$a_{2x} - a_{1x} = \frac{\partial a_x}{\partial x} dx,$$

где, ввиду бесконечной малости параллелепипеда, под $\frac{\partial a_x}{\partial x}$ можно понимать значение этой производной в его центральной точке. Таким образом общий поток через обе грани, перпендикулярные оси x , равен

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} dx dy dz.$$

Для потоков через пары граней, перпендикулярных осям y и z , получим аналогично

$$\frac{\partial a_y}{\partial y} dy dx dz \text{ и } \frac{\partial a_z}{\partial z} dz dx dy.$$

Складывая полученные выражения, получим общий поток вектора \mathbf{a} через все 6 граней элементарного параллелепипеда:

$$dN = \oint a_n dS = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad 23$$

Стоящую в скобках сумму производных вектора \mathbf{a} по осям координат принято для краткости обозначать символом $\operatorname{div} \mathbf{a}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad 24$$

(читай „дивергенция \mathbf{a} “, смысл слова см. дальше). Если кроме того ввести для бесконечно малого элемента объема обозначенные dV :

$$dV = dx dy dz,$$

то выражение потока dN примет вид

$$dN = \oint a_n dS = \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot dV. \quad 23'$$

2. Эту формулу, выражающую поток вектора \mathbf{a} через поверхность бесконечно малого параллелепипеда, не трудно обобщить для поверхности произвольной формы и размеров. Рассмотрим произвольную замкнутую поверхность S . Разобьем ограниченный ею объем V системой взаимно перпендикулярных плоскостей на совокупность бесконечно малых кубических элементов. Конечно, крайние, смежные с поверхностью S , элементы объема вообще говоря не будут иметь кубической формы; однако путем дальнейшего дробления их можно достигнуть того, чтобы грани крайних кубиков с любой степенью точности совпадали с заданной поверхностью S . Вычислим с помощью уравнения (23') поток вектора \mathbf{a} через поверхность каждого кубика, лежащего внутри S , и сложим полученные выражения:

$$\Sigma dN = \Sigma \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot dV = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot dV.$$

В этом уравнении тройной интеграл означает, что суммирование подынтегрального выражения должно быть произведено по всем элементам трехмерного объема V , заключенного внутри поверхности S . Однако в дальнейшем мы для упрощения записи будем обозначать интегралы любой кратности одним единственным знаком \int ; различие же интегралов различной кратности будет достигаться различным обозначением элементов интегрирования:

элемент объема (трехкратного интеграла) — dV ,

элемент поверхности (двукратного интеграла) — dS ,

элемент линии (ординарного интеграла) — ds .

Грани всех элементарных кубиков, составляющих в совокупности объем V , могут быть разделены на два класса — грани внешние, совпадающие с элементами поверхности S , и грани внутренние, отграничивающие смежные кубики друг от друга. Очевидно, что в сумму ΣdN поток вектора \mathbf{a} через каждую внутреннюю грань войдет дважды: при подсчете потока через поверхность кубика, лежащего по одну сторону от этой грани, и при подсчете потока через поверхность кубика, лежащего по другую сторону от нее. Так как нормаль к грани, внешняя по отношению к первому кубiku, противоположна нормали к той же грани, внешней по отношению ко второму кубiku, то оба

потока через эту грань будут иметь противоположные знаки. Следовательно все члены суммы $\sum dN$, относящиеся ко внутренним граням, сократятся, и сумма эта сведется к сумме потоков вектора \mathbf{a} через одни лишь внешние грани кубиков, совпадающие с элементами поверхности S . Таким образом $\sum dN$ оказывается равным потоку N вектора \mathbf{a} через заданную поверхность S , и, стало быть,

$$N = \oint_S a_n dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot dV. \quad (8) \quad 25$$

Это уравнение выражает собою (вторую) теорему Гаусса: поток вектора \mathbf{a} , являющегося непрерывной функцией точки, через произвольную замкнутую поверхность S равен интегралу дивергенции этого вектора по объему V , ограниченному этой поверхностью.

3. Если поверхность S столь мала, что во всех лежащих внутри нее точки $\operatorname{div} \mathbf{a}$ можно считать величиной постоянной, то в уравнении (25) $\operatorname{div} \mathbf{a}$ можно вынести за знак интеграла. Стало быть, поток dN через бесконечно малую замкнутую поверхность S произвольной формы выражается тою же формулой (23')

$$dN = \oint a_n dS = \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot dV,$$

как и поток через поверхность элементарного параллелепипеда. Так как эта формула справедлива лишь в предельном случае бесконечно малой поверхности, то правильнее записать ее в следующей форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint a_n dS}{\Delta V}. \quad (9) \quad 26$$

Правильнее всего считать эту формулу определением понятия дивергенции: дивергенция вектора \mathbf{a} в данной точке поля есть предел, к которому стремится отношение потока вектора \mathbf{a} через произвольную окружающую эту точку поверхность к величине ограниченного этой поверхностью объема ΔV (при уменьшении ΔV до нуля). Из этого определения дивергенции следует, что значение ее вовсе не зависит от выбора системы координат, т. е. что дивергенция вектора есть истинный скаляр. Исходя из (26) и воспользовавшись (23') мы в частном случае декартовых координат очевидно вновь придем к (24).

4. Отметим в заключение, что в гидродинамике дивергенция скорости жидкости \mathbf{v} имеет непосредственное физическое значение. Действительно, в каждой точке жидкости $\operatorname{div} \mathbf{v}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint v_n dS}{\Delta V}$$

согласно (8) равна рассчитанному на единицу объема количеству жидкости, вытекающей из элемента объема dV , окружающего рассматриваемую точку. Название дивергенция, что значит расхождение

или расходимость (по-латыни), было избрано для этой величины именно потому, что жидкость растекается или расходится из тех и только тех точек или участков занимаемого ею пространства, в которых $\operatorname{div} \mathbf{v} > 0$. Очевидно, что в этих точках должны быть расположены источники жидкости. По аналогии те точки поля произвольного вектора \mathbf{a} , в которых $\operatorname{div} \mathbf{a} \neq 0$, принято называть истоками этого поля.

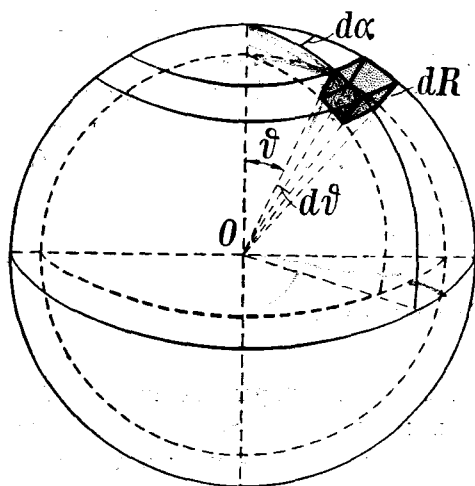


Рис. 14.

Численная же величина $\operatorname{div} \mathbf{a}$ называется силой или обильностью истоков поля; в зависимости от знака дивергенции сила истоков может быть как положительной, так и отрицательной. Иногда отрицательным истокам поля дают название стоков поля.

Пример. Дано, что вектор \mathbf{a} в каждой точке поля направлен параллельно или антипараллельно радиусу-вектору \mathbf{R} , проведенному из точки O . Определить $\operatorname{div} \mathbf{a}$.

Применим с этой целью формулу (26) к элементу объема dV , вырезаемому из шарового слоя, ограниченного сферами радиуса R и $R + dR$, конусом с центром в O , который пересекается с этими сферами по дугам меридианов α и $\alpha + d\alpha$, и дугам параллельных кругов ϑ и $\vartheta + d\vartheta$ (рис. 14). Так как по условию вектор \mathbf{a} параллелен \mathbf{R} , то поток его через боковую (образованную конусом) поверхность объема

dV равен нулю. Далее, так как вырезаемый конусом элемент dS поверхности сферы радиуса R равен

$$dS = R d\vartheta \cdot R \sin \vartheta d\alpha = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha,$$

то поток вектора \mathbf{a} через него равен

$$a_n dS = -a_R R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha,$$

где a_R есть слагающая \mathbf{a} по направлению \mathbf{R} ($a_R = \pm a$), ибо внешняя нормаль к dS направлена обратно радиусу-вектору \mathbf{R} . Поток же

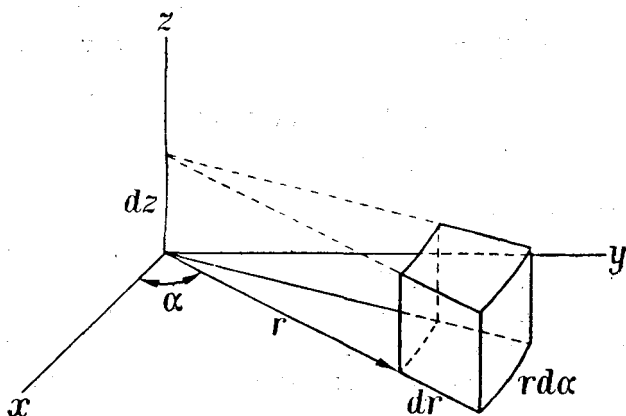


Рис. 15.

через элемент поверхности сферы радиуса $R + dR$ вплоть до величины второго порядка малости равен, очевидно,

$$a_R R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha + \frac{\partial}{\partial R} (a_R R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha) dR.$$

Таким образом:

$$\oint a_n dS = \frac{\partial}{\partial R} (a_R R^2) \sin \vartheta d\alpha dR.$$

С другой стороны,

$$dV = dS \cdot dR = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha dR,$$

так что

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\oint a_n dS}{dV} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 a_R) = \frac{\partial a_R}{\partial R} + \frac{2}{R} a_R. \quad 27$$

Задача 6. — Дано, что поле вектора \mathbf{a} обладает аксиальной симметрией относительно оси z . Это значит, что в цилиндрической системе координат r, α, z (см. рис. 15) значение слагающих a_r, a_α, a_z

вектора \mathbf{a} по направлению возрастания этих координат зависят лишь от r и z , но не от азимута α .

Показать, что если кроме того вектор \mathbf{a} всюду перпендикулярен оси симметрии z ($a_z = 0$), то

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial (ra_r)}{\partial r} = \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{a_r}{r}.$$

§ 7. Истоки электрического поля. Поверхностная дивергенция. — 1. Поверхностный интеграл, входящий в выражение (14) первой теоремы Гаусса, может быть преобразован с помощью второй теоремы Гаусса (25) в интеграл по ограниченному поверхностью S объему V

$$\oint_S E_n dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} \cdot dV = 4\pi \sum_i e_i. \quad 28$$

Однако преобразование это возможно лишь в том случае, если $\operatorname{div} \mathbf{E}$ имеет определенное конечное значение во всех точках заключенного внутри поверхности S объема V , т. е. если вектор \mathbf{E} конечен и непрерывен в этом объеме. В частности, внутри поверхности S не должно быть ни точечных зарядов конечной величины, ни поверхностных зарядов конечной поверхностной плотности. Ибо напряжение поля точечного заряда при $R \rightarrow 0$ стремится к бесконечности (см. ур. 4) и, помимо того, самое направление вектора \mathbf{E} при $R = 0$ становится неопределенным; вдоль же заряженных поверхностей нарушается непрерывность вектора \mathbf{E} — его нормальная слагающая испытывает скачок $4\pi\sigma$ (ур. 20).

Впрочем, самые понятия точечного и поверхностного зарядов имеют лишь вспомогательное значение и были введены нами лишь для удобства рассмотрения поля зарядов на расстояниях, достаточно больших по сравнению с размерами самих зарядов. Изучая же поле вблизи или даже внутри зарядов, мы должны вернуться к представлению об объемном распределении зарядов. Предположим, например, что заряд e , рассматривавшийся нами как точечный, в действительности равномерно распределен по объему шара произвольно малого, но конечного радиуса a . В этом случае поле вне и внутри шара определяется уравнениями (18), из которых явствует, что вектор \mathbf{E} конечен и непрерывен во всех точках поля (в частности при $R = a$, т. е. на поверхности шарового заряда, обе формулы (18) дают для E одно и то же значение $E_e = E_i = \frac{e}{a^2}$).

Этот результат имеет общее значение: во всех случаях объемного распределения заряда с конечной плотностью электриче-

ский вектор \mathbf{E} всюду конечен и непрерывен. Действительно, в этом случае из каждой лежащей внутри заряда точки P как из центра можно описать сферу достаточно малого, но все же конечного радиуса a так, чтобы сферу эту можно было считать заряженной равномерно. Во всех точках этой сферы поле зарядов самой сферы конечно и непрерывно согласно уравнениям (18), поле же зарядов, находящихся вне сферы, конечно и непрерывно потому, что эти заряды находятся на конечном расстоянии от внутренних точек сферы. Стало быть, и результирующее поле всех зарядов конечно и непрерывно.

Итак, в случае объемного распределения зарядов, расположенных внутри поверхности S , преобразование поверхностного интеграла в объемный в уравнении (28) всегда допустимо. Напомним, что в общем случае неравномерного распределения зарядов объемной плотностью заряда в данной точке называется предел отношения заряда Δe , находящегося в окружающем эту точку объеме ΔV , к величине этого объема (сравни ур. 19):

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta e}{\Delta V} = \frac{de}{dV}, \quad 29$$

где буквой ρ , как и всюду в дальнейшем, обозначена объемная плотность заряда. Стало быть, заряд de элемента объема dV равен

$$de = \rho dV, \quad 29'$$

а общий заряд, находящийся в конечном объеме V , равен

$$\Sigma_V e = \int_V \rho dV.$$

Внося это выражение в (28), получим:

$$\int \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \int 4\pi\rho dV. \quad 28'$$

Равенство этих интегралов должно иметь место вне зависимости от выбора области интегрирования V , что возможно лишь в том случае, если их подынтегральные выражения равны друг другу в каждой точке пространства. Стало быть

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho} \quad \checkmark$$

или, в декартовой системе координат,

$$\left\{ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho. \right. \quad 30'$$

Это дифференциальное уравнение является одним из основных уравнений как электростатики, так и всей вообще электродинамики. Оно позволяет определить дивергенцию электрического вектора в каждой точке поля по величине объемной плотности заряда в этой же точке¹ вне зависимости от распределения зарядов в иных участках поля. И обратно, чтобы определить плотность заряда в данной точке поля, достаточно знать значение дивергенции E в этой точке поля. Пользуясь введенной в прошлом параграфе терминологией, можно сказать, что истоки электрического поля находятся в тех и только тех точках поля, в которых находятся электрические заряды, причем сила или обильность этих истоков (в случае объемного распределения зарядов) равна $4\pi\rho$.

2. Хотя с точки зрения излагаемой нами макроскопической теории все заряды суть непрерывно распределенные объемные заряды, однако в тех случаях, когда толщина занимаемого зарядом слоя мала по сравнению с доступными измерению расстояниями, удобно сохранить представление о поверхностных зарядах. В первую очередь это относится к поверхностным зарядам проводников. Так как при прохождении через заряженные поверхности вектор E меняется скачком (ур. 20), то поверхности эти носят название поверхностей разрыва электрического вектора. Очевидно, что на поверхностях разрыва дифференциальное уравнение (30) неприменимо (что явствует также из оговорок, сделанных в начале этого параграфа) и должно быть заменено уравнением (20):

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma.$$

Это уравнение называется пограничным условием для вектора E и является в сущности не чем иным, как предельной формой уравнения (30) для зарядов, расположенных бесконечно тонким слоем.

Так как нам в дальнейшем неоднократно придется встречаться с подобного рода соотношениями, мы докажем здесь следующую об-

¹ Т. е. в сущности по величине заряда, находящегося в бесконечно малом объеме, окружающем эту точку (см. ур. 29).

щую теорему. Пусть некоторый вектор \mathbf{a} всюду непрерывен и конечен и всюду удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = 4\pi\rho, \quad A$$

где ρ есть всюду конечная плотность некоторого „заряда“ e (например, электрического), определяемая уравнением типа (29). Рассмотрим некоторый заряженный слой конечной толщины dl , внутри которого \mathbf{a} по условию остается непрерывным (рис. 16). Если, оставляя неизменным заряд слоя, уменьшать его толщину dl до нуля, то непрерывность вектора \mathbf{a} нарушится и уравнение (A) в пределе примет на заряженной поверхности вид:

$$a_{2n} - a_{1n} = 4\pi\sigma, \quad B$$

где σ есть поверхностная плотность заряда, определяемая уравнением типа (19), а a_{1n} и a_{2n} — значения нормальных слагающих вектора \mathbf{a} по различным сторонам заряженной поверхности.

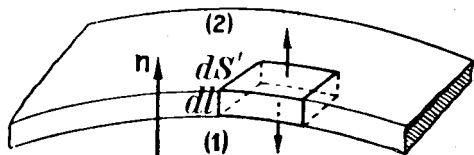


Рис. 16.

Чтобы доказать справедливость этого утверждения рассмотрим цилиндрический участок заряженного слоя с основанием dS' . Помножая (A) на dV и интегрируя по объему этого участка, получим на основании (29') и теоремы Гаусса (25):

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot dV = \oint_S a_n dS = 4\pi \int_V \rho dV = 4\pi de,$$

где de есть общий заряд выделенного участка, а S — ограничивающая его поверхность. Повторяя рассуждения, приведшие нас в § 4 к формуле (20), убедимся, что

$$\oint_S a_n dS = (a_{2n} - a_{1n}) dS' + N' = 4\pi de,$$

где N' есть поток вектора \mathbf{a} через боковую поверхность рассматриваемого участка слоя. При переходе к пределу $dl \rightarrow 0$, N' обращается в нуль, так что разделив это уравнение на dS' получим:

$$a_{2n} - a_{1n} = 4\pi \frac{de}{dS'} = 4\pi\sigma,$$

т. е. уравнение (B), что и требовалось доказать.

Итак, (B) есть предельная форма уравнения (A) . Ввиду этого скачок нормальной слагающей произвольного вектора \mathbf{a} на поверхности разрыва часто называют поверхностной дивергенцией этого вектора. В отличие от объемной дивергенции, определяемой уравнением (26), поверхностная дивергенция обозначается через Div с заглавной (а не строчной) буквы D^1 :

$$a_{2n} - a_{1n} = \text{Div } \mathbf{a}. \quad 31$$

Стало быть, доказанную нами теорему можно символически записать следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{a} = 4\pi\rho \rightarrow \text{Div } \mathbf{a} = 4\pi\sigma. \end{array} \right\} \quad \text{VI} \quad 32$$

Наконец, пользуясь введенной в предшествующем параграфе терминологией, можно назвать поверхности разрыва нормальной слагающей вектора \mathbf{a} поверхностными истоками этого вектора.

Уравнения (30) и (20) вполне достаточны для решения так называемой „обратной“ задачи электростатики: дано поле электрического вектора \mathbf{E} , определить распределение (объемных и поверхностных) зарядов. В частности, расположение поверхностных зарядов определяется расположением поверхностей разрыва вектора \mathbf{E} . Однако для решения „прямой“ задачи — дано распределение зарядов, определить электрическое поле, — этих уравнений недостаточно, ибо с помощью одного дифференциального уравнения (30) нельзя определить три слагающих E_x, E_y, E_z вектора \mathbf{E} . Для решения „прямой“ задачи электростатики необходимо воспользоваться также и некоторыми иными свойствами электростатического поля, к рассмотрению которых мы теперь и перейдем.

§ 8. Работа электрических сил. Потенциал. — 1. Работа сил электрического поля, совершаемая при перемещении заряда e на отрезок ds , равна

$$eE \cos(\mathbf{E}, ds) ds = eE ds.$$

В частности работа A при перемещении ds единичного положительного заряда равна

$$A = E ds. \quad 33$$

¹ Заметим, что значение $\text{Div } \mathbf{a}$ не зависит от выбора направления нормали к поверхности разрыва, ибо хотя при изменении ее направления знак проекций вектора \mathbf{a} на направление \mathbf{n} и меняется на обратный, однако одновременно с этим сторона поверхности, ранее считавшаяся 1-й (т. е. внутренней по отношению к \mathbf{n}), должна будет именоваться 2-й, и обратно.

Работа, совершаемая при перемещении единичного положительного заряда по конечному пути L , равна

$$A = \int_L \mathbf{E} ds, \quad 33'$$

где знак L у интеграла означает, что необходимо вычислить сумму значений подынтегрального выражения для всех элементов линии L . Эта операция называется интегрированием по линии L .

Работа электрических сил на данном пути L , вообще говоря, может зависеть как от положения начальной и конечной точек пути, так и от его формы. Однако, как мы сейчас покажем, электростатическое поле неподвижных зарядов обладает той чрезвычайно важной особенностью, что работа сил этого поля на пути между двумя произвольными точками зависит только от положения этих точек и вовсе не зависит от формы пути. Силы, обладающие этой особенностью, называются¹ полями консервативными или потенциальными.

Заметим, что в поле потенциальном работа сил поля на всяком замкнутом пути должна равняться нулю. Действительно, всякий замкнутый путь $MNPQM$ можно произвольным образом разбить на две части MNP и PQM (рис. 17). Работа на пути PQM равна, очевидно, взятой с обратным знаком работе на том же пути при прохождении его в обратном направлении от M к P , которая в свою очередь в потенциальном поле по условию равна работе на пути MNP . Стало быть, общая работа на всем замкнутом пути $MNPQM$ равна нулю, что и требовалось доказать.

Обратно, если работа сил поля на всяком замкнутом пути равна нулю, то работа этих сил на пути между двумя произвольными точками M и P от формы этого пути не зависит, т. е. поле это потенциальное. Действительно, рассмотрим два произвольных пути MNP и MQP , ведущих из M в P (рис. 17). Составим из них замкнутый путь

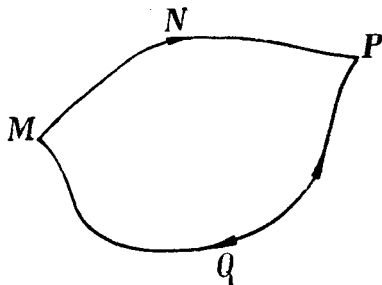


Рис. 17.

¹ При том, выполняющемся для электростатического поля, условии, что поле стационарно (постоянно во времени), и что силы действующие на помещенное в поле тело зависят лишь от положения, но не от скорости этого тела.

MNPQM. Работа на этом замкнутом пути по условию равна нулю. Стало быть, работа на участке пути *MNP* равна взятой с обратным знаком работе на пути *PQM*, или, иными словами, равна работе на пути *MQP*, что и требовалось доказать.

Итак, равенство нулю работы на произвольном замкнутом пути есть необходимое и достаточное условие ^(независимости) работы от формы пути и может считаться отличительным признаком потенциального поля. Вообще поле произвольного вектора **E**, вне зависимости от его физического смысла (сила, скорость и т. д.), является полем потенциальным в том и только в том случае, если при любом выборе замкнутого пути интегрирования *L*

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad \text{Ул. 34}$$

2. Переходя к доказательству потенциального характера электростатического поля рассмотрим сначала работу электрических сил в поле элементарного (точечного) заряда *e*. Работа этих сил при бесконечно малом перемещении *ds* „пробного“ единичного положительного заряда равна (рис. 18)

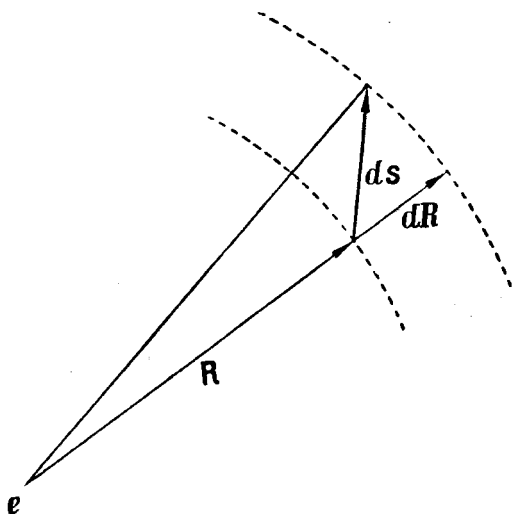


Рис. 18.

$$A = \mathbf{E} ds = \frac{e}{R^3} \mathbf{R} ds = \frac{e}{R^2} ds \cos(\mathbf{R}, ds) = \frac{e}{R^2} dR,$$

где *dR* есть проекция перемещения пробного заряда *ds* на проведенный из возбуждающего поле заряда *e* радиус-вектор **R**. Как явствует из чертежа, *dR* есть вместе с тем приращение численного значения радиус-вектора **R**, т. е. увеличение расстояния пробного заряда от заряда *e*. Поэтому работа *A* может быть представлена в форме полного дифференциала скалярной функции точки $\left(-\frac{e}{R}\right)$:

$$A = \frac{e}{R^2} dR = d\left(-\frac{e}{R}\right) = -d\left(\frac{e}{R}\right), \quad 35$$

где *R* есть численное значение радиуса-вектора **R**. Следовательно,

работа, совершаемая при перемещении единичного положительного заряда из точки P_1 в точку P_2 по конечному пути L , равна (рис. 19)

$$A = \int_L \mathbf{E} ds = - \int_L d\left(\frac{e}{R}\right) = - \left(\frac{e}{R_2} - \frac{e}{R_1}\right), \quad 35'$$

где R_1 и R_2 суть расстояния начальной и конечной точек пути от заряда e . Таким образом работа электрических сил на произвольном пути действительно зависит только от положения начальной и конечной точек этого пути, и стало быть, вовсе не зависит от формы пути. Так, например, работа электрических сил на пути L' (рис. 19) равно работе на пути L : избыточная работа, совершаемая на пути L' при перемещении пробного заряда за пределы сферы радиуса R_2 , компенсируется отрицательной работой, совершаемой при последующем приближении пробного заряда к заряду e на последнем участке пути L' .

Итак, поле неподвижного элементарного точечного заряда есть поле потенциальное. Очевидно, что сумма потенциальных полей¹ есть тоже поле потенциальное, ибо если работа слагаемых сил не зависит от формы пути, то и работа равнодействующей от нее тоже не зависит. Так как поле произвольной системы зарядов можно рассматривать, как сумму полей каждого из элементов этих зарядов, то, стало быть, всякое электростатическое поле есть поле потенциальное, т. е. работа сил этого поля на данном пути зависит лишь от положения начальной и конечных точек пути.

3. Это обстоятельство дает возможность ввести в рассмотрение чрезвычайно важное понятие потенциала электростатического поля. Определение: разность потенциалов между двумя точками электростатического поля равна взятой с обратным знаком работе, совершаемой силами поля при перемещении единичного положительного заряда из первой

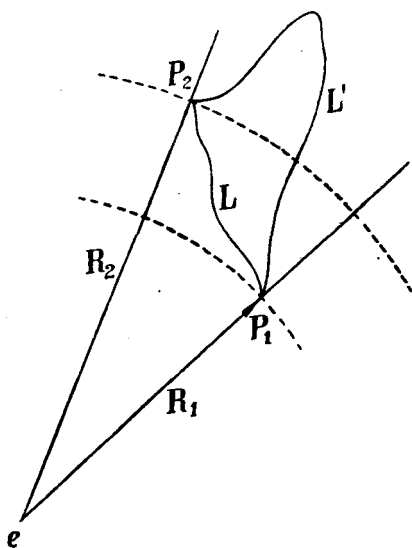


Рис. 19.

¹ Суммой векторных полей мы будем называть такое поле, в каждой точке которого вектор поля равен сумме векторов слагаемых полей.

точки во вторую. При этом предполагается, что при перемещении пробного единичного заряда все заряды, возбуждающие поле, остаются неподвижными¹.

Стало быть, разность потенциалов $d\varphi$ между двумя бесконечно близкими точками, отделенными расстоянием ds , равна

$$d\varphi = -A = -E ds, \quad 36$$

разность же потенциалов $\varphi - \varphi_0$ между двумя точками P и P_0 , находящимися на конечном расстоянии друг от друга, определяется интегралом

$$\varphi - \varphi_0 = - \int_{P_0}^P E ds, \quad 36'$$

причем этот интеграл может быть взят по любому пути, соединяющему точки P_0 и P . Очевидно, что понятие разности потенциалов имеет определенный однозначный смысл лишь ввиду доказанной нами независимости работы электрических сил от формы пути или, что сводится к тому же, ввиду того, что напряженность E электростатического поля удовлетворяет условию (34). (VII)

Очевидно, что потенциалу φ_0 произвольной точки поля P_0 , всегда можно приписать любое наперед выбранное значение. Это соответствует тому обстоятельству, что путем измерения работы может быть определена лишь разность потенциалов двух точек поля, но не абсолютная величина потенциала. Однако, как только фиксировано значение потенциала в какой-либо одной точке поля, значения его во всех остальных точках поля однозначно определяются уравнением (36').

Обычно аддитивную постоянную в выражении потенциала выбирают так, чтобы потенциал φ_∞ бесконечно удаленных точек поля равнялся нулю². При этом условии потенциал φ произвольной точки поля P определится следующим выражением:

$$(\varphi_\infty = 0) \quad \varphi = \varphi_\infty - \int_\infty^P E ds = \int_P^\infty E ds. \quad 36''$$

¹ Если перемещение единичного пробного заряда может вызвать смещение зарядов, возбуждающих поле (напр., путем электростатической индукции на проводниках), то надлежит измерять непосредственно лишь ту работу, которая совершается при перемещении бесконечно (т. е. достаточно) малого пробного заряда. Работа же при перемещении единичного заряда вычисляется из результатов этих измерений.

² Впрочем практически при электрических измерениях обычно полагают равным нулю потенциал земли.

Таким образом потенциал точки P будет равен работе, совершаемой силами поля при удалении единичного положительного заряда из точки P в бесконечность.

В поле элементарного (точечного) заряда e разность потенциалов между точками P и P_0 согласно (35') и (36') равна

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{e}{R} - \frac{e}{R_0}. \quad 37$$

В этом случае для того, чтобы удовлетворить условию $\varphi_\infty = 0$ достаточно, очевидно, положить $\varphi_0 = \frac{e}{R_0}$; тогда потенциал поля точечного заряда e на расстоянии R от него окажется равным

$$(\varphi_\infty = 0) \quad \varphi = \frac{e}{R}. \quad 37'$$

4. Потенциал поля произвольной системы точечных зарядов e_1, e_2, \dots, e_n равен очевидно сумме потенциалов полей каждого из этих зарядов в отдельности:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{e_i}{R_i}, \quad 38$$

где R_i есть расстояние точки поля, обладающей потенциалом φ , от заряда e_i . Конечно, как эта, так и предшествующие формулы имеют смысл лишь в тех точках поля, расстояния которых от "точечных" зарядов e_i велики по сравнению с истинными размерами этих зарядов.

В случае поверхностных зарядов заряд каждой поверхности может быть разложен на совокупность элементарных зарядов de бесконечно малых элементов поверхности dS :

$$de = \sigma dS.$$

Заменяя в уравнении (38) e_i через de , и переходя от суммирования к интегрированию по всем элементам всех заряженных поверхностей, получим потенциал поля поверхностных зарядов:

$$\varphi = \int \frac{\sigma dS}{R}. \quad 39$$

В поле объемных зарядов роль элементарных зарядов будут играть заряды $de = \rho dV$ бесконечно малых элементов объема dV и выражение потенциала (37) примет вид

$$\varphi = \int \frac{\rho dV}{R}, \quad 40$$

где R есть расстояние точки поля, обладающей потенциалом φ , от элемента объема dV .

Отметим, что хотя R и входит в знаменатель подынтегральных выражений в формулах (39) и (40), все же выражения эти остаются конечными во всех точках поля объемных и поверхностных зарядов. Рассмотрим, например, формулу (40) и введем систему сферических координат R, ϑ, α с центром в исследуемой точке поля (ϑ — полярный угол, α — азимут). Элемент объема dV выразится в этих координатах, как известно, следующим образом:

$$dV = R^2 \sin \vartheta d\alpha d\vartheta dR$$

и формула (40) примет вид

$$\varphi = \iiint \rho R \sin \vartheta d\alpha d\vartheta dR,$$

причем подынтегральное выражение остается конечным и при $R=0$.

Ввиду того, однако, что формулы (39) и (39') выведены нами из формул (37'') и (38), имеющих смысл лишь для конечных значений R (ибо при $R \rightarrow 0$ $\varphi = \frac{e}{R}$ стремится к бесконечности), а также ввиду особой важности формул (39) и (40), мы выведем их в дальнейшем еще и другим способом, независимым от только что изложенного, и покажем, что они применимы ко всем точкам поля поверхностных и объемных зарядов.

5. Потенциальный характер электростатического поля может быть доказан и без обращения к закону Кулона путем рассуждений, основывающихся на законе сохранения энергии и невозможности вечного движения. Действительно, предположим, что при перемещении пробного заряда по какому-либо замкнутому пути L в поле неподвижных зарядов (см. примечание к стр. 40) силы этого поля совершают положительную работу A . Так как по возвращению пробного заряда в исходное положение вся система возвращается в исходное положение, то повторяя обход пути L произвольное число раз, мы всякий раз получали бы работу A , т. е. осуществ-

ствили бы вечный двигатель. Если же при обходе пути L силы поля совершают отрицательную работу, то стоит лишь изменить направление обхода на обратное, чтобы получить работу положительную. Таким образом работа сил поля на всяком замкнутом пути должна равняться нулю, из чего, как мы видели, следует, что работа этих сил на произвольном пути зависит лишь от положения его начальной и конечной точек. Стало быть, понятие разности электрических потенциалов двух точек, определяемое уравнением (36)

$$d\varphi = -A = -E ds,$$

имеет в произвольном электростатическом поле вполне определенный однозначный смысл.

Пример. *Определить потенциал поля диполя.*

Предположим, что два равных точечных заряда противоположных знаков $+e$ и $-e$ находятся на расстоянии l друг от друга, причем вектор l направлен от отрицательного заряда к положительному (рис. 20). Вектор p

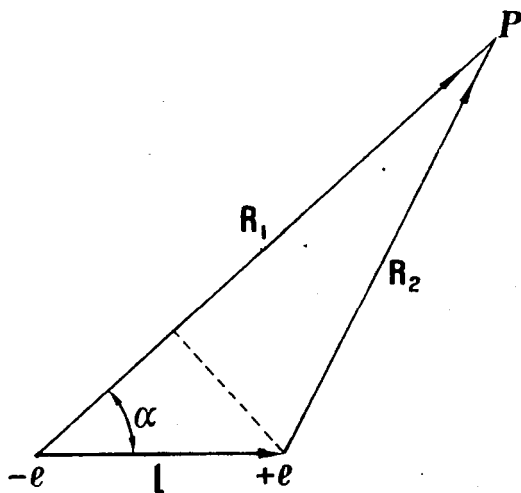


Рис. 20.

$$p = el$$

41

носит название момента этих зарядов. Потенциал обоих зарядов в произвольной точке поля P равен

$$\varphi = e \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{e(R_1 - R_2)}{R_1 R_2}.$$

Если расстояние l между зарядами $+e$ и $-e$ мало по сравнению с расстояниями этих зарядов от исследуемых точек поля, то совокупность зарядов $+e$ и $-e$ носит название диполя или биполя, что значит „двойной полюс“.

В этом случае можно положить

$$R_1 R_2 = R^2 \text{ и } R_1 - R_2 = l \cos \alpha,$$

где α есть угол между направлением момента диполя и радиусом вектором \mathbf{R} , проведенным от диполя к точке P (рис. 20). Ввиду малости расстояния l безразлично, из какой именно точки диполя проведен этот радиус-вектор \mathbf{R} . Таким образом потенциал диполя принимает вид:

$$\varphi = \frac{el \cos \alpha}{R^2} = \frac{p \cos \alpha}{R^2} = \frac{p \mathbf{R}}{R^3} \quad (41')$$

Задача 7. — Исходя из уравнения (36') показать, что потенциал поля заряженных бесконечных плоскости и цилиндра определяется соответственно следующими формулами:

плоскость: $\varphi = \varphi_0 - 2\pi x$ (x — координата, перпендикулярная плоскости),

цилиндр: $\begin{cases} \varphi_i = \varphi_0 \\ \varphi_e = \varphi_0 - 2\pi \lg \frac{r}{r_1} \end{cases}$ (r — расстояние от оси цилиндра, а r_1 — радиус цилиндра),

где φ_0 есть значение потенциала на соответствующей заряженной поверхности. Отметим, что в обоих этих случаях удовлетворить условию $\varphi_\infty = 0$ невозможно

Задача 8. — Показать, что потенциал поля шара радиуса a , равномерно заряженного электричеством по всему своему объему с объемной плотностью ρ , при условии $\varphi_\infty = 0$ равен

$$\varphi_e = \frac{e}{R} \quad (R \geq a) \quad \text{и} \quad \varphi_i = 2\pi\rho \left(a^2 - \frac{R^2}{3} \right) \quad (R \leq a),$$

где

$$e = \frac{4\pi a^3}{3} \rho$$

есть общий заряд шара, а R — расстояние от его центра.

§ 9. Емкость. Единицы потенциала и емкости. В абсолютной системе единиц единица потенциала определяется следующим образом: разность потенциалов двух точек поля равна единице, если при перемещении абсолютной единицы заряда из одной точки в другую силы поля совершают единицу работы, т. е. работу в один эрг. Размерность же потенциала φ равна, очевидно:

$$[\varphi] = \frac{\text{работа}}{\text{заряд}} = \frac{M \cdot L^2 \cdot T^{-2}}{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}} = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

Абсолютная единица потенциала слишком велика по сравнению с теми разностями потенциалов, с которыми обычно приходится иметь дело на практике. Поэтому практической единицей потенциала служит вольт:

$$1 \text{ вольт} = \frac{1}{300} \text{ абс. единиц потенциала.}$$

Одна из характернейших особенностей электростатического поля состоит в том, что в случае электростатического равновесия потенциал поля имеет постоянное значение на всем протяжении каждого отдельного проводника¹. Действительно, в случае электростатического равновесия напряженность поля внутри проводников равна нулю (§ 5). Так как любые две точки проводника можно соединить линией, целиком лежащей в этом проводнике, то, стало быть, разность потенциалов этих точек, определяемая линейным интегралом вектора E (ур. 36'), равна нулю, что и требовалось доказать.

Это обстоятельство дает возможность говорить просто о потенциале проводника (т. е. каждой из его точек) в электростатическом поле.

Емкостью уединенного проводника, т. е. проводника, бесконечно удаленного от всех остальных проводников, называется величина заряда, потребного для сообщения этому проводнику потенциала, равного единице. При этом предполагается, что аддитивная постоянная в выражении потенциала выбрана так, чтобы в бесконечности потенциал равнялся нулю.

Заметим, что емкость уединенного шара (в абсолютных единицах) численно равна его радиусу. Действительно, потенциал поля шара радиуса a и заряда e равен $\varphi = \frac{e}{R}$. На поверхности шара $R = a$ и $\varphi = \frac{e}{a}$. Таково же значение потенциала и внутри всего шара. Стало быть, потенциал шара будет равняться единице при $e = a$, а это и значит, что емкость C шара равна a :

$$C = a.$$

Из этого уравнения явствует, что в абсолютных единицах емкость должна иметь размерность длины. Действительно

$$[C] = \frac{[\varphi]}{[e]} = \frac{M^{-1/2} L^{1/2} T^{-1}}{M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1}} = L.$$

¹ Разумеется, при условии отсутствия «сторонних» электродвижущих сил химического, термического и т. п. происхождения (см. § 28).

Таким образом в абсолютной системе единиц емкость измеряется в единицах длины, причем емкость в 1 см равна емкости уединенного шара радиуса в 1 см.

Так как практическая единица заряда (кулон) в $3 \cdot 10^9$ раз больше, а практическая единица потенциала (вольт) в 300 раз меньше соответствующих абсолютных единиц, то практическая единица емкости — фарада — в $9 \cdot 10^{11}$ раз больше единицы абсолютной:

$$1 \text{ фарада} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см (абс. единиц емкости).}$$

Эта единица емкости столь велика, что обычно емкость выражается либо в сантиметрах, либо в микрофарадах (миллионных долях фарады):

$$1 \text{ микрофарада} = 9 \cdot 10^5 \text{ см.}$$

Если проводник не уединен, то потенциал, приобретаемый им при сообщении ему определенного заряда, существенно зависит от формы и расположения других проводников. Обусловливается это тем, что поле заряженного проводника вызывает перераспределение зарядов на всех соседних с ним проводниках, в том числе конечно и на незаряженных (электростатическая индукция). По достижении равновесия заряды проводников располагаются на них так, что внутри всех проводников результирующее поле индуцированных зарядов и заряда индуцирующего равно нулю (условие электростатического равновесия, см. § 5). Конечно, этот процесс связан с перераспределением заряда и на самом индуцирующем проводнике. Таким образом потенциал заряженного проводника оказывается суммой потенциалов собственного перераспределившегося заряда этого проводника и зарядов, индуцированных им на других проводниках. Определение зависимости этого результирующего потенциала φ , а вместе с тем и емкости проводника $C = \frac{\varphi}{e}$, от формы и расположения смежных с ним проводников связано вообще говоря со значительными математическими трудностями.

Если, однако, размеры двух или (нескольких) проводников велики по сравнению с расстоянием между ними (система таких проводников называется конденсатором), то емкость этой системы проводников лишь в незначительной степени зависит от наличия или отсутствия других проводников в окружающем их пространстве. Чтобы убедиться в этом, заметим, что полная независимость системы проводников от расположения и электрического состояния всех посторонних проводников достигается путем электростатической защиты их.

т. е. путем заключения их в металлическую оболочку. Заряды, расположенные вне оболочки, не влияют на электрическое состояние пространства внутри нее, ибо поле этих зарядов в этом пространстве компенсируется полем зарядов, индуцированных ими на внешней поверхности оболочки. Действительно, будь оболочка полностью заполнена металлом, т. е. образуй она сплошной проводник, напряженность поля внешних зарядов (включая заряды, расположенные на внешней поверхности оболочки) во всех внутренних точках проводника должна была бы равняться нулю. Очевидно, что она останется равной нулю и по удалении из проводника его внутренних участков.

С другой стороны, заряды проводников, расположенных внутри оболочки, индуцируют на ее внутренней поверхности заряд, равный им по величине и противоположный по знаку, в чем можно убедиться, применив первую теорему Гаусса к замкнутой поверхности S , проведенной в толще оболочки (рис. 21). Во всем внешнем пространстве результирующее поле зарядов, расположенных внутри оболочки и на ее внутренней поверхности, равно нулю. Ибо оно равнялось бы нулю, будь это внешнее пространство сплошь заполнено металлом (в случае оболочки бесконечной толщины), и не может стать отличным от нуля при удалении части металла.

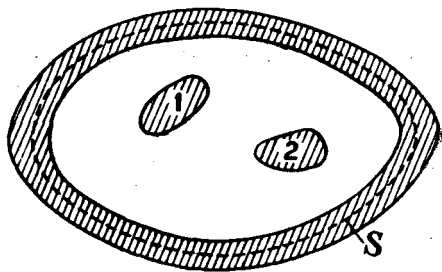


Рис. 21.

Итак, металлическая оболочка полностью устраняет зависимость электрического состояния внутреннего пространства от пространства внешнего и обратно, ибо пространства эти оказываются разделенными толщиной металла, в котором поле равно нулю. Поэтому электростатическая защита всегда применяется при точных измерениях для устранения внешних воздействий на электрические измерительные приборы, аппараты и т. д.

В случае конденсатора, состоящего, например, из двух изолированных проводников („обкладок“), совокупность этих обкладок составляет почти или совсем замкнутую оболочку. Поэтому поле зарядов, расположенных на внутренних поверхностях обкладок конденсатора, сосредоточивается в пространстве между обкладками и вне его обладает лишь незначительной интенсивностью¹, и стало быть, лишь

В случае конденсатора, состоящего, например, из двух изолированных проводников („обкладок“), совокупность этих обкладок составляет почти или совсем замкнутую оболочку. Поэтому поле зарядов, расположенных на внутренних поверхностях обкладок конденсатора, сосредоточивается в пространстве между обкладками и вне его обладает лишь незначительной интенсивностью¹, и стало быть, лишь

¹ Напротив, поле зарядов, расположенных на внешних поверхностях обкладок конденсатора, в пространство между этими обкладками почти не проникает.

в незначительной степени индуцирует заряды на окружающих конденсатор телах. Только благодаря этому обстоятельству и можно говорить об емкости конденсатора вне зависимости от расположения окружающих его проводников. При этом под емкостью конденсатора, в отличие от емкости уединенного проводника, нужно, конечно, понимать отношение заряда e , находящегося на внутренней поверхности каждой из его обкладок, к разности потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ этих обкладок¹:

$$C = \frac{e}{\varphi_2 - \varphi_1}. \quad 42$$

Предоставляем читателю доказать, что в случае электрического равновесия заряды внутренней поверхности каждой из обкладок конденсатора равны по величине и противоположны по знаку.

Задача 9. — Показать, что емкость C плоского, цилиндрического и шарового конденсаторов равна соответственно:

плоский конденсатор $C = \frac{S}{4\pi d},$

цилиндрический " $C = \frac{l}{2 \lg \frac{r_2}{r_1}},$

шаровой " $C = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1},$

где S есть поверхность пластин конденсатора, а d — их взаимное расстояние; l — длина, а r_1 и r_2 — радиусы внутреннего и внешнего цилиндра, и, наконец, R_1 и R_2 суть радиусы внутренней и внешней шаровой поверхности.

Примечание. — Так как емкость цилиндрического конденсатора пропорциональна его длине l , то можно говорить о „емкости единицы длины конденсатора“ C^* , равной

$$C^* = \frac{C}{l} = \frac{1}{2 \lg \frac{r_2}{r_1}}.$$

Очевидно, что

$$C^* = \frac{e}{l(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{x}{\varphi_2 - \varphi_1} \quad 42'$$

где x есть заряд единицы длины конденсатора. Конечно, понятие емкости единицы длины (как впрочем и приведенное выражение

¹ А не к потенциалу обкладки.

для C) можно применять лишь в том случае, если длина конденсатора настолько велика по сравнению с расстоянием между его обкладками, что можно вовсе исключить из рассмотрения конечные участки конденсатора, в которых поле его существенно искажается; лишь в этом случае C пропорционально l .

§ 10. Поверхности уровня. Градиент. — 1. Рассмотрим однозначное и непрерывное поле какой-либо скалярной величины φ , т. е. пространство, в каждой точке которого φ имеет определенное значение, являющееся однозначной и непрерывной функцией положения (координат) этой точки:

$$\varphi = f(x, y, z).$$

Таким полем является, например, поле температуры неравномерно нагретого тела ($\varphi = t$), поле плотности неоднородного тела ($\varphi = \delta$), поле электростатического потенциала и т. п.

Пусть скаляр φ имеет в точке P_0 значение φ_0 и пусть при перемещении ds по направлению вектора s мы приходим из точки P_0 в точку P , где скаляр φ имеет значение φ_s . Приращение φ при этом перемещении равно $d\varphi = \varphi_s - \varphi_0$. Предел отношения этого приращения $d\varphi$ к численной величине перемещения ds обозначается через $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ и называется производной скаляра φ в точке P_0 по направлению s :

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_0 = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\varphi_s - \varphi_0}{ds}. \quad 43$$

Очевидно, что значение этой производной существенно зависит от выбора направления s и что ее ни в коем случае нельзя смешивать с обыкновенной частной производной по скалярному параметру s .

Для изучения зависимости производной $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ от направления дифференцирования s , рассмотрим те точки поля в которых φ имеет одинаковое значение, равное, например, φ_0 . Совокупность этих точек, вообще говоря, образует собой поверхность¹, которая называется поверхностью уровня или эквипотенциальной поверхностью. Аналитически поверхность эта характеризуется уравнением

$$\varphi = f(x, y, z) = \varphi_0.$$

¹ Помимо участков пространства, в которых $\varphi = \text{const.}$, исключение могут составлять те точки поля, в которых значение φ достигает максимума или минимума. Если φ есть электростатический потенциал, то это может иметь место только в точках расположения электрических зарядов (см. примечание к стр. 104).

Проведем ряд поверхностей уровня, соответствующих значениям скаляра φ , равным φ_0 , $\varphi_0 \pm \Delta\varphi$, $\varphi_0 \pm 2\Delta\varphi$ и т. д. (рис. 22). В поле точечного заряда или заряженного шара поверхности уровня электро-

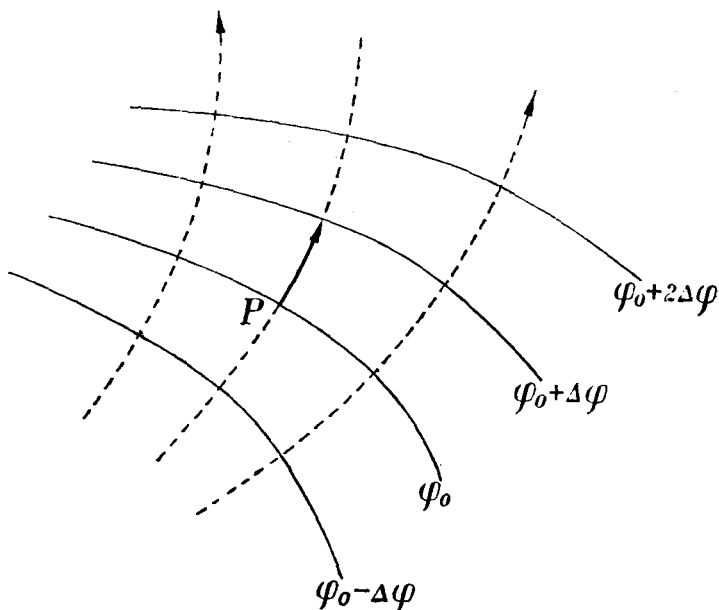


Рис. 22.

статического потенциала представляют собой концентрические сферы, в поле заряженного бесконечного цилиндра — коаксиальные цилиндры и т. д. Вообще же, в более сложных случаях, последовательные экви-

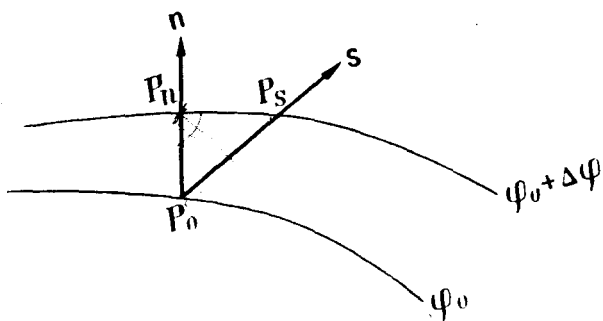


Рис. 23.

потенциальные поверхности различны не только по своему положению и размерам, но и по своей форме. Однако во всяком случае поверхность каждого проводника является эквипотенциальной

поверхностью, ибо потенциал проводника в электростатическом поле постоянен на всем его протяжении (§ 9).

2. Обозначим через \mathbf{n} нормаль к поверхности уровня $\varphi = \varphi_0$, направленную в сторону возрастания φ , и покажем, что зная производную $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ по направлению этой нормали, можно определить значение производной скаляра φ по любому направлению \mathbf{s} .

Пусть поверхность уровня, проходящая через лежащую в направлении \mathbf{s} точку P_s , пересекает нормаль \mathbf{n} (или ее продолжение в обратном направлении) в точке P_n (рис. 23). Значение φ в точке P_n равно значению φ в точке P_s ($\varphi_n = \varphi_s$) и

$$P_0 P_s = \frac{P_0 P_n}{\cos(\mathbf{s}, \mathbf{n})}.$$

Поэтому

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)_0 = \lim_{P_0 P_s \rightarrow 0} \frac{\varphi_s - \varphi_0}{P_0 P_s} = \cos(\mathbf{s}, \mathbf{n}) \lim_{P_0 P_n \rightarrow 0} \frac{\varphi_n - \varphi_0}{P_0 P_n} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0 \cos(\mathbf{s}, \mathbf{n})$$

или, опуская индекс 0,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cos(\mathbf{s}, \mathbf{n}). \quad 44$$

Вектор, численно равный $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ и направленный по направлению нормали \mathbf{n} к поверхности уровня в сторону возрастания φ , носит название градиента скаляра φ :

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathbf{n}. \quad 45$$

Поэтому уравнение (43) может быть записано так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \text{grad } \varphi \cdot \cos(\mathbf{s}, \mathbf{n}) = \text{grad}_s \varphi = (\text{grad } \varphi, \bar{\mathbf{n}}) \quad 44'$$

Стало быть, производная φ по направлению \mathbf{s} равна проекции вектора градиента φ на направление \mathbf{s} . Если в частности ввести систему декартовых координат x, y, z , оси которой направлены параллельно единичным векторам $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, то согласно уравнению (44') получим

$$\text{grad}_x \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \text{grad}_y \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \text{grad}_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad 46$$

т. е.

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (46')$$

Из уравнения (46') следует, как это впрочем и непосредственно явствует из рисунка 23, что направление градиента \mathbf{n} есть направление наиболее быстрого возрастания скаляра φ , а направление $(-\mathbf{n})$ есть направление столь же быстрого убывания φ . В направлениях же, перпендикулярных \mathbf{n} , т. е. касательных к поверхности уровня, значе-

ние φ вовсе не изменяется ($\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$).

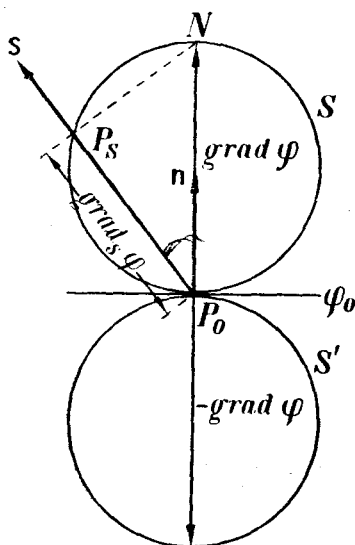


Рис. 24.

Чтобы наглядно изобразить зависимость значения производных φ от направления, проведем из данной точки P_0 два равных и противоположных вектора $\text{grad } \varphi$ и $-\text{grad } \varphi$ и опишем вокруг каждого из них как вокруг диаметра шаровые поверхности S и S' (рис. 24). Тогда абсолютная величина производной $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ в точке P_0 по произвольному направлению \mathbf{s} изобразится отрезком $P_0 P_s$ луча, проведенного из P_0 в направлении \mathbf{s} , ибо угол $P_0 P_s N$ равен 90° и

$$P_0 P_s = P_0 N \cos(s, \mathbf{n}) = \text{grad } \varphi \cdot \cos(s, \mathbf{n}).$$

Аналогичное соотношение справедливо и для того случая, когда \mathbf{s} направлено в сторону шаровой поверхности S' . Поверхность, касательная к сферам S и S' в точке P_0 , есть, очевидно, поверхность уровня.

3. Итак, если известно поле скаляра φ , то в каждой точке этого поля можно определить вектор $\text{grad } \varphi$, перпендикулярный к поверхностям уровня этого скаляра. Если провести систему ортогональных траекторий поверхностей уровня, т. е. систему линий, перпендикулярных этим поверхностям (на рис. 22 эти линии обозначены пунктиром), то в каждой точке поля направление градиента будет совпадать с направлением этих линий. Поэтому ортогональные траектории поверхностей уровня носят название линий градиента.

Если проводить поверхности уровня так, чтобы значения φ на последовательных поверхностях возрастало бы в арифметической

прогрессии: $\varphi = \varphi_0$, $\varphi_0 \pm \Delta\varphi$, $\varphi_0 \pm 2\Delta\varphi$ и т. д. (рис. 22), то расстояния смежных поверхностей при достаточно малом $\Delta\varphi$ будут обратно пропорциональны численным значениям градиента. Действительно, если измеренное по нормали расстояние между смежными поверхностями уровня обозначить через Δn , то из приближенного соотношения

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cdot \Delta n = \text{grad } \varphi \cdot \Delta n$$

при постоянном $\Delta\varphi$ следует:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\text{const.}}{\Delta n}.$$

Поэтому при указанном способе черчения поверхностей уровня густота их расположения дает приближенное представление о численной величине градиента.

4. Заметим в заключение, что если скаляр φ выражен в функции от другого скаляра ψ , являющегося функцией точки [$\varphi = f(\psi)$], то при любом выборе направления дифференцирования s

$$\text{grad}_s \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} \frac{\partial\psi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} \text{grad}_s \psi.$$

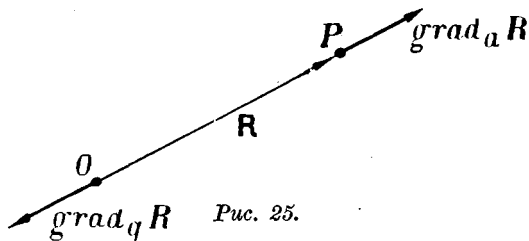
Следовательно,

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial\varphi(\psi)}{\partial\psi} \text{grad } \psi,$$

47

что вполне соответствует формуле обычного дифференцирования функции от функции.

ПРИМЕР I. *Градиент численной величины радиуса вектора R .* — Прежде всего заметим, что численная величина радиуса вектора R есть скалярная функция положения двух точек: начальной точки радиуса вектора O и его конечной точки P (рис. 25). Мы будем называть первую из этих точек „точкой истока“, а вторую — „точкой наблюдения“, ибо нам часто придется рассматривать радиус-векторы, проведенные из истоков поля (например, электрических зарядов) в ту „точку наблюдения“, в которой определяется значение потенциала или напряженности поля.



При определении значения $\text{grad } R$ в зависимости от условий задачи необходимо различать два случая: 1) точка истока O фиксирована

и \mathbf{R} рассматривается как функция положения точки наблюдения P , и 2) точка P фиксирована и \mathbf{R} рассматривается как функция положения точки истока O . Значение $\text{grad } R$, соответствующее первому случаю, мы будем обозначать через $\text{grad}_a R$, а соответствующее второму — через $\text{grad}_q R$ ¹.

Определим сначала $\text{grad}_a R$, т. е. предположим, что точка истока O фиксирована. Направление $\text{grad}_a R$, т. е. направление наиболее быстрого возрастания расстояния R при возможных перемещениях точки P , совпадает очевидно с направлением радиуса вектора \mathbf{R} из O в P . Численная же величина производной R по этому направлению, очевидно, равна единице, ибо при перемещении точки P по направлению \mathbf{R} на отрезок ds расстояние R возрастает на ту же величину ds . Стало быть $\text{grad}_a R$ есть единичный вектор, направленный по \mathbf{R} , т. е.

$$\text{grad}_a R = \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

Что же касается $\text{grad}_q R$, то он должен быть направлен обратно \mathbf{R} , ибо расстояние R возрастает наиболее быстро при перемещении точки O в противоположную от P сторону (рис. 25). Численная же величина $\text{grad}_q R$, очевидно, тоже равна единице, так что

$$\left[\text{grad}_q R = -\frac{\mathbf{R}}{R} = -\text{grad}_a R. \right] \quad 48$$

Определив таким образом $\text{grad } R$, мы можем с помощью (47) определить градиент любой скалярной функции $f(R)$ от численной величины R :

$$\text{grad } f(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial R} \text{grad } R; \quad 49$$

численная величина этого вектора равна:

$$\left| \text{grad } f(R) \right| = \left| \frac{\partial f(R)}{\partial R} \right|.$$

В частности,

$$\text{grad}_q \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\text{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right). \quad 49'$$

Наконец, чтобы определить дивергенцию градиента произвольной функции $f(R)$, заметим, что $\text{grad}_a f(R)$ удовлетворяет требованиям,

¹ Индексы a и q соответствуют немецким терминам *Aufpunkt* (= точка наблюдения) и *Quellpunkt* (= точка истока).

поставленным по отношению к вектору \mathbf{a} при выводе формулы (27), и в частности является функцией точки наблюдения, как то предполагалось относительно \mathbf{a} . Полагая в (27)

$$\mathbf{a} = \text{grad}_a f(R) = \frac{\partial f}{\partial R} \mathbf{R}, \quad a_R = \frac{\partial f}{\partial R},$$

получим непосредственно:

$$\text{div grad } f(R) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial f}{\partial R} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial f}{\partial R}. \quad (49')$$

Дивергенция $\text{grad}_q f(R)$ имеет то же значение, ибо, как можно убедиться вычислением в декартовых координатах,

$$\text{div}_q \text{grad}_q f(R) = -\text{div}_a (-\text{grad}_a f(R)) = \text{div}_a \text{grad}_a f(R).$$

ПРИМЕР II. Выразить потенциал диполя (41') в функции от $\text{grad} \left(\frac{1}{R} \right)$. Потенциал диполя (стр. 43, рис. 20) равен

$$\varphi = e \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right).$$

Выражение в скобках есть приращение скаляра $\frac{1}{R}$ при перемещении на отрезок \mathbf{l} точки истока радиуса вектора \mathbf{R} , проведенного из диполя (исток поля) в точку наблюдения P . Ограничиваясь при достаточно малом \mathbf{l} первыми производными от $\left(\frac{1}{R} \right)$, получим

$$\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = \mathbf{l} \text{ grad}_q \left(\frac{1}{R} \right) = -\mathbf{l} \text{ grad}_a \left(\frac{1}{R} \right).$$

Внося это в выражение для φ , получим на основании (41):

$$\varphi = \mathbf{p} \text{ grad}_q \left(\frac{1}{R} \right) = -\mathbf{p} \text{ grad}_a \left(\frac{1}{R} \right), \quad (50)$$

что ввиду (49') совпадает с (41').

Задача 10. — Доказать формулу (48) путем непосредственного вычисления слагающих $\text{grad} R$ в декартовых координатах, выразив предварительно R в функции от координат x, y, z и x', y', z' точек O и P .

Задача 11. — Показать, что если \mathbf{b} есть постоянный по величине и направлению вектор, то

$$\text{grad}_a (\mathbf{b}R) = \mathbf{b}; \quad (\mathbf{b} = \text{const}).$$

§ 11. Градиент электростатического потенциала. Линии сил. Уравнение Пуассона.— 1. Применим полученные результаты к потенциалу электростатического поля и будем теперь под скаляром φ понимать именно этот потенциал. Из формулы (36):

$$d\varphi = -\mathbf{E} ds = -E_s ds$$

следует

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = -E_s. \quad 52$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (44') получим:

$$E_s = -\text{grad}_s \varphi.$$

Так как это равенство проекций векторов \mathbf{E} и $-\text{grad} \varphi$ должно иметь место при любом выборе направления s , то и самые векторы эти должны быть равны друг другу:

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi, \quad 52''$$

откуда на основании уравнения (46) следует:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad 52'''$$

Таким образом напряженность электростатического поля \mathbf{E} равна отрицательному градиенту электростатического потенциала φ . Так как градиент потенциала направлен в сторону его возрастания, а численная величина градиента является мерой быстроты этого возрастания, то можно сказать, что напряженность электрического поля есть мера быстроты спадания потенциала или, просто, что она равна спаду потенциала. Направление напряженности поля совпадает с направлением ортогональных траекторий эквипотенциальных поверхностей. Так как направление напряженности поля в свою очередь совпадает с направлением электрических сил, действующих на положительный заряд, то ортогональные траектории эти (линии градиента) получили название линий электрических сил или силовых линий.

2. Очевидно, что через каждую точку поля, в которой $E \neq 0$, можно провести одну и только одну силовую линию. В каждой такой точке P вектор \mathbf{E} имеет вполне определенное направление. Отложив из P произвольно малый отрезок в направлении \mathbf{E} мы придем в точку P' , в которой вектор \mathbf{E} может иметь иное направление, чем в P . Отло-

жив из P' произвольно малый отрезок в соответствующем направлении, мы придем в новую точку P'' , в которой можем опять повторить ту же операцию, и т. д. Полученная таким образом ломаная линия в пределе, при беспределном уменьшении составляющих ее отрезков, совпадает с искомой силовой линией.

Чтобы получить аналитическое уравнение силовых линий достаточно написать, что элемент длины ds силовой линии параллелен напряженности поля E , т. е. что слагающие его по осям координат dx , dy , dz пропорциональны слагающим E_x , E_y , E_z вектора E :

$$\left(\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \right) \quad 53$$

Интеграл этой системы дифференциальных уравнений и будет представлять собой уравнение силовой линии. В выражение интеграла входят три произвольных постоянных, что соответствует возможности произвольно выбрать координаты x_0 , y_0 , z_0 той точки поля, через которую мы желаем провести данную силовую линию.

Создатели современной теории электромагнитного поля Фарадей и Максвелл пытались объяснить электромагнитные явления деформациями и вихревыми движениями особой всепроникающей гипотетической среды — эфира, и полагали, что силовые линии совпадают с осями деформации (или осями кручения), испытываемой эфиром в электрическом поле. Однако к началу XX столетия выяснилась полная несостоятельность механистической теории эфира и в настоящее время, пользуясь понятием „силовых линий“, нужно помнить, что понятие это имеет условно-вспомогательное значение, и что силовые линии служат лишь для графического изображения направления электрического вектора.

3. Впрочем подобно тому, как при подлежащем способе черчения эквипотенциальных поверхностей густота их расположения может служить мерой величины градиента потенциала, т. е. мерой напряженности поля (см. стр. 53), подобно этому и силовыми линиями можно воспользоваться для той же цели.

Нанести на чертеж все силовые линии, проходящие через каждую точку поля и заполняющие собой все занимаемое полем пространство, конечно, невозможно. Обыкновенно силовые линии чертятся с таким расчетом, чтобы в любом участке поля число линий, пересекающих перпендикулярную к ним площадку единичной поверхности, было по возможности пропорционально численной величине напряженности поля на этой площадке. В таком случае густота расположения силовых линий может служить мерой напряженности поля. При этом

число линий, пересекающих произвольный элемент поверхности dS , будет очевидно пропорционально произведению численной величины вектора \mathbf{E} и проекции элемента dS на плоскость, перпендикулярную к \mathbf{E} . Это произведение $E dS \cos(E, n)$ равно потоку вектора \mathbf{E} через элемент dS . Поэтому вместо термина „поток вектора через данную поверхность“ употребляют иногда выражение „число силовых линий, пересекающих данную поверхность“. Это число линий считается положительным или отрицательным в зависимости от того, пересекают ли силовые линии данную поверхность в направлении положительной (внешней) или отрицательной (внутренней) нормали к ней.

Отметим, что при указанном способе черчения силовых линий общее число этих линий, пересекающих любую замкнутую поверхность S должно быть пропорциональным алгебраической сумме зарядов, расположенных внутри S , ибо согласно теореме Гаусса (14) сумма этих зарядов пропорциональна потоку вектора \mathbf{E} через S . При этом, конечно, определяя число линий, пересекающих S , мы каждую из них должны брать с надлежащим знаком (+ или -).

В частности, число силовых линий, пересекающих любую несодержащую зарядов поверхность, равно нулю. Иными словами (положительное) число линий, выходящих из ограниченного поверхностью объема, равно (отрицательному) числу линий входящих в него. Отсюда следует, что в свободных от зарядов участках поля силовые линии не могут ни начинаться, ни оканчиваться. С другой стороны, линии эти не могут также быть замкнутыми. В противном случае линейный интеграл $\oint_L \mathbf{E}_s ds$ по каждой из замкнутых линий сил L был бы отличен от нуля (ибо элементы ds линий сил параллельны \mathbf{E} и, стало быть, подынтегральное выражение существенно положительно), что противоречит уравнению (34). Стало быть, в электростатическом поле линии сил либо начинаются и оканчиваются на электрических зарядах, либо уходят в бесконечность.

Для незамкнутых линий существует впрочем еще третья возможность: они могут при безграничном продолжении, не пересекаясь и не замыкаясь, всюду плотно заполнять некоторый ограниченный участок пространства. С такого рода магнитными силовыми линиями мы познакомимся в § 34. Однако для силовых линий электростатического поля эта возможность исключена. Ибо линия, заполняющая некоторый участок пространства, должна при достаточном продолжении как угодно близко подходить к ранее пройденным ею точкам. Если P и P' суть две таких бесконечно

близких точки на подобной силовой линии L , то интеграл $\int_P^{P'} \mathbf{E}_s ds$ по этой линии

будет существенно положителен и будет обладать конечной величиной. Вместе с тем, если только вектор \mathbf{E} конечен, он должен отличаться лишь на бесконечно малую величину от интеграла $\oint E_s ds$ по замкнутому контуру, образованному отрезком PP' силовой линии L и бесконечно малым отрезком прямой, соединяющей P' с P . Но последний интеграл согласно (34) равен нулю, т. е. отличается на конечную величину от $\int_P^{P'} E_s ds$. Этим противоречием и доказывается невозможность существования силовых линий указанного типа.

Таким образом, если для простоты отвлечься от линий сил, оба конца которых лежат в бесконечности, то для получения правильной картины поля достаточно очевидно от каждого элемента заряда провести число линий, пропорциональное величине этого заряда.

4. Возвращаемся к уравнению (52'), устанавливающему связь между потенциалом электростатического поля и напряженностью этого поля. Это уравнение можно преобразовать так, чтобы получить соотношение между потенциалом и плотностью заряда. Для этого нужно образовать дивергенцию обеих частей этого уравнения и воспользоваться затем формулой (30):

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\operatorname{div} \mathbf{E} = -4\pi\rho. \quad 54$$

В декартовых координатах выражение $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$ принимает согласно (23) и (46) следующий вид

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \operatorname{grad}_x \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \operatorname{grad}_y \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \operatorname{grad}_z \varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad 55$$

Дивергенция градиента скаляра, равная сумме его вторых производных по осям декартовых координат, иногда называется лапласианом этого скаляра (сравни ур. Лапласа 56') и обозначается через $\Delta\varphi$ или $\nabla^2\varphi$. Смысл последнего обозначения, которым мы будем пользоваться в дальнейшем, выяснится в следующей главе. Итак,

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad 55'$$

так что уравнение (54) может быть записано следующим образом:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho. \quad 56$$

Это дифференциальное уравнение носит название уравнения Пуассона. В тех участках поля, где нет электрических зарядов, уравнение это обращается в следующее:

$$(\rho = 0) \quad \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (56')$$

Этот частный вид уравнения Пуассона носит название уравнения Лапласа¹.

Уравнение Пуассона дает возможность определить потенциал поля объемных зарядов, если известно расположение этих зарядов. Решение (интеграл) этого дифференциального уравнения (при определенных граничных условиях) должно очевидно совпадать с выведенной нами ранее формулой (40):

$$\varphi = \int \frac{\rho dV}{R}.$$

В дальнейшем мы докажем это непосредственным вычислением. Пока же отметим, что для решения некоторых задач удобнее исходить не из интеграла (40), а непосредственно из дифференциального уравнения (56).

Пример. *Определить плотность термоионного тока между двумя бесконечными плоскими электродами в вакууме.* Пример этот на применение уравнения Пуассона взят не из электростатики, а из учения о токе, и имеет большое значение для теории катодных (усилительных) ламп.

Известно, что накалинные металлы испускают со своей поверхности в окружающее пространство поток свободных электронов. Если к двум металлическим электродам приложить определенную разность потенциалов и раскалить отрицательный электрод (катод), то непрерывно испускаемые катодом электроны будут притягиваться к поверхности положительного электрода (анода). Поток электронов, двигающихся от катода к аноду, эквивалентен электрическому току. Ток этот называется термоионным током.

Выберем оси декартовых координат так, чтобы начало их находилось на катоде, а ось x была перпендикулярна плоскости электродов и направлена к аноду. Примем потенциал катода равным нулю, а потенциал анода равным φ_a . Из соображений симметрии явствует, что эквипотенциальные поверхности параллельны электродам; поэтому $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ и уравнение Пуассона в пространстве между электродами принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4\pi\rho. \quad (57)$$

¹ Уравнения (56') и (56) были изучены Лапласом и Пуассоном главным образом в связи с исследованием поля тяготения весомых масс. Как легко убедиться, уравнениями этого типа определяется потенциал любого силового поля, возбуждаемого расположенными в нем центрами сил (весомые массы, электрические заряды, магнитные полюсы) по закону обратной пропорциональности квадрату расстояния.

Если обозначить через n число электронов, приходящихся на единицу объема в пространстве между электродами, а через e — абсолютную величину заряда электрона, то плотность заряда в этом пространстве будет равна

$$\rho = -ne.$$

Предположим для простоты, что испускаемые катодом электроны при выходе из его поверхности не обладают никакой начальной скоростью¹. На пути от катода к аноду силы электрического поля совершат над электронами заряда $-e$ работу $-(e)\varphi_a = e\varphi_a$, которая очевидно перейдет в кинетическую энергию движения электронов. Обозначая через v скорость электрона на расстоянии x от катода, а через φ потенциал на том же расстоянии, получим

$$\frac{mv^2}{2} = e\varphi, \quad 57'$$

где m есть масса электрона. Наконец, плотность j электрического тока, т. е. заряд, протекающий за единицу времени через перпендикулярную току (т. е. перпендикулярную оси x) площадку в 1 см^2 , равна очевидно

$$j = env, \quad 57''$$

ибо nv есть число электронов, проходящих за единицу времени через эту площадку. В отличие от ρ , n и v , j есть величина постоянная, не зависящая от x , ибо по достижению стационарного состояния через любую параллельную электродам плоскость проходит очевидно одинаковое число электронов.

Исключим из уравнения (57) все неизвестные функции $x'a$, кроме φ . Прежде всего

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4\pi\rho = 4\pi ne = \frac{4\pi j}{v}.$$

Но из (57') следует

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m} \varphi},$$

стало быть,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi j \varphi^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{m}{2e}}.$$

Вводя обозначение

$$A = 9\pi \sqrt{\frac{m}{2e}},$$

получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{4}{9} A j \varphi^{-\frac{1}{2}}.$$

¹ В действительности они обладают начальными скоростями, средняя величина которых мала по сравнению со скоростью, приобретаемой электронами на пути к аноду под действием поля электродов (при обычных условиях опыта).

Как легко убедиться подстановкой, то из решений этого дифференциального уравнения, которое согласно условию задачи обращается на катоде в нуль и кроме того удовлетворяет условию ²: при $x=0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, равно

$$\varphi = (Aj)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}}. \quad 58$$

Если обозначить расстояние анода от катода через l , то при $x=l$ φ должно обращаться в φ_a . Стало быть

$$\varphi_a = (Aj)^{\frac{2}{3}} l^{\frac{4}{3}},$$

откуда

$$j = \frac{1}{A} \frac{\varphi_a^{\frac{3}{2}}}{l^2} = \frac{1}{9\pi} \sqrt{\frac{2c}{m}} \frac{\varphi_a^{\frac{3}{2}}}{l^2}. \quad 58'$$

Таким образом плотность термоионного тока не подчиняется закону Ома, а растет пропорционально степени $\frac{3}{2}$ приложенного к электродам напряжения φ_a и обратно пропорционально квадрату расстояния между ними. Это отличие законов термоионного тока от законов тока в металлах обуславливается двоякого рода причинами. Во-первых, электроны в металлах испытывают столкновения с положительными ионами, образующими твердый скелет металла, тогда как электроны в вакууме движутся лишь под влиянием сил электрического поля. Во-вторых при термоионном токе в пространстве между электродами находятся лишь свободные электроны, заряд которых не компенсируется зарядом положительных ионов, как это имеет место в металлах, вследствие чего поле этого, так называемого «пространственного заряда» искажает поле электродов.

Отметим, что формула (58') перестает быть справедливой при больших плотностях тока. При повышении потенциала анода наступает момент, когда все выделяемые катодом электроны немедленно же увлекаются к аноду. Дальнейшее повышение потенциала анода не может очевидно повести к увеличению плотности тока, которая таким образом достигает постоянного значения (ток насыщения).

Задача 12. — Пусть R означает расстояние данной точки пространства от некоторой произвольно выбранной начальной точки P .

Показать, что скаляр $\psi = \frac{1}{R}$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = 0.$$

59

² При малых разностях потенциалов между электродами ток далек от насыщения и число электронов, приходящих на анод в единицу времени, мало по сравнению с числом электронов, выделяющихся из катода. Избыточные электроны образуют при этом на внешней поверхности катода ($x=0$) слой или «облако» электронов, из которого отдельные электроны диффундируют частью обратно в катод, частью в пространство между электродами, откуда они увлекаются полем к аноду. Самый же слой этот в целом неподвижен, что может иметь место лишь при $E = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$.

§ 12. Дифференциальный оператор Гамильтона „набла“. **Пространственные производные.** — 1. В предыдущем мы познакомились с рядом дифференциальных операций над векторами и скалярами: образование дивергенции вектора (26), градиента скаляра (45), и наконец, дивергенции градиента скаляра (55).

В дальнейшем нам придется встретиться еще с целым рядом других дифференциальных выражений.

Оперирование этими выражениями может быть упрощено и уложено в простую и стройную схему введением в рассмотрение символического дифференциального оператора Гамильтона. Оператор этот обозначается знаком ∇ (читай „набла“); в декартовой системе координат он имеет вид:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad 60$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} суть единичные векторы по осям x , y , z . Иными словами, ∇ есть векторный оператор, слагающие которого по осям координат равны:

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}. \quad 60^*$$

Этот символический векторный оператор соответствует в векторном анализе знаку производной d обычного анализа. Подобно тому, как в обычном анализе дифференциал функции можно формально считать произведением знака дифференциала d на дифференцируемую функцию, так путем помножения скаляров и векторов, являющихся функциями точки, на символический оператор ∇ мы получаем пространственные производные этих величин.

Так, например, произведения ∇ на скаляр φ нужно очевидно положить равным

$$\nabla\varphi = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Стало быть согласно (46')

$$\nabla\varphi = \text{grad } \varphi. \quad 61$$

Таким образом $\nabla\varphi$ действительно может быть названа пространственной производной от φ , ибо согласно § 10 вектор $\text{grad } \varphi$ вполне характеризует изменения, испытываемые скаляром φ при перемещении

„точки наблюдения“ (т. е. при изменении координат x, y, z). Подобно этому и другие выражения, включающие в себя оператор ∇ , тоже характеризуют собой те или иные соотношения между значениями скалярных и векторных функций в смежных точках пространства.

С известными ограничениями, о которых ниже, можно образовывать произведения ∇ с другими векторами и скалярами так, как если бы ∇ был истинным, а не символическим вектором. Как и при пользовании знаком дифференциала при этом предполагается, что оператор ∇ „действует“ лишь на те величины, которые стоят вправо от него.

Так, например, скалярное произведение символического вектора ∇ на произвольный вектор \mathbf{a} равно

$$\nabla \mathbf{a} = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

т. е. согласно (23)

$$\nabla \mathbf{a} = \text{div } \mathbf{a}. \quad 62$$

Квадрат вектора ∇ равен

$$\nabla^2 = \nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \nabla_z^2 = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Поэтому раскрывая смысл произведения $\nabla(\nabla\varphi)$ по правилам векторной алгебры:

$$\mathbf{b}(\mathbf{b}\varphi) = \mathbf{b}^2\varphi,$$

получим

$$\text{div grad } \varphi = \nabla(\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

что совпадает с ранее выведенным уравнением (55').

Совершенно иной смысл имеет выражение $\text{grad div } \mathbf{a}$:

$$\text{grad div } \mathbf{a} = \nabla(\nabla \mathbf{a}) = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right).$$

Оно вовсе не равно $\nabla^2 \mathbf{a}$, подобно тому как при оперировании с обычными векторами

$$\mathbf{b}(\mathbf{b}\mathbf{a}) \neq \mathbf{b}^2 \mathbf{a}.$$

Выражение же $\nabla^2 \mathbf{a}$ имеет очевидно следующий смысл:

$$\nabla^2 \mathbf{a} = (\nabla \nabla) \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial z^2}, \quad 63$$

т. е. представляет собой вектор, слагающая которого, например, по оси x равна

$$(\nabla^2 \mathbf{a})_x = \nabla^2 a_x = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}. \quad 63'$$

Конечно $\nabla^2 \varphi$ и $\nabla^2 \mathbf{a}$ нельзя смешивать с $(\nabla \varphi)^2$ и $(\nabla \mathbf{a})^2$; так, например,

$$(\nabla \varphi)^2 = (\text{grad } \varphi)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2.$$

Помимо скалярного произведения символического вектора ∇ на вектор \mathbf{a} можно образовать и векторное произведение этих векторов, которое принято обозначать через $\text{rot } \mathbf{a}$ или $\text{curl } \mathbf{a}$ (читай ротор \mathbf{a} или кёрл \mathbf{a} или вихрь \mathbf{a}):

$$[\nabla \mathbf{a}] = \text{rot } \mathbf{a} = \text{curl } \mathbf{a}. \quad 64$$

Оба эти обозначения одинаково распространены, мы будем пользоваться первым из них. Слагающие вектора $\text{rot } \mathbf{a}$ по осям координат очевидно имеют следующие значения

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_x \mathbf{a} = [\nabla \mathbf{a}]_x &= \nabla_y a_z - \nabla_z a_y = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \\ \text{rot}_y \mathbf{a} = [\nabla \mathbf{a}]_y &= \nabla_z a_x - \nabla_x a_z = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \\ \text{rot}_z \mathbf{a} = [\nabla \mathbf{a}]_z &= \nabla_x a_y - \nabla_y a_x = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad 64'$$

Подробнее об этой весьма важной пространственной производной нам придется говорить в § 32.

Известные формулы векторной алгебры:

$$[\mathbf{b}(\mathbf{b}\varphi)] = 0, \quad \mathbf{b}[\mathbf{b}\mathbf{a}] = 0, \quad [\mathbf{b}[\mathbf{b}\mathbf{a}]] = \mathbf{b}(\mathbf{b}\mathbf{a}) - (\mathbf{b}\mathbf{b})\mathbf{a} \quad ^1$$

остаются справедливыми и при замене вектора \mathbf{b} символическим вектором ∇ (при любых \mathbf{a} и φ):

$$\left. \begin{aligned} [\nabla(\nabla\varphi)] &= [\nabla \text{grad } \varphi] = \text{rot grad } \varphi = 0, \\ \nabla[\nabla \mathbf{a}] &= \nabla \text{rot } \mathbf{a} = \text{div rot } \mathbf{a} = 0, \\ [\nabla[\nabla \mathbf{a}]] &= \nabla(\nabla \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \quad \text{или} \quad \text{rot rot } \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a}. \end{aligned} \right\} \quad 65$$

¹ В правой части последнего уравнения можно конечно изменить порядок множителей, например, так: $[\mathbf{b}[\mathbf{b}\mathbf{a}]] = (\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{b} - \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{b})$. Однако при замене \mathbf{b} на ∇ мы должны записать это уравнение так, чтобы все дифференциальные операторы ∇ стояли перед дифференцируемым вектором \mathbf{a} .

В справедливости этих соотношений легко убедиться непосредственным вычислением в декартовых координатах. Так, например,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \frac{\partial \operatorname{rot}_x \mathbf{a}}{\partial x} + \frac{\partial \operatorname{rot}_y \mathbf{a}}{\partial y} + \frac{\partial \operatorname{rot}_z \mathbf{a}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

2. Итак, поскольку оператор ∇ входит сомножителем в произведения, содержащие в себе лишь один единственный истинный скаляр или вектор, постольку произведения эти можно преобразовать по обычным правилам векторной алгебры. Однако, если в произведение входят два или несколько истинных скаляра или вектора, то правила эти становятся неприменимыми и нуждаются в видоизменениях. Совершенно то же имеет место и в обычном анализе при символическом умножении алгебраических величин на знак дифференциала d : подобно тому как

$$d(\varphi\psi) = \psi d\varphi + \varphi d\psi,$$

так и в случае умножения произведения скаляров или векторов на ∇ операция дифференцирования должна быть выполнена над каждым из сомножителей в отдельности. Так, например, при дифференцировании произведения двух скаляров или скаляра и вектора получаем:

$$\left. \begin{aligned} \nabla(\varphi\psi) &= \psi(\nabla\varphi) + \varphi(\nabla\psi) \text{ или } \operatorname{grad}(\varphi\psi) = \psi \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{grad} \psi, \\ \nabla(\varphi\mathbf{a}) &= \varphi(\nabla\mathbf{a}) + \mathbf{a}(\nabla\varphi) \text{ или } \operatorname{div}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{grad} \varphi, \\ [\nabla(\varphi\mathbf{a})] &= \varphi[\nabla\mathbf{a}] + [(\nabla\varphi)\mathbf{a}] \text{ или } \operatorname{rot}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{a}]; \end{aligned} \right\} 66$$

В справедливости этих соотношений можно убедиться непосредственным вычислением. Так, например,

$$\begin{aligned} \nabla(\varphi\psi) &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}(\varphi\psi) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}(\varphi\psi) = \\ &= \mathbf{i} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \mathbf{j} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial y} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \mathbf{k} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \\ &= \varphi(\nabla\psi) + \psi(\nabla\varphi). \end{aligned}$$

Несколько сложнее обстоит дело при пространственном дифференцировании произведения двух векторов.

Обратимся прежде всего к выражению

$$\nabla [\mathbf{ab}] = \text{div} [\mathbf{ab}].$$

Для обычных векторов справедливы соотношения:

$$\mathbf{c} [\mathbf{ab}] = \mathbf{b} [\mathbf{ca}] = -\mathbf{a} [\mathbf{cb}].$$

При замене вектора \mathbf{c} дифференциальным оператором ∇ можно предположить, что $\nabla [\mathbf{ab}]$ должно быть приравнено к сумме выражений

$$\mathbf{b} [\nabla \mathbf{a}] \text{ и } -\mathbf{a} [\nabla \mathbf{b}],$$

ибо в обычном анализе производная от произведения равна сумме двух членов, в каждом из которых дифференцированию подвергается лишь один из сомножителей. Действительно, непосредственным вычислением, которое мы предоставляем провести читателю, можно убедиться, что

$$\left. \begin{aligned} \nabla [\mathbf{ab}] &= \mathbf{b} [\nabla \mathbf{a}] - \mathbf{a} [\nabla \mathbf{b}], \\ \text{div} [\mathbf{ab}] &= \mathbf{b} \text{ rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{b}. \end{aligned} \right\}$$

т. е. что

67

Как известно при вычислении произведения трех векторов $\mathbf{c} (\mathbf{ab})$ необходимо выполнить скалярное перемножение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} прежде помножения их на \mathbf{c} . Соответственно этому и выражение

$$\nabla (\mathbf{ab}) = \text{grad} (\mathbf{ab})$$

не может быть представлено в виде суммы двух членов, в каждом из которых дифференцируется лишь один из сомножителей. Можно показать далее, что такого рода преобразование невыполнимо также и по отношению к выражению

$$[\nabla [\mathbf{ab}]] = \text{rot} [\mathbf{ab}].$$

Оба этих выражения могут быть, однако, представлены в виде суммы четырех членов, в каждом из которых дифференцированию подвергается лишь один из векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} .

3. Нам остается еще рассмотреть скалярный оператор $\mathbf{a}\nabla$, получаемый скалярным помножением произвольного вектора \mathbf{a} на оператор Гамильтона ∇ , стоящий справа от \mathbf{a} (в отличие от $\nabla \mathbf{a} = \text{div } \mathbf{a}$):

$$\mathbf{a}\nabla = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

68

В частном случае, при $a = 1$, операция $a \nabla$ эквивалентна очевидно нахождению производной $\frac{\partial}{\partial a}$ по направлению единичного вектора a .

Вообще же говоря, выполнение операции $a \nabla$ над произвольной функцией точки эквивалентно помножению производной от этой функции, взятой по направлению вектора a , на численную величину вектора a ; иными словами,

$$a \nabla = a \frac{\partial}{\partial a}. \quad (68')$$

Действительно, выполняя операцию $a \nabla$ над произвольным скаляром φ , получим скаляр

$$a \nabla \cdot \varphi = a_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + a_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mathbf{a} \cdot \nabla \varphi$$

или на основании (44')

$$a \nabla \cdot \varphi = \mathbf{a} \operatorname{grad} \varphi = a \frac{\partial \varphi}{\partial a},$$

в полном согласии с (68'). Выполняя же операцию $a \nabla$ над произвольным вектором \mathbf{b} получим вектор

$$a \nabla \cdot \mathbf{b} = a_x \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} + a_y \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y} + a_z \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z}, \quad (68'')$$

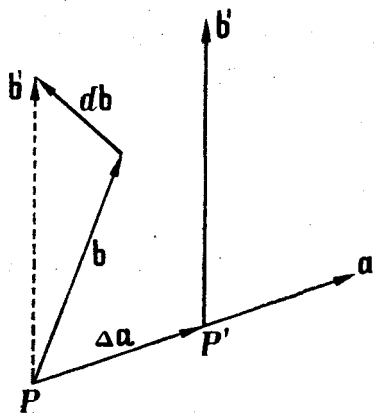


Рис. 26.

слагающая которого, например, по оси x' ов, очевидно, равна

$$\begin{aligned} (a \nabla \cdot \mathbf{b})_x &= a_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_x}{\partial z} = \\ &= a \nabla \cdot b_x. \end{aligned}$$

С другой стороны, производная вектора \mathbf{b} по произвольному направлению \mathbf{a} может быть определена путем следующего геометрического построения. Пусть значения вектора \mathbf{b} в двух близких точках P и P' равны соответственно \mathbf{b} и \mathbf{b}' , причем направление отрезка $PP' = \Delta a$ совпадает с направлением \mathbf{a} (рис. 26). Если разность между \mathbf{b} и \mathbf{b}' равна $\Delta \mathbf{b}$, то производная $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial a}$ будет равна

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial a} = \lim_{PP' \rightarrow 0} \frac{\mathbf{b}' - \mathbf{b}}{PP'} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta a}. \quad (68''')$$

Таким образом направление вектора $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial a}$ совпадает с предельным направлением вектора $\Delta \mathbf{b}$, но, вообще говоря, отлично от направления векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Далее, если координаты точек P и P' отличаются друг от друга на Δx , Δy , Δz , то с точностью до величин второго порядка малости

$$\mathbf{b}' - \mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z} \Delta z.$$

Внося это в предшествующее уравнение и приняв во внимание, что

$$\frac{\Delta x}{PP'} = \cos(x, \mathbf{a}), \quad \frac{\Delta y}{PP'} = \cos(y, \mathbf{a}), \quad \frac{\Delta z}{PP'} = \cos(z, \mathbf{a}),$$

получим:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial a} = \lim_{PP' \rightarrow 0} \frac{\mathbf{b}' - \mathbf{b}}{PP'} = \cos(x, \mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} + \cos(y, \mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y} + \cos(z, \mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z}.$$

Помножая это равенство на \mathbf{a} и сравнивая результат с (68''), убедимся, что

$$\mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{b} = a \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial a},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, если вектор \mathbf{a} достаточно мал, то с точностью до величин второго порядка малости $\mathbf{a} \nabla \cdot \varphi$ и $\mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{b}$ равны соответственно приращению скаляра φ и вектора \mathbf{b} при перемещении „точки наблюдения“ на отрезок, равный по величине и направлению вектору \mathbf{a} .

4. Элементарные операции пространственного дифференцирования сводятся к образованию градиента, дивергенции, ротора и производной $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial a}$. Все эти операции имеют определенный геометрический смысл и потому инвариантны по отношению к преобразованию системы координат. Иными словами значение выражений

$$\text{grad } \varphi, \text{ div } \mathbf{a}, \text{ rot } \mathbf{a}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial a}$$

не зависит от выбора координатной системы. В отношении дивергенции, градиента и $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial a}$ это явствует из замечаний, сделанных в связи с формулой (26), и из определения понятия градиента (§ 10) и производной вектора по произвольному направлению \mathbf{a} (ур. 68''');

инвариантность же ротора будет доказана впоследствии [см. § 32, в частности ур. (174')]. Все соотношения между дифференциальными выражениями, выведенные нами в настоящем параграфе, тоже носят инвариантный характер. Ибо, хотя при доказательстве их мы всякий раз и пользовались определенной (декартовой) системой координат, однако, в самые соотношения эти входят лишь инвариантные выражения $\text{grad } \varphi$, $\text{div } \mathbf{a}$, $\text{rot } \mathbf{a}$ и т. д. Стало быть форма этих соотношений не может изменяться при переходе к иным системам координат.

Задача 13. — Показать, исходя из (41'), что напряженность поля диполя момента \mathbf{p} равна

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{p}}{R^3}, \quad 69$$

и что в сферической системе координат R , ϑ , α с центром в диполе и полярной осью, параллельной \mathbf{p} , слагающие вектора \mathbf{E} равны

$$E_R = \frac{2p \cos \vartheta}{R^3}, \quad E_\vartheta = \frac{p \sin \vartheta}{R^3}, \quad E_\alpha = 0. \quad 69'$$

§ 13. Теорема Грина. Потенциал объемных и поверхностных зарядов. — 1. Чрезвычайно важная теорема векторного анализа, так называемая теорема Грина, может быть получена из формулы Гаусса (25):

$$\int \text{div } \mathbf{a} \cdot dV = \oint a_n dS,$$

если положить в ней

$$\mathbf{a} = \psi \text{ grad } \varphi = \psi \nabla \varphi,$$

где ψ и φ суть два произвольных скаляра. Согласно (66) и (55)

$$\text{div } \mathbf{a} = \psi \text{ div grad } \varphi + \text{grad } \psi \cdot \text{grad } \varphi = \psi \nabla^2 \varphi + (\nabla \psi) \cdot (\nabla \varphi).$$

Далее,

$$a_n = \psi \text{ grad}_n \varphi = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}.$$

Поэтому из (25) следует:

$$\int \{ \psi \nabla^2 \varphi + (\nabla \psi) \cdot (\nabla \varphi) \} dV = \oint \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \quad 70$$

где интеграл правой части должен быть взят по замкнутой поверхности S , ограничивающей область интегрирования V . Эта формула и выражает собою теорему Грина.

Для некоторых целей удобно преобразовать формулу (70), заменив в ней ψ на φ и обратно, и вычтя полученное таким образом уравнение из (70); в результате получаем:

$$\int (\psi \Delta^2 \varphi - \varphi \Delta^2 \psi) dV = \oint \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS. \quad (70')$$

Как указывалось, применение теоремы Гаусса ограничено требованием непрерывности вектора \mathbf{a} и конечности его первых производных в области интегрирования V . Поэтому теорема Грина непосредственно применима лишь к конечным и непрерывным скалярным функциям точки ψ и φ , обладающим в области интегрирования V производными 1-го и 2-го порядка.

2. В качестве первого применения теоремы Грина мы приведем вывод выражений (39) и (40) для потенциала поверхностных и объемных зарядов, основанный на уравнении Пуассона (56) и свободный от тех недостатков, которыми обладает приведенный ранее вывод этих выражений из формулы для потенциала точечного заряда (см. стр. 42).

Поставим себе задачу определить значение электрического потенциала φ в некоторой точке поля P . Обозначим расстояние произвольной точки поля от точки P через R . Положим в теореме Грина (70') $\psi = \frac{1}{R}$ и примем во внимание уравнение (59):

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = 0$$

и уравнение Пуассона (56):

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \rho.$$

Внося эти значения в формулу Грина (70') получим, по делению на -4π :

$$\int_V \frac{\rho}{R} dV = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS. \quad (71)$$

Предположим сначала, что во всем рассматриваемом нами объеме V , включающем в себя точку P и ограниченном поверхностью S , потенциал φ и его производные являются непрерывными функциями точки. Скаляр же $\psi = \frac{1}{R}$ и его производные непрерывны и конечны во всем

пространстве, кроме точки P . Так как теорема Грина применима только к таким участкам пространства, в которых оба скаляра φ и ψ и их производные непрерывны, то точку P необходимо исключить из области интегрирования V . Опишем с этой целью вокруг P сферу S_0 (рис. 27) произвольно малого радиуса R_0 , и применим формулу (71) к объему V' , заключенному между внешней поверхностью S и поверхностью сферы S_0 (рис. 27):

$$\int_{V'} \frac{\rho}{R} dV = \frac{1}{4\pi} \oint_{S+S_0} \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS, \quad (71')$$

где индекс $S+S_0$ у знака поверхностного интеграла означает, что интеграл этот должен быть распространен на поверхности S и S_0 . Рассмотрим подробнее интеграл по поверхности S_0 .

Внешняя по отношению к объему интегрирования V' нормаль к поверхности сферы S_0 направлена к ее центру и прямо противоположна радиусу вектору \mathbf{R}_0 . Поэтому на поверхности S_0

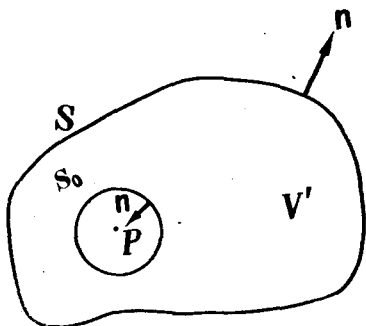


Рис. 27.

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} = -\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R_0^2}$$

и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial R}.$$

Внесем эти значения в поверхностный интеграл уравнения (71') и применим затем так называемую „теорему о среднем“ интегрального исчисления:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS &= \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \left\{ \frac{\varphi}{R_0^2} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right\} dS = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{R_0^2} \bar{\varphi} + \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial R} \right) \right\} \oint_{S_0} dS, \end{aligned}$$

где $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right)$ и $\bar{\varphi}$ суть некоторые средние значения величин $\frac{\partial \varphi}{\partial R}$ и φ на поверхности сферы S_0 . Так как $\oint_{S_0} dS$ равен общей поверхности сферы $4\pi R_0^2$, то правая часть уравнения равна

$$\bar{\varphi} + R_0 \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial R} \right).$$

Будем теперь стремиться к нулю радиус R_0 , стягивая сферу S_0 в точку P . При этом последний член приведенного выражения обратится в нуль, а среднее значение потенциала φ на поверхности бесконечно малой сферы может быть принято равным значению потенциала φ_P в ее центре P . Таким образом

$$\lim_{R_0 \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS = \varphi_P. \quad (71'')$$

Следовательно в пределе при $R_0 \rightarrow 0$ уравнение (71') принимает вид:

$$\int_V \frac{\rho}{R} dV = \varphi_P + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \right\} dS$$

или, по перенесении членов,

$$\varphi_P = \int_V \frac{\rho}{R} dV + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right\} dS, \quad (72)$$

где объемный интеграл может быть распространен на весь ограниченный поверхностью S объем V , ибо при $R_0 \rightarrow 0$ V' стремится к V , а подынтегральное выражение остается конечным и при $R=0$ (см. стр. 42).

Итак, потенциал φ в точке P , лежащей внутри объема V , в котором φ и его первые и вторые производные конечны и непрерывны, определяется потенциалом объемных зарядов, расположенных в V , (сравни ур. 40) и значениями φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ на ограничивающей объем V поверхности S .

3. Предположим теперь, что хотя потенциал φ и остается конечным и непрерывным в объеме V , но что сплошность (непрерывность) градиента φ может нарушаться на отдельных „поверхностях разрыва“, т. е., что значения $\text{grad } \varphi$ по различным сторонам поверхности разрыва отличаются на конечную величину (изменение $\text{grad } \varphi$ скачком). Мы увидим, что физический смысл этого предположения сводится к допущению наличия внутри V заряженных поверхностей.

Предположим сначала, что внутри V существует лишь одна и притом незамкнутая поверхность разрыва S_1 . Выберем произвольным образом направление положительной нормали к ней и обозначим ее временно не через \mathbf{n} , как обычно, а через \mathbf{N} (рис. 28). Проведем

затем замкнутую поверхность S_1' , охватывающую S_1 (на рис. 28 S_1' обозначена пунктиром); тогда формулу (72) можно будет, очевидно, применить к объему V' , заключенному между поверхностями S и S_1'

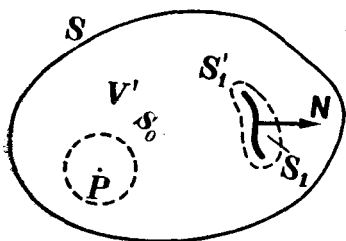


Рис. 28.

При этом входящий в (72) поверхностный интеграл распадется на два интеграла: по поверхности S и по поверхности S_1' . Будем теперь стягивать поверхность S_1' так, чтобы она все плотнее прилегала к S_1 . В пределе S_1' совпадет с S_1 и интегрирование по S_1' сведется к двукратному интегрированию по поверхности разрыва S_1 : один раз по внутренней (относительно нормали N), а другой раз по внешней стороне этой поверхности:

$$\begin{aligned} & \lim_{S_1' \rightarrow S_1} \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1'} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right\} dS = \\ & = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right\}_1 dS + \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right\}_2 dS, \end{aligned}$$

где индексами 1 и 2 отмечены значения подынтегральных выражений соответственно с внутренней (относительно нормали N) и внешней стороны поверхности разрыва S_1 . В этом уравнении под n нужно понимать, очевидно, нормаль, внешнюю по отношению к объему интегрирования V' , т. е. направленную из V' к S_1 . Иными словами, с внутренней стороны от S_1 под n нужно понимать направление n_1 , а с внешней — направление n_2 (рис. 29). Так как n_1 параллельно N и антипараллельно n_2 , то

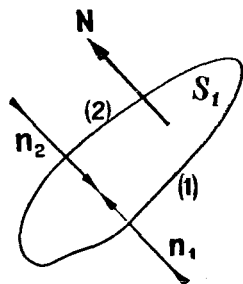


Рис. 29.

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right\}_1 = \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{R} \right), \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right\}_2 = - \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{R} \right)$$

и

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N} \right)_1, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2 = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N} \right)_2,$$

где $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial N} \right)_1$ и $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial N} \right)_2$ суть значения производной φ по нормали N с внутренней и внешней сторон поверхности S_1 . Обозначая соответствующие значения потенциала φ через φ_1 и φ_2 и внося полученные

выражения в предшествующее уравнение, мы, по приведении членов, получим:

$$\begin{aligned} \lim_{S'_1 \rightarrow S_1} \frac{1}{4\pi} \oint_{S'_1} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right\} dS = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{R} \right) dS - \\ - \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N} \right)_2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N} \right)_1 \right\} \frac{1}{R} dS. \end{aligned} \quad 73$$

Так как согласно нашему предположению потенциал φ всюду непрерывен, то значения его φ_1 и φ_2 по обеим сторонам поверхности одинаковы и первый член правой части уравнения (73) обращается в нуль. Стало быть, если ввести обозначение:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial N} \right)_2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N} \right)_1 = -4\pi\sigma, \quad 74$$

то правая часть уравнения (73) примет вид:

$$\int_{S_1} \frac{\sigma}{R} dS.$$

Вместе с тем при совпадении S'_1 с S_1 объем V' совпадает очевидно с объемом V , ограниченным поверхностью S , так что уравнение (72) принимает вид:

$$\varphi_P = \int_V \frac{\rho dV}{R} + \int_{S_1} \frac{\sigma dS}{R} + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right\} dS. \quad 72'$$

Таково, стало быть, выражение потенциала, если внутри ограниченного поверхностью S объема V имеется незамкнутая поверхность S_1 разрыва сплошности градиента φ . Если таких поверхностей несколько, то к каждой из них можно применить приведенные рассуждения, так что в этом случае под вторым членом правой части формулы (72') нужно понимать сумму интегралов по всем поверхностям разрыва, лежащим внутри V . Формула эта применима, наконец, и к случаю замкнутых поверхностей разрыва, ибо всякую замкнутую поверхность можно разложить на две незамкнутых.

4. Первый член выражения (72') представляет потенциал объемных зарядов, расположенных в объеме V , второй же его член должен быть очевидно истолкован, как потенциал поверхностных зарядов, распределенных с плотностью σ по поверхности разрыва S_1 (сравни

уравнение 41). Это толкование вполне совпадает с ранее полученными результатами. Действительно, если по прежнему обозначить произвольно выбранную положительную нормаль к S_1 не через N , а через n , то (74) примет вид:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 = -4\pi\sigma. \quad 74'$$

Но согласно (52)

$$E_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n},$$

где E_n есть нормальная слагающая напряженности поля. Стало быть, уравнение (74') может быть записано следующим образом:

$$E_{1n} - E_{2n} = 4\pi\sigma.$$

Сравнивая это с уравнением (20) мы убеждаемся, что величина σ , определяемая уравнением (74'), действительно равна плотности электрического заряда на поверхности S_1 . Таким образом мы вновь приходим к выводу, что поверхности разрыва нормальной слагающей градиента потенциала (т. е. поверхности разрыва E_n) физически равнозначны заряженным поверхностям, причем скачок этой слагающей $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ пропорционален плотности заряда поверхности.

Обратимся, наконец, к последнему члену выражения (72'), представляющему собой интеграл по пограничной поверхности S объема V и выражающему зависимость значений потенциала φ в объеме V от значений этого потенциала и его первых производных на пограничной поверхности этого объема.

Член этот вовсе выпадет из выражения потенциала, если мы под объемом интегрирования V будем понимать все бесконечное пространство (т. е. удалим ограничивающую V поверхность S в бесконечность) и при этом наложим на φ и его производные следующие граничные условия: в бесконечности φ стремится к нулю не медленнее, чем $\frac{1}{R}$, а его первые производные по координатам не медленнее, чем $\frac{1}{R^2}$ т. е.

$$R\varphi \text{ и } R^2 \text{grad } \varphi \text{ при } R \rightarrow \infty$$

остаются конечными.

75

Первым из этих условий мы уже пользовались в § 8, приравнявая нулю значение потенциала в бесконечности (уравнение 36"), второе же

условие непосредственно связано с первым. Физически оно означает, что в бесконечности напряженность E электрического поля равна нулю, т. е. что все заряды находятся в конечной области пространства. Во всем дальнейшем мы будем называть потенциалом электростатического поля то — и только то — решение уравнения Пуассона, которое удовлетворяет условиям (75)¹.

Покажем теперь, что при наложении условий (75) и удалении граничной поверхности S в бесконечность последний член выражения (72') действительно обращается в нуль. Выберем в качестве поверхности S сферу радиуса R с центром в точке P . Внешняя нормаль к этой сфере совпадает с радиусом вектором \mathbf{R} , так что

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{R^2}.$$

Из условия (75) следует, стало быть, что подынтегральное выражение интересующего нас интеграла при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю не медленнее, чем $\frac{1}{R^3}$, тогда как поверхность интегрирования растет пропорционально лишь R^2 . Стало быть, интеграл этот при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю и (72') принимает вид (если опустить у φ индекс P):

$$\varphi = \int \frac{\rho dV}{R} + \int \frac{\sigma dS}{R}, \quad 76$$

где R есть расстояние элемента объемного заряда ρdV или заряда поверхностного σdS от точки поля, обладающей потенциалом φ , и где интегрирование должно быть распространено по всему пространству, занятому зарядами.

Из изложенного явствует, что поверхностный интеграл в формуле (72') учитывает поле зарядов, лежащих вне объема интегрирования V .

Напомним, что во всем предыдущем нами предполагалось, что как сам потенциал, так и его первые производные (градиент) всюду конечны. Бесконечность градиента φ (т. е. скачок потенциала) означала бы бесконечную напряженность электрического поля, что физически бессмысленно. Конечность градиента φ означает непрерывность φ , что и предполагалось нами во всем предшествующем.

¹ За исключением, конечно, тех случаев, когда условно вводятся в рассмотрение заряды, простирающиеся в бесконечность, как, например, бесконечные заряженные плоскость, цилиндр и т. п.

Впрочем в § 15 мы вернемся к вопросу о поверхностях разрыва потенциала с несколько иной точки зрения.

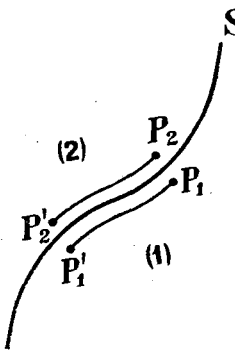
Если размеры заряда e , занимающего объем V_1 , настолько малы по сравнению с расстоянием его R до рассматриваемой точки поля P , что расстояние всех элементов заряда можно считать одинаковым, то потенциал этого заряда в P будет равен

$$\int_{V_1} \frac{\rho dV}{R} = \frac{1}{R} \int_{V_1} \rho dV = \frac{e}{R},$$

что совпадает с выражением (37'') потенциала точечного заряда.

5. В предшествующем мы убедились, что значение потенциала зависит лишь от скачков нормальной (а не тангенциальной) слагающей градиента на поверхности разрыва. Весьма существенно, однако, что непрерывность тангенциальных слагающих $\text{grad } \varphi$ вообще ни на каких поверхностях разрыва нарушаться не может. Действительно, допустим противное, и пусть вдоль поверхности S_1 (рис. 30) нарушается непрерывность тангенциальных слагающих $\text{grad } \varphi$. Это значит, что если P_1, P_2 и P_1', P_2' суть две пары разделенных поверхностью S_1 , но бесконечно близких друг другу точек, то приращение потенциала на пути $P_1 P_2$ отличается на конечную величину от приращения его на бесконечно близком пути $P_1' P_2'$. С другой стороны, ввиду конечности градиента φ приращение потенциала на бесконечно малых отрезках $P_1 P_1'$ и $P_2 P_2'$ бесконечно мало. Стало быть, приращение потенциала на замкнутом пути $P_1 P_1' P_2' P_2 P_1$ должно отличаться от нуля. Другими словами из сделанного нами допущения следует, что потенциал φ не однозначен и что работа поля при перенесении пробного заряда по замкнутому пути отлична от нуля, что в электростатическом поле невозможно (§ 8).

Рис. 30.



Итак, при любом выборе поверхности S , тангенциальные к ней слагающие $\text{grad } \varphi$, а стало быть, и тангенциальные слагающие электрического вектора E , остаются непрерывными. Иными словами, если t есть единичный вектор, лежащий в касательной плоскости к произвольной поверхности S_1 , то

$$E_{2t} = E_{1t},$$

где E_{2i} и E_{1i} суть значения слагающих вектора E по направлению t по различным сторонам поверхности S_1 .

В частности, так как напряженность поля внутри проводников равна нулю, то тангенциальная слагающая E у их внешней поверхности тоже должна равняться нулю. Стало быть, у поверхности проводников электрический вектор направлен нормально к их поверхности ($E = E_n$) и уравнение (21) может быть записано следующим образом:

$$E = 4\pi n.$$

77'

§ 14. Типичные задачи электростатики. — Введение понятия потенциала значительно облегчает решение задач электростатики, ибо задача определения векторного поля электрической напряженности E сводится к определению поля скаляра φ ; иными словами, определение трех функций точки (слагающих вектора E) сводится к определению одной только функции φ .

Зная плотность объемных и поверхностных зарядов можно определить потенциал поля (формула 76); обратно, зная градиент потенциала φ по дивергенции этого градиента $\nabla^2\varphi$ и по величине скачков его нормальной слагающей на поверхностях разрыва можно однозначно определить распределение зарядов (формулы 56 и 74').

Однако практически, конечно, невозможно измерить плотность зарядов или градиент потенциала во всех точках поля. Поэтому экспериментатору приходится фактически иметь дело с задачами иного типа, а именно:

Дано расположение и форма всех находящихся в поле проводников, определить поле этих проводников и распределение зарядов по их поверхности, если известны либо потенциал каждого проводника (задача A), либо общий заряд каждого проводника (задача B). Объемные заряды предполагаем отсутствующими, ибо заряды проводников сосредоточены на их поверхности (§ 5), а диэлектриков мы в этой главе не рассматриваем.

Покажем прежде всего, что и этими, на первый взгляд весьма обще сформулированными условиями, электростатическое поле, а стало быть, и распределение зарядов, определяется однозначно.

Предположим противное, и пусть φ и φ' суть две различных функции точки, удовлетворяющие условиям задачи A или B . Ввиду отсутствия объемных зарядов, как φ , так и φ' должны удовлетворять во всем пространстве уравнению Лапласа (56'); стало быть, и разность их

$$\varphi'' = \varphi - \varphi'$$

удовлетворяет тому же уравнению:

$$\nabla^2 \varphi'' = 0.$$

Полагая в формуле Грина (70) $\phi = \varphi = \varphi''$, мы таким образом получим

$$\int_V (\nabla \varphi'')^2 dV = \oint_S \varphi'' \frac{\partial \varphi''}{\partial n} dS, \quad 79$$

где интегрирование предполагается распространенным по всему лежащему вне проводников пространству V , так что под S нужно понимать совокупность поверхностей всех проводников.

Так как при решении задачи A φ и φ' должны принимать на S наперед заданные значения, то φ'' на всех поверхностях S равно нулю. Стало быть,

$$\int_V (\nabla \varphi'')^2 dV = 0. \quad 79'$$

Ввиду положительности подынтегрального выражения из этого равенства следует, что $\nabla \varphi'' = \text{grad} \varphi''$ во всем пространстве равно нулю, т. е., что $\varphi'' = \text{const}$. Так как кроме того на поверхностях проводников φ'' обращается в нуль, то оно равно нулю и повсюду. Стало быть,

$$\varphi = \varphi',$$

чем и доказывается однозначность решения задачи A .

Обращаясь к задаче B заметим, что на поверхности каждого проводника потенциалы φ и φ' , а стало быть, и φ'' должны иметь постоянное значение. Значит для поверхности каждого проводника можно написать

$$\oint \varphi'' \frac{\partial \varphi''}{\partial n} dS' = \varphi'' \oint \frac{\partial \varphi''}{\partial n} dS.$$

Но на поверхности проводников согласно (21)

$$E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 4\pi\sigma \text{ и } E_n' = -\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = 4\pi\sigma',$$

где σ и σ' суть плотности зарядов проводников, соответствующие решениям φ и φ' . Стало быть,

$$\frac{\partial \varphi''}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi'}{\partial n} = 4\pi\sigma' - 4\pi\sigma$$

$$\oint \varphi'' \frac{d\varphi''}{dn} dS = 4\pi\varphi'' \left\{ \oint \sigma' dS - \oint \sigma dS \right\} = 4\pi\varphi'' (e' - e) = 0,$$

где e и e' суть значения общей величины заряда проводника, соответствующие решениям φ и φ' ; согласно условию B e и e' должны равняться наперед заданной величине. Так как приведенное рассуждение применимо к поверхности каждого проводника, то вся правая часть равенства (79) обращается в нуль, откуда, как и в случае задачи A , следует, что

$$\varphi'' = \varphi - \varphi' = \text{const.}$$

Таким образом различные решения задачи B могут отличаться лишь несущественной аддитивной постоянной в выражении потенциала, которая впрочем обратится в нуль, если наложить в бесконечности условия (75). Не трудно, наконец, убедиться, что если для части проводников заданы условия типа A , а для остальных — условия типа B , то решение задачи остается однозначным.

Итак, однозначность решения задач электростатики A и B нами доказана. Впрочем, нахождение самого решения представляет вообще говоря значительные математические трудности. Однако, если нам удастся каким-либо способом найти выражение для φ , удовлетворяющее поставленным условиям A или B , то теорема об однозначности позволяет заключить, что найденное выражение есть единственное и потому истинное решение задачи. Умелое пользование этим обстоятельством весьма облегчает рассмотрение ряда проблем электростатики, что мы можем здесь иллюстрировать, к сожалению, лишь на одном единственном примере, пользуясь при этом для упрощения понятием точечного заряда.

Итак, однозначность решения задач электростатики A и B нами доказана. Впрочем, нахождение самого решения представляет вообще говоря значительные математические трудности. Однако, если нам удастся каким-либо способом найти выражение для φ , удовлетворяющее поставленным условиям A или B , то теорема об однозначности позволяет заключить, что найденное выражение есть единственное и потому истинное решение задачи. Умелое пользование этим обстоятельством весьма облегчает рассмотрение ряда проблем электростатики, что мы можем здесь иллюстрировать, к сожалению, лишь на одном единственном примере, пользуясь при этом для упрощения понятием точечного заряда.

ПРИМЕР. Точечный заряд e находится на расстоянии d от бесконечного проводника, занимающего левое полупространство (рис. 31). Определить поле в правом полупространстве и плотность зарядов, индуцированных зарядом e на поверхности проводника. — Этот пример подходит под тип рассмотренных выше задач, ибо общий заряд e проводника, несущего „точечный“ заряд, задан, постоянный же потенциал бесконечного проводника может быть условно принят равным нулю. Стало быть, этими условиями решение задачи определено однозначно.

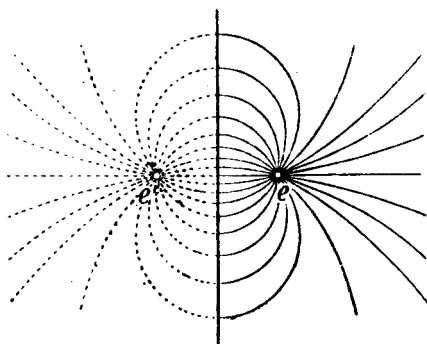


Рис. 31.

Чтобы найти это решение предположим, что на продолжении перпендикуляра, опущенного из e на поверхность проводника, находится на расстоянии d от этой поверхности заряд $-e$, и затем мысленно устраним самый проводник. Тогда плоскость, совпадавшая ранее с поверхностью проводника, будет обладать требуемым потенциалом нуль. Ибо все точки этой плоскости будут равно отстоять от равных по величине и противоположных по знаку зарядов $+e$ и $-e$. Стало быть, поле совокупности этих зарядов в правом полупространстве удовлетворяет условиям задачи, из чего на основании теоремы однозначности сле-

дует, что поле это в правом полупространстве тождественно с искомым полем заряда e и зарядов, индуцированных им на поверхности бесконечного проводника.

Таким образом наша задача сведена к весьма простой задаче определения поля двух точечных зарядов $+e$ и $-e$. Определив напряженность поля, мы затем по формуле (21) можем найти и распределение индуцированных зарядов на поверхности проводника. Соответствующих выкладок мы приводить не будем, результаты их изображены графически на рис. 31 с помощью

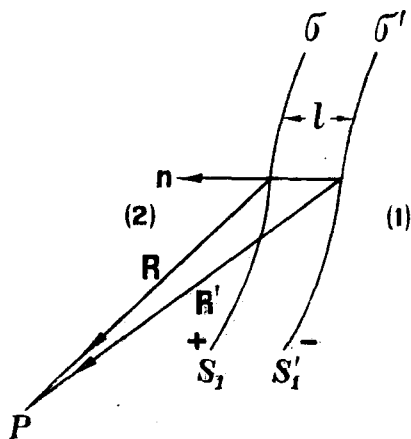


Рис. 32.

силовых линий. Конечно внутри проводника поле равно нулю, так что в левом полупространстве поле зарядов $+e$ и $-e$ (пунктирные линии) не совпадает с полем заряда e и проводника.

Приведенный пример представляет собой частный случай применения общего „метода изображений“, на изложении которого мы здесь останавливаться не можем.

§ 15. Двойной электрический слой. — Результаты этого параграфа понадобятся нам лишь в связи с рассмотрением двойных магнитных слоев или листов в главе IV, так что чтение этого параграфа можно отложить до § 35.

Пусть две весьма близких и параллельных друг другу поверхности S_1 и S_1' (рис. 32) заряжены электричеством противоположного знака и притом так, что плотности зарядов σ и σ' на противолежащих элементах обеих поверхностей равны по величине и противоположны по знаку ($\sigma = -\sigma'$); положим для определенности, что $\sigma > 0$. Если расстояние между S_1 и S_1' исчезающе мало по сравнению с расстоя-

нием этих поверхностей до рассматриваемых точек поля, то совокупность поверхностей S_1 и S_1' называется двойным электрическим слоем. Потенциал этого слоя в некоторой точке поля P согласно (76) будет равен:

$$\varphi = \int_{S_1} \frac{\sigma dS}{R} + \int_{S_1'} \frac{\sigma' dS}{R'} = \int_{S_1} \sigma \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right) dS,$$

где R и R' суть соответственно расстояния точки P от элемента dS положительно заряженной поверхности S_1 и от противолежащего ему элемента отрицательной поверхности S_1' . Но $\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right)$ есть приращение численной величины радиуса вектора \mathbf{R} , проведенного от рассматриваемого элемента двойного слоя в точку P , при перемещении начальной точки этого вектора от отрицательной поверхности к положительной. Пусть \mathbf{n} есть направление нормали к двойному слою, направленной от отрицательной его стороны к положительной, и пусть l есть толщина слоя (расстояние между S_1 и S_1'). Повторяя рассуждения, приведшие нас в § 10 к формуле (50), убедимся, что

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = \mathbf{n} \operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right) = - \mathbf{n} \operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R'} \right).$$

Внося это в предшествующее уравнение и вводя обозначение:

$$\tau = \sigma l, \tag{80}$$

получим:

$$\varphi = - \int_{S_1} \tau \operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right) \cdot dS. \tag{81}$$

Таково окончательное выражение потенциала двойного слоя¹, в котором предполагается, что радиус вектор \mathbf{R} проведен от слоя в исследуемую точку поля P . Величина τ , равная произведению плотности заряда поверхностей слоя на толщину слоя, называется мощностью или моментом слоя; мы будем пользоваться первым термином, сохраняя второй для обозначения другого понятия (§ 35).

¹ Очевидно, что двойной электрический слой можно рассматривать как совокупность параллельных нормалей и диполей длины l , заряды которых располагаются по поверхности слоя с плотностью σ (сравни уравнение 50).

Если мощность слоя τ постоянна на всем его протяжении — такой слой называется однородным — то потенциал его φ принимает вид:

$$\varphi = -\tau \int_{S_1} \mathbf{n} \operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right) dS. \quad 81'$$

Это выражение допускает чрезвычайно простое геометрическое истолкование. На основании (49') подынтегральное выражение можно представить в виде:

$$-\mathbf{n} \operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right) dS = \frac{\mathbf{nR}}{R^3} dS = \frac{1}{R^2} \cos(\mathbf{R}, \mathbf{n}) dS.$$

Из сравнения выражений (9) и (10) (стр. 12 и 13), следует, что по крайней мере по абсолютной величине

$$\frac{1}{R^2} \cos(\mathbf{R}, \mathbf{n}) dS = d\Omega,$$

где $d\Omega$ есть тот телесный угол, под которым элемент двойного слоя dS виден из точки P . Что же касается знака, то в рассматриваемом случае, в отличие от § 3, \mathbf{R} считается направленным от элемента dS к точке P ; стало быть, $\cos(\mathbf{R}, \mathbf{n})$ будет положительным, если из точки P видна положительная сторона элемента двойного слоя dS , и отрицательным в обратном случае (ибо \mathbf{n} направлено по условию от отрицательной к положительной поверхности слоя). Условимся считать телесный угол $d\Omega$ положительным, если из P видна положительная сторона элемента dS , и отрицательным в обратном случае. Тогда уравнение (81') можно будет записать следующим образом:

$$\varphi = \tau \int_{S_1} d\Omega = \tau \Omega, \quad 82$$

где под Ω нужно понимать алгебраическую сумму телесных углов, под которым видны элементы поверхности двойного слоя из точки P . Если все эти элементы поверхности видны из P с одной и той же, например положительной, стороны, то абсолютная величина Ω равна очевидно тому телесному углу, под которым виден из P весь двойной слой, или, что то же самое, под которым виден из P контур этого слоя. Если же весь слой в целом этому условию не удовлетворяет, то его всегда можно разложить на несколько частей, этому условию удовлетворяющих. Ввиду этого содержание уравнения (82) можно

выразить следующим образом: потенциал однородного двойного слоя в точке P равен произведению мощности слоя τ на взятый с надлежащим знаком телесный угол Ω , под которым виден из P контур этого слоя.

Особенно просто выражается потенциал замкнутого двойного слоя (напр., слоя, расположенного по поверхности сферы). Как было показано в § 3, всякая замкнутая поверхность видна под углом $\pm 4\pi$ из всех точек, лежащих внутри этой поверхности, и под углом 0 из всех внешних точек (см. в частности рис. 7). Стало быть, потенциал замкнутого двойного слоя равен нулю во всем внешнем пространстве и равен $\pm 4\pi\tau$ во всех точках, охватываемых слоем; знак потенциала зависит от того, какая сторона слоя (положительная или отрицательная) обращена вовнутрь. Таким образом напряженность поля замкнутого слоя равна нулю (ибо $\text{grad}\varphi = 0$); потенциал же поля испытывает при прохождении через поверхность слоя скачок $4\pi\tau$.

Существенно, что точно такой же скачок $4\pi\tau$ испытывает и потенциал любого незамкнутого слоя при прохождении через его поверхность. Чтобы убедиться в этом, дополним мысленно рассматриваемый слой до полной замкнутости вторым слоем равной мощности. При бесконечно малом перемещении точки наблюдения с одной стороны исходного слоя на другую потенциал находящегося на конечном расстоянии дополнительного слоя остается практически постоянным, тогда как потенциал замкнутого слоя в целом (исходный слой плюс дополнительный) изменяется на $4\pi\tau$. Стало быть, скачок этот равен скачку потенциала исходного слоя.

Итак, потенциал всякого (как замкнутого, так и незамкнутого) двойного слоя испытывает на его поверхности скачок $4\pi\tau$; очевидно, что скачок этот направлен от отрицательной стороны слоя к положительной, т. е. что потенциал слоя возрастает при прохождении через слой по направлению положительной нормали n . Иными словами, двойной слой является поверхностью разрыва сплошности потенциала, так что если φ_1 есть значение потенциала у отрицательной, а φ_2 — у положительной стороны слоя, то

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi\tau.$$

83

Строго говоря, говорить о скачке потенциала и поверхности разрыва можно лишь в отношении бесконечно тонких двойных слоев; толщиной же реальных электрических слоев можно пренебрегать лишь на достаточно больших расстояниях от них. Однако, если толщина слоя мала по сравнению с требуемой точностью измерения

расстояний, то в ряде случаев удобно пользоваться представлением о бесконечно тонком слое несмотря на то, что, как указывалось на стр. 77, напряженность поля на поверхностях разрыва потенциала обращается в бесконечность, т. е. теряет физический смысл. Пользуясь результатами следующего параграфа можно кроме того показать (что мы предоставляем сделать читателю), что электрическая энергия двойного слоя в пределе, при бесконечно малой его толщине, тоже стремится к бесконечности.

Впрочем мы в дальнейшем вовсе не будем пользоваться представлением о двойном электрическом слое и соответственно этому будем всегда предполагать, что непрерывность электрического потенциала φ нигде не нарушается. Теория же двойного электрического слоя изложена нами здесь лишь для того, чтобы подготовить изучение двойных магнитных слоев в § 35.

Заметим, что потенциал двойного слоя может быть непосредственно определен из формулы (73). Если S_1 есть поверхность разрыва сплошности потенциала, то первый член правой части этой формулы:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{R} \right) dS = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} (\varphi_2 - \varphi_1) n \operatorname{grad}_q \left(\frac{1}{R} \right) dS$$

не обращается в нуль. Обозначив согласно (83) скачок потенциала через 4π и приняв во внимание, что

$$\operatorname{grad}_q \left(\frac{1}{R} \right) = - \operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right),$$

мы непосредственно приходим к формуле (81).

Заметим далее, что на каждой из заряженных поверхностей, составляющих в совокупности двойной слой, производная $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ испытывает согласно (74') скачек $\pm 4\pi$. Однако скачки эти равны по величине и противоположны по знаку, так что при переходе с одной стороны слоя на другую $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, а вместе с тем и E_n , остаются непрерывными.

Упомянем в заключении в качестве примера об одном случае, когда пользование понятием двойного электрического слоя может оказаться удобным.

При прохождении тока через электролит при известных условиях (зависящих от материала электрода, химической природы электролита и т. д.) наблюдаются явления так называемой поляризации электродов (не смешивать с поляризацией диэлектриков, о которой будет идти речь в следующей главе!): сила проходящего через

электролит тока при неизменной разности потенциалов, приложенной извне к электродам, с течением времени уменьшается и может упасть практически до нуля. Явление это можно истолковать следующим образом. Предположим, что ионы, являющиеся носителями тока в электролите, например анионы (отрицательные ионы), подойдя к притягивающему их положительному электроду не отдают ему своего заряда, как это бывает обычно, а лишь располагаются слоем у поверхности этого электрода. Этому слою заряженных отрицательных ионов будет противостоять слой положительных зарядов на поверхности положительного электрода (см. рис. 33). Таким образом у этой поверхности образуется двойной электрический слой, заряд и мощность которого будут расти до тех пор, пока скачок потенциала $\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi$ в этом слое не станет равным приложенной извне разности потенциалов. Тогда ток через раствор превратится, ибо все изменение потенциала будет сосредоточено лишь в тонком двойном слое у положительного электрода, во всей же остальной толще раствора потенциал примет постоянное значение и напряженность поля E станет равной нулю (электростатическое равновесие). На нижней части рис. 33 нанесены значения потенциала на различных расстояниях от электродов до образования двойного слоя (ординаты сплошной кривой) и после его образования (пунктирная кривая).

Таким образом образование двойного слоя может обусловить поляризацию электродов. Впрочем это явление может обуславливаться также и рядом причин совершенно иного рода.

§ 16. Энергия электрического поля.

Для создания электрического поля нужна затрата известной энергии — химической (гальванический элемент, аккумулятор), механической (электризация трением, динамомашин) и т. д. Затраченная энергия, конечно, исчезнуть не может и должна переходить в некоторую иную форму энергии — мы говорим, что она переходит в энергию электрического поля, или просто в электрическую энергию. При исчезновении поля (например, при разряде заряженных проводников) электрическая энергия эта как таковая исчезает, переходя в энергию тепловую (нагревание проводников током), механическую (электромотор) и т. д.

1. Подсчитаем, в качестве первого простейшего примера, электрическую энергию заряженного конденсатора емкости C . До зарядки конденсатора каждая из его обкладок электрически нейтральна, т. е. содержит в себе равное количество положительного и отрицательного электричества. Будем заряжать конденсатор, отнимая электричество определен-

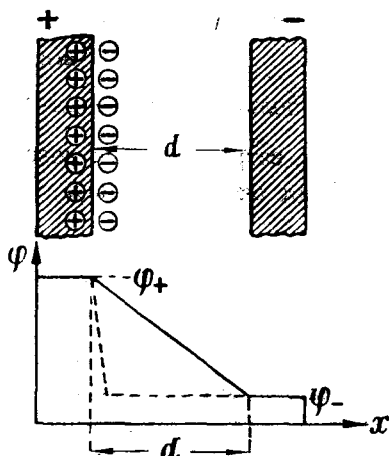


Рис. 33.

ного знака от одного из его обкладок и переноса его на другую. Практически это осуществляется, как известно, соединением пластин конденсатора проводом, в который включен источник электродвижущей силы, например, гальванический элемент: элемент этот перекачивает электричество из одной обкладки в другую, пока разность потенциалов этих обкладок не достигнет известной величины. Пусть в некоторый момент этого процесса потенциалы обкладок достигли значений φ_1 и φ_2 , причем $\varphi_2 > \varphi_1$. Перенос следующей порции электричества de с первой обкладки на вторую сопровождается отрицательной работой сил электрического поля, равной $dA = de(\varphi_1 - \varphi_2)$ (см. § 8). Очевидно, что „внешние“ по отношению к полю конденсатора электродвижущие силы элемента, преодолевающие силы этого поля, совершат при этом положительную работу:

$$dA_{\text{внш}} = -dA = de(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Воспользовавшись формулой (42), получаем: $dA_{\text{внш}} = \frac{ede}{C}$. Общая же работа, затраченная на доведение заряда пластин от нуля, скажем до e' , будет очевидно равна:

$$A_{\text{внш}} = \int_{e=0}^{e=e'} \frac{ede}{C} = \frac{e'^2}{2C}.$$

Работа эта совершается за счет уменьшения химической энергии гальванического элемента и переходит в энергию электрического поля заряженного конденсатора. Обозначая эту последнюю энергию через W и принимая во внимание (42), получим ряд следующих выражений для W :

$$W = A_{\text{внш}} = \frac{e^2}{2C} = \frac{1}{2} C(\varphi_2 - \varphi_1)^2 = \frac{e(\varphi_2 - \varphi_1)}{2}, \quad 84$$

где знак акцента у e нами опущен.

2. В качестве второго примера подсчитаем энергию двух точечных зарядов e_1 и e_2 , находящихся на расстоянии R_{12} друг от друга. Всякое изменение взаимного расстояния зарядов сопровождается работой электрических сил. Предположим например, что заряд e_2 остается неподвижным, тогда как заряд e_1 перемещается в поле заряда e_2 из точки P_1 в точку P_1' . Если $\varphi_1 = \frac{e_2}{R_{12}}$ есть значение потенциала поля заряда e_2 в точке P_1 , а $\varphi_1 + d\varphi_1$ — его значение в точке P_1' , то работа электрических сил при этом перемещении равна:

$$A = -e_1 d\varphi_1.$$

Работа эта может очевидно совершаться лишь за счет убыли электрической энергии W этих зарядов. Стало быть

$$A = -dW = -e_1 d\varphi_1,$$

откуда
$$W = e_1 \varphi_1 = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}. \quad 85$$

Ввиду того, что наблюдению доступны лишь изменения энергии, а не ее абсолютная величина, мы для простоты опустили [здесь аддитивную постоянную интегрирования, от взаимного расположения зарядов независимую (сравни сказанное о собственной энергии зарядов в конце этого параграфа)]. В связи с этим мы, однако, должны быть готовы к тому, что единственно учитываемая нами переменная часть энергии W может принимать и отрицательные значения¹.

К тому же выражению для W пришли бы мы, конечно, рассматривая перемещение заряда e_2 в поле неподвижного заряда e_1 или, наконец, одновременное перемещение обоих зарядов.

Обозначая через φ_2 потенциал заряда e_1 в точке, занимаемой зарядом e_2 ($\varphi_2 = \frac{e_1}{R_{12}}$), можем вместо (85) написать:

$$W = \frac{e_1 e_2}{R_{12}} = e_2 \varphi_2.$$

Удобнее же всего [взаимную электрическую энергию зарядов e_1 и e_2 записать в симметричной форме:

$$W = \frac{1}{2} (e_1 \varphi_1 + e_2 \varphi_2). \quad 85'$$

3. Чтобы определить энергию системы n точечных зарядов e_i ($i = 1, 2, \dots, n$) мы очевидно для каждой пары этих зарядов должны написать выражения типа (85') или (85) и сложить все эти выражения. Собирая затем все члены, в которые входит сомножитель e_k , убедимся, что коэффициент при e_k , который мы обозначим через $\frac{1}{2} \varphi_k$, будет равен:

$$\frac{1}{2} \varphi_k = \frac{1}{2} (\varphi_{k1} + \varphi_{k2} + \dots + \varphi_{k, k-1} + \varphi_{k, k+1} + \dots + \varphi_{kn}),$$

где φ_{ki} есть потенциал заряда e_i в точке, занимаемой зарядом e_k .

¹ Если заряды e_1 и e_2 имеют противоположные знаки.

Выражение в скобках представляет собой очевидно значение потенциала поля всей системы зарядов в точке, занимаемой зарядом e_k или, вернее, потенциал всей системы зарядов кроме самого заряда e_k (потенциал φ_{kk} заряда e_k в занимаемой им самой точке поля в выражение для φ_k не входит, да и вообще физического смысла не имеет, ибо обращается в бесконечность). Итак, взаимная энергия системы n зарядов равна:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} e_k \varphi_k, \quad 86$$

где φ_k есть потенциал поля в точке, занимаемой зарядом e_k .

Чтобы выявить зависимость W от взаимного расстояния зарядов воспользуемся формулой (38), которая в наших теперешних обозначениях запишется следующим образом:

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{R_{ki}} \quad (i \neq k),$$

где суммирование должно быть распространено по всем индексам i кроме $i = k$. Внося это в (86) получим:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^n \frac{e_k e_i}{R_{ki}} \quad (i \neq k). \quad 86'$$

Формулу эту можно конечно получить и непосредственно из выражения (85) взаимной энергии пары зарядов. Появление же коэффициента $\frac{1}{2}$ перед знаком суммы объясняется тем, что в сумму эту энергия каждой пары зарядов входит дважды; так например в ней встретится как член $\frac{e_1 e_2}{R_{12}}$, так и равный ему член $\frac{e_2 e_1}{R_{21}}$.

Как и всегда при пользовании представлением о точечных зарядах, нужно помнить, что приведенные формулы могут применяться лишь в тех случаях, когда заряды системы отделены друг от друга расстояниями, достаточно большими по сравнению с размерами этих зарядов. Чтобы освободиться от этого ограничения перейдем к рассмотрению объемных и поверхностных зарядов. Разлагая систему этих зарядов на совокупность элементарных зарядов ρdV и σdV , применяя к по-

следним формулу (86') и переходя от суммирования к интегрированию, получим:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int \sigma \varphi dS, \quad (87)$$

где φ есть значение потенциала поля всех объемных и поверхностных зарядов в элементе объема dV или элементе поверхности dS .

4. Хотя и может казаться, что ур-ие (87) представляет собой только видоизменение ур-ия (86), соответствующее замене представления о точечных зарядах представлением о зарядах объемных и поверхностных, однако в действительности уравнения эти разнятся по своему содержанию, так что значения электрической энергии W , определяемые с одной стороны ур-ием (86), а с другой ур-ием (87), существенно отличаются друг от друга. К этому вопросу мы еще возвратимся в дальнейшем, пока же перейдем к выполнению над ур-ием (87) чрезвычайно важного преобразования.

Чтобы подготовить это преобразование положим в теореме Грина (70) $\psi = \varphi$. Приняв во внимание, что $\nabla \varphi = \text{grad} \varphi = -E$ и что $\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho$, получим:

$$\int_V (-\varphi \cdot 4\pi\rho + E^2) dV = \oint_{S+S'} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS,$$

где поверхностный интеграл должен быть распространен, во-первых, по поверхности S_1 , ограничивающей извне объем интегрирования V , и, во-вторых, по поверхности S_1' , выделяющей из этого объема могущие лежать в нем заряженные поверхности S_1 , т. е. поверхности разрыва градиента φ (сравни § 13). Что же касается потенциала φ , то по соображениям, изложенным на стр. 77, мы считаем его всюду непрерывным, т. е. отказываемся от рассмотрения двойных электрических слоев.

Как и при выводе формулы (72'), будем стягивать поверхности S_1' вплоть до совпадения их с поверхностями разрыва S_1 ; повторяя прежние рассуждения и пользуясь обозначениями § 13, получим, полагая $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$:

$$\begin{aligned} \lim_{S_1' \rightarrow S_1} \oint_{S_1'} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS &= \int_{S_1} \left\{ \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 + \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2 \right\} dS = \\ &= - \int_{S_1} \varphi \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N} \right)_2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N} \right)_1 \right\} dS, \end{aligned}$$

или, ввиду (74),

$$\lim_{S_1' \rightarrow S_1} \oint_{S_1'} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 4\pi \int_{S_1} \varphi \sigma dS.$$

Внося это выражение в предшествующее уравнение, мы после разделения обеих его частей на 8π и перестановки членов получим:

$$\frac{1}{8\pi} \int_V E^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int_{S_1} \sigma \varphi dS + \frac{1}{4\pi} \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \quad 88.$$

Первые два члена правой части этого равенства аналогичны выражению (87) энергии W , однако интегрирование распространено в данном случае не по всем находящимся в поле зарядам, а лишь по тем из них, которые находятся внутри объема V . Сумма этих членов не совпадает со взаимной энергией зарядов, находящихся внутри V , ибо значение потенциала φ зависит также и от расположения зарядов вне V .

Предположим, однако, что интегрирование распространено по полному полю; под этим выражением понимается, что а) область интегрирования V охватывает все взаимодействующие заряды и б) что граница этой области S проходит вне поля, т. е. что напряженность поля $E = -\text{grad}\varphi$ на поверхности S равна нулю. В этом случае последний член правой части формулы (88) обращается в нуль, первые же два становятся равными полной энергии поля W ; стало быть, для полного поля (88) принимает вид:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int \sigma \varphi dS = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV.$$

Заметим при этом, что граница S нашего поля может в отдельных случаях лежать на конечном расстоянии от системы зарядов; так например, граница полного поля зарядов, заключенных в металлической оболочке (рис. 22), проходит внутри этой оболочки. Вообще же говоря под полным полем нужно и можно понимать все безграничное пространство, ибо при удалении граничной поверхности S в бесконечность подинтегральное выражение последнего члена формулы (88) убывает согласно (75) не медленнее, чем $\frac{1}{R^3}$, тогда как поверхность интегрирования S растет пропорционально R^2 ; поэтому при $R \rightarrow \infty$ этот член обращается в нуль. В целом ряде дальнейших выводов мы подобного рода рассуждений, уже встречавшихся нам в § 13, повторять не будем, а будем кратко ссылаться на тот факт, что интеграл по огра-

ничивающей полное поле поверхности S обращается в нуль.

5. Итак, электрическая энергия полного поля равна:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV. \quad 89$$

С математической точки зрения это уравнение представляет собою лишь преобразованную форму уравнения (87) и совершенно ему эквивалентно. Однако формально математическое преобразование уравнений весьма часто открывает возможность совершенно новой физической интерпретации выражаемых ими соотношений. Уравнение (89) выражает электрическую энергию в виде бесконечной суммы слагаемых, каждое из которых равняется $\frac{1}{8\pi} E^2 dV$ и относится к определенному элементу объема dV . Поэтому в уравнение это можно вложить следующий физической смысл: носителем электрической энергии является электрическое поле, причем энергия поля локализована в пространстве так, что в каждой единице объема содержится количество энергии w , равное

$$w = \frac{1}{8\pi} E^2, \quad 89'$$

где E есть напряженность электрического поля в данном элементе объема. Величина w может быть названа объемной плотностью электрической энергии.

Напротив, уравнения (86) и (86') могут быть непосредственно истолкованы в том смысле, что электрическая энергия есть энергия взаимодействия электрических зарядов, и притом взаимодействия на расстоянии (*actio in distans*, дальное действие); так например, уравнение (86') выражает общую энергию системы зарядов в виде суммы энергий взаимодействия каждой пары из них. Очевидно, что при таком истолковании отбрасывается всякая возможность локализации энергии в определенных участках пространства.

Создатели теории электромагнитного поля Фарадей и Максвелл вкладывали в уравнения (89) и (89') совершенно конкретное физическое содержание. С точки зрения созданной ими механистической теории эл.-магн. явлений возбуждение электрического поля сводится к возникновению деформаций гипотетической упругой среды — эфира; электрический вектор E есть мера этой деформации, а энергия электрического поля есть не что иное, как упругая энергия деформированного эфира. Как известно из теории упругости, в каждом элементе

объема деформированного тела заключается определенное количество упругой энергии, пропорциональное квадрату величины деформации этого элемента. Стало быть объемная плотность упругой энергии эфира в электрическом поле должна быть пропорциональной квадрату напряженности поля E , что вполне согласуется с (89').

В настоящее время можно считать установленным, что подобное механистическое истолкование электрических явлений не выдерживает критики фактов. Однако самое представление о локализации электрической энергии в пространстве с объемной плотностью w , иными словами представление о том, что электрическая энергия есть энергия электрического поля, сделалось прочным достоянием науки. Конечно благодаря полной математической эквивалентности уравнений (87) и (89), оба эти уравнения, а стало быть и оба приведенные истолкования их, одинаково хорошо согласуются с данными опыта. Однако эквивалентность этих уравнений имеет место лишь в электростатическом поле. Перейдя к изучению переменных электромагнитных полей, и, в частности, к изучению электромагнитных волн, мы познакомимся с явлениями, которые могут быть истолкованы лишь на основе допущения о локализации энергии в электромагнитном поле.

6. Вернемся теперь к вопросу о различном содержании уравнений (86) и (86') с одной стороны, и уравнений (87) и (89) с другой. Что эти уравнения разнятся по своему содержанию явствует хотя бы из того обстоятельства, что энергия W , определяемая уравнением (89), не может принимать отрицательных значений (ибо $E^2 > 0$), тогда как согласно (86') энергия взаимодействия двух точечных зарядов $\frac{e_1 e_2}{R_{12}}$ отрицательна, если заряды эти разноименны. Объясняется это тем, что в уравнениях (86) и (86') учитывается лишь взаимодействие ряда „точечных“ зарядов, но не взаимодействие отдельных элементов каждого такого заряда между собой. Действительно, если мы имеем дело, например, лишь с одним единственным „точечным“ зарядом e_1 , то выражения (86) и (86') обратятся в нуль, тогда как выражения (87) и (89) будут иметь отличное от нуля и притом положительное значение, равное так называемой „собственной энергии“ заряда e_1 . В том, что эта собственная энергия всегда положительна, можно убедиться либо непосредственно из уравнения (89), либо из того обстоятельства, что приписывая заряду e некоторый объем, разбивая его на элементы de , и вычисляя энергию взаимодействия этих элементов, мы получим сумму положительных выражений типа $\frac{de_i de_k}{R_{ik}}$ (ибо все элементы одного и того же заряда имеют одинаковый

знак). Собственная энергия заряда зависит конечно от его размеров и равна той работе, которую совершили бы силы взаимного отталкивания между элементами заряда, если бы эти элементы разлетелись в стороны и удалились в бесконечность.

Рассмотрим в заключение полную (т. е. собственную и взаимную) энергию двух зарядов e_1 и e_2 . Пусть каждый из этих зарядов в отдельности возбуждает соответственно поле E_1 и E_2 , так что результирующее поле E обоих зарядов равно:

$$E = E_1 + E_2$$

и

$$E^2 = (E_1 + E_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2(E_1 E_2).$$

Полная энергия зарядов e_1 и e_2 согласно (89) будет равна

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int E_1^2 dV + \frac{1}{8\pi} \int E_2^2 dV + \frac{1}{8\pi} \int 2(E_1 E_2) dV$$

или

$$W = W_{11} + W_{22} + W_{12}, \quad 90'$$

где

$$W_{11} = \frac{1}{8\pi} \int E_1^2 dV \quad \text{и} \quad W_{22} = \frac{1}{8\pi} \int E_2^2 dV \quad 90''$$

суть собственные энергии зарядов e_1 и e_2 , а

$$W_{12} = \frac{1}{8\pi} \int 2(E_1 E_2) dV \quad 90'''$$

есть их взаимная энергия. Из

$$(E_1 - E_2)^2 \geq 0$$

следует

$$E_1^2 + E_2^2 \geq 2(E_1 E_2),$$

так что

$$W_{11} + W_{22} \geq W_{12}.$$

Таким образом положительная собственная энергия зарядов всегда больше (или в крайнем случае равна) их взаимной энергии, могущей иметь как положительные, так и отрицательные значения.

Справедливость этого положения явствует впрочем и непосредственно из того обстоятельства, что собственная энергия заряда соответствует взаимодействию его собственных элементов, среднее расстояние

которых друг от друга меньше, чем расстояние их до элементов другого заряда.

При всех возможных перемещениях зарядов, не нарушающих их формы и размеров, собственная энергия зарядов остается постоянной. Поэтому при этих перемещениях члены W_{11} и W_{22} можно считать аддитивными постоянными в выражении энергии W , изменения которой всецело определяются изменением взаимной энергии зарядов W_{12} . При достаточно больших расстояниях между зарядами выражение (90'') для W_{12} сводится очевидно к выражению (85) (см. задачу 15, стр. 98).

Чрезвычайно важно отметить, что энергия электрического поля, не обладает свойством аддитивности, т. е. что энергия поля E , являющегося суммой двух полей E_1 и E_2 , вообще говоря не равна сумме энергий слагаемых полей (если только W_{12} не равно нулю). В частности при возрастании напряженности поля в n раз энергия поля возрастает в n^2 раз.

Пример I. *Полная электрическая энергия системы заряженных проводников.* — Пусть в поле расположено n проводников; обозначим соответственно через S_i , φ_i и e_i поверхность, потенциал и общий заряд i -ого проводника. Предполагая, что все заряды расположены на поверхности проводников, так что $\rho=0$, и приняв во внимание, что потенциал каждого проводника постоянен на всем его протяжении, получим из (87):

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \sigma \varphi dS = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i \oint_{S_i} \sigma dS.$$

Интеграл σ по поверхности проводника равен его общему заряду e_i ; поэтому

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i \varphi_i. \quad 91$$

Эту формулу, выражающую полную энергию заряженных проводников, не нужно смешивать с вполне аналогичной формулой (85), выражающей взаимную энергию точечных зарядов. Заметим, что выражение (84) энергии конденсатора является частным случаем формулы (91)¹.

¹ Предлагаем читателю в качестве упражнения непосредственным вычислением убедиться на конкретных примерах плоского, цилиндрического и шарового конденсатора в тождестве значений энергии, получаемых по формуле (84) с одной стороны, и по формуле (89) с другой.

ПРИМЕР II. *Энергия точечного заряда и диполя во внешнем электрическом поле.* — Часто приходится рассматривать работу электрических сил при перемещениях некоторого заряда e в заданном „внешнем“ поле других зарядов, остающихся при этом неподвижными. Как взаимная энергия этих „внешних“ зарядов, так и собственная энергия их и заряда e остаются при этом неизменными; переменная же часть энергии поля, за счет которой совершается работа электрических сил, носит название „энергии заряда e во внешнем поле“. Она равна, очевидно,

$$W = e\varphi, \quad 92$$

где φ есть потенциал внешнего поля в точке, занимаемой зарядом e . Формула (85) представляет собой частный случай формулы (92).

Если во внешнем поле находятся два заряда $e > 0$ и $e' = -e$ (рис. 20), образующие диполь бесконечно малой длины l , то энергия этих зарядов во внешнем поле равна

$$W = e\varphi + e'\varphi' = e(\varphi - \varphi'),$$

где φ и φ' суть потенциалы внешнего поля в полюсах диполя. Не с точностью до величин второго порядка малости

$$\varphi = \varphi' + \frac{\partial\varphi}{\partial l}l = \varphi' + l \operatorname{grad} \varphi = \varphi' - lE.$$

Стало быть,

$$W = -elE = -pE, \quad 92'$$

где p есть момент диполя (см. ур. 41), а E — напряженность внешнего поля. Конечно, в этом выражении не учитывается взаимная энергия зарядов диполя, величина которой изменяется лишь при изменении длины диполя l .

Задача 14. — Показать, что (собственная) электрическая энергия заряженного шара радиуса a равна

$$W = \frac{e^2}{2a},$$

если заряд e распределен по поверхности шара (проводник), и что

$$W = \frac{3e^2}{5a},$$

если он равномерно распределен по всему объему шара.

Задача 15. Показать, что если расстояние между зарядами e_1 и e_2 достаточно велико по сравнению с их размерами (точечные заряды), то выражение (90'') взаимной энергии W_{12} этих зарядов сводится к выражениям (85) и (85').

§ 17. Пондеромоторные силы.—1. По данному в § 2 определению основная величина, характеризующая электрическое поле — его напряженность E — равна рассчитанной на единицу заряда пондеромоторной (механической) силе, действующей в данной точке поля на пробный заряд (заряженное тело). При этом нужно, конечно, иметь в виду, что сила, действующая на какой-либо заряд определяется, очевидно, напряженностью того поля, в которое помещен этот заряд, а не того поля, которое возбуждается им самим. Стало быть, говоря, например, что сила, действующая на точечный заряд e равна

$$F = eE$$

(сравни ур. 5), мы должны понимать под E напряженность поля, возбуждаемого всеми зарядами системы кроме самого заряда e .

В случае точечного заряда, это впрочем самоочевидно, ибо напряженность его поля в занимаемой им точке пространства обращается в бесконечность.

Вопрос о силе, действующей на поверхностные заряды, требует специального исследования. Ибо напряженность поля E имеет по обеим сторонам заряженной поверхности различные значения (ур. 20) и, стало быть, значение вектора E на самой поверхности остается неопределенным.

В случае одного единственного уединенного проводника все электрические силы сводятся ко взаимному отталкиванию элементов заряда этого проводника. Ввиду того, что взаимно отталкивающиеся элементы заряда не могут покинуть проводника, к поверхности проводника будут приложены пондеромоторные силы, стремящиеся ее растянуть¹. Подобного же рода силы будут очевидно приложены и к поверхности неуединенного проводника, помещенного в произвольное электростатическое поле. Чтобы определить величину этих сил рассмотрим некоторый элемент dS поверхности проводника. Напряженность поля с внешней стороны элемента dS , согласно (78), равна

$$E = 4\pi\sigma$$

¹ Если сообщить электрический заряд мыльному пузырю, то под влиянием этих сил отталкивания пузырь будет расширяться до тех пор, пока они не уравновесятся силами поверхностного натяжения и разницей давления воздуха внутри и вне пузыря.

(где σ — плотность его заряда) и направлена нормально к его поверхности; внутри же проводника $\mathbf{E} = 0$. Однако \mathbf{E} есть напряженность результирующего поля всех имеющихся зарядов, в том числе и заряда самого элемента dS :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{E}'',$$

где \mathbf{E}' есть поле элемента dS , а \mathbf{E}'' — поле остальных зарядов. В двух смежных точках, лежащих по разным сторонам элемента dS , поле этих зарядов будет, очевидно, одинаковым, поле же \mathbf{E}' будет иметь одинаковую величину E' , но различное направление (рис. 34).

Стало быть, с внешней стороны элемента dS $E = E' + E'' = 4\pi\sigma$, а с внутренней $E = E' - E'' = 0$, откуда $E' = E'' = 2\pi\sigma$.

Сила, испытываемая зарядом σdS элемента dS , определяется полем \mathbf{E}'' зарядов, лежащих вне этого элемента, и, стало быть, равна

$$E''\sigma dS = 2\pi\sigma^2 dS = \frac{1}{2} E\sigma dS.$$

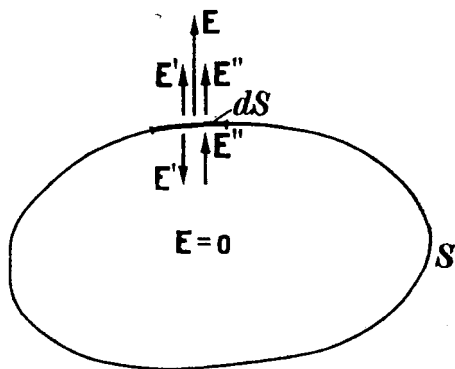


Рис. 34.

Таким образом на единицу поверхности проводника действует пондеромоторная сила f :

$$f = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{2} E\sigma = \frac{1}{8\pi} E^2, \quad 93$$

направленная по внешней нормали к этой поверхности. Эту величину f можно, очевидно, назвать поверхностной плотностью пондеромоторных сил.

Рассмотрим еще для полноты случай объемного распределения заряда с плотностью ρ , хотя в электростатическом поле в отсутствии диэлектриков этот случай неосуществим¹. Если электрические заряды неразрывно связаны с элементами dV объема некоторого тела так, что перемещение заряда ρdV возможно лишь при соответствующем перемещении элемента тела dV и обратно, то на каждый элемент этого тела будет действовать сила

$$\mathbf{F} = f dV = E\rho dV, \quad 93'$$

¹ За исключением неоднородных проводников, внутри которых действуют сторонние электродвижущие силы (см. § 28); на этом случае мы останавливаться не будем.

где E есть напряженность поля в элементе dV . Ибо хотя поле E складывается из поля зарядов, лежащих вне dV , и поля заряда самого элемента dV , однако, напряженность поля бесконечно малого объемного заряда ρdV бесконечно мала даже внутри самого этого заряда и стремится к нулю при беспредельном уменьшении его размеров. Проще всего убедиться в этом, приняв для простоты, что элемент dV имеет форму шара, так что поле его определяется формулой (18').

Из (93') следует, что объемная плотность пондеромоторных сил равна:

$$\boxed{f = \rho E.} \quad 93''$$

2. Хотя приведенные формулы и достаточны для определения пондеромоторных сил электрического поля, однако, часто оказывается более удобным определять величину этих сил путем рассмотрения изменений энергии поля. Перемещение тел в электрическом поле сопровождается, вообще говоря, как изменением энергии W этого поля, так и работой A пондеромоторных сил поля. Если при этом не происходит преобразования других форм энергии (тепловой, химической и т. д., см. ниже), то работа пондеромоторных сил A должна, очевидно, совершаться за счет изменения δW энергии поля, так что

$$0) \quad A = -\delta W. \quad 94$$

Исходя из этого соотношения, мы и определили в прошлом параграфе энергию поля W ; обратно, зная W , мы на основании (94) можем определить работу A , а, стало быть, и величину совершающих эту работу пондеромоторных сил.

В качестве простейшего примера определим этим способом силы взаимного притяжения пластин плоского конденсатора. Энергия этого конденсатора равна (см. ур. 84 и результаты решения задачи 8, стр. 48):

$$W = \frac{e^2}{2C} = \frac{2\pi e^2 d}{S}.$$

При раздвигании пластин, т. е. увеличении их расстояния d , совершается работа

$$A = -\delta W = -\frac{2\pi e^2}{S} \delta d.$$

С другой стороны, если f есть сила притяжения, испытываемая каждой единицей поверхности пластины конденсатора, а F — общая сила, действующая на всю поверхность пластины S , то

$$A = -F \cdot \delta d = -fS \cdot \delta d.$$

Приравнивая полученные выражения, найдем:

$$F = fS = \frac{2\pi e^2}{S} = 2\pi\sigma^2 \cdot S,$$

где σ есть плотность заряда на поверхности пластин, что вполне согласуется с (93).

В предыдущем мы неявным образом предполагали, что при смещении пластин конденсатора заряд их e остается постоянным. Мы получили бы совершенно иное значение величины δW предположив, что не заряд, а разность потенциалов пластин конденсатора $\varphi_2 - \varphi_1$ остается постоянной при их смещении. На основании (84) и (42) для конденсатора любой формы имеем:

$$\left. \begin{aligned} e = \text{const}; \quad \delta_e W &= \delta \left(\frac{e^2}{2C} \right) = -\frac{e^2}{2C^2} \delta C = -\frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \delta C; \\ \varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}; \quad \delta_\varphi W &= \delta \left\{ \frac{1}{2} C (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \right\} = \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \delta C; \end{aligned} \right\} \quad 95$$

т. е.

$$\delta_\varphi W = -\delta_e W = A.$$

Таким образом сопровождающие перемещение обкладок конденсатора изменения его электрической энергии при $e = \text{const}$ и при $\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$ равны по величине, но противоположны по знаку. Объясняется это тем, что разность потенциалов обкладок конденсаторов может оставаться неизменной при перемещениях этих обкладок (изменении емкости) лишь в том случае, если эта разность потенциалов поддерживается неизменной некоторыми сторонними электродвижущими силами неэлектростатического происхождения (§ 28), совершающими при изменении C некоторую добавочную работу. (Это имеет, например, место при присоединении обкладок конденсатора к полюсам гальванического элемента.) Действительно, ввиду соотношения (42):

$$e = (\varphi_2 - \varphi_1) C,$$

изменение емкости C при постоянном $\varphi_2 - \varphi_1$ должно сопровождаться изменением заряда конденсатора e :

$$\delta e = (\varphi_2 - \varphi_1) \delta C,$$

т. е. перенесением заряда δe с одной из обкладок конденсатора на другую. При прохождении этого заряда δe через включенный между обкладками конденсатора гальванический элемент, химическая энергия

этого элемента, как мы увидим в главе III, уменьшается, а электродвижущие силы элемента \mathcal{E} совершают работу $P = \mathcal{E} \lambda e$.

В разомкнутой цепи, состоящей из элемента и конденсатора, $\mathcal{E} = \varphi_2 - \varphi_1$ и, стало быть,

$$P = (\varphi_2 - \varphi_1) \delta e = (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \delta C$$

или, ввиду (95),

$$P = 2\delta_\varphi W = A + \delta_\varphi W. \quad 95'$$

Таким образом при $\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$ работа A пондеромоторных сил поля совершается не за счет энергии поля W , а за счет химической энергии гальванического элемента (или энергии другого источника сторонней электродвижущей силы). В частности, положительная работа пондеромоторных сил A сопровождается приращением электрической энергии W , происходящим также за счет энергии гальванического элемента.

Таким образом формула (94) справедлива лишь при условии, что перемещение тел в электрическом поле не сопровождается работой сторонних электродвижущих сил неэлектростатического происхождения. Кроме того условием применимости формулы (94) является, очевидно, достаточная медленность перемещения тел, а именно столь малая скорость перемещения, чтобы в каждый данный момент процесса электрическое состояние системы могло бы быть описано уравнениями электростатики (т. е. бесконечно мало отличалось бы от равновесного).

В следующей главе, основываясь на формуле (94), мы выведем из выражения энергии значение пондеромоторных сил в общем случае наличия произвольной диэлектрической среды.

§ 18. Неустойчивость электрических систем. Связи. — 1. Для электрической теории строения материи чрезвычайную важность представляет вопрос о возможности устойчивых конфигураций электрических зарядов. Если материя состоит из электрических зарядов — электронов и протонов, — и если система таких зарядов не может находиться в устойчивом статическом равновесии, то в атомах и молекулах всех тел заряды эти должны находиться в состоянии непрерывного движения.

Для наших целей достаточно будет доказать неустойчивость статической системы точечных зарядов, хотя соответствующие положения применимы и к зарядам объемным¹. Из формулы (94) следует,

¹ В частности, для того чтобы объяснить устойчивость самих электронов и протонов, необходимо допустить существование сил неэлектростатического происхождения, препятствующих разлетанию элементов этих зарядов под влиянием взаимного отталкивания.

что электрическая энергия W системы зарядов играет роль потенциальной энергии этой системы, ибо убыль энергии W равна работе, совершаемой силами поля. На основании общих положений механики условием устойчивого равновесия является минимум потенциальной энергии, стало быть, в данном случае минимум электрической энергии W . Энергия системы точечных зарядов, согласно (86'), равна

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{e_i e_k}{R_{ik}}, \quad i \neq k$$

и является функцией координат x_i, y_i, z_i всех зарядов системы e_i , ибо

$$R_{ik} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}.$$

Для того, чтобы функция W обладала минимумом, необходимо, во-первых, чтобы первые производные W по всем координатам всех зарядов обращались в нуль, и, во-вторых, чтобы вторые производные от W по координатам x_h, y_h, z_h были положительны¹:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_h^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y_h^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial z_h^2} > 0 \quad \text{для любого } h.$$

Но

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_h^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y_h^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z_h^2} = \nabla_h^2 W = \frac{1}{2} \sum_{i,k} e_i e_k \nabla_h^2 \left(\frac{1}{R_{ik}} \right),$$

где ∇_h означает дифференциальный оператор, соответствующий пространственному дифференцированию по координатам x_h, y_h, z_h заряда e_h :

$$\nabla_h = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_h} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y_h} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z_h}$$

(сравни ур. 60). Очевидно, что при $h \neq i$ и $h \neq k$

$$\nabla_h^2 \left(\frac{1}{R_{ik}} \right) = 0;$$

если же $h = i$, либо если $h = k$, то это соотношение все же остается справедливым в виду (59). А раз так, то

$$\nabla_h^2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial x_h^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y_h^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z_h^2} = 0.$$

¹ Условия, которым должны удовлетворять производные типа $\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_k}$ и $\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial y_i}$, нас здесь не интересуют.

Таким образом требование, чтобы все вторые производные W по координатам были положительными, невыполнимо, энергия W не может обладать минимумом и, стало быть, устойчивая статическая конфигурация электрических зарядов невозможна. Это положение носит название теоремы Ирншоу (Earens Shaw¹).

Физический смысл этой теоремы станет ясным, если мы вспомним, что одноименные заряды притягиваются с возрастающей силой вплоть до совпадения друг с другом, т. е. вплоть до взаимной нейтрализации или уничтожения, разноименные же отталкиваются вплоть до удаления в бесконечность.

2. Можно считать твердо установленным экспериментально, что расстояние между частицами электричества (электронами и положительными ядрами)², входящими в состав атомов материальных тел, весьма велико (порядка 10^{-8} см) по сравнению с размерами самих частиц (не свыше $5 \cdot 10^{-12}$ см). Поэтому каждый атом можно считать системой точечных зарядов, к которой применима приведенная формулировка теоремы Ирншоу. Так как с другой стороны атомы химических элементов представляют собой несомненно устойчивые системы, то следовательно построение материи из электрических частиц в пределах электростатики невозможно и атом должен представлять собой динамическую систему. Соответствующее этому выводу представление об устойчивом периодическом (или квази-периодическом) движении электрических частиц в недрах атомов лежит в основе современной теории материи и находит себе подтверждение в целом ряде физических явлений³. Правда, представление это связано со значительными принципиальными трудностями, ибо ускоренное движение электрических зарядов согласно законам электродинамики неразрывно связано с излучением электро-

¹ Основываясь на том, что электрический потенциал φ во всех свободных от зарядов участках поля удовлетворяет уравнению Лапласа (56'), можно совершенно аналогичным образом показать, что во всех этих участках поля значения потенциала φ не могут обладать ни максимумом, ни минимумом.

² В сущности ядра атомов (за исключением ядра водорода) состоят в свою очередь из нескольких протонов и электронов; однако в виду малости размеров этих ядер (не свыше $5 \cdot 10^{-12}$ см) каждое такое сложное ядро в целом можно рассматривать как одну электрическую частицу.

³ Доказательство теоремы Earens Shaw основывается в сущности лишь на обратной пропорциональности квадрату расстояния сил взаимодействия между точками системы, так что теорема эта применима и к материальным точкам, тяготеющим по закону Ньютона (солнечная система). Устойчивость солнечной системы также обеспечивается лишь движением планет.

магнитной энергии (волн), т. е. не может быть устойчивым. Однако это противоречие повело не к отказу от динамической модели атома, а к отказу от классической электродинамики в пользу устраняющей это противоречие теории квантов.

Можно было бы искать выход из указанного противоречия в предположении, что закон Кулона перестает быть применимым к элементарным зарядам, находящимся на чрезвычайно малых расстояниях друг от друга, и что таким образом теорема Ирншоу к внутриатомным зарядам неприменима. Однако ряд экспериментальных исследований (в особенности изучение рассеяния α -лучей при прохождении их через материю) показали, что Кулонов закон взаимодействия точечных зарядов остается справедливым даже при сближении электрических частиц до расстояний порядка 10^{-12} см, тогда как нормальное расстояние этих частиц в атомах соответствует примерно 10^{-8} см. Наконец те же исследования доказали несостоятельность статической модели атома Дж. Дж. Томсона, о которой будет упомянуто в следующем параграфе.

3. Обратимся к макроскопической теории электростатических явлений, составляющей основной предмет изложения настоящей главы. Согласно теореме Earnshaw чисто электростатические системы не могут быть устойчивыми. Чтобы избежать, однако, рассмотрения скрытого движения элементарных зарядов, макроскопическая электростатическая теория пользуется формальным представлением о добавочных силах или связях неэлектростатического происхождения, обеспечивающих требуемую устойчивость заряженных систем. В этом отношении существует полная аналогия электростатики с механикой, широко пользующейся представлениями о связях, осуществляемых с помощью опор, закрепленных в бесей, нерастяжимых нитей и т. д. Конечно, подобно тому как при дальнейшем изложении механики раскрывается физический механизм связей (силы упругости), так и перед дальнейшим развитием теории электричества встает задача раскрыть физический смысл формально введенных сил связей неэлектростатического происхождения.

В пределах электростатики достаточно близкое первое приближение к действительности может быть достигнуто введением в рассмотрение двух основных родов связей, соответствующих, во-первых, идеальным проводникам и, во-вторых, идеальным диэлектрикам. Что касается проводников, то явно не упоминая об этом мы фактически пользовались во всем предыдущем допущением, что на поверхности проводников существуют некоторые силы неэлектростатического происхождения, препятствующие выходу зарядов за поверхность проводника. Действительно, только эти силы обеспечивают устойчивость системы заряженных проводников; в противном случае наличие, например, уединенного заряженного проводника было бы невозможным —

элементы его заряда под влиянием взаимного отталкивания разлетелись бы в стороны и удалились в бесконечность. Впрочем в предшествующем параграфе эти силы связи были нами учтены при выводе пондеромоторных сил, действующих в электрическом поле на поверхность проводников; пользуясь терминологией механики, мы можем назвать эти силы реакциями связей.

Свойствам диэлектриков будет посвящена следующая глава.

II. ДИЭЛЕКТРИКИ

*

§ 19. Диэлектрики с квазиупругими диполями.—1. Диэлектрики— непроводники электричества¹; поэтому мы можем предположить, что в нормальном состоянии атомы или молекулы диэлектриков, в отличие от атомов металлов, электрически нейтральны, т. е. что от них свободные электроны не отщепляются².

Равнодействующая электрических сил, действующих на нейтральную молекулу в однородном ($E = \text{const}$) электрическом поле, очевидно, равна нулю; поэтому центр тяжести молекулы диэлектрика в однородном поле остается неподвижным. Однако электрические частицы противоположных знаков, входящие в состав молекул диэлектрика, должны под воздействием сил поля смещаться в противоположные стороны. Можно получить достаточно точное описание целого ряда макроскопических явлений в диэлектрике, если исходить из следующего упрощенного представления: каждая молекула диэлектрика состоит из одного положительного и одного отрицательного зарядов $\pm e$, при отсутствии внешнего электрического поля столь близко расположенных друг к другу, что заряды эти взаимно нейтрализуются. При возникновении же внешнего поля заряды эти под воздействием сил поля несколько раздвигаются, причем расстояние l между ними растет пропорционально внешнему полю E . Иными словами, заряды эти образуют диполь, момент которого p параллелен и пропорционален полю E :

$$p = el = \beta E,$$

97

¹ В сущности все диэлектрики обладают некоторой, хотя и весьма малой проводимостью, так что понятие идеального непроводника является лишь первым приближением к действительности.

² Впрочем многие твердые диэлектрики построены не из нейтральных молекул, а из заряженных ионов, расположенных в узлах кристаллической решетки. Тем не менее и к подобным диэлектрикам основные положения излагаемой теории все же остаются применимыми, ибо перемещение зарядов в этих диэлектриках сводится к поляризации отдельных его ионов. Разумеется в кристаллических анизотропных средах уравнения поля приобретают иной вид.

где коэффициент пропорциональности β зависит от природы диэлектрика. Этот процесс возникновения диполей в молекулах диэлектрика называется поляризацией диэлектрика, а коэффициент β — поляризуемостью его молекул.

Формула (97) сводится, очевидно, к предположению, что между зарядами молекулы действуют некоторые силы неэлектростатического происхождения, которые в совокупности с Кулоновым притяжением этих зарядов оказываются эквивалентными квазиупругой силе, пропорциональной расстоянию между зарядами. Величину этих квазиупругих сил можно охарактеризовать соответствующим коэффициентом упругости χ . Пусть квазиупругая сила F , действующая на каждый из зарядов, равна $F = \chi l$; уравновешивающая ее сила внешнего электрического поля равна eE . Стало быть,

$$\chi l = eE.$$

Но согласно (97)

$$l = \frac{\beta E}{e};$$

стало быть

$$\chi = \frac{e^2}{\beta}.$$

97'

Согласно теореме Earnshaw лишь введение подобных неэлектростатических сил может обеспечить устойчивость электростатической модели молекулы. Действительно, если бы между зарядами молекулы действовали лишь Кулоновы силы взаимного протяжения, равновесие этих зарядов, например, в однородном внешнем поле не могло быть устойчивым. Малейшее нарушение равновесия, например, путем раздвигания зарядов, влекло бы за собой уменьшение их взаимного притяжения, и, стало быть, дальнейшее удаление их друг от друга под воздействием внешнего поля вплоть до разлетания зарядов в противоположные стороны. Наоборот, сближение зарядов влекло бы за собой возрастание сил притяжения и в результате приводило бы к столкновению зарядов и взаимной их нейтрализации.

Может показаться произвольным, что неэлектростатическое взаимодействие зарядов предполагается подчиняющимся закону именно квазиупругих сил, а не какому-либо иному. Однако в пользу этого допущения можно привести следующие соображения. Сила взаимодействия зарядов F , являющаяся любой конечной и обладающей конечными

производными функцией их расстояния l ,¹ может быть разложена в ряд Тейлора:

$$F(l) = F(l_0) + F'(l_0)(l - l_0) + F''(l_0) \frac{(l - l_0)^2}{2} + \dots$$

Если расстояние l_0 соответствует равновесию зарядов при отсутствии внешних сил, то первый член разложения $F(l_0)$ обращается в нуль, так что при достаточно малых отклонениях от положения равновесия можно ограничиться вторым членом, пропорциональным этому отклонению $(l - l_0)$, т. е. квазиупругой силой

$$F'(l_0)(l - l_0) = \chi(l - l_0).$$

В настоящем параграфе мы делаем дополнительное допущение, что в отсутствии внешнего поля момент диполя p равен нулю, т. е. что в положении равновесия $l = l_0 = 0$. Однако от этого последнего допущения легко освободиться, рассматривая молекулу диэлектрика как комбинацию квазиупругого диполя и диполя твердого с постоянным моментом $p = cl_0$ (см. § 23).

2. Простейшей моделью квазиупругого диполя является разработанная Дж. Дж. Томсоном в 1904 г. модель атома водорода. Томсон предполагал, что положительный заряд ядра атома равномерно распределен по объему шара, радиус которого a значительно превышает радиус отрицательного электрона. Предполагалось далее, что электрон может проникать внутрь ядра. При этих условиях устойчивое равновесие атома водорода, состоящего из одного ядра и одного электрона, соответствует нахождению электрона в центре ядра; при этом внешнее поле атома равно нулю. При смещении же электрона из центра положительной сферы на расстояние R , меньшее радиуса сферы a , на электрон действует согласно (18') квазиупругая электрическая сила, пропорциональная смещению R .

Устойчивость этой статической модели атома не противоречит положениям, установленным в предшествующем параграфе, ибо модель эта построена из неточечных зарядов². Впрочем, как уже упоминалось, экспериментальные исследования (в частности исследования рассеяния α -лучей) показали, что размеры элементарных электрических частиц

¹ Кулоновы силы этому условию не удовлетворяют, ибо при $l = 0$ они обращаются в бесконечность.

² Впрочем и в этом случае необходимо в согласии с теоремой Earens Shaw допустить существование сил неэлектрического происхождения, препятствующих разлетанию элементов заряда положительной сферы (и электронов) под влиянием взаимного отталкивания.

ничтожно малы по сравнению с их взаимными расстояниями в атоме, и тем самым доказали несостоятельность модели Томсона. Однако при изучении основных явлений поляризации диэлектриков можно пользоваться как этой, так и любой другой упрощенной моделью диполя.

Чтобы выяснить современное представление о механизме взаимодействия зарядов, формально описываемом введением квази-упругих связей, рассмотрим простейший из всех атомов, атом водорода. Можно считать установленным, что атом водорода состоит из тяжелого ядра (протона), вокруг которого в нормальном (невозбужденном) состоянии атома обращается по кругу электрон (динамическое, а не статическое равновесие). Так как период обращения электрона вокруг

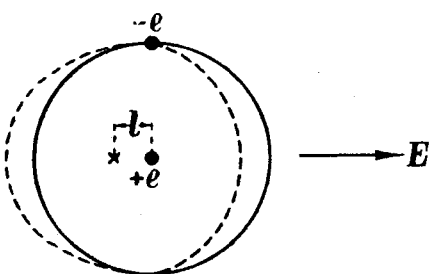


Рис. 35.

ядра чрезвычайно мал (порядка 10^{-15} сек.), то свойства водорода в электростатических и не слишком быстро меняющихся переменных полях должны определяться средним положением электрона в атоме за время одного его полного оборота. При равномерном обращении электрона по кругу среднее его положение совпадает с центром круга, т. е. с ядром, так что в среднем

поле электрона и поле ядра взаимно нейтрализуются. При возникновении же внешнего поля E орбита электрона под воздействием сил этого поля деформируется (пунктирная линия на рис. 35 соответствует тому случаю, когда вектор E лежит в плоскости орбиты). При этом среднее положение электрона, отмеченное на рисунке крестиком, перестает совпадать с положением ядра, так что атом приобретает электрический момент, т. е. поляризуется. При не слишком сильных полях мы согласно вышесказанному можем считать величину этого момента пропорциональной внешнему полю E , т. е. можем считать водородный атом квазиупругим диполем.

3. Электрическое состояние диэлектрика может быть охарактеризовано величиной его поляризации. Поляризацией единицы объема или просто поляризацией P называется векторная сумма электрических моментов p всех диполей, находящихся в единице объема диэлектрика¹:

$$P = \sum p. \quad 98$$

¹ В том случае, если поляризация единицы объема неравномерна, вектор P нужно, очевидно, определять, как предел отношения суммы моментов диполей, находящихся в элементе объема dV , к величине этого элемента (при $dV \rightarrow 0$).

Если диполи диэлектрика квазиупруги, то момент \mathbf{p} каждого диполя пропорционален и параллелен напряженности поля \mathbf{E} ; стало быть и сумма этих моментов \mathbf{P} также пропорциональна и параллельна \mathbf{E} ¹:

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}. \quad 98'$$

Коэффициент пропорциональности α между \mathbf{P} и \mathbf{E} носит название поляризуемости диэлектрика (не смешивать с поляризуемостью молекулы β).

Если в единице объема диэлектрика находится N одинаковых квазиупругих диполей поляризуемости β , то согласно (97)

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p} = N \mathbf{p} = N \beta \mathbf{E} \quad 99$$

и следовательно,

$$\alpha = N \beta. \quad 99'$$

Если же в единице объема диэлектрика находится s различных сортов диполей, по N_r ($r=1, 2, \dots, s$) диполей каждого сорта, то поляризуемость диэлектрика α будет очевидно равна

$$\alpha = \sum_{r=1}^{r=s} N_r \beta_r,$$

где β_r есть поляризуемость диполя сорта r . Впрочем в дальнейшем мы будем исходить из формулы (99'), предполагая, что все диполи диэлектрика одинаковы. Допущение это, упрощая вычисления, сущности физических явлений не затрагивает, так что все результаты последующих рассуждений легко могут быть обобщены для случая наличия различных сортов диполей.

4. В дальнейшем мы дадим строгий вывод уравнений электрического поля в диэлектриках, пока же приведем один из элементарных выводов закона Кулона для однородного диэлектрика; рассмотрение этого вывода позволит нам уяснить влияние поляризации диэлектрика на напряженность электрического поля.

Пусть положительный заряд e находится в однородном диэлектрике в точке O ; требуется определить поле \mathbf{E} этого заряда в некоторой точке P на расстоянии R от O (рис. 36). Под воздействием поля \mathbf{E} отрицательные заряды диполей диэлектрика сместятся к центру O , а положительные удалятся от него. Благодаря шаровой симметрии поля все пространство может быть разбито на концентрические

¹ В § 23 мы убедимся, что формула (98') остается применимой в широких пределах так же и к диэлектрикам с неупругими диполями.

шаровые слои с центром в O , в каждом из которых плотность расположения зарядов диполей постоянна. Поле всех заряженных шаровых слоев, внешних по отношению к точке P , равно в этой точке нулю, поле же всех внутренних слоев в точке P таково, как если бы весь заряд этих слоев был сосредоточен в центре O (см. ур. 17). Какова же общая величина заряда этих внутренних слоев, т. е. заряда, находящегося внутри сферы S , проходящей через точку P ? При возникновении поляризации диэлектрика через поверхность этой сферы выйдут наружу положительные заряды всех диполей, центры которых

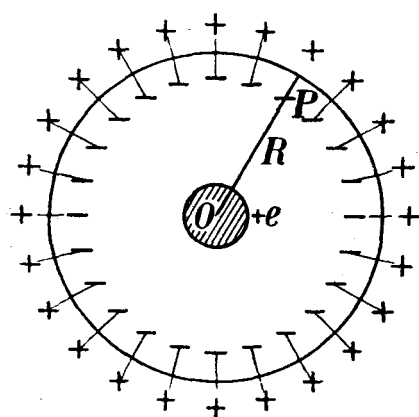


Рис. 36.

находятся в слое толщины $\frac{l}{2}$ (l — длина диполей), прилегающем изнутри к сфере S ; внутрь же этой сферы войдут отрицательные заряды диполей, центры которых находятся в слое той же толщины, прилегающем к S снаружи¹. Таким образом избыток числа отрицательных зарядов над положительными внутри сферы S будет равен числу диполей, находящихся в прилегающем к этой сфере слое толщины l и объема $4\pi R^2$, т. е. будет равен $N \cdot 4\pi R^2$; общий же отрицательный

заряд δe , появляющийся внутри сферы благодаря поляризации диэлектрика, будет равен [см. (97) и (99)]:

$$\delta e = -e l N 4\pi R^2 = -P 4\pi R^2.$$

$e l N = P$
Только для ад

Напряженность поля этих зарядов в точке P , как указывалось, будет такова, как если бы все эти заряды были сосредоточены в центре симметрии O . Стало быть, общая напряженность поля в точке P будет равна

$$E = \frac{e + \delta e}{R^2} = \frac{e}{R^2} - 4\pi P,$$

или на основании (99)

$$E = \frac{e}{R^2} - 4\pi \epsilon E,$$

¹ Для определенности мы здесь предполагаем, что центр диполя остается неподвижным, а противоположные ему заряды сдвигаются в электрическом поле на равные расстояния $\frac{1}{2} l$.

откуда

$$E = \frac{1}{1 + 4\pi a} \frac{e}{R^2}.$$

Величина $1 + 4\pi a$ носит название диэлектрической постоянной диэлектрика и обозначается через ϵ :

$$\epsilon = 1 + 4\pi a. \quad 100$$

Таким образом мы пришли к известной из элементарного курса физики форме закона Кулона

$$E = \frac{1}{\epsilon} \frac{e}{R^2}, \quad 101$$

справедливой для однородного диэлектрика. Необходимо однако твердо помнить, что закон Кулона в этой форме вовсе не применим к диэлектрику неоднородному. Так, например, если в поле заряда e

внести кусок диэлектрика D (рис. 37), то благодаря поляризации этого диэлектрика напряженность поля в точках P_1 и P_2 не уменьшится, как то соответствовало бы формуле (101), а увеличится, ибо отрицательные заряды диполей сместятся в диэлектрике влево, а положительные вправо, так что направление результирующего поля этих зарядов в точках P_1 и P_2 будет совпадать с направлением поля заряда e . В точке же P_3 поляризация диэлектрика вызовет ослабление первоначального поля заряда e .



Рис. 37.

§ 20. Электростатическое поле в однородном диэлектрике. — 1. Перейдем теперь к выводу уравнений электростатического поля при наличии в нем диэлектриков и предположим, что поле это вызвано свободными зарядами на поверхности проводников плотности σ и свободными объемными зарядами плотности ρ . При этом под свободными зарядами мы будем понимать все электрические заряды за исключением только зарядов диполей, индуцированных в молекулах поляризованного диэлектрика¹. Заряды же этих диполей, связанных

§ 20. Электростатическое поле в однородном диэлектрике. —

1. Перейдем теперь к выводу уравнений электростатического поля при наличии в нем диэлектриков и предположим, что поле это вызвано свободными зарядами на поверхности проводников плотности σ и свободными объемными зарядами плотности ρ . При этом под свободными зарядами мы будем понимать все электрические заряды за исключением только зарядов диполей, индуцированных в молекулах поляризованного диэлектрика¹. Заряды же этих диполей, связанных

¹ Замечим, что вводя это определение мы отклоняемся от широко распространенной терминологии, согласно которой наши свободные заряды носят название истинных (wahre), а свободными зарядами называется совокупность истинных и связанных зарядов.

с молекулами диэлектрика, мы будем называть зарядами связанными.

Если бы диэлектрик отсутствовал, то потенциал поля φ_0 при том же распределении свободных зарядов ρ и σ определился бы формулой (76):

$$\varphi_0 = \int \frac{\rho dV}{R} + \int \frac{\sigma dS}{R}$$

(индексом нуль отмечаем значение потенциала в отсутствии диэлектриков при неизменных свободных зарядах σ и ρ). При наличии же диэлектрика потенциал поля определится суммой потенциала φ_0 и потенциала диполей, индуцированных в поляризуемом диэлектрике. Потенциал каждого такого диполя согласно (51) и (97) равен:

$$p \operatorname{grad}_q \left(\frac{1}{R} \right) = \beta E \operatorname{grad}_q \left(\frac{1}{R} \right),$$

потенциал же всех $N dV$ диполей, находящихся в элементе объема диэлектрика dV , согласно (99') равен:

$$\beta E \operatorname{grad}_q \left(\frac{1}{R} \right) N dV = \alpha E \operatorname{grad}_q \left(\frac{1}{R} \right) dV,$$

где E есть напряженность электрического поля в элементе dV . Наконец потенциал всех элементов поляризованного диэлектрика определился, очевидно, интегралом

$$\int \alpha E \operatorname{grad}_q \left(\frac{1}{R} \right) dV,$$

который можно распространить на все бесконечное пространство, ибо в тех точках, где диэлектрик отсутствует, $\alpha = 0$ и подынтегральное выражение обращается в нуль. Таким образом результирующий потенциал φ электростатического поля при наличии диэлектриков выразится уравнением:

$$\varphi = \varphi_0 + \int \alpha E \operatorname{grad}_q \left(\frac{1}{R} \right) dV = \int \frac{\rho dV}{R} + \int \frac{\sigma dS}{R} - \int \alpha \nabla \varphi \cdot \nabla_q \left(\frac{1}{R} \right) dV, \quad 102$$

где в последнем интеграле мы заменили E через $-\nabla \varphi$.

2. Формула (102) применима, очевидно, к любой диэлектрической среде, как однородной так и неоднородной. Чтобы упростить задачу предположим теперь, что все поле, т. е. все элементы про-

странства, в которых вектор \mathbf{E} не равен нулю, заполнено однородным диэлектриком. Это будет иметь место, например, в том случае, если система проводников погружена в бесконечный однородный диэлектрик (ибо в случае электрического равновесия внутри проводников $\mathbf{E} = 0$), или если поле возбуждается зарядами шарового конденсатора, пространство между обкладками которого заполнено однородным диэлектриком (ибо вне этого пространства $\mathbf{E} = 0$). Наконец приближенно это будет справедливо также и для незамкнутых конденсаторов. При этих условиях в последнем интеграле уравнения (102) можно, очевидно, вынести α как постоянную величину за знак интеграла (ибо при $\mathbf{E} = -\nabla\varphi = 0$ подынтегральное выражение обращается в нуль вне зависимости от значения α). Таким образом в однородном диэлектрике

$$\varphi = \varphi_0 - \alpha \int \nabla\varphi \cdot \nabla_q \left(\frac{1}{R} \right) \cdot dV. \quad 102'$$

Это соотношение представляет собой особого рода интегральное уравнение, ибо градиент искомой функции φ в правой его части стоит под знаком интеграла. Хотя решение подобных уравнений представляет собою вообще говоря значительные трудности, нетрудно, однако, показать, что данное уравнение может быть удовлетворено в том и только в том случае, если положить (сравни ур. 100)

$$\varphi = \frac{1}{1 + 4\pi\alpha} \varphi_0 = \frac{1}{\varepsilon} \varphi_0, \quad 103$$

т. е. если положить, что потенциал поля в каждой точке однородного диэлектрика в $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$ раз меньше того потенциала φ_0 , который существовал бы в этой точке при отсутствии диэлектрика, но при наличии тех же самых свободных зарядов σ и ρ . Действительно, внося (103) в уравнение (102'), получим:

$$\frac{1}{1 + 4\pi\alpha} \varphi_0 = \varphi_0 - \frac{\alpha}{1 + 4\pi\alpha} \int \nabla\varphi_0 \cdot \nabla_q \left(\frac{1}{R} \right) dV. \quad 104$$

Преобразовывая объемный интеграл по формуле Грина (70), положив в последней $\varphi = \frac{1}{R}$ и $\psi = \varphi_0$ ¹, получим:

$$\int \nabla\varphi_0 \cdot \nabla_q \left(\frac{1}{R} \right) dV = - \int \varphi_0 \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) dV + \oint \varphi_0 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) dS.$$

¹ При выводе формулы Грина (70) скаляры φ и ψ рассматриваются как функции положения элемента объема интегрирования dV (или элемента поверхности интегрирования dS). Формула эта непосредственно применима к нашему интегралу, ибо в его

Первый из интегралов правой части исчезает ввиду (59), второй же интеграл согласно общему правилу должен быть распространен, во-первых, по поверхности S , ограничивающей объем интегрирования V , и, во-вторых, по поверхностям S' , выделяющим из этого объема те поверхности или точки, в которых нарушается непрерывность функций φ и $\frac{1}{R}$ и их первых производных. Если мы условимся рассматривать полное поле (см. стр. 92), то интеграл по первой из этих поверхностей обратится в нуль; далее потенциал φ_0 мы по изложенным в § 13 мотивам считаем всюду непрерывным, т. е. исключаем из рассмотрения двойные электрические слои; наконец интеграл по поверхностям разрыва градиента φ_0 также обращается в нуль, ибо градиент этот в подынтегральное выражение поверхностного интеграла не входит. Таким образом интеграл этот сведется к интегралу по поверхности бесконечно малой сферы S_0 , ограничивающей точку $R=0$, в которой нарушается конечность функции $\frac{1}{R}$. Стремя радиус этой сферы к нулю получим согласно (71''):

$$\lim_{R_0 \rightarrow 0} \oint_{S_0} \varphi_0 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) dV = 4\pi\varphi_0$$

(ибо второй член подынтегрального выражения в (71'') стремится в пределе к нулю). Стало быть,

$$\int \nabla\varphi_0 \cdot \nabla_q \left(\frac{1}{R} \right) dV = 4\pi\varphi_0, \quad (104')$$

где φ_0 есть значение потенциала в рассматриваемой точке поля P (т. е. в точке $R=0$). Внося это выражение в (104), получим тождество:

$$\frac{1}{1+4\pi\alpha} \varphi_0 = \varphi_0 - \frac{4\pi\alpha}{1+4\pi\alpha} \varphi_0 = \frac{1}{1+4\pi\alpha} \varphi_0.$$

подынтегральное выражение входит $\nabla_q \left(\frac{1}{R} \right)$, а не $\nabla_a \left(\frac{1}{R} \right)$. Действительно, градиентом $\nabla_q \left(\frac{1}{R} \right)$ определяется потенциал диполя, находящегося в элементе объема dV , причём при вычислении $\nabla_q \left(\frac{1}{R} \right)$ радиус-вектор \mathbf{R} рассматривается как функция положения его «точки истока», совпадающей в данном случае с dV (сравни ур. 51). Наоборот, если бы в подлежащий преобразованию интеграл входил градиент $\nabla_a \left(\frac{1}{R} \right)$, то формулу Грина можно было бы применить лишь по предварительной замене $\nabla_a \left(\frac{1}{R} \right)$ на $-\nabla_q \left(\frac{1}{R} \right)$.

Таким образом выражение (103) действительно является решением интегрального уравнения (102').

Покажем теперь, что это решение единственное. Предположив противное, т. е. предположив, что существуют два различных решения уравнения (102') φ и φ' , вставим их поочередно в (102') и затем вычтем полученные выражения одно из другого. В результате получим:

$$\varphi - \varphi' = -\alpha \int (\nabla\varphi - \nabla\varphi') \nabla_q \left(\frac{1}{R} \right) dV$$

или, полагая

$$\varphi - \varphi' = \psi,$$

$$\psi = -\alpha \int \nabla\psi \nabla_q \left(\frac{1}{R} \right) dV.$$

Но заменяя в (104') φ_0 через ψ можем написать:

$$\int \nabla\psi \nabla_q \left(\frac{1}{R} \right) dV = 4\pi\psi.$$

Стало быть,

$$\psi = -4\pi\alpha\psi.$$

Это соотношение может удовлетворяться лишь при $\psi = \varphi - \varphi' = 0$, откуда и следует однозначность решения интегрального уравнения (102').

3. Итак (103) есть единственное решение уравнения (102'), определяющего потенциал поля в однородном диэлектрике. На основании (76) решение это может быть записано в следующей форме:

$$\varphi = \frac{1}{\epsilon} \varphi_0 = \frac{1}{\epsilon} \int \frac{\rho dV}{R} + \frac{1}{\epsilon} \int \frac{\sigma dS}{R}. \quad 103'$$

Далее ввиду того, что $\epsilon = \text{const}$,

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\frac{1}{\epsilon} \text{grad } \varphi_0 = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{E}_0, \quad 105$$

где \mathbf{E}_0 есть напряженность поля, соответствующая данному распределению свободных зарядов ρ и σ в отсутствии диэлектриков.

Стало быть, при заданном распределении свободных зарядов σ и ρ потенциал и напряженность поля в однородном диэлектрике в ϵ раз меньше потенциала и напряженности поля в вакууме, причем под ϵ понимается диэлектрическая постоянная среды.

Обычно это положение, полученное нами из представления о поляризации диэлектрика, кладется в основу всей формальной теории диэлектриков.

Исходя из известных уже свойств поля в вакууме, можно с помощью (103') и (105) сделать ряд выводов относительно свойств поля в однородном диэлектрике. Так, например, напряженность поля точечного заряда e в диэлектрике выразится формулой:

$$E = \frac{eR}{\epsilon R^3}, \quad E = \frac{e}{\epsilon R^2},$$

совпадающей с выведенной нами в предыдущем параграфе формой закона Кулона (101) для однородной диэлектрической среды.

Далее, разность потенциалов между обкладками конденсатора при заполнении пространства между ними однородным диэлектриком должна уменьшаться в ϵ раз, если заряды обкладок остаются неизменными. Это значит, что емкость конденсатора C возрастает при этом в ϵ раз:

$$C = \epsilon C_0.$$

Наконец дифференциальные уравнения для E и φ в однородном диэлектрике принимают, очевидно, вид:

$$\operatorname{div} E = \frac{1}{\epsilon} 4\pi\rho \quad \text{и} \quad \nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon} 4\pi\rho. \quad 106$$

Приводить дальнейших примеров надобности нет.

4. При изучении поля в диэлектриках часто оказывается удобным вместо напряженности поля E рассматривать вектор D , определяемый соотношением

$$D = \epsilon E. \quad 107$$

Вектор этот у разных авторов носит различные названия: электрическое смещение, электрическая поляризация (не смешивать с вектором P , уравнение 98), электрическая индукция и т. д. Мы будем пользоваться последним из этих терминов.

Внося в (107) значение ϵ (100) и пользуясь (98'), получим:

$$D = E + 4\pi z E = E + 4\pi P. \quad 107'$$

Заметим, что таким образом электрическая индукция представляет собой сумму двух совершенно различных по физическому смыслу вели-

чин — напряженности поля \mathbf{E} и помноженной на 4π поляризации \mathbf{P} единицы объема среды.

Из (107) и (107') следует

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}. \quad (107'')$$

Из (105) и (107) следует, что

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}_0, \quad (107''')$$

т. е. что значение вектора \mathbf{D} в однородной среде не зависит от диэлектрической постоянной этой среды и вполне определяется распределением свободных зарядов.

Образовывая дивергенцию вектора \mathbf{D} , мы на основании (106) и ввиду постоянства ϵ в однородном диэлектрике получаем:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho. \quad (108)$$

Умножая (108) на элемент объема dV и интегрируя по объему V , заключенному внутри замкнутой поверхности S , получим согласно второй теореме Гаусса (25):

$$\oint \mathbf{D}_n dS = 4\pi \int \rho dV; \quad (108')$$

формула эта является обобщением первой теоремы Гаусса (14) для случая диэлектрической среды. В дальнейшем мы убедимся, что формулы (107) — (108'), за исключением конечно (107'''), остаются справедливыми и в неоднородных диэлектриках.

§ 21. Микро- и макроскопические значения физических величин. — 1. Введя представление о диполях в молекулах диэлектрика, мы должны иметь в виду, что поле каждого такого диполя в непосредственной близости от него должно чрезвычайно быстро изменяться от точки к точке (например, при переходе от положительного к отрицательному полюсу диполя). Однако эти изменения поля протекают в микроскопическом масштабе и недоступны нашему макроскопическому наблюдению. Измеряя, например, поле в жидком диэлектрике путем погружения в него пробного заряда, например, достаточно малого заряженного металлического шарика, мы, очевидно, измеряем среднее из тех значений, которое имеет напряженность поля \mathbf{E} на поверхности этого шарика.

Чтобы уточнить понятие среднего значения, мы введем следующую терминологию, предложенную Лорентцом. Мы будем называть физически бесконечно малыми, в отличие от математически

бесконечно малых, такие элементы объемов, поверхностей и линий, которые одновременно удовлетворяют следующим двум требованиям:

а) Физически бесконечно малые элементы должны быть чрезвычайно велики по сравнению с расстояниями между молекулами среды, а стало быть, и по сравнению с микроскопическими неоднородностями среды и поля;

б) Вместе с тем физически бесконечно малые элементы должны быть чрезвычайно малы по сравнению с макроскопическими неоднородностями поля и среды; другими словами, средние значения физических величин (например, φ , E , ϵ и т. д.) в любом из этих элементов должны бесконечно мало отличаться от средних значений этих величин в смежных с ними элементах¹.

Даже в газообразных, не говоря уже о жидких и твердых, телах расстояния между молекулами столь малы по сравнению с макроскопическими неоднородностями изучаемых обычно полей, что почти всегда оказывается возможным одновременно удовлетворять обоим этим условиям. Конечно, возможны и такие случаи, когда приведенные условия взаимно исключают друг друга; так, например, длина волны жестких рентгеновых лучей, могущая служить мерой неоднородности поля этих лучей, меньше расстояния между молекулами материальных тел. Оставляя пока в стороне подобные исключительные случаи, мы будем в дальнейшем под макроскопическими величинами понимать среднее значение физических величин в физически бесконечно малом объеме. Другими словами, под макроскопическим значением произвольной физической (скалярной или векторной) величины ψ (например, φ , E , ρ и т. д.) в данной точке пространства P мы будем понимать среднее из истинных или микроскопических значений этой величины в физически бесконечно малом объеме V , окружающем точку P :

$$\psi_{\text{макро}} = \bar{\psi}_{\text{микро}} = \frac{1}{V} \int_V \psi_{\text{микро}} dV. \quad 109$$

Заметим, что лишь введя это определение мы придаем определенный смысл всем нашим предшествующим рассуждениям. В частности, ведь и внутри проводников атомистическое строение электричества проявляется в чрезвычайно быстрых колебаниях микроскопических значений физических величин в смежных точках пространства; так, например, микроскопическая плотность электричества ρ отлична от

¹ За исключением элементов, отделенных друг от друга поверхностями разрыва, если мы только вообще захотим ввести в рассмотрение (в сущности фиктивные) поверхности разрыва.

нуля лишь внутри электронов и протонов. Таким образом говоря о плотности заряда в поверхностном слое проводников, о постоянстве потенциала внутри них и т. д., мы в сущности говорим о средних значениях этих величин, определяемых уравнениями типа (109).

2. В последующем нам неоднократно придется находить уравнения для величин макроскопических, исходя из дифференциальных уравнений для микроскопических величин. При этом нам придется пользоваться следующим положением: среднее значение производной по координате от произвольной величины ϕ равно производной от среднего значения этой величины:

$$\overline{\frac{\partial \phi}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}, \quad (109')$$

где черта сверху обозначает образование среднего. Мы докажем эту теорему в предположении, что ϕ есть величина скалярная; применяя затем эту теорему к отдельным слагающим произвольного вектора, мы сможем убедиться, что она остается справедливой и для векторных величин. Наконец соответствующая теорема справедлива и для производных по времени, в чем можно убедиться простым дифференцированием формулы (109).

Согласно (109) среднее значение ϕ в точке P равно

$$\bar{\phi}_P = \frac{1}{V} \int_V \phi dV,$$

где для определенности мы будем считать, что интеграл распространен по объему V физически бесконечно малой сферы поверхности S с центром в P . Подобно этому

$$\bar{\phi}_{P'} = \frac{1}{V'} \int_{V'} \phi dV',$$

где V' есть объем равновеликой сферы поверхности S' с центром в точке P' (на рис. 38 изображено сечение этих сфер центральной плоскостью). Поэтому:

$$\left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right)_P = \lim_{PP' \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{\phi}_{P'} - \bar{\phi}_P}{PP'} \right) = \frac{1}{V} \lim_{dx \rightarrow 0} \left(\frac{\int_{V'} \phi dV' - \int_V \phi dV}{dx} \right).$$

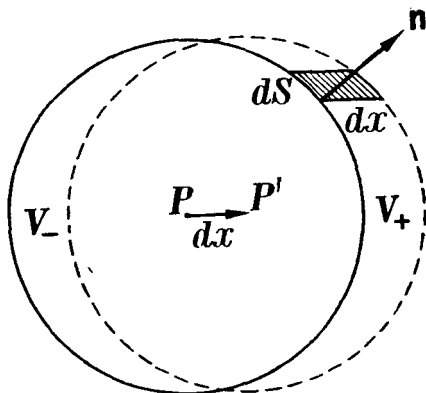


Рис. 38.

Но

$$\int_{V'} \phi dV - \int_V \phi dV = \int_{V_+} \phi dV - \int_{V_-} \phi dV,$$

где V_+ и V_- суть соответственно объемы переднего и заднего слоев, заключенных между поверхностями S и S' . Далее, прилежащий к элементу dS сферы S элемент объема dV_+ равен:

$$dV_+ = dS \cdot dx \cdot \cos(\mathbf{n}, x) \quad [\cos(\mathbf{n}, x) \geq 0],$$

где \mathbf{n} есть внешняя нормаль к сфере S , и соответственно

$$dV_- = -dS \cdot dx \cdot \cos(\mathbf{n}, x) \quad [\cos(\mathbf{n}, x) \leq 0].$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} \int_{V_+} \phi dV - \int_{V_-} \phi dV &= \int_{\cos(\mathbf{n}, x) \geq 0} \phi \cos(\mathbf{n}, x) dS dx + \\ &+ \int_{\cos(\mathbf{n}, x) \leq 0} \phi \cos(\mathbf{n}, x) dS dx = dx \oint \phi \cos(\mathbf{n}, x) dS, \end{aligned}$$

где последний интеграл распространяется по всей поверхности сферы S . Таким образом окончательно получаем:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} = \frac{1}{V} \oint \phi \cos(\mathbf{n}, x) dV.$$

С другой стороны

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} = \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial \phi}{\partial x} dV = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{i} \operatorname{grad} \phi \cdot dV,$$

где \mathbf{i} есть единичный вектор по оси x -ов. Ввиду постоянства этого вектора согласно (66₂)

$$\mathbf{i} \operatorname{grad} \phi = \operatorname{div}(\mathbf{i}\phi),$$

откуда на основании теоремы Гаусса (25)

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} = \frac{1}{V} \int_V \operatorname{div}(\mathbf{i}\phi) dV = \frac{1}{V} \oint_S (\mathbf{n}\mathbf{i}) \phi dS = \frac{1}{V} \oint_S \phi \cos(\mathbf{n}, x) dS,$$

что совпадает с выражением для $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}$. Таким образом уравнение (109') доказано.

§ 22. Дифференциальные уравнения электростатического поля в произвольной среде.— 1. Переходя к рассмотрению электростатического поля в произвольной неоднородной среде, мы прежде всего обратимся к выводу дифференциальных уравнений этого поля, т. е. уравнений, связывающих значение характеризующих поле величин в смежных точках пространства. Лишь на этом пути можно рассчитывать прийти к сравнительно простым соотношениям между этими величинами, ибо лишь дифференциальные соотношения будут полностью определяться свойствами данного элемента среды, независимо от свойств удаленных ее участков. При этом мы будем исходить из предположения, что основные уравнения электростатического поля

$$\mathbf{E} = - \text{grad } \varphi \quad (52')$$

и

$$\nabla^2 \varphi = - \text{div } \mathbf{E} = - 4\pi\rho \quad (54)$$

строго справедливы для истинного микроскопического поля, если под ρ понимать истинную плотность электричества, отличную от нуля лишь внутри отдельных атомов (вернее, внутри электронов и протонов)¹. Наша же задача будет заключаться в разыскании соответствующих уравнений для средних макроскопических значений величин \mathbf{E} , φ , ρ и т. д.

Из (109') непосредственно вытекает, что среднее значение электрического вектора \mathbf{E} равно градиенту от среднего значения потенциала φ , т. е. что (52') остается справедливым и для макроскопических величин. Уравнение же (54) принимает вид:

$$\nabla^2 \bar{\varphi} = - \text{div } \bar{\mathbf{E}} = - 4\pi \bar{\rho}, \quad 110$$

где под $\bar{\rho}$ надо понимать среднее значение истинной плотности электричества, т. е. сумму плотностей электричества свободного и связанного (см. стр. 113):

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_{\text{своб}} + \bar{\rho}_{\text{связн}}. \quad 110'$$

Однако плотность связанного в молекулах диэлектрика электричества определяется его поляризацией, т. е. в свою очередь зависит от напряженности поля $\bar{\mathbf{E}}$. Поэтому уравнением (110) удобно будет пользоваться лишь в том случае, если из него исключить плотность

¹ Предполагается, конечно, что эти электроны и протоны покоятся (электростатика!). Иными словами, мы пока отвлекаемся от движения этих элементарных частиц, т. е. в сущности определяем среднее по времени интересующих нас величин. Подробнее об этом во II томе.

связанного электричества, для чего необходимо определить зависимость $\bar{\rho}_{\text{связн}}$ от напряженности поля \bar{E} .

2. Выделим в диэлектрике поверхностью S некоторый конечный объем V , размеры которого велики по сравнению с расстояниями между

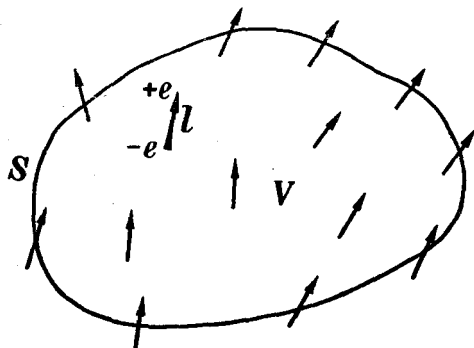


Рис. 39.

молекулами, и предположим для простоты, что свободных, не связанных с молекулами диэлектрика зарядов в этом объеме нет. Если диэлектрик поляризован, т. е. если заряды его молекул раздвинуты и образуют диполи, то поверхность S пересечет некоторое число этих диполей так, что один из зарядов диполя окажется вне объема V , а другой внутри него (рис. 39). Поэтому, несмотря на то, что каждая молекула диэлектрика в целом нейтральна, общий заряд объема V , а, стало быть, и средняя плотность электричества в нем может оказаться отличной от нуля. Чтобы определить величину этого заряда рассмотрим физически бесконечно малый элемент dS поверхности S . Если среднее значение электрического вектора E в физически бесконечно малом слое диэлектрика, прилегающем к dS , равно \bar{E} , то средняя длина находящихся в нем диполей будет согласно (97) равна:

$$l = \frac{p}{e} = \frac{\beta}{e} \bar{E}$$

(для краткости записи опускаем черту сверху у l и p).

Элемент dS пересечет все те диполи, центры которых расположены в прилегающем к нему слое

толщины $l|\cos(\mathbf{l}, \mathbf{n})|$ (рис. 40). Объем этого слоя равен $dS \cdot l|\cos(\mathbf{l}, \mathbf{n})|$, где вертикальные черточки обозначают абсолютную величину косинуса. Стало быть¹, число диполей, рассекаемых элемен-

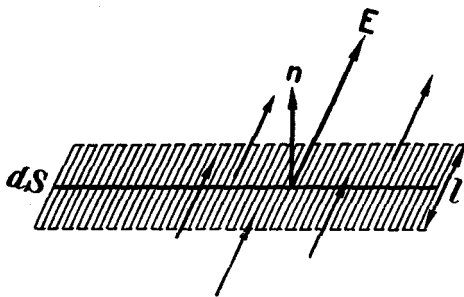


Рис. 40.

¹ Число молекул в микроскопически тонком слое можно принять равным произведению среднего числа их N в единице объема на объем слоя лишь в том случае, если расположение молекул подчинено закону случайности, как это имеет

том dS надвое, равно $Nl dS |\cos(\mathbf{l}, \mathbf{n})|$, абсолютная же величина некомпенсированного заряда в объеме V , соответствующего рассматриваемым диполям, равна:

$$|de| = Nl dS |\cos(\mathbf{l}, \mathbf{n})| = Np |\cos(\mathbf{p}, \mathbf{n})| dS = N|p_n| dS.$$

При этом, если угол между \mathbf{p} и \mathbf{n} (\mathbf{n} — внешняя нормаль к dS) острый, т. е. $\cos(\mathbf{p}, \mathbf{n}) > 0$, то внутри поверхности S находятся отрицательные заряды рассекаемых ею диполей ($de < 0$), в противном же случае, при $\cos(\mathbf{p}, \mathbf{n}) < 0$, заряды положительные ($de > 0$). Стало быть, алгебраическая величина некомпенсированного заряда de равна

$$de = -Np_n dS = -P_n dS,$$

где мы воспользовались формулой (99), в которой по самому ее смыслу под \mathbf{p} (как и в нашем случае) нужно понимать среднюю величину моментов диполей.

Чтобы определить общий заряд e , находящийся в объеме V , достаточно очевидно проинтегрировать полученное выражение по всей пограничной поверхности S ; воспользовавшись затем (25), получим:

$$e = - \oint_S P_n dS = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{P} \cdot dV.$$

С другой стороны, очевидно, что

$$e = \int_V \bar{\rho}_{\text{свзн}} dV,$$

так что окончательно получаем

$$\bar{\rho}_{\text{свзн}} = - \operatorname{div} \mathbf{P}. \quad 111$$

Таким образом плотность связанных зарядов в диэлектрике определяется дивергенцией его поляризации. В частности, если \mathbf{P} постоянно, то рассматривая, например, поверхность куба, легко усмотреть и непосредственно, что передняя и задняя (по направлению \mathbf{P}) грани этого куба пересекут одинаковое число диполей; поэтому алгебраи-

место в газообразных и жидких телах. В кристаллических же веществах, где расположение молекул строго упорядочено, число молекул в таком слое может существенно зависеть от положения этого слоя в кристалле. Поэтому строго говоря приведенный вывод формулы (111) в твердых диэлектриках не применим. Ввиду этого в конце параграфа мы приведем иной вывод этой формулы, справедливый для любого диэлектрика.

ческая сумма зарядов, а, стало быть, и средняя плотность электричества внутри куба, будет равна нулю.

Отметим, что ввиду (98') $\operatorname{div} \mathbf{P}$, а стало быть и $\bar{\rho}_{\text{свзн}}$, могут быть отличны от нуля лишь в том случае, если диэлектрик неоднороден ($\operatorname{grad} \alpha \neq 0$), либо если $\operatorname{div} \mathbf{E} \neq 0$, что, как следует из (108) (см. ниже), означает (при $\alpha = \text{const}$), что в диэлектрике находятся свободные заряды, не связанные с его молекулами.

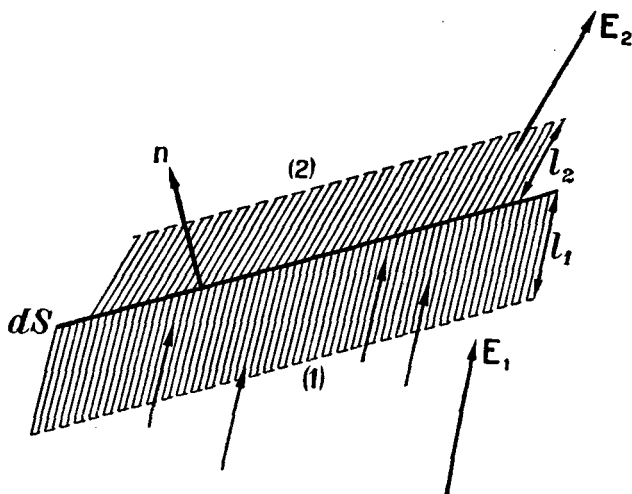


Рис. 41.

3. Справедливость формулы (111) предполагает, конечно, непрерывность вектора \mathbf{P} ; на поверхностях же разрыва сплошности этого вектора формула (111) согласно (31) и (32) принимает вид:

$$\bar{\sigma}_{\text{свзн}} = -\operatorname{Div} \mathbf{P} = -(P_{2n} - P_{1n}), \quad (111')$$

где $\bar{\sigma}_{\text{свзн}}$ есть средняя поверхностная плотность связанных зарядов на поверхности разрыва, а $\operatorname{Div} \mathbf{P}$ — поверхностная дивергенция вектора \mathbf{P} . Так как \mathbf{P} равно $\alpha \mathbf{E}$, то поверхности разрыва этого вектора, т. е. поверхностные заряды связанного электричества, должны совпадать либо с поверхностями раздела двух сред (скачок поляризуемости α), либо с поверхностями разрыва вектора \mathbf{E} ; последние поверхности, как следует из (108'') (см. ниже), в свою очередь совпадают (при $\alpha = \text{const}$) с поверхностными зарядами свободного электричества.

В справедливости формулы (111') можно убедиться также путем непосредственного рассмотрения расположения зарядов диполей, индуди-

рованных в диэлектрике. Пусть, например, dS есть элемент поверхности раздела двух различных диэлектриков (1) и (2), а l_1 и l_2 — длина диполей, индуцированных в этих диэлектриках (рис. 41). В прилегающем к dS слое первой среды толщины $l_1 \cos(\mathbf{l}_1, \mathbf{n})$ будут находиться полюсы (заряды) диполей лишь одного определенного знака (например, положительного, если электрический вектор \mathbf{E} направлен из 1-й среды во 2-ю), ибо противоположные полюсы всех диполей 1-й среды будут отстоять от поверхности раздела больше, чем на l_1 . Вне же этого слоя будут находиться полюсы диполей обоих знаков, заряды которых будут взаимно компенсироваться (если $\operatorname{div} \mathbf{P} = 0$). Таким образом в рассматриваемом слое благодаря поляризации диэлектрика появится заряд, равный

$$e \cdot N_1 l_1 dS \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}_1) = N_1 p_1 dS \cos(\mathbf{n}, \mathbf{p}_1) = P_{1n} dS$$

[сравни вывод уравнения (111)], где P_{1n} есть нормальная слагающая вектора поляризации первой среды. В слое же второго диэлектрика, прилегающем к тому же элементу поверхности раздела dS , появится соответственно заряд $-P_{2n} dS$. Таким образом общая величина заряда связанного электричества в прилегающем к dS слое будет равна:

$$(P_{1n} - P_{2n}) dS = \bar{\sigma}_{свзн} dS,$$

что совпадает с (111'). Из этого вывода явствует, что появление поверхностных связанных зарядов объясняется тем, что заряды диполей, прилегающих к противоположным сторонам поверхности разрыва вектора поляризации, не могут взаимно компенсироваться.

4. Возвратимся к формуле (110). Воспользовавшись (110') и (111), мы можем ее записать в следующем виде:

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{E}} = 4\pi(\bar{\rho}_{свсвд} + \bar{\rho}_{свзн}) = 4\pi\bar{\rho}_{свсвд} - 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}$$

или

$$\operatorname{div}(\bar{\mathbf{E}} + 4\pi\mathbf{P}) = 4\pi\bar{\rho}_{свсвд}.$$

Условимся в дальнейшем обозначать среднюю плотность свободного электричества $\bar{\rho}_{свсвд}$ просто через $\bar{\rho}$, как это принято в макроскопической теории и как это мы уже делали в § 20:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_{свсвд}.$$

110''

Соответственно этому и $\bar{\mathbf{E}}$ мы будем впредь вновь обозначать просто через \mathbf{E} . Приняв далее во внимание, что по смыслу уравнений (107) и (107') мы должны понимать в них под \mathbf{E} среднюю (макроскопическую)

напряженность электрического поля, можем записать предшествующее уравнение следующим образом:

$$\operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad 112$$

что совпадает с ранее выведенной формулой (108), которая таким образом оказывается справедливой для произвольной среды и может считаться одной из основных формул электростатики. В частности при отсутствии диэлектриков достаточно положить поляризуемость α равной нулю, а диэлектрическую постоянную ϵ соответственно равной единице (см. ур. 100); тогда \mathbf{D} совпадает с \mathbf{E} , а (112) с уравнением (30).

В предельном случае поверхностных зарядов уравнение (112) согласно (31) и (32) принимает вид:

$$\operatorname{Div} \mathbf{D} = D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \quad 112$$

где по аналогии с (110'') под σ понимается средняя поверхностная плотность свободного электричества. В справедливости (112') можно также убедиться, исходя непосредственно из уравнений (20) и (111').

Согласно (107) формулу (112') можно записать так:

$$D_{2n} - D_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{2n} = 4\pi\sigma, \quad 112''$$

где ϵ_1 и ϵ_2 суть значения диэлектрической постоянной по обеим сторонам поверхности разрыва. В частности, если $\sigma = 0$, т. е. если на этой поверхности нет свободных зарядов, то

$$\epsilon_2 E_{2n} = \epsilon_1 E_{1n}; \quad D_{2n} = D_{1n}. \quad 113$$

Стало быть, на незаряженной границе раздела двух различных ($\epsilon_1 \neq \epsilon_2$) сред нормальная слагающая электрической индукции остается непрерывной, нормальная же слагающая напряженности поля испытывает скачок. Что же касается тангенциальной слагающей вектора \mathbf{E} , то рассуждения, приведшие нас к § 13 к формуле (77), остаются в силе, ибо как мы видели, и в произвольном диэлектрике \mathbf{E} равно отрицательному градиенту электрического потенциала φ . Стало быть,

$$E_{2t} = E_{1t} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\epsilon_2} D_{2t} = \frac{1}{\epsilon_1} D_{1t}. \quad 113'$$

Иными словами тангенциальная слагающая напряженности поля всегда остается непрерывной, тангенциальная же слагающая индукции на поверхности раздела двух различных сред ($\epsilon_2 \neq \epsilon_1$) испытывает скачок.

Так как внутри проводников в случае электростатического равновесия \mathbf{E} , а стало быть и \mathbf{E}_i , равны нулю, то следовательно у внешней поверхности проводников электрический вектор \mathbf{E} (а, стало быть, и \mathbf{D}) всегда перпендикулярен этой поверхности. Поэтому (112'') у поверхности проводников принимает вид:

$$\varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{D} = 4\pi \mathbf{n}, \quad (113'')$$

где \mathbf{n} есть внешняя нормаль к этой поверхности, а ε — диэлектрическая постоянная соприкасающейся с ней среды. Уравнение (78) является, очевидно, частным случаем формулы (113'').

5. Уравнения (52'), (107), (112) и (112'')

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= -\text{grad } \varphi, & \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}, \\ \text{div } \mathbf{D} &= 4\pi \rho, & D_{2n} - D_{1n} &= 4\pi \sigma, \end{aligned} \right\} \quad A$$

представляют собой полную систему основных уравнений электростатического (макроскопического) поля в произвольной среде. Это значит, что если заданы значения диэлектрической постоянной ε и напряженности поля \mathbf{E} (или потенциала φ или индукции \mathbf{D}) в каждой точке пространства, то системой (A) однозначно определяется распределение свободных зарядов ρ и σ ; обратно, если задано распределение этих зарядов и значение ε как функция точки, то системой (A) однозначно определяется поле этих зарядов, т. е. значения φ , \mathbf{E} и \mathbf{D} в каждой точке пространства.

Справедливость первого утверждения очевидна; для доказательства же второго, предположим, что существует два решения $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \varphi$ и $\mathbf{E}', \mathbf{D}', \varphi'$ системы (A) при заданных $\varepsilon, \rho, \sigma$. Внося оба решения в (A) и вычитая затем соответственные уравнения друг из друга, получим

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}'' &= -\text{grad } \varphi'' & \mathbf{D}'' &= -\varepsilon \mathbf{E}'' \\ \text{div } \mathbf{D}'' &= 0 & D''_{2n} &= D''_{1n} \end{aligned} \right\}, \quad A'$$

где

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E} - \mathbf{E}', \quad \mathbf{D}'' = \mathbf{D} - \mathbf{D}', \quad \varphi'' = \varphi - \varphi'.$$

Далее на основании (A') и (66₂) можем написать следующую цепь равенств:

$$\varepsilon \mathbf{E}''^2 = \mathbf{D}'' \mathbf{E}'' = -\mathbf{D}'' \text{grad } \varphi'' = -\text{div} (\mathbf{D}'' \varphi'') + \varphi'' \text{div } \mathbf{D}'' = -\text{div} (\mathbf{D}'' \varphi'').$$

Стало быть, интеграл $\varepsilon \mathbf{E}''^2$ по объему полного поля (см. стр. 92) на основании (2) будет равен:

$$\int \varepsilon \mathbf{E}''^2 dV = - \int \text{div} (\mathbf{D}'' \varphi'') dV = - \oint_S D''_n \varphi'' dS,$$

причем поверхностный интеграл должен быть взят лишь на поверхности S , ограничивающей полное поле, ибо во всем поле как φ'' ¹, так согласно (A') и D''_n остаются непрерывными. Но интеграл по поверхности, ограничивающей полное поле, по самому определению этого понятия равен нулю. Стало быть

$$\int \epsilon E''^2 dV = 0,$$

что может иметь место лишь в том случае, если во всех точках поля $E'' = E - E'$ обращается в нуль, чем и доказывается однозначность решения системы (A) .

Итак вектор E'' , удовлетворяющий системе (A') , тождественно равен нулю. Так как при отсутствии свободных зарядов ($\sigma = \rho = 0$) система (A) принимает вид (A') , то, стало быть, в отсутствии свободных зарядов электрическое поле тождественно равно нулю. Таким образом наличие диэлектриков может только видоизменять поле свободных зарядов; в отсутствии же последних поляризация диэлектрика спадает, момент его диполей становится равным нулю, и электрическое поле исчезает.

6. Система основных уравнений (A) или, точнее, два последних из этих уравнений, могут быть также чрезвычайно просто получены непосредственно из уравнения (102), которое согласно (98') можно записать так:

$$\varphi = \varphi_0 + \int \mathbf{P} \operatorname{grad}_q \left(\frac{1}{R} \right) dV.$$

Действительно, согласно (66) имеем:

$$\mathbf{P} \operatorname{grad}_q \left(\frac{1}{R} \right) = \operatorname{div}_q \left(\frac{\mathbf{P}}{R} \right) - \frac{1}{R} \operatorname{div} \mathbf{P}.$$

Стало быть,

$$\varphi = \varphi_0 - \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{P}}{R} dV + \int \operatorname{div}_q \left(\frac{\mathbf{P}}{R} \right) dV,$$

или, согласно (25)²,

$$\varphi = \varphi_0 - \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{P}}{R} dV + \oint_{S+S_1'} \frac{P_n}{R} dS,$$

где последний интеграл должен быть распространен по внешней поверхности S рассматриваемого объема V и по поверхностям S_1' , выделяющим из объема интегрирования поверхности S_1 разрыва вектора \mathbf{P} . Если мы будем рассматривать полное

¹ Ибо мы двойных электрических слоев, т. е. поверхностей разрыва потенциала, не рассматриваем. Впрочем включение их в излагаемую теорию не представляет никаких затруднений.

² Это уравнение можно непосредственно применить в нашем случае лишь потому, что мы исходим из выражений, зависящих от $\operatorname{grad}_q \left(\frac{1}{R} \right)$, а не от $\operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right)$; смотри примечание к стр. 115.

поле, то интеграл по S обратится в нуль, интеграл же по поверхностям S_1' при стягивании их к S_1 сведется как обычно (сравни, например, ур. 73) к

$$\int_{S_1} \frac{(P_{1n} - P_{2n})}{R} dS.$$

Вводя чисто формальным образом обозначения

$$-\operatorname{div} \mathbf{P} = \rho_{\text{свзн}}, \quad -(P_{2n} - P_{1n}) = \sigma_{\text{свзн}},$$

совпадающие с (111) и (111'), получим окончательно:

$$\varphi = \varphi_0 + \int \frac{\rho_{\text{свзн}}}{R} dV + \int \frac{\sigma_{\text{свзн}}}{R} dS.$$

Из этого выражения следует, что электрическое поле при наличии диэлектриков совпадает с полем, которое возбуждалось бы в отсутствие диэлектриков теми же свободными зарядами при добавлении к ним некоторых «связанных» зарядов $\rho_{\text{свзн}}$ и $\sigma_{\text{свзн}}$, определяемых уравнениями (111) и (111'). Ясно, что это положение по своему содержанию совпадает с уравнениями (110), (110'), (110'') и (112).

7. В заключение заметим, что для графического изображения электрического поля в диэлектриках неудобно пользоваться силовыми линиями этого поля, т. е. линиями вектора \mathbf{E} (см. § 11). Ибо (объемная и поверхностная) дивергенция этого вектора при наличии диэлектриков может быть отличной от нуля не только в тех точках поля, где находятся свободные (объемные и поверхностные) заряды, но также и в точках расположения связанных зарядов диэлектрика, плотность которых в свою очередь зависит от напряженности поля, неоднородностей среды и т. д. Поэтому для графического изображения поля в диэлектрике пользуются так называемыми линиями индукции, т. е. линиями вектора электрической индукции \mathbf{D} . Так как зависимость объемной и поверхностной дивергенции вектора \mathbf{D} от распределения свободных зарядов в произвольной среде совпадает с зависимостью $\operatorname{div} \mathbf{E}$ и $\operatorname{div} \mathbf{E}$ от ρ и σ в отсутствие диэлектриков, то к линиям индукции применимо в основных чертах все, сказанное в § 11 о силовых линиях поля в вакууме¹. В частности линии индукции могут начинаться лишь в тех точках поля, в которых расположены свободные электрические заряды. В вакууме вектор \mathbf{D} тождественен вектору \mathbf{E} , так что линии индукции совпадают с силовыми линиями.

¹ Однако, в отличие от силовых линий, линии индукции в неоднородном диэлектрике, вообще говоря, могут быть замкнутыми, ибо вектор \mathbf{D} не является градиентом скалярной функции точки (потенциала), так что при ϵ переменном условии незамкнутости линий вектора \mathbf{D} , сводящееся, как мы увидим в §§ 33 и 34, к равенству нулю ротора \mathbf{D} , может не удовлетворяться.

Пример. *Поле равномерно поляризованного шара.* — Пусть поляризация \mathbf{P} постоянна по величине и направлению во всех точках шара радиуса a . При $\mathbf{P} = 0$ положительные и отрицательные заряды каждого диполя в диэлектрике совпадают между собою, и действие их сводится к нулю. При возникновении же поляризации разноименные заряды сдвигаются друг относительно друга на одинаковый отрезок l .

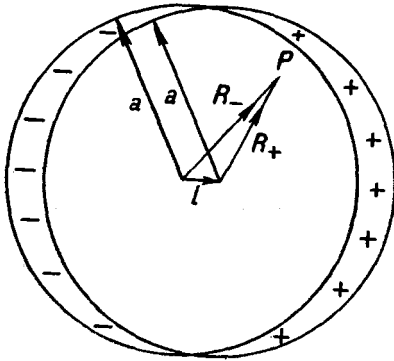


Рис. 42.

Таким образом после сдвига отрицательные заряды диполей будут заполнять собою шар радиуса a , центр которого смещен на отрезок l относительно центра шара того же радиуса, заполненного положительными зарядами (рис. 42). Следовательно поле равномерно поляризованного шара должно быть тождественно с полем двух сдвинутых на отрезок l друг относительно друга шаров радиуса a , равномерно заряженных разноименным электричеством. При этом плотность заряда ρ

этих шаров нужно, очевидно, принять равной eN , где e — заряд полюса диполя, а N — число их в единице объема; общий же заряд каждого шара по абсолютной величине будет равен $e' = V\rho = VeN$, где $V = \frac{4}{3}\pi a^3$ есть объем шара.

Внешнее поле равномерно заряженного шара таково, как если бы весь заряд шара e' был сосредоточен в его центре (ур. 17). Стало быть, внешнее поле поляризованного шара таково, как если бы два точечных заряда $\pm e'$ находились на расстоянии l друг от друга, т. е. тождественно с полем диполя момента $\mathbf{p} = e'l = VeNl = V\mathbf{P}$ [сравни (97) и (99)]. Таким образом потенциал равномерно поляризованного шара объема V вне этого шара согласно (43) будет равен:

$$\varphi_e = V \frac{(\mathbf{P}\mathbf{R})}{R^3} \quad (R \geq a), \quad 114$$

где \mathbf{R} есть радиус-вектор, проведенный из центра шара в исследуемую точку поля.

Обратимся теперь к полю внутри поляризованного шара. Потенциал поля заряженного шара, образованного положительными зарядами диполей диэлектрика, равен (см. зад. 8, стр. 44)

$$\varphi_+ = 2\pi\rho \left(a^2 - \frac{R_+^2}{3} \right);$$

потенциал же шара, образованного отрицательными зарядами диполей, равен

$$\varphi_- = -2\pi\rho \left(a^2 - \frac{R^2}{3} \right),$$

где R_+ и R_- суть расстояния точки поля от центра соответственных шаров. Стало быть, результирующий потенциал всех дипольных зарядов при $R \ll a$ равен

$$\varphi_i = \varphi_+ + \varphi_- = -\frac{2\pi\rho}{3}(R_+^2 - R_-^2).$$

Но с другой стороны $R_+^2 - R_-^2$ есть, очевидно, приращение квадрата радиуса-вектора \mathbf{R} при перемещении его начальной точки на расстояние \mathbf{l} , т. е. [см. (50) и (49)]

$$R_+^2 - R_-^2 = \mathbf{l} \operatorname{grad}_q R^2 = \mathbf{l} \cdot 2R \operatorname{grad}_q R = -2\mathbf{lR}.$$

Следовательно, потенциал поля внутри поляризованного шара равен

$$\varphi_i = \frac{4\pi\rho}{3} \mathbf{lR} = \frac{4\pi Ne}{3} \mathbf{lR} = \frac{4\pi}{3} \mathbf{PR} \quad (R \ll a). \quad 114'$$

Легко убедиться, что при $R = a$ выражения для φ_e и φ_i принимают одинаковые значения, т. е. что потенциал φ поляризованного шара является непрерывной функцией точки.

Наконец напряженность поля поляризованного шара внутри этого шара будет равна

$$\mathbf{E}_i = -\nabla\varphi_i = -\frac{4\pi}{3} \nabla(\mathbf{PR}) \quad (R \ll a).$$

Так как вектор \mathbf{P} постоянен по величине и направлению, то к $\nabla(\mathbf{PR})$ можно применить формулу (52), согласно которой получим окончательно:

$$\mathbf{E}_i = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \quad (R \ll a). \quad 114''$$

Таким образом напряженность поля равномерно поляризованного шара постоянна по величине и направлению во всех его внутренних точках.

Конечно, рассмотренную нами задачу можно было бы решить, исходя непосредственно из общих уравнений поля в диэлектрических средах.

Задача 16.—Показать, что на границе раздела двух диэлектриков силовые линии (т. е. линии направления вектора \mathbf{E}) испытывают преломление, причем

$$\operatorname{tg} \beta_1 : \operatorname{tg} \beta_2 = \epsilon_1 : \epsilon_2,$$

где β_1 есть угол, образованный направлением силовой линии в первом диэлектрике с нормалью к поверхности раздела, ϵ_1 — диэлектрическая постоянная первой среды, а β_2 и ϵ_2 — соответственные величины для второй среды.

Задача 17.—Показать, что напряженность поля \mathbf{E}' в средней части длинной и узкой щели, сделанной в твердом диэлектрике, равна напряженности поля \mathbf{E} в смежных со щелью точках диэлектрика, если щель эта параллельна вектору \mathbf{E} , и что \mathbf{E}' равно индукции \mathbf{D} в смежных точках диэлектрика, если щель перпендикулярна \mathbf{E} .

Задача 18.—Показать, что для однозначного определения электростатического поля в произвольной среде достаточно задать, во-первых, расположение и форму проводников, значение диэлектрической постоянной в каждой точке среды и распределение свободных объемных и поверхностных зарядов в диэлектрике, и, во-вторых, либо потенциал φ , каждого проводника (задача *A*), либо общий заряд e , каждого проводника (задача *B*) (сравни § 14).

§ 23. Отличие „действующего на диполь“ поля от среднего. Твердые диполи.—Исходя из желания выявить в первую очередь основные представления о природе диэлектриков и основные их свойства, не затемняя изложения излишними подробностями, мы положим в основу предшествовавших рассуждений возможно простые представления о строении диэлектриков. В настоящем же параграфе мы покажем, что ряд явно и неявно введенных нами при этом допущений и ограничений можно свободно опустить, причем все основные выводы теории останутся в силе.

1. Обратимся прежде всего к выводу уравнения (99). Полагая

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p} = N\mathbf{p},$$

мы должны, очевидно, понимать под \mathbf{p} среднюю величину моментов диполей, находящихся в единице объема диэлектрика. Выражая затем \mathbf{p} на основании (97) через

$$\mathbf{p} = \beta \mathbf{E},$$

мы неявно понимали под E напряженность среднего макроскопического поля. Между тем такое понимание формулы (97) справедливо лишь для слабо поляризующихся диэлектриков ($\alpha \ll 1$).

Действительно, момент квазиупругого диполя пропорционален электрической силе, действующей на его заряды. Эта сила определяется напряженностью внешнего (по отношению к данному диполю) электрического поля в месте нахождения диполя или, кратко выражаясь, в центре диполя. Стало быть, средний момент диполей должен равняться

$$p = \beta E', \quad 115$$

где E' есть средняя напряженность поля в точках расположения центров диполей, и притом поля внешнего по отношению к каждому отдельному диполю. Между тем под E понимается средняя напряженность поля в диэлектрике, при вычислении которой учитывается поле всех диполей во всех точках диэлектрика, а не только в центрах диполей. Очевидно, что E' будет, вообще говоря, отличаться от E и что формулу (99) нужно заменить формулой

$$P = Np = N\beta E' = \alpha E', \quad 115'$$

где попрежнему положено $\alpha = N\beta$.

Чтобы определить E' , опишем из центра O какого-либо из диполей диэлектрика сферу S физически бесконечно малого радиуса R . Поле E' в точке O будет слагаться, во-первых, из поля E_1 всех зарядов, расположенных вне сферы S , и, во-вторых, из поля E_2 зарядов, лежащих внутри S , за исключением зарядов самого диполя O .

Примем во внимание, что при определении средней напряженности поля E сглаживаются все микроскопические неоднородности этого поля, так что совокупность диполей диэлектрика может быть заменена непрерывно распределенным по его объему электрическим моментом плотности P . Стало быть, значение E в точке O равно средней напряженности поля E_1 зарядов, лежащих вне сферы S , плюс напряженность поля окружающей точку O равномерно поляризованной сферы S , поляризация которой равна средней поляризации диэлектрика P . Но поле равномерно поляризованной сферы согласно (114'') постоянно по всему ее объему, не зависит от ее диаметра и равно $-\frac{4\pi}{3} P$.

Следовательно, $E = E_1 - \frac{4\pi}{3} P$ или $E_1 = E + \frac{4\pi}{3} P$. Стало быть, среднее значение величины E' , которую мы будем для краткости

называть напряженностью „действующего на диполь“ электрического поля, равно

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} + \mathbf{E}_2. \quad 116$$

Чтобы определить среднюю напряженность поля \mathbf{E}_2 , возбуждаемого в центре диполя O смежными с ним диполями, расположенными внутри сферы S , введем декартову систему координат с центром в O . Согласно (69) слагающая E_x поля, возбуждаемого в точке O отдельным диполем, обладающим координатами x, y, z , равна

$$E_x = \frac{3(p\mathbf{R})x - p_x R^2}{R^5} = \frac{p_x(2x^2 - y^2 - z^2) + 3x(p_y y + p_z z)}{R^5}.$$

Стало быть, слагающая по оси x поля \mathbf{E}_2 будет равна

$$E_{2x} = p_x \sum \frac{x^2 - y^2}{R^5} + p_x \sum \frac{x^2 - z^2}{R^5} + 3p_y \sum \frac{xy}{R^5} + 3p_z \sum \frac{xz}{R^5},$$

где суммирование должно распространяться на все диполи, находящиеся внутри физически бесконечно малой сферы S (разумеется, за исключением диполя, находящегося в ее центре).

2. Значения слагающих E_{2x} , E_{2y} , E_{2z} , очевидно, существенно зависят от взаимного расположения диполей диэлектрика. В простейшем случае кристаллического диэлектрика, диполи которого расположены по узлам кубической пространственной решетки, поле \mathbf{E}_2 равно нулю. Действительно, приведем оси координат x, y, z в совпадение с главными осями кристалла. Если координаты какого-либо из диполей, лежащего внутри S , обладают значениями $x = a, y = b, z = c$, то внутри S найдется также диполь с координатами $x = b, y = a, z = c$. Отсюда следует, что $\sum \frac{x^2 - y^2}{R^5}$ равно нулю. Кроме того внутри S найдется также и диполь с координатами $x = -a, y = b, z = c$, откуда следует, что $\sum \frac{xy}{R^5}$ равно нулю и т. д.

Очевидно, что средняя напряженность поля \mathbf{E}_2 будет равна нулю также и в том случае, когда молекулы диэлектрика расположены совершенно беспорядочно, как то имеет место в жидких и газообразных телах. Стало быть, если исключить из рассмотрения кристаллические диэлектрики, не принадлежащие к кубической системе, то $\mathbf{E}_2 = 0$ и формула (116) примет вид:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}. \quad 116'$$

Внося это в (115'), получим:

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}' = \alpha \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \alpha \mathbf{P},$$

откуда

$$\mathbf{P} = \frac{\alpha}{1 - \frac{4\pi}{3} \alpha} \mathbf{E} = \alpha' \mathbf{E}, \quad 117$$

где введено обозначение:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{1 - \frac{4\pi}{3} \alpha}. \quad 117'$$

Таким образом тот факт, что „действующее“ поле \mathbf{E}' отлично от среднего поля \mathbf{E} , сказывается лишь на численном значении коэффициента поляризуемости диэлектрика, который оказывается равным α' , а не $\alpha = N\beta$. Соответственно этому диэлектрическую постоянную ϵ нужно положить равной [сравни (100)]

$$\epsilon = 1 + 4\pi\alpha' = 1 + \frac{4\pi\alpha}{1 - \frac{4\pi}{3} \alpha}, \quad 118$$

откуда обратно

$$\alpha = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}. \quad 118'$$

При $\alpha \ll 1$ (т. е. при ϵ близком к единице) α' может быть принято равным α , а \mathbf{E}' равным \mathbf{E} , и мы возвращаемся к прежним формулам, которые таким образом оказываются вполне справедливыми для слабо поляризующихся диэлектриков. Это и понятно, ибо в слабо поляризующихся диэлектриках влияние диполей друг на друга существенной роли не играет. Между тем отличие \mathbf{E}' от \mathbf{E} обусловливается в сущности именно взаимодействием диполей диэлектрика, учитываемым вторым членом формулы (116').

3. До сих пор все наши рассуждения основывались на предположении о квазиупругом характере диполей диэлектрика. Однако полученные нами результаты остаются в основном справедливыми также и в том случае, если мы примем во внимание возможность существования в диэлектрике так называемых твердых диполей. Под твердыми диполями в отличие от диполей квазиупругих подразумеваются диполи, величина момента которых не зависит от напряженности электрического поля и, в частности, остается постоянной и в том случае, если внешнее

поле вовсе отсутствует. Если тем не менее диэлектрики с твердыми диполями в отсутствие внешнего поля оказываются электрически нейтральными, то это объясняется лишь полной беспорядочностью ориентаций этих диполей, благодаря чему поля их в среднем взаимно компенсируются. Возникновение же поляризации диэлектрика под воздействием внешнего поля обуславливается тем, что поле это стремится повернуть оси твердых диполей по направлению вектора E , т. е. упорядочивает ориентацию диполей, поля которых поэтому перестают взаимно компенсироваться. Наконец, тот факт, что несмотря на ори-

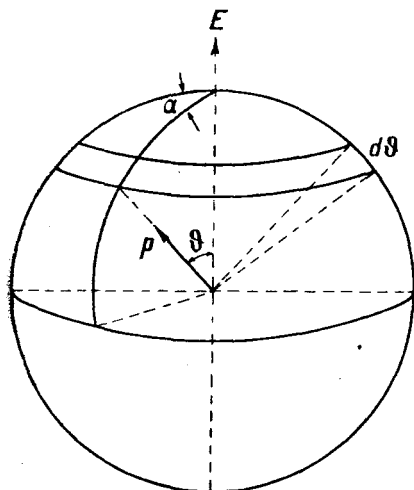


Рис. 43.

ентирующее воздействие внешнего поля поляризация диэлектрика не сразу достигает максимума, а возрастает пропорционально напряженности этого поля, обуславливается тем, что беспорядочное тепловое движение (в частности, вращение) молекул диэлектрика и их взаимные столкновения стремятся нарушить упорядоченность ориентации диполей, т. е. деполаризовать диэлектрик. Таким образом фактическая величина поляризации определяется соотношением между упорядочивающим воздействием поля и убеспорядочивающим воздействием теплового движения.

Таким образом механизм поляризации диэлектрика с твердыми диполями принципиально отличен от механизма поляризации диэлектрика с диполями квазиупругими. Однако основные уравнения поля тем не менее в обоих случаях одинаковы. Ибо они основаны в сущности лишь на том единственном допущении, что поляризация диэлектрика пропорциональна напряженности поля в нем; пропорциональность же эта сохраняется и в случае твердых диполей¹. К доказательству этого последнего положения мы теперь и перейдем.

Пусть в единице объема диэлектрика содержится N твердых диполей постоянного по величине электрического момента p , и пусть напряженность поля в этом объеме равна E . Поляризация диэлектрика

¹ Идеально твердых диполей, конечно, не существует. Однако диполь можно считать твердым, если вызываемое внешним полем относительное изменение его длины не превышает точности наблюдений.

Р попрежнему определится формулой (98), т. е. будет равна векторной сумме моментов этих N диполей. Опишем около произвольной точки диэлектрика сферу радиуса единицы и введем на ней полярные координаты ϑ — полярный угол и α — долготу, выбрав полярную ось параллельной вектору **E**. Направление диполя будет характеризоваться координатами ϑ и α „следа“ оси диполя на единичной сфере, т. е. координатами точки пересечения поверхности этой сферы с продолжением оси диполя (рис. 43). Если бы поле **E** отсутствовало, то направления осей диполей были бы равномерно распределены по всем направлениям. Это значит, что число диполей, след оси которых лежит на данном элементе единичной сферы, было бы пропорционально величине этого элемента. В частности число dN диполей, полярный угол осей которых лежит в пределах от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$, т. е. следы которых лежат на шаровом поясе поверхности $2\pi \sin \vartheta d\vartheta$, заключенном между двумя параллельными кругами ϑ и $\vartheta + d\vartheta$, должно равняться

$$dN = c \sin \vartheta d\vartheta, \quad 119$$

где c есть некоторый постоянный коэффициент.

Для того, чтобы определить распределение осей диполей при наличии ориентирующего их внешнего поля **E**, необходимо прибегнуть к известной теореме статистической механики, так называемой теореме Больцмана. Теорема эта, которую мы приведем без доказательства, гласит: закон распределения молекул при наличии консервативного поля сил (в нашем случае поля электростатического) отличается от закона их распределения в отсутствии этого поля множителем $e^{-\frac{U}{kT}}$, где U есть потенциальная энергия молекулы в рассматриваемом поле сил, T — абсолютная температура, а k — универсальная постоянная Больцмана, равная $1,37 \cdot 10^{-16} \frac{\text{эрг}}{\text{град}}$.

В нашем случае потенциальная энергия дипольной молекулы в электрическом поле сил равна согласно (92')

$$U = -pE' = -pE' \cos \vartheta,$$

где через E' обозначена напряженность „действующего на диполь“, т. е. внешнего по отношению к нему электрического поля (см. уравнение 116). Стало быть, распределение молекул определится ввиду (119) уравнением

$$dN = ce^{\frac{pE' \cos \vartheta}{kT}} \sin \vartheta d\vartheta = ce^{a \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta, \quad 120$$

где dN есть число молекул, угол оси которых с направлением поля лежит в пределах между ϑ и $d\vartheta$, и где введено обозначение:

$$a = \frac{pE'}{kT}. \quad 121$$

Таким образом уклонение распределения молекул от равномерного, определяемое величиной фактора $e^{\frac{pE'}{kT} \cos \vartheta}$, тем больше, чем больше напряженность поля и чем меньше температура. Это и понятно, ибо с повышением температуры растет энергия теплового движения, нарушающего упорядоченность распределения. Как показывают результаты опытного исследования, в громадном большинстве практически интересных случаев величина a оказывается значительно меньшей единицы. Ввиду этого можно с достаточной точностью заменить фактор $e^{a \cos \vartheta}$ первыми двумя членами его разложения по степеням a , так что (120) примет вид:

$$(a \ll 1) \quad dN = c(1 + a \cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta.$$

Коэффициент пропорциональности c можно определить из того условия, что общее число диполей всех направлений в единице объема должно равняться N :

$$\int dN = \int_0^\pi c(1 + a \cos \vartheta) \sin \vartheta \cdot d\vartheta = 2c = N.$$

Стало быть (120) можно окончательно записать так:

$$(a \ll 1) \quad dN = \frac{N}{2}(1 + a \cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta. \quad 120'$$

Зная таким образом распределение осей диполей по направлениям, нетрудно определить и их результирующий электрический момент, т. е. поляризацию диэлектрика \mathbf{P} . Вектор \mathbf{P} параллелен „действующему“ полю \mathbf{E}' ; поэтому численная величина его должна равняться сумме проекций моментов всех N диполей на направление \mathbf{E}' . Общий момент dN диполей, оси которых лежат между ϑ и $\vartheta + d\vartheta$, равен $p \, dN$, а проекция этого момента на направление \mathbf{E} равна

$$p \, dN \cdot \cos \vartheta.$$

Следовательно поляризация диэлектрика P равна:

$$P = \int p \cos \vartheta \, dN = \frac{pN}{2} \int_0^\pi \cos \vartheta (1 + a \cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{Npa}{3},$$

или, по внесении значения a из (121),

$$P = \frac{Np^2}{3kT} E'. \quad 122$$

Вводя, наконец, обозначение:

$$a = \frac{Np^2}{3kT} \quad 122'$$

и приняв во внимание параллельность векторов P и E' , получим окончательно

$$P = aE',$$

что полностью совпадает с формулой (115'), выведенной ранее для диэлектрика с квазиупругими диполями. Из (115') непосредственно следует (117). Таким образом и в случае твердых диполей (при условии $a \ll 1$) поляризация P пропорциональна напряженности поля E , чем и доказывается приложимость к диэлектрикам с твердыми диполями всех основных результатов, полученных нами для диполей квазиупругих¹.

4. Тем не менее диэлектрики с твердыми диполями должны отличаться от диэлектриков с квазиупругими диполями в двух отношениях²: характером зависимости диэлектрической постоянной от температуры и наличием предела возможной поляризации (насыщение).

Рассмотрим сначала температурную зависимость диэлектрической постоянной. Исходя из (99'), (118') и (122'), получаем для упругих диполей:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi a}{3} = \frac{4\pi N}{3} \beta,$$

тогда как для твердых диполей

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi a}{3} = \frac{4\pi Np^2}{9kT}.$$

Но число N молекул в единице объема диэлектрика может быть выражено через его плотность τ , его молекулярный вес M и постоянную Авогадро N_0 , равную числу молекул в грамм-молекуле³. Действительно

$$N: N_0 = \tau: M,$$

¹ Правда вывод уравнений (111) и (111'), приведенный в § 22, непосредственно применим лишь к квазиупругим диполям. Однако, во-первых, нетрудно видоизменить его так, чтобы он оказался применимым к твердым диполям, что мы предоставляем сделать читателю, и во-вторых, в конце того же § 22 дан вывод тех же уравнений (111) и (111'), не зависящий от каких бы то ни было специальных предположений о механизме поляризации диэлектриков.

² Впоследствии (§ 60) мы увидим, что диэлектрики этих двух типов существенно отличаются также своим поведением в быстро переменных электрических полях.

³ Число это, как известно, одинаково для всех тел и равно $6,06 \cdot 10^{23}$.

ибо τ и M равны соответственно массе единицы объема и массе грамм-молекулы диэлектрика. Стало бы, $N = \frac{\tau N_0}{M}$ и, следовательно, для упругих диполей

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{1}{\tau} = \frac{4\pi N_0}{3M} \beta = \text{const},$$

тогда как для твердых диполей

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{1}{\tau} = \frac{4\pi N_0}{9MkT} p^2 = \frac{\text{const}}{T},$$

123

ибо как β (мера внутримолекулярных квазиупругих сил), так и p (момент твердых диполей) суть величины постоянные. С другой

стороны

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{1}{\tau} = \frac{4\pi a}{3\tau},$$

123'

где $\frac{a}{\tau}$, равна поляризуемости диэлектрика рассчитанной на единицу

массы. Таким образом поляризуемость единицы массы в диэлектриках с упругими диполями должна быть величиной постоянной, а в диэлектриках с твердыми диполями должна изменяться обратно пропорционально абсолютной температуре. Это и понятно, ибо в первом случае поляризация диэлектрика представляет собою внутримолекулярный процесс, тогда как поляризация диэлектрика с твердыми диполями определяется соотношением между ориентирующим воздействием поля и дезориентирующим воздействием теплового движения.

5. Как уже указывалось, пропорциональность поляризации P полю E имеет место в диэлектриках с твердыми диполями лишь в том случае, если

$$a = \frac{pE'}{kT} \ll 1.$$

Правда и в случае квазиупругих диполей нужно ожидать, что строгая пропорциональность между моментами диполя и напряженностью поля будет нарушаться в весьма сильных полях, в которых нельзя ограничиться первыми членами разложения силы $F(l)$ в ряд Тейлора (§ 19). Подобно этому можно ожидать, что в сильных полях и „твердые“ диполи испытают некоторое удлинение. Однако, даже в случае идеально твердых диполей, в отличие от идеально упругих, пропорциональность между P и E должна нарушиться, как только отношение $\frac{E'}{T}$ станет сравнимым по величине с $\frac{k}{p}$, т. е. a станет сравнимым с едини-

цей. В предельном случае очень большой напряженности поля и очень низкой температуры тепловое движение не сможет противодействовать ориентирующему воздействию поля, и оси всех или почти всех диполей повернутся по направлению поля. Очевидно, что поляризация диэлектрика приблизится при этом к максимально возможному значению и уже не будет сколько-нибудь существенно изменяться при дальнейшем возрастании поля. Наконец максимум или полное „насыщение“ поляризации наступает при полной параллельности всех диполей, причем величина этой „поляризации насыщения“ $P_{нас}$, очевидно, равна¹:

$$P_{нас} = Np.$$

В противоположность этому никакого предела поляризации идеальных квазиупругих диполей мы указать не можем.

6. Как показывают экспериментальные исследования, в природе встречаются диэлектрики как квазиупругого, так и твердодипольного типа. Газы O_2 , N_2 , H_2 и ряд органических соединений могут служить типичными примерами диэлектриков квазиупругих; величина

$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{1}{\tau}$ в этих веществах действительно в очень широких пределах

от температуры не зависит. Наоборот, такие газы, как HCl , CO_2 , SO_2 , NH_3 , и такие жидкости, как вода, спирты, эфиры, органические кислоты и их соли, в большинстве случаев обладающие большой диэлектрической постоянной (для воды $\epsilon \approx 80$), являются типичными представителями диэлектриков с твердыми диполями, что доказывается

характером зависимости величины $\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{1}{\tau}$ от абсолютной температуры².

Однако насыщение поляризации в этих диэлектриках сколько-нибудь уверенно удалось пока наблюдать лишь в одном случае (этиловый эфир, Herzog и Pötzsch, 1922), ибо изучение поляризации диэлектрика в чрезвычайно сильных полях представляет весьма значительные экспериментальные трудности.

Отметим в заключение, что факт наличия твердых диполей в молекулах указанных тел вполне согласуется с их химическим строением. Так, например, молекула HCl состоит из атома (иона) водорода, ставшего положительно заряженным благодаря потере одного из своих

¹ Подробнее о поляризации веществ с твердыми диполями при сильных полях будет сказано в § 41 в связи с намагничиванием парамагнетиков.

² Во многих случаях зависимость эта значительно усложняется процессами сближения (полимеризации) диполей смежных молекул, также существенно зависящими от температуры.

электронов, и атома (иона) хлора, присоединившего к себе этот электрон и приобретшего поэтому отрицательный заряд. Сила сцепления между этими заряженными ионами сводится главным образом к их электростатическому притяжению. Совокупность этой пары ионов и образует собой „твердый диполь“¹.

§ 24. Энергия электрического поля в диэлектриках. — 1. В § 16 было выведено выражение (87) для энергии W электрического поля в отсутствие диэлектриков:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int \sigma \varphi dV. \quad (87)$$

Эта формула остается справедливой и для случая электрического поля в произвольной среде, если только под ρ и σ понимать плотность свободных зарядов.

Действительно, предположим сначала, что все находящиеся в поле диэлектрики неподвижны, т. е. что диэлектрическая постоянная ϵ есть не зависящая от времени функция точки. В этом случае изменение поля может обуславливаться только перемещением свободных зарядов, ибо при заданном ϵ потенциал φ и напряженность поля \mathbf{E} распределением этих зарядов определяются однозначно (см. стр. 129). Далее, электрические силы, действующие на свободные заряды при наличии диэлектриков, как и в вакууме, определяются напряженностью поля \mathbf{E} . Ввиду этого при определении работы, связанной с перемещением свободных зарядов, мы можем повторить все рассуждения, приведшие нас в § 16 к уравнениям (85') — (86) [однако потенциал точечного заряда разумеется, нельзя в этом случае полагать равным $\frac{e}{R}$, как в уравнениях (85) и (86')]. В результате мы опять приходим к (87), т. е. найдем, что работа электрических сил при перемещении свободных зарядов равна убыли определяемой этим уравнением величины W . А это и значит, что W есть мера энергии поля.

Правда, при наличии диэлектриков изменение поля может быть вызвано не только перемещением свободных зарядов, но и перемещением диэлектрика при неподвижных свободных зарядах. Однако электрическая энергия должна быть, очевидно, однозначной функцией поля, или, что то же, однозначной функцией распределения свободных зарядов и диэлектрической постоянной. Стало быть, работа сил поля при

¹ Пользуясь химической терминологией, можно сказать, что наличие твердых диполей в молекулах указывает на наличие гетерополярных (ионных) связей между атомами этих молекул.

перемещении диэлектриков должна определяться убылью той же функции W , как и работа, совершаемая при перемещении свободных зарядов¹. Впрочем, исходя из определенных представлений о строении диэлектрика, можно непосредственно вычислить пондеромоторные силы, действующие на диэлектрик в электрическом поле, и показать, что работа этих сил при перемещении диэлектрика равна убыли величины W , определяемой уравнением (87). Обычно, однако, поступают обратно, т. е. вычисляют пондеромоторные силы, действующие на диэлектрик, исходя из выражения (87) (см. § 25).

2. Как уже упоминалось в § 22, выражение электрической энергии (87) по своей форме соответствует представлению о взаимодействии зарядов на расстоянии. Однако, как и в случае отсутствия диэлектрика, это выражение может быть преобразовано так, чтобы соответственно представлениям теории близкодействия энергию поля можно было считать распределенной с определенной объемной плотностью w по всему пространству, в котором поле отлично от нуля. Действительно, подынтегральное выражение первого из интегралов, входящих в (87), на основании (112), (66₂) и (52') может быть представлено в следующем виде:

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \varphi \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \{ \operatorname{div} (\varphi \mathbf{D}) - \mathbf{D} \operatorname{grad} \varphi \} = \frac{1}{4\pi} \{ \operatorname{div} (\varphi \mathbf{D}) + \mathbf{DE} \},$$

откуда на основании первой теоремы Гаусса (25)

$$\frac{1}{2} \int \rho \varphi dV = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{DE} dV + \frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div} (\varphi \mathbf{D}) dV = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{DE} dV + \frac{1}{8\pi} \oint D_n \varphi dS.$$

Последний интеграл должен быть распространен, во-первых, на поверхность S , ограничивающую объем интегрирования V , и, во-вторых, на поверхности S_1' , выделяющие из этого объема поверхности разрыва подынтегрального выражения, т. е. поверхности разрыва нормальной составляющей вектора \mathbf{D} (ибо потенциал φ должен быть непрерывным, поскольку мы не рассматриваем двойных электрических слоев). Если мы условимся рассматривать полное поле (стр. 92), то интеграл по ограничивающей его поверхности S обратится в нуль. Поверхности же

¹ Справедливость этого утверждения могла бы вызвать сомнение лишь в том случае, если бы существовала такая функция поля U , значение которой зависело бы лишь от распределения диэлектриков, но не от распределения свободных зарядов; энергия поля могла бы в этом случае равняться $W + U$. Однако такой функции существовать не может, ибо при отсутствии свободных зарядов поле тождественно равно нулю (см. стр. 130).

разрыва нормальной слагающей вектора \mathbf{D} являются поверхностями, заряженными свободным электричеством, причем скачок этой слагающей D_n определяется уравнением (112'). Стягивая обычным образом поверхности S_1' вплоть до полного прилегания их к поверхностям разрыва S_1 (см. стр. 74), получим на основании (112'):

$$\lim_{S_1' \rightarrow S_1} \frac{1}{8\pi} \oint_{S_1'} D_n \varphi dS = \frac{1}{8\pi} \int_{S_1} \varphi (D_{1n} - D_{2n}) dS = -\frac{1}{2} \int_{S_1} \varphi \sigma dS.$$

Таким образом

$$\frac{1}{2} \int \rho \varphi dV = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{DE} dV - \frac{1}{2} \int \sigma \varphi dS$$

и, стало быть, энергия полного поля равна

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int \sigma \varphi dS = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{DE} dV. \quad 124$$

Это выражение можно истолковать в том смысле, что энергия электрического поля распределена по всему занимаемому им пространству с объемной плотностью w , равной

$$w = \frac{1}{8\pi} \mathbf{DE} = \frac{\epsilon}{8\pi} \mathbf{E}^2. \quad 124'$$

Уравнение это является одной из основных формул теории электричества. Частным случаем его при $\epsilon = 1$ является (89').

3. Согласно (124') при заданной напряженности \mathbf{E} энергия поля в диэлектрике в ϵ раз больше энергии поля в вакууме¹. Между тем, если носителем электрической энергии является электрическое поле, как это предполагается теорией близкогодействия, то следовало бы ожидать, что энергия эта зависит лишь от напряженности поля, а не от свойств среды, находящейся в поле. В частности, следовало бы ожидать, что при одинаковой напряженности поля энергия его должна быть одинаковой как в вакууме, так и в том случае, если в вакуум вкраплены отдельные диполи (молекулы диэлектрика). И действительно, плотность энергии электрического поля в собственном смысле этого слова $w_{эл}$ определяется формулой

$$w_{эл} = \frac{1}{8\pi} E^2 \quad 125$$

¹ Несмотря на то, что (87) применимо как к вакууму, так и к диэлектрику. С формально математической точки зрения эта разница в величине энергии обуславливается тем, что при том же распределении свободных зарядов значение потенциала φ в диэлектрике отличается от значения его в вакууме.

вне зависимости от свойств заполняющей поле среды. Выражение же (124') является в сущности суммой $w_{эл}$ и упругой энергии поляризованных молекул диэлектрика¹.

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, примем во внимание, что возникновение поля в диэлектрике неразрывно связано с поляризацией его молекул, т. е. с раздвиганием зарядов элементарных диполей диэлектрика. Между зарядами каждого диполя по основному предположению действуют силы как электростатического, так и неэлектростатического происхождения, сводящиеся в совокупности к квазиупругой силе взаимного притяжения этих зарядов. Стало быть, при раздвигании зарядов диполя на расстояние l силы электрического поля совершают определенную работу, диполем же приобретаетась равная этой работе упругая энергия $\frac{\chi l^2}{2}$, где χ есть мера упругих сил или „коэффициент упругости“ диполя. Согласно (97) и (97')²

$$\frac{\chi l^2}{2} = \frac{e^2}{2\beta} \left(\frac{\beta E}{e} \right)^2 = \frac{1}{2} \beta E^2 = \frac{1}{2} pE;$$

общая же квазиупругая энергия $w_{упр}$ всех N диполей, находящихся в единице объема диэлектрика, согласно (98'), (99) и (100) будет равна:

$$w_{упр} = \frac{1}{2} NpE = \frac{1}{2} PE = \frac{\epsilon - 1}{8\pi} E^2. \quad 125'$$

Если мы теперь под энергией электрического поля как обычно будем понимать всю энергию, которую нужно затратить на возбуждение поля, или, что то же, всю энергию, которая выделяется при его исчезновении, то полную энергию w поля в диэлектрике нужно будет, очевидно, положить равной сумме собственно электрической энергии $w_{эл}$ и неразрывно связанной с ней упругой энергии $w_{упр}$ поляризованных диполей:

$$w = w_{упр} + w_{эл} = \frac{\epsilon - 1}{8\pi} E^2 + \frac{1}{8\pi} E^2 = \frac{\epsilon}{8\pi} E^2 = \frac{ED}{8\pi}, \quad 125''$$

¹ Если, конечно, молекулы эти в электрическом отношении могут быть уподоблены квазиупругим диполям. Мы будем пока пользоваться именно этим представлением и лишь в конце параграфа рассмотрим диэлектрики с твердыми диполями.

² Для упрощения как в этом, так и в следующем параграфе мы не принимаем во внимание отличия поля E от «действующего на диполь» поля E' , что допустимо при условии $\alpha \ll 1$ (стр. 137).

что полностью совпадает с (124'). Таким образом избыток энергии поля в диэлектрике над энергией поля той же напряженности в вакууме действительно сводится к упругой энергии, запасенной в поляризованных молекулах диэлектрика.

4. Изложенное доказательство соотношения

$$w = w_{эл} + w_{упр} \quad (a)$$

страдает весьма существенными недостатками. Под E понимается средняя напряженность электрического поля (см. § 22):

$$E = \bar{E}_{\text{микро}},$$

тогда как средняя плотность собственно электрической энергии равна

$$w_{эл} = \frac{1}{8\pi} \overline{E^2}_{\text{микро}}.$$

Таким образом формула (125) справедлива лишь при условии, что квадрат средней напряженности равен среднему квадрату ее:

$$\overline{E^2}_{\text{микро}} = (\bar{E}_{\text{микро}})^2 = E^2,$$

что, вообще говоря, места не имеет. Формула (125') страдает аналогичным недостатком.

Приведем вкратце более строгое доказательство соотношения (a). Выделим внутри диэлектрика физически бесконечно малую сферу S и разложим поле $E_{\text{микро}}$ на две составляющих — поле E_1 зарядов, расположенных вне сферы S , и поле E_{in} диполей диэлектрика, находящихся внутри S . Средняя плотность энергии внутри S будет равна

$$w = \frac{1}{8\pi} \overline{E^2}_{\text{микро}} = \frac{1}{8\pi} \overline{(E_1 + E_{in})^2} = \frac{1}{8\pi} \left(\overline{E_1^2} + 2 \overline{E_1 E_{in}} + \overline{E_{in}^2} \right).$$

Поле E_1 внешних зарядов согласно § 23 (стр. 135) можно считать постоянным на всем протяжении сферы S , причем

$$\bar{E}_1 = E_1 = E + \frac{4\pi}{3} P.$$

Далее,

$$\bar{E}_{in} = E - \bar{E}_1 = -\frac{4\pi}{3} P.$$

Стало быть, плотность энергии поля E_1 равна

$$w_{11} = \frac{1}{8\pi} \overline{E_1^2} = \frac{1}{8\pi} \left(E + \frac{4\pi}{3} P \right)^2,$$

а плотность взаимной энергии полей E_1 и E_{in} равна

$$w_{12} = \frac{1}{4\pi} \bar{E}_1 \bar{E}_{in} = \frac{1}{4\pi} E_1 \cdot E_{in} = -\frac{1}{3} P \left(E + \frac{4\pi}{3} P \right).$$

Что же касается энергии поля E_{in} диполей, расположенных в S , то общая энергия этого поля равна сумме: 1) взаимной энергии диполей, 2) собственной энергии положительных и отрицательных зарядов, входящих в состав диполей (см. стр. 94', и, наконец, 3) энергии попарного взаимодействия зарядов, входящих в состав одного и того же диполя. Согласно исходному положению теории совокупность электростатиче-

ского и неэлектростатического взаимодействий зарядов каждого диполя сводится к квазиупругой силе; стало быть, энергия этого взаимодействия равна упругой энергии диполя. Собственная же энергия зарядов диполя от напряженности поля и поляризации диэлектрика не зависит; в макроскопической теории эта аддитивная постоянная во внимание не принимается. Наконец энергия взаимодействия системы диполей равна

$$-\frac{1}{2} \sum_{i,k} \mathbf{p}_i \mathbf{E}_{ki} \quad (k \neq i)$$

(сравни 92'), где \mathbf{E}_{ki} есть напряженность поля k -го диполя системы в месте нахождения i -го диполя \mathbf{p}_i .

Известная доля этой энергии взаимодействия диполей локализована вне занимаемой диполями сферы S ; доля эта равна интегралу $\frac{1}{8\pi} \int E_{in}^2 dV$, распространенному по всему пространству вне сферы. При определении напряженности поля \mathbf{E}_{in} во внешнем пространстве можно, очевидно, считать электрический момент диполей равномерно распределенным по объему сферы S , т. е. считать эту сферу равномерно поляризованной. Воспользовавшись формулами (114) и (69), получим:

$$\frac{1}{8\pi} \int E_{in}^2 dV = \frac{4\pi}{9} P^2 V,$$

где V есть объем сферы S . Таким образом доля взаимной энергии диполей, локализованная в н у т р и сферы S , равна

$$-\frac{1}{2} \sum_{i,k} \mathbf{p}_i \mathbf{E}_{ki} - \frac{4\pi}{9} P^2 V,$$

а плотность ее равна

$$w_{22}' = -\frac{1}{2V} \sum_{i,k} \mathbf{p}_i \mathbf{E}_{ki} - \frac{4\pi}{9} P^2.$$

Плотность упругой энергии диполей (сравни 125') равна

$$w_{yup} = \frac{1}{2V} \sum_i \mathbf{p}_i \mathbf{E}_i',$$

где \mathbf{E}_i' есть напряженность поля, действующего на i -ый диполь. Складывая полученные выражения, получим:

$$w = w_{11} + w_{12} + w_{22}' + w_{yup} = \frac{1}{8\pi} \left(E^2 - \frac{(4\pi)^2}{3} P^2 \right) + \frac{1}{2V} \sum_i \mathbf{p}_i \left(\mathbf{E}_i' - \sum_k \mathbf{E}_{ki} \right).$$

Очевидно, что

$$\mathbf{E}_i' - \sum_k \mathbf{E}_{ki} = \mathbf{E}_i = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P},$$

причем \mathbf{E}_i постоянно по всему объему сферы. Стало быть,

$$\frac{1}{2V} \sum_i \mathbf{p}_i \left(\mathbf{E}_i' - \sum_k \mathbf{E}_{ki} \right) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \right) \frac{\sum \mathbf{p}_i}{V} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \right) \mathbf{P}.$$

Внося это в предшествующее уравнение, получим:

$$w = \frac{1}{8\pi} (E^2 + 4\pi EP),$$

что ввиду (107'') совпадает с формулой (124').

5. Рассмотрим в заключение энергию электрического поля в диэлектрике с твердыми диполями. Этот случай существенно отличен от только что рассмотренного, ибо твердые диполи в отличие от квазиупругих не обладают запасом внутренней энергии, меняющейся в зависимости от напряженности поля. Однако, с другой стороны, нужно учесть следующее. В случае квазиупругих диполей мы вправе предполагать, что диполи эти заключены внутри молекул диэлектрика и что оси их всегда направлены по направлению электрического поля, вне зависимости от того, находится ли молекула в состоянии теплового движения или нет. В частности, если молекула вращается, то ось диполя, оставаясь параллельной полю, вращается относительно молекулы. Иными словами, мы вправе предполагать, что никакого взаимодействия между поляризацией диэлектрика и тепловым движением его молекул нет. В случае же молекул с твердыми диполями тепловое движение, как мы видели, оказывает существенное влияние на поляризацию, препятствуя ее насыщению. Стало быть, и обратно, возникновение поляризации, т. е. установка осей диполей по направлению внешнего поля, должна сказываться на тепловом движении молекул диэлектрика и должна быть связана с изменением энергии этого движения, т. е. с поглощением или выделением тепла.

Действительно, под воздействием электрического поля E ось каждого диполя (если только она не параллельна E) должна совершать маятникообразные колебания около направления этого поля, причем возрастанию поляризации диэлектрика соответствует уменьшение средней амплитуды этих колебаний. При соударениях молекул диэлектрика происходит частичный обмен между энергией этих колебаний и энергией поступательного теплового движения молекул.

Итак, работа внешних сил $A_{\text{внш}}$ ¹, затрачиваемая на изменение напряженности поля в диэлектрике с твердыми диполями и на его поляризацию, должна идти не только на приращение собственно электрической энергии поля, но и на выделение некоторого количества тепла Q :

$$A_{\text{внш}} = dW_{\text{эл}} + Q.$$

Количество этого тепла Q может быть определено на основании второго закона термодинамики, согласно которому количество тепла Q , выделяющееся при произвольном обратимом процессе, пропорционально приращению, испытываемому при этом процессе энтропией системы S :

$$Q = -TdS,$$

где T есть абсолютная температура системы.

Стало быть,

$$A_{\text{внш}} = dW_{\text{эл}} - TdS.$$

¹ Обозначение A без индекса мы сохраняем для работы пондеромоторных сил электрического поля, вообще говоря, обратной по знаку работе внешних сил $A_{\text{внш}}$.

Таким образом работа $A_{\text{внш}}$ вообще говоря, не выражается полным дифференциалом какой-либо функции физических величин. Однако, если ограничиться изотермическими процессами ($T = \text{const}$), т. е. представить себе, например, что выделяющееся в диэлектрике тепло сполна поглощается соприкасающимися с ними телами, то можно написать

$$A_{\text{внш}} = d(W_{\text{эл}} - TS).$$

Как известно из термодинамики, функция состояния системы, приращение которой при изотермическом процессе равно затрачиваемой в этом процессе работе внешних сил, называется свободной энергией системы F . Стало быть, свободная энергия единицы объема диэлектрика равна

$$F = w_{\text{эл}} - Ts = \frac{E^2}{8\pi} - Ts,$$

где s есть энтропия единицы объема диэлектрика.

Согласно основному положению статистической механики энтропия произвольного тела связана с термодинамической вероятностью Π его состояния соотношением Больцмана:

$$S = k \lg \Pi,$$

где k есть постоянная Больцмана (см. стр. 139). Если распределение осей молекул по направлениям определяется соотношением:

$$dN = f(\vartheta) \sin \vartheta \cdot d\vartheta,$$

где dN есть число молекул, оси которых составляют с некоторым определенным направлением в пространстве угол, лежащий между ϑ и $\vartheta + d\vartheta$, причем следы осей этих молекул равномерно распределены по всем азимутам, то термодинамическая вероятность этого распределения может быть выражена следующим образом¹:

$$\lg \Pi = \int_0^\pi f \lg(f) \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta.$$

В нашем случае при $a \ll 1$ согласно (120')

$$f = \frac{1}{2} N (1 + a \cos \vartheta).$$

Вставляя это значение в предыдущее выражение, ограничиваясь первыми двумя членами разложения $\lg(1 + a \cos \vartheta)$ по степеням a :

$$\lg(1 + a \cos \vartheta) = a \cos \vartheta - \frac{a^2 \cos^2 \vartheta}{2},$$

и выполняя интегрирование, получим, опуская несущественную аддитивную постоянную:

$$\lg \Pi = - \frac{Na^2}{2 \cdot 3};$$

полагая здесь N равным числу молекул в единице объема, получим логарифм термодинамической вероятности единицы объема.

¹ См. хотя бы Блох, Кинетическая теория газов, стр. 83.

С другой стороны, согласно (121) и (122') (полагаем ¹⁾ в этих уравнениях $E' = E$):

$$a = \frac{pE}{kT}$$

$$P = \frac{Np^2}{3kT} E.$$

Следовательно,

$$\lg II = -\frac{Na^2}{2 \cdot 3} = -\frac{Np^2 E^2}{2 \cdot 3 (kT)^2} = -\frac{PE}{2kT}.$$

Стало быть,

$$Ts = kT \lg II = -\frac{1}{2} PE$$

или, звиду (107''),

$$Ts = -\frac{\epsilon - 1}{8\pi} E^2.$$

Таким образом свободная энергия F единицы объема диэлектрика равна

$$F = \frac{E^2}{8\pi} - Ts = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{\epsilon - 1}{8\pi} E^2 = \frac{\epsilon}{8\pi} E^2. \quad 126$$

Итак, в случае диэлектрика с твердыми диполями выражение (124') определяет не «внутреннюю» энергию электрического поля (она равна $w_{эл} = \frac{1}{8\pi} E^2$), а лишь его свободную энергию, являющуюся мерой работы, связанной с изотермическими и только изотермическими изменениями поля. Если же выделяемое при поляризации диэлектрика тепло не поглощается сплошь окружающими телами, то работа электрических сил не равна убыли величины w , определяемой уравнением (124'). Впрочем, при поляризации диэлектрика выделяется, вообще говоря, столь незначительное количество тепла, что это обстоятельство в большинстве случаев практической роли не играет.

§ 25. Пондеромоторные силы в диэлектриках. — 1. В этом параграфе мы, во-первых, не будем принимать во внимание отличия напряженности „действующего на диполь“ поля E' от E , т. е. ограничимся случаем слабо-поляризующихся диэлектриков ($\alpha \ll 1$, см. § 23), и, во-вторых, будем считать, что как диэлектрическая постоянная ϵ , так и напряженность поля повсюду непрерывны, т. е. что значение ϵ плавно изменяется в пограничных слоях, служащих разделом между различными средами, а объемная плотность зарядов ρ всюду остается конечной (конечная толщина заряженных „поверхностей“, $\tau = 0$). На основании этого допущения об отсутствии поверхностей раз-

¹ Если принять во внимание отличие E' от E , а также отличие квадрата средней напряженности поля от среднего квадрата напряженности (стр. 148), то необходимо соответствующим образом видоизменить не только выражение для $\lg II$, но и для $w_{эл}$; в результате значение F остается неизменным.

рыва во всех поверхностных интегралах, с которыми нам придется встретиться, интегрирование будет распространяться лишь на внешнюю пограничную поверхность поля. Если мы кроме того условимся рассматривать полное поле, то все эти поверхностные интегралы обратятся в нуль. Стало быть, обратятся в нуль и все интегралы типа

$$\int \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot dV,$$

ибо согласно теореме Гаусса (25) интегралы эти могут быть преобразованы в интегралы поверхностные:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot dV &= \\ &= \oint a_n \cdot dS = 0. \end{aligned} \quad 127$$

В следующем же параграфе мы от этого упрощающего допущения освободимся.

2. Чтобы подготовить решение задачи о величине пондеромоторных сил электрического поля, действующих на помещенный в поле диэлектрик, рассмотрим силу, действующую в этом поле на отдельный диполь. Если \mathbf{E} и \mathbf{E}' суть напряженности внешнего (по отношению к диполю) поля в точках P и P' , занимаемых соответственно его отрицательным и положительным зарядами (рис. 44), то равнодействующая \mathbf{F} сил поля, приложенных к этим зарядам, будет равна:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}' - e\mathbf{E} = e(\mathbf{E}' - \mathbf{E}).$$

Разность $\mathbf{E}' - \mathbf{E}$ есть приращение вектора \mathbf{E} на отрезке PP' , равном длине диполя l . Ввиду малости этого отрезка приращение это может быть выражено согласно (68') и (68''') формулой

$$\mathbf{E}' - \mathbf{E} = l \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l} = l \nabla \cdot \mathbf{E},$$

откуда

$$\mathbf{F} = el \nabla \cdot \mathbf{E} = p \nabla \cdot \mathbf{E}.$$

128

Таким образом величина силы \mathbf{F} , действующей в электрическом поле на диполь, зависит от быстроты изменения этого поля в направлении

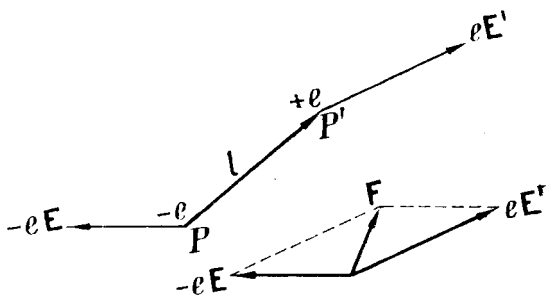


Рис. 44.

оси диполя; в однородном же поле силы, действующие на полюсы диполя, равны по величине и противоположны по направлению и, стало быть, взаимно уравниваются.

На единицу объема диэлектрика в электрическом поле будет действовать пондеромоторная сила \mathbf{f} , равная, очевидно,

$$\mathbf{f} = \Sigma \mathbf{F} = (\Sigma \rho) \nabla \cdot \mathbf{E},$$

где суммирование должно быть произведено по всем диполям, находящимся в единице объема. Воспользовавшись формулой (98), получаем:

$$\mathbf{f} = \mathbf{P} \nabla \cdot \mathbf{E}. \quad 129$$

Отнесенная к единице объема сила \mathbf{f} может быть, очевидно, названа плотностью пондеромоторных сил, приложенных к диэлектрику; в дальнейшем мы плотность сил всегда будем обозначать через малые \mathbf{f} , сохраняя \mathbf{F} прописное для обозначения сил, действующих на отдельный заряд, диполь, проводник и т. д.

Согласно (98') и (100) можем записать (129) так:

$$\mathbf{f} = \alpha \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E}. \quad 129'$$

Чтобы преобразовать это уравнение, рассмотрим слагаемую по оси x выражения $\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E}$; согласно (68'') она равна

$$\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E}_x = E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + E_z \frac{\partial E_x}{\partial z}.$$

Ввиду того, что в электростатическом поле вектор \mathbf{E} есть потенциальный вектор, имеем (см. ур. 52')

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

и соответственно

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x},$$

ввиду чего можем написать:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E}_x &= E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + E_z \frac{\partial E_z}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} E_x^2 + \frac{1}{2} E_y^2 + \frac{1}{2} E_z^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial x} = \frac{1}{2} \text{grad}_x E^2. \end{aligned}$$

Так как для слагающих $E_{\nabla} \cdot E$ по другим осям координат будут справедливы аналогичные соотношения, то окончательно получим:

$$E_{\nabla} \cdot E = \frac{1}{2} \operatorname{grad} E^2 = \frac{1}{2} \nabla E^2; \quad 130$$

стало быть, (129') примет вид:

$$\mathbf{f} = \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \cdot \nabla E^2. \quad 129''$$

Таким образом плотность пондеромоторных сил в диэлектрике пропорциональна градиенту квадрата напряженности поля; это и понятно, ибо по мере возрастания поля возрастают не только силы поля, но и момент диполей диэлектрика. Сила \mathbf{f} направлена в сторону возрастания абсолютной величины вектора \mathbf{E} независимо от направления этого вектора; причина этого лежит в том, что при изменении направления вектора \mathbf{E} изменяется также и направление поляризации \mathbf{P} . Таким образом в электрическом поле диэлектрик увлекается в область наибольшей напряженности поля. Этими пондеромоторными силами обуславливается, например, притяжение заряженными проводниками кусочков бумаги, бузиновых шариков и т. д. Разумеется, в однородном поле ($E = \text{const}$) сила \mathbf{f} обращается в нуль.

3. Приведенный вывод формул (129) и (129'') основан на определенных представлениях о дипольном строении диэлектриков. В феноменологической же теории поля величина пондеромоторных сил определяется следующим, более общим путем. Для энергии поля W постулируется выражение (87) или (124), и затем рассматривается изменение энергии δW , связанное с бесконечно малым произвольным (виртуальным) перемещением \mathbf{q} находящихся в поле тел (проводников и диэлектриков); конечно, перемещение различных точек этих тел может быть различным, так что \mathbf{q} является произвольной, но непрерывной функцией точки. При соблюдении условий, перечисленных в конце § 17, это изменение энергии должно быть равно взятой с обратным знаком работе A пондеромоторных сил поля (ур. 94):

$$\delta W = -A,$$

которая в свою очередь, очевидно, равна:

$$A = \int \mathbf{q} \mathbf{f} dV,$$

где интеграл должен быть распространен по всему объему полного поля, причем $f dV$ есть сила, приложенная к элементу объема dV , а q — испытываемое им смещение.

Стало быть,

$$\delta W = - \int q f dV, \quad 131$$

где f есть плотность пондеромоторных сил поля. Определив δW из выражения энергии, можно с помощью (131) найти f .

В этом состоит наиболее общий метод определения пондеромоторных сил, которым мы неоднократно будем пользоваться в дальнейшем.

Согласно (87) и (124) энергия электростатического поля, ввиду предполагаемого нами в этом параграфе отсутствия поверхностных зарядов ($\sigma = 0$), может быть выражена одним из следующих уравнений:

$$W_1 = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV$$

и

$$W_2 = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon E^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon (\text{grad } \varphi)^2 dV,$$

причем, конечно, $W_1 = W_2$. Стало быть, изменение энергии при произвольном бесконечно малом перемещении q находящихся в поле тел должно равняться

$$\delta W_1 = \frac{1}{2} \int \varphi \delta \rho dV + \frac{1}{2} \int \rho \delta \varphi dV$$

или

$$\delta W_2 = \delta W_1 = \frac{1}{8\pi} \int (\text{grad } \varphi)^2 \delta \varepsilon dV + \frac{1}{4\pi} \int \varepsilon \text{grad } \varphi \delta (\text{grad } \varphi) dV,$$

где $\delta \rho$, $\delta \varphi$, $\delta \varepsilon$ и т. д. суть изменения величин ρ , φ , ε и т. д., обусловленные перемещением q .

Как известно, порядок выполнения операций дифференцирования и варирования можно менять без изменения их результата, так что

$$\delta (\text{grad } \varphi) = \delta \left(\mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \mathbf{i} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial z} = \text{grad } (\delta \varphi).$$

С другой стороны,

$$\varepsilon \text{grad } \varphi = - \varepsilon \mathbf{E} = - \mathbf{D}.$$

Стало быть, на основании (66₂) подынтегральное выражение последнего интеграла можно преобразовать следующим образом:

$$\varepsilon \text{grad } \varphi \cdot \delta (\text{grad } \varphi) = - \mathbf{D} \text{grad } (\delta \varphi) = - \text{div } (\mathbf{D} \delta \varphi) + \delta \varphi \cdot \text{div } \mathbf{D}.$$

Интеграл первого слагаемого правой части согласно (127) равен нулю, так что, воспользовавшись уравнением (112), окончательно получим:

$$\delta W_2 = \frac{1}{8\pi} \int (\text{grad } \varphi)^2 \delta \epsilon dV + \frac{1}{4\pi} \int \text{div } \mathbf{D} \delta \varphi dV = \frac{1}{8\pi} \int E^2 \delta \epsilon dV + \int \rho \delta \varphi dV.$$

Ввиду того, что δW_2 равно δW_1 , приращение энергии δW можно, очевидно, представить также в следующей форме:

$$\delta W = 2\delta W_1 - \delta W_2 = \int \varphi \delta \rho dV - \frac{1}{8\pi} \int E^2 \delta \epsilon dV.$$

Таким образом вычисление δW сведено нами к определению изменения плотности свободного электричества ρ и диэлектрической постоянной ϵ при виртуальном перемещении \mathbf{q} находящихся в поле тел.

4. Чтобы определить $\delta \rho$, рассмотрим величину свободного заряда e , находящегося в объеме V , ограниченном некоторой и неподвижной (т. е. не принимающей участия в перемещениях среды) поверхностью S (рис. 45). До перемещения заряд этот равнялся

$$e = \int_V \rho dV;$$

при перемещении же \mathbf{q} через каждый элемент dS поверхности S выйдут наружу все те элементы заряда, которые находились в прилегающем к dS цилиндре объема $q_n dS$ с образующими \mathbf{q} , т. е. выйдет наружу $\rho \cdot q_n dS$ единиц электричества [сравни (6') и (8)]. Стало быть, заряд e' объема V после перемещения \mathbf{q} будет равен

$$e' = \int_V \rho' dV = \int_V \rho dV - \oint_S \rho q_n dS = \int_V \rho dV - \int_V \text{div}(\rho \mathbf{q}) dV,$$

где ρ' есть плотность электричества после перемещения, а поверхностный интеграл преобразован в объемный с помощью (25). Так как по определению ρ' равно $\rho + \delta \rho$, то, стало быть,

$$\int_V \delta \rho dV = - \int_V \text{div}(\rho \mathbf{q}) dV,$$

откуда ввиду произвольности объема V заключаем, что

$$\delta \rho = - \text{div}(\rho \mathbf{q}).$$

В приведенном выводе предполагается, что элементы свободных зарядов неразрывно связаны с элементами среды и перемещаются вместе с ними. Правда, при смещении проводников заряды их, вообще говоря, перераспределятся по их поверхности,

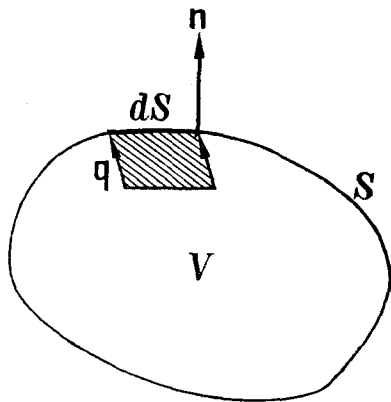


Рис. 45.

ибо электростатическое равновесие этим смещением нарушается. Однако очевидно, что при бесконечно малых перемещениях q изменение ρ , вызванное этим перераспределением зарядов, будет величиной второго порядка малости, которой мы вправе пренебречь.

Очевидно, далее, что не только изменение плотности электрических зарядов ρ , но и изменение всякой другой величины τ , неразрывно связанной с элементами среды, будет определяться формул. й типа (132). Так, например, если под τ понимать плотность среды (т. е. массу единицы объема: $\tau = \frac{m}{V}$), то, определяя изменение массы m , находящейся внутри неподвижной замкнутой поверхности S , мы по аналогии с (132) получим:

$$\delta\tau = -\operatorname{div}(\tau q), \quad (132')$$

где $\delta\tau$ есть изменение плотности среды, обусловленное ее смещением q . В частности в однородной среде ($\tau = \text{const}$) $\delta\tau = \tau \operatorname{div} q$ и, следовательно,

$$\frac{\delta V}{V} = -\frac{\delta\tau}{\tau} = \operatorname{div} q. \quad (132'')$$

Определяемые уравнениями (132) и (132') изменения $\delta\rho$ и $\delta\tau$ величин ρ и δ носят название локальных изменений этих величин, в отличие от так называемых изменений материальных, которые мы обозначим через $\delta'\rho$ и $\delta'\tau$. Разница между этими понятиями состоит в следующем. Локальное изменение, испытываемое какой-либо величиной при перемещениях среды, есть изменение значения этой величины в некоторой определенной точке пространства, не принимающей участия в этом перемещении. Соответственно этому при выводе формулы (132) мы считали поверхность S неподвижной. Материальное же изменение есть изменение значения данной величины ρ в некотором определенном материальном элементе перемещающейся среды. Иными словами, если элемент dV материальной среды, находившийся до перемещения в точке P , перемещается в точку P' , то $\delta'\rho$ равно разности между значением, которым обладало ρ в точке P до перемещения, и тем значением, которым обладает ρ в точке P' после перемещения q .

Если перемещение среды не сопровождается ее деформацией, то материальное изменение $\delta'\rho$ равно, очевидно, нулю. Если же элемент dV среды, обладающий зарядом de , испытывает при смещении сжатие или расширение, так что объем его становится равным dV' , то, очевидно, что

$$de = \rho dV = (\rho + \delta'\rho) dV'.$$

Следовательно,

$$\delta'\rho = -\rho \frac{dV' - dV}{dV'} = -\rho \frac{dV' - dV}{dV},$$

где ввиду предполагаемой малости как смещения q , так и вызываемого им изменения объема dV , мы заменили в знаменателе dV' на dV .

Но относительное изменение

$$\frac{dV' - dV}{dV}$$

объема dV элемента среды при ее смещении согласно (132') равно $\text{div} q$.
Стало быть,

$$\delta' \rho = - \rho \text{ div } q. \quad 133.$$

Обращаясь опять к локальному изменению $\delta \rho$ плотности заряда в точке P , заметим, что оно должно слагаться из двух частей. Во-первых, после смещения q в точке P будет находиться элемент объема среды, ранее находившийся в точке P'' на расстоянии $-q$ от P , в которой величина ρ имела, очевидно, значение

$$\rho_{P''} = \rho_P + (-q) \text{ grad } \rho = \rho - q \text{ grad } \rho.$$

Кроме того значение величины ρ в этом объеме испытает материальное изменение $\delta' \rho$. Следовательно ¹,

$$\delta \rho = \delta' \rho - q \text{ grad } \rho = - \rho \text{ div } q - q \text{ grad } \rho, \quad 133'$$

что на основании (66₂) действительно сводится к (132).

После этого отступления вернемся к определению величины изменения $\delta \epsilon$ диэлектрической постоянной среды.

Заменяя в (133') ρ на ϵ , можем написать:

$$\delta \epsilon = \delta' \epsilon - q \text{ grad } \epsilon,$$

где $\delta' \epsilon$ есть материальное изменение ϵ . Однако, $\delta' \epsilon$ будет определяться не формулой (133), а несколько более сложным выражением. А именно, так как значение ϵ зависит, вообще говоря, от плотности диэлектрика, то материальное изменение ϵ будет, очевидно, определяться материальным изменением $\delta' \tau$ плотности τ :

$$\delta' \epsilon = \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \delta' \tau.$$

Что же касается $\delta' \tau$, то, заменяя в (133) ρ на τ , получим:

$$\delta' \tau = - \tau \text{ div } q.$$

Внося оба эти выражения в предшествующее уравнение, получим окончательно:

$$\delta \epsilon = - \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \tau \text{ div } q - q \text{ grad } \epsilon.$$

Внося значения $\delta \epsilon$ и $\delta \rho$ (ур. 132) в выражение для δW , получим:

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int q E^2 \text{ grad } \epsilon \cdot dV + \frac{1}{8\tau} \int E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \tau \text{ div } q dV - \int \epsilon \text{ div } (\epsilon q) dV.$$

¹ Ввиду предполагаемой бесконечной малости смещения q мы в явном виде не учитывать разницы между $(\delta' \rho)_{P''}$ и $(\delta' \rho)_P$ сводящейся к величинам второго порядка малости.

Подынтегральные выражения двух последних интегралов можно преобразовать с помощью (66₂):

$$E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \operatorname{div} \mathbf{q} = \operatorname{div} \left(E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \mathbf{q} \right) - \mathbf{q} \operatorname{grad} \left(E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \right)$$

и

$$\varphi \operatorname{div} (\rho \mathbf{q}) = \operatorname{div} (\varphi \rho \mathbf{q}) - \mathbf{q} \rho \operatorname{grad} \varphi.$$

Но согласно (127) интегралы первых слагаемых обращаются в нуль; стало быть,

$$\delta W = \int \mathbf{q} dV \left\{ \frac{1}{8\pi} E^2 \operatorname{grad} \varepsilon - \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad} \left(E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \right) + \rho \operatorname{grad} \varphi \right\}.$$

Внося это в (131) и приравнивая подынтегральные выражения, получим искомое выражение плотности пондеромоторных сил:

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad} \left(E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \right) - \frac{1}{8\pi} E^2 \operatorname{grad} \varepsilon, \quad 134$$

где мы заменили $\operatorname{grad} \varphi$ на $-\mathbf{E}$. Эта сила складывается из двух частей \mathbf{f}_1 и \mathbf{f}_2 , а именно из силы \mathbf{f}_1 :

$$\mathbf{f}_1 = \rho \mathbf{E}, \quad 134'$$

действующей на свободные электрические заряды, и, во-вторых, из силы

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad} \left(E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \right) - \frac{1}{8\pi} E^2 \operatorname{grad} \varepsilon, \quad 134''$$

зависящей от $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}$ и $\operatorname{grad} \varepsilon$ и отличной от нуля только в диэлектриках. Из (134') следует, что плотность \mathbf{f}_1 пондеромоторных сил, действующих на свободные заряды, в диэлектрике, как и в вакууме, определяется напряженностью электрического поля (сравни 93"). Что же касается плотности \mathbf{f}_2 пондеромоторных сил, действующих на диэлектрик, то нетрудно показать, что (134'') совпадает с выражением (129''), к которому приводит дипольная теория диэлектриков.

Действительно, согласно (99') и (100)

$$\varepsilon = 1 + 4\pi a = 1 + 4\pi \beta N.$$

Так как число молекул N в единице объема диэлектрика пропорционально его плотности τ , то можно написать:

$$\varepsilon - 1 = c\tau,$$

где c от плотности τ не зависит. Стало быть,

$$\tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = c\varepsilon = \varepsilon - 1$$

и (134'') принимает вид:

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad} \left\{ E^2 (\varepsilon - 1) \right\} - \frac{1}{8\pi} E^2 \operatorname{grad} \varepsilon.$$

Но согласно (66₁)

$$\text{grad} \left\{ E^2 (\varepsilon - 1) \right\} = (\varepsilon - 1) \text{grad} E^2 + E^2 \text{grad} \varepsilon.$$

Стало быть,

$$f_2 = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \text{grad} E^2,$$

что действительно совпадает с (129¹)¹.

Заметим в заключение, что Максвелл и ряд других авторов (например, Абрагам) не принимали во внимание зависимость диэлектрической постоянной от плотности среды, благодаря чему выражения пондеромоторных сил в диэлектриках, которыми они пользовались, отличались от (134²) отсутствием первого члена². Однако, как следует из изложенного, член этот во всяком случае сравним по величине со вторым, так что пренебрегать им не представляется возможным.

§ 26. Сведение пондеромоторных сил к натяжениям. — 1. Как уже упоминалось в § 16, механистическая теория электромагнитного поля прошлого века искала причины электрических явлений в упругих деформациях гипотетической среды — эфира. Характерной особенностью сил упругости, как впрочем и вообще сил близкого действия, является возможность сведения их к натяжениям, возникающим в деформированных средах; другими словами, возможность сведения сил, действующих на произвольный участок среды, к силам натяжения, испытываемых поверхностью этого участка (в частности, давление есть отрицательное натяжение).

Итак, перед механистической теорией поля стояла задача сведения пондеромоторных сил поля к упругим натяжениям среды. Свести эти силы к натяжениям, как мы сейчас покажем, действительно, окажется возможным. Правда, это обстоятельство ни в коей мере не спасает механистической теории поля, оказавшейся в целом несостоятельной; однако, замена пондеромоторных сил эквивалентными им натяжениями позволяет сравнительно просто притти к ряду выводов, представляющих самостоятельный интерес вне всякой зависимости от ситолкования их в духе той или иной теории.

2. Сила натяжения, испытываемая каким-либо элементом поверхности произвольного участка среды, пропорциональна величине этого эле-

¹ Если диэлектрик не принадлежит к числу слабо поляризующихся, то необходимо учесть различие между E и «действующим на диполь» полем E' . При этом формула (129¹) перестает быть справедливой, а зависимость ε от τ становится более сложной (см. ур. 123). Однако и в этом случае выражение пондеромоторных сил, определенное на основании дипольной теории диэлектриков, совпадает с (134²). См. Н. А. Смирнов, Ж. Р. Ф. Х. О. 1923, том 60, стр. 19.

² См. однако Jeans, Theory of Electr. and Magn., изложению которого мы следовали при выводе формулы (134).

мента dS и зависит не только от положения этого элемента, но и от его направления, иными словами, является не только функцией точки, но и функцией направления нормали \mathbf{n} к элементу dS . Как известно из теории упругости, для полной характеристики натяжения в данной точке среды достаточно задать три вектора, характеризующих величину испытываемой элементом dS силы при трех взаимно-перпендикулярных положениях этого элемента, или, что то же, девять слагающих этих трех векторов по осям координат (девять псевдоскаляров). Совокупность этих трех векторов или девяти их слагающих носит название компонент тензора натяжения, который будет обозначаться нами через \mathbf{T} . В произвольной декартовой системе координат компоненты эти могут быть записаны в следующей симметричной форме¹:

$$\mathbf{T} = \begin{cases} T_x^x & T_x^y & T_x^z \\ T_y^x & T_y^y & T_y^z \\ T_z^x & T_z^y & T_z^z \end{cases} \quad 135$$

Обозначим силу, действующую на единицу поверхности, через \mathbf{f}^x , если эта поверхность перпендикулярна оси x -ов, через \mathbf{f}^y , если поверхность перпендикулярна оси y -ов, и т. д. Силы эти выразятся через компоненты тензора натяжения следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^x &= \mathbf{i} T_x^x + \mathbf{j} T_y^x + \mathbf{k} T_z^x, \\ \mathbf{f}^y &= \mathbf{i} T_x^y + \mathbf{j} T_y^y + \mathbf{k} T_z^y, \\ \mathbf{f}^z &= \mathbf{i} T_x^z + \mathbf{j} T_y^z + \mathbf{k} T_z^z. \end{aligned} \quad 135^r$$

Таким образом, например, T_z^x есть не что иное, как слагающая по оси z -ов силы \mathbf{f}^z , действующей на площадку, перпендикулярную оси x . На единицу же произвольно ориентированной поверхности, нормаль к которой имеет направление \mathbf{n} , действует сила \mathbf{f}^n , равная

$$\mathbf{f}^n = \mathbf{f}^x \cos(n, x) + \mathbf{f}^y \cos(n, y) + \mathbf{f}^z \cos(n, z), \quad 136$$

так что слагающая этой силы, например, по оси x -ов равна

$$f_x^n = T_x^x \cos(n, x) + T_x^y \cos(n, y) + T_x^z \cos(n, z). \quad 136^r$$

¹ Обыкновенно (по крайней мере при пользовании декартовой системой координат) оба индекса у компонент T пишутся внизу. Мы пишем один из них сверху для удобства дальнейших обозначений.

3. Мы будем исходить из выражения (134), в котором, согласно доказанному, последние два члена могут быть заменены в случае слабо поляризующихся диэлектриков ($\alpha \ll 1$) выражением (129"). Соответственно этому объемную плотность пондеромоторных сил в электрическом поле мы положим равной

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \text{grad } E^2,$$

или согласно (112')

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{D} + \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \text{grad } E^2. \quad 137$$

Выберем произвольным образом некоторую определенную систему декартовых координат; слагающая объемной плотности сил по оси x -ов будет равна

$$f_x = \frac{1}{4\pi} E_x \text{ div } \mathbf{D} + \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \text{grad}_x E^2.$$

Поскольку мы пользуемся одной определенной системой координат, мы впредь до того, когда нам заблагорассудится перейти к иным координатам, можем считать слагающие векторов по осям координат величинами скалярными, или, точнее, псевдоскалярными, и можем применять к ним соответствующие формулы векторного анализа. Считая E_x скаляром, мы можем на основании (66₂) представить f_x в следующем виде:

$$f_x = \frac{1}{4\pi} \text{div} (E_x \mathbf{D}) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{D} \text{ grad } E_x + \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \text{grad}_x E^2.$$

Но согласно уравнениям (68') и следующим

$$\mathbf{D} \text{ grad } E_x = \epsilon \mathbf{E} \text{ grad } E_x = \epsilon \mathbf{E} \nabla \cdot E_x = \epsilon (\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E})_x,$$

где последнее выражение есть слагающая по оси x -ов вектора $\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E}$. Стало быть, согласно (130)

$$\mathbf{D} \text{ grad } E_x = \frac{\epsilon}{2} \text{grad}_x E^2 = \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial x},$$

на основании чего f_x принимает вид:

$$f_x = \frac{1}{4\pi} \text{div} (\mathbf{D} E_x) - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial E^2}{\partial x}.$$

Поскольку мы пользуемся определенной системой координат, мы можем ввести в рассмотрение некоторый вспомогательный псевдовектор \mathbf{b} , потребовав, чтобы в нашей системе координат слагающие его равнялись

$$b_x = E^2; \quad b_y = b_z = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial E^2}{\partial x} = \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{b}$$

и, стало быть, можно написать:

$$f_x = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div}(E_x \mathbf{D}) - \frac{1}{8\pi} \operatorname{div} \mathbf{b} = \frac{1}{8\pi} \operatorname{div}(2E_x \mathbf{D} - \mathbf{b}).$$

Выполнив эти подготовительные преобразования, рассмотрим силу \mathbf{F} , действующую на некоторый объем среды V , ограниченной поверхностью S . Так как \mathbf{f} есть объемная плотность сил, то слагающая по оси x равнодействующей \mathbf{F} всех сил, приложенных к отдельным элементам объема V , будет равна

$$F_x = \int_V f_x dV = \frac{1}{8\pi} \int_V \operatorname{div}(2E_x \mathbf{D} - \mathbf{b}) dV.$$

Применяя теорему Гаусса (25) и приняв во внимание, что $b_n = b_x \cos(n, x) = E^2 \cos(n, x)$, получаем:

$$F_x = \frac{1}{8\pi} \oint_S (2E_x D_n - b_n) dS = \frac{1}{8\pi} \oint_S \{2E_x D_n - E^2 \cos(n, x)\} dS. \quad 138$$

Этот конечный результат, очевидно, не зависит от выбора системы координат.

4. Последним преобразованием наша задача в сущности решена, ибо согласно (138) общая сила \mathbf{F} , действующая на произвольный участок среды V , определяется состоянием поля на границах этого участка, т. е. может быть сведена к системе сил или натяжений, приложенных к его поверхности S . При этом, как явствует из (138) и аналогичных выражений для F_y и F_z , которых мы выписывать не будем, слагающие натяжения, действующего на элемент пограничной поверхности dS , равны:

$$f_x^n = \frac{1}{8\pi} [2E_x D_n - E^2 \cos(n, x)],$$

$$f_y^n = \frac{1}{8\pi} [2E_y D_n - E^2 \cos(n, y)],$$

$$f_z^n = \frac{1}{8\pi} [2E_z D_n - E^2 \cos(n, z)],$$

где \mathbf{n} есть внешняя нормаль к элементу dS . Таким образом сила $\mathbf{f}^n dS$, действующая на элемент dS , равна

$$\mathbf{f}^n dS = \frac{1}{8\pi} (2D_n \mathbf{E} - \mathbf{n} E^2) dS. \quad (139')$$

Полагая последовательно \mathbf{n} равным \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} , т. е. совмещая внешнюю нормаль к dS последовательно с осями x , y и z , получим из (139')

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \frac{1}{8\pi} (2D_x E - i E^2); \\ f_y &= \frac{1}{8\pi} (2D_y E - j E^2); \\ f_z &= \frac{1}{8\pi} (2D_z E - k E^2). \end{aligned} \right\} \quad (139'')$$

Сравнивая это с (135'), убедимся, что компоненты тензора натяжения \mathbf{T} равны:

$$T_x^x = \frac{1}{8\pi} (2D_x E_x - E^2),$$

$$T_y^x = \frac{1}{4\pi} D_x E_y,$$

$$T_z^x = \frac{1}{4\pi} D_x E_z$$

и т. д., т. е. могут быть по аналогии с (135) представлены в форме следующей таблицы:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi} D_x E_x - \frac{1}{8\pi} E^2 & \frac{1}{4\pi} D_x E_y & \frac{1}{4\pi} D_x E_z \\ \frac{1}{4\pi} D_y E_x & \frac{1}{4\pi} D_y E_y - \frac{1}{8\pi} E^2 & \frac{1}{4\pi} D_y E_z \\ \frac{1}{4\pi} D_z E_x & \frac{1}{4\pi} D_z E_y & \frac{1}{4\pi} D_z E_z - \frac{1}{8\pi} E^2 \end{pmatrix} \quad (140)$$

Легко убедиться, что тензор этот симметричен, т. е. что симметричные относительно главной диагонали члены таблицы (140) равны друг другу; так, например,

$$T_y^x = \frac{1}{4\pi} D_y E_x = \frac{\varepsilon}{4\pi} E_y E_x = \frac{1}{4\pi} D_x E_y = T_x^y \text{ и т. д.}$$

5. Знание тензора натяжений \mathbf{T} вполне достаточно для определения пондеромоторных сил поля. Впервые этот тензор был найден

Максвеллом, хотя, впрочем, так называемый Максвеллов тензор натяжения отличается ¹ от (140) ввиду того, что Максвеллом не учитывалась зависимость диэлектрической постоянной ϵ от плотности диэлектрика (см. стр. 161).

Удобнее всего разобраться в системе натяжений электрического поля, исходя из (139'). Определяемый этой формулой вектор \mathbf{f}^n равен, очевидно, силе, действующей извне на единицу площади поверхности, внешняя нормаль к которой направлена по \mathbf{n} (ибо формулой (138) определяется сила, действующая на тела, находящиеся в объеме V , т. е. внутри поверхности S). Изменение направления нормали \mathbf{n} на обратное сводится к изменению знака натяжения \mathbf{f}^n . Отсюда следует, что с противоположных сторон поверхности S на нее действуют взаимно уравновешивающиеся равные и противоположные силы. В этом обстоятельстве находит себе выражение закон равенства действия и противодействия в электростатическом поле. Действительно, совокупность натяжений, действующих извне на замкнутую поверхность S , равна по доказанному равнодействующей сил, действующих на тела, находящиеся внутри S . Обратно, совокупность натяжений, действующих изнутри на поверхность S , равна равнодействующей сил, действующих на тела, находящиеся вне S . Так как эти натяжения равны и противоположны, то векторная сумма всех сил электрического поля, приложенных ко всем находящимся в нем телам, равна нулю. А это и означает (ввиду произвольности поверхности S), что действие равно противодействию. Очевидно, что вообще всякий раз, когда силы могут быть сведены к натяжениям, силы эти удовлетворяют закону равенства действия и противодействия. Этим общим положением нам придется неоднократно пользоваться во II томе.

Рассмотрим элемент поверхности dS , внешняя нормаль \mathbf{n} к которому параллельна направлению поля, так что dS перпендикулярно \mathbf{E} и \mathbf{D} . В этом случае (139') можно записать так:

$$(\mathbf{n} \parallel \mathbf{E}) \quad \mathbf{f}^n = \frac{1}{4\pi} DE \mathbf{n} - \frac{1}{8\pi} E^2 \mathbf{n} = \frac{2\epsilon - 1}{8\pi} E^2 \mathbf{n}. \quad 141$$

С другой стороны, если \mathbf{n} перпендикулярно полю, то $D_n = 0$ и

$$(\mathbf{n} \perp \mathbf{E}) \quad \mathbf{f}^n = -\frac{1}{8\pi} E^2 \mathbf{n}. \quad 141'$$

¹ У Максвелла вторые слагающие диагональных членов (140) равны не $-\frac{1}{8\pi} E^2$, а $-\frac{1}{8\pi} DE$.

Наконец, если площадка dS имеет некоторое промежуточное направление, то ее можно разложить на две взаимно перпендикулярных площадки, параллельную и перпендикулярную E , так что действующие на эти площадки силы определяются из (141) и (141'). Стало быть, система натяжений в электрическом поле сводится к тяге $\frac{2\epsilon - 1}{8\pi} E^2$ по направлению поля E (ур. 141) и к давлению (отрицательная тяга) $\frac{1}{8\pi} E^2$ по направлению, перпендикулярному E .

С точки зрения механистической теории поля эта тяга и это давление суть не что иное, как силы упругости, возникающие в эфире при деформации его в электрическом поле; согласно (141) и (141') силы эти испытываются всеми теми участками эфира (как в вакууме, так и в материальных телах), в которых поле (т. е. деформация эфира) не равно нулю¹.

Конечно, с точки зрения современной теории, отрицающей существование материального эфира, лишено в сущности смысла говорить о натяжениях в вакууме, т. е. о силах взаимодействия смежных элементов вакуума. С точки зрения этой теории пондеромоторные силы электрического поля могут быть приложены лишь к электрическим зарядам и к материальным телам, несущим эти заряды, или точнее, состоящим из электрических зарядов (электронов и протонов). Однако по доказанному результирующая сила, действующая на тела, находящиеся в произвольном объеме V , может быть формально представлена в виде суммы натяжений, „испытываемых“ поверхностью этого объема S (могущей, конечно, проходить как в вакууме, так и в материальных телах). Следовательно, мы можем оперировать с этими фиктивными натяжениями, будучи уверенными в правильности окончательных результатов.

6. Замена пондеромоторных сил эквивалентной системой натяжений весьма облегчает в частности определение сил, приложенных к поверхностям разрыва электрического поля, т. е. к поверхностям, заряженным свободным электричеством, и к поверхностям раздела сред различной поляризуемости. Правда, при выводе системы натяжений (140) мы базировались на результатах предшествующего параграфа, в котором подобные поверхности разрыва предполагались отсутствующими. Однако, определив на основании (140) результирующую

¹ Мы получим правильную картину этих натяжений, если представим себе, что вдоль силовых линий поля натянуты материальные упругие нити, подверженные тяге $\frac{2\epsilon - 1}{8\pi} E^2$ и оказывающие друг на друга боковое давление $\frac{1}{8\pi} E^2$.

щую силу, приложенную, например, к заряженному слою конечной толщины, и стремя затем толщину этого слоя к нулю, мы определим, очевидно, величину силы, действующей на заряженную поверхность.

Пусть \mathbf{n} есть нормаль к поверхности слоя, разграничивающего среду (1) от среды (2); для определенности предположим, что \mathbf{n} направлено от 1-й среды во 2-ю. Элемент dS той поверхности слоя, которая граничит с 1-й средой, будет согласно (139') испытывать со стороны этой среды силу

$$\mathbf{f}_1 dS = -\frac{1}{8\pi} (2D_{1n} \mathbf{E}_1 - E_1^2 \mathbf{n}) dS,$$

а элемент dS поверхности, граничащей со второй средой, будет испытывать со стороны этой среды силу

$$\mathbf{f}_2 dS = +\frac{1}{8\pi} (2D_{2n} \mathbf{E}_2 - E_2^2 \mathbf{n}) dS.$$

Отличие знаков этих выражений обуславливается тем, что по условию направление внешней нормали к слою совпадает во 2-й среде с направлением \mathbf{n} , а в 1-й прямо ему противоположно. Общая сила, действующая на элемент слоя поверхности dS , равна таким образом:

$$\mathbf{f} dS = (\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) dS = \frac{1}{4\pi} (D_{2n} \mathbf{E}_2 - D_{1n} \mathbf{E}_1) dS - \frac{1}{8\pi} (E_2^2 - E_1^2) \mathbf{n} dS.$$

Очевидно, что это соотношение должно остаться справедливым и при переходе к предельному случаю бесконечно тонкого слоя, т. е. к поверхности. Таким образом результирующая сила, действующая на единицу площади произвольной поверхности, равна

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi} (D_{2n} \mathbf{E}_2 - D_{1n} \mathbf{E}_1) - \frac{1}{8\pi} (E_2^2 - E_1^2) \mathbf{n}, \quad 142$$

где \mathbf{E}_1 , \mathbf{D}_1 и \mathbf{E}_2 , \mathbf{D}_2 суть соответственно значения векторов \mathbf{E} и \mathbf{D} с внутренней и с внешней (по отношению к \mathbf{n}) стороны этой поверхности.

Разумеется, для всякой поверхности, не являющейся поверхностью разрыва, $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$ и $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2$, так что сила \mathbf{f} обращается в нуль.

Рассмотрим в частности силу, действующую на единицу поверхности заряженного проводника. Пусть \mathbf{n} направлено от проводника наружу, σ — плотность заряда на его поверхности. Внутри проводника

$E_1 = D_1 = 0$, поле же с внешней стороны его поверхности определяется формулой (113"). Внося соответствующие значения в (142), получим:

$$f = \frac{2\varepsilon - 1}{8\pi} E^2 n = \frac{2\varepsilon - 1}{\varepsilon^2} 2\pi\sigma^2 n. \quad (142')$$

При $\varepsilon = 1$ (142') переходит в ранее выведенную нами формулу (93):

$$f = 2\pi\sigma^2 n. \quad (142'')$$

Впрочем и при $\varepsilon \neq 1$ формула эта остается справедливой для слабо поляризующихся диэлектриков, к которым, как уже неоднократно упоминалось, только и применимы результаты этого параграфа. Действительно, если

$$\varepsilon = 1 + \gamma,$$

где γ есть малая величина, квадратами которой мы пренебрегаем, то

$$\frac{2\varepsilon - 1}{\varepsilon^2} = \frac{1 + 2\gamma}{(1 + \gamma)^2} \approx (1 + 2\gamma)(1 - 2\gamma) = 1 - 4\gamma^2 \approx 1,$$

так что (142') эквивалентно (142").

Задача 19. — Показать, что если на граничащей с вакуумом поверхности диэлектрика нет свободных зарядов ($\sigma = 0$), то на поверхность эту действует сила f , направленная нормально к ней и стремящаяся втянуть диэлектрик в вакуум, причем величина рассчитанной на единицу поверхности силы равна

$$f = f_n = \frac{(\varepsilon - 1)^2}{8\pi\varepsilon^2} D_n^2,$$

где D_n есть нормальная к поверхности слагающая электрической индукции D .

III. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

*

§ 27. Дифференциальные уравнения постоянного тока.— 1. Согласно данному в § 5 определению проводники электричества суть тела, отличающиеся тем свойством, что если внутри проводника напряженность электрического поля E отлична от нуля, то в проводнике возникает электрический ток, т. е. движение зарядов. В настоящей книге мы почти исключительно ограничимся рассмотрением лишь одного определенного класса проводников, а именно металлов. Металлы отличаются от других проводников тем, что прохождение тока через металлические проводники не сопровождается химическими процессами в проводнике, тогда как, например, при прохождении тока через раствор электролита происходит электролиз, т. е. выделение ионов электролита на опущенных в раствор электродах.

Объясняется это отличие тем, что в электролитах носителями зарядов являются ионы, т. е. заряженные атомы или группы атомов, тогда как в металлах заряды переносятся „свободными“ электронами, отщепившимися от атомов металла.

Не вдаваясь пока в рассмотрение физического механизма прохождения тока через металл, мы начнем с изложения феноменологической теории постоянных токов.

Основной закон постоянного тока — закон Ома, являющийся обобщением данных опыта, формулируется обычно следующим образом

$$J = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}, \quad 143$$

где J есть сила тока в проводнике, R — сопротивление определенного участка этого проводника, а φ_1 и φ_2 — значения потенциала у начала и у конца этого участка (считая по направлению тока). При этом силой тока, как известно, называется количество электричества, про-

текающее через сечение проводника в единицу времени¹, а направление тока условно считается совпадающим с тем направлением, в котором под действием поля должны были бы двигаться положительные заряды; другими словами, условно считается, что ток течет от большего потенциала к меньшему ($\varphi_1 > \varphi_2$).

Стало быть, в абсолютной системе единиц размерность силы тока равна:

$$[J] = \left[\frac{\text{абс. едн. электричества}}{\text{сек.}} \right] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}.$$

Абсолютная единица силы тока соответствует переносу через сечение проводника одной абсолютной единицы электричества в одну секунду. В практической же системе единиц количество электричества измеряется в кулонах; соответственно этому сила тока измеряется в амперах. По определению ток силою в один ампер переносит через сечение проводника один кулон в секунду:

$$\begin{aligned} 1 \text{ ампер} &= 1 \frac{\text{кулон}}{\text{сек.}} = 3 \cdot 10^9 \frac{\text{абс. едн. электричества}}{\text{сек.}} = \\ &= 3 \cdot 10^9 \text{ абс. едн. силы тока.} \end{aligned}$$

Что же касается сопротивления R , то его размерность, как явствует из (143), равна:

$$[R] = \left[\frac{\varphi}{J} \right] = \frac{M^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}} \cdot T^{-1}}{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}} = L^{-1} T;$$

таким образом размерность сопротивления обратна размерности скорости.

В практических единицах потенциал измеряется в вольтах; соответственно этому сопротивление измеряется в омах; проводник обладает по определению сопротивлением в 1 ом, если при разности потенциалов на его концах в 1 вольт по нему протекает ток силою в 1 ампер:

$$\begin{aligned} 1 \text{ ом} &= 1 \frac{\text{вольт}}{\text{ампер}} = \frac{1}{300} \frac{\text{абс. ед. пот.}}{3 \cdot 10^9 \text{ абс. едн. силы тока}} = \\ &= \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \text{ абс. единиц сопротивления.} \end{aligned}$$

¹ Определение это однозначное, ибо через любое сечение проводника протекает одинаковое количество электричества (если только ток постоянен и цепь тока не имеет разветвлений, см. дальше).

2. Рассмотрим какой-либо однородный по составу и цилиндрический по форме участок проводника. В этом случае, как известно,

$$R = \frac{l}{S} \rho,$$

где l — длина участка проводника, обладающего сопротивлением R , S — его сечение, а ρ — удельное сопротивление, характеризующее вещество проводника. Если вместо удельного сопротивления ρ ввести обратную ему величину — удельную проводимость или электропроводность λ :

$$\lambda = \frac{1}{\rho},$$

то

$$R = \frac{l}{S\lambda}. \quad 143$$

Внося это выражение в (143), получим:

$$J = \frac{S\lambda(\varphi_1 - \varphi_2)}{l}.$$

Во многих случаях удобно бывает выражать силу тока в проводнике через плотность этого тока j , по определению равную количеству электричества, протекающему в 1 секунду через единицу сечения проводника. В однородном цилиндрическом проводнике ток равномерно распределяется по его сечению, так что

$$j = \frac{J}{S}. \quad 144$$

Внося это в предшествующее уравнение, получим:

$$j = \frac{\lambda(\varphi_1 - \varphi_2)}{l}.$$

Будем теперь уменьшать длину рассматриваемого участка проводника, стремя ее к нулю. В пределе получим:

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} = - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{l} = - \frac{d\varphi}{dl},$$

где $\frac{d\varphi}{dl}$ есть производная потенциала по совпадающему с на-

правлением тока направлению оси проводника 1. Отрицательный знак у этой производной взят потому, что φ_1 есть потенциал начала, а φ_2 — потенциал конца рассматриваемого участка проводника, считая по направлению тока. Таким образом

$$j = \frac{J}{S} = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial l} = \lambda E_t,$$

где E_t есть слагающая напряженности поля вдоль оси проводника. Примем теперь во внимание, что если в однородном цилиндрическом проводнике установился постоянный ток, то вектор электрического поля \mathbf{E} в этом проводнике должен быть направлен по оси проводника¹. Следовательно, $E_t = E$ и

$$j = \lambda E. \quad (145)$$

Это уравнение, устанавливающее пропорциональность плотности тока в проводнике напряженности поля в нем, представляет собою наиболее общую и простую формулировку закона Ома. Его можно назвать дифференциальной формой закона Ома, потому что (145) устанавливает связь между величинами, относящимися к одной определенной точке проводника, тогда как закон Ома в интегральной форме (143) связывает величины, относящиеся к различным точкам (φ_1 и φ_2).

В этой дифференциальной своей форме закон Ома оказывается применимым к проводникам любой формы, как однородным, так и неоднородным. Однако в общем случае плотность тока j уже не будет одинаковой по всему сечению проводника, так что под плотностью тока в каждой данной точке проводника нужно будет понимать предел отношения силы тока dJ , протекающий через перпендикулярный к направлению тока элемент сечения проводника dS , к величине этого элемента dS :

$$j = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{dJ}{dS}, \quad (144')$$

¹ В противном случае перпендикулярная этой оси слагающая напряженности \mathbf{E} вызвала бы появление параллельного ей тока, т. е. перемещение зарядов с одной стороны поверхности проводника на другую. Это перераспределение поверхностных зарядов длилось бы до тех пор, пока поле этих зарядов не скомпенсировало бы внутри проводника перпендикулярной к его оси слагающей внешнего поля, т. е. до тех пор, пока \mathbf{E} не стало бы параллельным оси проводника.

откуда обратно

$$dJ = j dS.$$

Однако и это соотношение справедливо лишь при том условии, что элемент dS перпендикулярен направлению тока. Если же мы будем рассматривать плотность тока как вектор, направление которого совпадает с направлением тока в данной точке проводника, то при любом направлении площадки dS справедливо будет соотношение:

$$dJ = j_n dS \text{ или } j_n = \frac{dJ}{dS}, \quad (144'')$$

где j_n есть проекция вектора \mathbf{j} на внешнюю нормаль \mathbf{n} к dS , а dJ есть сила тока, протекающего через dS .

Справедливость этого соотношения явствует из того, что тангенциальная к dS составляющая плотности тока характеризует течение электричества вдоль (а не через) площадку dS (см. рис. 46). Из (144'') следует, в частности, что силе протекающего через площадку dS тока dJ нужно приписывать как положительные, так и отрицательные значения, в зависимости от того, протекает ли ток через dS в направлении произвольно выбранной положительной нормали \mathbf{n} к

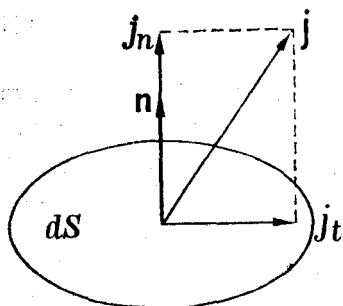


Рис. 46.

этой площадке, или же в обратном ей направлении.

Так как в каждой точке проводника направление тока совпадает с направлением обуславливающего движения зарядов электрического поля, то в векторной форме дифференциальный закон Ома (145) может быть записан следующим окончательным образом:

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}. \quad (145')$$

3. Хотя исходным пунктом наших рассуждений являлось уравнение (143), имеющее смысл лишь в том случае, если электрическое поле есть поле потенциальное, т. е. если вектор \mathbf{E} может быть представлен в виде градиента скалярного потенциала, однако (145') остается справедливым и в переменных электрических полях, где это условие не выполняется. Таким образом (145') является одним из основных уравнений электродинамики. Поскольку мы, однако, ограничиваемся пока изучением постоянных токов, постольку электрическое поле остается полем

потенциальным. Действительно, в поле потенциальных токов распределение зарядов в пространстве должно оставаться стационарным, т. е. неизменным во времени, ибо если бы имело место какое бы то ни было перераспределение зарядов в поле, то напряженность его неизбежно должна была бы изменяться и ток перестал бы быть постоянным. Но если распределение зарядов стационарно, то поле их должно быть тождественно с электростатическим полем соответственно распределенных неподвижных зарядов: то обстоятельство, что в данной точке пространства одни элементы заряда сменяются другими, не может сказываться на напряженности поля, раз только плотность зарядов в каждой точке пространства остается постоянной¹. Стало быть, стационарное поле постоянных токов, как и поле электростатическое, должно быть полем потенциальным.

Из стационарности распределения зарядов в поле постоянных токов вытекает, что токи эти необходимо должны быть замкнутыми, либо уходить в бесконечность, ибо в противном случае в месте начала (истоков) и окончания (стоков) тока происходило бы с течением времени накопление и убывание зарядов. По той же причине через различные сечения проводника (если только между этими сечениями нет разветвлений проводника) должен протекать ток одинаковой силы. Наконец в каждой точке P разветвления цепи тока, в которой соприкасаются между собой два или вообще n проводников, несущих соответственно токи J_i ($i = 1, 2, \dots, n$), должен удовлетворяться так называемый первый закон Киргоффа, согласно которому алгебраическая сумма сил токов, притекающих к точке разветвления цепи, должна равняться нулю:

$$\sum_{i=1}^{i=n} J_i = 0;$$

в противном случае в точке P происходило бы накопление электрических зарядов. При этом для всех проводников, соприкасающихся в точке P , положительное направление тока должно быть, конечно,

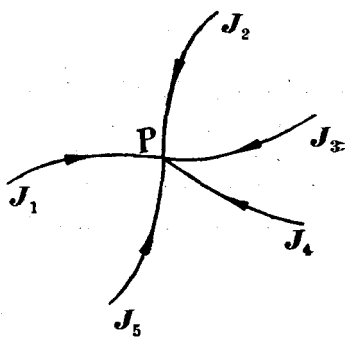


Рис. 47.

¹ Это утверждение является в сущности одним из основных постулатов теории электрического поля.

выбрано одинаково, т. е. совпадающим либо с направлением к точке P , либо с направлением от точки P (см. рис. 47).

Самое общее условие стационарности токов и поля может быть получено следующим образом. Согласно (144") интеграл $\oint j_n dS$ по произвольной замкнутой поверхности S должен равняться алгебраической сумме сил токов, проходящих через отдельные элементы dS этой поверхности, т. е. должен равняться количеству электричества, выходящему за единицу времени из ограниченного поверхностью S объема V (если n есть внешняя нормаль к S). С другой стороны, согласно одному из основных постулатов теории, электричество может лишь перемещаться в пространстве, но не может ни возникать, ни исчезать¹. Следовательно, количество электричества, вышедшего за 1 сек. за пределы объема V , должно равняться убыли $-\frac{de}{dt}$ за тот же промежуток времени заряда e , находящегося внутри этого объема². Так как кроме того предполагается, что перемещение электричества происходит непрерывно в том смысле, что каждый элемент заряда при выходе из объема V должен пересечь границу этого объема S , то, стало быть, должно иметь место равенство:

$$\oint j_n dS = -\frac{de}{dt}. \quad 147$$

Это весьма важное уравнение носит название уравнения непрерывности и является математическим выражением постулата сохранения количества электричества и непрерывности его движения. К этому уравнению нам еще придется вернуться в дальнейшем. В интересующем же нас здесь случае постоянных токов распределение зарядов стационарно, т. е. $\frac{de}{dt} = 0$, так что уравнение непрерывности принимает вид

$$\oint j_n dS = 0. \quad 148$$

¹ Кажущееся возникновение электрических зарядов (например, при электризации двух тел трением) сводится лишь к перераспределению зарядов, ранее существовавших в этих телах, но располагавшихся в них так, что заряды противоположных знаков взаимно нейтрализовались. Поэтому кажущееся возникновение, напр., отрицательного заряда всегда связано с «возникновением» равного количества положительного электричества в смежных участках пространства.

² Знак частной производной должен означать, что при дифференцировании во времени поверхность S и объем V считаются неподвижными.

Если внутри объема V , ограниченного поверхностью S , нет поверхностей разрыва вектора \mathbf{j} (что, вообще говоря, может иметь место лишь на поверхностях соприкосновения двух различных сред), то (148) может быть преобразовано с помощью теоремы Гаусса (25):

$$\oint j_n dS = \int \operatorname{div} \mathbf{j} \cdot dV = 0.$$

Ввиду произвольности объема интегрирования V отсюда следует, что

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad 148'$$

Это уравнение является наиболее общим выражением того факта, что постоянный ток не имеет истоков, т. е. что линии тока всегда замкнуты (либо уходят в бесконечность; сравни сказанное о силовых линиях электрического поля, стр. 58)¹. При этом под линиями тока нужно, очевидно, понимать линии вектора \mathbf{j} , т. е. линии, касательные к которым совпадают с направлением вектора \mathbf{j} в точке касания.

На поверхности соприкосновения двух различных сред вектор плотности тока может испытывать разрыв непрерывности. Однако нормальная к поверхности слагающая этого вектора \mathbf{j} должна быть одинаковой по обеим сторонам поверхности разрыва, ибо в противном случае количество электричества, притекающего к одной стороне этой поверхности, не было бы равно количеству электричества, вытекающему из другой ее стороны. Стало быть,

$$j_{1n} = j_{2n}, \quad 149$$

где \mathbf{j}_1 и \mathbf{j}_2 суть плотности тока в 1-й и 2-й средах, а \mathbf{n} — нормаль к поверхности их соприкосновения.

В частности, если проводник граничит с непроводящей средой, то в ней $\mathbf{j} = 0$, и, следовательно, нормальная к поверхности слагающая плотности тока в проводнике должна равняться нулю:

$$j_n = 0. \quad 149'$$

Благодаря замкнутости постоянных токов их всегда можно разложить на совокупность бесконечно тонких замкнутых (или уходящих

¹ Согласно § 11 для незамкнутых линий тока мыслима еще третья возможность они могут заполнять собой конечные участки пространства. Однако при отсутствии сторонних электродвижущих сил (см. § 28) линии тока согласно (145') совпадают с силовыми линиями стационарного электрического поля, для которых эта возможность согласно § 11 исключена.

в бесконечность) нитей тока. С этой целью выберем произвольную площадку dS внутри проводника и проведем через все точки контура этой площадки линии тока. Образованная совокупностью этих линий цилиндрическая поверхность и выделит из объема проводника так называемую нить тока. Так как через боковую поверхность такой нити электричество, очевидно, не протекает, то сила тока dJ во всех сечениях dS каждой нити должна быть постоянной, т. е.

$$dJ = jdS = \text{const},$$

где под dS надо понимать перпендикулярное к \mathbf{j} сечение нити тока. Так как далее линии тока, а стало быть, и поверхности нитей тока пересекаться нигде не могут (ибо в каждой точке пространства направление линии тока однозначно определяется направлением вектора \mathbf{j}), то каждая нить тока должна замыкаться сама на себя (т. е. быть замкнутой), либо идти из бесконечности в бесконечность (см. примеч. стр. 177).

4. Обратимся теперь к явлению, неразрывно связанному с прохождением тока, а именно к выделению тепла (нагреванию проводников) в цепи тока.

Количество тепла Q , выделяемое током в единицу времени в каком-либо участке цепи, может быть определено следующим образом.

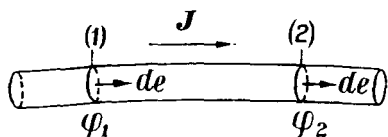


Рис. 48.

Если сила тока в проводнике равна J , то за элемент времени dt через каждое сечение проводника протекает $de = Jdt$ единиц электричества; в частности, столько единиц электричества проникнет через начальное сечение внутри рассматриваемого участка

проводника и такое же количество электричества выйдет из этого участка через его конечное сечение (рис. 48). Так как распределение зарядов в проводнике остается при этом неизменным (постоянный ток!), то весь процесс эквивалентен непосредственному переносу de единиц электричества от сечения 1 к сечению 2.

Совершаемая при этом переносе работа электрических сил равна

$$A = de \int_1^2 E_s ds = Jdt \int_1^2 E_s ds, \quad 150$$

где линейный интеграл может быть взят по оси цилиндрического проводника. Согласно закону сохранения энергии эквивалентное этой

работе электрических сил количество энергии должно выделиться в виде иной формы энергии (например, в форме тепла). Следовательно, выделяемая током энергия равна:

$$Qdt = Jdt \int_1^2 E_s ds,$$

откуда

$$Q = J \int_1^2 E_s ds. \quad 150'$$

Если поле E обладает потенциалом φ , как это имеет место для поля постоянных токов, то согласно (36')

$$Q = J(\varphi_1 - \varphi_2). \quad 151$$

Воспользовавшись, наконец, законом Ома (143), получим:

$$Q = RJ^2. \quad 152$$

Опыт показывает, что это количество энергии Q выделяется током в форме тепла. Таким образом уравнения (150') — (152) выражают собой известный закон Джоуля.

Уже в следующем параграфе мы убедимся, что область приложимости уравнения (152) гораздо шире области приложимости уравнений (150') и (151), хотя в пределах нашего теперешнего рассмотрения все эти уравнения вполне эквивалентны друг другу.

Величина Q , равная количеству выделяющейся в единицу времени энергии, должна, очевидно, иметь размерность мощности. Действительно

$$[Q] = [\varphi J] = (M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}) \cdot (M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}) = ML^2 T^{-3} = \frac{[\text{работа}]}{[\text{время}]}$$

Соответственно этому в абсолютной системе единиц Q измеряется в эргах в секунду. В практической же системе единиц Q измеряется в ваттах: 1 ватт есть энергия, выделяемая током силой в 1 ампер при прохождении разности потенциалов в 1 вольт:

$$\begin{aligned} 1 \text{ ватт} &= 1 \text{ вольт-ампер} = \\ &= \left(\frac{1}{300} \text{ абс. ед. потенциала} \right) (3 \cdot 10^9 \text{ абс. ед. силы тока}) = \\ &= 10^7 \text{ абс. ед. мощности} = 10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{сек.}} \end{aligned}$$

Как известно, в практической системе единиц работа измеряется в джоулях:

$$1 \text{ джоуль} = 10^7 \text{ эрг};$$

поэтому

$$1 \text{ ватт} = 1 \frac{\text{джоуль}}{\text{сек.}}$$

Разумеется выделяемая током энергия Q может быть выражена также и в тепловой мере, т. е. в калориях в секунду.

Закон Джоуля (152), носящий характер закона интегрального, может быть подобно закону Ома преобразован в форму дифференциальную. С этой целью введем вместо Q удельную мощность тока q , т. е. количество тепла, выделяющееся за одну секунду в единице объема проводника:

$$q = \frac{Q}{V},$$

где V есть объем участка проводника, в котором выделяется общее количество тепла Q^1 .

Рассмотрим опять однородный цилиндрический проводник сечения S , длины l и объема $V = Sl$. Согласно (152) и (143') получим:

$$q = \frac{Q}{V} = \frac{RJ^2}{Sl} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{J^2}{S^2},$$

откуда на основании (144)

$$q = \frac{1}{\lambda} j^2, \quad 153$$

или на основании (145')

$$q = \lambda E^2 = jE. \quad 153'$$

Уравнение (153) представляет собою наиболее общую формулировку закона Джоуля, применимую к любым проводникам вне зависимости от их формы, однородности и т. д., наконец, вне зависимости от того, имеем ли мы дело с постоянными или с переменными токами. Что же касается уравнения (153'), то, как мы увидим в следующем параграфе, область приложимости его несколько уже.

¹ Если выделение тепла происходит неравномерно по объему проводника, то как обычно значение q в каждой точке проводника определяется соотношением

$$q = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{Q}{V}.$$

Задача 20. — Показать, что нормальная слагающая электрической индукции у поверхности проводника определяется уравнением

$$D_n = 4\pi\sigma$$

и в том случае, если по проводнику протекает постоянный ток, но что векторы \mathbf{E} и \mathbf{D} при этом перестают быть перпендикулярными поверхности проводника (уравн. 113" перестает быть справедливым).

§ 28. Сторонние электродвижущие силы. Квазилинейные токи. — 1. Существеннейшее отличие стационарного поля постоянных токов от поля электростатического заключается в том, что для поддержания первого необходима непрерывная затрата энергии, тогда как в электростатическом поле никаких превращений энергии не происходит. Действительно, как мы видели, электрический ток, т. е. перенос электричества по проводникам под воздействием сил электрического поля, сопровождается работой этих сил, причем эквивалентное этой работы количество энергии выделяется в форме так называемого *Джаулева* тепла. Ввиду стационарности поля постоянных токов вся энергия, выделяющаяся в цепи тока, должна непрерывно возмещаться за счет других видов энергии — механической (динамомашин), химической (гальванические элементы, аккумуляторы), тепловой (термоэлементы) и т. д. Иными словами, для поддержания постоянного тока необходимо, чтобы в известных участках цепи тока действовали электродвижущие силы не электростатического происхождения (индукционные, контактные на поверхностях соприкосновения различных проводников, термоэлектрические и т. д.); работой этих сил и компенсируется затрата электрической энергии, выделяющейся в форме *Джаулева* тепла.

Если бы все действующие в цепи электродвижущие силы сводились к силам электростатического поля, т. е. к силам Кулоновым, то под воздействием этих сил положительные заряды проводников стекали бы из мест большего потенциала к потенциалам меньшим, отрицательные же двигались бы в обратном направлении, что вело бы к выравниванию потенциалов. В результате все соединенные между собой проводники приобрели бы одинаковый потенциал, и ток прекратился бы. Иными словами, при наличии одних лишь Кулоновых сил стационарное поле должно быть полем статическим. Таким образом мы приходим к выводу, в известном отношении напоминающему теорему Ирэншоу как и в § 18, нам приходится ввести в рассмотрение силы неэлектростатического происхождения, действующие на электрические заряды. Разница лишь в том, что в § 18

введение подобных сил вызывалось необходимостью учесть возможность устойчивого равновесия системы электрических зарядов, теперь же нас вынуждает к этому факт существования постоянных токов.

Итак, мы должны допустить, что на электрические заряды в проводниках помимо электростатических сил стационарного электрического поля может действовать еще некоторое поле сил неэлектростатического происхождения. Для краткости мы будем называть эти силы *сторонними* (электростатическому полю) и будем обозначать напряженность поля сторонних сил через E^{emp} . К сторонним силам в этой главе мы причисляем все электродвижущие силы неэлектростатического происхождения. Весьма важный класс этих сил будет сведен в главе VI к силам переменного электромагнитного поля (индукционным), после чего мы уже не будем применять к ним термин „сторонние“. Помимо этого существуют, однако, силы „сторонние“ в собственном смысле слова, обусловленные химической и физической неоднородностью проводников. Таковы силы, возникающие при соприкосновении проводников различного химического состава (гальванический элемент, аккумулятор) или различной температуры (термоэлемент); при наличии градиента концентрации в растворе электролита („осмотический“ гальванический элемент) и т. д. Конечно, перед электронной теорией материи стоит задача выяснить механизм возникновения „сторонних“ Э. Д. С. этого класса и свести их к взаимодействию электрических зарядов, входящих в состав атомов неоднородных проводников. Задача эта, однако, весьма сложна и пока еще далека от окончательного решения. Мы лишены здесь возможности касаться этих вопросов.

2. Если под действием электростатического поля E в проводнике возникает согласно (145') ток плотности

$$\mathbf{j} = \lambda E,$$

то под совокупным действием поля E и поля сторонних сил E^{emp} должен возникать, очевидно, ток плотности

$$\mathbf{j} = \lambda (E + E^{emp}). \quad 145''$$

Это выражение представляет собою дифференциальную форму обобщенного закона Ома (на случай наличия сторонних электродвижущих сил), из которого нетрудно получить и интегральную форму этого закона. При этом в настоящем параграфе нам достаточно будет ограничиться рассмотрением квазилинейных токов.

Квазилинейными (не смешивать с линейными, о которых будет речь в следующей главе) токами мы будем называть токи, удовлетворяющие следующим условиям: в каждом участке несущего ток проводника можно определить направление его оси так, чтобы во всех точках любого перпендикулярного оси сечения проводника все физические величины (\mathbf{j} , φ , λ , \mathbf{E} , \mathbf{E}^{cmp} и т. д.) можно было с достаточной точностью считать постоянными и чтобы все физические векторы (\mathbf{E} , \mathbf{E}^{cmp} , \mathbf{j}) были параллельны (или антипараллельны) этой оси. Такие токи мы называем квазилинейными потому, что в ряде случаев рассмотрение несущего ток проводника может быть заменено рассмотрением его оси, которую мы будем называть контуром тока.

Рассмотрим произвольный участок квазилинейного тока, заключенный между сечениями 1 и 2, и предположим сначала, что в этом участке нет разветвлений цепи тока. Пусть перпендикулярное к оси сечения проводника равно S , причем, вообще говоря, S может быть переменным по длине проводника. Разделив (145") на λ и помножив его левую часть на $\frac{S}{S} = 1$, получим:

$$\frac{S\mathbf{j}}{S\lambda} = \mathbf{E} + \mathbf{E}^{cmp}.$$

Помножая далее это уравнение скалярно на элемент оси проводника ds , взятый по направлению тока \mathbf{j} , и интегрируя от сечения 1 до сечения 2, получим (ввиду того, что $\mathbf{j} ds = j ds$):

$$\int_1^2 \frac{Sj ds}{S\lambda} = \int_1^2 E_s ds + \int_1^2 E_s^{cmp} ds.$$

Но Sj равно J , причем J , как величину постоянную, можно вынести за знак интеграла. Далее,

$$\int_1^2 \frac{ds}{S\lambda} = R_{12}$$

есть не что иное, как сопротивление участка проводника, лежащего между сечениями 1 и 2, ибо подынтегральное выражение равно сопротивлению единицы длины проводника; в частности, для однородного, проводника постоянного сечения R_{12} совпадает с (143'). Стало быть окончательно:

$$JR_{12} = \int_1^2 E_s ds + \int_1^2 E_s^{cmp} ds, \quad 154$$

что представляет собой наиболее общую интегральную форму обобщенного закона Ома.

3. Линейный интеграл напряженности электрического поля между точками 1 и 2 носит название напряжения, существующего между этими точками, и может быть обозначен через \mathcal{E}_{12} :

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 E_s ds. \quad (154')$$

Напряжение же сторонних электродвижущих сил между точками 1 и 2:

$$\mathcal{E}_{12}^{cmp} = \int_1^2 E_s^{cmp} ds \quad (154'')$$

часто называется просто электродвижущей силой, приложенной между этими точками, и сокращенно обозначается через Э. Д. С. Нужно весьма остерегаться смешивать понятия напряжения \mathcal{E}_{12} и напряженности поля E , тем более, что иногда оба эти понятия обозначаются одним и тем же термином напряжения.

Внося (154') и (154'') в (154), получим:

$$JR_{12} = \mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{12}^{cmp}. \quad (154''')$$

Стало быть, произведение силы тока на сопротивление произвольного участка проводника равно сумме напряжения и сторонней Э. Д. С., приложенных к этому участку.

Если электрическое поле E обладает потенциалом φ , как это имеет место в стационарном поле постоянных токов, то согласно (36')

$$\mathcal{E}_{12} = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (155)$$

и (154'') принимает вид:

$$JR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}^{cmp}. \quad (155')$$

Частным случаем этого уравнения при отсутствии сторонних Э. Д. С. является наше исходное выражение (143), т. е. необобщенный закон Ома.

Если замкнутый квазилинейный ток лишен разветвлений, то, интегрируя в уравнении (154) по всей длине этого тока, получим:

$$JR = \oint E_s ds + \oint E_s^{cmp} ds, \quad (156)$$

где R есть полное сопротивление замкнутого проводника. Если E обладает потенциалом, то согласно (34) первый интеграл обращается в нуль, так что для постоянного тока (156) принимает вид:

$$JR = \oint E_s^{cmp} ds = \mathcal{E}^{cmp}, \quad 156'$$

где \mathcal{E}^{cmp} есть общая Э. Д. С. в цепи тока. Стало быть, сила неразветвленного постоянного тока равна частному от деления полной сторонней Э. Д. С. в его цепи на сопротивление этой цепи. Таким образом при отсутствии сторонних Э. Д. С. сила постоянного тока должна равняться нулю, как это уже отмечалось в начале параграфа.

Рассмотрим, наконец, произвольную цепь квазилинейных токов с произвольным числом разветвлений (рис. 49) и составим из отдельных участков этой цепи какой-либо произвольный замкнутый контур L , например, 1 2 3 1. Пусть J_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) есть сила тока

в отрезке ik , причем величину J_{ik} мы будем считать положительной, если ток идет от точки i к точке k , и отрицательной в противоположном случае. Составляя для каждого участка цепи уравнение типа (155') и суммируя, получим:

$$\sum J_{ik} R_{ik} = \sum (\varphi_i - \varphi_k) + \sum \mathcal{E}_{ik}^{cmp}.$$

Но

$$\sum (\varphi_i - \varphi_k) = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + (\varphi_3 - \varphi_1) = 0,$$

и стало быть

$$\sum J_{ik} R_{ik} = \sum \mathcal{E}_{ik}^{cmp}. \quad 157$$

Итак, в любом замкнутом контуре токов алгебраическая сумма произведений типа $J_{ik} R_{ik}$ равна сумме сторонних Э. Д. С., приложенных к этому контуру. Это положение носит название 2-го закона Кирггоффа. Очевидно, что (156') есть частный случай применения этого закона к неразветвленной цепи тока.

4. Обратимся теперь к вопросу о выделении (Джаулева) тепла в цепи тока. При наличии сторонних электродвижущих сил уравнение (150') примет, очевидно, вид:

$$Q = J \int_1^2 E_s ds + J \int_1^2 E_s^{cmp} ds = J(\mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{12}^{cmp}), \quad 158$$

откуда на основании обобщенного закона Ома (154")

$$Q = J^2 R_{12}, \quad 158'$$

что полностью совпадает с уравнением (152), которое, таким образом, оказывается применимым и в случае наличия сторонних Э. Д. С. Если электрическое поле \mathbf{E} обладает потенциалом, то, внося (155) в (158), получим:

$$Q = J(\varphi_1 - \varphi_2) + J \mathcal{E}_{12}^{cmp}, \quad 158''$$

что при наличии сторонних Э. Д. С. должно заменить собой уравнение (151).

В предшествующем параграфе мы убедились, что из (152) или (158') следует (153), так что уравнение это:

$$q = \frac{1}{\lambda} j^2$$

остаётся справедливым и при наличии сторонних сил; вместо же (153') мы из (153) и (145'') получаем:

$$q = \lambda (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{cmp})^2 = \mathbf{j} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{cmp}), \quad 153''$$

что выражает собой тот факт, что тепло, выделяемое током в каждом элементе объема проводника, равно сумме работ сил электрического поля и сил сторонних. Но как указывалось в начале этого параграфа, общая работа электрических сил стационарного поля постоянных токов должна равняться нулю, ибо в противном случае энергия этого поля уменьшалась бы и оно не могло бы быть стационарным. Стало быть, общее количество тепла, выделяющегося во всей цепи тока, должно равняться работе сторонних Э. Д. С. И, действительно, применяя (158') ко всей длине неразветвленного замкнутого проводника и приняв во внимание, что в поле постоянных токов \mathbf{E} обладает потенциалом, получим на основании (156'):

$$Q = J \mathcal{E}^{cmp}, \quad 159$$

что является математической формулировкой высказанного только что положения.

5. Чтобы получить представление о превращениях энергии в цепи тока, представим себе, что все сторонние Э. Д. С. сосредоточены в одном из участков a этой цепи¹. Стало быть, и работа этих Э. Д. С. будет

¹ Можно представить себе, например, что в этот участок цепи включен аккумулятор или динамо постоянного тока.

совершаться лишь в этом участке a , тогда как выделение тепла будет происходить во всех участках цепи. Так как общее количество выделяемого тепла равно работе Э. Д. С. в участке a , то с энергетической точки зрения роль электрического тока сводится к переносу отдаваемой сторонними силами энергии в отдаленные участки цепи.

Пусть, например, мы имеем дело с неразветвленным замкнутым квазилинейным проводником, границами участков a и b которого являются точки 1 и 2 (рис. 50), и пусть сосредоточенная в участке a Э. Д. С. \mathcal{E}^{cmp} направлена от 1 к 2:

$$\mathcal{E}^{cmp} = \oint E_s^{cmp} ds = \int_1^2 E_s^{cmp} ds = \mathcal{E}_a^{cmp} > 0,$$

так что согласно (155')

$$JR_a = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_a^{cmp},$$

где R_a есть сопротивление участка a . Так как с другой стороны согласно (156')

$$JR = J(R_a + R_b) = \mathcal{E}^{cmp} = \mathcal{E}_a^{cmp},$$

то¹

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\mathcal{E}_a^{cmp} R_b}{R_a + R_b} > 0.$$

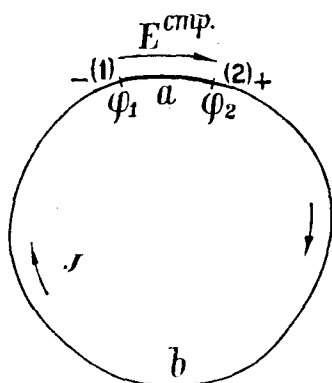


Рис. 50.

Во „внешнем“ участке цепи b действуют лишь силы электрического поля, так что положительные заряды будут стекать по b от большего потенциала φ_2 к меньшему потенциалу φ_1 . Это должно было бы повести к выравниванию потенциалов и прекращению тока, если бы на участке a не действовали сторонние Э. Д. С., которые гонят положительные заряды по участку a от 1 к 2, т. е. от меньшего потенциала φ_1 к большему φ_2 , против действующих в этом участке Кулоновых сил электростатического поля. Так как согласно последнему уравнению $\mathcal{E}_a^{cmp} > \varphi_2 - \varphi_1$, то заряды эти действительно будут двигаться по a „против“ разности потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ и по направлению Э. Д. С.

¹ Таким образом разность потенциалов на концах участка цепи, к которому приложена сторонняя Э. Д. С., вообще говоря, меньше этой силы и может считаться равной ей лишь в том случае, если сопротивление R_a этого участка исчезающе мало по сравнению с «внешним» сопротивлением R_b . Точное же равенство величин $\varphi_2 - \varphi_1$ и \mathcal{E}_a^{cmp} осуществляется в том случае, если цепь разомкнута ($R_b = \infty$).

Итак, Э. Д. С. непрерывно „нагнетает“ заряды по a от 1 к 2, откуда они опять стекают по b к 1 и т. д. Работа сил электрического поля в участке a будет отрицательной, в участке b положительной, в сумме же равна нулю (как при всяком движении зарядов в потенциальном поле по замкнутому пути). Работа же сторонних Э. Д. С. (положительная) будет совершаться лишь на участке a . При этом в участке a будет выделяться количество тепла, эквивалентное алгебраической сумме положительной работы Э. Д. С. и отрицательной работы сил поля; избыток же работы Э. Д. С. над количеством этого тепла будет выделяться током в участке b .

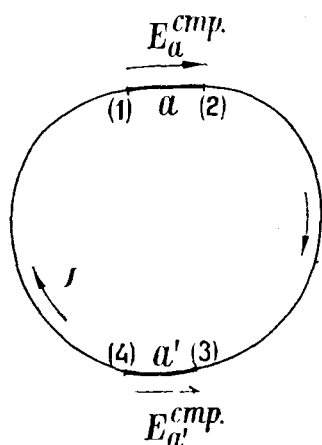


Рис. 51.

Рассмотрим, наконец, случай, когда в цепи тока имеется не один, а два участка a и a' , в которых проложены сторонние Э. Д. С. $\mathcal{E}_a^{\text{смп}}$ и $\mathcal{E}_{a'}^{\text{смп}}$, направленные противоположно друг другу. Если $\mathcal{E}_a^{\text{смп}} > \mathcal{E}_{a'}^{\text{смп}}$, то ток будет направлен так, как указано на рис. 51. В участке a направление тока будет совпадать с направлением Э. Д. С. $\mathcal{E}_a^{\text{смп}}$, которая будет, следовательно, совершать положительную работу $J\mathcal{E}_a^{\text{смп}}$, тогда как Э. Д. С. $\mathcal{E}_{a'}^{\text{смп}}$ будет совершать отрицательную работу $-J\mathcal{E}_{a'}^{\text{смп}}$, наконец в цепи тока будет выделяться

$$Q = J^2 R = J(\mathcal{E}_a^{\text{смп}} - \mathcal{E}_{a'}^{\text{смп}})$$

единиц тепла в единицу времени. Таким образом работа Э. Д. С. в участке a будет идти, во-первых, на выделение тепла Q и, во-вторых, на преодоление сопротивления, оказываемого току Э. Д. С. $\mathcal{E}_{a'}^{\text{смп}}$ в участке a' , в котором, таким образом, ток будет совершать положительную работу $J\mathcal{E}_{a'}^{\text{смп}}$. Другими словами, в цепи будет происходить перенос энергии от a к b с потерями Q на тепло. Так будет обстоять дело, например, в том случае, если в a будет включена динамо или гальванический элемент, а в b — электромотор (вращение которого сопровождается появлением электродвижущих сил индукции, направленных против тока, см. гл. VI) или заряжаемый ток аккумулятором.

6. Закончим несколькими замечаниями общего характера о так называемых „контактных“ Э. Д. С. Эти „сторонние“ электродвижущие силы возникают в пограничном слое между соприкасающимися проводниками различного химического состава; величина их зависит от

химической природы соприкасающихся проводников (а также и других физических условий, например, температуры), но не от формы и размера проводников. Толщина слоя, в котором действуют эти контактные Э. Д. С., столь мала, что с достаточной степенью точности можно считать их сосредоточенными на поверхности соприкосновения проводников. Полагая, что сопротивление R_{12} , испытываемое током при прохождении через бесконечно тонкую поверхность соприкосновения проводников 1 и 2, равно нулю, получим из (155') для двух смежных точек, лежащих по разным сторонам поверхности соприкосновения:

$$\mathcal{E}_{12}^{cmp} = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Стало быть, контактная Э. Д. С. поддерживает между проводниками 1 и 2 равную ей контактную разность (или скачок) потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ ¹.

Если из нескольких последовательно соединенных проводников (1, 2, 3 и т. д.) различной химической природы составить замкнутую цепь, то на каждой поверхности их соприкосновения (1, 2), (2, 3) и т. д. будут действовать контактные Э. Д. С. \mathcal{E}_{12}^{cmp} , \mathcal{E}_{23}^{cmp} и т. д. Сила тока в цепи согласно 2-му закону Киргоффа (157) будет определяться суммой этих Э. Д. С.

Как известно, все проводники могут быть подразделены на два класса. Проводники 1-го класса, к которым относятся все металлы, обладают тем свойством, что в любой цепи, составленной только из этих проводников, алгебраическая сумма контактных Э. Д. С. всегда равна нулю. Стало быть, ток в подобной цепи при отсутствии Э. Д. С. иного происхождения (например, термоэлектрических) возникнуть не может. Из этого следует в частности, что контактные Э. Д. С. между любыми тремя проводниками 1 класса связаны соотношением:

$$\mathcal{E}_{13}^{cmp} = \mathcal{E}_{12}^{cmp} + \mathcal{E}_{23}^{cmp},$$

ибо, образовав из этих проводников замкнутую цепь, мы должны получить:

$$\mathcal{E}_{12}^{cmp} + \mathcal{E}_{23}^{cmp} + \mathcal{E}_{31}^{cmp} = 0.$$

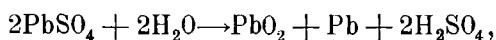
¹ Можно предположить (Гельмгольц), что этот скачок потенциала обуславливается существованием на границе раздела проводников двойного электрического слоя (§ 15). Однако при этом все же остается открытым вопрос о природе сил, поддерживающих существование этого двойного [слоя, ибо ясно, что при отсутствии сторонних сил двойной слой существовать не может — противоположные заряды его должны соединиться и взаимно нейтрализоваться.

Эти соотношения дают право при изучении токов в цепи металлических проводников не принимать во внимание контактных Э. Д. С. между ними.

Если же, однако, в цепь входят проводники 2-го класса, к которым в первую очередь относятся электролиты, то сумма контактных Э. Д. С., вообще говоря, будет отлична от нуля, и в цепи возникает ток. На этом свойстве проводника 2-го рода основано устройство гальванических элементов и аккумуляторов, которые представляют собою совокупность последовательно соединенных проводников 1-го и 2-го рода.

С энергетической точки зрения это различие проводников 1-го и 2-го рода сводится к тому, что при прохождении тока через цепь проводников 1-го рода общая работа контактных Э. Д. С. равна нулю, тогда как при наличии в цепи проводников 2-го рода работа эта, вообще говоря, отлична от нуля. Эта работа контактных Э. Д. С. совершается за счет химической энергии проводников 2-го рода, прохождение тока по которым всегда сопровождается химическими реакциями в них. Так, например, обыкновенный свинцовый аккумулятор состоит из двух погруженных в раствор серной кислоты свинцовых пластин, одна из которых покрыта слоем окиси свинца PbO_2 . При включении аккумулятора в цепь контактные Э. Д. С., действующие на поверхностях соприкосновения Pb и PbO_2 с раствором H_2SO_4 , вызывают электрический ток, при прохождении которого вещество пластин Pb и PbO_2 вступает в химическую реакцию с H_2SO_4 , в результате чего на обеих пластинах появляется $PbSO_4$. Эта реакция связана с выделением химической энергии, которая в обычных условиях опыта полностью выделяется в форме тепла, тогда как в аккумуляторе часть ее затрачивается на поддержание тока в цепи. Правда, в конечном счете и эта часть химической энергии переходит в Джаулево тепло, которое, однако, выделяется не в самом аккумуляторе, а в других участках цепи тока.

Обратно, при зарядке аккумулятора через него пропускается ток внешнего источника в направлении, обратном Э. Д. С. аккумулятора. Таким образом ток этот совершает в аккумуляторе положительную работу, которая помимо нагревания затрачивается частью на обратную химическую реакцию



сопровождающуюся поглощением энергии и приводящую аккумулятор в „заряженное“ состояние (сравни стр. 188).

Как уже упоминалось в начале этой главы, тот факт, что прохождение тока через электролиты сопровождается химическими реакциями,

обуславливается тем, что перенос тока в них осуществляется движением ионов, т. е. заряженных атомов или групп атомов, тогда как носителями тока в металлах служат не ионы, а „свободные“ электроны.

Заметим в заключение, что существование сторонних Э. Д. С. должно быть, конечно, учтено и в электростатике. Так, например, в химически или физически неоднородном проводнике условие электростатического равновесия сводится не к равенству нулю напряженности E электрического поля внутри проводника, а к

$$E + E^{cmp} = 0 \text{ или } E = -E^{cmp},$$

ибо лишь при этом условии тока в проводнике не будет (см. 145").

Задача 21. — Определить, каково должно быть сопротивление R' электрического нагревательного прибора, предназначенного для включения в цепь тока заданного сопротивления R , для того чтобы в этом приборе выделялось максимальное количество тепла.

Задача 22. — A , B и C суть три последовательные станции на линии телеграфа (рис. 52). Телеграфист в A знает, что между A и B произошло нарушение изоляции линии (что равносильно ее заземлению). Включая батарею между землей и своим концом линии, он измеряет возникающую при этом в линии силу тока при трех различных условиях: 1) линия заземлена на станции C и изолирована в B ,

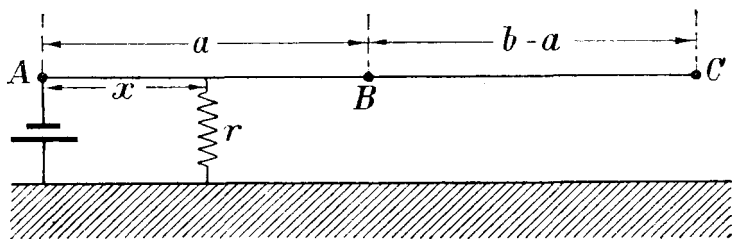


Рис. 52.

ток J , 2) линия заземлена в B и изолирована в C , ток J' , 3) линия изолирована и в B и в C , ток J'' . Определить расстояние точки повреждения линии от A .

§ 29. Электронная теория электропроводности металлов.—1. Как уже упоминалось в § 5, простейшее представление о механизме переноса тока по металлу сводится к следующему:

Если металл находится в твердом (или жидком) состоянии, то известная часть его атомов находится в ионизированном состоянии, т. е.

расщепляется на один или несколько электронов и на положительный ион. Эти ионы и оставшиеся неионизированными атомы, располагаясь в узлах кристаллической решетки и совершая лишь небольшие колебания около своих положений равновесия, образуют твердый скелет металлического тела. Отщепленные же от ионов так называемые „свободные“ электроны беспорядочно движутся в промежутках между ионами, образуя собой своего рода электронный „газ“. В отсутствие внешнего электрического поля электроны эти находятся в совершенно беспорядочном тепловом движении; возникновение же поля ведет к увлечению электронов в направлении действующих на них сил поля, т. е. к появлению электрического тока. Сталкиваясь в своем движении с ионами металла, электроны передают им избыток кинетической энергии, приобретенной ими под действием сил поля, что ведет к увеличению энергии теплового движения (колебания) ионов, т. е. к нагреванию металла (выделение Джаулева тепла).

С точки зрения этого представления о механизме тока в металлах ряд наблюдаемых в них явлений получает чрезвычайно простое истолкование и объяснение¹. К числу их относятся, например, упоминавшиеся в § 11 термоионные явления, состоящие в испускании раскаленными металлами в окружающее их пространство потока свободных (в подлинном смысле слова) электронов. При обычных температурах находящиеся в металлах „свободные“ электроны не могут выйти за поверхность металла ввиду того, что в поверхностном слое металла они подвергаются действию задерживающих сил, направленных внутрь, металла². Но при нагревании металла скорость теплового движения его электронов возрастает, так что при достаточно высоких температурах часть этих электронов приобретает столь большой запас кинетической энергии, что им удается преодолеть тормозящие силы поверхностного слоя и выйти из металла наружу. Характер количественной зависимости интенсивности термоионного потока электронов от темпе-

¹ Наиболее прямое доказательство того факта, что носителями тока в металлах действительно являются электроны, принесли с собой опыты Толмена (*Phys. Revue*, 8, 97, 1916 и 28, 794, 1926). Толмен измерял силу электрических токов, возникающих в металле при сообщении ему ускорения и обусловленных отставанием «свободных» электронов от движения кристаллической решетки металла. По силе этих токов можно определить отношение заряда «свободных» носителей тока в металле к массе этих носителей. Отношение это оказалось равным отношению заряда электрона к его массе.

² Необходимость ввести в рассмотрение поверхностные силы подобного рода, вопроса о физической природе которых мы здесь касаться не будем, была выяснена нами в § 18.

ратуры металла достаточно хорошо согласуется с этим представлением о механизме термоионных явлений.

2. При изложении количественной стороны теории мы принуждены ограничиться выводом закона Ома в связи с определением величины электропроводности металла.

Хотя между „свободными“ электронами и ионами в металле и существуют электрические силы отталкивания и притяжения, однако в первом приближении мы вправе рассматривать „электронный“ газ в металле как газ идеальный, т. е. считать, что в промежутках между столкновениями электроны движутся по законам движения материальных точек, подверженных действию одной лишь силы внешнего (макроскопического) поля E .

Пусть в единице объема металла находится n свободных электронов массы m и заряда e , пусть среднее численное значение скорости их теплового движения равно v . Ввиду беспорядочности теплового движения все направления скорости v равновероятны, так что соответствующая этому движению средняя плотность тока равна нулю. Под воздействием поля E электроны приобретают некоторую добавочную среднюю скорость u , параллельную действующей на них силе eE ; средняя плотность тока j зависит, очевидно, лишь от этого упорядоченного движения электронов. Через единицу перпендикулярного E сечения проводника за единицу времени пройдут все электроны, находившиеся от него на расстоянии меньшем или равном u , т. е. все электроны, расположенные в цилиндре сечения 1 и высоты u . Число их равно nu , несомый же ими заряд равен enu ; стало быть (сравни 57"),

$$j = enu. \quad 160$$

Чтобы определить величину u , заметим, что электрон накапливает параллельную силе eE скорость u лишь во время свободного своего полета между двумя последовательными столкновениями с другими электронами или с ионами. При каждом же столкновении электрона направление и величина его скорости изменяются по закону случая. Стало быть, непосредственно после столкновения среднее значение u равно нулю, а непосредственно перед столкновением

$$u = \frac{eE}{m} \tau,$$

где $\frac{eE}{m}$ равно ускорению, сообщаемому электрону силой eE , а τ обозначает

среднюю продолжительность свободного полета электронов. Таким образом среднее значение u равно:

$$u = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \tau.$$

С другой стороны, если l есть средняя длина свободного пробега электрона, то

$$\tau = \frac{l}{v},$$

ибо во всех практически интересных случаях (по крайней мере при нормальной температуре) $v \gg u$ и поэтому при подсчете средней продолжительности свободного полета мы вправе приравнять среднее численное значение скорости электрона скорости его теплового движения.

Внося полученные нами выражения в (160), получим:

$$j = \frac{e^2 n l}{2 m v} E.$$

Таким образом плотность тока оказывается пропорциональной напряженности поля E , как того требует закон Ома (145)¹; далее коэффициент этой пропорциональности, т. е. электропроводность металла λ , оказывается равной:

$$\lambda = \frac{e^2 n l}{2 m v}. \quad 161$$

Согласно основным положениям классической статистической механики средняя энергия поступательного теплового движения молекул любого газа зависит лишь от абсолютной температуры T , но не от его химической природы и молекулярного веса газа, и равна:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \alpha T,$$

¹ Заметим, что справедливость закона Ома (и непосредственно вытекающего из него закона Држауля) тесно связана с предположением, что $u \ll v$, т. е. что кинетическая энергия, приобретаемая электронами под воздействием поля E , почти целиком передается при соударениях ионам металла, так что средняя скорость электронов при наличии поля лишь незначительно превышает скорость их в отсутствие поля (при той же температуре металла). В случае термоионного тока эти условия не выполняются, и закон Ома оказывается благодаря этому, а также благодаря наличию «пространственного заряда», вовсе неприменимым (см. стр. 62).

где $\alpha = \frac{3}{2} k = 2,06 \cdot 10^{-16} \frac{\text{эрг}}{\text{градус}}$, а k есть постоянная Больцмана. Полагая, что это соотношение справедливо и для „электронного газа“ внутри металлов, получим из (161)

$$\lambda = \frac{e^2 n l v}{2 m v^2} = \frac{e^2 n l v}{4 \alpha T} \quad (161')$$

3. К сожалению, ни (161), ни (161') не могут быть проверены непосредственно сравнением с данными опыта, ибо мы не знаем ни абсолютного значения величин n и l , ни характера зависимости их от температуры. Однако косвенная проверка этих уравнений все же может быть осуществлена следующим путем.

Все металлы являются, как известно, не только хорошими проводниками электричества, но и хорошими проводниками тепла. С точки зрения электронной теории это совпадение объясняется не простой случайностью, а является следствием одной общей причины — присутствия в металлах свободных электронов. Напротив, твердые диэлектрики являются большей частью плохими проводниками тепла. Тепловое движение в диэлектриках сводится к колебаниям атомов около положения их устойчивого равновесия. Благодаря столкновениям между совершающими колебания атомами, добавочная энергия колебания, сообщенная нагретому участку тела, перераспределяется между всеми атомами тела, т. е. происходит выравнивание температуры теплопроводностью. В металлах же, в отличие от непроводников, передача тепла от нагретого участка тела к смежным с ним участкам осуществляется не только столкновениями атомов, но также, и притом по преимуществу, свободными электронами. Приобрет в нагретом участке добавочную энергию движения, легкоподвижные электроны сравнительно быстро переносят ее в своем движении в смежные участки тела и тем самым значительно ускоряют процесс теплопроводности.

Учтя преобладающую роль электронов в этом процессе, можно в первом приближении положить, что удельная теплопроводность металла k равна теплопроводности электронного газа, находящегося внутри металла. Если так, то согласно известной формуле кинетической теории газов k должно равняться:

$$k = \frac{1}{3} \alpha n l v.$$

В выражение для k таким образом тоже входят неизвестные нам величины n и l , однако отношение

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{4 a^2}{3 e^2} T$$

зависит лишь от температуры T и известных величин e и a . Вставляя их численные значения, получим:

$$\frac{k}{\lambda T} = 2,27 \cdot 10^8 \text{ абс. С. Г. С. ед.}$$

Таким образом отношение $\frac{k}{\lambda T}$ должно быть универсальной постоянной, не зависящей ни от температуры, ни от химической природы металла. Этот вывод полностью совпадает с чисто эмпирическим законом Видемана — Франца, который был сформулирован на основании опытных данных задолго до возникновения теории. Изложенный вывод этого закона является одним из важнейших достижений электронной теории металлов. Не только постоянство отношения $\frac{k}{\lambda T}$, но и теоретически вычисленное значение этого отношения в известных пределах совпадает с данными опыта (см. таблицу).

Металл	T	$\frac{k}{\lambda T}$ измер.	$\frac{k}{\lambda T}$ теорет.
Медь	373,1	$2,33 \cdot 10^8$	} $2,27 \cdot 10^8$
»	273,1	$2,23 \cdot 10^8$	
Платина	373,1	$2,60 \cdot 10^8$	
»	273,1	$2,51 \cdot 10^8$	
Золото	373,1	$2,40 \cdot 10^8$	
»	273,1	$2,35 \cdot 10^8$	

4. Однако при ближайшем рассмотрении это столь близкое совпадение теории с опытом оказывается в значительной мере призрачным. Во-первых, при выводе выражений для λ и k нами не было учтено, что v есть лишь средняя скорость движения электронов, тогда как скорости отдельных электронов обладают в действительности весьма различными, изменяющимися во времени значениями. Если учесть это

обстоятельство, приняв Максвеллов закон распределения скоростей электронов, то теоретическое значение отношения $\frac{k}{\lambda T}$ окажется равным:

$$\frac{k}{\lambda T} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ абс. ед.},$$

что значительно хуже совпадает с данными опыта. Во-вторых, при низких температурах наблюдаются резкие отклонения от закона Видемана — Франца; так, например, при $T = 20,1^\circ$ значение величины $\frac{k}{\lambda T}$ для меди падает до $0,15 \cdot 10^8$. Наконец изложенная теория, которую мы для краткости будем называть теорией „свободных“ электронов, встречается с рядом непреодолимых трудностей при попытках объяснить термоэлектрические, гальвано-магнитные и т. п. явления в металлах. Укажем далее на невозможность согласовать в пределах этой теории эмпирически найденные значения электропроводности и теплоемкости металлов. Если электронный газ может быть уподоблен газу идеальному, то теплоемкость C_v единицы его объема согласно кинетической теории газов должна равняться

$$C_v = \frac{2,97n}{N_0} \text{ калорий},$$

где n попрежнему есть число электронов в единице объема металла, а N_0 — постоянная Авогадро. Если приписать теплоемкости электронного газа в металлах наибольшее из согласующихся с данными опыта значений, то из выражения для C_v можно определить верхний предел величины n . Вставив его в (161') и зная из опыта величину λ , мы получаем возможность определить нижний предел длины свободного пробега электрона l , который, например, для серебра при нормальной температуре оказывается равным $l \geq 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, а при $T = 14^\circ$, $l \geq 2 \cdot 10^{-3} \text{ см}$. Эти значения величины свободного пути, проходимого электроном между двумя последовательными столкновениями, никак не могут быть согласованы с тем фактом, что порядок расстояния между смежными атомами металлов, как и других твердых тел, равен всего лишь 10^{-8} см .

Таких неувязок теории с опытом можно насчитать довольно много. Однако решающее опровержение теории свободных электронов принесло с собой изучение металлов при низких температурах.

Теория свободных электронов с необходимостью приводит к выводу, что при приближении к температуре абсолютного нуля электропро-

водность всех металлов должна падать до нуля. Действительно, при $T=0$ всякое тепловое движение молекул прекращается, газообразное состояние становится невозможным, и все газы сжижаются и отвердевают. То же должно случиться и с электронным газом в металлах: отщепленные от атомов металла свободные электроны должны „осесть“ и воссоединиться с ионами металла, ибо электроны эти подвержены притяжению со стороны положительных ионов и лишь тепловое движение электронов позволяет им преодолевать это притяжение. Между тем давно уже было известно, что понижение температуры металла сопровождается повышением его проводимости. Правда, долгое время предполагалось, что при очень низких, недоступных в то время температурах это повышение проводимости должно согласно требованию теории прекратиться и смениться быстрым падением ее до нуля. Однако после того, как Каммерлингу-Оннесу удалось получить с помощью жидкого гелия весьма низкие температуры вплоть до $-272,3^{\circ}\text{C}$, т. е. $T=0,8^{\circ}$, выяснилось, что не только нет никакого уменьшения электропроводности металлов при приближении к абсолютному нулю, но что сопротивление некоторых металлов при определенной температуре внезапно (скачком) падает до нуля, или во всяком случае до неизмеримо малой величины. Из исследованных металлов обнаруживают это так называемое явление сверхпроводимости ртуть, олово, свинец, таллий и индий, причем состояние сверхпроводимости наступает в этих металлах при температурах от $2,5^{\circ}$ (Fl) до $7,2^{\circ}$ (Pb) абс. температуры.

Поскольку сопротивление сверхпроводников равно нулю (или близко нулю), в них не должно иметь место выделение Джаулева тепла, и токи, раз возникнув, должны продолжаться неопределенно долгое время в отсутствие всякой сторонней Э. Д. С. Действительно, Каммерлинг-Оннес возбуждал в сверхпроводниках индукционные токи, которые, раз возникнув, длились сутками, причем, как показали измерения, сила их если, быть может, и убывала постепенно, то во всяком случае не больше чем на $1/80\,000$ долю своей величины за 1 час времени.

Совершенно ясно, что теория свободных электронов совершенно не в состоянии объяснить ни самых явлений сверхпроводимости, ни тем более той внезапности, с которой эти явления наступают при вполне определенной температуре (скачок проводимости). Если допустить, что сверхпроводники все же обладают некоторым ничтожным остаточным сопротивлением, выбрать для величины этого сопротивления наибольшее совместимое с опытными данными значение, и рассчитать по теории свободных электронов соответствующую этому

сопротивлению длину свободного пути электронов в металле, то окажется, что длина эта в 10 000 раз превышает диаметр применявшейся в опытах проволоки.

Итак, теория свободных электронов, в качественном (а в некоторых случаях и в количественном) отношении хорошо истолковывающая явления, происходящие в металлах при обычных и при высоких температурах, терпит полное крушение при обращении к низким температурам. Это обстоятельство не случайно. В целом ряде других вопросов (например, в вопросе о теплоемкости твердых тел, в том числе и диэлектриков) выяснилась полная невозможность истолковать с точки зрения классической теории явления, наблюдающиеся при низких температурах, и необходимость применять к ним теорию квантов. Вряд ли можно сомневаться в том, что и вопрос о механизме прохождения тока по металлам может быть разрешен только в рамках новой квантовой теории. Однако пока сколько-нибудь разработанной квантовой теории электропроводности еще нет, нам все же приходится пользоваться представлениями теории „свободных“ электронов, в которой, несмотря на все отмеченные недостатки, несомненно, заключается некоторое здоровое зерно истины¹.

*

¹ В самое последнее время появился ряд работ Зоммерфельда и его сотрудников, посвященных теории металлов (см. обзоры в «Naturwissensch.» 1927, Heft 41, и 1928, Heft 21). Сохраняя представление о наличии в металлах «свободных» электронов, Зоммерфельд применяет, однако, к этому электронному «газу» не классическую, а новую квантовую статистическую механику Ферми-Дирака. Теория Зоммерфельда при всей своей прозорливости устраняет основные трудности, стоявшие на пути прежней теории металлов, и удачно объясняет весь комплекс явлений, связанных с электропроводностью. Основное отличие выводов теории Зоммерфельда от классической сводится к двум пунктам: 1) скорость электронов в металле практически не зависит от температуры, 2) теплоемкость электронного газа практически равна нулю.

IV. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ В ОТСУТСТВИИ НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ СРЕД

*

§ 30. Пондеромоторное взаимодействие элементов тока. — Известно, что между проводниками, по которым протекают электрические токи, возникают пондеромоторные (механические) силы взаимодействия, зависящие от силы этих токов и расположения проводников; эти силы взаимодействия могут быть непосредственно измерены обычными методами измерения механических сил. Для краткости мы будем иногда называть силы взаимодействия обтекаемых током проводников просто силами взаимодействия токов. Техническое использование этих сил составляет одну из самых важных задач электротехники (электромоторы, некоторые типы гальванометров и т. д.).

Подобно тому, как первой задачей электростатики является сведение сил взаимодействия заряженных тел к силам взаимодействия элементарных (точечных) зарядов, так и теперь мы прежде всего постараемся свести силы взаимодействия токов к силам взаимодействия элементов этих токов. Однако разрешение этой задачи сопряжено со значительными методологическими трудностями. Ибо мы можем экспериментировать с заряженными телами, размеры которых произвольно малы по сравнению с их расстоянием друг от друга („точечные“ заряды), но мы не можем изолировать отдельные элементы постоянных токов, цепь которых не может не быть замкнутой. Можно, конечно, закрепить неподвижно все входящие в цепь проводники, оставив подвижным лишь небольшой участок цепи („элемент тока“), и таким образом измерить силу, действующую на этот элемент¹. Однако сила эта будет равнодействующей сил, вызываемых наличием всех прочих элементов замкнутых токов. Ясно, что знания равнодействующей недостаточно для однозначного определения слагающих. Поэтому в рамках учения о постоянных токах единственно

¹ По силе, которую необходимо приложить к этому элементу, чтобы удержать его в равновесии.

целесообразная постановка вопроса сводится к вопросу о равнодействующей силе, испытываемой элементом тока со стороны токов замкнутых. Однако в дальнейшем мы перейдем к изучению переменных токов, могущих быть и незамкнутыми (через проводники); наконец электронная теория, базируясь на обширном опытном материале, сводит силы взаимодействия токов к взаимодействию движущихся электронов, каждый из которых представляет элемент тока в точном смысле этого слова. Предвосхищая результаты исследования переменных токов и выводы электронной теории, мы в основу всех наших рассуждений положим определенный закон взаимодействия элементов токов, рассматривая его как данный опытом.

Пусть длины ds_1 и ds_2 двух элементов тока J_1 и J_2 (рис. 53) и сечения их настолько малы по сравнению с их расстоянием R_{12} , что это расстояние можно считать одинаковым для любой пары точек элементов ds_1 и ds_2 . Пусть далее положительное направление векторов ds_1 и ds_2 совпадает с направлением токов J_1 и J_2 , а вектор R_{12} направлен от ds_1 к ds_2 . Пусть, наконец, F_{12} есть сила, с которой элемент ds_1 действует на элемент ds_2 . Как направление, так и величина этой силы зависит не только от длины элементов ds_1 и ds_2 , но и от их направления. Примем, как данное опытом (осуществимым лишь вне области постоянных токов), что сила F_{12} лежит в плоскости, проходящей через R_{12} и ds_1 , и что кроме того она перпендикулярна элементу ds_2 . Как известно, тем же условиям удовлетворяет вектор

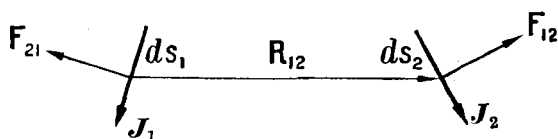


Рис. 53.

$$\left[ds_2 [ds_1 R_{12}] \right].$$

Поэтому сила F_{12} должна быть либо параллельна, либо антипараллельна этому вектору. Опыт решает вопрос в смысле первой возможности, так что F_{12} должна быть равна произведению вектора $\left[ds_2 [ds_1 R_{12}] \right]$ на некоторый положительный скаляр. Значение этого скаляра может быть определено из того факта, что, как показывает опыт, сила F_{12} при заданном направлении токов пропорциональна силам этих токов J_1 и J_2 и длине элементов ds_1 и ds_2 , обратно пропорциональна квадрату их расстояния R_{12} , и больше ни от каких

других величин не зависит¹. Единственное выражение для силы \mathbf{F}_{12} , совместимое со сделанным предположением, имеет вид:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{c^2} \frac{J_1 J_2}{R_{12}^3} \left[ds_2 [ds_1 \mathbf{R}_{12}] \right], \quad 162$$

где c^2 есть некоторый положительный фактор пропорциональности, зависящий лишь от выбора единиц измерения. Заметим, что этот коэффициент c должен иметь размерность скорости: $[c] = LT^{-1}$, ибо из (162) следует:

$$[c^2] = \left[\frac{J^2}{F} \right] = \frac{(M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} \cdot T^{-2})^2}{M \cdot L \cdot T^{-2}} = L^2 T^{-2}.$$

В основу всех дальнейших рассуждений мы положим закон взаимодействия, выраженный уравнением (162). Очевидно, что сила \mathbf{F}_{21} , с которой элемент тока ds_2 действует на элемент ds_1 получится из (162) заменой индекса 1 на 2 и обратно:

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{c^2} \frac{J_1 J_2}{R_{21}^3} \left[ds_1 [ds_2 \mathbf{R}_{21}] \right]. \quad 162'$$

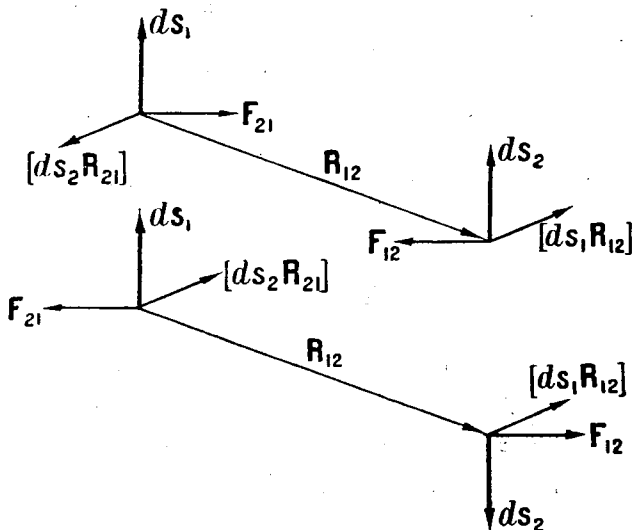
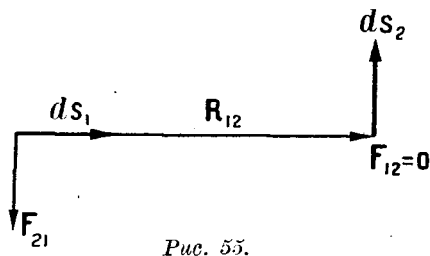


Рис. 5А.

¹ По крайней мере в отсутствии намагничивающихся сред, которых мы в этой главе вовсе не рассматриваем.

Чтобы уяснить содержание этих уравнений, рассмотрим ряд частных случаев. Если ds_1 параллельно ds_2 (см. рис. 54), то силы взаимодействия стремятся сблизить ds_1 и ds_2 (притяжение); если же ds_1 и ds_2 антипараллельны, то эти силы стремятся удалить их друг от друга (отталкивание). При этом $F_{12} = -F_{21}$. Однако силы эти даже в этом случае не удовлетворяют принципу равенства действия и противодействия, ибо направления их лежат не на одной прямой. Особенно же резко проявляется нарушение принципа равенства действия и противодействия в том случае, если, например, ds_1 параллельно R_{12} , а ds_2 перпендикулярно R_{12} (рис. 55). В этом случае $[ds_1 R_{12}] = 0$ и поэтому $F_{21} = 0$, тогда как $[ds_2 R_{21}] \neq 0$ и $F_{12} \neq 0$: элемент ds_1 испытывает силу со стороны элемента ds_2 , но на него не действует.

Впрочем при экспериментировании с замкнутыми постоянными токами это нарушение третьей аксиомы Ньютона не может быть обнаружено, ибо, как мы покажем в § 36, силы взаимодействия двух



замкнутых токов принципу равенства действия и противодействия удовлетворяют (см. также задачу 23). В общем же случае переменного электромагнитного поля можно и должно обобщить понятие количества движения так, чтобы справедливость этого принципа оказалась обеспеченной во всех электромагнитных явлениях (см. II том этого курса).

Выше уже упоминалось, что в пределах изучения замкнутых постоянных токов сила взаимодействия элементов токов не может быть определена однозначно. Математически это обстоятельство выражается в том, что если видоизменить закон взаимодействия элементов тока добавлением ряда членов, интеграл которых по всякому замкнутому контуру обращается в нуль, то общая сила, испытываемая элементом со стороны замкнутого тока, остается неизменной. В частности, легко убедиться, что выражение силы F_{12} может быть видоизменено следующим образом:

$$F'_{12} = F_{12} + \frac{J_1 J_2}{c^2} \left\{ \Phi(R_{12})(ds_1 R_{12}) ds_2 + d \left(R_{12}(ds_2 R_{12}) f(R_{12}) \right) \right\}, \quad 163$$

где $\Phi(R_{12})$ и $f(R_{12})$ суть произвольные скалярные функции от R_{12} , а

$$d \left\{ R_{12}(ds_2 R_{12}) f(R_{12}) \right\}$$

означает приращение (дифференциал) выражения в скобках при перемещении начальной точки радиуса вектора \mathbf{R}_{12} на отрезок ds_1 (так что $d\mathbf{R}_{12} = -ds_1$). Действительно, при интегрировании по контуру тока J_1 последний член обращается в нуль, как интеграл полного дифференциала по замкнутому пути. Далее $\Phi(R_{12})\mathbf{R}_{12}$ всегда может быть представлено в виде градиента некоторой функции $\varphi(R_{12})$ от R_{12} (см. 48 и 49):

$$\Phi(R_{12})\mathbf{R}_{12} = \text{grad } \varphi(R_{12}).$$

Стало быть,

$$\Phi(R_{12})(ds_1 \mathbf{R}_{12}) = (ds_1 \cdot \text{grad } \varphi(R_{12})) = \frac{\partial \varphi(R_{12})}{\partial s_1} ds_1.$$

Интеграл же этого полного дифференциала по замкнутому контуру тока J_1 [(а стало быть, и интеграл второго члена формулы (163)] также обращается в нуль.

Задача 23. — Исходя из (162) и (162'), показать непосредственным интегрированием, что равнодействующая сил, испытываемых одним из замкнутых токов со стороны другого замкнутого тока, принципу равенства действия и противодействия удовлетворяет.

Задача 24. — Закон пондеромоторного взаимодействия элементов тока был впервые сформулирован Ампером, исходящим из предположения, что взаимодействие элементов тока должно удовлетворять третьему принципу Ньютона и должно быть направлено по линии их соединения. Найденный Ампером закон в наших обозначениях гласит:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{J_1 J_2}{c^2} \left\{ \frac{3}{R_{12}^5} (ds_1 \mathbf{R}_{12})(ds_2 \mathbf{R}_{12}) - \frac{2}{R_{12}^3} (ds_1 ds_2) \right\} \mathbf{R}_{12}.$$

Показать, что применение формулы Ампера к вычислению результирующей силы, испытываемой элементом ds_2 со стороны всех элементов замкнутого тока J_1 , совпадает с результатом применения формулы (162).

§ 31. Магнитное поле токов. — 1. Вместо того, чтобы непосредственно рассматривать силы взаимодействия токов, целесообразно ввести понятие поля токов, подобно тому как в § 2 было введено понятие поля электрических зарядов. Иными словами, хотя сила F_{12} обнаруживается лишь при наличии обоих элементов тока ds_1 и ds_2 , целесообразно исходить из следующего представления: во всех точках пространства, окружающего элемент тока ds_1 , всегда существует обусловленное присутствием этого тока поле сил вне зависимости от того, проявляется ли существование этих сил в воздействии их на другой

элемент тока ds_2 , или, в случае отсутствия такового, не проявляется ни в чем. Это поле сил называется магнитным полем тока ds_1 . В пределах учения о постоянных токах понятие магнитного поля этих токов может рассматриваться как понятие чисто условное, введенное лишь для удобства описания явлений (тоже относится к понятию электрического поля в пределах электростатики, сравни § 2). Однако перейдя к изучению переменного электромагнитного поля, мы убедимся, что понятие поля имеет глубокий физический смысл и что электромагнитное поле есть физическая реальность.

Итак, магнитное поле согласно нашему определению проявляется в наличии пондеромоторных сил, испытываемых внесенными в поле токами. Чтобы ввести количественную меру магнитного поля, запишем уравнение (162) в следующей симметричной форме:

$$\mathbf{F}_{12} = \left[\frac{J_2 ds_2}{c} \left[\frac{J_1 ds_1}{c} \cdot \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3} \right] \right].$$

Введя обозначение

$$\mathbf{H}_{12} = \left[\frac{J_1 ds_1}{c} \cdot \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3} \right] = \frac{J_1}{c R_{12}^3} [ds_1 \mathbf{R}_{12}], \quad 164$$

можно написать:

$$\mathbf{F}_{12} = \left[\frac{J_2 ds_2}{c} \cdot \mathbf{H}_{12} \right] = \frac{J_2}{c} [ds_2 \mathbf{H}_{12}]. \quad 165$$

Вектор \mathbf{H}_{12} зависит лишь от направления и силы тока ds_1 и от расстояния между ds_1 и рассматриваемой точкой поля, в которой находится испытывающий действие этого поля ток ds_2 . Таким образом вектор \mathbf{H}_{12} характеризует собою магнитное поле элемента тока ds_1 ; вектор этот носит название напряженности магнитного поля. Согласно (165) пондеромоторная сила, испытываемая в магнитном поле элементом тока $J_2 ds_2$, пропорциональна силе тока J_2 и векторному произведению его длины ds_2 на напряженность поля \mathbf{H}_{12} .

Так как сила \mathbf{F}_{12} есть линейная функция вектора \mathbf{H}_{12} , то результирующая пондеромоторная сила \mathbf{F} , испытываемая элементом $J ds$ со стороны нескольких других элементов тока, будет пропорциональна векторной сумме напряженностей полей каждого из этих элементов, или, говоря кратко, пропорциональна напряженности \mathbf{H} (результирующего) поля этих элементов тока:

$$\mathbf{F} = \frac{J}{c} [ds \mathbf{H}]. \quad 165'$$

Это соотношение дает возможность (по крайней мере принципиально) определить напряженность магнитного поля в любой точке пространства путем измерения пондеромоторной силы, испытываемого в этой точке „пробным“ элементом тока Jds .

Заметим, что уравнения (164) и (165) вполне соответствуют излагаемым в элементарном курсе физики законам магнитного поля, в частности (165) эквивалентно закону Био и Савара. Действительно, согласно определению векторного произведения численные значения величины \mathbf{H}_{12} и \mathbf{F}_{12} равны:

$$H_{12} = \frac{J_1 ds_1}{cR_{12}^2} \sin(ds_1, R_{12})$$

и

$$F_{12} = \frac{J_2 ds_2 H_{12}}{c} \sin(ds_2, H_{12}).$$

Далее \mathbf{H}_{12} перпендикулярно плоскости, проведенной через ds_1 и \mathbf{R}_{12} , а \mathbf{F}_{12} перпендикулярно плоскости, проведенной через ds_2 и \mathbf{H}_{12} , причем направления векторов \mathbf{H}_{12} и \mathbf{F}_{12} определяются правилом буравчика: магнитное поле тока ds_1 в точке (2) направлено по ходу острия буравчика, ручка которого поворачивается от ds_1 к \mathbf{R}_{12} , а направление силы \mathbf{F}_{12} , действующей в поле \mathbf{H}_{12} на ток ds_2 , направлено по ходу острия буравчика, ручка которого поворачивается от ds_2 к \mathbf{H}_{12} (см. рис. 56). Иными словами, векторы ds_1 , \mathbf{R}_{12} , \mathbf{H}_{12} , как и векторы ds_2 , \mathbf{H}_{12} , \mathbf{F}_{12} , составляют правовинтовую систему.

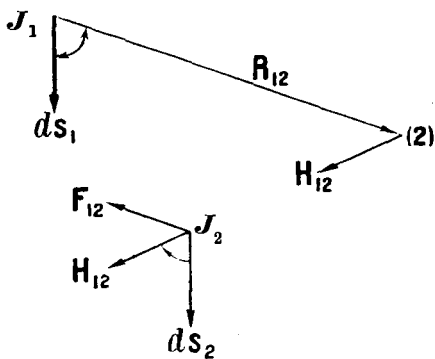


Рис. 56.

Напряженность \mathbf{H} магнитного поля замкнутого тока J_1 равна, очевидно, сумме полей (164), возбуждаемых каждым из его элементов ds_1 , т. е. равна

$$\mathbf{H} = \frac{J}{c} \oint \frac{[ds\mathbf{R}]}{R^3}, \quad 166$$

где для краткости опущены индексы 1 и 2 при \mathbf{H} , \mathbf{R} и т. д., причем согласно предыдущему \mathbf{R} означает радиус-вектор, проведенный от данного элемента тока ds к рассматриваемой точке магнитного поля.

2. Во всем предшествующем мы исходили из допущения, что длина элементов тока ds_1 и ds_2 и сечение их настолько малы по сравнению с их расстоянием R , что это расстояние можно считать одинаковым для любой пары точек токов ds_1 и ds_2 . Очевидно, что в противном случае самое понятие расстояния токов не может быть определено однозначно, так что формула (162) теряет смысл. Это явствует также из того обстоятельства, что при $R \rightarrow 0$ как выражение (162) силы F_{12} , так и полученные из него уравнения (164) и (166), определяющие напряженность магнитного поля \mathbf{H} , стремятся к бесконечности.

Однако достаточно незначительного преобразования этих уравнений, чтобы сделать их применимыми при произвольно малом расстоянии R . Рассмотрим, например, уравнение (166), определяющее напряженность магнитного поля замкнутого тока. Если точка P , напряженность поля в которой мы желаем определить, находится достаточно близко от тока J , то сечение этого тока нельзя считать бесконечно малым по сравнению с его расстоянием до точки P . Однако ток конечного сечения всегда может быть разложен на совокупность бесконечно тонких замкнутых нитей тока (стр. 177), к каждой из которых формула (166) будет применима непосредственно.

Сила тока dJ , протекающего по нити тока, согласно (144') равна:

$$dJ = j dS,$$

где j есть плотность тока, а dS перпендикулярное к оси сечение нити. Стало быть,

$$dJ ds = j dS ds = j dV,$$

где ds есть длина, а dV объем бесконечно малого отрезка нити. Так как, наконец, ось нити тока по определению совпадает с линиями тока, то ds параллельно \mathbf{j} и

$$dJ ds = \mathbf{j} dV. \quad 167$$

Внося это в (164) и опуская индексы 1 и 2, найдем напряженность $d\mathbf{H}$ поля элемента длины рассматриваемой нити тока силы dJ , или, что то же, напряженность поля элемента объема тока J :

$$d\mathbf{H} = \frac{dJ}{cR^3} [ds\mathbf{R}] = \frac{[\mathbf{j}\mathbf{R}]}{cR^3} dV. \quad 168$$

Общая же напряженность магнитного поля всего замкнутого тока J будет равняться сумме напряженностей, создаваемых его отдельными элементами:

$$\mathbf{H} = \int d\mathbf{H} = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}\mathbf{R}]}{R^3} dV, \quad 169$$

где интегрирование должно быть распространено на весь объем тока (т. е. на объем обтекаемых током проводников), а R есть расстояние рассматриваемой точки поля P от элемента тока dV .

Легко убедиться, что в области приложимости формулы (166), т. е. в случае линейных токов, формула эта совпадает с общей формулой (169). При этом линейными (в отличие от квазилинейных, о которых была речь в предшествующей главе) мы будем называть такие токи, размеры любого сечения которых бесконечно малы по сравнению с расстоянием этого сечения от рассматриваемых точек поля P . Разумеется, ток может удовлетворять условию линейности лишь в том случае, если мы ограничиваемся рассмотрением удаленных от него точек поля.

Совершенно аналогичным путем, применив (165) к элементу нити тока объема dV и внося в нее (167), получим, что пондеромоторная сила, испытываемая элементом объема проводника dV , в котором протекает ток плотности \mathbf{j} , равна

$$\mathbf{F} = \frac{dJ}{c} [d\mathbf{s}\mathbf{H}] = \frac{[\mathbf{j}\mathbf{H}]}{c} dV, \quad 170$$

где \mathbf{H} есть напряженность магнитного поля в элементе dV .

3. Формулы (168), (169) и (170) применимы, очевидно, во всех точках поля постоянных токов. В частности, определяемая ими [в отличие от уравнений (164) и (166)] напряженность поля \mathbf{H} всюду сохраняет конечное значение (если, разумеется, плотность тока \mathbf{j} всюду конечна, как это следует из элементарных физических соображений¹). Для точек поля, лежащих вне токов ($R \neq 0$), это очевидно. Чтобы убедиться в конечности поля \mathbf{H} внутри токов, рассмотрим произвольную точку P , лежащую внутри несущего ток проводника, и опишем вокруг нее сферу V' малого, но все же конечного радиуса R_0 . Поле, создаваемое в P токами, находящимися вне сферы V' , конечно, ибо эти токи находятся от P на конечном расстоянии, большем R_0 . Стало быть, нам достаточно убедиться в конечности поля \mathbf{H}' , создаваемого токами, находящимися внутри сферы V' . Из (169) следует:

$$|H'| \leq \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{|\mathbf{j}\mathbf{R}|}{R^3} dV,$$

¹ Впрочем иногда удобно пользоваться представлением о поверхностных токах, объемная плотность которых \mathbf{j} бесконечна (сравни поверхностные заряды в электростатике). О поверхностных токах см. § 61; магнитное поле этих токов обладает поверхностями разрыва.

где $|H'|$ и $|\mathbf{jR}|$ суть абсолютные значения численных величин соответствующих векторов, а интегрирование распространено по объему сферы V' . Но

$$|\mathbf{jR}| \leq j_m R,$$

где j_m обозначает максимальное значение плотности тока внутри сферы V' . Стало быть,

$$|H'| \leq \frac{j_m}{c} \int_{V'} \frac{dV}{R^2}.$$

Введя сферические координаты R , ϑ и α с центром в P , получим:

$$dV = R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \cdot d\alpha \cdot dR$$

и

$$|H'| \geq \frac{j_m}{c} \int_{V'} \frac{dV}{R^2} = \frac{j_m}{c} \int_0^{R_0} dR \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{4\pi R_0 j_m}{c}.$$

Таким образом H' есть величина конечная, стремящаяся к нулю при уменьшении радиуса сферы R_0 , что и требовалось доказать.

Нетрудно доказать также непрерывность вектора \mathbf{H} , т. е. доказать, что разность значений вектора \mathbf{H} в смежных точках поля P и P' стремится к нулю, если расстояние этих точек PP' стремится к нулю. Пусть обе точки P и P' лежат внутри сферы V' . При переходе из P в P' поле токов, лежащих вне V' , изменяется непрерывно, ибо токи эти находятся на конечном расстоянии от P и P' . Что же касается поля \mathbf{H}' токов, лежащих внутри V' , то напряженность этого поля по доказанному меньше $\frac{4\pi j_m}{c} R_0$; стало быть и изменение значения \mathbf{H}'

при переходе от P к P' не может быть больше этой величины. Если PP' стремится к нулю, то R_0 может быть выбрано сколь угодно малым, откуда и следует непрерывность вектора \mathbf{H} .

Задача 25. — Показать, что напряженность магнитного поля бесконечного прямолинейного тока на расстоянии r от его оси равна

$$H = \frac{2J}{cr}; \quad 171$$

силовые линии этого поля представляют собою концентрические окружности, плоскость которых перпендикулярна к току, причем направление силовых линий составляет с направлением тока правовинтовую систему.

Примечание. — Цепь постоянного тока всегда замкнута. Рассматривать бесконечный прямолинейный ток значит рассматривать замкнутую цепь тока, включающую в себя очень длинный прямой цилиндрический участок, и ограничиваться при этом изучением поля тока вблизи средней части этого участка, пренебрегая действием отдаленных участков цепи тока.

Задача 26. — Линейный ток протекает по окружности радиуса R_0 . Показать, что напряженность поля в любой точке оси этой окружности направлена по этой оси, составляет с направлением тока правовинтовую систему и равна

$$H = \frac{2\pi J}{c} \frac{R_0^2}{(R_0^2 + d^2)^{3/2}},$$

где d есть расстояние рассматриваемой точки поля от центра кругового тока.

Задача 27. — По бесконечному прямому полуму круговому цилиндру протекает параллельно оси цилиндра постоянный ток, равномерно распределенный по его поверхности. Показать, что поле тока внутри цилиндра равно нулю.

§ 32. Циркуляция вектора. Теорема Стокса. Ротор вектора. — 1. При изложении основ векторного анализа в главе I мы ограничились тем, что было необходимо для изучения электростатического поля E . Характерной особенностью этого поля является то обстоятельство, что линейный интеграл вектора поля E по любому замкнутому контуру равен нулю (уравнение 34):

$$\oint E_s ds = 0.$$

Лишь благодаря этой особенности поля E оказалось возможным однозначно определить понятие скалярного потенциала (или вернее разности потенциалов) поля (§ 8), что в свою очередь позволило на основании соотношения

$$E = -\text{grad } \varphi$$

свести изучение поля вектора E к более простой задаче изучения поля скаляра φ (§ 11).

Линейный интеграл произвольного вектора a , взятый по замкнутой кривой L , мы будем называть циркуляцией вектора a по кривой L и обозначать через

$$C(a) = \oint_L a_s ds.$$

Вектор, циркуляция которого по произвольному замкнутому контуру L тождественно равна нулю, мы будем называть вектором безвихревым; смысл этого термина выяснится несколько ниже. Таким образом результаты, полученные нами в § 8, можно сформулировать так: безвихревой характер поля вектора \mathbf{a} является необходимым и достаточным условием того, чтобы скалярный потенциал поля мог быть определен однозначно¹. Поэтому безвихревые векторы называются также векторами потенциальными. В отличие от поля электростатического магнитное поле не является полем безвихревым. Поэтому, прежде чем углубляться в изучение магнитного поля токов, необходимо подготовить соответствующий математический аппарат путем рассмотрения некоторых общих свойств вихревых полей.

2. Начнем с рассмотрения циркуляции по произвольному контуру L произвольного, но непрерывного и обладающего производными вектора \mathbf{a} . Предположим сначала, что контур L представляет собою контур плоского прямоугольника $ABCD$, и выберем оси x и y декартовых координат так, чтобы они были параллельны сторонам этого прямоугольника и пересекались в его центре (рис. 57). Пусть стороны прямоугольника равны соответственно Δx и Δy . Если выбрать направление положительного обхода контура так, чтобы соответствующая положительная нормаль к площади прямоугольника была направлена по оси z (см. стр. 10, рис. 1), то

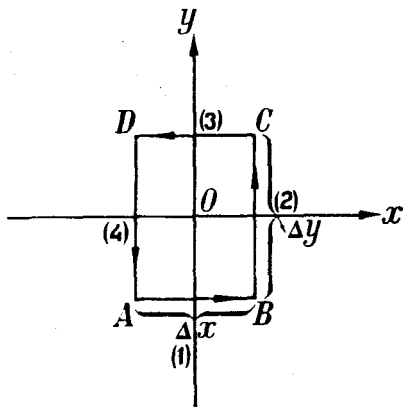


Рис. 57.

$$C = \oint \mathbf{a}, ds = \int_A^B a_x dx + \int_B^C a_y dy + \int_C^D a_x dx + \int_D^A a_y dy.$$

¹ Хотя рассуждения §§ 8 и 11 относятся непосредственно к вектору напряженности электрического поля, однако, нетрудно видеть, что все эти рассуждения применимы ко всякому вектору \mathbf{a} , циркуляция которого по произвольному контуру тождественно равна нулю. Конечно, при этом величина A (см. уравнение 33' и следующие) уже не будет вообще говоря представлять собою работу сил поля; физический смысл ее будет зависеть от смысла вектора \mathbf{a} .

Воспользовавшись известной из интегрального исчисления „теоремой: о среднем значении“, получим (при $\mathbf{n} \parallel$ оси z):

$$C = \oint a_s ds = a_x' \Delta x + a_y'' \Delta y - a_x''' \Delta x - a_y'''' \Delta y,$$

где a_x' , a_y'' и т. д. суть средние значения слагающих a_x и a_y на 1-й, 2-й и т. д. сторонах прямоугольника; отрицательный знак, например, последнего члена суммы объясняется тем, что интегрирование по стороне AD производится в направлении убывания координаты y .

Будем теперь стремить длину сторон прямоугольника к нулю. Тогда с точностью до величин второго порядка малости среднее значение слагающей a_y на отрезке BC , отстоящем от отрезка AD на расстоянии Δx по направлению оси x -ов, будет отличаться от значения a_y на этом последнем отрезке на величину $\frac{\partial a_y}{\partial x} \Delta x$:

$$a_y'' = a_y'''' + \frac{\partial a_y}{\partial x} \Delta x.$$

Соответственно

$$a_x''' = a_x' + \frac{\partial a_x}{\partial y} \Delta y,$$

ибо CD отстоит от AB на расстоянии Δy по направлению оси y -ов. При этом в пределе, при бесконечно малых размерах прямоугольника, мы можем понимать под $\frac{\partial a_y}{\partial x}$ и $\frac{\partial a_x}{\partial y}$ значения этих величин в центре прямоугольника 0. Внося эти выражения в предшествующее равенство, получим (при $\mathbf{n} \parallel$ оси z):

$$dC = \oint a_s ds = (a_y'' - a_y''') \Delta y - (a_x''' - a_x') \Delta x = \frac{\partial a_y}{\partial x} \Delta x \Delta y - \frac{\partial a_x}{\partial y} \Delta y \Delta x,$$

где мы заменили C через dC , чтобы отметить, что соотношение это справедливо лишь для бесконечно малого прямоугольника¹. Обозначая наконец площадь прямоугольника $\Delta x \Delta y$ через dS , получим окончательно:

$$\mathbf{n} \parallel \text{оси } z \quad dC = \oint a_s ds = \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dS. \quad 173$$

Так как оси x , y , z образуют правовинтовую систему, то, совершив круговую перестановку индексов x , y , z , мы получим очевидно

¹ Конечно dC вовсе не является полным дифференциалом от C .

циркуляцию вектора \mathbf{a} по контуру бесконечно малого прямоугольника, положительная нормаль к которому направлена по оси x или по оси y :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \parallel \text{оси } x & \quad dC = \oint a_s ds = \left(\frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) dS, \\ \mathbf{n} \parallel \text{оси } y & \quad dC = \oint a_s ds = \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) dS. \end{aligned} \right\} \quad 173$$

Сравнивая (173) с уравнениями (64) и (64'):

$$\begin{aligned} [\nabla \mathbf{a}] &= \text{rot } \mathbf{a} = \text{curl } \mathbf{a}, \\ \text{rot}_x \mathbf{a} &= \frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

убедимся, что выражения в скобках в ур-нии (173) представляют собой не что иное, как слагающие по осям координат вектора $\text{rot } \mathbf{a}$ ¹, являющегося векториальной пространственной производной вектора \mathbf{a} (в отличие от его скалярной пространственной производной $\text{div } \mathbf{a}$). Следовательно, выражения (173) могут быть записаны следующим образом:

$$dC = \oint_L a_s ds = \text{rot}_n \mathbf{a} dS, \quad 174$$

причем под \mathbf{n} нужно понимать положительную нормаль к площадке dS , составляющую правовинтовую систему с направлением положительного обхода контура этой площадки. Полагая последовательно \mathbf{n} параллельным осям x , y и z , получим из (174) и (64') уравнения (173).

Так как оси координат всегда можно выбрать так, чтобы одна из этих осей была перпендикулярна площадке dS , то (174) остается очевидно справедливым для циркуляции вектора \mathbf{a} по контуру произвольно расположенного бесконечно малого прямоугольника².

¹ Заметим, что $\text{rot } \mathbf{a}$ может быть представлен в форме следующего символического определителя:

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix},$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} суть единичные векторы по осям координат x , y , z . При вычислении этого определителя нужно, конечно, под произведениями типа $\left(\frac{\partial}{\partial x} \right) a_y$ понимать частную производную от a_y по x , т. е. $\frac{\partial a_y}{\partial x}$.

² Последнее умозаключение законно лишь в том случае, если $\text{rot } \mathbf{a}$ есть истинный вектор, инвариантный относительно преобразования координат.

3. Перейдем теперь к рассмотрению циркуляции вектора по контуру произвольной формы и размера. Проведем поверхность S так, чтобы она опиралась на контур L , т. е. чтобы этот контур являлся пограничным контуром поверхности S . Разобьем затем эту поверхность двумя взаимно перпендикулярными системами параллельных линий на совокупность бесконечно малых элементов (рис. 58), которые благодаря своей малости могут считаться плоскими. Применяя к каждому из этих элементов уравнение (174) и сложив полученные выражения, найдем:

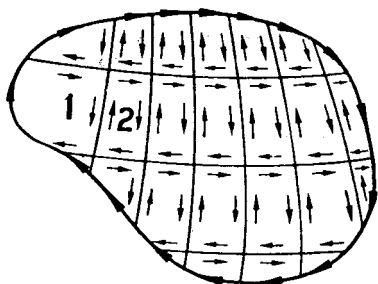


Рис. 58.

$$\begin{aligned} \sum dC &= \sum \oint a, ds = \\ &= \sum \text{rot}_n a dS = \int_S \text{rot}_n a dS, \end{aligned}$$

где n есть внешняя нормаль к dS , причем внешняя сторона поверхности S должна быть выбрана в соответствии с направлением положительного

обхода ее контура (правовинтовая система).

При интегрировании по контурам элементарных площадок каждая граница AB двух смежных площадок пройдет два раза и при том в противоположных направлениях; поэтому в сумме $\sum \oint a, ds$ встретятся

оба члена $\int_A^B a, ds$ и $\int_B^A a, ds$, в совокупности дающие нуль. Таким образом

$\sum \oint a, ds$ сведется к сумме членов, относящихся к одним лишь на ружным границам площадок, т. е. к интегралу вектора a по внешнему контуру L площади S . Стало быть

$$\sum dC = \sum \oint a, ds = \oint_L a, ds = C,$$

где C означает циркуляцию вектора a по контуру L . Внося это в предшествующее уравнение, получим:

$$C = \oint_L a, ds = \int_S \text{rot}_n a, dS.$$

При выводе этой формулы мы не приняли во внимание, что наружные (прилегающие к контуру L) элементарные площадки вообще говоря не будут иметь прямоугольной формы, тогда как справедливость (174) доказана нами лишь для площадок прямоугольных. Однако при неограниченном уменьшении размеров прямоугольников ломаная линия, составленная из наружных сторон крайних прямоугольников, сколь угодно точно совпадет с контуром L площади S ; основываясь на этом, нетрудно придать выводу уравнения (175) совершенно точную форму.

Таким образом единственное условие справедливости уравнения (175) состоит в требовании непрерывности и дифференцируемости вектора \mathbf{a} во всех точках поверхности S . Уравнение это выражает собой так называемую теорему Стокса, которая гласит: циркуляция произвольного вектора \mathbf{a} по замкнутой кривой L равна потоку ротора этого вектора через поверхность S , опирающуюся на кривую L .

Форма поверхности S при этом остается совершенно неопределенной. Стало быть, через любые две поверхности S_1 и S_2 , если только они обладают одним и тем же контуром L , проходит одинаковый поток ротора любого непрерывного вектора \mathbf{a} , равный циркуляции этого вектора по общему контуру этих поверхностей.

4. Переходя от (175) обратно к столь малому элементу поверхности dS , что его можно считать плоской площадкой, во всех точках которой $\text{rot}_n \mathbf{a}$ сохраняет постоянное значение, мы сможем вынести $\text{rot}_n \mathbf{a}$ за знак интеграла и написать:

$$dC = \oint a_s ds = \text{rot}_n \mathbf{a} \cdot dS, \quad 174$$

что совпадает с (174). Формула оказывается таким образом применимой к бесконечно малым площадкам любой формы. Так как эта формула справедлива лишь в предельном случае бесконечно малой поверхности, то правильнее записать ее следующим образом:

$$\text{rot}_n \mathbf{a} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\oint a_s ds}{dS}. \quad 174'$$

Таким образом слагающая вектора $\text{rot} \mathbf{a}$ в данной точке поля P по данному направлению \mathbf{n} равна пределу отношения циркуляции вектора \mathbf{a} по контуру произвольной площадки dS , проходящей через P и перпендикулярной \mathbf{n} , к величине поверхности этой площадки dS . Из этого соотношения явствует, что значение слагающей $\text{rot} \mathbf{a}$ вовсе не зависит от выбора системы координат, т. е. что $\text{rot} \mathbf{a}$ действительно

является истинным вектором. Таким образом инвариантность вектора $\text{rot } \mathbf{a}$, оставленная нами под вопросом в § 12, отныне может считаться доказанной.

В сущности это утверждение не вполне справедливо, ибо мы при выводе уравнений (174) и (175) уже воспользовались тем самым свойством инвариантности вектора $\text{rot } \mathbf{a}$ относительно преобразования координат, которое мы хотим доказать: именно на эту инвариантность $\text{rot } \mathbf{a}$ ссылались мы, утверждая, что (174) применимо к площадке произвольного направления (см. примечание 2 к стр. 213). Правда, справедливость этого последнего положения может быть доказана путем непосредственного вычисления в декартовых координатах циркуляции вектора по контуру площадки произвольного направления. Проще и правильнее однако считать инвариантное относительно преобразования координат соотношение (174') определением понятия „ротор вектора \mathbf{a} “. Исходя из этого определения, нетрудно, обратив порядок наших рассуждений, доказать все выведенные выше формулы, и в частности показать, что в декартовых координатах слагающие ротора выражаются формулами (64').

5. Из вышеизложенного следует, что достаточным и необходимым условием того, чтобы вектор был безвихревым или потенциальным, является равенство нулю его ротора. Действительно, если во всех точках пространства $\text{rot } \mathbf{a} = 0$, то согласно теореме Стокса (175) циркуляция \mathbf{a} по любому контуру равна нулю; обратно, если циркуляция \mathbf{a} по любому контуру равна нулю, то согласно определению ротора (174') и $\text{rot } \mathbf{a}$ равен нулю. Согласно же сказанному в начале параграфа, необходимым и достаточным условием того, чтобы вектор обладал однозначным скалярным потенциалом, является равенство нулю его циркуляции по любому контуру.

Стало быть, в частности, то обстоятельство, что электростатическое поле обладает потенциалом, может быть выражено уравнением:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad 176$$

В справедливости этого уравнения можно также убедиться на том основании, что согласно (65₁) ротор градиента скаляра тождественно равен нулю.

6. В заключение, чтобы пояснить геометрический смысл ротора, рассмотрим вращение твердого тела с угловой скоростью ω . Вектор ω мы будем, как обычно, считать направленным по оси вращения и притом так, чтобы направление вращения составляло с вектором ω правинтовую систему (правило буравчика). Выберем ось z так, чтобы

она совпадала с осью вращения и была направлена по ω . Тогда линейная скорость v точки тела (x, y, z) будет численно равна

$$v = r\omega = \omega\sqrt{x^2 + y^2},$$

а слагающие ее по осям координат будут равны (рис. 59):

$$v_x = -\frac{vy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -y\omega, \quad v_y = \frac{vx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = x\omega, \quad v_z = 0.$$

Стало быть, слагающие вектора $\text{rot } v$ согласно (64') равны:

$$\text{rot}_x v = \text{rot}_y v = 0, \quad \text{rot}_z v = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega,$$

откуда

$$\text{rot } v = 2\omega.$$

177

Таким образом ротор линейной скорости точек твердого тела имеет одинаковое значение во всех точках тела и равен удвоенной угловой скорости его вращения.

Соотношение (177) остается справедливым и в том случае, если тело помимо вращательного находится также и в поступательном движении (ибо скорость поступательного движения есть величина постоянная для всех точек твердого тела и ротор ее поэтому равен нулю). Наконец в теории упругости доказывается, что (177) остается справедливым не только для твердого, но и для произвольно деформирующегося тела (например, жидкости), причем в этом случае под ω нужно понимать угловую скорость вращения бесконечно малого элемента жидкости, находящегося в рассматриваемой точке пространства.

Итак $\text{rot } v \neq 0$ в тех и только в тех точках тела, которые принадлежат элементам тела, находящимся во вращательном

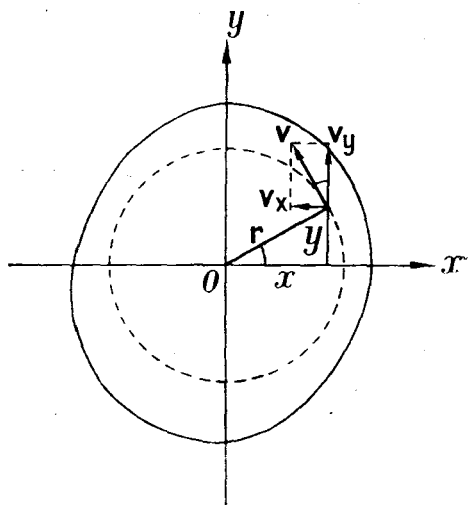


Рис. 59.

движении. Это обстоятельство в связи с соотношением (177) и послужило поводом к тому, чтобы дать величине $\text{rot } \mathbf{a}$ название ротора (от латинского *rotare* — вращаю) или вихря вектора \mathbf{a} .

Задача 28. — Доказать соотношение (177) для скорости твердого тела, исходя не из (64'), а непосредственно из геометрического определения ротора (174').

Задача 29. — Доказать, что поток ротора произвольного вектора \mathbf{a} через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \text{rot}_n \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad 178$$

Задача 30. — Доказать с помощью теорем Гаусса и Стокса справедливость первых двух уравнений (65):

$$\begin{aligned} \text{rot grad } \varphi &= 0, \\ \text{div rot } \mathbf{a} &= 0, \end{aligned}$$

не прибегая при этом, как в § 12, к непосредственному вычислению производных по координатам и к оперированию с символическим вектором набл .

Задача 31. — При пользовании сферической системой координат R, ϑ, α принято в каждой точке поля разлагать вектор поля \mathbf{a} на три взаимно перпендикулярные слагающие $a_R, a_\vartheta, a_\alpha$, взятые по направлению возрастания соответствующих координат R, ϑ, α . Исходя из формулы (174'), показать, что если $a_R = a_\vartheta = 0$, то

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_R \mathbf{a} &= \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta a_\alpha), \\ \text{rot}_\vartheta \mathbf{a} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R a_\alpha), \\ \text{rot}_\alpha \mathbf{a} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad 179$$

Задача 31а. — Дано, что поле вектора \mathbf{a} обладает аксиальной симметрией относительно некоторой оси z , т. е. иными словами, что в цилиндрической системе координат r, α, z слагающие a_r, a_α, a_z вектора \mathbf{a} от азимута α не зависят (сравни задачу 6 и рис. 15). Показать, что если кроме того вектор \mathbf{a} перпендикулярен оси z ($a_z = 0$), то

$$\begin{aligned} \text{rot}_r \mathbf{a} &= -\frac{\partial a_\alpha}{\partial z}, \\ \text{rot}_\alpha \mathbf{a} &= \frac{\partial a_r}{\partial z}, \\ \text{rot}_z \mathbf{a} &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_r)}{\partial r}. \end{aligned} \quad 179'$$

§ 33. Вектор-потенциал. Дифференциальные уравнения магнитного поля. — 1. После отступления в область векторного анализа вернемся к изучению магнитного поля постоянных токов и поставим себе задачу преобразовать (166) и (169) к более удобному для вычисления виду. Начнем с формулы (169).

Подынтегральное выражение правой части этой формулы может быть согласно (50') записано следующим образом:

$$\frac{[\mathbf{j}\mathbf{R}]}{R^3} = - \left[\mathbf{j} \cdot \text{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right) \right] = \left[\text{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{j} \right].$$

Напомним при этом, что в уравнении (169) \mathbf{R} означает радиус-вектор, проведенный из элемента тока $\mathbf{j} dV$ („точка истока“) в ту „точку наблюдения“ P , в которой определяется напряженность магнитного поля, и что индекс a у знака градиента означает, что при определении градиента мы считаем неподвижной точку истока и переменной точку наблюдения. С другой стороны, полагая в формуле (66₃) (стр. 66)

$$\varphi = \frac{1}{R} \text{ и } \mathbf{a} = \mathbf{j},$$

получим:

$$\text{rot}_a \left(\frac{\mathbf{j}}{R} \right) = \left[\text{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{j} \right] + \frac{1}{R} \text{rot}_a \mathbf{j},$$

где индекс a попрежнему означает, что при образовании пространственных производных переменной считается лишь точка наблюдения P . Так как значение вектора \mathbf{j} в элементе dV (точка истока) очевидно не зависит от перемещения точки наблюдения P , то стало быть ¹

$$\text{rot}_a \mathbf{j} = 0$$

и

$$\text{rot}_a \left(\frac{\mathbf{j}}{R} \right) = \left[\text{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{j} \right] = \frac{[\mathbf{j}\mathbf{R}]}{R^3}.$$

¹ Поясним это переходом к декартовым координатам. Пусть x_a, y_a, z_a суть координаты точки наблюдения P , а x_q, y_q, z_q — координаты элемента тока $\mathbf{j} dV$, так что $dV = dx_q dy_q dz_q$. Вектор \mathbf{j} есть функция только от x_q, y_q, z_q : $\mathbf{j} = \mathbf{j}(x_q, y_q, z_q)$, тогда как $R = \sqrt{(x_a - x_q)^2 + (y_a - y_q)^2 + (z_a - z_q)^2}$. При определении div_a и rot_a дифференцировать нужно по координатам точки наблюдения, так что, например,

$$\text{rot}_{ax} = \frac{\partial j_z(x_q, y_q, z_q)}{\partial y_a} - \frac{\partial j_y(x_q, y_q, z_q)}{\partial z_a} = 0.$$

Внося это в (169), получим:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \int \text{rot}_a \left(\frac{\mathbf{j}}{R} \right) dV.$$

Так как в этом выражении дифференцирование (образование ротора) производится по координатам точки наблюдения, а интегрирование — по объему проводников, обтекаемых током, то изменение порядка этих операций не может повлиять на результат вычислений. Стало быть, можно написать:

$$\mathbf{H} = \text{rot}_a \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}}{R} dV.$$

Если ввести обозначение

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}}{R} dV, \quad 180$$

то уравнение это примет вид

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad 181$$

где индекс a при знаке ротора нами опущен как излишний, ибо при заданном распределении токов вектор \mathbf{A} является функцией положения одной лишь точки наблюдения. Таким образом напряженность магнитного поля может быть представлена в виде ротора некоторого вектора \mathbf{A} , который носит название векторного потенциала или вектор-потенциала токов.

Заметим, что для линейных токов (т. е. на расстояниях от токов, больших по сравнению с размерами их сечения) выражение векторного потенциала \mathbf{A} может быть значительно упрощено. Действительно, линейный ток можно рассматривать как бесконечно тонкую нить тока силы J . Полагая в выведенном для нитей тока соотношении (167) dJ равным J , получим:

$$J ds = \mathbf{j} dV,$$

где ds есть элемент длины оси тока. Вставляя это в (180) и вынося постоянную (для неразветвленного тока) величину J за знак интеграла, получим:

$$\mathbf{A} = \frac{J}{c} \oint_L \frac{ds}{R}, \quad 180'$$

где интегрирование должно быть распространено по всему контуру L замкнутого тока.

Так как дивергенция всякого ротора всегда равна нулю (см. 65') то из (181) непосредственно вытекает весьма важное уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad 182$$

Векторы, дивергенция которых во всех точках пространства равна нулю, носят название векторов вихревых или соленоидальных. Стало быть, магнитное поле есть поле вихревое (соленоидальное).

Введением векторного потенциала \mathbf{A} значительно облегчается изучение магнитного поля постоянных токов, подобно тому как введением скалярного потенциала φ облегчается изучение электрического поля стационарной системы электрических зарядов¹. Аналогия между ролью векторного и скалярного потенциалов особенно отчетливо выявляется при сопоставлении аналогичных формул для электростатического и для магнитного полей:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int \frac{\rho \mathbf{R}}{R^3} dV & \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j} \mathbf{R}]}{R^3} dV \\ \varphi &= \int \frac{\rho dV}{R} & \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j} dV}{R} \\ \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} \varphi & \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Из этого сопоставления явствует также, что вектор плотности тока играет для магнитного поля такую же роль, как скаляр плотности зарядов для поля электрического.

2. Перейдем теперь от этих интегральных соотношений к дифференциальным уравнениям поля.

Установим сначала дифференциальное уравнение для \mathbf{A} . Если ввести произвольную систему декартовых координат x, y, z , то (180) можно будет записать в следующей форме:

$$A_x = \frac{1}{c} \int \frac{j_x dV}{R}, \quad A_y = \frac{1}{c} \int \frac{j_y dV}{R}, \quad A_z = \frac{1}{c} \int \frac{j_z dV}{R}. \quad 180''$$

Каждое из этих выражений для каждой из слагающих вектора \mathbf{A} совершенно аналогично выражению скалярного потенциала электростатического поля (ур-ние 40):

$$\varphi = \int \frac{\rho dV}{R}.$$

¹ Как мы убедимся в дальнейшем, магнитное поле токов, как и всякое вихревое поле, однозначным скалярным потенциалом не обладает.

В § 13 было показано, что это последнее выражение является решением (интегралом) дифференциального уравнения Пуассона (56):

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho,$$

и притом решением единственным (однозначным), если на φ помимо (56) наложены еще следующие условия: 1) скаляр φ и его пространственные производные конечны и непрерывны во всем пространстве (физически это означает, что мы рассматриваем лишь объемные заряды, но не рассматриваем зарядов поверхностных и двойных электрических слоев), 2) в бесконечности φ и его производные удовлетворяют условиям (75), т. е. в бесконечности φ стремится к нулю не медленнее, чем $\frac{1}{R}$, а его производные не медленнее, чем $\frac{1}{R^2}$. Стало быть, если слагающие вектора-потенциала \mathbf{A} удовлетворяют тем же условиям, то выражения (180'') являются однозначно определенными решениями следующих дифференциальных уравнений типа Пуассона:

$$\nabla^2 A_x = -\frac{4\pi}{c} j_x, \quad \nabla^2 A_y = -\frac{4\pi}{c} j_y, \quad \nabla^2 A_z = -\frac{4\pi}{c} j_z \quad 183$$

(ибо (40) получается из (180'') заменой, например, A_x на φ и $\frac{j_x}{c}$ на ρ). Эти три уравнения для слагающих вектора \mathbf{A} согласно (63) и (63') равнозначны одному векторному уравнению:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad 183'$$

Нам остается только рассмотреть вопрос о том, удовлетворяют ли слагающие вектора-потенциала упомянутым условиям. В конце § 30 мы убедились, что интеграл (169), определяющий напряженность магнитного поля \mathbf{H} , остается всегда конечным и непрерывным¹ несмотря на то, что его подынтегральное выражение при $R \rightarrow 0$ стремится к бесконечности как $\frac{1}{R^2}$. Так как подынтегральные выражения в интегралах, определяющих A_x , A_y , A_z и их производные по координатам, стремятся к бесконечности при $R \rightarrow 0$ не быстрее чем $\frac{1}{R^2}$, то по аналогии (или путем непосредственного вычисления) можно

¹ При том, конечно, условии, что плотность тока конечна, см. примечание к стр. 208.

заклЮчить, что слагающие вектора-потенциала и их производные также всюду конечны и непрерывны, т. е. удовлетворяют первому из перечисленных выше условий.

Итак, чтобы обеспечить однозначность решения уравнений (183) и (183'), нам остается только наложить на вектор-потенциал соответствующие условия в бесконечности, а именно потребовать, чтобы вектор \mathbf{A} стремился в бесконечности к нулю не медленнее, чем $\frac{1}{R}$, а его пространственные производные (а вместе с ними согласно (181) и напряженность поля \mathbf{H}) не медленнее, чем $\frac{1}{R^2}$. Физически эти условия равносильны предположению, что все возбуждающее поле токи расположены в конечной области пространства. При этих предположениях вектор-потенциал удовлетворяет дифференциальному уравнению (183').

3. Перейдем теперь к установлению дифференциальных уравнений для вектора \mathbf{H} . С этой целью образуем ротор от обеих сторон уравнения (181). Согласно (65₃) (стр. 65) получим:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

Значение $\operatorname{div} \mathbf{A}$ можно определить из (180):

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{c} \operatorname{div}_a \int \frac{\mathbf{j} dV}{R},$$

где индекс a у знака дивергенции означает, что пространственное дифференцирование производится по координатам „точки наблюдения“ P . Но, как указывалось в начале этого параграфа, порядок операций интегрирования по объему токов и дифференцирования по точке наблюдения может быть изменен на обратный. Стало быть,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \operatorname{div}_a \left(\frac{\mathbf{j}}{R} \right) \cdot dV$$

Применяя (66₂), можем написать:

$$\operatorname{div}_a \left(\frac{\mathbf{j}}{R} \right) = \frac{1}{R} \operatorname{div}_a \mathbf{j} + \mathbf{j} \operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right) = \mathbf{j} \operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right),$$

ибо значение вектора \mathbf{j} от координат точки наблюдения P не зависит, ввиду чего $\operatorname{div}_a \mathbf{j} = 0$. С другой стороны, вос-

пользовавшись формулой (49') и применив затем вторично формулу (66₂), получим:

$$\mathbf{j} \operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right) = -\mathbf{j} \operatorname{grad}_q \left(\frac{1}{R} \right) = -\operatorname{div}_q \left(\frac{\mathbf{j}}{R} \right) + \frac{1}{R} \operatorname{div}_q \mathbf{j}.$$

Последний член справа равен нулю, ибо \mathbf{j} есть вектор соленоидальный (уравнение 148'). Стало быть, окончательно

$$\operatorname{div}_a \left(\frac{\mathbf{j}}{R} \right) = -\operatorname{div}_q \left(\frac{\mathbf{j}}{R} \right)$$

и

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \int \operatorname{div}_q \left(\frac{\mathbf{j}}{R} \right) dV$$

Последний интеграл можно преобразовать по теореме Гаусса, ибо пространственное дифференцирование под знаком интеграла производится по тем же координатам „точек истока“, как и интегрирование (в отличие от предшествующего выражения для $\operatorname{div} \mathbf{A}$, в котором дифференцирование под знаком интеграла производится по координатам точки наблюдения). Стало быть,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \oint \frac{j_n}{R} dS,$$

причем интегрирование должно быть распространено по поверхности всех обтекаемых током проводников. Но на поверхности проводников согласно (149') $j_n = 0$; стало быть,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad 184$$

Внося это в выражение для $\operatorname{rot} \mathbf{H}$, получим:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{A},$$

или на основании (183')

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad 185$$

Таково искомое второе дифференциальное уравнение для вектора \mathbf{H} (первым является (182)), являющееся одним из основных уравнений электродинамики.

Сопоставим систему уравнений для напряженностей магнитного и электростатического полей:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0^1 & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Магнитное поле в отличие от поля электростатического есть поле вихревое (и притом чисто вихревое (соленоидальное) в том смысле, что дивергенция его всюду равна нулю). Поэтому скалярным потенциалом (по крайней мере однозначным скалярным потенциалом, смотри дальше) магнитное поле не обладает. Подобно тому как потенциальное электростатическое поле полностью определяется заданием силы его истоков (т. е. заданием его дивергенции как функции координат), так вихревое магнитное поле полностью определяется заданием мощности его вихрей, т. е. заданием ротора поля как функции координат. Согласно (185) вихри магнитного поля расположены в участках поля, обтекаемых токами, и только в них, причем мощность этих вихрей (т. е. численная величина ротора) пропорциональна плотности тока \mathbf{j} . Иными словами, обтекаемые токами участки поля могут быть названы вихревым пространством магнитного поля.

§ 34. Магнитные силовые линии. — 1. Описание свойств магнитного поля, как и поля электрического, часто весьма облегчается введением в рассмотрение так называемых силовых линий этого поля. По определению магнитными силовыми линиями называются линии, направление касательных к которым в каждой точке поля совпадает с направлением напряженности поля \mathbf{H} в той же точке². Дифференциальное уравнение этих линий очевидно будет иметь вид (сравни 54):

$$\frac{dx}{H_x} = \frac{dy}{H_y} = \frac{dz}{H_z}. \quad 186$$

Магнитные силовые линии, как и линии электрические, проводятся обычно с таким расчетом, чтобы в любом участке поля число линий, пересекающих перпендикулярную к ним площадку единичной по-

¹ Смотри уравнение (176).

² Так как магнитное поле не обладает потенциалом, то магнитные силовые линии, в отличие от линий электростатического поля, не могут быть определены, как ортогональные траектории поверхностей уровня.

верхности, было по возможности пропорционально численной величине напряженности поля на этой площадке; однако, как увидим ниже, требование это далеко не всегда выполнимо.

Основываясь на уравнении (14):

$$\oint E_n dS = 4\pi \sum e,$$

мы пришли в § 11 к следующему выводу: электрические силовые линии могут начинаться или кончаться только в тех точках поля, в которых расположены электрические заряды. Применяя же теорему Гаусса (25) к потоку магнитного вектора, мы на основании (181) получим:

$$\oint_S H_n dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{H} dV = 0. \quad 187$$

Таким образом в отличие от потока электрического вектора \mathbf{E} поток магнитного вектора \mathbf{H} через произвольную замкнутую поверхность всегда равен нулю. Это положение является математическим выражением того факта, что магнитных зарядов, подобных зарядам электрическим не существует: магнитное поле возбуждается не магнитными зарядами, а движением зарядов электрических (т. е. токами). Основываясь на этом положении и на сравнении (187) с (14), нетрудно убедиться путем приведенных

в § 11 рассуждений, что магнитные силовые линии ни в каких точках поля не могут ни начинаться, ни кончаться.

2. Из этого обстоятельства обычно делается вывод, что магнитные силовые линии в отличие от линий электрических должны быть линиями замкнутыми либо итти из бесконечности в бесконечность. Действительно, оба эти случая возможны. Так, например,

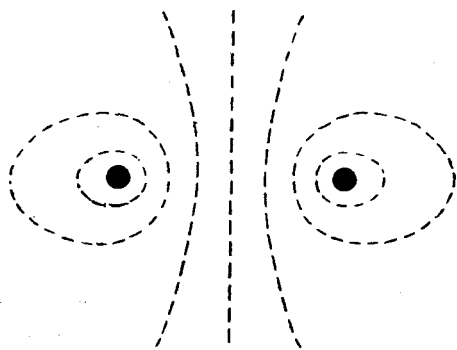


Рис. 60.

согласно результатам решения задачи 25 (стр. 209), силовые линии в поле бесконечного прямолинейного тока представляют собою перпендикулярные току окружности с центром на оси тока. С другой стороны (см. задачу 26), направление магнитного вектора \mathbf{H} в поле

кругового тока во всех точках, лежащих на оси тока, совпадает с направлением этой оси. Таким образом ось кругового тока совпадает с силовой линией, идущей из бесконечности в бесконечность; см. рис. 60, представляющий собой разрез кругового тока меридиональной плоскостью (т. е. плоскостью, перпендикулярной плоскости тока и проходящей через его центр), на котором пунктиром изображены силовые линии этого тока.

Возможен, однако, и третий случай, на который сравнительно редко обращается внимание, а именно: силовая линия может не иметь ни

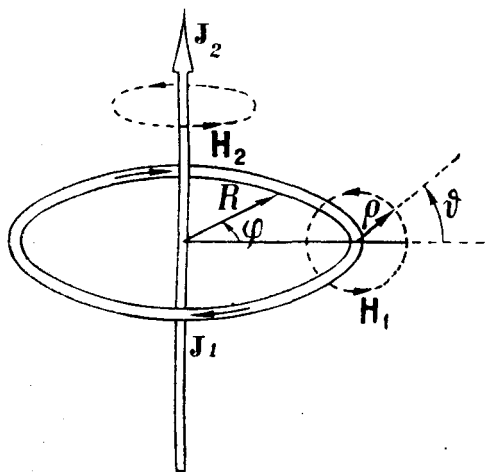


Рис. 61.

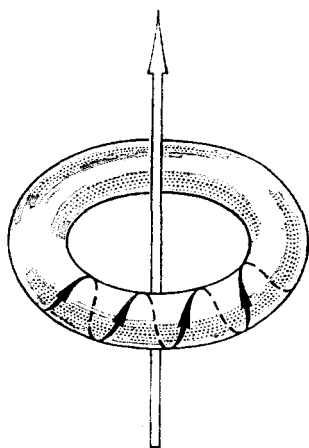


Рис. 62.

начала, ни конца и вместе с тем не быть замкнутой и не идти из бесконечности в бесконечность. Этот случай имеет место, если силовая линия заполняет собой некоторую поверхность и притом, пользуясь математическим термином, заполняет ее всюду плотно. Проще всего пояснить это на конкретном примере.

Рассмотрим поле двух токов — кругового плоского тока J_1 и бесконечного прямолинейного тока J_2 , идущего по оси тока J_1 (см. рисунок 61). Если бы существовал один лишь ток J_1 , то силовые линии поля H_1 этого тока лежали бы в меридиональных плоскостях и имели бы вид, изображенный на предыдущем рисунке. Рассмотрим одну из этих линий, изображенную на рис. 63 пунктиром. Совокупность всех подобных ей линий, которые могут быть получены вращением меридиональной плоскости вокруг оси J , образует собою поверхность S некоторого кольца или тора (рис. 62). Силовые же линии поля H_2 прямолинейного тока J_2 представляют собой концентрические

окружности. Стало быть, в каждой точке поверхности S как \mathbf{H}_1 , так и \mathbf{H}_2 касательны к этой поверхности; следовательно, и вектор напряженности результирующего поля $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ тоже касателен к S . Это значит, что каждая силовая линия поля \mathbf{H} , проходящая через одну какую-либо точку поверхности S , должна лежать на этой поверхности всеми своими точками. Линия эта будет очевидно представлять собою винтовую линию на поверхности тора S (см. рис. 62). Ход этой винтовой линии будет зависеть от соотношения сил токов J_1 и J_2 и от положения и формы поверхности S . Очевидно, что лишь при некотором определенном подборе этих условий винтовая линия эта будет замыкаться; вообще же говоря, при продолжении линии новые витки ее будут ложиться между прежними витками. При неограниченном продолжении линии она подойдет как угодно близко к любой раз пройденной точке, но никогда вторично в нее не вернется. А это и значит, что оставаясь незамкнутой, линия эта всюду плотно заполнит поверхность тора S .

Чтобы строго доказать возможность существования незамкнутых силовых линий, введем на поверхности тора S ортогональные криволинейные координаты φ (азимут меридиональной плоскости) и ϑ (полярный угол в меридиональной плоскости, с вершиной, расположенной на пересечении этой плоскости с осью кольца, рис. 62).

Напряженность полей \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 на поверхности тора является функцией одного лишь угла ϑ , причем вектор \mathbf{H}_1 направлен по направлению возрастания или убывания этого угла, а вектор \mathbf{H}_2 — по направлению возрастания (или убывания) угла φ . Пусть $\rho(\vartheta)$ есть расстояние данной точки поверхности S от центральной линии тора, а $R(\vartheta)$ — расстояние ее от вертикальной оси тока J_2 . Как нетрудно убедиться, элемент длины линии, лежащей на S , выразится формулой:

$$ds^2 = \rho^2 d\vartheta^2 + R^2(\vartheta) d\varphi^2.$$

Соответственно этому дифференциальное уравнение линий сил (сравни 187) на поверхности S примет вид:

$$\frac{\rho(\vartheta) d\vartheta}{H_1(\vartheta)} = \frac{R(\vartheta) d\varphi}{H_2(\vartheta)}.$$

Приняв во внимание, что H_1 и H_2 пропорциональны силам токов J_1 и J_2 , и интегрируя, получим:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{H_2(\vartheta)}{H_1(\vartheta)} \frac{\rho(\vartheta)}{R(\vartheta)} d\vartheta = \frac{J_2}{J_1} \left\{ F(\vartheta) - F(\vartheta_0) \right\},$$

где $F(\vartheta)$ есть некоторая функция угла ϑ , независящая от J_1 и J_2 . Чтобы линия была замкнутой, т. е. чтобы она возвращалась в начальную точку, необходимо, чтобы некоторому целому числу n оборотов линии вокруг тора соответствовало целое же число m оборотов ее вокруг вертикальной оси. Иными словами, необходимо, чтобы можно было найти два таких целых числа n и m , чтобы возрастанию угла ϑ на $2\pi n$ соответствовало возрастание угла φ на $2\pi m$:

$$\varphi - \varphi_0 = 2\pi m = \frac{J_2}{J_1} \left\{ F(2\pi n + \vartheta) - F(\vartheta) \right\}.$$

Примем теперь во внимание, что $F(\vartheta)$ представляет собой интеграл периодической функции угла ϑ с периодом 2π . Как известно, интеграл периодической функции в общем случае является суммой функции периодической и функции линейной¹. Стало быть,

$$F(\vartheta) = K\vartheta + \Phi(\vartheta),$$

где K есть некоторая постоянная, а $\Phi(\vartheta)$ есть функция от ϑ с периодом 2π . Стало быть

$$F(2\pi n + \vartheta) = K \cdot 2\pi n + F(\vartheta).$$

Внося это в предыдущее уравнение, получим условие замкнутости силовых линий на поверхности тора S :

$$m = \frac{J_2}{J_1} K \cdot n.$$

Здесь K есть величина, от J_1 и J_2 независимая. Очевидно, что два целых числа n и m , удовлетворяющие этому условию, могут быть найдены лишь в том случае, если величина $\frac{J_2}{J_1} K$ является числом рациональным (целым или дробным), что будет иметь место лишь при определенном соотношении между силами токов J_1 и J_2 . Вообще говоря, $\frac{J_2}{J_1} K$ будет величиной иррациональной и, стало быть, силовые линии на рассматриваемой поверхности тора S будут незамкнутыми. Однако и в этом случае всегда можно подобрать целое число n так, чтобы $\frac{J_2}{J_1} Kn$ как угодно мало отличалось от некоторого целого числа m . Это значит, что незамкнутая силовая линия после достаточного числа оборотов как угодно близко подойдет к любой раз пройденной точке поля. Аналогичным путем можно показать, что линия эта после достаточного числа оборотов как угодно близко подойдет к любой заданной точке поверхности S , а это и значит по определению, что она всюду плотно заполняет эту поверхность.

Существование незамкнутых магнитных силовых линий, всюду плотно заполняющих некоторую поверхность S , делает очевидно невозможным точное графическое изображение поля с помощью этих линий. В частности, далеко не всегда можно удовлетворить требованию, чтобы число линий, пересекающих перпендикулярную им единичную площадку, было пропорционально напряженности поля на этой площадке. Так, например, в только что рассмотренном случае одна и та же незамкнутая линия бесконечное число раз пересечет любую конечную площадку, пересекающую поверхность кольца S ². Впрочем,

¹ Ибо в периодическую функцию может входить постоянный член, интеграл которого представляет собой линейную функцию независимого переменного.

² Некоторые авторы пытаются приписать реальное существование силовым трубкам, т. е. нитям малого, но все же конечного сечения, поверхность которых образована силовыми линиями. Однако при этом упускается из виду, что в случае

при надлежащей осмотрительности, пользование понятием силовых линий может явиться хотя и приближенным, но все же удобным и наглядным способом описания характера магнитного поля.

3. Рассмотрим циркуляцию магнитного вектора \mathbf{H} по произвольной замкнутой линии L . На основании теоремы Стокса (175) и уравнения (185) можем написать:

$$\oint_L H_s ds = \int_S \text{rot}_n \mathbf{H} dS = \frac{4\pi}{c} \int_S j_n dS, \quad 188$$

причем, согласно сказанному на стр. 215, поверхностные интегралы могут быть распространены по любой из поверхностей, опирающихся на контур L . Впрочем нетрудно и непосредственно убедиться, что благодаря замкнутости постоянных токов значение этих поверхностных интегралов зависит лишь от контура L поверхности интегрирования S . Действительно, согласно (144") $j_n dS$ равно силе тока dJ , проходящего через элемент поверхности dS в направлении ее положительной нормали. Если поверхность S не пересекает ни одного несущего ток проводника, то правая часть (188) равна очевидно нулю; вообще же говоря,

$$\oint_L H_s ds = \frac{4\pi}{c} \int_S j_n dS = \frac{4\pi}{c} \sum J, \quad 188'$$

где $\sum J$ есть алгебраическая сумма сил токов, пронизывающих контур L ; токи эти должны считаться положительными или отрицательными в зависимости от того, составляет ли их направление с направлением положительного обхода контура L правую или левовинтовую систему (см. рис. 63). Если две поверхности S и S' опираются на один и тот же контур L , то совокуп-

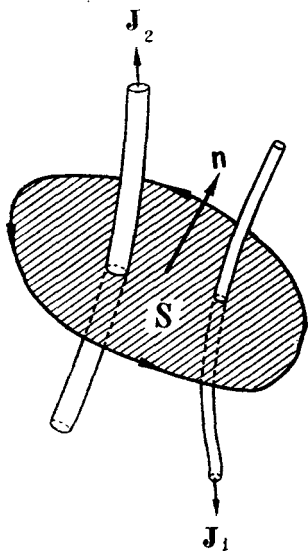


Рис. 63.

ность этих поверхностей образует одну замкнутую поверхность, ограничивающую некоторый объем V . Благодаря замкнутости постоянных

незамкнутости этих линий силовая трубка при достаточном продолжении должна бесконечно число раз пересечь самое себя, ибо сечение ее конечно, а силовые линии, образующие поверхность трубки, при достаточном продолжении сколько угодно раз как угодно близко подойдут к раз пройденным ими точкам.

токов количество электричества $\sum J$, втекающего через S в единицу времени в объем V , должно равняться количеству электричества $\sum J'$, вытекающего из этого объема через поверхность S' . Таким образом величина $\sum J$ действительно будет одинакова для обеих этих поверхностей S и S' .

Согласно (188') циркуляция вектора напряженности магнитного поля по кривой, не охватывающей токов, равна нулю, циркуляция же по кривой, охватывающей токи, равна помноженной на $\frac{4\pi}{c}$ сумме сил этих токов (взятых с надлежащими знаками). Циркуляция вектора \mathbf{H} по силовой линии не может равняться нулю (ввиду параллельности элемента длины силовой линии ds и вектора \mathbf{H} величина $H_s ds = H ds$ существенно положительна). Следовательно, каждая замкнутая магнитная силовая линия должна охватывать хотя бы один из несущих ток проводников. Больше того, незамкнутые силовые линии, плотно заполняющие некоторую поверхность S (если только они не идут из бесконечности в бесконечность), также должны обвиваться вокруг токов. Действительно, интеграл вектора \mathbf{H} по почти замкнутому витку такой линии существенно положителен. Стало быть, циркуляция \mathbf{H} по замкнутому контуру, получаемому из этого витка добавлением замыкающего его произвольно малого отрезка, отлична от нуля. Следовательно, контур этот должен пронизываться током.

Задача 32. — Показать, исходя из (188) и результатов решения задачи 24, что напряженность поля прямолинейного бесконечного тока силы J , сечение которого представляет собою круг радиуса r_0 , равна:

$$(r \geq r_0) \quad H_s = \frac{2J}{cr}; \quad (r \leq r_0) \quad H_s = \frac{2Jr}{cr_0^2},$$

где r есть расстояние точки поля от оси тока, причем силовые линии поля представляют собой концентрические току окружности.

§ 35. Топология¹ вихревого (магнитного) поля. Фиктивные магнитные заряды. Магнитные листки. — 1. Чтобы разобраться в геометрических или, вернее, топологических свойствах магнитного поля, рассмотрим сначала тот случай, когда в поле имеется лишь один

¹ Топология — analysis situs: отрасль математики, изучающая свойства фигур и геометрических образов, остающиеся неизменными при непрерывной деформации этих фигур.

замкнутый проводник, обтекаемый током J . Все силовые линии этого поля (как замкнутые, так и незамкнутые) будут охватывать этот ток. Вихрь магнитного поля rot \mathbf{H} отличен от нуля лишь внутри обтекаемого током проводника. Поэтому пространство, занятое током, можно назвать вихревым пространством или, ввиду замкнутости тока, вихревым кольцом.

С чисто топологической точки зрения все замкнутые линии или контуры (как совпадающие с магнитными силовыми линиями, так и не совпадающие с ними), если только они расположены вне вихревого пространства, распадаются на два класса, в зависимости от того, охватывают ли они вихревое кольцо или нет. Любые два контура, принадлежащие к одному и тому же классу, всегда могут быть путем непрерывной деформации приведены в совпадение друг с другом¹. Напротив, если мы мысленно выделим из поля вихревое пространство или условимся считать его непроницаемым, то контуры разных классов не смогут быть приведены в совпадение без нарушения их целостности.

Далее контуры первого класса путем непрерывной деформации могут быть стянуты к точке (т. е. к бесконечно малой длине). Контуры же второго класса без пересечения вихревого пространства стянуты к точке быть не могут.



Рис. 64.

Пространство, в котором существуют замкнутые линии или контуры, не могущие быть стянутыми к точке, называется пространством многосвязным. Число существенно различных классов контуров определяет порядок связности пространства. Так, например, пространство, оставшееся после выделения из него одного вихревого кольца, есть пространство двусвязное (два существенно различных класса контуров); если же из пространства выделить два кольца (два замкнутых тока), которые, в частности, могут соприкасаться между собою (рис. 65), то оставшееся пространство будет трехсвязным, ибо в нем существуют три класса контуров, не сводимых друг к другу (abc , $ab'c'$, $ab''c''$ на рис. 65, контур же типа $b''c''ac'$ может быть разложен на два контура типа $ab'c'$ и $ab''c''$).

¹ Если контур сложен, например, петлеобразен (рис. 64), то его предварительно нужно разбить на два или несколько простых контуров, каждому из которых непрерывной деформацией можно сообщить форму окружности. Точно так же если контур второго класса охватывает вихревое пространство не один, а несколько раз, то его можно разложить на ряд контуров, каждый из которых охватывает это пространство по одному разу.

Эти топологические свойства многосвязных пространств тесно связаны с физическими свойствами магнитного поля постоянных токов, ибо и с физической точки зрения контуры, проведенные в поле токов, тоже распадаются на классы, в зависимости от значения циркуляции вектора \mathbf{H} по этим контурам. Так, например, в случае одного замкнутого тока циркуляция \mathbf{H} по контурам первого класса, могущим быть стянутыми к точке, равна нулю, циркуляция же по линиям второго

класса, охватывающим ток, равна $\pm \frac{4\pi J}{c}$ (знак зависит от выбора направления обхода контура); промежуточных же значений циркуляции нет. Точно так же в случае двух или нескольких токов легко убедиться, что подразделение линий на классы по физическому признаку (величина циркуляции) совпадает с подразделением их по признаку топологическому.

2. Однако связь между топологическими и физическими свойствами поля не ограничивается указанными соотношениями и может быть прослежена гораздо дальше.

Известно, что всякое многосвязное пространство путем внесения в него надлежащих перегородок может быть сделано односвязным. Так, например, если затянуть отверстия вихревого кольца непроницаемой перегородкой, то проведение контуров второго класса, охватывающих это кольцо, станет невозможным, и пространство станет односвязным. Точно так же трехсвязное пространство (рис. 65) станет односвязным, если затянуть непроницаемыми перегородками отверстие каждого из расположенных в нем колец. Заметим, что форма и положение этих перегородок остаются при этом в значительной мере произвольными; существенно лишь, чтобы контур каждой перегородки опирался на поверхность соответствующего вихревого кольца.

Рассмотрим теперь физические свойства магнитного поля, ставшего односвязным благодаря мысленному внесению в него такого рода условных перегородок. Ротор вектора \mathbf{H} во всех точках этого поля равен нулю (вихревое пространство попрежнему считаем выделенным из поля). Циркуляция вектора \mathbf{H} по любому возможному в нем (т. е. не пересекающему условную перегородку) контуру равна нулю. Стало быть (см. § 8), в этом односвязном поле можно однозначно

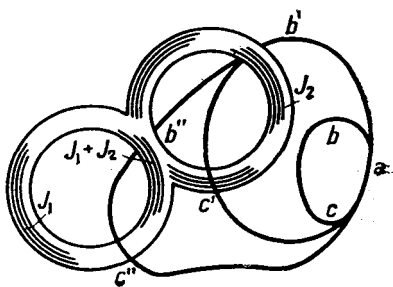


Рис. 65.

определить скалярный потенциал ϕ магнитного поля, положив по аналогии с потенциалом φ поля электростатического:

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 H_s ds, \quad 189 \text{ (сравни 36')}$$

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \phi. \quad 189' \text{ (сравни 53)}$$

При этом согласно (182) для всех точек рассматриваемого пространства

$$\text{div } \mathbf{H} = -\nabla^2 \phi = 0, \quad 189''$$

так что магнитное поле, ставшее потенциальным благодаря выделению вихревого пространства и внесению условных перегородок, оказывается лишенным объемных истоков.

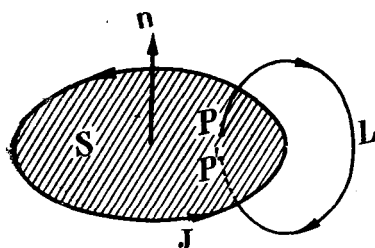


Рис. 66.

Ввиду непрерывности вектора \mathbf{H} потенциал ϕ и его пространственные производные будут также непрерывны во всем поле за исключением точек, прилегающих к условным перегородкам. Действительно, рассмотрим две бесконечно близкие точки P и P' , разделенные условной перегородкой S (рис. 66). Разность потенциалов этих точек согласно (189) будет равна:

$$\phi - \phi' = \int_P^{P'} H_s ds,$$

причем путь интегрирования L не должен, конечно, пересекать перегородки. Так как точки P и P' бесконечно близки друг к другу, то этот путь L (PP') лишь бесконечно мало отличается от замкнутой линии $PP'P$ и, стало быть, согласно (188'),

$$\phi - \phi' = \oint_{PP'P} H_s ds = \frac{4\pi J}{c}. \quad 190$$

Таким образом условные перегородки являются поверхностями разрыва сплошности магнитного потенциала ϕ , испытывающего на них скачок $\frac{4\pi J}{c}$. Этот скачок будет положительным

($\varphi > \varphi'$), если циркуляция по контуру $PP'P$ положительна, т. е., как явствует из рисунка, если бесконечно малый вектор PP' образует с направлением тока J правовинтовую систему.

3. При изучении потенциального электростатического поля мы познакомились с поверхностями разрыва потенциала в Кулоновом поле электрических зарядов и убедились, что физически эти поверхности разрыва соответствуют двойным слоям зарядов. По аналогии с полем электростатическим можно и магнитное поле токов, ставшее потенциальным благодаря выделению из него вихревого пространства и внесению условных перегородок, рассматривать как поле двойных слоев фиктивных магнитных зарядов m , взаимодействующих по Кулоновому закону:

$$F = k \frac{mm'}{R^2}. \quad 191 \text{ (сравни 1')}$$

Здесь F есть пондеромоторная сила взаимодействия магнитных зарядов m и m' , находящихся на расстоянии R друг от друга, причем заряды одинакового знака притягиваются, а противоположных знаков отталкиваются, а k есть фактор пропорциональности, зависящий от выбора единиц измерения. Если мы приравняем этот фактор единице, положив

$$F = \frac{mm'}{R^2}, \quad 191'$$

то тем самым мы введем абсолютную единицу количества магнетизма: единица магнетизма есть такое количество магнетизма, которое равное ей количество магнетизма, находящееся на расстоянии 1 см, отталкивается с силой в одну дину. Далее можно ввести в рассмотрение напряженность поля фиктивного магнитного заряда:

$$H = \frac{m}{R^2}, \quad 191''$$

как силу, действующую на пробный положительный магнитный заряд, равный единице, и т. д. и т. д. в полной аналогии с полем электростатическим.

Однако существенное отличие поля фиктивных магнитных зарядов от электростатического заключается в том, что согласно (189'') поле это лишено объемных (а вместе с тем и точечных) источников, и что все магнитные заряды располагаются двойными слоями на поверхностях разрыва магнитного потенциала ψ , совпадающих с введенными выше условными перегородками. Таким образом магнитные

заряды противоположных знаков оказываются неотделимыми друг от друга и можно считать, что элементарные магнитные заряды попарно связаны в твердые магнитные диполи (элементарные магниты).

4. Итак, рассмотрение магнитного поля токов можно заменить рассмотрением эквивалентного поля фиктивных магнитных диполей, образующих двойные магнитные слои или, как их принято называть, магнитные листки. Поверхность этих листков должна совпадать с введенными нами выше условными перегородками, следовательно контуры листков должны совпадать с контурами токов. Чтобы поле этих листков вне занимаемого токами вихревого пространства и вне точек, лежащих на самом листке (где напряженность поля листка становится бесконечной, сравни § 15), было тождественно с полем токов, достаточно, чтобы скачок магнитного потенциала на поверхности листка равнялся $\frac{4\pi J}{c}$ (см. 190). Скачок потенциала $\psi - \psi'$ на поверхности двойного слоя (листка) согласно (84) и (80) равен:

$$\psi - \psi' = 4\pi\sigma l = 4\pi\tau,$$

где τ есть мощность листка (двойного слоя), l его толщина, а σ — поверхностная плотность заряда каждого из его слоев. Следовательно, момент эквивалентного току магнитного листка должен быть положен равным:

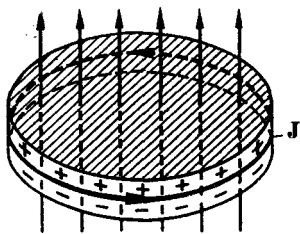


Рис. 67.

$$\tau = \sigma_m l = \frac{J}{c}, \quad 190'$$

где под σ_m нужно понимать плотность фиктивных магнитных зарядов на поверхности листка. Таким образом эквивалентный току листок должен быть однородным, т. е. мощность его τ должна быть постоянной по всему его протяжению. Легко, наконец, убедиться, что магнитные диполи, составляющие листок, должны быть расположены так, чтобы положительное направление всех этих диполей (от $-m$ к $+m$) составляло с направлением тока правовинтовую систему (см. рис. 67).

Потенциал ψ однородного двойного слоя согласно (83) может быть представлен в следующей форме:

$$\psi = \tau \Omega,$$

где Ω есть телесный угол, под которым контур двойного слоя виден из обладающей потенциалом ϕ точки наблюдения, причем знак угла Ω считается совпадающим со знаком зарядов той стороны слоя, которая видна из точки наблюдения. Таким образом, как и при проведении условных перегородок, мы вновь убеждаемся, что существенное значение имеет лишь положение контура листка, долженствующего совпадать с контуром тока; во всех же остальных отношениях форма и положение листка остаются произвольными. В этой произвольности формы магнитного листка с особенной отчетливостью проявляется условность замены тока эквивалентным листком: меняя форму листка, мы по нашему произволу можем заставить его проходить через любую точку пространства и тем „создать“ в этой точке скачок магнитного потенциала. Возможно это, конечно, лишь потому, что самое понятие потенциала магнитного поля не имеет в сущности реального физического смысла и может быть однозначно определено лишь после внесения в поле токов условных перегородок (листочков). Если же мы не внося этих перегородок (листочков), тем не менее захотим определить магнитный потенциал с помощью соотношения (189), то потенциал этот окажется многозначной функцией точки.

Действительно, припишем некоторой точке P потенциал ϕ_0 . Будем затем удаляться от P по некоторой линии L , определяя потенциал точек этой линии с помощью соотношения (189). Пусть линия L будет замкнутой, так что, двигаясь по ней все время в одном и том же направлении, мы вновь вернемся к исходной точке P . Приращение потенциала при полном обходе контура L согласно (189) будет равно циркуляции вектора \mathbf{H} по L , т. е. согласно (188') будет равно $\pm \frac{4\pi J}{c}$,

если контур L один раз охватывает ток J , и $\pm \frac{4\pi J}{c} n$, если он охватывает его n раз. Таким образом вернувшись в исходную точку P , мы „найдем“ в ней (т. е. должны будем приписать ей) потенциал

$$\phi = \phi_0 \pm \frac{4\pi J}{c} n,$$

вообще говоря (при $n \neq 0$), отличный от прежнего потенциала ϕ_0 и зависящий от значения n , т. е. от положения и формы контура L . А это и значит, что магнитный потенциал есть многозначная функция точки, и что сделать эту функцию однозначной можно лишь искусственно, путем внесения в многосвязное поле токов условных перегородок (магнитных листков).

Отметим в заключение еще раз, что все вышеизложенное относится лишь к полю вне вихревого пространства (т. е. вне токов); внутри же этого пространства понятие магнитного потенциала теряет всякий смысл. Далее эквивалентность токов и магнитных листков имеет место в сущности лишь в случае линейных токов, т. е. токов, расстояние которых от рассматриваемых точек поля велико по сравнению с сечением тока. В противном случае поле тока существенно зависит от распределения тока по сечению вихревого кольца (т. е. несущего ток проводника), тогда как поле листка зависит лишь от положения его линейного контура. Правда, ток конечного сечения всегда может быть разложен на совокупность бесконечно тонких токовых нитей, каждая из которых может быть заменена эквивалентным листком бесконечно малой силы, однако, прибегать к столь сложным построениям не представляется целесообразным.

ПРИМЕР I. *Замена элементарного замкнутого тока магнитным диполем. Магнитный момент тока.* — Элементарным током мы будем называть всякий замкнутый ток, расстояние которого от точки наблюдения весьма велико по сравнению с размерами (поперечником) контура тока.

Заменяем ток J эквивалентным магнитным листком мощности $\tau = \frac{J}{c}$. Элемент поверхности этого листка dS будем рассматривать как величину векториальную, направленную по положительной нормали \mathbf{n} к поверхности листка (т. е. по нормали, направленной от отрицательных зарядов листка к положительным). Разумеется если листок не плоский, то направление \mathbf{n} будет меняться от точки к точке. Площадка dS будет видна из точки поля P под телесным углом (см. ур. 9 и 10)

$$d\Omega = \frac{dS \cos(\mathbf{n}, \mathbf{R})}{R^2} = \frac{\mathbf{R}d\mathbf{S}}{R^3}, \quad 193$$

где \mathbf{R} есть радиус-вектор, проведенный от dS к точке наблюдения P . В соответствии с соглашением, введенном в § 15, знак угла $d\Omega$ будет положительным, если из P видна положительная сторона площадки dS , и отрицательным в обратном случае. Угол Ω , под которым виден контур всего листка, будет равен:

$$\Omega = \int d\Omega = \int_S \frac{\mathbf{R}d\mathbf{S}}{R^3}. \quad 193'$$

Предположим теперь, что все элементы поверхности листка настолько удалены от точки наблюдения P и поверхность эта на-

столько мала, что расстояние всех этих элементов от P можно считать одинаковым. Удовлетворяющие этим условиям листки мы будем называть элементарными. При этих условиях

$$\Omega = \int_S \frac{\mathbf{R} d\mathbf{S}}{R^3} = \frac{\mathbf{R}}{R^3} \int_S d\mathbf{S} = \frac{\mathbf{R}\mathbf{S}}{R^3}, \quad 193^*$$

где \mathbf{S} есть векториальная величина поверхности листка, т. е. векторная сумма поверхностей $d\mathbf{S}$ всех его элементов. Согласно (192) и (190') магнитный потенциал подобного листка окажется равным:

$$\phi = \tau \Omega = \frac{J}{c} \frac{\mathbf{R}\mathbf{S}}{R^3}.$$

Если ввести в рассмотрение величину

$$\mathbf{M} = \frac{J\mathbf{S}}{c}, \quad 194$$

которая носит название магнитного момента листка или магнитного момента эквивалентного ему тока J , то выражение это примет вид:

$$\phi = \frac{\mathbf{M}\mathbf{R}}{R^3} = -\mathbf{M} \operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right). \quad 195$$

Сравнивая это с (41) убедимся, по аналогии с электростатикой, что выражение (195) тождественно с потенциалом магнитного диполя момента \mathbf{M} . Стало быть, на расстояниях от тока, больших по сравнению не только с его сечением, но и с размерами (поперечником) контура всего тока, магнитное поле тока совпадает с полем магнитного диполя момента \mathbf{M} .

К этому результату можно прийти также путем следующих простых рассуждений. Каждая пара противоположащих элементов $d\mathbf{S}$ двойного слоя, обладающих зарядом $dm = \pm \sigma_m d\mathbf{S}$, представляет собой магнитный диполь момента (см. 190')

$$l dm = l \sigma_m d\mathbf{S} = \tau d\mathbf{S},$$

ибо вектор $d\mathbf{S}$ направлен по положительной оси l этого диполя. Если размеры двойного слоя малы по сравнению с расстоянием его от рассматриваемых точек поля, то все эти диполи можно считать

расположенными в одной и той же точке поля; общий же магнитный момент всех диполей окажется равным:

$$\mathbf{M} = \tau \int d\mathbf{S} = \frac{J}{c} \mathbf{S},$$

что совпадает с (194).

Пример II. Замена соленоида магнитом. — Предположим, что ток J циркулирует по проводнику, намотанному по винтовой линии на поверхность цилиндра сечения S и длины l . Такой ток называется цилиндрическим соленоидом. Пусть на единицу длины цилиндра приходится n витков проводника. Если ход винтовой линии достаточно мал, то каждый виток соленоида можно приближенно заменить нанизанным на цилиндр замкнутым кольцеобразным током той же силы J . Заменим эти токи плоскими магнитными листками мощности

$$\tau = \sigma_m l = \frac{J}{c}.$$

Если расстояние $\frac{1}{n}$ между смежными листками достаточно мало по сравнению с расстоянием рассматриваемых точек поля от соленоида, то „бесконечно малую“ толщину магнитного листка l можно положить равной $\frac{1}{n}$. В этом случае смежные листки будут соприкасаться своими противоположно заряженными поверхностями. Стало быть, заряды их будут взаимно нейтрализоваться, за исключением лишь зарядов внешних поверхностей двух крайних листков, совпадающих с основаниями цилиндрического соленоида. Основания эти будут равномерно покрыты магнитными зарядами противоположных знаков плотности

$$\sigma_m = \frac{\tau}{l} = n\tau = \frac{nJ}{c}.$$

Стало быть, поле соленоидального тока приближенно совпадает с полем цилиндрического магнита той же длины и того же сечения, основания которого равномерно покрыты магнитными зарядами указанной плотности. Как легко убедиться, направление момента этого магнита (от отрицательного или южного полюса к положительному или северному) должно составлять противовинтовую систему с направлением тока в соленоиде (рис. 68).

Однако лишь внешнее поле такого магнита эквивалентно полю тока, внутри же магнита поле \mathbf{H} направлено противоположно

полю тока (от N к S). Этого и следовало ожидать, ибо мы заполнили всю внутренность соленоида магнитными листками конечной толщины, тогда как лишь внешнее поле листка эквивалентно полю тока. Внутри же листка поле его направлено противоположно полю того тока, которому он „эквивалентен“. В предыдущем нам не приходилось обращать на это внимания, потому что мы рассматривали лишь бесконечно тонкие листки, внутри которых самое понятие поля теряет всякий смысл, ибо напряженность его H обращается в бесконечность (сравни § 15).

5. Эквивалентность магнитного поля листков и линейных токов, в отличие от избранного нами способа доказательства, может быть установлена также путем непосредственного вычисления.

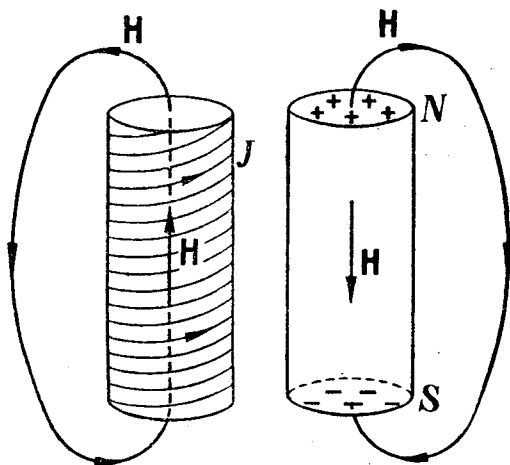


Рис. 68.

Сравним поле замкнутого тока силы J и контура L с полем магнитного листка

мощности $\tau = \frac{J}{c}$ и поверхности S , опирающейся на контур L . Составляющая напряженности поля этого листка по какому-либо направлению m согласно (189') и (192) будет равна

$$H_m = -\text{grad}_m \psi = -\tau \frac{\partial \Omega}{\partial m} = -\frac{J}{c} \frac{\partial \Omega}{\partial m}.$$

Здесь $\frac{\partial \Omega}{\partial m}$ есть отношение изменения $d\Omega$, испытываемого телесным углом Ω при перемещении точки наблюдения P на отрезок dm , к

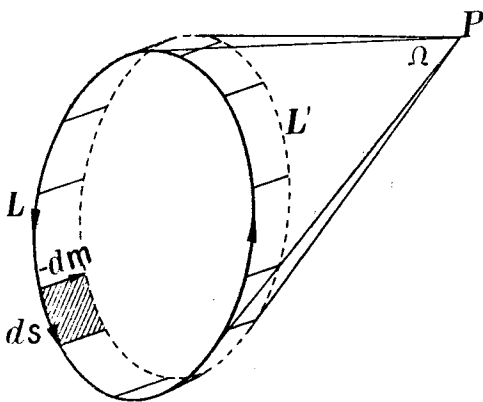


Рис. 69.

длине этого отрезка dm . Это изменение $d\Omega$ равно очевидно тому изменению, которое испытывает угол Ω , если P остается неподвижной, а контур L перемещается в противоположную сторону на отрезок $-dm$. При этом перемещении каждый

элемент длины ds контура L описывает площадку $dS = [-dm \cdot ds]$, которая согласно (193) будет видна из точки P под углом

$$d\omega = \frac{RdS}{R^3} = \frac{[-dm \cdot ds] R}{R^3}.$$

Путем рассмотрения рис. 69 можно убедиться, что выбор порядка сомножителей — dm и ds в выражении для dS сделан правильно, т. е. что угол $d\omega$ будет положительным, если из P видна положительная сторона элемента dS поверхности, заключенной между исходным и смещенными контурами L и L' , и отрицательным в обратном случае (напомним, что R совпадает с направлением от dS к P).

Применив известные правила преобразования векторной алгебры получим:

$$d\omega = \frac{-dm [ds \cdot R]}{R^3} = \frac{-dm [ds \cdot R]_m}{R^3}.$$

Полное изменение телесного угла, под которым виден весь контур L , равно

$$d\Omega = \int d\omega = -dm \oint_L \frac{[ds \cdot R]_m}{R^3};$$

стало быть,

$$H_m = -\frac{J}{c} \frac{\partial \Omega}{\partial m} = \frac{J}{c} \int \frac{[ds \cdot R]_m}{R^3}.$$

Так как это уравнение справедливо при любом выборе направления m , то вектор напряженности поля магнитного листка должен быть равен

$$\mathbf{H} = \frac{J}{c} \int \frac{[ds \cdot \mathbf{R}]}{R^3},$$

т. е. должен совпадать с напряженностью поля линейного тока силы J (ур. 166); что и требовалось доказать.

6. Подведем теперь итоги полученным результатам. Мы определили магнитное поле как поле сил взаимодействия токов, подобно тому, как электрическое поле было определено, как поле сил взаимодействия электрических зарядов. Далее мы убедились, что если исключить из рассмотрения вихревое пространство и внести в поле надлежащие условные перегородки, то поле токов можно свести к Кулоновому полю фиктивных магнитных зарядов, связанных попарно в диполи и расположенных двойными слоями или листками¹.

¹ В следующем параграфе мы убедимся, что линейный ток и магнитный листок эквивалентны друг другу не только в отношении возбуждаемого ими поля, но и в отношении пондеромоторных сил, испытываемых ими во внешнем магнитном поле.

Однако историческое развитие происходило, как известно, как раз в обратном направлении. Магнитные явления обнаружены были впервые при изучении так называемых „постоянных“ магнитов. С целью объяснения этих явлений было создано представление о магнитных зарядах, взаимодействующих по закону Кулона, которым приписывалось столь же реальное существование, как и зарядам электрическим. При этом, как известно, оказалось, что в отличие от электрических магнитные заряды противоположных знаков не могут быть отделены друг от друга. Из этого факта был сделан вывод (Кулон, 1789), что в каждой молекуле магнетиков (т. е. способных намагничиваться тел) содержится равное количество магнетизма противоположных знаков, и что намагничивание состоит в магнитной поляризации молекул, т. е. в раздвигании разноименных зарядов молекулы магнетика в противоположные стороны. Таким образом молекулы магнетиков трактовались как своего рода квазиупругие или твердые (в постоянных магнитах) магнитные диполи.

Лишь впоследствии были открыты магнитные свойства токов (Эрстед, 1819, Ампер, 1820), а именно пондеромоторное взаимодействие токов, с одной стороны, и взаимодействие токов с магнитами — с другой. Таким образом оказалось, что существуют два рода источников магнитного поля — постоянные магниты с магнитными диполями и электрические токи, т. е. движущиеся электрические заряды, причем как магниты так и токи сами испытывают во внешнем магнитном поле пондеромоторные силы. Естественно возникло стремление устранить этот дуализм и свести все источники магнитного поля к одной категории. Уже Ампер, доказавший эквивалентность токов и магнитных листков (т. е. совокупностей магнитных диполей), высказал предположение, что кажущееся существование магнитных диполей в молекулах магнетиков может в действительности обуславливаться наличием в них эквивалентных диполям замкнутых токов. В этом случае все источники магнитного поля свелись бы к одной категории токов. В течение почти целого столетия гипотеза Ампера, в дальнейшем развитая Вебером, оставалась гипотезой и встречала ряд более или менее веских возражений. Лишь с того момента, как возникло и укрепилось современное представление об атоме как о положительном ядре, окруженном роем обращающихся около него электронов, гипотеза амперовых токов стала на твердую почву. Ибо электрон, обращающийся около ядра, во всех интересующих нас здесь отношениях эквивалентен постоянному замкнутому току.

Основы электронной теории магнитных тел будут изложены нами в главе V, где будет также рассказано о так называемых магнитоме-

ханических явлениях, открытие которых принесло решительное подтверждение гипотезы Ампера. Ныне может считаться твердо установленным, что ни магнитных зарядов, ни магнитных диполей в природе нет, и что все магнитные явления связаны с движением электрических зарядов. Поэтому в настоящее время представляется принципиально неправильным исходить при изучении магнетизма из рассмотрения постоянных магнитов, представляющих собой сложную совокупность элементарных молекулярных токов.

§ 36. Пондеромоторные силы, испытываемые в магнитном поле замкнутыми токами.—1. Ограничимся сначала рассмотрением линейных токов (см. определение этого понятия на стр. 208), т. е., иными словами, рассмотрением магнитного поля на больших расстояниях от токов, это поле возбуждающих. При определении пондеромоторных сил, испытываемых некоторым током J во внешнем магнитном поле \mathbf{H} , ток J можно считать линейным в том случае, если это поле \mathbf{H} не изменяется сколько-нибудь значительно на протяжении любого сечения тока J .

Поставим себе прежде всего задачу определить работу, совершаемую пондеромоторными силами магнитного поля \mathbf{H} при произвольном перемещении контура тока J . Перемещение это, вообще говоря, может быть конечно связано с деформацией контура тока.

Пусть каждый элемент ds контура L тока J испытывает некоторое произвольное бесконечно малое перемещение \mathbf{q} , конечно, не нарушающее связности контура (рис. 70). Работа, совершаемая силами магнитного поля при этом перемещении элемента ds , будет согласно (165') равна

$$\mathbf{qF} = \frac{J}{c} \mathbf{q} [ds \mathbf{H}],$$

общая же работа δA , связанная с перемещением всех элементов контура тока, будет равна:

$$\delta A = \oint_L \mathbf{Fq} = \frac{J}{c} \oint_L \mathbf{q} [ds \mathbf{H}] = \frac{J}{c} \oint_L \mathbf{H} [\mathbf{q} ds].$$

Но

$$[\mathbf{q} ds] = \delta \mathbf{S},$$

где $\delta \mathbf{S}$ есть элемент площади, описанный элементом контура ds при его перемещении \mathbf{q} (см. рис. 70), причем порядок сомножителей ds и \mathbf{q} в выражении для $\delta \mathbf{S}$ выбран так, что направление вектора $\delta \mathbf{S}$ (т. е. направление положительной нормали \mathbf{n} к элементу $\delta \mathbf{S}$)

образует с направлением тока в контуре L' правовинтовую систему. Стало быть,

$$\delta A = \frac{J}{c} \int_{\Delta} \mathbf{H} \delta \mathbf{S} = \frac{J}{c} \int_{\Delta} H_n \delta S,$$

где интегрирование должно быть распространено по всем элементам δS поверхности Δ , описанной контуром тока L при его перемещении q в положение L' .

Обозначим через Φ поток магнитного вектора или, выражаясь кратче, магнитный поток через контур тока L (т. е. через произвольную поверхность S , опирающуюся на этот контур):

$$\Phi = \int_S H_n dS, \quad 196$$

где n есть положительная нормаль к S , образующая с направлением тока правовинтовую систему. Величина этого потока зависит лишь от расположения контура L , но не от формы поверхности S , ибо согласно (181) и (175)

$$\Phi = \int_S H_n dS = \int_S \text{rot}_n \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad 196'$$

Таким образом магнитный поток Φ через контур L равен циркуляции вектора-потенциала \mathbf{A} по этому контуру.

Пользуясь обозначением (196), можем написать:

$$\oint_{\Delta} H_n dS = \delta \Phi,$$

ибо изменение магнитного потока через контур тока равно очевидно магнитному потоку через поверхность Δ , описанную контуром при его перемещении. Стало быть:

$$\delta A = \frac{J}{c} \delta \Phi. \quad 197$$

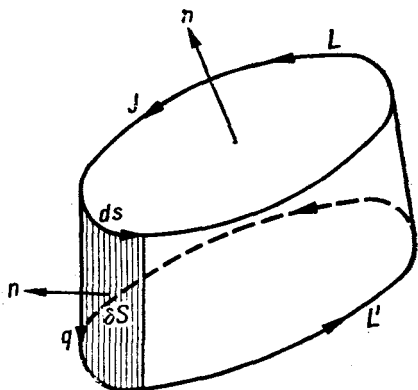


Рис. 70.

Таким образом мы приходим к следующему весьма простому результату: работа пондеромоторных сил магнитного поля при произвольном перемещении тока равна помноженному на $\frac{J}{c}$ изменению магнитного потока через контур этого тока. Стало быть, в частности, такие перемещения тока, при которых величина магнитного потока через его контур не испытывает изменения, не связаны с работой сил магнитного поля.

2. Если ввести обозначение:

$$U = -\frac{J}{c} \Phi, \quad 198$$

то (197) примет вид:

$$\delta A = -\delta U. \quad 199$$

Следовательно, работа пондеромоторных сил магнитного поля равна убыли функции U , которая таким образом играет роль потенциальной или силовой функции магнитного поля. В частности, путем обычных в аналитической механике способов рассуждения легко убедиться, исходя из (199), что если функция U выражена в зависимости от каких-либо „обобщенных“ координат q_i , характеризующих положение контура тока, то „обобщенная“ (в смысле аналитической механики) пондеромоторная сила θ_i , действующая на ток по направлению какой-либо из этих координат q_i , будет равна:

$$\theta_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad 199'$$

Эти свойства потенциальной или силовой функции U могут побудить отождествить ее с потенциальной энергией магнитного поля. Однако такое заключение было бы неосновательным, ибо, как мы убедимся в следующей главе, превращения энергии, связанные с перемещением проводника в магнитном поле, обуславливаются не только работой пондеромоторных сил поля, но также и работой сил электродвижущих, индуцируемых полем в движущемся проводнике. Поэтому если мы иногда и будем для удобства выражения называть U потенциальной „энергией“, то лишь в том смысле, что пондеромоторные силы магнитного поля связаны с U той же зависимостью, с какой силы консервативного поля сил связаны с потенциальной энергией этого поля.

Хотя таким образом потенциальная силовая функция U и не равна энергии магнитного поля, тем не менее введением в рассмотрение этой функции значительно облегчается изучение пондеромоторных

сил магнитного поля. В частности, исходя из (199) и (199') путем обычных, хорошо известных рассуждений легко убедиться, что устойчивое равновесие контура постоянного тока соответствует минимуму потенциальной функции U , т. е. согласно (198) максимуму магнитного потока Φ . Отсюда следует, например, что пондеромоторные силы магнитного поля стремятся повернуть плоскость тока так, чтобы положительная¹ нормаль к ней совпала бы с направлением магнитного поля \mathbf{H} . В частности, два взаимодействующих контура тока будут стремиться установиться так, чтобы плоскости их были параллельны друг другу, а направление обоих токов было бы одинаково.

Заметим, что потенциальную „энергию“ замкнутого тока U можно представить в виде суммы „энергий“ отдельных его элементов. Действительно, внося (196') в (198), получим:

$$U = -\frac{J}{c} \oint_L A_s ds = -\frac{J}{c} \oint_L A ds. \quad 198'$$

Это выражение при желании можно истолковать в том смысле, что каждый элемент ds тока J обладает в магнитном поле потенциальной „энергией“ $-\frac{J}{c} A_s ds$.

3. Рассмотрим теперь несколько подробнее взаимодействие двух замкнутых линейных токов J_1 и J_2 , обтекающих контуры L_1 и L_2 . Пусть \mathbf{H}_1 и \mathbf{A}_1 суть значения напряженности и векторного потенциала поля первого тока, а \mathbf{H}_2 и \mathbf{A}_2 — соответственные величины для второго тока. Далее обозначим через Φ_{12} магнитный поток поля первого тока через контур второго тока:

$$\Phi_{12} = \int_S H_{1n} dS_2 = \oint_{L_2} A_{1s} ds_2 = \oint_{L_2} A_1 ds_2, \quad 200$$

где S_2 есть поверхность, опирающаяся на контур L_2 , а ds_2 — элемент длины этого контура (сравни 196'). Магнитный поток, посылаемый вторым током через контур тока первого, мы обозначим соответственно через Φ_{21} :

$$\Phi_{21} = \int_S H_{2n} dS_1 = \oint_{L_1} A_{2s} ds_1. \quad 200'$$

¹ Т. е. нормаль, образующая с направлением тока правовитовую систему.

Внося в (200) значение (180') вектор-потенциала линейного тока J_1 :

$$A_1 = \frac{J_1}{c} \oint_{L_1} \frac{ds_1}{R},$$

получим:

$$\Phi_{12} = \frac{J_1}{c} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{ds_1 ds_2}{R},$$

где интегрирование должно быть произведено по обоим контурам L_1 и L_2 , причем каждый элемент длины ds_1 контура L_1 должен быть скалярно помножен на каждый элемент ds_2 , и полученное произведение разделено на расстояние R этих элементов ds_1 и ds_2 друг от друга. Совершенно аналогичным путем найдем:

$$\Phi_{21} = \frac{J_2}{c} \oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{ds_2 ds_1}{R}.$$

Интеграл, входящий в выражения для Φ_{12} и Φ_{21} , обозначается обыкновенно через L_{12} или L_{21} :

$$L_{12} = L_{21} = \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{ds_1 ds_2}{R}, \quad 201$$

и носит название коэффициента взаимной индукции контуров L_1 и L_2 (смысл этого названия выяснится в главе V, когда будет установлена связь между коэффициентом L_{12} и индукционным взаимодействием токов). Внося это обозначение в выражения для Φ_{12} и Φ_{21} , получим:

$$\Phi_{12} = \frac{1}{c} J_1 L_{12}, \quad \Phi_{21} = \frac{1}{c} J_2 L_{21}. \quad 202$$

Коэффициент взаимной индукции есть конечно чисто геометрическая величина, зависящая лишь от конфигурации и взаимного расположения контуров L_1 и L_2 и от выбора направления положительного обхода каждого из этих контуров¹. Однако на основании равенства (202) можно сказать, что коэффициент взаимной индукции контуров L_1 и L_2 численно равен магнитному потоку, посылаемому

¹ При перемене направления одного из токов (напр., J_1) и при сохранении неизменным направления другого тока знак коэффициента L_{12} изменяется на обратный, ибо изменяется направление вектора ds_1 .

через один из этих контуров (например, L_2) током (J_1) силы c , циркулирующего по другому контуру (L_1):

$$\text{при } J_1 = c \quad \Phi_{12} = L_{12}. \quad 202'$$

Согласно (198) и (202) потенциальная функция U_{12} тока J_2 в поле тока J_1 равна:

$$U_{12} = -\frac{J_2}{c} \Phi_{12} = -\frac{1}{c} L_{12} J_1 J_2. \quad 203$$

Точно таким же образом выразится и потенциальная функция U_{21} тока J_1 в поле тока J_2 :

$$U_{21} = -\frac{J_1}{c} \Phi_{21} = -\frac{1}{c^2} L_{21} J_2 J_1 = U_{12}. \quad 203'$$

Величина U_{12} (или равная ей величина U_{21}) играет роль взаимной потенциальной „энергии“ токов J_1 и J_2 в том смысле, что работа пондеромоторных сил взаимодействия этих токов при перемещении любого из них или обоих одновременно равна убыли функции U_{12} . В частности „обобщенные“ пондеромоторные силы взаимодействия этих токов θ_i согласно (199') равны взятым с обратным знаком производным от U_{12} по соответствующим обобщенным координатам q_i . Так как все наши рассуждения относятся к постоянным токам, то при определении изменений величины U_{12} силу токов J_1 и J_2 нужно считать постоянной, так что (сравни 199 и 199')

$$\delta A = -\delta U_{12} = \frac{1}{c^2} J_1 J_2 \delta L_{12} \quad 204$$

и

$$\theta_i = -\frac{\partial U_{12}}{\partial q_i} = \frac{1}{c^2} J_1 J_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial q_i}. \quad 204'$$

Из приведенных формул явствует между прочим, что механическое взаимодействие замкнутых токов (в отличие от взаимодействия элементов тока, см. § 30) удовлетворяет принципу равенства действия и противодействия. Ибо силы, испытываемые каждым из взаимодействующих токов, определяются производными от одной и той же функции $U_{12} = U_{21}$, зависящей лишь от относительного расположения обоих контуров.

Поясним это утверждение на простейшем примере. Пусть $q_i = l =$ расстоянию центров двух параллельных круговых токов L_1 и L_2 . Силы F_1 и F_2 , действующие

соответственно на контуры L_1 и L_2 по направлению возрастания расстояния l , равны:

$$F_1 = -\frac{\partial U_{21}}{\partial l}, \quad F_2 = -\frac{\partial U_{12}}{\partial l} = F_1.$$

Если $-\frac{\partial U_{21}}{\partial l} > 0$, то силы F_1 и F_2 стремятся увеличить расстояние l , т. е. сводятся к взаимному отталкиванию контуров L_1 и L_2 ; в противном же случае они сводятся к притяжению этих контуров. Существенно, однако, что в обоих случаях силы F_1 и F_2 численно равны и противоположны по направлению, т. е. удовлетворяют третьему закону Ньютона.

Подобно этому, если $q_2 = \alpha$ — углу между плоскостями двух контуров L_1 и L_2 , то „обобщенная сила“ $N = -\frac{\partial U}{\partial \alpha}$ представляет собой, как известно, момент пары силы, стремящейся увеличить угол α . Как и в предшествующем случае, легко убедиться, что моменты пар N_1 и N_2 , приложенных к L_1 и L_2 , численно равны и противоположны по направлению.

4. Перейдем теперь к рассмотрению пондеромоторных сил взаимодействия элементов одного и того же тока (например, тока J_1) и поставимся прежде всего определить потенциальную функцию U_{11} этих сил, которую с соответствующими оговорками можно назвать „собственной“ потенциальной „энергией“ тока J_1 .

Конечно, рассматривая взаимодействие смежных элементов тока, мы уже не можем считать этот ток линейным. Однако ток конечного сечения всегда можно разложить на совокупность бесконечно тонких нитей тока и притом (в случае постоянного тока) нитей замкнутой (см. § 27). Для каждой такой нити строго справедливы все формулы, выведенные нами для токов линейных, так что если обозначить через dJ_1 силу тока в нити, а через ds элемент ее длины, то согласно (198) потенциальная „энергия“ dU этой нити окажется равной:

$$dU = -\frac{dJ_1}{c} \Phi,$$

где Φ есть магнитный поток, посылаемый всем током J_1 через контур нити. Общая же величина собственной потенциальной „энергии“ U_{11} тока J_1 будет равна сумме „энергий“ всех его нитей:

$$U_{11} = \frac{1}{2} \sum dU = -\frac{1}{2c} \sum dJ_1 \Phi.$$

Двойка введена в знаменатель этого выражения по следующим соображениям. Собственная „энергия“ тока U_{11} есть в сущности

сумма взаимных энергий отдельных его нитей¹. Между тем в распространенной по всем нитям сумме ΣdU энергия взаимодействия каждой пары нитей, например, нитей a и b , учитывается дважды: во-первых, при подсчете энергии dU нити a в поле всех остальных нитей, в том числе и нити b , и, во-вторых, при подсчете энергии нити b . Поэтому U_{11} равно половине этой суммы ΣdU .

Если через Φ_{11} обозначить среднее значение магнитного потока через каждую из нитей тока силы dJ_1 , то последнее уравнение можно будет записать в форме, аналогичной (203):

$$U_{11} = -\frac{1}{2c} \Phi_{11} \Sigma dJ_1 = -\frac{J_1}{2c} \Phi_{11}. \quad (203'')$$

Величину Φ_{11} можно назвать (средним) магнитным потоком, посылаемым током J_1 через свой собственный контур; в сущности правильнее сказать, что значение величины Φ_{11} по определению должно удовлетворить уравнению (203''). Конечно, значение Φ_{11} зависит от распределения тока J_1 по сечению несущего ток проводника.

Согласно (196') магнитный поток Φ через контур нити равен циркуляции вектор-потенциала \mathbf{A} по этому контуру; стало быть [сравни (198')]

$$U_{11} = -\frac{1}{2c} \Sigma dJ_1 \oint_{L_1} \mathbf{A}_1 ds.$$

С другой стороны согласно (167)

$$dJ_1 ds = \mathbf{j}_1 dV,$$

где dV есть объем элемента нити. Стало быть,

$$U_{11} = -\frac{1}{2c} \Sigma \mathbf{A}_1 \mathbf{j}_1 dV = -\frac{1}{2c} \int_{V_1} \mathbf{A}_1 \mathbf{j}_1 dV, \quad (205)$$

где интегрирование должно быть распространено по всему объему V_1 тока J_1 . Внося в (205) выражение (180) вектор-потенциала \mathbf{A}_1 тока J_1 :

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{c} \int_{V_1} \frac{\mathbf{j}'_1 dV'}{R},$$

получим

$$U_{11} = -\frac{1}{2c^2} \int_{V_1} \int_{V_1} \frac{\mathbf{j}_1 \mathbf{j}'_1 dV dV'}{R}, \quad (205')$$

¹ Ибо, как легко убедиться, „собственная“ энергия бесконечно тонкой нити тока есть величина второго порядка малости.

где интегрирование как по dV , так и по dV' должно быть распространено на весь объем V_1 тока J_1 , т. е., другими словами, должна быть взята сумма подинтегральных выражений для всех возможных попарных комбинаций элементов объема V_1 , причем очевидно две комбинации элементов dV и dV' , отличающиеся только порядком сомножителей, все же должны считаться различными¹. R есть, конечно, расстояние между элементами dV и dV' .

Так как распределение тока по сечению проводника зависит только от геометрических и физических свойств этого проводника, а не от силы тока в нем, то плотность тока в каждом из элементов объема проводника пропорциональна общей силе тока J_1 в нем. Отсюда следует, что U_{11} пропорционально квадрату J_1 , т. е. что

$$U_{11} = -\frac{1}{2c^2} \int_{V_1} \int_{V_1} \frac{\mathbf{j}_1 \mathbf{j}'_1 dV dV'}{R} = -\frac{1}{2c^2} L_{11} J_1^2, \quad 206$$

где L_{11} есть так называемый коэффициент самоиндукции проводника, зависящий только от геометрической конфигурации проводника (если он однороден, в противном случае L_{11} зависит также от соотношения электропроводностей отдельных элементов объема проводника), но не от силы тока в нем. Пропорциональность собственной „энергии“ тока квадрату его силы J_1 следует впрочем уже из того соображения, что при увеличении силы тока J_1 в n раз, во столько же раз возрастает как сила тока в каждой нити тока, так и магнитный поток, охватываемый каждой из этих нитей.

Из (206) следует, в частности, что коэффициент самоиндукции проводника равен²:

$$L_{11} = \frac{1}{J_1^2} \int_{V_1} \int_{V_1} \frac{\mathbf{j}_1 \mathbf{j}'_1 dV dV'}{R}. \quad 206'$$

¹ Этим именно и объясняется наличие двойки в знаменателе коэффициента формулы (205').

² Совершенно неправильно указание, встречающееся в некоторых курсах физики, что для определения коэффициента самоиндукции L_{11} контура L_1 достаточно в формуле (201) отождествить контур L_2 с контуром L_1 , т. е. что

$$L_{11} = \oint_{L_1} \oint_{L_1} \frac{ds_1 ds_2}{R}.$$

Легко убедиться, что это выражение обращается в бесконечность, т. е. не имеет смысла.

С другой стороны, сравнивая (206) с (203"), получим:

$$\Phi_{11} = \frac{1}{c} L_{11} J_1, \quad 206''$$

в полном соответствии с (202). Стало быть, можно сказать, что коэффициент L_{11} самоиндукции произвольного замкнутого проводника L_1 численно равен магнитному потоку Φ_{11} , посылаемому через контур этого проводника циркулирующим по нему током силы c :

$$\text{при } J_1 = c \quad \Phi_{11} = L_{11}. \quad 206'''$$

Однако при этом нужно помнить, что Φ_{11} есть среднее значение магнитного потока через контуры отдельных нитей, на которые может быть разложен ток J_1 , и что как Φ_{11} , так и L_{11} существенно зависят от формы и размеров сечения проводника L_1 . Для бесконечно же тонкого линейного контура величины Φ_{11} и L_{11} обращаются в бесконечность, т. е. теряют смысл.

5. Возвращаясь к случаю системы двух токов, заметим, что общая, потенциальная „энергия“ U этой системы равна очевидно сумме их взаимной „энергии“ U_{12} ($= U_{21}$) и собственных потенциальных „энергий“ U_{11} и U_{22} каждого из них:

$$U = U_{11} + U_{12} + U_{22} = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_{22} J_2^2 \right). \quad 207$$

Ввиду того, что $L_{12} = L_{21}$, можно также написать:

$$\begin{aligned} U &= -\frac{1}{2c^2} \left(L_{11} J^2 + L_{12} J_1 J_2 + L_{21} J_2 J_1 + L_{22} J_2^2 \right) = \\ &= -\frac{1}{2c^2} \sum_{i,k} L_{ik} J_i J_k. \end{aligned} \quad 207'$$

Последнее выражение останется применимым и к системе произвольного числа (например, n) токов, если только распространить в нем суммирование на все возможные пары индексов i и k

$$(i, k = 1, 2, \dots, n).$$

6. Покажем теперь, что потенциальная функция системы токов может быть весьма просто выражена в зависимости от напряженности поля этих токов. С этой целью предварительно преобразуем выражения взаимной „энергии“ U_{12} токов J_1 и J_2 так, чтобы оно было

применимо не только к линейным, но и к произвольным нелинейным токам. Согласно (200) и (203) для линейных токов можем написать:

$$U_{12} = -\frac{1}{c} J_2 \Phi_{12} = -\frac{1}{c} J_2 \oint_{L_2} \mathbf{A}_1 ds_2.$$

Если же ток J_1 не линеен, то мы можем, как это неоднократно нами уже делалось, разложить его на совокупность нитей тока силы dJ_2 , применить к каждой из этих нитей формулу, выведенную для линейного тока, и просуммировать полученные выражения. Приняв во внимание (167), получим:

$$U_{12} = -\frac{1}{c} \sum dJ_2 \oint_{L_2} \mathbf{A}_1 ds_2 = -\frac{1}{c} \int_{V_2} \mathbf{A}_1 \mathbf{j}_2 dV$$

[сравни (198') и (205)]. Совершенно аналогично получим:

$$U_{21} = U_{12} = -\frac{1}{c} \int_{V_1} \mathbf{A}_2 \mathbf{j}_1 dV.$$

Стало быть, U_{12} можно представить в следующей симметричной форме:

$$U_{12} = \frac{1}{2} (U_{12} + U_{21}) = -\frac{1}{2c} \int_{V_2} \mathbf{A}_1 \mathbf{j}_2 dV - \frac{1}{2c} \int_{V_1} \mathbf{A}_2 \mathbf{j}_1 dV.$$

Внося это выражение, а также и (205), в (207), получим:

$$U = U_{11} + U_{12} + U_{22} = -\frac{1}{2c} \int_{V_1} \mathbf{A}_1 \mathbf{j}_1 dV - \frac{1}{2c} \int_{V_1} \mathbf{A}_2 \mathbf{j}_1 dV - \\ - \frac{1}{2c} \int_{V_2} \mathbf{A}_1 \mathbf{j}_2 dV - \frac{1}{2c} \int_{V_2} \mathbf{A}_2 \mathbf{j}_2 dV,$$

или, так как $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}$, где \mathbf{A} есть вектор-потенциал результирующего поля обоих токов,

$$U = -\frac{1}{2c} \int_{V_1} \mathbf{A} \mathbf{j}_1 dV - \frac{1}{2c} \int_{V_2} \mathbf{A} \mathbf{j}_2 dV = -\frac{1}{2c} \int \mathbf{A} \mathbf{j} dV; \quad 208$$

последний интеграл должен быть очевидно распространен по объему обоих токов J_1 и J_2 . Если других токов в поле нет, то мы можем распространить интегрирование на объем всего поля, ибо вне токов $\mathbf{j} = 0$ и соответствующие члены интеграла обращаются в нуль.

Выражая \mathbf{j} согласно (185) через $\text{rot } \mathbf{H}$, получим:

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{H} \, dV. \quad 208'$$

Но согласно общей формуле векторного анализа (67)

$$\mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{H} = \mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{A} + \text{div} [\mathbf{H} \mathbf{A}],$$

причем согласно (181) $\text{rot } \mathbf{A}$ можно заменить через \mathbf{H} :

$$\mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{H} = \mathbf{H}^2 + \text{div} [\mathbf{H} \mathbf{A}].$$

Внося это выражение под знак интеграла и применив теорему Гаусса (25), получим:

$$\begin{aligned} U &= -\frac{1}{8\pi} \int H^2 \, dV - \frac{1}{8\pi} \int \text{div} [\mathbf{H} \mathbf{A}] \, dV = \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int H^2 \, dV - \frac{1}{8\pi} \int_S [\mathbf{H} \mathbf{A}]_n \, dS. \end{aligned} \quad 209$$

Если мы распространим интегрирование на весь объем полного поля токов, то интеграл по пограничной поверхности этого поля обратится в нуль и выражение для U примет вид:

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int H^2 \, dV. \quad 209'$$

При этом под полным магнитным полем токов в соответствии с определением полного поля электрических зарядов (стр. 92) понимается охватывающая все взаимодействующие токи область пространства V , граница которой S проходит вне поля, т. е. на границе которой $\mathbf{H} = 0$. В частности, под полным полем всегда можно понимать все безграничное пространство, ибо при удалении граничной поверхности S в бесконечность подинтегральное выражение последнего интеграла в формуле (209) убывает не медленнее, чем $\frac{1}{R^3}$ (см. §§ 31 и 33), так что интеграл этот обращается в нуль (сравни § 13).

Таким образом потенциальная функция пондеромоторных сил токов выражена нами в форме интеграла квадрата напряженности магнитного поля этих токов, взятого по всему объему поля. В §§ 47 и 48 мы убедимся, что энергия магнитного поля в истинном смысле

этого слова равна отрицательному значению этой потенциальной „псевдоэнергии“ U .

7. В заключение нам остается показать, что замена линейных токов эквивалентными магнитными листками, о которой шла речь в предшествующем параграфе, допустима не только при определении поля токов, но и при определении пондеромоторных сил, действующих на токи. Разумеется, замена тока эквивалентным листком допустима лишь при определении сил, испытываемых токами во внешнем магнитном поле, но не при определении взаимодействия элементов одного и того же тока.

Рассмотрим линейный ток силы J и контура L , находящийся во внешнем магнитном поле напряженности \mathbf{H} . Согласно (198) и (196) потенциальная функция U тока J в этом поле будет равна:

$$U = -\frac{J}{c} \Phi = -\frac{J}{c} \int \mathbf{H}_n dS,$$

где S есть некоторая поверхность, опирающаяся на контур L , но в остальных отношениях остающаяся произвольной. Предположим, что поле \mathbf{H} возбуждается токами, не пересекающими этой поверхности S . В этом случае, согласно результатам предшествующего параграфа, поле \mathbf{H} на всем протяжении поверхности S можно рассматривать как поле потенциальное, обладающее некоторым магнитным потенциалом ϕ :

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \phi.$$

Заменим теперь ток J эквивалентным магнитным листком, совпадающим с поверхностью S . Потенциальная энергия магнитного заряда dm элемента поверхности листка dS ($dm = \pm \sigma_m dS$) в поле \mathbf{H} по аналогии с полем электростатическим определится выражением:

$$\phi dm = \pm \phi \sigma_m dS,$$

общая же потенциальная энергия всех зарядов листка будет равна:

$$U_n = \int (\sigma \phi_+ - \sigma \phi_-) dS,$$

где ϕ_- и ϕ_+ суть соответственно значения потенциала ϕ на отрицательной и положительной поверхностях двойного магнитного слоя (магнитного листка), т. е. значения ϕ в точках, отстоящих друг от друга на расстоянии толщины листка l . Стало быть,

$$\phi_+ - \phi_- = l \text{ grad } \phi = -H_n l,$$

где \mathbf{n} есть направление положительной нормали к листку, направленной от отрицательной его стороны к положительной. Следовательно, согласно (190')

$$U_n = - \int H_n \sigma l dS = - \int H_n \tau dS = - \frac{J}{c} \int H_n dS.$$

Таким образом потенциальная энергия U_n магнитного листка во внешнем магнитном поле \mathbf{H} действительно равна потенциальной функции U эквивалентного листку тока J_1 . Следовательно пондеромоторные силы, действующие в этом поле на ток, равны силам, действующим на эквивалентный току магнитный листок. Что и требовалось доказать.

• ПРИМЕР I. *Силы, испытываемые элементарным замкнутым током.*

В предыдущем параграфе было показано, что поле элементарного тока силы J тождественно с полем магнитного диполя момента $\mathbf{M} = \frac{JS}{c}$ [см (194)], где \mathbf{S} есть векториальная величина произвольной поверхности, опирающейся на контур тока.

С другой стороны, потенциальная функция этого тока во внешнем поле \mathbf{H} равна:

$$U = - \frac{J}{c} \int H_n dS = - \frac{J}{c} \int \mathbf{H} d\mathbf{S}.$$

Если поверхность \mathbf{S} столь мала, что напряженность внешнего поля \mathbf{H} можно считать постоянной на всем ее протяжении, то вынося \mathbf{H} за знак интеграла, получим:

$$U = - \frac{J\mathbf{H}}{c} \int d\mathbf{S} = - \frac{JS}{c} \mathbf{H},$$

или, согласно (194),

$$U = - \mathbf{M}\mathbf{H}.$$

210

Легко убедиться, что U равно потенциальной энергии магнитного диполя момента \mathbf{M}^1 в поле \mathbf{H} , ибо (210) полностью соответствует выражению (93') энергии электрического диполя \mathbf{p} в поле \mathbf{E} . Так как пондеромоторные силы определяются производными от U по обобщенным координатам, то стало быть элементарный ток силы J и площади \mathbf{S} и магнитный диполь магнита \mathbf{M} эквивалентны друг другу не только в отношении возбуждаемого ими поля, но и в отношении

¹Т. е. совокупности двух фиктивных магнитных зарядов $\pm m$, находящихся на расстоянии l друг от друга, причем $ml = M$.

пандеромоторных сил, испытываемых ими во внешнем магнитном поле¹.

Чтобы определить момент сил, приложенных к элементарному току, обозначим через ϑ угол между направлением поля \mathbf{H} и направлением магнитного момента тока \mathbf{M} . Тогда (210) примет вид:

$$U = -MH \cos \vartheta. \quad 210'$$

Так как момент сил N с точки зрения аналитической механики есть „обобщенная“ сила, действующая по направлению угловой „обобщенной“ координаты, то согласно (199')

$$N = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = MH \sin \vartheta.$$

Так как силы действуют на ток в направлении, соответствующем уменьшению потенциальной функции U , т. е. уменьшению угла ϑ , то, как легко убедиться из рассмотрения рис. 71, вектор \mathbf{N} момента сил по величине и направлению определяется равенством:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{M} \mathbf{H}] = \frac{J}{c} [\mathbf{S} \mathbf{H}]. \quad 211$$

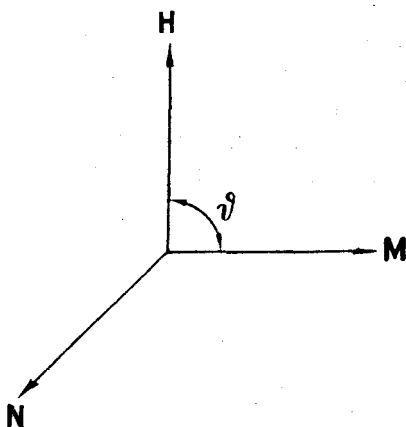


Рис. 71.

Из (211) следует, что ток стремится ориентироваться в магнитном поле так, чтобы его момент был параллелен полю (сравни стр. 247; при \mathbf{M} антипараллельном полю вращающий момент \mathbf{N} тоже равен нулю, но это равновесие неустойчиво). Формула (211) является одной из основных формул элементарной теории электромоторов, гальванометров и других электродинамических приборов.

Предоставляем читателю вывести эту формулу путем рассмотрения сил, действующих на заряды эквивалентного току диполя.

Этим последним способом, в частности, весьма просто определить равнодействующую \mathbf{F} сил, действующих на элементарный ток. Заменяв этот ток магнитным диполем \mathbf{M} и применив к последнему с соответ-

¹ Разумеется, это относится не к силам, испытываемым отдельными элементами тока, а к равнодействующей и к результирующему моменту всех этих сил. В этом смысле можно сказать, что магнитный диполь эквивалентен твердому элементарному току, т. е. току текущему по твердому недеформирующемуся проводнику, ибо систему приложенных к твердому телу сил можно заменить их равнодействующей и результирующей парой сил.

ствующим изменением обозначений формулу (128), определяющую силу, действующую на диполь электрический, получим:

$$\mathbf{F} = \mathbf{M} \nabla \cdot \mathbf{H}. \quad (211')$$

Из (211') следует, что величина равнодействующей \mathbf{F} сил, испытываемых элементарным током в поле \mathbf{H} , пропорциональна скорости изменения этого поля в направлении магнитной оси тока \mathbf{M} ; в однородном поле ($\mathbf{H} = \text{const}$) \mathbf{F} равно нулю.

ПРИМЕР II. Два одинаковых контура L_1 и L_2 имеют форму квадратов стороны a . Стороны обоих квадратов параллельны друг другу, а центры квадратов лежат на расстоянии d друг от друга на прямой, перпендикулярной их плоскостям. Определить коэффициент взаимной индукции L_{12} этих квадратов и силу \mathbf{F} , с которой притягиваются эти контуры, если по ним текут одинаково направленные токи J_1 и J_2 .

В двойном интеграле формулы (201):

$$L_{12} = \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{ds_1 ds_2}{R}$$

все члены, относящиеся к взаимно перпендикулярным парам элементов ds_1 и ds_2 , равны нулю. Поэтому в рассматриваемом случае выражение для L_{12} сводится к сумме интегралов, относящихся к парам параллельных сторон квадратов L_1 и L_2 .

Для двух параллельных прямых длины a , находящихся на расстоянии h друг от друга (см. рис. 72), имеем:

$$\begin{aligned} L(a, h) &= \iint \frac{ds_1 ds_2}{R} = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + h^2}} = \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx_2 \left[\lg \left\{ x_1 - x_2 + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + h^2} \right\} \right]_{x_1 = -\frac{a}{2}}^{x_1 = \frac{a}{2}}, \end{aligned}$$

где x_1 и x_2 суть текущие координаты точек обоих отрезков, отсчитываемые от их центров. Интегрирование по частям каждого из членов разности, получаемой после подстановки вместо x_1 его значений $\pm \frac{a}{2}$, дает:

$$\begin{aligned} &\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx_2 \lg \left\{ \pm \frac{a}{2} - x_2 + \sqrt{\left(\pm \frac{a}{2} - x_2\right)^2 + h^2} \right\} = \\ &= \left[x_2 \lg \left\{ \pm \frac{a}{2} - x_2 + \sqrt{\left(\pm \frac{a}{2} - x_2\right)^2 + h^2} \right\} \right]_{x_2 = -\frac{a}{2}}^{x_2 = \frac{a}{2}} + \\ &\quad + \left[\sqrt{\left(\pm \frac{a}{2} - x_2\right)^2 + h^2} \right]_{x_2 = -\frac{a}{2}}^{x_2 = \frac{a}{2}} \pm \\ &\quad \pm \frac{a}{2} \left[\lg \left\{ x_2 \pm \frac{a}{2} + \sqrt{\left(x_2 \mp \frac{a}{2}\right)^2 + h^2} \right\} \right]_{x_2 = -\frac{a}{2}}^{x_2 = \frac{a}{2}}. \end{aligned}$$

Подставляя для x_2 значения $\pm \frac{a}{2}$, получим для $L(a, h)$ всего $3 \cdot 4 = 12$ членов, которые после сокращения и приведения сведутся к трем:

$$L(a, h) = 2h - 2\sqrt{a^2 + h^2} + a \lg \frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{-a + \sqrt{a^2 + h^2}} =$$

$$= 2h - 2\sqrt{a^2 + h^2} + 2a \lg \frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h}.$$

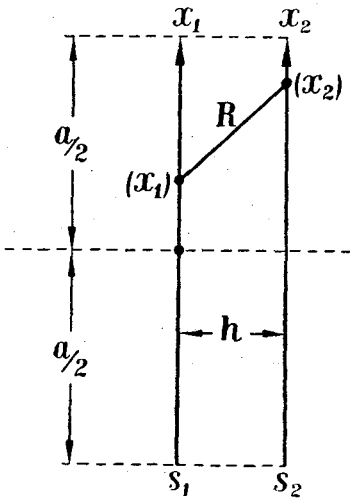


Рис. 72.

Комбинируя попарно параллельные стороны квадратов L_1 и L_2 , получим четыре пары отрезков, расстояние которых h равно d , и другие четыре пары, для которых $h = \sqrt{a^2 + d^2}$; первые четыре пары обтекаются параллельными, а вторые четыре противоположно направленными токами. Таким образом коэффициент взаимной индукции этих квадратов будет равен:

$$L_{12} = 4L(a, d) - 4L(a, \sqrt{a^2 + d^2})$$

или

$$L_{12} = 8 \left(d - 2\sqrt{a^2 + d^2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{2a^2 + d^2} + a \lg \frac{a + \sqrt{a^2 + d^2}}{d} - \right.$$

$$\left. - a \lg \frac{a + \sqrt{2a^2 + d^2}}{\sqrt{a^2 + d^2}} \right).$$

Чтобы определить силу F притяжения между квадратами, достаточно воспользоваться формулой (204'), положив в ней обобщенную координату q_i равной d , ибо сила F действует в „направлении“ координаты d , т. е. стремится уменьшить расстояние квадратов d . Стало быть,

$$F' = - \frac{\partial U}{\partial d} = \frac{1}{c^2} J_1 J_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial d}.$$

Выполнив дифференцирование, мы после некоторых алгебраических преобразований получим:

$$F' = \frac{8}{c^2} J_1 J_2 \left(1 + \frac{d\sqrt{2a^2 + d^2}}{a^2 + d^2} - \frac{a^2 + 2d^2}{d\sqrt{a^2 + d^2}} \right).$$

Дальнейшие примеры на вычисление взаимной индукции, а также коэффициента самоиндукции будут приведены в § 48.

§ 37. Лорентцова сила. — В § 31 мы убедились, что элемент объема dV проводника, по которому протекает ток плотность \mathbf{j} , испытывает в магнитном поле \mathbf{H} пондеромоторную силу \mathbf{F} , равную (см. 170)

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{H}] dV.$$

Сила эта отлична от нуля лишь в том случае, если $\mathbf{j} \neq 0$, т. е. если в проводнике происходит движение электрических зарядов. С точки зрения электронной теории все пондеромоторные силы, испытываемые в электромагнитном поле какими бы то ни было телами, должны в конечном счете сводиться к силам, приложенным к электрическим зарядам, входящим в состав этих тел. Соответственно этому и в рассматриваемом случае мы должны попытаться свести силу \mathbf{F} , испытываемую несущим ток проводником, к силам, испытываемым движущимися в нем зарядами.

С этой целью выразим плотность тока \mathbf{j} через число n находящихся в единице объема „свободных электронов (т. е. электронов движением своим создающих ток) и через среднюю скорость этих электронов \mathbf{u} ; согласно (160)

$$= ne\mathbf{u}.$$

Направление тока \mathbf{j} условно считается совпадающим с тем направлением, по которому двигались бы положительные заряды, если бы их движением создавался этот ток. Стало быть, вектор \mathbf{j} направлен прямо противоположно средней скорости \mathbf{u} движения отрицательных электронов, так что если под e понимать алгебраическую величину заряда (для электронов $e < 0$), то можно написать:

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{u}. \quad 212$$

Внося это в (170) получим:

$$\mathbf{F} = \frac{ne}{c} [\mathbf{u} \mathbf{H}] dV. \quad (170')$$

Такова результирующая сила, действующая на $n dV$ „свободных“ электронов, заключенных в элементе объема проводника dV и обладающих средней скоростью движения \mathbf{u} . Естественно предположить, что на каждой из этих $n dV$ электронов действует сила

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}], \quad 213$$

где v есть истинная скорость электрона. Если тока нет, то электроны движутся беспорядочно и равнодействующая приложенных к ним сил равна нулю. Если же ток отличен от нуля, то равнодействующая (170') этих сил сообщает электронам соответствующее приращение количества движения, которое при столкновении электронов с атомами (или ионами) проводника передается этому проводнику и вызывает его движение в магнитном поле (или стремится вызвать, если проводник закреплен). С точки зрения макроскопической теории, не вдающейся в рассмотрение внутреннего механизма явлений, это значит, что на проводник действует пондеромоторная сила (170).

Результаты изучения движения свободных электронов (в точном смысле этого слова, например, электронов, образующих катодные лучи) подтверждают правильность формулы (213), которая оказывается применимой к (точечным) электрическим зарядам, движущимся со скоростью v в произвольном (постоянном или переменном) магнитном поле \mathbf{H} . Если мы учтем еще силу $e\mathbf{E}$, испытываемую (точечным) зарядом в электрическом поле \mathbf{E} , то общая сила, испытываемая зарядом e в произвольном электромагнитном поле, выразится формулой:

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right). \quad 214$$

Эта формула, была впервые дана Лорентцем и получила поэтому название Лорентцового выражения силы; часто силу \mathbf{F} называют просто Лорентцовой силой.

Допустив справедливость формулы (214), мы можем очевидно лишь в том случае сохранить данное в § 2 определение напряженности электрического поля \mathbf{E} , согласно которому \mathbf{E} равно силе, испытываемой помещенным в это поле единичным положительным пробным зарядом, если мы присовокупим к этому определению оговорку, что пробный заряд должен быть неподвижным ($\mathbf{v} = 0$); в этом случае (214) совпадает с (5).

Весьма существенно, что сила, испытываемая движущимся зарядом в магнитном поле, перпендикулярна как направлению его движения \mathbf{v} , так и направлению поля \mathbf{H} . Таким образом сила эта лишь искривляет путь заряда, не изменяя численного значения его скорости, т. е. не совершая никакой механической работы. Это обстоятельство может показаться противоречащим тому факту, что работа, совершаемая при движении несущего ток проводника в магнитном поле, вообще говоря, отлична от нуля (электромотор!). Кажущееся противоречие это разрешится, если принять во внимание, что движение

проводника в магнитном поле неизбежно сопровождается явлениями электромагнитной индукции. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в § 46.

Заметим в заключение, что искривление пути электрических зарядов под воздействием силы (213) должно сказываться в перераспределении тока по сечению проводника при внесении этого проводника в магнитное поле. Это перераспределение тока действительно проявляется в так называемых гальвано-магнитных, термо-магнитных и сродных с ними явлениях (явления Холла [Hall] и др.). Однако все эти явления, во-первых, весьма ничтожны по своей величине, что вполне естественно, ибо сила (212) пропорциональна отношению $\frac{v}{c}$, которое для электронов в металле имеет весьма малое значение (порядка $10^{-3}—10^{-4}$). Во-вторых, результаты опытного исследования этих явлений в металлах в большинстве случаев даже с качественной стороны вовсе не согласуются с ожиданиями той элементарной теории электропроводности, которая была изложена в § 29, что лишний раз доказывает необходимость радикального пересмотра и усовершенствования этой теории. По обоим этим причинам мы на этих явлениях останавливаться здесь не будем.

Пример. Движение электрона в постоянном однородном магнитном поле ($\mathbf{H} = \text{const}$).

Уравнение движения электрона в магнитном поле согласно (214) гласит:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}].$$

Так как проекция силы \mathbf{F} на направление вектора \mathbf{H} неизменно равна нулю, то слагающая v_{\parallel} скорости электрона по этому направлению будет постоянна. Так как, с другой стороны, численная величина всей скорости v тоже постоянна (ибо ускорение перпендикулярно скорости), то должна быть постоянной и численная величина перпендикулярной вектору \mathbf{H} слагающей скорости v_{\perp} . Наконец постоянной должна быть и численная величина силы \mathbf{F} , ибо

$$F = \frac{e}{c} \left| [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right| = \frac{e}{c} v_{\perp} H = \text{const.}$$

Таким образом движение электрона может быть разложено на два составляющих движения: равномерное движение по направлению поля \mathbf{H}

со скоростью v_H , и движение в плоскости, перпендикулярной \mathbf{H} , совершающееся с постоянным по величине ускорением

$$a = \frac{e}{cm} v_{\perp} H,$$

направленным перпендикулярно к его скорости v_{\perp} . Но, как известно, движение с постоянным по величине нормальным ускорением a представляет собой равномерное движение по кругу, радиус R которого может быть определен из соотношения

$$\frac{v_{\perp}^2}{R} = a = \frac{e}{cm} v_{\perp} H;$$

следовательно

$$R = \frac{cm v_{\perp}}{eH} = \frac{cm v}{eH} \sin(\mathbf{v}, \mathbf{H}). \quad 215$$

Совокупность равномерного поступательного движения v_H и равномерного кругового движения v_{\perp} в плоскости, перпендикулярной \mathbf{H} , представляет собой движение с постоянной по численной величине скоростью v по винтовой линии, навитой на прямой круговой цилиндр радиуса R , ось которого параллельна \mathbf{H} . Угол между осью цилиндра и касательной к винтовой траектории электрона, конечно, постоянен и определяется начальными условиями движения. В частности, если начальная скорость электрона направлена перпендикулярно \mathbf{H} , то винтовая траектория электрона вырождается в окружность, плоскость которой перпендикулярна \mathbf{H} .

Итак в постоянном однородном магнитном поле электрон описывает, вообще говоря, винтовую линию, ось которой совпадает с направлением поля. Заметим, что формула (215) дает возможность путем измерения R, v, H и $\sin(\mathbf{v}, \mathbf{H})$ определить отношение $\frac{e}{m}$ заряда электрона к его массе. Возможность эта широко используется в экспериментальной физике для определения значения отношения $\frac{e}{m}$ как для электронов, так и для других заряженных частиц (α -лучи, каналовые лучи и т. д.).

§ 38. Абсолютная (Гауссова) и другие системы единиц.— 1. В этой книге мы пользовались и будем пользоваться так называемой Гауссовой абсолютной системой единиц, которую для краткости мы называем просто абсолютной системой и в основании которой лежит

определение единицы электрического заряда по силам взаимодействия точечных зарядов (см. § 1). Единицы измерения всех остальных электрических величин, например, напряженности электрического поля, его потенциала, силы и плотности тока и т. д. в этой абсолютной системе являются производными основной единицы количества электричества. Так как эта основная единица в свою очередь является производной от единиц массы $[M]$, длины $[L]$ и времени $[T]$ ¹, и имеет по отношению к этим величинам размерность

$$[e] = M^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{3}{2}} \cdot T^{-1}$$

(см. § 1), то и производные электрические единицы (напряженности поля, потенциала и т. д.) также находятся в определенной зависимости от выбора единиц массы, длины и времени. Размерность этих производных единиц указывалась нами в соответствующих местах текста.

Встречаясь с новыми физическими величинами, мы всегда стремились выбрать единицы измерения этих величин так, чтобы во всех основных формулах, устанавливающих связь между этими величинами, все числовые коэффициенты, зависящие только от выбора единиц измерения, обращались в единицу (или 4π). Однако это удавалось нам лишь вплоть до того момента, когда мы перешли к изучению пондеромоторного взаимодействия токов.

Как выяснилось в § 30, силы взаимодействия элементов тока зависят лишь от силы этих токов и от длины, направления и взаимного расстояния этих элементов, т. е. от величин, единицы измерения которых были уже установлены нами ранее. Естественно, что при этом в количественную формулировку закона взаимодействия токов (162) пришлось ввести коэффициент c , значение которого зависит от ранее сделанного выбора единиц измерения. Поскольку определенным образом выбрано значение этих единиц, постольку и этот коэффициент c приобретает вполне определенное значение, которое можно измерить на опыте. С этой целью можно, например, воспользоваться любой из формул § 36, устанавливающих зависимость пондеромоторных сил взаимодействия токов от их силы и геометрической конфигурации, ибо все эти величины могут быть определены независимым образом, а в соотношении между ними входит коэффициент c .

Размерность коэффициента c согласно § 30 равна размерности скорости:

$$[c] = [LT^{-1}],$$

¹ Ибо она определяется как величина заряда, который на равный ему заряд, находящийся от него на единице расстояния, действует с силой, равной единице.

а численное его значение, как показали измерения, весьма близко к $3 \cdot 10^{10} \frac{сМ}{сек}$ (с точностью до $1/10$ 0/0):

$$c = 3 \cdot 10^{10} \frac{сМ}{сек}.$$

Зная значение коэффициента c , мы можем определить значение единиц измерения всех остальных величин, характеризующих постоянное, а так же, как мы увидим в дальнейшем, и переменное поле. Так, например, из результатов решения задачи 23 (стр. 204) следует, что напряженность поля кругового тока радиуса R_0 в его центре ($d=0$) равна:

$$H = \frac{2\pi J}{cR_0}.$$

Стало быть, можно сказать, что абсолютная единица напряженности магнитного поля в 2π раз меньше напряженности поля, возбуждаемого в центре круга единичного радиуса линейным током силы $J=c$, текущим по окружности этого круга. Размерность же H оказывается равной:

$$[H] = \frac{[J]}{[cR]} = \frac{M^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{3}{2}} T^{-2}}{L^2 T^{-1}} = M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1},$$

т. е. совпадает с размерностью напряженности электрического поля (см. § 2).

Заметим, что к абсолютной (Гауссовой) системе единиц можно также прийти, исходя не из закона Кулона для электрических зарядов, а из закона Кулона для фиктивных магнитных зарядов. При этом нужно, конечно, прежде всего определить абсолютную единицу магнетизма как магнитный заряд, который отталкивает равный ему заряд, находящийся от него на единице расстояния, с силой, равной единице. Далее напряженность магнитного поля определится величиной силы, действующей в данной точке поля на единичный

¹ Приводим таблицу результатов тех измерений коэффициента c электродинамическими методами, которые Джинс в 1920 г. считал наилучшими:

Роза и Дорсей . . . (1907)	$c \cdot 10^{-10} = 2,9973$	$\frac{сМ}{сек}$
Перро и Фабри . . . (1898)	» = 2,9971	»
Гурмуческу (1896)	» = 3,0010	»
Абрагам (1890)	» = 2,9913	»

Относительно оптических методов измерения коэффициента c см. § 57.

положительный магнитный заряд и т. д. Конечно, тождество этой „магнитной“ абсолютной системы единиц с той „электрической“ системой, которою мы пользовались в этой книге, будет иметь место лишь в том случае, если мы сохраним прежнее соотношение (190'), устанавливающее связь между силой электрического тока и мощностью эквивалентного току магнитного листка:

$$\tau = \frac{J}{c}.$$

2. В отличие от описанной нами системы единиц, которую мы будем называть просто абсолютной системой и которая иногда называется Гауссовой или симметрической (см. таблицу I), существуют еще так называемые абсолютная электростатическая и абсолютная электромагнитная система единиц. Первая из них исходит из определения единицы электричества, основанном на законе Кулона, вторая из определения единицы магнетизма, основанном, на подобном же законе для фиктивных магнитных зарядов, причем, однако, в этих системах в отличие от Гауссовой коэффициент c полагается равным единице.

Однако по изложенным соображениям полное устранение из формул теории всех числовых коэффициентов, значение которых зависит от выбора системы единиц, невозможно. Поэтому в электростатической системе единиц приходится приписывать магнитной проницаемости μ размерность $L^{-2}T^2$ и полагать „магнитную проницаемость вакуума“ μ_0 равной $\left(3 \cdot 10^{10} \frac{см}{сек}\right)^{-2} = \frac{1}{9} \cdot 10^{-20} \frac{сек^2}{см^2}$, а в электромагнитной системе приходится приписывать ту же размерность диэлектрической постоянной ϵ и полагать „диэлектрическую постоянную вакуума“ ϵ_0 равной $\frac{1}{9} \cdot 10^{-20} \frac{сек^2}{см^2}$.

На описании этих систем мы останавливаться не будем, ибо Гауссова система единиц и более удобна и гораздо больше соответствует современным представлениям о природе электромагнитных явлений. Так, например, из рассмотрения физического смысла величины ϵ (глава II, см. в частности ур-ние 100) явствует, что она есть действительно величина отвлеченная, размерностью не обладающая, и что для вакуума ϵ обращается в единицу; коэффициент c , имеющий в Гауссовой системе размерность скорости, как мы увидим дальше, действительно равен скорости распространения электромагнитных волн в пустоте и т. д.

Заметим лишь, что абсолютные (Гауссовы) единицы электрических величин совпадают с соответствующими

электростатическими единицами, а абсолютные единицы магнитных величин — с электромагнитными единицами (см. таблицу I на след. стр.). Заметим далее, что электромагнитная единица силы тока и количества электричества в c раз больше соответствующих Гауссовых (а стало быть, и равных им электростатических) единиц. Следовательно, если J и J' суть соответственно значения силы одного и того же тока в абсолютных и в электромагнитных единицах, то

$$J' = \frac{J}{c}.$$

Так как, с другой стороны, во всех почти формулах этой главы коэффициент c входит в комбинации $\frac{J}{c}$ (или $\frac{j}{c}$), то выражая силу тока не в абсолютных, а в электромагнитных единицах, мы можем устранить этот коэффициент из упомянутых формул и тем самым упростить их. Так, например, внося J' в предшествующую формулу получим:

$$H = \frac{2\pi J'}{R_0},$$

ввиду чего можем сказать, что абсолютная единица магнитной напряженности H в 2π раз больше напряженности поля, возбуждаемого в центре круга единичного радиуса текущим по его окружности током, силой в одну электромагнитную единицу.

Далее (190') принимает вид:

$$\tau = J';$$

стало быть, мощность τ эквивалентного току магнитного листка равна выраженной в электромагнитных единицах силе этого тока J' .

Однако последовательное пользование электромагнитными единицами количества электричества и силы тока далеко не всегда удобно. Так, например, при пользовании электромагнитными единицами в законе Кулона появляется множитель c^2 ¹:

$$F = c^2 \frac{e'_1 e'_2}{R^2}.$$

¹ Или равный ему множитель $\frac{1}{\epsilon_0}$, где $\epsilon_0 = \frac{1}{9} \cdot 10^{-20} \frac{сек^2}{с.и^2}$ есть „дieleктрическая постоянная вакуума“, см. выше.

Все же электромагнитные единицы иногда применяются при измерении не только магнитных, но и электрических величин. Электростатические же единицы, вообще говоря, для измерения величин магнитных не применяются.

Зная соотношения между электромагнитными и электростатическими единицами заряда, нетрудно найти соотношение между единицами других величин. Так, например, напряженность электрического поля E равна единице, если помещенный в него единичный заряд испытывает силу в одну дину. Стало быть, электромагнитная единица напряженности должна быть в c раз меньше электростатической. Для ряда основных электрических величин эти соотношения приведены в таблице II. Наконец в таблице III приведены названия и значения основных практических единиц измерения.

Таблица I

Физическая величина и ее обозначения	Размерность в абсолютной Гауссовой системе единиц	
Количество электричества e	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$	} Абсолютные Гауссовы единицы совпадают с электростатическими
Напряженность эл-го поля E (тоже для индукции D и поляризации P)	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$	
Потенциал φ	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	
Емкость C	L	
Электр.-дв. сила и напряжение \mathcal{E}	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	
Сила тока J	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$	
Плотность тока j	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2}$	
Сопротивление провода R	$L^{-1} T$	
Электропроводность λ	T^{-1}	
Напряженность маг-го поля H (тоже для магнитной индукции B и намагничения I , о которых см. в § 39)	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$	
Коэффициент самоиндукции и взаимной индукции L	L	} Абсолютные Гауссовы единицы совпадают с электромагнитными
Магнитный момент M	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$	
Количество (фиктивного) магнетизма m	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$	

Таблица II. Соотношение между электромагнитными и электростатическими единицами

Количество электричества e и сила тока J	}	1 Э. М. един. = c Э. С. (абс.) единиц	
Напряженность эл-го поля E		"	
потенциал φ и электродвиж. сила \mathcal{E}	}	" = $\frac{1}{c}$ " "	
Емкость C		" = c^2 " "	
Сопротивление R		" = $\frac{1}{c^2}$ " "	
Напряженность магн. поля H		1 Э. М. (абс.) един. = c Э. С. единиц	
Коэффициент индукции L		" " = $\frac{1}{c^2}$ " "	

Таблица III. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЕДИНИЦЫ

Количество электричества e	1 кулон = 10^{-1} С. Г. С. Э. М. Е. = $3 \cdot 10^9$ абсолютн. (эл. ст.) С. Г. С. единиц
Потенциал φ Электродвиж. сила и напря- жение \mathcal{E}	}
Напряженность поля E	
Емкость C	1 фарада = 10^{-9} С. Г. С. Э. М. Е. = $9 \cdot 10^{11}$ абсолютн. С. Г. С. единиц (сантиметров)
Сила тока J	1 ампер = 10^{-1} С. Г. С. Э. М. Е. = $3 \cdot 10^9$ абсолютн. С. Г. С. единиц
Сопротивление R	1 ом = 10^9 С. Г. С. Э. М. Е. = $\frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$ абсолютн. С. Г. С. единиц
Напряженность магнитного поля H	1 гаусс = 1 абсол. С. Г. С. (эл.-магн.) ед. = $3 \cdot 10^{10}$ С. Г. С. эл.-ст. единиц
Самоиנדукция L	1 генри = 10^9 абсол. С. Г. С. (эл.-магн.) ед. (сантиметров) = $\frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$ С. Г. С. эл. ст. единиц
Энергия W	1 джоуль = 10^7 абс. С. Г. С. ед. (эргов)
Мощность.	1 ватт = 10^7 абс. С. Г. С. ед. $\left(\frac{\text{эрг}}{\text{сек}}\right)$

3. Практическая система единиц есть правильно построенная система единиц в том смысле, что подобно Гауссовой, эд.-статической и эд.-магнитной системам все практические единицы могут быть получены как производные от одной основной единицы. Какую именно единицу (ампер, ом и т. д.) считать при этом основной, конечно, не существенно. Однако точное определение величины производных единиц по величине единицы основной представляет значительные экспериментальные трудности и результаты соответствующих измерений по мере усовершенствования измерительной техники непрерывно изменяются и уточняются. Далее основные единицы практической системы (ампер, ом и т. д.) были в свою очередь определены указанием определенного числового отношения их к единицам абсолютным, построенным на абсолютной единице количества электричества; абсолютное же измерение количества электричества представляет гораздо больше трудности, чем, например, определение силы тока или сопротивления.

Поэтому международный съезд 1908 года установил так называемую международную систему практических единиц, в основе которой лежат две основных единицы — международный ом (Ohm Int.) и международный ампер (Amp. Int.). Значение этих единиц определено следующим образом: 1) международный ом равен сопротивлению столба ртути длиной в 106,300 см при $t = 0^\circ\text{C}$ и при массе этого столба равной 14,4521 г.; 2) международный ампер равен силе тока, выделяющего при прохождении через раствор AgNO_3 в воде 0,00111800 г серебра в секунду. Все остальные международные практические единицы (в том числе и вольт) являются производными от этих основных.

Международный ампер и ом были определены так, чтобы их величины со всею доступною в то время точностью равнялись соответственно 10^{-1} и 10^9 электро-магнитных единиц силы тока и сопротивления; однако вместе с тем было постановлено считать эти единицы установленными раз навсегда и не менять их величины в зависимости от могущих выясниться отличий их от абсолютного ома (10^9 эд. магн. ед. = Ohm abs.) и абсолютного ампера (10^{-1} эд.-магн. ед. = Amp. abs.).

По последним измерениям

$$1 \text{ Ohm Int.} = 1,0005_0 \text{ Ohm Abs.},$$

$$1 \text{ Amp. Int.} = 1,0000_0 \text{ Amp Abs.}$$

4. Упомянем, наконец, о предложенной Heaviside'ом так называемой рациональной системе единиц, которой по примеру Lorentz'a часто пользуются в теоретических исследованиях. Она отличается от абсолютной Гауссовой системы не размерностью, а лишь численным значением основных единиц; а именно единица электричества (а также и магнетизма) в рациональной системе принимается равной $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ доли абсолютной единицы электричества (магнетизма). Хотя благодаря этому в закон Кулона и в некоторые другие формулы приходится ввести знаменатель 4π , но зато — и в этом состоит преимущество рациональной системы — этот множитель 4π выпадает из целого ряда основных формул теории поля, например, из дифференциальных уравнений для скалярного (56) и векторного (183) потенциала, из формулы (112), связывающей значения $\text{div } \mathbf{D}$ и ρ , и т. д.

У. МАГНЕТИКИ (НАМАГНИЧИВАЮЩИЕСЯ СРЕДЫ)

*

§ 39. Намагничение магнетиков. Пара-, диа- и ферро-магнетики. — Подобно тому, как внесение диэлектриков в поле свободных электрических зарядов (смотри определение этого термина на стр. 113) вызывает изменение этого поля, обуславливающееся поляризацией диэлектрика, так и внесение магнетиков (например, железа) в магнитное поле токов вызывает изменение этого поля, обуславливающееся намагничиванием магнетика. При этом магнетиками мы называем все способные намагничиваться тела¹, т. е., иными словами, все тела, присутствие которых способно либо видоизменить, либо возбудить магнитное поле. Подобно тому, как все диэлектрики деполяризуются одновременно с исчезновением внешнего электрического поля, так и большинство магнетиков, намагничиваясь под воздействием внешнего магнитного поля, по исчезновении этого поля немедленно же размагничиваются (временное или индуцированное намагничивание пара- и диамагнетиков). Однако в отличие от диэлектриков² существует класс магнетиков (так называемые ферромагнетики), способных оставаться намагниченными и по исчезновении внешнего поля (так называемое постоянное намагничение), т. е. способных не только видоизменить своим присутствием магнитное поле токов, но и самостоятельно возбуждать магнитное поле, независимо от наличия электрических токов (так назыв. постоянные магниты).

¹ В сущности все материальные тела обладают в той или иной мере магнитными свойствами (правда, в большинстве случаев весьма слабо выраженными), так что единственной немагнитной средой, строго говоря, является только вакуум.

² См. стр. 130. Явление так называемой остаточной поляризации, имеющее место в некоторых диэлектриках, особенно в случае загрязнения их посторонними примесями, не имеет по своей физической природе ничего общего с остаточным магнетизмом ферромагнетиков. Оно связано с наличием токов утечки и поляризационных токов (несовершенные изоляторы), создающих перераспределение свободных электрических зарядов.

Электрические свойства диэлектриков, как мы убедились в главе II, объясняются наличием в молекулах диэлектрика квазиупругих или твердых диполей. Магнитные же свойства магнетиков могут быть истолкованы на основе предположения, что в каждой молекуле магнетика циркулируют замкнутые элементарные токи (т. е. токи весьма малых молекулярных размеров). Как мы убедились в предшествующей главе (см. примеры в конце §§ 35 и 36), магнитные свойства элементарного тока полностью характеризуются его магнитным моментом \mathbf{M} (ур-ние 194); иначе говоря, элементарный замкнутый ток эквивалентен магнитному диполю момента \mathbf{M} . Подобно тому, как мерой поляризации диэлектрика может служить вектор поляризации \mathbf{P} , равный электрическому моменту единицы его объема, так и мерой намагничивания магнетика мы будем считать вектор намагничивания \mathbf{I} , равный магнитному моменту единицы объема магнетика, или, иначе говоря, равный векторной сумме магнитных моментов всех находящихся в этом объеме элементарных токов:

$$\mathbf{I} = \Sigma \mathbf{M} \quad 216$$

(сравни ур-ние 98). По аналогии с электрической поляризацией намагничение \mathbf{I} можно назвать также магнитной поляризацией.

Заметим, что если $N(\omega) d\omega$ есть число находящихся в единице объема магнетика элементарных токов, направление магнитного момента $\mathbf{M}(\omega)$ которых лежит внутри телесного угла $d\omega$, то (216) можно записать в следующей форме:

$$\mathbf{I} = \Sigma \mathbf{M}(\omega) N(\omega) d\omega = \int \mathbf{M}(\omega) N(\omega) d\omega, \quad 216'$$

где интегрирование должно быть распространено по всем возможным направлениям ω .

Поляризация диэлектриков \mathbf{P} пропорциональна напряженности \mathbf{E} электрического поля в них (ур-ние 98'). Магнетики же по характеру зависимости намагничивания их \mathbf{I} от напряженности магнитного поля \mathbf{H} могут быть подразделены на три различных класса. В так называемых парамагнетиках и диамагнетиках \mathbf{I} пропорционально \mathbf{H} :

$$\mathbf{I} = \chi \mathbf{H}; \quad 217$$

значение коэффициента пропорциональности χ , носящего название (объемной) магнитной восприимчивости и вполне аналогичного коэффициенту α поляризуемости диэлектрика, зависит от физико-

химических свойств данного магнетика¹. Восприимчивость χ парамагнитных тел имеет (как и поляризуемость диэлектриков) положительное значение, т. е. направление намагничения \mathbf{I} совпадает с направлением поля \mathbf{H} . Диамагнетики же отличаются тем, что их магнитная восприимчивость χ отрицательна, т. е. что направление намагничения диамагнетиков противоположно направлению намагничивающего их поля \mathbf{H} . Объяснение этого кажущегося парадоксальным свойства диамагнетиков будет дано в § 44.

Наконец намагничение \mathbf{I} третьего класса магнетиков, названных ферромагнетиками по латинскому названию важнейшего их представителя — железа (*ferrum*), не только не пропорционально напряженности поля \mathbf{H} , но, вообще говоря, вовсе не связано с ним сколько-нибудь простой функциональной зависимостью. Так, например, в ферромагнетиках наблюдаются явления так называемого гистерезиса, т. е. зависимость намагничения от предшествующей истории данного образца ферромагнитного вещества. Это значит, что величина намагничения \mathbf{I} ферромагнетика зависит не только от напряженности \mathbf{H} магнитного поля в нем, но также и от того, находился ли ранее данный образец ферромагнетика в магнитном поле, какова была численная величина и направление напряженности этого поля и т. д. Тесно связан с явлениями гистерезиса также и остаточный или „постоянный“ магнетизм ферромагнетиков, заключающийся, как уже упоминалось, в том, что после исчезновения внешнего намагничивающего поля ферромагнетики могут сохранять состояние намагничения и благодаря этому продолжают возбуждать „собственное“ магнитное поле („постоянные“ магниты).

В настоящее время еще нет сколько-нибудь полной и удовлетворительной теории ферромагнитных явлений², и изучение их, если не полностью, то все же в значительной мере находится еще в стадии разыскивания эмпирических закономерностей и соотношений. Коэффициент магнитной восприимчивости ферромагнетиков χ , равный отношению намагничения \mathbf{I} к напряженности поля \mathbf{H} (ур-ние 217), не является, конечно (как это имеет место для пара- и диамагнетиков), константой, зависящей лишь от химического состава тела, его температуры и других физических условий. Огромное количество экспериментальных исследований посвящено определению весьма сложной зависимости χ от

¹ Впрочем в очень сильных магнитных полях в парамагнетиках наблюдается так называемое насыщение намагничения (см. § 44), вполне аналогичное насыщению поляризации диэлектриков с твердыми диполями (§ 23).

² В § 44 мы приведем несколько общих соображений о природе ферромагнетизма.

напряженности поля \mathbf{H} , от предшествующей истории данного образца ферромагнитного вещества и т. д. В качестве примера укажем, что восприимчивость χ мягкого железа при нарастании поля возрастает с 5—10 единиц до нескольких сотен (χ есть число отвлеченное) и затем вновь падает, причем значение этого коэффициента весьма существенно зависит от способа изготовления и термической обработки образца металла, а также от незначительных химических примесей в нем.

Помимо всех прочих обстоятельств уже один только факт нелинейной зависимости намагничения \mathbf{I} от напряженности поля \mathbf{H} чрезвычайно усложняет даже формально-феноменологическую теорию поля в ферромагнетиках, ибо нелинейность уравнений поля влечет за собой нарушение принципа суперпозиции полей.¹ Чтобы избежать этих усложнений, мы откажемся от рассмотрения реальных ферромагнетиков. Чтобы иметь тем не менее возможность учесть существование остаточного или „постоянного“ магнетизма, мы введем в рассмотрение „идеализированные“ ферромагнетики, предположив, что намагничение \mathbf{I} этих магнетиков может быть разложено на индуцированное намагничение $\chi\mathbf{H}$ ($\chi = \text{const.}$), пропорциональное напряженности поля \mathbf{H} , и на намагничение постоянное \mathbf{I}_0 , от напряженности поля вовсе независящее:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 + \chi\mathbf{H}, \quad 217'$$

где \mathbf{I}_0 есть заданная функция точки. Те ферромагнитные тела, в которых \mathbf{I}_0 отлично от нуля, мы будем называть постоянными магнитами.

Таким образом зависимость \mathbf{I} от \mathbf{H} в идеализированных ферромагнетиках остается линейной, и мы получаем возможность пользоваться принципом суперпозиции полей.

Несмотря на то, что свойства реальных ферромагнетиков весьма существенно отличаются от свойств наших „идеализированных“ ферромагнетиков (как показывает уже самая возможность изготовления „постоянных“ магнитов из немагнитной стали, размагничивания магнитов и т. д.), однако в некоторых случаях формула (217') все же является известным приближением к действительности. Так, например, она применима к намагниченной почти до насыщения твердой стали, при условии, что изменения внешнего магнитного поля достаточно малы.

¹ Напряженность поля нескольких источников поля только в том случае равна сумме напряженностей полей, возбуждаемых каждым из этих источников в отдельности (принцип суперпозиции полей), если уравнения поля линейны.

Итак, в отношении зависимости намагничения от напряженности поля нужно различать три рода магнетиков: парамагнетики ($\chi = \text{const} > 0$), диамагнетики ($\chi = \text{const} < 0$) и ферромагнетики, причем введенное нами представление об идеализированных ферромагнетиках сводится согласно (217') в сущности к замене ферромагнетика совокупностью парамагнетика и постоянного магнита (в строгом смысле этого слова). Напомним, в заключение, что сколько-нибудь значительной магнитной восприимчивостью χ обладают лишь ферромагнетики (в которых χ может достигать сотен единиц), восприимчивость же пара- и в особенности диамагнетиков чрезвычайно мала¹.

§ 40. Уравнения постоянного магнитного поля в магнетиках. —

1. Мы определили намагничение \mathbf{I} как сумму магнитных моментов \mathbf{M} молекул, находящихся в единице объема магнетика. Этот магнитный момент создается элементарными токами, заключенными в молекулах магнетика. Воспользовавшись однако доказанной в §§ 35 и 36 эквивалентностью элементарного тока магнитному диполю, мы в этом и следующих параграфах при выводе уравнений магнитного поля будем рассматривать магнетик как совокупность магнитных диполей (формальная теория магнетиков). Это, во-первых, даст нам возможность непосредственно использовать ряд результатов, полученных нами в главе II при рассмотрении диэлектриков, состоящих из электрических диполей. Во-вторых, этот способ рассмотрения соответствует историческому пути развития науки о магнетизме. В дальнейшем, в §§ 43—45, мы покажем, как надо истолковать полученные результаты с точки зрения электронных представлений, и приведем доказательства наличия элементарных токов в молекулах магнетиков.

По аналогии с уравнениями (111) и (111'):

$$\text{div } \mathbf{P} = -\rho_{\text{свзн}}, \quad \text{Div } \mathbf{P} = -\sigma_{\text{свзн}},$$

выведенными для диполей электрических, можем непосредственно написать соответствующие уравнения для диполей магнитных:

$$\text{div } \mathbf{I} = -\rho_m, \quad 218$$

$$\text{Div } \mathbf{I} = I_{2n} - I_{1n} = -\sigma_m, \quad 218'$$

¹ Отношение восприимчивости χ к плотности тела δ (так называемая восприимчивость единицы массы) лежит для парамагнетиков примерно в пределах от 10^{-4} до 10^{-3} , а для диамагнетиков — от 10^{-6} до 10^{-7} С. Г. С. единиц. Для наиболее диамагнитного из всех веществ — висмута — χ равно приблизительно $2 \cdot 10^{-5}$.

где ρ_m есть объемная плотность связанных (фиктивных) магнитных зарядов, а σ_m — их поверхностная плотность на поверхностях раздела различных в магнитном отношении сред. Индекс „свзн“ мы здесь опустили потому, что свободных магнитных зарядов не существует, так что смешение понятий невозможно.

Для „постоянных“ магнитов согласно (217') получаем:

$$\operatorname{div} \mathbf{I} = \operatorname{div} \chi \mathbf{H} + \operatorname{div} \mathbf{I}_0 = -\rho_m.$$

Полагая

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \chi \mathbf{H} &= -\rho'_m, & \operatorname{div} \mathbf{I}_0 &= -\rho_m^0, \\ \rho_m &= \rho'_m + \rho_m^0, \end{aligned} \right\} \quad 219$$

можем сказать, что плотность зарядов в постоянных магнитах равна сумме плотностей зарядов индуцированных ρ'_m и зарядов постоянных ρ_m^0 . То же относится, конечно и к зарядам поверхностным:

$$\operatorname{Div} \chi \mathbf{H} = -\sigma'_m, \quad \operatorname{Div} \mathbf{I}_0 = -\sigma_m^0, \quad \sigma_m = \sigma'_m + \sigma_m^0. \quad 219'$$

Предположим, например, что постоянный магнит равномерно намагничен по всему своему объему ($\mathbf{I}_0 = \text{const}$). Тогда весь постоянный магнетизм будет сосредоточен на поверхности магнита ($\rho_m^0 = 0$). Если, в частности, магнит имеет форму прямого цилиндра и если намагничение \mathbf{I}_0 параллельно оси цилиндра, то весь постоянный магнетизм будет распределен по основаниям цилиндра с поверхностной плотностью $\sigma_m^0 = \pm I_0$ (ибо на боковой поверхности цилиндра $I_{0n} = 0$, а вне магнита $I_0 = 0$). Если, однако, разрезать магнит пополам, то каждая из поверхностей разреза приобретет характер поверхности разрыва вектора \mathbf{I}_0 , т. е. на ней „появляется“ поверхностный магнитный заряд той же плотности $\sigma_m^0 = \pm I_0$.

2. Чтобы установить дифференциальные уравнения магнитного поля \mathbf{H} , разложим мысленно это поле на два составляющих — поле намагниченных магнетиков \mathbf{H}' и поле постоянных электрических токов в проводниках \mathbf{H}'' :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' + \mathbf{H}''.$$

Предположим сначала, что электрических токов в проводниках нет и что магнитное поле таким образом возбуждается лишь постоянными магнитами. Поле этих магнитов сводится к магнитоэстатическому полю

фиктивных магнитных диполей и, стало быть, обладает однозначным скалярным потенциалом ϕ . По аналогии с формулой

$$\varphi = \int \mathbf{P} \operatorname{grad}_q \left(\frac{1}{R} \right) dV = \int \frac{\rho_{\text{свзвн}} dV}{R} + \int \frac{\sigma_{\text{свзвн}} dV}{R},$$

определяющей потенциал поля электрических диполей (стр. 131), непосредственно получим:

$$\varphi = \int \mathbf{I} \operatorname{grad}_q \left(\frac{1}{R} \right) dV = \int \frac{\rho_{\text{м}} dV}{R} + \int \frac{\sigma_{\text{м}} dV}{R}. \quad 220$$

Напряженность поля намагниченных сред, которую мы обозначили через \mathbf{H}' , будет равна:

$$\mathbf{H}' = -\operatorname{grad} \phi, \quad 221$$

причем \mathbf{H}' будет удовлетворять уравнениям:

$$\operatorname{div} \mathbf{H}' = -\nabla^2 \phi = 4\pi\rho_{\text{м}}, \quad 221'$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{H}' = H'_{2n} - H'_{1n} = 4\pi\sigma_{\text{м}}, \quad 221''$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}' = 0 \quad 221'''$$

(сравни (54), (20), (31) и (176); наконец тангенциальная слагающая \mathbf{H}' будет всюду непрерывной (сравни (77)):

$$H'_{2i} = H'_{1i}. \quad 221''''$$

Что же касается магнитного поля токов \mathbf{H}'' , то оно всюду непрерывно (§ 31) и согласно (182) и (185) удовлетворяет уравнениям:

$$\operatorname{div} \mathbf{H}'' = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}'' = \frac{4\pi\mathbf{j}}{c}.$$

Наконец результирующее поле токов и магнетиков будет равно:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' + \mathbf{H}''.$$

При этом \mathbf{H}' , вообще говоря, будет отлично от поля тех же магнетиков в отсутствии токов, ибо индуцированное намагничение магнетиков будет пропорционально напряженности \mathbf{H} результирующего поля постоянных магнитов и токов:

$$\mathbf{I} = \chi\mathbf{H} + \mathbf{I}_0 = \chi(\mathbf{H}' + \mathbf{H}'') + \mathbf{I}_0.$$

Однако поле \mathbf{H}' будет, конечно, попрежнему обладать потенциалом ϕ и будет удовлетворять системе уравнений (221).

Приняв во внимание уравнения, которым подчиняются векторы \mathbf{H}' и \mathbf{H}'' , а также непрерывность последнего вектора, получим систему уравнений поля \mathbf{H} , возбуждаемого в произвольной среде произвольной совокупностью токов и магнитов:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{H} &= 4\pi \rho_{\mu}, \\ \operatorname{Div} \mathbf{H} &= 4\pi \sigma_{\mu}, \end{aligned} \right\} \quad 222$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}, \quad 223$$

$$H_{2i} = H_{1i}. \quad 223'$$

3. По аналогии с вектором электрической индукции \mathbf{D} введем теперь в рассмотрение вектор магнитной индукции \mathbf{B} , определив его соотношением [сравни (107')]:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{I}. \quad 224$$

Внося сюда значение \mathbf{I} из (217') и вводя по аналогии с диэлектрической постоянной ϵ (ур-ние 100) магнитную проницаемость среды μ :

$$\mu = 1 + 4\pi \chi, \quad 224'$$

получим:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{I}_0. \quad 224''$$

Значение μ в реальных ферромагнетиках, как и значение χ , существенно зависит от напряженности поля \mathbf{H} ; однако поскольку мы ограничиваемся рассмотрением „идеализированных“ ферромагнетиков (стр. 275), мы можем считать μ от \mathbf{H} не зависящим.

Дивергенция \mathbf{B} согласно (224) и (222) равна:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \mathbf{H} + 4\pi \operatorname{div} \mathbf{I} = 4\pi (\rho_{\mu} + \operatorname{div} \mathbf{I}),$$

и, стало быть, согласно (218) обращается в нуль:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad 225$$

Кроме того из (224), (222) и (218'), или непосредственно из (225) на основании (32), следует:

$$\operatorname{Div} \mathbf{B} = B_{2n} - B_{1n} = 0. \quad 225'$$

Сравнивая это с соответствующими уравнениями электрического поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho,$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{D} = 4\pi\sigma,$$

можно сказать, что формулы (225) и (225') выражают собой факт отсутствия (точнее несуществования) свободных магнитных зарядов.

4. Система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi\mathbf{j}}{c}, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{I}_0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \operatorname{Div} \mathbf{B} = 0, \\ H_{2t} &= H_{1t}, \end{aligned} \right\} \quad C'$$

представляет собою полную систему уравнений постоянного магнитного поля в произвольной среде. Это значит, что системой (C) магнитное поле определяется однозначно, если только известно распределение электрических токов \mathbf{j} , распределение постоянного намагничения в ферромагнитных телах \mathbf{I}_0 и, наконец, если известно значение магнитной проницаемости μ (или, что согласно (224') сводится к тому же, значение восприимчивости χ) в каждой точке среды.

Предположим противное, т. е. предположим, что заданием \mathbf{j} , \mathbf{I}_0 и μ как определенных функций точки, магнитное поле определяется неоднозначно, и пусть \mathbf{H} , \mathbf{B} и \mathbf{H}' , \mathbf{B}' суть два различных решения системы (C). Внося обе системы решений в (C) и вычитая затем соответственные уравнения друг из друга, получим:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}'' &= 0, \mathbf{H}''_{2t} = \mathbf{H}''_{1t}, \mathbf{B}'' = \mu \mathbf{H}'', \\ \operatorname{div} \mathbf{B}'' &= 0, \mathbf{B}''_{2n} = \mathbf{B}''_{1n}, \end{aligned} \right\} \quad C''$$

где $\mathbf{H}'' = \mathbf{H} - \mathbf{H}'$ и $\mathbf{B}'' = \mathbf{B} - \mathbf{B}'$. Из равенства нулю $\operatorname{rot} \mathbf{H}''$ заключаем (стр. 216), что \mathbf{H}'' есть вектор потенциальный, т. е. что

$$\mathbf{H}'' = -\operatorname{grad} \psi'', \quad C''$$

причем потенциал ψ'' непрерывен во всем поле. Полученная система уравнений (C') и (C'') тождественна (вплоть до обозначений) с системой (A'), рассмотренной в § 32. Стало быть, по доказанному в § 32 решение $\mathbf{H}'' = \mathbf{H} - \mathbf{H}'$ этой системы должно обращаться в нуль во всех точках поля, чем и доказывается однозначность решения системы (C).

Так как при $\mathbf{I}_0 = 0$ и $\mathbf{j} = 0$ система (C) принимает вид (C'), то из равенства нулю решения этой последней системы, следует что в отсутствие токов в проводниках и постоянного намагничения в магнетиках магнитное поле тождественно равно нулю.

Стало быть, наличие магнетиков, поскольку они не обладают постоянным намагничением, лишь видоизменяет поле токов и постоянных магнитов, в отсутствие которых намагничение падает до нуля и магнитное поле исчезает.

5. Как и в случае отсутствия магнетиков задача определения магнитного поля может быть облегчена введением вспомогательной величины — векторного потенциала поля A . Однако уравнение (181) в общем случае произвольной магнитной среды не может оставаться справедливым, ибо $\text{rot } A$, как и вообще ротор произвольного вектора, есть вектор соленоидальный¹ и не может, стало быть, равняться вектору H , дивергенция которого в неоднородной магнитной среде отлична от нуля. Ввиду соленоидальности вектора B (см. 225) мы можем однако определить вектор-потенциал A с помощью уравнений:

$$B = \mu H + 4\pi I_0 = \text{rot } A, \quad \text{div } A = 0; \quad 226$$

при $\mu = 1$ и $I_0 = 0$ эти уравнения совпадают с (181) и (184). Далее, образуя ротор от обеих частей уравнения (226₁), получим на основании (65₃):

$$\text{rot rot } A = -\nabla^2 A = \text{rot}(\mu H) + 4\pi \text{rot } I_0.$$

В случае неоднородной среды ($\mu \neq \text{const}$) выражение это оказывается довольно сложным; кроме того непрерывность векторов H и B , а вместе с тем и непрерывность производных вектора A , вообще говоря, нарушается на границе раздела сред различной проницаемости μ . При этих условиях введение в рассмотрение вектор-потенциала не может существенно облегчить изучение поля. Поэтому мы не будем входить здесь в рассмотрение общего случая и ограничимся лишь рассмотрением векторного потенциала для поля токов в однородной среде (μ — постоянно) и в отсутствие постоянного магнетизма ($I_0 = 0$)². В этом случае, приняв во внимание (185), получим:

$$\nabla^2 A = -\mu \text{rot } H = -\frac{4\pi \mu j}{c} \quad (\mu = \text{const}),$$

¹ Напомним, что согласно данному на стр. 221 определению соленоидальным называется вектор, дивергенция которого во всех точках поля обращается в нуль; соленоидальность ротора следует из (65₁).

² Если одновременно существуют как токи, так и постоянные магниты, то благодаря предполагаемой нами линейности уравнений поля результирующее поле H можно получить наложением поля токов (и индуцированного ими намагничения) и поля постоянных магнитов (и индуцированного ими намагничения). При определении же поля магнитов удобнее исходить из рассмотрения скалярного (а не векторного) потенциала этого поля ϕ .

откуда следует (сравни (180) и (183')):

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{c} \int \frac{\mathbf{j} dV}{R} \quad (\mu = \text{const}). \quad 227$$

Определив \mathbf{A} , уже нетрудно по формуле (226) найти \mathbf{B} и \mathbf{H} ; ввиду $\mathbf{I}_0 = 0$ получаем:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j} dV}{R}. \quad 227'$$

Таким образом из выражения для \mathbf{H} постоянный фактор μ выпадает, так что при заполнении всего пространства однородным магнетиком напряженность магнитного поля токов не изменяется, оставаясь такой же, как и в отсутствие магнетиков (т. е. при $\mu = 1$).

В поле линейных токов (т. е. в сущности, на расстояниях от токов, больших по сравнению с их сечением) формула (227) принимает вид (сравни 180'):

$$\mathbf{A} = \frac{\mu J}{c} \oint \frac{ds}{R} \quad (\mu = \text{const}). \quad 227'$$

Вообще говоря формулы (227) и (227') строго справедливы лишь в том случае, если μ постоянно не только во всем пространстве, окружающем проводники, по которым течет ток, но если и самые эти проводники обладают той же самой проницаемостью μ .

Задача 33. Показать, что (227') строго справедливо для тока, текущего по бесконечному прямолинейному цилиндрическому проводнику, даже в том случае, если проницаемость μ' проводника отлична от проницаемости окружающей среды μ ; при этом проводник может быть заключен в цилиндрическую оболочку произвольной проницаемости μ'' (изоляция).

§ 41. Поле постоянных магнитов. Пондеромоторные силы, испытываемые магнетиками. — Магнитное поле постоянных магнитов во многих отношениях аналогично электрическому полю свободных электрических зарядов. Действительно, из (224''), (225) и (225') получаем:

$$\text{div } \mu \mathbf{H} + 4\pi \text{div } \mathbf{I}_0 = 0; \quad \text{Div } \mu \mathbf{H} + 4\pi \text{Div } \mathbf{I}_0 = 0,$$

откуда на основании (219) и (219')

$$\text{div } \mu \mathbf{H} = 4\pi \rho_m^0, \quad \text{Div } \mu \mathbf{H} = 4\pi \sigma_m^0. \quad 228$$

Стало быть, можно сказать, что постоянные связанные магнитные заряды ρ_m^0 и σ_m^0 являются истоками вектора $\mu\mathbf{H}$ (отличающегося от магнитной индукции \mathbf{B} на $4\pi\mathbf{I}_0$), подобно тому как электрические заряды являются истоками вектора $\epsilon\mathbf{E}$ (равного электрической индукции \mathbf{D} , см. (112) и (112')).

Уравнения (228) справедливы в любом магнитном поле. Если же мы предположим, что поле возбуждается только магнитами, т. е. что электрических токов в проводниках нет, то поле это согласно (221) будет обладать однозначным скалярным потенциалом ϕ . В этом случае аналогия между магнитным вектором $\mu\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{I}_0$ и электрическим вектором $\epsilon\mathbf{E} = \mathbf{D}$ станет полной, так что мы сможем воспользоваться всеми результатами, полученными при изучении диэлектриков. Нам достаточно будет упомянуть лишь о следующих из них.

В однородном магнетике ($\mu = \text{const}$) взаимодействие точечных постоянных магнитных зарядов m^0 и m_1^0 определяется обобщенным законом Кулона:

$$(\mu = \text{const}) \quad F = \frac{m^0 m_1^0}{\mu k^2} \quad 229$$

(сравни 191'), а напряженность поля точечного заряда m^0 равна:

$$(\mu = \text{const}) \quad H = \frac{m^0}{\mu R^2} \quad 229'$$

(сравни 191'' и 101). При этом конечно под точечным зарядом m^0 нужно понимать достаточно малый участок V объема постоянного магнита, в котором ρ_m^0 отлично от нуля, причем

$$m^0 = \int_V \rho_m^0 dV.$$

Итак, напряженность поля постоянных магнитов в однородной среде¹, а вместе с тем и силы пондеромоторного взаимодействия этих магнитов, обратно пропорциональны проницаемости среды μ (сравни 105).

2. Механические силы, испытываемые магнетиками в магнитном поле, должны сводиться к сумме сил, испытываемых отдельными

¹ Однородность среды, строго говоря, означает, что μ имеет одинаковое значение во всех точках поля магнитов, в том числе и внутри того материала, из которого изготовлены сами магниты.

магнитными диполями (или элементарными токами), входящими в состав магнетика. Повторяя рассуждения, приведшие нас в § 25 к формуле (129):

$$\mathbf{f} = P \nabla \Sigma,$$

определяющей плотность сил, испытываемых диэлектриком в поле Σ , убедимся, что объемная плотность сил, испытываемых магнетиком в поле \mathbf{H} , выражается аналогичной формулой:

$$\mathbf{f} = I \nabla \cdot \mathbf{H}. \quad 230$$

Внося сюда (217'), получим согласно (224'):

$$\mathbf{f} = I_0 \nabla \cdot \mathbf{H} + \chi \mathbf{H} \nabla \cdot \mathbf{H} = I_0 \nabla \cdot \mathbf{H} + \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathbf{H} \nabla \cdot \mathbf{H}. \quad 230'$$

Если по рассматриваемому объему магнетика не протекает электрических токов¹, то согласно (185) вихрь вектора \mathbf{H} в этом объеме равен нулю. В этом случае к \mathbf{H} применима формула (130), на основании которой получаем:

$$\mathbf{f} = I_0 \nabla \cdot \mathbf{H} + \frac{\mu - 1}{8\pi} \nabla H^2 \quad 230''$$

[сравни (129'')]. Первая слагающая этой силы отлична от нуля только в постоянных магнитах и равна произведению численной величины I_0 на быстроту изменения поля \mathbf{H} в направлении I_0 (см. § 12). Вторая же слагающая $\frac{\mu - 1}{8\pi} \nabla H^2$ отличается от соответствующей силы в диэлектриках $\frac{\epsilon - 1}{8\pi} \nabla E^2$ лишь в том отношении, что $\mu - 1 = 4\pi \chi$ положительно лишь в пара- и ферромагнетиках, тогда как в диамагнетиках $\mu - 1 < 0$. Стало быть, сила эта увлекает пара- и ферромагнитные вещества в области наибольшей напряженности поля \mathbf{H} и, наоборот, стремится удалить диамагнитные вещества из этих областей (сравни § 25). Так как напряженность поля обыкновенного стержнеобразного магнита возрастает при приближении к его полюсу, то пара- и ферромагнетики (например, железо, медь и т. д.) должны притягиваться магнитом, а диамагнетики (например, висмут) отталкиваться им. Впрочем, ввиду весьма малой магнитной восприимчивости диамагнитных веществ (стр. 276), испытываемые диамагнетиками силы, вообще говоря,

¹ И если электрическое поле постоянно во времени, см. ур-ние 273.

всегда малы. Тем не менее большинство экспериментальных методов определения величин χ и μ для пара- и диамагнетиков основано на измерении пондеромоторных сил (230'), испытываемых этими телами в магнитном поле.

3. Для изучения сил, испытываемых в поле \mathbf{H} постоянными магнитами, удобно преобразовать (230) следующим образом. Слагающая плотности сил \mathbf{f} по произвольному направлению \mathbf{a} (\mathbf{a} — единичный постоянный вектор) равна:

$$\mathbf{f} \mathbf{a} = f_a = \mathbf{a} (\mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{H}) = \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{H} \mathbf{a},$$

где ввиду постоянства вектора \mathbf{a} мы в праве ввести его под знак дифференциального оператора $\mathbf{I} \nabla$. Так как $\mathbf{H} \mathbf{a}$ есть скаляр, то согласно (68') и (66₂) можем написать:

$$f_a = \mathbf{I} \text{grad} (\mathbf{H} \mathbf{a}) = \text{div} \mathbf{I} (\mathbf{H} \mathbf{a}) - (\mathbf{H} \mathbf{a}) \text{div} \mathbf{I}.$$

Проинтегрировав это выражение по некоторому объему V , найдем слагающую F_a общей силы \mathbf{F} , действующей на этот объем; воспользовавшись теоремой Гаусса (25), получим:

$$F_a = \int_V f_a dV = \oint_S I_n (\mathbf{H} \mathbf{a}) dS - \int_V H_a \text{div} \mathbf{I} \cdot dV$$

(для простоты предполагаем, что разрывов непрерывности векторов \mathbf{I} и \mathbf{H} в поле нет, т. е., другими словами, что магнитные свойства среды (μ и χ) непрерывно изменяются от точки к точке). Если выбрать границу S объема V так, чтобы она проходила вне магнетиков, или, чтобы она охватывала полное поле, то интеграл по этой поверхности обратится в нуль, так что согласно (218) получим:

$$F_a = - \int_V H_a \text{div} \mathbf{I} dV = \int_V H_a \rho_m dV.$$

Так как это соотношение остается справедливым при любом выборе направления \mathbf{a} , то, следовательно, плотность испытываемых магнетиком пондеромоторных сил должна равняться¹:

$$\mathbf{f} = \rho_m \mathbf{H}. \quad 231$$

¹ Легко убедиться, что для диэлектриков будет справедливо аналогичное соотношение

$$\mathbf{f} = (\rho_{своб} + \rho_{связ}) \mathbf{E},$$

т. е. что сила (129) может быть сведена к силам, испытываемым связанными зарядами диэлектриков.

Таким образом можно сказать, что на каждый элемент $dm = \rho_m dV$ (связанных) магнитных зарядов магнетика действует сила

$$F = dm H. \quad 231'$$

В постоянных магнитах плотность постоянных зарядов ρ_m^0 обыкновенно значительно больше плотности ρ_m' зарядов индуцированных, так что с известной степенью приближения для этих магнитов можно положить:

$$f = \rho_m^0 H. \quad 231''$$

Магниты изготовляются обычно так, чтобы постоянные заряды ρ_m^0 противоположных знаков были по возможности удалены друг от друга и находились в так называемых „полюсах“ магнита. На каждый полюс магнита действует очевидно сила, равная произведению заряда полюса

$$m^0 = \int \rho_m^0 dV$$

на среднюю напряженность поля H в этом полюсе.

§ 42. Взаимодействие и эквивалентность токов и магнитов. Пондеромоторные силы, испытываемые токами. — 1. В случае немагнитной среды ($\mu = 1$) мы убедились (§ 35), что поле линейного тока силы J эквивалентно полю листка мощности $\tau = \frac{J}{c}$.

Если же мы заполним все пространство однородным магнетиком ($\mu = \text{const} \neq 1$), то напряженность H поля тока, как мы видели, не изменится (стр. 282), тогда как напряженность поля магнитного листка (который мы можем рассматривать как постоянный плоский магнит, проницаемость которого совпадает с проницаемостью окружающей листок среды) уменьшится в μ раз (стр. 283). Стало быть для того, чтобы поле магнитного листка оставалось эквивалентным полю тока, необходимо при изменении проницаемости среды увеличить мощность листка в μ раз, т. е. положить

$$\tau = \frac{\mu J}{c}. \quad 232$$

Нетрудно понять, чем именно обуславливается разный характер зависимости поля листка и поля тока от проницаемости среды μ . В поле токов магнитные силовые линии либо замкнуты, либо винтообразны (§ 34). Стало быть, при намагничивании среды магнитные диполи этой

среды, ориентируясь по направлению поля, будут образовывать замкнутые (или лишенные начала и конца, винтообразные) цепочки, вследствие чего заряды смежных диполей будут взаимно нейтрализоваться. Подобное намагничение среды очевидно изменения поля не вызовет. Напротив, магнитный листок представляет собой нарушение сплошности поля, причем внутри листка направление его поля противоположно направлению поля тока (рис. 73). Поэтому намагничивание среды будет сопровождаться появлением у положительной стороны листка индуцированных связанных отрицательных зарядов $-\sigma_m$, а у отрицательной его стороны — зарядов положительных $+\sigma_m$. Появлением этих зарядов, пропорциональных восприимчивости среды χ , и обуславливается ослабление магнитного поля листка при увеличении μ .

Предоставляем читателю в виде упражнения дать математическое доказательство этих утверждений, исходя из ур-ний (219) и (219') и рассматривая магнитный листок как совокупность двух заряженных поверхностей.

2. Перейдем теперь к рассмотрению пондеромоторных сил, испытываемых током, помещенным в произвольную намагничивающуюся среду. В немагнитных средах ($\mu = 1$) сила, испытываемая током, определяется напряженностью магнитного поля \mathbf{H} (ур-ние 165'), которая при $\mu = 1$ совпадает с индукцией \mathbf{B} . Поэтому при $\mu \neq 1$, когда $\mathbf{B} \neq \mathbf{H}$, мыслимы две возможности: либо пондеромоторная сила, испытываемая линейным током, пропорциональна напряженности поля \mathbf{H} , либо она пропорциональна его индукции \mathbf{B} . Следующие соображения говорят в пользу второй из этих возможностей.

В § 36 мы убедились, что при $\mu = 1$ магнитный листок мощности $\tau = \frac{J}{c}$ эквивалентен току силы J не только в „активном“ отношении (одинаковость полей, возбуждаемых током и листком), но и в отношении „пассивном“ (равенство пондеромоторных сил, испытываемых током и листком во внешнем магнитном поле). Это дает основание предположить, что и в однородной среде проникае-

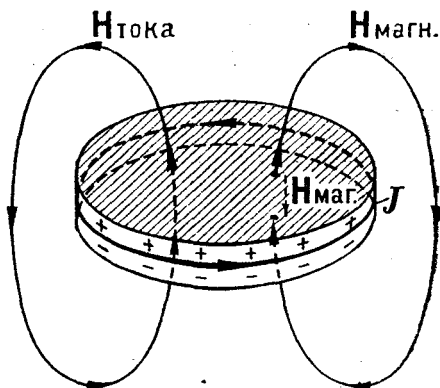


Рис. 73.

мости $\mu \neq 1$ листок мощности $\tau = \frac{\mu J}{c}$, который, как мы только что убедились, эквивалентен току силы J в „активном“ отношении, будет эквивалентен ему и в отношении „пассивном“. Потенциальная функция пондеромоторных сил, действующих в вакууме на листок заданной мощности во внешнем поле \mathbf{H} , равна (см. стр. 257):

$$U = - \int \tau H_n dS;$$

формула эта, как нетрудно убедиться, остается справедливой и в магнитной произвольной среде. Так как мощность эквивалентного току листка согласно (232) равна $\frac{\mu J}{c}$, то, приняв во внимание (224''), можем написать¹:

$$U = - \int \frac{\mu J}{c} H_n dS = - \frac{J}{c} \int B_n dS. \quad 233$$

Чтобы листок мощности $\tau = \frac{\mu J}{c}$ был эквивалентен току не только в „активном“, но и в „пассивном“ отношении, необходимо допустить, что потенциальная функция сил, действующих на ток J , также определяется формулой (233). Допущение это, как легко убедиться, рассматривая данный в § 36 вывод формулы (198) из (165'), эквивалентно допущению, что сила, испытываемая элементом линейного тока ds в поле \mathbf{B} , равна:

$$\mathbf{F} = \frac{J}{c} [ds \mathbf{B}]. \quad 234$$

При $\mu = 1$ $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ и (234) обращается в (165'). Допустив справедливость (234) и обращаясь от линейных токов к токам конечного сечения, убедимся, что на элемент объема этих токов действует сила

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} [\mathbf{jB}] dV \quad 234'$$

¹ Так как \mathbf{H} есть внешнее поле, то \mathbf{I}_0 в (224'') нужно очевидно положить равным нулю.

[сравни (170)]. В конце следующего параграфа мы дадим строгое обоснование формул (234) и (234'), пока же заметим лишь, что они находятся в полном согласии с данными опыта.

3. Входящий в выражение (233) поверхностный интеграл может быть распространен, очевидно, по любой поверхности S , опирающейся на контур тока L , причем значение этого интеграла будет зависеть лишь от положения и формы контура тока. Проще всего убедиться в этом следующим образом. Введем для входящего в (223) потока магнитной индукции через поверхность S обозначение Ψ . Выразив с помощью (226) магнитную индукцию \mathbf{B} через вектор-потенциал \mathbf{A} и применив затем теорему Стокса (175), получим:

$$\Psi = \int_S B_n dS = \int_S \text{rot}_n \mathbf{A} dS = \oint_L \mathbf{A}_s ds. \quad (235)$$

При $\mu = 1$ $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, $\Psi = \Phi$ и (235) принимает вид (196'). Внося (235) в (233), получим:

$$U = -\frac{J}{c} \Psi = -\frac{J}{c} \oint_L \mathbf{A}_s ds. \quad (233')$$

Частными случаями этой формулы при $\mu = 1$ являются уравнения (198) и (198').

Все эти формулы применимы, очевидно, в любой неоднородной магнитной среде.

4. Рассмотрим пондеромоторное взаимодействие двух линейных токов, предположив, что все поле заполнено однородной в магнитном отношении средой ($\mu = \text{const}$), лишенной постоянного намагничивания ($\mathbf{I}_0 = 0$). В этом случае вектор-потенциал поля \mathbf{A} выразится формулой (227). Повторяя выкладки § 36 и приняв во внимание, что \mathbf{A} пропорционально μ , мы придем к следующей совокупности формул:

$$(\mu = \text{const}) \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{ik} = \frac{1}{c} L_{ik} J_k \quad (i, k = 1, 2), \\ L_{21} = L_{12} = \mu \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{ds_1 ds_2}{R}, \text{ сравни (201),} \\ L_{11} = \frac{\mu}{J_1^2} \int_{V_1} \int_{V_1} \frac{\mathbf{j} \mathbf{j}'}{R} dV dV', \text{ сравни (206').} \end{array} \right. \quad (236)$$

Потенциальная функция токов U попрежнему будет определяться уравнением (207):

$$U = U_{11} + U_{22} + U_{21} = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_{22} J_2^2 \right), \quad 236^r$$

а обобщенная пондеромоторная сила θ_i , действующая на токи „в направлении“ координаты q_i , будет определяться уравнением (199'):

$$\theta_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad 236^r$$

Таким образом в однородной магнитной среде коэффициенты взаимной индукции и самоиндукции токов L_{12} и L_{11} , а стало быть, и потенциальная функция U и пондеромоторные силы взаимодействия токов θ_i , прямо пропорциональны проницаемости среды μ .

В последнем отношении существует резкая разница между токами и постоянными магнитами, ибо силы взаимодействия фиктивных магнитных зарядов (а стало быть, и постоянных магнитов) согласно обобщенному закону Кулона (229) обратно пропорциональны μ . Объясняется эта разница в поведении токов и магнитов, во-первых, разным характером зависимости поля токов и магнитов от проницаемости среды μ (см. начало этого параграфа), и, во-вторых тем, что силы, испытываемые токами, пропорциональны индукции \mathbf{B} , а силы, испытываемые магнитами — пропорциональны \mathbf{H} .

Силы взаимодействия между токами, с одной стороны и постоянными магнитами — с другой, занимают, так сказать, промежуточное положение и в однородной среде ($\mu = \text{const}$) вовсе от значения μ не зависят. Действительно, потенциальная функция U тока в заданном магнитном поле пропорциональна потоку магнитной индукции Ψ , а магнитная индукция \mathbf{B} в поле¹ постоянных магнитов при $\mu = \text{const}$ от значения μ не зависит. Стало быть, не зависят от μ и силы, испытываемые токами в этом поле. Обратно, силы испытываемые магнетиками (в том числе и постоянными

¹ Точнее, в участках поля, лишенных постоянного намагничения \mathbf{I}_0 , ибо лишь при $\mathbf{I}_0 = 0$ $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, а \mathbf{H} в поле постоянных магнитов обратно пропорционально проницаемости среды μ (см. § 41).

магнитами) в заданном магнитном поле, согласно § 41, пропорциональны напряженности \mathbf{H} этого поля, а напряженность поля постоянных токов при $\mu = \text{const}$ от значения μ не зависит (смотри стр. 282).

В главе IV мы определили магнитный момент \mathbf{M} тока формулой (194):

$$\mathbf{M} = \frac{JS}{c},$$

и установили, что элементарный ток, обладающий моментом \mathbf{M} , эквивалентен магнитному диполю того же момента \mathbf{M} как в активном (поле тока), так и в пассивном (испытываемая током сила) отношениях. Как явствует из изложенного, для того чтобы эта эквивалентность имела место не только в вакууме, но и в произвольной однородной среде проницаемости μ^1 , нужно положить магнитный момент тока пропорциональным μ :

$$\mathbf{M} = \frac{\mu JS}{c}. \quad 237$$

Нетрудно убедиться, что при таком определении величины \mathbf{M} формулы (210), (211) и (211'), определяющие величину сил, испытываемых током в магнитном поле, останутся справедливыми и при $\mu \neq 1$.

5. В заключение заметим следующее. Значения характеризующих магнитное поле векторов \mathbf{H} и \mathbf{B} могут быть измерены на опыте путем измерения пондеромоторных сил, испытываемых в этом поле несущими ток проводниками и постоянными магнитами (например, магнитной стрелкой, которую при известных условиях можно рассматривать как магнитный диполь). С этой целью удобнее всего воспользоваться либо формулой (234), связывающей испытываемую элементом тока силу \mathbf{F} с индукцией \mathbf{B} , либо формулой (211), связывающей момент пары сил, испытываемых элементарным замкнутым током или магнитным диполем момента \mathbf{M} , с напряженностью поля \mathbf{H} . Конечно, при измерениях необходимо следить за тем, чтобы внесение измерительного прибора (тока или стрелки) не влекло за собой сколько-нибудь существенного изменения измеряемого поля.

Однако внесение измерительных приборов в поле возможно лишь в том случае, если исследуемый участок его заполнен газообразной или жидкой средой. Если же среда твердая, то для возможности

¹ Достаточно, очевидно, чтобы μ было постоянным лишь внутри некоторой замкнутой поверхности, охватывающей как ток, так и эквивалентный ему диполь.

измерений необходимо проделать в ней соответствующие отверстия, причем, конечно, поле \mathbf{H}' внутри этих отверстий будет, вообще говоря, отлично от поля \mathbf{H} и \mathbf{B} в смежных точках твердой среды.

Нетрудно однако установить связь между \mathbf{H}' с одной стороны и \mathbf{H} и \mathbf{B} — с другой (см. задачу).

Задача 34. — Показать, исходя из (223') и (225'), что напряженность поля \mathbf{H}' в средней части длинной и узкой щели, проделанной в твердом магнетике, равна напряженности поля \mathbf{H} в смежных со щелью точках магнетика, если эта щель параллельна вектору \mathbf{H} , и что \mathbf{H}' равно индукции \mathbf{B} в смежных точках магнетика, если щель перпендикулярна вектору \mathbf{H} . (Если магнетик обладает постоянным намагничением \mathbf{I}_0 , то предполагается, что вектор \mathbf{I}_0 параллелен \mathbf{H} и \mathbf{B} .) Сравни задачу 17, стр. 134.

§ 43. Вывод уравнений магнитного поля с точки зрения электронной теории магнетиков. — 1. Откажемся теперь от введения в рассмотрение фиктивных магнитных зарядов и станем на точку зрения современной электронной теории. Как уже неоднократно упоминалось, единственными возбудителями магнитного поля согласно этой теории являются движущиеся электрические заряды. Магнитные свойства тел объясняются наличием электронов, движущихся по замкнутым орбитам внутри атомов и молекул этих тел. До намагничения плоскости этих орбит ориентированы беспорядочным, хаотическим образом, так что магнитные поля отдельных молекул взаимно компенсируются; намагничение же состоит в упорядочении направления этих орбит под воздействием внешнего поля, благодаря чему векторная сумма \mathbf{I} магнитных моментов молекул магнетика (см. ур-ние 216) становится отличной от нуля. Механизм намагничивания будет рассмотрен в следующем параграфе, здесь же мы ограничимся выводом дифференциальных уравнений поля.

Строго говоря, теория постоянных замкнутых токов не применима к изучению магнитного поля электронов, движущихся по замкнутым орбитам, ибо поле этих электронов не постоянно во времени, а изменяется периодически; период изменения поля равен периоду обращения электрона по орбите. Однако период этот чрезвычайно мал и сравним с периодом световых колебаний (10^{-14} — 10^{-15} сек.), так что при макроскопических наблюдениях мы воспринимаем лишь среднее по времени значение этого поля. Поэтому при построении макроскопической теории мы вправе¹ заменить движущийся

¹ Строгое доказательство допустимости такой замены будет дано в томе II.

внутри атома электрон постоянным замкнутым током („молекулярный ток“), постоянное поле которого тождественно со средним за время одного периода значением поля электрона.

В магнитном отношении молекулярный ток, как и всякий элементарный ток, вполне характеризуется заданием его магнитного момента M . Поэтому с целью упрощения вычислений мы можем предположить, что контур каждого молекулярного тока представляет собой окружность. Если радиус кругового тока равен a , а сила его J , то, согласно (194):

$$M = \frac{JS}{c} = \frac{J\pi a^2}{c}.$$

В окончательный результат наших вычислений ни a ни J явно входить не будут, так что наше специальное допущение по существу общности рассуждений не ограничивает.

2. Обозначим через $\mathbf{H}_{\text{микро}}$ точное „микроскопическое“ значение напряженности магнитного поля; поле это, вообще говоря, испытывает резкие изменения на расстояниях, сравнимых с размерами атомов. Будем исходить из предположения, что это микроскопическое поле подчиняется основным уравнениям магнитного поля постоянных токов (182) и (185), т. е. что

$$\operatorname{div} \mathbf{H}_{\text{микро}} = 0 \text{ и } \operatorname{rot} \mathbf{H}_{\text{микро}} = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c},$$

где \mathbf{j} есть точное „микроскопическое“ значение плотности тока в данной точке поля. Задача же наша будет состоять в установлении уравнений макроскопического поля, т. е. уравнений, определяющих среднее значение вектора $\mathbf{H}_{\text{микро}}$ в физически бесконечно малом объеме (см. § 21, уравнение 109). При выводе этих уравнений мы должны усреднить значения $\mathbf{H}_{\text{микро}}$ и по времени и по пространству. Усреднение по времени нами уже выполнено заменой движущихся электронов замкнутыми постоянными токами; остается выполнить усреднение по пространству. Обозначим через $\bar{\mathbf{H}}_{\text{микро}}$ среднее макроскопическое значение вектора \mathbf{H} . Так как, согласно (109'), среднее значение производных по координатам равно производным от среднего значения дифференцируемой величины, то из микроскопических уравнений поля следует:

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{H}}_{\text{микро}} = 0, \quad 238$$

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}}_{\text{микро}} = \frac{4\pi \bar{\mathbf{j}}_{\text{микро}}}{c}. \quad 238'$$

В последнем уравнении $\bar{\mathbf{j}}_{\text{микро}}$ есть средняя плотность тока в физически бесконечно малом объеме; она, очевидно, складывается из плотности „микроскопического“ тока проводимости $\mathbf{j}_{\text{пр}}$, носителем которого являются „электроны проводимости“ или свободные электроны в металлах¹, и из плотности $\mathbf{j}_{\text{магн}}$ молекулярных токов в молекулах магнетиков:

$$\bar{\mathbf{j}} = \bar{\mathbf{j}}_{\text{пр}} + \bar{\mathbf{j}}_{\text{магн}}. \quad 239$$

Среднее значение $\bar{\mathbf{j}}_{\text{пр}}$ представляет собой очевидно ни что иное, как обычную плотность \mathbf{j} макроскопического электрического тока в проводниках:

$$\bar{\mathbf{j}}_{\text{пр}} = \mathbf{j}. \quad 239$$

Для того же, чтобы определить $\bar{\mathbf{j}}_{\text{магн}}$ рассмотрим некоторый физически бесконечно малый объем магнетика ΔV , ограниченный поверхностью S . По определению (см. 109)

$$\bar{\mathbf{j}}_{\text{магн}} \Delta V = \int_{\Delta V} \mathbf{j}_{\text{магн}} dV.$$

Считая все молекулярные токи линейными², можем согласно (167) написать:

$$\mathbf{j}_{\text{магн}} dV = J ds.$$

Стало быть

$$\bar{\mathbf{j}} \Delta V = \sum_{\Delta V} J ds = J \sum_{\Delta V} ds,$$

где суммирование должно быть распространено на все расположенные в объеме ΔV элементы молекулярных токов (для простоты предполагаем, что все эти токи обладают одинаковой силой J).

3. Если какой-либо элементарный ток целиком расположен внутри объема ΔV , то векторная сумма всех его элементов ds

¹ А также ионы в электролитах, ионизированных газах и т. п.

² Это допустимо потому, что размеры физически бесконечно малого объема ΔV по определению значительно больше размеров молекул, а стало быть, и размеров молекулярных токов.

будет равна нулю (ибо ток замкнут). Стало быть, сумма $\sum_{\Delta V} ds$ сведется к сумме элементов тех молекулярных токов, которые рассекаются поверхностью S , ограничивающей объем ΔV , и таким образом лишь частью находятся внутри ΔV . Далее, если поверхность S рассекает какой-нибудь из круговых токов по хорде AB (рис. 74), то векторная сумма элементов ds этого тока, лежащих внутри поверхностей S , будет очевидно равна замыкающей хорде AB . Стало быть, если эта хорда AB по величине и направлению равна s , то $\sum ds = s$. Величина и направление вектора s будут зависеть от направления плоскости тока, которая характеризуется направлением перпендикулярного к ней вектора M , и от расстояния

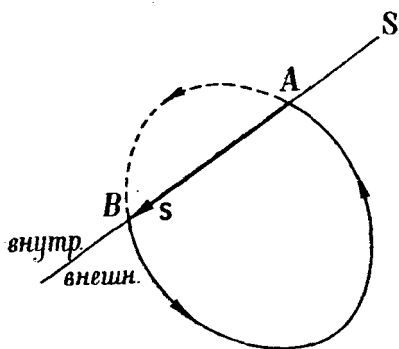


Рис. 74.

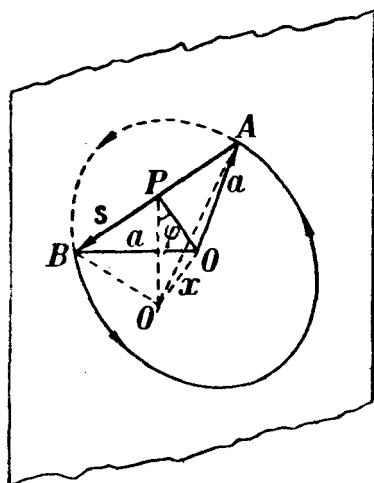


Рис. 75.

центра тока от поверхности S . Пусть M составляет с внешней нормалью n к поверхности S угол φ , и пусть центр тока O находится на расстоянии $OO' = x$ от поверхности S (рис. 75), причем x мы будем считать отрицательным или положительным в зависимости от того, находится ли O внутри или вне S . Проведем через OO' плоскость, перпендикулярную AB ; точку пересечения ее с AB обозначим через P . Угол $OP O'$ между поверхностью S и плоскостью тока равен углу между нормалью к этим плоскостям n и M , т. е. равен φ . Поэтому

$$OP = \frac{x}{\sin \varphi}.$$

Далее, так как OA и OB равны радиусу тока a , то

$$s = 2\sqrt{OA^2 - OP^2} = 2\sqrt{a^2 - \frac{x^2}{\sin^2 \varphi}} = \frac{2\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi - x^2}}{\sin \varphi}.$$

Рассмотрим теперь совокупность молекулярных токов, направление магнитного момента \mathbf{M} которых лежит внутри бесконечно малого телесного угла $d\omega$. Число этих токов в единице объема магнетика обозначим через $N(\omega) d\omega$; число же таких токов в слое толщины dx и основания dS , находящемся на расстоянии x от элемента dS пограничной поверхности S , будет равно:

$$N(\omega) d\omega dS dx.$$

Если

$$-a \sin \varphi < x < +a \sin \varphi,$$

то все эти токи будут пересекаться пограничной поверхностью S по равным и параллельным хордам s . Стало быть, абсолютная величина суммы относящихся к этим токам членов суммы $J \Sigma ds$ будет равна:

$$J |\Sigma ds| = J_s N(\omega) d\omega dS dx = 2J \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi - x^2}}{\sin \varphi} N(\omega) d\omega dS dx.$$

Интегрируя это выражение по x от $-a \sin \varphi$ до $+a \sin \varphi$, получим значение соответствующей суммы для всех токов, пересекаемых элементом граничной поверхности dS , направление магнитного момента которых лежит внутри угла $d\omega$ ¹:

$$\begin{aligned} J |\Sigma ds| &= 2J N(\omega) d\omega dS \int_{-a \sin \varphi}^{+a \sin \varphi} \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi - x^2}}{\sin \varphi} dx = \\ &= N(\omega) d\omega dS \cdot J \pi a^2 \sin \varphi = N(\omega) d\omega dS \cdot cM \sin \varphi. \end{aligned}$$

Чтобы определить направление вектора $J \Sigma ds$, относящегося к токам указанного направления, заметим, что хорда s каждого тока лежит как в плоскости элемента dS , так и в плоскости самого тока, и следовательно, перпендикулярна как \mathbf{n} , так и \mathbf{M} . Стало быть, s , а вместе с тем и $J \Sigma ds$, должно быть параллельным $\pm [\mathbf{n} \mathbf{M}]$; из рассмотрения

¹ Применяем формулу:

$$\int \sqrt{b^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(b^2 \arcsin \frac{x}{b} + x \sqrt{b^2 - x^2} \right).$$

рис. (74) и (75) следует, что знак здесь нужно выбрать положительный. Так как, с другой стороны,

$$|[\mathbf{n} \mathbf{M}]| = M \sin \varphi,$$

то последнее уравнение можно записать в векторной форме так:

$$J \Sigma ds = N(\omega) d\omega \cdot dS c [\mathbf{nM}] = c [dS \mathbf{M}] N(\omega) d\omega,$$

где, как обычно, вектор dS считается направленным по внешней нормали \mathbf{n} .

Чтобы получить полную сумму элементов ds длины токов, отсекаемых элементом граничной поверхности dS , достаточно, очевидно, проинтегрировать последнее выражение по ω ; на основании (216') получим:

$$J \Sigma ds = c \int [dS \mathbf{M}] N(\omega) d\omega = c [dS \cdot \int \mathbf{M} N(\omega) d\omega] = c [dS \mathbf{I}].$$

Наконец полная сумма всех элементов ds длины молекулярных токов, отсекаемых всеми элементами замкнутой поверхности S , будет равна:

$$\bar{\mathbf{j}}_{\text{магн}} \Delta V = J \sum_{\Delta V} ds = c \oint_S [dS \mathbf{I}].$$

4. Чтобы преобразовать это выражение, помножим обе его части на произвольный, но постоянный по величине и направлению, вектор \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} \bar{\mathbf{j}}_{\text{магн}} \Delta V = c \oint_S \mathbf{a} [dS \mathbf{I}] = c \oint_S [\mathbf{Ia}] dS = c \oint_S [\mathbf{Ia}]_n dS.$$

Разделив обе части этого уравнения на $c \Delta V$ и применив теорему Гаусса (25), получим:

$$\frac{1}{c} \mathbf{a} \bar{\mathbf{j}}_{\text{магн}} = \frac{1}{\Delta V} \oint_S [\mathbf{Ia}]_n dS = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \text{div} [\mathbf{Ia}] dV.$$

Правая часть этого уравнения представляет собой, согласно (109), среднее значение выражения $\text{div} [\mathbf{Ia}]$ в физически бесконечно малом объеме ΔV . Стало быть, понимая под $\bar{\mathbf{I}}$ (без штриха сверху) среднее значение намагничивания (что соответствует самому смыслу понятия намагничивания), можем написать:

$$\frac{1}{c} \mathbf{a} \bar{\mathbf{j}}_{\text{магн}} = \text{div} [\mathbf{Ia}].$$

Приняв во внимание постоянство вектора \mathbf{a} , на основании (67) получим:

$$\frac{1}{c} \mathbf{a} \bar{\mathbf{j}}_{\text{магн}} = \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{I} - \mathbf{I} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{I}.$$

Это равенство может иметь место при любом выборе направления вектора \mathbf{a} лишь в том случае, если

$$\frac{1}{c} \bar{\mathbf{j}}_{\text{магн}} = \operatorname{rot} \mathbf{I}. \quad 239''$$

Таким образом средняя объемная плотность молекулярных токов, циркулирующих в молекулах магнетиков, пропорциональна ротору намагничивания. В частности, если намагничение постоянно, то средняя плотность этих токов равна нулю, в чем легко убедиться и непосредственно, рассматривая, например, объем ΔV кубической формы. Благодаря постоянству вектора \mathbf{I} противолежащие грани куба будут рассекают одинаковое число молекулярных токов данного направления \mathbf{M} и притом так, что участки этих токов, отсеченные одной гранью, будут, в среднем, как раз дополняться до полного замкнутого контура участками, отсеченными гранью противолежащей. Стало быть векторная сумма отсеченных участков будет равна нулю.

5. Внося (239), (239') и (239'') в (238') получим:

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}}_{\text{микро}} = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c} + 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{I}$$

или

$$\operatorname{rot} \left(\bar{\mathbf{H}}_{\text{микро}} - 4\pi \mathbf{I} \right) = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}. \quad 240$$

Это уравнение вместе с (238) и представляет собою искомую систему уравнений макроскопического магнитного поля в магнетиках. Они совпадут с уравнениями (223) и (225), полученными нами в § 40 путем уподобления молекул магнетиков магнитным диполям, если мы положим:

$$\mathbf{B} = \bar{\mathbf{H}}_{\text{микро}}. \quad 241$$

Действительно, в этом случае (238) примет вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

что совпадает с (225). Далее согласно, (224), получим:

$$\bar{\mathbf{H}}_{\text{микро}} - 4\pi \mathbf{I} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{I} = \mathbf{H} \quad 241'$$

(где \mathbf{H} есть напряженность макроскопического поля), так что (240) примет вид $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi\mathbf{j}}{c}$, что совпадает с (223).

Отметим существенную разницу характера связи между микро- и макро-значениями величин, характеризующих, с одной стороны, поле электрическое, с другой стороны поле магнитное. В § 22 мы убедились, что средняя напряженность микроскопического электрического поля $\bar{\mathbf{E}}_{\text{микро}}$ равна напряженности поля макроскопического, тогда как, согласно (241), средняя напряженность $\bar{\mathbf{H}}_{\text{микро}}$ микроскопического магнитного поля равна вектору индукции \mathbf{B} поля макроскопического. Было бы несомненно более последовательным и правильным изменить названия величин, характеризующих макроскопическое магнитное поле, и назвать вектор \mathbf{B} (средней) напряженностью поля, а вектор \mathbf{H} — индукцией поля. Вместе с тем при таком словопотреблении было бы выявлено физическое сродство величин \mathbf{E} и \mathbf{B} — с одной стороны, и величин \mathbf{H} и \mathbf{D} — с другой¹, тогда как, напротив, при формальном сравнении уравнений электрического и магнитного поля:

$$\text{div } \mathbf{D} = -4\pi\rho, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P},$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi\mathbf{j}}{c}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I},$$

создается впечатление о сходстве величин \mathbf{E} и \mathbf{H} — с одной стороны, и \mathbf{D} и \mathbf{B} — с другой. Однако обычное словопотребление (\mathbf{B} — индукция, \mathbf{H} — напряженность), как мы убедились в § 40, вполне естественно с точки зрения прежних теорий, отождествлявших молекулы магнетиков с магнитными диполями, и настолько укоренилось, что мы принуждены его придерживаться.

6. Отметим в заключение, что с точки зрения изложенной в этом параграфе электронной теории магнетиков, становится вполне ясным физический смысл уравнения (234). Согласно формуле Лорентца (213), механическая сила, испытываемая движущимися электронами в магнитном поле, определяется напряженностью этого поля. Стало быть, сила, испытываемая несущим ток проводникам, должна

¹ Это сродство проявляется, в частности, в том обстоятельстве, что при четырехмерной формулировке уравнений электромагнитного поля в теории относительности оказывается необходимым объединить векторы \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{H} , \mathbf{D} попарно в два четырехмерных тензора 2-го ранга.

определяться средней напряженностью микроскопического поля, т. е., согласно (241), индукцией поля макроскопического.

§ 44. Электронная теория намагничивания. — В предыдущем мы убедились, что как теория магнитных диполей, так и теория молекулярных токов приводят к одной и той же системе уравнений макроскопического магнитного поля в магнетиках. Из этого обстоятельства, казалось бы, можно сделать вывод, что в пределах макроскопических наблюдений обе теории должны одинаково хорошо истолковывать данные опыта, и что преимущество электронной теории может заключаться лишь в том, что она сводит все источники магнитного поля к единой категории электрических токов (движущиеся электрические заряды).

Однако изложенная нами в предшествующих параграфах теория магнетиков еще не полна, ибо мы пока оставили открытым вопрос о молекулярном механизме намагничивания и лишь чисто формально ввели уравнения (217) и (217'), определяющие зависимость намагничения \mathbf{I} от напряженности поля \mathbf{H} . Обращаясь же теперь к рассмотрению механизма намагничивания магнетиков, мы убедимся, что электронная теория весьма просто истолковывает такие явления, как диамагнетизм и магнитно-механические эффекты, которые совершенно не укладываются в рамки теории магнитных диполей.

1. Так как согласно электронной теории магнитные свойства атомов и молекул обуславливаются движением электронов в них, и так как электроны обладают не только зарядом, но и массой, то каждая молекула, обладающая магнитным моментом \mathbf{M} , вместе с тем должна обладать также и некоторым механическим моментом количества движения \mathbf{K} . Как мы сейчас увидим, \mathbf{K} пропорционально \mathbf{M} и может равняться нулю лишь в том случае, если и \mathbf{M} равно нулю.

Предположим для простоты, что ядро атома O неподвижно. Пусть \mathbf{R} есть радиус-вектор, проведенный из O к электрону, скорость которого равна \mathbf{v} . По определению момент количества движения, или момент вращения этого электрона относительно точки O , равен:

$$\mathbf{K} = m [\mathbf{R} \mathbf{v}] = 2m \frac{d\mathbf{S}}{dt}, \quad 242$$

где m есть масса электрона, а $\frac{d\mathbf{S}}{dt}$ — его секториальная скорость, т. е. векторная величина площади, описываемой радиусом вектора \mathbf{R} за единицу времени. Предположим, что электрон движется в поле централь-

ных сил, центр которых совпадает с O^1 . В этом случае, как известно, вектор \mathbf{K} остается постоянным по величине и направлению в течение всего движения материальной точки (электрона).

С другой стороны, как указывалось в начале предыдущего параграфа, если ограничиться рассмотрением среднего по времени магнитного поля электрона (за время полного периода его движения), то можно заменить движущийся внутри атома электрон постоянным током J , контур которого совпадает с орбитой электрона, и магнитный момент которого, стало быть, равен (см. 194):

$$\mathbf{M} = \frac{JS}{c},$$

где S есть площадь орбиты электрона ². Силу эквивалентного электрону тока J можно определить следующим образом. Пусть T есть период обращения электрона по орбите. За каждую секунду электрон проходит через каждую точку орбиты $\frac{1}{T}$ раз; стало быть, за 1 секунду через каждое сечение эквивалентного тока должно проходить количество электричества, равное $\frac{e}{T}$, где e есть заряд электрона. Стало быть,

$$J = \frac{e}{T}$$

и

$$\mathbf{M} = \frac{eS}{cT}.$$

Отношение $\frac{S}{T}$ равно средней секториальной скорости электрона по орбите; так как эта скорость при движении в поле центральных сил постоянна (закон площадей), то

$$\frac{S}{T} = \frac{dS}{dt} \quad \text{и} \quad \mathbf{M} = \frac{e}{c} \frac{dS}{dt},$$

¹ В первом приближении это действительно имеет место не только в атоме водорода (где Кулоново поле ядра строго центрально), но и в большинстве более сложных атомов, благодаря шаровой симметрии расплывания внутренних слоев электронов в этих атомах.

² Строгое доказательство допустимости такой замены будет дано во II томе.

или на основании (242)

$$\mathbf{M} = \frac{e}{2mc} \mathbf{K} \quad 243$$

Итак магнитный момент \mathbf{M} постоянного тока, эквивалентного движущемуся электрону, действительно пропорционален моменту вращения электрона \mathbf{K} .

Заметим, что, так как заряд электрона e отрицателен, то вектор \mathbf{M} направлен прямо противоположно \mathbf{K} . Это соответствует тому обстоятельству, что току J , эквивалентному движущемуся электрону, приписывается направление, прямо противоположное движению электрона (ибо направление тока условно считается совпадающим с направлением движения положительных зарядов).

Если в атоме или молекуле имеется не один, а несколько движущихся электронов, то к каждому из них применима формула (243). Очевидно, что результирующий магнитный момент $\mathbf{M}_{рез}$ всей молекулы в целом, т. е. векторная сумма моментов отдельных электронов, будет связан с результирующим моментом количества движения $\mathbf{K}_{рез}$ подобным же соотношением:

$$\mathbf{M}_{рез} = \sum \mathbf{M} = \frac{e}{2mc} \mathbf{K}_{рез} \quad 243'$$

Все атомы и молекулы могут быть подразделены на два класса, в зависимости оттого, равен ли или не равен нулю результирующий момент молекулы (в отсутствие внешнего магнитного поля). Как мы увидим, молекулы первого класса ($\mathbf{M}_{рез} = 0$) обладают диамагнитными свойствами, молекулы же второго класса ($\mathbf{M}_{рез} \neq 0$) — свойствами ферро- и парамагнитными.

2. Рассмотрим сначала возможно простой случай, а именно случай газа, молекулы которого состоят из ядра и одного электрона (атомарный водород). В отсутствие внешнего магнитного поля электроны этих атомов движутся в поле центральных Кулоновых сил ядра и, стало быть, моменты \mathbf{K} и \mathbf{M} каждого атома остаются постоянными по величине и направлению. Направления же моментов отдельных атомов будут распределены хаотически, так что намагничение газа будет равно нулю. Возбудим теперь внешнее поле \mathbf{H} . Заменяя попрежнему движущийся электрон эквивалентным постоянным током, убедимся, что на

¹ Уравнение это остается справедливым также и в том случае, если действующие на электрон силы не являются центральными. Однако в этом случае \mathbf{M} и \mathbf{K} , вообще говоря, суть величины переменные, зависящие от времени.

контур этого тока в поле \mathbf{H} будет действовать пара сил, момент которой \mathbf{N} , согласно (211) и (243), окажется равным:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{M} \mathbf{H}] = \frac{e}{2mc} [\mathbf{K} \mathbf{H}]. \quad 244$$

Мы можем истолковать это равенство в том смысле, что \mathbf{N} равно моменту сил, стремящихся повернуть плоскость орбиты электрона, совпадающую с плоскостью эквивалентного тока J^1 .

Если бы молекулы газа были сравнимы в магнитном отношении с „твердыми“ магнитными диполями, то под воздействием пары сил \mathbf{N} эти диполи стремились бы установиться по направлению поля и стали бы по инерции совершать маятниковобразные колебания около этого направления \mathbf{H} . В результате направления моментов диполей, совпадающие с \mathbf{H} , получили бы преобладание, и газ намагнитился бы (парамагнитный эффект). Совершенно иначе будет обстоять дело в том случае, если магнитные свойства атомов обуславливаются движением электронов в нем, ибо в этом случае каждый атом будет обладать определенным моментом количества движения \mathbf{K} и, стало быть, будет подобен в механическом отношении вращающемуся волчку или гироскопу. Известно, что если на вращающийся волчок начинает действовать пара сил, момент которой перпендикулярен оси волчка, то ось эга начинает прецессировать вокруг направления сил, причем угол наклона оси к направлению сил не изменяется (сравни прецессию тяжелого волчка в поле сил тяжести).

Согласно известной теореме механики, под воздействием пары сил момента \mathbf{N} конечная точка вектора момента количества движения \mathbf{K} материальной системы перемещается с линейной скоростью $\frac{d\mathbf{K}}{dt}$ равной \mathbf{N} :

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{N} = \frac{e}{2mc} [\mathbf{K} \mathbf{H}].$$

Введя обозначение

$$\mathbf{o} = -\frac{e}{2mc} \mathbf{H}, \quad 245$$

можем написать:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = [\mathbf{o} \mathbf{K}].$$

¹ В конце этого параграфа мы покажем, что следствия, вытекающие из этого истолкования, совпадают с результатами строгого рассмотрения вопроса.

Из этого уравнения следует, что вектор \mathbf{K} будет вращаться около направления \mathbf{o} с угловой скоростью ω , или, иными словами, будет вращаться с угловой скоростью, определяемой по величине и направлению вектором \mathbf{o} . Так как вектор \mathbf{K} можно считать направленным по нормали к плоскости орбиты электрона (ибо момент количества движения, соответствующий прецессионному движению орбиты, исчезающе мал по сравнению с моментом количества движения электрона по орбите), то это значит, что при возникновении магнитного поля \mathbf{H} орбита электрона начинает прецессировать вокруг направления поля с угловой скоростью ω ,¹ причем угол наклона плоскости орбиты к полю остается неизменным.

3. Из последнего обстоятельства следует, что если до возникновения поля направления осей атомов были распределены хаотически, то

и в магнитном поле векторная сумма моментов \mathbf{M} отдельных атомов должна остаться равной нулю. Стало быть, намагничение газа, по видимому, не должно иметь места. Однако этот последний вывод не верен, ибо если даже ориентация осей молекул и не упорядочится, тем не менее прецессия орбиты электрона с угловой скоростью ω равносильна добавочному вращению электрона с той же угловой скоростью; стало быть, благодаря этой прецессии, атом приобретает некоторый добавочный магнитный момент $\Delta\mathbf{M}$. Так как ω направлено параллельно полю \mathbf{H} (что явствует из (245) ввиду того, что заряд электрона $e < 0$), то направление прецессии электрона со-

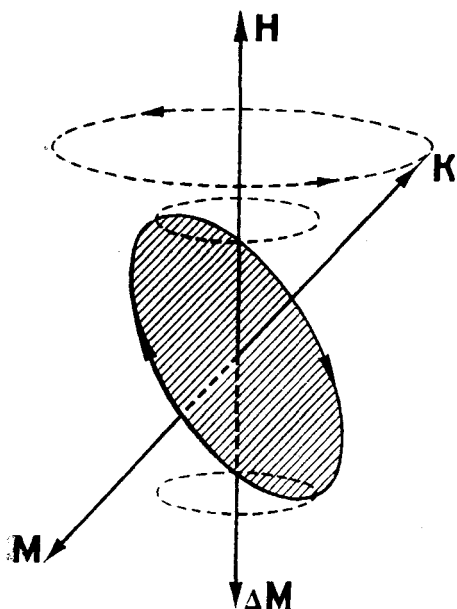


Рис. 76.

составляет с вектором \mathbf{H} правовинтовую систему. Следовательно, направление „добавочного“ тока $\Delta\mathbf{J}$, эквивалентного этому прецессионному движению отрицательного электрона, будет составлять с вектором \mathbf{H} левовинтовую систему. Стало быть, добавочный магнитный

¹ Заметим, что оптически эта прецессия сказывается в так называемом эффекте Зеемана, заключающемся в расщеплении спектральных линий в магнитном поле.

момент ΔM будет направлен против поля H (см. рис. 76). Таким образом результирующий магнитный момент всех атомов, находящихся в единице объема газа, т. е. намагничение газа I , будет направлено против поля; иными словами, магнитная восприимчивость газа χ будет отрицательной, а газ — диамагнитным.

Итак, электронная теория магнетизма позволяет весьма просто объяснить явления диамагнетизма, совершенно не поддающиеся истолкованию на основе гипотезы магнитных диполей¹, и сводит эти явления к прецессии электронных орбит в магнитном поле.

Все изложенное остается вполне применимым и в том случае, если в состав атома входит не один, а несколько электронов. Действительно, согласно (245) угловая скорость прецессии ω электронных орбит вовсе не зависит от их формы и размера; стало быть, в магнитном поле совокупность орбит всех электронов атома будет прецессировать как одно целое с тою же скоростью ω , как если бы каждая орбита была независима от других.

Численное значение диамагнитной восприимчивости газа может быть определено следующим образом. Пусть ρ есть среднее за время одного оборота по орбите расстояние электрона от параллельной вектору H оси прецессии, проходящей через ядро атома. Добавочный магнитный момент ΔM , создаваемый прецессией электрона, можно считать равным магнитному моменту электрона, обращающегося около оси прецессии с угловой скоростью ω . Полагая соответственно этому в формуле, приведенной на стр. 301, $S = \pi \rho^2$, а период прецессии T равным $\frac{2\pi}{\omega}$, получим:

$$\Delta M = \frac{eS}{cT} = \frac{e\rho^2\omega}{2c} = \frac{e^2}{4mc} H \rho^2.$$

Так как вектор ΔM по доказанному направлен обратно вектору H , то намагничение I единицы объема будет равно:

$$I = N \cdot \Delta M = -N \frac{e^2 H}{4mc^2} \overline{\rho^2},$$

где N есть число атомов в единице объема газа, а черта над ρ^2 означает среднее значение этой величины для всех N атомов газа. Стало быть, магнитная восприимчивость газа χ , согласно (217), окажется равной:

$$\chi = \frac{I}{H} = -\frac{Ne^2}{4mc^2} \overline{\rho^2}. \quad 246$$

¹ Ибо, став на точку зрения этой гипотезы, мы должны были бы допустить, что магнитные диполи в диамагнетиках поворачиваются против действующих на них сил магнитного поля.

Если же в состав атома входит не один, а несколько (например, n) электронов, то восприимчивость χ будет, очевидно, равна:

$$\chi = - \frac{N e^2}{4 m c^2} \sum_{i=1}^{i=n} r_i^2, \quad (246)$$

где r_i есть среднее расстояние i -го электрона от оси прецессии.

Заметим, что диамагнитная восприимчивость χ всегда весьма мала по сравнению с единицей. Чтобы оценить порядок ее величины, положим в (246) $\rho = 0,5 \cdot 10^{-8}$ см (что соответствует, примерно, радиусу орбиты электрона в водородном атоме) и $N = 2,7 \cdot 10^{19}$ (число молекул в 1 см³ газа при 0° С и нормальном давлении). Воспользовавшись, кроме того, известными значениями универсальных постоянных e , m и c , получим:

$$\chi = - 5 \cdot 10^{-11},$$

что действительно соответствует порядку величины экспериментально определенных значений восприимчивости диамагнитных газов.

4. Из вышеизложенного следует, что если в состав всех атомов и молекул входят движущиеся электроны, то все они должны обладать диамагнитными свойствами. Как же, однако, в таком случае объяснить существование парамагнитных веществ¹ и, в частности, парамагнитных газов (таковы газы O₂ и NO)? Все дело в том, что в парамагнитных телах неизбежный, но весьма слабый диамагнитный эффект прецессии электронных орбит маскируется значительно более сильным парамагнитным эффектом, обусловленным упорядочивающим воздействием магнитного поля на ориентацию магнитных осей атомов. Правда, мы убедились, что наклон орбиты электрона к направлению поля не должен изменяться при возникновении или возрастании поля. Однако это справедливо лишь постольку, поскольку мы до сих пор в сущности ограничивались рассмотрением свободных или изолированных атомов или молекул, и вовсе не учитывали взаимодействия молекул. В случае идеального газа взаимодействие молекул сводится к соударениям их между собой. Что существенно нового приносит учет этих соударений?

При каждом соударении направление оси молекул будет, вообще говоря, изменяться, причем, как мы сейчас покажем, в результате воздействия магнитного поля после достаточного числа соударений получатся

¹ Рассмотрение ферромагнетиков откладываем до конца параграфа.

преобладание направления осей, приближающиеся к направлению поля H . А это и значит, что газ намагнитится в направлении поля (парамагнитный эффект).

Акт соударения молекул настолько сложен, что мы не можем проследить его во всех деталях. Однако мы можем учесть влияние соударений, прибегнув к помощи общих принципов статистической механики. В § 23, при рассмотрении поляризации диэлектриков с твердыми диполями, нам уже пришлось воспользоваться так называемой теоремой Больцмана в ее применении к консервативному полю сил. Теорема эта может быть сформулирована в более общей форме так, чтобы она была применима и к неконсервативному полю сил (в нашем случае к полю магнитному). В этой форме теорема Больцмана гласит: закон распределения молекул по различным состояниям в случае наличия внешнего поля сил отличается от закона их распределения в отсутствие этого поля множителем $e^{-\frac{\Delta U}{kT}}$, где ΔU есть зависящее от состояния молекулы приращение ее внутренней (потенциальной или кинетической) энергии в рассматриваемом поле сил, T — абсолютная температура и, наконец, k — универсальная постоянная Больцмана ($k = 1,37 \cdot 10^{-16} \frac{эрг}{град}$). Иными словами, теорема Больцмана утверждает, что вероятность данного состояния молекулы тем больше, чем меньше его энергия, что находится в непосредственной связи с тенденцией всех видов энергии переходить в энергию тепловую.

Мы применим теорему Больцмана к вычислению распределения магнитных осей одноатомных молекул газа по различным направлениям.

Конечно, необходимым условием применимости теоремы Больцмана является самая возможность изменения состояния молекул (в данном случае направления их осей) при возбуждении поля (в данном случае магнитного). Как мы видели, направление осей молекул может изменяться лишь при наличии взаимодействия (в частности, соударения) молекул; в противном случае теорема Больцмана была бы не применима.

Прежде всего нам нужно определить изменение ΔU энергии атома в магнитном поле¹. Изменение это сводится очевидно к изменению

¹ Силы магнитного поля перпендикулярны скорости электрона и потому никакой работы не совершают (см. §§ 37 и 46). Однако всякое изменение напряженности магнитного поля, в частности, возникновение этого поля, возбуждает поле электрическое (см. § 49). Работой сил этого электрического поля и обуславливается изменение энергии электрона при возбуждении поля магнитного.

кинетической энергии электронов, обусловленному возникновением прецессии их орбит; благодаря прецессии электрон приобретает добавочную линейную скорость

$$\mathbf{v}' = [o\mathbf{R}],$$

где \mathbf{R} есть радиус-вектор, проведенный к электрону из ядра атома. Стало быть, если \mathbf{v}_0 есть скорость электрона до возникновения поля, то приращение кинетической энергии атома при возникновении поля равно

$$\Delta U = \frac{m}{2} \sum \{(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}')^2 - \mathbf{v}_0^2\} = \frac{m}{2} \sum (2\mathbf{v}_0\mathbf{v}' + \mathbf{v}'^2),$$

где m есть масса электрона, причем суммирование должно быть распространено на все электроны, входящие в состав атома. Пренебрегая квадратом добавочной скорости \mathbf{v}' , вообще говоря, весьма малой по сравнению со скоростью \mathbf{v}_0 , получим:

$$\Delta U = m \sum \mathbf{v}_0\mathbf{v}' = m \sum \mathbf{v}_0[o\mathbf{R}] = m \sum [\mathbf{R}\mathbf{v}_0] o = o \sum m [\mathbf{R}\mathbf{v}_0].$$

Но, согласно (242),

$$\sum m [\mathbf{R}\mathbf{v}_0] = \sum \mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_{орез},$$

где $\mathbf{K}_{орез}$ есть значение, которым обладал результирующий момент количества движения всех электронов атома до возникновения прецессии. Стало быть, согласно (243') и (245),

$$\Delta U = o \mathbf{K}_{орез} = \frac{2mc}{e} o \mathbf{M}_{рез} = - \mathbf{H} \mathbf{M}_{рез},$$

где $\mathbf{M}_{рез}$ есть то значение, которым обладал результирующий магнитный момент всех электронов атома до возникновения магнитного поля (иными словами, в $\mathbf{M}_{рез}$ не учитывается добавочный момент $\Delta\mathbf{M}$, обусловленный прецессией электронов в магнитном поле).

5. Эта добавочная кинетическая энергия ΔU , приобретаемая атомом в магнитном поле благодаря прецессии электронов, в точности равна потенциальной энергии, которой обладал бы в этом поле твердый магнитный диполь того же момента $\mathbf{M}_{рез}$ (сравни 92'). С другой стороны, теорема Больцмана применима вне зависимости от того, является ли добавочная энергия ΔU , приобретаемая атомом или дипо-

Конечно, ни о какой потенциальной энергии электрона в неконсервативном магнитном поле не может быть речи.

лем во внешнем поле, кинетической или потенциальной. Стало быть, при определении распределения направлений осей атомов газа, в состав которых входят движущиеся электроны, мы можем воспользоваться всеми результатами теории твердых диполей, изложенной в § 23. С этой целью достаточно, очевидно, заменить в формулах § 23 электрические величины (E , P , α , p) соответствующими магнитными (H , I , χ , $M_{\text{рез}}$). Таким образом мы непосредственно приходим к выводу, что в магнитном поле получают преобладание те направления магнитных осей атомов, которые близки к направлению поля (положительное намагничение, парамагнетизм). Далее по аналогии с формулой (122')

$$\alpha = \frac{Np^2}{3kT},$$

определяющей поляризуемость диэлектрика с твердыми диполями, получим для магнитной восприимчивости парамагнетиков χ выражение:

$$\chi = \frac{NM^2_{\text{рез}}}{3kT}; \quad 247$$

из этого выражения следует, что восприимчивость парамагнетиков должна изменяться обратно пропорционально абсолютной температуре. Этот характер зависимости χ от T был экспериментально обнаружен П. Кюри еще до разработки соответствующей теории и носит название закона Кюри.

Из (247) следует далее, что парамагнитная восприимчивость χ пропорциональна результирующему магнитному моменту атома (или молекулы) и равна нулю, если этот момент $M_{\text{рез}}$ равен нулю¹.

По аналогии с результатами изучения поляризации диэлектриков с твердыми диполями мы должны заключить, что при достаточно силь-

¹ Заметим, что согласно Боровской теории атома $M_{\text{рез}}$ может быть либо равным нулю, либо в противном случае должно обладать величиной порядка 10^{-20} абсолютных единиц. Подставляя это значение в (247) и внося в него, кроме того значения $N = 2,7 \cdot 10^{19}$, $T = 273^\circ$ и $k = 1,37 \cdot 10^{-16}$ (сравни стр. 306), найдем, что восприимчивость парамагнитных газов при нормальной температуре и давления должна быть порядка:

$$\chi \sim 2,5 \cdot 10^{-7},$$

т. е. должна в тысячи раз превышать их отрицательную диамагнитную восприимчивость (см. стр. 30). Экспериментальные данные для O_2 ($\chi = 1,4 \cdot 10^{-7}$) и NO ($\chi = 0,6 \cdot 10^{-7}$) действительно имеют ожидаемый порядок величины.

ных полях и низких температурах (когда $a = \frac{HM_{рез}}{kT}$ становится сравнимым с единицей, сравни стр. 142) должно наблюдаться насыщение намагничения парамагнетиков, заключающееся в нарушении пропорциональности между I и H , причем при возрастании поля I стремится к некоторому постоянному пределу $I_{нас}$. Это максимально возможное значение намагничения соответствует установке магнитных осей всех атомов по направлению поля H .

Явления частичного (до 84%) насыщения намагничения действительно наблюдались, например, при намагничении порошка сернокислого гадолиния (Каммерлинг-Оннес, температура жидкого гелия), причем зависимость I от H вполне соответствовала ожиданиям теории (см. задачу 36 в конце этого параграфа).

В связи с этим существенно отметить, что изложенная теория, как показывают результаты экспериментальных исследований, оказывается применимой не только к газообразным, но и к жидким и твердым¹ диа- и парамагнетикам, в которых взаимодействие атомов и молекул не ограничивается их взаимными столкновениями.

Резюмируем. В атомах всех веществ прецессия электронной орбиты всегда вызывает диамагнитный эффект (отрицательное намагничение). Однако этот эффект весьма слаб (χ порядка $— 5 \cdot 10^{-11}$) и может полностью маскироваться противоположным по знаку и значительно более сильным парамагнитным эффектом, обусловленным поворотом магнитных осей атомов по направлению поля. Необходимые условия для возникновения этого парамагнитного эффекта состоят в отличии результирующего магнитного момента атома от нуля и в наличии взаимодействия (в частности, столкновений) между атомами (ибо при отсутствии взаимодействия атомов угол наклона их осей к направлению поля остается неизменным). Последнее условие, вообще говоря, всегда выполняется², так что диамагнитность и парамагнитность вещества зависят от того, равен ли или не равен нулю $M_{рез}$ его атомов или молекул.

¹ Восприимчивость их, вообще говоря, значительно больше восприимчивости газов, так что в большинстве случаев при изучении твердых и жидких парамагнетиков приходится принимать во внимание отличие среднего «действующего на молекулу» поля H' от среднего макроскопического поля H ; сравни § 23.

² Однако, если поместить парамагнитный газ в столь быстро переменное магнитное поле, чтобы за время среднего свободного пробега молекулы между двумя столкновениями направление поля успевало бы изменяться на обратное, то соударения не успевали бы изменять направление осей молекулы в такт с изменениями поля и парамагнитный газ должен был бы оказаться диамагнитным.

6. Закончим этот параграф несколькими замечаниями о природе ферромагнетизма. Как уже упоминалось в § 39, до сих пор еще не существует сколько-нибудь полной и удовлетворительной не только электронной, но хотя бы и феноменологической теории ферромагнитных явлений. Несомненно только, что намагничение ферромагнетиков, как и намагничение парамагнетиков, сводится к установке магнитных осей атомов или молекул в направлении намагничения, причем своеобразие ферромагнитных явлений обуславливается весьма значительным взаимодействием смежных атомов и молекул ферромагнетика. Можно, однако, убедиться в том, что силы этого взаимодействия не сводятся, или во всяком случае не полностью сводятся, к силам магнитным. В связи с этим весьма существенное значение приобретает тот факт, что ферромагнетизм наблюдается лишь в кристаллическом состоянии вещества, в частности в состоянии микрокристаллическом, в каком находятся сталь, обыкновенное железо, различные сплавы и т. д.¹ Нужно думать, что взаимодействие атомов, обуславливающее ферромагнетизм, связано с особенностями кристаллического строения ферромагнетиков. Однако связь эта должна носить весьма сложный характер ибо, например, при нагревании железа оно теряет ферромагнитные свойства и становится парамагнитным при 774° (так называемая точка Кюри), тогда как строение кристаллической решетки железа испытывает изменение лишь при 906° (переход из β - в γ -модификацию).

Тем не менее выяснения физической природы ферромагнетизма можно ожидать лишь от успехов изучения природы сил взаимодействия атомов, входящих в состав кристаллических решеток твердых тел

7. Ввиду фундаментального значения формулы (245) мы приведем здесь частично помимо данного выше также и второй, более строгий вывод этой формулы. Прежде всего докажем, что если в отсутствие внешнего поля \mathbf{H} электрон, двигаясь в поле центральных сил, описывает некоторую определенную орбиту L , то при включении поля \mathbf{H} возможно движение электрона по орбите L' , в первом приближении отличающейся от исходной орбиты L только тем, что она равномерно прецессирует вокруг направления \mathbf{H} с угловой скоростью ω , определяемой формулой (245). При этом как форма орбиты и наклон ее к направлению поля \mathbf{H} , так и скорость движения электрона по орбите остаются неизменными.

¹ Ingersall и Vinney (Phys. Rev. 26, 86, 1925) получили путем катодного распыления тонкие пленки никеля, которые оказались лишенными ферромагнитных свойств. Рентгеновский анализ показал, что пленки эти обладают аморфным строением; после нагревания они приобретали обычное кристаллическое строение и одновременно с этим обычные ферромагнитные свойства.

Предположим, что ядро атома либо покоится, либо движется равномерно (по отношению к инерциальной системе координат), так что с ядром можно неподвижно связать инерциальную систему координат S . Помимо этой системы введем в рассмотрение еще другую систему координат S' с началом в ядре атома, вращающуюся вокруг направления \mathbf{H} со скоростью ω ; относительно S' орбита L' будет находиться в покое. Так как S' вращается, то для поддержания движения электрона по L' не будет уже достаточно центральных сил, поддерживавших его движение по неподвижной орбите L ; необходимо будет еще уравновесить силы инерции, а именно силу центробежную \mathbf{F}_c и силу Кориолиса (поворотную) \mathbf{F}_k . Если r есть расстояние электрона от оси вращения, проходящей через ядро и параллельной \mathbf{H} , то силы эти соответственно равны:

$$\mathbf{F}_c = m\omega^2 r \text{ и } \mathbf{F}_k = 2m[\mathbf{v}'\omega],$$

где

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - [\omega\mathbf{r}]$$

есть (относительная) скорость электрона в системе S' , а \mathbf{v} — его (абсолютная) скорость в системе S . Во всех практически осуществимых случаях

$$\omega r \ll v.$$

Поэтому в первом приближении можно ограничиться рассмотрением величин первого порядка относительно ω , т. е. можно вовсе пренебречь центробежной силой \mathbf{F}_c , а в выражении для Кориолисовой силы заменить \mathbf{v}' через \mathbf{v} :

$$\mathbf{F}_k = 2m[\mathbf{v}\omega].$$

Движение электрона по прецессирующей орбите L' возможно в том случае, если эта сила \mathbf{F}_k уравновешивается некоторой другой силой. Но в магнитном поле \mathbf{H} на электрон действует Лорентцова сила (213):

$$\mathbf{F}_L = \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}].$$

Стало быть, движение по орбите L' в поле \mathbf{H} возможно в том случае, если

$$\mathbf{F}_k + \mathbf{F}_L = 0,$$

т. е. если

$$2m[\mathbf{v}\omega] + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}] = 0,$$

откуда

$$o = -\frac{e}{2mc} \mathbf{H},$$

что полностью совпадает с формулой (245).

Итак, мы показали, что в магнитном поле возможно движение электронов по прецессирующим орбитам L' . Необходимо, однако, еще доказать, что эта возможность действительно осуществляется, т. е. что при включении магнитного поля \mathbf{H} каждый электрон, обращавшийся по некоторой орбите L , действительно продолжает двигаться по той же орбите, приобретшей лишь прецессионное вращение o . Для доказательства этого положения проще всего воспользоваться так называемой теорией адиабатических инвариантов, разработанной в последнее время в связи с развитием теории квантов. Мы этого доказательства приводить здесь не будем¹.

Задача 36. — Применяя, с соответствующим изменением обозначений, формулу (120) к намагничению парамагнетиков, полагая в ней $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$, но не пользуясь упрощающим предположением $a = \frac{H M_{рез}}{kT} \ll 1$, показать, что намагничение I определяется формулой Ланжевена:

$$I = NM_{рез} \left(\coth \mu a - \frac{1}{a} \right),$$

где

$$\coth \mu a = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}},$$

а a равно

$$a = \frac{M_{рез} H}{kT}.$$

Показать далее, что при малых H (т. е. при $a \ll 1$) эта формула принимает вид:

$$I = \chi H,$$

где χ определяется формулой (247), и что намагничение насыщения $I_{нас}$ равно:

$$I_{нас} = \lim_{H \rightarrow \infty} I = NM_{рез}.$$

¹ Его можно, например, найти в книге Зоммерфельда, *Atombau und Spektrallinien*.

§ 45. Магнито-механические явления. Гипотеза вращающегося электрона. — 1. Помимо явлений диамагнетизма есть еще одна группа связанных с намагничиванием явлений, которая свидетельствует в пользу электронной теории магнетизма и против теории магнитных диполей. Это так называемые магнито-механические или гиромагнитные явления, состоящие, во-первых, в том, что при намагничивании пара- или ферромагнитных тел тела эти приходят во вращательное движение вокруг направления намагничивания и, во-вторых, в том, что при вращении этих тел в них возникает намагничение, параллельное оси вращения. Обуславливаются эти явления тем, что, как явствует из (243'), магнитный и механический моменты каждого атома пропорциональны друг другу. Поэтому намагничение вещества, т. е. появление результирующего магнитного момента единицы объема, связано с появлением соответствующего момента количества движения и обратно.

Рассмотрим сначала момент количества движения какого-либо атома относительно какой-либо неподвижной (относительно инерциальной системы) точки O . Как известно из механики, момент количества движения системы материальных точек (в нашем случае атома) равен сумме того момента количества движения, которым обладала бы система, если бы вся ее масса была сосредоточена в ее центре инерции, и того момента количества движения, который соответствует движению точек системы относительно ее центра инерции. Центр инерции атома можно считать совпадающим с его ядром. Поэтому общий момент количества движения атома \mathbf{K} будет равен сумме момента \mathbf{K}_a , соответствующего движению центра инерции (т. е. ядра) атома, и момента $\mathbf{K}_{рез}$, соответствующего движению электронов относительно ядра:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_a + \mathbf{K}_{рез};$$

общий же момент количества движения единицы объема тела будет равен:

$$\sum \mathbf{K} = \sum \mathbf{K}_a + \sum \mathbf{K}_{рез},$$

где знак \sum означает суммирование по всем атомам, находящимся в единице объема. Приняв во внимание связь (243) между механическим и магнитным моментами движущихся в атоме электронов, и обозначая отношение этих моментов через γ :

$$\frac{\mathbf{K}_{рез}}{\mathbf{M}_{рез}} = \frac{2mc}{e} = \gamma,$$

получим:

$$\sum \mathbf{K} = \sum \mathbf{K}_a + \eta \sum \mathbf{M}_{рез} = \sum \mathbf{K}_a + \eta \mathbf{I},$$

ибо $\sum \mathbf{M}_{рез}$ по определению равна намагничению тела¹.

Рассмотрим теперь процесс намагничивания пара- и ферромагнетиков. Непосредственное воздействие магнитного поля на электронные орбиты вызывает лишь прецессию этих орбит, диамагнитным эффектом которой ввиду его малости мы пренебрежем. Изменение же направлений магнитных осей атомов, являющееся причиной парамагнитного намагничивания, происходит как мы видели лишь при соударении атомов, или, общее говоря, при наличии взаимодействия между атомами. Лишь под влиянием этого взаимодействия и происходит поворот осей атомов по направлению поля \mathbf{H} , т. е. изменение направления как магнитного $\mathbf{M}_{рез}$, так и непосредственно связанного с ними механического $\mathbf{K}_{рез}$ момента электронов, входящих в состав атомов. Так как при взаимодействии атомов должен выполняться закон сохранения момента количества движения, то сумма $\sum \mathbf{K}$ должна оставаться постоянной и изменение $\sum \mathbf{K}_{рез}$ должно компенсироваться соответствующим изменением $\sum \mathbf{K}_a$.

Предположим, что до намагничивания не только $\sum \mathbf{K}_{рез}$, но и $\sum \mathbf{K}_a$, а стало быть, и $\sum \mathbf{K}$ равнялись нулю. В этом случае, согласно последнему из приведенных уравнений, возникновение пропорционального $\sum \mathbf{K}_{рез}$ намагничивания \mathbf{I} должно сопровождаться одновременным возникновением момента $\sum \mathbf{K}_a$, равного

$$\sum \mathbf{K}_a = -\eta \mathbf{I}. \quad 249$$

Предположим далее, что намагничиванию подвергается твердый пара- или ферромагнетик. Атомы твердого тела не могут двигаться порознь, и наличие момента количества движения атомов тела $\sum \mathbf{K}_a$ означает в этом случае вращение всего тела в целом. Угловая скорость вращения ω , которую должно приобрести тело при возникновении намагничивания \mathbf{I} , определяется из равенства:

$$\sum \mathbf{K}_a = Q\omega = \eta \mathbf{I}, \quad 249'$$

¹ Движение атома в целом ($\sum \mathbf{K}_a$) не создает магнитного поля, если атом нейтрален (не ионизирован).

где Q есть момент инерции тела относительно оси, параллельной направлению намагничивания и проходящей через центр инерции тела. Стало быть, если намагничивать, например, свободно подвешенный железный стерженек, то стерженек этот должен приобрести вращение вокруг оси намагничивания с угловой скоростью ω (эффект Эйнштейна-де Хааса). Так как ω , Q и I могут быть непосредственно измерены, то уравнение (249') дает возможность определить отношение механического и магнитного моментов электрона η ¹.

Легко показать, что и обратно, если привести стерженек в быстрое вращение, то в нем должно возникнуть намагничение, величина которого зависит от скорости вращения и от η (эффект Барнетта). Не останавливаясь подробно на теории этого эффекта заметим только, что оно вполне аналогично следующему известному механическому явлению: если укрепить на подставке жироскоп (которому в нашем случае соответствуют электронные орбиты) и привести подставку (кристаллический скелет твердого тела) во вращение, то ось вращения жироскопа будет стремиться установиться по направлению оси вращения подставки (чему в нашем случае соответствует намагничивание).

Ряд экспериментальных исследований подтвердил существование предсказанных электронной теорией магнито-механических эффектов. Так как эти явления совершенно необъяснимы с точки зрения гипотезы магнитных диполей, то можно сказать, что эти исследования принесли с собой непосредственное доказательство гипотезы молекулярных токов Ампера. Далее они подтвердили, что магнетизм обуславливается движением отрицательных электрических зарядов (электронов), ибо значение определяемого уравнением (247) коэффициента оказалось отрицательным (положительное направление оси вращения тела оказалось совпадающим с направлением его намагничивания; сравни уравнение 249).

Что же касается численной величины отношения механического и магнитного моментов электронов η , теоретическое значение которого можно, согласно, (248) определить по известным значениям универсальных постоянных m , e и c , то результаты первых измерений магнито-механических эффектов совпали с ожиданиями теории. Однако последующие более точные измерения с несомненностью установили, что

¹ Практически опыт ставится следующим образом: стерженек подвешивается на ниточке так, что его ось совпадает с осью катушки, обтекаемой переменным током. Ток этот периодически перемагничивает стерженек, сообщая ему при этом каждый раз определенный момент вращения $\sum K_a$. Зная Q , I и крутильную упругость нити можно по амплитуде крутильных колебаний стерженька определять η .

для всех исследованных ферромагнетиков¹ (железо, сталь, кобальт, никель, сплавы Гейсслера) η имеет величину, ровно в два раза меньшую той, которая соответствует формуле (248).

2. Эта „аномалия“ магнито-механических эффектов долгое время оставалась совершенно необъяснимой, пока в конце 1925 г. голландские ученые Гаудсмит и Юленбек (Goudsmith и Uhlenbeck) не выдвинули так называемой гипотезы вращающегося электрона, которая состоит в следующем. Обычно электрон считается наделенным двумя и только двумя основными свойствами: определенным зарядом e и определенной массой m ². Согласно же гипотезе Гаудсмита-Юленбека, каждый электрон неизменно обладает помимо того некоторым постоянным механическим моментом K' и магнитным моментом M' , причем

$$K' = \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$$

и

$$M' = \frac{e \cdot h}{2mc \cdot 2\pi} = \frac{e}{mc} K',$$

где h есть так называемая универсальная постоянная Планка ($h = 6,55 \cdot 10^{-27} \frac{\text{эрг} \cdot \text{сек}}{\text{сек}}$).

Можно, например, представить себе, что каждый электрон неизменно вращается с постоянною угловою скоростью около некоторой оси, проходящей через его центр инерции, так что магнитный момент M' создается движением элементов заряда электрона по концентрическим окружностям. Правда, с этим наглядным или „модельным“ истолкованием гипотезы Гаудсмита и Юленбека не согласуются или трудно согласуются соотношения, существующие между численными значениями величин e , m , K' и M' . Однако, если оставить в стороне вопрос о подобного рода наглядных истолкованиях гипотезы и лишь условно говорить о „вращении“ электрона, то приписав электрону свойство обладать моментами K' и M' , мы получаем возможность неожиданно простым образом устранить целый ряд серьезных противоречий, накопившихся в теории атома. К числу их относятся не только упомянутая „аномалия“ магнито-механических эффектов, но и „аномалия“ эффекта Зеемана (аномальное расщепление спектральных линий в магнитном поле), ряд вопросов связанных

¹ Опыты с парамагнетиками не производились потому, что намагничивание их слишком слабо, так что магнито-механические эффекты не поддаются измерению.

² Вопрос о том, можно ли массу электрона считать вторичным свойством, определяемым его размерами, формой и зарядом, будет рассмотрен во II томе.

с мультиплетной (кратной) структурой оптических и рентгеновых спектров химических элементов, с так называемой тонкой структурой спектров водорода и ионизированного гелия (релятивистская поправка) и т. д.

Большинство этих затруднений может быть весьма просто разрешено, если помимо единственно принимавшихся во внимание механического и магнитного моментов K и M , соответствующих обращению электрона вокруг ядра атома, учесть также и моменты K' и M' , соответствующие вращению электрона вокруг его собственной оси¹. Успехи гипотезы вращающегося электрона в этом направлении столь велики, что несмотря на короткий срок, протекший со времени появления работы Гаудсмита и Юленбека, гипотеза эта в настоящее время может считаться общепризнанной. Разумеется применение ее к атомным процессам возможно лишь на основе квантовой механики, ввиду чего мы принуждены воздержаться здесь от дальнейших подробностей.

Заметим лишь, что и свободные, отщепленные от атомов электроны (напр., электроны в катодных лучах) должны очевидно обладать тем же моментом K' и M' , как и электроны в атомах. Однако в практически доступных электромагнитных полях влияние этого обстоятельства на движение свободных электронов должно быть весьма незначительным и пока на опыте обнаружено не было.

*

¹ Таким образом гипотеза Гаудсмита-Юленбека углубляет аналогию между атомом и солнечной системой; вращение электрона соответствует суточному вращению земли вокруг ее оси.

VI. КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ.

*

§ 46. Индукция токов в замкнутых контурах. — Выяснив основные свойства стационарного электромагнитного поля, напряженность которого от времени не зависит, перейдем к изучению поля переменного. Обращаясь прежде всего к изучению индукции токов, мы изложим предварительно ряд соображений, которые помогут нам уяснить природу этих явлений и связать их с уже известными нам фактами.

1. Рассмотрим какой-либо замкнутый неподвижный¹ металлический проводник L_1 , к которому не приложено сторонних электродвижущих сил, так что тока в нем нет. Пусть этот проводник находится в магнитном поле \mathbf{H} некоторого постоянного тока J_2 , циркулирующего по неподвижному контуру L_2 . Предположим далее, что воздействуя извне на проводник L_1 (например взяв его рукой) мы сообщаем ему некоторую скорость \mathbf{v} , и примем во внимание, что проводник этот, как и всякое материальное тело, состоит из совокупности элементарных электрических зарядов.

Согласно (213) произвольный электрический заряд e , движущийся в поле \mathbf{H} со скоростью \mathbf{v} , подвергается воздействию Лорентцовой силы \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]. \quad (213)$$

С точки зрения элементарной теории проводимости металлов (§ 29) все заряды проводника могут быть подразделены на два класса — на заряды ионов, образующих твердый кристаллический скелет вещества, и на „свободные“ электроны, движущиеся в промежутках между этими ионами. Так как ионы предполагаются неподвижно связанными между собой, то приложенные к ним Лорентцовы силы будут уравновешиваться реакцией руки, движущей проводник. Что же касается

¹ Относительно инерциальной системы отсчета см. ниже.

свободных электронов, то под воздействием силы \mathbf{F} они придут в движение в направлении, перпендикулярном как полю \mathbf{H} , так и направлению движения проводника \mathbf{v} ¹. Так например, в отрезке AB проводника L_1 (рис. 77) Лорентцова сила, приложенная к отрицательным

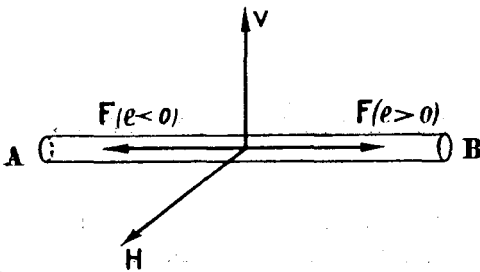


Рис. 77.

электронам ($e < 0$), будет гнать их по проводнику влево. Стало быть, в проводнике возникнет электрический ток. Так как направление тока условно считается обратным направлению движения отрицательных зарядов, то ток этот окажется текущим слева направо. В этом состоит явление индукции токов при движении проводника в магнитном

поле, которое таким образом получает весьма простое истолкование на основе ранее установленных нами законов постоянного поля.

2. Постараемся подсчитать силу индукционного тока. С этой целью заметим, что сила (213), испытываемая в магнитном поле \mathbf{H} электроном, движущимся со скоростью \mathbf{v} , эквивалентна силе, испытываемой электроном в электрическом поле напряженности \mathbf{E}' :

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]. \quad 250$$

Из второго закона Киргоффа следует, что под воздействием поля \mathbf{E}' , а стало быть, и под воздействием эквивалентного \mathbf{E}' поля \mathbf{H} , в замкнутом контуре L_1 должен возникнуть ток, сила которого \mathcal{J} определится из уравнения (156):

$$\mathcal{J}R = \oint_{L_1} \mathbf{E}' ds = \mathcal{E}^{ind}, \quad 251$$

где R есть сопротивление контура L_1 , а через \mathcal{E}^{ind} обозначена циркуляция вектора \mathbf{E}' по контуру L_1 . Эта последняя величина по-

¹ Конечно, и при отсутствии тока в проводнике свободные электроны в нем находятся в непрерывном тепловом движении. Однако этого обстоятельства мы вправе не принимать во внимание, ибо направления ponderomotorных сил, испытываемых в магнитном поле отдельными электронами при их тепловом движении, будут распределены по закону случая, и стало быть никакого тока, т. е. упорядоченного движения электронов, вызывать не будут.

сит название электродвижущей силы индукции; согласно (250) она равна:

$$\mathcal{E}^{ind} = \frac{1}{c} \oint_{L_1} [\mathbf{vH}] ds = -\frac{1}{c} \oint_{L_1} \mathbf{v} [ds \mathbf{H}],$$

где последнее равенство написано на основании известного тождества векторной алгебры $[\mathbf{ab}] \mathbf{c} = -\mathbf{a} [\mathbf{cb}]$.

Чтобы определить значение последнего интеграла, заметим, что $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$, где $d\mathbf{R}$ есть перемещение элемента ds контура L_1 за время dt . Стало быть,

$$\mathcal{E}^{ind} = -\frac{1}{c} \oint \frac{d\mathbf{R}}{dt} [ds \mathbf{H}]. \quad 252$$

С другой стороны, из сравнения уравнения (197), стр. 245, с выражением для δA , приведенным на стр. 244, следует, что

$$\oint \delta \mathbf{R} [ds \mathbf{H}] = \delta \Phi = \delta \int H_n dS,$$

где $\delta \mathbf{R}$ есть виртуальное перемещение элемента ds контура тока ранее обозначавшееся через \mathbf{q} , а $\delta \Phi$ есть обусловленное этим перемещением изменение магнитного потока Φ сквозь этот контур.

Заменяя в последнем уравнении $\delta \mathbf{R}$ через $d\mathbf{R}$ и сравнивая его с (252), получим:

$$\mathcal{E}^{ind} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int H_n dS. \quad 253$$

Это уравнение выражает собой известный закон индукции токов в движущихся проводниках: возникающая в проводнике электродвижущая сила индукции равна деленной на c скорости изменения потока магнитного вектора через контур этого проводника. Знак минус в уравнении (253) означает, что если магнитный поток через контур проводника численно увеличивается, то направление Э. Д. С. индукции в этом контуре составляет с направлением потока лево-

винтовую, а не правовинтовую систему. Обратное, при уменьшении Φ направления Φ и \mathcal{E}^{ind} составляют правовинтовую систему.

Из (253) следует, в частности, что если замкнутый проводник движется в магнитном поле так, что магнитный поток Φ через его контур остается постоянным, то несмотря на движение ток в проводнике все же индуцироваться не будет. К этому же выводу в ряде частных случаев можно прийти непосредственно из (213). Пусть например плоский контур L_1 движется в поле \mathbf{H} так, что его плоскость неизменно остается параллельной \mathbf{H} . В этом случае Φ неизменно равно нулю и, стало быть, согласно (253), \mathcal{E}^{ind} тоже равно нулю. Непосредственно же из (213) или (250) следует, что ponderomotorная Лорентцова сила направлена перпендикулярно к \mathbf{v} и \mathbf{H} , т. е. в нашем случае перпендикулярно к плоскости контура, и, стало быть, не может вызывать движения электронов вдоль контура, т. е. не может возбудить тока.

Рассмотрим далее случай поступательного движения твердого проводящего контура $ABCD$ (рис. 78) в однородном магнитном поле (\mathbf{H} одинаково во всех точках поля); в этом случае все точки контура обладают одинаковой скоростью \mathbf{v} . Очевидно, что поток Φ через контур проводника при этих условиях изменяться не будет, и что, стало быть, \mathcal{E}^{ind} будет равно нулю. Непосредственно же из постоянства векторов \mathbf{H} и \mathbf{v} следует, что в параллельных сторонах проводника AB и CD электроны будут испытывать одинаковые по величине и направлению силы \mathbf{E}' . Силы эти будут стремиться вызвать циркуляцию электронов (ток) по проводнику во взаимно противоположных направлениях, и стало быть, действия их взаимно уравниваются.

3. До сих пор мы считали контур L_1 движущимся, а контур L_2 , в котором циркулирует ток, возбуждающий магнитное поле, неподвижным. Но ведь понятия покоя и движения относительны и имеют смысл лишь при указании системы отсчета. Какой же системой отсчета нужно пользоваться при определении положения контуров L_1 и L_2 , чтобы к ним были применимы предшествующие рассуждения? Вопрос этот сводится, очевидно, к более общему вопросу о том, в какой или

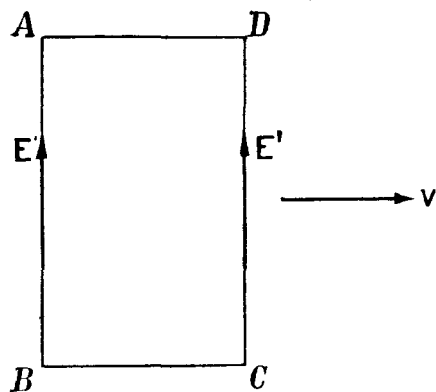


Рис. 78.

в каких системах отсчета справедливы изложенные нами в предшествующих главах законы электродинамики.

Законы эти были установлены на основании экспериментов, при которых, как и в большинстве физических экспериментов, отсчет движения производился относительно земли. Однако более точные измерения показали, что законы электродинамики¹, как и законы Ньютоновой механики (опыт с маятником Фуко!), лишь приближенно справедливы в земной системе отсчета и строго справедливы лишь в так называемых инерциальных системах отсчета, т. е. в системах, в которых движение по инерции происходит согласно первому закону Ньютона. В частности, систему отсчета, связанную с „неподвижными“ звездами, можно, как известно, с достаточной степенью точности считать системой инерциальной. С другой стороны, из принципа относительности движения следует, что если две системы отсчета K и K' равномерно движутся друг относительно друга, то законы всех физических явлений должны оказаться одинаковыми как при пользовании отсчетами в системе K , так и при пользовании отсчетами в системе K' . Стало быть, помимо системы „неподвижных“ звезд, все равномерно движущиеся относительно нее системы отсчета так же являются инерциальными, и во всех них должны быть справедливы одни и те же законы электродинамики. В дальнейшем, если не будет оговорено противного, мы всегда будем предполагать, что измерения электромагнитного поля и отсчет положения зарядов, проводников и т. д. производится в некоторой определенной инерциальной системе K .

В предшествующем нами предполагалось, что в некоторой инерциальной системе K контур L_2 , по которому циркулирует постоянный ток J_2 , неподвижен, а контур L_1 движется со скоростью v . Предположим теперь обратное, т. е. что L_1 неподвижен, а L_2 движется с постоянной скоростью — v . На основании принципа относительности мы можем заключить, что явления индукции в контуре L_1 останутся при этом прежними, ибо, во-первых, относительная скорость L_1 и L_2 остается неизменной, и, во-вторых, контур L_2 представляется неподвижным в равноправной с системой K инерциальной системе отсчета K' , движущейся относительно K с постоянной скоро-

¹ Таков, например, опыт Майкельсона 1925 г. (не смешивать с опытом Майкельсона 1881 года), в котором сравнивалось время, потребное лучу света (электромагнитные волны!) для прохождения замкнутого пути на земной поверхности в двух противоположных направлениях. Опыт этот представляет собой оптический (т. е. электромагнитный) аналог механическому опыту Фуко и дает возможность обнаружить вращение земли. См. реферат С. Вавилова, Успехи физ. наук, V, 457, 1925.

стью — v . Стало бы, величина Э. Д. С. индукции, индуцированной в контуре L_1 , должна определяться формулой (253) и в том случае, если контур этот остается неподвижным, а изменение магнитного потока Φ через него обуславливается равномерным движением тока J_2 , возбуждающего поле H . Естественно предположить, что уравнение это остается применимым и в том случае, если L_2 движется неравномерно (относительно инерциальной системы). Более того мы предположим, что (253) остается справедливым и в том случае, если изменение магнитного потока через контур L_1 обуславливается не только движением L_1 или движением контура L_2 , несущего постоянный ток, но также и замыканием и размыканием тока в L_2 , изменением его силы J_2 (переменный ток) и т. д.; иными словами, мы предположим, что формула (253) применима вне зависимости от характера причин, обуславливающих изменение величины магнитного потока Φ . Это предположение вполне соответствует духу теории близкодействия и теории поля вообще, ибо оно в сущности сводится к допущению, что все электромагнитные явления в данном теле или в данном участке пространства вполне определяются значениями напряженности поля (и его производными по времени) в этом участке пространства и вовсе не зависят от способа возбуждения поля.

Резюмируем: исходя из выражения Лорентцовой силы (213), установленного на основании результатов изучения постоянных токов, мы вывели закон индукции токов в контуре, движущемся в постоянном магнитном поле. Обобщая далее область применимости этого закона на основании соображений, связанных с принципом относительности и с понятием поля, мы предположили, что формула (253) имеет универсальное значение, т. е. что она применима вне зависимости от характера причин, обуславливающих изменение магнитного потока Φ . Опыт показывает, что предположение наше соответствует действительности¹.

4. В предшествующем нами неявно предполагалось, что рассматриваемые нами проводники находятся в немагнитной среде ($\mu = 1$). Отказавшись теперь от этого ограничения, допустим, что окружающее проводники пространство заполнено произвольными магнетиками ($\mu \neq 1$) и что самые проводники эти способны намагничиваться, и зададимся вопросом, как скажутся эти факторы на форме закона индукции (253). Как выяснилось в предшествующей главе, магнитные свой-

¹ За исключением тех случаев, когда скорость перемещения контура становится сравнимой со скоростью света, см. том II.

ства вещества обуславливаются наличием в его молекулах элементарных Амперовых токов. Стало бы, если закон индукции (253) применим в отсутствие магнетиков, то он должен оставаться справедливым и при наличии магнетиков — при том, конечно, условии, что при подсчете потока Φ наряду с магнитным полем макроскопических токов в проводниках будет учитываться также и магнитное поле элементарных токов, циркулирующих в молекулах магнетика. Иными словами, входящий в (253) вектор напряженности макроскопического поля \mathbf{H} нужно заменить средним значением напряженности микроскопического магнитного поля $\mathbf{H}_{\text{микро}}$.

В § 43 мы убедились, что среднее значение напряженности микроскопического поля в магнитных средах равно вектору магнитной индукции \mathbf{B} (см. 241):

$$\overline{\mathbf{H}_{\text{микро}}} = \mathbf{B}.$$

Заменяя поэтому в уравнении (253) \mathbf{H} через \mathbf{B} и воспользовавшись обозначением Ψ для потока магнитной индукции (235), получим окончательный вид закона индукции токов, применимый в произвольной магнитной среде:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int B_n dS = -\frac{1}{c} \frac{d\Psi}{dt}. \quad 254$$

Закон этот гласит: возбуждаемая в произвольном замкнутом контуре электродвижущая сила индукции численно равна деленной на c скорости изменения потока магнитной индукции Ψ через этот контур, причем направление $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ составляет с направлением возрастания потока Ψ левовинтовую систему (знак минус в формуле 254).

Опытные исследования вполне подтверждают¹ справедливость формулы (254).

5. Собственно говоря электродвижущая сила индукции в замкнутых контурах не поддается непосредственному измерению и может быть определена лишь косвенно, на основании измерения силы тока в них. Определение это основывается на допущении, что законы Ома и Киргоффа, установленные для токов постоянных, остаются справедливыми и для токов переменных. При этом, конечно, в формулировке этих законов помимо сторонних электродвижущих сил, обусловленных

¹ Исключение представляют случаи, упомянутые в предшествующем примечании, и тот случай, когда изменение Ψ связано с движением находящихся в поле магнетиков. См. том II.

физико-химическими неоднородностями проводника (контактные, термоэлектрические и пр. Э. Д. С.), необходимо учесть также и электродвижущие силы индукции. В частности, если мы отныне, в отличие от главы III, не будем включать Э. Д. С. индукции в понятие сторонних Э. Д. С., то сила тока в неразветвленном проводнике выразится, согласно (156), формулой:

$$JR = \mathcal{E}^{стп} + \mathcal{E}^{инд}, \quad 255$$

где R есть сопротивление контура, а $\mathcal{E}^{стп}$ и $\mathcal{E}^{инд}$ суть циркуляции по контуру испытываемых электрическими зарядами сил „стороннего“ и индукционного происхождения (см. ур. 156' и 251).

Являющаяся одним из исходных пунктов предшествующих рассуждений формула (251) представляет собой частный случай формулы (255), соответствующий сделанному в начале этого параграфа предположению: $\mathcal{E}^{стп} = 0$.

В действительности формула (255) оказывается непосредственно применимой к переменным токам лишь в том случае, если токи эти удовлетворяют условиям квазистационарности (см. §§ 47 и 57).

На основании (254) формула (255) может быть записана так:

$$JR = \mathcal{E}^{стп} - \frac{1}{c} \frac{d\Psi}{dt}. \quad 255'$$

Как уже указывалось, знак минус перед членом $\frac{1}{c} \frac{d\Psi}{dt}$ в (255') и (254) означает, что направление $\mathcal{E}^{инд}$, а, стало быть, и направление

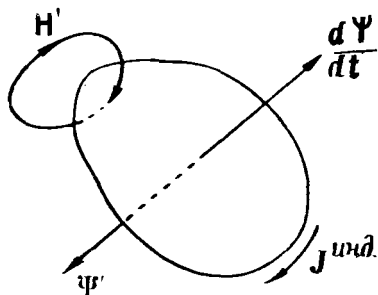


Рис. 79.

индукционного тока $J^{инд}$, составляет с направлением возрастания потока магнитной индукции Ψ левовинтовую систему (см. рис. 79). Индукционный ток $J^{инд}$ в свою очередь возбуждает в окружающем пространстве соответствующее его силе магнитное поле \mathbf{H}' , направление силовых линий которого составляет с направлением тока правовинтовую систему (§ 34). Отсюда следует, что поток Ψ' вектора магнитной индукции $\mathbf{B}' = \mu\mathbf{H}'$ этого поля через контур тока направлен противоположно направлению возрастания потока Ψ внешнего поля, индуцирующего ток $J^{инд}$. Стало быть, мы вправе высказать следующее общее положение: при всяком изменении потока

магнитной индукции через замкнутый проводящий контур в нем индуцируются токи в таком направлении, что магнитное поле этих токов стремится компенсировать изменение потока магнитной индукции через контур проводника, т. е. стремится удержать постоянным величину потока Ψ .

6. Основываясь на результатах этого параграфа, мы получаем возможность разрешить то кажущееся внутреннее противоречие теории, о котором упоминалось в § 37. Заключалось оно в том, что согласно (213) сила, испытываемая электрическим зарядом в магнитном поле, перпендикулярна его скорости и потому никакой работы совершать не может,

между тем как при движении несущего ток проводника (движущиеся заряды!) силы магнитного поля несомненно совершают некоторую работу A . Чтобы разобраться в этом вопросе, рассмотрим произвольный отрезок AB проводника, обтекаемого током плотности \mathbf{j} и движущегося в постоянном поле \mathbf{H} со скоростью \mathbf{v} (рис. 80). Пусть в единице объема проводника заключается n «свободных» электронов, движущихся относительно твердого кристаллического остова проводника со скоростью \mathbf{u} (для упрощения предполагаем, что все электроны движутся с одинаковой скоростью). Тогда истинная скорость электронов (относительно инерциальной системы, в которой производятся измерения поля) будет равна:

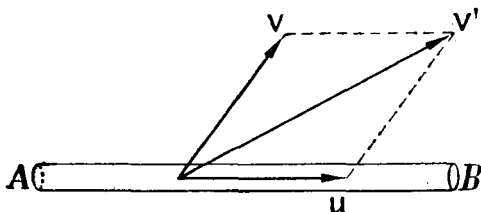


Рис. 80.

$\mathbf{v}' = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Согласно (213) общая сила, испытываемая в магнитном поле \mathbf{H} всеми свободными электронами, находящимися в единице объема, будет равна (предполагаем, что $\mu = 1$):

$$\mathbf{f} = \frac{ne}{c} |\mathbf{v}'\mathbf{H}| = \frac{ne}{c} [\mathbf{u}\mathbf{H}] + \frac{ne}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2,$$

где нами введены обозначения:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{ne}{c} [\mathbf{u}\mathbf{H}] \quad \text{и} \quad \mathbf{f}_2 = \frac{ne}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}].$$

Общая работа этих сил за время dt , которую мы, в отличие от введенной нам в главе IV величины A , обозначим через A' , будет равна нулю (ввиду перпендикулярности силы \mathbf{f} к перемещению электронов $\mathbf{v}'dt$):

$$A' = \mathbf{f}\mathbf{v}'dt = \mathbf{f}_1\mathbf{v}'dt + \mathbf{f}_2\mathbf{v}'dt = 0;$$

работа же отдельных слагающих \mathbf{f}_1 и \mathbf{f}_2 силы \mathbf{f} может быть, конечно, и отличной от нуля.

Рассмотрим сначала работу A_1 слагающей \mathbf{f}_1 :

$$A_1 = \mathbf{f}_1\mathbf{v}'dt = \mathbf{f}_1(\mathbf{v} + \mathbf{u})dt.$$

Так как \mathbf{f}_1 перпендикулярно \mathbf{u} , то раскрывая скобки получим:

$$A_1 = \mathbf{f}_1 \mathbf{v} dt.$$

Заметив, что согласно (212) плотность тока в проводнике равна

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{u},$$

и внося это в выражение для \mathbf{f}_1 , получим:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{H}],$$

что совпадает с (170) ¹. Таким образом сила (170), которую в излагавшейся нами макроскопической теории мы считали результирующей силой, испытываемой током в магнитном поле, является в действительности лишь одной из слагающих этой силы. Соответственно этому совпадающая с A_1 величина A , которая считалась нами общей работой сил магнитного поля, равна в действительности работе лишь одной из слагающих \mathbf{f}_1 этих сил. Нет поэтому ничего удивительного в том, что A может быть отличной от нуля.

Обращаемся к работе A_2 слагающей \mathbf{f}_2 ; ввиду перпендикулярности \mathbf{f}_2 и \mathbf{v} работа эта равна:

$$A_2 = \mathbf{f}_2 \mathbf{v}' dt = \mathbf{f}_2 (\mathbf{u} + \mathbf{v}) dt = \mathbf{f}_2 \mathbf{u} dt.$$

Внеся сюда значение \mathbf{f}_2 и выразив \mathbf{u} через \mathbf{j} , получим:

$$A_2 = \frac{1}{c} \mathbf{j} [\mathbf{v}\mathbf{H}] dt.$$

Введя, наконец, обозначение (250):

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}],$$

где \mathbf{E}' есть напряженность электродвижущей силы, индуцируемой в проводнике при его движении в поле \mathbf{H} , получим окончательно:

$$A_2 = \mathbf{j}\mathbf{E}' dt.$$

Таким образом работа слагающей \mathbf{f}_2 может быть истолкована как работа, совершаемая электродвижущей силой индукции при прохождении по проводнику тока \mathbf{j} (сравни ур. 150). В макроскопической теории электродвижущие силы, возбуждающие в проводниках электрические токи (движение электронов), не причисляются к силам пондеромоторным. Поэтому именно под работой A пондеромоторных сил магнитного поля в этой теории понимается работа A_1 слагающей этих сил \mathbf{f}_1 , которая в отличие от общей работы сил поля

$$A' = A_1 + A_2 = 0,$$

вообще говоря, не равна нулю.

Для придания строгости нашим рассуждениям нам остается еще показать, что сила \mathbf{f}_1 есть действительно пондеромоторная сила в том смысле этого термина, как он понимается в макроскопической теории, т. е. что \mathbf{f}_1 равна результирующей всех приложенных к проводнику сил. Для этого необходимо принять во внимание силу,

¹ Разница лишь в том, что \mathbf{f}_1 есть сила, рассчитанная на единицу объема.

испытываемую в поле \mathbf{H} положительными ионами, образующими кристаллический скелет проводника (работа этой силы, разумеется, равна нулю). Пусть общий заряд всех ионов, находящихся в единице объема проводника, равен e' ; так как эти ионы обладают скоростью \mathbf{v} , то общая испытываемая ими сила \mathbf{f}_+ будет равна:

$$\mathbf{f}_+ = \frac{e'}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}].$$

С другой стороны, если проводник в целом электрически нейтрален, то

$$e' + ne = 0$$

и следовательно,

$$\mathbf{f}_+ = -\frac{ne}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] = -\mathbf{f}_2.$$

Стало быть, результирующая всех сил, приложенных как к ионам, так и к электронам проводника:

$$\mathbf{f} + \mathbf{f}_+ = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_+ = \mathbf{f}_1$$

действительно равна \mathbf{f}_1 , что и требовалось доказать. Роль же приложенной к электронам силы \mathbf{f}_2 , как мы видели, сводится к тому, что она гонит их вдоль проводника, т. е. возбуждает в нем электрический ток (сила \mathbf{f}_1 перпендикулярна проводнику и потому тока возбуждать не может).

§ 47. Квазистационарные токи, их индукционное взаимодействие. Энергия магнитного поля токов. — 1. Чтобы рассмотреть следствия, вытекающие из установленного в предшествующем параграфе закона индукции, нам достаточно будет ограничиться случаем двух линейных замкнутых неразветвленных контуров L_1 и L_2 , находящихся в однородной диа- или пара-магнитной среде ($\mu = \text{const}$); неоднородной среды и ферромагнетиков мы пока рассматривать не будем. Кроме того как в этом, так и в последующих параграфах мы будем исходить из допущения, что магнитное и электрическое поле переменных токов, силы пондеромоторного взаимодействия между ними и т. д. в каждый данный момент времени имеют то же мгновенное значение, какое имели бы эти величины в случае постоянных (стационарных) токов той же силы.

Очевидно, что переменные токи могут удовлетворять условиям квазистационарности лишь в том случае, если подобно токам постоянным они будут замкнутыми и будут обладать одинаковой силой во всех сечениях неразветвленных участков цепи,¹ что для переменных токов вообще не обязательно (см. § 50).

Далее необходимо принять во внимание, что изменения электромагнитного поля, обуславливаемые изменением силы токов и распределения зарядов, распространяются не мгновенно, а с конечной

¹ Очевидно, что эти требования являются также необходимыми условиями применимости закона Ома (255).

скоростью (§ 57). Поэтому в каждый данный момент t напряженность поля переменных токов, строго говоря, соответствует не мгновенному значению силы этих токов, заряда конденсаторов и т. д., а тем значениям, которыми обладали эти величины в предшествующие моменты времени $t - \tau$; при этом τ равно времени, потребному для распространения электромагнитных возмущений от соответствующих участков цепи до рассматриваемой точки поля. Таким образом поле переменных токов может удовлетворять условиям квазистационарности лишь в ограниченной области пространства в непосредственной близости от этих токов, и притом лишь в том случае, если сила токов, заряды конденсаторов и т. д. не изменяются сколько-нибудь значительно за тот промежуток времени τ , который потребен для распространения электромагнитных возмущений между двумя наиболее удаленными точками рассматриваемой системы токов.

Таким образом основным условием квазистационарности является достаточная медленность изменений поля, которая, как мы убедимся в § 50, гарантирует также и приближенную замкнутость переменных токов.

Практически те переменные токи, с которыми имеет дело техника сильных токов (десятки, сотни и тысячи периодов в секунду), с достаточной степенью точности удовлетворяют условиям квазистационарности; к быстрым же электрическим колебаниям, применяющимся в радиотелеграфии, теория квазистационарных токов оказывается, вообще говоря, неприменимой или применимой лишь с известными ограничениями.

2. Написав для каждого из контуров тока L_1 и L_2 уравнения (255) и (255'), получим:

$$J_i R_i = \mathcal{E}_i^{ind} + \mathcal{E}_i^{cmp} = \mathcal{E}_i^{cmp} - \frac{1}{c} \frac{d\Phi_i}{dt}, \quad i = 1, 2. \quad 256$$

С другой стороны, поток индукции Φ_i , пронизывающий, например, контур первого тока ($i=1$), равен сумме среднего потока Φ_{11} , посылаемого им самим через свой собственный контур¹, и потока Φ_{12} , посылаемого через его контур вторым током J_2 , причем согласно (236),

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = \frac{1}{c} L_{11} J_1 + \frac{1}{c} L_{12} J_2,$$

¹ О смысле этой величины см. сказанное относительно Φ_{11} на стр. 251.

где L_{11} и L_{12} суть коэффициенты само- и взаимо-индукции. Внося это в (254), получим значение Э. Д. С. индукции в первом контуре:

$$\mathcal{E}_1^{ind} = -\frac{1}{c} \frac{d\Psi_1}{dt} = -\frac{1}{c^2} \left(L_{11} \frac{dJ_1}{dt} + L_{12} \frac{dJ_2}{dt} + J_1 \frac{dL_{11}}{dt} + J_2 \frac{dL_{12}}{dt} \right) \quad 257$$

и аналогичное уравнение для второго контура. Таким образом величина Э. Д. С. индукции в первом контуре будет зависеть как от скорости изменения силы токов J_1 и J_2 , так и от скорости изменения коэффициентов индукции L_{11} и L_{12} . Так как значения этих коэффициентов определяются геометрической конфигурацией контуров [см. уравнение (236), а также стр. 252], то значения производных $\frac{dL_{11}}{dt}$ и

$\frac{dL_{12}}{dt}$ зависят лишь от изменения этой конфигурации, т. е. от характера

перемещения контуров L_1 и L_2 ; при этом $\frac{dL_{11}}{dt}$ зависит лишь от изме-

нения формы первого контура (если контур не деформируется, то L_{11} постоянно), а $\frac{dL_{12}}{dt}$ — от изменения взаимного расположения контуров L_1 и L_2 .

По внесению (257) и соответствующего выражения для \mathcal{E}_2^{ind} в (256), мы получим два линейных дифференциальных уравнения для J_1 и J_2 из которых можно определить J_1 и J_2 в функции от времени, если только \mathcal{E}_1^{cmp} , \mathcal{E}_2^{cmp} , L_{11} , L_{12} , и L_{22} суть известные заданные функции времени. В частности, если контуры обоих токов неподвижны друг относительно друга и не подвергаются деформации, то коэффициенты индукции будут постоянными и для J_1 и J_2 будет иметь место следующая система линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} J_1 R_1 + \frac{1}{c^2} L_{11} \frac{dJ_1}{dt} + \frac{1}{c^2} L_{12} \frac{dJ_2}{dt} &= \mathcal{E}_1^{cmp} \\ J_2 R_2 + \frac{1}{c^2} L_{22} \frac{dJ_2}{dt} + \frac{1}{c^2} L_{12} \frac{dJ_1}{dt} &= \mathcal{E}_2^{cmp} \end{aligned} \right\} \quad 258$$

3. Рассмотрим теперь индукционное взаимодействие токов J_1 и J_2 с энергетической точки зрения. При этом необходимо учесть следующие превращения энергии: 1) выделение Джаулева тепла Q в цепи токов, 2) работу P сторонних электродвижущих сил, 3) механическую

работу A пондеромоторных сил магнитного поля, совершаемую при перемещении контуров тока, и, наконец, 4) необходимо, как мы увидим, приписать магнитному полю, как таковому, некоторую энергию W_m , и учесть изменение dW_m этой энергии при изменениях напряженности поля H .

Рассмотрим изменение всех этих видов энергии, совершающееся за некоторый бесконечно малый элемент времени dt . Начнем с энергии механической. В §§ 36 и 42 мы установили, что работа A пондеромоторных сил магнитного поля постоянных токов равна убыли потенциальной функции этих токов U (см. 236'):

$$A = -dU,$$

$$U = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_{22} J_2^2 \right).$$

Стало быть, в случае постоянных токов

$$A = -(dU)_J = \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} dL_{11} \cdot J_1^2 + dL_{12} \cdot J_1 J_2 + \frac{1}{2} dL_{22} \cdot J_2^2 \right), \quad 259$$

где индекс J у dU означает, что при определении изменения функции U силы токов J полагаются постоянными, и где dL_{11} , dL_{12} , dL_{22} суть изменения коэффициентов индукции за время dt . Но, согласно приведенному в начале этого параграфа определению термина „квazистационарный“, силы взаимодействия квазистационарных токов в каждый данный момент времени равны силам взаимодействия постоянных токов той же силы J_1 и J_2 . Стало быть, формула (259) должна оставаться применимой и в случае квазистационарных токов (конечно, при условии выбора элемента времени dt столь малым, чтобы сила этих токов за это время оставалась бы практически постоянной)¹.

Переходим к определению изменения других видов энергии. Из закона Джауля (152) или (158') непосредственно следует, что за время dt в обоих контурах выделяется количество тепла, равное:

$$Q dt = (J_1^2 R_1 + J_2^2 R_2) dt.$$

¹ Если допустить справедливость формулы типа $A = -dU$ для квазистационарных токов, то непосредственно ясно, что при определении работы A нужно учитывать лишь те изменения значения потенциальной функции U , которые обуславливаются перемещением проводников (т. е. изменением коэффициентов индукции), ибо изменение силы токов в проводниках с работой пондеромоторных сил поля связано быть не может. Отсюда явствует, что для квазистационарных токов формула $A = -dU$ действительно должна быть уточнена в смысле формулы $A = -(dU)_J$.

Далее, сравнивая (150) с (154'') убедимся, что сторонние электродвижущие силы совершают за это время в обоих контурах работу

$$Pdt = (J_1 \mathcal{E}_1^{cmp} + J_2 \mathcal{E}_2^{cmp}) dt.$$

Если мы, например, предположим, что сторонние Э. Д. С. возбуждаются включенными в контуры гальваническими элементами или аккумуляторами, то Pdt будет измерять работу, совершаемую в контурах токов за счет химической энергии этих источников Э. Д. С. Разумеется, при пользовании последней формулой необходимо определенным образом выбрать направление положительного обхода каждого из контуров и снабдить величины J_i и \mathcal{E}_i^{cmp} соответствующими знаками. В зависимости от того, имеют ли, например, J_1 и \mathcal{E}_1^{cmp} одинаковые или различные знаки (т. е. направления), работа Э. Д. С. \mathcal{E}_1^{cmp} будет положительной или отрицательной.

Итак за время dt должно иметь место увеличение механической энергии (например, кинетической энергии движения проводников) на величину A , увеличение тепловой энергии на Qdt и уменьшение энергии источников сторонних электродвижущих сил (например, химической энергии аккумуляторов) на величину Pdt . Таким образом общее увеличение Δ всех этих видов энергии равно:

$$\Delta = A + (Q - P)dt, \quad 260$$

причем согласно (256)

$$\begin{aligned} Q - P &= J_1(J_1 R_1 - \mathcal{E}_1^{cmp}) + J_2(J_2 R_2 - \mathcal{E}_2^{cmp}) = \\ &= J_1 \mathcal{E}_1^{ind} + J_2 \mathcal{E}_2^{ind}. \end{aligned} \quad 260'$$

Внося это в (260) и выражая $\mathcal{E}_i^{ind} dt$ и A с помощью (257) и (259), получим:

$$\begin{aligned} \Delta = -\frac{1}{c^2} \left\{ L_{11} J_1 dJ_1 + \frac{1}{2} J_1^2 dL_{11} + L_{12} J_1 dJ_2 + L_{12} J_2 dJ_1 + J_1 J_2 dL_{12} + \right. \\ \left. + L_{22} J_2 dJ_2 + \frac{1}{2} J_2^2 dL_{22} \right\}, \end{aligned}$$

откуда

$$\Delta = -\frac{1}{c^2} d \left(\frac{1}{2} L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_{22} J_2^2 \right).$$

Таким образом всякое изменение конфигурации контуров и сил токов в них связано с общим увеличением механической, тепловой и химической энергии на величину Δ . На основании закона сохранения энергии мы должны заключить, что эти процессы должны сопутствоваться

эквивалентным уменьшением некоторого другого вида энергии. Какого именно? Чтобы ответить на этот вопрос, достаточно заметить, что с перемещением проводников и изменением сил циркулирующих в них токов неразрывно связаны, помимо учтенных уже нами механических, тепловых и химических процессов, единственно лишь изменения магнитного поля этих токов. Очевидно, стало быть, что магнитному полю, как и полю электрическому, необходимо приписать некоторую определенную энергию W_m , и что приращение Δ всех прочих видов энергии должно происходить за счет эквивалентного изменения dW_m энергии магнитного поля:

$$dW_m = -\Delta = +d \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_{22} J_2^2 \right). \quad 261$$

Следовательно ¹,

$$W_m = \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_{22} J_2^2 \right). \quad 262$$

Это выражение можно записать также следующим образом:

$$W_m = \frac{1}{2c^2} \sum_{i,k} L_{ik} J_i J_k \quad (i,k = 1,2). \quad 262'$$

Ясно, что магнитная энергия системы не двух, а произвольного числа n токов выразится формулой того же вида (262'), в которой индексы i и k будут пробегать все значения от 1 до n .

5. Сравнивая (262) с (236') убедимся, что

$$W_m = -U. \quad 263$$

Стало быть, энергия магнитного поля токов, или, говоря кратко, магнитная энергия токов W_m равна взятой с обратным знаком потенциальной функции этих токов U . Таким образом мы вновь убеждаемся, что эта потенциальная функция, как уже нами неоднократно подчеркивалось, вовсе не равна (потенциальной) энергии токов.

Чтобы уяснить смысл соотношения между W_m и U , заметим, что согласно данному в § 36 определению, убыль функции U равняется механической работе A , совершаемой пондеромоторными силами магнитного поля. Если уточнить это определение в смысле уравнения

¹ Собственно говоря, заданием dW_m значение W_m определяется лишь вплоть до аддитивной постоянной, которую мы положили равной нулю для того, чтобы при отсутствии токов ($J_1 = J_2 = 0$), т. е. при $H = 0$, энергия магнитного поля тоже оказалась равной нулю. ♣

(259) (т. е. если при определении изменения функции U полагать силу токов постоянной), то оно останется справедливым и в случае квазистационарных токов. Между тем убыль магнитной энергии равна сумме приращения всех прочих видов энергии, а не только энергии механической. Согласно (261) и (260)

$$-dW_m = \Delta = A + (Q - P)dt, \quad 261'$$

т. е. $-dW_m$ равно сумме работы A и избытка выделяемого токами тепла Qdt над работой сторонних электродвижущих сил Pdt , причем согласно (260)¹

$$Q - P = J_1 \mathcal{E}_1^{инд} + \mathcal{E}_2 J_2^{инд}.$$

В случае постоянных токов в неподвижных проводниках $\mathcal{E}^{инд} = 0$ и $Q = P$ (см. § 28). Однако механическая работа A может совершаться лишь при перемещении проводников, которое в свою очередь связано с появлением электродвижущих сил индукции, т. е. с нарушением равенства между выделенным теплом Q и работой сторонних Э. Д. С. P . Избыточная (по сравнению с выделением тепла) затрата энергии источников этих Э. Д. С. (например, химической энергии аккумуляторов) оказывается при этом достаточной не только для совершения механической работы A , но и для увеличения энергии магнитного поля W_m , ибо из предпоследнего равенства следует:

$$(P - Q)dt = A + dW_m.$$

6. Предположим в качестве примера, что при перемещении контуров L_1 и L_2 сила токов J_1 и J_2 в этих контурах поддерживается

¹ Внося это в (261') и предполагая, что общая энергия магнитного поля остается неизменной ($dW_m = 0$), получим:

$$A + \sum_i J_i E_i^{инд} = 0.$$

Стало быть, в согласии с изложенными в конце § 46, при $W_m = \text{const}$ общая работа сил магнитного поля A' , слагающаяся из работ пондеромоторных сил A и работы Э. Д. С. индукции $\sum_i J_i \mathcal{E}_i^{инд}$, тождественно равна нулю. При $dW_m \neq 0$

общая работа сил магнитного поля продолжает оставаться равной нулю. Однако в этом случае Э. Д. С. индукции $\mathcal{E}^{инд}$ лишь частично сводятся к Лорентцовой силе магнитного поля $\frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}]$, частично же являются проявлением сил электрического поля, возбуждаемого изменениями поля магнитного (см. § 49), благодаря чему в этом случае

$$A + \sum_i J_i \mathcal{E}_i^{инд} = -dW_m \neq 0.$$

постоянной путем непрерывного изменения сторонних Э. Д. С., компенсирующего влияние индукции. В этом гипотетическом случае вытекающее из (259) и (263) соотношение:

$$A = - (dU)_J = + (dW_m)_J$$

примет вид

$$A = dW_m,$$

где dW_m есть полное изменение магнитной энергии во время движения (ибо по условию $J_i = \text{const}$). Иными словами, механическая работа A будет равна приращению магнитной энергии и

$$A + dW_m = 2A.$$

С другой стороны, так как по условию силы токов остаются постоянными во время движения, то и количество выделяемого тепла Q остается постоянным. Стало быть во время движения работа сторонних Э. Д. С. P должна возрасти на (положительную или отрицательную) величину $2A$, причем половина ее будет идти на увеличение магнитной энергии W_m . Это возрастание работы P объясняется тем, что для поддержания постоянства сил токов во время движения необходимо изменить сторонние электродвижущие силы так, чтобы компенсировать влияние электродвижущих сил индукции.

Заметим, что перемещение контуров тока при условии $J_i = \text{const}$ с энергетической точки зрения вполне аналогично перемещению обкладок конденсатора при условии $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$. В последнем случае работа пондеромоторных сил электрического поля тоже равна приращению энергии этого поля:

$$A = dW_e,$$

причем как работа A , так и приращение электрической энергии dW_e совершаются за счет работы (сторонних) Э. Д. С., поддерживающих постоянство разности потенциалов обкладок конденсатора (см. § 17).

Конечно, в действительности при движении проводников остаются постоянными в большинстве случаев не силы токов в них, а величина сторонних Э. Д. С., сила же токов изменяется, что значительно усложняет явления.

7. Рассмотрим в заключение индукцию токов в контуре L_1 , к которому не приложено сторонних Э. Д. С. ($\mathcal{E}_1^{emp} = 0$) и который перемещается в постоянном магнитном поле, например в поле постоянного тока J_2 . Строго говоря, появление индукционного

тока в контуре L_1 связано с возбуждением соответствующего магнитного поля, что в свою очередь должно возбуждать вторичные индукционные токи как в контуре L_1 , так и в контуре L_2' , и т. д. Таким образом предположение о постоянстве внешнего магнитного поля сводится в сущности к предположению, что $J_1 \ll J_2$, и что напряженность поля индуцированного тока J_1 столь мала по сравнению с напряженностью поля тока J_2 , что полем этим можно полностью пренебречь. При этих условиях поток магнитной индукции Ψ через контур L_1 сведется к

$$\Psi_1 = \Psi_{12} = L_{12} J_2, \quad (\text{см. 236})$$

и формула (257) ввиду постоянства J_2 примет вид:

$$\mathcal{E}_1^{ind} = -\frac{1}{c} \frac{d\Psi_{12}}{dt} = -\frac{1}{c} J_2 \frac{dL_{12}}{dt}.$$

Далее, ввиду $\mathcal{E}_1^{cmp} = 0$, помножая (256) на J_1 , получим:

$$J_1^2 R = -\frac{1}{c} J_1 J_2 \frac{dL_{12}}{dt}.$$

С другой стороны, пренебрегая в (259) членом, содержащим J_1^2 , получим, ввиду предполагаемой неподвижности контура L_2 ($L_{22} = \text{const}$):

$$A = \frac{1}{c^2} J_1 J_2 dL_{12}.$$

Стало быть,

$$A = -J_1^2 R_1 dt.$$

Так как $J_1^2 R_1 dt$ есть величина существенно положительная, то $A < 0$. Следовательно, пондеромоторные силы магнитного поля совершают при движении проводника L_1 отрицательную работу, т. е. противодействуют этому движению. Отсюда вытекает так называемое правило Ленца: индукционные токи, возникающие в проводнике при движении его в постоянном магнитном поле, направлены так, что испытываемые этими токами пондеромоторные силы магнитного поля противодействуют движению проводника.

8. Прежде чем переходить к применению полученных результатов к конкретным задачам, заметим, что переходом к практической (а также к электромагнитной) системе единиц (см. § 38) можно достигнуть устранения из всех формул этого параграфа усложняющего их

фактора c . Покажем это на примере формул (257) и (262').

Пользуясь таблицей III, стр. 270, можем написать:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{300} \mathcal{E}', \quad J = 3 \cdot 10^9 J', \quad L = 10^9 L',$$

де \mathcal{E}' , J' , L' суть выраженные в практических единицах (вольт, ампер, генри), значения Э. Д. С., силы тока и коэффициента индукции, тогда как \mathcal{E} , J , L являются значениями тех же величин в абсолютных единицах, которыми мы до сих пор пользовались. Кроме того практической единицей энергии является джауль = 10^7 эргов; стало быть, в тех же обозначениях

$$W = 10^7 \cdot W'.$$

Выражая в формулах (258) и (262') значения всех величин в практических единицах и внося в них численное значение коэффициента c ($= 3 \cdot 10^{10}$), по сокращении получим:

$$\mathcal{E}_1'_{\text{инд}} = - \left(L_{11}' \frac{dJ_1'}{dt} + L_{12}' \frac{dJ_2'}{dt} + J_1' \frac{dL_{11}'}{dt} + J_2' \frac{dL_{12}'}{dt} \right) \quad 257'$$

и

$$W_{*'} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik}' J_i' J_k'. \quad 262''$$

В последующих примерах и задачах мы будем пользоваться не абсолютной системой единиц, а практической, обычно применяемой в прикладном учении об электричестве.

Пример. — *Превращения энергии при замыкании и размыкании цепи тока.* — Для уединенной недеформирующейся цепи тока согласно (255) и (257) можем написать, пользуясь практической системой единиц:

$$J' R' = \mathcal{E}'_{\text{стп}} - L' \frac{dJ'}{dt},$$

где $L' = \text{const}$ есть самоиндукция цепи тока. Общее решение этого дифференциального уравнения в случае независимости $\mathcal{E}'_{\text{стп}}$ от времени имеет вид:

$$J' = \frac{\mathcal{E}'_{\text{стп}}}{R'} + a e^{-\frac{R'}{L'} t},$$

где a есть произвольная постоянная интегрирования.

Предположим, что бывшая разомкнутой цепь тока замыкается в момент $t=0$, так что при $t=0$ $J=0$. Чтобы удовлетворить этому условию, необходимо положить: $a = -\frac{\mathcal{E}'_{cmp}}{R'}$, откуда

$$J' = \frac{E'_{cmp}}{R'} \left(1 - e^{-\frac{R'}{L'} t} \right).$$

Стало быть, сила тока при замыкании цепи нарастает экспотенциально от нуля до соответствующего закону Ома предельного значения $\frac{E'_{cmp}}{R'}$.

Помножая исходное уравнение на J' , получим:

$$J'^2 R' = J' \mathcal{E}'_{cmp} - L' J' \frac{dJ'}{dt}$$

или

$$J' \mathcal{E}'_{cmp} = J'^2 R' + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L' J'^2 \right).$$

Таким образом работа сторонних Э. Д. С. $J' \mathcal{E}'_{cmp}$ затрачивается при замыкании цепи не только на преодоление (омического) сопротивления цепи R' , т. е. на выделение джаулева тепла $J'^2 R'$, но и на приращение энергии магнитного поля тока $W'_{\mu} = \frac{1}{2} L' J'^2$ (сравни 262").

Этим постепенным накоплением магнитной энергии в окружающем пространстве и обусловливается постепенность нарастания силы тока при замыкании цепи.

Обратно, если в момент $t=0$ в цепи циркулирует ток J'_0 , и если в этот момент выключить из цепи источник электродвижущей силы так, чтобы цепь тока все же оставалась замкнутой (например, замкнув источник Э. Д. С. накоротко), то сила тока не сразу упадет до нуля, а будет убывать по экспотенциальному закону:

$$J' = J'_0 e^{-\frac{R'}{L'} t}.$$

Уравнение энергии в этом случае ($\mathcal{E}'_{cmp} = 0$) примет вид:

$$J'^2 R' = - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L' J'^2 \right) = - \frac{dW'_{\mu}}{dt}.$$

Это значит, что после выключения электродвижущей силы ток в цепи будет все же поддерживаться за счет энергии, запасенной в магнитном

поле тока, вплоть до того момента, пока вся эта энергия не перейдет в Джаулево тепло.

Соответственно этому скорость нарастания и убывания тока определяется значением величины $\frac{R'}{L'}$, т. е. соотношением между энергетической „емкостью“ магнитного поля тока, определяемой коэффициентом L' , и величиной испытываемого током сопротивления или „трения“, обуславливающего переход его энергии в тепло. Чем меньше сопротивление и чем больше самоиндукция, тем относительно медленнее происходит изменение силы тока. Таким образом коэффициент самоиндукции является мерой своего рода „электромагнитной инерции“ тока.

С энергетической точки зрения электрический ток в замкнутом проводнике можно сравнить с вращением вала, несущего маховое колесо и приводимого в движение двигателем. При пуске в ход двигателя (сторонние Э. Д. С.) работа его затрачивается как на преодоление трения в подшипниках (сопротивление проводника), т. е. на выделение тепла (Джаулево тепло), так и на сообщение колесу кинетической энергии (энергия магнитного поля тока), благодаря чему возрастание скорости вращения (силы тока) происходит постепенно. При выключении же двигателя вал продолжает вращаться по инерции, причем кинетическая энергия колеса переходит в выделяющееся при трении тепло.

Совершенно аналогичным образом можно рассмотреть с точки зрения превращений энергии все явления, происходящие при взаимодействии двух или несколько токов, при их движении (с учетом совершающейся при этом механической работы) и т. д.

Задача 36. — В постоянном однородном магнитном поле \mathbf{H}' равномерно вращается недеформирующийся замкнутый плоский контур L сопротивления R' и самоиндукции L' , к которому не приложено сторонних электродвижущих сил. Ось вращения перпендикулярна \mathbf{H}' и лежит в плоскости контура. Число оборотов в секунду равно $n = 2\pi\omega$. Соответственно этому поток магнитной индукции Ψ' внешнего поля \mathbf{H}' через контур L определяется выражением $\Psi' = \Psi'_0 \cos \omega t$. Значения всех величин предполагаются выраженными в практических единицах (штрихованные буквы!)

Показать, что в контуре L должен индуцироваться ток J' :

$$J' = \omega \Psi'_0 \frac{1}{\sqrt{R'^2 + \omega^2 L'^2}} \sin(\omega t - \alpha),$$

Определенное таким образом число ω называется циклической частотой вращения, см. примечание к стр. 370.

где α есть сдвиг фазы тока по отношению к фазе электродвижущей силы индукции $\mathcal{E}'_{\text{внш}}{}^{\text{инд}}$, возбуждаемой в контуре изменением потока индукции Ψ' внешнего поля \mathbf{H}' :

$$\mathcal{E}'_{\text{внш}}{}^{\text{инд}} = -\frac{d\Psi'}{dt} = \Psi'_0 \omega \sin \omega t,$$

причем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega L'}{R'}.$$

Показать далее, что для поддержания вращения контура L необходима затрата извне механической работы в количестве:

$$A = \frac{\omega^2 \Psi_0'^2 R'}{2(R' + \omega^2 L'^2)} = \frac{1}{2} J_0'^2 R' \frac{\text{джоуль}}{\text{сек}},$$

где через J_0' обозначена амплитуда тока J' , причем в контуре L выделяется равное работе A количество джоуля тепла Q .

Если предположить, что замкнутый контур L состоит из двух частей, из которых одна вращается в постоянном магнитном поле (якорь в поле статора), а другая неподвижна (сеть), причем контакт между обеими частями контура во время вращения не нарушается, то мы получим простейшую схему генератора переменного тока, к которой применимы все результаты, полученные при решении задачи 36. Однако на практике необходимо принимать во внимание, что переменные токи во вращающемся якоре в свою очередь индуцируют токи в обмотке статора, чем нарушается постоянство «внешнего» магнитного поля \mathbf{H} . Далее, в задаче 36 мы ограничились рассмотрением установившегося режима тока, оставив без рассмотрения явления, происходящие при возникновении и прекращении вращения якоря, изменения нагрузки сети и т. д.

§ 48. Объемное распределение энергии магнитного поля. Энергия поля магнитов. Самоиндукция. — 1. Полученное нами выражение энергии магнитного поля токов в однородной магнитной среде (262')

$$W_{\mu} = \frac{1}{2c^2} \sum_{i,k} L_{ik} J_i J_k$$

по своей форме соответствует представлению о магнитном взаимодействии токов на расстоянии. В этом отношении оно вполне аналогично выражению (86')

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{e_i e_k}{R_{ik}}$$

энергии покоящихся электрических зарядов. Действительно, входящий в (262') член

$$\frac{1}{c^2} L_{12} J_1 J_2$$

может быть истолкован, как энергия магнитного взаимодействия токов J_1 и J_2 , а член

$$\frac{1}{2c^2} L_{11} J_1^2$$

как „собственная“ энергия тока J_1 , т. е. как энергия взаимодействия бесконечно тонких токовых нитей, на которые может быть разложен этот ток.

Нетрудно, однако, выразить магнитную энергию токов в форме интеграла по всему объему поля этих токов и тем самым, как и в случае поля электрического (см. §§ 16 и 24), получить возможность интерпретировать энергию W_m в духе теории близкодействия как энергию поля, а не как энергию взаимодействия токов.

Собственно говоря, для случая токов в немагнитной среде ($\mu = 1$) преобразование это было уже выполнено нами в § 36. Внося (209') в (263), получаем непосредственно:

$$(\mu = 1) \quad W_m = -U = \frac{1}{8\pi} \int H^2 dV, \quad 264$$

где интегрирование должно быть распространено по всему объему полного поля (см. стр. 255).

С точки зрения теории поля формула эта может быть истолкована следующим образом: магнитная энергия локализована в поле, и распределена по его объему с вполне определенной плотностью w_m , равной

$$(\mu = 1) \quad w_m = \frac{1}{8\pi} H^2. \quad 264'$$

В квазистационарных магнитных полях оба приведенных понимания магнитной энергии (как энергии взаимодействия токов и как энергии поля), разумеется, совершенно равноправны, ибо вытекают они из математически эквивалентных друг другу выражений (262') и (264) (сравни § 16). Однако при переходе к быстро-переменным электромагнитным полям эквивалентность этих выражений нарушается, и мы убедимся в следующей главе, что лишь представление о локализации магнитной энергии в поле может быть согласовано с данными опыта,

2. Обратимся теперь к случаю магнитного поля токов в диа- и пара-магнитной среде. В § 36 мы показали, что из формулы (198'):

$$U = -\frac{J}{c} \oint_L A_s ds$$

следует уравнение (208'):

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int A \operatorname{rot} \mathbf{H} dV,$$

где интегрирование должно быть распространено по всему объему полного поля. Так как исходная формула, согласно (233'), остается справедливой и при наличии магнетиков, то, стало быть, и при $\mu \neq 1$ потенциальная функция токов должна выражаться формулой (208'). Далее, как и на стр. 255, согласно (67), можем написать:

$$\mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{div} [\mathbf{H} \mathbf{A}].$$

Однако при $\mu \neq 1$ вихрь вектора потенциала \mathbf{A} равен не напряженности поля \mathbf{H} , как это имеет место при $\mu = 1$, а его магнитной индукции \mathbf{B} (уравнение 226). Стало быть, при $\mu \neq 1$

$$\mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{H} \mathbf{B} + \operatorname{div} [\mathbf{H} \mathbf{A}].$$

Внося это в выражение для U и повторяя рассуждения, приведшие нас в § 36 к ур. (209'), получим окончательно:

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H} \mathbf{B} dV = -\frac{1}{8\pi} \int \mu H^2 dV,$$

откуда на основании (263) следует:

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int \mu H^2 dV. \quad 265$$

Это уравнение может быть истолковано в том смысле, что магнитная энергия токов локализована в поле с объемной плотностью

$$w_m = \frac{\mu}{8\pi} H^2; \quad 265'$$

при $\mu = 1$ (265') сводится к (264').

Таким образом при заданной напряженности поля энергия единицы его объема пропорциональна магнитной проницаемости среды.

Изложенное относится, конечно, к энергии, напряженности и т. д. макроскопического поля. Что же касается энергии микроскопического магнитного поля, то ее зависимость от напряженности этого поля должна, очевидно, определяться формулой (264') вне зависимости от того, существует ли это поле в вакууме или же в материальной среде, т. е. в пространстве, в которое вкраплены отдельные молекулы магнетика (сравни § 24). И действительно, подобно тому, как макроскопическая плотность энергии электрического поля в диэлектриках

$$w = \frac{\mathbf{D}\mathbf{E}}{8\pi} = \frac{\epsilon}{8\pi} E^2$$

является в сущности суммой средней плотности энергии электрического поля в собственном смысле этого слова

$$w_{\epsilon} = \frac{1}{8\pi} E^2_{\text{микро}}$$

и неразрывно связанной с ней упругой энергии поляризованных молекул диэлектрика (§ 24), так и макроскопическая плотность энергии магнитного поля (265') является суммой средней плотности энергии магнитного поля в собственном смысле слова

$$w_{\mu} = \frac{1}{8\pi} \mathbf{H}^2_{\text{микро}}$$

и той добавочной кинетической энергии, которую приобретают в магнитном поле электроны молекул магнетика благодаря процессии электронных орбит. Кроме того необходимо учесть, что возбуждение магнитного поля и намагничивание парамагнетиков связано с упорядочением направлений магнитных осей его молекул и сопряжено поэтому с изменением энтропии и выделением тепла. Поэтому в парамагнетиках величина w_{μ} (265') является в сущности плотностью свободной энергии макроскопического магнитного поля (сравни сказанное об энергии электрического поля в диэлектриках с твердыми диполями). См. работы Н. А. Lorentz'a¹ и Bruins².

3. В качестве применения формулы (265) рассмотрим энергию магнитного поля \mathbf{H} двух токов \mathbf{J}_1 и \mathbf{J}_2 , находящихся в произвольной диа- или пара-магнитной среде. Если \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 суть напряженности поля, создаваемого каждым из этих токов в отдельности, то

$$\mathbf{H}^2 = (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2)^2 = H_1^2 + 2\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 + H_2^2,$$

и общая энергия поля токов будет равна:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mu \mathbf{H}^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int \mu H_1^2 dV + \frac{1}{4\pi} \int \mu \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 dV + \frac{1}{8\pi} \int \mu H_2^2 dV. \quad 265'$$

Очевидно, что первый и последний члены правой части этого равенства (обозначим их через W_{11} и W_{22}), могут быть названы соб-

¹ Encykl. d. Math. Wissensch., V — 14, § 52.

² Arch. Néerland. 1921 г.

ственной энергией каждого из токов J_1 и J_2 , а второй член — взаимной энергией этих токов W_{12} .

Установленное нами для случая однородной магнитной среды ($\mu = \text{const}$) уравнение (262):

$$W = \frac{1}{2c^2} (L_{11} J_1^2 + 2L_{12} J_1 J_2 + L_{11} J_2^2)$$

останется очевидно справедливым и для рассматриваемого случая произвольной (но не ферромагнитной) среды, если только мы условимся определять значения коэффициентов индукции L_{11} , L_{12} , L_{22} из соотношений:

$$\left. \begin{aligned} W_{11} &= \frac{1}{8\pi} \int \mu H_1^2 dV = \frac{1}{2c^2} L_{11} J_1^2, \\ W_{12} &= \frac{1}{4\pi} \int \mu H_1 H_2 dV = \frac{1}{c^2} L_{12} J_1 J_2 \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} 265'''$$

Так как H_1 и H_2 при заданной конфигурации проводников пропорциональны соответственно J_1 и J_2 , то определяемые формулой (265''') значения величин L_{11} , L_{12} , и т. д. будут зависеть лишь от геометрической конфигурации проводников. При $\mu = \text{const}$ значения эти должны совпадать с значениями коэффициентов индукции, определяемых формулой (236).

Уравнения (265''') представляют собой наиболее общее, годное при $\mu \neq \text{const}$ определение коэффициентов индукции. Из этого определения явствует, что коэффициенты индукции являются в сущности мерой энергии магнитного поля токов (при заданной силе этих токов).

4. Перейдем теперь к вопросу об энергии поля постоянных магнитов. Предположим сначала для простоты, что в поле этих магнитов нет проводников электричества, а, стало быть, и нет токов проводимости. В этом случае механическая работа A , совершаемая силами поля при перемещениях постоянных магнитов, должна, очевидно, равняться убыли энергии этого поля:

$$A = -dW_m, \quad (266)$$

ибо за отсутствием электрических токов эти перемещения работой электродвижущих сил сопровождаться не будут [сравни формулу (261')]. Исходя из этого соотношения и из приведенных в § 41 выражений для пондеромоторных сил, испытываемых в магнитном поле постоянными магнитами и намагничивающимися магнетиками, можно показать, что энергия поля магнитов, как и энергия поля токов, должна выражаться

формулой (265). Удобнее, однако, идти в обратном порядке и проверить правильность этой формулы, доказав, что из нее и из формулы (266) вытекают приведенные в § 41 выражения пондеромоторных сил магнитного поля.

Приступая к этому доказательству, заметим предварительно, что в поле токов $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ и поэтому

$$w_m = \frac{1}{8\pi} \mu H^2 = \frac{1}{8\pi} \mathbf{H}\mathbf{B},$$

тогда как при наличии постоянных магнитов, согласно (224"),

$$\mathbf{B} = \mathbf{I}_0 + \mu\mathbf{H}.$$

Далее поле магнитов обладает однозначным потенциалом ψ :

$$\mathbf{H} = -\text{grad}\psi$$

(см. 221); поэтому, применяя формулу (66), можем написать:

$$\mu H^2 = -(\mathbf{B} - \mathbf{I}_0) \text{grad}\psi = -\text{div}\{\psi(\mathbf{B} - \mathbf{I}_0)\} + \psi \text{div}(\mathbf{B} - \mathbf{I}_0).$$

Согласно (225) и (219),

$$\text{div}\mathbf{B} = 0, \text{div}\mathbf{I}_0 = -4\pi\rho_m^0,$$

где ρ_m^0 обозначает объемную плотность постоянного магнетизма. Стало быть,

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int \mu H^2 dV = -\frac{1}{8\pi} \int \text{div}\{\psi(\mathbf{B} - \mathbf{I}_0)\} dV + \frac{1}{2} \int \psi \rho_m^0 dV,$$

причем интегрирование должно быть, разумеется, распространено по всему объему полного поля. Если мы для простоты предположим, что в поле нет никаких поверхностей разрыва величин ψ , \mathbf{B} и \mathbf{I}_0 , то первый из интегралов правой части с помощью теоремы Гаусса может быть преобразован в интеграл по поверхности полного поля, откуда следует, что интеграл этот равен нулю. Следовательно, в этом случае:

$$W_m = \frac{1}{2} \int \rho_m^0 \psi dV. \quad 266'$$

Для дальнейшего доказательства достаточно отметить полную аналогию формул (265), (266) и (266') с формулами (94), (124) и (124'), основываясь на которых мы в § 25 показали¹, что плотность пондеромоторных сил электрического поля равна:

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \nabla E^2.$$

Очевидно, что, повторяя рассуждения этого параграфа, мы в рассматриваемом

¹ Полагая в первом приближении $\varepsilon - 1$ пропорциональным плотности диэлектрика, см. стр. 160.

случае должны прийти к совершенно аналогичному выражению для плотности пондеромоторных сил, испытываемых в магнитном поле постоянными магнитами и намагничивающимися магнетиками:

$$\mathbf{f} = \rho^0 \mathbf{M} + \frac{\mu - 1}{8\pi} \nabla H^2.$$

Чтобы убедиться в том, что это выражение действительно совпадает с ранее установленной формулой (230^{*)}):

$$\mathbf{f} = I_0 \nabla \cdot \mathbf{H} + \frac{\mu - 1}{8\pi} \nabla H^2,$$

достаточно применить к первому члену $I_0 \nabla \cdot \mathbf{H}$ те преобразования, которые привели нас в § 41 от (230) к (231).

Итак, энергия поля постоянных магнитов выражается той же формулой (265), как и энергия поля токов. Очевидно, стало быть, что формула эта остается справедливой и в том случае, если магнитное поле возбуждается совокупным действием как токов, так и постоянных магнитов. Отметим при этом еще раз, что выражение

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H} dV$$

эквивалентно (265) лишь в том случае, если постоянных магнитов в поле нет ($I_0 = 0$ в противном случае $B \neq \mu H$). Наконец в том случае, если в поле имеются ферромагнетики, проницаемость которых μ зависит от H , или магниты, „постоянное“ намагничение которых I_0 не остается строго постоянным при изменениях поля (размагничивание и т. п.), то формула (265) также перестает быть справедливой и должна быть заменена более сложным выражением, на выводе которого мы останавливаться не будем¹.

Пример I. Самоиндукция кругового проводника. Цилиндрический провод радиуса r_0 согнут так, что он образует окружность радиуса R . По нему протекает ток J . Объем проводника обозначим через V'' , объем окружающего его пространства через V' , а энергию поля тока в V' и в V'' соответственно через W' и W'' :

$$W' = \frac{1}{8} \int_{V'} \mu H^2 dV, \quad W'' = \frac{1}{8\pi} \int_{V''} \mu H^2 dV.$$

Если провести опирающуюся на контур провода условную перегородку S' (см. рис. 81, который изображает сечение провода меридиональной плоскостью), то поле тока вне проводника можно будет считать обладающим потенциалом ϕ , причем потенциал этот будет испытывать на перегородке S' скачок

$$\phi_+ - \phi_- = \frac{4\pi J}{c}$$

¹ См. по этому вопросу, например, Abraham, Theorie d. Elektrizität, B. I. Abschnitt IV.

(см. ур. 190, стр. 234). Энергия внешнего поля тока выразится при этом формулой:

$$W' = \frac{1}{8\pi} \int_{V'} \mathbf{B} \mathbf{H} dV = -\frac{1}{8\pi} \int_{V'} \mathbf{B} \operatorname{grad} \phi dV.$$

Согласно (66) и (225) $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ и

$$\mathbf{B} \operatorname{grad} \phi = \operatorname{div}(\phi \mathbf{B}) - \phi \operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div}(\phi \mathbf{B});$$

следовательно, на основании теоремы Гаусса, получаем:

$$W' = -\frac{1}{8\pi} \int_{V'} \operatorname{div}(\phi \mathbf{B}) dV = -\frac{1}{8\pi} \oint \phi B_n dS,$$

причем поверхностный интеграл должен быть распространен, во-первых, по границе объема V' , образуемой поверхностью проводника S (интеграл по внешней поверхно-

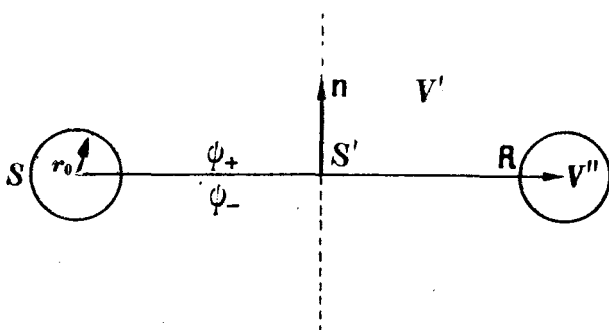


Рис. 81.

сти полного поля равен нулю), и, во-вторых, по обеим сторонам поверхности разрыва потенциала. Последний из этих поверхностных интегралов очевидно равен:

$$\int_{S'} (\phi_- - \phi_+) B_n dS = -\frac{4\pi J}{c} \int_{S'} B_n dS,$$

где B_n есть слагающая \mathbf{B} по направлению положительной нормали к S' (рис. 81). Стало быть

$$W' = -\frac{1}{8\pi} \oint_S \phi B_n dS + \frac{J}{2c} \int_{S'} B_n dS.$$

Предположим теперь для определенности, что пространство вне провода заполнено однородным магнетиком проницаемости μ' , тогда как проницаемость проводника равна μ'' . Предположим далее, что радиус провода r_0 весьма мал по сравнению с радиусом образуемой им окружности R , и рассмотрим участок провода длины l , удовлетворяющий условию $r_0 \ll l \ll R$. Ввиду $l \ll R$ участок этот можно считать прямолинейным. Так как кроме того $r_0 \ll l$, то поле внутри провода и в непосредственной близости от его поверхности будет лишь весьма незначительно отличаться от поля

бесконечно длинного прямолинейного тока и, стало быть, с достаточной точностью будет определяться формулами ¹:

$$(r \geq r_0) \quad H' = \frac{2J}{cr}, \quad (r \leq r_0) \quad H'' = \frac{2Jr}{cr_0^2},$$

где r есть расстояние рассматриваемой точки поля от оси (т. е. центральной линии) провода. Таким образом вне провода на достаточно близком расстоянии от его поверхности ($r \ll R$) поле рассматриваемого нами тока совпадает с полем линейного тока той же силы, сосредоточенного на оси провода. С другой стороны поле тока должно совпадать с полем линейного тока и на больших расстояниях от поверхности провода ($r \gg r_0$), на которых распределение тока по сечению провода сказываться не может. Так как любая точка внешнего пространства V' удовлетворяет хотя бы одному из этих условий ($r \gg r_0$ либо $r \ll R$), то при определении поля во всем пространстве V' мы можем считать ток J сосредоточенным на оси провода.

Стало быть, входящий в выражение для W' интеграл $\int_{S'} B_n dS$ должен равняться потоку

индукции Ψ' , посылаемому этим линейным круговым током J через концентрическую окружность радиуса $R - r_0$, образованную пересечением внутренней стороны поверхности провода S с плоскостью S' . Следовательно, если обозначить через L_{12}' коэффициент взаимной индукции двух концентрических окружностей радиусов R и $R - r_0$, то, согласно (236),

$$\int_{S'} B_n dS = \Psi' = \frac{1}{c} J L_{12}'.$$

Так как при указанных условиях векторы магнитного поля у поверхности провода S касательны к этой поверхности, то первый член в выражении для W' равен нулю и, стало быть,

$$W' = \frac{J}{2c} \int_{S'} B_n dS = \frac{1}{2c^2} J L_{12}'.$$

Обращаясь к выражению для W'' и внося в него приведенное выше значение вектора H'' , получим:

$$W'' = \frac{1}{8\pi} \int_{V''} \mu H^2 dV = \frac{\mu''}{8\pi} \int_{l=0}^{l=2\pi R} \int_{r=0}^{r=r_0} \frac{4J^2 r^2}{c^2 r_0^4} 2\pi r dr dl = \frac{\pi \mu'' R J^2}{2c^2}.$$

Итак, общая энергия поля тока равна:

$$W = W' + W'' = \frac{1}{2 \cdot 2} J^2 (L_{12}' + \pi \mu'' R).$$

откуда на основании (265''') следует:

$$L_{11} = \pi \mu'' R + L_{12}'.$$

¹ Формулы эти были выведены в § 34 (стр. 231, задача 32) в предположении, что $\mu = 1$. Однако доказательство их основывалось лишь на уравнении (185), остающемся справедливым в произвольной среде, и на факте аксиальной симметрии поля прямолинейного тока.

Величина $\kappa\mu''R$ является мерой энергии W' , запасенной внутри провода, и может быть названа его «внутренней» самоиндукцией, а величина L'_{12} , являющаяся мерой энергии W'' , может быть названа «внешней» самоиндукцией провода. Обозначая внешнюю и внутреннюю самоиндукцию через L' и L'' , можем написать:

$$L' = L'_{12}, \quad L'' = \kappa\mu''R, \quad L_{11} = L' + L''.$$

Таким образом при упомянутых выше условиях внутренняя самоиндукция L' провода радиуса r_0 , образующего окружность радиуса R , пропорциональна его длине $2\pi R$, а его внешняя самоиндукция L'' равна коэффициенту взаимной индукции L'_{12} двух концентрических окружностей радиусов R и $R - r_0$. Этот коэффициент L'_{12} может быть вычислен с помощью общей формулы (236) (см. пример определения коэффициента L'_{12} для двух квадратов, § 36). Чтобы не загромождать изложения чисто математическими выкладками, приведем здесь лишь окончательный результат (для случая $r_0 \ll R$):

$$L'_{12} = 4\pi R \left(\lg \frac{8R}{r_0} - 2 \right).$$

Пример II. Самоиндукция единицы длины кабеля. — Рассмотрим проводник, состоящий из двух концентрических полых цилиндров, длина которых весьма велика по сравнению с их радиусами r_1 и r_2 . На обоих концах проводника внутренний и внешний его цилиндры соединены между собою, так что совокупность обоих цилиндров составляет замкнутую проводящую цепь, по которой циркулирует ток J . При этом направление тока во внешнем цилиндре, разумеется, обратно направлению его во внутреннем цилиндре. Подобную цепь тока мы будем условно называть здесь и в §§ 62 и 63 *кабелем*, хотя термин этот имеет, конечно, более широкое значение.

Если длина кабеля достаточно велика по сравнению с его радиусом, то вблизи средней его части поле протекающего по кабелю тока будет такое же, как и в случае кабеля бесконечной длины. Понятие самоиндукции бесконечного кабеля, разумеется, смысла не имеет, ибо при увеличении длины кабеля общая энергия его поля, а стало быть, и самоиндукция кабеля L_{11} растет до бесконечности. Целесообразно, однако, ввести в рассмотрение самоиндукцию единицы длины бесконечного кабеля, понимая под этим меру той доли энергии его поля, которая заключается между двумя перпендикулярными кабелю плоскостями, находящимися на единичном расстоянии друг от друга. Если мы условимся отмечать звездочкой все величины, относящиеся к единице длины кабеля, то по аналогии с (265'') можно написать:

$$W^*_{11} = \frac{1}{2c^2} L^*_{11} J^2.$$

Физический смысл величины L^*_{11} сводится, очевидно, к тому, что при увеличении длины достаточно длинного кабеля на единицу, самоиндукция его L_{11} увеличивается на L^*_{11} единиц.

Предположим для простоты, что «обкладки» кабеля (т. е. образующие кабель цилиндрические проводники) обладают столь малой толщиной (по сравнению с r_1 и r_2), что в первом приближении их можно считать бесконечно тонкими поверхностями.

Поле тока, равномерно распределенного по поверхности цилиндра, равно нулю внутри этого цилиндра; во внешнем же пространстве оно таково, как если бы ток был сосредоточен на оси цилиндра (см. задачи 27 и 32, стр. 210 и 231). Стало быть, поле кабеля внутри цилиндра r_1 равно нулю, между цилиндрами r_1 и r_2 совпадает с полем

линейного тока силы J , и наконец, вне цилиндра r_2 также равно нулю (ибо по внутренней и по внешней обкладкам кабеля протекают токи равной величины и противоположного направления). Стало быть, приходящаяся на единицу длины кабеля энергия W^*_{11} сосредоточена в пространстве между его обкладками, т. е. в полом цилиндре длины l , внутренний и внешний радиусы которого равны r_1 и r_2 . Итак,

$$W^* = \frac{1}{8\pi} \int \mu H^2 dV = \frac{\mu}{8\pi} \int_{r=r_1}^{r=r_2} \left(\frac{2J}{cr} \right)^2 2\pi r dr = \frac{\mu J^2}{c^2} lg \left(\frac{r_2}{r_1} \right),$$

где μ означает проницаемость среды, заключенной между обкладками кабеля. Сравнивая это с предыдущим уравнением, получим окончательно:

$$L^*_{11} = 2\mu lg \left(\frac{r_2}{r_1} \right).$$

Задача 37. — Доказать, что взаимная энергия токов и постоянных магнитов равна нулю, т. е., иными словами, доказать, что энергия магнитного поля, возбуждаемого совокупным действием токов и магнитов, равна арифметической сумме энергии поля токов и энергии поля магнитов (тогда как, например, взаимная энергия W_{12} двух токов отлична от нуля, см. уравнение 265"). Дать физическое истолкование этого результата.

Задача 38. Метод Квинке измерения магнитной восприимчивости жидкостей и газов состоит в следующем. Жидкость помещается в U -образную трубку расположенную так, чтобы мениск жидкости в узком капиллярном колене трубки находился в сильном магнитном поле H , тогда как другое широкое колено трубки находится вне поля. При включении поля H пондеромоторные силы этого поля вызывают повышение уровня жидкости в капилляре на высоту h . Показать, что восприимчивость χ жидкости равна:

$$\chi = \frac{2h\tau g}{H^2} + \chi_0,$$

где τ есть плотность жидкости, χ_0 — восприимчивость газа, находящегося над ее поверхностью, а g — ускорение силы тяжести.

§ 49. Вихри электрического поля. — 1. В § 46 мы вывели законы индукции токов в движущихся проводниках, основываясь на том обстоятельстве, что согласно § 37 на электрические заряды действует Лорентцова сила (214):

$$\mathbf{F} = c \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right\},$$

второй член которой пропорционален скорости заряда и напряженности магнитного поля \mathbf{H} . Затем, основываясь на принципе относи-

тельности движения, мы показали, что индукция токов должна иметь место и в неподвижных проводниках при изменениях напряженности магнитного поля, причем

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int B_n dS,$$

где интегрирование может быть распространено по любой поверхности S , опирающейся на контур проводника. Для случая неподвижных¹ проводников поверхность эта тоже может быть выбрана неподвижной, причем в этом случае дифференцирование по времени может быть выполнено под знаком интеграла:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial B_n}{\partial t} dS. \quad 267$$

Знак полной производной по времени заменен здесь нами знаком частной производной (круглое ∂) для того, чтобы отметить, что $\frac{\partial B_n}{\partial t}$ есть скорость изменения во времени величины B_n в фиксированной точке пространства ($x, y, z = \text{const}$).

Итак мы приходим к заключению, что изменение магнитного поля должно вызывать в неподвижных проводниках появление сил, действующих на электрические заряды, причем циркуляция этих сил по контуру проводника, обозначаемая нами через $\mathcal{E}_{\text{инд}}$, определяется формулой (267).

2. В § 2 напряженность электрического поля E была определена нами, как сила, действующая на единичный положительный (пробный) заряд. Однако в § 37 мы убедились, что и в отсутствие электрического поля движущийся заряд может испытывать силу

$$F = \frac{e}{c} [vH].$$

Это обстоятельство ведет к необходимости уточнить определение напряженности электрического поля E в том смысле, что E равно силе, действующей на неподвижный единичный положительный пробный заряд. Действительно, из (214) следует:

$$\text{при } v = 0 \quad E = \frac{1}{e} F$$

¹ Относительно инерциальной системы, в которой производятся измерения поля. см. стр. 323.

(предполагаем, что сторонние Э. Д. С. химического и термического происхождения отсутствуют).

Исходя из этого определения электрического поля, мы на основании относящейся к неподвижным проводникам формулы (267) должны заключить, что при изменениях магнитного поля в этих проводниках возбуждается поле электрическое, циркуляция напряженности которого E по контуру проводника L равна ¹:

$$\oint_L E_s ds = \mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial B_n}{\partial t} dS = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (267')$$

Формула эта останется справедливой и в том случае, если мы условимся во всем дальнейшем понимать под E общую напряженность электрического поля вне зависимости от того, возбуждается ли это поле (полностью или частично) стационарными электрическими зарядами (Кулоново поле) или же изменениями поля магнитного. Ибо согласно (34) циркуляция электрического вектора поля стационарных зарядов равна нулю.

При выводе уравнения (267') предполагалось, что контур интегрирования L совпадает с контуром линейного проводника. Естественно, однако, предположить, что если изменения магнитного поля возбуждают электрическое поле в проводнике, то они возбуждают его также и вне проводников. Иными словами, естественно предположить, что уравнение (267') применимо к любому замкнутому неподвижному контуру интегрирования вне зависимости от того, проходит ли этот контур по проводникам, по диэлектрикам или по вакууму, и что отличие проводящего контура от непроводящего сказывается лишь в том, что только в проводниках возбуждение поля ведет к появлению тока.

Итак мы допустим, что уравнение (267') применимо к любому замкнутому неподвижному контуру интегрирования L . Предполагая,

¹ Таким образом явления индукции токов в проводниках, движущихся в постоянном магнитном поле, истолковываются нами как результат воздействия магнитного поля (Лорентцова сила); тогда как индукция в неподвижных проводниках при изменениях магнитного поля истолковывается совершенно иным образом, как результат воздействия электрического поля, возбуждаемого изменениями поля магнитного. Между тем, как мы убедились в § 46, никакой объективной разницы между этими двумя видами индукции, нет, ибо понятие движения относительно. Первая из посвященных теории относительности работ Эйнштейна начинается указанием на необходимость устранения этой принципиальной разницы в истолковании двух явлений, объективно неотличимых друг от друга. Теория относительности эту задачу разрешила (см. том II).

что на опирающейся на контур L поверхности S нет точек разрыва сплошности вектора \mathbf{E} , мы можем преобразовать левую часть этого уравнения с помощью теоремы Стокса (175):

$$\oint_L \mathbf{E}_s ds = \int_S \operatorname{rot}_n \mathbf{E} dS = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}_n}{\partial t} dS.$$

Это уравнение должно оставаться справедливым при любом выборе контура L и поверхности интегрирования S , что может иметь место лишь в том случае, если

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad 268$$

Таким образом явления индукции приводят к необходимости допустить, что электрическое поле может возбуждаться не только электрическими зарядами, но и изменениями вектора индукции магнитного поля (которое, впрочем, в свою очередь возбуждается движением электрических зарядов).

Уравнение (268), связывающее значение вихря электрического вектора с производной по времени от магнитной индукции, представляет собой одно из основных уравнений электромагнитного поля.

3. В частности можно показать, что из него вытекает другое фундаментальное уравнение электромагнитного поля (225):

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Действительно, вспомнив, что дивергенция ротора равна нулю (ур. 65₂), получим из (268):

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Стало быть, в каждой точке пространства $\operatorname{div} \mathbf{B}$ должна иметь постоянное значение, которое ни при каких физических процессах изменяться не может. Если мы станем на ту точку зрения, что единственным источником магнитного поля является движение электрических зарядов, то мы должны будем допустить, что при полной остановке движения всех зарядов (в том числе и тех зарядов, движение которых создает элементарные токи в молекулах магнетиков) вектор \mathbf{B} , а стало быть и $\operatorname{div} \mathbf{B}$, должны обращаться в нуль. Следовательно, постоянное значение $\operatorname{div} \mathbf{B}$ во всех точках пространства должны равняться нулю, что и требовалось доказать.

4. В § 32 мы убедились, что необходимое и достаточное условие того, чтобы вектор обладал (однозначным) скалярным потенциалом,

состоит в равенстве нулю его ротора во всех точках пространства или, что сводится к тому же, в равенстве нулю его циркуляции по произвольному контуру (см. также § 8, в частности, уравнение 34). Из (267') и (268) следует, что для электрического вектора \mathbf{E} это условие удовлетворяется только в стационарных полях $\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0\right)$, и что, стало быть, электрический вектор \mathbf{E} переменного электромагнитного поля $\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0\right)$ (однозначным) скалярным потенциалом φ не обладает.

В связи с этим целый ряд понятий, введенных нами при изучении обладающего потенциалом стационарного электрического поля, теряет непосредственный физический смысл. Так, например, в § 28 мы ввели понятие электрического напряжения \mathcal{E}_{12} , существующего между двумя произвольными точками поля 1 и 2, определив его как линейный интеграл напряженности поля \mathbf{E} по произвольному пути, соединяющему точки 1 и 2:

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 E_s ds$$

(уравнение 154). В случае обладающего потенциалом стационарного поля, согласно (155),

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 E_s ds = \varphi_2 - \varphi_1,$$

так что напряжение \mathcal{E}_{12} равно разности потенциалов точек 1 и 2 и однозначно определяется положением этих точек. В случае же

лишенного потенциала переменного поля значение интеграла $\int_1^2 E_s ds$

существенно зависит от выбора пути интегрирования, так что можно говорить лишь о напряжении \mathcal{E}_{12} , существующем между данными точками 1 и 2 вдоль данного пути.

5. Пусть 1 и 2 суть две произвольные точки некоторого замкнутого проводника L , к которым параллельно L приключен гальванометр G (см. рис. 82). Если R_0 есть общее сопротивление гальванометра и подводящих проводов, соединяющих его с 1 и 2, то сила тока J_0 в цепи гальванометра, согласно закону Ома (154), будет равна:

$$J_0 = \frac{1}{R_0} \mathcal{E}_{12} = \frac{1}{R_0} \int_1^2 E_s ds.$$

В стационарном электромагнитном поле значение последнего интеграла от пути интегрирования не зависит. В переменном же поле формула (154) остается справедливой, как явствует из ее вывода, лишь в том случае, если под $\int_1^2 E_s ds$ понимать линейный интеграл вектора \mathbf{E} от 1 до 2, взятый вдоль того именно проводника, по которому течет ток J_0 . Так как значение этого интеграла в этом случае существенно зависит от положения и формы пути интегрирования, то стало быть показания гальванометра J будут существенно зависеть от расположения подводных проводов.

Предположим, что в рассматриваемых проводниках сторонние Э. Д. С. отсутствуют. Пусть R_a и R_b суть соответственно сопротивления, а J_a и J_b — сила токов в участках 1a2 и 2b1 контура L . Пусть далее Ψ есть поток магнитной индукции через контур L , а Ψ_0 — поток ее через контур, образованный цепью гальванометра 1G2

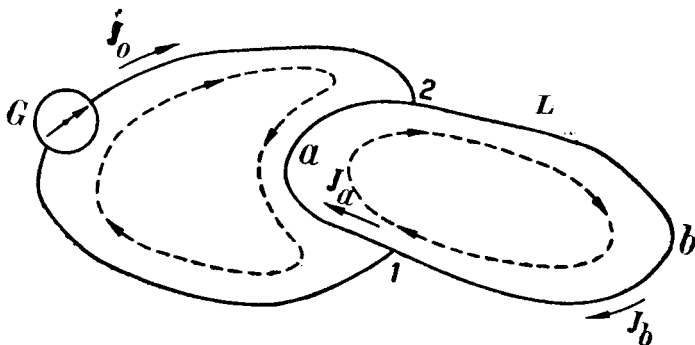


Рис. 82.

и участком 2a1 контура L (см. рис. 82). Выберем, наконец, определенным образом направление положительного обхода этих контуров например так, как указано пунктиром на рисунке. Применяя второй закон Кирхгофа к контуру 192a1, мы на основании (267') можем написать:

$$J_0 R_0 - J_a R_a = \oint_{1G2a1} E_s ds = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_0}{\partial t}$$

(Знак минус перед $J_a R_a$ введен потому, что согласно рисунку направление положительного обхода контура противоположно направлению тока J_a). Соответственно этому для контура L получим:

$$J_a R_a + J_b R_b = \oint_{1b1a1} E_s ds = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Применив наконец первый закон Кирхгофа к точкам разветвления цепи 1 и 2, получим:

$$J_b = J_0 + J_a.$$

Исключая из этих уравнений J_a и J_b , найдем:

$$J_0 \{ R_0(R_a + R_b) + R_a R_b \} = -\frac{1}{c} \left\{ R_a \frac{\partial \Psi}{\partial t} + (R_a + R_b) \frac{\partial \Psi_0}{\partial t} \right\}.$$

Таким образом показания гальванометра J_0 действительно существенно зависят от скорости изменения потока Ψ_0 через контур $1G2a1$, в свою очередь зависящего от расположения цепи гальванометра.

Предположим, например, что собственным магнитным полем токов J_a , J_b и J_0 можно пренебречь по сравнению с „внешним“ полем переменного тока J' заданной силы и периода, который циркулирует по соленоиду AB (рис. 83), охватываемому контуром L . Допустим далее для упрощения, что магнитное поле соленооида можно с достаточной степенью точности считать сосредоточенным внутри соленооида, т. е. что вне соленооида $B = H = 0$. Пусть, наконец, $R_a = R_b$. При этих условиях легко показать¹, что в двух различных положениях цепи гальванометра, обозначенных на рисунке соответственно сплошной и пунктирной линиями, ток в цепи гальванометра $1G2$ будет иметь одинаковую силу,

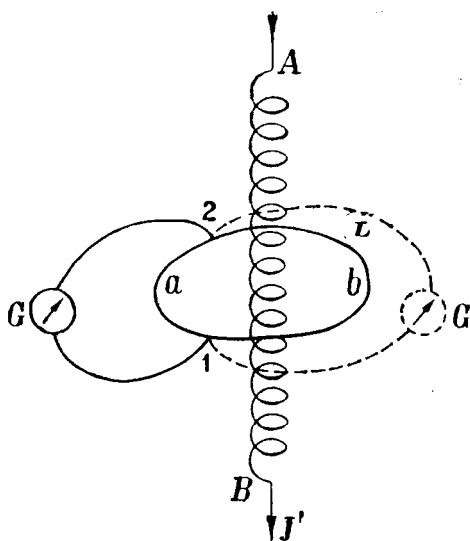


Рис. 83.

но противоположное направление (например, $1G2$ в первом и $2G1$ во втором случае). Стало быть, если мы хотим пользоваться термином „напряжение“, то мы должны сказать, что переброска цепи гальванометра слева направо влечет за собой изменение знака напряжения \mathcal{E}_{12} , приложенного к конечным точкам этой цепи 1 и 2!

6. Однако, и в случае переменных токов при известных условиях и при соблюдении известной осторожности бывает иногда удобно пользоваться понятием напряжения. Рассмотрим в виде примера наиболее

¹ Предоставляем это читателю в виде упражнения.

простую схему сети центральной электростанции переменного тока, состоящую из двух почти замкнутых контуров I и II, концы которых соединены двумя близко расположенными друг к другу проводниками ac и bc (рис. 84). Участок I включает в себя генераторную установку электростанции, а участок II — потребителей тока.

Пренебрегая потоком индукции через полоску, ограниченную проводниками ac и bd , можем считать, что поток индукции Ψ через контур всей цепи равен сумме потоков Ψ_1 и Ψ_2 через петли I и II; при вычислении потоков Ψ_1 и Ψ_2 условимся считать петли эти дополненными до замкнутости прямолинейными отрезками ab и cd . В этом случае, согласно (255),

$$J(R_1 + R_2) = \mathcal{E}_1^{cmp} + \mathcal{E}_2^{cmp} - \frac{1}{c} \frac{d\Psi_1}{dt} - \frac{1}{c} \frac{d\Psi_2}{dt},$$

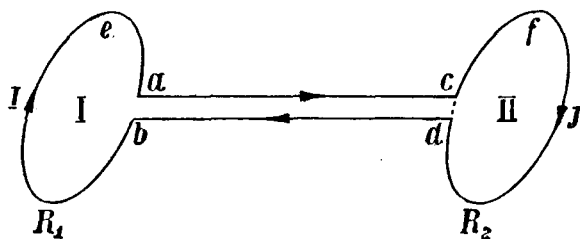


Рис. 84.

друг от друга, то их взаимной индукцией можно пренебречь и положить

$$\Psi_1 = \frac{1}{c} L_{11} J \quad ; \quad \Psi_2 = \frac{1}{c} L_{22} J,$$

где L_{11} и L_{22} суть самоиндукции петель I и II.

Перепишав последнее уравнение в виде:

$$J R_2 - \mathcal{E}_2^{cmp} + \frac{1}{c} \frac{d\Psi_1}{dt} = - \left(J R_1 - \mathcal{E}_1^{cmp} + \frac{1}{c} \frac{d\Psi_1}{dt} \right) = \mathcal{E}_{cd}, \quad 269$$

убедимся, что для определения величины \mathcal{E}_{cd} в этом случае достаточно знать значения величин J , R_1 , \mathcal{E}_1^{cmp} , L_{11} , относящихся лишь к одному „генерирующему“ участку I. Обратно, если \mathcal{E}_{cd} известно, то сила тока в цепи может быть определена в зависимости от значения величины R_2 , \mathcal{E}_2^{cmp} , L_{22} , относящихся к одному лишь „потребляющему“ участку II, причем \mathcal{E}_{cd} играет роль добавочной сторонней Э. Д. С., приложенной к почти замкнутому контуру II. Эта именно величина \mathcal{E}_{cd} и называется напряжением, приложенным к „потребляющему“ участку цепи II и возбуждаемым „генерирующим“ участком цепи I.

Применим закон Ома к участку II:

$$JR_2 = \mathcal{E}_2^{emp} + \int_{c/d} E_s ds.$$

Так как, с другой стороны,

$$-\frac{1}{c} \frac{d\Psi_2}{dt} = \oint_{c/d} E_s ds,$$

то

$$\mathcal{E}_{cd} = JR_2 - \mathcal{E}_2^{emp} + \frac{1}{c} \frac{d\Psi_2}{dt} = \int_{c/d} E_s ds - \oint_{c/d} E_s ds = \int_c^d E_s ds,$$

где последний интеграл, согласно данному выше определению величины Ψ_2 , должен быть взят по кратчайшему пути, соединяющему точки c и d . Таким образом напряжение \mathcal{E}_{cd} равно линейному интегралу напряженности электрического поля E по этому пути и, стало быть, может быть измерено по силе тока в гальванометре, включенном между точками c и d . При этом цепь гальванометра, может отклоняться от прямой cd лишь в таких (впрочем, на практике довольно широких) пределах, чтобы это отклонение не сказалось сколько-нибудь значительно на значении интеграла $\int_c^d E_s ds$.

Полагая для простоты, что контур тока не деформируется, так что самоиндукции L_{11} и L_{22} петель I и II постоянны во времени, получаем на основании (265''):

$$\frac{1}{c} J \frac{d\Psi_1}{dt} = \frac{1}{c^2} J L_{11} \frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2c^2} L_{11} J^2 \right) = \frac{dW_1}{dt},$$

где W_1 есть магнитная энергия поля тока в первом участке цепи. Аналогичное соотношение справедливо и для участка II. Стало быть, помножив (269) на J , можем написать

$$\begin{aligned} \left(J^2 R_2 - J \mathcal{E}_2^{emp} + \frac{dW_2}{dt} \right) &= - \left(J^2 R_1 - J \mathcal{E}_1 + \frac{dW_1}{dt} \right) = \\ &= J \mathcal{E}_{ca} \end{aligned}$$

Так как $J^2 R$ равно выделяемому током теплу, а $J \mathcal{E}^{emp}$ равно работе сторонних Э. Д. С. (в единицу времени), то, следовательно, $J \mathcal{E}_{ca}$ равно общей убыли энергии I участка цепи и приращению энергии II участка. Иными словами $J \mathcal{E}_{ca}$ равно энергии, передаваемой за единицу времени генерирующим участком I потребляющему участку II.

Таким образом при условии достаточной близости проводов ac и bd и достаточной удаленности друг от друга участков I и II действительно оказывается весьма целесообразным вводить в рассмотрение определяемую уравнением (269) величину \mathcal{E}_{ca} , называемую в технике напряжением переменного тока.

§ 50. Токи смещения. — 1. До сих пор мы предполагали, что переменные токи, подобно токам постоянным, являются замкнутыми. Как мы убедились в § 27, необходимым условием замкнутости линий тока является требование, чтобы в каждой точке проводника удовлетворялось соотношение (148')

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Из (148') в частности следует, что в неразветвленном проводнике сила тока в каждый данный момент одинакова во всех его сечениях и что в точках разветвления проводников удовлетворяется первый закон Кирхгофа (146).

Однако формула (148') и вытекающие из нее выводы, в сущности говоря, не применима к переменным токам или, точнее говоря, применима с известным приближением лишь к определенному классу переменных токов (замкнутые квазистационарные токи, см. дальше). Вообще же говоря переменные токи могут протекать по незамкнутым контурам (цепь с конденсатором, между обкладками которого находится диэлектрик; токи в антенне и т. п.), сила их может быть различна в различных сечениях проводника и т. д. Напомним, что самое уравнение (148') было получено нами в § 27 из более общего „уравнения непрерывности“ (147):

$$\oint_S \mathbf{j}_n dS = - \frac{de}{dt}$$

(где e есть заряд, находящийся в ограниченном поверхностью S объеме V) на том основании, что в поле постоянных токов распределение электрических зарядов должно оставаться постоянным. В случае же токов переменных это условие, вообще говоря, не выполняется и (147) не сводится к (148').

2. Для дальнейшего нам удобно будет преобразовать уравнение непрерывности следующим образом. Если в ограничиваемой поверхностью S объеме V нет ни поверхностных зарядов, ни разрывов сплошности плотности тока \mathbf{j} (разрывы эти могут иметь место лишь на поверхностях раздела различных сред), то

$$e = \int_V \rho dV,$$

где ρ объемная плотность электрических зарядов, и

$$\oint_S j_n dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV$$

[согласно теореме Гаусса (25)]. Стало быть (147) принимает вид:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

где изменение порядка интегрирования по V и дифференцирования по t возможно при условии неподвижности рассматриваемого нами объема V (поэтому знак частной производной по времени, см. стр. 352). Ввиду произвольности объема V из последнего равенства следует:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad 270$$

Это последнее уравнение и представляет собой дифференциальную форму уравнения непрерывности. На поверхностях разрыва вектора \mathbf{j} оно должно быть конечно заменено уравнением

$$\operatorname{Div} \mathbf{j} = j_{2n} - j_{1n} = - \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad 270'$$

в чем можно убедиться либо непосредственно из (147), либо на основании (32). В частности, на границе проводника и непроводящей среды будет иметь место соотношение:

$$\mathbf{j}_n = \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad 270''$$

гласящее, что количество электричества j_n , притекающее за единицу времени к единице поверхности проводника, равно приращению заряда σ этого участка поверхности. Уравнения (270) и (270') дают возможность, зная плотность токов, определить вызываемое этими токами изменение распределения зарядов.

3. Обратим теперь внимание на то чрезвычайно существенное обстоятельство, что при $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ уравнение непрерывности не совместимо с уравнением магнитного поля токов (185):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}.$$

Действительно, согласно этому уравнению \mathbf{j} пропорционально вихрю вектора \mathbf{H} . Но дивергенция вихря всегда равна нулю (ур-ие 65), тогда как согласно (270) $\text{div } \mathbf{j}$, вообще говоря, нулю не равна.

Подобно этому эквивалентное (185) уравнение (188'):

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi J}{c} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j}_n \cdot d\mathbf{S}$$

неприложимо к токам переменным уже по одному тому, что сила незамкнутых токов, протекающих через опирающуюся на контур L поверхность S , существенно зависит не только от контура L , но и от формы и расположения поверхности S . В частности в этом

случае всегда можно провести поверхность S так, чтобы она вовсе не пересекала несущих ток проводников (см. рис. 85, где изображена цепь переменного тока, включающая в себя конденсатор C).

Итак, уравнения магнитного поля постоянных токов, полученные нами в гл. IV, вообще говоря, неприложимы к переменным токам и нуждаются в видоизменениях и дополнениях.

4. Основываясь на убеждении в справедливости уравнения непрерывности

(270), можно попытаться путем чисто формальных математических рассуждений определить простейший вид поправки, внесение которой в формулу (185) устранил указанное противоречие между этой формулой и (270).

До сих пор мы исходили из предположения, что электрические токи состоят в движении электрических зарядов по проводникам, и что плотность их, согласно (145'), определяется значением коэффициента электропроводности проводника λ :

$$\mathbf{j} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{см}).$$

Будем отныне называть эти токи токами проводимости и допустим, что помимо них могут существовать также и токи некоторого иного происхождения, которые мы будем называть токами смещения (смысл этого названия выяснится в дальнейшем). Плотность полного тока $\mathbf{j}_{пл}$ будет, стало быть, равна сумме плотностей тока проводимости \mathbf{j} и тока смещения $\mathbf{j}_{см}$:

$$\mathbf{j}_{пл} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{см}.$$

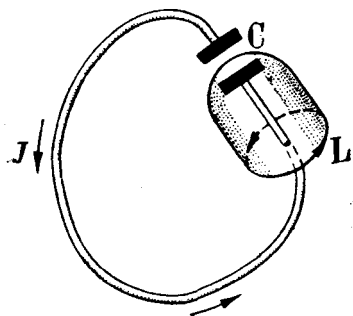


Рис. 85.

Предположим при этом, что истинная зависимость вектора \mathbf{H} от \mathbf{j} отличается от (185) только в том отношении, что $\text{rot } \mathbf{H}$ пропорционален не \mathbf{j} , а плотности полного тока \mathbf{j}_{nl} :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{nl} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{см}). \quad 272$$

Иными словами, предположим, что в магнитном отношении токи смещения эквивалентны токам проводимости, т. е. возбуждают магнитное поле по тем же законам, как и токи проводимости.

Взяв дивергенцию от обеих частей уравнения (272), мы на основании равенства нулю дивергенции ротора (уравнение 65₂) получим:

$$\text{div } \mathbf{j}_{nl} = \text{div } \mathbf{j} + \text{div } \mathbf{j}_{см} = 0.$$

Стало быть, поле полного тока должно быть лишено истоков, т. е. линии полного тока не могут нигде ни начинаться ни кончаться и должны быть замкнутыми (либо должны всюду плотно заполнять некоторую поверхность, см. § 34). Следовательно, там, где обрываются линии тока проводимости, к этим линиям должны непосредственно примыкать продолжающие их линии тока смещения.

Далее из последнего равенства на основании (270) следует:

$$\text{div } \mathbf{j}_{см} = -\text{div } \mathbf{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Но, согласно (112),

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho.$$

Стало быть,

$$\text{div } \mathbf{j}_{см} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{D} = \text{div} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right).$$

Самый простой, хотя, конечно, и не единственный, способ удовлетворить этому равенству состоит в том, чтобы положить:

$$\mathbf{j}_{см} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad 271'$$

т. е. положить, что плотность тока смещения в каждой точке поля пропорциональна скорости изменения вектора электрической индукции \mathbf{D} . Согласно этому определению ток смещения может иметь место не

только в проводниках, но и в диэлектриках и даже в вакууме; однако в стационарном поле ток этот всегда будет равен нулю. Уравнение же (272) примет вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \lambda (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{emp}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad 273$$

При $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$ оно совпадает с прежним уравнением (185), так что все результаты, полученные нами ранее из (185), остаются в силе для полей стационарных.

Итак, вводя чисто формальным образом гипотезу о существовании токов смещения, мы можем устранить противоречие между (270) и (185), не внося при этом никаких видоизменений в законы стационарного электрического поля.

Опыт полностью подтверждает справедливость как этой гипотезы, так и уравнения (273), являющегося одним из основных уравнений электродинамики. Как мы увидим в дальнейшем, наиболее убедительным доказательством является самый факт распространения электромагнитных волн.

5. Чтобы уяснить физический смысл уравнений (271') и (273), рассмотрим случай, когда полный ток сводится к току смещения, т. е. когда ток проводимости равен нулю (непроводящая среда, $\lambda = 0$). В этом случае уравнение (273) примет вид:

$$(\lambda = 0) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad 273'$$

что вполне аналогично уравнению (268):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Из (273') следует, что подобно тому как электрическое поле может возбуждаться не только электрическими зарядами, но и изменениями поля магнитного (т. е. изменениями вектора магнитной индукции \mathbf{B}), так в свою очередь и магнитное поле может возбуждаться не только движением зарядов (токи проводимости), но и изменениями поля электрического (вектора электрической индукции \mathbf{D})¹. Исходя из этой аналогии между (268) и (273'), вели-

¹ Разумеется изменения электрического поля в конечном счете обуславливаются тем же движением зарядов. Более того, с электронной точки зрения некото-

чину $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ можно было бы назвать плотностью „магнитного тока смещения“.

Заметим, что правые части уравнений (273') и (268) имеют различные знаки. Обусловливается это отличие тем, что силовые линии магнитного поля \mathbf{H} , возбуждаемого токами смещения $\mathbf{j}_{см} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, составляют с направлением этих токов правовинтовую систему², тогда как направления векторов \mathbf{E} и $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ находятся в обратном соотношении (рис. 86; сравни рис. 79).

6. Обратимся теперь к вопросу о том, в какой мере существование токов смещения нарушает правильность тех заключений, к которым мы пришли в предшествующих параграфах этой главы. Заметим прежде всего, что внутри проводников, в частности внутри металлов, плотность токов смещения обычно настолько мала по сравнению с плотностью токов проводимости:

$$\mathbf{j}_{см} \ll \mathbf{j},$$

что без ущерба [для точности вычислений ими можно вообще пренебречь.

Предположим, например, что мы имеем дело с периодическим током частоты ν , так что

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos 2\pi\nu t$$

и

$$\mathbf{j}_{см} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon\nu}{2} \mathbf{E}.$$

В этом случае условие $\mathbf{j}_{см} \ll \mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$ эквивалентно требованию:

$$\frac{\varepsilon\nu}{2} \ll \lambda.$$

рая часть (но только часть) плотности токов смещения в диэлектриках (но не в вакууме) непосредственно сводится к движению „связанных“ зарядов среды (см. том II).

¹ Это следует из эквивалентности токов смещения токам проводимости и результатов § 34.

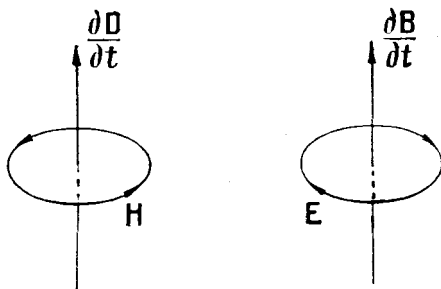


Рис. 86.

Для ртути $\lambda = 9,57 \cdot 10^{15}$ абс. ед. (сек.⁻¹), проводимость же чистых твердых металлов в 10—50 раз больше, т. е. для них $\lambda \sim 10^{17}$ абс. ед. Что же касается диэлектрической постоянной ϵ , то для диэлектриков она лежит примерно в пределах от 1 до 80 (вода); для металлов же значение ϵ не может быть измерено непосредственно, ибо поляризация проводников, если она и существует, полностью маскируется явлениями проводимости (токами). Поэтому данные опыта позволяют установить лишь весьма широкие пределы возможного значения диэлектрической постоянной металлов. Не вступая в противоречие с опытом, мы для простоты можем положить, что для металлов $\epsilon = 1$ (отсутствие поляризации).

Полагая в предшествующем неравенстве $\epsilon = 1$ и $\lambda \sim 10^{16}$ сек.⁻¹, получим:

$$\nu \ll 10^{16} \text{ сек.}^{-1}$$

Таким образом, если частота тока, т. е. число перемен тока в секунду, мала по сравнению с 10^{16} , то током смещения в металлах можно пренебречь по сравнению с токами проводимости в нем же¹. Конечно, для плохих проводников, в частности для электролитов, граница эта опускается несколько ниже; так например в морской воде $j_{см} \ll j$ лишь в том случае, если

$$\nu \ll 10^9 \text{ сек.}^{-1}.$$

Совершенно иной характер имеет вопрос о том, можно ли пренебречь по сравнению с током проводимости теми токами смещения, которые возникают в окружающей проводник непроводящей среде. В большинстве технически интересных случаев это оказывается допустимым при условии, что проводники образуют собою замкнутую цепь. Если же в проводящей цепи тока имеются разрывы, например, если в нее включен конденсатор (см. рис. 85), то током смещения в пространстве между обкладками конденсатора пренебречь, конечно, нельзя. Действительно, полный ток всегда лишен истоков и стоков (см. стр. 363); поэтому общая сила тока смещения, протекающего через конденсатор, равна силе тока в подводящих к нему проводах. Впрочем, в случае включенного в цепь конденсатора электрическое поле тока, а стало быть и ток смещения, концентрируется между обкладками конденсатора. Поэтому с известным приближением цепь с кон-

¹ Заметим, что это условие в сущности никакого ограничения собой не представляет, ибо уже примерно при $\nu \sim 10^{14}$ сек.⁻¹ Максвелловы уравнения в их простейшей форме становятся неприменимыми к материальным телам по причинам совершенно иного характера (см. § 60).

денсатором можно уподобить замкнутой проводящей цепи; иными словами, вычисление самоиндукции цепи, магнитного поля тока и т. д. можно вести так, как если бы между обкладками конденсатора циркулировал ток проводимости такой же силы, как и в подводящих к нему проводах (ибо в магнитном отложении ток смещения эквивалентен току проводимости). Таким образом наличие конденсатора в цепи переменного тока непосредственно сказывается лишь на электрическом, но не на магнитном поле тока (см. следующий параграф).

Иное дело, если мы имеем совершенно разомкнутую проводящую цепь, например прямолинейный проводник конечной длины (антенна). В этом случае токи смещения будут, вообще говоря, распределены по всему окружающему проводник пространству, и о замкнутости цепи говорить не приходится. Наконец при достаточно быстрых электрических колебаниях и достаточной длине проводника (сравнимой с длиной электрической волны) сила тока проводимости может оказаться неодинаковой в различных сечениях проводника (даже если этот проводник замкнут и лишен разветвлений). Если несмотря на это при известных условиях и окажется возможным при определении магнитного поля пренебречь полем токов смещения, то все же подобные токи проводимости постоянным токам уподоблены быть не могут и условиям квазистационарности не удовлетворяют.

Вообще же говоря лишь достаточная медленность изменений поля гарантирует возможность пренебречь токами смещения (сила которых пропорциональна скорости изменений поля), и следовательно гарантирует замкнутость токов проводимости (сравни условия квазистационарности, § 47, стр. 329).

§ 51. Конденсатор в цепи квазистационарного тока.— 1. До сих пор мы рассматривали лишь квазистационарные токи в замкнутых проводящих контурах; теперь в качестве примера мы несколько подробнее рассмотрим цепь с включенным в нее конденсатором.

Пусть C есть емкость конденсатора, R — сопротивление цепи, соединяющей его обкладки, а L — самоиндукция той замкнутой цепи тока, которая получается из данной путем замыкания обкладок конденсатора отрезком помещенного между ними провода¹. Предположим, что сила тока J одинакова во всех сечениях цепи (в проводах это ток проводимости, между обкладками конденсатора — ток смещения),

¹ Если расстояние между этими обкладками достаточно мало, то в известных пределах сечение замыкающего их провода на значении коэффициента L связываться не будет.

и выберем определенным образом положительное направление тока (стрелка на рис. 87). Пусть e_1 и e_2 суть заряды обкладок конденсатора, причем $e_1 = -e_2$. Допустим, что емкость конденсатора настолько превышает емкость остальной цепи, что общая энергия всего электрического поля практически равна энергии того участка этого поля, который заключается между обкладками конденсатора. Если поле удовлетворяет условиям квазистационарности, то в каждый данный момент

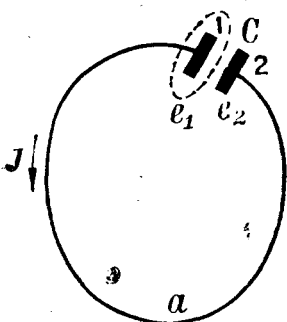


Рис. 87.

значение этой энергии должно находиться в той же зависимости от мгновенной величины заряда конденсатора, как и в статическом случае; аналогичное положение будет применимо и к зависимости магнитной энергии от силы тока в цепи. Стало быть, общая электромагнитная энергия системы должна быть равна:

$$W = \frac{1}{2} \frac{e_1^2}{C} + \frac{1}{2c^2} L J^2.$$

Если же мы станем выражать значения электромагнитных величин не в абсолютных а в практических единицах, то согласно сказанному на стр. 337 получим:

$$W' = \frac{1}{2} \frac{e_1'^2}{C'} + \frac{1}{2} L' J'^2.$$

Чтобы получить дифференциальное уравнение, определяющее силу тока при разряде конденсатора, примем во внимание, что количество выделяющегося в цепи тока, Джаулева тепла должно равняться убыли электромагнитной энергии системы:

$$J'^2 R' = - \frac{dW'}{dt} = - \left(\frac{e_1'}{C'} \frac{de_1'}{dt} + L' J' \frac{dJ'}{dt} \right).$$

С другой стороны, применяя уравнение непрерывности (147) к замкнутой поверхности, охватывающей одну из обкладок конденсатора (пунктир на рис. 87), легко убедиться, что при сделанном нами выборе положительного направления тока сила этого тока J' должна равняться убыли заряда e_1' первой пластины конденсатора и приращению заряда e_2' второй его пластины:

$$J' = - \frac{de_1'}{dt} = \frac{de_2'}{dt}.$$

Внося это в предшествующее уравнение и сокращая его затем на J' , получим:

$$R' J' = \frac{e'_1}{C'} - L' \frac{dJ'}{dt}. \quad 275$$

Дифференцируя наконец (275) по t и применяя вновь уравнение (274), получим окончательно:

$$L' \frac{d^2 J'}{dt^2} + R' \frac{dJ'}{dt} + \frac{J'}{C'} = 0. \quad 275'$$

2. Уравнение (275') имеет хорошо известный вид уравнения затухающих периодических колебаний; его общее решение выражается формулой

$$J' = Ae^{k_1 t} + Be^{k_2 t},$$

где A и B суть произвольные постоянные интегрирования, а k_1 и k_2 корни квадратичного уравнения

$$L' k^2 + R' k + \frac{1}{C'} = 0,$$

т. е.

$$k = -\frac{R'}{2L'} \pm \sqrt{\left(\frac{R'}{2L'}\right)^2 - \frac{1}{L'C'}}.$$

Если подкоренное выражение не отрицательно, то оба числа k_1 и k_2 вещественны и отрицательны (ибо абсолютное значение корня меньше значения первого члена), так что разряд конденсатора будет аperiodическим. Если же подкоренное выражение отрицательно, то k_1 и k_2 комплексны. Введя обозначение:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L'C'} - \left(\frac{R'}{2L'}\right)^2, \quad 276$$

получим в этом случае:

$$k = -\frac{R'}{2L'} \pm i\omega_0$$

и

$$J' = Ae^{k_1 t} + Be^{k_2 t} = e^{-\frac{R'}{2L'} t} \left(Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \right).$$

Выражая $e^{\pm i\omega_0 t}$ через тригонометрические функции легко привести вещественную часть этого выражения к виду:

$$J' = ac e^{-\frac{R'}{2L'}t} \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

где a и φ суть некоторые новые постоянные, значение которых зависит от A и B . Стало быть, в этом случае в цепи циркулирует периодический затухающий ток циклической частоты ω_0^1 . Период колебаний этого тока, т. е. промежуток времени между последовательными моментами прохождения силы тока через нуль в одинаковом направлении (т. е., например, от отрицательных значений J' к положительным), равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0};$$

при условии

$$R'^2 \ll \frac{4L'}{C'}$$

вторым членом выражения (276) можно пренебречь, так что последнее равенство сводится к

$$T = 2\pi \sqrt{L' C'} \quad 276'$$

(формула Томсона). Быстрота затухания силы тока определяется величиной отношения $\frac{R'}{2L'}$: за время одного полного периода сила тока уменьшается в $e^{-\frac{R'}{2L'}T}$ раз. Логарифм этого фактора δ носит название логарифмического декремента колебаний:

$$\delta = \frac{R'}{2L'} T = \frac{R' \pi}{L' \omega_0} \quad 276''$$

Электрические колебания в конденсаторной цепи вполне аналогичны колебаниям материального тела, удерживаемого около положения равновесия упругими силами. Заряжая конденсатор, или выводя тело из положения равновесия, мы сообщаем системе известный запас

¹ Циклической частотой называется число периодов за промежуток времени в 2π секунд, тогда как термин „частота“ без прилагательного означает число периодов за 1 секунду.

потенциальной энергии (электрической или упругой). При разряде конденсатора и при колебаниях тела эта потенциальная энергия переходит соответственно в „электрокинетическую“ энергию магнитного поля и в кинетическую энергию движущегося тела. Однако, когда заряд конденсатора становится равным нулю (тело проходит через положение равновесия), ток не спадает сразу до нуля (тело не останавливается), а благодаря своего рода электромагнитной инерции (мерой которой является коэффициент самоиндукции, сравни стр. 340) продолжает в течение некоторого времени течь в прежнем направлении. Благодаря этому конденсатор перезаряжается (тело удаляется от положения равновесия), после чего процесс разряда повторяется в обратном направлении. Сопротивление же цепи, которым обуславливается затухание электрических колебаний, конечно, вполне аналогично трению.

3. В заключение покажем, что уравнение (275), выведенное нами на основании энергетических соображений, может быть получено также и из закона Ома (154). Применяя (154) к соединяющему обкладки конденсатора проводу $1a2$, по которому циркулирует ток проводимости J (см. рис. 88), получим:

$$JR = \int_{1a2} E_s ds.$$

Но

$$\int_{1a2} E_s ds = \oint_{1a2b1} E_s ds - \int_{2b1} E_s ds = \mathcal{E}^{ind} + \int_{1b2} E_s ds,$$

ибо циркуляция электрического вектора по замкнутому контуру равна электродвижущей силе индукции. Что же касается последнего интеграла, то в электростатическом поле он равнялся бы разности потенциалов обкладок конденсатора $\varphi_1 - \varphi_2$. В переменном же поле, как мы убедились в § 49, понятие потенциала теряет смысл, ибо к потенциальному Кулоновому полю электрических зарядов присоединяется вихревое поле индукции.

Однако предположение о квазистационарности поля тока, циркулирующего в конденсаторной цепи, включает в себя, в частности, предположение, что электрическое поле в пространстве между обкладками конденсатора находится в той же зависимости от мгновенной величины его заряда, как и в случае статическом. Иными словами предполагается, что между обкладками конденсатора напряженность вихревого поля, индуцированного изменениями поля магнитного, исчезающе мала по сравнению с напряженностью

Кулонового поля зарядов конденсатора¹. С другой стороны, из смысла последнего уравнения явствует, что входящий в него интеграл $\int_{1b2} E_s ds$ должен быть взят по кратчайшему пути, соединяющему обкладки конденсатора, т. е. по пути, лежащему между этими обкладками. Следовательно, в случае квазистационарного тока интеграл этот можно положить равным той разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, которая существовала бы между обкладками конденсатора в статическом случае. Стало быть,

$$JR = \mathcal{E}^{und} + \varphi_1 - \varphi_2. \quad (275'')$$

Выразив в этом уравнении $\varphi_1 - \varphi_2$ через заряд и емкость конденсатора (уравнение 42), а \mathcal{E}^{und} через L и $\frac{dJ}{dt}$, мы вновь приходим к уравнению (275).

Заметим, что уравнение (275'') вполне аналогично закону Ома для постоянных токов (155'), причем \mathcal{E}^{und} играет в нем роль „сторонних“ электродвижущих сил.

Задача 39.— К концам c и d почти замкнутого „потребляющего“ участка цепи II (см. рис. 85, стр. 358) приложено извне заданное переменное напряжение $\mathcal{E}'_{cd} = \mathcal{E}'_0 \cos \omega t$ (пользуемся практической системой единиц). Сторонних Э. Д. С. в этом участке цепи нет, но в него включен конденсатор емкости C' . Показать, что сила тока J' в цепи равна:

$$J' = J'_0 \cos(\omega t - \varphi),$$

причем амплитуда тока J'_0 равна:

$$J'_0 = \frac{\mathcal{E}'_0}{\sqrt{R'^2 + \left(\omega L' - \frac{1}{\omega C'}\right)^2}},$$

а сдвиг фазы тока по отношению к фазе напряжения определяется соотношением:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L' - \frac{1}{\omega C'}}{R'}.$$

¹ Это соотношение между E^{und} и $E^{кул}$ не может однако иметь места вне обкладок конденсатора уже по одному тому, что вне обкладок конденсатора Кулоново поле его зарядов равно нулю (или близко к нулю), тогда как E^{und} имеет, вообще говоря, конечное значение.

Примечание 1. Эти соотношения остаются справедливыми и в случае замкнутой цепи, ток в которой возбуждается периодическими изменениями потока магнитной индукции внешнего магнитного поля; чтобы перейти к этому случаю, достаточно в приведенных формулах заменить $\mathcal{E}_{сд}$ на $\mathcal{E}_{вни}^{инд}$:

$$\mathcal{E}_{вни}^{инд} = - \frac{1}{c} \frac{d\Psi'_{вни}}{dt}.$$

Примечание 2. Из выражения для J_0' явствует, что при заданном \mathcal{E}'_0 амплитуда тока достигает максимума при $\omega L' = \frac{1}{\omega C'}$, т. е. при

$$\omega^2 = \frac{1}{L' C'}.$$

Если логарифмический декремент собственных колебаний цепи мал, то это условие соответствует приближенному равенству (циклической) частоты ω внешних возбуждающих сил и частоты собственных колебаний цепи ω_0 (см. 276 и 276"). Таким образом цепь с конденсатором и самоиндукцией, как и всякая система с собственным периодом колебаний, обнаруживает при возбуждении ее внешними периодическими силами явления резонанса. Как известно, этими явлениями резонанса широко пользуются в электротехнике вообще и в радиотехнике в частности.

§ 52. Скин-эффект. — В предшествующем мы вовсе не входили в рассмотрение вопроса о распределении переменных токов по сечению проводников. Между тем этот вопрос важен не только с теоретической, но и с технической точки зрения. Как мы сейчас покажем, даже в однородном квазилинейном (см. стр. 182) проводнике переменный ток, в отличие от постоянного, не распределяется равномерно по сечению проводника, а, вообще говоря, концентрируется на его поверхности¹. Это явление, получившее название скин-эффекта (английское слово „скин“ значит кожа, ток концентрируется на „коже“ проводника), в свою очередь влечет за собою изменение эффективного сопротивления и самоиндукции проводника.

1. При изложении теории скин-эффекта, как и в целом ряде последующих параграфов, мы ограничимся рассмотрением периодических

¹ В некоторых случаях возможно обратное явление, т. е. осевая концентрация тока; см. З. Либин, Журн. прикладной физики, 1927, том IV, вып. 3, стр. 45.

переменных полей, напряженность которых является синусоидальной функцией времени. Эта форма зависимости поля от времени имеет наибольшее практическое значение и легче всего поддается математическому исследованию. Кроме того результаты изучения подобных полей могут быть приложены и к более сложным случаям, ибо, как известно, любую периодическую функцию всегда можно разложить в ряд Фурье, каждый член которого является синусоидальной функцией времени.

Как известно, оперирование с периодическими функциями весьма упрощается при пользовании комплексными выражениями. В дальнейшем мы всегда будем поэтому выражать напряженность синусоидально-периодического поля в комплексной форме:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y, z) e^{i\omega t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0(x, y, z) e^{i\omega t}, \quad 277$$

где амплитуды \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 электромагнитных векторов от времени не зависят, а ω есть циклическая частота поля. Под напряженностью поля мы будем, конечно, понимать вещественную часть этих комплексных выражений¹. При этом мы будем широко пользоваться тем обстоятельством, что вещественная часть результатов, получаемых при выполнении линейных операций над комплексными выражениями, совпадает с результатами выполнения этих операций над одними лишь вещественными частями исходных выражений. Поэтому переход к вещественной части комплексных выражений, которой мы только и будем приписывать физический смысл, может быть совершен как до, так и после выполнения этих операций. Лишь при нелинейных операциях (например, умножении) необходимо переходить к вещественным частям комплексных выражений до выполнения над ними этих операций (ибо вещественная часть произведения комплексных величин не равна произведению их вещественных частей).

2. При изучении распределения переменного тока по сечению проводников мы будем исходить из основных уравнений электромагнитного поля (268) и (273):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi\lambda}{c} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

(предполагаем, что $\mathbf{E}^{comp} = 0$ и что μ от времени не зависит).

¹ Не смешивать комплексных векторов с комплексными числами, изображаемыми векторами на плоскости! Всякий комплексный вектор \mathbf{a} может быть представлен в виде суммы $\mathbf{a} = \mathbf{b} + i\mathbf{c}$, где $i = \sqrt{-1}$, а \mathbf{b} и \mathbf{c} суть обычные вещественные векторы в пространстве.

Как указывалось в § 50, плотность токов смещения в проводниках, или по крайней мере в металлах, исчезающе мала по сравнению с плотностью токов проводимости. Поэтому в уравнении (273) можем пренебречь последним членом и положить (сравни 185):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi\lambda}{c} \mathbf{E}.$$

Рассмотрим однородный проводник, на протяжении которого ϵ , λ и μ суть величины постоянные. В этом случае, образовав вихрь уравнения (268) и внося в него приведенное значение $\operatorname{rot} \mathbf{H}$, получим:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{H}) = -\frac{4\pi\mu\lambda}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

С другой стороны на основании (65₃)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E},$$

причем если внутри проводника нет объемных зарядов ($\rho = 0$), то ввиду постоянства ϵ из (112) следует:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} = \epsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

Стало быть, дифференциальное уравнение электрического поля внутри однородного проводника может быть записано так:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{4\pi\mu\lambda}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad 278$$

Подобным же способом легко получить аналогичное уравнение и для магнитного вектора \mathbf{H} :

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{4\pi\mu\lambda}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad 278'$$

Если напряженность поля, как мы предположили, является синусоидальной функцией времени, то внося (277) в уравнение (278)

и сокращая его затем на временной фактор $e^{i\omega t}$, получим следующее уравнение для амплитуды электрического вектора:

$$\nabla E_0 = \frac{4\pi\mu\lambda i\omega}{c^2} E_0 = 2ip^2 E_0, \quad 279$$

где нами введено обозначение

$$p^2 = \frac{2\pi\mu\lambda\omega}{c^2}. \quad 279'$$

3. Практически наибольший интерес представляет вопрос о распределении токов по сечению цилиндрических проводников. Строгое решение этого вопроса связано однако с известными математическими трудностями. Поэтому мы упростим эту задачу следующим образом.

В дальнейшем мы убедимся, что электрическое поле достаточно большой частоты ω не проникает внутрь проводника и заметно отличается от нуля лишь в весьма тонком его поверхностном слое. Если толщина этого слоя мала по сравнению с радиусом кривизны поверхности проводника (например, в случае цилиндрического проводника, по сравнению с радиусом цилиндра), то его можно разбить на участки, ширина и длина которых будут очень велики по сравнению с толщиной, причем однако размеры этих участков будут все же

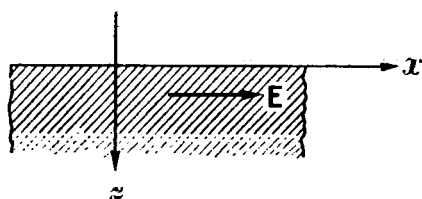


Рис. 88.

настолько малы, что их можно будет считать плоскими. Стало быть, при исследовании электрического поля в поверхностном слое проводника любой формы, мы при достаточно большом ω можем считать этот слой ограниченным плоской поверхностью.

Конечно, эти соображения не отличаются математической строгостью, однако результаты решения упрощенной таким образом задачи с достаточной точностью совпадают с результатами точных вычислений.

Итак, предположим, что поверхность рассматриваемого участка проводника совпадает с плоскостью $z=0$, и что электрическое поле, а стало быть и ток, направлены по оси x параллельно граничной поверхности ($E_y = E_z = 0$) (рис. 88). Предположим далее, что напряженность поля в пределах нашего слоя зависит только от расстояния

рассматриваемой точки проводника от его поверхности, но не зависит от x и y . Тогда (279) примет вид:

$$\nabla^2 E_{ox} = \frac{\partial^2 E_{ox}}{\partial z^2} = 2ip^2 E_{ox}.$$

Общее решение этого линейного уравнения, как известно, имеет вид:

$$E_{ox} = Ae^{kz} + Be^{-kz},$$

где A и B суть постоянные интегрирования, а k есть корень уравнения

$$k^2 = 2ip^2,$$

т. е.

$$k = p\sqrt{2i} = p(1+i).$$

Таким образом

$$E_{ox} = Ae^{p^2 z} e^{ip^2 z} + Be^{-p^2 z} e^{-ip^2 z}$$

причем согласно (279') p есть величина вещественная. Так как поле в проводнике ограничено тонким поверхностным слоем, то постоянную интегрирования A нужно положить равной нулю, ибо в противном случае при увеличении z E_{ox} росло бы до бесконечности¹. Переходя, кроме того, от амплитуды электрического вектора к его полному комплексному выражению, получим:

$$E_x = E_{ox} e^{i\omega t} = B e^{-p^2 z} e^{i(\omega t - pz)}$$

Наконец, отбрасывая мнимую часть, получаем окончательно:

$$E_x = B e^{-p^2 z} \cos(\omega t - pz). \quad 280$$

Соответственно этому плотность тока выразится формулой:

$$j_x = \lambda E_x = j_0 e^{-p^2 z} \cos(\omega t - pz), \quad 280'$$

где через $j_0 = \lambda B$ обозначена амплитуда плотности тока на поверхности проводника.

Таким образом по мере проникновения в глубь проводника фаза электрического вектора и плотности тока изменяется линейно, а их

¹ При точном решении задачи, например, для цилиндрического проводника равенство нулю коэффициента члена, возрастающего при удалении от поверхности, может быть обосновано вполне строго.

амплитуды Ve^{-p^2} и λVe^{-p^2} убывают по экспоненциальному закону. При этом основную часть тока можно считать сосредоточенной в поверхностном слое толщиной в $\frac{1}{p}$ см, ибо на этой глубине плотность тока уже в e раз (т. е. примерно в 2,7 раз) меньше плотности тока у поверхности проводника (сравни также замечание о сопротивлении проводника переменному току на стр. 380).

Чтобы оценить толщину этого слоя, рассмотрим конкретный пример. Для меди можно положить $\mu = 1$, $\lambda = 6 \cdot 10^{-4}$ электромагнитных единиц $= c^2 \cdot 6 \cdot 10^{-4}$ абс. (эл.-стат.) единиц. Циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu$, где ν есть число периодов в секунду. При 1 000 периодах из (279') следует:

$$p = \sqrt{\frac{2\pi\mu\omega}{c^2}} \approx 5 \text{ см}^{-1};$$

при 10^5 периодах в секунду, что соответствует сравнительно медленным радиотелеграфным колебаниям (длина волны 3 000 метров), получаем:

$$p = \approx 50 \text{ см}^{-1}.$$

Таким образом в первом случае ток практически сосредоточен в слое толщиной в $\frac{1}{5}$ см $= 2$ мм, а во втором в слое всего лишь $\frac{1}{50}$ см $= 0,2$ мм толщины.

Проводимость железа λ меньше меди, но зато проникаемость его μ гораздо больше, чем проникаемость меди; поэтому скин-эффект выражается в железе еще резче, чем в меди.

4. Концентрация тока на поверхности проводника влечет за собой изменение сопротивления и самоиндукции проводника; таким образом для переменных токов эти величины уже не являются постоянными, а зависят от частоты тока. Так, например, если весь ток концентрируется в поверхностном слое цилиндрического провода, то сопротивление провода должно стать равным сопротивлению полного цилиндра, обладающего стенками соответствующей толщины. По мере увеличения частоты толщина проводящего ток слоя уменьшается, стало быть сопротивление проводника должно увеличиваться.

Если Q есть среднее количество Джаулева тепла, выделяемого в проводнике за единицу времени переменным током силы J , то сопротивлением проводника переменному току

целесообразно назвать¹ отношение величины Q к среднему за период значению квадрата силы переменного тока \bar{J}^2 :

$$R = \frac{Q}{\bar{J}^2}.$$

Для постоянного тока $\bar{J}^2 = J^2$, так что приведенное выражение совпадает с законом Джауля (152).

Вводя в рассмотрение так называемую эффективную силу переменного тока, определяемую равенствами

$$J^2_{eff} = \bar{J}^2, \quad J_{eff} = \sqrt{\bar{J}^2},$$

можем написать:

$$R = \frac{Q}{J^2_{eff}}.$$

Пусть r есть радиус цилиндрического проводника и пусть частота тока ω столь велика, что толщина проводящего ток слоя оказывается малой по сравнению с r так что распределение тока в этом слое определяется формулой (280'). В этом случае общая сила тока, проходящего через перпендикулярное оси x сечение слоя шириною в 1 с.м, будет равна:

$$\int_0^\infty j_x dz = j_0 \int_0^\infty e^{-pz} \cos(\omega t - pz) dz = \frac{j_0}{p \sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right),$$

где мы, не совершая заметной ошибки, распространили интегрирование до $z = \infty$, ибо за пределами рассматриваемого слоя плотность тока по условию исчезающе мала. Стало быть, если s есть длина окружности сечения проводника, то

$$J^2_{eff} = s^2 \bar{j}^2 = \frac{s^2 j_0^2}{2p^2} \cos^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{s^2 j_0^2}{4p^2},$$

ибо среднее за период значение квадрата косинуса равно $\frac{1}{2}$.

С другой стороны, согласно (153), количество тепла, выделяемое за элемент времени dt в слое, внешняя поверхность которого равна 1 с.м², равно:

$$\begin{aligned} dt \int_0^\infty \frac{j_x^2}{\lambda} dz &= \frac{j_0^2}{\lambda} dt \int_0^\infty e^{-2pz} \cos^2(\omega t - pz) dz = \\ &= \frac{j_0^2}{\lambda} dt \left\{ \frac{1}{4p} + \frac{1}{4p\sqrt{2}} \cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Отбрасывая второй член, среднее значение которого за период равно нулю, получаем, что за 1 сек в рассматриваемом слое проводника выделяется $\frac{j_0^2}{4\lambda p}$ единиц

¹ В технике эту величину R принято называть омическим или ваттным сопротивлением проводника.

тепла. Таким образом общее количество тепла Q , выделяемого за секунду в проводнике окружности s и длины l , равно:

$$Q = \frac{slj_0^2}{4\lambda\rho},$$

и стало быть его (омическое) сопротивление равно:

$$R = \frac{Q}{J^2_{eff}} = \frac{l\rho}{\lambda s}.$$

Таким образом проводник оказывает переменному току циклической частоты ω такое же сопротивление, какое он оказывал бы постоянному току, если бы этот ток был сосредоточен в поверхностном слое проводника толщины δ :

$$\delta = \frac{1}{p} = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\lambda\omega}}.$$

В отличие от сопротивления, самоиндукция проводника уменьшается по мере увеличения частоты тока. Действительно, самоиндукция проводника, согласно определению, пропорциональна энергии магнитного поля тока, циркулирующего по этому проводнику (уравнение 265'''). С другой стороны известно, что если ток сосредоточен, например, на поверхности цилиндрического проводника, то магнитное поле внутри проводника равно нулю (см. задачу 27, стр. 210), поле же вне цилиндра от распределения тока по его сечению не зависит (поскольку распределение это сохраняет аксиальную симметрию). Следовательно, по мере концентрации тока на поверхности проводника уменьшается энергия его поля, а стало быть и самоиндукция проводника, причем последняя стремится к пределу L'' , равному „внешней“ самоиндукции проводника (см. стр. 350).

К тому же выводу можно прийти, приняв во внимание, что магнитное поле в проводниках определяется дифференциальным уравнением (278') того же вида, как и поле электрическое, и что, стало быть, как электрическое, так и магнитное поле быстропеременных токов в глубь проводников не проникает.

VII. ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В НЕПОДВИЖНОЙ СРЕДЕ И ЕГО РАСПРОСТРАНЕНИЕ; ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

*

§ 53. Система Максвелловых уравнений макроскопического электромагнитного поля. — 1. В предшествующих главах изложение носило индуктивный характер: мы шаг за шагом обобщали эмпирически найденные закономерности и формулировали их в виде отдельных законов. Теперь же задача нахождения основных законов электромагнитного поля (по крайней мере так, как эти законы понимаются в классической теории макроскопического поля) может считаться законченной, и полученные результаты могут быть сведены в полную систему уравнений электромагнитного поля. Если система этих уравнений верна и действительно является полной, то из нее должны однозначно вытекать все свойства поля как уже изученные так и неизученные нами.

Таким образом система основных уравнений представляет собою в сущности математическую формулировку основных постулатов или „аксиом“ классической электродинамики, играющих в ней ту же роль, какую в классической механике играют аксиомы Ньютона. Дальнейшая же задача теории заключается в раскрытии содержания этих уравнений, в применении их к отдельным вопросам и в сравнении вытекающих из них следствий с данными опыта.

В настоящей главе мы ограничимся установлением системы основных уравнений макроскопического электромагнитного поля при следующих упрощающих допущениях: 1) все находящиеся в поле материальные тела неподвижны; 2) в каждой точке поля значения величин ϵ , μ и λ , характеризующих свойства среды, остаются постоянными, т. е. не меняются со временем, не зависят от напряженности поля и считаются величинами заданными; 3) постоянные магниты и ферромагнетики в поле отсутствуют. Лишь впоследствии, во II томе, мы рассмотрим систему основных уравнений электронной теории, позволяющей установить зависимость

величин ϵ , μ и λ от атомистического строения среды (устранение ограничения 2-го); там же будут рассмотрены электромагнитные явления в движущихся средах (устранение ограничения 1-го).

2. Система дифференциальных уравнений классической электродинамики, к изложению которой мы переходим, по праву носит название уравнений Максвелла. Максвелл впервые сформулировал эти уравнения в шестидесятых годах прошлого столетия (в частности он впервые ввел понятие тока смещения) и раскрыл их физический смысл.

К основным Максвелловым уравнениям принадлежит прежде всего уравнение (273), определяющее зависимость вихря магнитного поля от плотности токов проводимости и токов смещения:

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{H}, \quad \text{I}$$

и уравнение (268), выражающее закон индукции электрического поля при изменении поля магнитного:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = - \text{rot } \mathbf{E}. \quad \text{II}$$

Из этих уравнений вытекают при некоторых добавочных предположениях два других уравнения, обыкновенно причисляемых к основным уравнениям поля. Так в § 49 уже было показано, что из (II) следует независимость дивергенции \mathbf{B} вектора от времени (стр. 354). В остальном же вид функции $\text{div } \mathbf{B} = f(x, y, z)$ при решении системы уравнений (I) и (II) остается неопределенным, так что функция эта играет роль начальных условий интегрирования. Полагая, что в некоторый начальный момент времени поле, а вместе с тем и $\text{div } \mathbf{B}$, равнялось нулю во всех точках пространства, получим 3-е основное уравнение Максвелла:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{III}$$

совпадающее с (225).

Образовав дивергенцию от обеих частей уравнения (I) и приняв во внимание равенство нулю дивергенции вихря (уравнение 65₁), получим (изменив порядок дифференцирования пространственного и по времени):

$$4\pi \text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{D} = 0.$$

Если обозначить $\text{div } \mathbf{D}$ через $4\pi\rho$:

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \text{IV}$$

то предшествующее уравнение примет вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \text{IVa}$$

что совпадает по форме с уравнением непрерывности (270), выражающим собой неразрушимость электричества. Таким образом определяемую уравнением (IV) величину ρ можно толковать как плотность электрических зарядов.

В Максвелловой теории величина ρ действительно носит характер вспомогательного обозначения, а понятие заряда — характер вспомогательного термина, ибо с точки зрения классической теории поля электрические заряды представляют собой не особого рода субстанцию, а лишь „узлы“ силовых линий поля, характеризующих деформацию упругого эфира, так что термин „электрический заряд“ представляет собой лишь условное название истоков вектора \mathbf{D} , т. е. тех участков поля, в которых $\operatorname{div} \mathbf{D} \neq 0$. Рассмотрение этой вспомогательной величины оправдывается тем, что величина заряда, находящегося внутри проведенной в непроводящей среде замкнутой поверхности, не изменяется во времени, т. е. является первым интегралом уравнений поля.

К основным Максвелловым уравнениям необходимо причислить также и соотношения, связывающие между собой значения основных векторов электромагнитного поля:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \lambda (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{emp}). \quad \text{V}$$

Характеризующие свойства среды величины ϵ , μ и λ считаются при этом заданными функциями точки, от времени не зависящими. Сторонние же электродвижущие силы \mathbf{E}^{emp} считаются заданными функциями точки и времени. Существование этих сил сказывается непосредственно лишь на плотности тока проводимости, а косвенно также и на распределении электрических зарядов. В частности для установления электростатического равновесия ($\mathbf{j} = 0$) необходимо, чтобы в каждой точке проводников \mathbf{E}^{emp} уравновешивалось напряженностью электростатического поля зарядов \mathbf{E} (см. стр. 191).

Заметим, что некоторые авторы принимают не только \mathbf{j} , но и \mathbf{D} пропорциональным не \mathbf{E} , а $\mathbf{E} + \mathbf{E}^{emp}$, т. е. вместо (V_1) полагают $\mathbf{D} = \epsilon (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{emp})$. Вопрос о правильности того или иного предположения может быть разрешен в каждом отдельном случае лишь путем выяснения физической природы сторонних электродвижущих сил. В некоторых случаях \mathbf{D} несомненно от \mathbf{E}^{emp} не зависит (например, в растворах электролитов \mathbf{D} не зависит от сторонних Э. Д. С. осмотического происхождения, см. A b r a h a m, Theorie d. Elektr., III Aufl. 1907. B. I, S. 257). Впрочем практическое значение вопроса о зависимости или независимости вектора \mathbf{D} от \mathbf{E}^{emp} весьма незначительно.

3. Система уравнений электромагнитного поля (I) — (V) приобретет определенное физическое содержание лишь в том случае, если будет точно указано, в каких явлениях, доступных наблюдению и изучению на опыте, и каким именно образом проявляется существование электромагнитного поля. Ибо человек лишен способности непосредственно воспринимать это поле (за исключением особых случаев, напр., поля электромагнитной световой волны). Мы можем узнать о том, что по данному проводнику протекает электрический ток лишь по тепловым (нагревание проводника), механическим (отклонение стрелки гальванометра) и т. п. действиям этого тока; мы можем узнать, что данное тело заряжено лишь потому, что оно притягивает бузинный шарик или порождает искру при приближении его к другому телу и т. п. Другими словами, мы можем заключить о существовании электромагнитного поля лишь по наблюдаемому нами при известных условиях возникновению или исчезновению доступных нашему восприятию форм энергии (напр., тепловой или механической). Руководствуясь принципом сохранения энергии, мы заключаем, что это возникновение или исчезновение известных нам форм энергии должно происходить за счет преобразования некоторой иной формы энергии, которую мы называем энергией электромагнитного поля W .

Таким образом лишь в том случае, если мы постулируем определенную зависимость этой энергии W от напряженности поля — в теории Максвелла W полагается равным (сравни (124) и (265)):

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{DE} \, dV + \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{BH} \, dV, \quad \text{VI}$$

лишь в этом случае совокупность уравнений (I) — (V) и (VI), (но не каждое из них порознь) станет доступной проверке на опыте, т. е. приобретет определенный физический смысл. Ибо уравнения (I) — (V) определяют изменения электромагнитного поля во времени, а уравнение (VI) позволяет определить те преобразования энергии, в которых эти изменения поля проявляются.

4. Обратимся теперь к вопросу о поверхностях разрыва сплошности векторов электромагнитного поля. В основе теории поля лежит допущение, что вне поверхностей раздела различных сред и вне поверхностных электрических зарядов все электромагнитные векторы, а также и постоянные среды ϵ , μ и λ , всюду конечны, непрерывны и обладают производными. Однако, напр., поверхности раздела различных сред должны, вообще говоря, являться поверхностями разрыва электромагнитных векторов, ибо векторы эти связаны между собою

соотношениями (V), в которые входят скачкообразно меняющиеся на поверхностях раздела величины ϵ , μ и λ . Чтобы система уравнений поля была полной, т. е. чтобы она давала возможность однозначно определить напряженность поля по начальным условиям, заданным для момента $t=0$, необходимо дополнить эту систему так называемыми пограничными условиями, которым должны удовлетворять слагающие электромагнитных векторов на поверхностях разрыва.

С целью установления этих условий предположим сначала, что смежные среды с различными значениями величин ϵ , μ и λ разделяются переходным слоем конечной толщины, в котором значения этих величин изменяются непрерывно, и что объемная плотность электричества ρ в заряженных слоях всюду остается конечной. Будем затем стремиться толщину d этих переходных и заряженных слоев к нулю и потребуем, как это мы уже неоднократно делали в предыдущем, чтобы уравнения поля (I) — (VI) оставались справедливыми в этих слоях и в предельном случае при $d=0$. Этим требованием искомые пограничные условия определяются однозначно.

Действительно, на основании этого требования из уравнений (III) и (IV) получим согласно (32) два граничных условия:

$$\text{Div } \mathbf{B} = B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad \text{II}'$$

и

$$\text{Div } \mathbf{D} = D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \quad \text{IV}'$$

совпадающих с (225') и (108'). Из уравнения непрерывности (IVa) являющегося следствием (I) и (IV'), получим аналогичным путем:

$$\text{Div } \mathbf{j} = j_{2n} - j_{1n} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}, \quad \text{IV}'_a$$

что совпадает с (270').

Обращаясь далее к (I) и (II) и интегрируя их по произвольной поверхности S , получим на основании теоремы Стокса (175):

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int D_n dS + \frac{4\pi}{c} \int j_n dS = \int \text{rot}_n \mathbf{H} dS = \oint_L H_s ds \quad \text{Ib}$$

и

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int B_n dS = - \int \text{rot}_n \mathbf{E} dS = - \oint_L E_s ds \quad \text{IIb}$$

[сравни (188') и (267')].

Применим эти интегральные уравнения к участку нормального сечения переходного слоя, отделяющего среду 1 от 2. Пусть ширина

этого участка равняется конечной толщине слоя dl , а длина участка равна dt (см. рис. 89). Направление положительного обхода этого

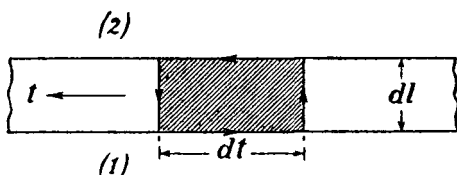


Рис. 89.

участка выберем, например, так, как указано на чертеже. Если мы станем стремиться к нулю толщину слоя dl , оставляя длину рассматриваемого участка dt неизменной, то площадь этого участка, а вместе с тем и левые части

уравнений (Ib) и (IIb), будут также стремиться к нулю (если векторы \mathbf{D} , \mathbf{B} и \mathbf{j} остаются конечными). Левая же часть, например, уравнения (Ib) при $dl \rightarrow 0$ сведется (вплоть до величин второго порядка малости) к

$$\oint H_s ds = (H_{2t} - H_{1t}) dt,$$

где H_1 и H_2 суть значения вектора \mathbf{H} в 1-й и 2-й среде, а t — единичный вектор, касательный к поверхности раздела в плоскости сечения. Стало быть, для того, чтобы (Ib) оставалось справедливым в пределе, при $dl = 0$, необходимо, чтобы

$$H_{2t} = H_{1t}, \quad \text{I'}$$

т. е. необходимо, чтобы на поверхностях раздела касательные к ним компоненты вектора \mathbf{H} оставались непрерывными. Аналогично из (IIb) получим:

$$E_{2t} = E_{1t}, \quad \text{II'}$$

что совпадает с (77). Уравнения эти применимы, очевидно, и к заряженным поверхностям, причем под t можно, очевидно, понимать любое направление, касательное к поверхности разрыва.

Заметим, что приведенный вывод уравнений (I') и (II') основан на допущении, что векторы \mathbf{D} , \mathbf{B} и \mathbf{j} всюду остаются конечными. В отношении векторов \mathbf{D} и \mathbf{B} (а также \mathbf{E} и \mathbf{H}) это допущение является одной из предпосылок Максвелловой теории; что же касается конечности плотности тока \mathbf{j} , то при рассмотрении так называемых идеальных проводников ($\lambda = \infty$) от этого предположения отказываются, в связи с чем видоизменяется также и уравнение (I'). Подробнее об этом будет сказано в § 61.

5. Помимо приведенных условий на поверхностях разрыва необходимо также принять во внимание граничные условия в собственном смысле этого слова. Ибо решение дифференциальных уравнений типа (I) и (II)

однозначно определяется по начальным условиям для $t=0$ лишь при условии задания (в функции от времени) значений искомых функций точки (в нашем случае векторов поля) на границах рассматриваемой области пространства (см. § 55). В каждом отдельном случае форма этих граничных условий всецело зависит от конкретных условий задачи. В частности, если в область рассмотрения включается все бесконечное пространство, то граничные условия приобретают характер условий в бесконечности. Если при этом предполагается, что все возбуждающие поле заряды и токи расположены в ограниченной области пространства V , то напряженность поля в бесконечности должна, очевидно, убывать не медленнее, чем обратно пропорционально квадрату расстояния R от произвольно избранной в V начальной точки отсчета. Стало быть, в этом случае граничные условия принимают вид (сравни ур. 75 и стр. 223):

$$ER^2 \text{ и } HR^2 \text{ при } R \rightarrow \infty \text{ остаются конечными.} \quad \text{VII}$$

В § 55 мы убедимся, что система Максвелловых уравнений (I) — (V) совместно с перечисленными условиями на поверхностях разрыва и условиями в бесконечности (VII), есть система полная, т. е. что она позволяет однозначно определить электромагнитное поле в любой точке пространства и в любой момент времени по заданным для момента $t=0$ начальным значениям векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} .

§ 54. Теорема Пойнтинга. Поток энергии. — 1. Выразив энергию электромагнитного поля в форме объемного интеграла (VI), мы тем самым, как уже неоднократно упоминалось, получаем возможность истолковать это выражение в том смысле, что энергия поля вполне определенным образом локализована в пространстве, причем объемная плотность энергии в произвольном месте поля определяется выражением:

$$w = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{DE} + \mathbf{BH}) = \frac{1}{8\pi} (\epsilon E^2 + \mu H^2). \quad (\text{VIa})$$

В § 64 мы покажем, что такое истолкование является не только возможным, но и необходимым; пока же мы примем это утверждение на веру и рассмотрим изменение во времени количества энергии W , находящегося внутри объема V , ограниченного некоторой неподвижной замкнутой поверхностью S . На основании (VIa) получим:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\epsilon E^2 + \mu H^2) dV = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\epsilon E \frac{\partial E}{\partial t} + \mu H \frac{\partial H}{\partial t} \right) dV,$$

ибо ϵ и μ согласно допущению (стр. 381) от времени не зависят.

Заменяя в подынтегральном выражении $\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ и $\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ соответственно через $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ и $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ и выражая затем эти последние величины с помощью уравнений (I) и (II), получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{E}(c \operatorname{rot} \mathbf{H} - 4\pi \mathbf{j}) - c \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \\ &= c(\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}) - 4\pi \mathbf{j} \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Но, согласно (67),

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}].$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \int_V (-c \operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}] - 4\pi \mathbf{j} \mathbf{E}) dV = \\ &= - \int_V \mathbf{j} \mathbf{E} dV - \frac{c}{4\pi} \int_V \operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}] dV. \end{aligned}$$

Последний интеграл, согласно (25), можно преобразовать в интеграл по ограничивающей V поверхности S^1 . Далее, согласно (V_3)

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\lambda} - \mathbf{E}^{cmp},$$

так что

$$\mathbf{j} \mathbf{E} = \frac{j^2}{\lambda} - \mathbf{j} \mathbf{E}^{cmp}.$$

Таким образом окончательно получим:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \mathbf{j} \mathbf{E}^{cmp} dV - \int_V \frac{j^2}{\lambda} dV - \frac{c}{4\pi} \oint_S [\mathbf{E}\mathbf{H}]_n dS. \quad 280$$

2. Предположим сначала, что наша поверхность S заключает в себе полное поле. Поверхностный интеграл в (280) в этом случае обратится в нуль и уравнение это примет вид:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \int \mathbf{j} \mathbf{E} dV = \int \mathbf{j} \mathbf{E}^{cmp} dV - \int \frac{j^2}{\lambda} dV. \quad 281$$

¹ Если даже внутри V и имеются поверхности разрыва векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , то нормальная слагающая их векторного произведения, как следует из (I') и (II'), все же остается непрерывной. Стало быть, интеграл $[\mathbf{E}\mathbf{H}]_n$ по оболочке S'_1 , выделяющей из V эти поверхности разрыва, обращается в нуль, и (280) остается справедливым.

Так как $\frac{\partial W}{\partial t}$ есть изменение энергии полного электромагнитного поля за единицу времени, то согласно закону сохранения энергии изменение всех прочих форм энергии должно равняться $-\frac{\partial W}{\partial t}$. Этот последний вывод из системы уравнений поля доступен проверке опытом и подтверждается им. Действительно, первый член выражения (281) равен работе P , совершаемой в единицу времени сторонними электродвижущими силами в проводниках, обтекаемых токами проводимости (сравни 153''):

$$P = \int \mathbf{j} \mathbf{E}^{emp} dV,$$

причем работа эта совершается за счет химической, термической и т. п. энергии источников сторонней Э. Д. С. (аккумуляторы и т. п.). Второй же член выражения (281) равен взятому с обратным знаком Джавлеву теплу Q , выделяемому за единицу времени теми же токами проводимости (уравнение 153):

$$Q = \int \frac{j^2}{\lambda} dV.$$

Таким образом

$$\frac{\partial W}{\partial t} = P - Q, \quad 281'$$

т. е. общее приращение электромагнитной энергии равно избытку работы сторонних электродвижущих сил (химического, термического и т. п. происхождения) над выделением Джавлева тепла (согласно исходному предположению (стр. 381) все тела неподвижны, так что механическая работа равна нулю). Вместе с тем мы убеждаемся, что в отличие от токов проводимости токи смещения никакого тепла не выделяют, и сторонние электродвижущие силы при их прохождении работы не совершают.

3. Рассмотрим теперь тот случай, когда поверхностный интеграл формулы (280) не исчезает, т. е. когда поверхность S не обнимает собою полного поля.

Введем обозначение:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad 282$$

Тогда (280) примет вид:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = P - Q - \oint_S S_n dS, \quad 280'$$

причем в данном случае величины W , P и Q будут, очевидно, относиться не к полному полю, как раньше, а лишь к той его области V , которая ограничена поверхностью S . В этом случае, как явствует из (280'), изменение электромагнитной энергии в объеме V зависит не только от выделяемого в этом объеме тепла Q и от работы P сторонних Э. Д. С. в этом объеме, но и от расположения граничной поверхности S и от значения вектора \mathbf{S} на ней.

Оставаясь на почве представления о локализации электромагнитной энергии в пространстве, мы можем истолковать это обстоятельство только в том смысле, что электромагнитная энергия вытекает через поверхность S из рассматриваемого объема V наружу и притом в количестве $\int S_n dS$ единиц энергии (эргов) в секунду. Это положение носит название теоремы Пойнтинга, а вектор \mathbf{S} называется вектором Пойнтинга.

Детализируя это положение, можно истолковать его далее в том смысле, что в каждой точке поля поток электромагнитной энергии (т. е. количество энергии, протекающее в единицу времени через перпендикулярную направлению потока единицу поверхности) непосредственно равен по величине и направлению вектору Пойнтинга \mathbf{S} . Хотя это последнее предположение вовсе не обязательно¹, однако оно отличается наибольшей простотой и приводит к ряду весьма простых и наглядных соотношений².

4. В поле постоянных токов напряженность электромагнитного поля, а, стало быть, и его энергия, остается постоянной, так что работа сторонних электродвижущих сил полностью переходит в тепло (см. ур. 159). Однако работа эта совершается лишь в тех участках цепи, где $E_{стп}$ отлично от нуля, тогда как Джаулево тепло выделяется во всех участках цепи. Нетрудно убедиться, что энергия, затрачиваемая источни-

¹ Ибо если положить поток энергии равным $\mathbf{S} + \text{rot } \mathbf{a}$, где \mathbf{a} есть произвольный вектор, то при интегрировании по любой замкнутой поверхности интеграл второго члена обратится в нуль (см. 178), так что общий поток энергии через эту поверхность останется равным $\oint S_n dS$.

² Например к равенству скорости течения энергии и фазовой скорости носителей этой энергии — электромагнитных волн; см. § 59, уравн. 316.

ками сторонних Э. Д. С., совершает при этом свой путь до места потребления (т. е. выделения в форме тепла) в качестве энергии электромагнитной.

Рассмотрим с этой целью участок цилиндрического однородного провода длины l , ограниченный двумя сечениями, перпендикулярными его оси (рис. 90). Пусть r есть радиус провода, $\sigma = \pi r^2$ — его сечение, $V = l\sigma$ — объем рассматриваемого участка, наконец, J — сила тока в проводе. Предположим, что магнитное поле вблизи провода с достаточной точностью совпадает с полем бесконечного прямолинейного тока той же силы. Тогда на поверхности провода (см. стр. 231)

$$H = \frac{2J}{cr} = \frac{2j\sigma}{cr} = \frac{2\pi rj}{c},$$

причем магнитные силовые линии представляют собой концентрические току окружности.

Предположим сначала, что в рассматриваемом участке провода $E_{cmp} = 0$. Электрический вектор \mathbf{E} направлен в этом случае по направлению тока и равен $\frac{\mathbf{j}}{\lambda}$ (см. ур. V). Стало быть, на поверхности

провода, ввиду перпендикулярности векторов \mathbf{j} и \mathbf{H} ,

$$|\mathbf{S}| = \left| \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] \right| = \left| \frac{c}{4\pi\lambda} [\mathbf{j}\mathbf{H}] \right| = \frac{c}{4\pi\lambda} jH = \frac{j^2 r}{2\lambda},$$

причем согласно правилу буравчика \mathbf{S} направлено по внутренней нормали к поверхности провода (рис. 90). Стало быть, в этом случае через внешнюю поверхность проводника энергия втекает в проводник из окружающего пространства в количестве

$$\oint S_n dS = |\mathbf{S}| 2\pi r l = \frac{j^2}{\lambda} \pi r^2 l = \frac{j^2}{\lambda} V \text{ эргов в секунду,}$$

где V есть объем рассматриваемого участка проводника (через основания цилиндра энергия не протекает, ибо \mathbf{S} касательно к этим основаниям). Это количество энергии, как и следовало ожидать, равно Джоулеву теплу Q , выделяемому током в этом участке за 1 сек.

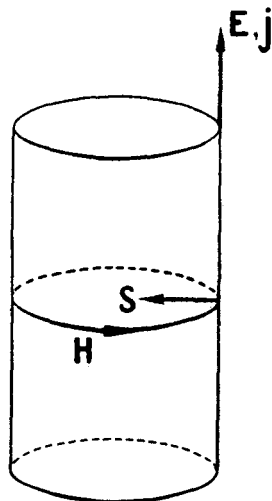


Рис. 90.

Итак, в тех участках проводника, в которых $E^{cmp} = 0$, выделяемая током тепловая энергия притекает в проводник из окружающего его пространства. В это пространство она должна, очевидно, поступать из тех участков провода, в которых совершается работа сторонних Э. Д. С. Действительно, если $E^{cmp} \neq 0$, то согласно (V),

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\lambda} - \mathbf{E}^{cmp}$$

$$\text{и } \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi\lambda} [\mathbf{j}\mathbf{H}] - \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}^{cmp}\mathbf{H}].$$

Первый член правой части представляет собой по доказанному поток энергии, направленный внутрь провода, второй же член снабжен отрицательным знаком и имеет поэтому обратное направление (ибо E^{cmp} , вообще говоря, параллельно \mathbf{j} ¹), т. е. представляет собой поток энергии, вытекающей из провода через его боковую поверхность. Легко убедиться, что в случае постоянного тока вся эта вытекающая из проводника энергия возвращается в другие участки проводника с тем, чтобы выделиться в них в форме тепла.

5. В случае квазистационарных переменных токов имеют место аналогичные соотношения. Так, например, при выключении из цепи тока источника Э. Д. С. (аккумулятора) в ней продолжает некоторое время циркулировать ток размыкания. Как мы убедились в § 47 (пример I) выделение Джаулева тепла этим током происходит за счет постепенного уменьшения энергии магнитного поля тока, притекающей в проводник из окружающего пространства; при этом уменьшается также и количество магнитной энергии, заключенной внутри проводника.

В § 47 мы не учитывали изменения энергии окружающего ток электрического поля. В случае квазистационарных токов в замкнутых проводниках энергия эта, вообще говоря, настолько мала по сравнению с магнитной энергией тока, что ею действительно можно пренебречь. Если же в цепь квазистационарного тока включен, например, конденсатор, то запасенная в его поле электрическая энергия оказывается сравнимой с магнитной энергией тока и пренебречь ею становится невозможным (см. § 51).

Вообще говоря, можно сказать, что в проводнике, по которому циркулирует ток, происходит в сущности лишь превращение электро-

¹ За исключением быть может отдельных участков проводника; во всяком случае в стационарном поле направление циркуляции сторонних Э. Д. С. по контуру тока

($\mathcal{E}^{cmp} = \oint \mathbf{E}^{cmp} d\mathbf{s}$) совпадает с направлением тока J .

магнитной энергии в тепло; локализована же эта энергия преимущественно во внешнем, окружающем проводник, пространстве, и поступает в проводник через его внешнюю поверхность. С особенной отчетливостью проявляется это в быстропеременных токах: при очень быстрых изменениях поля его энергия не успевает достигнуть внутренних слоев проводника и подвергается превращению, в Джау-лево тепло лишь в поверхностных слоях проводника, в которых и сосредоточиваются переменные токи — скин-эффект (см. § 52).

В заключение заметим, что хотя изучение потока энергии электромагнитного поля, вообще говоря (а в особенности в явлениях излучения, см. дальше), приводит к весьма ценным выводам, однако, в некоторых случаях, в частности, в случае наложения двух или нескольких независимых друг от друга полей, применение теоремы Пойнтинга оказывается излишним и бесполезным. Пусть, например, неподвижный точечный заряд e расположен в центре кругового тока J (рис. 91). Электрические силовые линии заряда направлены радиально, тогда как магнитные линии тока лежат в меридиональных плоскостях, перпендикулярных плоскости тока. Стало быть, направление перпендикулярного \mathbf{E} и \mathbf{H} вектора \mathbf{S} в каждой точке поля будет совпадать с направлением параллельных кругов полярной системы координат, центр которой находится в e , а ось перпендикулярна плоскости тока. Следовательно, линии потока энергии будут совпадать с этими кругами. Представление о подобном рода непрерывной циркуляции энергии по замкнутым путям, очевидно, лишено физического смысла, как и вообще лишено смысла самое понятие потока энергии в электростатическом поле неподвижного заряда.

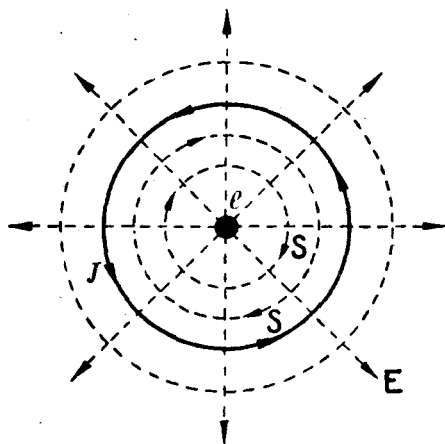


Рис. 91.

§ 55. Однозначность решений Максвелловых уравнений. — Установив в § 53 систему основных Максвелловых уравнений, мы указали, что эта система полна, т. е. что электромагнитное поле в каждой точке пространства и в каждый момент времени однозначно определяется этой системой, если только для момента $t=0$ заданы начальные значения векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} во всех точках пространства. Эта „теорема однозначности“, к доказательству которой мы сейчас

перейдем, может быть также формулирована несколько иначе. Мы не можем определить напряженность поля во всем бесконечном пространстве, нашему наблюдению доступна лишь ограниченная его часть. Более непосредственный физический смысл имеет поэтому утверждение (вторая формулировка теоремы однозначности), что электромагнитное поле в любой момент времени $t_1 > 0$ в любой точке объема V , ограниченного произвольной замкнутой поверхностью S , однозначно определяется уравнениями Максвелла, если заданы начальные значения электромагнитных векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} во всем этом участке пространства для момента $t=0$, и если кроме того для одного из этих векторов (например, \mathbf{E}) известны граничные значения его тангенциальных слагающих на поверхности S в течение всего промежутка времени от $t=0$ до $t=t_1$ ¹.

Предположим противное, т. е. предположим, что существуют две различные системы решений Максвелловых уравнений \mathbf{E}' , \mathbf{H}' и \mathbf{E}'' , \mathbf{H}'' , удовлетворяющие одним и тем же начальным и граничным условиям. Ввиду линейности уравнений поля разность этих решений: $\mathbf{E}''' = \mathbf{E}' - \mathbf{E}''$, $\mathbf{H}''' = \mathbf{H}' - \mathbf{H}''$ также должна удовлетворять уравнениям Максвелла при следующих дополнительных условиях: а) $\mathbf{E}^{cmp} = 0$; б) в момент $t=0$ во всех точках объема V $\mathbf{E}''' = \mathbf{H}''' = 0$ (ибо при $t=0$ \mathbf{E}' , \mathbf{E}'' и \mathbf{H}' , \mathbf{H}'' имеют по предположению одинаковые заданные значения); в) в течение всего промежутка времени от $t=0$ до $t=t_1$ во всех точках поверхности S тангенциальные слагающие вектора \mathbf{E} либо вектора \mathbf{H} равны нулю (по той же причине).

Применим к этому полю \mathbf{E}''' , \mathbf{H}''' вытекающую из Максвелловых уравнений теорему Пойнтинга (280), положив в ней согласно сказанному $\mathbf{E}^{cmp} = 0$. Входящий в (280) поверхностный интеграл будет равен нулю в течение всего промежутка времени от $t=0$ до $t=t_1$, ибо из (в) следует, что на поверхности S $[\mathbf{E}\mathbf{H}]_n = 0$; стало быть, в любой момент этого промежутка

$$\frac{\partial W'''}{\partial t} = - \int_V \frac{j'''^2}{\lambda} dV. \quad 282$$

Так как подынтегральное выражение существенно положительно, то $\frac{\partial W'''}{\partial t} \leq 0$, т. е. энергия поля W''' может либо убывать, либо оста-

¹ Напомним при этом, что согласно основному допущению, лежащему в основе всех рассуждений этой главы, значения величин ϵ , μ и λ считаются заданными функциями точки, от времени не зависящими, а значения \mathbf{E}^{cmp} считаются известными функциями точки и времени.

² Ибо из $\mathbf{j}' = \lambda (\mathbf{E}' + \mathbf{E}^{cmp})$ и $\mathbf{j}'' = \lambda (\mathbf{E}'' + \mathbf{E}^{cmp})$ следует: $\mathbf{j}''' = \mathbf{j}' - \mathbf{j}'' = \lambda \mathbf{E}'''$.

ваться постоянной (при j''' равном повсюду нулю). Но при $t = 0$, согласно условию (а), энергия W''' поля E''' , H''' равнялась нулю; отрицательных же значений она принимать не может. Стало быть, и в течение всего рассматриваемого промежутка $0 \leq t \leq t_1$ энергия W''' :

$$W''' = \frac{1}{8\pi} \int_V (\epsilon E'''^2 + \mu H'''^2) dV$$

должна оставаться равной нулю, что может иметь место лишь в том случае, если E''' и H''' остаются равными нулю во всех точках объема V . А это и значит, что две системы решений исходной задачи E' , H' и E'' , H'' , предполагавшиеся нами различными, по необходимости тождественны между собой. Таким образом теорема однозначности в ее второй формулировке доказана.

Что же касается первой формулировки этой теоремы, то она представляет собой в сущности лишь частный случай более общей второй формулировки. Действительно, при рассмотрении всего безграничного пространства задание значений векторов поля на граничной поверхности S заменяется наложением условий в бесконечности (VII) (стр. 387). Из этих условий следует, что интеграл вектора Пойнтинга по бесконечно удаленной поверхности обращается в нуль, ввиду чего (282) остается применимым ко всему бесконечному пространству. Из уравнения же (282), как мы видели, следует однозначность решений уравнения поля.

§ 56. Запаздывающие потенциалы электромагнитного поля. — 1. Убедившись в однозначности Максвелловых уравнений, мы должны попытаться найти способ фактического решения этих уравнений. В случае стационарного электромагнитного поля задача эта, как мы видели, существенно облегчается введением вспомогательных величин — потенциалов φ и A . Теперь мы покажем, что видоизменив надлежащим образом определение скалярного и векторного потенциалов, можно воспользоваться этими потенциалами для решения уравнений Максвелла и в общем случае переменного поля. При этом мы для простоты предположим, что как диэлектрическая постоянная ϵ , так и магнитная проницаемость μ одинаковы на всем протяжении полного поля¹, и что поверхностных зарядов в поле нет. При этих условиях векторы E и H и их первые производные всюду остаются непрерывными.

¹ В том случае, если ϵ и μ суть непрерывные функции точки, введение потенциалов φ и A , вообще говоря, не облегчает задачи разрешения Максвелловых уравнений. Наличие скачкообразного изменения ϵ и μ на отдельных поверхностях раздела различных сред не столь существенно.

В качестве определения вектора потенциала \mathbf{A} мы можем сохранить уравнение (226₁):

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad 283$$

из которого в свою очередь, согласно (65₁), следует уравнение (IV). Внося (283) в (II), получим:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right),$$

или

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Это уравнение будет удовлетворено, если положить

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi, \quad 284$$

где φ есть произвольный скаляр, ибо вихрь градиента скаляра тождественно равен нулю (уравнение 65₂).

На основании (283), (284) и (65₃) уравнение (I):

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

принимает вид:

$$\frac{1}{\mu} \text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{1}{\mu} (\text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}) = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{\epsilon}{c} \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Распорядившись надлежащим образом величинами \mathbf{A} и φ , можно это уравнение упростить.

Действительно, до сих пор нами были определены только вихрь от \mathbf{A} и градиент от φ , теперь же мы можем дополнительно потребовать, чтобы

$$\text{div } \mathbf{A} = -\frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad 285$$

Образовав градиент от обеих частей этого равенства, убедимся, что два члена предшествующего уравнения взаимно сокращаются, так что оно принимает вид:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi \mu}{c} \mathbf{j}. \quad 286$$

Из основных уравнений поля нам остается еще удовлетворить уравнению (IV). Внося в него (284), получим:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} - \varepsilon \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 4\pi\rho.$$

Разделив это равенство на ε и внося в него значение $\operatorname{div} \mathbf{A}$ из (285), получим:

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho$$

или, на основании (55'),

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho. \quad 287$$

2. Уравнения (285), (286) и (287) дают возможность определить значение скалярного и векторного потенциалов электромагнитного поля по заданному распределению зарядов и токов проводимости; зная же φ и \mathbf{A} , можно с помощью (283) и (284) найти \mathbf{E} и \mathbf{H} . Заметим при этом, что хотя скалярный потенциал φ , как и в случае стационарных полей, зависит лишь от распределения зарядов, а векторный потенциал \mathbf{A} — от распределения токов проводимости, однако, напряженность электрического поля зависит не только от градиента скалярного потенциала, но и от производной по времени потенциала векторного: в этом обстоятельстве проявляется закон электромагнитной индукции. В случае стационарности поля, когда все производные по времени обращаются в нуль, приведенные уравнения, как и следовало ожидать, принимают вид ранее установленных нами уравнений стационарного поля: сравни соответственно (284), (285) и (287) с уравнениями 52'), (226₂) и (106₂), а (286) с нумерованным уравнением на стр. 281.

Итак, зная ρ и \mathbf{j} в их зависимости от координат и времени, мы можем определить сначала φ и \mathbf{A} , а затем и \mathbf{E} и \mathbf{H} . Однако, как уже указывалось в § 53 (стр. 383), понятие электрического заряда носит в классической теории поля в сущности характер вспомогательного термина, обозначающего истоки вектора электрической индукции \mathbf{D} . Иными словами, с точки зрения этой теории ρ и \mathbf{j} нужно в сущности считать функциями искомых величин \mathbf{E} и \mathbf{H} , т. е. в свою очередь величинами искомыми. И, действительно, согласно теореме однозначности для определения значения векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в любой момент времени достаточно знать начальные значения этих векторов для $t=0$; определив же \mathbf{E} и \mathbf{H} , мы, очевидно, можем вычислить значения величин ρ и \mathbf{j} для любого времени и места.

Предположим, однако, что зависимость ρ и \mathbf{j} от координат и времени нам тем или иным способом стала известной (для всего пространства¹). В этом случае, пользуясь установленной в этом параграфе системой уравнений, мы действительно можем определить напряженность электромагнитного поля в любой точке пространства и в любой момент времени, и притом определить однозначно, если только мы примем во внимание некоторые добавочные условия для потенциалов, о которых будет сказано в конце параграфа.

Основная задача сводится при этом к решению определяющей значение потенциалов системы уравнений (285), (286), (287), ибо определив φ и \mathbf{A} , мы найдем \mathbf{E} и \mathbf{H} простым дифференцированием. Мы не станем здесь излагать классических, вполне строгих с математической точки зрения способов решения этих уравнений², а воспользуемся гораздо более простыми рассуждениями, не отличающимися, правда, особой математической строгостью и носящими в сущности лишь наводящий характер. Проверив однако найденное решение подстановкой его в исходные уравнения и доказав однозначность этих уравнений, мы тем самым сообщим этому решению полную достоверность.

3. Как скалярный потенциал φ , так и каждая из слагающих A_x, A_y, A_z векторного потенциала, в произвольной системе декартовых координат, удовлетворяют согласно (286) и (287) уравнению типа:

$$\nabla^2 s - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -4\pi\chi(x, y, z, t), \quad 288$$

где $\chi(x, y, z, t)$ есть по предположению известная функция координат и времени, а под s надо понимать одну из величин φ, A_x, A_y, A_z .

Вводя обозначение

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad 289$$

можно записать (288) следующим образом:

$$\nabla^2 s - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -4\pi\chi. \quad 288'$$

¹ В сущности помимо начального для момента $t=0$ распределения зарядов ρ достаточно знать лишь \mathbf{j} в функции координат и времени, ибо по этим данным с помощью уравнения непрерывности (270) значение ρ в каждой точке пространства может быть определено для любого момента времени. Из этого явствует, между прочим, что \mathbf{j} и ρ не являются независимыми функциями времени и поэтому не могут задаваться независимо друг от друга.

² Их можно найти в любом классическом курсе электричества, напр. у Abraham'a (В. II), Jeans'a, Lorentz'a (Theory of electrons), Cohn'a и т. д.

В дальнейшем мы убедимся, что v равно скорости распространения электромагнитных возмущений.

Уравнения типа (288) и (288') носят название уравнений Деламбера. При $\chi = 0$ уравнение Деламбера принимает вид так называемого волнового уравнения:

$$\nabla^2 s = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \quad 290$$

с которым нам неоднократно придется иметь дело в дальнейшем. Наконец при независимости s от времени (стационарное поле) уравнение Деламбера вырождается в известное уже нам уравнение Пуассона (56):

$$\nabla^2 s = -4\pi\chi(x, y, z).$$

Чтобы найти решения уравнения Деламбера (288'), предположим сначала, что при любом t χ равно нулю во всех точках поля, за исключением лишь исчезающе малой области вокруг некоторой точки Q , в которой χ равно заданной функции времени $\chi(t)$. Для краткости мы будем при этом говорить, что χ отлично от нуля лишь в самой точке Q , которую можно назвать *источником* поля. Таким образом вне этой точки s должно удовлетворять волновому уравнению (290).

Поставим себе прежде всего задачу найти центрально-симметричное решение этого волнового уравнения, т. е. такое его решение, которое в полярной системе координат, имеющей центр в Q , зависит лишь от радиус-вектора R , но не от полярного и долготного углов ϑ и α . В этом случае $\nabla^2 s = \text{div grad } s$ определяется уравнением вида (49''), так что волновое уравнение (290) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial s}{\partial R} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

Помножая его на R , получим:

$$R \frac{\partial^2 s}{\partial R^2} + 2 \frac{\partial s}{\partial R} = \frac{\partial^2 (Rs)}{\partial R^2} = \frac{R}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (Rs)}{\partial t^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 291$$

где нами временно введено обозначение:

$$u = Rs.$$

Общий интеграл уравнения (291) имеет, как известно, вид:

$$Rs = u = f\left(t - \frac{R}{v}\right) + \varphi\left(t + \frac{R}{v}\right), \quad 291'$$

где f и φ суть произвольные (но обладающие производными) функции указанных в скобках аргументов¹.

Легко убедиться, что первый член этого выражения представляет собой сферическую волну, распространяющуюся из центра координат Q со скоростью v . Действительно, функция $f\left(t - \frac{R}{v}\right)$ имеет в каждый данный момент t на каждом данном расстоянии R от точки Q то же значение, которым она обладала в момент $t - 1$ на расстоянии $R - v$ от Q (ибо $t - 1 - \frac{R - v}{v} = t - \frac{R}{v}$). А это и значит, что значения величины u распространяются из точки истока поля Q в виде сферической волны скорости v .

¹ В том, что (291') удовлетворяет уравнению (291), можно убедиться непосредственной подстановкой. Для того же, чтобы показать, что всякое решение уравнения (291) должно иметь вид (291'), введем вместо t и R новые переменные ζ и η :

$$\zeta = t - \frac{R}{v}, \quad \eta = t + \frac{R}{v}.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

аналогично этому

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} = \frac{1}{v^2} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right\}.$$

Внося эти выражения в (291), получим:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta},$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta} = 0.$$

Это значит, что в общем случае u может состоять из двух слагаемых, каждое из которых является произвольной функцией лишь одного из независимых переменных ζ и η . Уравнение (291') и представляет собой математическую формулировку этого вывода.

Подобным же образом можно убедиться, что второй член выражения (291') представляет собой сферическую волну той же скорости v , приходящую однако из бесконечности и сходящуюся в истоке поля Q , как в фокусе.

Поскольку мы приписываем величине $s = \frac{u}{R}$ физический смысл потенциала электромагнитного поля, возбуждаемого зарядом или током, находящимся в точке Q , постольку мы должны очевидно ограничиться первым членом общего решения (291'), т. е. должны положить:

$$s = \frac{u}{R} = \frac{1}{R} f\left(t - \frac{R}{v}\right). \quad 292$$

Из этого равенства следует, что значения потенциала зарядов и токов, находящихся в Q , распространяются из этой точки в форме шаровой волны скорости v , амплитуда которой убывает обратно пропорционально расстоянию R .

4. Нам остается теперь определить вид оставшейся произвольной функции f . Для этого мы должны обратиться от волнового уравнения (290), справедливого лишь вне области, прилегающей к точке Q , к исходному уравнению (288'). Допустим, что решение этого уравнения выражается формулой (292) не только вдали, но и вблизи от точки Q , и проинтегрируем уравнение (288') по объему сферы радиуса R_1 с центром в Q . Приняв во внимание, что $\chi(t)$ отлична от нуля лишь исчезающе малой области dV , прилегающей к Q , получим:

$$\int \nabla^2 s \, dV - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int s \, dV = -4\pi \int \chi(t) \, dV = -4\pi \chi(t) \, dV.$$

Согласно (49''), первый член правой части равен:

$$\int \nabla^2 s \, dV = \int_0^{R_1} \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial s}{\partial R} \right) \cdot 4\pi R^2 \, dR = 4\pi R_1^2 \left(\frac{\partial s}{\partial R} \right)_{R=R_1}.$$

Внося это в предшествующее уравнение и выражая с помощью (292) s через f , мы после деления на -4π получим:

$$f\left(t - \frac{R_1}{v}\right) - R_1 \frac{\partial f\left(t - \frac{R}{v}\right)}{\partial R} + \frac{1}{4\pi v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int s \, dV = \chi(t) \, dV.$$

Если мы станем стремить радиус сферы R_1 к нулю, то интеграл слева обратится в нуль, ибо объем сферы пропорционален R_1^3 , тогда

как s обратно пропорционально лишь первой степени R_1 . Второй член слева также обращается в нуль, так что при $R_1 \rightarrow 0$ последнее уравнение принимает вид:

$$f(t) = \chi(t) dV.$$

Определив таким образом вид функции f , получаем окончательно из (292):

$$s(R, t) = \frac{\chi\left(t - \frac{R}{v}\right)}{R} dV. \quad 293$$

Таково стало быть решение уравнения (288') в том случае, если χ отлично от нуля лишь в исчезающе малой области dV вокруг точки Q .

В общем же случае произвольного вида функции χ решение этого уравнения ввиду его линейности будет очевидно выражаться суммой или интегралом решений типа (293):

$$s = \int \frac{\chi\left(t - \frac{R}{v}\right)}{R} dV, \quad 293'$$

где R означает очевидно расстояние элемента объема dV от той точки поля, в которой определяется значение потенциала s .

5. Сравнивая (288) и (288') с уравнениями (286) и (287), можем по аналогии с (293') непосредственно написать решение этих уравнений

$$\psi = \frac{1}{\epsilon} \int \frac{\rho\left(t - \frac{R}{v}\right)}{R} dV, \quad 294$$

$$A_x = \frac{\mu}{c} \int \frac{j_x\left(t - \frac{R}{v}\right)}{R} dV,$$

и аналогичные выражения для A_y и A_z , так что вектор \mathbf{A} выразится формулой:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{c} \int \frac{\mathbf{j}\left(t - \frac{R}{v}\right)}{R} dV, \quad 295$$

причем, согласно (289):

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

В случае независимости ρ и \mathbf{j} от времени, т. е. в стационарном поле, формулы (294) и (295), как и следовало ожидать, совпадают с ранее выведенными уравнениями (103') и (227).

Итак, чтобы вычислить, например, значение скалярного потенциала φ в произвольной точке P в момент t , нужно, согласно (294), разбить все пространство на элементы объема dV и для каждого элемента dV определить величину того заряда $de = \rho \left(t - \frac{R}{v} \right) dV$, который находился в нем в момент времени $t - \frac{R}{v}$, где R есть расстояние dV от P . Разделив затем этот заряд de на ϵR и взяв сумму полученных выражений по всем элементам объема, мы и получим φ . Аналогичным способом определяется и значение A .

Таким образом потенциал переменного поля определяется совершенно аналогично потенциалу поля стационарного, с тем единственным, но весьма существенным дополнением, что в каждый момент t потенциал поля, возбуждаемого на расстоянии R от элемента объема dV зарядами и токами этого элемента, определяется не одновременной с t , а предшествовавшей в момент $t - \frac{R}{v}$ плотностью этих зарядов и токов. Таким образом можно сказать, что потенциалы φ и A зарядов и токов каждого элемента объема dV распространяются из dV по всем направлениям со скоростью $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, убывая при этом в интенсивности обратно пропорционально расстоянию R . Поэтому определяемые уравнениями (294) и (295) величины φ и A носят название запаздывающих потенциалов электромагнитного поля.

Как уже упоминалось, приведенный нами вывод выражений запаздывающих потенциалов, во-первых, не отличается математической строгостью и, во-вторых, основан на некоторых специальных допущениях. Так, например, нами принимались во внимание лишь центрально-симметричные решения (291') волнового уравнения (290). Однако путем непосредственного вычисления можно убедиться, что (294) и (295) действительно удовлетворяют уравнениям (285) и (286), а также соотношению (284) (при условии, что движение электричества подчиняется уравнению непрерывности (270)). Так как, с другой стороны, значения потенциалов, как мы сейчас докажем, определяются этими уравнениями однозначно, то, стало быть, справедливость формул (294) и (295) никаких сомнений возбуждать не может.

6. Мы ограничимся здесь доказательством того, что (294) и (295) удовлетворяют соотношению (284), предоставляя читателю проверить в качестве упражнения соотношения (285) и (286). При этом удобно предварительно записать выражения потенциалов (294) и (295) в несколько более подробной форме.

Пусть x, y, z есть координаты точки P , в которой мы разыскиваем значения потенциалов, x', y', z' — (текущие) координаты произвольно расположенного элемента объема dV , а R — расстояние точки P от dV . Введем обозначение

$$t' = t - \frac{R}{v} \quad 296$$

и будем называть t' эффективным временем в dV по отношению ко времени в P . Тогда уравнения (294) и (295) можно будет записать в следующей форме:

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{\epsilon} \int \frac{\rho(x', y', z', t')}{R} dV, \quad 294'$$

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{c} \int \frac{\mathbf{j}(x', y', z', t')}{R} dV, \quad 295'$$

где под dV нужно понимать произведение $dx' dy' dz'$.

В соотношение (284) входит $\operatorname{div} \mathbf{A}$. В дальнейшем необходимо отличать дифференцирование по координатам x, y, z «точки наблюдения» P от дифференцирования по координатам x', y', z' элемента интегрирования dV . Соответствующие дифференциальные операторы мы будем обозначать через ∇ и ∇' :

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}; \quad \nabla' = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z'}$$

При вычислении $\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A}$ можно, очевидно, поменять порядок дифференцирования по x, y, z и интегрирования по x', y', z' на обратный:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A} = \frac{\mu}{c} \int \nabla \frac{\mathbf{j}(x', y', z', t')}{R} dV. \quad 297$$

Согласно (66),

$$\nabla \frac{\mathbf{j}(x', y', z', t')}{R} = \frac{1}{R} \cdot \nabla \mathbf{j}(x', y', z', t') + \mathbf{j}(x', y', z', t') \nabla \frac{1}{R}$$

Так как аргумент вектора \mathbf{j} зависит от x, y, z лишь через посредство эффективного времени t' , то

$$\nabla \mathbf{j}(x', y', z', t') = \frac{\partial \mathbf{j}_x}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{j}_y}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{j}_z}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t'} \cdot \nabla t'$$

Приняв во внимание, что согласно (296)

$$\nabla t' = -\frac{1}{v} \cdot \nabla R$$

и отпуская аргумент у \mathbf{j} , получим окончательно:

$$\nabla \frac{\mathbf{j}}{R} = \mathbf{j} \cdot \nabla \frac{1}{R} - \frac{1}{vR} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t'} \cdot \nabla R$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\nabla' \frac{j}{R} = \left(\nabla' \frac{j}{R} \right)_{t' = \text{const}} + \frac{1}{R} \frac{\partial j}{\partial t'} \cdot \nabla' t',$$

или, по выполнении простых преобразований,

$$\nabla' \frac{j}{R} = j \cdot \nabla' \frac{1}{R} + \frac{1}{R} (\nabla' j)_{t' = \text{const}} - \frac{1}{vR} \frac{\partial j}{\partial t'} \cdot \nabla' R.$$

Приняв теперь во внимание, что уравнение (49):

$$\text{grad}_q f(R) = -\text{grad}_a f(R)$$

в наших теперешних обозначениях принимает вид:

$$\nabla' f(R) = -\nabla f(R),$$

и сравнивая выражения для $\nabla \frac{j}{R}$ и $\nabla' \frac{j}{R}$, найдем:

$$\nabla \frac{j}{R} = -\nabla' \frac{j}{R} + \frac{1}{R} (\nabla' j)_{t' = \text{const}}.$$

Стало быть, обозначая $\nabla' j$ через $\text{div}' j$ и т. д., получим из (297):

$$\text{div } \mathbf{A} = -\frac{\mu}{c} \int \text{div}' \frac{j}{R} \cdot dV + \frac{\mu}{c} \int \frac{dV}{R} (\text{div}' j)_{t' = \text{const}}.$$

Первый из этих интегралов может быть преобразован с помощью теоремы Гаусса в интеграл по поверхности S , охватывающий объем V ¹:

$$\int \text{div}' \frac{j}{R} \cdot dV = \oint \frac{j_n}{R} dS.$$

Если распространить интегрирование на все бесконечное пространство, то этот интеграл благодаря условиям в бесконечности (ур. VII, стр. 387) обратится в нуль, так что окончательно:

$$\text{div } \mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{c} \int \frac{dV}{R} \text{div}' j(x', y', z', t')_{t' = \text{const}}.$$

Обратимся теперь к правой части соотношения (284). Ввиду (290) для произвольной функции $f(t')$ имеем:

$$\frac{\partial f(t')}{\partial t} = \frac{\partial f(t')}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial f(t')}{\partial t'}.$$

¹ Преобразование это нельзя было применять непосредственно к исходному выражению (297) потому, что в нем объемное интегрирование и пространственное дифференцирование (образование дивергенции) нужно производить по координатам различных точек.

Поэтому, дифференцируя (294') по времени под знаком интеграла, получим:

$$-\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial\varphi(x, y, z, t)}{\partial t} = -\frac{\mu}{c} \int \frac{dV}{R} \frac{\partial\rho(x', y', z', t')}{\partial t'}$$

С другой стороны уравнение непрерывности (270) можно записать в следующем виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{j}(x, y, z, t)_{t=\text{const}} = -\frac{\partial\rho(x, y, z, t)}{\partial t},$$

ибо при пространственном дифференцировании (образовании дивергенции) время t должно считаться постоянным параметром.

Заменяя в этом уравнении непрерывности нештрихованные величины штрихованными (что можно считать простым изменением обозначений), убедимся, что запаздывающие потенциалы действительно удовлетворяют соотношению (284):

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

которое и требовалось доказать.

7. Обратимся к вопросу об однозначности найденных нами решений (294) и (295) системы уравнений (284) — (286).

Если не принимать во внимание никаких дополнительных условий, то решения эти необходимо признать неоднозначными. Это явствует хотя бы из того обстоятельства, что при выводе уравнений (294) и (295) мы лишь из чисто физических соображений, вовсе не связанных с математической стороной вопроса, откинули второй член уравнения (291'), соответствующий так называемому опережающему потенциалу электромагнитного поля. Вообще же говоря, можно показать¹, что общее решение, например, уравнения (285) имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \frac{1}{\varepsilon} \int_V \frac{[\rho]}{R} dV + \frac{1}{\varepsilon} \oint_S \left\{ \frac{1}{R} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right] - \right. \\ & \left. - [\varphi] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{1}{vR} \frac{\partial R}{\partial n} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right] \right\} dS, \end{aligned} \quad 298$$

где v определяется уравнением (289), причем поверхностный интеграл распространен по замкнутой поверхности S , охватывающей рассматриваемый участок поля V , \mathbf{n} есть внешняя нормаль к этой поверхности, и наконец, квадратные скобки означают, что значения находящихся в этих скобках величин должны быть определены для „эффективного“ момента времени $t' = t - \frac{R}{v}$. Таким образом в стационарном поле

¹ См., например, Lorentz, Theory of electrons, pp. 233 ff.

и при $\epsilon = 1$ формула 298 совпадает с ранее доказанной нами формулой (72').

Распространим в уравнении (298) объемное интегрирование на все бесконечное пространство. Если мы кроме того предположим, что электромагнитное поле, по крайней мере поле в бесконечно удаленных точках, возникло в определенный момент времени t_0 ; другими словами, если мы предположим, что до этого момента потенциал поля φ во всех удаленных точках был равен нулю, то второй член общего решения (298) обратится в нуль. Действительно при определении по формуле (298) значения потенциала φ в момент времени t мы можем удалить поверхность S на столь большое расстояние R от исследуемой точки поля P , чтобы R удовлетворяло неравенству:

$$t - \frac{R}{v} < t_0.$$

В этом случае входящим в (298) величинам $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]$, $[\varphi]$ и $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]$ нужно будет приписать те значения, которыми они обладали до момента возникновения поля t_0 , т. е. значения нулевые, в силу чего весь поверхностный интеграл в (298) обратится в нуль.

Таким образом при указанном допущении решение уравнения (287) определяется однозначно и выражается первым членом общего решения (298), совпадающим с нашей формулой (294). Подобно этому при этом допущении значения векторного потенциала A также однозначно определяются формулой (295).

Что же касается условий типа (75):

$R\varphi$ и $R^2(\text{grad } \varphi)$ при $R \rightarrow \infty$ остаются конечными,

то при этих условиях $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ при $R \rightarrow \infty$ может быть сравнимым с $\frac{1}{R}$.

Поэтому условия эти гарантируют обращение в нуль лишь первых двух поверхностных интегралов, входящих в (298), тогда как последний из этих интегралов может оказаться отличным от нуля. Так, например, в случае шаровой волны, идущей из бесконечности и сходящейся в точке P как в фокусе, величина $R \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ остается конечной при $R \rightarrow \infty$, потенциал же этой волны в точке P определяется последним интегралом выражения (298).

§ 57. Скорость распространения электромагнитных возмущений. Условия квазистационарности. — 1. Физическое содержание формул (294) и (295), определяющих значения запаздывающих потенциалов, и уравнений (283) и (284), устанавливающих зависимость между этими

потенциалами и напряженностью поля, сводится к следующему положению: электромагнитное поле возбуждается зарядами и токами проводимости и распространяется от места возбуждения с конечной скоростью $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$.

В частности, в вакууме ($\epsilon = \mu = 1$) скорость распространения поля должна равняться c , т. е. должна численно равняться значению электродинамической постоянной, определяющей силу поперектокового взаимодействия токов и действительно имеющей размерность скорости (стр. 202).

Именно в этом признании конечности скорости распространения поля и заключается существеннейшее и основное отличие фактического содержания так называемых теорий близкого действия, и прежде всего теории Максвелла, от теорий мгновенного дальнего действия начала прошлого столетия. Поэтому вопрос о правильности той или иной из этих теорий может быть решен, например, путем постановки следующего простейшего *experimentum crucis*.

Пусть заряды e и e' находятся в покое на расстоянии R друг от друга вплоть до момента $t=0$, по наступлении которого мы начинаем приближать e' к e . По теории мгновенного дальнего действия испытываемая зарядом e со стороны заряда e' сила притяжения $F = \frac{ee'}{R^2}$ должна начать возрастать в тот же момент $t=0$. Согласно же уравнениям Максвелла, эта сила F должна оставаться неизменной вплоть до момента $t = \frac{R}{c}$ (предполагаем, что заряды находятся в вакууме). Ибо сила F , испытываемая зарядом e' , находящимся в точке P , определяется напряженностью поля в той же точке P ($F = eE$). Перемещая же заряд e' , находящийся в точке P' , мы непосредственно изменяем поле лишь в этой точке P' . Это изменение электрического поля в P' (ток смещения!), согласно (I), возбуждает магнитное поле в смежных токах пространства, что в свою очередь, согласно (II), влечет за собой возникновение вихря вектора E , т. е. изменение этого вектора (ибо в статическом поле, при $t < 0$, $\text{rot } E$ равнялся нулю) опять-таки лишь в смежных точках пространства, и т. д. и т. д. В результате изменение или, как говорят,

¹ Таким образом из упомянутых формул в частности следует, что токи смещения, играющие столь важную роль в механизме распространения поля, независимо от движения зарядов существовать не могут.

возмущение поля, вызванное в P' перемещением заряда e' , через $\frac{R}{c}$ секунд распространится до точки P и лишь в этот момент обусловит изменение силы F , испытываемой зарядом e .

Нас сейчас вовсе не интересует то обстоятельство, что по практическим и техническим соображениям этот простейший опыт обречен на неудачу. Существенно лишь, что вопрос о скорости распространения поля может быть решен экспериментальным путем и что он был фактически решен в пользу конечности этой скорости.

Больше того, изложенные нами следствия, вытекающие из Максвелловой теории поля, и, в частности, формула (289), могут быть подвергнуты также и количественной проверке, ибо значение постоянной c может быть определено путем независимых электродинамических измерений (см. §§ 30 и 38). Наиболее вероятное значение этой постоянной равно (см. стр. 266):

$$2,997 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{сек}},$$

что в пределах ошибок опыта действительно совпадает с непосредственно измеренной скоростью распространения поля в вакууме.

В частности, скорость света в вакууме по последним наиболее точным измерениям Майкельсона 1926 года ¹ равна:

$$2,99796 \pm 0,0004 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{сек}}.$$

Численное совпадение приведенных величин является наиболее убедительным доказательством как электромагнитной природы света, так и правильности основных уравнений Максвелла, по крайней мере в применении их к вакууму.

2. Ко всем этим важным вопросам мы еще вернемся в дальнейшем; пока же мы воспользуемся полученными результатами для того, чтобы обосновать перечисленные в § 50 условия квазистационарности переменного поля.

По определению квазистационарным полем называется поле, напряженность которого в каждый данный момент t с достаточной точностью совпадает с полем неподвижных зарядов и постоянных

¹ Michelson, *Astrophys. Journ.*, V. 65. p. 12. Непосредственно измерялась скорость света в воздухе v , значение же скорости света в вакууме определялось на основании соотношения $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$, где ϵ есть диэлектрическая постоянная воздуха, равная 1,00058.

токов, плотность которых ρ и \mathbf{j} равна мгновенной (в момент t) плотности рассматриваемых переменных зарядов и токов.

Из рассмотрения выражений запаздывающих потенциалов (294) и (295) явствует, что для квазистационарности прежде всего необходимо выполнение следующего условия: за время $\tau = \frac{R}{v}$, потребное для распространения электромагнитного поля на расстояние R , значения величин ρ и \mathbf{j} должны испытывать лишь исчезающе малые изменения. При этом под R нужно понимать расстояние рассматриваемой точки поля от наиболее удаленного элемента заряда или тока.

Очевидно, что R всегда можно выбрать настолько большим, чтобы при как угодно медленных изменениях поля это условие не удовлетворялось. Однако в теории квазистационарных токов обычно ограничиваются рассмотрением поля в непосредственной близости с заряженными или обтекаемыми токами проводниками. В этом случае верхний предел расстояния R можно положить равным расстоянию между двумя наиболее удаленными друг от друга элементами зарядов или токов, взаимодействие которых мы еще желаем учесть. Если, кроме того, мы имеем дело с периодическими токами периода T , то условие квазистационарности сведется, очевидно, к неравенству:

$$v = \frac{R}{v} \ll T,$$

или, так как v вообще говоря сравнимо с c , к неравенству:

$$\frac{R}{c} \ll T.$$

Если это условие квазистационарности выполнено, то значения потенциалов поля вблизи от зарядов и токов можно с достаточной точностью определять по формулам (103') и (227), выведенным нами для поля стационарного (и не учитывающим токов смещения).

Больше того, в этом случае формулами этими можно воспользоваться для определения потенциалов даже в сколь угодно удаленных от цепи точках поля. При этом „цепью“ мы для краткости называем совокупность всех учитываемых нами зарядов и токов. Действительно, если R_0 есть расстояние точки P от произвольного элемента цепи, то расстояние этой точки от любого другого элемента цепи будет отличаться от R_0 не больше, чем на расстояние R между наиболее удаленными элементами цепи. Стало быть, если условие квазистационарности выполнено, то этой разницей расстояний можно пренебречь, так что значения потенциалов в точке P

в момент t будут с достаточной точностью определяться мгновенным распределением зарядов и токов в цепи в момент $t' = t - \frac{R_0}{v}$.

Другими словами, поле в P в момент t будет совпадать с полем неподвижных зарядов и постоянных токов, плотность которых равна плотности рассматриваемых переменных токов и зарядов в предшествующий момент t' .

Однако одного лишь указанного условия еще недостаточно, чтобы применять к магнитному полю квазистационарных токов все законы стационарного магнитного поля, ибо при выводе последних существенное значение играла замкнутость постоянных токов. Таким образом „полная“ квазистационарность поля имеет место лишь при одновременном выполнении как указанного „основного“, так и „дополнительного“ условия квазистационарности, сводящегося в основном к требованию, чтобы плотность токов смещения была исчезающе мала по сравнению с плотностью токов проводимости (см. § 50).

§ 58. Поле осциллятора. Его излучение. — 1. Чтобы разобраться в процессе излучения электромагнитных волн, рассмотрим поле простейшего излучателя, так называемого осциллятора. Осциллятором или вибратором называется диполь, момент которого p является периодической функцией времени. В первом, самом грубом приближении радиотелеграфную антенну можно уподобить осциллятору, светящееся тело — совокупности элементарных осцилляторов, и т. д.

С точки зрения электронной теории простейшей формой осуществления осциллятора является совокупность одного электрона и одного протона, взаимное расстояние которых периодически изменяется во времени. В Максвелловой же микроскопической теории поля простейшей моделью осциллятора можно считать так называемый вибратор Герца: два металлических шарика K и K' , заряды которых e и e' в каждый данный момент равны по величине и противоположны по знаку ($e' = -e$), соединены проводом длины l (рис. 92). Если считать вектор l направленным от K' к K , то момент образованного этими зарядами диполя будет равен

$$p = el,$$

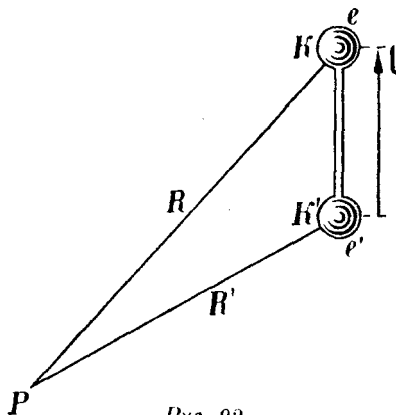


Рис. 92.

ибо по определению вектор \mathbf{p} направлен от отрицательного заряда к положительному¹. Если, зарядив вибратор, предоставить его самому себе, то в нем возникнут затухающие электрические колебания, аналогичные рассмотренным в § 51 колебаниям в цепи с конденсатором. Колебания эти будут сопровождаться периодическим перезаряджением шариков, т. е. периодическим изменением их зарядов по величине и по знаку. В этом случае момент вибратора \mathbf{p} можно положить равным:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 f(t),$$

где \mathbf{p}_0 есть постоянный вектор, направленный по оси вибратора, а $f(t)$ — некоторая периодическая функция времени, которую мы в дальнейшем будем предполагать известной.

Сила тока в вибраторе равна очевидно скорости изменения величины зарядов e и e' ; если мы условимся считать ток положительным при совпадении его направления с вектором \mathbf{l} , то

$$J = \frac{\partial e}{\partial t},$$

откуда

$$J\mathbf{l} = \frac{\partial e}{\partial t} \mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}. \quad 299$$

2. Предположим для простоты, что осциллятор находится в вакууме ($\epsilon = \mu = 1$), и будем рассматривать лишь те точки поля, расстояние которых от осциллятора велико по сравнению с его размерами. Пренебрегая размерами шариков K и K' по сравнению с их расстоянием R и R' до рассматриваемой точки поля P (рис. 95), т. е. считая заряды e и e' точечными, получим из (294) ввиду $e' = -e$ ²:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int \frac{\rho\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV = \frac{e\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} + \frac{e'\left(t - \frac{R'}{c}\right)}{R'} = \\ &= \frac{e\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} - \frac{e\left(t - \frac{R'}{c}\right)}{R'}, \end{aligned}$$

¹ При $e > 0$ направление \mathbf{p} совпадает с \mathbf{l} и противоположно ему при $e < 0$.

² Напомним, что $\rho\left(t - \frac{R}{c}\right)$, $e\left(t - \frac{R}{c}\right)$ и т. д. означает значение величин ρ , e и т. д. в момент времени $t - \frac{R}{c}$.

где $e\left(t - \frac{R}{c}\right)$ есть значение величины заряда e в момент $t - \frac{R}{c}$.

Таким образом скалярный потенциал осциллятора равен приращению

функции $\frac{e\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}$ при перемещении заряда e из K' в K на расстояние l . Стало быть при $l \ll R$ (сравни вывод потенциала статического диполя, стр. 55):

$$\varphi(t) = l \operatorname{grad}_q \frac{e\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} = -l \operatorname{grad}_a \frac{e\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R},$$

причем предполагается, что радиус-вектор \mathbf{R} проведен из осциллятора Q в исследуемую точку поля P .

Так как вектор l постоянен, то согласно (66₂) можем написать:

$$\varphi(t) = -\operatorname{div}_a \frac{le\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} = -\operatorname{div}_a \frac{p\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}.$$

Обращаемся к векторному потенциалу \mathbf{A} поля осциллятора. Считая ток в осцилляторе линейным, можем положить в формуле (295) $\mathbf{j} dV = J ds$ (срав. стр. 220). Предполагая, что время τ , потребное для распространения электромагнитных возмущений на расстояние l , мало по сравнению с периодом колебаний осциллятора $T = \frac{2\pi}{\omega}$, можем считать фазу тока $t - \frac{R}{c}$ одинаковой по всей длине осциллятора. Пренебрегая, наконец, при определении \mathbf{A} различием расстояний различных точек осциллятора от точки P , получим:

$$\mathbf{A}(t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV = \frac{J\left(t - \frac{R}{c}\right)}{cR} \int ds = \frac{J\left(t - \frac{R}{c}\right)l}{cR},$$

или на основании (299):

$$\mathbf{A}(t) = \frac{1}{cR} \frac{\partial \mathbf{p}\left(t - \frac{R}{c}\right)}{\partial t}.$$

Для дальнейшего изучения поля осциллятора удобно ввести в рассмотрение так называемый вектор Герца, определяемый уравнением

$$\mathbf{P}(t, R) = \frac{\mathbf{p}\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} = \frac{\mathbf{p}_0 f\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}.$$

Как явствует из этого уравнения, значение вектора Герца в момент t в точке, находящейся на расстоянии R от осциллятора, определяется значением электрического момента осциллятора в момент $t - \frac{R}{c}$. Существенно, что вектор Герца удовлетворяет волновому уравнению:

$$\nabla^2 \mathbf{P} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}; \quad 300'$$

иными словами, каждая из слагающих вектора \mathbf{P} в произвольной системе декартовых координат удовлетворяет уравнению типа (290), где в нашем случае нужно положить $v = c$. Действительно, каждая из слагающих этого вектора согласно (300) совпадает по форме с найденным нами в § 56 центрально-симметричным решением волнового уравнения (293).

Внося (300) в выражения для φ и \mathbf{A} и отбрасывая индекс α у знака div , получим окончательно:

$$\varphi(t) = -\text{div } \mathbf{P}(t); \quad \mathbf{A}(t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}(t)}{\partial t}. \quad 301$$

3. Переходя от потенциалов к напряженности поля, получим из (283) (положив в нем $\mu = 1$):

$$\mathbf{H} = \text{rot } \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \text{rot } \mathbf{P}}{\partial t}. \quad 302$$

Уравнение же (284) ввиду (65₃) примет вид:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \text{grad } \text{div } \mathbf{P} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \nabla^2 \mathbf{P} + \text{rot rot } \mathbf{P};$$

так как сумма первых двух членов справа, согласно (300), равна нулю, то окончательно:

$$\mathbf{E} = \text{rot rot } \mathbf{P}. \quad 302'$$

Таким образом задача определения \mathbf{E} и \mathbf{H} сведена нами к вычислению ротора вектора \mathbf{P} и его производных. Введя с этой целью временно обозначение:

$$\Phi(R, t) = \frac{f\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R},$$

можем, согласно (300), написать:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_0 \Phi(R, t).$$

Приняв во внимание, что \mathbf{p}_0 есть постоянный вектор, получим на основании (66₃) и (49):

$$\text{rot } \mathbf{P} = \left[\text{grad } \Phi \cdot \mathbf{p}_0 \right] = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial R} \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \mathbf{p}_0 \right] = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} \left[\mathbf{R} \mathbf{p}_0 \right].$$

Введем сферическую систему координат R, α, ϑ с центром в осцилляторе Q и с полярной осью, параллельной \mathbf{p}_0 (рис. 93), и будем в каждой точке поля разлагать все встречающиеся нам векторы на слагающие, направленные по взаимно-перпендикулярным направлениям возрастания сферических координат R, ϑ и α .

Очевидно, что векторное произведение $[\mathbf{R} \mathbf{p}_0]$ в каждой точке поля P будет направлено по касательной к дуге параллельного круга, проходящего через эту точку P , и притом в сторону убывания угла долготы α (если, как обычно, выбрать направление возрастания угла α так, чтобы оно образовало с положительным направлением полярной оси правовинтовую систему). Численная же величина произведения $[\mathbf{R} \mathbf{p}_0]$ будет равна $R p_0 \sin \vartheta$, где ϑ есть полярный угол точки P . Стало быть, слагающие вектора $[\mathbf{R} \mathbf{p}_0]$ по направлению возрастания координат R, ϑ и α будут равны:

$$[\mathbf{R} \mathbf{p}_0]_R = [\mathbf{R} \mathbf{p}_0]_\vartheta = 0, \quad [\mathbf{R} \mathbf{p}_0]_\alpha = -R p_0 \sin \vartheta.$$

Соответственно этому

$$\text{rot}_R \mathbf{P} = \text{rot}_\vartheta \mathbf{P} = 0, \quad \text{rot}_\alpha \mathbf{P} = -\sin \vartheta p_0 \frac{\partial \Phi}{\partial R} = -\sin \vartheta \frac{\partial P}{\partial R},$$

где $\frac{\partial P}{\partial R}$ есть производная от численной величины вектора Герца.

Внося это в (302), получим

$$H_R = H_\vartheta = 0, \quad H_\alpha = -\sin \vartheta \frac{1}{c} \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial R}.$$

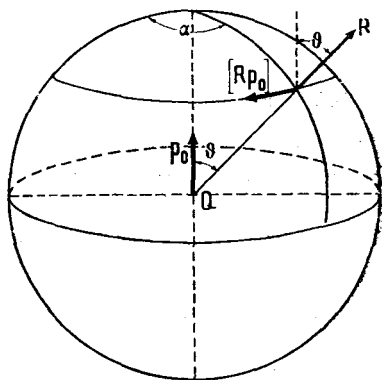


Рис. 93.

Чтобы определить \mathbf{E} , необходимо еще вычислить вихрь от $\text{rot } \mathbf{P}$. Так как этот последний вектор удовлетворяет условиям, которым мы в задаче 31 (стр. 218) подчинили вектор \mathbf{a} , то для определения $\mathbf{E} = \text{rot rot } \mathbf{P}$ достаточно заменить \mathbf{a}_α в ур. (179) через $\text{rot}_\alpha \mathbf{P}$. В результате получим:

$$\left. \begin{aligned} E_R &= \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \text{rot}_\alpha \mathbf{P}) = \\ &= -\frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin^2 \vartheta \frac{\partial P}{\partial R} \right) = -\frac{2 \cos \vartheta}{R} \frac{\partial P}{\partial R}; \\ E_\vartheta &= -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \text{rot}_\alpha \mathbf{P}) = \frac{\sin \vartheta}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial P}{\partial R} \right); E_\alpha = 0. \end{aligned} \right\} 303$$

Из (303) и (303') следует, что электрический и магнитный векторы поля осциллятора взаимно перпендикулярны, причем магнитные силовые линии совпадают с параллельными кругами нашей сферической системы координат, а электрические лежат в меридиональных плоскостях.

4. До сих пор мы не делали никаких специальных предположений о виде функций $f\left(t - \frac{R}{c}\right)$ или $\mathbf{p}\left(t - \frac{R}{c}\right)$. Предположим теперь, что осциллятор совершает незатухающие синусоидальные колебания, т. е. предположим, что

$$f(t) = \cos \omega t, \quad \mathbf{p}\left(t - \frac{R}{c}\right) = \mathbf{p}_0 f\left(t - \frac{R}{c}\right) = \mathbf{p}_0 \cos \omega\left(t - \frac{R}{c}\right),$$

или в комплексной форме (см. стр. 374):

$$\mathbf{p}\left(t - \frac{R}{c}\right) = \mathbf{p}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)}, \quad 304$$

где ω есть циклическая частота колебаний.

В этом случае, согласно (300),

$$\mathbf{P}(t, R) = \frac{\mathbf{p}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)}}{R},$$

откуда

$$\frac{\partial P}{\partial R} = p_0 \left(-\frac{1}{R^2} - \frac{i\omega}{cR} \right) e^{i\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)} = -\left(\frac{1}{R} + \frac{i\omega}{c} \right) P$$

и

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial P}{\partial R} \right) = -\frac{\partial}{\partial R} \left\{ \left(1 + \frac{i\omega R}{c} \right) P \right\} = \left(\frac{1}{R} + \frac{i\omega}{c} - \frac{\omega^2 R}{c^2} \right) P;$$

дифференцирование же P по t сводится очевидно к помножению на $i\omega$.

Стало быть, в этом случае отличные от нуля слагающие векторов E и H равны:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \sin \vartheta \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{R} + \frac{i\omega}{c} \right) P = \frac{i\omega}{c} \sin \vartheta \left(\frac{1}{R} + \frac{i\omega}{c} \right) P, \\ E_R &= 2 \cos \vartheta \left(\frac{1}{R^2} + \frac{i\omega}{cR} \right) P, \\ E_\vartheta &= \sin \vartheta \left(\frac{1}{R^2} + \frac{i\omega}{cR} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) P. \end{aligned} \right\} 305$$

5. Таковы точные выражения слагающих электромагнитных векторов в поле осциллятора, совершающего синусоидальные колебания. Они довольно сложны, поэтому мы ограничимся более подробным рассмотрением только двух крайних случаев — поля в непосредственной близости к осциллятору и поля на значительном расстоянии от него.

Что же, однако, должно служить при этом мерилom величины расстояния? Отношение абсолютных величин членов полиномов, входящих множителями в правые части уравнений (305), определяется отношением $\frac{1}{R}$ к $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{Tc}$, где T есть период колебаний осциллятора. Мы увидим в дальнейшем, что $Tc = \lambda$, где λ есть длина электромагнитной волны, излучаемой осциллятором, так что $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$. Соответственно этому мы будем под близкими к осциллятору точками понимать точки, расстояние которых от осциллятора удовлетворяет требованию:

$$\frac{1}{R} \gg \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{или} \quad R \ll \frac{\lambda}{2\pi}$$

т. е. расстояние которых от осциллятора мало по сравнению с его длиной волны¹.

На этих расстояниях от осциллятора

$$\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) = \omega t - \frac{\omega R}{c} \approx \omega t,$$

¹ Конечно, R должно быть все же настолько больше длины осциллятора l , чтобы его можно было считать диполем. Общим требованиям можно удовлетворить одновременно лишь в том случае, если $l \ll \lambda$. В случае простого вибратора Герца это условие не удовлетворяется; однако существуют типы вибраторов, этому условию удовлетворяющие.

так что

$$P(t, R) = \frac{p\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} \sim \frac{p(t)}{R}.$$

Таким образом, как и следовало ожидать, вблизи осциллятора поле его в каждый данный момент времени t определяется одновременно значением момента осциллятора $p(t)$ и его производной $\frac{\partial p(t)}{\partial t}$.

Далее при $\frac{1}{R} \gg \frac{\omega}{c}$ можно с достаточной точностью ограничиться лишь первыми членами полиномов, входящих в выражения (305), т. е. можно положить:

$$H_x = \frac{i\omega}{c} \sin \vartheta \frac{1}{R} P = \frac{i\omega}{c} \sin \vartheta \frac{p(t)}{R^2} = \frac{\sin \vartheta}{R^2} \frac{1}{c} \frac{\partial p(t)}{\partial t},$$

$$E_R = \frac{2 \cos \vartheta}{R^2} P = \frac{2 \cos \vartheta}{R^3} p(t),$$

$$E_\vartheta = \frac{\sin \vartheta}{R^2} P = \frac{\sin \vartheta}{R^3} p(t).$$

Сравнивая эти выражения с уравнением (69'), убедимся, что в каждый данный момент времени t электрическое поле вблизи осциллятора, как и следовало ожидать, совпадает с полем статического диполя, электрический момент которого p равен мгновенному значению момента осциллятора $p(t)$. Что же касается поля магнитного, то, приняв во внимание (299), получим:

$$H_x = \frac{\sin \vartheta}{cR^2} J_l,$$

или в векторной форме (ввиду того, что $H_\vartheta = H_R = 0$):

$$\mathbf{H} = \frac{J}{c} \frac{[\mathbf{R}]}{R^3}.$$

Таким образом вблизи осциллятора его магнитное поле совпадает с полем элемента тока длины l , определяемым формулой Био и Савара (164). Заметим при этом, что вблизи осциллятора его электрическое поле убывает обратно пропорционально кубу, а магнитное — обратно квадрату расстояния от осциллятора.

¹ Ибо

$$i \omega p(t) = \frac{\partial p(t)}{\partial t}.$$

6. Перейдем теперь к рассмотрению поля вдали от осциллятора, т. е. положим, что

$$\frac{1}{R} \ll \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{или} \quad R \gg \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Области поля, расстояние которых от осциллятора удовлетворяет этому условию, т. е. велико по сравнению с длиной волны осциллятора, называются волновой зоной осциллятора; смысл этого термина выяснится ниже.

В волновой зоне все члены входящих в (305) полиномов, содержащиеся в знаменателе R , исчезающе малы по сравнению с членами, R не содержащими, так что с достаточной точностью можно положить:

$$H_x = \frac{i\omega}{c} \sin \vartheta \frac{i\omega}{c} P = -\frac{\omega^2}{c^2} \sin \vartheta \frac{p\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R},$$

$$E_R = 0, E_\vartheta = -\frac{\omega^2}{c^2} \sin \vartheta P = H_x.$$

Внося сюда выражение p (из 304) и ограничиваясь вещественной частью решения, получим окончательно:

$$E_R = E_x = H_R = H_\vartheta = 0, E_\vartheta = H_x = -\frac{\omega^2 \sin \vartheta}{c^2 R} p_0 \cos \omega \left(t - \frac{R}{c}\right), \quad 306$$

что можно записать также и в следующей форме:

$$E_\vartheta = H_x = \frac{\sin \vartheta}{R} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p\left(t - \frac{R}{c}\right)}{\partial t^2}. \quad 306'$$

Заметим, что это последнее выражение остается справедливым при любой форме зависимости электрического момента осциллятора от времени (в том числе, например, и при затухающих его колебаниях). Действительно, любая функция времени может быть разложена в ряд или интеграл Фурье, т. е. может быть представлена в виде суммы синусоидальных функций, к каждой из которых применима формула (306'). Так как в эту формулу частота ω не входит, то она остается применимой и ко всей сумме, т. е. к произвольному $p(t)$.

Итак, как явствует из (306) и (306'), в волновой зоне осциллятора напряженности электрического и магнитного полей численно равны друг другу и убывают обратно

пропорционально первой степени расстояния от осциллятора. Напряженность поля зависит помимо R также и от полярного угла ϑ рассматриваемой точки поля: на продолжении оси осциллятора ($\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$) поле равно нулю, максимального же значения оно достигает в экваториальной плоскости осциллятора ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$). В каждой

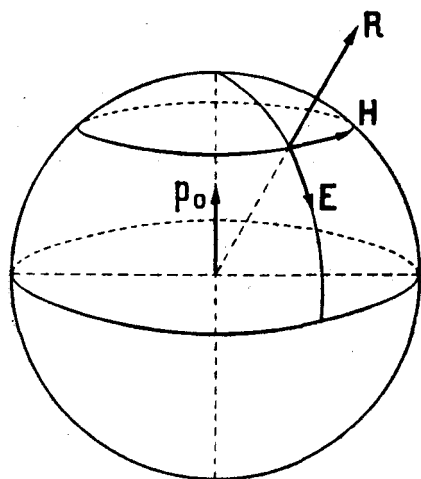


Рис. 94.

точке волновой зоны векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{R} взаимно перпендикулярны и образуют правовинтовую систему (см. рис. 94), причем \mathbf{E} направлено по дуге меридиана, а \mathbf{H} — по дуге параллельного круга. Наконец, и это самое существенное, фаза $\omega \left(t - \frac{R}{c} \right)$ векторов поля \mathbf{E} и \mathbf{H} распространяется по направлению радиус-вектора со скоростью c . Иными словами, фаза этих векторов на расстоянии $R + dR$ от осциллятора отстает на $\tau = \frac{dR}{c}$ секунд от той фазы, которой обладают эти векторы на расстоянии R

от осциллятора (ибо $t - \frac{R + dR}{c} = t - \tau - \frac{R}{c}$).

Всякий периодический процесс, фаза которого распространяется с определенной скоростью, называется волной. Стало быть, в волновой зоне осциллятора распространяется электромагнитная волна скорости c . Длиною волны λ , как известно, называется измеренное вдоль направления распространения волны расстояние между двумя последовательными точками, в которых векторы поля изменяются синхронно (т. е. в такт). Расстояние это равно:

$$\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega},$$

ибо

$$\cos \omega \left(t - \frac{R + \lambda}{c} \right) = \cos \left\{ \omega \left(t - \frac{R}{c} \right) - 2\pi \right\} = \cos \omega \left(t - \frac{R}{c} \right).$$

Излучаемая осциллятором волна называется сферической, ибо фаза волны в каждой точке поля зависит помимо времени лишь от расстояния этой точки от центра излучения (осциллятора), а направ-

вление распространения волны совпадает с направлением радиус-векторов, проведенных от центра излучения¹.

7. То же направление имеет и поток энергии в волновой зоне осциллятора, ибо, как легко убедиться, направление вектора Пойнтинга \mathbf{S} (см. ур-ние 282) в каждой точке этой зоны совпадает с направлением радиус-вектора \mathbf{R} . Численная же величина вектора Пойнтинга равна:

$$S = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}\mathbf{H}| = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{1}{4\pi} \frac{\sin^2\vartheta}{R^2 c^3} \left(\frac{\partial^2 p \left(t - \frac{R}{c} \right)}{\partial t^2} \right)^2. \quad 307$$

Стало быть, общий поток энергии Σ через поверхность сферы радиуса R с центром в осцилляторе, элемент поверхности которой равен $R^2 \sin \vartheta d\alpha d\vartheta$, определится выражением:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\vartheta S R^2 \sin \vartheta = \frac{1}{2c^3} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right)^2 \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \\ &= \frac{2}{3c^3} \left(\frac{\partial^2 p \left(t - \frac{R}{c} \right)}{\partial t^2} \right)^2. \end{aligned} \quad 307$$

В частности, если осциллятор совершает гармонические колебания циклической частоты $\omega = \frac{2\pi}{T}$, так что

$$p \left(t - \frac{R}{c} \right) = p_0 \cos \omega \left(t - \frac{R}{c} \right)$$

(сравни 304), то общий поток энергии через поверхность сферы за время одного полного периода будет равен:

$$\int_0^T \Sigma dt = \frac{2\omega^4 p_0^2}{3c^3} \int_0^T \cos^2 \omega \left(t - \frac{R}{c} \right) dt = \frac{p_0^2 \omega^4 T}{3c^3} = \frac{2\pi p_0^2 \omega^3}{3c^3}.$$

Выражая ω через длину волны λ , получим:

$$\int_0^T \Sigma dt = \frac{2\pi p_0^2}{3} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^3. \quad 308$$

¹ Напомним, что численные значения векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} зависят не только от R , но и от полярного угла ϑ .

Наконец среднее излучение осциллятора за единицу времени равно:

$$\bar{\Sigma} = \frac{1}{T} \int_0^T \Sigma dt = \frac{cp_0^2}{3} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4. \quad 308'$$

Таким образом осциллятор непрерывно излучает энергию в окружающее его пространство, причем согласно (308') средняя скорость излучения энергии $\bar{\Sigma}$ пропорциональна квадрату амплитуды его электрического момента p_0^2 и обратно пропорциональна четвертой степени длины волны λ^4 . Этим последним обстоятельством объясняется, например, тот факт, что для радиотелеграфирования необходимо пользоваться сравнительно короткими электромагнитными волнами (длиною от десятков метров до десятков километров); напротив, излучение, сопровождающее применяемые в технике сильных токов медленно переменные токи (сотни и тысячи периодов в сек., чему соответствуют волны длиною в тысячи и десятки тысяч километров), остается практически незаметным.

За время одного периода через любую охватывающую осциллятор замкнутую поверхность (в том числе и через поверхности, лежащие вне волновой зоны, т. е. вблизи осциллятора) протекает одинаковое количество энергии. В этом можно убедиться непосредственным вычислением; в частности для концентрических с осциллятором шаровых поверхностей волновой зоны, это явствует из независимости формулы (308) от радиуса сферы. Впрочем справедливость этого положения непосредственно вытекает из сделанного нами предположения, что в окружающем осциллятор пространстве нет ни проводников, ни электрических зарядов, ввиду чего излучаемая осциллятором электромагнитная энергия не может переходить в иные формы энергии и должна без потери переноситься в отдаленные участки пространства. Вместе с тем становится понятным и характер зависимости E и H от расстояния R в волновой зоне осциллятора. Чтобы общее излучение через концентрическую осциллятору сферическую поверхность не зависело от ее радиуса, необходимо, чтобы плотность потока энергии S была обратно пропорциональна R^2 (ибо поверхность сферы пропорциональна R^2). С другой стороны, в волновой зоне ввиду взаимной перпендикулярности и численного равенства векторов E и H :

$$S = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{c}{8\pi} E^2 = \frac{c}{8\pi} H^2.$$

Стало быть, E и H в волновой зоне должны убывать обратно первой степени R . Вблизи осциллятора, т. е. вне волновой зоны, харак-

тер поля гораздо сложнее; однако среднее за время одного периода значение общего потока энергии через поверхность сферы также не зависит от ее радиуса.

В заключение заметим следующее. Мы предположили, что вибратор Герца, который мы уподобили элементарному осциллятору, совершает незатухающие колебания. Это, однако, возможно лишь в том случае, если эти колебания поддерживаются действующими извне периодическими электродвижущими силами; в противном случае колебания вибратора будут затухать не только благодаря переходу его электромагнитной энергии в Джаулево тепло, но также и благодаря излучению, т. е. благодаря уносу энергии излучаемыми им электромагнитными волнами. Впрочем, если затухание колебаний достаточно мало, то в течение ограниченного числа периодов амплитуду колебаний можно считать практически постоянной и применять к полю затухающих колебаний результаты, полученные для колебаний незатухающих.

§ 59. Электромагнитная природа света. Плоские волны в диэлектрике. — 1. В § 57 мы убедились, что скорость распространения электромагнитных волн в вакууме совпадает со скоростью света, а в § 58 на частном примере электромагнитных волн, излучаемых осциллятором, убедились, что волны эти, подобно волнам световым, суть волны поперечные, т. е. что векторы волнового поля \mathbf{E} и \mathbf{H} перпендикулярны направлению распространения волны.

Это совпадение существеннейших свойств световых и электромагнитных волн заставляет предположить, что первые представляют собой лишь частный случай вторых и отличаются от невидимых электромагнитных волн лишь своей частотой или длиной волны. Если это так, то под „световым вектором“ (формальное понятие, которым оперирует волновая оптика) нужно, очевидно, понимать либо электрический (\mathbf{E}), либо магнитный (\mathbf{H}) вектор электромагнитной световой волны, ибо как \mathbf{E} , так и \mathbf{H} перпендикулярны направлению волны (что и требуется от „светового вектора“). Иными словами, направление поляризации, например, линейно поляризованного света должно определяться направлением векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} ¹.

¹ В прошлом столетии весьма оживленно дискутировался вопрос о том, параллелен ли или перпендикулярен световой вектор линейно поляризованной волны плоскости поляризации этой волны. На первом предположении базировались теории Грина, Неймана и др., на втором — теория Френеля. С точки зрения электромагнитной теории света вопрос этот сводится просто к вопросу о том, называть ли световым вектором напряженность магнитного или же электрического поля волны. Из оптических явлений явствует (см. напр. Хвольсон, Курс физики, том V), что магнитный вектор световой волны \mathbf{H} параллелен, а электрический вектор \mathbf{E} перпендикулярен ее плоскости поляризации.

Все эти предположения действительно подтверждаются более глубоким изучением свойств электромагнитных волн и сравнением их со свойствами света, так что в настоящее время можно с уверенностью сказать, что выяснение электромагнитной природы света является одним из прочнейших и важнейших завоеваний физики XIX столетия.

Мы лишены возможности подробно излагать здесь теорию электромагнитных волн и ограничимся рассмотрением лишь одного простейшего случая — распространения плоских монохроматических волн в однородных диэлектриках.

Волна называется плоской, если в любой момент времени во всех точках любой плоскости, перпендикулярной направлению волны, векторы поля имеют одинаковое значение. Иными словами, если выбрать ось z по направлению волны, то векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} поля плоской волны должны зависеть только от координаты z , но не от координат x и y . Рассмотрение подобных плоских волн имеет вполне определенное физическое значение, ибо, например, на достаточном удалении от осциллятора ограниченный участок излучаемой им сферической волны можно с достаточной точностью считать плоским.

Волна называется монохроматической (по-гречески — одноцветный, термин заимствован из оптики), если поле волны является гармонической (синусоидальной) функцией времени. Стало быть, комплексные выражения векторов поля плоской монохроматической волны должны иметь вид:

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}(z) e^{i\omega t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}(z) e^{i\omega t}, \quad 309$$

где (вообще говоря, комплексные) векторы $\mathbf{A}(z)$ и $\mathbf{B}(z)$ зависят только от координаты z ; конечно, физическое значение имеет только вещественная часть этих выражений (см. § 52, стр. 374).

2. Предположим, что рассматриваемый нами диэлектрик однороден (ϵ и μ постоянны) и лишен свободных электрических зарядов ($\rho = 0$). Дифференцируя по времени (I) уравнение Максвелла:

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{H} \quad (\text{I})$$

и внося в него значение $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ из ур-ния (II):

$$\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E}, \quad (\text{II})$$

получим в этом случае на основании (66):

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \text{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{c}{\mu} \text{rot rot } \mathbf{E} = -\frac{c}{\mu} (\text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}).$$

Так как при $\rho = 0$ и $\epsilon = \text{const}$ ур-ние (IV) принимает вид:

$$\text{div } \mathbf{D} = \epsilon \text{ div } \mathbf{E} = 0,$$

то, стало быть,

$$\frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{E}. \quad 310$$

Ввиду того, что уравнения (I) и (II) симметричны относительно \mathbf{E} и \mathbf{H} (вплоть до знака), то совершенно аналогичным образом получим:

$$\frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{H}. \quad 310'$$

3. Справедливость уравнений (310) и (310') ограничена лишь требованием однородности диэлектрика и отсутствия в нем свободных зарядов. В случае же плоских монохроматических волн уравнения эти на основании (309) могут быть записаны в следующей форме (по сокращению на $e^{i\omega t}$):

$$\begin{aligned} -\frac{\epsilon \mu \omega^2}{c^2} \mathbf{A}(z) &= \nabla^2 \mathbf{A}(z) = \frac{\partial^2 \mathbf{A}(z)}{\partial z^2}, \\ -\frac{\epsilon \mu \omega^2}{c^2} \mathbf{B}(z) &= \nabla^2 \mathbf{B}(z) = \frac{\partial^2 \mathbf{B}(z)}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{A} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{B} = 0,$$

где нами введено обозначение:

$$k^2 = \frac{\epsilon \mu \omega^2}{c^2}, \quad k = \omega \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{c}. \quad 311$$

Решения этих уравнений, как известно, имеют вид:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{-ikz} + \mathbf{A}_0' e^{ikz}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-ikz} + \mathbf{B}_0' e^{ikz},$$

где \mathbf{A}_0 , \mathbf{A}_0' , \mathbf{B}_0 и \mathbf{B}_0' суть произвольные постоянные интегрирования. Внося эти выражения в (309), получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{A}_0 e^{i(\omega t - kz)} + \mathbf{A}_0' e^{i(\omega t + kz)}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{B}_0 e^{i(\omega t - kz)} + \mathbf{B}_0' e^{i(\omega t + kz)}. \end{aligned}$$

Первые члены этих выражений представляют собой, очевидно, волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z , а вторые — волну, распространяющуюся в обратном направлении. Без существенного ограничения общности рассуждений можно ограничиться рассмотрением лишь одной из этих волн, например, первой, и положить:

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}_0 e^{i(\omega t - kz)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}_0 e^{i(\omega t - kz)}.$$

\mathbf{A}_0 и \mathbf{B}_0 суть амплитуды векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} ; независимость этих амплитуд от координат означает, что распространение плоских волн в диэлектрике не связано с изменением их интенсивности.

Амплитуды \mathbf{A}_0 и \mathbf{B}_0 суть, вообще говоря, величины комплексные как и всякая комплексная величина они могут быть представлены в форме:

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{E}_0 e^{i\varphi}, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{H}_0 e^{i\psi},$$

где \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 суть векторы вещественные¹. Внося это в предшествующие выражения, получим окончательно:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kz + \varphi)}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - kz + \psi)}. \quad 312$$

Значения величин φ и ψ зависят, очевидно, от выбора начала счета времени t и начала счета координаты z .

Скорость волны (312) равна очевидно $\frac{\omega}{k}$, ибо в момент t_0 значения векторов поля в плоскости $z = z_0$ совпадают с теми значениями, которыми эти векторы обладали в момент $t_0 - 1$ в плоскости $z = z_0 - \frac{\omega}{k}$; это явствует из равенства соответствующих фаз:

$$\omega t_0 - kz_0 = \omega(t_0 - 1) - k\left(z_0 - \frac{\omega}{k}\right).$$

Согласно (311), скорость эта равна

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad 313$$

¹ В сущности произвольный комплексный вектор $\mathbf{a} = \mathbf{b} + i\mathbf{c}$ (\mathbf{b} и \mathbf{c} вещественны) может быть представлен в форме $\mathbf{a} = \mathbf{a}' e^{i\varphi}$ (\mathbf{a}' вещественно) лишь в том случае, если \mathbf{b} и \mathbf{c} параллельны друг другу. Так как нас в конечном счете интересует лишь вещественная часть комплексных выражений, то мы всегда можем удовлетворить этому условию надлежащим выбором мнимой части этих выражений.

что совпадает с общими результатами, полученными в § 56 (ур-ние 289). Заметим, между прочим, что величина k весьма просто связана с длиной волны λ ; внося в (313) $\omega = \frac{2\pi}{T}$, получим:

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{Tv} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (313')$$

Таким образом k равно числу волн, укладываемых на отрезке в 2π см, и поэтому называется часто волновым числом.

4. Для упрощения дальнейших вычислений заметим, что, согласно (312), дифференцирование векторов плоской волны по z сводится к умножению их на $-ik$. Так как, с другой стороны, эти векторы не зависят от x и y , то символическое умножение их на дифференциальный оператор набл сводится к умножению на обычный вектор $-ik\mathbf{j}$, так что в применении к этим векторам

$$\nabla = \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = -ik\mathbf{j}.$$

В том случае, если ось z координатной системы не совпадает с направлением распространения волны, достаточно, очевидно, заменить \mathbf{j} единичным вектором \mathbf{n} , совпадающим с этим направлением:

$$\nabla = -ik\mathbf{n}. \quad (314)$$

На основании (314) Максвелловы уравнения (III) и (IV) принимают вид:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{B} = \nabla \mu \mathbf{H} &= -ik\mu \mathbf{nH} = 0, \\ \text{div } \mathbf{D} = \nabla \varepsilon \mathbf{E} &= -ik\varepsilon \mathbf{nE} = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} перпендикулярны \mathbf{n} , т. е. перпендикулярны направлению волны. Таким образом плоские электромагнитные волны, как и волны сферические, суть волны поперечные.

Дифференцирование векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} по времени, согласно (312), сводится к умножению их на $i\omega$, ввиду чего с помощью (314) уравнение (II) может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{i\omega\mu}{c} \mathbf{H} = -\text{rot } \mathbf{E} = -[\nabla \mathbf{E}] = ik[\mathbf{nE}].$$

Внося сюда значение k из (311) и деля уравнения на $\frac{i\omega\sqrt{\mu}}{c}$, получим¹:

$$\sqrt{\mu} \mathbf{H} = \sqrt{\varepsilon} [\mathbf{nE}].$$

¹ Рассмотрение ур-ния (I) не дает ничего нового и приводит к тем же результатам.

Из этого уравнения следует, во-первых, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} взаимно перпендикулярны и, во-вторых, что взаимно перпендикулярные векторы \mathbf{n} , \mathbf{E} и \mathbf{H} образуют правовинтовую систему (рис. 95, сравни рис. 94).

Внося (312) в предшествующее уравнение, получим:

$$\sqrt{\mu} \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - kz + \psi)} = \sqrt{\varepsilon} [\mathbf{nE}_0] e^{i(\omega t - kz + \varphi)}.$$

Ввиду вещественности векторов \mathbf{H}_0 , \mathbf{E}_0 и \mathbf{n} уравнение это может удовлетворяться лишь в том случае, если

$$\varphi = \psi. \quad 315$$

Стало быть, векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} обладают одинаковой фазой, т. е. изменяются синхронно. По сокращении предшествующего уравнения

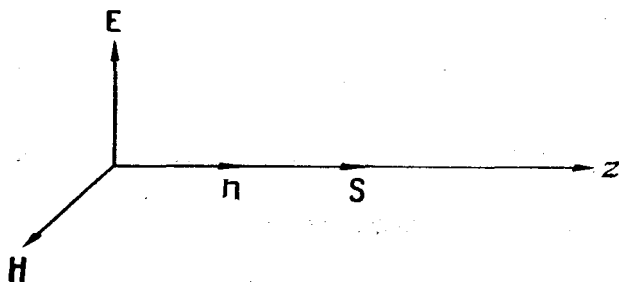


Рис. 95.

на показательный множитель получим, ввиду перпендикулярности \mathbf{n} и \mathbf{E}_0 , следующее соотношение между амплитудами векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$\sqrt{\mu} H_0 = \sqrt{\varepsilon} |[\mathbf{nE}_0]| = \sqrt{\varepsilon} E_0. \quad 316$$

5. Обращаясь к определению нелинейных функций векторов поля (энергия, вектор Пойнтинга и т. д.), мы должны предварительно перейти к вещественным частям комплексных выражений (312) (см. стр. 374), т. е. положить [см. (315)]

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kz + \varphi); \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - kz + \varphi). \quad 317'$$

Согласно (316) плотность магнитной энергии в поле волны оказывается равной плотности энергии электрической:

$$w_m = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{\mu \mathbf{H}_0^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi)}{8\pi} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = w_e,$$

стало быть,

$$w = w_{\kappa} + w_{\rho} = \frac{\epsilon E^2}{4\pi} = \frac{\mu H^2}{4\pi}. \quad 317$$

Из рассмотрения рисунка (95) явствует, что направление вектора Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}],$$

т. е. направление потока энергии в волне, совпадает с направлением ее распространения. Ввиду перпендикулярности векторов \mathbf{E} и \mathbf{H}

$$S = \frac{c}{4\pi} EH.$$

Выражая с помощью (316) и (312') H через E и воспользовавшись уравнениями (317) и (313), получим

$$S = \frac{c \sqrt{\epsilon}}{4\pi \sqrt{\mu}} E^2 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} w = v w,$$

откуда

$$S dt = w v dt.$$

Таким образом количество энергии $S dt$, протекающее за элемент времени dt через единичную площадку, перпендикулярную вектору \mathbf{S} (т. е. перпендикулярно направлению волны), равно количеству энергии $w \cdot v dt$, содержащейся в прилегающем к этой площадке цилиндре высоты $v dt$. Физически это значит, что скорость течения энергии равна v , т. е. совпадает с фазовой скоростью волны¹.

§ 60. Отражение и преломление плоских волн.—1. Несостоятельность механистических теорий света прошлого столетия, основанных на представлении об упругом световом эфире, особенно отчетливо выявилась в безуспешных попытках этих теорий объяснить

¹ Фазовая скорость есть скорость распространения фазы волны. Равенство фазовой скорости и скорости энергии в изотропных средах нарушается лишь в случае наличия дисперсии, т. е. в случае зависимости фазовой скорости волны от ее длины. В диспергирующих средах скорость течения энергии равна не фазовой, а так называемой групповой скорости волн.

простейшие явления отражения и преломления света¹. Напротив, для объяснения этих явлений с точки зрения электромагнитной теории света ни к каким специальным допущениям прибегать не приходится.

Мы ограничимся здесь рассмотрением преломления и отражения плоских монохроматических волн на поверхности раздела двух однородных диэлектриков 1 и 2, диэлектрические постоянные которых мы обозначим через ϵ_1 и ϵ_2 . Далее, мы примем для простоты, что $\mu_1 = \mu_2 = 1$; как мы увидим ниже, для световых волн это допущение общности наших рассуждений вовсе не ограничивает. При этих условиях скорость волн в первом и втором диэлектрике, согласно (313), будет соответственно равняться:

$$v_1 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1}} \text{ и } v_2 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_2}}. \quad 318$$

В предшествующем параграфе мы для упрощения записи предполагали, что направление оси z выбрано так, чтобы она совпадала с направлением волны. Приступая к рассмотрению совокупности нескольких волн различного направления (падающей, отраженной и преломленной), мы, очевидно, должны предварительно обобщить формулы прошлого параграфа на случай произвольного направления осей координат. Пусть направление волны совпадает с направлением единичного вектора \mathbf{n} , образующего с осями координат x, y, z углы α, β, γ (рис. 96). В системе декартовых координат x', y', z' , ось z' которых совпадает с \mathbf{n} , фаза этой волны в точке P должна, согласно (312), определяться выражением:

$$\omega t - kz',$$

где z' есть координата точки P . Эта координата равна проекции радиус-вектора \mathbf{R} точки P на направление \mathbf{n} оси z' ; стало быть:

$$z' = \mathbf{nR} = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma, \quad 319$$

где x, y, z суть координаты той же точки P в исходной системе координат. Внося это в (312) и приняв во внимание (315), получим

¹ В частности из теории упругости следует, что при преломлении или отражении поперечных волн должны возникать также продольные волны сжатия. Чтобы объяснить факт отсутствия продольных световых волн в эфире, необходимо было прибегнуть либо к гипотезе абсолютно несжимаемого эфира, либо к гипотезе эфира неустойчивого, обладающего отрицательной объемной упругостью, что вело к дальнейшим противоречиям. См. напр. Хвольсон, Курс физики, т. V, глава «Эл.-маг-ная теория света».

искомые выражения векторов поля плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении \mathbf{n} :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k\mathbf{n}\mathbf{R} + \varphi)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - k\mathbf{n}\mathbf{R} + \varphi)}, \quad (320)$$

где \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 суть постоянные вещественные амплитуды соответствующих векторов.

2. После этих подготовительных замечаний приступим к решению намеченной задачи. Пусть плоская волна (320), распространяющаяся в среде 1 в направлении \mathbf{n} , падает на плоскую же поверхность раздела среды 1 и 2. После проникновения в среду 2 волна эта должна будет очевидно распространяться с иной скоростью ($v_2 \neq v_1$) и, как

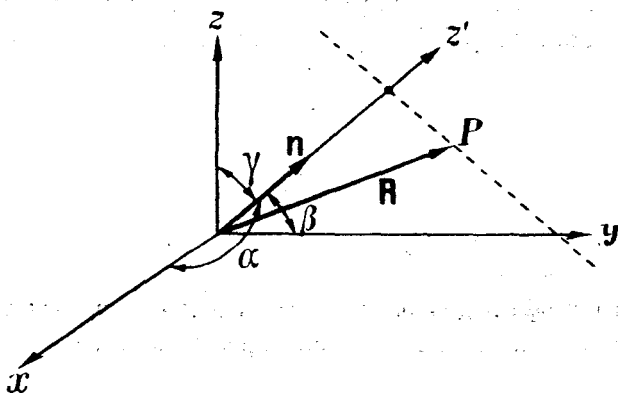


Рис. 96.

мы увидим, вообще говоря, в ином направлении, не совпадающим с \mathbf{n} . Для определения амплитуды, направления и фазы этой так называемой преломленной волны достаточно потребовать выполнения на поверхности раздела пограничных условий, установленных нами в § 53. При этом оказывается, что условия эти могут быть удовлетворены лишь в том случае, если допустить существование еще третьей, так называемой отраженной волны, распространяющейся в той же среде 1, как и волна падающая, однако в направлении \mathbf{ot} , а не к поверхности раздела.

Обозначим комплексные векторы поля падающей волны через \mathbf{E} и \mathbf{H} , волны отраженной через \mathbf{E}^r и \mathbf{H}^r , и наконец, волны преломленной через \mathbf{E}^g и \mathbf{H}^g , и положим, согласно (320), что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k\mathbf{n}\mathbf{R} + \varphi)}, \\ \mathbf{E}^r &= \mathbf{E}_0^r e^{i(\omega_r t - k_r \mathbf{n}_r \mathbf{R} + \varphi_r)}, \\ \mathbf{E}^g &= \mathbf{E}_0^g e^{i(\omega_g t - k_g \mathbf{n}_g \mathbf{R} + \varphi_g)}; \end{aligned}$$

аналогичных выражений для \mathbf{H} , \mathbf{H}^r и \mathbf{H}^g выписывать не будем¹. Первые две волны распространяются в первой среде 1, так что результирующая напряженность поля в этой среде будет равна

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + \mathbf{E}^r,$$

тогда как поле во второй среде будет равно

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}^g.$$

Рассмотрим какое-либо из общих пограничных условий на поверхности раздела, например, условие (II) непрерывности тангенциальных слагающих вектора \mathbf{E} . В рассматриваемом случае оно примет вид:

$$E_t + E_t^r = E_t^g$$

т. е.

$$\begin{aligned} E_{0t} e^{i(\omega t - knR + \varphi)} + E_{0t}^r e^{i(\omega_r t - k_r n_r R + \varphi_r)} = \\ = E_{0t}^g e^{i(\omega_g t - k_g n_g R + \varphi_g)}. \end{aligned} \quad 321$$

Для того чтобы подобного рода условие могло выполняться при любом значении времени t , необходимо прежде всего, чтобы

$$\omega = \omega_r = \omega_g. \quad 322$$

Действительно, условие (321) имеет вид:

$$ae^{i\omega t} + be^{i\omega_r t} = ce^{i\omega_g t},$$

где a , b и c от времени не зависят. Дифференцируя это равенство по t , получим:

$$\omega a e^{i\omega t} + \omega_r b e^{i\omega_r t} = \omega_g c e^{i\omega_g t};$$

исключая из двух последних уравнений $e^{i\omega_g t}$, получим:

$$a(\omega - \omega_g) e^{i\omega t} = b(\omega_g - \omega_r) e^{i\omega_r t},$$

что может иметь место лишь при $\omega = \omega_r$. Исключая же из приведенных уравнений $b e^{i\omega_r t}$, убедимся, что $\omega = \omega_g$. Стало быть, действительно

¹ r и g суть начальные буквы немецких слов *reflektiert* (отраженный) и *gebrochen* (преломленный).

$\omega = \omega_r = \omega_g$, т. е. частота волны не изменяется при ее отражении и преломлении.

Совершенно аналогичным образом можно убедиться, что на поверхности раздела должны выполняться равенства:

$$k_n R = k_r n_r R = k_g n_g R, \quad (323)$$

ибо пограничное условие может быть представлено в виде

$$a' e^{-ik_n R} + b' e^{-ik_r n_r R} = c' e^{-ik_g n_g R},$$

где величины a' , b' и c' от координат не зависят.

3. Для дальнейших вычислений удобно перейти к координатным выражениям. Согласно (319), уравнения (323) можно записать так

$$\begin{aligned} k(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) &= k_r(x \cos \alpha_r + y \cos \beta_r + z \cos \gamma_r) = \\ &= k_g(x \cos \alpha_g + y \cos \beta_g + z \cos \gamma_g), \end{aligned}$$

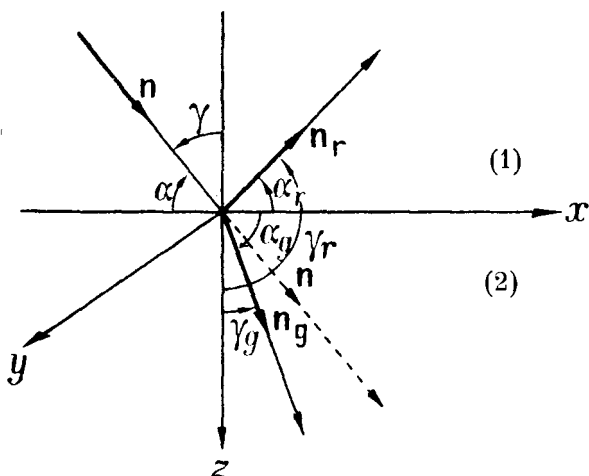


Рис. 97.

где α , β , γ ; α_r , β_r , γ_r и α_g , β_g , γ_g суть соответственно направляющие углы векторов \mathbf{n} , \mathbf{n}_r и \mathbf{n}_g . Для упрощения записи выберем оси координат так, чтобы координатная плоскость $z=0$ совпадала с плоскостью раздела среды 1 и 2, и чтобы направление распространения падающей волны \mathbf{n} лежало в плоскости xz (рис. 97). В этом случае $\cos \beta = 0$. Приняв далее во внимание, что приведенные уравнения должны

удовлетворяться на плоскости раздела сред 1 и 2, т. е. при $z=0$, получим:

$$kx \cos \alpha = k_r(x \cos \alpha_r + y \cos \beta_r) = k_y(x \cos \alpha_y + y \cos \beta_y).$$

Так как это условие должно удовлетворяться во всех точках плоскости $z=0$, т. е. при любых значениях x и y , то из него непосредственно следует

$$\cos \beta_r = \cos \beta_y = 0$$

и

$$k \cos \alpha = k_r \cos \alpha_r = k_y \cos \alpha_y.$$

Первое из этих уравнений означает, что направления отраженной и преломленной волны \mathbf{n}_r и \mathbf{n}_y лежат в плоскости xz , т. е. в плоскости падения волны¹.

Примем теперь во внимание, что падающая и отраженные волны распространяются в первой среде, а преломленная — во второй, и что стало быть, согласно (313) и (322),

$$k = \frac{\omega}{v_1}, \quad k_r = \frac{\omega}{v_1} = k, \quad k_y = \frac{\omega}{v_2}.$$

Следовательно, предшествующее уравнение может быть записано следующим образом:

$$\frac{1}{v_1} \cos \alpha = \frac{1}{v_1} \cos \alpha_r = \frac{1}{v_2} \cos \alpha_y. \quad 324$$

Из этих равенств следует, во-первых, что²

$$\alpha_r = \alpha.$$

Вводя, как обычно, углы падения и отражения θ и θ_r (как явствует из рис. 97 и 98 $\theta = \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$ и $\theta_r = \pi - \gamma_r = \frac{\pi}{2} - \alpha_r$), можем сказать, что угол падения θ равен углу отражения θ_r .

Далее, так как $\cos \alpha$ и $\cos \alpha_y$ имеют одинаковые знаки, то направления падающей и преломленной волны должны лежать в одном и том же квадранте плоскости xz (рис. 98).

¹ Плоскостью падения, как известно, называется плоскость, проходящая через направление падающей волны и через нормаль к пограничной поверхности.

² Так как по определению значение направляющего угла не может превышать π , то решение $\alpha_r = 2\pi - \alpha$ отпадает.

Введя угол преломления $\theta_g = \gamma_g = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и заметив, что $\cos \alpha = \sin \theta$ и $\cos \alpha_g = \sin \theta_g$, получим из (324):

$$\frac{1}{v_1} \sin \theta = \frac{1}{v_2} \sin \theta_g$$

или ¹

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta_g} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (324')$$

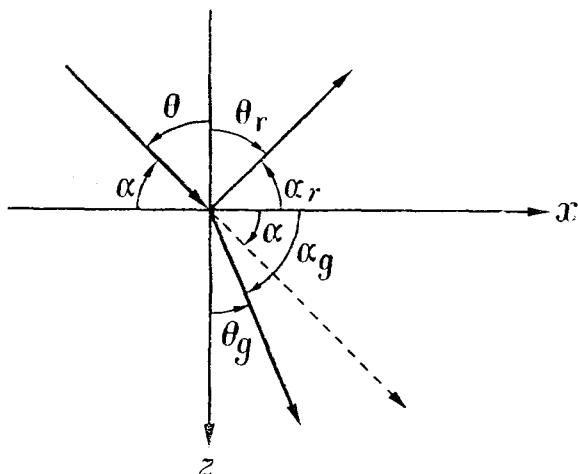


Рис. 98.

¹ Напомним, что, как известно из элементарного курса оптики, при $\frac{v_1}{v_2} = n_{12} < 1$ определяемая уравнением (324') величина угла преломления θ_g принимает вещественные значения лишь в том случае, если угол падения θ не превышает так называемого угла полного внутреннего отражения Φ , определяемого уравнением:

$$\sin \Phi = \frac{v_1}{v_2} = n_{12}.$$

В противном случае, при $\theta > \Phi$, величина θ_g становится комплексной. Как показывает специальное рассмотрение вопроса, на котором мы останавливаться не будем, при этом должно наблюдаться так называемое полное внутреннее отражение волн. В этом случае преломленная волна отсутствует, и электромагнитное поле во второй среде оказывается отличным от нуля лишь в весьма тонком слое (порядка длины волны), непосредственно прилегающем к поверхности раздела. См. напр. Хвольсон, Курс физики, том V, или В. Бурсиан, «Электромагнитная теория света», Ленинград, изд. «Кубуч», 1926 (литографированное).

Эти следствия теории вполне согласуются с данными эксперимента как в области длинных электромагнитных волн, так и в области волн световых.

Таким образом отношение синусов углов падения и преломления есть величина постоянная, зависящая лишь от свойств граничащих сред 1 и 2. Отношение это, которое мы обозначим через n_{12} , как известно, называется показателем преломления среды второй относительно среды первой. На основании (318) можем написать:

$$n_{12} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \quad 325$$

4. Итак, из одного лишь факта существования линейных условий типа (321) на границе двух сред непосредственно следуют все геометрические законы преломления и отражения электромагнитных волн, совпадающие с соответствующими законами для волн световых. Более же детальное рассмотрение этих пограничных условий позволяет определить соотношение между квадратами амплитуд волны падающей и волн отраженной и преломленной. Эти соотношения оказываются тождественными с так называемыми формулами Френеля, определяющими сравнительную интенсивность отраженного и преломленного света в зависимости от коэффициента преломления, угла падения и поляризации падающего света. Этот вывод подтверждаемых опытом формул Френеля из общих положений электродинамики является одним из важнейших доказательств электромагнитной природы света. Не имея возможности приводить его здесь, мы отсылаем читателя к специальным курсам, цитированным в последнем примечании.

Помимо вывода законов преломления и отражения света, бывших известными еще до выяснения его электромагнитной природы, изложенная нами теория позволяет установить непосредственное соотношение между коэффициентами преломления света n и диэлектрической постоянной среды ε (формула 325). В частности, коэффициент преломления диэлектрика относительно вакуума (для которого $\varepsilon = 1$) оказывается равным:

$$n = \sqrt{\varepsilon}. \quad 325'$$

Для некоторых диэлектриков, преимущественно газообразных, формула (325') действительно подтверждается опытом (см. таблицу I). Однако для многих веществ эта формула результатам измерений вовсе не соответствует (таблица II). Впрочем, уже самый факт существования дисперсии света, т. е. зависимости коэффициента преломления от длины волны, доказывает несостоятельность формул (325) и (325'), согласно которым n должно было бы иметь постоянное значение для всех электромагнитных волн.

Таблица I

	n	$\sqrt{\varepsilon}$
Воздух	1,000 294	1,000 295
Водород	1,000 138	1,000 132
СО	1,000 346	1,000 345
Бензол	1,482	1,49

Таблица II

	n	$\sqrt{\varepsilon}$
Вода	1,33	9,0
Метилловый спирт	1,34	5,7
Этиловый спирт	1,36	5,0

5. Таким образом феноменологическая Максвеллова теория макроскопического поля приводит, вообще говоря, к неправильным значениям показателя преломления. Противоречие это, однако, весьма просто разрешается с точки зрения электронной теории микроскопического поля. Действительно, при выводе уравнений макроскопического поля в главе II мы уподобили молекулы диэлектрика электрическим диполям. Если диполи эти квазиупруги, то они должны обладать собственным периодом колебания. Если этот собственный период близок к периоду световых волн, то амплитуда колебаний зарядов диполя, возбуждаемых переменным полем световой волны, должна существенно зависеть не только от амплитуды электрического поля волны E , но также и от периода (или длины) световой волны (резонанс). Стало быть, и амплитуда переменного вектора поляризации диэлектрика P , а вместе с тем и амплитуда вектора электрической индукции $D = \varepsilon E$, должны существенно зависеть от периода или длины световой волны. Таким образом при учете особенностей микроскопического строения диэлектриков мы должны прийти к определенной зависимости значения диэлектрической постоянной ε от длины волны, а стало быть, согласно (325'), и к выяснению явлений дисперсии света. Внося же в (325') значение диэлектрической постоянной, измеренное в постоянном или медленно переменном поле,

мы можем, очевидно, определить значение показателя преломления лишь для сравнительно длинных электромагнитных волн, период которых весьма велик по сравнению с собственным периодом колебания диполей диэлектрика. Для такого рода волн формула (325) действительно подтверждается опытом¹.

В том случае, если молекулы диэлектрика могут быть уподоблены твердым диполям, мы встречаемся с явлениями несколько иного характера. Поляризация подобных диэлектриков сводится к повороту осей диполей (т. е. молекул) по направлению поля. В быстропеременных полях оси молекул диэлектрика, обладающих определенным моментом инерции, не успевают следовать за быстрыми изменениями направления поля. В результате диэлектрик либо вовсе не поляризуется, либо поляризуется слабее, чем в постоянном электрическом поле той же напряженности. Таким образом значение диэлектрической постоянной (а стало быть, и значение показателя преломления) в диэлектриках этого класса должно падать по мере уменьшения периода колебаний поля².

Совершенно аналогичным образом объясняется также и тот упомянутый в начале этого параграфа факт, что при изучении световых волн можно считать $\mu = 1$. Действительно, восприимчивость диэлектрических веществ всегда столь незначительна (см. § 44), что при определении скорости света по формуле $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ отличим μ от единицы всегда можно пренебречь. Механизм же парамагнитного намагничивания аналогичен механизму поляризации диэлектрика с твердыми диполями; поэтому по мере увеличения частоты переменного поля парамагнитная восприимчивость χ стремится к нулю и, стало быть, μ стремится к единице.

В настоящей главе, посвященной феноменологической Максвелловой теории поля, мы должны ограничиться приведенными отрывочными замечаниями о прохождении света через диэлектрики, ибо более подробное изучение этого вопроса возможно лишь на почве электронной теории (см. том II).

§ 61. Поверхностные токи. Идеальные проводники.—1. В главе VI мы подробно рассмотрели свойства квазистационарных переменных токов. Теперь же мы рассмотрим на частном примере свойства быстро-переменных токов, к которым теория, изложенная в главе

¹ В частности, период собственных колебаний молекулярных диполей веществ приведенных в таблице I, мал по сравнению с периодом волн видимого света.

² Молекулы веществ, приведенных в таблице II, обладают «твердыми» диполями.

VI, все же неприменима. При этом мы ограничимся предельным случаем так называемых поверхностных токов. Под этим термином нужно понимать следующее.

Как мы убедились в § 52, быстро-переменные токи практически полностью сосредотачиваются на поверхности проводников (скин-эффект) в слое толщины δ :

$$\delta = \frac{1}{p} = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\mu\omega}},$$

где ω есть циклическая частота тока, а λ — электропроводность проводника (см. стр. 378 и 380). При возрастании ω δ стремится к нулю так что при $\omega = \infty$ весь ток должен сосредоточиться на геометрической поверхности проводника. Рассмотрением этого предельного случая поверхностных токов (в отличие от исключительно рассматривавшихся нами до сих пор объемных токов, распределенных по толще проводника) мы и ограничимся. Практически ток можно считать поверхностным во всех тех случаях, когда δ весьма мала по сравнению с доступной точностью измерения расстояний (сравни сказанное об объемных и поверхностных зарядах).

Заметим, что если бы в природе существовали идеальные проводники¹ (т. е. проводники, обладающие бесконечной проводимостью λ и сопротивлением нуль), то, как явствует из приведенной формулы, величина δ равнялась бы в этих проводниках нулю при любом неравном нулю значении ω . Поэтому отличительным свойством идеального проводника можно считать тот факт, что переменные токи в идеальном проводнике полностью сосредотачиваются на его поверхности, или, иначе говоря, что переменное поле внутри идеального проводника не проникает. Таким образом, ограничиваясь в следующем параграфе рассмотрением идеальных проводников, мы получим правильное представление о распределении поля в реальных проводниках при токах высокой частоты. Нужно однако иметь в виду, что сопротивление реальных проводников (λ конечное) при возрастании частоты тока не только не падает, но стремится к бесконечности.

2. Допуская существование поверхностных токов, мы должны соответственным образом видоизменить пограничное условие (I') (стр. 386) для тангенциальных слагающих напряженности магнитного поля \mathbf{H} на поверхности раздела двух сред. Действительно, при выводе этого условия мы предполагали, что объемная плотность токов \mathbf{j} всюду остается,

¹ Напомним, что при температурах, близких к абсолютному нулю, некоторые металлы становятся „сверхпроводящими“, см. § 29.

конечной, и что поэтому при $dl \rightarrow 0$ общая сила тока $\int j_n dS$, протекающего через участок переходного слоя длины dt и толщины dl (см. рис. 89, стр. 386), также стремится к нулю. Между тем при наличии поверхностных токов общая сила тока в поверхностном слое при уменьшении его толщины dl до нуля может оставаться неизменной.

Под плотностью i поверхностных токов, в отличие от плотности j токов объемных, мы будем понимать количество электричества, протекающего в единицу времени через единицу длины отрезка, расположенного на поверхности проводника и перпендикулярного направлению тока. Сила тока, протекающего через заштрихованную площадку $dt dl$ рисунка 89, в пределе, при $dl \rightarrow 0$, окажется очевидно равной:

$$\lim_{dl \rightarrow 0} j_n dS = \lim_{dl \rightarrow 0} j_n dt dl = i_n dt,$$

где i_n есть перпендикулярная к t слагающая плотности поверхностного тока. Внося это в (Ib), получим после простых преобразований вместо (I') следующее пограничное условие:

$$\frac{4\pi i_n}{c} = H_{2t} - H_{1t}.$$

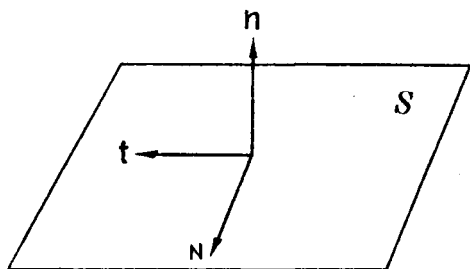


Рис. 99.

В отличие от прежних формул индекс n означает здесь слагающую вектора i не по нормали к поверхности раздела (каковая слагающая очевидно равна нулю), а по касательному к этой поверхности направлению, перпендикулярному касательному же направлению t ¹.

Чтобы избежать путаницы обозначим это последнее направление через N , соответственно чему пограничное условие примет вид:

$$\frac{4\pi i_N}{c} = H_{2t} - H_{1t}.$$

Через n же мы как обычно обозначим нормаль к поверхности раздела S , направленную из первой среды во вторую. Взаимно перпенди-

¹ В этом обстоятельстве можно убедиться из рассмотрения рис. 89, в котором соответственно избранному нами направлению обхода заштрихованной площадки $dt dl$ вектор n должен быть направлен от чертежа вверх.

кулярные единичные векторы \mathbf{t} , \mathbf{N} , \mathbf{n} составляют правовинтовую систему (рис. 99), так что

$$\mathbf{t} = [\mathbf{Nn}].$$

Стало быть,

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{Ht} = \mathbf{H}[\mathbf{Nn}] = \mathbf{N}[\mathbf{nH}]; \quad i_N = \mathbf{N}i.$$

Внося это в предшествующее уравнение получим:

$$\frac{4\pi\mathbf{N}i}{c} = \mathbf{N}[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)].$$

Так как \mathbf{N} есть произвольное направление, лежащее в плоскости раздела, то стало быть

$$\frac{4\pi i}{c} = [\mathbf{nH}_2] - [\mathbf{nH}_1]. \quad 326$$

Это уравнение и представляет собой то пограничное условие, которому при наличии поверхностных токов на поверхности раздела должны удовлетворять касательные слагающие вектора \mathbf{H} (ибо лишь эти слагающие и входят в выражение $[\mathbf{nH}]$). В частности, если среда 1-я представляет собой идеальный проводник, то переменное электромагнитное поле внутри этого проводника проникнуть не может, так что $\mathbf{H}_1 = 0$, и уравнение (326) принимает вид:

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{i} = [\mathbf{nH}], \quad 326'$$

где \mathbf{n} есть внешняя нормаль к поверхности проводника, а \mathbf{H} — напряженность поля с внешней стороны этой поверхности.

§ 62. Пример неквазистационарных токов — волны вдоль кабеля.—1. В качестве примера неквазистационарных токов рассмотрим быстро-переменные токи в кабеле, состоящем из двух коаксиальных цилиндрических проводников: внешнего полого, радиус внутренней поверхности которого пусть будет равен r_2 , и внутреннего сплошного, радиуса r_1 (рис. 100). Предположим, что пространство между этими проводниками заполнено однородной непроводящей средой, обладающей диэлектрической постоянной ϵ и магнитной проницаемостью μ . Для упрощения мы пренебрежем сопротивлением кабеля, т. е. будем считать проводники кабеля идеальными. Тогда внутри проводников переменное поле будет равно нулю и все токи полностью сосредоточатся на поверхности проводников. При этих условиях поле во внутренней полости кабеля будет, очевидно, совершенно независимым от поля во внешнем пространстве.

Введем цилиндрическую систему координат r, α, z , в которой ось z направлена по оси кабеля, а r и α суть полярные координаты в плоскости, перпендикулярной этой оси. Слагающие векторов по взаимно перпендикулярным направлениям возрастания координат r, α, z будем обозначать соответствующими индексами, напр. E_r, E_α, E_z . Ввиду предполагаемой аксиальной симметрии кабеля поле в нем также будет аксиально симметричным, т. е. напряженности поля \mathbf{E} и \mathbf{H} и плотность поверхностных токов \mathbf{i} от полярного угла α зависеть не будут. По той же причине направление токов в кабеле должно совпадать

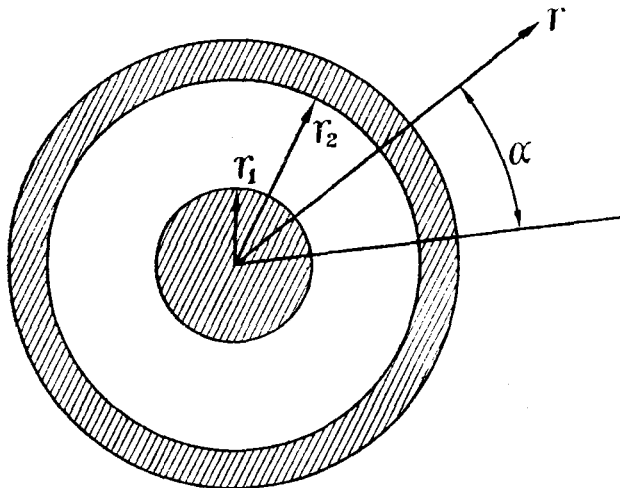


Рис. 100.

с направлением его оси ($i_z = i, i_\alpha = 0$). Стало быть, пограничное условие (326') примет вид:

$$\begin{aligned} \text{при } r=r_1 & \quad \frac{4\pi}{c} i_1 = [\mathbf{n}_1 \mathbf{H}]_z, & [\mathbf{n}_1 \mathbf{H}]_\alpha = 0, \\ \text{при } r=r_2 & \quad \frac{4\pi}{c} i_2 = [\mathbf{n}_2 \mathbf{H}]_z, & [\mathbf{n}_2 \mathbf{H}]_\alpha = 0, \end{aligned}$$

где i_1 и i_2 суть соответственно плотности поверхностных токов на 1 и 2 цилиндре, а \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 — внешние нормали к их поверхностям. Легко убедиться, что эти уравнения могут быть записаны в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } r=r_1 & \quad \frac{4\pi}{c} i_1 = H_z, & H_\alpha = 0; \\ \text{при } r=r_2 & \quad \frac{4\pi}{c} i_2 = -H_z, & H_\alpha = 0. \end{aligned} \right\}$$

Далее, из пограничных условий (II') и (III') и из того обстоятельства, что переменное поле внутри проводников не проникает, следует, что у поверхности этих проводников

$$E_z = E_r = H_r = 0. \quad (327')$$

Наконец из пограничного условия (IV') следует, что

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r=r_1 \quad D_r = \epsilon E_r = 4\pi\sigma_1, \\ \text{при } r=r_2 \quad D_r = \epsilon E_r = -4\pi\sigma_2. \end{array} \right\} \quad (327'')$$

Условия (327') и часть условий (327) будут удовлетворены, если предположить, что во всем пространстве между обкладками кабеля отличны от нуля лишь радиальная слагающая E_r вектора \mathbf{E} и азимутальная слагающая H_z вектора \mathbf{H} . Найдя соответствующее решение уравнений Максвелла мы ввиду однозначности этих уравнений можем быть уверены, что это решение и есть единственное искомое решение рассматриваемой проблемы.

2. Итак положим, что

$$E_z = E_r = H_z = H_r = 0, \quad E_r = E_0(r, z)e^{i\omega t}, \quad H_z = H_0(r, z)e^{i\omega t}, \quad (328)$$

где ω есть циклическая частота тока, а функции E_0 и H_0 зависят лишь от r и z , но не от α и t .

Согласно результатам решения задач (6) и (31a) (стр. 31 и 218), дивергенция и ротор вектора \mathbf{a} в цилиндрической системе координат, при условии цилиндрической симметрии поля этого вектора (независимость от полярного угла α) и при $\alpha_z = 0$, выражаются формулами:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r}, \\ \operatorname{rot}_r \mathbf{a} &= -\frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad \operatorname{rot}_z \mathbf{a} = \frac{\partial a_r}{\partial z}, \quad \operatorname{rot}_z \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r a_\alpha). \end{aligned}$$

Из рассмотрения этих уравнений следует, что выражения (328) тождественно удовлетворяют III уравнению Максвелла:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \mu \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

(по предположению μ и ϵ суть величины постоянные), уравнение же (IV) принимает вид:

$$\frac{\partial(r E_0)}{\partial r} = 0,$$

откуда

$$E_o = \frac{A(z)}{r}, \quad 329$$

где $A(z)$ есть функция одной лишь координаты z . Далее, внося выражения (328) в основные уравнения (I) и (II):

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{H} \quad \text{и} \quad \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E},$$

получим по сокращению на $e^{i\omega t}$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{i\omega\varepsilon}{c} E_o &= -\frac{\partial H_o}{\partial z}, \\ 0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rH_o), \\ \frac{i\omega\mu}{c} H_o &= -\frac{\partial E_o}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad 329'$$

Остальные же три уравнения в координатах, соответствующие векторным уравнениям (I) и (II), выражениями (328) удовлетворяются тождественно.

Из (329'₃) и (329'₁) получим:

$$\frac{\partial^2 E_o}{\partial z^2} = -\frac{i\omega\mu}{c} \frac{\partial H_o}{\partial z} = -\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2} E_o.$$

Введя, согласно (311), обозначение

$$k^2 = \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}, \quad k = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{c},$$

и приняв во внимание (329), получаем:

$$\frac{\partial^2 A(z)}{\partial z^2} + k^2 A(z) = 0,$$

откуда:

$$A_z = A_o e^{-ikz} + A'_o e^{ikz},$$

где A_o и A'_o суть произвольные постоянные интегрирования.

Внося это в (329) и (328) получим окончательно:

$$E_r = \frac{A_o}{r} e^{i(\omega t - kz)} + \frac{A'_o}{r} e^{i(\omega t + kz)}.$$

Первый член этого выражения представляет собой волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z , а второй — волну, распространяющуюся в обратном направлении. Волны эти независимы друг от друга, так что мы можем ограничиться рассмотрением лишь одной из них, например первой, т. е. положить $A_0' = 0$ и

$$E_r = \frac{A_0}{r} e^{i(\omega t - kz)}. \quad 330$$

Внося это выражение в (329'), получим после простых преобразований:

$$H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_r = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{A_0}{r} e^{i(\omega t - kz)}. \quad 330'$$

Это выражение, как легко видеть, удовлетворяет также и первым двум уравнениям (329').

3. Итак, в пространстве между обкладками кабеля распространяются электромагнитные волны, свойства которых во многих отношениях совпадают со свойствами рассмотренных уже нами в §§ 58 и 59 волн сферических и волн плоских. Действительно, из (328), (330) и (330') следует, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} взаимно перпендикулярны, перпендикулярны направлению волны z , и образуют с этим направлением праввинтовую систему. Далее амплитуды этих векторов удовлетворяют уравнению (316), энергия поля уравнению (317), и т. д. Наконец, скорость распространения волн в кабеле удовлетворяет ранее установленному уравнению (313):

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

т. е. определяется свойствами непроводящей среды, заполняющей пространство между обкладками кабеля.

Таким образом образующие кабель проводники играют в сущности лишь роль направляющих поверхностей, определяющих направление распространяющейся в диэлектрике волны и препятствующих рассеянию электромагнитной энергии в окружающее пространство: при распространении волны вдоль кабеля ее амплитуда E и H не уменьшается, и стало быть, вся энергия волны передается вдоль кабеля без потерь (ведь сопротивлением кабеля мы пренебрегли). Роль направляющей поверхности в известной мере может играть не только кабель, но и обыкновенный одножильный провод, что технически используется, например, при телеграфировании и телефонировании по проводам токами высокой частоты.

4. В заключении нам остается лишь выяснить связь между напряженностью волнового поля в кабеле и плотностью поверхностных зарядов и токов на его обкладках. Внося (330) и (330') в (327) и (327'') получим:

$$\frac{4\pi i_1}{c} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{A_0}{r_1} e^{i(\omega t - kz)}, \quad 4\pi \sigma_1 = \frac{\varepsilon A_0}{r_1} e^{i(\omega t - kz)},$$

$$\frac{4\pi i_2}{c} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{A_0}{r_2} e^{i(\omega t - kz)}, \quad 4\pi \sigma_2 = -\frac{\varepsilon A_0}{r_2} e^{i(\omega t - kz)}.$$

Переходя к вещественным частям комплексных выражений и приняв во внимание, что общая сила токов J_1 и J_2 , протекающих по поверхности цилиндрических проводников кабеля, равна произведению поверхностной плотности тока на окружность проводника, получим окончательно:

$$J_1 = i_1 \cdot 2\pi r_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{c A_0}{2} \cos(\omega t - kz) = -i_2 \cdot 2\pi r_2 = -J_2.$$

Таким образом в каждый данный момент t в каждом сечении кабеля силы токов, протекающих по внутреннему и внешнему проводнику кабеля, равны по величине и противоположны по знаку (т. е. по направлению).

Подобным же образом найдем, что величина зарядов z_1 и z_2 , приходящихся на единицу длины цилиндрических проводников кабеля, равна:

$$z_1 = \sigma_1 2\pi r_1 = \frac{\varepsilon A_0}{2} \cos(\omega t - kz) = -\sigma_2 2\pi r_2 = -z_2.$$

§ 63. Приближенная теория быстро-переменных токов. —

1. Исследование различных случаев распространения волны вдоль проводников связано, вообще говоря, с известными математическими трудностями. Поэтому в электротехнике быстрых токов при рассмотрении подобного рода вопросов прибегают иногда к упрощенному и в сущности весьма нестрогую способу рассуждений, который, однако, в ряде случаев приводит к правильным результатам. Состоит этот способ в следующем.

Чтобы применить к быстро-переменным токам в сущности вовсе не применимую к ним теорию токов квазистационарных, рассматривают не всю цепь тока в целом, а отдельные малые ее участки длины dz , и предполагают, что теория квазистационарных токов применима к каждому такому отдельному участку.

Если R^* есть сопротивление единицы длины проводника, то для отрезка длины dz закон Ома в той его форме, которая применима к постоянным токам:

$$R_{12}J = \varphi_1 - \varphi_2,$$

может быть записан следующим образом:

$$R^* dz \cdot J = - \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz,$$

ибо $\frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$ равно разности потенциалов на концах отрезка dz . В приближенной теории, о которой идет речь, предполагается, во-первых, что для переменных токов справедливо аналогичное соотношение:

$$R^* dz J = - \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz - \frac{1}{c^2} L^* dz \frac{\partial J}{\partial t}, \quad 331$$

отличающееся от предшествующего лишь последним членом, учитывающим электродвижущую силу индукции. В этом члене L^* означает «самоиндукцию единицы длины проводника» (сравни стр. 350), а $L^* dz$ — самоиндукцию отрезка dz . При этом делается допущение, что и в случае не обладающего потенциалом переменного поля первый член правой части приведенного уравнения имеет определенный физический смысл, а именно, что этим членом учитывается мгновенное Кулоново поле электрических зарядов проводника. Далее, предполагается, что мгновенное значение потенциала φ этих зарядов определяется соотношением:

$$\varphi = \frac{z}{C^*},$$

где z и C^* суть соответственно заряд и емкость единицы длины проводника (ср. ур. 42', стр. 48). На основании этого соотношения уравнение (331) по сокращении на dz может быть записано следующим образом:

$$R^* J = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{C^*} \right) - \frac{1}{c^2} L^* \frac{\partial J}{\partial t}. \quad 331'$$

Чтобы исключить из (331') величину z , воспользуемся уравнением непрерывности. Пусть участок провода dz ограничен сечениями S и S' , координаты которых обозначим соответственно через z и $z + dz$. Сила тока в проводе будет, вообще говоря изменяться по

его длине, т. е. будет функцией координаты z . Если за единицу времени через сечение S протекает J единиц электричества, то через сечение S будет протекать $J + \frac{\partial J}{\partial z} dz$ единиц. Стало быть, величина заряда $z dz$, находящегося в рассматриваемом участке провода, уменьшится на $\frac{\partial J}{\partial z} dz$ единиц, откуда следует:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = - \frac{\partial J}{\partial z}.$$

Дифференцируя (331') по t и затем, исключая из него $\frac{\partial z}{\partial t}$, получим окончательно:

$$\frac{1}{c^2} L^* \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} + R^* \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{C^*} \frac{\partial J}{\partial z} \right). \quad 332$$

Это и есть искомое приближенное уравнение неквазистационарного переменного тока. Если C^* от z не зависит, то оно принимает вид:

$$\frac{1}{c^2} L^* \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} + R^* \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{C^*} \frac{\partial^2 J}{\partial z^2}. \quad 332'$$

Уравнение (332') носит название «уравнения телеграфистов» и применяется в технике, напр., при расчете распространения телеграфных сигналов по проводам, распределения токов в антеннах и т. д.

2. Как явствует из изложенного, приведенный вывод уравнения (332) основан на ряде допущений, которые, вообще говоря, действительности не соответствуют. Самые понятия емкости и самоиндукции единицы длины не имеют однозначного смысла, ибо, например, потенциал данной точки проводника даже при стационарном распределении зарядов должен зависеть не только от линейной плотности зарядов z в этой точке, но и от распределения зарядов по всей длине проводников. Можно, однако, показать¹, что при известных условиях уравнение (332) действительно представляет собой первое приближение к действительности.

На общем рассмотрении этого вопроса мы здесь останавливаться не будем и ограничимся лишь тем, что покажем применимость уравнения (332') к частному случаю цилиндрического кабеля, рассмотренному нами в предшествующем параграфе. В этом случае L^* и C^*

¹ См. напр. E. S o h n, Das Elektromagn. Feld, II Auflage, Kap. 4, § 5.

суть величины постоянные. Допуская далее, как это было сделано и в предшествующем параграфе, что мы имеем дело с идеальным проводником, сопротивлением которого R^* можно пренебречь, получим по умножении уравнения (332') на C^* :

$$\frac{1}{c^2} L^* C^* \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 J}{\partial z^2}.$$

Рассматривая переменный ток циклической частоты ω , можем положить:

$$J = A(z) e^{i\omega t},$$

где $A(z)$ от t не зависит. Внося это выражение в предшествующее уравнение и сокращая его затем на $e^{i\omega t}$, получим:

$$-\frac{\omega^2 L^* C^*}{c^2} A(z) = \frac{\partial^2 A(z)}{\partial z^2},$$

откуда:

$$A(z) = J_0 e^{-ikz} + J_0' e^{ikz},$$

где J_0 и J_0' суть произвольные постоянные интегрирования, а k определяется соотношением:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} L^* C^*.$$

Таким образом сила тока J выражается уравнением:

$$J = J_0 e^{i(\omega t - kz)} + J_0' e^{i(\omega t + kz)},$$

первый член которого представляет собой волну, распространяющуюся по направлению положительной оси z , а второй — волну, распространяющуюся в обратном направлении.

Чтобы определить численное значение величины k , заметим, что в идеальном проводнике ток полностью сосредоточивается на его поверхности. Далее, нетрудно убедиться, что в любом сечении идеального кабеля в любой момент времени ток, текущий на поверхности внутреннего цилиндра кабеля, должен быть равен по величине и противоположен по направлению току, текущему по внутренней поверхности его внешней обкладки¹. Таким образом к рассматриваемому случаю применимы

¹ Ибо в толще идеального проводника поле равно нулю и, стало быть, равно нулю циркуляция магнитного вектора по окружности, проходящей по внешнему проводнику и охватывающей оба тока.

результаты решения примера 2-го в § 48, откуда следует, что самоиндукция единицы длины идеального кабеля должна равняться

$$L^* = 2 \mu \lg \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

(см. стр. 350). С другой стороны, обкладки кабеля образуют собой цилиндрический конденсатор, емкость которого на единицу длины (см. стр. 48) равна

$$C^* = \frac{1}{2 \lg \left(\frac{r_2}{r_1} \right)},$$

если в пространстве между цилиндрами нет диэлектрика, и, стало быть, равна

$$C^* = \frac{\epsilon}{2 \lg \left(\frac{r_2}{r_1} \right)},$$

если между цилиндрами находится среда диэлектрической постоянной ϵ .

Внося значения L^* и C^* в выражение для k^2 , получим:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu,$$

что совпадает с (311). Таким образом мы приходим к выводу, что переменные синусоидальные токи в идеальном кабеле распространяются в виде волн скорости $v = \frac{w}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$, что полностью совпадает с результатами, полученными нами в предшествующем параграфе при строгом рассмотрении этого вопроса.

§ 64. Общая характеристика теорий близко- и дальнего действия. — 1. В этом заключительном параграфе мы постараемся подвести итоги сказанному об основных отличиях различных теорий электричества и о сущности лежащих в основе этих теорий воззрений на природу электромагнитных явлений.

В господствовавших до середины прошлого столетия теориях дальнего действия роль основного, первичного понятия играло понятие электрической субстанции (зарядов). Все электромагнитные яв-

ния сводились к взаимодействию зарядов на расстоянии (*actio in distans*), и притом взаимодействию мгновенному. Иными словами, предполагалось, что силы взаимодействия как покоящихся, так и движущихся зарядов (токи) в каждый данный момент времени определяются распределением и состоянием движения этих зарядов в тот же момент времени. Конечно, силы эти могут зависеть не только от скорости, но и от ускорения зарядов, от производной по времени от силы тока, и т. п.; существенно лишь, чтобы силы взаимодействия однозначно определялись мгновенным значением этих физических величин. Таким образом в теориях дальнего действия понятие поля играет роль вспомогательного понятия, к пользованию которым при желании можно вовсе не прибегать. Типичными примерами законов дальнего действия являются закон Кулона и закон механического взаимодействия элементов тока (162):

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{e_1 e_2}{R_{12}^2} \mathbf{R}_{12}, \quad \mathbf{F}_{12} = \frac{J_1 J_2}{c^2 R_{12}^2} \left[ds_2 \left[ds_1 \mathbf{R}_{12} \right] \right].$$

Наоборот, в классической Фарадей-Максвелловой теории близкого действия роль основного первичного понятия играет понятие поля, понятия же заряда и тока низводятся в ранг вторичных вспомогательных понятий, характеризующих свойства поля (см. стр. 383). С этой точки зрения все электромагнитные явления заключаются в изменениях поля и подчиняются дифференциальным уравнениям в частных производных, связывающим значения электромагнитных векторов в смежных точках пространства в смежные моменты времени (близкое действие)¹. Соответственно этому всякое изменение или, как принято говорить, возмущение поля, возникшее в данном участке пространства, оказывает непосредственное воздействие лишь на смежные с ним участки поля. Таким образом всякое электромагнитное возмущение постепенно передается от точки к точке и требует конечного времени для своего распространения (конечная скорость распространения).

Именно эта Фарадей-Максвелловская концепция электромагнитных явлений лежала в основе столь характерных для физики XIX века попыток механистического истолкования этих явлений и сведения их к деформациям и движениям гипотетической упругой среды — эфира.

¹ Так, например, значения пространственных производных *div* и *rot* в каждой точке поля зависят исключительно лишь от значения соответствующих векторов в смежных точках пространства.

Однако, если отвлечься от вопросов истолкования и от задачи создания наглядной картины явлений, то по фактическому содержанию отличие теории близкодействия от теорий дальнего действия сводится в сущности к вопросу о скорости электромагнитных возмущений (см. § 57). Поэтому спор между теориями близко- и дальнего действия может быть разрешен (и был разрешен) лишь путем экспериментального изучения быстро-переменных полей, характер явлений в которых существенно зависит от скорости распространения электромагнитных возмущений (скорость света, скорость радиотелеграфных сигналов и т. п.). Явления же в стационарных полях, как мы неоднократно указывали, могут быть одинаково хорошо истолкованы с точки зрения обеих теорий.

Совершенно неправильно, например, встречающееся иногда утверждение, что теория дальнего действия не может учесть роли среды в электромагнитных явлениях, ибо в действительности для этого вполне достаточно постулировать наличие в молекулах среды элементарных зарядов (диполи) и токов. В частности, вся теория диэлектриков и магнетиков, изложенная нами в главах II и V, может быть полностью сохранена в теории дальнего действия. Наконец законы квазистационарных токов также могут быть уложены в рамки теории близкодействия, ибо индукционное взаимодействие квазистационарных токов определяется их взаимным расположением и мгновенным значением производной от силы тока по времени (см. § 47).

В общей форме эта эквивалентность теорий близко- и дальнего действия в области квазистационарных явлений может быть доказана следующим образом. Пренебрежем в уравнениях Максвелла током смещения $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, что допустимо при достаточно медленных изменениях поля. Применяя затем к этим уравнениям рассуждения, приведенные в § 56, убедимся, что связь между потенциалами и напряженностью поля в этом случае останется прежней [см. (253) и (284)]:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A};$$

уравнения же, определяющие значения потенциалов φ и \mathbf{A} переменного поля, примут вид:

$$\text{div } \mathbf{A} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi \mu}{c} \mathbf{j}, \quad \nabla^2 \varphi = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho,$$

т. е. совпадут с соответствующими уравнениями для поля стационарного. Следовательно, φ и \mathbf{A} , а вместе с тем и \mathbf{H} , будут определяться мгновенными значениями плотности зарядов и токов проводимости ρ и \mathbf{j} ; вектор же \mathbf{E} будет, кроме того, зависеть от мгновенного значения производной $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ (индукция токов!).

Из изложенного явствует решающее значение понятия токов смещения для всей теории близкодействия.

2. Обратимся теперь к вопросу об электромагнитной энергии.

В теории дальнего действия под электромагнитной энергией подразумевается, конечно, не энергия поля, а энергия взаимодействия зарядов или токов. Этому пониманию энергии вполне соответствует форма наших уравнений (86') и (262'):

$$W_s = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{e_i e_k}{R_{ik}} \quad (i \neq k); \quad W_{\text{н}} = \frac{1}{2c^2} \sum_{i,k} L_{ik} J_i J_k.$$

Вопрос о локализации энергии в пространстве теряет при этом всякий смысл, ибо общая энергия складывается из отдельных членов, каждый из которых выражает энергию взаимодействия на расстоянии определенной пары зарядов или токов, определяемую их мгновенным состоянием¹.

Напротив, в теории ближнего действия под электромагнитной энергией понимается энергия поля, которая считается вполне определенным образом локализованной в пространстве. Это значит, что теория вполне определенным образом отвечает на вопрос о количестве энергии, находящейся в каждом данном участке пространства, причем объемная плотность энергии определяется уравнением (VI):

$$W = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} + \frac{\mu H^2}{8\pi}.$$

В пределах стационарных и квазистационарных полей обе эти точки зрения одинаково хорошо согласуются с данными опыта, ибо как мы видели, формулы (86') и (262') в этих полях математически эквивалентны формуле (VI). Однако в быстро-переменных полях эквивалентность этих формул нарушается, а факт конечной скорости электромагнитных возмущений решает вопрос в пользу второго воззрения.

Пусть, например, в момент t_0 из станции A послан радиотелеграфный или световой сигнал. Это значит, что некоторое количество не электромагнитной энергии перешло в энергию электромагнитного излучения. Пусть станция B в момент t_1 восприняла этот сигнал. Это значит, что в этот момент в B выделилось некоторое количество энергии, принесенной из A электромагнитными волнами. Эта энергия могла, например, пойти на приведение в движение реле (прием радиосигнала) или на разложение бромистого серебра (прием светового сигнала на фотографическую пленку) и т. п.

¹ В частности, под собственной энергией заряда (или тока) понимается энергия взаимодействия тех элементов заряда (или витой тока), на которые может быть разложен данный заряд (или ток). См. §§ 16 и 48.

Если расстояние между A и B равно R , то промежуток $t_1 - t_0$ между подачей и приемом сигнала должен равняться R/c . Если длительность сигнала мала, то существовал такой промежуточный момент t' ($t_0 < t' < t_1$), когда в B сигнал еще не был воспринят, тогда как в A процесс излучения уже закончился и все пришло в состояние, соответствующее уменьшившемуся благодаря излучению запасу энергии. Где же в это время находилась энергия, излученная станцией A ?

Если мы не хотим отказаться от принципа сохранения энергии, то на этот вопрос можно ответить только в том смысле, что величина электромагнитной энергии определяется не мгновенным распределением токов и зарядов, а состоянием поля, и что отданная на станции A энергия перешла в момент t_0 в энергию электромагнитного поля излучения. Энергия эта распространяется в пространстве вместе с распространением поля и лишь впоследствии, в момент t_1 , частично улавливается станцией B .

3. Итак, факт конечной скорости электромагнитных возмущений подтверждает предположение о локализации энергии в электромагнитном поле и доказывает несостоятельность теорий дальнего действия. Однако из этого вовсе не вытекает, что единственно правильными являются воззрения классической теории поля с ее отрицанием субстационального существования зарядов. Действительно, в § 56 мы показали, что электромагнитное поле однозначно определяется распределением зарядов и токов проводимости, при том, правда, непрелюбимом условии, что распределение это известно не только для рассматриваемого, но и для предшествующих моментов времени (запаздывающие потенциалы). На этом, именно, обстоятельстве и базируется современная электронная теория, являющаяся своего рода синтезом теорий дальнего действия и Фарадей-Максвелловой теории поля.

С классическими теориями дальнего действия ее роднит признание первичной физической реальности электрической субстанции. Заряд не есть просто термин, характеризующий некоторые специфические особенности поля в данной точке пространства; напротив, поле может возбуждаться только зарядами и их движением (токи проводимости). Первичный смысл понятия поля сводится к тому, что с помощью этого понятия облегчается изучение основного вопроса о силах, действующих на заряды; изучение поля есть лишь промежуточный этап решения задачи о взаимодействии зарядов. С другой стороны, электронная теория восприняла из Фарадей-Максвелловой теории поля принцип конечности скорости распространения поля (т. е. распространения взаимодействия зарядов). Поэтому с точки зрения электронной теории можно говорить лишь о своего рода запазды-

вающем дальном действии зарядов и токов (запаздывающие потенциалы), а не о дальном действии мгновенном, как то предполагалось теориями прошлого века.

Что же касается связи между смежными по времени состояниями поля, то в электронной теории эти связи удовлетворяют принципу близкого действия: производная по времени от напряженности поля в каждой его точке определяется только плотностью и скоростью зарядов и состоянием поля в смежных точках пространства. Ибо для микроскопического поля электронная теория сохраняет систему лишь незначительно видоизмененных уравнений Максвелла (см. том II этого курса).

Из принципа конечной скорости распространения поля, как мы видели, следует, что носителем электромагнитной энергии является электромагнитное поле¹. Таким образом и в электронной теории понятие поля из ранга понятия вспомогательного в конечном счете все же возводится в ранг физической реальности (носителя энергии).

Более подробное обсуждение электронной теории, и в частности характерного для нее постулата об атомистическом строении электричества, должно быть отложено до тома II. Там же будет рассмотрен столь характерный для физики XIX века вопрос о возможности механического истолкования электромагнитных явлений на основе гипотезы о существовании эфира.

Изложение основ Максвелловой теории поля, которому посвящена настоящая глава, не может почитаться полным, поскольку нами не был затронут вопрос о пондеромоторных силах электромагнитного поля и не был дан вывод величины этих сил из основных уравнений поля. Однако вопрос этот столь тесно связан с вопросом об электромагнитных явлениях в движущихся средах, которые будут рассмотрены во II томе, что мы отложим его обсуждение до соответствующей части II тома.

*

¹ Более того, как мы увидим в томе II, электронная теория наделяет поле не только определенной энергией, но и определенным количеством движения или импульсом.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

1. (Стр. 20). Вследствие симметрии вектор \mathbf{E} параллелен (или антипараллелен) \mathbf{r} и является функцией лишь от r . Рассмотрим цилиндр высоты $= 1$ и радиуса r . Вследствие того, что \mathbf{E} параллельно \mathbf{r} , поток вектора \mathbf{E} через основание цилиндра равен нулю. Поэтому применение к цилиндру теоремы Гаусса дает:

$$\begin{aligned} \pm 2\pi r E &= 4\pi\lambda & \text{для } r > a, \\ 2\pi r E &= 0 & \text{« } r < a, \end{aligned}$$

(где a есть радиус заряженного бесконечного цилиндра), откуда и получим результат (16). Скачок вектора \mathbf{E} при прохождении через поверхность цилиндра равен

$$E_e - E_i = \frac{2\lambda}{a} - 0 = 4\pi\lambda,$$

ибо $\lambda = 2\pi a\sigma$.

2. (Стр. 20). Вследствие симметрии вектор \mathbf{E} параллелен (или антипараллелен) \mathbf{R} и является функцией лишь от R . Применение теоремы Гаусса к сфере радиуса R дает:

$$\begin{aligned} \pm E \cdot 4\pi R^2 &= 4\pi e & \text{для } R > a, \\ E \cdot 4\pi R^2 &= 0 & \text{« } R < a, \end{aligned}$$

(где a есть радиус заряженной сферы), откуда и получаются формулы (17).

Скачок вектора \mathbf{E} при прохождении через поверхность сферы равен

$$E_e - E_i = \frac{e}{a^2} - 0 = 4\pi\sigma,$$

ибо $e = \sigma \cdot 4\pi a^2$.

3. (Стр. 20). Вследствие симметрии вектор \mathbf{E} параллелен (или антипараллелен) \mathbf{R} и является функцией лишь от R . Применение теоремы Гаусса к сфере радиуса R дает:

$$\begin{aligned} \pm E \cdot 4\pi R^2 &= 4\pi \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 \rho = 4\pi e & \text{для } R > a, \\ \pm E \cdot 4\pi R^2 &= 4\pi \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = 4\pi \frac{R^3}{a^3} e & \text{« } R < a, \end{aligned}$$

(ибо $e = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$), откуда и получим формулы (18) и (18').

Непрерывность вектора \mathbf{E} при прохождении через поверхность сферы следует из того, что для $R = a$ будет $E_e = \frac{4}{3}\pi \rho a = E_i$.

4. (Стр. 25). Согласно (16) в полости конденсатора поле внешнего цилиндра равно нулю. Стало быть в этой полости поле возбуждается лишь внутренним цилин-

дром и определяется формулой (16). — В том, что плотности зарядов обкладок конденсатора равны по величине и противоположны по знаку, можно убедиться, применяя теорему Гаусса к замкнутой поверхности, частью проходящей по толще внешнего металлического цилиндра, частью же ограниченной двумя параллельными сечениями, перпендикулярными оси конденсатора. Поток электрического вектора через такую поверхность равен нулю.

5. (Стр. 20). Решение этой задачи вполне аналогично решению задачи предыдущей.

6. (Стр. 32). Применим формулу (26) к объему dV , ограниченному двумя цилиндрическими поверхностями радиусов r и $r + dr$, двумя меридиональными плоскостями $a = a_1$ и $a = a_1 + da$ и двумя плоскостями, перпендикулярными оси $Z: z = z_1$ и $z = z_1 + dz$ (рис. 15). Поток вектора \mathbf{a} через элемент цилиндрической поверхности радиуса r равен $-a_r \cdot r da dz$; следовательно, для цилиндрической поверхности радиуса $r + dr$ он равен $a_r r da dz + \frac{\partial}{\partial r}(a_r r da dz) dr$ (с точностью до бесконечно-малых 2-го порядка). Так как вектор \mathbf{a} параллелен \mathbf{r} , то поток вектора \mathbf{a} через 4 остальные плоскости равен нулю, откуда $\oint a_n ds = \frac{\partial}{\partial r}(a_r r) da dz dr$. Так как $dV = r da dz dr$, то формула (26) приводит к искомому результату.

7. (Стр. 44). В формуле (36') выберем в качестве пути интегрирования соответственно ось x -ов (для плоскости) и перпендикулярный оси цилиндра радиус-вектор \mathbf{r} . Внося значение вектора \mathbf{E} из (15) и (16), получим для плоскости

$$\varphi - \varphi_0 = - \int 2\pi x \cdot dx = - 2\pi x,$$

и для цилиндра

$$\varphi - \varphi_0 = - \int_a^r \frac{2x}{r} dr = - 2x \lg \frac{r}{r_1} \quad \text{для } r > r_1,$$

$$\varphi - \varphi_0 = 0 \quad \text{для } r < r_1.$$

8. (Стр. 44). Выбирая в формуле (36'') в качестве пути интегрирования радиус-вектор \mathbf{R} , получим на основании (18) для точек, лежащих вне шара:

$$\varphi_e = \int_R^\infty \frac{e}{R^2} dR = \frac{e}{R}.$$

Стало быть на поверхности шара $\varphi = \varphi_0 = \frac{e}{a}$. Воспользовавшись формулами (36') и (18'), получаем для точек, лежащих внутри шара:

$$\varphi - \varphi_0 = - \int_a^R \frac{4}{3} \pi R \rho dR = 2\pi \rho \left(\frac{a^2}{3} - \frac{R^2}{3} \right),$$

что по внесении значения φ_0 совпадает с формулой, приведенной в тексте.

9. (Стр. 48). Из (22') следует, что разность потенциалов обкладок плоского конденсатора равна

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{4\pi ed}{S}.$$

В случае цилиндрического и сферического конденсатора поле в пространстве между его обкладками возбуждается единственно лишь зарядом внутренней обкладки. Поэтому, согласно результатам решения задачи 7 (стр. 44), для цилиндрического конденсатора

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -2\lambda \lg \frac{r_2}{r_1}, \quad \lambda = \frac{e}{l},$$

а для конденсатора сферического

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{e}{R_2} - \frac{e_1}{R_1} = \frac{(R_1 - R_2)e}{R_1 R_2}.$$

Внося эти выражения в (42) и выбрав для C , как обычно, положительный знак (знак выражения (42) зависит от того, какую из обкладок считать 1-й и какую 2-й), получим искомые результаты.

10. (Стр. 55). Так как $R = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$, то слагающая вектора $\text{grad}_q R$ по оси x равна $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{(x' - x)}{R} = -\frac{\partial R}{\partial x'}$, т. е. равна слагающей вектора $\text{grad}_a R$ по оси x , взятой с обратным знаком. Аналогичные соотношения справедливы и для остальных слагающих векторов $\text{grad}_q R$ и $\text{grad}_a R$, откуда и следует (48).

11. (Стр. 55). Вектор R имеет слагающие $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$; поэтому $\mathbf{bR} = b_x(x' - x) + b_y(y' - y) + b_z(z' - z)$. Слагающая по оси x вектора $\text{grad}_a(\mathbf{bR})$ равна $\frac{\partial}{\partial x'}(\mathbf{bR}) = b_x$; две другие соответственно равны b_y и b_z , откуда и следует формула (51).

12. (Стр. 62). Принимая точку P за начало координат, имеем:

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

откуда

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x}{R}.$$

Далее

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) &= \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{x}{R^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right) &= -\frac{1}{R^2} - x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R^2} \right) = -\frac{1}{R^2} + \frac{3x^2}{R^3}. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения получим для $\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{R} \right)$ и $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{R} \right)$. Следовательно

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{3}{R^3} + 3 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^3} = 0.$$

13. (Стр. 70). Из (41') и (66') следует

$$\mathbf{E} = -\text{grad}_a \frac{(\mathbf{pR})}{R^2} = -\frac{1}{R^2} \text{grad}_a(\mathbf{pR}) - (\mathbf{pR}) \text{grad}_a \left(\frac{1}{R^2} \right).$$

Приняв во внимание, что на основании (51), (49) и (48)

$$\text{grad}_a(\mathbf{pR}) = \mathbf{p}$$

$$\text{grad}_a \left(\frac{1}{R^2} \right) = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R^2} \right) \cdot \text{grad}_a R = -\frac{2\mathbf{R}}{R^3},$$

получаем (69).

В сферической системе координат составляющие вектора \mathbf{p} равны соответственно $p_R = p \cos \vartheta$, $P\vartheta = -p \sin \vartheta$, $p_x = 0$, а $\mathbf{pR} = pR \cos \vartheta$. Внося это в (69), получаем (69')

14. (Стр. 97). Применим формулу (87). В случае поверхностного распределения заряда весь этот заряд находится при постоянном потенциале $\varphi = \frac{e}{a}$; стало быть

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma \varphi dS = \frac{1}{2} \varphi e = \frac{e^2}{2a}.$$

В случае объемного распределения заряда $\sigma = 0$, $\rho = \frac{c}{\frac{4}{3} \pi a^3}$,

$$\varphi = 2\pi\rho \left(a^2 - \frac{R^2}{3} \right),$$

где R — расстояние от центра сферы (см. стр. 44, зад. 8). Стало быть:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int_0^R \rho \cdot 2\pi\rho \left(a^2 - \frac{R^2}{3} \right) \cdot 4\pi R^2 dR,$$

откуда по выполнении интегрирования получается искомый результат.

15. (Стр. 98). Выражая в (90'') E_1 и E_2 через градиенты соответствующих потенциалов φ_1 и φ_2 , получим

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi} \int (\nabla\varphi_1)(\nabla\varphi_2) dV.$$

Выделим из полного поля малую сферу S , охватывающую заряд e_2 . Пренебрегая долей взаимной энергии, локализованной внутри этой сферы, и применяя теорему Грина (70), можем написать:

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi} \oint_S \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \varphi_1 \nabla^2 \varphi_2 \cdot dV.$$

В пространстве V' , расположенном вне сферы S , $\nabla^2 \varphi_2 = 0$; стало быть, последний интеграл равен нулю. Если заряды e_1 и e_2 достаточно удалены друг от друга, то на поверхности сферы S потенциал φ_1 можно считать постоянным и равным $\frac{e_1}{R}$. Следовательно,

$$W_{12} = \frac{\varphi_1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} dS = - \frac{e_1}{4\pi R} \oint_S \mathcal{E}_{2n} dS.$$

Приняв во внимание, что в данном случае нормаль \mathbf{n} нужно считать направленной внутрь сферы S , и воспользовавшись теоремой Гаусса (14), получаем искомый результат.

16. (Стр. 134). По определению

$$\operatorname{tg} \beta_i = \frac{\mathcal{E}_{it}}{\mathcal{E}_{in}} \quad (i = 1, 2).$$

Воспользовавшись (112) и (112'), получаем искомый результат.

17. (Стр. 134). Приведенные утверждения следуют непосредственно из формулы (122') для щели, параллельной E , и из (112) для щели, перпендикулярной E . В концевых же участках щели ограничивающие ее поверхности сходятся под углом, направление нормали к ним испытывает резкие изменения, так что поле в прилегающих участках щели отличается значительной неоднородностью.

18. (Стр. 134). Приведенные в этой задаче условия однозначности решения полной системы (A) уравнений электростатического поля тем отличаются от приведенных на стр. 129, что здесь для проводников не задано распределения зарядов σ на их поверхности. Поэтому в примененной там к доказательству формуле

$$\int_V \varepsilon E'^2 dV = - \int_S D_n'' \varphi' dS,$$

к поверхности S должны быть причислены все поверхности проводников. Но на каждой такой поверхности либо $\varphi'' = 0$ (задача A), либо (задача B) $\varphi'' = \text{const}$

$$\oint D_n'' dS = \oint D_n dS - \oint D_n' dS = 4\pi e - 4\pi e' = 0.$$

Стало быть все интегралы по этим поверхностям равны нулю, и приведенное на стр. 129 доказательство однозначности решения сохраняет свою силу.

19. (Стр. 169). Обратимся к формуле (142), в которой значок 1 будем относить к диэлектрику, а значок 2 — к вакууму (так что $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$). На основании формул (112) и (112') имеем:

$$D_{2n} = D_{1n} = D_n = E_{1n} = \varepsilon E_{1n}, \quad E_{2t} - E_{1t} = 0.$$

Стало быть

$$E_2 - E_1 = (E_{2n} - E_{1n})\mathbf{n} = D_n \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\mathbf{n},$$

и

$$E_2^2 - E_1^2 = E_{2n}^2 - E_{1n}^2 = D_n^2 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right).$$

Внося это в (142), после простых преобразований получаем искомый результат.

20. (Стр. 181). Отнесем значок 1 к проводнику, а значок 2 к окружающему его диэлектрику. Так как $j_{2n} = 0$, то вследствие (149) и $j_{1n} = 0$. Отсюда на основании (145') имеем $E_{1n} = 0$ и $D_{1n} = 0$. Поэтому уравнение (108') дает искомый результат:

$$D_{2n} = 4\pi\sigma.$$

Векторы E и D перестают быть перпендикулярными к поверхности проводника по той причине, что тангенциальные их слагающие уже не равны нулю, как при отсутствии тока. Последнее вытекает из уравнений (112') и (145'), ибо $j_{1t} \neq 0$.

21. (Стр. 191). Выделяемое прибором тепло равно $Q = R'J^2$ (ур. 152), а сила тока $J = \frac{\mathcal{E}^{\text{стр}}}{R + R'}$. Следовательно $Q = \left(\mathcal{E}^{\text{стр}}\right)^2 \frac{R'}{(R' + R)^2}$ и достигает своего максимума при $R' = R$ (что можно найти, приравнявая нулю производную от Q по R').

22. (Стр. 191). Нарушение изоляции означает соединение с землей через некоторое известное сопротивление r . В первом случае ток J , возбуждаемый электро-движущей силой батареи $\mathcal{E}^{\text{стр}}$, разветвляется в точке нарушения изоляции на два

тока J_1 и J_2 , которые идут через сопротивления r и $(b-x)s$ в землю (s есть сопротивление единицы длины телеграфного провода). Применяя к этому случаю 1-й и 2-й законы Кирхгофа (145) и (157), получим (полагая сопротивление земли, а также сопротивление заземления на станциях равным нулю):

$$J = J_1 + J_2, \\ Jxs + J_1r = \mathcal{E}^{\text{стр}}, \quad -J_1r + J_2(b-x)s = 0.$$

Аналогичные уравнения получим для 2-го случая; в 3-м же случае имеем только одно уравнение, ибо тут остается только один замкнутый контур, так что $J_2'' = 0$, $J_1'' = J''$. Из полученных семи уравнений удастся исключить 7 неизвестных:

$$J_1, J_2, J_1', J_2', r, \mathcal{E}^{\text{стр}} \text{ и } s.$$

В результате получаем

$$x = \frac{(ak - bk')(1 + c)}{k - k'},$$

где

$$k = \frac{J''}{J - J''}, \quad k' = \frac{J''}{J' - J''}, \quad c = +\sqrt{\frac{b-a}{ak - bk'}}.$$

23. (Стр. 201). Согласно правилам перемножения векторов

$$|ds_2[ds_1\mathbf{R}_{12}]| = ds_1(ds_2\mathbf{R}_{12}) - \mathbf{R}_{12}(ds_1ds_2).$$

Вносим это в (162) и интегрируем по контурам L_1 и L_2 обоих токов. Интеграл первого члена равен (сравни 49'):

$$\oint_{L_1} \oint_{L_2} ds_1 \frac{(ds_2 R_{12})}{R_{12}^3} = \oint_{L_1} ds_1 \oint_{L_2} \left(ds_2, -\text{grad}_a \frac{1}{R_{12}} \right) = \oint_{L_2} ds_2 \oint_{L_1} \left(-\frac{\partial}{\partial s_2} \left(\frac{1}{R_{12}} \right) \right) ds_1 = 0,$$

ибо подынтегральное выражение является полным дифференциалом. Следовательно, результирующая сила \mathbf{f}_{12} , с которой весь первый ток действует на весь второй, равна:

$$\mathbf{f}_{12} = -\frac{J_1 J_2}{c} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{\mathbf{R}_{12}(ds_1 ds_2)}{R_{12}^3}.$$

Соответствующее выражение для \mathbf{f}_{12} получим, обменяв местами индексы 1 и 2. Приняв во внимание, что $\mathbf{R}_{12} = -\mathbf{R}_{21}$, получаем

$$\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}.$$

24. (Стр. 204). Рассмотрим разность между выражением (162) для силы \mathbf{F}_1 и ее выражением, данным Ампером. Опуская фактор $\frac{J_1 J_2}{c^2}$, получаем для этой разности следующее выражение (сравни предыдущую задачу):

$$\frac{ds_1}{R_{12}^3} (\mathbf{R}_{12} ds_2) - \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3} (ds_1 ds_2) - \frac{\partial \mathbf{R}_{12}}{\partial R_{12}^3} (ds_1 \mathbf{R}_{12})(ds_2 \mathbf{R}_{12}) + 2 \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3} (ds_1 ds_2) = \\ = \frac{ds_1}{R_{12}^3} (\mathbf{R}_{12} ds_2) + \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3} (ds_1 ds_2) - \frac{\partial \mathbf{R}_{12}}{\partial R_{12}^3} (ds_1 \mathbf{R}_{12})(ds_2 \mathbf{R}_{12}).$$

Наша задача сводится к тому, чтобы доказать, что интеграл этого выражения по замкнутому контуру тока J_1 равен нулю. Что это равенство нулю действительно имеет место, следует из того, что приведенное выражение совпадает с последним членом уравнения (163), если в этом уравнении положить $f(R_{12}) = -\frac{1}{R_{12}^3}$. В самом деле, приняв во внимание, что $d\mathbf{R}_{12} = -ds_1$ (см. стр. 204), имеем [см. также (48)]:

$$\begin{aligned} -d\left(\mathbf{R}_{12}(ds_2\mathbf{R}_{12})\frac{1}{R_{12}^3}\right) &= ds_1\frac{(ds_2\mathbf{R}_{12})}{R_{12}^3} - \frac{\mathbf{R}_{12}(ds_2 - ds_1)}{R_{12}^3} - \\ &- \mathbf{R}_{12}(ds_2\mathbf{R}_{12})\left(\text{grad}_q\left(\frac{1}{R^3}\right), ds_1\right) = \frac{ds_1(ds_2\mathbf{R}_{12})}{R_{12}^3} + \\ &+ \frac{\mathbf{R}_{12}(ds_2 ds_1)}{R_{12}^3} - \frac{3\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^5}(ds_2\mathbf{R}_{12})(\mathbf{R}_{12} ds_1). \end{aligned}$$

25. (Стр. 209). В случае прямолинейного тока вектор $[ds\mathbf{R}]$ (см. стр. 166) имеет одинаковое направление для всех элементов тока (при фиксированной точке наблюдения). Поэтому численная величина вектора \mathbf{H} равна сумме численных значений подынтегрального выражения формулы (166):

$$H = \frac{J}{c} \int \frac{ds \sin(ds, R)}{R^2}.$$

Если r есть длина перпендикуляра, опущенного из точки наблюдения на прямую тока, а α — угол между r и R , то

$$R = \frac{r}{\cos \alpha} \quad \text{и} \quad ds \sin(ds, R) = Rd\alpha.$$

Следовательно,

$$H = \frac{J}{c} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{R} = \frac{J}{cr} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = \frac{2J}{cr}.$$

В справедливости приведенных в тексте утверждений относительно формы и направления силовых линий убедиться весьма легко.

26. (Стр. 210). Здесь $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{d}$ (если считать вектор \mathbf{R}_0 направленным от окружности к центру), поэтому $[ds\mathbf{R}] = [ds\mathbf{R}_0] + [ds\mathbf{d}]$. Кроме того, в виду перпендикулярности \mathbf{R}_0 и \mathbf{d} , $R^2 = R_0^2 + d^2$. Если мы подставим этот результат в формулу (166), то вследствие симметрии задачи интеграл по $[ds\mathbf{d}]$ будет равен нулю, ибо вектор $[ds\mathbf{d}]$ параллелен \mathbf{R}_0 . Вектор же $[ds\mathbf{R}]$ параллелен вектору $-\mathbf{d}$ и действительно составляет с направлением тока праввинтовую систему. Таким образом численная величина вектора \mathbf{H} равна:

$$H = \frac{J}{c} \int \frac{ds R_0}{(R_0^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{J \cdot 2\pi R_0^2}{c \cdot (R_0^2 + d^2)^{3/2}}.$$

27. (Стр. 210). Проведем через лежащую внутри цилиндра точку P ряд меридиональных плоскостей, рассекающих поверхность цилиндра на ряд прямолинейных

полосок (рис. 101). Ширина двух противоположных полосок равна соответственно $ds_1 = r_1 d\varphi$ и $ds_2 = r_2 d\varphi$; силы же токов, протекающих по этим полоскам, пропорциональны их ширине: $dJ_1 = kds_1 = kr_1 d\varphi$ и $dJ_2 = kds_2 = kr_2 d\varphi$. Стало быть, напряженности полей dH_1 и dH_2 , возбуждаемых каждой из этих прямолинейных полосок тока в точке P , равны друг другу (см. 172):

$$dH_1 = \frac{2dJ_1}{cr_1} = \frac{2kd\varphi}{c} = \frac{2dJ_2}{cr_2} = dH_2.$$

Так как кроме того векторы dH_1 и dH_2 направлены противоположно друг другу, то поля каждой пары противоположных полосок взаимно компенсируются.

28. (Стр. 218). Введем цилиндрические координаты r, α, z , где z есть ось вращения. Чтобы найти для точки P значения слагающих $\text{rot}_r \mathbf{v}$, $\text{rot}_\alpha \mathbf{v}$, $\text{rot}_z \mathbf{v}$, вычислим последовательно значения интеграла $\oint \mathbf{v}_s ds$ по контуру трех взаимно-перпендикулярных площадок, проходящих через точку P , из которых первая перпендикулярна к r , а третья к оси z . Например, в последнем случае мы можем взять элементарную площадку, вырезанную из плоскости $z = \text{const}$ двумя радиусами, образующими между собою угол da , и двумя концентрическими окружностями радиусов r и $r + dr$. Предположим, что вектор ω направлен в положительную сторону оси z . Тогда с точностью до бесконечно малых 2-го порядка,

$$\oint \mathbf{v}_s ds = \omega(r + dr) \cdot da (r + dr) - \omega r \cdot da \cdot r = 2\omega r dr da,$$

ибо $\mathbf{v} = \omega r$, при чем вектор \mathbf{v} направлен по касательной к окружности $r = \text{const}$, так что $v_r = 0$. Величина рассматриваемой площадки равна $dS = da \cdot r dr$, откуда на основании (174') $\text{rot}_z \mathbf{v} = 2\omega$. Подобным же образом можно убедиться, что $\text{rot}_r \mathbf{v} = \text{rot}_\alpha \mathbf{v} = 0$.

29. (Стр. 218). Проведем по поверхности S какую-нибудь замкнутую кривую L , которая разделит поверхность S на две части S_1 и S_2 , и применим к каждой из них формулу Стокса (175). Так как положительное направление контура определяется положительным направлением нормали к участку поверхности, ограниченному этим контуром, то при интегрировании по S_1 и при интегрировании по S_2 кривой L нужно приписать прямо противоположные направления. Следовательно,

$$\int_{S_1} \text{rot}_n \mathbf{a} dS = - \int_{S_2} \text{rot}_n \mathbf{a} dS,$$

что и дает искомым результат.

30. (Стр. 218). Применяя теорему Стокса к произвольной площадке S , ограниченной контуром L , получаем (см. 44'):

$$\int_S \text{rot}_n \text{grad } \varphi \cdot dS = \oint_L \text{grad } \varphi \cdot ds = \oint_L \frac{\partial}{\partial s} ds = 0,$$

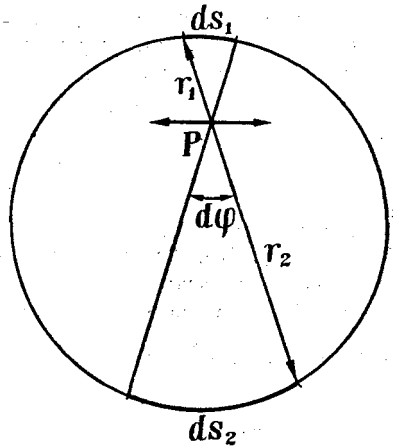


Рис. 101.

ибо интеграл полного дифференциала по замкнутому пути равен нулю. Это соотношение должно оставаться справедливым при любом выборе величины и направления площадки S , следовательно $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$.

Применяя теорему Гаусса (25) к произвольному объему V , получаем в виду (17с)

$$\int_V \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot dV = \oint_S \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

откуда и следует (65₂).

31. (Стр. 218). Чтобы найти, например, значение $\operatorname{rot}_R \mathbf{a}$, можно применить формулу (174') к элементарной площадке, вырезаемой из произвольной шаровой поверхности $R = \operatorname{const}$ двумя меридианами $\alpha = \alpha_0$ и $\alpha = \alpha_0 + d\alpha$ и двумя параллельными кругами $\vartheta = \vartheta_0$ и $\vartheta = \vartheta_0 + d\vartheta$. При вычислении $\oint \mathbf{a}_s ds$ по контуру этой площадки части этого интеграла, соответствующие дугам меридианов, обращаются в нуль, ибо по условию $a_\vartheta = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int \mathbf{a}_s ds &= (a_\alpha ds)_{\vartheta_0 + d\vartheta} - (a_\alpha ds)_{\vartheta_0} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} (a_\alpha ds) d\vartheta = \\ &= \frac{\partial}{\partial \vartheta} (a_\alpha R \sin \vartheta d\alpha) d\vartheta = R d\vartheta d\alpha \frac{\partial}{\partial \vartheta} (a_\alpha \sin \vartheta). \end{aligned}$$

Так как величина рассматриваемой площадки dS равна $R d\vartheta \cdot R \sin \vartheta d\alpha$, то из (174') следует:

$$\operatorname{rot}_R \mathbf{a} = \frac{1}{R \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} (a_\alpha \sin \vartheta).$$

Аналогичным путем находятся и остальные слагающие ротора \mathbf{a} .

31а. (Стр. 218). Способ решения этой задачи совершенно аналогичен решению задач 28 и 31.

32. (Стр. 231). Вследствие симметрии вектор \mathbf{H} есть функция только от r . Чтобы найти слагающую H_α (вводим цилиндрические координаты r, α, z), применим формулу (188), в которой в качестве замкнутой кривой L возьмем концентрическую току окружность радиуса r . Получаем:

$$H_\alpha \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \int j_n dS.$$

Для $r \geq r_0$

$$\int j_n dS = J;$$

$$\text{для } r < r_0 \left(\text{в виду } j_n = \frac{J}{4\pi r_0^2} \right) \quad \int j_n dS = \frac{J}{4\pi r_0^2} \cdot 4\pi r^2 = J \cdot \frac{r^2}{r_0^2};$$

отсюда и найдем значения $H_{e\alpha}$ и $H_{i\alpha}$. Что же касается слагающей H_z , то она равна нулю, ибо напряженность поля каждого из элементов тока согласно (168) перпендикулярна направлению тока z . Наконец из (182) и результатов решения задачи 6 (стр. 32) следует, что $rH_r = \operatorname{const}$, что в виду конечности вектора \mathbf{H} при $r=0$ может иметь место лишь при $H_r = 0$.

33. (Стр. 282). Согласно результатам задачи 32 (стр. 231) магнитные линии рассматриваемого тока при $\mu = \mu' = \mu'' = 1$ представляют собой концентрические

окружности. Если неоднородные в магнитном отношении участки поля разделены коаксиальными цилиндрическими поверхностями, то эта круговая симметрия магнитных линий нарушиться не может. Применение формулы (188), остающейся справедливой в произвольной среде, приводит в нашем случае к тем же значениям вектора \mathbf{H} , как и в задаче 31. Сравни также стр. 287.

34. (Стр. 292). См. решение задачи 17.

35. (Стр. 313). Задача решается совершенно таким же путем, каким находится формула (122) для вектора поляризации \mathbf{P} , только вместо приближенной величины $1 + a \cos \vartheta$ под интегралом стоит точная величина $e^{a \cos \vartheta}$, а константа C , определяемая из условия

$$\int_0^\pi C e^{a \cos \vartheta} \sin \vartheta \cdot d\vartheta = N, \text{ имеет значение } \frac{aN}{e^a - e^{-a}}. \text{ Интеграция производится по частям и приводит к результату:}$$

$$I = CM_{\text{рез.}} \cdot \frac{1}{a^2} \{ e^{-a}(1+a) - e^a(1-a) \},$$

что после подстановки значения C дает искомое решение.

Для определения значения I при $a \ll 1$ функции e^a и e^{-a} разлагаются в ряд, кончая кубическими относительно a членами.

Для нахождения $I_{\text{нас}}$ полагаем $a \rightarrow \infty$ и находим

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\cotg \text{hyp } a - \frac{1}{a} \right) = 1,$$

что и дает искомый результат.

36. (Стр. 340). Применим формулу (225), в которой положим $\mathcal{E}^{\text{стр}} = 0$ и

$$\mathcal{E}^{\text{инд.}} = \mathcal{E}'_{\text{внш.}} + \mathcal{E}'_{\text{внтр.}} \text{ инд.}$$

где $\mathcal{E}'_{\text{внтр.}} = -L \frac{dJ'}{dt}$ есть электродвижущая сила самоиндукции. Общее решение получаемого таким образом неоднородного дифференциального уравнения

$$J'R' + L \frac{dJ'}{dt} = \Psi_0' \omega \sin \omega t$$

выражается суммой произвольного частного решения этого уравнения и общего

решения $Ae^{-\frac{R}{L}t}$ соответствующего однородного уравнения

$$J'R' + L \frac{dJ'}{dt} = 0.$$

Через достаточно большой промежуток времени последний член этой суммы сделается вследствие затухания сколь угодно малым, и останется только первый член.

Будем искать частное решение неоднородного уравнения в форме

$$J' = J_0' \sin(\omega t - \alpha).$$

Подставляя это выражение для J' в наше уравнение, разлагая $\sin(\omega t - \alpha)$ и $\cos(\omega t - \alpha)$ и приравнявая коэффициенты при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ в обеих частях уравнения, получим:

$$\begin{aligned} J_0' R' \cos \alpha + L J_0' \omega \sin \alpha &= \Psi_0' \omega, \\ -J_0' R' \sin \alpha + L J_0' \omega \cos \alpha &= 0, \end{aligned}$$

откуда и получим искомое значение J_0'

Чтобы найти величину работы, необходимой для поддержания вращения контура, заметим, что потенциальная функция тока во внешнем магнитном поле, согласно (233'), равна (в практических единицах):

$$U' = -J\Psi' = -J\Psi'_0 \cos \omega t.$$

Следовательно за элемент времени dt силы магнитного поля должны совершать работу (см. ур-ние 259)

$$-(dU)_J = J\Psi'_0 d \cos \omega t = -\omega J\Psi'_0 \sin \omega t dt;$$

затрата же работы извне должна быть равна по величине и обратна по знаку. Стало быть, затрата внешней работы за время одного периода равна

$$\omega J_0' \Psi_0' \int_0^T \sin(\omega t - \alpha) \sin \omega t \cdot dt = \frac{1}{2} \omega J_0' \Psi_0' \cos \alpha \cdot T.$$

Внося сюда значения $\cos \alpha$ и J_0' и производя пересчет на единицу времени, получим приведенное в тексте выражение.

37. (Стр. 351). Согласно формуле (265'') взаимная энергия двух магнитных полей равна

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi} \int \mu \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 dV.$$

Отнесем значок 1 к полю, возбуждаемому токами при отсутствии магнитов, а значок 2 к полю магнитов при отсутствии токов. На основании формул (223) и (226)

$$\mathbf{B}_1 = \mu \mathbf{H}_1 = \text{rot } \mathbf{A}_1, \quad \text{rot } \mathbf{H}_2 = 0.$$

Отсюда

$$\mu \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 = \text{rot } \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{H}_2 = \text{div } [\mathbf{A}_1 \mathbf{H}_2],$$

согласно формуле (67). Таким образом по формуле Гаусса имеем:

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi} \int \text{div } [\mathbf{A}_1 \mathbf{H}_2] dV = \frac{1}{4\pi} \int_S [\mathbf{A}_1 \mathbf{H}_2]_n dS.$$

Физически этот результат означает, что при относительном перемещении тока и магнита работа электродвижущих сил индукции¹ в контуре тока в точности компенсирует обратную по знаку работу пондеромоторных сил магнитного поля, так что энергия этого поля остается постоянной (сравни 260' и 261'). Напомним, что при относительном перемещении магнитов, когда индукция токов места не имеет, работа пондеромоторных сил поля совершается за счет энергии поля, тогда как при относительном перемещении токов работа Э. Д. С. индукции в два раза превышает взятую с обратным знаком работу пондеромоторных сил поля, так что положительная работа этих сил связана с приращением энергии поля (см. стр. 334—336).

38. (Стр. 351). Рассмотрим энергию W , которую приобретает рассматриваемая система, состоящая из жидкости и газа, вследствие того, что под влиянием магнитного поля уровень в капилляре подымается на высоту h . Благодаря тому, что слой жидкости объема hS (где S — сечение слоя) с проницаемостью μ вытесняет из магнитного поля такой же объем газа с проницаемостью μ_0 , происходит приращение

¹) Равная избытку выделяемого током тепла над работой сторонних Э. Д. С. см. (256').

магнитной энергии на величину $\frac{1}{8\pi}(\mu - \mu_0)H^2Sh$ (см. 265'). Из этой приобретенной энергии надо вычесть работу, затраченную при подъеме центра тяжести рассматриваемого слоя жидкости с массой τhS на высоту $\frac{h}{2}$. Следовательно

$$W = \frac{1}{8\pi}(\mu - \mu_0)H^2Sh - \frac{gh^2}{2}\tau S.$$

Устойчивому равновесию системы соответствует минимум потенциальной энергии. Стало быть при равновесии производная

$$\frac{dW}{dh} = \frac{1}{8\pi(\mu - \mu_0)}H^2S - gh\tau S,$$

должна равняться нулю, откуда и следует искомый результат, если принять во внимание, что согласно (224')

$$\mu - \mu_0 = 4\pi(\kappa - \kappa_0).$$

39. (Стр. 372). Так как согласно § 49 (стр. 358) наличие приложенного извне напряжения эквивалентно наличию в цепи соответствующей стороной Э. Д. С., то уравнение (275'') примет в рассматриваемом случае вид

$$J'R' = \mathcal{E}'_{\text{инд.}} + \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}'_{\text{сд}}$$

или (сравни ур-ние 275)

$$R'J' = \frac{e'}{C'} - L'\frac{dJ'}{dt} + \mathcal{E}'_0 \cos \omega t.$$

Дифференцируя это уравнение по t и воспользовавшись соотношением (274), получаем окончательно

$$L'\frac{d^2J'}{dt^2} + R'\frac{dJ'}{dt} + \frac{1}{C'}J' = -\omega \mathcal{E}'_0 \cos \omega t.$$

Общее решение этого неоднородного уравнения выражается суммой общего решения соответствующего однородного уравнения (275') и произвольного частного решения рассматриваемого неоднородного уравнения. Первое слагаемое представляет собой собственные колебания контура, амплитуда которых благодаря затуханию с течением времени стремится к нулю. Что же касается частного решения рассматриваемого уравнения, то мы можем искать его в форме $J' = J'_0 \cos(\omega t - \alpha)$. Внеся это выражение в наше уравнение и приравняв коэффициенты при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ в правой и левой части уравнения (сравни задачу 36), получим два соотношения для определения J'_0 и $\text{tg } \alpha$.

1) В первом приближении пренебрегаем изменением напряженности поля H , обусловленным изменением проницаемости среды. Это допустимо при малых значениях разности $\mu - \mu_0$.

ВАЖНЕЙШИЕ ФОРМУЛЫ ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

А. Правила умножения векторов.

Скалярное произведение \mathbf{ab} :

$$\mathbf{ab} = (\mathbf{ab}) = \mathbf{ba} = ab \cos(a, b) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (\alpha)$$

Векторное произведение $[\mathbf{ab}]$ перпендикулярно векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} , причем векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и $[\mathbf{ab}]$ образуют правовинтовую систему. Численное значение вектора $[\mathbf{ab}]$ равно площади параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$|[\mathbf{ab}]| = ab \sin(a, b). \quad (\beta)$$

$$[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (\beta')$$

$$[\mathbf{ab}] = -[\mathbf{ba}]. \quad (\gamma)$$

$$\mathbf{a}[\mathbf{bc}] = \mathbf{b}[\mathbf{ca}] = \mathbf{c}[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \quad (\delta)$$

$= \pm$ объем параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} .

$$[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]] = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab}). \quad (\epsilon)$$

В. Формулы векторного анализа.

Теорема Гаусса (вторая):

$$\oint_S a_n \cdot dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot dV. \quad 25, \text{ стр. } 29.$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint a_n dS}{\Delta V}. \quad 26, \text{ стр. } 29.$$

$$\nabla \mathbf{a} = \operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad 24, \text{ стр. 27 и 62, стр. 64.}$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{a} = a_{2n} - a_{1n} \quad 31, \text{ стр. 36.}$$

Производная скаляра по направлению \mathbf{s} :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)_0 = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\varphi_s - \varphi_0}{ds}. \quad 43, \text{ стр. 49.}$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathbf{n}. \quad 45, \text{ стр. 51.}$$

$$\nabla \varphi = \operatorname{grad} \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad 46', \text{ стр. 52 и 61, стр. 63.}$$

$$\operatorname{grad}_s \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s}. \quad 44', \text{ стр. 51.}$$

$$\operatorname{grad} \varphi(\psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \cdot \operatorname{grad} \psi. \quad 47, \text{ стр. 53.}$$

$$\operatorname{grad}_a R = \frac{\mathbf{R}}{R} = -\operatorname{grad}_q R. \quad 48, \text{ стр. 54.}$$

$$\operatorname{grad}_a (\mathbf{bR}) = \mathbf{b} \quad (\mathbf{b} = \text{const}). \quad 51, \text{ стр. 55.}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad 55', \text{ стр. 59.}$$

$$\nabla^2 f(R) = \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial f}{\partial R}. \quad 49'', \text{ стр. 55.}$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = 0. \quad 59', \text{ стр. 60.}$$

$$\nabla^2 \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial z^2}. \quad 63, \text{ стр. 64.}$$

Теорема Грина:

$$\int \left\{ \psi \cdot \nabla^2 \varphi + (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \psi) \right\} dV = \oint \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \quad 70, \text{ стр. 70.}$$

$$\int (\psi \cdot \nabla^2 \varphi - \varphi \cdot \nabla^2 \psi) dV = \oint \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS. \quad 70', \text{ стр. 71.}$$

Теорема Стокса:

$$\oint_L a_s ds = \int_S \operatorname{rot}_n \mathbf{a} \cdot dS. \quad 175, \text{ стр. 214.}$$

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = \operatorname{Lim}_{dS \rightarrow 0} \frac{\oint a_s ds}{dS}. \quad 174', \text{ стр. 215.}$$

$$[\nabla \mathbf{a}] = \operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \quad 64, \text{ стр. 65 и стр. 21}^3.$$

$$\oint_S \operatorname{rot}_n \mathbf{a} \cdot dS = 0. \quad 178, \text{ стр. 218.}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi &= 0, \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} &= 0, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a}. \end{aligned} \right\} 65, \text{ стр. 85.}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{grad} (\varphi \psi) &= \psi \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{grad} \psi, \\ \operatorname{div} (\varphi \mathbf{a}) &= \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{grad} \varphi, \\ \operatorname{rot} (\varphi \mathbf{a}) &= \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{a}]. \end{aligned} \right\} 66, \text{ стр. 66.}$$

$$\operatorname{div} [\mathbf{a}\mathbf{b}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}. \quad 67, \text{ стр. 67.}$$

Производная вектора по направлению \mathbf{a} :

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{a}} = \operatorname{Lim}_{\Delta \mathbf{a} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{b}' - \mathbf{b}}{\Delta \mathbf{a}}. \quad 68''', \text{ стр. 68.}$$

$$\mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{b} = a \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial a} = a_x \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} + a_y \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y} + a_z \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z}. \quad 68' \text{ и } 68'', \text{ стр. 68.}$$

Если \mathbf{a} есть потенциальный вектор (т. е. $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$), то

$$\mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{2} \nabla a^2 = \frac{1}{2} \operatorname{grad} a^2. \quad 130, \text{ стр. 155.}$$

УКАЗАТЕЛЬ.

- Ампера гипотеза 243, 316.
« закон 204.
Барнетта эффект 316.
Био и Савара закон 206.
Больцмана постоянная 139.
« теорема 139, 307.
Вектор-потенциал 220, 281.
Вектор безвихревой 211.
« вихревой 225.
« Герца 413.
« потенциальный 211.
« Пойнтинга 390.
« соленоидальный 221.
Вибратор Герца 411.
Видемана и Франца закон 196.
Вихрь 65, 218.
Волна 420.
Волновое уравнение 399.
Восприимчивость магнитная 273.
Время эффективное 404.
Гамильтона оператор 63.
Гаудсмита и Юленбека гипотеза 317.
Гаусса теоремы: первая 16; вторая 29.
Гауссова система единица 264 и след.
Герца вектор 413.
« вибратор 411.
Градиент 51.
Грина теорема 70.
Даламбера уравнение 399.
Декремент колебаний 370.
Джауля закон 179, 180, 186.
Диамагнетизм 274, 305.
Дивергенция 27, 29.
« поверхностная 36.
Диполь 43.
« квазиупругий 107, 143.
Диполь магнитный 236, 239, 257, 276.
« твердый 137, 143.
Диполя поле 43, 55, 70.
Дисперсия 436, 437.
Диэлектрик 107.
Диэлектрическая постоянная 113, 118, 141, 437.
Единицы измерения 264—271.
Емкость 45, 48.
Заряд магнитный 235.
« пробный 9.
« точечный 6.
« свободный 113.
« связанный 114.
Защита электростатическая 46.
Зоммерфельда теория 199.
Зона волновая 419.
Излучение осциллятора 421.
Индукция магнитная 279, 298.
« токов 320 и след.
« электрическая (вектор) 118.
« электростатическая 46.
Инерция тока 340, 371.
Ирэншоу теорема 104.
Истоки поля 30, 34.
« поверхностные 36.
Каммерлинг-Оннес 198.
Квазистационарность 329, 409.
Квинке 351.
Кирхгофа закон первый 175; второй—185.
Конденсатор 46, 48.
Коэффициент взаимной индукции 252, 290, 345.
Коэффициент самоиндукции 248, 290, 345.
Кулона закон для электр. зарядов 1—7 113.

- Куло на закон для магнитных зарядов 235.
 Кюри закон 247.
 Ланжевена формула 313.
 Лапласа уравнение 60.
 Ленца правило 337.
 Линии градиента 52.
 « индукции 131.
 « сил электр. 56, 131; магн. 225.
 « тока 177.
 Листок магнитный 236, 256, 286.
 « « элементарный 239.
 Лорентца сила 261.
 Локализация энергии в поле 93, 453.
 Магнетизм 272.
 Магнит постоянный 240, 275 и след., 345, 351.
 Магнитомеханические явления 314.
 Макро- и микроскопические величины 2, 120.
 Момент диполя 43.
 Момент магнитный тока 239, 291.
 Мощность двойного слоя 83.
 Набла 63.
 Намагничивание 273.
 « индуцированное 275.
 « постоянное 275.
 Напряжение 184.
 « вдоль пути 355.
 Напряженность магнитного поля 205, 298.
 Напряженность электрич. поля 8.
 Насыщение намагничивания 310, 313.
 « поляризации 143.
 Натяжения 161.
 Непрерывности уравнение 176, 361, 383.
 Нити тока 177.
 Ома закон 170, 174, 1 2, 193, 325.
 Оператор Гамильтона 63.
 Осциллятор 411.
 Отражение полное внутреннее 445.
 Парамагнетизм 272, 306.
 Перегородка условная 233.
 Плотность заряда объемная 33.
 « « поверхностная 16, 21.
 « сил электрических 99, 100, 154, 160, 163.
 Плотность сил магнитных 286, 346.
 « токов 172 и след.
 « « поверхностных 440.
 Плотность энергии электрической 93, 146.
 « « магнитной 343.
 Поверхность разрыва — см. условия пограничные.
 Поверхность уровня 49.
 Пойнтинга вектор 390.
 « теорема 387.
 Показатель преломления 436.
 Поле вектора 9; скаляра 49.
 « «действующее на диполь» 134.
 « диполя 43, 55, 70.
 « квазистационарное 329, 409.
 « консервативное 37.
 « магнитное 205.
 « однородное 24.
 « полное 92, 255.
 « потенциальное 37.
 « стационарное 175.
 « электрическое 7.
 Поляризация диэлектрика 108.
 « единицы объема 110.
 « электродов 86.
 Поляризуемость диэлектрика 110.
 « молекулы 108.
 Постоянная диэлектрическая 113, 118, 141, 437.
 Потенциал векторный 220, 281.
 « запаздывающий 403.
 « скалярный магнитный 234.
 « « электрический 39.
 Потенциальная функция — см. функция потенциальная.
 Поток вектора 11.
 « магнитный 245.
 « магнитной индукции 289.
 « энергии 390.
 Прецессия электронных орбит 304.
 Проводник 22, 191.
 « идеальный 439.
 Производная по направлению от вектора 58.
 « « « от скаляра 49.
 Проницаемость магнитная 279.
 Пространство вихревое 225.
 Протон 1.
 Пуассона уравнение 56.
 Равенство действия и противодействия 166, 203, 249.
 Ротор 65, 215.
 Самоиндукция 252, 290, 345.

- Сверхпроводимость 198.
 Сила ponderomotorная 8.
 « тока 170.
 « « эффективная 379.
 « электродвижущая индукции 321, 325.
 « « коактная 188.
 « « сторонняя 182, 383.
 Система лево- и правовинтовая 9. 10.
 Скин-эффект 378.
 Скорость распространения поля 403, 407.
 « света 409, 426.
 « течения энергии 429.
 « фазовая 429.
 Слой двойной электрический 82.
 « « магнитный — см. листок магнитный.
 Соленойд 240.
 Сопротивление 171.
 Сопротивление омическое переменному току 379.
 Сопротивление удельное 172.
 Стокса теорема 215.
 Телеграфистов уравнение 448.
 Ток квазилинейный 184.
 « линейный 208.
 « молекулярный 292.
 « полный 362.
 « поверхностный 439.
 « проводимости 362.
 « смещения 362.
 « термоионный 60, 192.
 « элементарный 238.
 Томсона модель атома 109.
 « формула 370.
 Точки истока и наблюдения 53.
 Трубка силовая 229.
 Условия в бесконечности 40, 76, 223, 387.
 « квазистационарности 329, 409.
 « пограничные 34, 76, 78, 128, 177, 279, 361, 385, 441.
 Ферромагнетизм 274, 275, 311.
 Физически бесконечно малый 118.
 Функция потенциальная магнитного поля 246 и след., 289, 290.
 Циркуляция вектора 210.
 Частота циклическая 370.
 Число волновое 427.
 Эйнштейна — де Хааса эффект 316.
 Эквивалентность магнитного листка и тока 236, 241, 256, 286.
 Электролит 86, 190.
 Электрон 1.
 Электрон вращающийся 317.
 Электроны свободные в металле 22, 191.
 Энергия конденсатора 87.
 « магнитная 334, 343, 345.
 « полная 95.
 « собственная 94, 344.
 « электрическая 87, 144.
 Юленбека и Гаудсмита гипотеза 317.
 Явления магнитомеханические 314.