Ю. А. Розанов, Гауссовские бесконечномерные распределения, *Тр. МИАН СССР*, 1968, том 108, 3–136

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей работе рассматриваются вопросы, так или иначе связанные с эквивалентностью гауссовских распределений вероятностей в различных бесконечномерных пространствах (гауссовских бесконечномерных распределений).

В первой главе коротко излагаются некоторые результаты, касающиеся задания вероятностных (гауссовских) мер в различных линейных пространствах. Подробный обзор общих результатов такого рода имеется, например, в работе Прохорова [64] и мы не будем на них останавливаться.

Во второй главе систематически излагаются результаты об эквивалентности гауссовских распределений вероятностей и плотностях таких распределений.

Исследование общих гауссовских мер (условий эквивалентности), по-видимому, началось с работ Гаека [51] и Фелдмана [48], хотя некоторые частные результаты были получены несколько ранее. Скажем, приведенные в примерах 1 и 11 гл. II условия эквивалентности распределений независимых гауссовских величин легко вытекают из общей теоремы Какутани [56]; винеровский процесс с различными средними значениями (см. пример 3 гл. II) рассматривался Камероном и Мартином [42], Сигалом [67]; линейные преобразования винеровского процесса (см. пример 4 гл. II) изучались Камероном и Мартином [43], Сигалом [67], Сейдменом [66] и т. д.

В упомянутой работе Гаека [51] доказывается, что гауссовские меры либо эквивалентны, либо ортогональны, и предлагается критерий эквивалентности, основанный на так называемом «энтропийном расстоянии» между распределениями вероятностей (см. теорему 1 гл. II). В работе Фелдмана [48] предлагается критерий эквивалентности, близкий к теореме 5 гл. II.

После этих работ стало ясно, что можно отдельно изучать два случая, а именно случай гауссовских мер с различными средними значениями, но одинаковыми корреляционными функциями и случай гауссовских мер с различными корреляционными функциями, но одинаковыми (равными 0) средними значениями (см. п. 1 § 2 гл. II).

Первый (сравнительно простой случай) рассматривался многими авторами, и соответствующие общие условия эквивалентности (см. теоремы 2, 3 гл. II) в различных вариантах многократно переоткрывались; сошлемся лишь на работы Парзена [59] и Гаека] [52]. Вычисление плотности эквивалентных распределений по общей формуле (15) требует решения уравнения хорошо известного типа (14), возникающего в задачах линейного прогнозирования, фильтрации и т. д. (см., например, [27], [52]). Конечно, несмотря на наличие общих условий эквивалентности, в каждом конкретном случае требуется дополнительное исследование с целью наилучшего выражения этих условий в терминах непосредственно заданных характеристик распределений. Например, в случае стационарных процессов такой характеристикой является спектральная плотность. Соответствующие этому случаю условия эквивалентности даются в примерах 5 (гл. II) и 1 (гл. IV).

Вопрос об эквивалентности вероятностных распределений имеет существенное значение для задач статистики случайных процессов (см. введение к гл. II); по-видимому, впервые достаточно подробно такие задачи рассматривались в работе Гренандера [20]. С точки зрения статистических приложений весьма важным является класс распределений, отвечающих гауссовским стационарным процессам с рациональной спектральной плотностью. Именно эти распределения и привлекали наибольшее внимание специалистов, интересующихся приложениями (см., например, [25, 71, 72]). В частности, Слепяном [71] было найдено следующее необходимое условие эквивалентности: спектральные плотности имеют одинаковую асимптотику «на бесконечности». Достаточность этого условия (см. пример 5 гл. II), по-видимому, впервые была установлена в работах Фелдмана [49] и Пинскера]24]. Различные способы вычисления плотности распределений гауссовских стационарных процессов с рациональным спектром позднее предлагались Гаеком [52], Писаренко и Розановым [27], Писаренко [26] и др. В частности, рассмотренный в примере 13 гл. II метод вычисления плотности, связанный с решением уравнений (23) гл. II, исследован в работе [28] (см. также [11]).

Упомянутый выше результат Слепяна [71] примыкает к работе Бакстера [40], в которой выявляются своеобразные свойства траекторий гауссовских процессов (см. соотношение (63) гл. II), аналогичные известным ранее свойствам винеровского процесса. Это позволяет явно описывать некоторые «носители» гауссовских распределений. Дальнейшее распространение результатов Бакстера на более широкий класс гауссовских процессов имеется в работах Гладышева [15] и Алексеева [1].

Первые конкретные условия эквивалентности распределений произвольного стационарного гауссовского процесса и процесса с рациональным спектром были получены в уже упоминавшейся работе Фелдмана [49]. Условия эти выражаются в терминах обобщенных преобразований Фурье (см. условие (53) гл. II), и в дальнейшем были обобщены Апокориным [3] на класс стационарных процессов со спектральной плотностью, допускающей «факторизацию» типа (52) — см. теорему 11. Отдельные условия эквивалентности для распределений гауссовских стационарных процессов (в частности, условие (57)) были получены Алексеевым [2]; в отношении достаточных условий более ранние результаты такого же типа, как и в [2], имеются в работе Пинскера [24]. Некоторые обобщения результатов Алексеева [2] даны в обзорной статье Гихмана, Скорохода [14]; в частности, в упомянутой статье находится достаточное для эквивалентности условие, близкое к условию (54).

Критерий эквивалентности распределения гауссовского стационарного процесса с произвольной спектральной плотностью и распределения гауссовского стационарного процесса со спектральной плотностью типа (49), (51) — см. теорему 10 — предложен в работе [32]. В этой же работе указывается на тот факт, что эквивалентность распределений гауссовских стационарных процессов связана лишь с поведением соответствующих спектральных плотностей «на бесконечность» (см. лемму 12). В § 3 гл. II проводится детальное исследование условий эквивалентности распределений, отвечающих стационарным гауссовским процессам. Центральной здесь является теорема 9, из которой, в частности, выводятся все основные известные ранее результаты (касающиеся рассматриваемого случая). Условия теоремы 9 распространяются на нестационарный случай в примере 4 гл. IV.

Общие условия эквивалентности (типа условий теорем 5—7 гл. II) могут быть выражены в терминах связанного с гауссовским процессом «гильбертова пространства с воспроизводимым ядром» (см. по этому поводу работы [57, 60, 44, 17]. Это же относится и к плотности эквивалентных распределений. Формула (24) в теореме 7, вполне эффективная для плотности распределений гауссовских стационарных процессов, а также и сама теорема 7 для этого случая (см. пример 13 гл. II) имеются в работе [35].

Интересно отметить, что условия эквивалентности распределений винеровского процесса (см. пример 9 гл. II), как это ни странно, были получены значительно позже, чем аналогичные результаты для более сложных и не столь классических случаев. По-видимому, эти условия впервые даны в работах Голосова [16], Варберга [75] и Шеппа [70] (см. также [39]). Правда, в упомянутой работе Голосова [16] рассматривается не только винеровский процесс, но и произвольные гауссовские марковские процессы (см. пример 10 гл. II). Результаты Голосова [16] завершают более ранние исследования Варберга [73, 74].

Гауссовские меры в гильбертовом пространстве (см. примеры 7, 8 гл. II) специально рассматривались Рао, Варадерайаном [65]. Это делается также в статье Гихмана, Скорохода [14], где дается общий обзор результатов об абсолютной непрерывности вероятностных (не только гауссовских) мер. Аналогичный обзор имеется в статье Яглома [77].

В третьей главе полученные в гл. II результаты прилагаются к некоторым задачам математической статистики, в частности, к задачам построения наилучших несмещенных оценок для неизвестных среднего значения и корреляционной функции произвольного гауссовского распределения вероятностей. При этом указанные оценки строятся на основе метода «улучшенных оценок» (см., например, книгу Лемана [23]).

В связи с некоторыми аппроксимационными задачами, возникающими в статистике гауссовских распределений, в п. 3 § 1 гл. III исследуется структура условных математических ожиданий различных функционалов от гауссовского случайного процесса. Основной результат (теорема 1, гл. III) представляет собой обобщение известного свойства условных математических ожиданий величин из гауссовского семейства на случай произвольных полиномов от величин этого семейства. Из указанной теоремы 1 легко получаются известные разложения по так называемым «полиномам Эрмита» (см. Ито [54], Винер [8], Вершик [6]).

Задача об оценке неизвестного (постоянного) среднего значения стационарного процесса и более общая задача об оценках «коэффициентов регрессии» (см. примеры 3, 4 гл. III) являются наиболее изученными задачами статистики случайных процессов (см., например, [20, 38, 50].) Но даже эти, ставшие уже классическими, задачи представляются нам еще открытыми для исследований. Прежде всего мы имеем в виду вопросы о состоятельности наилучших несмещенных оценок, о взаимоотношении их с оценками наименьших квадратов и др. В еще более полной мере это касается общей задачи об оценках неизвестного «тренда» (среднего значения) гауссовского процесса. Постановка такой «непараметрической задачи» (точнее, в которой параметрическое пространство является бесконечномерным) имеется в работе Парзена [59]. В связи с этой работой следует отметить, что наилучшие несмещенные оценки, которые в конечномерном случае совпадают с точками абсолютного максимума функции правдоподобия (см. п. 2, § 2 гл. III), в бесконечномерном случае не могут быть получены методом «максимального правдоподобия». Мы в нашей работе рассматриваем случай произвольных гауссовских распределений. В частности, в отношении оценок среднего значения устанавливаются необходимые и достаточные условия состоятельности (при произвольном расширении «наблюдений»), тесно связанные с условиями эквивалентности. Вместе с результатами § 2, гл. II, а также примера I гл. IV это дает весьма эффективные критерии состоятельности.

В главе IV рассматриваются вопросы о структуре линейных измеримых функционалов и преобразований в произвольном линейном пространстве с гауссовской мерой. Постановка этих вопросов, а также детали доказательств отдельных вспомогательных результатов взяты из недавней книги Шилова и Фан Дык Тиня [39], в которой рассматриваются распределения последовательности независимых, одинаково распределенных, гауссовских величин или винеровского процесса.

Нужно сказать, что эти вопросы касаются характера функциональной зависимости случайных величин от элементарных исходов и не представляют непосредственного интереса для теории вероятностей (за исключением, пожалуй, такого раздела, как «задание вероятностных мер», — см. § 1 гл. I). Вместе с тем проведенные исследования показывают гармоничную связь поставленных вопросов с некоторыми известными задачами теории вероятностей и математической статистики. Упомянем в связи с этим необходимость отыскания различных удобных формул, описывающих структуру линейных функционалов от случайного процесса — см., например, статью Гаека [52]. Даваемое нами решение этих вопросов целиком основывается на результатах предшествующих глав (II и III).

Глава I

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЯХ

§ 1. ЗАДАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОЙ МЕРЫ

Случайной функцией[1] $\xi = \xi(t)$ параметра $t \in T$ называют семейство случайных величин $\xi(t) = \xi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ — измеримом пространстве с вероятностной мерой P на σ-алгебре множеств $\mathfrak{A}$. Случайные величины $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ — действительные измеримые функции на пространстве Ω—называются *значениями случайной функции* $\xi = \xi(t)$ (фиксированный для каждого отдельного значения $\xi(t)$ параметр t пробегает множество T). При каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ действительная функция $\xi(\omega, \cdot) = \xi(\omega, t)$ от $t \in T$ называется *выборочной функцией*, или *траекторией* случайной функции $\xi = \xi(t)$.

Пусть X — некоторое пространство действительных функций $x = x(t)$ от $t \in T$, в которое входят все трактории $\xi(\omega, \cdot) = \xi(\omega, t)$, $t \in T$, случайной функции $\xi = \xi(t)$ (например, этим свойством обладает пространство $X = R^T$ всех действительных функций $x = x(t)$, $t \in T$). Обозначим $\mathfrak{B}$ минимальную σ-алгебру множеств функционального пространства X, содержащую все цилиндрические множества этого пространства:

$$[x(t_1),\ldots, x(t_n)] \in \Gamma \tag{1}$$

(указанное множество (1) состоит из тех функций $x = x(t)$, для которых значения $[x(t_1),\ldots, x(t_n)]$ во взятых точках $t_1,\ldots, t_n \in T$ задают вектор, принадлежащий борелевскому множеству Γ n-мерного векторного пространства R^n). Отображение $\xi = \xi(\omega, \cdot)$, при котором каждому $\omega \in \Omega$ отвечает соответствующая выборочная функция $\xi(\omega, \cdot) = \xi(\omega, t)$ от $t \in T$ — элемент пространства X, — является измеримым отображением из вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ в измеримое пространство $(X, \mathfrak{B})$. Множества $A \in \mathfrak{A}$ вида $A = \{\xi \in B\}$ — прообразы множеств $B \in \mathfrak{B}$ при указанном отображении $\xi = \xi(\omega, \cdot)$ — в совокупности образуют σ-алгебру; эта σ-алгебра $\mathfrak{A}_\xi$ является минимальной[2] среди σ-алгебр множеств, содержащих все множества вида

$$[\xi(t_1),\ldots, \xi(t_n)] \in \Gamma \tag{2}$$

(указанное множество состоит из тех элементов $\omega \in \Omega$, для которых значения $[\xi(\omega, t_1),\ldots, \xi(\omega, t_n)]$ задают вектор, принадлежащий борелевскому множеству Γ n-мерного векторного пространства R^n), или, как иначе говорят,

[1] Случайную функцию $\xi = \xi(t)$ действительного параметра $t \in T$ обычно называют *случайным процессом.*

[2] См., например, [30, стр. 201].

σ-алгебра $\mathfrak{A}_\xi$ порождается величинами $\xi(t)$, $t \in T$. Вероятностная мера P_ξ, определенная на σ-алгебре $\mathfrak{B}$-соотношением

$$P_\xi(B) = P\{\xi \in B\}, B \in \mathfrak{B}, \tag{3}$$

называется *распределением вероятностей* случайной функции $\xi = \xi(t)$ (в соответствующем функциональном пространстве X).

Обратимся к вопросу о том, когда заданное семейство действительных величин $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ на пространстве Ω (параметр t пробегает множество T) является случайной функцией с заданным распределением вероятностей P_ξ, точнее, когда существует вероятностная мера P в пространстве Ω, связанная с заданным распределением P_ξ соотношением (3). При этом предполагается конечно, что множество $\xi(\Omega)$ всех выборочных функций $\xi(\omega, \cdot) = \xi(\omega, t)$ от $t \in T$ рассматриваемого семейства величин $\xi(t)$, $t \in T$, принадлежит пространству X. Легко видеть, что такая *вероятностная мера P существует тогда и только тогда, когда множество $\xi(\Omega)$ имеет полную внешнюю меру*

$$P_\xi(B) = 1 \text{ при } B \supseteq \xi(\Omega) \tag{4}$$

для любого измеримого множества $B \in X$.

Действительно, если P_ξ — распределение вероятностей случайной функции $\xi = \xi(t)$, то для всякого множества $\Gamma \in X$, лежащего в дополнении к множествv $\xi(\Omega)$, прообраз $\{\xi \in \Gamma\}$ является пустым множеством и

$$P_\xi(\Gamma) = P\{\xi \in \Gamma\} = 0.$$

С другой стороны, для любых множеств B_1, $B_2 \in \mathfrak{B}$, имеющих один и тот же прообраз $\{\xi \in B_1\} = \{\xi \in B_2\}$, *симметрическая разность* $B_1 \circ B_2 = (B_1 \setminus B_2) \cup (B_2 \setminus B_1)$ входит в дополнение к множеству $\xi(\Omega)$ и при условии (4)

$$P_\xi(B_1 \circ B_2) = 0, \; P_\xi(B_1) = P_\xi(B_2).$$

Поэтому соотношение

$$P\{\xi \in B\} = P_\xi(B), \quad B \in \mathfrak{B} \tag{5}$$

определяет однозначную функцию $P = P(A)$ на σ-алгебре $\mathfrak{A}_\xi$ всех множеств вида $A = \{\xi \in B\}$, $B \in \mathfrak{B}$ (порождаемой величинами $\xi(t)$, $t \in T$). Очевидно, P есть вероятностная мера и $\xi = \xi(t)$ — случайная функция на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}_\xi, P)$ с заданным распределением вероятностей P.

Вероятностная мера P на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, порождаемой величинами $\xi(t)$, $t \in T$, однозначно определяется *конечномерными распределениями* $P_{t_1, \ldots, t_n}$, каждое из которых представляет собой борелевскую меру в соответствующем n-мерном векторном пространстве R^n:

$$P_{t_1, \ldots, t_n}(\Gamma) = P\{[\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)] \in \Gamma\} \tag{6}$$

($P_{t_1, \ldots, t_n}$ является распределением вероятностей случайного вектора $[\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)]$). Именно, «цилиндрические множества» вида (2) образуют алгебру и

$$P(A) = \inf \sum_k P(A_k), \tag{7}$$

где нижняя грань берется по всем множествам A_k вида (2), в совокупности покрывающих множество $A \in \mathfrak{A}$. В частности, это относится и к распределению вероятностей P_ξ в соответствующем функциональном пространстве X — вероятностной мере на σ-алгебре $\mathfrak{B}$, порожденной «непосредственно заданными» величинами $\xi(t) = \xi(x, t)$ на пространстве X вида

$$\xi(x, t) = x(t), \quad x \in X \tag{8}$$

(фиксированный для каждого функционала $\xi(x, t) = x(t)$ от $x \in X$ параметр t пробегает множество T).

Обозначим $\Gamma \times R^{n-m}$ борелевское множество в n-мерном пространстве векторов $[x(t_1),\ldots, x(t_n)]$, такое, что $[x(t_{i_1}),\ldots, x(t_{i_m})] \in \Gamma$ (Γ — борелевское множество в m-мерном подпространстве $R^m \subseteq R^n$), а остальные координаты $x(t_i)$ являются произвольными. Конечномерные распределения являются *согласованными* в том смысле, что

$$P_{t_1, \ldots, t_n}(\Gamma \times R^{n-m}) = P_{t_{i_1}, \ldots, t_{i_m}}(\Gamma) \tag{9}$$

для всех множеств указанного типа.

Пусть $X = R^T$ — пространство всех действительных функций $x = x(t)$, $t \in T$. Согласно известной теореме Колмогорова, всякое согласованное семейство распределений $P_{t_1,\ldots,t_n}$ задает на алгебре всех цилиндрических множеств (1) и (2) непрерывную аддитивную функцию P (определяемую формулой (6), в которой фигурируют «непосредственно заданные» величины вида (8)). Эта функция однозначно продолжается в вероятностную меру P на σ-алгебре $\mathfrak{B}$. «Непосредственно заданная» случайная функция $\xi = \xi(t)$ с указанными значениями $\xi(t) = \xi(x, t)$ на вероятностном пространстве $(X, \mathfrak{B}, P)$ имеет конечномерные распределения, совпадающие с исходными согласованными распределениями $P_{t_1,\ldots,t_n}$.

Отправляясь от распределения вероятностей P в функциональном пространстве X, можно определить (см. формулу (5)) вероятностную меру в соответствующем пространстве Ω.

Случайные функции $\xi = \xi(t)$ и $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(t)$ со значениями на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ называются *эквивалентными*, если с вероятностью 1 (для почти всех $\omega \in \Omega$)

$$\xi(\omega, t) = \tilde{\xi}(\omega, t)$$

при каждом фиксированном $t \in T$. Очевидно, конечномерные распределения эквивалентных случайных функций совпадают. Переходя к эквивалентной случайной функции $\xi = \xi(t)$ с траекториями в том или ином функциональном пространстве X, можно определить (см. формулу (3)) вероятностную меру в этом пространстве[1].

Случайная функция $\xi = \xi(t)$ параметра $t \in T$ со значениями $\xi(t) = \xi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ называется *гауссовской*, если все ее конечномерные распределения являются гауссовскими. *Гауссовской* будем называть и вероятностную меру P на σ-алгебре $\mathfrak{A}_\xi$, порожденной всеми величинами $\xi(t)$, $t \in T$.

Напомним, что распределение вероятностей P в n-мерном векторном пространстве R^n называется *гауссовским*, если характеристическая функция

$$\varphi(u) = \int\limits_{R^n} e^{i(u,x)} P(dx), \quad u \in R^n$$

$\left(\text{здесь } (u, x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k x_k \text{ означает скалярное произведение векторов } u = (u_1,\ldots, u_n) \text{ и } x = (x_1,\ldots, x_n)\right)$ имеет вид

$$\varphi(u) = \exp\left\{i(u, A) - \frac{1}{2}(Bu, u)\right\}, \quad u \in R^n, \tag{10}$$

---

[1] См., например, далее § 3.

где $A = (A_1, \ldots, A_n) \in R^n$ — так называемое среднее значение, а B — *линейный положительный оператор* (задаваемый *корреляционной матрицей* $\{B_{kj}\}$):

$$(u, A) = \int_{R^n} (u, x) P(dx),$$

$$(Bu, v) = \int_{R^n} [(u, x) - (u, A)] [(v, x) - (v, A)] P(dx); \quad u, v \in R^n.$$

Распределение вероятностей P со средним значением A и корреляционным оператором B сосредоточено в m-мерной гиперплоскости L пространства R^n (m — ранг корреляционной матрицы), которая может быть описана как

$$L = A + BR^n$$

(L есть совокупность всех векторов $y \in R^n$ вида $y = A + Bx$, $x \in R^n$). Именно

$$P(R^n \setminus L) = 0,$$

причем распределение вероятностей в L абсолютно непрерывно относительно лебеговской меры dy:

$$P(\Gamma) = \int_{\Gamma \cap L} p(y)\, dy, \tag{11}$$

где плотность распределения $p(y)$, $y \in L$ имеет вид

$$p(y) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \det B^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} (B^{-1}(y - A), y - A)\right\} \tag{12}$$

(здесь $\det B$ означает определитель матрицы, задающей оператор B в подпространстве $R^m = BR^n$, а B^{-1} есть оператор в этом подпространстве, обратный к B).

Каждое из конечномерных распределений $P_{t_1, \ldots, t_n}$ гауссовской случайной функции $\xi = \xi(t)$ от $t \in T$ имеет среднее значение $[A(t_1), \ldots, A(t_n)]$ и корреляционную матрицу $\{B(t_k, t_j)\}$, где $A(t)$, $t \in T$, — *среднее значение* случайной функции $\xi = \xi(t)$, а $B(s, t)$; $s, t \in T$, — ее *корреляционная функция*[1]:

$$\left.\begin{aligned} A(t) &= E\xi(t), \\ B(s, t) &= E[\xi(s) - A(s)][\xi(t) - A(t)]; \quad s, t \in T \end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

Таким образом, гауссовская мера P на σ-алгебре $\mathfrak{A}_\xi$ однозначно определяется своими средним значением $A(t)$, $t \in T$, и корреляционной функцией $B(s, t)$; $s, t \in T$.

Среднее значение $A(t)$, $t \in T$, может быть произвольным, а корреляционная функция $B(s, t)$; $s, t \in T$, удовлетворяет лишь условию положительной определенности

$$\sum_{k, j=1} c_k c_j B(t_k, t_j) \geqslant 0 \tag{14}$$

для любых $t_1, \ldots, t_n \in T$ и действительных $c_1, \ldots, c_n$. Для всяких функций $A(t)$, $t \in T$, и положительно определенной $B(s, t)$; $s, t \in T$, существует гауссовская случайная функция с таким средним значением $A(t)$, $t \in T$, и корреляционной функцией $B(s, t)$; $s, t \in T$. Именно, гауссовские распределения $P_{t_1, \ldots, t_n}$ со средними значениями $[A(t_1), \ldots, A(t_n)]$ и корреляционными

[1] $E\xi$ означает математическое ожидание случайной величины $\xi = \xi(\omega)$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$: $E\xi = \int_\Omega \xi(\omega) P(d\omega)$.

матрицами $\{B(t_k,\ t_j)\}$ являются согласованными и задают гауссовскую меру P в пространстве $X = R^T$ всех действительных функций $x = x(t)$ от $t \in T$, определенную на σ-алгебре $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_\xi$, которая порождается «непосредственно заданными» величинами $\xi(t) = \xi(x,t)$ на X вида (8) (параметр t пробегает множество T).

§ 2. ГАУССОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О СХОДИМОСТИ

Рассмотрим последовательность случайных величин $\xi_n = \xi_n(\omega)$, $n = 1, 2, \ldots$ на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathfrak{A},\ P)$. Говорят, что последовательность ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$ *сходится по вероятности* на множестве $A \in \mathfrak{A}$ к некоторой величине $\xi = \xi(\omega)$, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \cap A) = 0. \tag{15}$$

Как известно, последовательность ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$ сходится по вероятности тогда и только тогда, когда она фундаментальна, т. е. на том же множестве A сходится по вероятности к 0 последовательность $\Delta_{nm} = \xi_n - \xi_m$, $n, m = 1, 2, \ldots$

Теорема 1. *Если последовательность гауссовских величин ξ_n ($n = 1, 2, \ldots$) сходится по вероятности на некотором множестве $A \in \mathfrak{A}$ положительной меры ($P(A) > 0$), то она сходится в среднем*:

$$\lim_{n\to\infty} E[\xi_n - \xi]^2 = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим гауссовские величины $\Delta_{nm} = \xi_n - \xi_m$. Для любого $\varepsilon > 0$

$$P\{|\Delta_{nm}| > \varepsilon\} = 2\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{nm}} \exp\left\{-\frac{(x - a_{nm})^2}{2\sigma_{nm}^2}\right\} dx,$$

где $a_{nm} = E\Delta_{nm}$, $\sigma_{nm}^2 = E(\Delta_{nm} - a_{nm})^2$. Предположим, что последовательность ξ_n ($n = 1, 2, \ldots$) не сходится в среднем, что равносильно условию

$$\overline{\lim_{n,\ m\to\infty}} (a_{nm}^2 + \sigma_{nm}^2) > 0.$$

Легко видеть, что при этом условии для некоторого достаточно малого положительного ε

$$\overline{\lim_{n,\ m\to\infty}} P\{|\Delta_{nm}| > \varepsilon\} \geqslant 1 - p/2,$$

где $p = P(A) > 0$. Но тогда

$$\overline{\lim_{n,\ m\to\infty}} P(\{|\Delta_{nm}| > \varepsilon\} \cap A) \geqslant p/2,$$

что противоречит условию (15). Поэтому

$$\overline{\lim_{n,\ m\to\infty}} E\Delta_{nm}^2 = \lim_{n,\ m\to\infty} (a_{nm}^2 + \sigma_{nm}^2) = 0,$$

т. е. последовательность ξ_n ($n = 1, \ldots$), фундаментальна в среднем и, следовательно, сходится в среднем, что и требовалось доказать.

В частности, *если последовательность гауссовских величин ξ_n ($n = 1, 2, \ldots$) сходится с положительной вероятностью (т. е. сходится для всех ω из некоторого множества $A \in \mathfrak{A}$ положительной меры), то она сходится в среднем.*

Рассмотрим последовательность независимых гауссовских величин ξ_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 2. *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$ *сходится с положительной вероятностью тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n^2$.

Доказательство: Поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n^2 = E \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2,$$

то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n^2$ вытекает, что величина $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2(\omega)$ является конечной для почти всех $\omega \in \Omega$, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$ сходится с вероятностью 1. Пусть теперь ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$ сходится с положительной вероятностью (в силу известного закона нуля или единицы он сходится с вероятностью 1). Тогда последовательность ξ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится к 0 в среднем: $E\,\xi_n^2 \to 0$ при $n \to \infty$ (см. следствие теоремы 1). Положим $a_n = E\xi_n$, $\sigma_n^2 = E(\xi_n - a_n)^2$. Тогда

$$a_n^2 + \sigma_n^2 = E\,(\xi_n')^2 + \int\limits_{|x|>1} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left\{-\frac{(x-a_n)^2}{2\sigma_{nm}^2}\right\} dx,$$

где случайные величины $\xi_n' = \xi_n'(\omega)$ определены как

$$\xi_n'(\omega) = \begin{cases} \xi_n(\omega) & \text{при } |\xi_n| \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } |\xi_n| > 1. \end{cases}$$

При $a_n^2 + \sigma_n^2 \to 0$ имеем

$$\int\limits_{|x|>1} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left\{-\frac{(x-a_n)^2}{2\sigma_{nm}^2}\right\} dx = o\,(a_n^2 + \sigma_n^2),$$

так что

$$E\,(\xi_n')^2 \sim a_n^2 + \sigma_n^2.$$

Согласно хорошо известной «теореме о трех рядах», для сходимости (с вероятностью 1) ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$ из независимых величин ξ_n^2, $n = 1, 2, \ldots$ необходимо, чтобы $\sum_{1}^{\infty} E\,(\xi_n')^2 < \infty$. Но $E\,(\xi_n')^2 \sim a_n^2 + \sigma_n^2$ и, следовательно, из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$ вытекает, что $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + \sigma_n^2) < \infty$.

§ 3. ГАУССОВСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

1. Гауссовские величины в гильбертовом пространстве

Случайная величина ξ в евклидовом n-мерном пространстве R^n называется *гауссовской*, если гауссовским является ее распределение вероятностей (см. выше, § 1). Очевидно, что случайная величина $\xi \in R^n$ является гауссовской тогда и только тогда, когда при каждом $u \in R^n$ гауссовской является действительная величина $\xi(u) = (u, \xi)$ (равная скалярному произведению элементов u, $\xi \in R^n$). Действительно, характеристическая функция $\varphi(u)$, $u \in R^n$, распределения вероятностей случайной величины $\xi \in R^n$ совпадает в точке $u \in R^n$ со значением характеристической функции действительной случайной величины $\xi(u) = (u, \xi)$ в точке 1 и имеет вид

$$\varphi(u) = Ee^{i(u, \xi)} = \exp\left\{i(u, A) - \frac{1}{2}(Bu, u)\right\}, \quad u \in R^n$$

(см. формулу (10)), где (u, A) — среднее значение, а (Bu, u) — дисперсия гауссовской величины $\xi(u) = (u, \xi)$.

Очевидно также, что случайная величина $\xi \in R^n$ является гауссовской тогда и только тогда, когда гауссовской является случайная функция вида $\xi(u) = (u, \xi)$ от $u \in R^n$.

Случайный элемент ξ гильбертова пространства U, т. е. функция $\xi = \xi(\omega)$ на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ со значениями в U, называется *случайной величиной* в U, если скалярное произведение (u, ξ) при каждом $u \in U$ является действительной случайной величиной (измеримой функцией на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$), иначе говоря, если функция $\xi = \xi(\omega)$ от $\omega \in \Omega$ является *слабо измеримой* [1].

Случайная величина ξ в гильбертовом пространстве U называется *гауссовской*, если при каждом $u \in U$ гауссовской является действительная случайная величина $\xi(u) = (u, \xi)$. Это также равносильно тому, что гауссовской является случайная функция $\xi(u) = (u, \xi)$ от $u \in U$, поскольку гауссовскими будут не только отдельные величины $\xi(u) = (u, \xi)$, но и любые векторные величины $[\xi(u_1), \dots, \xi(u_n)]$. В самом деле, для любого вектора $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ в n-мерном векторном пространстве R^n скалярное произведение $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi(u_k)$ есть

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi(u_k) = \xi\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\right) = \xi(u),$$

где $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \in U$, а по условию величина $\xi(u) = (u, \xi)$ является гауссовской.

Всякий элемент $x \in U$ гильбертова пространства U можно отождествить с функцией $x(u) = (u, x)$ от $u \in U$ (линейным непрерывным функционалом на U). В соответствии с этим случайную величину $\xi \in U$ можно отождествить со случайным линейным непрерывным функционалом $\xi(u) = (u, \xi)$ на пространстве U (см. далее п. 2).

Очевидно, среднее значение

$$A(u) = E(u, \xi), \quad u \in U$$

является линейным функционалом, а корреляционная функция

$$B(u, v) = E[(u, \xi) - A(u)]\,[(v, \xi) - A(v)], \quad u, v \in U,$$

[1] См., например, [22].

билинейным положительным функционалом. При этом, поскольку при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ скалярное произведение (u, ξ) есть непрерывная функция от $u \in U$, то для гауссовской функции $\xi(u) = (u, \xi)$ от $u \in U$ должна иметь место и непрерывность в среднем (см. теорему 1 § 2)

$$\lim_{\|u-v\|\to 0} E\,[(u, \xi) - (v, \xi)]^2 = 0 \tag{16}$$

($\|u\|$ означает норму элемента $u \in U$). Но

$$E[(u, \xi) - (v, \xi)]^2 = A(u-v)^2 + B(u-v, u-v)$$

и условие (16) означает непрерывность функционалов $A(u), u \in U, B(u, v)$; $u, v \in U$.

Как всякий линейный непрерывный функционал, среднее значение $A(u)$, $u \in U$, представимо в виде

$$A(u) = (u, A), \quad u \in U. \tag{17}$$

Указанный элемент $A \in U$ называется *средним значением* случайной величины $\xi \in U$.

Таким образом, *всякая гауссовская величина* $\xi \in U$ *является слабо интегрируемой*: существует среднее значение $A \in U$ такое, что

$$(u, A) = \int_\Omega (u, \xi(\omega))\, P(d\omega)$$

при всех $u \in U$.

В случае сепарабельного гильбертова пространства U гауссовская величина $\xi = \xi(\omega)$ является и *сильно интегрируемой* функцией от $\omega \in \Omega$. Именно для сильной интегрируемости функции $\xi = \xi(\omega)$ от $\omega \in \Omega$ в сепарабельном гильбертовом пространстве необходимо и достаточно, чтобы она была слабо измерима и числовая функция $\|\xi(\omega)\|$ была интегрируемой[1]. Для гауссовской же величины ξ интегрируемой является даже функция $\|\xi(\omega)\|^2$ от $\omega \in \Omega$ (см. формулу (19)). При этом сильная интегрируемость означает, что функция $\xi = \xi(\omega)$ от $\omega \in \Omega$ является пределом последовательности счетно-значных функций $\xi_n = \xi_n(\omega)$; $n = 1, 2, \ldots$ (функции $\xi_n = \xi_n(\omega)$ принимают лишь счетное число различных значений $x_{kn} \in U$ на соответствующих измеримых множествах $A_{kn} \in \Omega$), таких что $\sum_n \|x_{kn}\| \cdot P(A_{kn}) < \infty$. Именно

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|\xi(\omega) - \xi_n(\omega)\|\, P(d\omega) = 0$$

и среднее значение $A = E\xi$ есть

$$A = \int_\Omega \xi(\omega)\, P(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_n x_{kn} P(A_{kn}).$$

Как всякий билинейный положительный непрерывный функционал, корреляционная функция $B(u, v)$; $u, v \in U$, представима в виде

$$B(u, v) = (Bu, v); \quad u, v \in U, \tag{18}$$

где B — линейный положительный оператор в гильбертовом пространстве U, называемый *корреляционным оператором. Для гауссовской случайной величины* $\xi \in U$ *корреляционный оператор* B *всегда является ядерным* (см.

[1] См., например, [22].

далее п. 2), т. е. имеет конечный след Sp B, определяемый формулой

$$\mathrm{Sp}\, B = \sum_{k=1}^{\infty} (Bu_k,\ u_k),$$

где $u_1, u_2, \ldots$ — полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве U. При этом

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi,\ u_k)\, u_k; \quad \|\xi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi,\ u_k)^2$$

и

$$E\,\|\xi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (Bu_k,\ u_k) = \mathrm{Sp}\, B < \infty. \tag{19}$$

Пример 1. *Гауссовские величины в функциональном пространстве* L^2. Пусть $\xi = \xi(t)$ — гауссовский случайный процесс на отрезке $T = [a, b]$ действительной прямой со средним значением $A(t)$, $t \in T$, и корреляционной функцией $B(s,\ t)$; $s,\ t \in T$, которые удовлетворяют условию: при всех $s,\ t \in T$

$$\lim_{s \to t} [A(s) - A(t)] = 0,$$

$$\lim_{s \to t} [B(s,\ s) - 2B(s,\ t) + B(t,\ t)] = 0.$$

Это условие означает непрерывность в среднем случайного процесса $\xi = \xi(t)$:

$$\lim_{s \to t} E\, [\xi(s) - \xi(t)]^2 = 0.$$

Как известно [1], в этом случае существует эквивалентный *измеримый процесс* (со значениями $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(\omega,\ t)$), т. е. такой, что функция $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(\omega,\ t)$ пары переменных $(\omega,\ t)$ на произведении пространств $\Omega \times T$ является измеримой. Будем считать, что измеримым является сам исходный гауссовский процесс $\xi = \xi(t)$.

Предположим, что выполняется также условие

$$\int_T A(t)^2 dt < \infty, \quad \int_T B(t,\ t)\, dt < \infty.$$

Это условие означает, что

$$\int_T E\xi(t)^2 dt < \infty.$$

По теореме Фуббини о повторном интегрировании

$$\int_T E\xi(t)^2 dt = \int_\Omega \int_T \xi(\omega,\ t)^2 dt < \infty,$$

и почти все выборочные функции $\xi(\omega,\ \cdot) = \xi(\omega,\ t)$ от $t \in T$ принадлежат гильбертову пространству L^2 действительных интегрируемых в квадрате функций $u = u(t)$ от $t \in T$ со скалярным произведением

$$\langle u,\ v\rangle = \int_T u(t) \cdot v(t)\, dt.$$

[1] См., например, [21, стр. 61].

Переопределив значение $\xi(\omega, t)$ для тех $\omega \in \Omega$, при которых выборочные функции $\xi(\omega, \cdot) = \xi(\omega, t)$, $t \in T$, не входят в L^2 (множество таких $\omega \in \Omega$ имеет меру 0), можно перейти к измеримому гауссовскому процессу $\xi = \xi(t)$, в с е выборочные функции $\xi(\omega, \cdot) = \xi(\omega, t)$ от $t \in T$ которого принадлежат гильбертову пространству L^2.

Таким образом, случайную функцию $\xi = \xi(\omega, \cdot)$ можно рассматривать как случайный элемент в гильбертовом пространстве L^2.

Рассмотрим скалярные произведения

$$(u, \xi) = \int_T u(t)\, \xi(\omega, t)\, dt, \quad u \in U.$$

Поскольку $\xi = \xi(\omega, t)$ есть измеримая функция переменных (ω, t), то при каждом фиксированном $u \in U$ действительная функция (u, ξ) от $\omega \in \Omega$ также измерима — является случайной величиной.

Таким образом, $\xi = \xi(\omega, \cdot)$ — с л у ч а й н а я в е л и ч и н а в гильбертовом пространстве L^2.

Используя теорему о повторном интегрировании, легко подсчитать, что случайная функция $\xi(u) = (u, \xi)$ от $u \in U$ имеет среднее значение

$$A(u) = \int_T u(t)\, A(t)\, dt = (u, A), \quad u \in U,$$

и корреляционную функцию

$$B(u, v) = \iint_{TT} u(s)\, v(t)\, B(s, t)\, ds\, dt = (Bu, v); \quad u, v \in U,$$

где корреляционный оператор B задается ядром $B(s, t)$; $s, t \in T$:

$$Bu(t) = \int_T B(s, t)\, u(s)\, ds.$$

Легко видеть, что случайная величина $\xi \in L^2$ является гауссовской. Действительно, для непрерывной функции $u = u(t)$ от $t \in T$ случайная величина $(u, \xi) = \int_T u(t) \cdot \xi(t)\, dt$ является пределом в среднем гауссовских величин вида

$$\sum_{k=1} u(t_k)\, \xi(t_k)\, (t_k - t_{k-1}),$$

где $a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = b$. Именно.

$$\sqrt{E\left[(u, \xi) - \sum_{k=1}^{n} u(t_k)\, \xi(t_k)\, (t_k - t_{k-1})\right]^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{E\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} u(t)\, \xi(t)\, dt - u(t_k)\, \xi(t_k)\, (t_k - t_{k-1})\right]^2} \leqslant$$

$$\leqslant (b - a) \sup_k \{ \sup_{t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_{k-1}} |u(t) - u(t_k)| \sup_{t_k \leqslant t \leqslant t_k} \sqrt{E[\xi(t) - \xi(t_k)]^2} \} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Для произвольной же функции $u \in L^2$ величина (u, ξ) является пределом в среднем гауссовских величин (u_n, ξ), где $u_n = u_n(t)$; $n = 1, 2, \ldots$ —

последовательность непрерывных функций, сходящаяся в среднем к функции $u = u(t)$:

$$E[(u, \xi) - (u_n, \xi)]^2 = A(u - u_n)^2 + B(u - u_n, u - u_n) \to 0 \text{ при } \|u - u_n\| \to 0.$$

2. Гауссовские линейные функционалы на счетно-гильбертовых пространствах

Пусть U — произвольное полное сепарабельное счетно-гильбертовое пространство [1] с системой скалярных произведений

$$(u, v)_1, \ (u, v)_2, \ldots$$

таких, что нормы $\| u \|_n = \sqrt{(u, u)_n}$ монотонно неубывают, т. е. U — линейное топологическое пространство с системой окрестностей нуля вида

$$\{u: \| u \|_n < \varepsilon\}; \quad n = 1, \ldots p; \quad \varepsilon > 0. \tag{20}$$

Пространство U совпадает с пересечением гильбертовых пространств U_n $(n = 1, 2, \ldots)$, каждое из которых получается пополнением U по соответствующей норме $\| u \|_n$. Пространство X всех линейных непрерывных функционалов $x = (u, x)$ на U совпадает с объединением пространств X_n, каждое из которых является сопряженным к соответствующему гильбертову пространству $U_n \ (n = 1, 2, \ldots)$:

$$U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n, \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

(при этом $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots$ и $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$).

Обозначим $\mathfrak{B}$ минимальную σ-алгебру, содержащую все цилиндрические множества пространства X — всевозможные множества вида (1):

$$[(u_1, x), \ldots, (u_n, x)] \in \Gamma,$$

где $u_1, \ldots u_n \in U$, а Γ — борелевские множества соответствующего n-мерного векторного пространства R^n.

Покажем, что $\mathfrak{B}$ *есть борелевская σ-алгебра множеств пространства X относительно слабой топологии* [2].

Действительно, слабые окрестности точки $x \in X$ определяются как множества вида

$$V = \{y: | (u_1, y - x) | < \varepsilon, \ldots, | (u_n, y - x) | < \varepsilon\},$$

где $u_1, \ldots, u_n \in U$ и $\varepsilon > 0$. Очевидно, борелевская σ-алгебра содержит все цилиндрические множества и потому $\mathfrak{B}$ содержится в этой σ-алгебре. Выберем теперь всюду плотную в сепарабельном пространстве U последовательность $v_1, v_2, \ldots$ Рассмотрим «шар» $S_{m, R}(x) = \{y: \| y - x \| \leqslant R\}$, определяемый как множество всех элементов $y \in X$, лежащих вместе с $x \in X$ в гильбертовом пространстве $X_m \subseteq X$, для которых норма $\| y - x \|_m$ в этом пространстве не превосходит указанного R. Легко видеть, что

$$S_{m, R}(x) = \bigcap_k \{y: |(v_k, y - x)_m| \leqslant R\},$$

где пересечение берется по всем k, для которых $\| v_k \|_m \leqslant 1$. Видно, что каждый шар $S_{m, R}(x)$ входит в σ-алгебру $\mathfrak{B}$. Пусть теперь G — произвольное открытое множество в X. Поскольку

$$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{R=1}^{\infty} S_{m, R},$$

[1] См., например, [9, стр. 78].

[2] Т. е. $\mathfrak{B}$ есть минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые множества.

где $S_{m,R} = S_{m,R}(0)$, то $G = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{R=1}^{\infty} (G \cap S_{m,R})$. Если $x \in G \cap S_{m,R}$, то найдется некоторая окрестность V указанного выше вида, такая что $x \in V \cap S_{m,R}$. Если эта окрестность определяется элементами $u_1, \ldots, u_n$ и $\varepsilon > 0$, то можно подобрать элементы $v_{k_1}, \ldots, v_{k_n}$ из выбранной ранее всюду плотной последовательности $v_1, v_2, \ldots$, так, чтобы $\| u_j - v_{k_j} \|_m < \frac{r}{2R}$ при всех $j = 1, \ldots, n$, где $0 < r < \varepsilon$ и r — рациональное число. Тогда пересечение $V_r \cap S_{m,R}$ входит в пересечение $V \cap S_{m,R}$, где V_r есть окрестность вида

$$V_r = \{y\colon\ |(v_{k_1},\ y - x)| < r,\ \ldots,\ |v_{k_n},\ y - x)| < r\}.$$

Таким образом, $G = U(V_r \cap S_{m,R})$, где объединение берется по счетному числу множеств вида $V_r \cap S_{m,R}$, так что произвольно взятое открытое множество $G \subseteq X$ входит в σ-алгебру $\mathfrak{B}$, что и требовалось показать.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ — некоторое вероятностное пространство. Пусть для каждого $\omega \in \Omega$ имеется определенный элемент $\xi(\omega)$ в пространстве X, сопряженном к счетно-гильбертову пространству U, т. е. линейный непрерывный функционал $(u, \xi) = (u, \xi(\omega))$, $u \in U$. Для того чтобы при любом фиксированном $u \in U$ действительные функции $(u, \xi) = (u, \xi(\omega))$ от $\omega \in \Omega$ были измеримыми (иначе говоря, были случайными величинами на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$), необходимо и достаточно, чтобы была измеримой функция $\xi = \xi(\omega)$ со значениями в измеримом пространстве $(X, \mathfrak{B})$, где $\mathfrak{B}$ — минимальная σ-алгебра, содержащая все цилиндрические множества пространства X. Измеримую функцию $(\xi = \xi(\omega))$ будем называть *случайной величиной* в пространстве X — пространстве всех линейных непрерывных функционалов $x = (u, x)$ на счетно-гильбертовом пространстве U. Величина $\xi \in X$ представляет собой *случайный линейный непрерывный функционал* на U — случайную функцию $\xi = (u, \xi)$ параметра $u \in U$, каждая из траекторий $\xi(\omega, \cdot) = (u, \xi(\omega))$, $u \in U$ которой является линейным непрерывным функционалом на U.

Случайную функцию $\xi = \xi(u)$ параметра $u \in U$ назовем *случайным линейным функционалом (в широком смысле)*, если для любых $u_1, u_2 \in U$ и действительных чисел λ_1, λ_2

$$\left.\begin{aligned} &\xi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 \xi(u_1) + \lambda_2 \xi(u_2) \\ &\text{(с вероятностью 1) и} \\ &E[\xi(u) - \xi(v)]^2 \to 0 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

при $u \to v$ (имеется в виду сходимость в счетно-гильбертовом пространстве U: $\| u - v \|_m \to 0$ для каждого $m = 1, 2, \ldots$).

Легко видеть, что *случайная функция $\xi = \xi(u)$ параметра $u \in U$ является случайным линейным функционалом в широком смысле тогда и только тогда, когда ее среднее значение $A(u)$, $u \in U$, является линейным непрерывным функционалом на счетно-гильбертовом пространстве U, а корреляционная функция $B(u, v)$; $u, v \in U$, является билинейным непрерывным функционалом на U* (называемым *корреляционным функционалом*).

Среднее значение случайного линейного функционала (в широком смысле) допускает представление в виде

$$A(u) = (u, A)_n, \quad u \in U, \tag{22}$$

где A — определенный элемент некоторого гильбертова пространства U_n.

Корреляционный функционал допускает представление в виде

$$B(u, v) = (Bu, v)_n; \quad u \ v \in U, \tag{23}$$

где B — симметрический положительный непрерывный линейный оператор в некотором гильбертовом пространстве U_n (называемый *корреляционным оператором*) [1].

Отметим, что формулы (22) и (23) для среднего значения $A(u)$, $u \in U$, и корреляционного функционала $B(u, v)$, $u, v \in U$, имеют место для всех достаточно больших n, так как непрерывность в гильбертовом пространстве U_n влечет за соб непрерывность и в гильбертовом пространстве U_{n+p}; $p = 1, 2, \ldots$ (поскольку $\|u\|_n \leqslant \|u\|_{n+p}$). Соответствующие *среднее значение* $A \in U_n$ и корреляционный оператор B зависят, конечно, от n.

Отметим также, что случайный линейный функционал $\xi = \xi(u)$, $u \in U$ (в широком смысле) может быть по непрерывности продолжен на соответствующее гильбертово пространство U_n, в котором непрерывны среднее значение и корреляционный функционал; именно для любого элемента $v \in U_n$ существует предельная величина $\xi(v)$:

$$E[\xi(v) - \xi(u)]^2 \to 0 \text{ при } u \to v \quad (u \in U), \tag{24}$$

и случайная функция $\xi = \xi(v)$ параметра $v \in U_n$ с определенными таким образом значениями $\xi(v)$, $v \in U_n$, представляет собой случайный линейный (в широком смысле) функционал на гильбертовом пространстве U_n.

Случайный линейный непрерывный функционал $\xi = (u, \xi)$ называется *гауссовским*, если все его значения (u, ξ), $u \in U$, являются гауссовскими случайными величинами (иначе говоря, гауссовской является случайная функция $\xi = (u, \xi)$ параметра $u \in U$).

Рассмотрим гауссовский линейный непрерывный функционал $\xi = (u, \xi)$, $u \in U$. При каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \xi) = \lambda_1 (u_1, \xi) + \lambda_2 (u_2, \xi)$, каковы бы ни были $u_1, u_2 \in U$ и действительные числа λ_1, λ_2 и, кроме того,

$$[(u, \xi) - (v, \xi)] \to 0$$

при $u \to v$. Удовлетворяющая этим условиям гауссовская функция $\xi = (u, \xi)$ параметра $u \in U$ должна удовлетворять и условию (21) (см. теорему 1), т. е. гауссовский линейный непрерывный функционал $\xi = (u, \xi)$ одновременно является и случайным линейным функционалом в широком смысле (является непрерывным в среднем).

Обратимся к вопросу о том, когда существует гауссовский линейный непрерывный функционал $\xi \in X$, эквивалентный заданному гауссовскому линейному функционалу $\xi = \xi(u)$ в широком смысле, т. е. с вероятностью 1

$$\xi(u) = (u, \xi)$$

при каждом $u \in U$.

При рассмотрении этого вопроса, не ограничивая общности, можно считать, что среднее значение $A(u)$, $u \in U$, являющееся линейным непрерывным

[1] Непрерывность линейного функционала означает, что

$$A(u) \to A(v)$$

при $u \to v$. Это равносильно ограниченности линейного функционала на некоторой окрестности нуля: $|A(u)| \leqslant \varepsilon$ при $u \in U$. Но всякая окрестность нуля содержит некоторую окрестность типа (20), так что $|A(u)| \leqslant \varepsilon$ при $\|u\|_n < \delta$ (для некоторого n и δ). Следовательно, непрерывность линейного функционала на счетно-гильбертовом пространстве U означает его непрерывность в некотором гильбертовом пространстве U_n. Аналогично, непрерывность билинейного функционала означает, что

$$B(u_1, v_1) \to B(u, v)$$

при $u_1 \to u$, $v_1 \to v$. Это равносильно ограниченности билинейного функционала на некоторой окрестности нуля, так что $|B(u, v)| < \varepsilon$ при $\|u\|_n < \delta$, $\|v\|_n < \delta$ (для некоторых n и $\delta > 0$). Следовательно, непрерывность билинейного функционала на счетно-гильбертовом пространстве U означает его непрерывность в некотором гильбертовом пространстве U_n. Рассматриваемый билинейный функционал $B(u, v)$, $u, v \in U$, является непрерывным в к а ж д о м из гильбертовых пространств U_n, U_{n+1}, ... (ср. [9, стр. 98]).

функционалом на пространстве U, равно 0, так как вместе с (u, ξ), $u \in U$, гауссовским линейным непрерывным функционалом является и разность $(u, \xi) - A(u)$, $u \in U$.

Пусть $\xi = (u, \xi)$ — гауссовский линейный непрерывный функционал с нулевым средним значением на счетно-гильбертовом пространстве U: $\xi(\omega) = (u, \xi(\omega))$, $u \in U$ ($\xi(\omega)$ принадлежит при каждом $\omega \in \Omega$ пространству X всех линейных непрерывных функционалов $x = (u, x)$, $u \in U$, на пространстве U). Напомним, что $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, где X_n есть сопряженное пространство к гильбертову пространству U_n, которое получается пополнением пространства U по соответствующей норме $\| u \|_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Следовательно, с некоторой положительной вероятностью случайная величина $\xi \in X$ входит в некоторое гильбертово пространство X_n:

$$\xi(\omega) \in X_n \text{ и } (u, \xi(\omega)) = (u, \xi^{(n)}(\omega))_n \qquad (25).$$

при $\omega \in A$, $P(A) > 0$, где $\xi^{(n)}(\omega)$ — определенный элемент гильбертова пространства U_n. Не ограничивая общности, можно считать, что корреляционный оператор B рассматриваемого случайного линейного функционала $\xi = (u, \xi)$ определен на соответствующем пространстве U_n (см. формулу (23) и примечание к ней на стр. 19). Рассмотрим гауссовские величины $\xi(v)$, $v \in U_n$, определенные предельным соотношением (24). Для любой ортонормированной системы $v_1, v_2, \ldots$ в гильбертовом пространстве U_n соответствующие гауссовские величины $\xi_k = \xi(v_k)$; $k = 1, 2, \ldots$ с положительной вероятностью $P(A)$ сходятся к 0 при $k \to \infty$ для всех $\omega \in A$:

$$\xi_k(\omega) = (v_k, \xi^{(n)}(\omega))_n \to 0.$$

Следовательно, они сходятся и в среднем (см. теорему 1)

$$E\xi_k^2 = (Bv_k, v_k) \to 0.$$

Это означает, что корреляционный оператор B является вполне непрерывным[1]. Далее, выберем полную ортонормированную систему собственных элементов $v_1, v_2, \ldots$ этого вполне непрерывного оператора, отвечающих собственным значениям $\sigma^2_1, \sigma^2_2, \ldots$ Соответствующие величины $\xi_k = \xi(v)_k$; $k = 1, 2, \ldots$ являются некоррелированными:

$$E\xi_k\xi_j = (Bv_k, v_j) = \begin{cases} \sigma_k^2 & \text{при } j = k, \\ 0 & \text{при } j \neq k. \end{cases}$$

При этом, для всех $\omega \in A$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (v_k, \xi^{(n)}(\omega))^2 = \| \xi^{(n)} \|_n^2.$$

Гауссовские некоррелированные величины ξ_k $(k = 1, 2, \ldots)$. являются независимыми, и из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2$ с положительной вероятностью

---

[1] В противном случае вне некоторой ε-окрестности точки $\lambda = 0$ нашлось бы бесконечное число точек спектра (с учетом кратности) и, следовательно, бесконечное число инвариантных ортогональных подпространств, для каждого из элементов которых

$$(Bu, u) = \int_{|\lambda| > \varepsilon} \lambda d(I_\lambda u, u) \geqslant \varepsilon \| u \|^2;$$

здесь $B = \int \lambda dI_\lambda$ — спектральное представление симметрического оператора B.

$P(A)$ вытекает сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} E\xi_k^2$ (см. теорему 2), так что

$$\sum_{k=1}^{\infty} E\xi_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (Bv_k, v_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty.$$

Это означает *ядерность* корреляционного оператора B.

Пусть теперь $\xi = \xi(u)$ — случайный линейный функционал в широком смысле, имеющий нулевое среднее значение и ядерный[1] корреляционный оператор B в некотором гильбертовом пространстве U_n (см. формулу (23)). Пусть $v_1, v_2, \ldots$ некоторая полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве U_n. Как и раньше, положим[2] $\xi_k = \xi(v_k)$; $k = 1, 2, \ldots$ Имеем

$$E\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} E\xi_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} B(u_k, u_k) < \infty$$

и, следовательно, при почти всех $\omega \in \Omega$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2(\omega) < \infty.$$

Определим в гильбертовом пространстве U_n случайную величину $\xi^{(n)} = \xi^{(n)}(\omega)$ так, чтобы при почти всех $\omega \in \Omega$

$$\xi^{(n)}(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega) \cdot v_k. \tag{26}$$

Формула

$$\xi(\omega) = (u, \xi^{(n)}(\omega))_n, \quad u \in U \tag{27}$$

при каждом $\omega \in \Omega$ определяет некоторый линейный непрерывный функционал $\xi = (u, \xi^{(n)})_n$, $u \in U_n$ на счетно-гильбертовом пространстве U, такой что $\xi \in X_n$. Этот случайный линейный функционал $\xi \in X_n$ является эквивалентным исходному случайному линейному функционалу $\xi = \xi(u)$, $u \in V$ (в широком смысле), так как при условии (21) — линейности и непрерывности в среднем — для каждого фиксированного $u \in U$ с вероятностью 1

$$(u, \xi^{(n)})_n = \sum_{k=1}^{\infty} \xi(v_k)(u, v_k) = \lim_{m\to\infty} \xi\Big(\sum_{k=1}^{m} (u, v_k)\cdot v_k\Big) = \xi(u).$$

Таким образом, *для гауссовского линейного непрерывного функционала $\xi = \xi(u)$, $u \in U$ (в широком смысле), существует эквивалентный ему гауссовский линейный непрерывный функционал $\xi \in X$ тогда и только тогда, когда его корреляционный оператор B является ядерным (в некотором гильбертовом*

---

[1] Симметрический положительный линейный оператор B в гильбертовом пространстве называется ядерным, если он имеет конечный след:

$$\operatorname{Sp} B = \sum_{k=1}^{\infty} (Bv_k, v_k) < \infty,$$

где $v_1, v_2, \ldots$ — полная ортонормированная система.

[2] Можно выбрать элементы $v_k, \in U$; $k = 1, 2, \ldots$ или рассмотреть продолжение случайного линейного функционала $\xi = \xi(v)$ на всем гильбертовом пространстве U_n.

пространстве U_n). При этом гауссовский линейный непрерывный функционал $\xi \in X$ с вероятностью 1 принадлежит пространству $X_n \subseteq X$, сопряженному к соответствующему гильбертову пространству U_n, и может быть описан формулой (27).

Обратимся теперь к гауссовским мерам в функциональном пространстве X — пространстве всех линейных непрерывных функционалов $x = (u, x)$ на счетно-гильбертовом пространстве U.

Вероятностная мера P определена на σ-алгебре $\mathfrak{B}$, порожденной действительными функциями $\xi(u) = \xi(x, u)$ от $x \in X$ вида (8):

$$\xi(x, u) = (u, x), \ x \in X,$$

каждая из которых равна значению функционала $x \in X$ в соответствующей точке $u \in U$ (фиксированный для каждой из указанных величин параметр u пробегает пространство U). Эта мера является *гауссовской*, если гауссовским является случайный линейный непрерывный функционал $\xi = \xi(u)$, $u \in U$, непосредственно заданный на вероятностном функциональном пространстве $(X, \mathfrak{B}, P)$ (т. е. со значениями $\xi(u) = \xi(x, u)$ указанного выше вида); гауссовская мера P является распределением вероятностей этого гауссовского линейного непрерывного функционала $\xi \in X$.

Всякая вероятностная мера P в рассматриваемом линейном пространстве X однозначно определяется своим *характеристическим функционалом*

$$\varphi(u) = \int_X e^{i(u, x)} P(dx), \ u \in U. \tag{28}$$

Характеристический функционал гауссовской меры может быть представлен в виде

$$\varphi(u) = \exp\left\{i(u, A)_n - \frac{1}{2}(Bu, u)_n\right\}, \ u \in U, \tag{29}$$

где $A \in U_n$ — определенный элемент, а B — положительный ядерный оператор в некотором гильбертовом пространстве U_n.

Действительно, значение $\varphi(u)$ совпадает со значением характеристической функции гауссовской величины $\xi(u) = (u, x)$, $x \in X$, в точке 1, а указанные гауссовские величины имеют среднее значение $A(u)$, $u \in U$, и корреляционную функцию $B(u, v)$; $u, v \in U_n$, — представимые формулами (22) и (23).

Всякий функционал $\varphi(u)$, $u \in U$, описанного типа на счетно-гильбертовом пространстве U является характеристическим функционалом некоторого гауссовского распределения P (т. е. существует гауссовская мера P, с которой функционал связан соотношением (28)).

Действительно, всегда существует гауссовская случайная функция $\xi = \xi(u)$ параметра $u \in U$ со средним значением $A(u) = (u, a)_n$, $u \in U$, и корреляционной функцией $B(u, v) = (Bu, v)_n$; $u, v \in U$ (см. § 1); для нее существует эквивалентный гауссовский линейный непрерывный функционал $\xi \in X$, распределение вероятностей P которого и имеет характеристический функционал заданного вида.

Как было показано выше, всякий гауссовский линейный непрерывный функционал $\xi \in X$ с вероятностью 1 принадлежит пространству $X_n \subseteq X$, сопряженному некоторому гильбертову пространству U_n. Это означает, что *гауссовское распределение P с характеристическим функционалом вида* (29) *сосредоточено в соответствующем пространстве X_n*:

$$P(X_n) = 1, \tag{30}$$

где X_n — пространство всех линейных непрерывных функционалов на гильбертовом пространстве U_n.

Особое место среди счетно-гильбертовых пространств занимают ядерные пространства.

Счетно-гильбертово пространство U называется *ядерным*, если каждый билинейный функционал вида $B_m(u, v) = (u, v)_m$, $u, v \in U$, в некотором гильбертовом пространстве $U_n (n \geqslant m)$ задается ядерным оператором B_m^n:

$$(u, v)_m = (B_m^n u, v)_n; \quad u, v \in U \tag{31}$$

(здесь, как и раньше, U_n означает пополнение исходного пространства U по соответствующей норме $\| u \|_n$).

Всякий симметрический положительный линейный непрерывный функционал $B(u, v)$; $u, v \in U$, на ядерном пространстве U представим при некотором n формулой (23), где B есть ядерный оператор[1] *в соответствующем гильбертовом пространстве U_n.*

Таким образом, в случае ядерного пространства U имеют место следующие предложения.

Для всякого гауссовского линейного функционала $\xi = \xi(u)$, $u \in U$ (в широком смысле), существует эквивалентный ему гауссовский линейный функционал $\xi \in X$.

Всякий функционал вида (29), где B—симметрический положительный оператор в некотором гильбертовом пространстве U_n, является характеристическим функционалом некоторой гауссовской меры P в сопряженном к U пространстве X.

Более того, *если в отношении некоторого счетно-гильбертова пространства U верны высказанные выше предположения, то это пространство является ядерным*. Действительно, всегда существует гауссовский линейный непрерывный функционал (в широком смысле) с корреляционным функционалом $B_m(u, v) = (u, v)_m$, а если для него существует эквивалентный гауссовский линейный непрерывный функционал $\xi \in X$, то для $(u, v)_m$ должно иметь место представление (31) — должен существовать ядерный корреляционный оператор B_m^n.

Примером ядерного пространства[2] является совокупность U всех действительных бесконечно-дифференцируемых функций $u = u(t)$ на действительной прямой $-\infty < t < \infty$, обращающихся в 0 вне некоторого фиксированного отрезка $T = [a, b]$ с системой скалярных произведений вида

$$(u, v)_n = \int \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k u(t)}{dt^k} \frac{d^k v(t)}{dt^k} dt; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Линейные непрерывные функционалы $x = (u, v)$ на этом ядерном пространстве U называются *обобщенными функциями*. Случайные линейные непрерывные функционалы $\xi = (u, \xi)$, $u \in U$ на этом ядерном функциональном пространстве U называются *обобщенными случайными процессами*[3].

---

[1] Действительно, уже отмечалось, что билинейный функционал $B(u, v)$; $u, v \in U$, представим при некотором n формулой (23), в которой фигурирует ограниченный положительный оператор B; ядерность этого оператора означает, что для некоторой ортонормированной системы $u_1, u_2, \ldots \in U$ в гильбертовом пространстве U_n

$$\sum_{k=1}^{\infty} B(u_k, u_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (Bu_k, u_k) < \infty.$$

Но если симметрический билинейный функционал $B(u, v)$; $u, v \in U$ ограничен в некотором гильбертовом пространстве U_m, то можно взять соответствующее n, при котором скалярное произведение $(u, v)_m$ задается ядерным оператором B_m^n: $(u, v)_m = (B_m^n u, v)_n$. При этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} B(u_k, u_k) \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} (u_k, u_k)_m \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} (B_m^n u_k, u_k)_n < \infty.$$

[2] См. [9, стр. 106—108].

[3] См. [9, стр. 296 и далее].

Глава II

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ГАУССОВСКИЕ МЕРЫ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\xi = \xi(t)$ — гауссовская случайная функция параметра $t \in T$ со значениями $\xi(t) = \xi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, на произвольном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Иначе говоря, пусть $\xi(t) = \xi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, — некоторое семейство действительных функций на пространстве Ω (параметр t пробегает некоторое множество T) и P — некоторая гауссовская мера на σ-алгебре $\mathfrak{A}_\xi$, порождаемой всеми функциями $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ от $\omega \in \Omega$ (в дальнейшем будем обозначать эту σ-алгебру просто символом $\mathfrak{A}$).

Пусть P_1 — другая гауссовская мера на σ-алгебре $\mathfrak{A}$. Она называется абсолютно непрерывной относительно P, если $P_1(A) = 0$ для всякого $A \in \mathfrak{A}$, $P(A) = 0$; такая мера представима в виде

$$P_1(A) = \int_A p(\omega) P(d\omega), \quad A \in \mathfrak{A},$$

где $p(\omega) = P_1(d\omega) / P(d\omega)$, $\omega \in \Omega$ — определенная неотрицательная функция, называемая плотностью. Меры P_1 и P называются *эквивалентными*, если они взаимно абсолютно непрерывны; P_1 и P называются *ортогональными*, если они имеют непересекающиеся носители A_1 и A:

$$P(A_1) = 0, \quad P(A) = 1$$

$$P_1(A_1) = 1, \quad P_1(A) = 0.$$

В различных областях теории случайных процессов, теории информации, математической статистики, а также функционального анализа возникают вопросы о том, когда заданные меры P_1 и P являются эквивалентными (или ортогональными)? Как вычислить плотность $p(\omega) = P_1(d\omega) / P(d\omega)$ эквивалентных мер? Как явно описать непересекающиеся носители ортогональных мер?

Для иллюстрации сказанного остановимся лишь на одной задаче математической статистики.

Предположим, что наблюдается выборочная функция случайного процесса $\xi = \xi(t)$ вида

$$\xi(t) = \theta(t) + \Delta(t), \quad t \in T,$$

где $\theta(t)$ — неизвестная детерминированная составляющая, либо равная 0, либо равная некоторой известной функции $\theta_1(t)$ от $t \in T$, а $\Delta = \Delta(t)$ — случайный процесс с известным распределением вероятностей. Задача состоит в том, чтобы принять решение о том, «есть ли ненулевой сигнал» $\theta = \theta_1(t)$ или $\theta = 0$. При этом, скажем, задан уровень α, который не должна превосходить вероятность принять решение об отсутствии сигнала, когда на самом деле он есть.

Математическая статистика дает следующую схему решения. Именно, пусть P_1 и P_0— распределения вероятностей случайного процесса $\xi = \xi(t)$, отвечающие $\theta = \theta_1(t)$ и $\theta = 0$, причем они эквивалентны и плотность $p(x) = P_1(dx)/P_0(dx)$ такова, что для некоторого δ множество

$$A = \{x : p(x) \leqslant \delta\}$$

имеет вероятность $P_1(A)$, равную α. Решение об отсутствии сигнала $\theta = \theta_1(t)$ принимается тогда, когда наблюдаемая выборочная функция $x=\xi(\omega, t)$ от $t \in T$ попадает в указанное «критическое множество» $A \in X$. Такой способ является наилучшим в том смысле, что соответствующая вероятность $\beta = P_0(X \setminus A)$ принять решение $\theta = \theta_1(t)$, когда на самом деле $\theta = 0$, является минимальной. Для ортогональных распределений P_0 и P_1, сосредоточенных на некоторых непересекающихся множествах A и $X \setminus A$, с вероятностью 1 можно принять безошибочное решение: $\theta = 0$ при $x \in A$ и $\theta = \theta_1(t)$ при $x \in X \setminus A$.

Отметим, что при решении поставленных выше вопросов можно перейти от гауссовских мер P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ исходного пространства Ω (порожденной заданными величинами $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ от $\omega \in \Omega$) к соответствующим гауссовским распределениям в определенном функциональном пространстве $(X, \mathfrak{B})$, где σ-алгебра $\mathfrak{B}$ порождается «непосредственно заданными» величинами $\xi(t) = \xi(x, t)$ от $x \in X$ (см. формулы (3) и (8) гл. I). В частности, всегда можно перейти к распределениям вероятностей в пространстве $X = R^T$ всех действительных функций $x = x(t)$ от $t \in T$. При этом для всякой величины $\eta = \eta(x)$ на X, измеримой относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$, величина $\eta = \eta[\xi(\omega, \cdot)]$ на Ω будет измеримой относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}$, и, наоборот, всякая измеримая величина η на Ω представима (при почти всех $\omega \in \Omega$) в указанном виде, причем

$$\int_X \eta(x) P(dx) = \int_\Omega \eta[\xi(\omega, \cdot)] P(d\omega)$$

для любой интегрируемой величины η (здесь $P(dx)$ означает распределение вероятностей случайной функции $\xi(\omega, \cdot)=\xi(\omega, t)$ от $t \in T$ в соответствующем функциональном пространстве X, а $P(d\omega)$ — исходная вероятностная мера в пространстве Ω). В частности, если $p(x) = P_1(dx)/P(dx)$ — плотность распределений P_1 и P, то $p[\xi(\omega, \cdot)] = P_1(d\omega)/P(d\omega)$ — плотность исходных вероятностных мер на пространстве Ω:

$$P_1(B) = \int_B p(x) P(dx) = \int_A p[\xi(\omega; \cdot)] P(d\omega) = P_1(A)$$

для любого множества $A = \{\xi \in B\}$, $B \in \mathfrak{B}$ (см. формулы (3) и (5) гл. I).

Как известно, всякая гауссовская мера P задается своими средним значением $A(t)$, $t \in T$ и корреляционной функцией $B(s, t)$; $s, t \in T$ (см. п. 1 § 2 гл. I). Поставленные выше вопросы естественно попытаться решить исходя именно от заданных средних значений $A(t)$, $A_1(t)$ и корреляционных функций $B(s, t)$, $B_1(s, t)$ рассматриваемых гауссовских мер P, P_1. Очевидно, не ограничивая общность, можно считать, что $A(t) \equiv 0$, так как от величин $\xi(t)$, $t \in T$, всегда можно перейти к величинам $\xi(t) - A(t)$, $t \in T$. При таком переходе соответствующая σ-алгебра $\mathfrak{A}$ и сами меры P, P_1 на $\mathfrak{A}$, а также корреляционные функции $B(s, t)$, $B_1(s,t)$ остаются без изменения, а среднее значение меры P_1 становится равным

$$a(t) = A_1(t) - A(t), \quad t \in T$$

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Некоторые необходимые условия эквивалентности

Рассмотрим гауссовскую меру P на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, порожденной конечным числом заданных величин $\xi(k) = \xi(\omega, k)$; $k = 1,\ldots, n$ на пространстве Ω, т. е. образованной всеми множествами вида

$$A = \{[\xi(1),\ldots, \xi(n)] \in \Gamma\},$$

где Γ — борелевские множества n-мерного векторного пространства R^n. Пусть $A(k)$; $k = 1,\ldots, n$ — среднее значение и $B(k, j)$; $k, j = 1,\ldots, n$ — корреляционная функция величин $\xi(k)$; $k = 1\ldots, n$. Пусть корреляционная матрица $\{B(k, j)\}$ является невырожденной. Тогда

$$P(A) = \int\limits_{R^n} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

где $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ — плотность соответствующего гауссовского распределения в пространстве R^n векторов $x = (x_1,\ldots, x_n)$ — имеет вид

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} D^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{k,\, j=1}^{n} (x_k - A(k))(x_j - A(j))\, C_{kj}\right\};$$

здесь D означает определитель матрицы $\{B(k, j)\}$, а $\{C_{kj}\}$ — обратная матрица к $\{B(k, j)\}$.

Очевидно, гауссовская мера P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ является эквивалентной P тогда и только тогда, когда ее корреляционная матрица $\{B_1(k, j)\}$ также является невырожденной. При этом, если $\varphi_1(x_1,\ldots, x_n)$ — плотность соответствующего распределения в R^n (имеющая тот же вид, что и плотность $\varphi(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n)$, но со средним значением $A_1(k)$; $k = 1,\ldots, n$ и корреляционной матрицей $\{B_1(k, j)\}$), то плотность распределений есть

$$\frac{P_1(dx)}{P(dx)} = \frac{\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)}{\varphi(x_1, \ldots, x_n)}, \quad x \in R^n.$$

Следовательно, *плотность* $p(\omega) = P_1(d\omega) / P(d\,\omega)$ *есть*

$$p(\omega) = \frac{\varphi_1[\xi(\omega, 1), \ldots, \xi(\omega, n)]}{\varphi_2[\xi(\omega, 1), \ldots, \xi(\omega, n)]}$$

и может быть описана формулой

$$\log p(\omega) = \log \frac{D}{D_1} - \frac{1}{2} \sum_{j,\, k=1}^{n} [c_1(j, k)(\xi(\omega, j) - A_1(j))(\xi(\omega, k) -$$
$$- A_1(k)) - c(j, k)(\xi(\omega, j) - A(j))(\xi(\omega, k) - A(k))], \qquad (1)$$

где D и D_1 означают детерминанты матриц $\{B(j, k)\}$ и $\{B_1(j,,k)\}$; $k, j = 1, \ldots$ $\ldots, n$, а $\{c(j, k,)\}$ и $\{c_1(j,k\}$ — матрицы, обратные к $\{B(j,k)\}$ и $\{B_1(j,k)\}$ соответственно.

Пусть T — произвольное множество значений параметра t, $\xi(t) = \xi(\omega, t)$, $t \in T$,— заданные величины на пространстве Ω и P — гауссовская мера на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, порожденной всеми функциями $\xi(\omega, t)$ от $\omega \in \Omega$.

Удобно перейти к величинам $u = u(\omega)$ вида

$$u(\omega) = \sum_{k=1}^{n} c_k \xi(\omega, t_k)$$

($t_1, \ldots, t_n \in T$; $c_1, \ldots, c_n$ — действительные числа) и рассматривать совокупность U всех таких величин, как параметрическое множество, играющее ту же роль, что и исходное множество T. Соответствующее среднее значение

$$A(u) = Eu, \quad u \in U$$

есть линейный функционал на линейном пространстве, U, а корреляционная функция

$$B(u, v) = E[u - A(u)][v - A(v)], \; u, v \in U$$

— билинейный положительный функционал на U.

Пусть P_1 — другая гауссовская мера на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ с математическим ожиданием $A_1(u)$ и корреляционной функцией $B_1(u,v)$; $u, v \in U$. Как было указано во введении, не ограничивая общности, можно считать, что $A(u) = 0$; положим при этом

$$a(u) = A_1(u), \; u \in U.$$

Ясно, что *если гауссовские меры P и P_1 эквивалентны, то равенства*

$$B(u, u) = 0 \quad \text{и} \quad B_1(u, u) = 0 \tag{2}$$

могут выполняться лишь одновременно.

Действительно, в противном случае (скажем, когда $B(u, u) = 0$, но $B_1(u, u) \neq 0$)

$$P\{u = 0\} = 1, \; P_1\{u = 0\} = 0.$$

Обозначим U^0 подпространство в U(общее для эквивалентных мер P и P_1) всех величин $u \in U$, удовлетворяющих условию (2). Любая из величин $u \in U^0$ такова, что

$$P\{u = 0\} = 1, \; P_1\{u = a(u)\} = 1.$$

Следовательно, *если гауссовские меры P и P_1 эквивалентны, то*

$$a(u) = 0 \;\; \textit{при} \;\; u \in U^0. \tag{3}$$

В дальнейшем будем предполагать выполненными условия (2) и (3).

2. Условия эквивалентности, связанные с энтропией распределений

Пусть S — некоторое конечное множество, $S \subseteq T$, и $\mathfrak{A}(S)$ — σ-алгебра, порожденная величинами $\xi(t)$, $t \in S$. Пусть $U(S)$ — подпространство в U, натянутое на величины $\xi(t)$, $t \in T$. Можно так выбрать базис $u_1, \ldots, u_n$ в подпространстве $U(S)$, что

$$B(u_j, u_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = j, \\ 0 & \text{при } k \neq j; \end{cases}$$

$$B_1(u_j, u_k) = \begin{cases} \sigma_k^2 > 0 & \text{при } k = j, \\ 0 & \text{при } k \neq j \end{cases}$$

(напомним, что $B(u, v)$ и $B_1(u,v)$ — билинейные положительные функционалы).

Если исходные величины $\xi(t)$, $t \in S$, являются линейно независимыми (как элементы в пространстве U), то σ-алгебра $\mathfrak{A}(S)$ совпадает с совокупностью множеств $\widetilde{A}$ вида

$$\widetilde{A} = \{[u_1, \ldots, u_n] \in \Gamma\},$$

где Γ — борелевские множества n-мерного векторного пространства. Если же некоторые линейные комбинации величин $\xi(t) = \xi(\omega, t)$, $t \in S$, равны 0 (при почти всех[1] ω), то в σ-алгебре $\mathfrak{A}(S)$ могут быть множества нулевой

[1] В силу условия (2) величина $\eta = \eta(\omega)$ из пространства U равна 0 (при почти всех ω) лишь одновременно для P и P_1.

меры, отличные от множеств A указанного вида. Но легко видеть, что в любом случае для всякого $A \in \mathfrak{A}(S)$ найдется $\widetilde{A}$ такое, что

$$P(A \circ \widetilde{A}) = 0, \ P_1(A \circ \widetilde{A}) = 0.$$

(Здесь $A \circ \widetilde{A} = (A \setminus \widetilde{A})$ и $(\widetilde{A} \setminus A)$ означает *симметрическую разность* A и $\widetilde{A}$).

Очевидно, меры P и P_1 эквивалентны на σ-алгебре $\mathfrak{A}(S)$ тогда и только тогда, когда они эквивалентны на σ-алгебре $\widetilde{\mathfrak{A}}(S)$, порожденной указанными выше величинами $u_1, \dots, u_n$. Таким образом (см. п. 1),

Гауссовские меры P и P_1 эквивалентны на любой σ-алгебре $\mathfrak{A}(S)$ (S — конечно), причем соответствующая плотность $p_S(\omega) = P_1(d\omega) / P(d\omega)$ согласно формуле (1) *есть*

$$p_S(\omega) = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} \sigma_k} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{(u_k(\omega) - a_k)^2}{\sigma_k^2} - u_k^2(\omega)\right\}, \tag{4}$$

где $a_k = a(u_k)$, $k = 1, \dots, n$.

Легко подсчитать, что

$$\begin{aligned}
E \log p_S &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\log\frac{1}{\sigma_k^2} - \frac{1}{\sigma_k^2} + 1 - \frac{a_k^2}{\sigma_k^2}\right), \\
E_1 \log p_S &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-\log\sigma_k^2 + \sigma_k^2 - 1 + a_k^2), \\
D \log p_S &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-\sigma_k^2)^2 + 2a_k^2}{\sigma_k^4}, \\
D_1 \log p_S &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[(1-\sigma_k^2)^2 + 2\sigma_k^2 a_k^2],
\end{aligned} \tag{5}$$

где $E_1\eta$ означает математическое ожидание величины $\eta = \eta(\omega)$ относительно вероятностной меры P_1, а $D\eta$ и $D_1\eta$ означают дисперсии величины η относительно P и P_1 соответственно: $D\eta = E(\eta - E\eta)^2$ и $D_1\eta = E_1(\eta - E_1\eta)^2$.

Определим так называемое «*энтропийное расстояние*» r_S между гауссовскими мерами P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{A}(S)$ как

$$r_s = E[-\log p_S] + E_1 \log p_S.$$

Из формул (5) видно, что при условии, когда

$$\inf \sigma_k^2 = 0 \quad \text{или} \quad \sup \sigma_k^2 = \infty \tag{6}$$

(inf или sup берется по всем конечным $S \subseteq T$ и $k = 1, \dots, n$, соответствующим каждому S):

$$\sup_{S \subseteq T} r_S = \infty;$$

при условии же, когда[1] $\sigma_k^2 \asymp 1$, что равносильно соотношению

$$B(u, u) \asymp B_1(u, u) \tag{7}$$

---

[1] Соотношение $\alpha \asymp \beta$ означает, что переменные α и β таковы, что $c_1 \leqslant \frac{\alpha}{\beta} \leqslant c_2$ для некоторых положительных постоянных c_1, c_2; соотношение $\alpha \sim \beta$ означает, что $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$.

для всех $u \in U$, имеем

$$-\log\frac{1}{\sigma_k^2}+\frac{1}{\sigma_k^2}-1 \asymp -\log\sigma_k^2+\sigma_k^2-1 \asymp (1-\sigma_k^2)^2$$

и потому

$$E[-\log p_S] \asymp E_1\log p_S \asymp D\log p_S \asymp D_1\log p_S \asymp r_S \asymp$$
$$\asymp \sum_{k=1}^{n}[(1-\sigma_k^2)^2+a_k^2], \tag{8}$$

Лемма 1. *Если выполнено соотношение* $\sup\limits_{S\subseteq T} r_S=\infty$, то *гауссовские меры P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ ортогональны.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда выполняется одно из условий (6) (скажем, когда $\inf \sigma_k^2=0$). Тогда для некоторой последовательности величин u_{k_n}, $n=1,2,\ldots$ с дисперсиями $Du_{k_n}=1$ и $D_1u_{k_n}=\sigma_{k_n}^2$, $\sigma_{k_n}^2\to 0$ при $n\to\infty$ имеют место следующие предельные соотношения:

$$P\{|u_{n_k}-a_{n_k}|<\sqrt{\sigma_{k_n}}\}=\int\limits_{|x-a_{n_k}|<\sqrt{\sigma_{k_n}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\to 0$$

и

$$P_1\{|u_{n_k}-a_{n_k}|<\sqrt{\sigma_{k_n}}\}=\int\limits_{|x|<\frac{1}{\sqrt{\sigma_{k_n}}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\to 1.$$

Это говорит о том, что вероятностные меры P и P_1 ($P(\Omega)=P_1(\Omega)=1$) являются ортогональными. Аналогично устанавливается ортогональность этих мер и в случае, когда $\sup\sigma_k^2=\infty$.

Пусть теперь выполнено условие (7). Тогда для некоторой последовательности S_n $(n=1,2,\ldots)$ и множеств $A_n\in\mathfrak{A}(S_n)$ вида

$$A_n=\left\{\log p_n-E\log p_n\geqslant\frac{1}{2}r_n\right\}=\Omega\diagdown\left\{-\log p_n+E_1\log p_n\geqslant\frac{1}{2}r_n\right\}$$

($\log p_n$ означает логарифм плотности $p_n(\omega)=P_1(d\omega)\,/\,P(d\,\omega)$ на соответствующей σ-алгебре $\mathfrak{A}(S_n)$, $r_n=r_{S_n}$) имеют место следующие предельные соотношения:

$$P(A_n)\leqslant\frac{D\log p_n}{\frac{1}{4}r_n^2}\asymp\frac{1}{r_n}\to 0$$

$$P_1(A_n)=1-P_1(\Omega\diagdown A_n)\geqslant 1-\frac{D_1\log p_n}{\frac{1}{4}r_n^2}\asymp 1-\frac{1}{r_n}\to 1.$$

Это говорит о том, что вероятностные меры P и P_1 являются ортогональными. Лемма доказана.

Пусть P и P_1 — произвольные вероятностные меры на некотором измеримом пространстве $(\Omega,\mathfrak{A})$. Положим

$$r=E[-\log]+E_1\log p,\quad p(\omega)=\frac{P_1(d\omega)}{P(d\omega)}$$

в случае, когда P и P_1 эквивалентны, и $r=\infty$ — в противном случае.

Пусть $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ — некоторые σ-алгебры множеств, входящие в σ-алгебру $\mathfrak{A}$, и пусть $r(\mathfrak{A}')$ и $r(\mathfrak{A}'')$ означают энтропийное расстояние между вероятностными мерами P и P_1 на соответствующих σ-алгебрах $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$.

Лемма 2. *Энтропийное расстояние монотонно в том смысле, что*

$$r(\mathfrak{A}') \leqslant r(\mathfrak{A}'') \text{ при } \mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}''. \tag{9}$$

Доказательство. Будем считать меры P и P_1 эквивалентными, так как для неэквивалентных мер утверждение леммы тривиально. Обозначим $p' = p'(\omega)$ и $p'' = p''(\omega)$ плотности $P_1(d\omega) / P(d\omega)$ на соответствующих σ-алгебрах $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$. По определению,

$$P_1(A) = \int\limits_A p'(\omega) P(d\omega) = \int\limits_A p''(\omega) P(d\omega)$$

для любого множества $A \in \mathfrak{A}'$, что в терминах условных математических ожиданий можно переписать как

$$E(p'' / \mathfrak{A}') = p'.$$

Применяя к функции $[-\log x]$ известное неравенство для выпуклых функций [1], получаем

$$E(-\log p'' / \mathfrak{A}') \geqslant -\log p'$$

и

$$E(-\log p'') \geqslant E(-\log p').$$

Аналогичное неравенство имеет место и для математического ожидания $E_1 \log p = E_1(-\log 1/p)$. Лемма доказана.

Пусть T — произвольное множество значений параметра t; P и P_1 — произвольные вероятностные меры на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, порожденной заданными величинами $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ на пространстве Ω, $t \in T$; $\mathfrak{A}(S)$ — σ-алгебра, порожденная величинами $\xi(t)$, $t \in S$ $(S \subseteq T)$, и r_S — «энтропийное расстояние» между P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{A}(S)$.

Лемма 3. *Если*

$$\sup r_S < \infty, \tag{10}$$

где $\sup$ *берется по всем конечным множествам* $S \subseteq T$, *то меры* P и P_1 *эквивалентны на* σ-*алгебре* $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Предположим, например, что мера P_1 не является абсолютно непрерывной относительно P. Тогда найдется некоторая последовательность множества A_n, $n = 1, 2, \ldots$ такая, что

$$P(A_n) \to 0, \text{ но } P_1(A_n) \geqslant p > 0$$

при $n \to \infty$, Для любого множества $A \in \mathfrak{A}$ при всяком $\varepsilon > 0$ существуют такое конечное множество $S \subseteq T$ и множество $\tilde{A} \in \mathfrak{A}(S)$, что $P(A \circ \tilde{A}) \leqslant \varepsilon$, $P_1(A \circ \tilde{A}) \leqslant \varepsilon$ (см. формулу (7) гл. I). Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что каждое из множеств A_n входит в некоторую σ-алгебру $\mathfrak{A}(S_n)$, где S_n — некоторое конечное множество из T. Благодаря указанному выше свойству монотонности «энтропийного расстояния», выраженному неравенством (9), имеет место следующее неравенство:

$$\log \frac{P_1(A_n)}{P(A_n)} P_1(A_n) + \log \frac{1 - P_1(A_n)}{1 - P(A_n)} [1 - P_1(A_n)] \leqslant r_n.$$

Видно, что $r_n = r_{S_n} \to \infty$ при $n \to \infty$, а это противоречит условию (10). Таким образом, мера P_1 абсолютно непрерывна относительно P. Доказательство того, что мера P абсолютно непрерывна относительно P_1, совершенно аналогично.

Как следствие лемм 1 и 2 сформулируем следующий результат.

Теорема 1. *Гауссовские меры P и P_1 либо эквивалентны, либо ортогональны, причем они эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняется условие* (10).

[1] См. [21, стр. 37].

§ 3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГАУССОВСКИХ МЕР. ПРИМЕРЫ

1. Одно свойство гауссовских мер

Пусть P и P_1 — гауссовские меры на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ пространства Ω, порожденной заданными величинами $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ от $\omega \in \Omega$ (параметр t пробегает произвольное множество T) с математическими ожиданиями $A(t) = 0$, $A_1(t) = a(t)$, $t \in T$, и корреляционными функциями $B(s, t)$, $B_1(s, t)$; s, $t \in T$.

Если P_1^0 — гауссовская мера с нулевым математическим ожиданием и той же корреляционной функцией, что и P_1, то, как следует из теоремы 1 и соотношения (8), *меры P и P_1 эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны P и P_1^0, P_1^0 и P_1, причем для эквивалентных мер P и P_1 плотность $P_1(d\omega) / P(d\omega)$ есть произведение плотностей $P_1(d\omega) / P_1^0(d\omega)$ и $P_1^0(d\omega) / P(d\omega)$:*

$$\frac{P_1(d\omega)}{P(d\omega)} = \frac{P_1(d\omega)}{P_1^0(d\omega)} \frac{P_1^0(d\omega)}{P(d\omega)}.$$

Это говорит о том, что, не ограничивая общности, можно рассматривать два отдельных случая, когда корреляционные функции $B(s, t)$ и $B_1(s, t)$ совпадают, но произвольным является среднее значение $a(t)$, и когда среднее значение $a(t)$ равно 0, но произвольными являются корреляционные функции $B(s, t)$ и $B_1(s, t)$.

2. Эквивалентность гауссовских мер с различными средними значениями

Аналогично тому, как это было сделано ранее, перейдем от исходного семейства величин $\xi(t) = \xi(\omega, t)$, $t \in T$, к семейству величин $u = u(\omega)$, $u \in U$. Напомним, что U есть линейное пространство всех величин $u = u(\omega)$ вида

$$u(\omega) = \sum_{k=1}^{n} c_k \xi(\omega, t_k),$$

где $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные действительные коэффициенты; $t_1, \ldots, t_n \in T$.

Так же, как и раньше, будем предполагать, что среднее значение величины $u \in U$ относительно меры P равно 0; так же, как и ранее, сохраним обозначение $a(u)$ для среднего значения величин $u \in U$ относительно меры P_1:

$$a(u) = \int_{\Omega} u(\omega) P_1(d\omega), \quad u \in U.$$

Обозначим $\overline{U}$ гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(\omega) \cdot v(\omega) P(d\omega),$$

являющееся замыканием рассматриваемого линейного пространства U.

Теорема 2. *Гауссовские меры P и P_1 (с одинаковыми корреляционными функциями) эквивалентны тогда и только тогда, когда среднее значение $a(u)$, $u \in U$, является линейным непрерывным функционалом на линейном пространстве $U \subseteq \overline{U}$.*

Доказательство. Необходимость непрерывности линейного функционала $a(u)$ на U очевидна. В самом деле, если нарушается условие непрерывности, то функционал $a(u)$ в гильбертовом пространстве $\overline{U}$ является неограниченным, т. е. для некоторой последовательности величин $u_n \in U$, $\langle u_n, u_n\rangle = B(u_n, u_n) = 1$; $n = 1, 2, \ldots$ их математические ожидания $a_n = a(u_n)$ неограниченно возрастают: $a_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$, что ведет, например, к нарушению условия (10) (см. выражения (5) и (8)).

Если же среднее значение $a(u)$ является линейным непрерывным функционалом на U, то, как известно, имеется некоторый элемент $\eta \in \overline{U}$ такой, что

$$a(u) = \langle u, \eta\rangle, \; u \in U. \tag{11}$$

Согласно формулам (5), энтропийное расстояние r_s на любой из σ-алгебр $\mathfrak{A}(S)$, порожденных величинами $\xi(t) = \xi(\omega, t)$, $t \in S$, есть

$$r_S = 2\sum_{k=1}^{n} a_k^2,$$

где $a_k = \langle u_k, \eta\rangle$ и $u_1, \ldots, u_n$ — ортонормированная система величин в соответствующем подпространстве $U(S)$.

Очевидно,

$$\sup_{S\subseteq T} r_S = 2\sup\sum_{k=1}^{n}\langle u_k, \eta\rangle^2 = 2\langle\eta, \eta\rangle \tag{12}$$

и, согласно теореме 1, гауссовские меры P и P_1 эквивалентны, что и требовалось доказать.

Пусть $u_1, u_2, \ldots$ — ортонормированная система величин в гильбертовом пространстве $\overline{U}$ и

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k$$

$$\left(a_k = \langle u_k, \eta\rangle = a(u_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \langle\eta, \eta\rangle\right)$$

— разложение фигурирующей в формуле (11) величины $\eta = \eta(\omega)$. Для эквивалентных мер P и P_1 плотность $p(\omega) = P(d\omega) \,/\, P(d\omega)$ является пределом [1] соответствующих плотностей $p_n(\omega) = p_{S_n}(\omega)$, описываемых формулой (4) и отвечающих некоторой монотонной последовательности конечных множеств $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots$:

$$p(\omega) = \lim_{n\to\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[(u_k(\omega) - a_k)^2 - u_k^2(\omega)]\right\} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(\omega) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right\}. \tag{13}$$

Соотношение (11) выполняется при всех $u \in U$, если только оно выполняется для некоторой полной системы величин, например для $u = \xi(t)$, $t \in T$, и равносильно следующему интегральному представлению функции $a(t) = E_1\xi(t)$, $t \in T$:

$$a(t) = \int_{\Omega}\xi(\omega, t)\,\eta(\omega)\,P(d\omega), \; t \in T, \tag{14}$$

[1] См. [21, стр. 308, 296].

где $\eta = \eta(\omega)$ — указанная в соотношении (11) величина из пространства $\overline{U}$. Соотношение (14) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\eta = \eta(\omega)$, решение которого единственно в $\overline{U}$. Таким образом, имеет место следующее предложение.

Теорема 3. *Для эквивалентности гауссовских мер P и P_1 необходимо и достаточно, чтобы среднее значение $a(t)$, $t \in T$ допускало представление вида* (14);

плотность $p(\omega) = P_1(d\omega) / P(d\omega)$ может быть выражена следующим образом:

$$p(\omega) = De^{\eta(\omega)}, \tag{15}$$

где величина $\eta = \eta(\omega)$ определяется из уравнения (14), *а нормирующий множитель D определяется из условия*

$$\int_{\Omega} p(\omega) P(d\omega) = 1 \quad \left(D = e^{-\frac{1}{2}\langle\eta, \eta\rangle}\right).$$

Пример 1. *Независимые гауссовские величины.* Пусть (относительно вероятностной меры P) $\xi(k) = \xi(\omega, k)$, $k = 1, 2, \ldots$ — последовательность независимых гауссовских величин с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $\sigma^2(k) = D\xi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$ Пусть P_1 — другая вероятностная мера, относительно которой $\xi(k)$ также независимые гауссовские величины, имеющие те же самые дисперсии и математические ожидания $a(k)$, $k = 1, 2, \ldots$

В этом случае величины $\xi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, образуют ортогональную базу в гильбертовом пространстве $\overline{U}$ и формула (14) позволяет найти коэффициенты разложения величины $\eta \in \overline{U}$:

$$\eta(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi(\omega, k),$$

где

$$c_k = \frac{a(k)}{\sigma^2(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Видно, что

необходимое и достаточное условие эквивалентности гауссовских мер P и P_1 состоит в том, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a(k)}{\sigma(k)}\right]^2 < \infty.$$

При этом, величина $\eta = \eta(\omega)$ в формулах (14) *и* (15) *есть*

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(k)}{\sigma^2(k)} \xi(k).$$

Пример 2. *Стохастические гауссовские меры.* Пусть (относительно вероятностной меры P) $\xi(\Delta) = \xi(\omega, \Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}$ — стохастическая гауссовская мера [1] на некотором измеримом пространстве $(T, \mathfrak{B})$ с нулевым средним значением и корреляционной функцией вида $B(\Delta, \Delta_1) = m(\Delta \cap \Delta_1)$, где $m(\Delta)$ есть σ-конечная мера на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ пространства T. Пусть P_1 — другая вероятностная мера, относительно которой $\xi(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}$, также стохастическая гауссовская мера со средним значением $a(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}$, и той же самой корреляционной функцией.

[1] См. [21, стр. 383].

Соответствующее гильбертово пространство $\overline{U}$ состоит из всех величин, представимых стохастическим интегралом вида

$$u = \int_T \varphi(t)\,\xi(dt),$$

где действительная функция $\varphi(t)$, $t \in T$, такова, что

$$\int \varphi(t)^2\, m(dt) < \infty,$$

и $\overline{U}$ унитарно изоморфно ($u \leftrightarrow \varphi$) гильбертову пространству L^2 всех таких функций $\varphi(t)$, $t \in T$, со скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_T \varphi(t)\cdot\psi(t)\, m(dt).$$

При этом исходные величины $\xi(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}$, представимы в виде

$$\xi(\Delta) = \int_T \chi_\Delta(t)\,\xi(dt),$$

где $\chi_\Delta(t)$, $t \in T$, — *индикатор множества* Δ:

$$\chi_\Delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in \Delta, \\ 0 & \text{при } t \notin \Delta, \end{cases}$$

и $a(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}$, как функция на σ-алгебре $\mathfrak{B}$, является обобщенной (т. е. не обязательно положительной) мерой. Условие (14) эквивалентности гауссовских распределений P и P_1 означает, что существует такая функция $\varphi \in L^2$ и величина

$$\eta = \int_T \varphi(t)\,\xi(dt)$$

из пространства $\overline{U}$ такие, что

$$a(\Delta) = \langle \xi(\Delta), \eta \rangle = \int_T \chi_\Delta(t)\,\varphi(t)\, m(dt) = \int_\Delta \varphi(t)\, m(dt), \quad \Delta \in \mathfrak{B}.$$

Видно, что функция $\varphi = \varphi(t)$ является плотностью обобщенной меры $a(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}$, относительно меры $m\ (\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}$:

$$\varphi(t) = \frac{a(dt)}{m(dt)}.$$

Таким образом, *гауссовские меры P и P_1 эквивалентны тогда и только тогда, когда среднее значение $a(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}$, представляет собой обобщенную меру, абсолютно непрерывную относительно меры $m\ (\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}$, с интегрируемой в квадрате плотностью*

$$\int_T \left[\frac{a(dt)}{m(dt)}\right]^2 m(dt) < \infty;$$

при этом фигурирующая в формулах (14) *и* (15) *величина* $\eta = \eta(\omega)$ *имеет вид*:

$$\eta = \int_T \left[\frac{a(dt)}{m(dt)}\right] \xi(dt)$$

и

$$\langle \eta, \eta \rangle = \int_T \left[\frac{a(dt)}{m(dt)}\right]^2 m(dt).$$

Пример 3. *Винеровский процесс.* Пусть (относительно вероятностной меры P) $\xi(t) = \xi(\omega, t)$, $\xi(0) = 0$, — винеровский процесс на отрезке $T=[0,\tau]$ с нулевым средним значением и корреляционной функцией $B(s, t) = \min(s, t)$; $s, t \in T$. Пусть P_1 — другая вероятностная мера, относительно которой $\xi(t)$, $t \in T$, — также винеровский процесс со средним значением $a(t)$, $t \in T$, и той же самой корреляционной функцией.

Соответствующее гильбертово пространство $\overline{U}$ унитарно изоморфно гильбертову пространству L^2 всех действительных интегрируемых в квадрате функций $\varphi(t)$, $t \in T$, со скалярным произведением $\langle\varphi, \psi\rangle = \int\limits_T \varphi(t)\psi(t)\,dt$, причем каждый элемент $u \in \overline{U}$ представляется в виде стохастического интеграла

$$u = \int\limits_T \varphi(t)\,\xi(dt),$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — соответствующая величине $u = u(\omega)$ функция из L^2, а $\xi(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}$, стохастическая мера на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}$, определяемая на интервалах $\Delta = (s, t)$ как $\xi(\Delta) = \xi(t) - \xi(s)$ (ср. с предыдущим примером 2). Условие (14) эквивалентности мер P и P_1 означает, что

$$a(t) = \langle\xi(t), \eta\rangle = \int\limits_T \varphi(s)\,ds, \quad t \in T,$$

где

$$\xi(t) = \int\limits_T \chi_\Delta(s)\,d\xi(s), \ \Delta = [0, t]$$

и

$$\eta = \int\limits_T \varphi(s)\,\xi(ds)$$

(χ_Δ — индикатор множества Δ и φ — некоторая функция из L^2). Видно, что *эквивалентность P и P_1 имеет место тогда и только тогда, когда среднее значение $a(t)$, $t \in T$, является абсолютно непрерывной функцией на рассматриваемом отрезке $T = [0, \tau]$, причем ее производная $a'(t)$, $t \in T$, интегрируема в квадрате*:

$$\int\limits_T a'(t)^2\,dt < \infty.$$

При этом величина $\eta = \eta(\omega)$ в формулах (14) *и* (15) *есть*

$$\eta = \int\limits_T a'(t)\,\xi(dt)$$

и

$$\langle\eta, \eta\rangle = \int\limits_T a'(t)^2\,dt.$$

Пример 4. *Стохастические интегралы (линейные преобразования).* Пусть (относительно вероятностной меры P) $\xi(\Delta) = \xi(\omega, \Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}$, — стохастическая мера на некотором измеримом пространстве $(T, \mathfrak{B})$ с нулевым средним значением и корреляционной функцией $B(\Delta, \Delta_1) = m(\Delta \cap \Delta_1)$, где $m(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}$ — некоторая положительная мера на σ-алгебре $\mathfrak{B}$. Пусть P_1 — другая вероятностная мера, относительно которой $\xi(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}$, также является стохастической мерой со средним значением $a(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}$, и той же самой корреляционной функцией.

Рассмотрим эти меры на σ-алгебре $\mathfrak{A}(T)$, порожденной величинами вида

$$\xi(t) = \int_T k(s, t)\,\xi(ds), \quad t \in T,$$

где ядро $k(s, t)$ удовлетворяет условию

$$\iint k(s, t)^2\, m(ds)\, m(dt) < \infty.$$

Обозначим L^2 гильбертово пространство всех действительных интегрируемых в квадрате функций $\varphi(t)$, $t \in T$, со скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_T \varphi(t)\,\psi(t)\, m(dt).$$

Определим в этом гильбертовом пространстве L^2 интегральный оператор K с ядром $k(s, t)$:

$$K\varphi(s) = \int_T k(s, t)\,\varphi(t)\, m(dt), \quad \varphi \in L^2,$$

и рассмотрим величины вида

$$u = \int_T \varphi(t)\,\xi(t)\, m(dt) = \int_T [K\varphi(s)]\,\xi(ds).$$

Очевидно (см. выше, пример 2),

$$Eu^2 = \| K\varphi \|^2, \quad \varphi \in L^2,$$

где $\| K\varphi \|$ означает норму элемента $K\varphi \in L^2$.

Предположим, что *подпространство значений оператора K — множество всех элементов $K\varphi$, $\varphi \in L^2$, — в с ю д у плотно*[1] *в пространстве L^2*.

Тогда замкнутые линейные оболочки величин $\xi(t)$, $t \in T$, и величин $\xi(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}$, совпадают, так как всякая величина $\xi = \int_T k(s, t)\,\xi(ds)$ входит в замкнутую линейную оболочку величин $\xi(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}$, а для всякого $\Delta \in \mathfrak{B}$ величина $\xi(\Delta)$ совпадает с пределом некоторой последовательности величин $u_n = \int_T [K\varphi_n(s)]\,\xi(ds)$, где функции $K\varphi_n(t)$, $t \in T$, сходятся к индикатору $\chi_\Delta(t)$, $t \in T$, множества Δ. Таким образом, гауссовские меры P и P_1 эквивалентны на σ-алгебре $\mathfrak{A}(T)$ тогда и только тогда, когда они эквивалентны на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, порожденной величинами $\xi(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}$ (см. теоремы 1, 2). Очевидно, среднее значение $a(t) = E\,\xi(t)$, $t \in T$, есть

$$a(t) = \int_T k(s, t)\, a(dt),$$

и для *невырожденного оператора K* имеет место следующее предложение (см. выше, пример 2).

---

[1] Например, это условие выполняется, когда стохастическая мера $\xi(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}$, построена по винеровскому процессу (т. е. $m(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}$ есть лебеговская мера на отрезке $T = [0, \tau]$ — см. предыдущий пример 3), а

$$\xi(t) = \int_0^t k(s, t)\,\xi(ds), \quad t \in T,$$

где функция $k, (s, t)$, $k(t, t) \neq 0$, имеет непрерывную производную по t (в этом случае K является оператором Вольтерра — см., например, [29, стр. 157, 161]).

Для эквивалентности гауссовских мер P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{A}(T)$ необходимо и достаточно, чтобы среднее значение $a(t)$, $t \in T$, входило в область значений оператора K:

$$a(t) = \int_T k(s, t)\, \varphi(t)\, m(dt),$$

где $\varphi(t)$, $t \in T$, — некоторая функция из пространства L^2; эта функция совпадает с производной $a(dt) / m(dt)$, и фигурирующая в формулах (14) *и* (15) *величина $\eta = \eta(\omega)$ представима в виде*

$$\eta = \int_T [K^{-1} a(t)]\, \xi(dt)$$

или в виде предела

$$\eta = \lim_{n\to\infty} \int_T [K^{-1}\varphi_n(t)]\, \xi(t)\, dt,$$

где φ_n $(n = 1,2,\ldots)$ — любая последовательность функций из области значений оператора K, сходящаяся к функции $\varphi = K^{-1} a$; если $\varphi = K^{-1}a$ входит в область значений оператора K, то

$$\eta = \int_T [K^{-2} a(t)]\, \xi(t)\, dt.$$

Пример 5. *Стационарные гауссовские процессы.* Пусть (относительно вероятностной меры P) $\xi(t) = \xi(\omega, t)$, $-\infty < t < \infty$, — стационарный гауссовский процесс с нулевым средним значением и корреляционной функцией $B(s, t) = B(t - s)$:

$$B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} F(d\lambda),$$

где $F(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}$ — спектральная мера на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}$; пусть P_1 — другая вероятностная мера, относительно которой $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$, также гауссовский процесс со средним значением $a(t)$, $-\infty < t < \infty$, и той же самой корреляционной функцией.

Пусть

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, \Phi(d\lambda)$$

— спектральное разложение рассматриваемого процесса относительно вероятностной меры $P(\Phi(\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{B}$, — стохастическая спектральная мера [1] на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B})$.

Рассмотрим гауссовские меры P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{B}(T)$, порожденной величинами $\xi(t) = \xi(\omega, t)$, $t \in T$, где T — произвольное множество на действительной прямой. Соответствующее гильбертово пространство $\overline{U}$ унитарно изоморфно гильбертову пространству L_T^2 всех функций $\varphi = \varphi(\lambda)$ на действительной прямой, $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 F(d\lambda) < \infty$, со скалярным произведением

$$\langle\varphi, \psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, \overline{\psi(\lambda)}\, F(d\lambda),$$

[1] См. [30, стр. 25].

которое есть замыкание линейного пространства всех функций вида

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda t_k},$$

где $t_1, \ldots, t_n \in T$ и $c_1, \ldots c_n$ — действительные числа. Каждая величина $u \in \overline{U}$ представляется в виде стохастического интеграла

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, \Phi(d\lambda),$$

где $\varphi = \varphi(\lambda)$ — соответствующая величине $u = u(\omega)$ функция из пространства L_T^2. Условие (14) эквивалентности гауссовских мер P и P_1 означает, что существует величина $\eta \in \overline{U}$:

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, \Phi(d\lambda)$$

(где φ — определенная функция из L^2), такая что

$$a(t) = \langle \eta, \xi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \varphi(\lambda)\, F(d\lambda), \quad t \in T.$$

Указанное интегральное представление можно рассматривать как интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\varphi \in L_T^2$ при заданной «правой части» $a(t)$, $t \in T$ (в случае, когда $T = (0, \infty)$, это — спектральный аналог так называемых уравнений типа Винера — Хопфа).

Таким образом, *гауссовские меры P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{A}(T)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда среднее значение $a(t)$, $t \in T$, допускает интегральное представление вида*

$$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \varphi(\lambda)\, F(d\mu), \quad t \in T,$$

где $\varphi(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, *— функция из пространства L_T^2; при этом фигурирующая в формулах* (14) *и* (15) *величина* $\eta = \eta(\omega)$ *имеет вид*

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, \Phi(d\lambda)$$

и

$$\langle \eta, \eta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 F(d\lambda).$$

Предположим далее, что имеется *ограниченная* спектральная плотность $f(\lambda) = F(d\lambda)\,/\,d\lambda$.

Очевидно, если среднее значение $a(t)$, $t \in T$, допускает указанное выше интегральное представление, то она продолжается в функцию $a(t)$, $-\infty < t < \infty$, на всей действительной прямой, интегрируемую в квадрате и такую, что ее преобразование Фурье

$$\tilde{a}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} a(t)\, dt, \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widetilde{a}(\lambda)|^2}{f(\lambda)} d\lambda < \infty. \tag{16}$$

Например, такой функцией является

$$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \varphi(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda, \quad -\infty < t < \infty,$$

где $\varphi(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, — указанная выше функция из пространства L_T^2. С другой стороны, возможность описанного выше продолжения позволяет представить среднее значение $a(t)$, $t \in T$, в виде

$$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \widetilde{a}(\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \psi(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda, \quad t \in T,$$

где $\psi(\lambda) = \frac{\widetilde{a}(\lambda)}{f(\lambda)}$, $-\infty < \lambda < \infty$, — некоторая функция из гильбертова пространства $L^2 = L_R^2$ (R — вся действительная прямая), подпространством которого является описанное выше пространство $L_T{}^2$. Очевидно, для функции $\varphi(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$ ($\varphi \in L_T^2$), являющейся проекцией элемента $\psi \in L_R^2$ на подпространство L_T^2, выполняются соотношения

$$a(t) = \langle \psi(\lambda)\ e^{i\lambda t} \rangle = \langle \varphi(\lambda), e^{i\lambda t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \varphi(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda, \quad t \in T,$$

поскольку все функции $e^{i\lambda t}$ при $t \in T$ принадлежат подпространству L_T^2.

Таким образом, *для эквивалентности гауссовских мер P и P_1 на* σ-алгебре $\mathfrak{A}(T)$, *необходимо и достаточно, чтобы среднее значение $a(t)$, $t \in T$, допускало продолжение в функцию $a(t)$, $-\infty < t < \infty$, на всей действительной прямой, преобразование Фурье $\widetilde{a}(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, которой удовлетворяет условию* (16); *при этом фигурирующая в формулах* (14) *и* (15) *величина представима в виде*

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\widetilde{a}(\lambda)}{f(\lambda)}\right]^* \Phi(d\lambda),$$

где $\left[\frac{\widetilde{a}}{f}\right]^*$ означает проекцию элемента $\frac{\widetilde{a}}{f} \in L_R^2$ на подпространство L_T^2.

Отметим, что когда множество T есть вся действительная прямая ($T = R$), то функция $a(t)$, $t \in T$, уже задана при всех t, $-\infty < t < \infty$, и указанное выше условие дает очень простой критерий эквивалентности. Это условие позволяет также легко вывести следующий результат в случае спектральной плотности $f(\lambda)$ вида

$$f(\lambda) \asymp (1 + \lambda^2)^{-n}, \quad n \text{ — целое}$$

(в частности, в случае рациональной спектральной плотности). Именно, *для эквивалентности гауссовских мер P и P_1 на* σ-алгебре $\mathfrak{A}(T)$, T — *конечный интервал, необходимо и достаточно, чтобы n-я производная $a^{(n)}(t)$ среднего значения $a(t)$ была интегрируема в квадрате*:

$$\int_T [a^{(n)}(t)]^2\, dt < \infty.$$

В самом деле, при условии (16)

$$a(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\widetilde{a}(\lambda)\,d\lambda,$$

где

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2n}|\widetilde{a}(\lambda)|^2 d\lambda<\infty.$$

Очевидно, формула

$$a^{(n)}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(-i\lambda)^n e^{-i\lambda t}\widetilde{a}(\lambda)\,d\lambda$$

определяет n-ю производную функции $a(t)$. С другой стороны, если на конечном интервале T имеется интегрируемая в квадрате n-я производная $a^{(n)}(t)$, то функция $a(t)$ может быть продолжена на всю действительную прямую $-\infty<t<\infty$ таким образом, чтобы эта функция также имела интегрируемую в квадрате n-ю производную, причем $a(t)$ обращалась в 0 вне некоторого конечного интервала $T'\supseteq T$.

Если

$$\varphi(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T'} e^{i\lambda t}a^{(n)}(t)\,dt,$$

то после n-кратного интегрирования по частям получаем, что

$$\widetilde{a}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T'} e^{i\lambda t}a(t)\,dt=\frac{1}{(i\lambda)^n}\varphi(\lambda).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{a}(\lambda)|^2\lambda^{2n}d\lambda=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\lambda)|^2 d\lambda<\infty,$$

т. е. выполняется условие (16).

К рассмотренному выше типу принадлежат все рациональные спектральные плотности

$$f(\lambda)=\frac{|P(i\lambda)|^2}{|Q(i\lambda)|^2},$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — некоторые полиномы с действительными коэффициентами, имеющие все корни в левой полуплоскости. Как было только что установлено, для эквивалентности гауссовских распределений P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{A}(T)$, где $T=[0,\tau]$, необходимо и достаточно, чтобы математическое ожидание $a(t)$ (относительно вероятностной меры P_1) имело на интервале $(0,\tau)$ n-ю производную $a^{(n)}(t)$ такую, что

$$\int\limits_0^{\tau}[a^{(n)}(t)]^2 dt<\infty$$

(здесь $n=q-p$ есть разность степеней q и p полиномов $Q(i\lambda)$ и $P(i\lambda)$.

Величина $\eta(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)\,\Phi(d\lambda)$ в формулах (14) и (15) задается функцией $\varphi(\lambda) \in L_T^2$, которая есть решение следующего интегрального уравнения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\varphi(\lambda)\frac{|P(i\lambda)|^2}{|Q(i\lambda)|^2}\,d\lambda = a(t),\quad 0<t\leqslant\tau.$$

Это решение $\varphi(\lambda)$ является преобразованием Фурье обобщенной функции $y(t)$:

$$y(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right)Q\left(-\frac{d}{dt}\right)x(t),\quad -\infty<t<\infty,$$

где

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\varphi(\lambda)\frac{d\lambda}{|Q(i\lambda)|^2},\quad -\infty<t<\infty.$$

Указанная функция $x(t)$ при $0<t<\tau$ есть решение дифференциального уравнения

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)P\left(-\frac{d}{dt}\right)x(t) = a(t),$$

граничные значения которого определяются соотношениями:

$$Q\left(-\frac{d}{dt}\right)x^{(k)}(t) = 0 \text{ при } t\leqslant 0,$$

$$Q\left(\frac{d}{dt}\right)x^{(k)}(t) = 0 \text{ при } t\geqslant 0.$$

Обобщенная функция $y(t)$ вычисляется без особого труда: при $t<0$ и $t>\tau$ она равна 0, при $0<t<\tau$ задается обычной функцией $Q\left(\frac{d}{dt}\right)\cdot$ $\cdot Q\left(-\frac{d}{dt}\right)x(t)$, а на границе отрезка $0\leqslant t\leqslant\tau$ является линейной комбинацией δ-функций и их производных [1].

П р и м е р 6. *Измеримые гауссовские процессы.* Пусть (относительно вероятностной меры P) $\xi(t) = \xi(\omega, t)$, $t\in T$, — измеримый гауссовский процесс на отрезке $T=[0, \tau]$ с нулевым средним значением и непрерывной корреляционной функцией $B(s, t)$; $s, t\in T$. Пусть P_1 — другая вероятностная мера, относительно которой $\xi(t)$, $t\in T$, также гауссовский процесс со средним значением $a(t)$, $t\in T$, и той же самой корреляционной функцией $B(s, t)$; $s, t\in T$.

Рассмотрим гильбертово пространство L^2 всех действительных интегрируемых в квадрате функций $u=u(t)$ на отрезке $T=[0,\tau]$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_T u(t)\,v(t)\,dt.$$

Рассмотрим в этом пространстве оператор B с ядром $B(s, t)$; $s, t\in T$;

$$Bu(t) = \int_T B(s, t)\,u(s)\,ds,\quad t\in T.$$

Как известно, такой положительный оператор B является ядерным, причем если v_k $(k=1, 2,\ldots)$ — полная ортонормированная система его собственных

---

[1] См. [30, стр. 190—198].

функций с собственными значениями σ_k^2 ($k = 1, 2\ldots$), то

$$B(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 v_k(s) v_k(t); \quad s, t \in T,$$

где указанный ряд сходится равномерно [1].

Не ограничивая общности, можно считать, что выборочные функции $\xi(\omega) = \xi(\omega, t)$ от $t \in T$ входят в пространство L^2. Следовательно,

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \cdot v_k(t), \quad t \in T,$$

где

$$\eta_k = \int_T v_k(t)\, \xi(t)\, dt; \quad k = 1, 2, \ldots$$

— гауссовские величины из замкнутой линейной оболочки $\overline{U}$ величин $\xi(t)$, $t \in T$, и

$$\langle \eta_k, \eta_j \rangle = (Bv_k, v_j) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{при } j = k, \\ 0 & \text{при } j \neq k. \end{cases}$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k v_k(t)$ при каждом фиксированном $t \in T$ сходится в среднем квадратичном, так как

$$E\left[\sum_{m}^{n} \eta_k v_k(t)\right]^2 = \sum_{m}^{n} \sigma_k^2 v_k(t)^2 \to 0$$

при $m, n \to \infty$. Таким образом, указанные величины η_k ($k = 1, 2, \ldots$) образуют ортогональную базу в гильбертовом пространстве $\overline{U}$.

Условие (14) эквивалентности гауссовских мер P и P_1 означает существование величины $\eta \in \overline{U}$:

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \eta_k, \quad \langle \eta, \eta \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \sigma_k^2,$$

такой, что при всех $t \in T$

$$a(t) = \langle \xi(t), \eta \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_T B(s, t)\, v_k(s)\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(t),$$

где

$$a_k = c_k \sigma_k^2; \quad k = 1, \ldots \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k}{\sigma_k}\right]^2 < \infty\right).$$

Очевидно, что условие равносильно тому, что среднее значение $a(t)$, $t \in T$, входит в область значений оператора $B^{1/2}$:

$$a(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sigma_k} B^{1/2} v_k(t) = B^{1/2} u(t),$$

---

[1] См., например, [29, стр. 265].

где

$$u(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\sigma_k}v_k(t)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a_k}{\sigma_k}\right]^2<\infty\right).$$

При этом указанная выше величина $\eta\in\overline{U}$ есть

$$\eta=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sigma_k^2}\int_T v_k(t)\,\xi(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_T\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sigma_k}B^{-1/2}v_k\right]\xi(t)\,dt=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_T[B^{-1/2}u_n(t)]\,\xi(t)\,dt,$$

где

$$u_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sigma_k}v_k(t);\ n=1,2,\ldots$$

Таким образом, *для эквивалентности гауссовских мер P и P_1 необходимо и достаточно, чтобы среднее значение $a(t)$, $t\in T$, входило в область значений оператора $B^{1/2}$, при этом фигурирующая в формулах* (14) *и* (15) *величина $\eta\in\overline{U}$ есть*

$$\eta=\lim_{n\to\infty}\int_T[B^{-1/2}u_n(t)]\,\xi(t)\,dt,$$

где $u_n(t)$; $n=1,2,\ldots$ — последовательность функций из области значений оператора $B^{1/2}$, сходящаяся к функции $B^{-1/2}a(t)$; если среднее значение $a(t)$ входит в область значений оператора B, то

$$\eta=\int_T[B^{-1}a(t)]\,\xi(t)\,dt$$

(здесь $B^{-1/2}$ и B^{-1} означают операторы, обратные к операторам $B^{1/2}$ и B на подпространстве, порожденном собственными функциями с ненулевыми собственными значениями).

Пример 7. *Гауссовские линейные функционалы.* Пусть (относительно вероятностной меры P) $\xi(u)=\xi(\omega,u)$, $u\in U$, — гауссовский линейный функционал в широком смысле [1] на гильбертовом пространстве U с нулевым средним значением и корреляционным оператором B. Пусть P_1 — другая вероятностная мера, относительно которой $\xi(u)$, $u\in U$, также гауссовский линейный функционал со средним значением $a(u)=(u,a)$, $u\in U$, и тем же корреляционным оператором B.

Очевидно, гильбертово пространство $\overline{U}$ — замкнутая линейная оболочка величин $\xi(u)$, $u\in U$,— унитарно изоморфно пополнению гильбертова пространства U по скалярному произведению

$$\langle u,v\rangle=(Bu,v)$$

(при этом величинам $\xi(u)$ соответствуют элементы $u\in U$).

Предположим, что корреляционный оператор B является вполне непрерывным [2]. Пусть v_k $(k=1,2,\ldots)$ — полная ортонормированная система его собственных элементов с собственными значениями σ_k^2 $(k=1,2,\ldots)$. Очевидно, гауссовские величины $\xi_k=\xi(v_k)$; $k=1,2,\ldots$ образуют ортогональ-

[1] См. гл. I, § 3, п. 2.

[2] Напомним, что если имеется гауссовский линейный функционал $\xi\in U$, эквивалентный $\xi(u)$, $u\in U$, то оператор B является ядерным.

ную базу в гильбертовом пространстве $\overline{U}$ и всякий элемент $\eta \in \overline{U}$ представим в виде

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k,$$

где

$$c_k = \langle \eta, \xi_k \rangle, \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \sigma_k^2 = \langle \eta, \eta \rangle.$$

Для эквивалентности гауссовских мер P и P_1 необходимо и достаточно, чтобы среднее значение $a(u) = (u, a)$, $u \in U$ (где a — определенный элемент из U), было представимо в виде (см. условие (14))

$$a(u) = \langle \xi(u), \eta \rangle, \quad u \in U,$$

где $\eta \in \overline{U}$. Воспользовавшись разложением $\eta = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k$, имеем

$$\langle \xi(u), \eta \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \langle \xi(u), \xi_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (Bu, v_k) = \left(u, \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_k^2 \cdot v_k\right);$$

и поэтому условие (14) означает, что

$$(u, a) = \left(u, \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_k^2 \cdot v_k\right), \quad u \in U,$$

или

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k, \quad \text{где } a_k = c_k \sigma_k^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k}{\sigma_k}\right]^2 < \infty.$$

Это условие равносильно тому, что среднее значение $a \in U$ принадлежит области значений оператора $B^{1/2}$:

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sigma_k} B^{1/2} v_k = B^{1/2} u, \quad \text{где } u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sigma_k} v_k.$$

Таким образом, *для эквивалентности гауссовских мер P и P_1 необходимо и достаточно, чтобы среднее значение $a \in U$ входило в область значений оператора $B^{1/2}$; при этом фигурирующая в формулах* (14) *и* (15) *величина $\eta \in \overline{U}$ есть*

$$\eta = \lim_{n\to\infty} \xi(B^{-1/2} u_n),$$

где u_n, $n = 1, 2, \ldots$ — последовательность элементов из области значений оператора $B^{1/2}$, сходящаяся к элементу $u = B^{-1/2} a \in U$; если среднее значение a входит в область значений оператора B, то,

$$\eta = \xi(B^{-1} a)$$

(здесь $B^{-1/2}$ и B^{-1} означают операторы, обратные к операторам $B^{1/2}$ и B на подпространстве, порожденном собственными функциями с ненулевыми собственными значениями).

В заключение этого пункта рассмотрим два семейства гауссовских величин $\xi(t)$, $t \in T'$, и $\xi(t)$, $t \in T''$.

Обозначим $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ σ-алгебры, порожденные величинами $\xi(t)$, $t \in T'$, и $\xi(t)$, $t \in T''$; обозначим $\overline{U'}$ и $\overline{U''}$ их замкнутые линейные оболочки.

Вообще говоря, из эквивалентности гауссовских мер P и P_1 на каждой из σ-алгебр $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ еще не следует их эквивалентность на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, порожденной всеми величинами $\xi(t)$, $t \in T' \cup T''$.

Пусть

$$\rho = \sup |\langle u', u''\rangle| = \sup |B(u', u'')|,$$

где sup берется по всем величинам $u' \in U'$ и $u'' \in U''$ с единичной дисперсией: $B(u', u') = B(u'', u'') = 1$.

Теорема 4. *При $\rho < 1$ эквивалентные на σ-алгебрах $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ гауссовские меры P и P_1 будут эквивалентными и на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, объединяющей $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$. При этом, если $\rho = 0$, то плотность $p(\omega) = P_1(d\omega)/P(d\omega)$ этих мер на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ есть*

$$p(\omega) = p'(\omega) \cdot p''(\omega),$$

где p' и p'' — соответствующие плотности на $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$.

Доказательство. Согласно теореме 2, необходимым и достаточным условием эквивалентности P и P_1 является ограниченность линейного функционала $a(u)$, $u \in U$, — соответствующего среднего значения — на гильбертовом пространстве $\overline{U}$ (замкнутой линейной оболочке всех величин $\xi(t)$, $t \in T' \cup T''$). Очевидно, всякий элемент $u \in \overline{U}$ однозначно представим в виде

$$u = u' + u''; \ u' \in \overline{U}', \ u'' \in \overline{U}'',$$

причем

$$\|u\|^2 \asymp \|u'\|^2 + \|u''\|^2.$$

Следовательно,

$$a(u)^2 \leqslant 2[a(u')^2 + a(u'')^2] \leqslant$$

$$\leqslant C\,[\|u'\|^2 + \|u''\|^2] \leqslant C\,\|u\|^2,$$

так как по условию среднее значение является ограниченным линейным функционалом на каждом подпространстве U' и U''. Равенство же $\rho = 0$ означает независимость гауссовских величин $\xi(t)$, $t \in T'$, и $\xi(t)$, $t \in T''$, откуда и следует указанная в теореме формула для плотности (очевидная в отношении распределений вероятностей гауссовской случайной функции $\xi(t)$, $t \in T' \cup T''$).

3. Эквивалентность гауссовских мер с различными корреляционными функциями

Пусть P и P_1 — гауссовские меры на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, порожденной величинами $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ на пространстве Ω (параметр t пробегает множество T), имеющие нулевые средние значения и корреляционные функции $B(s, t)$ и $B_1(s, t)$; $s, t \in T$.

Так же, как и раньше, перейдем к линейному пространству U всех линейных комбинаций вида

$$u = \sum_k c_k \xi(t_k),$$

одновременно считая U параметрическим множеством (играющим ту же роль, что и T) и рассматривая уже корреляционные функции

$$B(u, v) = Eu \cdot v, \ B_1(u, v) = E_1 u \cdot v$$

как билинейные функционалы на пространстве U (см. п. 1 § 2).

Обозначим $\overline{U}_1$ гильбертово пространство величин $u = u(\omega)$ со скалярным произведением

$$\langle u, v\rangle_1 = \int\limits_{\Omega} u(\omega) v(\omega) P_1(d\omega),$$

так же как и пространство $\overline{U}$, являющееся замыканием линейного пространства U.

Пусть $u_\alpha = u_\alpha(\omega)$ — некоторая система величин из общего для $\overline{U}$ и $\overline{U}_1$ пространства U, линейная оболочка которых всюду плотна как в пространстве $\overline{U}$, так и в пространстве $\overline{U}_1$. Обозначим $\widetilde{\mathfrak{A}}$ σ-алгебру, порождаемую всеми величинами $u_\alpha = u_\alpha(\omega)$.

Л е м м а 4. *Гауссовские меры P и P_1 эквивалентны на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда они эквивалентны на σ-алгебре $\widetilde{\mathfrak{A}}$, причем в случае эквивалентности для любого множества $A \in \mathfrak{A}$ найдется множество $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathfrak{A}}$, такое что*

$$P(A \circ \widetilde{A}) = 0, \quad P_1(A \circ \widetilde{A}) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\widetilde{U}$ линейную оболочку величин $u_\alpha = u_\alpha(\omega)$.

Пусть P и P_1 эквивалентны на σ-алгебре $\widetilde{\mathfrak{A}}$. Необходимое для эквивалентности условие (7) выполняется не только на $\widetilde{U}$, но и на U, поскольку $\widetilde{U}$ всюду плотно в U. При условии же (7) для любой величины $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ найдется $\widetilde{\mathfrak{A}}$-измеримая величина $u = u(\omega)$, такая что $\xi(\omega, t) = u(\omega)$ почти всюду (как относительно P, так и относительно P_1). Отсюда следует, что для любого множества из $\mathfrak{A}$ вида $[\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)] \in \Gamma$, где $t_1, \ldots, t_n \in T$ и Γ — борелевское множество n-мерного векторного пространства, найдется множество $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathfrak{A}}$, такое что $P(A \circ \widetilde{A}) = 0$, $P_1(A \circ \widetilde{A}) = 0$. Очевидно, аналогичное множество $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ найдется и для любого множества A из σ-алгебры $\mathfrak{A}$, порождаемой множествами вида $[\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)] \in \Gamma$. Следовательно, эквивалентные на σ-алгебре $\widetilde{\mathfrak{A}}$ гауссовские меры P и P_1 будут эквивалентны также на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, причем плотность $p(\omega) = P_1(d\omega) / P(d\omega)$ этих мер на σ-алгебре $\widetilde{\mathfrak{A}}$ одновременно служит плотностью и на всей σ-алгебре $\mathfrak{A}$. Лемма доказана.

Рассмотрим линейный оператор B_1 из $\overline{U}$ в $\overline{U}_1$, определенный на пространстве U как

$$B_1 u = u, \quad u \in U.$$

Пусть B_1^* — линейный оператор из $\overline{U}_1$ в $\overline{U}$, сопряженный к B_1:

$$\langle B_1^* u, v\rangle = \langle u, B_1 v\rangle_1$$

для любых $u, v \in U$, и I — единичный оператор в пространстве $\overline{U}$.

Т е о р е м а 5. *Гауссовские меры P и P_1 эквивалентны тогда и только тогда, когда произведение $B_1^* B_1$ имеет ограниченный обратный оператор, а разность $I - B_1^* B_1$ является вполне непрерывным оператором, таким что полная система его ненулевых собственных значений $1 - \sigma_k^2$; $k = 1, 2, \ldots$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \sigma_k^2)^2 < \infty \tag{17}$$

(т. е. $I - B_1^* B_1$ есть оператор Гильберта — Шмидта). Плотность $p(\omega) =$

$= P_1(d\omega) / P(d\omega)$ *эквивалентных мер может быть представлена в виде*

$$p(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} \sigma_k} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{u_k(\omega)^2}{\sigma_k^2} - u_k(\omega)\right]\right\}, \tag{18}$$

где $u_k = u_k(\omega)$; $k = 1, 2, \ldots$ — *полная ортонормированная система собственных функций оператора* $I - B_1^* B_1$ *с ненулевыми собственными значениями* $1 - \sigma_k^2$; $k = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Пусть гауссовские меры P и P_1 эквивалентны. Тогда выполнено условие (7), которое означает, что

$$\langle B_1^* B_1 u, u\rangle \asymp \langle u, u\rangle, \quad u \in U.$$

Это говорит о том, что оператор $B_1^* B_1$ ограничен и имеет ограниченный обратный оператор. Рассмотрим спектральное представление положительного оператора $B_1^* B_1$:

$$B_1^* B_1 = \int_{c_1}^{c_2} \lambda I(d\lambda),$$

где $I(\Delta)$ — соответствующее семейство проекционных операторов в пространстве $\overline{U}$. Разобьем отрезок $[c_1, c_2]$ на произвольное конечное число интервалов $\Delta_k = [\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ и возьмем из каждого ненулевого подпространства $I(\Delta_k)\cdot\overline{U}$ по элементу u_k, $\langle u_k, u_k\rangle = 1$. Указанные элементы таковы, что

$$\langle (B_1^* B_1) u_j, u_k\rangle = \begin{cases} \sigma_k^2 > 0 & \text{при } j = k, \\ 0 & \text{при } j \neq k. \end{cases}$$

При всех разбиениях отрезка $[c_1, c_2]$ энтропийное расстояние r между гауссовскими мерами P и P_1 на σ-алгебре, порожденной соответствующими величинами $u_1, \ldots, u_n$, таково, что

$$r \asymp \sum_{k=1}^{n} (1 - \sigma_k^2)^2$$

(ср. (8)), где

$$\lambda_k \leqslant \sigma_k^2 \leqslant \lambda_{k+1}.$$

Из условий (10) немедленно вытекает, что оператор $B_1^* B$ имеет чисто дискретный спектр, причем отличные от 1 собственные значения $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$ удовлетворяют условию (17).

Предположим теперь, что выполнено условие (17), т. е. $I - B^*{}_1 B_1$ есть оператор Гильберта — Шмидта. Пусть $u_\alpha = u_\alpha(\omega)$ — ортонормированная система собственных элементов оператора $I - B_1^* B_1$ с собственными значениями $1 - \sigma_\alpha^2$ и пусть $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — σ-алгебра, порождаемая всеми величинами $u_\alpha = u_\alpha(\omega)$. В силу леммы 4 гауссовские меры P и P_1 эквивалентны на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, если они эквивалентны на σ-алгебре $\widetilde{\mathfrak{A}}$. Лишь не более чем счетное число значений $1 - \sigma_\alpha^2$ отличны от 0; пусть это будут $1 - \sigma_1^2$, $1 - \sigma_2^2, \ldots$ Для энтропийного расстояния r на σ-алгебре, порожденной величинами $u_k(\omega)$; $k = 1, \ldots, n$, имеет место соотношение

$$r \asymp \sum_{k=1}^{n} (1 - \sigma_k^2)^2,$$

где по условию $\sum_{k=1}^{\infty}(1-\sigma_k^2)^2<\infty$. Таким образом, выполнено условие (10) эквивалентности гауссовских мер P и P_1,

При этом, согласно формуле (4), плотность $p(\omega)=P_1(d\omega)/P(d\omega)$ есть (см. примечание на стр. 32)

$$p(\omega)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\sigma_k}\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{u_k^2(\omega)}{\sigma_k^2}-u_k^2(\omega)\right]\right\}.$$

Отметим, что если разность $I-B_1^*B_1$ представляет собой оператор Гильберта — Шмидта, то сам оператор $B_1^*B_1$ является ограниченным, причем он имеет ограниченный обратный оператор тогда и только тогда, когда является невырожденным: $(B_1^*B_1)u\neq 0$ при $u\neq 0$ $(u\in\overline{U})$.

Действительно, покажем, что *существование ограниченного оператора, обратного к оператору $B_1^*B_1$, равносильно тому, что разность $I-B_1^*B_1$ не имеет собственного значения, равного 1.*

В самом деле, поскольку оператор $B_1^*B_1$ является положительным, разность $I-B_1^*B_1$ такова, что

$$\delta=\sup_{\langle u,u\rangle=1}\langle I-B_1^*B_1u,\,u\rangle\leqslant 1.$$

Имеем

$$\langle u,\ u\rangle-\langle(B_1^*B_1)u,\ u\rangle\leqslant\delta\cdot\langle u,\ u\rangle,$$
$$\langle(B_1^*B_1)\ u,\ u\rangle\geqslant(1-\delta)\langle u,\ u\rangle.$$

Следовательно, при $\delta\neq 1$ существует ограниченный оператор $(B_1^*B_1)^{-1}$. С другой стороны, если 1 является собственным значением оператора $I-B_1^*B_1$, то 0 является собственным значением оператора $B_1^*B_1$, и, следовательно, обратный оператор $(B_1^*B)^{-1}$ не существует.

Напомним [1], что оператор A в гильбертовом пространстве $\overline{U}$ является оператором Гильберта—Шмидта тогда и только тогда, когда для некоторой полной ортонормированной системы u_k, $k=1,\ 2,\ \ldots$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|Au_k\|^2=\sum_{k,\,j=1}^{\infty}\langle Au_k,\ u_j\rangle^2<\infty.$$

Для оператора $A=I-B_1^*B_1$ скалярное произведение $\langle Au,\ v\rangle$ при любых $u,\ v\in U$ совпадает с разностью корреляционных функций

$$b(u,\ v)=B(u,\ v)-B_1(u,\ v),$$

так как по самому определению оператора B_1
$\langle[I-B_1^*B_1]u,\ v\rangle=\langle u,\ v\rangle-\langle B_1u,\ B_1v\rangle=B(u,\ v)-B_1(u,\ v);\ u,\ v\in U.$
Таким образом, *разность $I-B_1^*B_1$ является оператором Гильберта — Шмидта тогда и только тогда, когда для некоторой полной ортонормированной системы элементов $u_k\in U$; $k=1,\ 2,\ \ldots$ выполняется условие*

$$\sum_{k,\,j=1}^{\infty}b(u_k,\ u_j)^2<\infty. \tag{19}$$

[1] См., например, [9, стр. 47—50].

Отметим, что в этом условии вместо ортонормированной системы u_k $(k = 1, 2, \ldots)$ можно взять любой *безусловный базис* [1], т. е. полную систему элементов, для которых

$$\left\| \sum_k c_k u_k \right\|^2 \asymp \sum_k c_k^2$$

при любых действительных $c_1, c_2, \ldots$

Пример 8. *Эквивалентность гауссовских распределений в гильбертовом пространстве.* Пусть (относительно вероятностной меры P) $\xi(u) = \xi(\omega, u)$, $u \in U$,— гауссовский линейный непрерывный функционал на сепарабельном гильбертовом пространстве U:

$$\xi(u) = (u, \xi), \quad u \in U,$$

где $\xi \in U$ — гауссовская величина с нулевым средним значением и корреляционным оператором B. Пусть P_1 — другая вероятностная мера, относительно которой величина $\xi \in U$ также является гауссовской (с нулевым средним значением и корреляционным оператором B_1).

Гильбертово пространство $\overline{U}$ — замкнутая линейная оболочка величин $\xi(u) = (u, \xi)$, $u \in U$, унитарно изоморфно пополнению гильбертова пространства U по скалярному произведению

$$\langle u, v \rangle = (Bu, v);$$

при этом величинам $(u, \xi) \in \overline{U}$ соответствуют элементы $u \in U$. Для большей наглядности отождествим элементы $u \in U$ с соответствующими величинами (u, ξ).

Пусть v_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — полная ортонормированная система собственных величин корреляционного оператора B, отвечающих собственным числам λ_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Не ограничивая общности, можно считать оператор B невырожденным (т. е. $\lambda_k > 0$ при всех $k = 1, 2, \ldots$). Очевидно, величины $u_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} v_k$; $k = 1, 2, \ldots$, образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $\overline{U}$. При любых $u, v \in U$

$$\langle [I - B_1^* B_1] u, v \rangle = (Bu, v) - (B_1 u, v) = (B[I - B^{-1}B_1]u, v) =$$
$$= \langle [I - B^{-1}B_1]u, v \rangle,$$

так что фигурирующая в теореме 5 разность $I - B_1^* B_1$ совпадает с оператором $I - B^{-1}B_1$ в гильбертовом пространстве $\overline{U}$. Таким образом, *для эквивалентности гауссовских мер P и P_1 с нулевыми средними значениями и корреляционными операторами B и B_1 необходимо и достаточно, чтобы оператор $I - B^{-1}B_1$ был оператором Гильберта — Шмидта (в гильбертовом пространстве $\overline{U}$), все собственные значения которого отличны от* 1; *при этом плотность* $P_1(d\omega) / P(d\omega)$ *описывается формулой* (18), *в которой* u_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *— полная система его собственных величин с собственными значениями* $1 - \sigma_k^2$; $k = 1, 2, \ldots$

Вернемся к рассмотрению общей схемы. Обозначим $\overline{U \times U}$ линейную оболочку всех функций $u(\omega, \omega_1)$ от ω, ω_1 на произведении пространств $\Omega \times \Omega$ вида

$$u(\omega, \omega_1) = \sum_{j, k} c_{jk} \xi(\omega, s_j)\, \xi(\omega_1, t_k) \tag{20}$$

[1] См., например, [5].

(где s_i, $t_k \in T$ и c_{jk} — действительные числа), замкнутую относительно скалярного произведения

$$\langle u, v\rangle = \iint\limits_{\Omega\times\Omega} u(\omega, \omega_1)\cdot v(\omega, \omega_1) P(d\omega) \times P(d\omega_1).$$

Лемма 5. *Всякий оператор A (типа Гильберта—Шмидта) в гильбертовом пространстве $\overline{U}$ задается некоторым ядром* [1] $\eta(\omega, \omega_1)$ — *элементом гильбертова пространства* $\overline{U\times U}$:

$$Au(\omega) = \int\limits_{\Omega} \eta(\omega, \omega_1)\, u(\omega_1)\, P(d\omega_1), \quad \omega\in\Omega.$$

Всякий оператор A указанного вида является опрератором Гильберта — Шмидта.

Доказательство. Если функция $u = u(\omega)$ входит в пространство $\overline{U}$, т. е. является пределом линейных комбинаций вида $u_n(\omega) = \sum\limits_k c_k \xi(\omega, t_k)$, то произведение $u(\omega)\cdot v(\omega_1)$ таких функций входит в пространство $\overline{U\times U}$. В самом деле,

$$\iint [u(\omega)\cdot v(\omega_1) - u_n(\omega)\cdot v_n(\omega_1)]^2 P(d\omega)\cdot P(d\omega_1) \leqslant$$

$$\leqslant 2\iint [v(\omega_1)^2 |u(\omega) - u_n(\omega)|^2 + u_n(\omega)^2 |v(\omega_1) - v_n(w_1|^2] P(d\omega)\cdot P(d\omega_1) \leqslant$$

$$\leqslant c\int |u(\omega) - u_n(\omega)|^2 P(d\omega)\cdot \int |v(d\omega_1) - v_n(\omega_1)|^2 P(d\omega_1) \to 0$$

при $n\to\infty$. Пусть $v_k = v_k(\omega)$; $k = 1, 2, \ldots$ — полная ортонормированная система собственных элементов оператора A (оператора Гильберта — Шмидта) в гильбертовом пространстве $\overline{U}$ и λ_k ($k = 1, 2, \ldots$) — соответствующая система собственных значений: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < \infty$. Рассмотрим ряд

$$\eta(\omega, \omega_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k v_k(\omega)\cdot v_k(\omega_1).$$

Очевидно, функции $v_k(\omega)\cdot v_k(\omega_1)$ от (ω, ω_1) образуют ортонормированную систему в пространстве $\overline{U\times U}$ и указанный ряд определяет некоторую функцию $\eta(\omega, \omega_1) \in \overline{U\times U}$, поскольку $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < \infty$. При этом для любой функции $u = u(\omega) \in \overline{U}$:

$$u(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(\omega), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty,$$

имеет место следующее соотношение:

$$\int \eta(\omega, \omega_1)\, u(\omega)\, P(d\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda_k v_k(\omega_1) = Au(\omega_1),$$

т. е. оператор A задается ядром $\eta(\omega, \omega_1)$ из пространства $\overline{U\times U}$.

Далее, функции вида $u(\omega)\cdot v(\omega_1)$ образуют полную систему в гильбертовом пространстве $\overline{U\times U}$, и поэтому функции $v_k(\omega)\cdot v_j(\omega_1)$; $k, j = 1, 2, \ldots$

[1] Ср., например, [29, стр. 262].

образуют полную ортонормированную систему в этом пространстве. Следовательно, всякая функция $\eta(\omega, \omega_1)$ из пространства $\overline{U \times U}$ разлагается в ряд

$$\eta(\omega, \omega_1) = \sum_{k, j=1}^{\infty} c_{kj} v_k(\omega) v_j(\omega_1), \qquad \sum_{k, j=1}^{\infty} c_{kj}^2 < \infty.$$

Но если функция $\eta(\omega, \omega_1)$ симметрична: $\eta(\omega, \omega_1) = \eta(\omega_1, \omega)$ для почти всех (ω, ω_1), то

$$\eta(\omega, \omega_1) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(\omega) v_k(\omega_1), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty.$$

Очевидно, всякое симметричное ядро $\eta(\omega, \omega_1) \in \overline{U \times U}$ задает оператор Гильберта — Шмидта. Лемма доказана.

Как оператор Гильберта — Шмидта в гильбертовом пространстве $\overline{U}$, *разность* $I - B_1^* B_1$ *задается некоторым ядром* $\eta_0(\omega, \omega_1)$ — *элементом гильбертова пространства* $\overline{U \times U}$:

$$(I - B_1^* B_1) u(\omega) = \int_{\Omega} \eta_0(\omega, \omega_1) u(\omega_1) P(d\omega_1), \quad u \in \overline{V},$$

и собственные величины $u_k = u_k(\omega)$ *с собственными значениями* $1 - \sigma_k^2$, *фигурирующие в формуле* (18), *являются решением интегральных уравнений*

$$(1 - \sigma_k^2) u_k(\omega) = \int_{\Omega} \eta_0(\omega, \omega_1) u_k(\omega_1) P(d\omega_1); \quad k = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

Как элемент пространства $\overline{U \times U}$, ядро $\eta_0(\omega, \omega_1)$ однозначно определяется интегральным соотношением

$$b(s, t) = \iint_{\Omega \times \Omega} \xi(\omega, s) \xi(\omega_1, t) \eta_0(\omega, \omega_1) P(d\omega) \times P(d\omega_1), \tag{22}$$

где $b(s, t) = B(s, t) - B_1(s, t)$ есть разность исходных корреляционных функций $B(s, t)$ и $B_1(s, t)$, поскольку система всех величин $\xi(\omega, s) \cdot \xi(\omega_1, t)$ полна в пространстве $\overline{U \times U}$, а разность $b(s, t)$ равна скалярному произведению в гильбертовом пространстве $\overline{U}$ элементов

$$(I - B_1^* B_1) \xi(s) \text{ и } \xi(t); \; s, t \in T.$$

Резюмируя сказанное выше, сформулируем следующий результат.

Теорема 6. *Для эквивалентности гауссовских мер* P *и* P_1 *необходимо и достаточно, чтобы разность* $b(s, t) = B(s, t) - B_1(s, t)$ *корреляционных функций допускала интегральное представление типа* (22), *в котором ядро* $\eta_0(\omega, \omega_1)$ *не имеет равных* 1 *собственных значений (т. е. чисел* $(1 - \sigma_k^2)$, *удовлетворяющих интегральному соотношению* (21)).

Пример 9. *Эквивалентность винеровской меры.* Пусть (относительно вероятностной меры P) $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ — винеровский процесс на отрезке $T = [0, \tau]$ (см. пример 3). Пространство $\overline{U}$ унитарно изморфно пространству $L^2(T)$ всех действительных интегрируемых в квадрате функций $\varphi(t)$, $t \in T$, а пространство $\overline{U \times U}$ — аналогичному пространству $L^2(T \times T)$ всех функций $\varphi(s, t)$ от $(s, t) \in T \times T$, в котором скалярное произведение элементов φ и ψ есть

$$\int_0^{\tau} \int_0^{\tau} \varphi(s, t) \psi(s, t) \, ds \, dt.$$

При этом всякая величина $u \in \overline{U \times U}$ может быть представлена в виде стохастического интеграла

$$u = \int_0^\tau \int_0^\tau \varphi(s, t)\, \xi(ds) \times \xi(dt),$$

где $\varphi = \varphi(s, t)$ — соответствующая величине $u = u(\omega, \omega_1)$ функция из пространства $L^2(T \times T)$, а стохастическая мера определена на прямоугольниках $\Delta \times \Delta_1$ как произведение независимых величин $\xi(\omega, \Delta)$ и $\xi(\omega_1, \Delta_1)$ ($\xi(\Delta) = \xi(t) - \xi(s)$ есть приращение винеровского процесса на интервале $\Delta = (s, t)$). Пусть P_1 — другая вероятностная мера, относительно которой $\xi(t)$ — гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $B_1(s, t)$; $0 \leqslant s,\ t \leqslant \tau$.

По теореме 6 гауссовская мера P_1 эквивалентна винеровской мере P тогда и только тогда, когда разность $b(s, t) = B(s, t) - B_1(s, t)$ корреляционных функций $B(s, t) = \min(s, t)$ и $B_1(s, t)$ представима в виде

$$b(s, t) = \iint_{\Omega\times\Omega} \xi(\omega, s)\, \xi(\omega, t)\, \eta_0(\omega, \omega_1)\, P(d\omega) \times P(d\omega_1) =$$

$$= \int_0^s \int_0^t \varphi(s, t)\, ds\, dt, \quad 0 \leqslant s,\ t \leqslant \tau,$$

где

$$\xi(\omega, s) \cdot \xi(\omega_1, t) = \int_0^s \int_0^t \xi(ds) \times \xi(dt)$$

и

$$\eta_0(\omega, \omega_1) = \int_0^\tau \int_0^\tau \varphi(s, t)\, \xi(ds) \times \xi(dt).$$

Ясно, что это представление имеет место тогда и только тогда, когда *функция $b(s, t)$ имеет интегрируемую в квадрате производную* $\frac{\partial^2 b(s, t)}{\partial s\, \partial t}$, *точнее, когда*

$$b(s, t) = \int_0^s \int_0^t \frac{\partial^2 b(s, t)}{\partial s\, \partial t}\, ds\, dt, \quad \int_0^\tau \int_0^\tau \left[\frac{\partial^2 b(s, t)}{\partial s\, \partial t}\right]^2 ds\, dt < \infty.$$

Дополнительное условие эквивалентности состоит в том, что *у ядра* $\frac{\partial^2 b(s, t)}{\partial s\, dt}$, *задающего оператор Фредгольма в пространстве $L^2(T)$, нет равного 1 собственного значения.*

При этом, если $\varphi_k(t)$; $k = 1, 2, \ldots$ — собственные функции этого ядра с отличными от 0 собственными значениями $1 - \sigma_k^2$; $k = 1, 2, \ldots$, то фигурирующие в формулах (18) *и* (21) *величины $u_k = u_k(\omega)$ имеют вид*

$$u_k = \int_0^\tau \varphi_k(t)\, \xi(dt), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Пример 10. *Эквивалентность распределению гауссовского марковского процесса.* Пусть (относительно вероятностной меры P) $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ — гауссовский марковский процесс на отрезке $T = [0, \tau]$ с нулевым средним и непрерывной корреляционной функцией $B(s, t)$ ($B(t, t) \neq 0$). Свойство марковости означает, что для любых $s \leqslant u \leqslant t$ величины $\xi(s)$,

$(\hat{\xi}t) = \frac{B(t, u)}{B(u, u)} \xi(u)$ и $\xi(t)$ связаны соотношением

$$\langle \xi(t) - \hat{\xi}(t),\ \xi(s) \rangle = 0$$

или

$$B(s, t) - \frac{B(u, t)}{B(u, u)} B(s, u) = 0.$$

При $B(u, u) \equiv 1$ получаем следующее функциональное соотношение для функции $F(s, t) = \log B(s, t)$: (отметим, что $B(s, t) > 0$, так как $B(t, t) > 0$, $t \in T$):

$$F(s, t) = F(s, u) + F(u, t), \quad s \leqslant u \leqslant t.$$

Положив $F(t) = F(t, \tau)$, при $t \geqslant s$ имеем

$$B(s, t) = e^{F(s, t)} = e^{-(F(t) - F(s))}.$$

Но для марковского процесса $\xi = \xi(t)$ (с нормированной корреляционной функцией $B(u, u) \equiv 1$) значение $B(s, t)^2$ совпадает с нормой величины $\hat{\xi}(t)$ — проекции величины $\xi(t)$ на замкнутую линейную оболочку величин $\xi(u)$, $u \leqslant s$ (в гильбертовом пространстве $\overline{U}$). Следовательно, $B(s, t)$ есть монотонно неубывающая функция от $s \leqslant t$, и таким образом при любых $s, t \in T$

$$B(s, t) = e^{-|F(t) - F(s)|},$$

где $F(t)$ — некоторая монотонно неубывающая функция от t. В общем случае *корреляционная функция $B(s, t)$ стохастически непрерывного (см. теорему 1, гл. I) марковского гауссовского процесса представима в виде*

$$B(s, t) = \sqrt{B(s, s) \cdot B(t, t) \exp(-|F(t) - F(s)|)}$$

Будем считать, что $F(t)$ — строго монотонная, непрерывная функция от t. Непрерывная замена времени $t \to u$:

$$u = e^{2F(t)}$$

переводит исходный отрезок $T = [0, \tau]$ в отрезок $U = [e^{2F(0)}, e^{2F(\tau)}]$. Преобразование же

$$\eta(u) = \sqrt{\frac{u}{B[t(u), t(u)]}} \xi[t(u)],$$

где $t = t(u)$ есть функция, обратная к $u = e^{2F(t)}$, переводит исходный марковский процесс $\xi(t)$ на отрезке $[0, \tau]$ в винеровский процесс $\eta(u)$ на отрезке $[e^{2F(0)}, e^{2F(\tau)}]$:

$$E\eta(u)\eta(v) = \sqrt{uv}\, e^{-|\ln\sqrt{u} - \ln\sqrt{v}|} = \min_{u, v \in U}(u, v).$$

Если P_1 — вероятностная мера, относительно которой $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ — гауссовский процесс с нулевым средним и корреляционной функцией $B_1(s, t)$, то при переходе к величинам $\eta(u)$ корреляционная функция этой гауссовской меры P_1 будет

$$E_1\eta(u)\eta(v) = \frac{\sqrt{u \cdot v}}{\sqrt{B[t(u), t(u)] \cdot B[t(v), t(v)]}} B_1[t(u), t(v)].$$

Условия же эквивалентности гауссовских мер P и P_1 в терминах корреляционных функций $E\eta(u)\eta(v)$ и $E_1\eta(u)\eta(v)$ выведены в предыдущем примере 9.

Вернемся к рассмотрению общих гауссовских мер с нулевыми математическими ожиданиями. Рассмотрим гильбертово пространство $\overline{U \times U_1}$ —

замыкание всех описываемых формулой (20) функций $u(\omega, \omega_1)$ относительно скалярного произведения

$$\langle u, v\rangle = \iint_{\Omega\times\Omega} u(\omega, \omega_1) P(d\omega) \times P_1(d\omega_1).$$

Теорема 7. *Гауссовские меры P и P_1 эквивалентны тогда и только тогда, когда разность $b(s, t) = B(s, t) - B_1(s, t)$ допускает интегральное представление вида* [1]

$$b(s, t) = \iint_{\Omega\times\Omega} \xi(\omega, s)\, \xi(\omega_1, t)\, \eta(\omega, \omega_1) P(d\omega) \times P_1(d\omega_1), \quad s, t \in T, \tag{23}$$

где $\eta = \eta(\omega, \omega_1) \in \overline{U \times U_1}$. Плотность $p(\omega) = P_1(d\omega)/P(d\omega)$ эквивалентных мер может быть описана формулой

$$p(\omega) = De^{-\frac{1}{2}[\eta(\omega, \omega) - E\eta]} \tag{24}$$

для почти всех $\omega \in \Omega$, где D — нормирующий множитель, определяемый из условия $\int_\Omega p(\omega) P(d\omega) = 1$.

Отметим, что в сравнении с теоремой 6 здесь отсутствует требование невырожденности оператора $B_1^* B_1$ (равносильное тому, что ядро $\eta_0(\omega, \omega_1)$ не имеет равного 1 собственного значения). В теореме 6 это требование не может быть снято [2].

Отметим также, что формула (24) нуждается в дополнительных объяснениях, поскольку от функции $\eta(\omega, \omega_1)$ пары переменных (ω, ω_1), определенной почти всюду относительно произведения мер $P \times P_1$, нельзя непосредственно перейти к функции $\eta(\omega, \omega)$ на «диагонали» $\omega_1 = \omega$.

Наряду с пространством $\overline{U \times U_1}$ рассмотрим гильбертово пространство $\overline{U^2}$ — замыкание всех величин вида

$$u(\omega, \omega) - Eu \tag{25}$$

(где $u(\omega, \omega)$ получается из описываемых формулой (20) величин $u(\omega, \omega_1)$ подстановкой ω вместо ω_1. Eu — математическое ожидание) со скалярным произведением

$$(u - Eu,\ v - Ev) = Eu\cdot v - Eu\cdot Ev.$$

Указанные величины $u(\omega, \omega) - Eu$ будем считать представленными в симметричной форме с коэффициентами $c_{jk} = c_{kj}$ (см. формулу (20)). Рассмотрим в пространстве $\overline{U \times U_1}$ подпространство всех «симметричных величин»

---

[1] Соотношение (23) можно рассматривать как уравнение относительно неизвестной величины $\eta = \eta(\omega, \omega_1)$; оно может иметь лишь единственное решение $\eta \in \overline{U \times U_1}$.

[2] Пусть (относительно вероятностной меры P) $\xi(t) = \xi(\omega, t)$, $t \in T$ — произвольное семейство гауссовских величин. Пусть $\overline{U}$ — соответствующее гильбертово пространство величин $u = u(\omega)$ (замкнутая линейная оболочка величин $\xi(t)$, $t \in T$). Корреляционная функция $B(u, v)$ есть

$$B(u, v) = \langle u, v\rangle; \quad u, v \in \overline{U}.$$

Пусть A — произвольный оператор Гильберта — Шмидта в гильбертовом пространстве $\overline{U}$ (в частности, A может иметь собственные значения, равные 1), такой лишь, что $\|A\| \leqslant 1$. Тогда

$$B_1(u, v) = B(u, v) - b(u, v); \quad u, v \in \overline{U},$$

где $b(u, v) = \langle Au, v\rangle$ есть положительный линейный функционал на пространстве $\overline{U}$. Всегда существуют гауссовские распределения вероятностей P и P_1 с корреляционными функциями $B(u, v)$ и $B_1(u, v)$. Они эквивалентны тогда и только тогда, когда оператор A не имеет собственных значений, равных 1.

$u(\omega, \omega_1) : u(\omega, \omega_1) = u(\omega_1, \omega)$ — замкнутую линейную оболочку всех величин вида

$$u(\omega, \omega_1) = \sum_{j, k=1}^{n} c_{jk} \xi(\omega, t_j) \xi(\omega_1, t_k), \tag{26}$$

где

$$c_{jk} = c_{kj};\ j, k = 1, \ldots, n.$$

Между величинами $u(\omega, \omega_1)$ этого подпространства и симметризованными величинами $u(\omega, \omega) - Eu$ имеется взаимно однозначное соответствие;

$$u(\omega, \omega_1) \leftrightarrow u(\omega, \omega) - Eu,$$

при котором

$$\langle u, u \rangle \asymp (u - Eu, u - Eu). \tag{27}$$

В самом деле, при условии (23)

$$E\left[\sum_{k=1}^{n} c_k \xi(t_k)\right]^2 - E_1\left[\sum_{k=1}^{n} c_k \xi(t_k)\right]^2 = \sum_{j, k=1}^{n} c_j c_k b(t_k, t_j) =$$

$$= \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \left[\sum_{k=1}^{n} c_k \xi(\omega, t_k)\right]\left[\sum_{k=1}^{n} c_k \xi(\omega_1, t_k)\right] \eta(\omega, \omega_1) P(d\omega) \times P_1(d\omega_1) \leqslant$$

$$\leqslant \left\{E\left[\sum_{k=1}^{n} c_k \xi(t_k)\right]^2\right\}^{1/2} \left\{E_1\left[\sum_{k=1}^{n} c_k \xi(t_k)\right]^2\right\}^{1/2} \left[\iint\limits_{\Omega\times\Omega} \eta^2(\omega, \omega_1) P(d\omega) \times P_1(d\omega_1)\right]^2,$$

откуда видно, что если $E\left[\sum_{k=1}^{n} c_k \xi(t_k)\right]^2 \to 0$, то также $E_1\left[\sum_{k=1}^{n} c_k \xi(t_k)\right]^2 \to 0$ и наоборот. Это говорит о том, что при условии (23) выполнено и условие (7), согласно которому

$$E\left[\sum_{k=1}^{n} c_k \xi(t_k)\right]^2 \asymp E_1\left[\sum_{k=1}^{n} c_k \xi(t_k)\right]^2.$$

Следовательно, для любой величины вида (26)

$$\langle u, u \rangle = \int\limits_{\Omega} E_1\left[\sum_{j, k=1}^{n} c_{jk} \xi(\omega, t_j) \xi(\omega_1, t_k)\right]^2 P(d\omega) \asymp$$

$$\asymp \int\limits_{\Omega} E\left[\sum_{j, k=1}^{n} c_{jk} \xi(\omega, t_j) \xi(\omega_1, t_k)\right]^2 P(d\omega) = \sum_{j, k=1}^{n} \sum_{l, m=1}^{n} c_{jk} c_{lm} B(t_j, t_l) \cdot B(t_k, t_m).$$

В то же время, как легко подсчитать, для соответствующей величины вида (25) при $c_{jk} = c_{kj}$; $j, k = 1, \ldots, n$, имеем

$$(u - Eu, u - Eu) = 2 \sum_{j, k=1} \sum_{l, m=1} c_{jk} c_{lm} B(t_j, t_l) B(t_k, t_m).$$

Видно, что соотношение (27) действительно имеет место.

Удовлетворяющая уравнению (23) *величина* $\eta(\omega, \omega_1)$ *является симметричной и ей соответствует величина* $\eta(\omega, \omega) - E\eta \in \bar{U}^2$; *она-то и фигурирует в формуле* (24).

Доказательство теоремы 7. Как было показано выше, если имеет место интегральное представление (23), то выполняется и необходимое для эквивалентности гауссовских мер P и P_1 условие (7), при котором P и P_1 являются эквивалентными тогда и только тогда, когда (см. леммы 1, 2 и соотношение (8))

$$\sup_{S\subseteq T} D\log p_S < \infty,$$

где $p_S(\omega) = P_1(d\omega)/P(d\omega)$ есть плотность гауссовских мер P и P_1, рассматриваемых на σ-алгебре $\mathfrak{A}(S)$, порожденной конечным числом величин $\xi(t)$, $t\in S$. Не ограничивая общности, можно рассматривать лишь такие конечные множества S, для которых величины $\xi(t)$, $t\in S$, являются линейно независимыми. Тогда, как видно из формулы (1), величина $\eta_S(\omega,\omega) = -2\left[\log p_S(\omega) - \log\frac{D}{D_1}\right]$ может быть представлена в виде

$$\eta_S(\omega,\omega) = \sum_{s,\,t\in S} c(s,t)\,\xi(\omega,s)\,\xi(\omega,t),$$

где $\{c(s,t)\} = \{C_1(s,t)\} - \{C(s,t)\}$; $\{C(s,t)\}$ и $\{C_1(s,t)\}$ — матрицы, обратные к корреляционным матрицам $\{B(s,t)\}$ и $\{B_1(s,t)\}$; $s,t\in S$, с определителями D и D_1. Величине $\eta_S(\omega,\omega)$ соответствует симметричная величина $\eta_S(\omega,\omega_1)$ из пространства $\overline{U\times U_1}$:

$$\eta_S(\omega,\omega_1) = \sum_{s,\,t\in S} c(s,t)\,\xi(\omega,s)\,\xi(\omega_1,t).$$

В силу соотношения (27)

$$D\log p_S \asymp (\eta_S - E\eta_S,\ \eta_S - E\eta_S) \asymp \langle\eta_S,\eta_S\rangle,$$

так что необходимое и достаточное условие эквивалентности состоит в том, что

$$\sigma^2 = \sup_{S\subseteq T}\langle\eta_S,\eta_S\rangle < \infty. \tag{28}$$

Легко проверить, что величина $\eta_S(\omega,\omega_1)$ при всех $s,t\in S$, $S\subseteq T$, удовлетворяет уравнению

$$b(s,t) = \iint_{\Omega\times\Omega} \xi(\omega,s)\,\xi(\omega_1,t)\,\eta_S(\omega,\omega_1)\,P(d\omega)\,P_1(d\omega_1).$$

Отсюда видно, что для любой величины $u(\omega,\omega_1)\in\overline{U\times U_1}$, выражающейся формулой (20), имеет место неравенство

$$\left[\sum_{j,\,k=1}^{n} c_{jk}\,b(s_j,t_k)\right]^2 \leqslant \langle u,u\rangle\langle\eta_S,\eta_S\rangle \leqslant \sigma^2\langle u,u\rangle.$$

Это неравенство показывает, что в гильбертовом пространстве $\overline{U\times U_1}$ существует линейный непрерывный функционал $b\{u\} = \langle u,\eta\rangle$ (где η — некоторый фиксированный элемент из $\overline{U\times U_1}$), на всех элементах $u = \xi(\omega,s)\,\xi(\omega_1,t)$ принимающий заданные значения $b\{u\} = b(s,t)$; $s,t\in T$. При этом соответствующая величина $\eta = \eta(\omega,\omega_1)$ из рассматриваемого пространства $\overline{U\times U_1}$ такова, что каждая из величин $\eta_S(\omega,\omega_1)$ совпадает с проекцией величины η на подпространство $U\times U_1(S)$ — линейную оболочку величин $u = \xi(\omega,s)\,\xi(\omega_1,t)$; $s,t\in S$, так что в свою очередь, если существует описанного типа линейный непрерывный функционал $b\{u\} = \langle u,\eta\rangle$, то $\langle\eta_S,\eta_S\rangle \leqslant \eta,\eta\rangle$ и выполнено условие (28). Само же интегральное представление (23) выражает собой факт существования линейного непрерывного функционала $b\{u\} = \langle u,\eta\rangle$, принимающего на элементах $u = \xi(\omega,s)\,\xi(\omega_1,t)$ заданные значения $b\{u\} =$

$= b(s, t)$; $s, t \in T$. Итак, доказано, что условие (23) необходимо и достаточно для эквивалентности P и P_1.

Далее, пусть гауссовские меры P и P_1 эквивалентны, так что существует указанный выше линейный функционал $b\{u\} = \langle u, \eta \rangle$. Как уже указывалось ранее[1], для любой последовательности конечных множеств $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots$ при почти всех ω существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \log p_n(\omega), \text{ где } p_n = p_{S_n}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} E \log p_n.$$

Если величины $\eta_n = \eta_{S_n}$ удовлетворяют предельному соотношению $\lim\limits_{n\to\infty} \langle \eta_n, \eta_n \rangle = \sigma^2$, то одновременно существуют пределы (см. формулу (28) и ниже)

$$\lim_{n\to\infty} [\eta_n(\omega, \omega) - E\eta_n] = [\eta(\omega, \omega) - E\eta], \quad \lim_{n\to\infty} \eta_n(\omega, \omega_1) = \eta(\omega, \omega_1),$$

где имеется в виду сходимость в соответствующих пространствах $\overline{U^2}$ и $\overline{U \times U_1}$. Из соотношения (27) вытекает, что

$$\eta(\omega, \omega_1) \leftrightarrow [\eta(\omega, \omega) - E\eta]$$

и что

$$\log p(\omega) = \lim_{n\to\infty} E \log p_n + \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} [\eta_n(\omega, \omega) - E\eta_n] = \log De^{-\frac{1}{2}[\eta(\omega, \omega) - E\eta]}.$$

Теорема 7 полностью доказана.

Пример 11. *Независимые гауссовские величины*. Пусть $\xi(k) = \xi(\omega, k)$; $k = 1, 2, \ldots$ — последовательность независимых гауссовских величин с нулевыми математическими ожиданиями (как относительно распределения вероятностей P, так и относительно распределения вероятностей P_1) и с дисперсиями

$$\sigma^2(k) = D\xi(k) \quad \text{и} \quad \sigma_1^2(k) = D_1\xi(k); \quad k = 1, 2, \ldots$$

В этом случае величины $u_{jk} = \xi(\omega, j) \cdot \xi(\omega_1, k)$; $j, k = 1, 2, \ldots$, образуют ортогональную базу в гильбертовом пространстве $\overline{U \times U_1}$,

$\langle u_{jk}, u_{jk} \rangle = \sigma^2(j) \cdot \sigma_1^2(k)$; $j, k = 1, 2, \ldots$, и коэффициенты разложения

$$\eta = \sum_{j, k=1}^{\infty} c_{jk} u_{jk},$$

величины $\eta \in \overline{U \times U_1}$ в формуле (23) есть

$$c_{jk} = \begin{cases} \dfrac{b(k, k)}{\sigma^2(k) \cdot \sigma_1^2(k)} & \text{при } j = k; \ b(k, k) = \sigma^2(k) - \sigma_1^2(k), \\ 0 & \text{при } j \neq k; \ j, k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Видно, что *необходимое и достаточное условие эквивалентности гауссовских распределений P и P_1 состоит в том, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sigma^2(k) - \sigma_1^2(k)}{\sigma(k) \cdot \sigma_1(k)} \right]^2 = \langle \eta, \eta \rangle < \infty,$$

[1] См., например, [21, стр. 308, 296].

причем величина $\eta(\omega, \omega) - E\eta$ *в формуле* (24) *имеет вид*

$$\eta(\omega, \omega) - E\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(k) - \sigma_1^2(k)}{\sigma^2(k)\,\sigma_1^2(k)} [\xi^2(\omega, k) - \sigma^2(k)].$$

Пример 12. *Гауссовские стохастические меры.* Пусть (относительно вероятностной меры P) $\xi(\Delta) = \xi(\omega, \Delta)$ — стохастическая гауссовская мера на измеримых множествах Δ некоторого пространства T с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $B(\Delta, \Delta_1) = m(\Delta \cap \Delta_1)$, где $m(\Delta)$ — некоторая σ-конечная мера на пространстве T. Пусть P_1 — другая вероятностная мера, относительно которой $\xi(\Delta)$ — также стохастическая гауссовская мера с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $B_1(\Delta, \Delta_1) = m_1(\Delta \cap \Delta_1)$, где $m_1(\Delta)$ — другая σ-конечная мера на измеримых множествах Δ пространства T.

Соответствующее гильбертово пространство $\overline{U \times U_1}$ унитарно изоморфно гильбертову пространству $L^2(T \times T)$ всех действительных функций $\varphi(s, t)$ на произведении пространств $T \times T$, интегрируемых в квадрате по мере $m \times m_1$, скалярное произведение в котором задается как

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \iint_{T \times T} \varphi(s, t) \cdot \psi(s, t)\, m(ds) \times m_1(dt).$$

При этом всякая величина $u \in \overline{U \times U_1}$ может быть представлена в виде стохастического интеграла

$$u = \iint_{T \times T} \varphi(s, t)\, \xi(ds) \times \xi(dt),$$

где $\varphi = \varphi(s, t)$ — соответствующая величине $u = u(\omega, \omega_1)$ функция из пространства $L^2(T \times T)$, а стохастическая мера определяется на множествах вида $\Delta \times \Delta_1$ как произведение независимых величин $\xi(\omega, \Delta)$ и $\xi(\omega, \Delta_1)$. Условие (23) эквивалентности P и P_1 означает существование такой функции $\varphi(s, t) \in L^2(T \times T)$, что для соответствующей величины

$$\eta(\omega, \omega_1) = \iint_{T \times T} \varphi(s, t)\, \xi(ds) \times \xi(dt)$$

при любых измеримых множествах $\Delta, \Delta_1 \subseteq T$ выполняется соотношение

$$b(\Delta \cap \Delta_1) = \iint_{\Omega \times \Omega} \xi(\omega, \Delta) \cdot \xi(\omega_1, \Delta_1)\, \eta(\omega, \omega_1) \cdot P(d\omega) \times P_1(d\omega_1) =$$

$$= \iint_{\Delta \times \Delta_1} \varphi(s, t)\, m(ds) \times m_1(dt),$$

где $b(\Delta) = m(\Delta) - m_1(\Delta)$ есть обобщенная мера на пространстве T. Будем считать, что измеримое пространство T является сепарабельным и одноточечные множества $\{t\}$, $t \in T$,— измеримыми. Тогда полученное выше соотношение означает, в частности, что мера, задаваемая на множествах $\Delta \times \Delta_1$ формулой

$$\iint_{\Delta \times \Delta_1} \varphi(s, t)\, m(ds) \times m_1(ds),$$

сосредоточена на «диагонали» $D = \{(s, t) : s = t\}$.

Легко видеть, что условие эквивалентности состоит в следующем: *исходные меры* $m(\Delta)$ *и* $m_1(\Delta)$ *таковы, что* $m(\Delta) = m_1(\Delta)$ *для любого измеримого множества* $\Delta \subseteq T$, *не содержащего точек положительной меры* (т. е. таких точек $t \in T$, при которых $m(t) > 0$); *при этом точки* $t_1, t_2, \ldots$

положительной меры одни и те же как для m, так и для m_1 и

$$\sum_k \frac{[m(t_k)-m_1(t_k)]^2}{m(t_k)m_1(t_k)} = \langle\varphi, \varphi\rangle < \infty;$$

соответствующая функция $\varphi(s, t)$ равна 0, всюду, кроме счетного числа точек $t_1, t_2, \ldots$, причем

$$\varphi(t_k, t_k) = \frac{m(t_k)-m(t_k)}{m(t_k)\cdot m_1(t_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Величина $\eta(\omega, \omega) - E\eta$ *в формуле* (24) *имеет вид*

$$\eta(\omega, \omega) - E\eta = \sum_k \frac{m(t_k)-m_1(t_k)}{m(t_k)\cdot m_1(t_k)}[\xi^2(\omega, t_k) - m_1(t_k)].$$

Пример 13. *Стационарные гауссовские процессы.* Пусть (относительно вероятностной меры P) $\xi(t) = \xi(\omega, t)$, $-\infty < t < \infty$, — стационарный гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $B(s, t) = B(t-s)$. Пусть P_1 — другая вероятностная мера, относительно которой $\xi(t)$ также стационарный гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $B_1(s, t) = B_1(t-s)$. Пусть $F(\Delta)$ и $F_1(\Delta)$ — спектральные меры, отвечающие P и P_1:

$$B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}F(d\lambda), \quad B_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}F_1(d\lambda).$$

Рассмотрим гауссовские меры P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(T)$, порожденной лишь величинами $\xi(t)$, $t \in T$, где T — произвольное множество на действительной прямой. Соответствующее гильбертово пространство $\overline{U \times U_1}$ унитарно изоморфно пространству $L^2_{T\times T}$ всех функций $\varphi(\lambda, \mu)$ на плоскости $-\infty < \lambda, \mu < \infty$ со скалярным произведением

$$\langle\varphi, \psi\rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \mu)\overline{\psi(\lambda, \mu)}\,F(d\lambda)\times F_1(d\mu),$$

которое получается пополнением линейного пространства всех функций вида

$$\varphi(\lambda, \mu) = \sum_{j, k=1}^{n} c_{jk}e^{i(\lambda s_k - \mu t_k)},$$

где $s_1, \ldots, s_n$; $t_1, \ldots, t_n \in T$ и c_{jk}; $j, k = 1, \ldots n$ — действительные числа, причем каждый элемент $u \in \overline{U \times U_1}$ представляется в виде стохастического интеграла

$$u = \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \mu)\,\Phi(d\lambda)\times\Phi_1(d\mu).$$

Здесь $\varphi = \varphi(\lambda, \mu)$ — соответствующая величине $u = u(\omega, \omega_1)$ функция из пространства $L^2_{T\times T}$, а стохастическая мера определяется на множествах вида $\Delta \times \Delta_1$ как произведение независимых величин $\Phi(\omega, \Delta)$ и $\Phi_1(\omega_1, \Delta_1)$; Δ и Δ_1 — измеримые множества на действительной прямой; $\Phi(\Delta) = \Phi(\omega, \Delta)$ и $\Phi_1(\Delta_1) = \Phi_1(\omega_1, \Delta_1)$ — спектральные стохастические меры рассматриваемого стационарного процесса $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$, по отношению к распределениям P и P_1:

$$\xi(\omega, s)\cdot\xi(\omega_1, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda s - \mu t)}\,\Phi(d\lambda)\times\Phi_1(d\mu)$$

при всех $s,\ t \in T$. Условие (23) эквивалентности гауссовских мер P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(T)$ означает, что в пространстве $L^2_{T\times T}$ существует функция $\varphi(\lambda, \mu)$, такая что величина

$$\eta(\omega, \omega_1) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \mu)\, \Phi(d\lambda) \times \Phi_1(d\mu)$$

при всех $s,\ t \in T$ удовлетворяет уравнению

$$b(s, t) = \langle \xi(\omega, s) \cdot \xi(\omega_1, t),\ \eta(\omega, \omega_1)\rangle,$$

которое равносильно следующему интегральному представлению функции $b(s, t) = B(t - s) - B_1(t - s)$:

$$b(s,t) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda s - \mu t)} \varphi(\lambda, \mu)\, F(d\lambda) \times F_1(d\mu),\quad s,\ t \in T. \tag{29}$$

Это соотношение представляет собой интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\varphi(\lambda, \mu) \in L^2_{T\times T}$ с заданной функцией $b(s, t)$; $s, t \in T$.

Итак, *гауссовские меры P и P_1 эквивалентны на σ-алгебре $\mathfrak{A}(T)$ тогда и только тогда, когда уравнение* (29) *имеет решения $\varphi(\lambda, \mu)$ в классе $L^2_{T\times T}$; если такое решение $\varphi(\lambda, \mu)$ существует, то оно единственно, а фигурирующая в формуле* (24) *величина $\eta(\omega, \omega) - E\eta$ может быть найдена как предел*

$$\eta(\omega, \omega) - E\eta = \lim_{n\to\infty}\left[\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\lambda, \mu)\, \Phi^2(d\lambda, d\mu) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\lambda, \lambda)\, F(d\lambda)\right], \tag{30}$$

где $\varphi_n(\lambda, \mu)$; $n = 1, 2, \ldots$ — последовательность функций из пространства $L^2_{T\times T}$ вида $\varphi_n(\lambda, \mu) = \sum\limits_{j,\,k=1}^{n} c_{jk}^{(n)} e^{i(\lambda t_j - \mu t_k)}$, сходящаяся к $\varphi(\lambda, \mu)$, а стохастическая мера определяется на множествах вида $\Delta \times \Delta_1$, как $\Phi^2(\omega, \Delta\times\Delta_1) = \Phi(\omega, \Delta)\cdot\Phi(\omega, \Delta_1)$.

Пусть T — ограниченное множество на действительной прямой, а спектральные меры $F(\Delta)$ и $F_1(\Delta)$ убывают на бесконечности не очень быстро:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{F(d\lambda)}{d\lambda}\cdot\lambda^r > 0,\qquad \lim_{\lambda\to\infty}\frac{F_1(d\lambda)}{d\lambda}\cdot\lambda^r > 0$$

при некотором $r > 0$. Тогда функции $\varphi(\lambda, \mu)$ класса $L^2_{F\times F^1}$ являются аналитическими и однозначно определяются на диагонали $\lambda = \mu$ (см. далее § 4). В этом случае
величина $\eta(\omega, \omega) - E\eta$ может быть найдена по формуле:

$$\eta(\omega, \omega) - E\eta = \lim_{n\to\infty}\left[\iint\limits_{|\varphi|\leqslant n} \varphi(\lambda, \mu)\, \Phi^2(d\lambda\cdot d\mu) - \int\limits_{|\varphi|\leqslant n} \varphi(\lambda, \lambda)\, F(d\lambda)\right],$$

которая при условии $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \lambda)\, F(d\lambda) < \infty$ упрощается следующим образом:

$$\eta(\omega, \omega) - E\eta = \iint \varphi(\lambda, \mu)\, \Phi^2(d\lambda d\mu) - \int \varphi(\lambda, \lambda)\, F(d\lambda).$$

Далее предположим, что существуют *ограниченные спектральные плотности* $f(\lambda) = F(d\lambda)/d\lambda$ и $f_1(\lambda) = F_1(d\lambda)/d\lambda$. Тогда функция $b(s, t)$; $-\infty < s,\ t < \infty$, определенная формулой (29) при всех s и t, имеет преобразование Фурье

$$\tilde{b}(\lambda, \mu) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda s - \mu t)} b(s, t)\, ds dt, \qquad -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

удовлетворяющее условию

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{b}(\lambda, \mu)|^2}{f(\lambda) \cdot f_1(\mu)} d\lambda d\mu < \infty. \tag{31}$$

В самом деле, $\tilde{b}(\lambda, \mu) = \varphi(\lambda, \mu) \cdot f(\lambda) \cdot f_1(\mu)$, где $\varphi(\lambda, \mu) \in L^2_{T \times T}$, так что отношение

$$\frac{|\tilde{b}(\lambda, \mu)|^2}{f(\lambda) \cdot f_1(\mu)} = |\varphi(\lambda, \mu)|^2 f(\lambda) \cdot f_1(\mu)$$

удовлетворяет условию (31). С другой стороны, если разность $b(s, t) = B(s-t) - B_1(s-t)$, заданная при $s, t \in T$, продолжается до интегрируемой в квадрате функции $b(s, t)$ на всей плоскости $-\infty < s,\ t < \infty$, такой что ее преобразование Фурье $\tilde{b}(\lambda, \mu), -\infty < \lambda, \mu < \infty$, удовлетворяет условию (31), то функция $\psi(\lambda, \mu) = \frac{\tilde{b}(\lambda, \mu)}{f(\lambda) \cdot f_1(\mu)}$ из гильбертова пространства $L^2_{R \times R}$ (R — вся действительная прямая, $L^2_{T \times T}$ — подпространство $L^2_{R \times R}$) будет удовлетворять уравнению (29). Очевидно (ср. пример 5), проекция $\varphi(\lambda, \mu)$ этой функции на подпространство $L^2_{T \times T}$ будет также удовлетворять этому уравнению (при $s, t \in T$).

Таким образом, *для эквивалентности гауссовских мер P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{A}(T)$ необходимо и достаточно, чтобы разность $b(s, t) = B(s-t) - B_1(s-t)$; $s, t \in T$, продолжалась до интегрируемой в квадрате функции $b(s, t), -\infty < s, t < \infty$, преобразование Фурье $\tilde{b}(\lambda, \mu), -\infty < \lambda, \mu < \infty$, которой удовлетворяет условию* (31). *При этом величина $\eta(\omega, \omega) - E\eta$ в формуле* (24) *представима в виде* (30), *где $\varphi_n(\lambda, \mu)$; $n = 1, 2, \ldots$ — последовательность функций из подпространства $L^2_{T \times T}$, сходящаяся к проекции функции $\frac{\tilde{b}(\lambda, \mu)}{f(\lambda) \cdot f_1(\mu)} \in L^2_{R \times R}$ в подпространстве $L^2_{T \times T}$.*

Отметим, что когда T есть вся действительная прямая: $T = R$, то разность $b(s, t) = B(s-t) - B_1(s-t)$, представимая в виде

$$b(s, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda s - \lambda t)} [f(\lambda) - f_1(\lambda)]\, d\lambda,$$

есть преобразование Фурье меры $G(d\lambda) = [f(\lambda) - f_1(\lambda)] d\lambda$, сосредоточенной на диагонали $\mu = \lambda$. Очевидно, функция $b(s, t), -\infty < s, t < \infty$, одновременно представима преобразованием Фурье некоторой функции $\tilde{b}(\lambda, \mu)$ тогда и только тогда, когда $f(\lambda) = f_1(\lambda)$ при почти всех λ, т. е. когда рассматриваемые гауссовские меры P и P_1 просто совпадают.

Таким образом, *гауссовские меры P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(R)$ являются эквивалентными тогда и только тогда, когда они совпадают* (ср. с примером 12, результаты которого применимы к стохастической гауссовской мере $\Phi(\Delta)$, $E\Phi(\Delta) \cdot \Phi(\Delta_1) = F(\Delta \cap \Delta_1)$, замкнутая линейная оболочка значений $\Phi(\Delta)$ которой совпадает с замкнутой линейной оболочкой значений $\xi(t), -\infty < t < \infty$, рассматриваемого стационарного процесса).

Условие (31) в случае спектральных плотностей $f(\lambda)$ и $f_1(\lambda)$ вида

$$f(\lambda) \asymp f_1(\lambda) \asymp (1 + \lambda^2)^{-n}$$

позволяет легко вывести следующий результат:

для эквивалентности гауссовских мер P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{A}(T)$, T — конечный интеграл, необходимо и достаточно, чтобы разность $b(s, t) = B(s-t) - B_1(s-t)$ имела на открытом квадрате $T \times T$ $2n$-ю производную $\frac{\partial^{2n}}{\partial s^n \partial t^n} b(s, t)$, удовлетворяющую условию

$$\iint\limits_{T \times T} \left[\frac{\partial^{2n}}{\partial s^n \partial t^n} b(s, t)\right]^2 ds dt < \infty. \tag{32}$$

В самом деле (ср. пример 5), при условии (31) функция

$$c(s, t) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda s - \mu t)} (-i\lambda)^n (i\mu)^n \widetilde{b}(\lambda, \mu)\, d\lambda d\mu$$

совпадает с производной $\frac{\partial^{2n}}{\partial s^n \partial t^n} b(s, t)$. С другой стороны, при наличии такой производной $\frac{\partial^{2n}}{\partial s^n \partial t^n} b(s, t)$ (удовлетворяющей условию (32)) функция $b(s, t)$ может быть продолжена на всю плоскость $-\infty < s,\ t < \infty$ таким образом, чтобы она по-прежнему имела указанную производную и обращалась бы в 0 вне некоторого конечного квадрата $T' \times T' \supseteq T \times T$. Используя повторное интегрирование и $2n$-кратное интегрирование по частям, из формулы

$$\varphi(\lambda, \mu) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{T' \times T'} e^{i(\lambda s - \mu t)} \frac{\partial^{2n}}{\partial s^n \partial t^n} b(s, t)\, ds dt$$

получаем, что

$$\widetilde{b}(\lambda, \mu) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{T' \times T'} e^{i(\lambda s - \mu t)} b(s, t)\, ds dt = \frac{1}{(i\lambda)^n (-i\mu)^n} \varphi(\lambda, \mu).$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2n} \cdot \mu^{2n} |\widetilde{b}(\lambda, \mu)|^2 d\lambda d\mu = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda, \mu)|^2 d\lambda d\mu < \infty,$$

т. е. выполняется условие (31).

Остановимся подробнее на важном с точки зрения приложений случае рациональных спектральных плотностей

$$f(\lambda) = \frac{|P(i\lambda)|^2}{|Q(i\lambda)|^2}, \quad f_1(\lambda) = \frac{|P_1(i\lambda)|^2}{|Q_1(i\lambda)|^2},$$

где $P(z)$ и $Q(z)$, $P_1(z)$ и $Q_1(z)$ — некоторые полиномы с действительными коэффициентами, имеющие корни лишь в левой полуплоскости. Как следует из полученного выше условия (32), в этом случае *гауссовские меры P и P_1 эквивалентны тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{f(\lambda)}{f_1(\lambda)} = 1.$$

Интегральное уравнение (29) имеет вид

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda s - \mu t)} \varphi(\lambda, \mu) \frac{|P(i\lambda)|^2}{|Q(i\lambda)|^2} \frac{|P_1(i\mu)|^2}{|Q_1 i\mu)|^2} d\lambda d\mu = b(t-s), \quad 0 \leqslant s, \ t \leqslant \tau$$

($b(t)$ означает разность корреляционных функций $B(t)$ и $B_1(t)$). Его решение $\varphi(\lambda, \mu) \in L^2_{T \times T}$ является преобразованием Фурье обобщенной функции

$y\,(s,\ t)$:

$$y(s,t)=Q\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)Q\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)Q_1\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)Q_1\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right)x(s,t),\quad -\infty<s,\ t<\infty,$$

где

$$x(s,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\lambda s-\mu t)}\,\varphi(\lambda,\ \mu)\,\frac{d\lambda d\mu}{|Q(i\lambda)|^2\cdot|Q_1(i\mu)|^2}.$$

Указанная функция $x\,(s,\ t)$ при $0<s,\ t<\tau$ есть решение дифференциального уравнения

$$P\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)P\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)P_1\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right)x(s,t)=b(t-s),$$

граничные значения которого определяются соотношениями:

$$Q\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)\frac{\partial^k}{\partial s^k}x(s,t)=0\quad \text{при } s\leqslant 0,\ -\infty<t<\infty;$$

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\frac{\partial^k}{\partial s^k}x(s,t)=0\quad \text{при } s\geqslant\tau,\ -\infty<t<\infty,$$

$$k=0,\ldots,\ p-1;$$

$$Q_1\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^k}{\partial t^k}x(s,t)=0\ \text{при } -\infty<s<\infty,\ t\leqslant 0;$$

$$Q_1\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^k}{\partial t^k}x(s,t)=0\quad \text{при } -\infty<s<\infty,\ t\geqslant\tau,$$

$$k=0,\ldots,\ p_1-1$$

(p и p_1 — степени полиномов $P\,(z)$ и $P_1\,(z)$). Обобщенная функция $y\,(s,\ t)$ легко вычисляется, если уже найдено решение $x\,(s,\ t)$ приведенного выше дифференциального уравнения: при $s<0$ и $s>\tau$ или $t<0$ и $t>\tau$ она равна 0, при $0<s,\ t<\tau$ задается обычной функцией $P\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)P\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)P_1\times$ $\times\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)P_1\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right)x(s,t)$, а на границе квадрата $0\leqslant s,\ t\leqslant\tau$ является линейной комбинацией δ-функций (по одному и обоим переменным) и их производных [1].

Нормирующий множитель в формуле (24) есть

$$D=\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\sigma_k^2},$$

где $\sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \ldots$ — полная система собственных значений оператора $B_1^*\,B_1$, такого что

$$\langle B^*{}_1B_1\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,\psi\rangle_1;\quad \varphi,\psi\in L_T^2.$$

Очевидно, σ^2 входит в указанную систему тогда и только тогда, когда существует функция $\varphi\,(\lambda)\in L_T^2$ такая, что при всех $t,\ 0\leqslant t\leqslant\tau$,

$$\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}\varphi(\lambda)\frac{|P(i\lambda)|^2}{|Q(i\lambda)|^2}d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}\varphi(\lambda)\frac{|P_1(i\lambda)|^2}{|Q_1(i\lambda)|^2}d\lambda.$$

---

[1] Ср. [30, стр. 190—198].

Каждой такой функции $\varphi(\lambda)$ можно взаимно однозначно сопоставить функцию

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\varphi(\lambda)\frac{d\lambda}{|Q(i\lambda)|^2|Q_1(i\lambda)|^2}.$$

Нетрудно показать [1], что $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$ совпадают с полной системой собственных значений дифференциального уравнения

$$\sigma^2 P\left(\frac{d}{dt}\right)P\left(-\frac{d}{dt}\right)Q_1\left(\frac{d}{dt}\right)Q_1\left(-\frac{d}{dt}\right)x(t) =$$
$$= P_1\left(\frac{d}{dt}\right)P_1\left(-\frac{d}{dt}\right)Q\left(\frac{d}{dt}\right)Q\left(-\frac{d}{dt}\right)x(t)$$

при граничных условиях

$$Q\left(\frac{d}{dt}\right)Q_1\left(\frac{d}{dt}\right)x^{(k)}(0) = Q\left(-\frac{d}{dt}\right)Q_1\left(\frac{d}{dt}\right)x^{(k)}(\tau) = 0,$$
$$k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

где N — степень многочлена $P(z)\cdot Q_1(z)$.

В заключение этого пункта рассмотрим два семейства величин $\xi(t)$, $t \in T'$, и $\xi(t)$, $t \in T''$. Обозначим U' и U'' линейные оболочки этих величин, $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ — порождаемые ими σ-алгебры (сохранив соответствующие обозначения U и $\mathfrak{A}$ для объединенного семейства величин $\xi(t)$, $t \in T' \cup T''$). Пусть P и P_1 — гауссовские меры на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ (т. е. относительно которых $\xi(t)$, $t \in T' \cup T''$, является семейством гауссовских величин). Пусть соответствующие средние значения равны 0, а корреляционные функции (на параметрическом множестве U) есть $B(u, v)$ и $B_1(u, v)$; $u, v \in U$. Положим

$$\rho = \sup|\langle u', u''\rangle| = \sup|B(u', u'')|, \tag{33}$$
$$\rho_1 = \sup|\langle u', u''\rangle_1| = \sup|B_1(u', u'')|,$$

где соответствующая верхняя грань берется по всем элементам $u' \in U'$, $u'' \in U''$ с единичной дисперсией:

$$B(u', u') = B(u'', u'') = 1,\ B_1(u', u') = B_1(u'', u'') = 1.$$

Теорема 8. *Если одно из подпространств $\bar{U}'$ или $\bar{U}''$ является конечномерным, то при условии $(\rho, \rho_1) < 1$ эквивалентные на каждой из σ-алгебр $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ гауссовские меры P и P_1 будут эквивалентны и на объединении $\mathfrak{A}$ этих σ-алгебр $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$. При $\rho = \rho_1 = 0$ плотность $p(\omega) = P_1(d\omega)/P(d\omega)$ на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ есть*

$$p(\omega) = p'(\omega)\cdot p''(\omega),$$

где p' и p'' — соответствующие плотности на σ-алгебрах $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$.

Доказательство. По теореме 5, эквивалентность гауссовских мер P и P_1 означает, что

$$\langle u, u\rangle \asymp \langle u, u\rangle_1$$

и разность $A = I - B_1^* B_1$ является оператором Гильберта — Шмидта. Следовательно, замыкания линейных пространств U' и U'' относительно скалярных произведений $\langle u, v\rangle$ и $\langle u, v\rangle_1$ совпадают. Обозначим их $\bar{U}'$ и $\bar{U}''$. Очевидно, всякая величина $u \in \bar{U}$ однозначно представима в виде

$$u = u' + u'',\ \text{где}\ u' \in \bar{U}',\ u'' \in \bar{U}''.$$

[1] Ср. [11].

При этом

$$\langle u, u\rangle \asymp \langle u', u'\rangle + \langle u'', u''\rangle,$$

$$\langle u, u\rangle_1 \asymp \langle u', u'\rangle_1 + \langle u'', u''\rangle_1.$$

Видно, что из соотношений

$$\langle u, u\rangle \asymp \langle u, u\rangle_1 \text{ при } u \in \overline{U}', \ u \in \overline{U}''$$

вытекает соотношение

$$\langle u, u\rangle \asymp \langle u, u\rangle_1 \quad \text{при} \quad u \in U.$$

Пусть конечномерным является $\overline{U}'$. Эквивалентность P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{A}'$ имеет место тогда и только тогда, когда выполнено условие типа (7):

$$\langle u, u\rangle \asymp \langle u, u\rangle_1, \ u \in \overline{U}'.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\rho = 0$, так как при указанном условии от подпространства $\overline{U}'$ можно перейти к ортогональному дополнению $\overline{U} \ominus \overline{U}''$, которое имеет ту же размерность, что и подпространство $\overline{U}'$, и на котором также выполняется соотношение указанного типа, т. е. гауссовские меры P и P_1 эквивалентны σ-алгебре, порожденной величинами $u \in \overline{U} \ominus \overline{U}''$. Пусть $A = I - B_1^* B_1$ — оператор на пространстве $\overline{U}$, фигурирующий в теореме 5. Обозначим P' и P'' операторы проектирования на ортогональные подпространства $\overline{U}'$ и $\overline{U}''$. Имеем

$$\langle P'Au, v\rangle = \langle Au, v\rangle \text{ для } u, \ v \in \overline{U}',$$

$$\langle P''Au, v\rangle = \langle Au, v\rangle \text{ для } u, \ v \in \overline{U}''.$$

Следовательно (см. замечания к теореме 5), для эквивалентных на σ-алгебрах $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ гауссовских мер P и P_1 операторы $P'A$ и $P''A$ являются операторами Гильберта — Шмидта в подпространствах $\overline{U}'$ и $\overline{U}''$. Очевидно, определенные во всем пространстве $\overline{U}$ операторы $P'A$ и $P''A$ вместе с их суммой $A = P'A + P''A$ будут также операторами Гильберта — Шмидта [1] (напомним, что подпространство $\overline{U}'$ является конечномерным, а оператор A — ограниченным). Теорема доказана.

Отметим, что в теореме 8 нельзя отказаться от условия конечномерности одного из подпространств $\overline{U}'$ или $\overline{U}''$. Действительно, рассмотрим последовательность независимых пар гауссовских величин (ξ_k', ξ_k''); $k = 1, 2, \ldots$, таких, что относительно вероятностной меры P величины ξ_k' и ξ_k'' независимы, а относительно вероятностной меры P_1 имеют коэффициент корреляции $r = E_1 \xi_k' \cdot \xi_k'' > 0$ (при этом они имеют нулевые средние значения и единичные дисперсии). Пусть U' — линейная оболочка величины ξ_k' $(k = 1, 2, \ldots)$, а U'' — линейная оболочка величины ξ_k'' $(k = 1, 2, \ldots)$. Очевидно, условия (33) будут выполнены ($\rho = 0$, $\rho_1 = r < 1$), тогда как гауссовские меры P и P_1 являются перпендикулярными, в чем всего легче убедиться, обратившись к усиленному закону больших чисел:

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k' \cdot \xi_k'' \to 0\right\} = 1,$$

$$P_1\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k' \cdot \xi_k'' \to r\right\} = 1.$$

---

[1] См. [9, стр. 52].

§ 4. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ГАУССОВСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

1. Введение

Пусть (относительно вероятностной меры P) $\xi(t) = \xi(\omega, t)$, $-\infty < t < \infty$, — стационарный гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $B(s, t) = B(t - s)$. Пусть P_1 — другая вероятностная мера, относительно которой $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ — также гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $B_1(s, t) = B_1(t - s)$. Рассмотрим гауссовские меры P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{A}(T)$, порожденной всеми величинами $\xi(t) = \xi(\omega, t)$, где параметр t пробегает лишь отрезок $T = [0, \tau]$. Будем предполагать, что спектральные меры $F(\Delta)$ и $F_1(\Delta)$ абсолютно непрерывны и имеются спектральные плотности $f(\lambda)$ и $f_1(\lambda)$:

$$F(\Delta) = \int_{\Delta} f(\lambda)\, d\lambda, \quad F_1(\Delta) = \int_{\Delta} f_1(\lambda)\, d\lambda.$$

При рассмотрении вопроса об эквивалентности, не ограничивая общности, можно считать процесс $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ измеримым, поскольку всегда существует измеримый процесс [1] $\tilde{\xi}(t) = \tilde{\xi}(\omega, t)$ такой, что для каждого фиксированного t

$$\tilde{\xi}(\omega, t) = \xi(\omega, t)$$

при почти всех $\omega \in \Omega$ как относительно P, так и относительно P_1 (напомним, что корреляционные функции $B(t)$ и $B_1(t)$ являются непрерывными).

Гильбертово пространство $\bar{U}$ величин $u = u(\omega)$ со скалярным произведением $\langle u, v\rangle = \int_{\Omega} u(\omega)\cdot v(\omega) P(d\omega)$ — замыкание всех величин вида $u(\omega) = \sum_{k=1}^{n} c_k \xi(\omega, t_k)$ — унитарно изоморфно гильбертову пространству $L_T^2(F)$ комплексных функций $\varphi = \varphi(\lambda)$ на действительной прямой $-\infty < \lambda < \infty$ со скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\cdot \overline{\psi(\lambda)}\, f(\lambda)\, d\lambda$$

— замыканию всех функций вида $\varphi(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda t_k}$ ($t_1, \ldots, t_n \in T$, $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные действительные числа), причем каждый элемент $u \in \bar{U}$ представляется в виде стохастического интеграла

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, \Phi(d\lambda), \tag{34}$$

где $\Phi(\Delta)$ — стохастическая спектральная мера стационарного процесса $\xi(t)$, фигурирующая в его спектральном разложении [2]:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\Phi(d\lambda),$$

[1] См. [21, стр. 61].

[2] По поводу всего сказанного см., например, [30].

и $\varphi = \varphi(\lambda)$ — соответствующая величине $u = u(\omega)$ функция из пространства L_T^2. Гильбертово пространство $\bar{U}_1$ величин $u = u(\omega)$ со скалярным произведением $\langle u, v_1\rangle_1 = \int\limits_{\Omega} u(\omega)\cdot v(\omega) P_1(d\omega)$ унитарно изоморфно аналогичному пространству $L_T^2(F_1)$, отвечающему другой спектральной плотности $f_1(\lambda)$.

Обозначим $C^\infty[0, \tau]$ пространство всех действительных бесконечно-дифференцируемых функций $c = c(t)$ от t, обращающихся в 0 вне отрезка $T = [0, \tau]$.

Рассмотрим семейство величин $u(\varphi) = u(\omega, \varphi)$ на исходном пространстве Ω:

$$u(\omega, \varphi) = \int\limits_0^\tau c(t)\,\xi(\omega, t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,\Phi(d\lambda), \tag{35}$$

где параметр φ пробегает все функции вида

$$\varphi(\lambda) = \int\limits_0^\tau e^{i\lambda t} c(t)\,dt, \quad c \in C^\infty[0, \tau]. \tag{36}$$

Обозначим L совокупность всех таких функций. Очевидно, семейство величин $u(\varphi) = u(\omega, \varphi)$, $\varphi \in L$, всюду плотно в каждом из пространств $L_T^2(F)$ и $L_T^2(F_1)$, так что, согласно лемме 4, гауссовские меры P и P_1 эквивалентны на σ-алгебре $\mathfrak{A}(T)$ тогда и только тогда, когда они эквивалентны на σ-алгебре, порожденной всеми величинами $u(\varphi) = u(\omega, \varphi)$, $\varphi \in L$ (в дальнейшем будем обозначать эту σ-алгебру символом $\mathfrak{A}$). Отвечающие этим величинам корреляционные функции $B(\varphi, \psi)$ и $B_1(\varphi, \psi)$ имеют вид

$$\begin{aligned} B(\varphi, \psi) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\overline{\psi(\lambda)} f(\lambda)\,d\lambda, \\ B_1(\varphi, \psi) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\overline{\psi(\lambda)} f_1(d\lambda). \end{aligned} \tag{37}$$

Ниже речь пойдет не только о стационарных процессах, для которых спектральные плотности $f(\lambda)$ и $f_1(\lambda)$ являются интегрируемыми функциями, но и о стационарных обобщенных процессах $u(\varphi) = u(\omega, \varphi)$, $\varphi \in L$, для которых спектральные плотности, связанные с соответствующими корреляционными функциями $B(\varphi, \psi)$ и $B_1(\varphi, \psi)$ равенствами (37), удовлетворяют лишь условиям

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{(1+\lambda^2)^n}\,d\lambda < \infty, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(\lambda)}{(1+\lambda^2)^n}\,d\lambda < \infty$$

при некотором натуральном n.

Образующие стационарный обобщенный процесс[1] величины $u(\varphi) = u(\omega, \varphi)$, $\varphi \in L$, могут быть представлены в виде (34), где $\Phi(\Delta)$ — стохастическая спектральная мера стационарного обобщенного процесса. При этом гильбертово пространство $\bar{U}$ унитарно изоморфно гильбертову пространству $L_T^2(F)$ — замыканию всех функций $\varphi(\lambda) \in L$ — и каждая величина $u \in \bar{U}$ представляется в виде стохастического интеграла (34)

[1] См., например, [9, стр. 296 и далее].

с соответствующей величине $u = u(\omega)$ подынтегральной функцией $\varphi = \varphi(\lambda)$ из пространства $L_T^2(F)$. То же самое справедливо и в отношении гильбертовых пространств $\overline{U}_1$ и $L_T^2(F_1)$. Обозначим B_1 оператор из $L_T^2(F)$ в $L_T^2(F_1)$, определенный на функциях $\varphi \in L$ как

$$B_1\varphi = \varphi, \quad \varphi \in L.$$

Как было показано ранее (см. теоремы 5 и 6), имеет место следующее предложение: *гауссовские меры P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{A}(T)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда разность $I - \overset{*}{B_1}B_1$ является оператором Гильберта — Шмидта (в гильбертовом пространстве $L_T^2(F)$), не имеющим равного 1 собственного значения.*

Далее предположим, что спектральная плотность $f(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, убывает настолько быстро, что стационарный процесс $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$, является «аналитическим»:

$$E\left[\xi(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi^{(k)}(0)}{k!} t^k\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{i\lambda t} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(i\lambda)^k}{k!} \right|^2 f(\lambda)\, d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{|t|^{(n+1)}}{(n+1)!}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2(n+1)} f(\lambda)\, d\lambda \to 0$$

при $n \to \infty$. Тогда при любом t величины $\xi(t)$ входят в подпространство $\overline{U}$ — замкнутую линейную оболочку величин $\xi(s)$, $0 \leqslant s \leqslant \tau$, и тем самым $\overline{U}$ совпадает с замкнутой линейной оболочкой всех величин $\Phi(\Delta)$ — значений стохастической спектральной меры рассматриваемого стационарного процесса. В этом случае гауссовские меры P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда они эквивалентны на σ-алгебре, порождаемой величинами $\Phi(\Delta) = \Phi(w, \Delta)$. Вопрос об эквивалентности таких мер рассматривался в примере 12. В частности, если (относительно вероятностной меры P_1) $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ — стационарный гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и спектральной плотностью $f_1(\lambda)$, то гауссовские меры P и P_1 эквивалентны тогда и только тогда, когда $f(\lambda) = f_1(\lambda)$, т. е. когда сами меры P и P_1 попросту совпадают (см. пример 13).

Во всем дальнейшем будем предполагать, что спектральная плотность $f(\lambda)$ убывает не быстрее «некоторой степени» $|\lambda|^{-r}$, а именно

$$\varliminf_{n \to \infty} \lambda^r \cdot f(\lambda) > 0 \tag{38}$$

для некоторого $r > 0$.

2. Некоторые вспомогательные результаты

Лемма 6. *Пусть*

$$f(\lambda) \asymp (1 + \lambda^2)^{-n} \tag{39}$$

при некотором целом $n \geqslant 0$. Тогда пространство $L_T^2(F)$ совпадает с классом всех целых аналитических функций $\varphi(\lambda)$, представимых в виде

$$\varphi(\lambda) = P(i\lambda) + (1 + i\lambda)^n \int_0^{\tau} e^{i\lambda t} c(t)\, dt, \tag{40}$$

где $P(z)$ — полином степени не выше $n - 1$, а $c(t)$ — интегрируемая в квадрате функция на отрезке $T = [0, \tau]$.

Доказательство. Покажем, что функция $\varphi(\lambda)$ указанного вида принадлежит пространству L_T^2. В самом деле,

$$(i\lambda)^k = \lim_{t\to 0}(i\lambda)^{k-1}\frac{e^{i\lambda t}-1}{t} \in L_T^2$$

при всех $k=1, \ldots, n-1$. С другой стороны, каждый элемент пространства L_T^2 есть предел линейных комбинаций $\varphi(\lambda) = \sum_k c_k e^{i\lambda t_k}$. Подберем коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$ так, чтобы целая функция $\varphi(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda t}$ обращалась бы в 0 при $\lambda = i$ вместе со своими $n-1$ первыми производными. Тогда отношение $\frac{\varphi(\lambda)}{(1+i\lambda)^n}$ будет также целой функцией, интегрируемой в квадрате на действительной прямой $-\infty < \lambda < \infty$ и по известной теореме Пэли — Винера, представимой в виде

$$\frac{\varphi(\lambda)}{(1+i\lambda)^n} = \int_0^\tau e^{i\lambda t}c(t)\,dt,$$

где $c(t)$ — некоторая интегрируемая в квадрате функция на отрезке $T = [0, \tau]$. Для любой фундаментальной последовательности таких функций $\varphi_k(\lambda)$; $k = 1, 2, \ldots,$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_j(\lambda) - \varphi_k(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda \asymp \int_0^\tau |c_j(t) - c_k(t)|^2 dt,$$

так что соответствующая последовательность $c_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$ сходится в среднем квадратичном к некоторой интегрируемой в квадрате функции $c(t)$, а сама последовательность $\varphi_k(\lambda)$; $k = 1, 2, \ldots$ сходится к функции

$$\varphi(\lambda) = (1+i\lambda)^n \int_0^\tau e^{i\lambda t}c(t)\,dt.$$

Совокупность функций $\varphi(\lambda) = (1+i\lambda)^n \int_0^\tau e^{i\lambda t}c(t)\,dt$ является подпространством индекса n, которое до всего пространства L_T^2 «дополняется» элементами $\varphi(\lambda) = (i\lambda)^k$; $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Лемма 7. *Пусть пространство $L_T^2(F)$ состоит из целых аналитических функций. Тогда оператор Гильберта — Шмидта $I - B_1^* B_1$ не имеет равного 1 собственного значения.*

Доказательство. В силу ограниченности оператора $I - B_1^* B_1$

$$\langle B^* B_1\varphi, \varphi\rangle = \langle\varphi, \varphi\rangle_1 \leqslant C\langle\varphi, \varphi\rangle$$

для всех $\varphi(\lambda) \in L$ (C — некоторая постоянная). Предположим, что имеется собственная функция $\varphi(\lambda) \in L_T^2$ с равным 1 собственным значением. Пусть $\varphi_n(\lambda)$, $n = 1, 2, \ldots$— некоторая последовательность функций из L, сходящаяся к $\varphi(\lambda)$ в пространстве $L_T^2(F)$. Эта последовательность будет фундаментальной в пространстве $L_T^2(F_1)$, где она сходится к 0:

$$\langle\varphi_n, \varphi_n\rangle_1 = \langle\varphi_n, \varphi_n\rangle - \langle[I - B_1^* B_1]\varphi_n, \varphi_n\rangle \to 0$$

при $n \to \infty$. Следовательно, предельная функция $\varphi(\lambda)$ равна 0 при почти всех λ, для которых $f_1(\lambda) > 0$. Но тогда аналитическая функция $\varphi(\lambda)$ тождественно равна 0, а это противоречит тому, что она есть собственная функция. Лемма доказана.

Напомним, что n-я производная $u^{(n)}(\varphi)$ обобщенного процесса $u(\varphi)$ определяется как [1]

$$u^{(n)}(\varphi) = (-1)^n\, u\,[(i\lambda)^n\, \varphi],\ \varphi \in L.$$

Если $B(\varphi, \psi)$ — корреляционная функция исходного процесса, то корреляционная функция $B^{(n,\,n)}(\varphi, \psi)$ производной $u^{(n)}(\varphi)$ есть

$$B^{(n,\,n)}(\varphi,\ \psi) = B\,[(i\lambda)^n\varphi,\ (i\lambda)^n\psi];\ \varphi,\ \psi \in L. \tag{41}$$

Спектральная же плотность $f^{(n,\,n)}(\lambda)$ рассматриваемой производной есть

$$f^{(n,\,n)}(\lambda) = \lambda^{2n} f(\lambda).$$

Лемма 8. *Пусть пространство L_T^2 состоит из целых аналитических функций. Гауссовские меры P и P_1, отвечающие обобщенному процессу $u(\varphi)$, $\varphi \in L$, являются эквивалентными тогда и только тогда, когда эквивалентны меры, отвечающие какой-либо производной $u^n(\varphi)$, $\varphi \in L$.*

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $n = 1$. Обозначим M — совокупность всех функций $\varphi(\lambda) \in L$, таких что $\varphi(0) = 0$. Пусть функция $\varphi_1(\lambda) \in L$ такова, что $\varphi_1(0) \neq 0$. Очевидно, величина $u(\varphi_1)$ и семейство величин $u(\varphi)$, $\varphi \in M$, порождают σ-алгебру $\mathfrak{A}$, причем (по условию леммы) гауссовские распределения P и P_1 указанных величин $u(\varphi_1)$ и семейства величин $u(\varphi)$, $\varphi \in M$, являются эквивалентными. Для доказательства воспользуемся теоремой 8. Именно, если $\varphi_1 \in \overline{M}$, то найдется последовательность функций $\varphi_n(\lambda)$, $n = 1, 2, \ldots$ из $\overline{M}$, сходящаяся (в пространстве $L_T^2(F)$) к $\varphi_1(\lambda)$. В силу эквивалентности гауссовских мер P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, порожденной величинами $u(\varphi)$, $\varphi \in M$, имеет место соотношение

$$\langle\varphi,\ \varphi\rangle \asymp \langle\varphi,\ \varphi\rangle_1,\ \varphi \in M$$

(см., например, условие (7)). Поэтому последовательность $\varphi_n(\lambda)$, $n = 1, 2, \ldots$ является фундаментальной в подпространстве $\overline{M}_1 \subseteq L_T^2(F_1)$ и сходится к некоторой функции $\varphi(\lambda) \in \overline{M}_1$. Очевидно, эта предельная функция совпадает с $\varphi_1(\lambda)$ при почти всех λ, для которых $f(\lambda) > 0$ и $f_1(\lambda) > 0$. Но рассматриваемые функции $\varphi(\lambda)$ и $\varphi_1(\lambda)$ — аналитические, и потому $\varphi(\lambda) \equiv \varphi_1(\lambda)$, $\varphi_1(\lambda) \in \overline{M}_1$. Аналогично, если $\varphi_1 \in \overline{M}_1$, то одновременно $\varphi_1 \in \overline{M}$. Поэтому, либо одновременно $\overline{M} = L_T^2(F)$ и $\overline{M}_1 = L_T^2(F_1)$ (и тогда, очевидно, рассматриваемые гауссовские меры эквивалентны на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ — см. лемму 4), либо в отношении двух семейств гауссовских величин $u(\varphi_1)$ и $u(\varphi)$, $\varphi \in M$, выполнены условия теоремы 8, и вероятностные меры P и P_1 эквивалентны на σ-алгебре $\mathfrak{A}$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть при $n = 0$ выполняется соотношение* (39). *Тогда для эквивалентности гауссовских мер P и P_1 необходимо и достаточно, чтобы разность корреляционных функций*

$$b(\varphi_1,\ \varphi_2) = B(\varphi_1,\ \varphi_2) - B_1(\varphi_1,\ \varphi_2);\ \varphi_1,\ \varphi_2 \in L$$

допускала представление вида

$$b(\varphi_1;\ \varphi_2) = \int_0^\tau\!\!\int_0^\tau c_1(s)\, c_2(t)\, b(s,\ t)\, ds\, dt, \tag{42}$$

где функции $c_1(t)$ и $c_2(t)$ связаны с функциями $\varphi_1(\lambda)$ и $\varphi_2(\lambda)$ преобразованием

[1] См. [9, стр. 306 и далее].

Фурье, и функция $b(s, t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\tau\int_0^\tau b(s, t)^2 ds\,dt < \infty.$$

При этом $b(s, t) = b(s-t)$, где $b(t)$, $b(-t) = b(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ — обобщенное преобразование Фурье[1] *(на отрезке $[0, \tau]$) функции $g(\lambda) = f(\lambda) - f_1(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, т. е.*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) g(\lambda) d\lambda = \int_0^\tau c(t) b(t) dt, \quad \varphi \in L. \tag{43}$$

Доказательство. Соотношение (41) можно переписать в виде

$$\int_0^\tau\int_0^\tau c_1(s) c_2(t) b(s, t) ds\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\lambda)\overline{\varphi_2(\lambda)} g(\lambda) d\lambda.$$

Поскольку функция $g(\lambda) = f(\lambda) - f_1(\lambda)$ растет не быстрее некоторой степени $|\lambda|^{2n}$, то произведение $\frac{1}{2\pi}\varphi_1(\lambda) g(\lambda)$ является интегрируемой функцией, преобразование Фурье которой, очевидно, удовлетворяет соотношению

$$\int_0^\tau c_1(s) b(s, t) ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\varphi_1(\lambda) g(\lambda) d\lambda$$

для почти всех t, $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Таким образом, при фиксированном t функция $b(s, t)$ от s, $0 \leqslant s \leqslant \tau$, является обобщенным преобразованием Фурье (на указанном отрезке) функции $e^{i\lambda t} g(\lambda)$. Нетрудно показать, что функция $b(s, t)$ при почти всех $s, t \in T$ совпадает с некоторой функцией

$$b(s-t); \quad s, t \in T.$$

Рассмотрим гильбертово пространство L^2 всех действительных интегрируемых с квадратом на отрезке $T = [0, \tau]$ функций $c(t)$, в котором скалярное произведение элементов $c_1(t)$ и $c_2(t)$ есть

$$(c_1, c_2) = \int_0^\tau c_1(t)\cdot c_2(t) dt.$$

Обозначим U линейный оператор из гильбертова пространства $L_T^2(F)$ в L^2, определенный на функциях $\varphi(\lambda) \in L$ как преобразование Фурье:

$$U\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\varphi(\lambda) d\lambda.$$

В силу условия леммы

$$(U\varphi, U\varphi) \asymp \langle\varphi, \varphi\rangle, \quad \varphi \in L. \tag{44}$$

Формула (42) означает, что билинейный функционал $b(\varphi_1, \varphi_2) = b(U^{-1}c_1, U^{-1}c_2)$ в гильбертовом пространстве L^2 задается интегральным оператором[2] B (типа Гильберта — Шмидта) с ядром $b(s-t)$, $0 \leqslant s, t \leqslant \tau$:

$$b(\varphi_1, \varphi_2) = (Bc_1, c_2) = (BU\varphi_1, U\varphi_2) = (U^*BU\varphi_1, \varphi_2); \quad \varphi_1, \varphi_2 \in L.$$

[1] См., например, [10].

[2] См., например, [29, стр. 261].

Таким образом, формула (42) означает, что билинейный функционал $b(\varphi_1, \varphi_2)$ в гильбертовом пространстве $L_T^2(F)$ задается оператором U^*BU (где U^* — оператор, сопряженный к U), в силу соотношений (44) также являющийся оператором Гильберта — Шмидта. Очевидно,

$$U^*BU = I - B_1^* B_1,$$

где $I - B_1^*B_1$ — оператор, фигурирующий в теореме 5. По лемме 7 он не имеет собственного значения, равного 1. Но эти условия означают эквивалентность гауссовских мер P и P_1 (см. введение и теоремы 5 и 6).

Лемма 10. *Пусть* $\widetilde{b}(\varphi, \psi)$ и $\widetilde{b}(\varphi, \psi)$ — *два билинейных симметричных функционала на пространстве* L, *такие что* $\widetilde{b}(\varphi, \psi)$ *задается оператором Гильберта — Шмидта в гильбертовом пространстве* $L_T^2(\widetilde{F})$ *и*

$$\frac{|b(\varphi, \varphi)|}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda} \leqslant \frac{|\widetilde{b}(\varphi, \varphi)|}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 \widetilde{f}(\lambda)\, d\lambda}, \quad \varphi \in L. \tag{45}$$

Тогда билинейный функционал $b(\varphi, \psi)$ *задается оператором* [1] *Гильберта — Шмидта в гильбертовом пространстве* $L_T^2(F)$.

Доказательство. Рассмотрим квадратичные формы $b(\varphi, \varphi)$ и $\widetilde{b}(\varphi, \varphi)$ в произвольном конечномерном подпространстве $M \subset L$. Рассматривая M как подпространство в $L_T^2(F)$, можно представить M в виде ортогональной суммы подпространств M^- и M^+, таких что

$$b(\varphi, \varphi) = b^+(\varphi, \varphi) \geqslant 0 \text{ при } \varphi \in M^+,$$
$$b(\varphi, \varphi) = -b^-(\varphi, \varphi) \leqslant 0 \text{ при } \varphi \in M^-$$

и $b(\varphi, \varphi) = b^+(\varphi, \varphi) - b^-(\varphi, \varphi)$ при всех $\varphi \in M$, где $b^+(\varphi, \varphi)$ и $b^-(\varphi, \varphi)$ — положительные квадратичные формы. Точно так же определим $\widetilde{b}^-(\varphi, \varphi)$ и $\widetilde{b}^+(\varphi, \varphi)$, $\varphi \in M$. Положим

$$B(\varphi, \varphi) = b^+(\varphi, \varphi) + b^-(\varphi, \varphi),$$
$$\widetilde{B}(\varphi, \varphi) = \widetilde{b}^+(\varphi, \varphi) + \widetilde{b}^-(\varphi, \varphi), \quad \varphi \in M.$$

Очевидно, при условии (45)

$$\frac{B(\varphi, \varphi)}{\int |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda} \leqslant \frac{2\widetilde{B}(\varphi, \varphi)}{\int |\varphi(\lambda)|^2 \widetilde{f}(\lambda)\, d\lambda}, \quad \varphi \in M.$$

Для положительных квадратичных форм, как известно [2], имеет место следующее:

$$\min_{R^k} \max_{\varphi \in R^k} \frac{B(\varphi, \varphi)}{\int |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda} = |\mu_k|,$$

$$\min_{R^k} \max_{\varphi \in R^k} \frac{\widetilde{B}(\varphi, \varphi)}{\int |\varphi(\lambda)|^2 \widetilde{f}(\lambda)\, d\lambda} = |\widetilde{\mu}_k|,$$

где R^k означает k-мерное подпространство в M, а $\mu_1, \mu_2, \ldots$ и $\widetilde{\mu}_1, \widetilde{\mu}_2, \ldots$ — собственные числа квадратичных форм $b(\varphi, \varphi)$, $\varphi \in M \subset L_T^2(F)$ и $\widetilde{b}(\varphi, \varphi)$, $\varphi \in M \subset L_T^2(F_1)$, такие что $|\mu_1| \geqslant |\mu_2| \geqslant \ldots$ и $|\widetilde{\mu}_1| \geqslant |\widetilde{\mu}_2| \geqslant \ldots$ Следовательно, при условии (45)

$$|\mu_k| \leqslant 2|\widetilde{\mu}_k|; \quad k = 1, 2, \ldots$$

---

[1] Т. е. $b(\varphi, \psi) = \langle B\varphi, \psi \rangle$, где B — оператор в $L_T^2(F)$.

[2] См., например, [29, стр. 257].

Для любых ортонормированных систем $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ в $M \subset L_T^2(F)$ и $\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2, \ldots$ в $M \subset L_T^2(F_1)$

$$\sum_{k,\, j} b(\varphi_k, \varphi_j)^2 = \sum_k \mu_k^2 \leqslant 2 \sum_k \widetilde{\mu}_k^2 = 2 \sum_{k,\, j} \widetilde{b}(\widetilde{\varphi}_k, \widetilde{\varphi}_j)^2 \leqslant C,$$

где C — некоторая постоянная, не зависящая от подпространства M, поскольку билинейный функционал $\widetilde{b}(\varphi, \psi)$ задается оператором Гильберта — Шмидта (см. условие (19)). Следовательно, и для полной ортонормированной системы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ в $L_T^2(F)$

$$\sum_{k,\, j=1}^{\infty} b(\varphi_k, \varphi_j)^2 \leqslant C,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 11. *Пусть спектральные плотности* $f(\lambda)$ и $f_1(\lambda)$, $\widetilde{f}(\lambda)$ и $\widetilde{f}_1(\lambda)$ *таковы, что*

$$f(\lambda) \geqslant \widetilde{f}(\lambda), \quad |f(\lambda) - f_1(\lambda)| \leqslant |\widetilde{f}(\lambda) - \widetilde{f}_1(\lambda)|,$$

причем разность $\widetilde{f}(\lambda) - \widetilde{f}_1(\lambda)$ *либо положительна, либо отрицательна, и гауссовские меры* $\widetilde{P}$ *и* $\widetilde{P}_1$, *отвечающие спектральным плотностям* $\widetilde{f}(\lambda) - \widetilde{f}_1(\lambda)$, *являются эквивалентными. Тогда эквивалентны и гауссовские меры* P *и* P_1.

Доказательство. Положим,

$$g(\lambda) = f(\lambda) - f_1(\lambda), \quad \widetilde{g}(\lambda) = \widetilde{f}(\lambda) - \widetilde{f}_1(\lambda).$$

Для билинейных функционалов

$$b(\varphi, \psi) = \int \varphi(\lambda) \cdot \overline{\psi(\lambda)}\, g(\lambda)\, d\lambda, \quad \widetilde{b}(\varphi, \psi) = \int \varphi(\lambda) \overline{\psi(\lambda)}\, \widetilde{g}(\lambda)\, d\lambda$$

выполняется условие леммы 10

$$\frac{|b(\varphi, \varphi)|}{\int |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda} \leqslant \frac{|\widetilde{b}(\varphi, \varphi)|}{\int |\varphi(\lambda)|^2 \widetilde{f}(\lambda)\, d\lambda}, \quad \varphi \in L.$$

Но для эквивалентных мер $\widetilde{P}$ и $\widetilde{P}_1$ билинейный функционал $\widetilde{b}(\varphi, \psi)$ задается оператором Гильберта — Шмидта (см. введение и теорему 5), так что билинейный функционал $b(\varphi, \psi)$ также задается оператором Гильберта — Шмидта и (при условии леммы 7) гауссовские меры P и P_1 являются эквивалентными.

Лемма 12. *Пусть выполнено соотношение* (38). *Тогда пространство* $L_T^2(F)$ *состоит из целых аналитических функций* $\varphi(\lambda)$, *каждая из которых может быть описана формулой* (40) *при* $n > \frac{r}{2}$. *Если спектральная плотность* $f_1(\lambda)$ *отличается от* $f(\lambda)$ *лишь на некотором конечном интервале*[1], *то соответствующие гауссовские меры* P *и* P_1 *эквивалентны.*

Доказательство. Очевидно, если соотношение (38) выполняется при некотором $r_0 > 0$, то оно выполняется и при всех $r = 2n > r_0$, где n — целое. Каждая из рассматриваемых плотностей при достаточно больших λ совпадает со спектральной плотностью $\widetilde{f}(\lambda)$, удовлетворяющей условию

$$\widetilde{f}(\lambda) \geqslant \sigma^2 (1 + \lambda^2)^{-n},$$

и при эквивалентности пар P и $\widetilde{P}$, P_1 и $\widetilde{P}$ будут эквивалентными и гауссов-

[1] На указанном интервале плотность $f_1(\lambda)$ может быть произвольной, в частности, может быть тождественно равной 0.

ские меры P и P_1. Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что

$$f(\lambda) \geqslant \sigma^2 (1+\lambda^2)^{-n}.$$

Положим $f(\lambda) = \sigma^2 (1+\lambda^2)^{-n}$, а спектральную плотность $\widetilde{f}_1(\lambda)$ выберем так, чтобы она совпадала с $\widetilde{f}(\lambda)$ при достаточно больших λ, причем

$$\widetilde{f}_1(\lambda) - \widetilde{f}(\lambda) \geqslant |f(\lambda) - f_1(\lambda)|.$$

Очевидно, это можно сделать, поскольку разность $\widetilde{f}(\lambda) - f_1(\lambda) \equiv 0$ при достаточно больших λ. При эквивалентности соответствующих мер $\widetilde{P}$ и $\widetilde{P}_1$ будут эквивалентны и меры P и P_1 (см. лемму 11). Таким образом, достаточно доказать эквивалентность гауссовских мер $\widetilde{P}$ и $\widetilde{P}_1$, отвечающих указанным выше спектральным плотностям $\widetilde{f}(\lambda)$ и $\widetilde{f}_1(\lambda)$. Спектральная плотность $\widetilde{f}^{(n,n)}(\lambda) = \lambda^{2n} \cdot \widetilde{f}(\lambda)$ производной $u^{(n)}\varphi$, $\varphi \in L$, удовлетворяет соотношению (39) при $n=0$, а соответствующая разность $\widetilde{f}^{(n,n)}(\lambda) - \widetilde{f}_1^{(n,n)}(\lambda) = \lambda^{2n}(\widetilde{f}(\lambda) - \widetilde{f}_1(\lambda))$ является интегрируемой функцией, обращающейся в 0 вне некоторого конечного интервала. Следовательно, преобразование Фурье этой разности представляет собой непрерывную функцию $b(t)$, удовлетворяющую, в частности, и условию (42). Согласно леммам 8 и 9, рассматриваемые меры $\widetilde{P}$ и $\widetilde{P}_1$ являются эквивалентными. Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть спектральные плотности $f(\lambda)$ и $f_1(\lambda)$ таковы, что функция $h(\lambda) = 1 - \frac{f_1(\lambda)}{f(\lambda)}$ неотрицательна и не возрастает. Пусть $\widetilde{f}(\lambda) = f(\lambda) \cdot r(\lambda)$, $\widetilde{f}_1(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot r(\lambda)$, где $r(\lambda)$ — неотрицательная неубывающая функция. Тогда, если эквивалентны гауссовские меры P и P_1, то эквивалентны и гауссовские меры $\widetilde{P}$ и $\widetilde{P}_1$, отвечающие спектральным плотностям $\widetilde{f}(\lambda)$ и $\widetilde{f}_1(\lambda)$.*

Доказательство. Установим, что

$$\frac{\int |\varphi(\lambda)|^2 \widetilde{g}(\lambda)\, d\lambda}{\int |\varphi(\lambda)|^2 \widetilde{f}(\lambda)\, d\lambda} \leqslant \frac{\int |\varphi(\lambda)|^2 g(\lambda)\, d\lambda}{\int |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda}, \quad \varphi \in L,$$

где $g(\lambda) = f(\lambda) - f_1(\lambda)$, $\widetilde{g}(\lambda) = \widetilde{f}(\lambda) - \widetilde{f}_1(\lambda) = g(\lambda) \cdot r(\lambda)$. Положим

$$c = \frac{\int |\varphi|^2 f(\lambda)\, d\lambda}{\int |\varphi|^2 \widetilde{f}(\lambda)\, d\lambda} = \frac{\int |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda}{\int |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)\, r(\lambda) d\lambda}.$$

Найдется такое λ_0, что $c \cdot r(\lambda) \leqslant 1$ при $|\lambda| < \lambda_0$ и $c \cdot r(\lambda) > 1$ при $|\lambda| > \lambda_0$. Имеем $h(\lambda) \geqslant h(\lambda_0)$ при $|\lambda| < \lambda_0$, $h(\lambda) \leqslant h(\lambda_0)$ при $|\lambda| > \lambda_0$,

$$\int_0^{\lambda_0} |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)[1 - c \cdot r(\lambda)]\, h(\lambda)\, d\lambda \geqslant h(\lambda_0) \int_0^{\lambda_0} |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)[1 - c \cdot r(\lambda)]\, d\lambda,$$

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)[1 - c \cdot r(\lambda)]\, h(\lambda)\, d\lambda \geqslant h(\lambda_0) \int_{\lambda_0}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)[1 - c \cdot r(\lambda)]\, d\lambda,$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)[1 - c \cdot r(\lambda)]\, h(\lambda)\, d\lambda \geqslant h(\lambda_0) \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)[1 - c \cdot r(\lambda)]\, d\lambda = 0$$

и, следовательно,

$$c\cdot\int|\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)\cdot r(\lambda)\,h(\lambda)\,d\lambda = c\int|\varphi(\lambda)|^2\tilde{g}(\lambda)\,d\lambda \leqslant \int|\varphi(\lambda)|^2 g(\lambda)\,d\lambda.$$

Поскольку гауссовские меры P и P_1 эквивалентны, билинейный функционал $b(\varphi, \psi) = \int\varphi(\lambda)\cdot\overline{\psi(\lambda)}\,g(\lambda)\,d\lambda$ задается в L_T^2 (F) оператором Гильберта — Шмидта, и по лемме 10 таким же свойством должен обладать и билинейный функционал $\tilde{b}(\varphi, \psi) = \int\varphi(\lambda)\overline{\psi(\lambda)}\,\tilde{g}(\lambda)\,d\lambda$ в гильбертовом пространстве L_T^2 (F), что и означает эквивалентность гауссовских мер $\tilde{P}$ и $\tilde{P_1}$. Лемма доказана.

3. Основные теоремы об эквивалентности

Пусть (относительно вероятностной меры P) $\xi(t) = \xi(\omega, t)$, $-\infty < t < \infty$,— стационарный гауссовский процесс со спектральной плотностью $f(\lambda)$, удовлетворяющей условию (38) и такой, что

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}} f(\lambda) < \infty \tag{46}$$

(напомним, что функция $f(\lambda)$ является интегрируемой). Пусть P_1 — другая вероятностная мера, относительно которой $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$,— также гауссовский стационарный процесс со спектральной плотностью $f_1(\lambda)$. Обозначим, как и раньше, $\mathfrak{A}(T)$ σ-алгебру множеств вероятностного пространства Ω, порожденную величинами $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ на Ω, $t \in T$. Пусть T есть отрезок $[0, \tau]$.

Теорема 9. *Для эквивалентности гауссовских мер P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{A}(T)$ необходимо и достаточно, чтобы разность корреляционных функций*

$$b(s, t) = B(s-t) - B_1(s-t), \quad s, t \in T,$$

допускала продолжение на всю плоскость $-\infty < s, t < \infty$, такое что преобразование Фурье

$$\tilde{b}(\lambda, \mu) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda s-\mu t)}b(s, t)\,ds\,dt$$

удовлетворяет условию[1]

$$\int\limits_R^{\infty}\int\limits_R^{\infty}\frac{\tilde{b}(\lambda, \mu)}{f(\lambda)\cdot f(\mu)}\,d\lambda\,d\mu < \infty \tag{47}$$

при каком-либо $R < \infty$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 6 и рассуждениями, изложенными в примере 13. Именно, соответствующее пространство $\overline{U \times U}$ унитарно изоморфно пространству $L_{T\times T}^2$ всех функций $\varphi(\lambda, \mu)$ на плоскости $-\infty < \lambda, \mu < \infty$ со скалярным произведением

$$\langle\varphi, \psi\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda, \mu)\cdot\overline{\psi(\lambda, \mu)}\,f(\lambda)\cdot f(\mu)\,d\lambda\,d\mu,$$

которое является подпространством пространства $L_{R\times R}^2$ всех таких функций, натянутое на элементы $\varphi(\lambda, \mu) = e^{i(\lambda s-\mu t)}$, где параметры s, t входят

[1] Ср. с условием (31) примера 13.

во множество T. При этом интегральное представление (22) равносильно тому, что

$$b(s,\ t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\lambda s-\mu t)}\varphi(\lambda,\ \mu)f(\lambda)\cdot f(\mu)\,d\lambda\,d\mu;\ s,\ t\in T, \tag{48}$$

где $\varphi(\lambda, \mu)$ — некоторая функция из подпространства $L^2_{T\times T}$. Интегральное представление (48) является необходимым и достаточным для эквивалентности P и P_1, поскольку в силу леммы 7 условие об отсутствии единичного собственного значения у оператора $I - B_1^* B_1$ является выполненным. Видно, что функция $b(s, t)$, определенная формулой (48) при всех $-\infty < s, t < \infty$, удовлетворяет условию (47), поскольку

$$\widetilde{b}(\lambda,\ \mu) = \varphi(\lambda,\ \mu)\cdot f(\lambda)\cdot f(\mu),\ \text{где}\ \varphi(\lambda,\ \mu)\in L^2_{R\times R}.$$

Далее, предположим выполненным условие (47). По лемме 12 гауссовские меры P и P_1 будут эквивалентны тогда и только тогда, когда будут эквивалентны гауссовские меры $\widetilde{P}$ и $\widetilde{P}_1$, отвечающие спектральным плотностям $\widetilde{f}(\lambda)$ и $\widetilde{f}_1(\lambda)$, таким что $\widetilde{f}(\lambda) = f(\lambda)$ при $|\lambda| \geqslant R$ и $\widetilde{f}(\lambda) - \widetilde{f}_1(\lambda) = f(\lambda) - f_1(\lambda)$, причем $\widetilde{f}(\lambda) \geqslant C > 0$ при $|\lambda| \leqslant R$. Для $\widetilde{P}$ и $\widetilde{P}_1$ соответствующая функция $\widetilde{b}(s, t)$ совпадает с $b(s, t)$ и можно считать, что $\widetilde{f}(\lambda) = f(\lambda)$. Но тогда условие (47) можно переписать в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\widetilde{b}(\lambda,\ \mu)|^2}{f(\lambda)f(\mu)}\,d\lambda\,d\mu<\infty.$$

Положим $\varphi(\lambda, \mu) = \widetilde{b}(\lambda, \mu)\,/\,f(\lambda)\cdot f(\mu)$. Функция $\varphi(\lambda, \mu)$ входит в пространство $L^2_{R\times R}$, и при всех s, t имеет место соотношение (48). Если вместо $\varphi(\lambda, \mu)$ взять ее проекцию в подпространстве $L^2_{T\times T}$, то для $s, t \in T$ будет выполнено то же соотношение, где $\varphi \in L^2_{T\times T}$, что по теореме 6 и означает эквивалентность гауссовских мер P и P_1. Теорема доказана.

Так же, как и в примере 13, из теоремы 9 легко выводится следующее предложение.

Теорема 10. *Пусть спектральная плотность удовлетворяет соотношению*

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\,\lambda^{2n}f(\lambda)<\infty, \tag{49}$$

где n — целое. Тогда для эквивалентности гауссовских мер P и P_1, необходимо, чтобы разность $b(s, t) = B(s - t) - B_1(s - t)$ имела $2n$-ю производную $\frac{\partial^{2n}}{\partial s^n \partial t^n} b(s, t)$, причем

$$\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{\tau}\left[\frac{\partial^{2n}}{\partial s^n\partial t^n}\,b(s,\ t)\right]^2 ds\,dt<\infty. \tag{50}$$

При

$$\underline{\lim_{\lambda\to\infty}}\,\lambda^{2n}f(\lambda)>0 \tag{51}$$

указанное условие (50) *является и достаточным для эквивалентности P и P_1.*

Отметим, в частности, что теорема 10 дает простые необходимые и достаточные условия эквивалентности в случае, когда $f(\lambda)$ принадлежит важному классу спектральных плотностей, одновременно удовлетворяющих соотношениям (49) и (51); например, в случае

$$f(\lambda) \asymp (1 + \lambda^2)^{-n}.$$

Доказательство. Если меры P и P_1 эквивалентны, то при условии (49) преобразование Фурье $\widetilde{b}(\lambda, \mu)$ функции $b(s, t)$ $(-\infty < s, t < \infty)$ вида (48) таково, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2n}\cdot\mu^{2n}\,|\widetilde{b}(\lambda, \mu)|^2\,d\lambda\,d\mu < \infty.$$

Очевидно, функция

$$c(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda s-\mu t)}(-i\lambda)^n (i\mu)^n \widetilde{b}(\lambda, \mu)\,d\lambda\,d\mu$$

совпадает с производной $\frac{\partial^{2n}}{\partial s^n \partial t^n} b(s, t)$ и удовлетворяет условию (50). Далее, если выполнено это условие, то функция $b(s, t)$, $0 \leqslant s, t \leqslant \tau$ может быть продолжена на всю плоскость так, чтобы она по-прежнему имела производную $\frac{\partial^{2n}}{\partial s^n \partial t^n} b(s, t)$ (при всех s, t) и тождественно обращалась в 0 вне некоторого конечного квадрата $T' \times T'$. Используя $2n$-кратное интегрирование по частям, из формулы

$$\varphi(\lambda, \mu) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{T'\times T'} e^{i(\lambda s-\mu t)}\frac{\partial^{2n}}{\partial s^n \partial t^n} b(s, t)\,ds\,dt$$

(где $|\varphi(\lambda, \mu)|^2$, $-\infty < \lambda, \mu < \infty$, интегрируемая функция) получаем

$$\frac{1}{4\pi^2}\iint_{T'\times T'} e^{i(\lambda s-\mu t)}\frac{\partial^{2n}}{\partial s^n \partial t^n} b(s, t)\,ds\,dt =$$

$$= \frac{i\lambda}{4\pi^2}\iint_{T'\times T'} e^{i(\lambda s-\mu t)}\frac{\partial^{2n-1}}{\partial s^{n-1} \partial t^n} b(s, t)\,ds\,dt =$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \frac{(i\lambda)^n (i\mu)^n}{4\pi^2}\iint_{T'\times T'} e^{i(\lambda s-\mu t)} b(s, t)\,ds\,dt = (i\lambda)^n (i\mu)^n \widetilde{b}(\lambda, \mu) = \varphi(\lambda, \mu).$$

Отсюда следует, что при условии (51), когда $f(\lambda) \geqslant \sigma^2\lambda^{-2n}$, при $\lambda \geqslant R$ функция $\widetilde{b}(\lambda, \mu)$ удовлетворяет условию (47), т. е. гауссовские меры P и P_1 являются эквивалентными. Теорема доказана.

Пример 14. Пусть (относительно вероятностной меры P) $\xi(t) = \xi(\omega, t)$, $-\infty < t < \infty$,— стационарный гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$B(t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0$$

(соответствующая спектральная плотность есть $f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{\pi}\frac{\alpha}{-\lambda^2+\alpha^2}$). Пусть P_1 — другая вероятностная мера, относительно которой $\xi(t)$ также стационарный гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$B_1(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{при } |t| \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } |t| > 1 \end{cases}$$

(соответствующая спектральная плотность есть $f_1(\lambda) = \frac{1}{\pi}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda^2}$). Согласно теореме 10, для эквивалентности гауссовских мер P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(T)$, $T = [0, \tau]$, необходимо и достаточно, чтобы разность

$b(t) = B(t) - B_1(t)$ имела на интервале $(0, \tau)$ производную $b''(t)$, такую что

$$\int_0^\tau\int_0^\tau [b''(t-s)]^2\,ds\,dt < \infty.$$

Видно, что эти условия выполняются, если

$$B'(t-0) - B'(t-0) = B_1'(t-0) - B'(t+0), \quad -\tau < t < \tau,$$

т. е. при $\alpha\cdot\sigma^2 = 1$, $\tau \leqslant 1$, и нарушаются при других значениях параметров α, σ^2, τ.

Назовем плотность $f(\lambda)$ Δ-*регулярной*, если существует целая аналитическая функция $\varphi_\Delta(\lambda)$ вида

$$\varphi_\Delta(\lambda) = \int_0^\Delta e^{i\lambda t} c_\Delta(t)\,dt,$$

где $c_\Delta(t)$ — интегрируемая функция на отрезке $[0, \Delta]$, такая что

$$0 < \varliminf_{\lambda\to\infty} f(\lambda)\,|\varphi_\Delta(\lambda)|^{-2} \leqslant \varlimsup_{\lambda\to\infty} f(\lambda)\,|\varphi_\Delta(\lambda)|^2 < \infty. \qquad (52)$$

Спектральные плотности такого типа образуют весьма широкий класс. В частности, этот класс содержит ограниченные спектральные плотности $f(\lambda)$ такие, что при некотором $r > 1$

$$0 < \varliminf_{\lambda\to\infty} f(\lambda)\cdot\lambda^r \leqslant \varlimsup_{\lambda\to\infty} f(\lambda)\cdot\lambda^r < \infty$$

(напомним, что спектральная плотность $f(\lambda)$ интегрируема).

Чтобы установить Δ-регулярность указанных плотностей $f(\lambda)$ (причем *при любом* $\Delta > 0$), достаточно заметить следующее. Если плотность $f_1(\lambda)$ является Δ_1-регулярной, а плотность $f_2(\lambda)$ является Δ_2-регулярной, то произведение $f(\lambda) = f_1(\lambda)\cdot f_2(\lambda)$, очевидно, будет $(\Delta_1 + \Delta_2)$-регулярной плотностью. Легко видеть, что можно рассмотреть лишь случай $1 < r \leqslant 2$, когда в качестве подходящей функции $c_\Delta(t)$ можно взять $c_\Delta(t) = t^{\frac{r}{2}} - 1$.

Пусть $h(\lambda)$ — некоторая функция, растущая не быстрее некоторой степени $|\lambda|^{2n}$. Будем называть функцию $\alpha(t)$ на отрезке T *обобщенным преобразованием Фурье* (*на указанном отрезке* T) функции $h(\lambda)$, если

$$\int_T c(t)\,\alpha(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,h(\lambda)\,d\lambda, \quad \varphi \in L$$

(где $c(t)$ и $\varphi(\lambda)$ связаны обычным преобразованием Фурье).

Из общей теоремы 9 легко выводится следующее предложение.

Теорема 11. *Пусть спектральная плотность $f(\lambda)$ является Δ-регулярной и удовлетворяет соотношению* (52). *Тогда для эквивалентности гауссовских мер P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{A}(T)$, $T = [0, \tau]$, достаточно, чтобы функция*

$$h(\lambda) = \left|1 - \frac{f_1(\lambda)}{f(\lambda)}\right|$$

имела на отрезке $T' = [0, \tau + \Delta]$ обобщенным преобразованием Фурье функцию $\alpha(t)$ такую, что [1]

$$\int_0^{\tau+\Delta}\int_0^{\tau+\Delta} \alpha(s-t)^2\,ds\,dt < \infty, \qquad (53)$$

[1] Ср. с условием леммы 9.

где $\alpha(-t)=\alpha(t)$ *при* $0\leqslant t\leqslant \tau+\Delta$. Отметим сразу, что условие (53) выполнено, если

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[1-\frac{f_1(\lambda)}{f(\lambda)}\right]^2 d\lambda<\infty. \qquad (54)$$

Доказательство. В силу лемм 11 и 13 от спектральных плотностей $f(\lambda)$ и $f_1(\lambda)$ можно перейти к спектральным плотностям вида $\tilde f(\lambda)=c\,|\,\varphi_\Delta(\lambda)\,|^2$ и $\tilde f_1(\lambda)=\tilde f(\lambda)+c_1 h(\lambda)\tilde f(\lambda)$ таким, что при достаточно больших $\lambda f(\lambda)\geqslant \tilde f(\lambda)$ и $|f(\lambda)-f_1(\lambda)|=h(\lambda)f(\lambda)\leqslant c_1 h(\lambda)\tilde f(\lambda)=|\tilde f(\lambda)-\tilde f_1(\lambda)|$. Очевидно, такие $\tilde f(\lambda)$ и $\tilde f_1(\lambda)$ можно выбрать, изменив исходную плотность $f(\lambda)$ на некотором конечном интервале, что не повлияет на эквивалентность гауссовских мер P и P_1. А эти меры действительно будут эквивалентными, если эквивалентными являются соответствующие меры $\tilde P$ и $\tilde P_1$. Для простоты обозначений положим $f(\lambda)=\tilde f(\lambda)$, $f_1(\lambda)=\tilde f_1(\lambda)$, $c=c_1=1$. Разность соответствующих корреляционных функций есть

$$b(s,t)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda s-\lambda t)}h(\lambda)\cdot\varphi_\Delta(\lambda)\cdot\overline{\varphi_\Delta(\lambda)}\,d\lambda.$$

Поскольку удовлетворяющая условию (53) функция $\alpha(t)$, $0\leqslant t\leqslant\tau+\Delta$, есть обобщенное преобразование Фурье функции $h(\lambda)$, а по условию Δ-регулярности преобразование Фурье функции $\varphi_\Delta(\lambda)$ является финитной интегрируемой функцией ($c_\Delta(t)=0$ при $t<0$, $t>\Delta$), то

$$b(s,t)=-\iint\limits_{T'\times T'}\alpha(u,v)\,c_\Delta(s-u)\,c_\Delta(t-v)\,du\,dv, \qquad (55)$$

где $\alpha(u,v)=\alpha(u-v)$ при $0\leqslant u,\ v\leqslant\tau+\Delta$, $\alpha(-u)=\alpha(u)$. Пусть $\tilde\alpha(\lambda,\mu)$ — преобразование Фурье интегрируемой в квадрате функции $\alpha(s,t)$, $\alpha(s,t)=0$ вне квадрата $T'\times T'$. Тогда преобразование Фурье функции $b(s,t)$, определенной формулой (55), есть

$$\tilde b(\lambda,\mu)=\tilde\alpha(\lambda,\mu)\ \varphi_\Delta(\lambda)\cdot\varphi_\Delta(\mu).$$

Имеем

$$|\tilde b(\lambda,\mu)|^2=|\tilde\alpha(\lambda,\mu)|^2 f(\lambda)\cdot f(\mu).$$

Видно, что функция $\tilde b(\lambda,\mu)$ удовлетворяет условию (47), так что гауссовские меры P и P_1 эквивалентны. Теорема доказана.

Назовем функцию $r(\lambda)$ *грубо монотонной*, если имеется такая монотонная функция $r_0(\lambda)$, что

$$0<\varliminf_{\lambda\to\infty}\frac{r(\lambda)}{r_0(\lambda)}\leqslant\varlimsup_{\lambda\to\infty}\frac{r(\lambda)}{r_0(\lambda)}<\infty.$$

Теорема 12. *Пусть спектральные плотности таковы, что*

$$\varlimsup_{\lambda\to\infty}\frac{f_1(\lambda)}{f(\lambda)}\leqslant 1,$$

причем $f(\lambda)$ и *функция* $h(\lambda)=\left|1-\frac{f_1(\lambda)}{f(\lambda)}\right|$ *являются грубо монотонными. Тогда для эквивалентности гауссовских мер* P *и* P_1 *необходимо, чтобы функция* $h(\lambda)$ *имела на отрезке* $T=[0,\tau]$ *обобщенное преобразование Фурье*

$\alpha(t)$, удовлетворяющее условию (53) при $\Delta = 0$, т. е.

$$\int_0^\tau\int_0^\tau \alpha(s-t)^2\,ds\,dt < \infty. \tag{56}$$

Отметим сразу, что условие (56) не выполняется, когда

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{1/2} h(\lambda) > 0, \tag{57}$$

так что

при условии (57) гауссовские меры P и P_1 являются ортогональными.

В самом деле, обобщенное преобразование Фурье функции $h(\lambda)=\sigma^2\cdot|\lambda|^{-1/2}$ есть [1]

$$\alpha(t) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)|t|^{-1/2}$$

и не удовлетворяет условию (56). В общем случае, от спектральных плотностей $f(\lambda)$ и $f_1(\lambda)$ можно перейти к плотностям $\tilde{f}(\lambda) = f(\lambda)$ и $\tilde{f}_1(\lambda) = f(\lambda) - \tilde{g}(\lambda)$, где $\tilde{g}(\lambda) = \tilde{h}(\lambda)f(\lambda) \leqslant h(\lambda)f(\lambda) = g(\lambda)$, $\tilde{h}(\lambda) = \sigma^2|\lambda|^{-\frac{1}{2}}$. Для таких плотностей соответствующие меры $\tilde{P}$ и $\tilde{P}_1$ будут ортогональны, а вместе с ними будут ортогональны и исходные меры P и P_1 (см. лемму 11).

Доказательство теоремы 12. Используя тот же прием, что и раньше, от спектральных плотностей $f(\lambda)$ и $f_1(\lambda)$ можно перейти к строго монотонной спектральной плотности $\tilde{f}(\lambda)$, $f(\lambda) \geqslant \tilde{f}(\lambda)$, и строго монотонной неотрицательной функции $\tilde{h}(\lambda) = 1 - \frac{\tilde{f}_1(\lambda)}{\tilde{f}(\lambda)}$, такой что $\tilde{f}(\lambda) - \tilde{f}_1(\lambda) \leqslant f(\lambda) - f_1(\lambda)$ (см. лемму 11). Будем считать, что $f(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)$, $\tilde{f}_1(\lambda) = f_1(\lambda)$. Но если гауссовские меры P и P_1 эквивалентны, то будут эквивалентны и гауссовские меры $\tilde{P}$ и $\tilde{P}_1$, отвечающие плотностям $\tilde{f}(\lambda) = f(\lambda)\cdot r(\lambda)$ и $\tilde{f}_1(\lambda) = f_1(\lambda)\cdot r(\lambda)$, где $r(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)}$ (см. лемму 13). Но $\tilde{f}(\lambda) \equiv 1$ и, согласно лемме 9, для эквивалентности $\tilde{P}$ и $\tilde{P}_1$ необходимо, чтобы функция $\tilde{f}(\lambda) - \tilde{f}_1(\lambda) = h(\lambda)$ имела на отрезке $T = [0, \tau]$ обобщенное преобразование Фурье $\alpha(t)$, удовлетворяющее условию (56). Теорема доказана.

4. Некоторые свойства траекторий

Пусть $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$,— сепарабельный гауссовский стационарный процесс с нулевым средним значением и корреляционной функцией $B(t)$, $-\infty < t < \infty$. Как известно [2], траектории $\xi(\omega,\cdot) = \xi(\omega, t)$, $-\infty < t < \infty$ такого процесса (при почти всех ω) либо неограничены на любом интервале — в каждой точке имеют разрыв второго рода, либо непрерывны. При этом траектории будут непрерывны, если выполнено условие

$$\Delta_h \Delta_{-h} B(0) = o\{|\log|h||^{-\alpha}\}, \quad \alpha > 1$$

при $h \to 0$, где Δ_h означает разностный оператор: $\Delta_h B(t) = B(t+h) - B(t)$, так что

$$\Delta_h \Delta_{-h} B(0) = 2[B(0) - B(h)],$$

[1] См., например, [10, стр. 208].

[2] См., например, [45, стр. 169 и далее], а также [41].

или если выполнено условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\log(1+|\lambda|)]^{\alpha} F(d\lambda) < \infty, \quad \alpha > 1,$$

где $F(d\lambda)$ — спектральная мера рассматриваемого процесса. Если в некоторой окрестности точки $t = 0$ корреляционная функция $B(t)$ является выпуклой, причем

$$\Delta_h \Delta_{-h} B(0) \geqslant \varepsilon \,|\log h|^{-1},$$

то траектории будут разрывны.

Ограничимся рассмотрением непрерывных гауссовских процессов. Для наглядности будем считать случайный процесс $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$, «непосредственно заданным», т. е. в качестве вероятностного пространства взято некоторое функциональное пространство X (например, пространство всех непрерывных действительных функций $x = x(t)$ от t), и величины $\xi(t) = \xi(x, t)$ от $x \in X$ определены как

$$\xi(x, t) = x(t), \; x \in X$$

(для каждой из величин $\xi(t)$ параметр t является фиксированным, и $\xi(x, t)$ совпадает со значением функции $x = x(t)$ в соответствующей фиксированной точке t) — см. § 1 гл. I.

Пусть корреляционная функция $B(t)$ удовлетворяет условию

$$\Delta_h \Delta_{-h} B(0) \leqslant C\,|h|^{2\alpha} \cdot \log |h|^{-1} \tag{58}$$

при достаточно малых h. Тогда, как известно [1], почти все траектории $x = x(t)$ удовлетворяют условию Липшица

$$|x(t+h) - x(t)| \leqslant \sqrt{C}\, \frac{2^{2\alpha + \frac{1}{2}}}{2^{\alpha} - 1}\, |h|^{\alpha} \tag{59}$$

при всех h из некоторой окрестности 0 (зависящей от $x \in X$), где постоянная C и показатель α те же, что и в условии (58). Если в некоторой окрестности точки $t = 0$ корреляционная функция $B(t)$ является выпуклой, причем

$$\Delta_h \Delta_{-h} B(0) \geqslant \varepsilon\,|h|^{2\alpha} \cdot \log |h|^{-1} \tag{60}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$, то почти все траектории $x = x(t)$ удовлетворяют соотношению

$$\overline{\lim_{h \to 0}}\, |x(t+h) - x(t)| \cdot |h|^{-\alpha} \geqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \tag{61}$$

где фигурирует то же самое $\varepsilon > 0$, что и в соотношении (60).

Пусть P и P_1 — гауссовские меры в функциональном пространстве X (определенные на σ-алгебре множеств этого пространства, порожденной величинами $\xi(t) = \xi(x, t)$ от $x \in X$) с нулевыми средними значениями и корреляционными функциями $B(t)$ и $B_1(t)$. Ясно, что если $B(t)$ удовлетворяет условию (58), а $B_1(t)$ — условию (60) с соответствующим показателем α_1, причем $\alpha_1 > \alpha$ (или $\alpha_1 = \alpha$, но $\varepsilon > C \dfrac{2^{4\alpha+2}}{(2^{\alpha}-1)^2}$), то эти меры будут ортогональны на любой σ-алгебре $\mathfrak{A}(T)$, порожденной величинами $\xi(t) = \xi(x, t)$ от $x \in X$ с параметром t из отрезка $T = [0, \tau]$. Действительно, при указанных условиях мера P сосредоточена на множестве функций $x = x(t)$, удов-

[1] См., например, [41].

летворяющих соотношению (59), а P_1 — на множестве функций $x = x(t)$, удовлетворяющих соотнощению (61) точнее

$$P\left\{\overline{\lim_{h\to 0}}|x(t+h)-x(t)|\cdot|h|^{-\alpha}\leqslant\sqrt{C}\,\frac{2^{2\alpha+\frac{1}{2}}}{2^{\alpha}-1}\right\}=1,$$

$$P_1\left\{\overline{\lim_{h\to 0}}|x(t+h)-x(t)|\cdot|h|^{-\alpha}\geqslant\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right\}=1.$$

Как известно, стационарный процесс $\xi(t)$ является дифференцируемым (в среднем) тогда и только тогда, когда существует производная $B''(0) = -\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\Delta_h\Delta_{-h}B(0)$ (что равносильно условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda^2F(d\lambda)<\infty$). Корреляционная функция производной $\xi'(t)$ есть $-B''(t)$, $-\infty<t<\infty$, а спектральная мера есть $\lambda^2F(d\lambda)$. Рассматриваемые в дальнейшем свойства траекторий устанавливаются для недифференцируемых процессов. Это не ограничивает применимости получаемых результатов к вопросу об эквивалентности гауссовских распределений P и P_1, так как для эквивалентных распределений гауссовский процесс $\xi(t)$, $-\infty<t<\infty$, имеет одинаковое число производных, а при условии (38) их имеется лишь конечное число, и всегда можно перейти к рассмотрению последней производной $\xi^{(n)}(t)$ (см. по этому поводу лемму 7).

Рассмотрим функцию $\Delta_h^m\Delta_{-h}^mB(t)$ от t (где $m=1$ или $m=2$). Предположим, что всюду, кроме конечного числа точек, на интервале $(0,\tau)$ существует $2m$-я производная $B^{2m}(t)$, имеющая лишь разрывы первого рода. В каждой точке непрерывности

$$\Delta_h^m\Delta_{-h}^mB(t)\asymp B^{(2m)}(t)\cdot|h|^{2m}.$$

С другой стороны, для недифференцируемого процесса

$$(\Delta_h^m\Delta_{-h}^mB(0))^{-1}=o\{h^{-2m}\},$$

поскольку в противном случае для некоторой последовательности h_k $(k=1,2,\ldots)$, $n_k\to 0$, и постоянной $C<\infty$

$$C\geqslant h^{-2m}(\Delta_h^m\Delta_{-h}^mB(0))\geqslant\int\limits_{-\mu}^{\mu}\left|\frac{\Delta_h^me^{i\lambda\cdot 0}}{h^m}\right|^2F(d\lambda)\asymp\int\limits_{-\mu}^{\mu}\lambda^{2m}F(d\lambda)$$

при $h=h_k$ и любом μ, что противоречит условию недифференцируемости. Видно, что в каждой точке непрерывности

$$\Delta_h^m\Delta_{-h}^mB(t)=o\{\Delta_h^m\Delta_{-h}^mB\},\tag{62}$$

где $\Delta_h^m\Delta_{-h}^mB=\Delta_h^m\Delta_{-h}^mB(0)$. При этом в каждой точке

$$|\Delta_h^m\Delta_{-h}^mB(t)|\leqslant\Delta_h^m\Delta_{-h}^mB,$$

поскольку функция $\Delta_h^m\Delta_{-h}^mB(t)$ от t является положительно определенной. Таким образом,

для любого $\varepsilon>0$ можно найти конечное число интервалов общей длины не более ε, таких что на замкнутом множестве $T\setminus I_\varepsilon$ (где I_ε есть объединение указанных интервалов) равномерно по t выполняется условие (62).

При указанном условии имеет место следующее предельное соотношение:

$$\lim_{h\to 0}(\Delta_h^m\Delta_{-h}^mB)^{-1}N^{-1}\sum_{k=1}^{N}[\Delta_h^mx(kh)]^2=1,\tag{63}$$

где $N = [h^{-1}\tau] - m$, *а предел понимается в смысле среднеквадратичной сходимости.*

В самом деле, нетрудно подсчитать, что

$$E\Delta_h^m x(s)\,\Delta_h^m x(t) = \Delta_h^m \Delta_{-h}^m B\,(s-t),$$
$$D_m(h) = \mathrm{D}\left\{\sum_{k=1}^{N} [\Delta_h^m x(kh)]^2\right\} = 2\sum_{k,\,j=1}^{N} [\Delta_h^m \Delta_{-h}^m B((k-j)\,h)]^2. \tag{64}$$

При фиксированном j каждому из интервалов системы I_ε может принадлежать не больше, чем $1 + [\varepsilon h^{-1}]$ точек вида $(k-j)\,h$, а всего таких точек, принадлежащих системе I_ε,— не больше чем $2n\,(1 + [\varepsilon h^{-1}])$, где n — число интервалов в I_ε, зависящее, вообще говоря, от ε. Далее, поскольку

$$|\,\Delta_h^m \Delta_{-h}^m B(t)\,| \leqslant \Delta_h^m \Delta_{-h}^m B,$$

при фиксированном ε из соотношений (62) и (64) получаем, что

$$\lim_{h\to 0} h^2 (\Delta_h^m \Delta_{-h}^m B)^{-2} D_m(h) \leqslant C\varepsilon,$$

а это в силу произвольности ε и доказывает соотношение (63).

Если выполнено соотношение (63), то, выбирая последовательность $\{h_j\}$, достаточно быстро убывающей, можно добиться того, чтобы величины $d_m(h) = h^2\,(\Delta_h^m \Delta_{-h}^m B)^{-2} D_m(h)$ удовлетворяли условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_m(h_j) < \infty.$$

При этом условии для $h = h_j$ *соотношение* (63) *будет выполнено с вероятностью* 1.

Действительно, ведь если некоторая последовательность случайных величин $\{\eta_j\}$, $E\eta_j^2 = d_m(h)$, такова, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty} E\,[\eta_j]^2 < \infty$, то для некоторой последовательности $\varepsilon_j \to 0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|\,\eta_j\,| > \varepsilon_j\} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j^{-2} E\eta_j^2 < \infty$$

и по известной лемме Бореля — Кантелли $\lim\limits_{j\to\infty} \eta_j = 0$ с вероятностью 1.

Теорема 13. *Для эквивалентных гауссовских мер* P *и* P_1 *(на* σ*-алгебре* $\mathfrak{A}(T)$*) разность корреляционных функций* $b(t) = B(t) - B_1(t)$ *такова, что*

$$\Delta_h^m \Delta_{-h}^m b = O\{hD_m(h)^{\frac{1}{2}}\}. \tag{65}$$

При нарушении условия (65) *найдется последовательность* $h = h_j$; $j = 1, 2, \ldots$ *…, для которой с вероятностью* 1

$$\lim_{h=h_j} (\Delta_h^m \Delta_{-h}^m b)^{-1} \left\{N^{-1} \sum_{k=1}^{N} [\Delta_h^m x(kh)]^2 - \Delta_h^m \Delta_{-h}^m B_1\right\} =$$
$$= \begin{cases} 1 - \text{относительно } P, \\ 0 - \text{относительно } P_1. \end{cases} \tag{66}$$

Доказательство. Относительно P величины

$$\eta = (\Delta_h^m \Delta_{-h}^m b)^{-1} \{N^{-1} \sum_{k=1}^{N} [\Delta_h^m x(kh)]^2 - \Delta_h^m \Delta_{-h}^m B_1\} - 1 =$$

$$= (\Delta_h^m \Delta_{-h}^m B)^{-1} N^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{N} [\Delta_h^m x(kh)]^2 - \Delta_h^m \Delta_{-h}^m B \right\} \frac{\Delta_h^m \Delta_h^m B}{\Delta_h^m \Delta_h^m b}$$

таковы, что (см. формулы (64))

$$E\eta = 0, \quad D\eta \asymp h^2 D_m(h) (\Delta_h^m \Delta_{-h}^m b)^{-2}.$$

Если условие (65) не выполнено, то для некоторой последовательности $h = h_j$ и соответствующих величин $\eta = \eta_j$ ($j = 1, 2, \ldots$), $\lim\limits_{h_j \to 0} E\eta_j^2 = 0$. Следовательно, для всякой достаточно быстро убывающей подпоследовательности будет выполнено соотношение (66). Совершенно аналогично доказательство этого соотношения относительно распределения вероятностей P_1.

Дадим некоторые простые оценки дисперсий $D_m(h)$.

Предположим, что во всех (за исключением конечного числа) точках интервала $(-\tau, \tau)$ существует непрерывная вторая производная $B''(t)$ корреляционной функции $B(t)$ рассматриваемого стационарного процесса, причем $B''(t)$ интегрируема в квадрате на любом интервале вида (h, τ), $h > 0$, и, кроме того, если функции $B'(t)$ или $B''(t)$ являются неограниченными при $t \to 0$, то существует некоторая окрестность $(0, \varepsilon)$, в которой они монотонны. Имеем

$$D_1(h) \asymp h^{-1} (\Delta_h B)^2 + h^2 \iint\limits_{|s-t|>2h} B''(s-t)^2 \, ds\, dt \asymp h^{-1} (\Delta_h B)^2 + h^2 \int_{2h}^{\varepsilon} B''(t)^2 \, dt.$$

При оценке дисперсии $D_1(h)$ могут представиться разные возможности. Если функция $B''(t)$ ограничена в некоторой окрестности точки $t = 0$, то

$$D_1(h) \leqslant C \max \{h^{-1} (\Delta_h B)^2, \; h^2\}.$$

Если $B''(t)$ неограничена, но ограниченной является функция $B'(t)$, то

$$\int_{2h}^{\varepsilon} B''(t)^2 \, dt = B''(2h + \theta) [B'(\varepsilon) - B'(2h)],$$

$$|B''(2h + \theta)| \leqslant |\Delta_h \Delta_{-h} B(h)| h^{-2} \leqslant [\Delta_h \Delta_h B] h^{-2} = -2 (\Delta_h B) h^{-2}$$

и, следовательно,

$$D_1(h) \leqslant C \max \{h^{-1} (\Delta_h B)^2, \; |\Delta_h B|\}.$$

Если, наконец, неограничены обе функции $B''(t)$ и $B'(t)$, то

$$|B'(2h)| \leqslant |\Delta_h B| h^{-1}$$

и в итоге

$$D_1 h \leqslant C h^{-1} (\Delta_h B)^2.$$

При тех же предположениях, но уже относительно производных $B'''(t)$ и $B^{\mathrm{IV}}(t)$ столь же элементарно можно установить, что

$$D_2(h) = O\{|h|^{-1} (\Delta_h B)^2\}.$$

Таким образом, для дисперсий $D_m(h)$, $m = 1, 2$ (см. формулу (64)) *имеет место следующая единая оценка*:

$$D_m(h) = O\{|h|^{-1} (\Delta_h B)^2\} \text{ при } (\Delta_h B)^2 = O\{|h|\} \tag{67}$$

(отметим здесь, что $\Delta_h \Delta_{-h} B = 2\Delta_h B$).

Пусть t — любая точка интервала $[0, \tau]$. Рассмотрим функционал вида

$$u_1(t, h) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \Delta_h x(kh)\cdot\Delta_h x(t+kh), \quad N = [h^{-1}(\tau - t)] - 1.$$

Нетрудно подсчитать, что (ср. (64))

$$Eu_1(t, h) = \Delta_h\Delta_{-h}B(t), \quad \mathrm{D}u_1(t, h) = O\{h^2 D_1(h)\}.$$

Пусть для некоторой последовательности $h = h_j$, $h_j \to 0$, $j = 1, 2, \ldots$, существуют односторонние пределы $\lim B'(t - h_j)$ и $\lim B'(t + h_j)$, которые мы обозначим $B'(t - 0)$ и $B'(t + 0)$ соответственно. В предположениях, при которых справедлива оценка (67) для дисперсии $D_1(h)$, имеет место следующая

Теорема 14. *Если*

$$\sum_{j=1}^{\infty} h_j^{-1}(\Delta_{h_j}B)^2 < \infty,$$

то с вероятностью 1

$$\lim_{h=h_j} h^{-1}u_1(t, h) = B'(t - 0) - B'(t + 0). \tag{68}$$

Это говорит о том, что при

$$\Delta_h B = o\{h^{1/2}\} \tag{69}$$

по конечной траектории $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, можно с полной достоверностью определить характер разрывов производной $B'(t)$ соответствующей корреляционной функции $B(t)$ на всем интервале $(-\tau, \tau)$.

Это говорит также о том, что *при условии* (69) *для эквивалентных вероятностных мер* $P(dx)$ *и* $P_1(dx)$ *разность* $b(t) = B(t) - B_1(t)$ *соответствующих корреляционных функций непрерывно дифференцируема на всем интервале* (τ, τ).

В самом деле, если бы разность $b'(t) = B'(t) - B_1'(t)$ производных $B'(t)$ и $B_1'(t)$ (имеющих, по предположению, лишь разрывы первого рода) имела бы разрыв в некоторой точке, то это означало бы, что

$$B'(t - 0) - B'(t + 0) \neq B_1'(t - 0) - B_1'(t + 0).$$

Но в силу предельного соотношения (68) *для достаточно быстро убывающей последовательности* $h = h_j$; $j = 1, 2, \ldots$, *с вероятностью* 1

$$\lim_{h=h_j} h^{-1}u_1(t, h) = \begin{cases} B'(t-0) - B'(t+0) & \textit{относительно } P, \\ B_1'(t-0) - B_1''(t+0) & \textit{относительно } P_1. \end{cases} \tag{70}$$

Рассмотрим далее функционал вида

$$u_2(t, h) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \Delta_h^2 x(kh)\cdot\Delta_h x(t+kh), \quad N = [h^{-1}(T - t)] - 2.$$

Легко подсчитать, что

$$Eu_2(t, h) = \Delta_h^2\Delta_{-h}B(t),$$

и по крайней мере в тех же предположениях, при которых выше была получена оценка (67) для дисперсии $D_2(h)$:

$$\mathrm{D}u_2(t, h) = O\{h(\Delta_h B)^2\}.$$

Пусть для некоторой последовательности $h = h_j$; $h_j \to 0$, существуют односторонние пределы

$$B''(t-0)=\lim B''(t-h_j) \text{ и } B''(t+0)=\lim B''(t+h_j).$$

Из полученных выше оценок вытекает следующее предложение.

Теорема 15. *Если*

$$\sum_{j=1}^{\infty} h_j^{-3}(\Delta_{h_j}B)^2<\infty,$$

то с вероятностью 1

$$\lim_{h=h_j} 2h^{-2}u_2(t, h)=B''(t-0)-B''(t+0). \tag{71}$$

Это говорит о том, что при

$$\Delta_h B=o\{h^{3/2}\} \tag{72}$$

по траектории $x(t)$, $0\leqslant t\leqslant\tau$, можно определить с вероятностью 1 характер разрывов второй производной $B''(t)$ корреляционной функции $B(t)$ на всем интервале $(-\tau, \tau)$. Первая производная $B'(t)$ при условии (72), очевидно, является непрерывной всюду; действительно, если в некоторой точке t функция $B'(t)$ терпит разрыв, то существует последовательность $h=h_j$, $h_j\to 0$, такая что $\Delta_h\Delta_{-h_j}B(t)\asymp h_j$, а это противоречит условию (72), поскольку $|\Delta_h\Delta_{-h}B(\tau)|\leqslant \Delta_h\Delta_{-h}B=-2\Delta_h B$.

Это говорит также о том, что *при условии* (72) *для эквивалентных вероятностных мер* $P(dx)$ *и* $P_1(dx)$ *разность* $b(t)=B(t)-B_1(t)$ *соответствующих корреляционных функций должна быть дважды непрерывно дифференцируемой на всем интервале* $(-\tau, \tau)$ — ср. (70).

Глава III

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СТАТИСТИКИ ГАУССОВСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

§ 1. ДОСТАТОЧНЫЕ СТАТИСТИКИ И НАИЛУЧШИЕ ОЦЕНКИ

1. Некоторые общие замечания

Пусть $\xi(u)=\xi(x, u)$, $u \in U$,— некоторое семейство «наблюдаемых» действительных величин на некотором пространстве X, и на порождаемой всеми величинами $\xi(u)=\xi(x, u)$ от $x \in X$ σ-алгебре $\mathfrak{A}$ имеется одно из распределений вероятностей P_θ, зависящее от неизвестного параметра $\theta \in \Theta$ (Θ — множество возможных значений параметра θ). Задача состоит в том, чтобы на основе стастистик $\eta=\eta(x)$, $x \in X$ (измеримых относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}$) дать оценку неизвестного параметра $\theta \in \Theta$. Эта задача и рассматривается ниже для гауссовских распределений вероятностей P_θ с неизвестным средним значением $\theta=\theta(u)$

$$\theta(u)=\int_X \xi(x, u) P_\theta(dx), \quad u \in U$$

и одной и той же (заданной) корреляционной функцией, или с нулевым средним значением и неизвестной корреляционной функцией $\theta=\theta(u, v)$:

$$\theta(u, v)=\int_X \xi(x, u) \cdot \xi(x, v) P_\theta(dx); \quad u, v \in U.$$

Будем предполагать, что все распределения P_θ э к в и в а л е н т н ы.

При оценке отдельных значений $\theta(u)$ (или $\theta(u, v)$) функционального параметра $\theta \in \Theta$ возникает общая задача оценки действительной функции $\varphi=\varphi(\theta)$ от $\theta \in \Theta$.

Во всем дальнейшем речь и будет идти главным образом об оценках действительных функций $\varphi=\varphi(\theta)$ неизвестного параметра $\theta \in \Theta$. При этом оценкой будем называть всякую действительную величину $\eta=\eta(x)$ на X, измеримую относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}$ и такую, что при всех $\theta \in \Theta$ существует математическое ожидание $E_\theta\eta$ (относительно распределения вероятностей P_θ). Оценка $\eta=\eta(x)$ функции $\varphi=\varphi(\theta)$ называется *несмещенной*, если

$$E_\theta\eta=\varphi(\theta), \quad \theta \in \Theta. \tag{1}$$

Допускающую несмещенную оценку функцию $\varphi=\varphi(\theta)$ неизвестного параметра $\theta \in \Theta$ будем называть *допустимой*. Несмещенная оценка $\hat{\varphi}= \hat{\varphi}(x)$ называется наилучшей, если при всяком $\theta \in \Theta$

$$E_\theta[\hat{\varphi}-\varphi(\theta)]^2=\min E_\theta[\eta-\varphi(\theta)]^2, \tag{2}$$

где минимум берется по всем несмещенным оценкам $\eta = \eta(x)$ функции $\varphi = \varphi(\theta)$, $\theta \in \Theta$.

Естественно возникает вопрос о том, рассмотрением каких статистик $\eta = \eta(x)$ можно ограничиться при оценке неизвестного параметра $\theta \subset \Theta$ без потери какой-либо информации.

Говоря о том или ином семействе статистик $\eta = \eta(x)$, кажется целесообразным обращаться непосредственно к порождаемой ими σ-алгебре $\mathfrak{A}$. В связи с этим будем называть σ-алгебру $\mathfrak{D}$ *достаточной* для оцениваемого параметра $\theta \in \Theta$, если условные вероятности $P_\theta(A/\mathfrak{C})$, вычисленные для всех событий $A \in \mathfrak{A}$ по соответствующим распределениям $P_\theta(A)$, $A \in \mathfrak{A}$ таковы, что п р и к а ж д о м $\theta \in \Theta$ с вероятностью 1

$$P_\theta(A/\mathfrak{C}) = P(A/\mathfrak{C}) \tag{3}$$

(т. е., грубо говоря, условные вероятности $P(A/\mathfrak{C})$ не зависят от неизвестного параметра $\theta \in \Theta$). Будем называть σ-алгебру $\mathfrak{C}$ *необходимой*, если она содержится во всякой достаточной σ-алгебре (быть может, пополненной множествами вероятности 0) [1].

Пусть $\mathfrak{C}$ — достаточная σ-алгебра. Тогда для любой действительной величины $\eta = \eta(x)$, $x \in X$ (имеющей математическое ожидание $E_\theta\eta$ при каждом $\theta \in \Theta$) справедлива следующая формула: с вероятностью 1

$$E_\theta(\eta/\mathfrak{D}) = E(\eta/\mathfrak{C}), \quad \theta \in \Theta. \tag{4}$$

Это немедленно следует из равенства (3), если воспользоваться определением условного математического ожидания $E_\theta\eta$ как предела

$$E_\theta\eta = \lim_{n\to\infty} \sum_k \frac{k}{n} P_\theta\left(\frac{k-1}{n} \leqslant \eta < \frac{k}{n} \Big/ \mathfrak{C}\right)$$

(имеется в виду сходимость в среднем по мере P_θ, э к в и в а л е н т н о й м е р е P), который с вероятностью 1 один и тот же при любом $\theta \in \Theta$.

Пусть

$$p_\theta(x) = P_\theta(dx) / P(dx), \quad x \in X,$$

— плотность относительно некоторого распределения $P = P_{\theta_0}$. Обозначим $\mathfrak{B}$ σ-алгебру множеств пространства X, порожденную всеми величинами $p_\theta(x)$ от $x \in X$ $(\theta \in \Theta)$.

Л е м м а 1. Указанная выше σ-алгебра $\mathfrak{B}$ является достаточной для параметра $\theta \in \Theta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, при любых $A \subset \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{B}$

$$P_\theta(AB) = \int_{AB} p_\theta(x)\, P(dx) = E\left[E(\chi_A \cdot \chi_B \cdot p_\theta/\mathfrak{B})\right] =$$
$$= E\left[\chi_B \cdot p_\theta \cdot E(\chi_A/\mathfrak{B})\right] = \int_B P(A/\mathfrak{B}) \cdot p_\theta(x) \cdot P(dx)$$

и одновременно

$$P_\theta(AB) = \int_B P_\theta(A/\mathfrak{B})\, P_\theta(dx) = \int_B P_\theta(A/\mathfrak{B})\, p_\theta(x) \cdot P(dx),$$

где $\chi_A = \chi_A(x)$ и $\chi_B = \chi_B(x)$ — индикаторы множества A и B. Поскольку B — произвольное множество из $\mathfrak{B}$, то для измеримых относительно $\mathfrak{B}$ подынтегральных функций имеем: для почти всех $x \in X$

$$P_\theta(A/\mathfrak{B}) \cdot p_\theta(x) = P(A/\mathfrak{B}) \cdot p_\theta(x).$$

[1] Отметим, что в данном определении фигурируют условные вероятности $P_\theta(A/\mathfrak{C})$, вычисленные для каждого отдельного события, а не условные распределения вероятностей — ср. [23, стр. 67].

Но $p_\theta(x)$ как плотность эквивалентных мер P_θ и P почти всюду положительна, так что с вероятностью 1 имеет место равенство (3).

Семейство распределений P_θ, $\theta \in \Theta$, называется *полным* [1], если из соотношения

$$E_\theta \eta \equiv 0, \quad \theta \in \Theta$$

для измеримой относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$ величины $\eta = \eta(x)$ вытекает, что

$$\eta(x) = 0$$

при почти всех $x \in X$.

Лемма 2. *Для полного* [1] *семейства распределений P_θ указанная выше σ-алгебра $\mathfrak{B}$ (порожденная всеми величинами $p_\theta(x) = P_\theta(dx)/P(dx)$) является не только достаточной, но и необходимой.*

В самом деле, если $\mathfrak{B}$ не является необходимой, то она содержит некоторую достаточную σ-алгебру $\mathfrak{C}$, такую что некоторое множество $B \in \mathfrak{B}$ не входит в пополнение $\mathfrak{C}^*$, другими словами, величина $\eta = \eta(x)$ вида

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in B, \\ 0 & \text{при } x \notin B \end{cases}$$

не измерима относительно $\mathfrak{C}^*$. Поскольку $\mathfrak{C}$ — достаточная σ-алгебра, то величина $\hat{\eta} = E_\theta(\eta/\mathfrak{C})$ не зависит от $\theta \in \Theta$ и $E_\theta(\eta - \hat{\eta}) \equiv 0$ при всех $\theta \in \Theta$. В силу полноты семейства P_θ, $\theta \in \Theta$, величина $\eta - \hat{\eta}$ с вероятностью 1 равна 0, так что $\eta = \hat{\eta}$ является на самом деле измеримой относительно σ-алгебры $\mathfrak{C}^*$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Обозначим $\mathbf{H}$ гильбертово пространство всех действительных величин $\eta = \eta(x)$ от $x \in X$, как и раньше (см. гл. II), определив скалярное произведение формулой

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle = E(\eta_1 \cdot \eta_2). \tag{5}$$

Обозначим $\mathbf{L}$ подпространство в $\mathbf{H}$, образованное всеми величинами $\eta = \eta(x)$ измеримыми относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$. Как известно, условное математическое ожидание $E(\eta/\mathfrak{B})$ любой величины $\eta \in \mathbf{H}$ совпадает с проекцией $\hat{\eta}$ величины η в подпространстве $\mathbf{L}$. Поскольку σ-алгебра $\mathfrak{B}$ является достаточной, то одновременно $\eta = E_\theta(\eta/\mathfrak{B})$. Таким образом, если $\eta = \eta(x)$ — несмещенная оценка функции $\varphi = \varphi(\theta)$ неизвестного параметра $\theta \in \Theta$, то величина

$$\hat{\eta} = E_\theta(\eta/\mathfrak{B}) = E(\eta/\mathfrak{B})$$

является улучшенной несмещенной оценкой[2]:

$$E_\theta \hat{\eta} \equiv E_\theta \eta = \varphi(\theta), \quad \theta \in \Theta,$$

причем

$$E_\theta[\hat{\eta} - \varphi(\theta)]^2 = E_\theta[\eta - \varphi(\theta)]^2 + E_\theta[\eta - \hat{\eta}]^2 \leqslant E_\theta[\eta - \varphi(\theta)]^2, \quad \theta \in \Theta. \tag{6}$$

Предположим, что семейство распределений вероятностей P_θ, $\theta \in \Theta$, является *полным* [3]. Предположим, что всякая величина $\eta \in \mathbf{H}$ является оценкой рассматриваемого типа, т. е. при всех $\theta \in \Theta$ имеется математическое ожидание $E_\theta \eta$.

---

[1] Здесь имеется в виду «ограниченно полное семейство», т. е. такое, что всякая ограниченная величина η равна 0, если она измерима относительно $\mathfrak{B}$ и $E_\theta \eta = 0$ при $\theta \in \Theta$.

[2] См. [23, стр. 182].

[3] Здесь имеется в виду следующее свойство полноты: всякая величина $\eta \in L$, такая что $E_\theta \eta = 0$ при $\theta \in \Theta$, равна 0.

Обозначим $\mathbf{L}^{\varphi}$ класс всех *н. о.* (*несмещенных оценок*) $\eta \in \mathbf{H}$ для действительной функции $\varphi = \varphi(\theta)$ неизвестного параметра $\theta \in \Theta$:

$$E_{\theta}\eta \equiv \varphi(\theta), \ \theta \in \Theta.$$

Очевидно, для любых элементов η_1 и η_2 этого класса разность $\eta = \eta_2 - \eta_1$ является элементом класса $\mathbf{L}^0$ — совокупности всех несмещенных оценок из $\mathbf{H}$ для функции, тождественно равной 0:

$$E_{\theta}\eta = 0, \ \theta \in \Theta. \tag{7}$$

И конечно, если $\eta_1 \in \mathbf{L}^{\varphi}$, а $\eta \in \mathbf{L}^0$, то величина $\eta_2 = \eta_1 + \eta$ так же, как и η_1, будет н. о. из $\mathbf{L}^{\varphi}$.

Лемма 3. *Класс* $\mathbf{L}^0$ *есть подпространство в гильбертовом пространстве* $\mathbf{H}$, *являющееся ортогональным дополнением к подпространству* $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L}^0 = \mathbf{H} \ominus \mathbf{L}.$$

Проекция каждого класса $\mathbf{L}^{\varphi} \subset H$ *на подпространство* $\mathbf{L}$ *состоит из единственного элемента* $\hat{\varphi} \in \mathbf{L}^{\varphi}$:

$$\mathbf{L}^{\varphi} = \hat{\varphi} \oplus \mathbf{L}^0. \tag{8}$$

Величина $\hat{\varphi}$ *дает наилучшую несмещенную оценку* (*н. н. о.*) *соответствующей функции* $\varphi = \varphi(\theta)$: *при всяком* $\theta \in \Theta$

$$E_{\theta}[\hat{\varphi} - \varphi(\theta)]^2 = \min_{\eta \in \mathbf{L}^{\varphi}} E_{\theta}[\eta - \varphi(\theta)]^2. \tag{9}$$

Указанная н.н.о $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(x)$, $x \in X$, *может быть определена из интегрального соотношения* (условия несмещенности) вида

$$E_{\theta}\hat{\varphi} = \int_X \hat{\varphi}(x)\, p_{\theta}(x)\, P(dx) = \varphi(\theta), \ \theta \in \Theta. \tag{10}$$

Доказательство. Утверждение леммы основывается на том факте, что σ-алгебра $\mathfrak{B}$, порождаемая всеми величинами $p_{\theta} = p_{\theta}(x)$, $x \in X$ $(\theta \in \Theta)$, является достаточной (и необходимой) для параметра $\theta \in \Theta$ (см. леммы 1 и 2). Покажем, что всякая величина $\eta \in \mathbf{H}$, ортогональная подпространству $\mathbf{L}$, входит в класс $\mathbf{L}^0$. Действительно, согласно равенству (4) при всяком $\theta \in \Theta$ имеем: с вероятностью 1

$$E_{\theta}(\eta/\mathfrak{B}) = E(\eta/\mathfrak{B}) = 0,$$

так что для η выполняется и равенство (7), т. е. $\eta \in \mathbf{L}^0$. Далее, рассмотрим произвольный элемент $\eta \in \mathbf{L}^0$. Как всякий элемент из гильбертова пространства $\mathbf{H}$, величина η может быть представлена в виде $\eta = \eta_1 + \eta_2$, где $\eta_1 \perp \mathbf{L}$, $\eta_2 \in \mathbf{L}$. По доказанному выше ортогональная к $\mathbf{L}$ величина η_1 вместе с η входит в класс $\mathbf{L}^0$, так что величина η_2 также входит в $\mathbf{L}^0$ и должна удовлетворять условию типа (7):

$$E_{\theta}\eta_2 = \langle \eta_2, p_{\theta} \rangle = 0, \ \theta \in \Theta.$$

Но величина $\eta \in \mathbf{L}$ измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$, и $\eta_2 = 0$ в силу полноты семейства P_{θ}.

Далее, пусть $\mathbf{L}^{\varphi}$ — класс всех н.о. $\eta \in \mathbf{H}$ для допустимой функции $\varphi = \varphi(\theta)$, $\theta \in \Theta$, не равной тождественно 0. Возьмем произвольный элемент $\eta \in \mathbf{L}^{\varphi}$. Как всякий элемент из $\mathbf{H}$, величина η может быть представлена в виде $\eta = \hat{\eta} + \Delta$, где $\Delta \perp \mathbf{L}$, $\hat{\eta} \in \mathbf{L}$. По доказанному выше $E_{\theta}\Delta = 0$ при всех $\theta \in \Theta$, так что

$$E_{\theta}\hat{\eta} = E_{\theta}\eta = \varphi(\theta), \ \theta \in \Theta,$$

[1] Отметим, что в (9) не исключена возможность обращения обеих частей равенства в ∞. Это исключается, если $E_{\theta}\eta^2 < \infty$, хотя бы для одной н.о. η.

т. е. проекция $\hat{\eta}$ элемента $\eta \in \mathbf{L}^\varphi$ на подпространство L является н. о. того же класса $\mathbf{L}^\varphi$. Поскольку для любых величин $\eta_1, \eta_2 \in \mathbf{L}^\varphi$ разность $\eta_1 - \eta_2$ входит в $\mathbf{L}^0$-ортогональное дополнение к $\mathbf{L}$, то проекции $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2$ этих величин на подпространство $\mathbf{L}$ должны совпадать: $\hat{\eta}_1 = \hat{\eta}_2$. Обозначим $\hat{\varphi}$ общую для всех элементов $\eta \in \mathbf{L}^\varphi$ проекцию на $\mathbf{L}$. Ясно, что имеет место соотношение (8). Далее, если имеется какая-то н. о. $\eta_0 \in \mathbf{L}^\varphi$, то величина

$$\hat{\varphi} = E(\eta_0/\mathfrak{B}) = E_\theta(\eta_0/\mathfrak{B})$$

геометрически представляет собой проекцию элемента η_0 на подпространство всех величин η, $E_\theta\eta^2 < \infty$, измеримых относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$ (здесь речь идет о гильбертовом пространстве со скалярным произведением $\langle\eta_1, \eta_2\rangle = E_\theta(\eta_1 \cdot \eta_2)$). Следовательно, величины $\hat{\varphi}$ и $\eta_0 - \hat{\varphi}$ являются некоррелированными, так что (см. неравенство (6))

$$E_\theta[\hat{\varphi} - \varphi(\theta)]^2 = E_\theta[\eta_0 - \varphi(\theta)]^2 + E_\theta[\eta_0 - \hat{\varphi}]^2 \leqslant E_\theta[\eta_0 - \varphi(\theta)]^2$$

и имеет место соотношение (9). Наконец, в силу полноты семейства распределений P_θ, $\theta \in \Theta$, в подпространстве L каждая величина $\hat{\varphi} \in$ L однозначно определяется из условия (10). Лемма доказана.

Из доказанного вытекает следующее предложение.

Лемма 4. *Пусть* $\eta_k \in \mathbf{L}^{\varphi_k}$ *— н. о. для допустимых функций* $\varphi_k = \varphi_k(\theta)$ $(k = 1, \ldots, n)$, $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \ldots$ *— соответствующие наилучшие н. и* $c_1, \ldots, c_n$ *— произвольные действительные числа. Тогда функция* $\varphi = \sum_k c_k\varphi_k$ *является допустимой,* $\eta = \sum_k c_k\eta_k$ *является н. о. для* $\varphi = \varphi(\theta)$, а $\hat{\varphi} = \sum_k c_k\hat{\varphi}_k$ *— наилучшей н. о. для* φ. *Если* $\{\sigma_{kj}\}$ *— корреляционная матрица н. о.* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ $\{s_{kj}\}$ *— корреляционная матрица наилучших н. о.* $\hat{\varphi}_1, \varphi_n, \ldots,$ *то имеет место следующее неравенство*:

$$\{s_{kj}\} \leqslant \{\sigma_{kj}\} \qquad (11)$$

(*т. е. разность указанных матриц является положительно определенной*).

В самом деле, величина $\eta = \sum_k c_k\eta_k$ является н. о. для функции $\varphi(\theta) = \sum_k c_k\varphi_k(\theta)$, $\theta \in \Theta$, а ее проекция на подпространство L совпадает с линейной комбинацией $\hat{\varphi} = \sum_k c_k\hat{\varphi}_k$ проекций $\hat{\varphi}_k$ величин η_k $(k = 1, \ldots, c_n)$. Наилучшая н. о. $\hat{\varphi}$ для функции $\varphi = \varphi(\theta)$ удовлетворяет неравенству (9), так что

$$E_\theta[\hat{\varphi} - \varphi(\theta)]^2 = \sum_{k,j} c_k c_j s_{kj} \leqslant E_\theta[\eta - \varphi(\theta)]^2 \leqslant \sum_{k,j} c_k c_j \sigma_{kj}$$

при любых $c_1, \ldots, c_n$. Следовательно, матрицы $\{s_{kj}\}$ и $\{\sigma_{kj}\}$ удовлетворяют неравенству (11), что и требовалось доказать.

2. Гауссовские распределения с неизвестным средним значением

Пусть P_θ, $\theta \in \Theta$,— семейство гауссовских распределений на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ (порожденной всеми величинами $\xi(u)$, $u \in U$), имеющих одну и ту же корреляционную функцию

$$B(u, v) = E_\theta[\xi(u) - \theta(u)][\xi(v) - \theta(v)]; \; u, v \in U,$$

где функциональный параметр $\theta = \theta(u)$, $u \in U$, есть среднее значение распределения P_θ:

$$\theta(u) = E_\theta \xi(u),\ u \in U. \tag{12}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что все гауссовские распределения P_θ эквивалентны гауссовскому распределению P с нулевым средним значением и той же самой корреляционной функцией, поскольку от исходных величин $\xi(u)$, $u \in U$, всегда можно перейти к величинам вида $\mathrm{H}(u) - \theta_0(u)$, $u \in U$, где $\theta_0 = \theta_0(u)$ — некоторая фиксированная функция из множества Θ.

Обозначим H подпространство в гильбертовом пространстве ξ со скалярным произведением (5), порожденное всеми величинами $\xi(u)$, $u \in U$ (H есть замкнутая в среднем линейная оболочка этих величин). Необходимое и достаточное условие эквивалентности гауссовских распределений P_θ и P (на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, порожденной величинами $\zeta(u)$, $u \in U$) состоит в том (см. теорему 3 гл. III, что имеется величина $\eta_\theta \in H$, с которой соответствующее среднее значение $\theta = \theta(u)$, $u \in U$, связано равенством

$$\theta(u) = \langle \zeta(u),\ \eta_\theta \rangle,\ \ u \in U. \tag{13}$$

Для дальнейшего будет полезно отметить, что (произвольно заданное) множество Θ действительных функций $\theta = \theta(u)$, $u \in U$, естественным образом может быть вложено в некоторое гильбертово пространство Y действительных функций $y = y(u)$, $u \in U$. Именно, всякому элементу $\eta \in H$ взаимно однозначно соответствует действительная функция $y = y(u)$, $u \in U$:

$$y(u) = \langle \zeta(u),\ \eta \rangle,\ u \in U \tag{14}$$

(напомним, что система элементов $\xi(u)$, $u \in U$, полна в подпространстве H). Упомянутое выше гильбертово пространство Y и есть совокупность всех действительных функций $y = y(u)$, $u \in U$, допускающих представление в виде (14), со скалярным произведением

$$\langle y_1,\ y_2 \rangle = \langle \eta_1,\ \eta_2 \rangle, \tag{15}$$

где η_1 и η_2 — элементы из H, отвечающие функциям y_1 и y_2 из Y. По самому определению гильбертово пространство Y унитарно изоморфно подпространству H. В силу условия (13) каждая из функций $\theta = \theta(u)$ на U ($\theta \in \Theta$) входит в Y, так что множество Θ рассматриваемых значений параметра θ можно считать множеством в гильбертовом пространстве Y.

Чтобы пояснить естественность вложения Θ в Y, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть множество U является конечным, так что имеется конечное число гауссовских величин $\xi(u_1), \ldots, \xi(u_n)$ с неизвестными средними значениями $\theta(u_1), \ldots, \theta(u_n)$ и одной и той же корреляционной матрицей. Если эта матрица является невырожденной, то Y является n-мерным евклидовым пространством, в котором Θ есть определенное множество векторов θ с координатами $\theta(u_1), \ldots, \theta(u_n)$. Если корреляционная матрица является вырожденной и имеет ранг $m < n$, то Y представляет собой m-мерное подпространство в n-мерном евклидовом пространстве, на котором сосредоточено каждое из вырожденных гауссовских распределений P_θ (распределений вероятностей величин $\xi(u_1), \ldots, \xi(u_n)$), и $\Theta \subseteq Y$ есть определенное множество векторов с координатами $\theta(u_1), \ldots, \theta(u_n)$.

Пример 2. Пусть множество U само есть гильбертово пространство с заданным скалярным произведением (u, v); $u, v \in U$, а величины $\xi(u)$, $u \in U$, задают гауссовский линейный функционал на пространстве U:

$$\xi(u) = (u,\ \xi),\ u \in U,$$

где ξ — случайная гауссовская величина со значениями в U, распределение P_θ которой является гауссовским и имеет среднее значение $\theta = E_\theta \xi \in U$:

$$\theta(u) = (u, \theta), \quad u \in U.$$

Здесь с самого начала параметр θ принадлежит определенному множеству Θ в исходном гильбертовом пространстве U. Пусть B — корреляционный оператор (т. е. корреляционная функция есть $B(u, v) = (Bu, v)$ — см. § 3 гл. I). Величины $\xi(u)$, $u \in U$, образуют подпространство в определенном выше пространстве H, причем замыкание этого подпространства совпадает с H. Следовательно, функции $y = y(u)$, $u \in U$, вида (14), отвечающие величинам $\eta = \xi(v)$, где v пробегает все пространство U, образуют подпространство в функциональном пространстве Y, замыкание которого и есть само Y. Имеем (см. формулу (14))

$$y(u) = \langle \xi(u), \xi(v) \rangle = (Bu, v), \ u \in U,$$

где v — соответствующий элемент из U. Соответствие $y \leftrightarrow v$ таково, что

$$\langle y_1, y_2 \rangle = (Bv_1, v_2) = \langle \xi(v_1), \xi(v_2) \rangle.$$

Таким образом, рассматриваемое пространство Y унитарно изоморфно пополнению $\overline{U}$ исходного пространства U по скалярному произведению

$$\langle v_1 \ v_2 \rangle = (Bv_1, v_2),$$

причем соответствующий функции $y = y(u)$, $u \in U$, элемент $\overline{v} \in \overline{U}$ связан с ней следующей формулой:

$$y(u) = \langle u, \overline{v} \rangle, \ u \in U.$$

Видно, что функция $y = y(u)$ является линейным непрерывным функционалом на гильбертовом пространстве U и потому представима в виде

$$y(u) = (u, v), \ u \in U,$$

где v — определенный элемент из U (точнее, $v \in B^{1/2}U$, см. пример 7 гл. II). Связь между $v \in U$ и $\overline{v} \in \overline{U}$ дается формулой

$$\bar{v} = B^{-1}v = B^{-\frac{1}{2}}(B^{-\frac{1}{2}}v),$$

где $B^{-\frac{1}{2}}v \in U$, а $B^{-\frac{1}{2}}$ — оператор в $\overline{U}$, определенный по непрерывности на всем исходном пространстве U, рассматриваемом как множество в новом пространстве $\overline{U}$.

Итак, пусть на измеримом пространстве $(X, \mathfrak{A})$ имеется семейство гауссовских распределений P_θ, где функциональный параметр $\theta = \theta(u)$, $u \in U$,— неизвестное среднее значение порождающих σ-алгебру $\mathfrak{A}$ действительных величин $\xi(u)$, $u \in U$,— принадлежит определенному множеству Θ в гильбертовом пространстве Y всех действительных функций $y = y(u)$, $u \in U$, вида (14) со скалярным произведением (15).

Плотность $p_\theta(x) = P_\theta(dx) / P(dx)$ эквивалентных гауссовских распределений P_θ и P может быть выражена следующей формулой (см. формулу (15) гл. II):

$$p_\theta(x) = \exp\left\{\eta_\theta(x) - \frac{1}{2} \|\eta_\theta\|^2\right\} = C_\theta e^{\eta_\theta(x)}, \tag{16}$$

где $\eta_\theta = \eta_\theta(x)$, $x \in X$,— та величина из подпространства H, что связана с параметром $\theta \in \Theta$ соотношением (13), и $C_\theta = \exp\{-\frac{1}{2}\|\eta_\theta\|^2\}$.

При построении оценок неизвестного параметра $\theta \in \Theta$ мы будем основываться на статистиках $\eta = \eta(x)$, $x \in X$, принадлежащих определенному выше гильбертову пространству $\mathbf{H}$.

Лемма 5. *Всякая величина* $\eta \in \mathbf{H}$ *имеет конечное математическое ожидание* $E_\theta \eta$, *каково бы ни было* $\theta \in \Theta$. *При этом для величин* η *из подпространства* H, *порожденного величинами* $\xi(u)$, $u \in U$, *имеет место следующая формула*:

$$E_\theta \eta = \langle \eta, \eta_\theta \rangle, \quad \theta \in \Theta, \tag{17}$$

Доказательство. Всякая величина $\eta \in H$, как предел гауссовских величин вида $\Sigma c(u)\xi(u)$, сама является гауссовской. Поэтому каждая из величин $\eta_\theta \in H$, фигурирующая в соотношении (13), является гауссовской, так что плотность $p_\theta = p_\theta(x)$ вида (16) интегрируема в квадрате по мере P (другими словами, величина $p_\theta = p_\theta(x)$, $x \in X$, входит в гильбертово пространство $\mathbf{H}$). Для любой ограниченной величины $\eta \in \mathbf{H}$ имеем

$$E_\theta \eta = E\eta \cdot p_\theta = \langle \eta, p_\theta \rangle. \tag{18}$$

Для любой величины $\eta \in \mathbf{H}$ можно подобрать сходящуюся к η (в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$) последовательность ограниченных величин $\eta_1, \eta_2, \ldots$, которая является фундаментальной и в смысле сходимости в среднем по мере P_θ:

$$E_\theta |\eta_m - \eta_n| \leqslant \|\eta_m - \eta_n\| \cdot \|p_\theta\| \to 0$$

при $m, n \to \infty$. Очевидно, последовательность $\eta_1, \eta_2, \ldots$ сходится в среднем по мере P_θ именно к величине η, поскольку P_θ эквивалентна мере P. Следовательно, $E_\theta|\eta| < \infty$, причем для математического ожидания $E_\theta \eta$ справедлива формула (18). Далее, для величин $\xi(u)$, $u \in U$, одновременно имеет место формула (13)

$$E_\theta \xi(u) = \langle \xi(u), \eta_\theta \rangle.$$

Таким образом, математическое ожидание $E_\theta \eta$ (как линейный непрерывный функционал вида (18) на гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$) на подпространстве H, порожденном величинами $\xi(u)$, $u \in U$, может быть записан в виде

$$\langle \eta, p_\theta \rangle = \langle \eta, \eta_\theta \rangle.$$

Видно также, что фигурирующая в формулах (13) и (17) величина $\eta_\theta \in H$ совпадает с проекцией величины $p_\theta \in \mathbf{H}$ на подпространство H. Лемма доказана.

Обозначим $\mathfrak{B}$ σ-алгебру, порожденную всеми величинами $\eta_\theta = \eta_\theta(x)$ на X $(\theta \in \Theta)$; $\mathbf{L}$ — подпространство в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, образованное всеми величинами $\eta \in \mathbf{H}$, измеримыми относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$, и L замкнутую линейную оболочку всех величин η_θ $(\theta \in \Theta)$.

Обозначим $\overline{\Theta}$ замкнутую линейную оболочку всех значений параметра $\theta \in \Theta$ (напомним, что Θ есть множество в определенном выше гильбертовом пространстве Y действительных функций $y = y(u)$, $u \in U$, вида (14) со скалярным произведением (15)).

Лемма 6. *Если множество* Θ *содержит некоторый параллелепипед*[1] *из подпространства* $\overline{\Theta}$, *то система величин* $p_\theta \in \mathbf{H}$ $(\theta \in \Theta)$ *вида* (16) *является полной в подпространстве* $\mathbf{L}$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что указанный в формулировке леммы параллелепипед из подпространст-

---

[1] Параллелепипед в гильбертовом пространстве с некоторым ортонормированным базисом $\theta_1, \theta_2, \ldots$ определяется как множество элементов $\theta = \sum_k t_k \theta_k$, координаты $t_1, t_2, \ldots$ которых удовлетворяют условию

$$|t_k - t_k^0| < \delta_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где t_1^0, t_2^0 — координаты некоторого фиксированного элемента, а $\delta_1, \delta_2, \ldots$ — некоторые положительные числа.

ва $\overline{\Theta}$ содержит нулевой элемент $\theta = 0$. Очевидно, в этом случае множество Θ содержит и некоторую ортогональную систему элементов $\theta_1, \theta_2, \ldots$, полную в $\overline{\Theta}$. Этой системе элементов в $\overline{\Theta} \subseteq Y$ отвечает ортогональная полная система величин $\eta_1, \eta_2, \ldots$ в подпространстве $L \subseteq H$ (напомним, что гильбертовы пространства Y и H унитарно изоморфны,— см. формулы (14), (15)). Пусть $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ — борелевская функция на n-мерном действительном пространстве. Очевидно, совокупность всех величин $\eta \in \mathbf{L}$ вида $\eta = \varphi(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ образует всюду плотное множество во всем пространстве $\mathbf{L}$, а при фиксированном n образует замкнутое подпространство в $\mathbf{L}$. Предположим временно, что при любом n система величин p_θ вида (16) (где $\theta = \sum_{k=1}^{n} t_k\theta_k$, $|t_k| \leqslant \delta_k$ при $k = 1, \ldots, n$, $\delta_1, \ldots, \delta_n$ — некоторые положительные числа) полна в подпространстве, образованном всеми указанными величинами $\eta = \varphi(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Это значит, что линейная оболочка этих величин p_θ всюду плотна в указанном подпространстве и, следовательно, линейная оболочка всех величин p_θ $(\theta \in \Theta)$ всюду плотна во всем пространстве $\mathbf{L}$. Итак, нужно доказать лишь, что если

$$E_\theta\eta = C_\theta \int \varphi(y_1 \ldots, y_n) \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} t_k y_k\right\} p(dy) = 0$$

при всех $\theta = \sum_{k=1}^{n} t_k\theta_k$, где $|t_k| \leqslant \delta_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, то и сама величина $\eta = \varphi \cdot (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ равна 0. Но это является хорошо известным фактом [1], так что доказательство можно считать законченным.

Отметим, что указанная выше σ-алгебра $\mathfrak{B}$ порождается всеми величинами $p_\theta(x)$, $x \in X$ (параметр θ пробегает множество Θ), а полнота семейства плотностей $p_\theta(x) = P_\theta(dx)/P(dx)$ в подпространстве L означает полноту семейства гауссовских распределений P_θ, $\theta \in \Theta$.

Таким образом, σ-алгебра $\mathfrak{B}$ является необходимой и достаточной для неизвестного среднего значения $\theta \in \Theta$ (см. леммы 1 и 2), а для несмещенных оценок $\eta \in \mathbf{H}$ всякой допустимой функции $\varphi = \varphi(\theta)$ неизвестного параметра $\theta \in \Theta$ справедливы утверждения лемм 3 и 4.

3. Гауссовские распределения с неизвестной корреляционной функцией

Пусть P_θ, $\theta \in \Theta$,— семейство гауссовских распределений на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, порожденной всеми величинами $\xi(u)$, $u \in U$, с нулевыми средними значениями и корреляционными функциями

$$\theta(u, v) = E_\theta \xi(u) \xi(v), \quad u, v \in U \tag{19}$$

(здесь функциональный параметр $\theta = \theta(u, v)$; $u, v \in U$, есть неизвестная корреляционная функция).

Необходимые и достаточные условия эквивалентности гауссовских распределений P_θ некоторому гауссовскому распределению P с корреляционной функцией $\theta_0 = \theta_0(u, v)$; $u, v \in U$, указаны в § 3 гл. II; там же указаны и различные формулы для плотности $p_\theta(x) = P_\theta(dx)/P(dx)$. В частности, согласно общей формуле (24) гл. II,

$$p_\theta(x) = C_\theta \exp\{\eta_\theta(x)\}, \tag{20}$$

---

[1] Плотность $p(y_1, \ldots, y_n) = C_\theta \exp\left(\sum_{k=1}^{n} t_k y_k\right)$ принадлежит к так называемому экспоненциальному семейству — см. [23, стр. 183].

где $\eta_\theta = \eta_\theta(x)$ есть определенная величина на X из подпространства H_2 — замкнутой в среднем линейной оболочки величин $[\xi(u)\cdot\xi(v) - E\,\xi(u)\cdot\xi(v)]$; $u, v \in U$, а C_θ — определенная постоянная.

Как следует из теоремы 6 гл. II, если распределения P_{θ_k} $(k = 1, 2,\ldots)$ эквивалентны P, то эквивалентной распределению P будет и гауссовская мера P_θ с параметром $\theta = \sum\limits_k c_k\theta_k$, где $c_1, c_2,\ldots$ — неотрицательные числа, $\sum\limits_k c_k = 1$. В самом деле, если разности $\theta_k(u, v) - \theta_0(u, v)$; $u, v \in U$, удовлетворяют условию (22) гл. II, то этому же условию будет удовлетворять и разность $\theta(u, v) - \theta_0(u, v)$; $u, v \in U$:

$$\theta(u, v) - \theta_0(u, v) = \sum_k c_k[\theta_k(u, v) - \theta_0(u, v)].$$

Таким образом, для эквивалентности распределений P и P_θ необходимо лишь выполнение условия (7) гл. II

$$E_\theta|\eta|^2 = \sum_k c_k E_{\theta_k}|\eta|^2 = \asymp E|\eta|^2 = \sum_k c_k E|\eta|^2,\quad \eta \in H,$$

которое выполняется в силу соотношениий $E_{\theta_k}|\eta|^2 \asymp E|\eta|^2$ при $k = 1, 2, \ldots$, поскольку распределения P_k, $k = 1, 2, \ldots$, и P являются эквивалентными. В случае эквивалентности P и P_θ плотность $P_\theta(x) = P(dx)/P(dx)$ выражается формулой (18) гл. II, которая задает некоторую плотность $P_\theta(x) = P_\theta(dx)/P(dx)$ для любых неотрицательных коэффициентов c_k $(k = 1, 2, \ldots)$, таких что $\sum\limits_k c_k \leqslant 1$; при этом соответствующая корреляционная функция $\theta = \theta(u, v)$ есть

$$\theta(u, v) = \sum_k c_k\theta_k(u, v) + \Big(1 - \sum_k c_k\Big)\theta_0(u, v),\ u, v \in U. \tag{21}$$

По-видимому, в весьма широком классе случаев семейство распределений является полным. До конца этого пункта будем считать это условие выполненным.

Обозначим $\mathfrak{B}$ σ-алгебру множеств, порожденную всеми величинами $\eta_\theta = \eta_\theta(x)$, $x \in X$, фигурирующими в формуле (20) (параметр θ пробегает множество Θ). Согласно лемме 1, σ-алгебра $\mathfrak{B}$ является достаточной для функционального параметра $\theta = \theta(u, v)$; $u, v \in U$. Как отмечалось выше, при некоторых ограничениях семейство гауссовских распределений P_θ, $\theta \in \Theta$, является полным, и по лемме 2, σ-алгебр $\mathfrak{B}$ будет не только достаточной, но и необходимой.

Рассмотрим вопрос об оценке неизвестной корреляционной функции $\theta = \theta(u, v)$; $u, v \in U$. Каждое ее значение $\varphi_{u,v}(\theta) = \theta(u, v)$, $\theta \in \Theta$, является допустимой функцией — допускает несмещенную оценку вида $\xi(u)\cdot\xi(v) \in \mathbf{H}$. При этом случайная функция $\xi(u)\cdot\xi(v)$ от $u, v \in U$ дает несмещенную оценку корреляционной функции «в целом». Именно, выборочные функции $\xi(u)\cdot\xi(v)$; $u, v \in U$, могут служить корреляционными функциями некоторого гауссовского распределения вероятностей,

---

[1] См. [23, стр. 183].

поскольку выполняется *условие положительной определенности*:

$$\sum_{k,l} c_k c_l \xi(u_k)\,\xi(u_l) = \Big[\sum_k c_k \xi(u_k)\Big]^2 \geqslant 0$$

для любых $u_1, u_2, \ldots \in U$ и любых действительных $c_1, c_2, \ldots$

Далее, рассмотрим проекцию величины $\xi(u)\cdot\xi(v)$ на подпространство $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{H}$, которое образовано всеми величинами $\eta = \eta(x)$ из $\mathbf{H}$, измеримыми относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$. Обозначим эту проекцию $\hat{\theta}(u, v)$. Поскольку σ-алгебра $\mathfrak{B}$ является достаточной для параметра $\theta \in \Theta$, величина

$$\hat{\theta}(u, v) = E\,[\xi(u)\cdot\xi(v)/\mathfrak{B}] \tag{22}$$

является несмещенной оценкой для неизвестной корреляционной функции $\theta = \theta(u, v)$.

Покажем, что *функция* $\hat{\theta}(u, v)$ от $u, v \in U$ *удовлетворяет условию положительной определенности*: с вероятностью 1

$$\sum_{k,j} c_k c_j \hat{\theta}(u_k, u_j) \geqslant 0 \tag{21$'$}$$

для любых $u_1, u_2, \ldots \in U$ *и любых действительных* $c_1, c_2, \ldots$

В самом деле, величина $\hat{\eta} = \sum_{k,j} c_k c_j \hat{\theta}(u_k, u_j)$ совпадает с условным математическим ожиданием неотрицательной величины $\eta = \sum_{k,j} c_k c_j \xi(u_k)\,\xi(u_j)$; $\hat{\eta} = E(\eta/\mathfrak{B})$. Для любой ограниченной неотрицательной величины $\zeta = \zeta(x)$, измеримой относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$, с вероятностью 1

$$E(\zeta\cdot\eta/\mathfrak{B}) = \zeta\cdot E(\eta/\mathfrak{B}) = \zeta\cdot\hat{\eta},$$

при этом

$$E(\zeta\cdot\eta) = E(\zeta\cdot\hat{\eta}) \geqslant 0.$$

Положив

$$\zeta = \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{\eta} < 0, \\ 0 & \text{при } \hat{\eta} \geqslant 0, \end{cases}$$

для неположительной величины $\zeta\cdot\hat{\eta}$ имеем $E(\zeta\cdot\hat{\eta}) \geqslant 0$. Следовательно, $\hat{\eta} \geqslant 0$ с вероятностью 1, что и требовалось доказать.

Как указывалось в п. 1, при условии полноты семейства P_θ, $\theta \in \Theta$, формула (21) определяет единственную н. о., измеримую относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$. Следовательно (см. п. 1), *определенная формулой* (21) *несмещенная оценка* $\hat{\theta}(u, v)$ *является наилучшей в том смысле, что*

$$E_\theta[\hat{\theta}(u, v) - \theta(u, v)]^2 = \min E_\theta\,[\eta - \theta(u, v)]^2, \tag{23}$$

где минимум берется по всем несмещенным оценкам η *для функции* $\varphi_{u,v}(\theta) = \theta(u, v)$ *параметра* $\theta \in \Theta$.

4. Об условных математических ожиданиях функционалов от гауссовской случайной функции

Пусть $\xi(u) = \xi(\omega, u)$, $u \in U$,— семейство гауссовских случайных величин на вероятностном пространстве Ω и $\mathfrak{A}(U)$ — σ-алгебра множеств пространства Ω, порожденная всеми величинами $\xi(u) = \xi(\omega, u)$, $\omega \in \Omega$ (параметр u пробегает множество U). Для простоты будем считать, что $E\xi(u) = 0$, $u \in U$. Обозначим $\mathbf{H}(U)$ гильбертово пространство случайных величин η (измеримых относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}(U)$ со скалярным произведением (5) и $H(U)$ — замкнутую линейную оболочку всех величин $\xi(u)$, $u \in U$.

Пусть S и T — некоторые подмножества множества U. Как хорошо известно, условное математическое ожидание любой величины $\eta \in \mathbf{H}(S)$ при фиксированных $\xi(t)$, $t \in T$ (точнее, условное математическое ожидание относительно σ-алгебры $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(T)$), совпадает с проекцией величины η на подпространство $\mathbf{H}(T)$. При этом для величин $\eta \in H(S)$ эта проекция $\hat{\eta}$ лежит в подпространстве $H(T)$ и, более того, г а у с с о в с к а я величина $\eta - \hat{\eta}$ независима от семейства величин $\xi(t)$, $t \in T$.

Обозначим $H^n(U)$ замыкание подпространства всех величин вида

$$\eta = \varphi[\xi(u_1), \ldots, \xi(u_k)],$$

где $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ — полином степени не выше n, а число переменных произвольно.

Т е о р е м а 1. *Для всякой величины* $\eta \in H^n(S)$ *ее условное математическое ожидание* $\hat{\eta} = E[\eta/\mathfrak{A}(T)]$ *входит в подпространство* $H^n(T)$ *(с тем же показателем n).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, можно считать, что множества S и T конечны (скажем $S = \{1, 2, \ldots, k\}$ и $T = \{k+1, \ldots \ldots, k+l\}$). В самом деле, к общему случаю можно перейти предельным переходом[1], поскольку

$$\eta = \lim_{k\to\infty} \eta_k[\xi(1), \ldots, \xi(k)],$$

$$E[\eta/\mathfrak{A}(T)] = \lim_{l\to\infty} E[\eta/\xi(k+1), \ldots, \xi(k+l)].$$

Пусть $\eta = \varphi[\xi(1), \ldots, \xi(k)]$, где $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ — полином степени не выше n. Как уже указывалось, теорема верна для $n = 1$. Предположим, что она верна для всех показателей, не превосходящих $n - 1$. Обозначим $\hat{\xi}(j)$ проекцию величин $\xi(j)$; $j = 1, \ldots, k$ на подпространство $H(T)$. Разности $\xi(j) - \hat{\xi}(j)$; $j = 1, \ldots, k$ не зависят от величин $\xi(t)$, $t \in T$. Положим

$$\zeta = \varphi[\xi(1) - \hat{\xi}(1), \ldots, \xi(k) - \hat{\xi}(k)].$$

Величина ζ не зависит от $\xi(t)$, $t \in T$, и в разложении

$$\eta - \zeta = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi[\xi(1), \ldots, \xi(k)]\, \hat{\xi}(j) + \cdots$$

правая часть является линейной комбинацией выражений вида

$$\varphi_m[\xi(1), \ldots, \xi(k)]\, \varphi_{n-m}[\hat{\xi}(1), \ldots, \hat{\xi}(k)],$$

где $\varphi_m(x_1, \ldots, x_k)$ и $\psi_{n-m}(x_1, \ldots, x_k)$ — полиномы степени не выше m и $n - m$ соответственно, причем $m \leqslant n - 1$. По предположению, условное математическое ожидание $\hat{\eta}_m = E[\eta_m/\mathfrak{A}(T)]$ величины $\eta_m = \varphi_m[\xi(1), \ldots, \xi(k)]$ входит в подпространство $H^m(T)$, $m \leqslant n - 1$. Очевидно, произведение $\hat{\eta}_m \cdot \psi_{n-m}[\hat{\xi}(1), \ldots, \hat{\xi}(k)]$ входит в подпространство $H^n(T)$. Входит в $H^n \cdot (T)$ и линейная комбинация таких произведений, какой и является условное математическое ожидание разности $\eta - \zeta$, равное $\hat{\eta} - E\zeta$. Таким образом, $\hat{\eta} = E[\eta/\mathfrak{A}(T)] \in H^n(T)$, что и требовалось доказать.

Определим *полиномы Эрмита* от многих переменных. Пусть $P(dx)$ — гауссовская мера в k-мерном пространстве R^k векторов $x = [x_1, \ldots, x_k]$. Пусть $\mathbf{H}$ — гильбертово пространство всех действительных интегрируе-

---

[1] См., например, [21, стр. 298].

мых в квадрате функций $\varphi = \varphi(x)$ от $x \in R^k$ со скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int\limits_{R^k} \varphi(x), \ \psi(x) P(dx).$$

Как известно, гауссовская мера имеет все моменты, причем совокупность всех полиномов $\varphi = \varphi(x)$ от переменных $x_1, \ldots, x_k$ есть всюду плотное множество в $\mathbf{H}$.

Всякий полином $\varphi = \varphi(x)$ степени p, ортогональный всем полиномам степени меньшей p, будем называть *полиномом Эрмита*. Обозначим H_p совокупность всех полиномов Эрмита одной и той же степени p. Очевидно, H_p есть конечномерное подпространство, причем гильбертово пространство $\mathbf{H}$ есть сумма ортогональных подпространств H_p, $p = 0, 1, \ldots$:

$$\mathbf{H} = \sum_{p=0}^{\infty} \oplus H_p.$$

Рассмотрим гауссовскую векторную величину $[\xi(u_1), \ldots, \xi(u_k)]$. Обозначим $H_p(u_1, \ldots, u_n)$ совокупность всех величин вида

$$\eta = \varphi[\xi(u_1), \ldots, \xi(u_k)],$$

где $\varphi = \varphi(x)$ — полином Эрмита степени p относительно распределения вероятностей P векторной величины $[\xi(u_1), \ldots, \xi(u_n)]$. Имеем

$$\mathbf{H}(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{p=0}^{\infty} \oplus H_p(u_1, \ldots, u_k). \tag{24}$$

Л е м м а. 7. *Каковы бы ни были* $s_1, \ldots, s_k$ *и* $t_1, \ldots, t_l$ *для различных* p *и* q, *подпространства* $H_p(s_1, \ldots, s_k)$ *и* $H_q(t_1, \ldots, t_l)$ *ортогональны*:

$$H_p(s_1, \ldots, s_k) \perp H_q(t_1, \ldots, t_l) \text{ при } p \neq q. \tag{25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности $p < q$. Рассмотрим произвольную величину $\eta \in H_p(s_1, \ldots, s_k)$ и ее условное математическое ожидание $\hat{\eta} = E[\eta / \mathfrak{A}(t_1, \ldots, t_l)]$. По теореме 1 величина $\hat{\eta}$ входит в подпространство $H^p(t_1, \ldots, t_l) = \sum\limits_{r=0}^{p} \oplus H_r(t_1, \ldots, t_l)$. Но $\hat{\eta}$ есть проекция величины η на все подпространство $\mathbf{H}(t_1, \ldots, t_l)$, так что разность $\eta - \hat{\eta}$ ортогональна $\mathbf{H}(t_1, \ldots, t_l)$ и, в частности, $\eta - \hat{\eta} \perp H_q(t_1, \ldots, t_l)$. Одновременно $\hat{\eta} \perp H_q(t_1, \ldots, t_l)$, поскольку $\hat{\eta}$ входит в подпространство $H^p(t_1, \ldots, t_l)$, ортогональное $H_q(t_1, \ldots, t_l)$ при $p < q$. Следовательно,

$$\eta = [(\eta - \hat{\eta}) + \hat{\eta}] \perp H_q(t_1, \ldots, t_l),$$

что и требовалось доказать.

Далее, определим подпространство $H_p(U)$ как замкнутую линейную оболочку всех подпространств $H_p(u_1, \ldots, u_k)$, где $u_1, \ldots, u_k \in U$ (а показатель p один и тот же при всех $u_1, \ldots, u_k$). Очевидно (см. равенство (24) и лемму 7),

$$H^n(U) = \sum_{p=0}^{n} \oplus H_p(U)$$

и

$$\mathbf{H}(U) = \sum_{p=0}^{\infty} \oplus H_p(U), \tag{25'}$$

где $H_0(U)$ содержит лишь постоянные величины; $H_1(U) = H(U)$ есть замкнутая линейная оболочка величин $\xi(u)$, $u \in U$; $H_2(U)$ есть замкнутая линейная оболочка величин $[\xi(u_1)\,\xi(u_2) - B(u_1, u_2)]$, $u_1, u_2 \in U$; $H_3(U)$ есть замкнутая линейная оболочка величин $[\xi(u_1)\ \xi(u_2)\,\xi(u_3) - \xi(u_1)\,B(u_2, u_3) - \xi(u_2)\,B(u_1, u_3) - \xi(u_3)\,B(u_1, u_2)]$; $u_1, u_2, u_3 \in U$, и т. д. Отметим общую формулу для моментов[1]

$$E\,[\,\xi(u_1) \ldots \xi(u_n)] = \Sigma\,\Pi\,B(u_k, u_j), \tag{26}$$

где произведение берется по всем различным парам (u_k, u_j), а сумма берется по всем разбиениям множества $(u_1, \ldots, u_n)$ на пары (u_k, u_j).

Как видно из разложения (25′), *условное математическое ожидание* $E\,[\eta/\mathfrak{A}(T)]$ *всякой величины* $\eta \in H_p(S)$ *относительно* σ*-алгебры* $\mathfrak{A}(T)$ *входит в подпространство* $H_p(T)$ (*с тем же показателем* p).

§ 2. НАИЛУЧШИЕ НЕСМЕЩЕННЫЕ ОЦЕНКИ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ И ИХ СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ

1. Линейные несмещенные оценки

Вернемся к первоначально поставленной задаче об оценках неизвестного среднего значения

$$\theta(u) = E_\theta \xi(u),\ u \in U,$$

«наблюдаемой» случайной функции $\xi(u)$, $u \in U$, имеющей своим распределением одну из гауссовских мер P_θ со средним значением $\theta = \theta(u)$, $u \in U$, из некоторого функционального множества Θ (с одной и той же корреляционной функцией).

Основой дальнейшего будут общие результаты п. 1 § 1, применимые (как было указано в п. 2 § 1) к рассматриваемому семейству распределений P_θ, зависящих от функционального параметра $\theta \in \Theta$.

Результаты этого параграфа в отношении «линейных оценок» справедливы для произвольных распределений P_θ. Хотя в рамках «линейной теории» эти результаты могут быть выражены в терминах соответствующей корреляционной функции

$$B(u, v) = E_\theta\,[\xi(u) - \theta(u)]\,[\xi(v) - \theta(v)];\ u, v \in U,$$

гораздо нагляднее формулировать их в терминах гауссовских распределений (с той же корреляционной функцией).

Всюду ниже будут встречаться определения и обозначения § 1. Например, величины η_θ, фигурирующие в формуле (13) и порождающие σ-алгебру $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$; подпространство $\mathbf{L}$, образованное величинами $\eta \in \mathbf{H}$, измеримыми относительно $\mathfrak{B}$, и т. д.

Отметим сразу, что каждая функция $\varphi = \varphi(\theta, u)$ от $\theta \in \Theta$, определенная формулой

$$\varphi(\theta, u) = \theta(u),\ \theta \in \Theta, \tag{27}$$

где u — фиксированная точка из U, является допустимой; несмещенной оценкой (н. о.) для $\varphi = \varphi(\theta, u)$ может служить соответствующая величина $\xi(u)$.

Назовем статистику $\eta = \eta(x)$, $x \in X$, *линейной*, если величина η входит в подпространство $H \in \mathbf{H}$ — замкнутую линейную оболочку всех величин $\xi(u)$, $u \in U$. Обозначим L^φ совокупность всех линейных н. о. для допустимой функции $\varphi = \varphi(\theta)$:

$$L^\varphi = \mathbf{L}^\varphi \cap H.$$

[1] См., например, [13, стр. 34].

Назовем функцию $\varphi = \varphi(\theta)$ *линейно допустимой*, если класс L^{φ} линейных н. о. для φ не является пустым.

Лемма 8. *В гауссовском случае замкнутая линейная оболочка L всех величин η_θ ($\theta \in \Theta$), фигурирующих в условии* (13), *совпадает с пересечением подпространств* $\mathbf{L}$ *и* H:

$$L = \mathbf{L} \cap H. \tag{28}$$

Доказательство. Включение $L \subseteq \mathbf{L} \cap H$ очевидно. Далее, обозначим L^0 ортогональное дополнение к L в подпространстве H:

$$L^0 = H \ominus L.$$

Если $\eta \in L^0$, то по формуле (17)

$$E_\theta \eta = \langle \eta, \eta_\theta \rangle = 0, \ \theta \in \Theta,$$

и если к тому же $\eta \in \mathbf{L} \cap H$, то в силу полноты семейства распределений P_θ, $\theta \in \Theta$, и сама величина η равна 0. Таким образом, не существует отличного от 0 элемента $\eta \in \mathbf{L} \cap H$, ортогонального подпространству L, что и доказывает равенство (28).

Отметим, что вместе с (28) имеет место и равенство

$$L^0 = \mathbf{L}^0 \cap H. \tag{29}$$

Пусть $\varphi = \varphi(\theta)$, $\theta \in \Theta$, — линейно допустимая функция и $\eta \in H$ — некоторая ее линейная несмещенная оценка. Обозначим $\hat{\varphi}$ проекцию величины η на подпространство L. По лемме 8 величина $\hat{\varphi} \in L$ также является несмещенной оценкой для функции $\varphi = \varphi(\theta)$, $\theta \in \Theta$, поскольку разность $\eta - \hat{\varphi}$ входит в L^0 и

$$E_\theta \hat{\varphi} \equiv E_\theta \eta - E_\theta(\eta - \hat{\varphi}) \equiv E_\theta \eta, \ \theta \in \Theta.$$

При этом согласно формуле (17)

$$E_\theta \hat{\varphi} = \langle \hat{\varphi}, \eta_\theta \rangle, \ \theta \in \Theta. \tag{30}$$

Напомним, что множество Θ возможных значений функционального параметра $\theta = \theta(u,)$ $u \in U$, принадлежит гильбертову пространству Y действительных функций $y = y(u)$, $u \in U$, представимых в виде (14). По самому определению скалярного произведения (15) пространство Y унитарно изоморфно гильбертову пространству H; при этом указанный изоморфизм $y = V\eta$ (где $y \in Y$, а $\eta \in H$) дается соотношением (14)

$$y(u) = \langle \xi(u), V^{-1}y \rangle, \ u \in U.$$

В частности, значениям $\theta = \theta(u)$, $u \in U$, из множества $\Theta \subseteq Y$ соответствуют (см. формулу (13)) величины $\eta_\theta = V\theta^{-1}$, $\theta \in \Theta$, и таким образом, порождаемое этими величинами η_θ, $\theta \in \Theta$, подпространство $L \subseteq H$ унитарно изоморфно замкнутой линейной оболочке $\overline{\Theta} \subseteq Y$ значений параметра $\theta \in \Theta$.

Связь исходного множества $\Theta \subseteq Y$ и соответствующего подпространства $\overline{\Theta}$, порождаемого элементами $\theta \in \Theta$, может быть наглядно описана в терминах слабой сходимости. Именно, функция $\theta = \theta(u)$, $u \in U$, принадлежит подпространству $\overline{\Theta}$ тогда и только тогда, когда найдется последовательность $\theta_n = \theta_n(u)$, $u \in U$, линейных комбинаций некоторых функций из множества Θ ($n = 1, 2, \ldots$), такая что она ограничена в Y и $\theta(u) = \lim\limits_{n\to\infty} \theta_n(u)$ при каждом $u \in U$.

Равенство (30) можно переписать в виде

$$E_\theta \hat{\varphi} = \langle \hat{\varphi}, V^{-1}\theta \rangle = \varphi(\theta), \ \theta \in \Theta. \tag{31}$$

Ясно, что функция $\varphi(\theta)$, $\theta \in \bar{\Theta}$, вида

$$\varphi(\theta) = \langle \hat{\varphi}, V^{-1}\theta \rangle = \langle V\hat{\varphi}, \theta \rangle, \quad \theta \in \bar{\Theta}, \tag{32}$$

является линейным непрерывным функционалом на подпространстве $\bar{\Theta} \in Y$ и однозначно определяется своими значениями $\varphi(\theta)$ на множестве Θ, замкнутая линейная оболочка которого и есть $\bar{\Theta}$. Ясно также, что всякая функция вида (32)

$$\varphi(\theta) = \langle \theta_\varphi, \theta \rangle, \quad \theta \in \bar{\Theta}, \tag{33}$$

где θ_φ — некоторый элемент из подпространства $\bar{\Theta} \subseteq Y$, является линейно допустимой; линейной несмещенной оценкой для нее может служить величина $\hat{\varphi} \in L$, соответствующая элементу $\theta_\varphi \in \bar{\Theta}$:

$$\hat{\varphi} = V^{-1}\theta_\varphi, \tag{34}$$

а именно

$$E_\theta \hat{\varphi} \equiv \varphi(\theta) \text{ при всех } \theta \in \bar{\Theta}.$$

Таким образом, имеет место следующее предложение.

Лемма 9. *Функция $\varphi = \varphi(\theta)$, $\theta \in \Theta$, является линейно допустимой тогда и только тогда, когда она продолжается в линейный непрерывный функционал $\varphi = \varphi(\theta)$, $\theta \in \bar{\Theta}$, на подпространстве $\bar{\Theta} \subseteq Y$ — замкнутой линейной оболочке исходного множества Θ. При этом всякая линейная н. о. $\eta \in H$ функции $\varphi(\theta)$, $\theta \in \Theta$, одновременно является линейной н. о. функционала $\varphi(\theta)$, $\theta \in \bar{\Theta}$.*

Из этой леммы вытекает, в частности, что, не ограничивая общности, можно считать исходное множество Θ совпадающим со своей замкнутой линейной оболочкой $\bar{\Theta}$:

$$\Theta = \bar{\Theta}.$$

Таким образом, в рамках «линейной теории» к семейству распределений P_θ, $\theta \in \Theta$, применимы все результаты, полученные в общем случае при $\Theta = \bar{\Theta}$ (см. пп. 1, 2 § 1). В частности, наилучшая несмещенная оценка линейно допустимой функции $\varphi = \varphi(\theta)$, $\theta \in \Theta$, однозначно представимой в виде (33), есть соответствующая величина $\hat{\varphi} = V^{-1}\theta_\varphi \in L$, поскольку проекция всякой линейной н. о. $\eta \in H$ на подпространство $\mathbf{L}$ совпадает с ее проекцией на подпространство $L = \mathbf{L} \cap H$ (см. п. 3 § 1 и лемму 3).

Очевидно, из полученных выше результатов (см. леммы 3 и 8) вытекает следующее предложение.

Теорема 2. *Класс всех линейных н. о. для функции $\varphi \equiv 0$ совпадает с подпространством $L^0 = H \ominus \mathbf{L}$. Проекция каждого класса L^φ всех линейных н. о. (для линейно допустимой функции φ) на подпространство $\mathbf{L}$ состоит из единственного элемента $\hat{\varphi}$:*

$$L^\varphi = \hat{\varphi} \oplus L^0. \tag{35}$$

Величина $\hat{\varphi}$ дает наилучшую линейную несмещенную оценку (н. л. н. о.) соответствующей функции $\varphi = \varphi(\theta)$: при всяком $\theta \in \Theta$

$$E_\theta [\hat{\varphi} - \varphi(\theta)]^2 = \min_{\eta \in L^\varphi} E_\theta [\eta - \varphi(\theta)]^2. \tag{36}$$

Указанная н. л. н. о. $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(x)$, $x \in X$, может быть определена из интегрального соотношения (условия несмещенности) вида

$$\langle \hat{\varphi}, \eta_\theta \rangle = \int_X \hat{\varphi}(x)\, \eta_\theta(x)\, P(dx) = \theta(u), \quad u \in U. \tag{37}$$

Из теоремы 2 легко выводится следующий факт (ср. лемму 4).

Пусть $\eta_k \in L^{\varphi_k}$ *— линейные н. о. для функций* $\varphi_k = \varphi_k(\theta)$ $(k = 1 \ldots, n)$, $\hat\varphi_1, \ldots, \hat\varphi_n$ *— соответствующие н. л. н. о.* и $c_1, \ldots, c_n$ *— произвольные действительные числа. Тогда* $\eta = \sum_k c_k\eta_k$ *является линейной н. о. для функции* $\varphi = \Sigma c_k\varphi_k$, *а* $\hat\varphi = \Sigma c_k\hat\varphi_k$ *— н. л. н. о. для* φ; *если* $\{s_{kj}\}$ *— корреляционная матрица н. л. н. о.* $\hat\varphi_1, \ldots, \hat\varphi_n$ *и* $\{\sigma_{kj}\}$ *— корреляционная матрица линейных н. о.* $\eta_1, \ldots, \eta_n$, *то имеет место следующее неравенство*:

$$\{s_{kj}\} \leqslant \{\sigma_{kj}\}. \tag{38}$$

При этом, если $\varphi \not\equiv 0$, *то* $\hat\varphi \neq 0$, *т. е. матрица* $\{s_{ij}\}$ *является невырожденной.*

Отметим, что для любых величин $\eta_1, \eta_2 \in H$

$$E_\theta(\eta_1 - E_\theta\eta_1)(\eta_2 - E_\theta\eta_2) = \langle\eta_1, \eta_2\rangle. \tag{39}$$

Пусть $\theta_1, \theta_2, \ldots$ — некоторый базис в подпространстве $\overline{\Theta} \subseteq Y$, т. е. полная в $\overline{\Theta}$ система элементов, такая что для любых действительных чисел $c_1, c_2, \ldots$

$$\Big\| \sum_k c_k\theta_k \Big\|^2 \asymp \sum_k c_k^2$$

(здесь и далее символ $\alpha \asymp \beta$ означает, что для переменных α и β выполняется соотношение $0 < \underline{\lim}\, \alpha/\beta \leqslant \overline{\lim}\, \alpha/\beta < \infty$). Пусть $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots,$— сопряженная система элементов:

$$\langle\theta_k^*, \theta_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } k = j, \\ 0 & \text{при } k \neq j. \end{cases}$$

Всякий элемент $y \in \overline{\Theta}$ может быть однозначно представлен в виде

$$y = \sum_k c_k\theta_k,$$

где $c_k = \langle y, \theta_k^*\rangle$, $\sum_k c_k^2 \asymp \|y\|^2$, причем для любых действительных $c_1, c_2, \ldots,$ удовлетворяющих условию $\sum_k c_k^2 < \infty$, ряд $\sum_k c_k\theta_k$ сильно сходится и его сумма является некоторым элементом $y \in \overline{\Theta}$. Сопряженная система $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots$ также является базисом[1].

Теорема 3. *Пусть* $\varphi = \varphi(\theta)$, $\theta \in \overline{\Theta}$, *— линейно допустимая функция (линейный непрерывный функционал на подпространстве* $\overline{\Theta} \subseteq Y$ *вида* (33)):

$$\varphi(\theta) = (\theta_\varphi, \theta),\ \theta \in \overline{\Theta},$$

где $\theta_\varphi = \theta_\varphi(u)$, $u \in U$,*— определенный элемент из* $\overline{\Theta}$, *представимый рядом*

$$\theta_\varphi = \sum_k \varphi(\theta_k^*)\,\overline{\theta}_k. \tag{40}$$

При указанном изоморфизме пространств Y *и* H *этому элементу* $\theta_\varphi \in \overline{\Theta}$ *соответствует наилучшая линейная несмещенная оценка* $\hat\varphi = V^{-1}\theta_\varphi$ *для функции* $\varphi = \varphi(\theta)$, *которая является единственным решением* $\hat\varphi \in L$ *уравнения*

$$\theta_\varphi(u) = \langle\xi(u), \hat\varphi\rangle,\ u \in U. \tag{41}$$

---

[1] См., например, [5].

Эта оценка $\hat{\varphi}$ представима в виде соответствующего ряда

$$\hat{\varphi} = \sum_k \varphi(\theta_k^*)\,\eta_k, \tag{42}$$

где $\eta_1, \eta_2, \ldots,$ — величины из подпространства $L \subseteq H$, отвечающие элементам $\theta_1, \theta_2, \ldots,$ из подпространства $\overline{\Theta} \subseteq Y$, являются наилучшими линейными н. о. для функций вида $\varphi_k(\theta) = \langle\theta, \theta_k\rangle$ от $\theta \in \overline{\Theta}$. Ряд (42) сходится в среднем квадратичном по каждой из вероятностных мер P_θ, $\theta \in \Theta$.

Доказательство. Тот факт, что величина $\hat{\varphi} = V^{-1}\theta_\varphi$ является наилучшей н. о. для функции $\varphi = \varphi(\theta)$, $\theta \in \overline{\Theta}$, был установлен ранее. Элементы $\theta_1, \theta_2, \ldots$ являются базисом, и функция $\theta_\varphi = \theta_\varphi(u)$, $u \in U$, представима в виде ряда (40)

$$\theta_\varphi = \sum_k \langle\theta_\varphi, \theta_k^*\rangle\,\theta_k = \sum_k \varphi(\theta_k^*)\,\theta_k.$$

Далее, при указанном соответствии между Y и H базис $\theta_1, \theta_2, \ldots$ подпространства $\overline{\Theta}$ переходит в базис $\eta_1, \eta_2, \ldots$ подпространства L, так что отвечающая элементу $\theta_\varphi \in \overline{\Theta}$ наилучшая (см. теорему 2) линейная н. о. $\hat{\varphi} \in L$ для функции $\varphi = \varphi(\theta)$ представима в виде ряда (42)

$$\hat{\varphi} = \sum_k \varphi(\theta_k^*)\,\eta_k.$$

При $\varphi(\theta) = \langle\theta, \theta_k\rangle$ из выражения (42) получаем, что $\hat{\varphi} = \eta_k$, т. е. η_k является наилучшей линейной н. о. для функции $\varphi_k(\theta) = \langle\theta, \theta_k\rangle$, $\theta \in \overline{\Theta}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Наконец, сильная сходимость ряда (42) равносильна сходимости в среднем (по вероятностной мере P), что вместе со сходимостью ряда из средних значений:

$$\sum_k \varphi(\theta_k^*)\,E_\theta\eta_k = \sum_k \varphi(\theta_k^*)\,\langle\theta_k, \theta\rangle = \langle\theta_\varphi, \theta\rangle = \varphi(\theta),$$

равносильно сходимости в среднем по любой мере P_θ, $\theta \in \overline{\Theta}$. Теорема доказана.

Отметим, что если исходный базис $\theta_1, \theta_2, \ldots$ подпространства $\overline{\Theta} \subseteq Y$ является ортонормированным, то для любых линейно допустимых функций $\varphi_1 = \varphi_1(\theta)$ и $\varphi_2 = \varphi_2(\theta)$, $\theta \in \overline{\Theta}$, имеет место следующая формула:

$$E_\theta\,[\hat{\varphi}_1 - \varphi_1(\theta)]\,[\hat{\varphi}_2 - \varphi_2(\theta)] = \langle\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2\rangle = \sum_k \varphi_1(\theta_k)\cdot\varphi_2(\theta_k). \tag{43}$$

В частности, наилучшие линейные н. о. $\hat{\varphi}(u)$, $u \in U$, для функций $\varphi = \varphi(\theta, u)$ от $\theta \in \Theta$ вида (27) (где параметр u пробегает множество U) по отношению к каждой из вероятностных мер P_θ образуют гауссовский случайный процесс с соответствующим средним значением $\theta(u)$, $u \in U$, и корреляционной функцией

$$E_\theta\,[\hat{\varphi}(u) - \theta(u)]\,[\hat{\varphi}(v) - \theta(v)] = \langle\hat{\varphi}(u), \hat{\varphi}(v)\rangle = \sum_k \theta_k(u)\,\theta_k(v) \tag{44}$$

(здесь функции $\theta_k = \theta_k(u)$ от $u \in U$ $(k = 1, 2, \ldots)$ образуют ортонормированный базис в подпространстве $\overline{\theta}$ функционального пространства Y).

Пример 3. *Оценки «коэффициентов регрессии». Пусть подпространство $\overline{\theta}$ имеет конечную размерность, равную n.* Тогда любые n линейно независимых элементов из $\overline{\theta}$ образуют базис в $\overline{\theta}$, так же как и любые n линейно независимых величин из подпространства L образуют базис в L. Если $\theta_1,\ldots,\theta_n$ — базис в $\overline{\Theta}$, то всякий элемент $\theta \in \overline{\Theta}$ представим в виде

$$\theta = \sum_{k=1}^{n} C_k \theta_k ,$$

где $c_k = \langle\theta, \overset{*}{\theta}_k\rangle$; $k = 1,\ldots,n$ — так называемые «коэффициенты регрессии», а $\overset{*}{\theta}_1,\ldots,\overset{*}{\theta}_n$ — сопряженная система к $\theta_1,\ldots,\theta_n$. Пусть $\eta_1,\ldots,\eta_n$ — величины в подпространстве L, отвечающие элементам $\theta_1,\ldots,\theta_n$ (т. е. $\eta_k = V^{-1}\theta_k$; $k = 1,\ldots, n$). Эти величины могут быть определены из уравнений типа (13)

$$\theta_k (u) = \langle \xi (u), \eta_k\rangle;\ k = 1,\ldots, n\ (u \in U)$$

и являются наилучшими линейными н. о. для функций вида $y_k (\theta) = \langle\theta, \overset{*}{\theta}_k\rangle$, $\theta \in \overline{\Theta}$. При рассматриваемом изоморфизме $Y \leftrightarrow H$ элементам $\overset{*}{\theta}_k$ соответствуют наилучшие линейные н. о. $\hat{c}_k$ коэффициентов $c_k = \langle\theta, \overset{*}{\theta}_k\rangle$; $k = 1,\ldots, n$ (т. е. $c_k = V^{-1}\overset{*}{\theta}_k$; $k = 1,\ldots, n$, — см. теорему 3). В силу изоморфизма эти наилучшие линейные н. о. $\hat{c}_1,\ldots,\hat{c}_n$ образуют сопряженную систему к $\eta_1,\ldots,\eta_n$:

$$\langle\acute{c}_k, \eta_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } k = j, \\ 0 & \text{при } k \neq j. \end{cases}$$

Таким образом, если воспользоваться представлением

$$\hat{c}_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\eta_j \quad (i = 1, \ldots, n),$$

то коэффициенты s_{ij} $(i, j = 1,\ldots, n)$ в этом представлении могут быть определены из уравнений

$$\sum_j s_{ij} \langle\eta_j, \eta_k\rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

Отметим, что матрица $\{s_{ij}\}$ является обратной к корреляционной матрице $\{\langle\eta_i, \eta_k\rangle\}$. При этом, как легко видеть,

$$E_\theta [\hat{c}_i - c_i] [\hat{c}_j - c_j] = \langle\hat{c}_i, \hat{c}_j\rangle = s_{ij}\ (i, j = 1, \ldots, n).$$

Наилучшая же линейная н. о. $\hat{\varphi} (u)$ для функции $\varphi = \varphi (\theta, u)$ от $\theta \in \Theta$ вида (27) — среднего значения $\theta (u)$ в фиксированной точке $u \in U$ — представима в виде

$$\hat{\varphi} (u) = \sum_{k=1}^{n} \hat{c}_k\theta_k (u),\quad u \in U.$$

2. Об оценках среднего значения «в целом»; метод максимального правдоподобия

Как и раньше, будем рассматривать случайный процесс $\xi = \xi (u)$, $u \in U$ со средним значением $\theta = \theta (u)$, $u \in U$,— неизвестным параметром из подпространства Θ в функциональном пространстве Y. В п. 1 было показано, что преобразование «наблюдаемого» процесса $\xi (u)$, $u \in U$, вида

$$\hat{\theta} (u) = P\xi (u),\quad u \in U \tag{45}$$

(где P — оператор проектирования на подпространство L в гильбертовом пространстве H) задает наилучшую линейную несмещенную оценку среднего значения $\theta(u)$, $u \in U$; точнее, при каждом фиксированном $u \in U$ такой оценкой является величина $\hat{\theta}(u)$ (обозначаемая ранее $\hat{\varphi}(u)$) — наилучшая линейная н. о. для функции $\varphi = \varphi(\theta, u)$ от $\theta \in \Theta$ вида (27). Для указанного случайного процесса $\hat{\theta} = \hat{\theta}(u)$, $u \in U$, выборочные функции которого естественно рассматривать как оценку неизвестного среднего значения $\theta = \theta(u)$, $u \in U$, «в целом» (считая, например, θ элементом гильбертова пространства Y), имеет место следующий факт.

Теорема 4. *Выборочные функции процесса $\hat{\theta} = \hat{\theta}(u)$ принадлежат (с вероятностью 1) функциональному пространству Y тогда и только тогда, когда подпространство $\overline{\Theta} \subseteq Y$ является конечномерным.*

В основе доказательства этой теоремы лежит следующая лемма.

Лемма 10. *Выборочные функции случайного процесса $\eta = \eta(u)$ вида*

$$\eta(u) = A\xi(u), \quad u \in U, \tag{46}$$

где A — некоторый линейный самосопряжeнный оператор в гильбертовом пространстве H) с вероятностью 1 принадлежат функциональному пространству Y тогда и только тогда, когда A является оператором Гильберта — Шмидта[1].

Доказательство. Оператор Гильберта — Шмидта в H задается некоторым ядром $\alpha(x', x)$,

$$\int\limits_X \int\limits_X |\alpha(x, x')|^2 P(dx) P(dx') < \infty,$$

которое при почти всяком $x \in X$ как функция от $x' \in X$ является элементом гильбертова пространства H (см. лемму 5 гл. II). Следовательно, при почти всяком $x \in X$

$$\eta(x, u) = \int\limits_X \xi(x' u) \alpha(x', x) P(dx') = \langle \xi(\cdot, u), \alpha(\cdot, x) \rangle,$$

и, согласно определению (см. формулу (14)), функция $\eta(x, u)$ от $u \in U$ входит в функциональное пространство Y. Далее, если выборочная функция $\eta(x, u)$ от $u \in U$ входит в Y, то имеется соответствующая величина x гильбертова пространства H, такая что

$$\eta(x, u) = \langle \xi(\cdot, u), \alpha(\cdot, x) \rangle.$$

Нетрудно показать, что в сепарабельном пространстве H (где значения $\xi(u)$, $u \in U$, образуют полную систему) величины $Ah(x)$, $h \in H$, могут быть определены формулой

$$Ah(x) = \langle h, \alpha(\cdot, x) \rangle,$$

распространенной с элементов вида $h = \xi(u)$ на все пространство H.

Из этой формулы видно, что если h_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — слабо сходящаяся к нулю последовательность, то значения $\eta_n(x)$; $n = 1, 2, \ldots$ гауссовских величин $\eta_n = Ah_n \in H$ сходятся к нулю, и если это имеет место с положительной вероятностью, то, по теореме 1 гл. I, последовательность величин η_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится в среднем (сходится сильно в гильбертовом пространстве H). Таким образом, если с положительной вероятностью выборочные функции процесса $\eta = \eta(u)$, определяемого формулой (45), принадлежат функциональному пространству Y, то оператор A является вполне непрерывным. Пусть $h_1, h_2, \ldots$ — ортонормированная последовательность всех собственных элементов вполне непрерывного оператора A.

[1] Более того, A — оператор Гильберта — Шмидта, если только указанные выборочные функции принадлежат Y лишь с положительной вероятностью.

Имеем

$$\sum_n \|Ah_n\|^2 = E\sum_n |Ah_n|^2,$$

где

$$\sum_n |Ah_n(x)|^2 = \sum_n \langle h_n, \alpha(\cdot, x)\rangle^2 = \|\alpha(\cdot, x)\|^2.$$

Поскольку $\eta_n = Ah_n$; $n = 1, 2, \ldots,$ — независимые гауссовские величины с нулевым средним, то, по теореме 2 гл. I, сходимость ряда $\sum_n |\eta_n(x)|^2$ с положительной вероятностью равносильна условию $E\Sigma|\eta_n|^2 < \infty$. Видно, что A является оператором Гильберта — Шмидта, если с положительной вероятностью выборочные функции рассматриваемого случайного процесса $\eta = \eta(u)$ принадлежат функциональному пространству Y. Это в конечном счете и завершает доказательство леммы.

Теперь для доказательства теоремы остается заметить, что оператор проектирования на подпространство $L \subseteq H$ является оператором Гильберта — Шмидта тогда и только тогда, когда это подпространство (а значит, и подпространство $\overline{\Theta} \subseteq Y$) является конечномерным.

В конечномерном случае наилучшая линейная н. о. $\hat{\theta} = \hat{\theta}(u)$, $u \in U$, для неизвестного среднего значения $\theta = \theta(u)$, $u \in U$, может быть представлена в виде (см. теорему 3)

$$\hat{\theta} = \sum_k \eta_k \theta_k, \tag{47}$$

где $\eta_k = \hat{c}_k$ — наилучшие линейные н. о. для коэффициентов $c_k = \langle \theta\theta_k \rangle$, $\theta \in \Theta$, в разложении

$$\theta = \Sigma c_k \theta_k \tag{48}$$

элемента $\theta \in \Theta$, по базисным элементам θ_k $(k = 1, \ldots, n)$. В случае ортонормированного базиса $\theta_1, \ldots, \theta_n$ соответствующие оценки $\eta_1, \ldots, \eta_n$ являются независимыми гауссовскими величинами с одинаковой (равной $\cdot$ 1) дисперсией — см. теорему 3 и пример 3.

Наилучшая несмещенная оценка $\hat{\theta}$ *является точкой максимума «функции правдоподобия»* $L(\theta) = \log p_\theta$ *от* $\theta \in \overline{\Theta}$, *где* $p_\theta = p_\theta(x)$, $x \in X$, *есть плотность* $P_\theta(dx)/P(dx)$, *определяемая формулой* (16):

$$L(\theta) = \eta_\theta - \frac{1}{2}\|\eta_\theta\|^2 = \sum_k c_k\eta_k - \frac{1}{2}\sum_k c_k^2, \quad \theta \in \overline{\Theta}.$$

Видно, что максимум функции $L(\theta)$ достигается при $c_k = \eta_k$; $k = 1, \ldots, n$:

$$\max_{\theta \in \overline{\Theta}} L(\theta) = \frac{1}{2}\sum_k \eta_k^2 = L(\hat{\theta})$$

(см. (47) и (48)).

Следует отметить, что «метод максимума правдоподобия» н е п р и м е н и м в бесконечномерном случае, когда гауссовский процесс $L(\theta)$, $\theta \in \Theta$, является неограниченным. Это сразу видно, например, из соотношения: с вероятностью 1

$$\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta) \geqslant \sup(\eta_1, \eta_2, \ldots) - \frac{1}{2} = \infty,$$

где η_k ($k = 1, 2, \ldots$) — бесконечная последовательность независимых гауссовских величин с равной 1 дисперсией и средними значениями $c_k = E_\theta \eta_k = \langle \theta, \theta_k \rangle$, удовлетворяющими условию: $\sum_k c_k^2 < \infty$; здесь $\theta_1, \theta_2 \ldots$ — ортонормированный базис в бесконечномерном подпространстве $\overline{\Theta} \subseteq Y$, а η_1, η_2 — соответствующие величины в подпространстве $L \subseteq H$ (см. теорему 3). Формально написанные «условия экстремума» для функции правдоподобия $L(\theta)$ от $\theta = \sum_k c_k \theta_k$:

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial c_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

приводят к наилучшим линейным н. о. $\eta_k = \hat{c}_k$ для соответствующих коэффициентов $c_k = \langle \theta, \theta_k \rangle$; $k = 1, 2, \ldots$, но, поскольку «коэффициенты» $\hat{c}_k = \eta_k$; $k = 1, 2, \ldots$ таковы, что с вероятностью 1 ряд $\sum_k \eta_k^2$ расходится, в гильбертовом пространстве Y не существует элемента, представимого рядом $\Sigma \eta_k \theta_k$. Правда (см. теорему 3), наилучшая линейная несмещенная оценка $\hat{\theta}(u)$ для функции $\theta(u) = \varphi(\theta, u)$ от $\theta \in \Theta$ может быть представлена в виде сходящегося в среднем (и с вероятностью 1) ряда

$$\hat{\beta}(u) = \sum_k \eta_k \theta_k(u), \quad u \in U. \tag{49}$$

Это обусловливается тем, что $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — последовательность независимых гауссовских величин с единичной дисперсией, для которых $\sum_k (E_\theta \eta_k)^2 = \sum_k c_k^2 < \infty$ и, кроме того, $\sum_k \theta_k(u)^2 < \infty$. Последнее условие является следствием того, что функция $\theta(u) = f(\theta, u)$ от $\theta \in \overline{\Theta}$ есть линейный непрерывный функционал на $\overline{\Theta}$ (см. лемму 9): $\varphi(\theta, u) = \langle \theta, \theta_\varphi \rangle$, где θ_φ — некоторый элемент из $\overline{\Theta}$, так что

$$\sum_k \theta_k(u)^2 = \sum_k \langle \theta_k, \theta_\varphi \rangle^2 = \langle \theta_\varphi, \theta_\varphi \rangle.$$

3. Метод наименьших квадратов

Пусть U есть сепарабельное гильбертово пространство и пусть (u, v) означает скалярное произведение элементов $u, v \in U$. Предположим, что рассматриваемый гауссовский линейный функционал $\xi(u)$, $u \in U$, имеет среднее значение вида

$$\theta(u) = (u, \theta), \quad u \in U,$$

где θ — соответствующий элемент из U, а корреляционная функция определяется ядерным (корреляционным) оператором B:

$$B(u, v) = (Bu, v), \quad u, v \in U.$$

Как известно (см. § 3 гл. I), при указанных условиях существует гауссовская величина $\xi \in U$, такая что

$$\xi(u) = (u, \xi), \quad u \in U, \tag{50}$$

при этом

$$E_\theta \xi = \theta, \quad E_\theta \| \xi - \theta \|^2 = \sum_k (Bv_k, v_k) < \infty,$$

где v_1, $v_2, \ldots$ — некоторый ортонормированный базис в U,

$$\xi = \sum_k (\xi, v_k) \cdot v_k = \sum_k \xi(v_k) \cdot v_k. \tag{51}$$

Итак, вместо исходного семейства действительных величин $\xi(u)$, $u \in U$, со средним значением $\theta(u)$, $u \in U$, будем рассматривать величину $\xi \in U$ (определяемую формулой (50)) со средним значением $\theta \in U$. Обозначим Θ подпространство всех возможных значений неизвестного параметра $\theta \in \in U$.

Чтобы не путать с соответствующим подпространством функций $\theta(u)$ от $u \in U$, положим здесь $\bar{\theta} = \theta(u)$, $u \in U$, а образованное функциями $\bar{\theta} = \theta(u) \in Y$ подпространство обозначим $\bar{\Theta}$.

Условие принадлежности функции $\bar{\theta}$ функциональному пространству Y равносильно условию: $\theta \in B^{1/2} U$, где B — указанный выше корреляционный оператор в гильбертовом пространстве U (см. пример 7 гл. II).

Итак, подпространство $\Theta \subseteq U$ целиком входит в множество $B^{1/2} U$. Отметим, что подпространство $\Theta \subseteq B^{1/2}U$ является замкнутым тогда и только тогда, когда оно конечномерно[1].

Далее, установим нужное нам соответствие между гильбертовым пространством Y и пополнением гильбертова пространства U относительно нового скалярного произведения

$$\langle u, v \rangle = (Bu, v);$$

обозначим это новое гильбертово $\bar{U}$. Именно, функциям $y \in Y$ вида

$$y(u) = \langle \xi(u), \xi(v) \rangle = (Bu, v) = \langle u, v \rangle, \quad u \in U$$

(где v — фиксированный для каждой функции элемент на U) сопоставим элемент $v \in U$. Это соответствие является изометрией всюду плотного в Y подпространства функций указанного вида и всюду плотного в $\bar{U}$ подпространства U, а следовательно, может быть продолжено до изометрии самих пространств Y и $\bar{U}$. Имеющееся изометричное соответствие между Y и гильбертовым пространством H позволяет установить такое соответствие между H и $\bar{U}$, при котором соответствующие элементы $\eta \in H$, $\bar{v} \in \bar{U}$, и функция $y = y(u)$ из Y связаны формулой

$$y(u) = \langle \xi(u), \eta \rangle = \langle u, \bar{v} \rangle, \quad u \in U. \tag{52}$$

Формула (52) показывает, в частности, что $y = y(u)$ является линейным непрерывным функционалом на исходном гильбертовом пространстве U:

$$y(u) = (u, v), \quad u \in U, \tag{53}$$

где v — определенный элемент на U, точнее, $v \in B^{1/2}U$ (см. пример 7 гл. II). Рассматриваемый в новом гильбертовом пространстве $\bar{U}$ оператор $B^{-\frac{1}{2}}$, определенный на всюду плотном в U подпространстве $B^{1/2}U$, продолжается по непрерывности на все пространство $\bar{U} \supset U$, и для элементов $u, v \in U$ имеет место равенство

$$(u, v) = \langle B^{-\frac{1}{2}} u, B^{-\frac{1}{2}} v \rangle.$$

[1] В самом деле, если Θ замкнуто, то оператор $B^{1/2}$ взаимно однозначно отображает замкнутое подпространство вида $B^{-1/2}\,\Theta$ на Θ и должен был бы иметь ограниченный обратный оператор $B^{-1/2}$, что в случае ядерности B может быть лишь для конечномерного Θ.

В частности, на подпространстве $B^{1/2}U \subset \overline{U}$ определен оператор $B^{-1} = B^{-\frac{1}{2}} \cdot B^{-\frac{1}{2}}$. Сравнивая выражения (52) и (53), легко видеть, что

$$y(u) = (u, v) = \langle u, B^{-1}v \rangle = \langle u, \overline{v} \rangle, \quad u \in U,$$

откуда следует, что элементы $\overline{v} \in \overline{U}$ и $v \in B^{1/2}U$ в формулах (52) и (53) связаны между собой соотношением

$$\overline{v} = B^{-1}v, \tag{54}$$

причем для соответствующих элементов $\overline{v} \in \overline{U}$ и $v \in B^{1/2}U$

$$\langle \overline{v}_1, \overline{v}_2 \rangle = (B^{-\frac{1}{2}} v_1, B^{-\frac{1}{2}} v_2).$$

Итак, среднее значение $\theta \in \Theta$ из U, определяемая им функция $\overline{\theta} = \theta(u)$ от $u \in U$ из Y и элемент $\overline{\theta} = B^{-1}\theta$ из $\overline{U}$ вместе с соответствующей величиной $\eta \in L$ из H связаны между собой следующими равенствами:

$$\theta(u) = (u, \theta) = \langle u, \overline{\theta} \rangle = \langle \xi(u), \eta \rangle, \quad u \in U. \tag{55}$$

Видно, в частности, что при указанной изометрии пространств H и $\overline{U}$ подпространству $L \subseteq H$ соответствует подпространство $B^{-1}\Theta \subseteq \overline{U}$.

Перейдем теперь непосредственно к «методу наименьших квадратов».

Обозначим $\hat{\Theta}$ замыкание Θ в исходном гильбертовом пространстве U. В качестве оценки неизвестного параметра $\theta \in \Theta$ предлагается взять проекцию $\hat{\xi}(x)$ «наблюдаемой» величины $\xi(x) \in U$ на (замкнутое) подпространство $\hat{\Theta} \subseteq U$. Если $v_1, v_2, \ldots$ — ортонормированный базис в Θ, то

$$\hat{\xi} = \sum_k (\xi, v_k) \cdot v_k = \sum_k \xi(v_k) \cdot v_k. \tag{56}$$

Эта «оценка наименьших квадратов» $\hat{\xi} \in \hat{\Theta}$ является несмещенной:

$$E_\theta \hat{\xi} = \sum_k E\xi(v_k) v_k = \sum_k \theta(v_k) v_k = \sum_k (\theta, v_k) v_k = \theta.$$

При этом

$$E_\theta \| \hat{\xi} - \theta \|^2 = \sum_k E\xi(v_k)^2 = \sum_k (Bv_k, v_k).$$

Сравнивая $\hat{\xi}$ с «наилучшей линейной несмещенной оценкой» $\hat{\theta} \in \hat{\Theta}$:

$$\hat{\theta} = \sum_k \hat{\theta}(v_k) \cdot v_k, \tag{57}$$

где $\hat{\theta}(v_k)$ — наилучшие линейные н. о. для соответствующих функций $\varphi(\theta, v_k) = \theta(v_k)$ от $\theta \in \Theta$; $k = 1, 2, \ldots$, имеем

$$E_\theta \| \hat{\xi} - \hat{\theta} \|^2 = \sum_k E_\theta | \xi(v_k) - \hat{\theta}(v_k) |^2. \tag{58}$$

Отметим, что при любом $v \in U$

$$(v, \hat{\theta}) = \sum_k (v, v_k) \cdot \hat{\theta}(v_k), \tag{59}$$

где $\hat{\theta}(v_k)^2 \leqslant E \sum_k \xi(v_k)^2 < \infty$ и ряд (59) сходится, так что величина $(v, \hat{\theta})$ принадлежит подпространству $L \subseteq H$ и совпадает с наилучшей линейной н. о. $\hat{\theta}(v)$ для функции $\varphi(\theta, v) = \theta(v)$ от $\theta \in \Theta$.

Назовем величины

$$(v, \hat{\xi}) = \sum_k (v, v_k) \cdot \xi(v_k) = \xi(v)$$

«оценками наименьших квадратов». Это — линейные несмещенные оценки для соответствующих функций $\varphi(\theta, v) = \theta(v)$ от $\theta \in \Theta$ вида (27).

Т е о р е м а 5. *Оценка наименьших квадратов $\xi(v)$ для функции $\varphi(\theta, v) = \theta(v)$ от $\theta \in \Theta$ совпадает с наилучшей линейной н. о. для этой функции тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$Bv \in \Theta. \tag{60}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Во-первых, как легко видеть, условие (60) равносильно тому, что $v \in B^{-1}\Theta$ (v считается элементом пополненного пространства $\bar{U}$). Во-вторых, как функция от $\bar{\theta} = B^{-1}\theta \in \bar{U}$, функция $\varphi(\theta, v)$ есть

$$\varphi(\theta, v) = (\theta, v) = \langle\bar{\theta}, v\rangle$$

(см. формулу (55)), и в силу указанной выше изометрии между пространствами Y, H и $\bar{U}$ легко видеть, что наилучшая оценка $\hat{\varphi}(v) = \hat{\theta}(v) \in L$ соответствует элементу $v \in \bar{U}$ тогда и только тогда, когда $v \in B^{-1}\Theta$ или когда $Bv \in \Theta$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Все оценки наименьших квадратов $\xi(v)$, $v \in \Theta$, совпадают с наилучшими линейными н. о. тогда и только тогда, когда подпространство $\Theta \subseteq U$ инвариантно относительно корреляционного оператора B.*

4. Состоятельность наилучших оценок

Ниже речь будет идти об асимптотических (при $n \to \infty$) свойствах наилучших линейных несмещенных оценок, когда рассматривается гауссовская случайная функция $\xi(u)$ от u на некоторой последовательности расширяющихся множеств $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_n \subseteq \ldots$

Обозначим $\mathfrak{A}_n$ σ-алгебру множеств «выборочного пространства» X, порождаемую величинами $\xi(u)$, $u \in U_n$, $\mathfrak{A}^*$ — σ-алгебру, порожденную всеми величинами $\xi(u)$, $u \in U^*$, где U^* — объединение всех множеств U_n. На измеримом пространстве $(X, \mathfrak{A}^*)$ имеется одно из распределений вероятностей P_θ, где функциональный параметр $\theta = \theta(u)$, $u \in U^*$, есть неизвестное среднее значение: $\theta(u) = E_\theta\xi(u)$, $u \in U^*$.

Согласно изложенному ранее, предполагается, что на каждой из σ-алгебр $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_n$ вероятностные меры P_θ эквивалентны между собой — эквивалентны вероятностной мере P с нулевым средним значением. Это условие означает, что каждая из функций $\theta = \theta(u)$ на множестве $U = U_n$ представима формулой (13), в которой величина $\eta_\theta = \eta_\theta^n$ принадлежит подпространству H_n, порожденному величинами $\xi(u)$, $u \in U_n$:

$$\theta(u) = \langle\xi(u), \eta_\theta^n\rangle, \quad u \in U_n. \tag{61}$$

Это условие позволяет считать, что множество Θ принадлежит определенному гильбертову пространству $\bar{\Theta}_n$— замкнутой линейной оболочке множества Θ относительно скалярного произведения

$$\langle\theta_1, \theta_2\rangle_n = \langle\eta_{\theta_1}^n, \eta_{\theta_2}^n\rangle. \tag{62}$$

Лемма 11. *Указанные скалярные произведения таковы, что*

$$\langle\theta, \theta\rangle \leqslant \langle\theta_1, \theta\rangle_2 \leqslant \ldots \leqslant \langle\theta, \theta\rangle_n \leqslant \ldots \tag{63}$$

Доказательство. В самом деле, если равенство (61) имеет место при $u \in U_n$ (где $\eta_\theta = \eta_\theta^n$ входит в H_n), то оно имеет место и при $u \in U_m$ для всякого $m \leqslant n$. Следовательно, взяв проекцию η_θ^m величин η_θ^n на подпространство $H_m \subseteq H_n$, будем также иметь и равенство

$$\theta(u) = \langle \xi(u), \eta_\theta^m \rangle, \quad u \in U_m.$$

Поэтому

$$\langle\theta, \theta\rangle_m = \langle\eta_\theta^m, \eta_\theta^m\rangle \leqslant \langle\eta_\theta^n, \eta_\theta^n\rangle = \langle\theta, \theta\rangle_n,$$

что и требовалось доказать. Таким образом,

$$\overline{\Theta}_1 \supseteq \overline{\Theta}_2 \supseteq \ldots \supseteq \overline{\Theta}_n \supseteq \ldots \tag{64}$$

Положим

$$\overline{\Theta} = \bigcap_n \overline{\Theta}_n. \tag{65}$$

Назовем действительную функцию $\varphi = \varphi(\theta)$ параметра $\theta \in \Theta$ линейно допустимой, если существует линейная несмещенная оценка, измеримая относительно некоторой σ-алгебры $\mathfrak{A}_{n_0}$ (т. е. такая величина $\hat{\varphi}_n \in H_{n_0}$, что $E_\theta\hat{\varphi}_{n_0} = \varphi(\theta)$ при всех $\theta \in \Theta$). Как следует из теоремы 3 и неравенств (63), функция $\varphi = \varphi(\theta)$ является линейно допустимой тогда и только тогда, когда она продолжается до линейного непрерывного функционала на $\overline{\Theta}$, точнее, до линейного непрерывного функционала на некотором гильбертовом пространстве $\overline{\Theta}_{n_0} \supseteq \overline{\Theta}$). Для линейно допустимой функции $\varphi = \varphi(\theta)$ существуют линейные н. о. оценки $\hat{\varphi}_n$ (при всех достаточно больших n, скажем, $n \geqslant n_0$), такие что $\hat{\varphi}_n \in H_n$ и при каждом фиксированном n оценка $\hat{\varphi}_n$ является наилучшей линейной н. о. среди всех линейных несмещенных оценок из подпространства H_n, — $\hat{\varphi}_n$ является единственной линейной н. о. из подпространства $L_n \subseteq H_n$, порожденного соответствующими величинами n_θ, $\theta \in \Theta$ (см. теорему 2).

Отметим, что все функции $\varphi = \varphi(\theta, v)$ вида (27)

$$\varphi(\theta, v) = \theta(v), \ \theta \in \Theta,$$

где v — фиксированная точка из множества U^*, являются линейно допустимыми ($\theta(v)$ есть неизвестное среднее значение соответствующей величины $\xi(v)$).

Пусть $\hat{\varphi}_n$, $n \geqslant n_0$,— наилучшие линейные н. о. для линейно допустимой функции $\varphi = \varphi(\theta)$, $\theta \in \Theta$. Напомним, что все линейные н. о. из каждого подпространства H_n имеют одну и ту же проекцию на соответствующее подпространство $L_n \subseteq H_n$, которая совпадает с наилучшей линейной н. о. $\hat{\varphi}_n \in H_n$. Поскольку $H_m \subseteq H_n$ при $m \leqslant n$, а $\varphi_m \in H_m$ является линейной н. о. для функции $\varphi = \varphi(\theta)$, то проекция величины $\hat{\varphi}_m$ на подпространство L_n будет совпадать с наилучшей линейной н. о. $\hat{\varphi}_n \in H_n$. Таким образом, рассматриваемые оценки $\hat{\varphi}_n$, $n \geqslant n_0$ получаются последовательным проектированием на соответствующие подпространства $L_n \subseteq H_n$. Отсюда получаем, что

$$\|\hat{\varphi}_m - \hat{\varphi}_n\|^2 = \|\hat{\varphi}_m\|^2 - \|\hat{\varphi}_n\|^2 \to 0$$

при $m, n \to \infty$, поскольку величины

$$s_n^2 = E_\theta[\hat{\varphi}_n - \varphi(\theta)]^2 = \|\hat{\varphi}_n\|^2, \quad n \geqslant n_0 \tag{66}$$

монотонно убывают и имеется предел $\lim\limits_{n\to\infty} \|\hat{\varphi}_n\|^2 \geqslant 0$. Таким образом, в пространстве H^* — замкнутой линейной оболочке всех величин $\xi\,(u)$, $u \in U^*$,— последовательность наилучших линейных н. о. $\hat{\varphi}_n$, $n \geqslant n_0$, является фундаментальной и имеет предел $\hat{\varphi}_n \in H^*$:

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}_n = \hat{\varphi}. \tag{67}$$

Очевидно, при m, $n \to \infty$

$$E_\theta (\hat{\varphi}_m - \hat{\varphi}_n)^2 = \| \hat{\varphi}_m - \hat{\varphi}_n \|^2 \to 0,$$

так что последовательность $\hat{\varphi}_n$, $n \geqslant n_0$, сходится в среднем квадратичном, а значит и в среднем по каждой из вероятностных мер P_θ; при этом предельная величина $\hat{\varphi}\,(\theta)$ будет, вообще говоря, зависеть от $\theta \in \Theta$, но

$$E_\theta\, \hat{\varphi}\,(\theta) = \varphi\,(\theta) \tag{68}$$

при всех $\theta \in \Theta$.

Предполагая эквивалентность вероятностных мер P_θ лишь на каждой из σ-алгебр $\mathfrak{A}_n$ $(n = 1, 2,\ldots)$, рассмотрим величину $\hat{\varphi} \in H^*$, определенную предельным соотношением (67). Ей можно однозначно сопоставить функцию $\theta = \theta\,(u)$, $u \in U^*$, вида

$$\theta\,(u) = \langle \xi\,(u),\, \hat{\varphi} \rangle, \quad u \in U^*. \tag{69}$$

Лемма 12. *Указанная функция $\theta = \theta\,(u)$, $u \in U^*$, является средним значением величин $\xi\,(u)$, $u \in U^*$, относительно некоторого распределения P_θ, $\theta \in \overline{\Theta}$, т. е. функция $\theta = \theta\,(u)$, $u \in U^*$, входит в множество $\overline{\Theta}$.*

Доказательство. Рассмотрим функции $\theta_n = \theta_n\,(u)$, $u \in U^*$, определенные формулами (ср. (61))

$$\theta_n\,(u) = \langle \xi(u),\, \hat{\varphi}_n \rangle, \quad u \in U^* \ (n \geqslant n_0).$$

Поскольку наилучшие линейные н. о. $\hat{\varphi}_n$ входят в подпространства $L_n \subseteq H_n$, то функция $\theta_n = \theta_n\,(u)$ входит в соответствующие пространства $\overline{\Theta}_n$ (унитарно изоморфные L_n). При этом функции $\theta_n = \theta_n\,(u)$ одновременно входят и в каждое из пространств $\overline{\Theta}_m$, $m \leqslant n$ (поскольку $\overline{\Theta}_m \supseteq \overline{\Theta}_n$). Если $\hat{\varphi}_n^m$ есть проекция величины $\hat{\varphi}_n$ на подпространство H_m $(m \leqslant n)$, то норма элемента θ_n в гильбертовом пространстве $\overline{\Theta}_m$ есть $\|\theta_n\|_m = \|\hat{\varphi}_n^m\|$, так как именно $\hat{\varphi}_n^m$ есть та величина из подпространства H_m, которая фигурирует в соотношении типа (61):

$$\theta_n\,(u) = \langle \xi\,(u),\, \hat{\varphi}_n^m \rangle, \quad u \in U_m.$$

Таким образом,

$$\|\theta_p - \theta_q\|_m = \|\hat{\varphi}_p^m - \hat{\varphi}_q^m\| \leqslant \|\hat{\varphi}_p - \hat{\varphi}_q\| \to 0$$

при p, $q \to \infty$, откуда видно, что последовательность функций $\theta_n = \theta_n \cdot (u)$, $u \in U^*$ $(n \geqslant n_0)$ является фундаментальной в каждом из гильбертовых пространств $\overline{\Theta}_m$, а следовательно, соответствующий предел $\theta = \lim \theta_n$ является элементом пространства $\overline{\Theta} = \bigcap\limits_m \overline{\Theta}_m$. Этот предел должен совпадать с функцией $\theta = \theta\,(u)$, определенной формулой (69), поскольку при каждом $u \in U^*$

$$\theta\,(u) = \langle \xi\,(u),\, \hat{\varphi} \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \xi\,(u),\, \hat{\varphi}_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \theta_n\,(u).$$

Лемма доказана.

Обозначим $\overline{\Theta}^*$ подпространство в $\overline{\Theta} \supseteq \Theta$ всех средних значений $\theta = \theta(u)$, $u \in U^*$, для которых выполняется соотношение типа (13):

$$\theta(u) = \langle \xi(u), \eta_\theta \rangle, \quad u \in U^*, \tag{70}$$

где η_θ — некоторая величина из пространства H^*. Напомним, что это соотношение необходимо и достаточно для эквивалентности вероятностных мер P_θ и P на σ-алгебре $\mathfrak{A}^*$. По отношению к $\overline{\Theta}^*$ и U^* имеют место все результаты, полученные в п. 1, для семейства распределений P_θ. В частности, имеет место следующий факт.

Теорема 6. *Величина* $\hat{\varphi}$, *определенная предельным соотношением* (67), *является наилучшей линейной н. о. для функции* $\varphi = \varphi(\theta)$ (*рассматриваемой на множестве* $\overline{\Theta}^*$).

Доказательство. В самом деле, $\hat{\varphi}$ является среднеквадратичным пределом при $n \to \infty$ соответствующих величин $\hat{\varphi}_n \in H_n$ по каждой из эквивалентных мер P_θ, $\theta \in \Theta^*$, и $E_\theta \hat{\varphi} = \varphi(\theta)$ для $\theta \in \Theta^*$ (см. равенство (68)). Кроме того, поскольку функция $\theta(u) = \langle \xi(u), \hat{\varphi} \rangle$, $u \in U^*$, принадлежит множеству $\overline{\Theta}^*$ (см. лемму 12), величина $\hat{\varphi}$ принадлежит подпространству $L^* \subseteq H^*$ — замкнутой линейной оболочке величин η_θ, $\theta \in \Theta^*$, фигурирующих в соотношении (70). Чтобы закончить доказательство, достаточно сослаться на теорему 2.

Назовем наилучшую несмещенную линейную оценку $\hat{\varphi}_n \in H_n$ функции $\varphi = \varphi(\theta)$ (на всем пространстве Θ) *состоятельной* при $n \to \infty$, если при всех $\theta \in \Theta$

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta [\hat{\varphi}_n - \varphi(\theta)]^2 = 0 \tag{71}$$

(т. е. если соответствующая величина $\hat{\varphi}$, определяемая предельным соотношением (67), равна 0). Состоятельность означает, грубо говоря, что функция $\varphi = \varphi(\theta)$, $\theta \in \Theta$ допускает безошибочную линейную оценку, основанную на «наблюдаемых» величинах $\xi(u)$, $u \in U^*$.

Теорема 7. *Для того чтобы линейно допустимая функция* $\varphi = \varphi(\theta)$, $\theta \in \Theta$, *допускала безошибочную линейную оценку* (точнее, чтобы существовала последовательность состоятельных *при* $n \to \infty$ *оценок* $\hat{\varphi}_n \in H_n$), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varphi(\theta) = 0 \text{ при } \theta \in \overline{\Theta}^*. \tag{72}$$

Доказательство. Если оценки $\hat{\varphi}_n \in H_n$ являются состоятельными, т. е. предельная для них величина $\hat{\varphi} \in H^*$ равна 0 (см. равенство (66)), то, очевидно, при всех $\theta \in \overline{\Theta}^*$

$$\varphi(\theta) = E_\theta \hat{\varphi} = 0.$$

С другой стороны, если выполнено условие (72), то для величины $\hat{\varphi}$ — наилучшей линейной н. о. из подпространства H^* для функции $\varphi = \varphi(\theta)$ на множестве $\overline{\Theta}^*$ — имеет место формула типа (17) и

$$\hat{\varphi}(\theta) = E_\theta \hat{\varphi} = \langle \hat{\varphi}, \eta_\theta \rangle = 0, \quad \theta \in \overline{\Theta}^*,$$

откуда видно, что величина $\hat{\varphi} \in H^*$ ортогональна подпространству $L^* \subseteq H^*$. Но одновременно эта величина и принадлежит подпространству L^*, поскольку функция $\theta(u) = \langle \xi(u), \hat{\varphi} \rangle$, $u \in U^*$, входит в множество $\overline{\Theta}^*$ (см. теорему 2). Поэтому $\hat{\varphi} = 0$, что означает состоятельность оценок $\hat{\varphi}_n$. Теорема доказана.

Укажем одно простое следствие этой теоремы.

Теорема 8. *Безошибочная линейная оценка (на основе статистик, измеримых относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}^*$) всех линейно допустимых функций* $\varphi = \varphi(\theta)$, $\theta \in \Theta$, *возможна тогда и только тогда, когда* $\overline{\Theta}^* = 0$, *т. е. когда все вероятностные меры* P_θ, $\theta \in \overline{\Theta}$, *на σ-алгебре* $\mathfrak{A}^*$ *взаимно сингулярны.*

Доказательство. Всякая линейно допустимая функция $\varphi = \varphi(\theta)$ однозначно продолжается в линейный непрерывный функционал на некотором пространстве $\overline{\Theta}_n$ (см. лемму 9) и всякий такой функционал $\varphi = \varphi(\theta)$ является линейно допустимой функцией. В частности, $\varphi(0) = 0$. Поэтому, если $\overline{\Theta}^* = 0$, то по теореме 7 линейно все допустимые функции φ имеют состоятельные линейные оценки $\hat{\varphi}_n$ ($n = 1, 2, \ldots$). С другой стороны, если $\varphi(\theta) = 0$ при $\theta \in \Theta^*$ для любого линейного функционала в Θ_n, то каждая функция $\theta = \theta(u)$, $u \in U^*$, из $\overline{\Theta}^*$ как элемент пространства $\overline{\Theta}_n$ равна нулю:

$$\|\theta_n\| = 0,$$

т. е.

$$\theta(u) = 0 \quad \text{при всех} \quad u \in U_n.$$

Поскольку n является произвольным,

$$\theta(u) = 0 \quad \text{при всех} \quad u \in U^*, \quad U^* = \bigcup_n U_n,$$

что и требовалось доказать.

Отметим следующий факт.

Если некоторая величина $\hat{\varphi}$ *в предельном соотношении* (67) *равна* 0, *то вероятностные меры* P_θ *взаимно сингулярны при тех* θ, *для которых различны значения* $\varphi(\theta)$ *рассматриваемой функции* $\varphi = \varphi(\theta)$, $\theta \in \Theta$. *Эти меры сосредоточены на непересекающихся множествах пространства* X *вида*

$$\{x : \lim_{k\to\infty} \hat{\varphi}_{n_k}(x) = \varphi(\theta)\},$$

где $n_1, n_2, \ldots$ — *достаточно быстро возрастающая подпоследовательность, обеспечивающая указанную сходимость.*

Пример 4. *Состоятельность оценок «коэффициентов регрессии».* Пусть пространство $\overline{\Theta}$ является n-мерным. Выберем в нем базис $\theta_1, \ldots, \theta_n$ таким образом, чтобы первые m функций $\theta_1, \ldots, \theta_m$ одновременно были бы базисом и в пространстве $\overline{\Theta}^*$, образованном всеми функциями $\theta = \theta(u)$, $u \in U^*$, для которых вероятностные меры P_θ эквивалентны мере P (для которых выполняется условие (70)). Рассмотрим наилучшие линейные оценки соответствующих «коэффициентов регрессии» (см. предыдущий пример 3). Обозначим эти оценки $\hat{c}_1^{(p)}, \ldots, \hat{c}_n^{(p)}$, указывая на принадлежность их к подпространству H_p ($p = 1, 2, \ldots$):

$$\hat{c}_i^p = \sum_{j=1}^n s_{ij}^{(p)} \eta_j^{(p)} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где $\{s_{ij}^p\}$ — корреляционная матрица указанных оценок, а $\eta_1^{(p)}, \ldots, \eta_n^{(p)}$ — величины из подпространства $L_p \subseteq H_p$, соответствующие по формуле (61) функциям $\theta_j = \theta_j(u)$, $u \in U_p$. Скалярно умножим на $\xi(u)$, $u \in U_p$, обе части приведенного равенства

$$\langle \xi(u), \hat{c}_i^{(p)} \rangle = \sum_{j=1}^n s_{ij}^{(p)} \theta_j(u), \quad u \in U_p.$$

Переходя здесь к пределу при $p \to \infty$, получаем, что

$$\langle \xi(u), \hat{c}_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\theta_j(u), \quad u \in U^*,$$

где

$$\hat{c}_i = \lim_{p\to\infty} \hat{c}_i^{(p)}, \quad s_{ij} = \lim_{p\to\infty} s_{ij}^{(p)} \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Мы получили, таким образом, что линейные комбинации $\sum\limits_{j=1}^{n} s_{ij}\theta_j(u)$ ($i = 1,\ldots, n$) удовлетворяют условию (70), т. е. эти линейные комбинации входят в подпространство $\overline{\Theta}^*$. Но это может быть тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=m+1}^{n} s_{ij}\theta_j = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Поскольку же $\theta_{m+1},\ldots, \theta_n$ являются элементами базиса, дополняющими подпространство $\overline{\Theta}^*$ до всего пространства $\overline{\Theta}$, то указанные линейные соотношения выполняются лишь для нулевых коэффициентов s_{ij}.

Таким образом,

$$s_{ii} = \|\hat{c}_i\|^2 = 0 \text{ при } i = m+1,\ldots, n,$$

т. е. коэффициенты $c_{m+1}, \ldots, c_n$ в разложении неизвестной функции $\theta = \theta(u)$, $u \in U^*$, по базисным элементам $\theta_1,\ldots, \theta_n$

$$\theta(u) = \sum_{i=1}^{n} c_i\theta_i(u), \quad u \in U^*$$

допускают безошибочные линейные оценки, точнее (см. теорему 7),

$$\lim_{p\to\infty} c_i^{(p)} = c_i \quad (i = m+1, \ldots, n),$$

где имеется в виду среднеквадратичный предел по соответствующей мере P_θ, $\theta \in \Theta$. Следовательно, компоненты вида $\sum\limits_{i=m+1}^{n} c_i\theta_i(u)$ неизвестной функции $\theta(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\theta_i(u)$, $u \in U^*$, могут быть определены безошибочно и их можно исключить из дальнейшего рассмотрения.

Итак, фактически неизвестной остается лишь функция $\theta(u) = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i\theta_i(u)$, т. е. от параметрического множества $\overline{\Theta}$ мы приходим к параметрическому множеству $\overline{\Theta}^*$. Предельные величины

$$\hat{c}_i = \lim_{p\to\infty} \hat{c}_i^{(p)} \quad (i = 1, \ldots, m)$$

представляют собой наилучшие линейные несмещенные оценки оставшихся коэффициентов c_i ($i = 1, \ldots, m$). Эти оценки имеют невырожденное распределение вероятностей.

Глава IV

ИЗМЕРИМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. НЕКОТОРЫЕ ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Пусть X — некоторое линейное (действительное) пространство элементов x и $\xi(t) = \xi(x, t)$ — некоторое семейство линейных функционалов от $x \in X$ (параметр t пробегает некоторое множество T). Обозначим $\mathfrak{A}$ σ-алгебру множеств пространства X, порожденную указанными линейными функционалами $\xi(x, t)$ от $x \in X$. Как и раньше, перейдем от величин $\xi(t)$, $t \in T$, ко всевозможным линейным комбинациям вида

$$u(x) = \sum_k c_k \xi(x, t_k), \quad x \in X.$$

В дальнейшем эти величины $u = u(x)$ будут также обозначаться

$$u(x) = (u, x), \; x \in X.$$

В совокупности они образуют линейное пространство U.

Примерами измеримых линейных пространств $(X, \mathfrak{A})$ описанного типа могут служить различные функциональные пространства X действительных функций $x = x(t)$ на множестве T, когда исходные линейные функционалы $\xi(t)$ определены как

$$\xi(x, t) = x(t), \; x \in X \tag{1}$$

(см. § 1 гл. I). К этому типу относится пространство $(X, \mathfrak{A})$ всех линейных непрерывных функционалов $x = (u, x)$ на счетно-гильбертовом пространстве U, когда σ-алгебра $\mathfrak{A}$ порождается всевозможными линейными функционалами

$$u(x) = (u, x), \; x \in X, \tag{2}$$

каждый из которых отождествляется с соответствующим элементом $u \in U$ (см. § 3 гл. I).

Итак, пусть $(X, \mathfrak{A})$ — измеримое линейное пространство описанного типа. Пусть P — гауссовская мера на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, порожденной линейными функционалами $u = (u, x)$ от $x \in X$, $u \in U$. Пусть

$$A(u) = \int (u, x) P(dx), \quad u \in U$$

— ее *среднее значение* и

$$B(u, v) = \int\limits_X [(u, x) - A(u)] [(v, x) - A(v)] P(dx); \quad u, v \in U$$

— ее *корреляционная функция*. Как будет видно из дальнейшего, не ограничивая общности, можно считать среднее значение $A(u)$, $u \in U$, равным 0 (ср. гл. II, введение):

$$A(u) \equiv 0.$$

Рассмотрим преобразование сдвига

$$S_y x = x + y, \quad x \in X,$$

где y — некоторый фиксированный элемент из пространства X. Очевидно, для всякого цилиндрического множества $A \in \mathfrak{A}$ вида

$$[(u_1, x), \ldots, (u_n, x)] \in \Gamma$$

прообраз $\{x\colon S_y(x) \in A\}$ является цилиндрическим множеством вида

$$[(u_1, x), \ldots, (u_n, x)] \in \Gamma',$$

где Γ' означает сдвиг борелевского множества Γ в n-мерном векторном пространстве R^n на вектор $[(u_1, y), \ldots, (u_n, y)]$. Следовательно, $S_y x = x + y$, $x \in X$, есть измеримое отображение пространства X в себя, поскольку $\mathfrak{A}$ совпадает с минимальной σ-алгеброй, содержащей алгебру всех цилиндрических множеств. Кроме того, $S_y x = x + y$ есть взаимно однозначное отображение, и потому для любого измеримого множества $A \in \mathfrak{A}$ не только прообраз $\{x\colon S_y x \in A\}$ (совпадающий со множеством $S_y A$), но и образ $S_y A$ является измеримым: $S_y A \in \mathfrak{A}$ при всех $y \in X$. Следовательно, преобразование сдвига

$$S_y \eta(x) = \eta(S_y x), \quad x \in X$$

(определенное уже на функциях $\eta(x)$ от $x \in X$) переводит измеримую функцию $\eta(x)$ от $x \in X$ в измеримую же функцию $S_y \eta(x)$, $x \in X$.

Рассмотрим вероятностную меру P_y на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, определенную как

$$P_y(A) = P\{S_y^{-1} A\}, \quad A \in \mathfrak{A}, \tag{3}$$

где $S_y^{-1} = S_{-y}$; для измеримой функции $\eta(x)$ от $x \in X$

$$\int\limits_{S_y A} \eta(x) P_y(dx) = \int\limits_{A} \eta(S_y x) P(dx)$$

(предполагается, конечно, что указанные интегралы существуют). Очевидно, вероятностная мера P_y является гауссовской (гауссовскими являются конечномерные распределения величин $u = (u, x)$ от $x \in X$), причем ее среднее значение есть

$$y(u) = \int\limits_X u(x) P_y(dx) = \int\limits_X u(S_y x) P(dx) = (u, y), \quad u \in U \tag{4}$$

(напомним, что среднее значение исходной гауссовской меры равно 0); корреляционная же функция гауссовской меры P_y, очевидно, совпадает с исходной корреляционной функцией $B(u, v)$; $u, v \in U$.

§ 2. СТРУКТУРА ЛИНЕЙНЫХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Обозначим $\mathfrak{A}^*$ пополнение σ-алгебры $\mathfrak{A}$ относительно гауссовской меры P.

Линейным измеримым функционалом $u = (u, x)$ на линейном пространстве X назовем $\mathfrak{A}^*$-измеримую действительную функцию, определенную на некотором измеримом линейном подпространстве E полной меры:

$$P(E) = 1,$$

на котором $u = (u, x)$, $x \in E$, есть линейный функционал.

Так же, как и раньше (см. гл. II), обозначим $\bar{U}$ гильбертово пространство, являющееся пополнением исходного пространства U величин $u = u(x)$ относительно скалярного произведения

$$\langle u, v\rangle = B(u, v). \tag{5}$$

Всякий элемент $u \in \bar{U}$ есть действительная измеримая функция $u = u(x)$ на пространстве $(X, \mathfrak{A}^*, P)$, определенная для почти всех $x \in X$, такая что

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) \tag{6}$$

для некоторой последовательности линейных функционалов $u_n \in U$. Очевидно, множество E полной меры ($P(E) = 1$), для элементов $x \in E$ которого существует предел $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$, является л и н е й н ы м п р о с т р а н с т в о м. В самом деле, если этот предел существует для некоторых x_1 и x_2, то он существует и для всякой линейной комбинации $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lim_{n\to\infty} [\lambda_1 u_n(x_1) + \lambda_2 u_n(x_2)] =$$
$$= \lambda_1 \lim_{n\to\infty} u_n(x_1) + \lambda_2 \lim_{n\to\infty} u_n(x_2).$$

Видно, что определенная предельным соотношением (6) функция $u = u(x)$ от $x \in X$ может быть выбрана таким образом, что на подпространстве $E \subseteq X$ она будет линейным функционалом:

$$u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in E$ и действительных чисел λ_1, λ_2.

Таким образом, *всякий элемент $u \in \bar{U}$ есть измеримый линейный функционал $u = (u, x)$ от $x \in E$.*

Обозначим Y совокупность всех элементов $y \in X$, для которых определенная формулой (3) гауссовская мера P_y (со средним значением (u, y), $u \in U$,— (см. (4)) является э к в и в а л е н т н о й исходной гауссовской мере P. Согласно теореме 2 гл. II, *$y \in Y$ тогда и только тогда, когда (u, y), $u \in U$, есть линейный ограниченный функционал в гильбертовом пространстве $\bar{U}$; при этом соответствующая плотность $p_y(x) = P_y(dx)/P(dx)$ может быть описана формулой* (15) гл. II:

$$p_y(x) = \exp\left\{u_y(x) - \frac{1}{2}\|u_y\|^2\right\}, \quad x \in X, \tag{7}$$

где $u_y = u_y(x)$ — линейный измеримый функционал из гильбертова пространства $\bar{U}$, определяемый соотношением (14) гл. II:

$$(u, y) = \langle u, u_y\rangle, \ u \in U. \tag{8}$$

Очевидно, *Y есть линейное пространство.*

Действительно, если $y_1, y_2 \in Y$, то для $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$

$$|(u, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)| \leqslant |\lambda_1| \cdot |(u, y_1)| + |\lambda_2| \cdot |(u, y_2)| \leqslant$$
$$\leqslant (|\lambda_1| \cdot C_1 + |\lambda_2| C_2)\|u\|, \ u \in U$$

(при $|(u, y_1)| \leqslant C_1\|u\|$, $|(u, y_2)| \leqslant C_2\|u\|$), т. е. (u, y) есть линейный ограниченный функционал в гильбертовом пространстве $\bar{U}$.

В дальнейшем будем предполагать выполненным условие типа рефлексивности:

для любого элемента $v \in \overline{U}$ существует элемент $y \in X$, связанный с $v = u_y$ соотношением (8).

Отметим, что это условие выполняется для функциональных пространств X (см. (1)); для пространств X, сопряженных к счетно-гильбертову пространству U (см. (2)), и др.

Выберем в гильбертовом пространстве $\overline{U}$ ортонормированную базу $u_1, u_2, \ldots$ элементов из U. Очевидно, величина $u_y \in \overline{U}$ в соотношении (8) есть

$$u_y = \sum_k \langle u_k, u_y \rangle u_k = \sum_k (u_k, y)\, u_k,$$

причем

$$\sum_k (u_k, y)^2 = \| u_y \|^2,$$

Очевидно, условие (8) равносильно тому, что

$$\sum_k (u_k, y)^2 < \infty. \tag{9}$$

Но согласно самому определению скалярного произведения (5) $u_k = (u_k, x)$, $x \in X$,— гауссовские независимые величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями (относительно P), так что для почти всех $x \in X$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k, x)^2 = \infty$. Следовательно, *для бесконечномерного пространства U*

$$P\,(Y) = 0. \tag{10}$$

Несмотря на это, *всякое измеримое линейное подпространство $E \subseteq X$ положительной меры $P\,(E) > 0$ обязательно содержит все множество Y*:

$$Y \subseteq E. \tag{11}$$

Действительно, если некоторый элемент $y \in \overline{Y}$ не входит в E, то при различных действительных λ линейные измеримые подпространства E_λ (образованные элементами $x + \lambda y$, $x \in E$) не пересекаются и имеют положительную меру: $P\,(E_\lambda) = P_{\lambda y}\,(E) > 0$. Но существует лишь счетное число непересекающихся множеств положительной меры, и, следовательно, $P\,(E_\lambda) = P\,(E) = 0$.

Поскольку меры P и P_y эквивалентны (при $y \in Y$), то *преобразование сдвига S_y на σ-алгебре $\mathfrak{A}^*$ является измеримым, причем*

$$S_y \mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}^*, \ y \in Y. \tag{12}$$

В самом деле, для любого множества $A \in \mathfrak{A}^*$ найдутся множества A', $A'' \in \mathfrak{A}$, такие что $A' \subseteq A \subseteq A''$ и $P\,(A'' \diagdown A') = 0$. Множества $S_y A'$ и $S_y A''$ при любом y входят в σ-алгебру $\mathfrak{A}$ и $S_y A' \subseteq S_y A \subseteq S_y A''$. Кроме того, $P\,(S_y A'' \diagdown S_y A') = 0$ при $y \in Y$ и множество $S_y A$ входит в σ-алгебру $\mathfrak{A}^*$, т. е. $S_y \mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{A}^*$ при любом $y \in Y$. Следовательно,

$$S_{-y}\,(S_y \mathfrak{A}^*) = \mathfrak{A}^* \subseteq S_{-y} \mathfrak{A}^*,$$

откуда и вытекает соотношение (12).

Таким образом, при $y \in Y$ преобразование сдвига S_y:

$$S_y\, \eta\,(x) = \eta\,(S_y x),$$

переводит измеримые функции $\eta\,(x)$ в измеримые же функции $S_y\, \eta(x)$, $x \in X$.

Отметим, что для $y \notin Y$ это свойство, вообще говоря, не выполняется.

Например, пусть A — некоторое множество полной меры: $P(A) = 1$, н' такое, что $P_y(A) = P(S_{-y}A) = 0$. Пусть B — неизмеримое множествоо целиком лежащее в A: $B \subseteq A$. Тогда $P(S_{-y}B) = 0$, т. е. $B' = S_{-y}B$ — измеримое множество меры 0. В то же время множество $B = S_yB'$ является неизмеримым. Следовательно, измеримая функция

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in B', \\ 0 & \text{при } x \notin B' \end{cases}$$

преобразованием S_{-y} переводится в неизмеримую функцию

$$\eta(S_{-y}x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in B, \\ 0 & \text{при } x \notin B. \end{cases}$$

Как и раньше (см. п. 2 § 1 гл. III), введем на линейном пространстве Y скалярное произведение, положив

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle, \tag{13}$$

где u_1, u_2 — элементы из гильбертова пространства $\bar{U}$, связанные с y_1, y_2 соотношением (8). Как и раньше, обозначим $\mathbf{H}$ пространство всех действительных измеримых функционалов $\eta = \eta(x)$ на X, таких что

$$\int\limits_X \eta(x)^2 P(dx) < \infty.$$

Для любой величины $\eta \in \mathbf{H}$ определено среднее

$$\int\limits_X \eta(x) P_y(dx) = \int\limits_X \eta(S_y x) P(dx), \quad y \in Y.$$

Как известно (см. лемму 6 гл. III), семейство распределений P_y, $y \in \Theta$, является полным в пространстве $\mathbf{H}$, т. е. если $\int\limits_X \eta(x)(dx) = 0$ при $y \in \Theta$, где Θ — некоторый параллелепипед в гильбертовом пространстве Y, то $\eta(x) = 0$ при почти всех $x \in X$. Отсюда вытекает следующее предложение.

Лемма 1. *Пусть величина $\eta \in \mathbf{H}$ инвариантна относительно преобразования сдвига S_y при $y \in \Theta$ (где Θ — некоторый параллелепипед гильбертова пространства Y):*

$$\eta(S_y x) = \eta(x), \quad y \in \Theta.$$

для почти всех $x \in X$. Тогда функция $\eta = \eta(x)$ есть постоянная:

$$\eta(x) = \int\limits_X \eta(x) P(dx)$$

для почти всех $x \in X$.

Доказательство. В силу полноты семейства распределений P_y, $y \in \Theta$, для инвариантной величины

$$\int\limits_X \eta(S_y x) P(dx) = \int\limits_X \eta(x) P(dx)$$

и

$$\int\limits_X (\eta(x) - a) P_y(dx) = 0, \quad \eta(x) - a = 0 \left(a = \int\limits_X \eta(x) P(dx) \right),$$

что и требовалось доказать.

Из леммы 1 вытекает, что *всякое измеримое множество* A, *инвариантное относительно сдвигов* S_y, $y \in Y$, *имеет меру* 0 *или* 1.

Действительно, если $S\,x \in A$, то $x = S_{-y}\,(S_y x) \in A$, и, следовательно, дополнительное множество к A также инвариантно. Но тогда индикатор множества A

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in A, \\ 0 \text{ при } x \notin A \end{cases}$$

является инвариантной величиной, и по лемме 1 эта величина $\eta(x)$, $x \in X$, равна постоянной (0 или 1) для почти всех $x \in X$.

Далее, всякое линейное подпространство E положительной меры содержит Y (см. (11)) и инвариантно относительно S_y, $y \in Y$. Следовательно, *всякое измеримое линейное подпространство* E *имеет меру 0 или 1.*

Пусть $u = (u, x)$ линейный измеримый функционал на пространстве X. Очевидно, множество $A = \{x\colon (u, x) < 0\}$ инвариантно относительно сдвигов S_y, если $(u, y) \equiv 0$ при $y \in Y$. Следовательно, оно имеет меру 0 или 1. Но если с положительной вероятностью $(u, x) < 0$, то с той же вероятностью $(u, -x) = -(u, x) > 0$. Поэтому при условии

$$(u, y) \equiv 0, \qquad y \in Y \tag{14}$$

$P(A) = 0$ и $(u, x) = 0$ для почти всех $x \in X$. Доказано следующее предложение.

Лемма 2. *Линейный измеримый функционал* $u = u(x)$ *на пространстве* X *однозначно определяется своими значениями* (u, y) *на подпространстве* Y *и при условии* (14) $(u, x) = 0$ *для почти всех* $x \in X$.

Пусть $u_k (k = 1, 2, \ldots)$ — ортонормированная база в гильбертовом пространстве $\bar{U}$ (скажем, составленная из элементов исходного пространства U) и пусть y_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — последовательность элементов из Y; связанных с величинами $u_k = (u_k, x)$, $x \in X$, соотношением (8): $(u, y_k) = \langle u, u_k \rangle$; $k = 1, 2, \ldots$ Указанные последовательности «биортогональны»:

$$(u_k, y_j) = \langle u_k, u_j \rangle = \begin{cases} 1 \text{ при } k = j, \\ 0 \text{ при } k \neq j \end{cases} \tag{15}$$

(отметим, что $y_1, y_2, \ldots$ образуют ортонормированную базу в гильбертовом пространстве Y со скалярным произведением (13)). При любых $u \in U$ и почти всех $x \in X$

$$(u, x) = \sum_k \langle u, u_k \rangle \cdot (u_k, x) = \sum_k (u, y_k)(u_k, x), \tag{16}$$

т. е. величина $u = (u, x)$ разлагается в ряд по независимым гауссовским величинам $u_k = (u_k, x)$, $k = 1, 2, \ldots$, который сходится с вероятностью 1 в силу соотношения

$$\sum_k \langle u, u_k \rangle^2 = \sum_k (u, y_k)^2 < \infty.$$

Положим

$$x_n = x - \sum_{k=1}^{n} u_k \cdot y_k, \quad x \in X, \tag{17}$$

где действительные коэффициенты $u_k = (u_k, x)$ зависят от x.

Лемма 3. *Для любой измеримой величины* $\eta = \eta(x)$, $x \in X$, *величина*

$$\eta(x_n) = \eta\left(x - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \cdot y_k\right), \quad x \in X$$

является измеримой относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}_n^*$, порожденной всеми величинами $u_k = u_k(x)$, $k > n$, и пополненной множествами меры 0.

Доказательство. Величина $\eta = \eta(x)$ для почти всех $x \in X$ совпадает с пределом некоторой последовательности величин $\eta_k(u_1,\ldots,u_k)$, являющихся функциями конечного числа переменных $u_j = u_j(x)$; $j = 1,\ldots, k$ (где $k \to \infty$). Следовательно,

$$\eta(x_n) = \lim_{k\to\infty} \eta_k[u_1(x_n), \ldots, u_k(x_n)].$$

Но согласно равенствам (15) и (17),

$$u_i(x_n) = u_i(x) - \sum_{j=1}^{n} u_j(x)\cdot(u_i, y_j) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \leqslant n, \\ u_i(x) & \text{при} \quad i > n. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\eta(x_n) = \lim_{k\to\infty} \eta_k[0, \ldots, 0, u_{n+1}(x), \ldots, u_k(x)],$$

так что величина $\eta = \eta(x_n)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}_n^*$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $u = (u, x)$ — произвольный линейный измеримый функционал на пространстве X. Он определен на подпространстве Y, причем*

$$\sum_k (u, y_k)^2 < \infty, \tag{18}$$

т. е. $u = (u, y)$, $y \in J$, является линейным непрерывным функционалом на гильбертовом пространстве Y.

Доказательство. Для почти всех $x \in X$

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\cdot(u, y_k) + u(x_n),$$

где x_n определяется формулой (17). Величина $v = u(x_n)$ по лемме 3 измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}_n^*$ и потому не зависит от величин $u_k = u_k(x)$, $k \leqslant n$ (напомним, что $u_1, u_2,\ldots$ — независимые гауссовские величины с нулевыми средними значениями и единичными дисперсиями). Для характеристической функции $\varphi_u(\lambda) = E\exp\{i\lambda u\}$ величины $u = u(x)$ имеет место следующее соотношение:

$$E\exp\{i\lambda u\} = \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^{n}(u, y_k)^2\right\} E\exp\{i\lambda v\}.$$

Видно, что при нарушении условия (18), когда $\sum_{k=1}^{n}(u, y_k)^2 \to \infty$ при $n \to \infty$, $\varphi_u(\lambda) \equiv 0$ для всех действительных λ, чего быть не может. Следовательно, условие (18) должно выполняться. Поскольку элементы $y_1, y_2,\ldots$ образуют ортонормированную базу в гильбертовом пространстве Y (со скалярным произведением (13)), то условие (18) равносильно тому, что $u = u, (y)$ есть линейный непрерывный функционал на гильбертовом пространстве Y (напомним, что множество $Y \subset X$ входит в область определения всякого линейного измеримого функционала $u = u(x)$ на пространстве X). Лемма доказана.

Теорема 1. *Совокупность всех линейных измеримых функционалов $u = (u, x)$ на пространстве X совпадает с пространством $\overline{U}$ — замкнутой линейной оболочкой исходных линейных функционалов $\xi(t) = \xi(x, t)$, $t \in T$.*

Всякий линейный измеримый функционал $u = (u, x)$ на пространстве X может быть описан формулой

$$(u, x) = \sum_k (u, y_k)\, u_k(x), \quad x \in X, \tag{19}$$

где $u_1, u_2 \ldots$ — ортонормированная система в гильбертовом пространстве $\bar{U}$, а $y_1, y_2, \ldots$ — соответствующие по формуле (8) *величинам $u_1, u_2, \ldots$ элементы из подпространства Y.*

Доказательство. Что каждая величина $u = u(x)$, $x \in X$, из пространства $\bar{U}$ является линейным измеримым функционалом, было уже показано. Пусть $u = (u, x)$ — произвольный линейный измеримый функционал на X. Согласно лемме 4, он удовлетворяет условию (18). Рассмотрим линейный функционал $v = (v, x)$ из пространства $\bar{U}$ такой, что

$$v = \sum_k (u, y_k)\, u_k \quad \left(\sum_k (u, y_k)^2 < \infty\right),$$

где u_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — ортонормированная база в гильбертовом пространстве $\bar{U}$ из величин $u_k = (u_k, x)$, связанных с элементами y_k $(k = 1, 2, \ldots)$ соотношением (8). При всех $y \in Y$

$$(v, y) = \sum_k (u, y_k)(u_k, y),$$

$$(u, y) = \sum_k (u, y_k)(u_k, y)$$

— см. формулы (9) и (16). Видно, что линейные функционалы $u = u(x)$ и $v = (v, x)$ совпадают на подпространстве Y: $(u - v, y) \equiv 0$. По лемме 2 они совпадают почти всюду:

$$(u, x) = (v, x,) \in \bar{U}.$$

Теорема доказана.

Пример 1. Пусть относительно вероятностной меры P исходное семейство линейных функционалов $\xi(t) = \xi(x, t)$ на пространстве X образует *стационарный гауссовский процесс*, точнее, пусть параметр t пробегает некоторое множество T действительной прямой, а гауссовская мера P задается так называемой спектральной плотностью $f(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, — некоторой неотрицательной функцией, такой что корреляционная функция $B(s, t)$; $s, t \in T$, имеет вид

$$B(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(s-t)} f(\lambda)\, d\lambda.$$

Рассмотрим элементы $y \in Y$ и соответствующие им функции

$$y(t) = \xi(y, t), \quad t \in T$$

— средние значения гауссовских мер P_y, определяемых формулой (3).

Пусть T есть вся действительная прямая $-\infty < t < \infty$. Как следует из результатов примера 5 гл. II, $y \in Y$ *тогда и только тогда, когда функция $y(t)$, $-\infty < t < \infty$, интегрируема в квадрате и ее преобразование Фурье $\tilde{y}(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, удовлетворяет условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{y}(\lambda)|^2}{f(\lambda)}\, d\lambda < \infty.$$

Пусть T есть произвольное множество на действительной прямой. В случае ограниченной спектральной плотности $f(\lambda)$ $y \in Y$ *тогда и только тогда, когда функция $y(t)$, $t \in T$, продолжима на всю дей-*

ствительную прямую $-\infty < t < \infty$ *таким образом, что ее преобразование Фурье удовлетворяет указанному выше условию*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{y}(\lambda)|^2}{f(\lambda)} d\lambda < \infty.$$

Пусть T есть конечный отрезок. Предположим, что спектральная плотность $f(\lambda)$ удовлетворяет следующим ограничениям:

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}} f(\lambda) < \infty, \quad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^r f(\lambda) > 0$$

(при некотором $r \geqslant 0$). Тогда (см. п. 1 § 2 и лемму 12 гл. II) при рассмотрении вопроса об эквивалентности P_y и P можно считать, что $f(\lambda)$ равна постоянной на всем интервале $-R \leqslant \lambda \leqslant R$ (каково бы ни было наперед заданное $R < \infty$). Из результатов примера 5 гл. II получаем, что $y \in Y$ *тогда и только тогда, когда функция* $y(t)$, $t \in T$, *продолжима на всю действительную прямую* $-\infty < t < \infty$ *таким образом, что ее преобразование Фурье* $\tilde{y}(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, *удовлетворяет условию*

$$\int_{R}^{\infty} \frac{|\tilde{y}(\lambda)|^2}{f(\lambda)} d\lambda < \infty$$

(*при каком-либо* $R < \infty$).

Пример 2. Пусть X — сопряженное пространство к сепарабельному счетно-гильбертову пространству U с системой скалярных произведений

$$(u, v)_1, \ (u, v)_2, \ldots$$

Пусть $\mathfrak{A}$ означает σ-алгебру множеств пространства X, порожденную всеми линейными непрерывными функционалами $u = (u, x)$ на X (параметр u пробегает указанное пространство U)[1]. Пусть P — гауссовская мера на σ-алгебре $\mathfrak{A}$. Как известно (см. § 3 гл. I), гауссовская мера P сосредоточена на пространстве $X_n \subseteq X$, сопряженном к некоторому гильбертову пространству U_n, которое получается пополнением исходного пространства U относительно n-го скалярного произведения $(u, v)_n$. При этом, как следует из результатов примера 7 гл. II, $y \in Y$ *тогда и только тогда, когда среднее значение* $y(u) = (u, v)$, $u \in U$, *есть линейный непрерывный функционал в гильбертовом пространстве* U_n:

$$(u, y) = (u, y^*)_n, \quad u \in U,$$

где y^* — *некоторый элемент из* U_n, *причем* y^* *входит в область значений оператора* $B^{1/2}$ (*где* B — *корреляционный оператор в гильбертовом пространстве* U_n):

$$y^* \in B^{1/2} U_n.$$

Отождествим сопряженное пространство $X_n = U_n'$ с самим гильбертовым пространством U_n, точнее, отождествим элементы $x \in X_n$ с элементами $x^* \in U_n$, для которых

$$(u, x) = (u, x^*)_n, \qquad u \in U.$$

Тогда элементы y подпространства $Y \subseteq X_n$ отождествлятся с указанными выше элементами $y^* \in U$ и, следовательно, $y \in Y$ *тогда и только тогда, когда* $y \in B^{*1/2} X$, где оператор B^* уже рассматривается в пространстве

---

[1] Напомним, что счетно-гильбертово пространство U является рефлексивным (см., например, [9, стр. 83]).

X_n:

$$B^*x \equiv Bx^*, \qquad x \in X_n.$$

Таким образом, $Y = B^{*1/2}X_n$.

Легко видеть, что, вообще говоря, класс линейных измеримых функционалов $u = (u, x)$ на X существенно шире, чем класс линейных непрерывных функционалов. Именно (см. формулу (19)), линейные измеримые функционалы можно отождествить с линейными непрерывными функционалами $u = (u, y)$ на гильбертовом пространстве Y со скалярным произведением (13), которое в данном случае есть

$$\langle y_1, y_2\rangle = (B^{*1/2}y_1, B^{*-1/2}y_2),$$

где B^* — указанный выше (ядерный) оператор в гильбертовом пространстве $X_n = U_n'$ (см. по этому поводу формулы (36) — (38) гл. III).

Отметим, что гильбертово пространство $\overline{U}$ является главным объектом в «линейной теории» случайных процессов $\xi(t)$, $t \in T$. К изучению уравнений типа (8) (относительно $u_y \in \overline{U}$) сводятся задачи линейного прогнозирования, линейной теории оценок и т. п. В наиболее интересных случаях для величин $u = u(x)$ из $\overline{U}$ имеется то или иное представление (ср. (19), выражающее их через исходные величины $\xi(t) = \xi(x, t)$.

П р и м е р. 3 Пусть X есть пространство всех действительных функций $x = x(t)$ на действительной прямой $-\infty < t < \infty$, и пусть семейство линейных функционалов $\xi(t) = t(x, t)$ на X вида

$$\xi(x, t) = x(t), \ x \in X$$

образует относительно вероятностной меры P стационарный гауссовский процесс (см. пример 1). Для величины $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$, имеется так называемое спектральное представление[1]

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\Phi(d\lambda),$$

где $\Phi = \Phi(\Delta)$ — некоторая борелевская мера со значениями в гильбертовом пространстве $\overline{U}$. Всякий линейный измеримый функционал $u = (u, x)$ на пространстве X (как всякая величина из $\overline{U}$) представим в виде

$$(u, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\Phi(d\lambda),$$

где $\varphi(\lambda)$ — определяющая этот функционал $u \in \overline{U}$ функция на действительной прямой $-\infty < \lambda < \infty$, такая что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda < \infty.$$

При этом, если $\varphi(\lambda)$ есть преобразование Фурье функции $c(t)$, $-\infty < t < \infty$:

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} c(t)\, dt,$$

[1] См., например, [30, стр. 25].

то для почти всех $x \in X$

$$(u,\ x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t)\, x(t)\, dt,$$

где имеется в виду интеграл от функции $\xi(t)$ параметра t со значениями $\xi(x,\ t) = x(t)$, $x \in X$, в гильбертовом пространстве $\overline{U}$. Аналогично, если

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} m(dt),$$

где $m(dt)$ — некоторая (обобщенная) мера, то для почти всех $x \in X$

$$(u,\ x) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, m(dt)$$

и т. п.

§ 3. СТРУКТУРА ЛИНЕЙНЫХ ИЗМЕРИМЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Пусть S — линейное преобразование в пространстве X, определенное на некотором линейном подпространстве $E \subseteq X$ полной меры: $P(E) = 1$. Определим соответствующее преобразование S действительных функций $\eta = \eta(x)$ от $x \in X$, положив

$$S\eta(x) = \eta(Sx),\ x \in E.$$

Назовем преобразование S слабо измеримым, если для любого линейного функционала $u = (u,\ x) \in U$ функция

$$Su(x) = (u,\ Sx),\ \ x \in E \tag{20}$$

является измеримой. Очевидно, формула (20) определяет линейный (измеримый) функционал

$$Su(x) = (Su,\ x),\ x \in E.$$

Напомним, что совокупность всех линейных измеримых функционалов $v = (v,\ x)$ совпадает с описанным выше гильбертовым пространством $\overline{U}$ (см. теорему 1), так что со всяким слабо измеримым линейным преобразованием S в пространстве X связан линейный оператор S вида (20) в гильбертовом пространстве $\overline{U}$, определенный на всюду плотном подпространстве U.

Слабо измеримое преобразование S таково, что прообраз $\{x\colon Sx \in A\}$ всякого множества $A \in \mathfrak{A}$ принадлежит пополненной σ-алгебре $\mathfrak{A}^*$, причем для цилиндрических множеств A вида

$$[(u_1,\ x), \ldots,\ (u_n,\ x)] \in \Gamma$$

прообраз есть также цилиндрическое множество:

$$\begin{aligned} &\{x : Sx \in A\} = \\ &= \{x : [(u_1,\ Sx), \ldots,\ (u_n,\ Sx)] \in \Gamma\} = \\ &= \{x :\ [(v_1,\ x), \ldots,\ (v_n,\ x] \in \Gamma\}, \end{aligned} \tag{21}$$

где $v_k = Su_k$; $k = 1, \ldots, n$ есть гауссовские величины из пространства $\overline{U}$.

Определим меру P_s на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, положив

$$P_s(A) = P(S^{-1}A),\ \ A \in \mathfrak{A}, \tag{22}$$

где $S^{-1}A$ означает прообраз множества $A \in \mathfrak{A}$ при отображении S. Как видно из равенств (21), определенная формулой (22) вероятностная мера P_s является гауссовской, причем ее среднее значение равно 0:

$$\int_X (u, x) P_S(dx) = \int_X (Su, x) P(dx) = 0,$$

а корреляционная функция есть

$$B_1(u, v) = \int_X (u, x) \cdot (v, x) P_S(dx) = \int_X (Su, x) \cdot (Sv, x) P(dx)$$

или

$$B_1(u, v) = \langle Su, Sv \rangle; \; u, v \in U. \tag{23}$$

Остановимся на вопросе о том, когда гауссовская мера P_s эквивалентна исходной гауссовской мере P. Согласно условию (7) гл. II, для этого необходимо, чтобы оператор S был ограниченным:

$$\langle Su, Su \rangle \leqslant C \cdot \langle u, u \rangle$$

(напомним, что $\langle u, v \rangle = B(u, v)$ — см. (5)).

Ограниченный оператор S может быть доопределен на всем гильбертовом пространстве $\overline{U}$. Обозначим S^* оператор на $\overline{U}$, сопряженный к S. Тогда определенная формулой (23) корреляционная функция $B_1(u_1, v)$; $u, v \in U$, гауссовской меры P_s есть $B_1(u, v) = \langle S^*Su, v \rangle$; $u, v \in U$ и разность $b(u, v) = B(u, v) - B_1(u, v)$ есть $b(u, v) = \langle (I - S^*S) u, v \rangle$; $u, v \in U$.

Из теоремы 5 гл. II вытекает следующее предложение.

Лемма 5. *Для эквивалентности P и P_s необходимо и достаточно, чтобы разность $I - S^*S$ была оператором Гильберта — Шмидта, все собственные значения которого отличны от* 1.

Вернемся к подпространству $Y \subseteq X$ всех элементов $y \in X$, удовлетворяющих соотношению (8), с введенным на нем скалярным произведением (13). Как было показано в предыдущем пункте, всякий линейный измеримый функционал $u = (u, x)$ на X определен на всех элементах $y \in Y$, причем является линейным непрерывным функционалом на Y как гильбертовом пространстве с указанным скалярным произведением:

$$(u, y) = \langle Vu, y \rangle, \; y \in Y, \tag{24}$$

где Vu — некоторый оператор из гильбертова пространства $\overline{U}$ в гильбертово пространство Y. Сравнивая (8), (13) и (24), легко видеть, что V есть изометрический оператор, отображающий $\overline{U}$ на Y:

$$Vu_y = y, \; y \in Y,$$

где y и $u_y \in \overline{U}$ связаны соотношением (8), и

$$(u, y) = \langle u, V^{-1}y \rangle, \; y \in Y.$$

Из формулы (20) видно, что линейное преобразование S определено для всех элементов $y \in Y$, причем для линейного измеримого функционала $Su \in \overline{U}$ вида

$$(Su, x) = (u, Sx), \; x \in E,$$

при всех $y \in Y$ имеет место следующее равенство:

$$(u, Sy) = \langle Su, V^{-1}y \rangle = \langle u, S^*V^{-1}y \rangle, \; u \in U, \tag{25}$$

где $S^*V^{-1}y$ — некоторая величина из гильбертова пространства $\overline{U}$, так что, согласно определению пространства Y, элемент Sy входит в Y. Таким образом, *сужение линейного преобразования S на подпространстве $Y \subseteq X$ можно одновременно рассматривать как линейный оператор в Y*:

$$SY \subseteq Y. \tag{26}$$

Далее, согласно формулам (24) и (25), исходное линейное преобразование S в пространстве X (рассматриваемое лишь на подпространстве Y) и отвечающий этому преобразованию линейный оператор S в пространстве $\overline{U}$ линейных измеримых функционалов $u = (u, x)$ на X (определенный формулой (20)) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(u,\ Sy) = \langle u,\ V^{-1}Sy\rangle =$$

$$= (Su,\ y) = \langle Su,\ V^{-1}y\rangle = \langle u,\ S^*V^{-1}y\rangle$$

при всех $u \in \overline{U}$, $y \in Y$. Видно, что линейное преобразование S (на Y) и линейный оператор S (на $\overline{U}$) связаны равенством

$$S = VS^*V^{-1} \tag{27}$$

(где V — изометрический оператор, отображающий гильбертово пространство Y на гильбертово пространство $\overline{U}$). Имеем

$$S^* = VSV^{-1}$$

и

$$I - SS^* = V\,(I - S^*S)\,V^{-1}.$$

Очевидно, линейный оператор S (на $\overline{U}$) обладает указанными в лемме 5 свойствами тогда и только тогда, когда этими свойствами обладает линейное преобразование S (на Y). Следовательно, имеет место следующее предложение (ср. теорему 5 гл. II).

Теорема 2. *Всякое слабо измеримое линейное преобразование S (определенное для почти всех $x \in X$) определено на всем подпространстве Y, причем Y инвариантно относительно S. Отвечающая преобразованию S гауссовская мера P_s эквивалентна исходной гауссовской мере P тогда и только тогда, когда линейное преобразование S в гильбертовом пространстве Y является ограниченным линейным оператором, имеющим ограниченный же обратный оператор S^{-1}, причем разность $I - SS^*$ является в Y оператором Гильберта — Шмидта.*

Отметим, что, как и в теореме 5 гл. II, условие ограниченности линейного преобразования S (на Y) можно опустить, а условие существования ограниченного обратного оператора S^{-1} заменить условием:

оператор $I - SS^*$ не имеет собственных значений, равных 1.

Рассмотрим слабо измеримое линейное преобразование S, такое что соответствующая мера P_s (определенная формулой (22)) эквивалентна исходной мере P. Определенный формулой (20) линейный оператор S в пространстве $\overline{U}$ имеет обратный оператор S^{-1}. Пусть A — произвольное цилиндрическое множество вида

$$[(S^{-1}u_1,\ x), \ldots,\ (S^{-1}u_n,\ x)] \in \Gamma. \tag{28}$$

Его прообраз $S^{-1}A$ при отображении S (см. равенство (21)) отличается от цилиндрического множества A' вида

$$[(u_1,\ x), \ldots\ (u_n,\ x)] \in \Gamma \tag{29}$$

лишь на множество меры 0. Как хорошо известно, совокупность множеств $A \in \mathfrak{A}$ с расстоянием

$$\rho\,(A',\ A'') = P\,(A' \circ A''), \tag{30}$$

где $A' \circ A'' = (A' \setminus A'') \cup (A'' \setminus A')$ означает симметрическую разность множеств A' и A'', образует полное метрическое пространство. Определим в этом пространстве $\mathfrak{A}^*$ преобразование S^{-1}, положив $S^{-1}A$ равным прообразу множества $A \in \mathfrak{A}^*$ при исходном линейном преобразовании S в X. Это преобразование S^{-1} непрерывно в том смысле, что

$$\rho(S^{-1}A', S^{-1}A'') \to 0 \text{ при } \rho(A', A'') \to 0.$$

Действительно,

$$\rho(S^{-1}A', S^{-1}A'') = P[S^{-1}(A' \circ A'')] =$$
$$= P_S(A' \circ A'') \to 0 \text{ при } P(A' \circ A'') \to 0,$$

поскольку меры P_s и P эквивалентны. По той же причине непрерывным является преобразование S на всюду плотной в $\mathfrak{A}^*$ алгебре всех цилиндрических множеств:

$$\rho(SA', SA'') \to 0$$

для цилиндрических множеств A' и A'', таких что $\rho(A', A'') \to 0$ (напомним, что всякое цилиндрическое множество вида (29) преобразование S переводит в цилиндрическое же множество вида (28)). Покажем, что для любого измеримого множества $A' \in \mathfrak{A}^*$ имеется множество $A \in \mathfrak{A}^*$, такое что $S^{-1}A = A'$ и, следовательно, $SA' = A$, т. е. *σ-алгебра $\mathfrak{A}^*$ инвариантна относительно преобразования S.*

В самом деле, для всякого цилиндрического множества A' вида (29) имеется цилиндрическое же множество A (вида (28)), такое что $A' = S^{-1}A$. Пусть A' — произвольное множество из пространства $\mathfrak{A}^*$. Найдется последовательность цилиндрических множеств A_n' $(n = 1, 2, \ldots)$, сходящихся к A' при $n \to \infty$. Но для каждого A_n' имеется цилиндрическое множество A_n, такое что $A_n' = S^{-1}A_n$; $n = 1, 2, \ldots$ и $\rho(A_n, A_m) = \rho(SA_n', SA_m') \to 0$ при $n, m \to \infty$, поскольку преобразование S непрерывно на цилиндрических множествах и, по условию, $\rho(A_n', A_m') \to 0$ при $n, m \to \infty$. Фундаментальная последовательность A_n $(n = 1, 2 \ldots)$ имеет в $\mathfrak{A}^*$ своим пределом некоторое измеримое множество A. Очевидно,

$$S^{-1}A = A',$$

поскольку вместе с A' множество $S^{-1}A$ является пределом множеств $A_n' = S^{-1}A_n$; $n = 1, 2, \ldots$ Прообраз множества A (при отображении S) переводится преобразованием S в A, так что

$$SA' = S(S^{-1}A) = A.$$

Итак, для любого измеримого множества $A' \in \mathfrak{A}^*$ найдется измеримое множество $A \in \mathfrak{A}^*$, такое что $SA' = A$. Совершенно аналогично, отправляясь от соотношения (21), можно установить, что для любого измеримого множества $A \in \mathfrak{A}^*$ прообраз $S^{-1}A = A'$ является также измеримым множеством. Очевидно, *S является взаимно однозначным преобразованием в пространстве $\mathfrak{A}^*$, причем*

$$S\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}^*. \tag{31}$$

Отметим, что *линейные преобразования S_1 и S_2, совпадающие на подпространстве $Y \subseteq X$, задают одинаковые преобразования S_1 и S_2 в метрическом пространстве $\mathfrak{A}^*$:*

$$P(S_1A \circ S_2A) = 0$$

для любого множества $A \in \mathfrak{A}^*$.

В самом деле, линейные измеримые функционалы $(u, S_1x) = (S_1u, x)$ и $(u, S_2x) = (S_2u, x)$ от $x \in X$ совпадают на подпространстве Y и поэтому (см. лемму 2) совпадают при почти всех $x \in X$. Следовательно, для любого цилиндрического множества $A \in \mathfrak{A}^*$ множества S_1A и S_2A отличаются лишь на множество меры 0: $P(S_1A \circ S_2A) = 0$. В силу непрерывности преобразований S_1 и S_2 в метрическом пространстве $\mathfrak{A}^*$ (где расстояние между множествами A_1 и A_2 определено формулой (30)) указанное соотношение по непрерывности распространяется на любые множества $A \in \mathfrak{A}^*$, поскольку совокупность цилиндрических множеств всюду плотна в $\mathfrak{A}^*$.

Пример 4. В заключение остановимся на одном классе гауссовских распределений P, относительно которых исходное семейство линейных функционалов $\xi(t) = \xi(x, t)$ на X (порождающих σ-алгебру $\mathfrak{A}$) является «отрезком стационарного гауссовского процесса» (параметр t пробегает некоторый отрезок T на действительной прямой), т. е. корреляционная функция

$$B(s, t) = \int_X \xi(x, s)\,\xi(x, t)\,P(dx)$$

имеет вид

$$B(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(s-t)} f(\lambda)\,d\lambda,$$

где $f(\lambda)$ — заданная неотрицательная интегрируемая функция. Гауссовская мера P_s имеет корреляционную функцию

$$B_1(s, t) = \langle S\xi(s), S\xi(t)\rangle;\ s, t \in T$$

(см. формулу (23)).

Предположим, что спектральная плотность $f(\lambda)$ удовлетворяет следующим ограничениям:

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}} f(\lambda) < \infty, \quad \underline{\lim_{\lambda\to\infty}} \lambda^r f(\lambda) > 0$$

при некотором $r > 0$. Тогда совершенно аналогично тому, как это сделано в примере 13 и теореме 9 гл. II, можно доказать следующее:

для того, чтобы разность $I - SS^*$ была оператором Гильберта—Шмидта (в гильбертовом пространстве Y), необходимо и достаточно, чтобы разность

$$b(s, t) = B(s, t) - B_1(s, t);\ s, t \in T$$

продолжалась в функцию $b(s, t)$ на всей плоскости, такую что ее преобразование Фурье $\widetilde{b}(\lambda, \mu)$ удовлетворяло условию

$$\int_R^{\infty}\int_R^{\infty} \frac{|\widetilde{b}(\lambda, \mu)|^2}{f(\lambda)\,f(\mu)}\,d\lambda\,d\mu < \infty$$

при некотором $R < \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев В. Г. Об условиях взаимной сингулярности гауссовских мер, отвечающих двум случайным процессам.— Теория вероятн. и ее применение, 1963, **8**, № 3, 304—308.
2. Алексеев В. Г. Достаточные условия эквивалентности и ортогональности гауссовских мер.— Изв. АН СССР, серия матем., 1964, 28, № 5, 1083—1091.
3. Апокорин Д. С. Гауссовские меры, отвечающие обобщенным стационарным процессам.— Теория вероятн. и ее применение, 1967, **12**, 4, 698—707.
4. Апокорин Д. С. Асиптотическое поведение вероятностей ошибок первого и второго рода при проверке гипотез о спектре гауссовского стационарного процесса.— Докл. АН СССР, 1966, **167**, № 263—266.
5. Бари Н. К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве.— Уч. зап. МГУ, серия матем., 1961, **4**, 69—107.
6. Вершик А. М. Общая теория гауссовских мер в линейных пространствах.— Усп. матем. наук, 1964, **19**, № 1, 210—212.
7. Вершик А. М. Двойственность в теории меры в линейных пространствах.— Докл. АН СССР, 1966, **170**, № 3, 497—500.
8. Винер Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов. Перев. с англ. М., 1961.
9. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М., 1961.
10. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., 1958.
11. Гельфанд И. М., Яглом А. М. О вычислении количества информации о случайной функции, содержащейся в другой такой функции.— Усп. матем. наук, 1957, **12**, № 1 (73), 3—52.
12. Гирсанов И. В. О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры.— Теория вероятн. и ее применение, 1960, **5**, № 3, 314—330.
13. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., 1965.
14. Гихман И. И., Скороход А. В. О плотностях вероятностных мер в функциональных пространствах.— Усп. матем. наук, 1966, **21**, 6 (132), 83—152.
15. Гладышев Е. Г. Новая предельная теорема для случайных процессов с гауссовскими приращениями.— Теория вероятн. и ее применение, 1961, **6**, 1, 57—66.
16. Голосов Ю. И. О гауссовских мерах, эквивалентных гауссовским марковским мерам.— Докл. АН СССР, 1966, **166**, 263—265.
17. Голосов Ю. И. Об одном способе вычисления производной Радона — Никодима двух гауссовских мер.— Докл. АН СССР, 1966, **170**, № 2, 242—245.
18. Голосов Ю. И., Темпельман. А. С. Отношение правдоподобия для гипотез о тренде некоторых гауссовских процессов.— Докл. АН СССР, 1963, **153**, 1242—1243.
19. Голосов Ю. И., Яглом А. М. Эквивалентные гауссовские меры, отвечающие обобщенным случайным процессам. Резюме сообщения. Междунар. конгресса математиков. М., 1966.
20. Гренандер У. Случайные процессы и статистические выводы. Перев. с англ. М., 1961.
21. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. Перев. с англ. М., 1956.
22. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы, т. I. Перев. с англ. М., 1962.
23. Леман Э. Проверка статистических гипотез. Перев. с англ. М., 1967.
24. Пинскер М. С. Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов. М., 1960.
25. Писаренко В. Ф. К задаче обнаружения случайного сигнала на фоне шума.— Радиотехника и электроника, 1961, **6**, № 4, 514—528.
26. Писаренко В. Ф. О вычислении отношения правдоподобия для гауссовских процессов с рациональным спектром.— Теория вероятн. и ее применение, 1956, **10**, 323—328.

27. Писаренко В. Ф., Розанов Ю. А. Некоторые задачи для стационарных процессов на конечном интервале, приводящие к интегральным уравнениям типа Винера — Хопфа.— Проблемы передачи информации, 1963, **14**, 113—135.
28. Растренин В. А. Об интегральных уравнениях, ряд уравнений типа Винера — Хопфа. Дипломная работа. Моск. физико-техн. ин-та, 1966.
29. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. Перев. с франц. М., 1954.
30. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы. М., 1963.
31. Розанов Ю. А. О плотности одной гауссовской меры относительно другой.— Теория вероятн. и ее применение, 1962, **7**, № 1, 84—89.
32. Розанов Ю. А. К вопросу об эквивалентности вероятностных мер, отвечающих гауссовским стационарным процессам.— Теория вероятн. и ее применение, 1963, **8**, № 3, 241—250.
33. Розанов Ю. А. О вероятностных мерах в функциональных пространствах, отвечающих гауссовским случайным процессам.— Теория вероятн. и ее применение, 1964, **9**, № 4, 448—465.
34. Розанов Ю. А. О плотности гауссовских распределений и интегральных уравнениях Винера — Хопфа.— Докл. АН СССР, 1965, **165**, 1000—1002.
35. Розанов Ю. А. О плотности гауссовских распределений и интегральных уравнениях Винера — Хопфа.— Теория вероятн. и ее применение, 1966, **11**, № 2, 170—179.
36. Скороход А. В. Про одну задачу статистики гауссовских процессов.— Докл. АН УССР, 1960, № 9, 1167—1170.
37. Судаков В. Н. Линейные множества с квазиинвариантной мерой.— Докл. АН СССР, 1959, **127**, 524—525.
38. Хеннан Э. Анализ временных рядов. Перев. с англ. М., 1964.
39. Шилов Г. Е., Фан Дык Тань. Интеграл, мера и производная на линейных пространствах. М., 1967.
40. Baxter G. A. A strong limit theorem for Gaussian processes.— Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, 522—527.
41. Belayev Ju. K. Continuity and Hölder's conditions for sample functions of stationary Gaussian processes.— Proc. 4^{th} Berkeley Sympos., 1961, **2**, 23—33.
42. Cameron R. H., Martin W. T. Transformations of Wiener integrals under translations.— Ann. Math., 1944, **45**, 386—396.
43. Cameron R. H., Martin W. T. Transformations of Wiener integrals under a general class of linear transformations.— Trans. Amer. Math. Soc., 1945, **58**, 184—219.
44. Capon J. Radon-Nicodym derivatives of stationary Gaussian measures.— Ann. Math. Statistics, 1964, **35**, 517—531.
45. Cramer H., Leadbetter M. R. Stationary and related stochastic processes. N. Y.— London — Sydney, 1967.
46. Dudley R. M. Singular translates of measures on linear spaces.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 1964, **3**, 128—137.
47. Dudley R. M. Singularity of measures on linear spaces.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 1966, **6**, 129—132.
48. Feldman J. Equivalence and perpendicularity of Gaussian processes.— Pacif. J. Math. 1958, **8**, 699—708; 1959, **9**, 1295—1296.
49. Feldman J. Some classes of equivalent Gaussian processes on an interval.— Pacif. J. Math., 1960, **10**, 1200—1220.
50. Grenander V., Rosenblatt M. Statistical analysis of stationary time series. N. Y., 1956.
51. Hajek J. Об одном свойстве нормальных распределений произвольного стохастического процесса.— Чехосл. матем. ж., 1958, **8**, 610—618.
52. Hajek J. On linear statistical problems in stochastic processes.— Czechosl. Math. J., 1962, **12**, 404—464.
53. Ito K. Multiple Wiener integral.— J. Math. Soc. Japan, 1951, **3**, 157—169.
54. Complex multiple Wiener integral.— Japan. J. Math., 1952, **22**, 63—86.
55. Kailath T. On measures equivalent to Wiener measure.— Ann. Math. Statistics, 1967, **38**, N 1, 261—263.
56. Kakutani S. On equivalence of infinite product measures.— Ann. Math., 1948, **49**, 214—224.
57. Kallianpur G., Oodaira H. The equivalence and singularity of Gaussian measures, in «Time series analysis». Ed. M. Rosenblatt. N. Y., 1963.
58. LeCam L., Schwartz L. A necessary and sufficient condition for the existence of consistent estimates.— Ann. Math. Statistics, 1960, **31**, N 1, 140—150.
59. Parzen, E. Regression analysis of continuous parameter time series.— Proc. 4^{th} Berkeley Sympos., 1961, **1**, 469—489.
60. Parzen E. Probability density functionals and reproducing Kernel Hilbert spaces, in «Time series analysis», Ed. M. Rosenblatt. N. Y., 1963.
61. Pitsher T. S. The admissible mean values of stochastic process.— Trans. Amer. Math. Soc., 1963, **108**, 538—546.
62. Pitsher T. S. Likelihood ratios of Gaussian processes.— Arkiv. mat., 1960, **4**, N 1, 35—44.

63. P o l l a k H. O., S h e p p L. A. The estimation of some determinants of Teplitxtype.— Proc. Amer. Math. Soc., 1965, **16**, 919—922.
64. P r o h o r o v Yu. V. The method of characteristic functionals.— Proc. 4^{th} Berkeley sympos., 1961, **2**, 403—419.
65. R a o C. K., V a r a d a r a j a n V. S. Discrimination of Gaussian processes.— Sankchya, Ser. A., 1963, **25**, 303—330.
66. S e i d m a n T. Linear transformations of a functional.— Communs Pure and Appl. Math., 1959, **12**, 611—621.
67. S e g a l I. E. Distributions in Hilbert space and canonical systems of operators.— Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **88**, 12—41.
68. S h e p p L. A. The singularity of Gaussian measures in function space.— Proc. Math. Acad. Sci., 1964, **52**, 2, 430—433.
69. S h e p p L. A. Distinguishing a sequence of random variables from a translate of itself.— Ann. Math. Statistics, 1965, **36**, N 00, 1107—1112.
70. S h e p p L. A. Radon - Nycodym derivatives of Gaussian measures.— Ann. Math. Statistics, 1966, **37**, N 2, 321—354.
71. S l e p i a n D. Some comments on the detection of Gaussian signals in Gaussian noise.— IRE Trans. Inform. Theory, PG11—4, 1958, 65—68.
72. S t r i b e l Ch. Densities for stochastic processes.— Ann. Math. Statistics, 1959, **30**, 559—567.
73. V a r b e r g D. E. Gaussian measures and a theorem of T. S. Pitcher.— Proc. Amer. Math. Soc., 1962, **13**, 799—807.
74. V a r b e r g D. E. On Gaussian measures equivalent to Wiener measure.— Trans. Amer. Math. Soc., 1964, **113**, 262—273.
75. V a r b e r g D. E. On Gaussian measures equivalent to Wiener measure (pt II).— Notices Amer. Math. Soc., 1966, **18**, 254.
76. W o o d w a r d D. A. A general class of linear transformations of Wiener integral.— Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **100**, N 3, 459—480.
77. Y a g l o m A. M. On the equivalence and perpendicularity of the Gaussian probability measures in function space, in «Time series analysis». Ed. M. Rosenblatt. N. Y., 1963.
78. Y e h J. Wiener measure in a space of functions of two variables.— Trans. Amer. Math. Soc., 1960, **95**, 3, 433—450.
79. Y e h J. Cameron — Martin translation theorems in the Wiener space of functions of two variables.— Trans. Amer. Math. Soc., 1963, **107**, 3, 409—420.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава I. Некоторые сведения о гауссовских случайных функциях 7

§ 1. Задание вероятностной меры 7

§ 2. Гауссовские случайные величины. Некоторые теоремы о сходимости 11

§ 3. Гауссовские линейные функционалы 13

1. Гауссовские величины в гильбертовом пространстве 13

2. Гауссовские линейные функционалы на счетно-гильбертовых пространствах 17

Глава II. Эквивалентные гауссовские меры 24

§ 1. Введение 24

§ 2. Некоторые предварительные результаты. 26

1. Некоторые необходимые условия эквивалентности 26

2. Условия эквивалентности, связанные с энтропией распределений

§ 3. Основные теоремы об эквивалентности произвольных гауссовских мер. Примеры 31

1. Одно свойство гауссовских мер 31

2. Эквивалентность гауссовских мер с различными средними значениями 31

Независимые гауссовские величины (33). Стохастические гауссовские меры (33). Винеровский процесс (35). Стохастические интегралы (линейные преобразования) (35). Стационарные гаусовские процессы (37). Измеримые гауссовские процессы (41). Гауссовские линейные функционалы (43)

3. Эквивалентность гауссовских мер с различными корреляционными функциями 45

Эквивалентность гауссовских распределений в гильбертовом пространстве (49). Эквивалентность винеровской меры (51). Эквивалентность распределению гауссовского марковского процесса (52). Независимые гауссовские величины (57). Гауссовские стохастические меры (58). Стационарные гауссовские процессы (59)

§ 4. Некоторые теоремы об эквивалентности распределений гауссовских стационарных процессов 66

1. Введение 66

2. Некоторые вспомогательные результаты 68

3. Основные теоремы об эквивалентности 75

4. Некоторые свойства траекторий 80

Глава III. Некоторые вопросы статистики гауссовских распределений 87

§ 1. Достаточные статистики и наилучшие оценки 87

1. Некоторые общие замечания 87

2. Гауссовские распределения с неизвестным средним значением . . . 91

3. Гауссовские распределения с неизвестной корреляционной функцией 95
4. Об условных математических ожиданиях функционалов от гауссовской случайной функции 97
§ 2. Наилучшие несмещенные оценки среднего значения и их состоятельность 100
1. Линейные несмещенные оценки 100
Оценки «коэффициентов регрессии» (104)
2. Об оценках среднего значения «в целом»; метод максимального правдоподобия 105
3. Метод наименьших квадратов 108
4. Состоятельность наилучших оценок. 111
Состоятельность оценок «коэффициентов регрессии» (115)
Глава IV. Измеримые линейные функционалы и линейные преобразования 117
§ 1. Некоторые вводные замечания 117
§ 2. Структура линейных измеримых функционалов 118
§ 3. Структура линейных измеримых преобразований 127
Литература 132

Юрий Анатольевич Розанов

Гауссовские бесконечномерные распределения

Труды МИАН, том CVIII

Утверждено к печати
ордена Ленина Математическим институтом им. В. А. Стеклова

Технический редактор *Т. В. Алексеева*

Сдано в набор 10/IV 1968 г. Подписано к печати 3 X 1968 г. Формат 70×108¹/₁₆. Бумага № 1.
Физ. п. л. 8,5. Усл. печ. л. **11**,9. Уч.-изд. л. 9,6. Тираж 2000 экз. Т-13225. Тип. зак. 436.
Цена 60 коп.

Издательство «Наука». Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука». Москва, Г-99, Шубинский пер., 10