В. И. Данилов, Когомологии алгебраических многообразий, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления*, 1989, том 35, 5–130

УДК 512.73

1. КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

В. И. Данилов

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Этот обзор, посвященный когомологиям, завершает изложение основ алгебраической геометрии, начатое в [5].

Довольно давно было замечено, что топологическое строение комплексных (а лишь для них до недавнего времени имели смысл топологические понятия) алгебраических многообразий существенно сказывается на их геометрических и арифметических свойствах. Более того, само формирование топологических понятий, таких как многообразие, числа Бетти, гомология, когомология, фундаментальная группа, было вызвано к жизни нуждами алгебраической геометрии (см. исторический очерк в [13]).

Исторически первыми и наиболее простыми объектами были алгебраические кривые, или компактные римановы поверхности. С топологической точки зрения они различаются единственным числовым инвариантом — родом (или числом ручек, или половиной первого числа Бетти). С алгебраической точки зрения *род* — это число независимых регулярных дифференциалов (т. е. $\dim H^0(X, \Omega_X^1)$), с геометрической — размерность системы линейно неэквивалентных циклов. Все это было известно еще Риману. Аналоги этих фактов для алгебраических поверхностей были получены в начале этого века Кастельнуово, Энриквесом и Пуанкаре. Многомерный случай был освоен Лефшецем и Ходжем к середине столетия. В частности, было понято, что когомологии гладких проективных многообразий обладают дополнительной структурой Ходжа, отсутствующей у произвольных топологических пространств. Благодаря этому, алгебраические многообразия с топологической точки зрения устроены в каком-то смысле наиболее просто. В начале 70-х годов Делинь перенес эти результаты на произвольные комплексные алгебраические многообразия.

Влияние топологии на арифметику можно продемонстрировать на примере гипотезы Морделла, доказанной недавно Г. Фальтингсом ([33], см. также [6]): пусть дана алгебраическая кривая X, определенная над полем $\mathbf{Q}$ рациональных чисел; предположим, что ее род больше 1; тогда множество $X(\mathbf{Q})$ ее $\mathbf{Q}$-значных точек (а также $X(K)$ для любого конечного расширения K поля $\mathbf{Q}$) конечно. Этот результат аналогичен более простому, но идейно близкому утверждению де Франчиса: пусть X и Y — римановы поверхности и род X больше 1; тогда существует лишь конечное число непостоянных голоморфных отображений Y в X. По этому поводу мы отсылаем к замечательному обзору [67] арифметики кривых.

Как уже говорилось, топологические понятия, такие как когомология, развивались первоначально для комплексных многообразий. Постепенно было понято, что удобно пользоваться не только постоянными коэффициентами, но и переменными коэффициентами и коэффициентами в пучках. К этому приводили и многие содержательные понятия, так как разные интересные геометрические объекты представляются как глобальные сечения или когомологии когерентных пучков. Поворотным пунктом к алгебре можно считать теорему А. Картана о тривиальности когомологий когерентных аналитических пучков на аффинных многообразиях (теорема B). Благодаря ей, когомологии можно было вычислять при помощи любого аффинного покрытия. Это открывало путь к определению когомологий когерентных пучков на любом абстрактном алгебраическом многообразии, что и сделал Серр в [72]. Окончательный лоск теории был придан Гротендиком. Этому посвящена глава 2 настоящего обзора.

Еще один мощный стимул развития топологических понятий для абстрактных алгебраических многообразий исходил от А. Вейля. Основываясь на различных фактах о числе решений алгебраических уравнений над конечными полями, он предположил, что все эти факты объясняются существованием для многообразий над конечными полями теории когомологий, похожей на классическую теорию целочисленных когомологий. Загоревшись этой идеей, Гротендик придумал этальную топологию и этальные когомологии. Пользуясь этой теорией, Делинь доказал гипотезы Вейля; об этом глава 4.

Мы не касаемся новейшей теории универсальных когомологий, во многом остающейся гипотетической, отсылая к [1], [18], [19]. В основе излагаемых здесь трех великих теорий когомологий (комплексной, когерентной и этальной), тесно связанных друг с другом, лежат некоторые общие факты и понятия гомологической алгебры. Мы сочли удобным конспективно напомнить их в главе 1. Мы предполагаем также свободно пользоваться результатами, а главное — понятиями, изложенными в [5].

Глава 1

ГОМОЛОГИЧЕСКИЙ АППАРАТ

§ 1. Генезис гомологических понятий

1.1. Идея гомологий. Гомологические понятия впервые появились при изучении комплексных алгебраических кривых или, как тогда выражались, функций одной переменной. Классический прием их исследования состоял в рассмотрении интегралов от рациональных (или голоморфных) функций. При этом путь интегрирования обычно явно не указывался, указывались только начальная и конечная точки. Дело в том, что при малом шевелении пути интеграл не менялся. Зато и определен был интеграл лишь с точностью до периодов. На более современном языке речь идет об одномерных гомологиях соответствующей римановой поверхности.

При переходе к многообразиям большей размерности возникла необходимость в соответствующих обобщениях «путей интегрирования». Пуанкаре принадлежит идея рассматривать k-мерные пленки, лежащие в многообразии. Если эта пленка не имеет границы, или замкнута, она называется *циклом*. В общем случае у нее есть граница — пленка размерности $k-1$. Пленки гомологичны, если они ограничивают (с разных сторон) пленку размерности на 1 больше. Классы гомологичных пленок называются *гомологиями* исходного многообразия. На простейших примерах было видно, что все гомологии порождаются конечным числом их, как в случае римановых поверхностей.

1.2. Гомологии триангулированного пространства. Приведенная выше смутная идея нуждается в уточнении. Что считать пленкой? Как определять границу? Проще всего это сделать для многообразий или пространств, снабженных *триангуляцией,* т. е. представленных в виде объединения симплексов, которые пересекаются друг с другом по своим граням. Например, любое алгебраическое многообразие над полем $\mathbf{C}$ (или $\mathbf{R}$) обладает триангуляцией и даже полуалгебраической триангуляцией (гл. 3, п. 1.2). *k-мерной цепью* такой *триангуляции T* называется алгебраическая сумма k-мерных симплексов триангуляции. k-мерные цепи образуют абелеву группу $C_k(T)$. Ясно, что следует считать *границей k-мерного симплекса:* это — сумма всех его граней размерности $k-1$. По линейности понятие границы переносится на любые цепи и дает *оператор границы*

$$\delta=\delta_k : C_k(T)\to C_{k-1}(T).$$

Важнейшее свойство оператора границы δ в том, что $\delta\circ\delta=0$ (граница — всегда цикл); правда, для этого надо работать с ориентированными симплексами. Набор групп $C_k(T)$ и граничных гомоморфизмов δ образует т. н. *цепной комплекс*

$$C.(T) = (\ldots \xrightarrow{\delta_2} C_1(T) \xrightarrow{\delta_1} C_0(T) \to 0 \to \ldots).$$

Гомологии триангуляции T (или *комплекса* $C.(T)$) определяются как циклы по модулю границ:

$$H_k(T) = \operatorname{Ker} \delta_k / \operatorname{Im} \delta_{k+1}.$$

Может возникнуть законный вопрос: зачем переходить к гомологиям, когда у нас есть комплекс $C.$? Самое важное свойство гомологий в том, что они зависят только от пространства X, а не от выбора его триангуляции T. Можно несколькими способами придать смысл этому утверждению. В случае алгебраических многообразий можно воспользоваться тем довольно тонким фактом, что любые две полуалгебраические триангуляции T', T'' обладают более мелкой третьей полуалгебраической триангуляцией T. Последнее означает, что каждый симплекс триангуляции T целиком лежит в некотором симплексе триангуляции T' (или T''). Представляя симплексы T' как цепи более мелких симплексов T, мы получим набор естественных гомоморфизмов

$$\varphi_k : C_k(T') \to C_k(T),$$

коммутирующих с операторами границы. Наборы таких гомоморфизмов (φ_k) называются *морфизмами* комплекса $C.(T')$ в $C.(T)$ (п. 22). И хотя отображения φ_k далеки от изоморфизма, индуцированные отображения групп гомологий оказываются изоморфизмами.

1.3. Сингулярные гомологии. Другой, более кардинальный способ установления топологической инвариантности гомологий состоит в том, чтобы пользоваться определением, вовсе не апеллирующим к понятию триангуляции. Пусть

$$\Delta_k = \left\{ (t_0, \ldots, t_k) \in \mathrm{R}^k_+ \,\middle|\, \sum_{j=0}^{k} t_j = 1 \right\}$$

— стандартный геометрический k-мерный симплекс. Назовем *сингулярным* k-мерным *симплексом* пространства X произвольное непрерывное отображение $\sigma : \Delta_k \to X$. Пусть $\Sigma_k(X)$ — абелева группа, порожденная такими сингулярными симплексами. Стандартным способом вводится оператор границы $\delta : \Sigma_k \to \Sigma_{k-1}$; для сингулярного симплекса $\sigma : \Delta_k \to X$ его граница

$$\delta\sigma = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \sigma \circ s_j,$$

где $s_0, \ldots, s_k : \Delta_{k-1} \to \Delta_k$ — стандартные аффинные отображения Δ_{k-1} на $(k-1)$-мерные грани Δ_k. Снова $\delta \circ \delta = 0$, так что получается сингулярный цепной комплекс $\Sigma.(X)$. Его гомологии $H_*(X)$ называются *сингулярными гомологиями* X.

С предыдущим это понятие связано так: пусть пространство X снабжено триангуляцией T; тогда каждый (ориентированный) симплекс триангуляции T можно рассматривать как сингулярный симплекс X, и мы снова получаем морфизм комплексов $C.(T)\to\Sigma.(X)$. И хотя комплексы сильно различаются (сингулярных симплексов безумно много), гомологии этих комплексов снова совпадают. И это, в некотором смысле, общий случай. Пользуясь той или иной конструкцией и дополнительными структурами, можно строить различные комплексы. Однако часто эти комплексы оказываются эквивалентными, похожими в том смысле, что они дают одинаковые гомологии. С потребительской точки зрения интерес представляют инварианты — гомологии. Но получение сколь-нибудь глубоких свойств гомологий требует возврата к происхождению, к комплексам. Некоторая техника работы с комплексами излагается в следующем пункте.

1.4. Когомологии. Вместо цепей можно пользоваться двойственным понятием *коцепи* — функции на множестве «симплексов» со значениями в группе $\mathbf{Z}$. Так получается *коцепной комплекс* $\Sigma^{\cdot}(X)$, в котором *оператор кограницы* d (двойственный к оператору границы) повышает размерность на единицу

$$d:\Sigma^k\to\Sigma^{k+1}.$$

Группы $H^*(X)=\operatorname{Ker} d/\operatorname{Im} d$ называются *группами когомологий*. Когомологии, в отличие от гомологий, контравариантно зависят от пространства X. Хотя принципиально нового по сравнению с гомологиями они не дают, некоторое их преимущество состоит в наличии умножения, которое превращает $H^*(X)$ в градуированное кососкоммутативное кольцо. В случае гладких многообразий это умножение двойственно более наглядной операции пересечения циклов или гомологий.

Вариант определения когомологий связан с использованием в качестве коэффициентов не $\mathbf{Z}$, а произвольной абелевой группы A. Получающиеся когомологии обозначают через $H^*(X, A)$, и это снова дает мало нового. Более интересные вещи получаются, если пользоваться «переменными» системами коэффициентов — пучками.

1.5. Пучки. Два обстоятельства не позволяют ограничиваться когомологиями с фиксированными коэффициентами.

Типичный прием исследования многообразий или пространств состоит в расслоении их на многообразия меньшей размерности. Пусть $f:X\to Y$ — такое расслоение; довольно ясно, что должна существовать тесная связь между когомологиями X, Y и когомологиями слоев f. Однако лишь в очень редких случаях удается обойтись без вырождений, когда все слои одинаковы. В общем случае отдельные слои приобретают особенности, отличаются от типичных; они-то и играют важнейшую роль (см. теорию Морса и теорию Пикара—Лефшеца). Когомологии слоев $f^{-1}(y)$ уже не образуют непрерывного, а тем более постоянного семейства. Возникающие здесь объекты Лере и назвал *пучками* (см. § 3).

Второе обстоятельство связано с тем, что многие алгебро-геометрические объекты выражаются в терминах пучков (обычно когерентных). Мы уже видели в [5], что вопросы о линейных системах дивизоров (а значит, об отображениях в проективные пространства) выражаются в терминах глобальных сечений обратимых пучков. Дифференциальные формы — это сечения пучков $\Omega_X{}^p$ и т. д. Деформации подмногообразия $Y \subset X$ тесно связаны с конормальным пучком $\mathcal{N}_{Y/X}$. Интересующие нас пучки часто удается связать с уже известными при помощи точных последовательностей. Однако для точной последовательности пучков $0 \to A \to B \to C \to 0$ последовательность их глобальных сечений

$$0 \to \Gamma(A) \to \Gamma(B) \to \Gamma(C) \to 0$$

может оказаться неточной в члене $\Gamma(C)$. Если проанализировать, почему сечения пучка C не поднимаются до глобальных сечений пучка B, можно построить некую группу $H^1(A)$, зависящую от пучка A, в которой лежат препятствия к подъему. Если пучок A — постоянный, эта группа отождествляется с группой 1-когомологий $H^1(X, A)$. Естественно ожидать, что можно определить и остальные группы $H^*(A)$, $H^*(B)$ и т. д. так, что получится длинная точная последовательность

$$0 \to \Gamma(A) \to \Gamma(B) \to \Gamma(C) \to H^1(A) \to H^1(B) \to H^1(C) \to H^2(A) \to \ldots$$

1.6. Когомологии пучков. Последнее свойство подсказывает способ определения (или построения) когомологий с коэффициентами в пучках. Предположим, что удалось вложить наш пучок A в *ацикличный пучок* A^0 (т. е. такой пучок, что $H^q(A) = 0$ для любух $q > 0$). Тогда из предыдущей последовательности группа $H^1(A)$ должна совпадать с коядром гомоморфизма $\Gamma(A^0) \to \Gamma(A^0/A)$. Чтобы найти $H^2(A)$, нужно вложить A^0/A в ацикличный пучок A^1 и т. д. В конце концов получается *резольвента пучка* A, т. е. комплекс пучков $A^\cdot = (A^0 \to A^1 \to \ldots)$. И если все пучки $A^0, A^1, \ldots$ ацикличны, то когомологии пучка $H^*(A)$ — это когомологии комплекса групп

$$\Gamma(A^\cdot) = (\Gamma(A^0) \to \Gamma(A^1) \to \ldots).$$

Построение ацикличной резольвенты — вещь вспомогательная и неоднозначная, как и выбор триангуляции пространства при определении гомологий. Как и раньше, нужно устанавливать независимость когомологий от выбора резольвенты (п. 4.2) или пользоваться каноническими резольвентами (п. 4.1).

Когомологии пучков интересны не только как средство вычисления глобальных сечений. Когомологии канонически связанных с многообразием пучков доставляют важные инварианты, такие как числа Ходжа $h^{pq} = \dim H^q(\Omega^p)$. Одномерные когомологии часто допускают интересные интерпретации. Так, группа $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ интерпретируется как группа Пикара обратимых пучков (или линейных расслоений) $\operatorname{Pic} X$, одномерные когомологии касательного пучка интерпретируются как инфинитезимальные деформации многообразия и т. п.

1.7. Когомологии когерентных пучков. До середины 50-х годов гомологические методы применялись лишь для комплексных (или вещественных) алгебраических многообразий, обладающих привычной (а какая еще может быть?) классической топологией. Когда в 1956 г. Хирцебрух выпустил книгу о применении пучков в алгебраической геометрии, он имел в виду исключительно комплексные многообразия. Однако на самом деле ничто не препятствовало применять пучки и когомологии к алгебраическим многообразиям над произвольным полем, для которых имеет смысл топология Зарисского. Правда, для постоянных пучков, вроде $\mathbf{Z}$, эта теория не дает ничего интересного. Но для когерентных алгебраических пучков теория когомологий дает разумные ответы и строится даже проще, чем теория аналитических когерентных пучков. Ее важнейшие результаты (теоремы конечности и полунепрерывности, двойственность и теорема Римана—Роха) излагаются в главе 2.

1.8. Когомологии этальных пучков. Приведенный в п. 1.6 рецепт определения когомологий применим в более широкой ситуации и приводит к построению т. н. производных функторов. Для его реализации нужно иметь следующие данные: а) абелеву категорию $\mathscr{A}$ (в предыдущем случае это была категория абелевых пучков), б) точный слева аддитивный функтор F на $\mathscr{A}$ (выше — функтор Γ глобальных сечений), в) достаточно широкий класс «ацикличных» объектов, на которых функтор F сохраняет точность.

Этот рецепт применим, в частности, для определения когомологий этальных пучков. А именно, для каждого алгебраического многообразия или схемы строится некоторая категория, объекты которой интерпретируются как пучки относительно т. н. этальной топологии. И хотя последняя не является топологией, когомологии как производные функторы имеют смысл. В некотором смысле этальная топология заменяет классическую и применима к многообразиям над любым полем; над полем $\mathbf{C}$ этальные результаты согласуются с классическими. Это открывает возможность переносить на абстрактные многообразия терминологию и результаты, известные для классической топологии.

§ 2. Комплексы

2.1. Точные последовательности. Пусть даны абелевы группы A, B, C и гомоморфизмы $u: A \to B$, $v: B \to C$. Говорят, что последовательность $A \to B \to C$ *точна* (в члене B), если ядро v совпадает с образом u: $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Im} u$. В этом случае композиция $v \circ u$ равна нулю. Вообще, если $v \circ u = 0$, то отклонение последовательности $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ от точной измеряется группой $\operatorname{Ker} v / \operatorname{Im} u$.

Эти понятия без особых изменений переносятся на модули, пучки абелевых групп и вообще на любые абелевы категории, как только имеют смысл понятия ядра, образа, коядра. Точность последовательности $0 \to A \xrightarrow{u} B$ ($A \xrightarrow{u} B \to 0$) означает, что u — мономорфизм (соответственно, эпиморфизм).

2.2. Комплексы. *Комплексом абелевых групп* называется семейство $K^{\cdot} = (K^n, d^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ абелевых групп K^n и гомоморфизмов $d^n: K^n \to K^{n+1}$, таких что $d^{n+1} \circ d^n = 0$ для всех n. Иначе говоря, *комплекс* — это диаграмма

$$K^{\cdot} = (\ldots \to K^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} K^0 \xrightarrow{d^0} K^1 \xrightarrow{d^1} \ldots).$$

Гомоморфизмы d^n называются *дифференциалами* или *граничными операторами*; индекс n обычно не пишется. С примерами комплексов мы встречались в предыдущем параграфе.

Когомологиями комплекса $K^{\cdot}$ называются группы

$$H^n(K^{\cdot}) = \operatorname{Ker} d^n / \operatorname{Im} d^{n-1}.$$

Это как бы существенная часть комплекса. Если при всех $n \in \mathbf{Z}$ $H^n(K^{\cdot}) = 0$, комплекс $K^{\cdot}$ называется *ацикличным*.

Определенные выше комплексы называют *коцепными*, чтобы подчеркнуть, что дифференциалы повышают размерность на 1. Обращение стрелок дает цепные комплексы $K_{\cdot} = (\ldots \leftarrow K_0 \leftarrow K_1 \leftarrow \ldots)$. Так как разница между этими типами комплексов скорее терминологическая, мы ограничимся далее, в основном, коцепными комплексами. О комплексах можно также говорить в любой абелевой категории.

Морфизмом комплексов $\varphi: K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ называется семейство гомоморфизмов $\varphi^n: K^n \to L^n$, $n \in \mathbf{Z}$, коммутирующих с дифференциалами (т. е. $d_K \circ \varphi^n = \varphi^{n+1} \circ d_L$). Такой морфизм индуцирует в когомологиях очевидный гомоморфизм

$$H^n(\varphi): H^n(K^{\cdot}) \to H^n(L^{\cdot}),$$

так что когомологии функториально зависят от комплексов. Примеры морфизмов комплексов встречались в пп. 1.1, 1.2. Морфизм комплексов называется *квазиизоморфизмом* или *гомологизмом*, если он индуцирует в когомологиях изоморфизм.

Если в категории комплексов объявить квазиизоморфизмы обратимыми, получится т. н. *производная категория*. Это ключевое понятие современной гомологической алгебры. Однако мы не будем им пользоваться, стремясь к большей элементарности и минимуму технических средств.

Каждую абелеву группу A можно рассматривать как комплекс, помещая ее на нулевое место и дополняя справа и слева нулями; такой комплекс обозначают иногда $A[0]$. *Резольвентой* для A называется точная последовательность $0 \to A \xrightarrow{\varphi} K^0 \to \to K^1 \to \ldots$. В предыдущих терминах можно сказать, что морфизм комплексов $A[0] \to K^\cdot$ является гомологизмом. Можно говорить также и о *резольвенте комплекса* $L^\cdot$, понимая под этим комплекс $K^\cdot$ вместе с гомологизмом $L^\cdot \tilde{\to} K^\cdot$.

2.3. Длинная точная последовательность. Наиболее важное свойство когомологий состоит в следующем: пусть дана *точная последовательность комплексов*

$$0 \to K^\cdot \xrightarrow{\varphi} L^\cdot \xrightarrow{\psi} M^\cdot \to 0 \qquad (*)$$

(это значит, что φ и ψ — морфизмы комплексов и для любого n соответствующая последовательность $0 \to K^n \to L^n \to M^n \to 0$ точна); тогда существуют граничные, или связывающие, гомоморфизмы

$$\partial^n : H^n(M^\cdot) \to H^{n+1}(K^\cdot),$$

такие что точна длинная последовательность

$$\ldots \to H^n(L^\cdot) \xrightarrow{H^n(\psi)} H^n(M^\cdot) \xrightarrow{\partial^n} H^{n+1}(K^\cdot) \xrightarrow{H^{n+1}(\varphi)} H^{n+1}(L^\cdot) \to \ldots \qquad (**)$$

При этом ∂^n функториальны по точным тройкам $(*)$.

Гомоморфизмы ∂^n строятся так: пусть класс когомологий $\mu \in H^n(M^\cdot)$ представлен коциклом $m \in M^n$; в силу сюръективности ψ элемент m поднимается до элемента $l \in L^n$: $\psi(l) = m$; элемент l уже не обязан быть коциклом — можно только утверждать, что $\psi(dl) = d(\psi l) = dm = 0$; но тогда в силу точности $(*)$ существует $k \in K^{n+1}$, такой что $dl = \varphi(k)$; так как $\varphi(dk) = d(\varphi k) = ddl = 0$, а φ инъективен, $dk = 0$, т. е. k — коцикл; представленный им класс когомологий из $H^{n+1}(K^\cdot)$ и называется $\partial^n(\mu)$. Легко проверить, что определение ∂ корректно, функториально и что $(**)$ точна.

Пример. Пусть Y — подмножество (обычно замкнутое) пространства X. Обозначим через $\Sigma^\cdot(X, Y)$ ядро естественного морфизма сингулярных коцепных комплексов $\Sigma^\cdot X \to \Sigma^\cdot Y$. Когомологии комплекса $\Sigma^\cdot(X, Y)$ называются *когомологиями пары* (X, Y) и обозначаются через $H^*(X, Y)$; они тесно связаны с когомологиями пространства X/Y, полученного из X стягиванием Y в точку. Когомологии X, Y и пары (X, Y) связаны длинной точной последовательностью

$$\ldots \to H^{n-1}(Y) \to H^n(X, Y) \to H^n(X) \to H^n(Y) \to \ldots$$

С ее помощью иногда удается находить когомологии одного из членов указанной выше тройки, зная когомологии двух других членов.

2.4. Фильтрованные комплексы. Последовательность (**) можно рассматривать как связь когомологий комплекса $L^\cdot$ с когомологиями подкомплекса $K^\cdot \subset L^\cdot$ и факторкомплекса $L^\cdot/K^\cdot = M^\cdot$. Более общую ситуацию охватывает понятие фильтрованного комплекса. *Фильтрованный комплекс* $(K^\cdot, F)$ — это комплекс $K^\cdot$, снабженный *фильтрацией*, т. е. убывающим семейством

$$\ldots \supset F^{-1}K^\cdot \supset F^0K^\cdot \supset F^1K^\cdot \supset \ldots$$

подкомплексов $F^pK^\cdot$. Мы будем предполагать далее, что на каждом члене K^n фильтрация FK^n конечна, т. е. что $F^pK^n = K^n$ при малых p и $F^pK^n = 0$ при больших p. В геометрических ситуациях такая фильтрация может возникать из фильтрации топологического пространства, как в предыдущем примере. Например, триангулированное пространство обладает фильтрацией по остовам различной размерности. С другой стороны, любой комплекс $K^\cdot$ обладает т. н. *глупой фильтрацией* σ:

$$\sigma^p(K^\cdot) = (\ldots \to 0 \to K^p \to K^{p+1} \to \ldots).$$

Как и с любым фильтрованным объектом, с фильтрованным комплексом $(K^\cdot, F)$ можно связать присоединенный градуированный объект $\mathrm{Gr}_F^*(K^\cdot)$, где $\mathrm{Gr}_F^p(K^\cdot) = F^pK^\cdot/F^{p+1}K^\cdot$.

2.5. Спектральные последовательности. Наличие фильтрации в комплексе $K^\cdot$ позволяет вычислять его когомологии $H^*(K^\cdot)$ при помощи последовательных приближений. По существу это — итерация точных последовательностей вида (**). Такой процесс кодируется *спектральной последовательностью.* А именно, для каждого $r \geqslant 0$ вводятся объекты

$$Z_r^{p,q} = \mathrm{Ker}\,(F^pK^{p+q} \xrightarrow{d} K^{p+q+1}/F^{p+r}K^{p+q+1}),$$

$$B_r^{p,q} = d\,(F^{p-r+1}K^{p+q-1}) + F^{p+1}K^{p+q},$$

$$E_r^{p,q} = (Z_r^{p,q} + B_r^{p,q})/B_r^{p,q}.$$

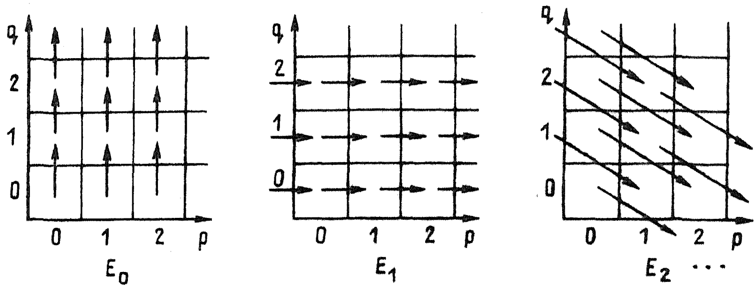
Например, $E_0^{p,q} = F^pK^{p,q}/F^{p+1}K^{p+q} = \mathrm{Gr}_F^pK^{p+q}$. Можно проверить, что

$$d\,(Z_r^{p,q}) \subset Z_r^{p+r,q-r+1}, \quad d\,(B_r^{p,q}) \subset B_r^{p+r,q-r+1},$$

так что d индуцирует морфизм $d_r: E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$. При этом $d_r \circ d_r = 0$ и $E_{r+1}^{p,q}$ отождествляется с когомологиями тройки

$$E_r^{p-r,q+r-1} \xrightarrow{d_r} E_r^{p,q} \xrightarrow{d_r} E_r^{p+r,q-r+1}.$$

Эти данные изображают в виде серии таблиц $E_r^{p,q}$, по одной для каждого $r \geqslant 0$:



Кроме этого, имеется еще одна «предельная» таблица E_∞:

$$E_\infty^{p,q} = \left(Z_\infty^{p,q} + B_\infty^{p,q}\right) / B_\infty^{p,q},$$

где

$$Z_\infty^{p,q} = \operatorname{Ker} d \cap F^p K^{p+q} = \bigcap_r Z_r^{p+q},$$

$$B_\infty^{p,q} = dK^{p+q-1} + F^{p+1} K^{p+q} = \bigcup_r B_r^{p,q}.$$

При больших r $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$. Если для некоторого r $E_r = E_\infty$ (т. е. $d_r = d_{r+1} = \ldots = 0$), то говорят, что спектральная последовательность *вырождается* в члене E_r.

Предельной фильтрацией в $H(K^\cdot)$ называется фильтрация, индуцированная F, т. е.

$$F^p H^n (K^\cdot) = \operatorname{Im} (H^n (F^p K^\cdot) \to H^n (K^\cdot)).$$

Члены E_∞ как раз присоединены к этой предельной фильтрации $H(K^\cdot)$, так что $E_\infty^{p,q} = \operatorname{Gr}_F^p H^{p+q} (K^\cdot)$. Таким образом, спектральная последовательность перерабатывает начальную таблицу

$$E_1^{p,q} = H^{p+q} (\operatorname{Gr}_F^p K^\cdot)$$

в предельную таблицу

$$E_\infty^{p,q} = \operatorname{Gr}_F^p H^{p+q} (K^\cdot).$$

Символически это изображают как

$$E_1^{p,q} = H^{p+q} (\operatorname{Gr}_F^p K^\cdot) \Rightarrow H^{p+q} (K^\cdot).$$

Спектральные последовательности функториальны в том смысле, что если дан морфизм $(K^{\cdot}, F) \to (\bar{K}^{\cdot}, \bar{F})$ фильтрованных комплексов (т. е. $F^pK^{\cdot}$ переходит в $\bar{F}^p\bar{K}^{\cdot}$), то имеются соответствующие морфизмы спектральных последовательностей $E_r(K^{\cdot}) \to E_r(\bar{K}^{\cdot})$, $0 \leqslant r \leqslant \infty$.

2.6. Бикомплексы. Резольвенты для комплексов часто строят из подходящих резольвент каждого члена. Это приводит к понятию бикомплекса. *Бикомплексом* называется биградуированный объект $K^{\cdot\cdot} = (K^{p,q})$, $p, q \in \mathbf{Z}$, снабженный двумя коммутирующими друг с другом дифференциалами $d' : K^{p,q} \to K^{p+1,q}$ и $d'' : K^{p,q} \to K^{p,q+1}$. Например, тензорное произведение $K^{\cdot} \otimes L^{\cdot} = (K^p \otimes L^q)_{p,q}$ двух комплексов $K^{\cdot}$ и $L^{\cdot}$ является бикомплексом с дифференциалами $d' = d_K \otimes 1_L$ и $d'' = 1_K \otimes d_L$.

С каждым бикомплексом $K^{\cdot\cdot}$ можно связать *простой* (или *полный*) *комплекс* $K^{\cdot} = \mathrm{tot}(K^{\cdot\cdot})$, для которого $K^n = \bigoplus\limits_{p+q=n} K^{p,q}$, а «полный» дифференциал $d : K^n \to K^{n+1}$ задается на компоненте $K^{p,q}$ формулой $d = d' + (-1)^p d''$. Комплекс $\mathrm{tot}(K^{\cdot\cdot})$ обладает двумя «глупыми» фильтрациями $'\Phi$ и $''\Phi$, где

$$'\Phi^p K^{\cdot} = \bigoplus_{i \geqslant p} K^{i,q}, \quad ''\Phi^q K^{\cdot} = \bigoplus_{j \geqslant q} K^{p,j}.$$

Ясно, что $\mathrm{Gr}^p_{'\Phi}(\mathrm{tot}(K^{\cdot\cdot}))$ — это комплекс $K^{p,\cdot}$ со сдвинутой градуировкой и дифференциалом $(-1)^p d''$. Спектральная последовательность фильтрованного комплекса $(\mathrm{tot}(K^{\cdot\cdot}), {}'\Phi)$ имеет вид

$$E_2^{p,q} = {}'H^p({}''H^q(K^{\cdot\cdot})) \Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{tot}(K^{\cdot\cdot})).$$

Здесь $''H^q$ означают q-е когомологии комплекса $K^{p,\cdot}$.

2.7. Конус отображения. На одном частном случае предыдущей конструкции стоит задержаться. Пусть дан морфизм комплексов $\varphi : K^{\cdot} \to L^{\cdot}$. Образуем бикомплекс $A^{\cdot\cdot}$, для которого $A^{\cdot,0} = K^{\cdot}$, $A^{\cdot,1} = L^{\cdot}$, а остальные $A^{\cdot,q}$ равны нулю. Дифференциал $d'' = \varphi$. Иначе говоря, это бикомплекс вида

$$A^{\cdot\cdot} = \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \ldots \to & & L^{-1} & \xrightarrow{d} & L^0 & \xrightarrow{d} & L^1 \to \ldots \\ & & \uparrow \varphi & & \uparrow \varphi & & \uparrow \varphi \\ \ldots \to & & K^{-1} & \xrightarrow{d} & K^0 & \xrightarrow{d} & K^1 \to \ldots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array} \right\}.$$

Простой комплекс $\mathrm{tot}(A^{\cdot\cdot})$ называется *конусом морфизма* φ и обозначается через $\mathrm{Con}(\varphi)$ или $(K^{\cdot} \bmod L^{\cdot})$. Конус нулевого морфизма $0 \to L^\bullet$ обозначается через $L^\bullet[-1]$; этот комплекс отличается от $L^\bullet$ сдвигом градуировки на единицу (так что $(L^\bullet[-1])^n = L^{n-1}$) и изменением знака у дифференциала.

Имеется очевидная точная последовательность комплексов

$$0 \to L^\bullet[-1] \to \mathrm{Con}(\varphi) \to K^\bullet \to 0.$$

Она дает длинную точную последовательность

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \to & H^n(L^\bullet[-1]) & \to H^n(\mathrm{Con}(\varphi)) \to & H^n(K^\bullet) & \xrightarrow{\partial} & H^{n+1}(L^\bullet[-1]) & \to \ldots \\ & \| & & & & \| & \\ & H^{n-1}(L^\bullet) & & & & H^n(L^\bullet) & \end{array}$$

Отметим, что связывающий гомоморфизм $\partial : H^n(K^\bullet) \to H^n(L^\bullet)$ в этом случае совпадает с $H^n(\varphi)$, так что принципиальной разницы между связывающими гомоморфизмами ∂ и естественными гомоморфизмами $H(\varphi)$ не существует. Видно также, что φ — гомологизм тогда и только тогда, когда комплекс $\mathrm{Con}(\varphi)$ ацикличен.

2.8. Произведения. Пусть $K^\bullet$ и $L^\bullet$ — комплексы. Как говорилось в п. 2.6, можно образовать комплекс $\mathrm{tot}(K^\bullet \otimes L^\bullet)$. Легко понять, что имеются канонические гомоморфизмы

$$H^p(K^\bullet) \otimes H^q(L^\bullet) \to H^{p+q}(\mathrm{tot}(K^\bullet \otimes L^\bullet)).$$

В частности, если комплекс $K^\bullet$ в категории комплексов является кольцом (т. е. имеется морфизм $\mathrm{tot}(K^\bullet \otimes K^\bullet) \to K^\bullet$, обладающий очевидными свойствами), то кольцевой структурой обладает и $H^*(K^\bullet)$.

Более точная, количественная связь между $H^*(K^\bullet \otimes L^\bullet)$ и $H^*(K^\bullet) \otimes H^*(L^\bullet)$ называется *формулой Кюннета*. Приведем типичный образец для комплексов модулей над коммутативным кольцом A:

П р е д л о ж е н и е. Предположим, что комплекс $L^\bullet$ состоит из плоских A-модулей. Тогда имеется спектральная последовательность

$$E_2^{p,q} = \bigoplus_{i+j=q} \mathrm{Tor}_{-p}^A (H^i(K^\bullet), H^j(L^\bullet)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{tot}(K^\bullet \otimes_A L^\bullet)).$$

В частности, если A — поле, то формула упрощается:

$$H^n(\mathrm{tot}(K^\bullet \otimes_A L^\bullet)) = \bigoplus_{i+j=n} (H^i(K^\bullet) \otimes_A H^j(L^\bullet)).$$

§ 3. Пучки

3.1. Предпучки. Многие геометрические объекты, связанные с топологическим пространством или многообразием X, обладают тем свойством, что имеет смысл говорить об «ограничении» их на любое открытое подмножество $U \subset X$. Так, можно говорить об ограничении на U функции, векторного поля, дифференциальной формы, векторного расслоения и т. п. Если обозначить через $F(U)$ множество объектов такого сорта, связанных с открытым U, то для $U' \subset U$ имеется отображение ограничения $F(U) \to F(U')$, сохраняющее естественные структуры на $F(U)$ и $F(U')$. Это приводит к понятию предпучка.

Определение. *Предпучком* множеств (групп, колец и т. д.) на топологическом пространстве X называется контравариантный функтор F из категории $O(X)$ открытых подмножеств X в категорию множеств (соответственно, групп, колец и т. д.).

Элементы $s \in F(U)$ называются *сечениями* предпучка F над открытым U; в случае $U = X$ говорят о *глобальных сечениях.* Образ s при отображении $F(U) \to F(U')$ называется *ограничением* s на U' и обозначается через $s|_{U'}$.

Примеры.

а) Для любого множества A постоянный функтор $U \mapsto A$ является предпучком множеств.

б) Сопоставление открытому $U \subset X$ когомологий $H^q(U)$ является предпучком групп или колец.

в) Зафиксируем пространство Y и через $Y(U)$ обозначим множество всех непрерывных отображений U в Y. Снова получается предпучок множеств. Это же можно проделать в категории дифференцируемых многообразий, комплексных пространстрии дифференцируемых многообразий, комплексных пространств или алгебраических многообразий. В частности, для алгебраического многообразия X предпучок регулярных отображений в $\mathbf{A}^1$ обозначается через $\mathcal{O}_X$; это — предпучок колец. Предпучок регулярных отображений в $\mathbf{A}^1$ $\{0\}$ обозначается через $\mathcal{O}_X{}^*$; это — предпучок групп по умножению.

В следующих примерах X — алгебраическое многообразие.

г) Сопоставим открытому подмножеству $U \subset X$ кольцо рациональных функций $K(U)$; получается предпучок колец K_X.

д) Сопоставляя $U \subset X$ группу дивизоров Картье $\operatorname{Div} U$ на U, получаем предпучок групп Div_X на X.

е) Сопоставляя $U \subset X$ группу Пикара $\operatorname{Pic} U$, получаем предпучок групп Pic_X.

3.2. Пучки. Пучки — это предпучки специального типа. Они описывают объекты, которые можно задавать локально. Скажем, что сечения s над U и s' над U' *согласованы,* если их ограничения на $U \cap U'$ совпадают.

Определение. Предпучок F называется *пучком*, если выполнено следующее свойство: для любого набора открытых U_i $(i \in I)$ и сечений $s_i \in F(U_i)$, согласованных на пересечениях, существует единственное сечение $s \in F\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)$, такое что $s|_{U_i} = s_i$.

Короче можно сказать, что пучок переводит прямые пределы (в категории $O(X)$) в обратные пределы, т. е. в каком-то смысле «непрерывен». Суть аксиомы пучка можно выразить как точность последовательности

$$F(U \cup U') \to F(U) \times F(U') \rightrightarrows F(U \cap U').$$

Например, предпучки из примеров в), г) и д) являются пучками. Напротив, предпучки из примеров а), б) и е) исключительно редко оказываются пучками. Напомним также, что понятие алгебраического многообразия определялось в «пучковом» духе: это — структуры аффинных многообразий на открытых U_i, согласованные на пересечениях. Отметим, наконец, аналогию понятия пучка с понятием симплициального комплекса. Подобно тому, как последний склеивается из симплексов Δ_n, пучок «склеивается» из кусков, изоморфных открытым $U \subset X$.

Пучки, как и предпучки, образуют категорию, где под морфизмом $F \to G$ понимается морфизм их как функторов (т. е. согласованный с ограничениями набор отображений $F(U) \to G(U)$, по одному для каждого открытого $U \subset X$). Например, сопоставляя ненулевой рациональной функции f ее дивизор Картье $\operatorname{div}(f)$, мы получаем морфизм пучка $\mathcal{K}_X^*$ в Div_X. Этот морфизм эпиморфен в категории пучков (т. к. локально любой дивизор Картье — главный), но не в категории предпучков!

С каждым предпучком F можно канонически связать некоторый пучок $\tilde{F}$. Делается это, по существу, тавтологически. Рассмотрим «множество» (а на самом деле — категорию) пучков G, снабженных морфизмом $F \to G$. Тогда в качестве $\tilde{F}$ надо взять обратный предел $\varprojlim G$ по указанному «множеству». То, что *предпучок* $\varprojlim G$ *является на самом деле пучком*, следует из коммутирования обратных пределов друг с другом. Эта совершенно общая категорная конструкция применяется всякий раз, когда нужно построить сопряженный функтор.

Например, пучок, ассоциированный с предпучком Pic_X из примера е), — нулевой. Пучок, ассоциированный с постоянным предпучком из примера а), называется *постоянным пучком* со слоем A и обозначается через A_X.

3.3. Прямой и обратный образы пучка. Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение и F — пучок на X. Сопоставляя каждому открытому $V \subset Y$ множество $F(f^{-1}(V))$, мы получаем пучок (проверьте!) на X, который обозначается через f_*F и называется *прямым образом* F при отображении f.

Функтор f_* имеет сопряженный слева функтор *обратного образа* f^{-1}, превращающий пучки на Y в пучки на X. Сопряженность здесь означает, что для любых пучков F на X и G на Y имеется равенство (точнее, каноническая биекция)

$$\operatorname{Hom}(G, f_*F) = \operatorname{Hom}(f^{-1}G, F).$$

Благодаря этому, появляется возможность говорить о морфизмах G в F над $f: X \to Y$, хотя это — пучки на разных пространствах.

Особенно важны два частных случая.

Пусть i_x — вложение точки x в X. Тогда пучок $i_x^{-1}F$ (а точнее, множество $(i_x^{-1}F)(x)$) допускает явное описание как прямой предел $\varinjlim F(U)$, где U пробегает систему открытых окрестностей точки x. Это множество обозначается через F_x и называется *слоем пучка* F в точке x.

Другой частный случай — вложение $j: U \to X$ открытого подмножества. В этом случае для открытого $V \subset U$ выполняется $(j^{-1}F)(V) = F(V)$. Пучок $j^{-1}F$ обозначается также через $F|U$.

3.4. Абелевы пучки. Пучки абелевых групп называются *абелевыми*. Категория абелевых пучков сама абелева. В частности, для любого морфизма абелевых пучков (гомоморфизма) $u: F \to G$ существуют ядро $\operatorname{Ker}(u)$ и коядро $\operatorname{Coker}(u)$. Ядро задается явно: $U \mapsto \operatorname{Ker}(F(U) \to G(U))$. С коядром положение чуть сложнее: это — пучок, ассоциированный с предпучком $U \mapsto \operatorname{Coker}(F(U) \to G(U))$.

Тем самым для абелевых пучков имеет смысл говорить о точных последовательностях. Последовательность пучков

$$0 \to F \to G \to H \to 0$$

точна тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in X$ точна соответствующая последовательность слоев $0 \to F_x \to G_x \to H_x \to 0$. Напротив, последовательность глобальных сечений

$$0 \to F(X) \to G(X) \to H(X) \to 0$$

в общем случае точна только в членах $F(X)$ и $G(X)$, но не в $H(X)$. В самом деле, эпиморфность $G \to H$ означает только, что сечения H поднимаются до сечений G локально. Так как этим обстоятельством вызвано появление теории когомологий, приведем несколько примеров.

Пример 1. Пусть $Y \subset X$ — замкнутая подсхема в X, заданная пучком идеалов I. Тогда точна последовательность

$$0 \to I \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0.$$

В частности, пусть $X = \mathbf{P}^1$, а Y состоит из двух различных точек прямой $\mathbf{P}^1$. Тогда пространство $\mathcal{O}_Y(\mathbf{P}^1)$ двумерно, в то время как глобальные сечения $\mathcal{O}^{\mathbf{P}^1}$ — только константы.

Пример 2. На любом алгебраическом многообразии X имеется точная последовательность пучков

$$1 \to \mathcal{O}_X^* \to \mathcal{K}_X^* \to \operatorname{Div}_X \to 0.$$

Факторгруппа $\operatorname{Div} X / K(X)^*$ — это в точности группа Пикара $\operatorname{Pic} X$ (изоморфная, как мы увидим, $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$).

Пример 3. Пусть X — комплексное аналитическое многообразие, $\mathcal{O}_X$ и $\mathcal{O}_X^*$ — пучки ростков голоморфных отображений X в $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}\setminus\{0\}$. Тогда точна последовательность пучков

$$0 \to \mathbf{Z}_X \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{e} \mathcal{O}_X^* \to 1,$$

где $e(s) = \exp(2\pi i s)$. На уровне глобальных сечений она снова не точна, и препятствия к подъему сечений $\mathcal{O}_X^*$ лежат в группе когомологий $H^1(X, \mathbf{Z})$.

И в общем случае препятствия к подъему глобальных сечений пучка H лежат в группе когомологий $H^1(X, F)$, которая будет определена в следующем параграфе. Однако если эта группа равна нулю, препятствий нет и гомоморфизм $G(X) \to H(X)$ сюръективен.

Пример 4. Пусть на проективной плоскости $\mathbf{P}^2$ даны кривые C и D с уравнениями $F=0$ и $G=0$. Предположим, что третья кривая $[H=0]$ проходит через все точки пересечения C и D (для простоты мы считаем, что C и D пересекаются трансверсально). Тогда $H=AF+BG$ для некоторых форм A и B (это т. н. *теорема $AF+BG$ М. Нётера*).

Чтобы установить связь этого утверждения с когомологиями, рассмотрим пучок идеалов I подсхемы $C \cap D$ в $\mathbf{P}^2$. Формы H степени k, обращающиеся в нуль в точках $C \cap D$, представляются тогда как глобальные сечения пучка $I(k) = I \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(k)$. Для последнего имеется резольвента

$$0 \to \mathcal{O}(k-m-n) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}(k-m) \oplus \mathcal{O}(k-n) \xrightarrow{\beta} I(k) \to 0,$$

где $m = \deg F$, $n = \deg G$, $\beta(a, b) = Fa + Gb$ и $\alpha(c) = (Gc, -Fc)$. Теперь все следует из обращения в нуль группы когомологий $H^1(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}(k-m-n))$, которое будет установлено в § 3 гл. 2.

3.5. Вялые пучки. Прежде чем переходить к определению когомологий пучков, полезно обсудить один класс пучков. Пучок F на X называется *вялым*, если для любого открытого $U \subset X$ отображение ограничения $F(X) \to F(U)$ сюръективно. Интерес к вялым пучкам вызван следующим их свойством:

Лемма. Пусть $0 \to F \to G \to H \to 0$ — точная последовательность абелевых пучков на X. Если пучок F — вялый, то последовательность глобальных сечений

$$0 \to F(X) \to G(X) \to H(X) \to 0$$

точна.

Причина здесь такая. Пусть даны открытые подмножества $U, U' \subset X$ и сечение $t \in H(X)$. Предположим, что сечение t поднимается до сечений $s \in G(U)$ над U и $s' \in G(U')$ над U'; на пересечении $U \cap U'$ эти подъемы различаются на элемент $r \in F(U \cap U')$.

Пользуясь вялостью пучка F, продолжим r до глобального сечения $\tilde{r}$ и заменим s' на $s'+\tilde{r}$, которое также является поднятием $t|U'$. После этого s и s' совпадают на $U\cap U'$ и тем самым дают подъем t уже над $U\cup U'$. Трансфинитная индукция завершает доказательство.

С другой стороны, вялых пучков достаточно много. Пусть F — произвольный пучок на X. Образуем пучок $C^0(F)$ по формуле

$$C^0(F)(U)=\prod_{x\in U} F_x,$$

Сопоставляя сечению $s\in F(U)$ семейство $(s(x))\in\prod\limits_{x\in U} F_x$, мы получаем каноническое вложение $F\hookrightarrow C^0(F)$. Пучок $C^0(F)$ — всегда вялый. Кроме того, в абелевом случае функтор C^0 переводит точные последовательности в точные.

§ 4. Когомологии пучков

4.1. Конструкция когомологий. Далее всюду речь пойдет об абелевых пучках. Функтор C^0 предыдущего параграфа позволяет для каждого пучка F построить функториально связанную с ним *вялую резольвенту Годемана* $F\to C^\cdot(F)$. Строится она так: $C^0(F)$ вместе с морфизмом $F\to C^0(F)$ уже были построены; в качестве $C^1(F)$ берется $C^0(C^0(F)/F)$, а при $n\leqslant 1$ пучки $C^{n+1}(F)$ определяется индуктивно:

$$C^{n+1}(F)=C^0(C^n(F)/dC^{n-1}(F)).$$

Дифференциал $d: C^n(F)\to C^{n+1}(F)$ задается как композиция $C^n(F)\to C^n(F)/dC^{n-1}(F)\to C^0(C^n(F)/dC^{n-1}(F))=C^{n+1}(F)$.

Определение. *Когомологиями пучка F* (или *пространства X с коэффициентами в пучке F*) называются когомологии комплекса абелевых групп $C^\cdot(F)(X)$; обозначаются они через $H^n(X,F)$.

Ясно, что $H^0(X,F)=F(X)$ и что $H^n=0$ при $n<0$. Если $H^n(X,F)=0$ для всех $n\geqslant 1$, пучок F называется *ацикличным*. Основное свойство когомологий состоит в том, что точная тройка пучков

$$0\to F\to G\to H\to 0$$

дает длинную точную последовательность когомологий

$$0\to H^0(X,F)\to H^0(X,G)\to H^0(X,H)\xrightarrow{\partial} H^1(X,F)\to H^1(X,G)\to\dots$$

В самом деле, пользуясь точностью функтора C^0, мы получаем точную последовательность комплексов пучков

$$0\to C^\cdot(F)\to C^\cdot(G)\to C^\cdot(H)\to 0.$$

Так как эти комплексы составлены из вялых пучков, по лемме из п. 3.5 точна последовательность комплексов групп

$$0 \to C^{\cdot}(F)\ (X) \to C^{\cdot}\ (G)\ (X) \to C^{\cdot}\ (H)\ (X) \to 0.$$

Остается воспользоваться п. 2.3.

Индукцией с помощью леммы из п. 3.5 можно проверить, что любой вялый пучок ацикличен. Вернемся, в частности, к примеру 2 предыдущего параграфа. Этот пример объясняется тем, что пучок $\mathcal{K}^*_X$—вялый. Это—частный случай более общего простого утверждения: на неприводимом топологическом пространстве любой постоянный пучок — вялый.

4.2. Гиперкогомологии. Группы типа когомологических можно определить не только для отдельных пучков, но и для комплексов пучков. Они называются гиперкогомологиями, чтобы отличать их от пучков когомологий комплекса $H^*(F^{\cdot})$. Делается это так же, как для пучков: пусть $F^{\cdot}$ — комплекс пучков; с ним связывается бикомплекс пучков $C^{\cdot}(F^{\cdot}) = (C^p(F^q))$, p, $q \in \mathbf{Z}$; исходный комплекс $F^{\cdot}$ вкладывается в комплекс $K^{\cdot} = \mathrm{tot}\,(C^{\cdot}(F^{\cdot}))$, причем это — гомологизм; когомологии комплекса глобальных сечений $K^{\cdot}(X) = \mathrm{tot}\,(C^{\cdot}(F^{\cdot})(X))$ называются *гиперкогомологиями* комплекса пучков $F^{\cdot}$ и обозначаются через $\mathbf{H}^*(X, F^{\cdot})$.

Гиперкогомологии функториально зависят от комплекса и для точной тройки комплексов дают длинную точную последовательность, как в п. 4.1. Если комплекс $F^{\cdot}$ состоит из единственного пучка F^0, гиперкогомологии комплекса $F^{\cdot}$ совпадают с когомологиями пучка F^0.

Как и любой бикомплекс, $C^{\cdot}(F^{\cdot})$ дает два пучка спектральные последовательности, сходящиеся к гиперкогомологиям $F^{\cdot}$ (по крайней мере, для ограниченных снизу комплексов $F^{\cdot}$, которые только и нужны для дальнейшего).

Первая имеет вид

$$'E_2^{p,q} = H^p(X,\ H^q(F^{\cdot})) \Rightarrow \mathbf{H}^n(X,\ F^{\cdot}).$$

В частности, если комплекс $F^{\cdot}$ ацикличен, т. е. все $H^q(F^{\cdot}) = 0$, то $\mathbf{H}^*(X,\ F^{\cdot}) = 0$. Пользуясь конусом морфизма из п. 2.7, мы получаем, что любой гомологизм комплексов пучков $F^{\cdot} \tilde{\to} G^{\cdot}$ индуцирует изоморфизм гиперкогомологий $\mathbf{H}^n(X,\ F^{\cdot}) \tilde{\to} \mathbf{H}^n(X,\ G^{\cdot})$.

Вторая спектральная последовательность имеет вид

$$''E_2^{p,q} = H^p(H^q(X,\ F^{\cdot})) \Rightarrow \mathbf{H}^n(X,\ F^{\cdot}).$$

В частности, если комплекс $F^{\cdot}$ состоит из ацикличных пучков, эта спектральная последовательность вырождается и дает изоморфизмы $\mathbf{H}^n(X,\ F^{\cdot}) = H^n(H^0(X,\ F^{\cdot}))$

На пересечении этих двух случаев мы получаем

Предложение. Пусть $K^{\cdot}$ — резольвента пучка F, состоящая из ацикличных пучков K^n. Тогда $H^n(X, F) = H^n(K^{\cdot}(X))$ для любого n.

Иначе говоря, при вычислении когомологий пучка F можно пользоваться любой резольвентой из ацикличных пучков, а не только канонической резольвентой $C^{\cdot}(F)$. Приведем два примера.

Пример 1. Пусть $X=[0, 1]$ — отрезок вещественной прямой; найдем когомологии постоянного пучка $\mathbf{Z}_X$. Для этого рассмотрим пучки A и B — пучки ростков непрерывных функций на X со значениями в прямой $\mathbf{R}$ и окружности $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Имеется естественная точная последовательность пучков

$$0 \to \mathbf{Z}_X \to A \to B \to 0.$$

Пучки A и B — хотя и не вялые, но все равно ацикличные (они мягкие — см. [38]). В силу односвязности X гомоморфизм $A(X) \to B(X)$ сюръективен, откуда мы получаем, что пучок $\mathbf{Z}_X$ ацикличен.

Отсюда, с помощью спектральной последовательности Лере (п. 4.3) можно получить то же утверждение для любого симплекса Δ_n.

Пример 2. Пусть X — дифференцируемое многообразие, а Ω^p обозначает пучок ростков дифференциальных p-форм на X. Классическая лемма Пуанкаре утверждает, что последовательность пучков

$$0 \to \mathbf{R}_X \to \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \ldots$$

точна. Кроме того, пучки Ω^p — ацикличные (они тонкие — см. [38]). Поэтому когомологии $H^n(X, \mathbf{R}_X)$ совпадают с когомологиями комплекса $\Omega^{\cdot}(X)$ глобальных дифференциальных форм (*теорема де Рама*). Позже мы обсудим аналитический и алгебраический варианты этого результата.

4.3. Высшие прямые образы. По изложенной выше схеме можно строить производные для многих других функторов. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — абелевы категории и $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — аддитивный точный слева функтор. Для определения производных функторов на объекте $A \in \mathcal{A}$ надо взять «хорошую» резольвенту $A \xrightarrow{\sim} K^{\cdot}$ и положить

$$(R^nT)(A) = H^n(T(K^{\cdot})).$$

В случае пучков и их глобальных сечений «хорошая» резольвента состояла из вялых пучков. В общем случае такую роль играют инъективные или какие-либо другие «приспособленные» к функтору T объекты категории $\mathcal{A}$. По такой схеме строятся функторы Ext (производные к Hom), функторы Tor (производные к $\otimes$), когомологии с компактными носителями $H_c^n(X)$, высшие прямые образы R^nf_* и т. д.

Остановимся подробнее на функторах высших прямых образов, непосредственно обобщающих когомологии. Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение. Функтор прямого образа f_* (из категории абелевых пучков на X в категорию абелевых пучков на Y) — аддитивный и точный слева, но в общем случае не точный. При помощи вялых резольвент определяются его производные $R^n f_*$. Для пучка F на X пучок $R^n f_*(F)$ — это пучок ка Y, ассоциированный с предпучком $V \mapsto H^n(f^{-1}(V), F)$. В частности, когда f — отображение X в точку, $R^n f_*(F)$, по существу, совпадают с когомологиями $H^n(X, F)$.

Функторы $R^n f_*$ играют важную роль при сравнении когомологий X и Y. Пусть F — пучок на X и $K^\cdot$ — вялая резольвента F. Так как $K^n(X) = (f_* K^n)(Y)$, когомологии $H^n(X, F)$ можно рассматривать как когомологии комплекса групп $f_*(K^\cdot)(Y)$. Прямой образ вялого пучка — вялый, поэтому последние когомологии совпадают с гиперкогомологиями $\mathbf{H}^*(Y, f_* K^\cdot)$, что дает спектральную последовательность

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, H^q(f_* K^\cdot)) \Rightarrow H^n(X, F).$$

Но по определению $H^q(f_* K^\cdot) = R^q f_*(F)$. Поэтому мы получаем т. н. *спектральную последовательность Лере* для отображения f:

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_*(F)) \Rightarrow H^n(X, F).$$

Аналогично устанавливается более общий ее вариант: если $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ — непрерывные отображения, то имеется спектральная последовательность

$$E_2^{p,q} = R^p g_*(R^q f_*(F)) \Rightarrow R^n (g \circ f)_*(F).$$

4.4. Когомологии покрытия. Приведем еще несколько приемов, полезных при вычислении когомологий. Пусть пространство X покрыто открытыми множествами U_0, U_1 и F — пучок на X. Тогда имеется последовательность

$$0 \to F(X) \to F(U_0) \times F(U_1) \xrightarrow{\varphi} F(U_0 \cap U_1) \to 0,$$

где $\varphi(s_0, s_1) = s_0 - s_1$. По определению пучка она точна в первых двух членах, а если пучок F — вялый, то и в третьем.

Применим это замечание к вялой резольвенте Годемана C (F) произвольного пучка F. Так как ограничения $C(F)$ на U_0, U_1 и $U_0 \cap U_1$ дают вялые резольвенты соответствующих ограничений пучка F, мы получаем точную *последовательность Майера—Виеториса*

$$\ldots \to H^{n-1}(U_0 \cap U_1, F) \to H^n(X, F) \to H^n(U_0, F) \times H^n(U_1, F) \to$$
$$\to H^n(U_0 \cap U_1, F) \to \ldots$$

Это рассуждение обобщается на произвольное открытое покрытие $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ пространства X и дает спектральную последовательность покрытия

$$E_1^{pq}=H^q(\mathcal{U}_p,\ F)\Rightarrow H^{p+q}(X,\ F).$$

Здесь $H^q(\mathcal{U}_p,\ F)$ обозначает $\prod H^q(U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_p},\ F)$, где произведение берется по всем строго возрастающим наборам $i_0<i_1<\ldots<i_p$ элементов I (которое предварительно линейно упорядочивается). Дифференциал $d_1: H^q(\mathcal{U}_p, F)\to H^q(\mathcal{U}_{p+1}, F)$ задается обычно комбинаторной (или симплициальной) формулой.

Определение. Покрытие (U_i) называется *F-ацикличным*, если $H^q(U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_p},\ F)=0$ для любых $i_0,\ldots,\ i_p\in I$ и $q>0$.

Для ацикличного покрытия $E_1^{pq}=0$ при $q>0$ и вся последовательность вырождается в один комплекс

$$H^0(\mathcal{U}_*,\ F)=\left(\prod_i F(U_i)\to\prod_{i<j}F(U_i\cap U_j)\to\ldots\right).$$

Этот комплекс (уже для любого покрытия $\mathcal{U}$) называется *комплексом покрытия* со значениями в пучке F и обозначается через $C^\cdot(\mathcal{U}, F)$. Когомологии $C^\cdot(\mathcal{U}, F)$ называются *когомологиями покрытия* $\mathcal{U}$ со значениями в F и обозначаются через $H^*(\mathcal{U}, F)$. Таким образом, мы получили

Предложение. Если покрытие $\mathcal{U}$ F-ациклично, то

$$H^n(\mathcal{U}, F)=H^n(X, F).$$

Вариант. Предыдущее определение комплекса $C^\cdot(\mathcal{U}, F)$ требует упорядочения I, хотя по существу от упорядочения I мало что зависит. С теоретической точки зрения удобнее «неупорядоченный» вариант определения комплекса покрытия, когда p-симплексом считается любая последовательность $(i_0,\ldots, i_p)$ элементов I. В этом случае комплекс покрытия можно переписать в виде

$$F(X')\to F(X'\underset{X}{\times}X')\to F(X'\underset{X}{\times}X'\underset{X}{\times}X')\to\ldots,$$

где $X'=\coprod_{i\in I}U_i$. В таком виде это понятие обобщается на любое «покрытие» $X'\to X$ и даже на любое «симплициальное пространство» $X'\leftleftarrows X''\overset{\leftarrow}{\leftleftarrows} X'''\ldots$.

Аналогичная спектральная последовательность имеется и для замкнутого покрытия X, если только это покрытие локально конечно. В частности, отсюда получается, что для локально конечного полиэдра X когомологии постоянного пучка $H^*(X, \mathbf{Z}_X)$ совпадают как с когомологиями триангуляции, так и с сингулярными когомологиями $H^*(X, \mathbf{Z})$.

4.5. Критерий ацикличности покрытия. Следующая теорема А. Картана позволяет устанавливать ацикличность некоторых покрытий:

Теорема. Пусть $\mathscr{A}$ — класс открытых подмножеств пространства X, удовлетворяющий двум условиям: а) он замкнут относительно конечных пересечений, б) он содержит сколь угодно малые открытые подмножества. Предположим, что для любого $U \in \mathscr{A}$ и любого $\mathscr{A}$-покрытия $\mathscr{U} = (U_i)$ (это означает, что любое $U_i \in \mathscr{A}$) этого U $H^q(\mathscr{U}, F) = 0$ при $q > 0$. Тогда любое $\mathscr{A}$-покрытие F-ациклично.

В частности, для любого $\mathscr{A}$-покрытия пространства X имеет место изоморфизм

$$H^*(\mathscr{U}, F) = H^*(X, F).$$

В силу свойства а) достаточно проверить, что для любого $q > 0$ и любого $U \in \mathscr{A}$ $H^q(U, F) = 0$. Доказывая по индукции, можно считать, что это уже установлено для $q < n$, и показать для $q = n$.

Пусть класс когомологий $\alpha \in H^n(U, F)$ представлен коциклом $a \in C^n(F)(U)$. Так как $d\alpha = 0$, то локально a является кограницей. Иначе говоря, в силу свойства б) найдется $\mathscr{A}$-покрытие (U_i) множества U, такое что образ $a|U_i$ в группе $H^n(U_i, F)$ равен нулю для любого i. Из предположения индукции видно, что в спектральной последовательности этого покрытия (см. п. 4.4) $E_2^{p,q} = 0$ при $p \geqslant 0$, $0 < q < n$. Это дает точную последовательность

$$0 \to H^n((U_i), F) \to H^n(U, F) \to E_2^{0,n} \subset \prod_i H^n(U_i, F).$$

Так как образ α равен нулю в группах $H^n(U_i, F)$, класс α лежит в группе $H^n((U_i).F)$, нулевой по предположению теоремы.

Глава 2

КОГОМОЛОГИИ КОГЕРЕНТНЫХ ПУЧКОВ

Каждое алгебраическое многообразие обладает алгебраически определенной топологией Зарисского, поэтому для него имеет смысл говорить о пучках и их когомологиях. Другое дело — получится ли при этом что-то интересное. В классической ситуации многие важные инварианты многообразия получались как когомологии постоянных пучков вроде $\mathbf{Z}$. Имея дело с топологией Зарисского, на это рассчитывать трудно. Дело в том, что интересные многообразия неприводимы, а на таких пространствах любой постоянный пучок — вялый и имеет поэтому тривиальные когомологии. По той же причине нет нетривиальных локально постоянных пучков. Конечно, для приводимых многообразий кое-что дают и постоянные пучки, когомологии которых отражают комбинаторику соединения неприводимых компонент. Однако интереснее обратиться к «гибким» когерентным пучкам, тем более что в их терминах выражаются многие геометрические задачи. Изложению теории когомологий когерентных пучков на схемах и посвящена эта глава.

§ 1. Когомологии квазикогерентных пучков

1.1. Квазикогерентные пучки. Пусть X — схема (или, если угодно, алгебраическое многообразие) со структурным пучком колец $\mathcal{O}_X$. Квазикогерентные пучки на X — это пучки $\mathcal{O}_X$-модулей, устроенные локально неким специальным образом. Поэтому сначала мы скажем, как выглядят квазикогерентные пучки на афинных схемах.

Пусть $X=\operatorname{Spec} A$ — аффинная схема, где A — коммутативное кольцо с единицей. С каждым A-модулем M связан пучок $\widetilde{M}$, который открытому подмножеству $U\subset X$ сопоставляет модуль $M\otimes_A\mathcal{O}_X(U)$. В частности, для главного открытого подмножества $D(f)=\{x\in X\,|\,f(x)\neq 0\}$ (где $f\in A$)

$$\widetilde{M}(D(f))=M_f=M\otimes_A A_f.$$

Здесь $A_f=A[f^{-1}]$ — кольцо дробей вида a/f^m. Пучки вида $\widetilde{M}$ называются *квазикогерентными*.

Теперь для произвольной схемы X пучок $\mathcal{O}_X$-модулей F называется *квазикогерентным*, если для любой открытой афинной подсхемы $U\subset X$ ограничение $F|_U$ квазикогерентно на U. Интерес к квазикогерентным пучкам вызван тем, что многие геометрические объекты, связанные с алгебраическими многообразиями, выражаются в терминах таких пучков.

Пример 1. Сечения *обратимых пучков* (т. е. пучков, локально изоморфных пучку $\mathcal{O}_X$) дают эффективные дивизоры на X. Например, сечения пучка $\mathcal{O}(m)$ на проективном пространстве $\mathbf{P}$ дают гиперповерхности степени m в $\mathbf{P}$. Дивизоры, проходящие через заданные точки или множества в $\mathbf{P}$, описываются сечениями подпучков пучка $\mathcal{O}(m)$. Поэтому вопросы о существовании и «числе» таких дивизоров сводятся к нахождению размерности пространства глобальных сечений пучков F (задача Римана). Как мы увидим, проще бывает найти т. н. *эйлерову характеристику* пучка, куда кроме $H^0(X,F)$ входят когомологии F.

Пример 2. Пусть $Y\subset X$ — замкнутая подсхема. Вопрос о деформациях Y внутри X тесно связан с т. н. нормальным пучком $N_{Y/X}$ к Y в X. Грубо говоря, инфинитезимальные деформации Y описываются элементами $H^0(N)$, тогда как препятствия к дальнейшему продолжению таких деформаций лежат в $H^1(N)$.

Более сложный пример доставляют деформации многообразия X, тесно связанные уже с когомологиями касательного пучка к X (см. [11]).

Пример 3. Когомологии пучков, инвариантно связанных с многообразием, таких как Ω_X^p, дают важные инвариантны многообразия. Например, *род кривой* X можно определить как размерность пространства $H^0(\Omega_X^1)$ или $H^1(\mathcal{O}_X)$.

1.2. Теорема Серра. Следующая теорема, установленная в [72], является краеугольным камнем теории когомологий когерентных пучков и представляет алгебраический аналог теоремы А. Картана (теоремы B):

Теорема. Пусть F — квазикогерентный пучок на аффинной схеме X. Тогда $H^q(X, F)=0$ при $q>0$.

Можно показать, что в нётеровом случае верно обращение этой теоремы (см. [54]): если когомологии любого квазикогерентного пучка на схеме X тривиальны, то X — аффинная схема. В частности, схема аффинна тогда и только тогда, когда аффинны ее неприводимые компоненты.

Ввиду важности теоремы Серра, приведем набросок ее доказательства. Пусть $\mathscr{A}$ — класс открытых подмножеств аффинной схемы $X=\operatorname{Spec} A$, имеющих вид $D(f)$, где $f\in A$. Он обладает свойствами а) и б) из условия критерия ацикличности покрытия (гл. 1, п. 4.5). Поэтому в силу этого критерия достаточно установить тривиальность когомологий любого $\mathscr{A}$-покрытия X. Пусть дано такое покрытие, состоящее из $U_i=D(f_i)$, $i\in I$; множество индексов I можно считать конечным. Комплекс этого покрытия имеет вид $(F=\widetilde{M})$

$$\bigoplus_i M_{f_i}\to\bigoplus_{i<j} M_{f_if_j}\to\ldots$$

Этот комплекс естественно дополнить слева модулем M; получается последовательность

$$0\to M\to\bigoplus_i M_{f_i}\to\bigoplus_{i<j} M_{f_if_j}\to\ldots \qquad (*)$$

Мы утверждаем, что последовательность $(*)$ точна. Это дает то, что нужно; кроме того, точность в членах M и $\oplus M_{f_i}$ показывает лишний раз, что $\widetilde{M}$ — действительно пучок.

Для проверки точности $(*)$ достаточно убедиться, что эта последовательность остается точной после тензорного умножения на любое из колец A_{f_j}, $j\in I$. Но $(*)\otimes_A A_{f_j}$ — последовательность, соответствующая покрытию $(U_i\cap D(f_j))$, $i\in I$, множества $D(f_j)$. Это покрытие уже тривиально в том смысле, что один из его элементов совпадает с $D(f_j)$. А для таких тривиальных покрытий (дополненный) комплекс покрытия ацикличен.

Замечание. Тривиальность когомологий покрытия $(D(f_i))$ схемы $\operatorname{Spec} A$ допускает следующее обобщение: пусть B — строго плоская A-алгебра (в предыдущем случае $B=\bigoplus_i A_{f_i}$); тогда точна естественная последовательность (ср. с «Вариантом» из п. 4.4. гл. 1)

$$0 \to M \to M \otimes_A B \to M \otimes_A B \otimes_A B \to \ldots$$

Этот результат Гротендика лежит в основе его теории спуска.

1.3. Комплексы Кошуля. Комплексы модулей, похожие на (*), встречаются во многих задачах. Поэтому стоит немного задержаться на них (подробнее см. [35], [40], [46]). Для простоты мы ограничимся случаем $M=A$. В этом случае комплекс (*) есть тензорное произведение «элементарных» двучленных комплексов

$$K^{\cdot}(f_i^{\infty}) = (A \to A_{f_i}),$$

сосредоточенных в размерностях 0 и 1.

Вообще, пусть дан элемент $f \in A$ и целое число $n \geqslant 0$. Обозначим через $K^{\cdot}(f^n)$ двучленный комплекс

$$\left(A \to \frac{1}{f^n} A\right) \simeq \left(A \xrightarrow{f^n} A\right).$$

Тогда $K^{\cdot}(f^{\infty})$ есть индуктивный предел комплексов $K^{\cdot}(f^n)$ при $n \to \infty$. А так как когомологии и $\varinjlim$ перестановочны, полезно разобраться с комплексами $K^{\cdot}(f^n)$.

Комплексом Кошуля для последовательности $(f_1, \ldots, f_n)$ элементов кольца A называется тензорное произведение комплексов

$$K^{\cdot}(f_1, \ldots, f_n) = K^{\cdot}(f_1) \underset{A}{\otimes} \ldots \underset{A}{\otimes} K^{\cdot}(f_n).$$

Когомологии такого комплекса естественно изучать индукцией по n. Здесь полезна следующая лемма, которая вытекает из формулы Кюннета (п. 2.8 гл. 1) или получается непосредственно:

Лемма. Пусть имеется двучленный комплекс A-модулей $K^{\cdot} = (K^0 \to K^1)$ с плоскими A-модулями K^0 и K^1. Тогда для любого комплекса A-модулей $L^{\cdot}$ точна длинная последовательность

$$\ldots \to H^{q-1}(L^{\cdot}) \underset{A}{\otimes} K^0 \xrightarrow{u^{q-1}} H^{q-1}(L^{\cdot}) \underset{A}{\otimes} K^1 \to H^q(L^{\cdot} \underset{A}{\otimes} K^{\cdot}) \to$$
$$\to H^q(L^{\cdot}) \otimes_A K^0 \xrightarrow{u^q} H^q(L^{\cdot}) \otimes_A K^1 \to \ldots$$

Гомоморфизмы u^q в этой последовательности индуцированы дифференциалом $d: K^0 \to K^1$. Приведем два случая, когда эта лемма позволяет вычислить когомологии комплекса Кошуля.

Первый — когда элементы $f_1, \ldots, f_n$ порождают единичный идеал в кольце A, т. е. когда открытые множества $D(f_i)$ покрывают $\operatorname{Spec} A$. Заметим, что если в предыдущей лемме $d: K^0 \to K^1$ — изоморфизм, то все u^q — изоморфизмы и поэтому комплекс $L^{\cdot} \underset{A}{\otimes} K^{\cdot}$ ацикличен, каким бы ни был $L^{\cdot}$. Так как элемент f_i

обратим над $D(f_i)$, комплекс $K^{\cdot}(f_1, \ldots, f_n)$ ацикличен над любым $D(f_i)$ и, следовательно, ацикличен всюду. Это еще раз доказывает точность последовательности (*).

Второй случай еще интереснее. Напомним, что последовательность $f_1, \ldots, f_n$ элементов кольца A называется *регулярной*, если для любого i f_i не делит нуль в $A/(f_1, \ldots, f_{i-1})$. Пользуясь предыдущей леммой, легко по индукции проверить, что для регулярной последовательности $f_1, \ldots, f_n$

$$H^q(K^{\cdot}(f_1, \ldots, f_n)) = \begin{cases} 0 & \text{при } q \neq n, \\ A/(f_1, \ldots, f_n) & \text{при } q = n. \end{cases}$$

В локальной ситуации длина максимальной регулярной последовательности называется *глубиной* локального кольца A и обозначается через $\operatorname{depth} A$. Это важная численная характеристика кольца. Всегда $\operatorname{depth} A \leqslant \dim A$; в случае равенства кольцо A называется *кольцом Коэна—Маколея*. Если все локальные кольца схемы X суть кольца Коэна—Маколея, то X называется *схемой Коэна—Маколея*. Геометрический смысл этого понятия см. в [5], гл. 2, § 6.

1.4. Теорема об аффинных покрытиях. Важнейшим следствием теоремы Серра является возможность вычислять когомологии квазикогерентных пучков при помощи любого аффинного покрытия.

Теорема. Пусть X — отделимая схема, $\mathcal{U} = (U_i)$ — открытое аффинное покрытие X, F — квазикогерентный пучок на X. Тогда $H^*(X, F) = H^*(\mathcal{U}, F)$.

Действительно, в силу отделимости X все пересечения $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}$ аффинны. Поэтому покрытие $\mathcal{U}$ по теореме Серра F-ациклично, и все следует из п. 4.4 гл. 1 («Предложение»).

Фактически мы пучок F заменяем «эквивалентным» ему комплексом покрытия $C^{\cdot}(\mathcal{U}, F)$. В некотором смысле истинным когомологическим инвариантом пучка F является именно этот комплекс как объект производной категории. Однако по причинам скорее психологического порядка нас интересуют только его когомологии.

Далее, если не сказано противное, все схемы предполагаются отделимыми, а пучки — квазикогерентными. Можно забыть о производных функторах и вялых резольвентах и понимать когомологии просто как когомологии любого аффинного покрытия. Зачем же тогда нужны были все эти общие понятия? По двум причинам. Во-первых, это дает независимость от выбора покрытия. Во-вторых, общее определение когомологий связывает квазикогерентные пучки с произвольными абелевыми пучками, такими как $\mathcal{O}_X^*$.

Пример. Найдем когомологии структурного пучка $\mathcal{O}_X$ для простейшего неаффинного многообразия $X = \mathbf{A}^2 \setminus \{0\}$. Пусть T_1, T_2 — координаты на $\mathbf{A}^2$. Тогда X покрывается двумя аффинными картами $U_i=D(T_i)$, $i=1, 2$. Комплекс этого покрытия имеет вид

$$K[T_1, T_2, T_1^{-1}] \oplus K[T_1, T_2, T_2^{-1}] \xrightarrow{d} K[T_1, T_2, T_1^{-1}, T_2^{-1}],$$

где $d(f_1, f_2)=f_1-f_2$. Видно, что $H^0(X, \mathcal{O}_X)=\operatorname{Ker} d= =K[T_1, T_2]$ (т. е. функции на X продолжаются до регулярных функций на $\mathbf{A}^2$), тогда как пространство $H^1(X, \mathcal{O}_X)=\operatorname{Coker} d$ порождается мономами $T_1^{m_1}T_2^{m_2}$ с $m_1<0$, $m_2<0$. Таким образом, пространство $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ отлично от нуля и даже бесконечномерно.

1.5. Когомологическая размерность. Следствием теоремы об аффинных покрытиях является обращение в нуль когомологий H^q при больших q. Более точно, если схема X покрывается n открытыми аффинными картами, то $H^q(X, F)=0$ при $q\geqslant n$. В самом деле, уже $C^q(\mathcal{U}, F)=0$ при $q\geqslant n$.

В частности, на $\mathbf{P}^n$ когомологии H^q любого пучка равны нулю при $q>n$. Как мы увидим в следующем параграфе, на $\mathbf{P}^n$ имеются пучки F с $H^n(\mathbf{P}^n, F)\neq 0$. Так как любое n-мерное проективное многообразие X допускает покрытие, состоящее из $n+1$ аффинных карт, $H^q(X, F)=0$ при $q>n=\dim X$. На самом деле, последний факт верен для любой (нётеровой) схемы X и любого (абелева) пучка $F: H^q(X, F)=0$ при $q>\dim X$ ([41], [38]).

1.6. Высшие прямые образы. Пусть $f: X\to Y$ — морфизм схем. Для пучка G на Y обратный образ f^*G определяется как

$$f^*G=f^{-1}G \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X,$$

и, очевидно, квазикогерентен. Пользуясь теоремой об аффинных покрытиях, нетрудно проверить, что квазикогерентность сохраняется и для высших прямых образов.

Предложение. Пусть морфизм $f: X\to Y$ квазикомпактен, а F — квазикогерентный пучок на X. Тогда пучки R^qf_*F квазикогерентны, причем для открытых аффинных подмножеств $V\subset Y$

$$(R^qf_*F)(V)=H^q(f^{-1}(V), F).$$

Следствие. Если $f: X\to Y$ — аффинный морфизм, то $R^qf_*F=0$ при $q>0$. В частности, $H^*(X, F)=H^*(Y, f_*F)$.

Последнее следует из спектральной последовательности Лере, а первое — из теоремы Серра. Чаще всего это следствие применяется к замкнутому вложению $i: X\to Y$; при этом пучок F на X обычно отождествляется с пучком i_*F на Y.

1.7. Формула Кюннета. Пусть даны S-схемы X и Y и пучки F на X и G на Y. Образуем расслоенное произведение и рассмотрим на $X\times_S Y$ пучок $F\boxtimes_S G=\bar{g}^*F\otimes\bar{f}^*G$. Как его когомологии связаны с когомологиями F и G?

$$\begin{tikzcd} & X \times_S Y \arrow[dl, "\bar{g}"'] \arrow[dr, "\bar{f}"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Ограничимся случаем, когда база $S=\operatorname{Spec} A$ аффинна. Пусть $\mathcal{U}=(U_i)$ — аффинный атлас X, а $\mathcal{V}=(V_j)$ — атлас Y. Тогда $U_i \underset{S}{\times} V_j$ аффинны и покрывают $X \underset{S}{\times} Y$. Для комплексов покрытий мы имеем изоморфизм

$$C^{\cdot}(\mathcal{U}\times\mathcal{V},\ F \underset{A}{\boxtimes} G)=C^{\cdot}(\mathcal{U},\ F)\underset{A}{\otimes}C^{\cdot}(\mathcal{V},\ G).$$

Поэтому применимы методы п. 2.8 гл. 1. Напомним, что пучок G на S-схеме Y называется *плоским* над S, если для любой точки $y \in Y$ модуль G_y — плоский над кольцом A. В этом случае комплекс покрытия $C^{\cdot}(\mathcal{V}, G)$ состоит из плоских A-модулей и потому применима спектральная последовательность п. 2.8 гл. 1. Если, кроме того, все когомологии $H^i(X, F)$ (или все $H^j(Y, G)$) являются плоскими A-модулями, мы получаем *формулу Кюннета*

$$H^q(X \underset{S}{\times} Y,\ F \underset{S}{\boxtimes} G)=\bigoplus_{i+j=q}(H^i(X,\ F)\underset{A}{\otimes}H^j(Y,\ G)).$$

Например, это так, если A — поле. Другой частный случай: если $Y=\operatorname{Spec} B$ и схема Y — плоская над $\operatorname{Spec} A$, то

$$H^q(X,\ F)\underset{A}{\otimes}B \simeq H^q(X\underset{A}{\otimes}B,\ F\underset{A}{\otimes}B).$$

1.8. Когомологии открытых вложений. Большая часть этой главы будет посвящена когомологиям полных многообразий и собственных морфизмов. Здесь же мы кратко остановимся на противоположном случае — открытых вложениях. Пусть $X=\operatorname{Spec} A$ — аффинная схема и $j: U \to X$ — открытое вложение. Что можно сказать о пучках $R^q j_*(\mathcal{O}_U)$ или, что по существу то же самое, об A-модулях $H^q(U, \mathcal{O}_U)$?

Покроем U открытыми множествами $U_i=D(f_i)$, где $f_i \in A$. Сравним комплекс покрытия $C^{\cdot}(\mathcal{U},\ \mathcal{O}_U)$ с комплексом Кошуля $K^{\cdot}(f_1^{\infty}, \ldots, f_n^{\infty})$ из п. 1.3. Имеется естественный морфизм комплексов

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & 0 & \to & C^0(\mathcal{U},\ \mathcal{O}_U) & \to & C^1(\mathcal{U},\ \mathcal{O}_U) & \to \ldots \\ & \downarrow & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & \\ 0 \to & K^0(f^{\infty}) & \to & K^1(f^{\infty}) & \to & K^2(f^{\infty}) & \to \ldots \end{array}$$

Это дает точную последовательность

$$0 \to H^0(K^{\cdot}(f^{\infty})) \to A \to H^0(U,\ \mathcal{O}_U) \to H^1(K^{\cdot}(f^{\infty})) \to 0$$

и при $q \geqslant 2$ изоморфизмы

$$H^q(U,\ \mathcal{O}_U) \simeq H^{q+1}(K^{\cdot}(f_1^{\infty}, \ldots, f_n^{\infty})).$$

В частности, предположим, что $f_1, \ldots, f_n$ образуют регулярную последовательность (и $n \geqslant 2$). Тогда

$$H^q(U, \mathcal{O}_U) = \begin{cases} A & \text{при } q=0, \\ 0 & \text{при } 0<q<n-1, \\ (A_{f_1}/A) \underset{A}{\otimes} \ldots \underset{A}{\otimes} (A_{f_n}/A) & \text{при } q=n-1. \end{cases}$$

Сходным образом устроены пучки $R^q j_* (\mathcal{O}_U)$ для любого открытого вложения j. При $0<q<\operatorname{depth} X-1$ они равны нулю, а при $\operatorname{depth} X-1 \leqslant q < \dim X$ обычно отличны от нуля и даже бесконечномерны. Подробнее об этом см. [46].

§ 2. Когомологии проективного пространства

2.1. Пучки на $\mathbf{P}^n$ и градуированные модули. Пусть $\mathbf{P} = \mathbf{P}^n$ — n-мерное проективное пространство над полем K. Более точно, будем считать $\mathbf{P}$ пространством прямых в векторном пространстве V и обозначим через $\pi : V \setminus \{0\} \to \mathbf{P}$ естественную проекцию.

Пусть теперь F — пучок на $\mathbf{P}$. С ним связан модуль $H^0(V \setminus \{0\}, \pi^* F)$ над кольцом многочленов $K[T_0, \ldots, T_n]$ (или, более инвариантно, над симметрической алгеброй $\operatorname{Sym}(V^*)$). Этот модуль обладает естественной градуировкой типа $\mathbf{Z}$. Связано это с тем, что группа K^* действует на пространстве $V \setminus \{0\}$ и на сечениях пучка $\pi^* F$. Компонента веса m нашего модуля состоит из таких глобальных сечений s пучка $\pi^* F$, что $s(t \cdot x) = t^m \cdot s(x)$ для $t \in K^*$ и $x \in V \setminus \{0\}$. При этом сечения F над $\mathbf{P}$ взаимно однозначно соответствуют элементам веса 0. Аналогично, элементы веса m соответствуют сечениям подкрученного пучка $F(m) = F \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}} \mathcal{O}(m)$, где $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(m)$ или $\mathcal{O}(m)$ — m-я тензорная степень обратимого тавтологического пучка $\mathcal{O}(1)$ на $\mathbf{P}$.

Аналогично обстоит дело и с высшими когомологиями. Для любого q пространство $H^q(\mathbf{P}, F(m))$ отождествляется с компонентой веса m градуированного (по тем же причинам) модуля $H^q(V \setminus \{0\}, \pi^* F)$. Это видно из совпадения (как градуированных модулей) комплексов стандартного покрытия (U_i) пространства $\mathbf{P}$ и покрытия $\pi^{-1}(U_i)$ для $V \setminus \{0\}$. Иначе говоря, мы получаем изоморфизм

$$H^q(\mathbf{P}, F(*)) = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} H^q(\mathbf{P}, F(m)) \simeq H^q(V \setminus \{0\}, \pi^* F),$$

2.2. Применение к обратимым пучкам. В случае $F = \mathcal{O}_{\mathbf{P}}$ доведем вычисления до конца. Для этого нам нужны модули $H^q(V \setminus \{0\}, \mathcal{O}_V)$, а они были найдены в п. 1.8 (см. также пример в п. 1.4). Пусть $T_0, \ldots, T_n$ — однородные координаты на $\mathbf{P}$. Они образуют регулярную последовательность в кольце многочленов $K[T_0, \ldots, T_n]$. Поэтому

$$H^q(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(*)) = \begin{cases} K[T_0, \ldots, T_n] & \text{при } q=0, \\ 0 & \text{при } 0<q<n, \\ \bigotimes\limits_{i=0}^{n} (K[T_i, T_i^{-1}]/K[T_i]) & \text{при } q=n. \end{cases}$$

Последнее пространство порождается мономами $T_0^{m_0} \cdot \ldots \cdot T_n^{m_n}$, где все $m_i<0$. Градуировка правой стороны задается обычной степенью.

В более развернутой и инвариантной форме можно написать

$$H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(m)) = \mathrm{Sym}^m(V^*) \text{ при } m \geqslant 0,$$

$$H^n(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(-n-1-k)) \simeq \mathrm{Sym}^k(V) \text{ при } k \geqslant 0;$$

остальные пространства $H^q(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(m))$ равны нулю. Соберем эти данные в таблицу:

$q \uparrow$ \ $m \rightarrow$		$-n-2$	$-n-1$	$-n$			-1	0	1	
n	S^2V	V	K	0	$\ldots$	0	0	0	0
1	0	0	0	$0 \; \vdots \; 0$	0	$0 \; \vdots \; 0$	0	0	0
0	0	0	0	0	$\ldots$	0	K	V^*	S^2V^*

Симметрия этой таблицы наводит на мысль о наличии некой двойственности, которая в более общем виде будет обсуждаться в § 5. Этим же вызвано отождествление $H^n(\mathbf{P}, \mathcal{O}(-n-1-k))$ с $\mathrm{Sym}^k V$. В самом деле, имеется естественное спаривание

$$H^0(\mathcal{O}(k)) \otimes H^n(\mathcal{O}(-n-1-k) \rightarrow H^n(\mathcal{O}(-n-1)) \simeq K,$$

порожденное умножением в когомологиях. Как легко проверить из явных формул, оно не вырожденно и позволяет отождествить пространство $H^n(\mathcal{O}(-n-1-k))$ с двойственным к $H^0(\mathcal{O}(k)) = \mathrm{Sym}^k V^*$.

Если какой-то пучок выражается в терминах пучков вида $\mathcal{O}(m)$, часто удается найти его когомологии.

Пример 1. На $\mathbf{P}=\mathbf{P}(V)$ имеется важная точная последовательность Эйлера (где Ω^1 — кокасательный пучок)

$$0\to\Omega^1_{\mathbf{P}}\to V^*\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1)\to\mathcal{O}_{\mathbf{P}}\to 0.$$

Переходя к когомологиям, получаем из предыдущих формул, что

$$H^q(\mathbf{P},\Omega^1_{\mathbf{P}})=\begin{cases}0 & \text{при } q\neq 1,\\ K & \text{при } q=1.\end{cases}$$

Возводя последовательность Эйлера в p-ю внешнюю степень, мы получаем точную последовательность

$$0\to\Omega^p_{\mathbf{P}}\to(\wedge^p V^*)\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-p)\to\Omega^{p-1}_{\mathbf{P}}\to 0.$$

Отсюда индукцией по p получаем (при $p\leqslant\dim\mathbf{P}$)

$$H^q(\mathbf{P},\Omega^p_{\mathbf{P}})=\begin{cases}0 & \text{при } q\neq p,\\ K & \text{при } q=p.\end{cases}$$

Склеивая предыдущие точные тройки, можно получить длинную точную последовательность пучков на $\mathbf{P}^n$

$$0\to\wedge^{n+1}V^*\otimes\mathcal{O}(-n-1)\to\ldots\to V^*\otimes\mathcal{O}(-1)\to\mathcal{O}\to 0.$$

Она начинается каноническим пучком $\omega_{\mathbf{P}}=\Omega^n_{\mathbf{P}}=\wedge^{n+1}V^*\otimes\otimes\mathcal{O}(-n-1)\simeq\mathcal{O}(-n-1)$, а далее идут ацикличные пучки, так что это — ацикличная резольвента $\omega_{\mathbf{P}}$.

Пример 2. Пусть X — гиперповерхность в $\mathbf{P}=\mathbf{P}^n$ степени d. Для $\mathcal{O}_X$, как пучка на $\mathbf{P}$, имеем резольвенту

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-X)\to\mathcal{O}_{\mathbf{P}}\to\mathcal{O}_X\to 0,$$

причем $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-X)\simeq\mathcal{O}(-d)$. Поэтому $H^0(X,\mathcal{O}_X)=K$, что, впрочем, очевидно из-за связности X; $H^q(X,\mathcal{O}_X)=0$ при $0<q<<\dim X$; $H^{n-1}(X,\mathcal{O}_X)\simeq H^n(\mathbf{P},\mathcal{O}(-d))$ и размерность его равна $(n!)^{-1}(d-1)(d-2)\cdot\ldots\cdot(d-n)$. Аналогично вычисляются когомологии пучков $\mathcal{O}_X(m)$ ([72]).

2.3. Применение к когерентным пучкам. Напомним ([5]), что квазикогерентный пучок на нётеровой схеме называется *когерентным*, если локально он порождается конечным числом локальных сечений. Иначе говоря, локально он имеет вид $\tilde{M}$, где модуль M имеет конечный тип. Таким образом, кроме ограничения на локальное строение, когерентность накладывает условие конечности.

Когерентный пучок на $\mathbf{P}$ может не порождаться своими глобальными сечениями. Например, у пучка $\mathcal{O}(-1)$ имеется только нулевое глобальное сечение. Однако легко показать, что после подходящей подкрутки на $\mathcal{O}(m)$ глобальных сечений у пучка $F(m)$ становится достаточно много, т. е. существует эпиморфизм $\mathcal{O}^N\to F(m)$. Откручивая обратно, мы видим, что любой когерентный пучок F на $\mathbf{P}$ является факторпучком пучка вида $\mathcal{O}(-m)^N$.

Этот факт аналогичен представлению модуля как фактормодуля свободного модуля и играет такую же роль. Предположим, что нам нужно доказать некое общее утверждение про когерентные пучки. Мы проверяем его сначала для пучков вида $\mathcal{O}(m)$, затем — для прямых сумм таких пучков и, наконец, пользуясь резольвентами из таких пучков, переносим утверждение на произвольные когерентные пучки. Продемонстрируем работу этого принципа на следующей теореме Серра:

Теорема. Пусть F — когерентный пучок на $\mathbf{P}$. Тогда а) пространство $H^q(\mathbf{P}, F)$ конечномерно для любого q;

б) $H^q(\mathbf{P}, F(m))=0$, если $q>0$, а m достаточно велико.

Из явных вычислений в п. 2.2 видно, что теорема верна для пучков $\mathcal{O}(m)$, а значит и для их прямых сумм. Далее — теорема верна, если $q>\dim \mathbf{P}$ — см. п. 1.5. Теперь рассуждаем убывающей индукцией по q. Возьмем точную последовательность

$$0\to G\to E\to F\to 0,$$

где E — сумма пучков вида $\mathcal{O}(m)$. Тогда в точной последовательности

$$H^q(E)\to H^q(F)\to H^{q+1}(G)$$

по краям стоят конечномерные пространства. Значит, и в середине пространство имеет конечную размерность, что доказывает а). Аналогично рассуждаем в случае б).

2.4. Регулярные пучки. Из теоремы Серра видно, что достаточно обильные пучки ацикличны. В какой мере верно обратное? Например, верно ли, что ацикличный пучок порождается глобальными сечениями? Пример пучка $\mathcal{O}(-1)$ показывает, что это не так. Вопрос будет поставлен более правильно, если следить не столько за $H^q(\mathbf{P}, F)$, сколько за $H^q(\mathbf{P}, F(-q))$.

Определение. Когерентный пучок F на $\mathbf{P}$ называется *регулярным* (по Кастельнуово—Мамфорду), если $H^q(\mathbf{P}, F(-q))=0$ для всех $q\geqslant 1$.

Например, пучок $\mathcal{O}(m)$ регулярен при $m\geqslant 0$.

Предложение. Пусть F — регулярный пучок на $\mathbf{P}$. Тогда F порождается глобальными сечениями, а $F(1)$ регулярен. В частности, пучок F ацикличен.

Проверим это, предполагая для простоты, что пучок F — плоский. Пусть H — произвольная гиперплоскость в $\mathbf{P}$. Умножая точную тройку $0\to\mathcal{O}(-H)\to\mathcal{O}\to\mathcal{O}_H\to 0$ тензорно на F, мы получаем тройку

$$0\to F(-1)\to F\to F_H\to 0,$$

снова точную в силу плоскости F. Мы утверждаем, что пучок F_H также регулярен. В самом деле, когомологии $H^q(F_H(-q))$ зажаты между $H^q(F(-q))$ и $H^{q+1}(F(-q-1))$, нулевыми по определению регулярности F. По предположению индукции F_H

порождается глобальными сечениями. В силу точности последовательности

$$H^0(\mathbf{P}, F)\to H^0(H, F_H)\to H^1(\mathbf{P}, F(-1))=0$$

мы получаем, что пучок F также порождается глобальными сечениями в точках гиперплоскости H. Но так как H произвольна, глобальные сечения порождают F. Далее, по индукции же пучок $F_H(1)$ регулярен на H. Из точной тройки $0\to F\to\to F(1)\to F_H(1)\to 0$ получаем, что группа $H^q(F(1-q))$ зажата между $H^q(F(-q))=0$ и $H^q(F_H(1-q))=0$. Поэтому пучок $F(1)$ также регулярен.

2.5. Эйлерова характеристика. Информацию о всех когомологиях пучка F часто удобно бывает свернуть в одно число

$$\chi(\mathbf{P}, F)=\sum_q(-1)^q \dim_K H^q(\mathbf{P}, F),$$

называемое *эйлеровой характеристикой* пучка F. Здесь мы пользуемся фактом конечномерности когомологий когерентного пучка. Основное свойство эйлеровой характеристики — аддитивность. Пусть дана точная последовательность когерентных пучков

$$0\to F\to G\to H\to 0.$$

Тогда $\chi(G)=\chi(F)+\chi(H)$. По этой причине $\chi(\ )$ вычисляется обычно просто (§ 4).

При помощи таблицы в п. 2.2 можно проверить, что эйлерова характеристика пучка $\mathcal{O}(m)$ задается формулой

$$\chi(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(m))=\frac{(m+n)\cdot\ldots\cdot(m+1)}{n!},$$

и как функция от m является многочленом степени $n=\dim\mathbf{P}$. Последний факт верен в более общем случае:

Предложение. Пусть F — когерентный пучок на $\mathbf{P}$. Тогда существует многочлен (*многочлен Гильберта*) $P_F(t)\in\mathbf{Q}[t]$, такой что $\chi(\mathbf{P}, F(m))=P_F(m)$ для всех целых m.

Доказывается это сравнением F с $F(-1)$. Отметим, что степень многочлена Гильберта P_F равна размерности носителя F. Вспомним ([5], гл. 3), что аналогичный факт имеет место для градуированного модуля $M=\bigotimes_\nu M_\nu$ конечного типа. Однако там многочлен Гильберта дает размерность M_ν лишь для больших ν. Учет когомологий позволил сделать утверждение верным при всех $\nu\in\mathbf{Z}$.

2.6. Релятивизация. Почти все изложенные в этом параграфе факты переносятся на тот случай, когда основное поле K заменяется произвольной нётеровой схемой S, а проективное пространство $\mathbf{P}$ заменяется относительным проективным пространством $\mathbf{P}_S$ или любым проективным расслоением $f:\mathbf{P}(E)\to S$. При этом пространства когомологий $H^q(\mathbf{P}, F)$ надо заменить пучками высших прямых образов $R^q f_*(F)$. В частности, пучки $R^q f_*(\mathcal{O}(m))$ локально свободны и имеют нужные ранги, как в п. 2.2. Теорема Серра из п. 2.3 переносится так: пучки $R^q f_*(F)$ всегда когерентны, а $R^q f_*(F(m))=0$ при $q>0$ и $m\gg 0$.

§ 3. Когомологии собственных морфизмов

3.1. Теорема конечности. Многие качественные результаты о когомологиях пучков на проективных пространствах или проективных расслоениях верны для любого собственного морфизма. Начиная с этого места мы все схемы считаем нётеровыми.

Теорема (Гротендик). Пусть $f: X\to Y$ — собственный морфизм схем, F — когерентный пучок на X. Тогда пучки $R^q f_* F$ на Y когерентны для любого q.

Следствие. Для когерентного пучка F на полном алгебраическом многообразии X пространства $H^q(X, F)$ конечномерны.

Объясним схему рассуждения в таких случаях. Так как утверждение локально по Y, схему Y можно считать аффинной. Если $f: X\to Y$ — проективный морфизм, то он разлагается на замкнутое вложение $X\hookrightarrow \mathbf{P}^n_Y$ и проекцию $\mathbf{P}^n_Y\to Y$; в этом случае когерентность следует из п. 2.6.

Случай произвольного собственного морфизма сводится к проективному морфизму таким трюком. По лемме Чжоу найдется проективная Y-схема $\bar f: \bar X\to Y$ и бирациональный проективный морфизм $\pi: \bar X\to X$. Индукция по размерности носителя F позволяет считать, что теорема верна для любого пучка на X с носителем, отличным от всего X. Теперь вместо пучка F на X рассмотрим пучок $\bar F=\pi^* F$ на $\bar X$. Они связаны спектральной последовательностью Лере

$$E_2^{p,q}=R^p f_*(R^q\pi_*\bar F)\Rightarrow R^{p+q}\bar f_*(\bar F).$$

Заметим, что пучки $E_2^{p,q}$ при $q\neq 0$ когерентны. В самом деле, из-за бирациональности π пучки $R^q\pi_*\bar F$ при $q\neq 0$ имеют носитель, отличный от X; кроме того, в силу проективности π они когерентны. Предельные пучки $R^{p+q}\bar f_*(\bar F)$ также когерентны в силу проективности морфизма $\bar f: \bar X\to Y$. Отсюда вытекает когерентность пучков $E_2^{p,0}=R^p f_*(\pi_*\bar F)$. Но пучок $\pi_*\bar F$ отличается от F на пучки с меньшим носителем, поэтому пучки $R^p f_*(F)$ также когерентны.

3.2. Теорема сравнения. Обсудим теперь следующий вопрос: пусть $f: X\to Y$ — собственный морфизм, F — когерентный пучок на X; как найти слой пучка $R^q f_* F$ в точке $y\in Y$? Интуитивно ясно, что этот слой должен быть тесно связан с когомологиями слоя $f^{-1}(y)$ морфизма f; можно ли сделать такую связь более точной?

Систематический подход к таким вопросам дает гомоморфизм замены базы — частный случай ситуации, рассмотренной в п. 1.7. Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал локального кольца $A=\mathcal{O}_{Y,g}$. Для целого $n\geqslant 0$ обозначим через X_n n-ю инфинитезимальную окрестность слоя $f^{-1}(y)$, т.е. $X\times_Y \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{m}^{n+1})$. Как топологическое пространство X_n совпадает с $X_0=f^{-1}(y)$, но отличается более обширным пучком функций. Кроме того, положим $F_n=F\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_{X_n}$; сечения этого пучка учитывают не только ограничение сечений F на X_0, но и все первые n частных производных. Гомоморфизм замены базы имеет тогда вид

$$\varphi_n:(R^q f_*F)_y\otimes A/\mathfrak{m}^{n+1}\to H^q(X_n, F_n).$$

В общем случае про него ничего сказать нельзя.

Ниже мы обсудим тот случай, когда пучок F — плоский. А сейчас вернемся к общей ситуации. Оказывается, в пределе эти гомоморфизмы φ_n превращаются в изоморфизмы.

Теорема (Гротендик). В приведенных выше обозначениях и предположениях предельные гомоморфизмы

$$\varphi_\infty:\varprojlim_n (R^q f_*F)\otimes A/\mathfrak{m}^{n+1}\xrightarrow{\sim}\varprojlim_n H^q(X_n, F_n)$$

являются изоморфизмами при любом q.

3.3. Эскиз доказательства. Слева стоит пополнение A-модуля $(R^q f_*F)_y$ в $\mathfrak{m}$-адической топологии. Заменяя схему Y на $\operatorname{Spec}\hat{A}$, можно считать, что Y — спектр полного локального кольца A, и доказывать совпадение $H^q(X, F)$ с $\varprojlim H^q(X_n, F_n)$. Как в п. 3.1, все сводится сначала к проективным морфизмам, а затем к $X=\mathbf{P}^N_A$.

Теперь работает принцип из п. 2.3. Во-первых, теорема верна для пучков $\mathcal{O}(m)$; на самом деле, в этом случае изоморфизмами являются уже φ_n. Во-вторых, используется убывающая индукция по q; при $q>N$ все когомологии — нулевые. Поэтому предположим, что для любых q', больших q, теорема уже верна. Возьмем точную тройку пучков

$$0\to G\to E\to F\to 0, \qquad (*)$$

где E — прямая сумма пучков вида $\mathcal{O}(m)$. Пусть $J=\mathfrak{m}\mathcal{O}_X$ — пучок идеалов X_0 в X. Предположим на время, что последовательности

$$0\to G/J^nG\to E/J^nE\to F/J^nF\to 0, \qquad (*_n)$$

полученные из $(*)$ умножением на $\mathcal{O}/J^n$, точны. Тогда мы имеем коммутативную диаграмму

$$
\begin{array}{ccccc}
H^q(G) & \longrightarrow & H^q(E) & \longrightarrow & H^q(F) \longrightarrow \\
\downarrow \varphi_G & & \downarrow \varphi_E & & \downarrow \varphi_F \\
\varprojlim H^q(G/J^nG) & \to & \varprojlim H^q(E/J^nE) & \to & \varprojlim H^q(F/J^nF) \to
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\longrightarrow H^{q+1}(G) & \longrightarrow & H^{q+1}(E) \\
\downarrow \varphi'_G & & \downarrow \varphi'_E \\
\to \varprojlim H^{q+1}(G/J^nG) & \to & \varprojlim H^{q+1}(E/J^nE).
\end{array}
$$

Верхняя строчка точна как длинная последовательность когомологий тройки ($*$). Нижняя строчка получается как проективный предел точных последовательностей когомологий троек ($*_n$) И хотя в общем случае $\varprojlim$ не сохраняет точность, в данном случае все в порядке из-за артиновости модулей $H^*(G/J^nG)$ и т. п. Таким образом, нижняя строчка также точна. Уже говорилось, что φ_E и φ'_E — изоморфизмы; φ'_G — изоморфизм по предположению индукции. Поиск по диаграмме дает сначала сюрьективность φ_F. А так как это верно для любого модуля, φ_G также сюръективен. После этого уже легко получается инъективность φ_F.

Приступим теперь к общему случаю. Конечно, ($*_n$) в общем случае не точна, зато всегда точна последовательность

$$0 \to G/G \cap J^nE \to E/J^nE \to F/J^nF \to 0.$$

Поэтому достаточно убедиться, что

$$\varprojlim H^*(G/G \cap J^nE) \simeq \varprojlim H^*(G/J^nG).$$

Это уже сравнительно просто вытекает из утверждения, что фильтрации J^nG и $G \cap J^nE$ на пучке G эквивалентны, т. е. что

$$G \cap J^mE \subset J^nG \subset G \cap J^nE$$

для $m \gg n$. Последнее же есть частный случай более точной леммы Артина—Риса из коммутативной алгебры ([47], [54]).

3.4. Теорема о формальных функциях. Наиболее известные приложения теоремы сравнения относятся к нульмерным когомологиям пучка $\mathcal{O}_X$ (хотя для доказательства, как мы видели, надо привлекать все когомологии). В этом случае теорема сравнения дает изоморфизм

$$(\widehat{f_*\mathcal{O}_X})_y \simeq \varprojlim H^0(\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}^n\mathcal{O}_X).$$

Элемент правого кольца — согласованная система (s_n) инфинитезимальных ростков функций вдоль слоя $f^{-1}(y)$, т. е. «формальная функция» на формальной окрестности слоя $f^{-1}(y)$. Теорема утверждает, что для любого n существуют настоящая (по Зарисскому) окрестность $U \subset X$ слоя $f^{-1}(y)$ и регулярная функция $\tilde{s}$ на U, совпадающая с s_n до n-го порядка. Иначе говоря, формальные функции сколь угодно точно аппроксимируются регулярными функциями.

В [5] мы уже приводили применение этого факта к теореме о связности Зарисского. Другие применения носят аналогичный характер — нечто, заданное в формальной окрестности, продолжается на настоящую окрестность по Зарисскому. Применения этой техники к теоремам типа Лефшеца даны в замечательной работе [46].

3.5. Непрерывные семейства пучков. Произвольный морфизм конечного типа $f: X \to Y$ можно рассматривать как семейство алгебраических схем $X_y = f^{-1}(y)$, $y \in Y$, каждая — над своим полем $k(y)$. В общем случае оно не является «непрерывным»; например, размерность отдельных слоев может превышать размерность типичных, общих слоев. Правильную формализацию интуитивного представления о «непрерывности» семейства $(X_y)_{y \in Y}$ дает требование плоскости морфизма $f: X \to Y$ (см. [5], гл. 4).

Аналогичное понятие можно ввести и для семейства пучков на семействе схем (X_y). Пусть даны морфизм $f: X \to Y$ и когерентный пучок F на X. Тогда на каждом слое $X_y = X \underset{Y}{\times} \operatorname{Spec} k(y$ индуцируется свой пучок $F_y = F \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y)$ (или $F \underset{Y}{\boxtimes} k(y)$ в обозначениях п. 1.7). Это семейство пучков (F_y), $y \in Y$, на семействе схем (X_y) считается «непрерывным», если пучок F — плоский над Y. Мы попытаемся убедить, что это определение действительно отвечает интуитивному представлению о непрерывности.

3.6. Теорема о полунепрерывности. Всюду далее в этом параграфе $f: X \to Y$ — снова собственный морфизм, а F — когерентный пучок на X, плоский над Y. Для точки $y \in Y$ обозначим через $h^q(y, F)$ размерность векторного пространства $H^q(X_y, F_y)$ над полем $k(y)$. Нас будет интересовать, как $h^q(y, F)$ зависит от точки $y \in Y$. Начнем с двух примеров.

Пример 1. Пусть C — эллиптическая кривая. Рассмотрим на ней семейство пучков $\mathcal{O}_C(P-Q)$, зависящее от точек $P, Q \in C$. Если точки P и Q различны, то $H^0(C, \mathcal{O}(P-Q)) = 0$. В самом деле, в противном случае существовал бы морфизм $C \to \mathbf{P}^1$ степени 1. Если же $P = Q$, то $H^0(C, \mathcal{O}(P-P)) = H^0(C, \mathcal{O}) = K$. Мы видим, что при специализации $h^0(y)$ может подскакивать.

Пример 2. Пусть E — локально свободный пучок ранга 2 на проективной прямой $\mathbf{P}^1$. Можно показать, что E изоморфен прямой сумме $\mathcal{O}(m) \oplus \mathcal{O}(m')$; пара чисел (m, m') называется *типом* E. Можно явно построить семейство (E_t) таких двумерных пучков на $\mathbf{P}^1$, что E_0 имеет тип $(-2, 0)$, тогда как при $t \neq 0$ пучки E_t имеют тип $(-1, -1)$. Из приведенных в п. 2.2 вычислений получаем, что $H^0(\mathbf{P}^1, E_t) = H^1(\mathbf{P}^1, E_t) = 0$ при $t \neq 0$, тогда как $H^0(\mathbf{P}^1, E_0) = K$ и $H^1(\mathbf{P}^1, E_0) \simeq K$. Таким образом, и здесь при $t=0$ происходит подскок как h^0, так и h^1. Следующая теорема показывает, что это — общее явление:

Теорема. Для плоского пучка F функция $h^q(\cdot, F)$ полунепрерывна сверху на пространстве Y.

В частности, если $H^q(X_y, F_y)=0$ для некоторой точки y, то это же верно и в некоторой окрестности y. С помощью теоремы сравнения (п. 3.2) отсюда легко получить, что пучок $R^q f_* F$ — нулевой в этой же окрестности.

Утверждение теоремы локально по Y, поэтому можно считать схему Y аффинной и равной $\operatorname{Spec} A$. Доказательство теоремы о полунепрерывности и других подобных фактов основано на следующем трюке, который может показаться техническим.

3.7. Лемма об эквивалентном комплексе. В приведенных выше условиях эта лемма утверждает существование комплекса A-модулей $K^\cdot$, который обладает двумя свойствами:

а) он состоит из плоских A-модулей конечного типа K^q,

б) для любого A-модуля M

$$H^q(X, F \otimes_A M) \simeq H^q(K^\cdot \otimes_A M).$$

Тем самым вместо пучка F на X можно иметь дело с комплексом пучков на Y, или комплексом A-модулей. Конечно, тут нет особенно нового; мы уже видели, что комплекс $C^\cdot(\mathcal{U}, F)=C^\cdot$ аффинного покрытия схемы X вполне заменяет пучок F и состоит из плоских модулей, если F — плоский. Новость только в конечности K^q. При построении такого комплекса ([70]) используется конечность когомологий $H^*(C^\cdot)=H^*(X, F)$, установленная в п. 3.1. Покажем теперь, как эта лемма работает.

Элементарное звено комплекса $K^\cdot$ — гомоморфизм

$$d^q : K^q \to K^{q+1}$$

двух A-модулей, которые можно считать свободными модулями конечного ранга. Иначе говоря, d^q — это матрица с коэффициентами из кольца A. Специализация в точке $y \in Y$ (т. е. применение гомоморфизма $A \to A/\mathfrak{m}_y = k(y)$) дает матрицу d_y^q над полем $k(y)$. Ясно, что ранг матрицы d_y^q полунепрерывно снизу зависит от y, тогда как коранг, т. е. размерность ядра d_y^q, зависит от y полунепрерывно сверху. А так как

$$H^q(X, F \otimes_A k(y)) = H^q(K^\cdot \otimes\ k(y)) = \operatorname{Ker} d_y^q / \operatorname{Im} d_y^{q-1},$$

мы получаем теорему о полунепрерывности (3.6).

Предположим однако, что функция $h^q(\cdot, F)$ не только полунепрерывна сверху, но и непрерывна (т. е. локально постоянна). Тогда (локально) постоянны ранги матриц d_y^q и d_y^{q-1}. Если к тому же схема Y, или кольцо A, — приведенные, то модули $\operatorname{Ker} d^q$

и $\operatorname{Im} d^{q-1}$ выделяются в K^q прямыми слагаемыми. А так как $\operatorname{Ker} d^q/\operatorname{Im} d^{q-1} = H^q(K^\cdot) = H^q(X, F)$, мы получаем

Предложение. Пусть схема Y приведена, а пучок F — плоский над Y. Если функция $h^q(\cdot, F)$ локально постоянна на Y, то пучок $R^q f_* F$ локально свободен и для любой точки $y \in Y$ гомоморфизм замены базы

$$(R^q f_* F) \otimes_A k(y) \to H^q(X_y, F_y)$$

является изоморфизмом.

3.8. **Постоянство эйлеровой характеристики.** Другим следствием существования комплекса $K^\cdot$ является инвариантность эйлеровой характеристики пучков F_y из непрерывного семейства.

Предложение. Если пучок F — плоский над Y, то $\chi(X_y, F_y)$ локально постоянна как функция от $y \in Y$.

Действительно,

$$\chi(X_y, F_y) = \sum_q (-1)^q h^q(y, F) = \sum_q (-1)^q \dim (K^q \otimes k(y)) = \\ = \sum_q (-1)^q \operatorname{rk} K^q.$$

Таким образом, не случайно в примере 2 подскок h^0 и h_1 произошел одновременно и уравновесил друг друга. Если $X = \mathbf{P}_Y$, мы получаем также инвариантность многочлена Гильберта P_{F_y}. Можно показать ([54]), что верно и обратное: если база Y приведена и многочлены Гильберта P_{F_y} семейства пучков (F_y) не зависят от $y \in Y$, то семейство—непрерывное.

Дополнительные сведения о замене базы см. в [47], § 7.

§ 4. Теорема Римана — Роха

4.1. **Теорема Римана—Роха для кривой.** Начнем с классической задачи. Пусть X — гладкая проективная кривая над алгебраически замкнутым полем, $D = \sum_{P \in X} n_P [P]$ — дивизор на X. Проблема Римана состоит в отыскании пространства $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$. Элементы этого пространства интерпретируются как рациональные функции f на X с ограничениями на порядки нулей и полюсов: $\operatorname{ord}_P(f) \geqslant -n_P$ для любой точки $P \in X$.

Как мы знаем из предыдущего параграфа, пространство $H^0(X, \mathcal{O}(D))$ и его размерность $h^0(D)$ довольно деликатно зависят от дивизора D. Положение, однако, сильно упрощается, если следить за эйлеровой характеристикой

$$\chi(X, \mathcal{O}_X(D)) = \dim H^0(X, \mathcal{O}(D)) - \dim H^1(X, \mathcal{O}(D)).$$

Из п. 3.8 мы знаем, что $\chi(\mathcal{O}(D))$ зависит лишь от дискретных инвариантов дивизора D. Один такой дискретный инвариант сразу напрашивается — это степень дивизора $\deg D = \sum_P n_P$. И действительно, легко показать (сравнивая дивизор D с дивизором $D + [P]$, где $P \in X$), что

$$\chi(X, \mathcal{O}_X(D)) = \deg D + \chi(X, \mathcal{O}_X).$$

Этот факт и называется теоремой Римана—Роха. Точнее, Риман доказал вытекающее из этой формулы неравенство $h^0(D) \geqslant \geqslant \deg D + 1 - g$, где g — род кривой, а Рох интерпретировал $h_1(\mathcal{O}(D))$ как $h^0(\mathcal{O}(K - D))$ (об этом речь пойдет в следующем параграфе).

4.2. Общая проблема Римана. Пусть теперь X — произвольное полное многообразие, F — когерентный пучок на X. Как мы знаем, эйлерова характеристика

$$\chi(X, F) = \sum_q (-1)^q \dim H^q(X, F)$$

не меняется при непрерывных изменениях X и F. Поэтому в принципе должна существовать формула, выражающая $\chi(X, F)$ в терминах «дискретных» инвариантов X и F. В случае с кривыми это были род кривой X и степень дивизора D. В общем случае мы должны были бы связать с пучком F какие-то символы, произвести с ними алгебраические манипуляции и в результате получить число $\chi(X, F)$.

Казалось бы, что (в проективном случае) такими удобными символами могли бы служить многочлены Гильберта P_F. Однако теория пошла по другому пути, не апеллируя к вложению в проективное пространство. С многообразием X связывается кольцо $A(X)$ вместе с линейным функционалом $\deg : A(X) \to \mathbf{Q}$ и некоторым выделенным элементом $\mathrm{Td}(X)$. С каждым пучком F на X связывается элемент $\mathrm{ch}(F) \in A(X)$. После этого нужная формула для $\chi(X, F)$ получает вид

$$\chi(X, F) = \deg(\mathrm{ch}(F) \cdot \mathrm{Td}(X)).$$

Во всяком случае, в таком виде получил ее Хирцебрух (для комплексных проективных многообразий). В качестве кольца $A(X)$ он использовал кольцо сингулярных когомологий $H^*(X, \mathbf{Q})$. Функционал $\deg$ получался из естественного отождествления $H^{2n}(X, \mathbf{Q})$ с $\mathbf{Q}$, где $n = \dim X$. Элементы $\mathrm{ch}(F)$ и $\mathrm{Td}(X) = \mathrm{td}(T_X)$, где T_X — касательный пучок на X, строились с помощью классов Чженя.

В абстрактном случае вместо кольца сингулярных когомологий предлагается использовать кольцо Чжоу $A(X)$ алгебраических циклов на X ([5], гл. 3). Объясним кратко, как в этом случае строятся классы Чженя.

4.3. Классы Чженя. Пусть E — локально свободный пучок ранга r на гладком алгебраическом многообразии X. С ним связано проективное расслоение $\pi : \mathbf{P}(E) \to X$ и тавтологический обратимый пучок $\mathcal{O}(1)$ на $\mathbf{P}(E)$. Пусть ξ — соответствующий пучку $\mathcal{O}(1)$ класс дивизоров в $A^1(\mathbf{P}(E))$. Известно ([5], гл. 3), что $A(\mathbf{P}(E))$ как модуль над кольцом $A(X)$ свободно порождается элементами $1, \xi, \ldots, \xi^{r-1}$. Поэтому ξ^r выражается через этот базис:

$$c_0\xi^r - c_1\xi^{r-1} + \ldots + (-1)^r c_r \xi^0 = 0,\ c_0 = 1,\ c_i \in A^i(X).$$

Коэффициенты этого разложения $c_i = c_i(E)$ называются *классами Чженя пучка E*. *Полным классом Чженя* называется элемент

$$c(E) = c_0(E) + c_1(E) + \ldots + c_r(E) \in A(X).$$

Классы Чженя удовлетворяют обычным формальным условиям:

1. Функториальность. Для любого морфизма $f: Y \to X$

$$c(f^*E) = f^*c(E).$$

2. Формула Уитни. Для точной тройки $0 \to E' \to E \to \to E'' \to 0$

$$c(E) = c(E') \cdot c(E'').$$

3. Нормализация. Для дивизора D на X

$$c(\mathcal{O}_X(D)) = 1 + D.$$

В частности, если пучок E изоморфен прямой сумме обратимых пучков $\mathcal{O}(D_1), \ldots, \mathcal{O}(D_r)$, то $c(E) = \prod\limits_i (1 + D_i)$. Удобно считать что любой пучок E обладает разложением $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} \alpha_i$ на «кварки» α_i. Дело в том, что в окончательные формулы «кварки» α_i входят лишь в виде симметричных выражений типа $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r, \ldots$ $\ldots, \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_r$, которые равны $c_1(E), \ldots, c_r(E)$.

Пример 1. Из точной последовательности Эйлера на $\mathbf{P}^n$

$$0 \to \Omega^1_{\mathbf{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-1)^{n+1} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \to 0$$

видно, что $c(\Omega^1_{\mathbf{P}^n}) = c(\mathcal{O}(-1)^{n+1}) = (1-H)^{n+1}$, где H — класс гиперплоскости в $\mathbf{P}^n$. Аналогично, $c(T_{\mathbf{P}^n}) = (1+H)^{n+1}$.

Пример 2. Пусть X — n-мерное абелево многообразие, вложенное в $\mathbf{P}^m$. Тогда $m \geqslant 2n$.

В самом деле, возьмем точную последовательность пучков на X

$$0 \to T_X \to T_{\mathbf{P}^m}|_X \to N \to 0,$$

где T_X — касательный пучок к X, а $N = N_{X|\mathbf{P}}$ — нормальный пучок к X в $\mathbf{P}^m$. Так как пучок T_X тривиален,

$$c(N) = c(T_{\mathbf{P}}|_X) = i^*c(T_{\mathbf{P}}) = (1+h)^{m+1},$$

где $i:X\hookrightarrow \mathbf{P}^m$ — вложение, а $h=i^*H$. В частности, $c_n(N)=\binom{m+1}{n}h^n$ отлично от нуля, ибо $\deg h^n=\deg X$. Поэтому и ранг пучка N, равный $m-n$, не меньше n, откуда $m\geqslant 2n$.

Предположим теперь, что $m=2n$. Можно показать, что $(X\cdot X)_{\mathbf{P}^m}=\deg c_n(N)$. Так как $[X]=\deg X\cdot[H]^n$, мы получаем что $\deg X=\binom{2n+1}{n}$. Например, абелева поверхность в $\mathbf{P}^4$ должна иметь степень 10. Такая поверхность была построена Мамфордом и Хорроксом ([59]).

Вернемся к классам Чженя. *Характер Чженя* $\mathrm{ch}(E)$ локально свободного пучка E задается формальным выражением

$$\mathrm{ch}(E)=\sum_{i=1}^{r}e^{\alpha_i},$$

где $c(E)=\prod_{i=1}^{r}(1+\alpha_i)$, или, в терминах классов Чженя E,

$$\mathrm{ch}(E)=\mathrm{rk}\,E+c_1(E)+\frac{1}{2}(c_1(E)^2-2c_2(E))+\ldots$$

Характер Чженя переводит прямую сумму пучков в сумму, а тензорное произведение — в произведение.

Класс Тодда $\mathrm{td}(E)$ пучка E задается формальным выражением

$$\mathrm{td}(E)=\prod_{i=1}^{r}\frac{\alpha_i}{1-e^{-\alpha_i}}=\prod_{i=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha_i^{k-1}}{k!}\right),$$

где α_i имеют тот же смысл. В терминах классов Чженя

$$\mathrm{td}(E)=1+\frac{1}{2}c_1(E)+\frac{1}{12}(c_1(E)^2+c_2(E))+\ldots$$

Так как в выражения для ch и td входят знаменатели, это — элементы кольца $A(X)_{\mathbf{Q}}=A(X)\otimes\mathbf{Q}$.

4.4. Теорема Римана—Роха—Хирцебруха. Обозначим через deg гомоморфизм $A(X)_{\mathbf{Q}}\to\mathbf{Q}$, который циклу α сопоставляет степень 0-мерной компоненты α.

Теорема (Хирцебрух). Пусть X — неособое проективное многообразие, E — локально свободный пучок на X. Тогда

$$\chi(X,E)=\deg(\mathrm{ch}(E)\cdot\mathrm{td}(T_X)).$$

Отметим несколько частных случаев.

Пример 1. Пусть X — кривая с каноническим классом K. Тогда для локально свободного пучка E на X

$$\chi(X,E)=-\frac{\mathrm{rk}\,E}{2}\cdot\deg K+\deg c_1(E).$$

В частности, $\deg K=-2\chi(X,\mathcal{O}_X)$ — четное число и

$$\chi(X, \mathcal{O}(D)) = \deg D + \chi(X, \mathcal{O}_X).$$

Пример 2. Пусть X — поверхность, $c_i = c_i(T_X)$. Тогда $c_0 = 1$; $c_1 = -K$, где K — канонический дивизор на X; c_2 — это уже новый инвариант поверхности. Грубо говоря, c_2 равно числу нулей «общего» векторного поля на X. Имеем

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}(K^2 + c_2),$$

так что $K^2 + c_2$ делится на 12. Для любого дивизора D на X

$$\chi(X, \mathcal{O}_X(D)) = \frac{1}{2} D(D-K) + \chi(X, \mathcal{O}_X).$$

Для произвольного локально свободного пучка E формула дает

$$\chi(X, E) = \operatorname{rk} E \cdot \chi(X, \mathcal{O}_X) - \frac{1}{2} K \cdot c_1(E) + \frac{1}{2}(c_1(E)^2 - 2c_2(E)).$$

Пример 3. Для любого многообразия $\chi(X, \mathcal{O}_X) = \deg \operatorname{td}(T_X)$ — целое число. Это означает наличие каких-то соотношений делимости между классами Чженя c_i многообразия X. Вот более конкретный факт: пусть X — n-мерное абелево многообразие; так как касательный пучок T_X тривиален, $\operatorname{td}(T_X) = 1$; поэтому для любого дивизора D на X

$$\chi(X, \mathcal{O}(D)) = \frac{1}{n!}(D \cdot \ldots \cdot D)_X,$$

так что $(D^n)_X$ делится на $n!$. (На эту тему см. дополнение Шварценбергера к книге [58].)

Пример 4. Для проективного пространства $\mathbf{P}^n$ $\operatorname{td}(T_{\mathbf{P}^n}) = \left(\frac{\xi}{1-e^{-\xi}}\right)^{n+1}$. Поэтому для пучка $\mathcal{O}(m)$ получаем формулу

$$\binom{n+m}{n} = \deg\left(e^{m\xi} \cdot \left(\frac{\xi}{1-e^{-\xi}}\right)^{n+1}\right).$$

Ее можно проверить непосредственно: справа стоит коэффициент при z^n в формальном ряду $\frac{z^{n+1}e^{mz}}{(1-e^{-z})^{n+1}}$, т. е. вычет дифференциала $\frac{e^{mz}dz}{(1-e^{-z})^{n+1}}$ в точке $z=0$; надо сделать замену переменных $u = 1 - e^{-z}$ и получить дифференциал $\frac{du}{u^{n+1}(1-u)^{m+1}}$.

4.5. Теорема Римана—Роха—Гротендика. Расскажем теперь про обобщение формулы Хирцебруха, сделанное Гротендиком. Гротендик заметил, что, в силу аддитивности как эйлеровой характеристики, так и характера Чженя, вместо локально свободных пучков E можно рассматривать произвольные когерентные пучки F. Можно показать, что на гладком многообразии любой когерентный пучок F обладает локально свободной резольвентой

$$0 \to E_r \to \ldots \to E_1 \to E_0 \to F \to 0.$$

После этого можно положить $\mathrm{ch}(F) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \mathrm{ch}(E_i)$.

И вообще, формула имеет смысл не только для «чистых» пучков, но и для их «разностей» $F-G$. Поэтому вместо пучков E или F можно подставлять элементы кольца Гротендика $K(X)$, построенного по когерентным (или локально свободным — для гладкого X разницы нет) пучкам на X.

Следующее замечание состоит в том, что эйлерову характеристику $\chi(X, F)$ можно интерпретировать как характер Чженя ch. А именно — как характер Чженя элемента $\Sigma(-1)^q H^q(X, F)$ в кольце $K(Y)$, где Y — точка. В самом деле, в случае одноточечного пространства ch — это просто размерность векторного пространства. Заметим, что и deg интерпретируется как гомоморфизм прямого образа $f_*: A(X)_{\mathbf{Q}} \to A(Y)_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}$. Это приводит к следующей более общей формулировке теоремы Римана—Роха:

Пусть $f: X \to Y$ — собственный морфизм гладких многообразий. Для пучка F на X положим $f_k(F) = \Sigma(-1)^q R^q f_*(F)$. Это приводит к гомоморфизму (аддитивному) $f_k: K(X) \to K(Y)$. Формула Римана—Роха понимается теперь как правило для коммутирования характера Чженя ch с прямыми образами.

Теорема (Гротендик). Для любого $\alpha \in K(X)$

$$\mathrm{ch}(f_k\alpha) \cdot \mathrm{td}(T_Y) = f_*(\mathrm{ch}(\alpha) \cdot \mathrm{td}(T_X)).$$

4.6. Принцип доказательства. Как часто бывает, общую формулу доказать даже легче, чем частную, — она сама себе помогает. В случае теоремы Гротендика это проявляется в том, что формула относится к морфизму, а не к отдельному многообразию. Легко понять, что если она верна для морфизмов $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$, то она верна и для их композиции $g \circ f: X \to Z$. По существу это следует из спектральной последовательности Лере, дающей соотношение $(g \circ f)_k = g_k \circ f_k$.

Теперь любой морфизм f разлагается на замкнутое вложение $i: X \to \mathbf{P}^n_Y$ и проекцию $g: \mathbf{P}^n_Y \to Y$, для которых формула проверяется отдельно.

Проекции. Как и для кольца Чжоу, проверяется, что кольцо $K(\mathbf{P}^n \times Y)$ порождается над $K(Y)$ классами обратимых пучков $\mathcal{O}(m)$ (Кстати, длинная точная последовательность примера 1 из п. 2.2 дает соотношение между $\mathcal{O}(m)$ в $K(\mathbf{P}^n)$.) Поэтому формулу достаточно проверить для пучков $\mathcal{O}(m)$, что делается непосредственно, как в примере 4 из п. 4.4.

Вложения. С помощью деформации к нормальному расслоению все сводится к случаю вложения X как нулевого сечения в некоторое векторное расслоение $V(E)$. Пользуясь принципом расщепления, можно было бы даже считать, что пучок E на X обратим. После этого вновь все завершается прямым вычислением.

(Дальнейшие обобщения теоремы Римана—Роха на схемы с особенностями, а также связь с высшей K-теорией см. в [7], [34], [35], [52].)

§ 5. Теория двойственности

5.1. Эвристические замечания. Формула Римана—Роха обладает явной симметрией относительно половинки канонического класса K. Так, на кривой $\chi(\mathcal{O}(D))=\deg D-\frac{1}{2}\deg K$, откуда $\chi(\mathcal{O}(K-D))=-\chi(\mathcal{O}(D))$. На поверхности $\chi(\mathcal{O}(D))=$ $=\chi(\mathcal{O}(K-D))$ и т. д. Это наводит на мысль, что размерности пространств $H^i(\mathcal{O}(D))$ и $H^{n-i}(\mathcal{O}(K-D))$ совпадают. Теория двойственности подтверждает это предположение, устанавливая для гладкого n-мерного многообразия X естественные изоморфизмы

$$H^{n-q}(X,\ \Omega_X^n(-D))\xrightarrow{\sim} H^q(X,\ \mathcal{O}_X(D))^*.$$

Эти изоморфизмы возникают из умножения в когомологиях

$$H^q(X,\ \mathcal{O}_X(D))\times H^{n-q}(X,\ \Omega_X^n(-D))\to H^n(X,\ \Omega_X^n)$$

и изоморфизма следа

$$H^n(X,\ \Omega_X^n)\xrightarrow{\sim} K.$$

5.2. Двойственность на кривой. Объясним, откуда берется изоморфизм следа и двойственность в случае гладкой проективной кривой X. По существу, такая двойственность была установлена Рохом.

Пусть S — эффективный дивизор на X без кратных компонент, т. е. набор нескольких различных точек. Пучок $\Omega_X^1(S)=$ $=\Omega_X^1\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_X(S)$ можно понимать как пучок дифференциалов с простыми (или логарифмическими) полюсами в точках S. Для каждой точки $P\in S$ можно определить вычет такой формы. Представим локально форму в виде $a\frac{dt}{t}$, где t — локальный параметр в точке P; тогда ее вычет равен $a(P)$ — значению функции a в P. Легко понять, что вычет не зависит от выбора t и дает точную последовательность пучков

$$0\to\Omega_X^1\to\Omega_X^1(S)\xrightarrow{\mathrm{res}}\mathcal{O}_S\to 0.$$

Если S состоит из достаточно большого числа точек, то пучок $\Omega^1(S)$ ацикличен (см. п. б) теоремы из п. 2.3). Поэтому в когомологиях получаем точную последовательность

$$H^0(X, \Omega_X^1(S)) \xrightarrow{\text{res}} H^0(X, \mathcal{O}_S) \to H^1(X, \Omega_X^1) \to 0.$$

Возьмем теперь на пространстве $H^0(X, \mathcal{O}_S) = K^S$ линейный функционал — сумму координат. Мы утверждаем, что на образе $H^0(X, \Omega^1(S))$ этот функционал равен нулю и, значит, определяет функционал (отображение следа) $H^1(X, \Omega_X^1) \to K$. Это утверждение есть не что иное, как классическая

Лемма о вычетах. Для формы $\omega \in H^0(X, \Omega_X^1(S))$

$$\sum_{P \in S} \text{res}_P(\omega) = 0.$$

Устанавливается это так: возьмем проекцию $X \to \mathbf{P}^1$, при которой S отображается в точку $\infty \in \mathbf{P}^1$; гомоморфизм следа

$$\text{tr}: H^0(X, \Omega_X^1(S)) \to H^0(\mathbf{P}^1, \Omega_{\mathbf{P}^1}^1(\infty))$$

сохраняет сумму вычетов; с другой стороны, $H^0(\mathbf{P}^1, \Omega^1(\infty)) = 0$

Итак, мы получили (ненулевой) функционал следа

$$H^1(X, \Omega_X^1) \to K.$$

Аналогично для любого дивизора D получается вложение

$$H^0(\mathcal{O}_X(D)) \hookrightarrow H^1(\Omega_X^1(-D))^*.$$

То, что это—изоморфизм, устанавливается с помощью формулы Римана — Роха.

Следствие. Для связной кривой X пространство $H^1(X, \Omega_X^1)$ одномерно.

5.3. Двойственность Серра. Аналогично можно получить двойственность для n-мерных многообразий (гладких, проективных и неприводимых). Возьмем достаточно обильный и гладкий (по теореме Бертини) дивизор $Y \subset X$. Пользуясь вычетом Пуанкаре, мы получаем точную тройку пучков

$$0 \to \Omega_X^n \to \Omega_X^n(Y) \to \Omega_Y^{n-1} \to 0.$$

Пользуясь ацикличностью $\Omega_X^n(Y)$, мы по индукции получаем изоморфизм следа $H^n(X, \Omega_X^n) = H^{n-1}(Y, \Omega_Y^{n-1}) \simeq K$. Умножение в когомологиях

$$H^q(X, E) \times H^{n-q}(X, \Omega_X^n \otimes E^*) \to H^n(X, \Omega_X^n)$$

дает гомоморфизмы двойственности для любого пучка E:

$$H^{n-q}(X, \Omega_X^n \otimes E^*) \to H^q(X, E)^*.$$

Теорема. Для локально свободного пучка E эти гомоморфизмы являются изоморфизмами.

Объясним, как эта теорема доказывается в случае $X=\mathbf{P}^n$. Если пучок E обратим, двойственность видна из явных вычислений в п. 2.2. Общий случай устанавливается, как обычно: представляя E как факторпучок прямой суммы пучков $\mathcal{O}(m)$, используем убывающую индукцию по размерности когомологий.

Доказательство для произвольного X см. ниже в п. 5.6. Заметим, что теорема двойственности верна и для гладких полных многообразий ([56]).

Следствие 1. $H^q(X, E(-m))=0$ при $q<n$ и $m\gg 0$.

Следствие 2. $H^q(X, \Omega_X^p)\simeq H^{n-q}(X, \Omega_X^{n-p})$.

5.4. Теорема Ходжа об индексе. Приведем одно применение теорем Римана—Роха и двойственности к проективным поверхностям.

Теорема. Пусть H — произвольное гиперплоское сечение поверхности X и D — такой дивизор на X, что индекс пересечения (D, H) равен 0. Тогда $(D, D)\leqslant 0$, причем если $(D, D)=0$, то D численно эквивалентен нулю (т. е. $(D, C)=0$ для любой кривой $C\subset X$).

Дадим иную формулировку, поясняющую название. Если профакторизовать группу дивизоров $\operatorname{Div} X$ по дивизорам численно эквивалентным нулю, получится абелева группа $N(X)$ с невырожденным скалярным произведением-пересечением $N(X)\times N(X)\to\mathbf{Z}$. Теорема об индексе утверждает, что на ортогональном дополнении к H это скалярное произведение отрицательно определено.

Предварительно установим следующий факт:

Лемма. Пусть C — дивизор на поверхности X, причем $(C.H)>0$ и $(C.C)>0$. Тогда при больших n дивизор nC линейно эквивалентен эффективному дивизору.

Для этого заметим сначала, что $h^0(K-nC)=0$ при больших n. В самом деле, в противном случае класс дивизора $K-nC$ содержал бы эффективный цикл, тогда $(K-nC.H)\geqslant 0$ и $(K.H)\geqslant n(C.H)>0$.

По двойственности Серра $h^2(nC)=0$ для $n\gg 0$. Применяя формулу Римана—Роха, получаем

$$h^0(nC)+h^2(nC)\geqslant \frac{1}{2}(C.C)n^2-\frac{1}{2}(C.K)n+\chi(X, \mathcal{O}_X),$$

откуда из $(C.C)>0$ заключаем, что $h^0(nC)>0$ при больших n.

Вернемся к теореме об индексе. Доказывая от противного, допустим, что имеется дивизор D с $(D.H)=0$ и $(D.D)>0$. Образуем дивизор $H'=D+mH$; при больших m это — снова обильный дивизор на X. Так как $(D.H')=(D.D+mH)=$ $=(D.D)>0$, по лемме nD эквивалентен эффективному дивизору. Но тогда $(nD.H)>0$, что противоречит условию $(D.H)=0$.

5.5. Общая двойственность. Двойственность Серра можно записать в виде

$$H^{n-q}\left(X, \operatorname{Hom}\left(E, \Omega_X^n\right)\right) = \operatorname{Hom}\left(H^q(X, E), K\right),$$

где K — основное поле. В таком виде она выглядит как правило коммутирования когомологий с функтором Hom. Это наводит на мысль о существовании общей теоремы двойственности, относящейся к любым морфизмам (а не только к отдельным многообразиям) и любым пучкам (а не только локально свободным). В самом наивном виде двойственность для морфизма $f: X \to Y$ означала бы существование функтора $f^!$, сопряженного справа к функтору f_*, что давало бы изоморфизм

$$\operatorname{Hom}(f_*F, G) \simeq \operatorname{Hom}(F, f^!G)$$

для произвольных пучков F на X и G на Y. Основное препятствие к реализации этой наивной идеи заключается в том, что функтор f_* не точен. В самом деле, чтобы некий функтор имел сопряженный, необходимо (и, по существу, достаточно), чтобы он коммутировал с пределами (в нашем аддитивном случае — был точным справа). Однако f_* в общем случае справа как раз не точен, и этим обстоятельством вызвана вся теория когомологий. Чтобы сделать f_* точным, нужно переходить к производным категориям, что не входит в наши намерения. Тогда и $f^!G$ строится уже как объект производной категории. (За изложением этих вопросов мы отсылаем к [56], а также к книге [3].)

Имеется все же один случай, когда сложности исчезают и проходит наивная идея. Предположим, что морфизм $f: X \to Y$ конечен. Тогда функтор f_* точен (п. 1.6), и в качестве $f^!G$ можно взять пучок $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, G)$, рассматриваемый как пучок модулей на X. В этом случае мы имеем канонический изоморфизм

$$f_* \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F, f^!G) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*F, G). \qquad (*)$$

5.6. Двойственность на схемах Коэна—Маколея. Пусть X — проективная схема Коэна—Маколея (п. 1.3) чистой размерности n. Тогда существует конечный морфизм $f: X \to \mathbf{P}^n$ и любой такой морфизм — плоский ([5], гл. 2). Определим *дуализирующий пучок* ω_X на X как $f^!\omega_{\mathbf{P}^n}$, где $\omega_{\mathbf{P}^n} = \Omega^n_{\mathbf{P}^n}$ — канонический пучок на $\mathbf{P}^n$. Можно показать, что ω_X действительно зависит лишь от X, а не от выбора проекции f, и что для гладкого многообразия X пучок ω_X совпадает с Ω_X^n.

Теорема. В предыдущих предположениях пусть E — локально свободный пучок на X. Тогда

$$H^{n-q}(X, \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(E, \omega_X)) = H^q(X, E)^*.$$

В самом деле, пучок f_*E локально свободен на $\mathbf{P}^n$, поэтому, учитывая (*) из п. 5.5,

$$H^{n-q}(X, \operatorname{Hom}(E, \omega_X)) = H^{n-q}(\mathbf{P}^n, f_* \operatorname{Hom}(E, \omega_X)) = \\ = H^{n-q}(\mathbf{P}^n, \operatorname{Hom}(f_*E, \omega_{\mathbf{P}^n})).$$

Согласно двойственности на $\mathbf{P}^n$ (п. 5.3), последнее изоморфно

$$H^q(\mathbf{P}^n, f_*E)^* = H^q(X, E)^*.$$

Замечание. Если не требовать локальную свободу E, пространство $H^{n-q}(X, \operatorname{Hom}(E, \omega_X))$ в теореме надо заменить более общим выражением $\operatorname{Ext}^{n-q}(X; E, \omega_X)$. В частности, для любого пучка E на X пространство $\operatorname{Ext}^0(X; E, \omega_X) = \operatorname{Hom}(E, \omega_X)$ дуально к $H^n(X, E)$. Отсюда несложно вывести единственность дуализирующего пучка ω_X с точностью до изоморфизма. Отметим также, что, хотя ω_X имеет ранг 1, в общем случае он не обратим.

Приведем одно геометрическое применение двойственности (ср. с [5], гл. 3):

Следствие. Пусть X — неприводимое проективное многообразие размерности $\geqslant 2$. Тогда любое гиперплоское сечение X связно.

Мы покажем это в случае поверхности X. Заменяя X нормализацией, можно считать X нормальной поверхностью и, значит, схемой Коэна—Маколея. Пусть H — гиперплоское сечение X. Рассмотрим точную тройку пучков на X:

$$0 \to \mathcal{O}_X(-mH) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{mH} \to 0.$$

По двойственности $H^1(X, \mathcal{O}(-mH)) = 0$ при больших m (ср. с п. 5.3). Поэтому отображение $K = H^0(\mathcal{O}_X) \to H^0(\mathcal{O}_{mH})$ сюръективно, откуда mH (как пространство, равное H) связно.

(Другие применения двойственности к геометрическим вопросам см. в [40], гл. 5.)

§ 6. Когомологии де Рама

6.1. Определение. Мы уже упоминали в п. 4.2 гл. 1 классическую теорию де Рама, позволяющую представлять когомологии дифференцируемого многообразия при помощи дифференциальных форм. У этой теории имеется красивый алгебраический аналог. Чтобы мотивировать дальнейшие определения, рассмотрим сначала комплексно-аналитическое многообразие M. Тогда (аналитический) комплекс де Рама $\Omega_M^{\cdot}$, состоящий из пучков ростков голоморфных форм, является резольвентой постоянного пучка $\mathbf{C}_M$ (голоморфная лемма Пуанкаре). Поэтому когомологии $H^*(M, \mathbf{C})$ изоморфны гиперкогомологиям $\mathbf{H}^*(M, \Omega_M^{\cdot})$ комплекса де Рама $\Omega_M^{\cdot}$. В алгебраическом случае алгебраический комплекс де Рама алгебраического многообразия уже не является ничьей резольвентой. Тем не менее имеет смысл рассмотреть его гиперкогомологии.

Определение. Пусть X — алгебраическая схема над полем K. *Когомологиями де Рама* схемы X называются гиперкогомологии комплекса де Рама $H^*_{\mathrm{DR}}(X \mid K) = \mathbf{H}^*(X, \Omega^\cdot_X)$.

Это — градуированная кососкоммутативная K-алгебра, контравариантно зависящая от X. Хотя определение имеет смысл для любой схемы, хорошие свойства следует ожидать только для гладких полных многообразий, что далее молчаливо предполагается. Если $K = \mathbf{C}$, то гиперкогомологии $H^*_{\mathrm{DR}}(X \mid \mathbf{C})$ совпадают с классическими когомологиями $H^*(X(\mathbf{C}), \mathbf{C})$ — см. § 2 гл. 3.

Как и для любых гиперкогомологий (п. 4.2 гл. 1), для когомологий де Рама имеется спектральная последовательность

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^p_X) \Rightarrow H^{p+q}_{\mathrm{DR}}(X \mid K),$$

называемая *спектральной последовательностью Ходжа — де Рама*. Предельная фильтрация в H^*_{DR} называется *фильтрацией Ходжа*. Числа $h^{pq}(X) = \dim H^q(X, \Omega^p_X)$ называются *числами Ходжа* X.

Уже отсюда видно, что размерность пространства $H^k_{\mathrm{DR}}(X)$ конечна $\left(\leqslant \sum\limits_{p+q=k} h^{pq}\right)$ и что $H^k_{\mathrm{DR}}(X) = 0$ при $k > 2\dim X$. Как мы увидим, $H^{2n}_{\mathrm{DR}}(X)$ уже отлично от 0.

6.2. Теорема о вырождении. Эти и многие другие факты основаны на более глубоком изучении спектральной последовательности Ходжа—де Рама. Начнем с простейшего случая, когда X — кривая. В этом случае член E_1 имеет вид

$$\begin{array}{c|c|c|c}
q & & & \\
 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & H^1(\mathcal{O}_X) \longrightarrow & H^1(\Omega^1_X) & 0 \\
\hline
0 & H^0(\mathcal{O}_X) \longrightarrow & H^0(\Omega^1_X) & 0 \\
\hline
 & 0 & 1 & \to p
\end{array}$$

все остальные клеточки — нулевые. Нижний дифференциал $d_1 : H^0(\mathcal{O}_X) \to H^0(\Omega^1_X)$ равен нулю, так как глобальные регулярные функции постоянны. Верхний дифференциал $d_1 : H^1(\mathcal{O}_X) \to H^1(\Omega^1_X)$ двойствен к нижнему и тоже нулевой. Поэтому $E_1 = E_2$. Высшие дифференциалы d_2, d_3 и т. д. равны нулю по тривиальным соображениям. Таким образом, в случае кривых спектральная последовательность Ходжа — де Рама вырождается в члене E_1 и дает для H^1_{DR} точную последовательность

$$0 \to H^0(X, \Omega^1_X) \to H^1_{\mathrm{DR}}(X \mid K) \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \to 0.$$

В частности, $\dim H^1_{\mathrm{DR}}(X) = 2g$, где $g = h^{10} = h^{01}$ — род кривой. Конечно, $\dim H^0_{\mathrm{DR}}(X) = \dim H^2_{\mathrm{DR}}(X) = 1$.

Для поверхностей положение усложняется; имеются примеры с незамкнутыми глобальными 1-формами. Все же это — скорее патология, чем норма, как видно из следующей теоремы:

Теорема. Спектральная последовательность Ходжа—де Рама вырождается в члене E_1 в двух случаях:

а) если характеристика K равна 0;

б) если $\dim X$ не превосходит характеристики K, а многообразие X допускает продолжение в нулевую характеристику.

Утверждение а) в случае $K = \mathbf{C}$ является одной из основ т. н. *теории Ходжа* (см. [23] и гл. 3). Оно было впервые получено Ходжем с помощью гармонической теории и до недавнего времени было известно только трансцендентное доказательство. Недавно Делинь и Иллюзи [29] доказали утверждение б), и это позволило дать алгебраическое и «элементарное» доказательство для а). Главную роль при этом играет случай конечных полей K и даже $K = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, где p — простое число. В этом случае легко объяснить смысл условия продолжимости в нулевую характеристику. Оно означает, что существует плоская $\mathbf{Z}$-схема $\tilde{X}$, такая что $X = \tilde{X} \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ является ее редукцией по модулю p. На самом деле, достаточно даже плоской продолжимости X на $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$.

6.3. Редукция к конечным полям. Мы еще не раз убедимся в том, что многие геометрические утверждения для таких полей, как $\mathbf{C}$, можно получать из аналогичных утверждений над конечными полями. Геометрия над конечными полями часто — ключ к геометрии над произвольным полем. Объясним здесь механизм такого сведения на примере предыдущей теоремы.

Общий прием такой. Пусть X — схема над полем K. Она склеена из конечного числа аффинных карт, и в определении каждой из этих карт и их склейки принимает участие лишь конечное число элементов поля K. Обозначим через A подкольцо в K, порожденное этими элементами. Тогда существует A-схема конечного типа $\tilde{X}$, такая что $X = \tilde{X} \otimes_A K$. Для построения $\tilde{X}$ надо повторить операцию сборки X, но уже над A. Убирая вырожденные слои морфизма $\tilde{X} \to \operatorname{Spec} A$, будем считать этот морфизм гладким и собственным (если такой была K-схема X). Базисная схема $\operatorname{Spec} A$ имеет конечный тип над $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ и потому имеет уже много замкнутых точек s с конечными полями вычетов $k(s)$. Зная какие-то факты про многообразия $\tilde{X}_s = \tilde{X} \otimes_A k(s)$ над полями $k(s)$, можем получать аналогичные факты про $X = \tilde{X} \otimes_A K$.

Теперь, как этот прием работает в нашей ситуации. Пользуясь относительным комплексом де Рама $\Omega_{\widetilde{X}/A}$, можно построить аналогичную спектральную последовательность

$$\widetilde{E}_1^{p,q}=H^q(\widetilde{X},\ \Omega^p_{\widetilde{X}/A})\Rightarrow \mathbf{H}^{p+q}(\widetilde{X},\ \Omega_{\widetilde{X}/A}).$$

Интересующая нас спектральная последовательность получается из $\widetilde{E}$ умножением на $\otimes_A K$. Поэтому достаточно установить ее вырожденность (после, быть может, локализации A).

Локализуя A, можно считать, что все A-модули, входящие в $\widetilde{E}$, свободны. Поэтому вырождение $\widetilde{E}$ сводится к равенству для рангов $\sum\limits_{p+q=k} \mathrm{rk}_A H^q(\Omega^p)=\mathrm{rk}_A \mathbf{H}^k(\widetilde{X})$. Сравним теперь $\widetilde{E}$ с аналогичной спектральной последовательностью $\widetilde{E}(s)$ для многообразия $\widetilde{X}_s$ над точкой $s\in \operatorname{Spec} A$. В силу теоремы о замене базы (предложение из п. 3.7) образование спектральной последовательности $\widetilde{E}$ коммутирует с $\otimes_A k(s)$, так что достаточно проверить вырождение $\widetilde{E}(s)=\widetilde{E}\otimes_A k(s)$. Теперь, если характеристика K равна 0, схема $\operatorname{Spec} A$ — плоская над $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ и там есть точки s со сколь угодно большой характеристикой.

6.4. Случай конечного поля. Казалось бы, многообразия над конечным полем наиболее далеки от геометрической интуиции и должны были бы представлять наибольшие трудности. Однако они обладают неоценимым достоинством — конечностью числа точек, что открывает дополнительные возможности для исследования. В главе 4 мы подробнее обсудим это обстоятельство. Тесно связано с ним и наличие т. н. *морфизма Фробениуса*, также специфического для положительной характеристики.

Зафиксируем простое число p и все многообразия будем рассматривать над конечным полем $K=\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Любое такое многообразие X обладает *эндоморфизмом Фробениуса*

$$\Phi : X\to X.$$

Теоретико-множественно он тождествен, т. е. все точки оставляет на месте, однако на функции действует нетривиально, возводя их в степень $p: \Phi^*(a)=a^p$. Именно потому, что $p=0$ на X, возведение в p-ю степень является гомоморфизмом колец! Конечно, морфизм Φ очень непохож на все, к чему привыкли над полем комплексных чисел. Хотя на точках он тождествен, его дифференциал $d_x\Phi : T_xX\to T_xX$ — нулевой в любой точке $x\in X$.

Подпучок p-х степеней $\Phi^*(\mathcal{O}_X)\subset\mathcal{O}_X$ имеет нулевые производные ($da^p=pa^{p-1}da=0$), поэтому комплекс де Рама $\Omega^{\cdot}_X$ удобнее рассматривать как комплекс модулей над этим подкольцом $\Phi^*(\mathcal{O}_X)$. Или эквивалентно — можно перейти к комплексу пучков $\Phi_*(\Omega^{\cdot}_X)$ над $\mathcal{O}_X$. Дифференциал этого комплекса уже линеен над $\mathcal{O}_X$. И первый вопрос, который здесь возникает: чему равны пучки когомологий $H^*(\Phi_*\Omega_X^\cdot)$ этого комплекса $\Phi_*\Omega_X^\cdot$? Ответ на него приводится в следующем пункте.

6.5. Операторы Картье. Начнем с простейшего случая $X = \mathbf{A}^1 = \mathrm{Spec}\, K[T]$. В этом случае комплекс $\Omega_X^\cdot$ имеет вид

$$K[T] \xrightarrow{d} K[T]\, dT.$$

Ядро d совпадает с подкольцом p-х степеней $K[T^p]$, а коядро порождается (над $K[T^p]$) формой $T^{p-1}dT$.

Аналогично, в общем случае можно определить гомоморфизм $\mathcal{O}_X$-алгебр

$$c_X : \Omega_X{}^* \to H^*(\Phi_*\Omega_X^\cdot)$$

(*оператор Картье*). Локально для «функции» a на X класс когомологий $c_X(da)$ представляется замкнутой 1-формой $a^{p-1}da$, а на остальные формы продолжается по мультипликативности. Заметим, что форма $(a+b)^{p-1}d(a+b)$ в общем случае не равна $a^{p-1}da + b^{p-1}db$, а только гомологична.

Предложение (Картье). Для гладкой схемы X гомоморфизм Картье c_X является изоморфизмом.

Доказывается оно бесхитростно. При помощи локальных координат утверждение сводится к случаю $X = \mathbf{A}^n$, где оно проверяется непосредственно, как выше было проделано при $n=1$.

Вернемся к теореме о вырождении. Все дело в том, что, когда многообразие X продолжается в нулевую характеристику, гомоморфизм c_X удается реализовать не только на уровне классов когомологий, но даже на уровне форм. Более точно, рассмотрим сначала несколько идеализированную ситуацию, когда в нулевую характеристику продолжается не только схема X, но и морфизм Фробениуса. Это значит, что имеется морфизм $\widetilde{\Phi} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$, который при редукции по модулю p дает $\Phi : X \to X$. В этом случае существует гомоморфизм градуированных $\mathcal{O}_X$-алгебр

$$c_{\widetilde{\Phi}} : \Omega_X^* \to \Phi_*(\Omega_X^*),$$

такой что формы $c_{\widetilde{\Phi}}(\omega)$ замкнуты и гомологичны $c_X(\omega)$. Мы определим его только на Ω_X^1 и лишь для форм вида $\omega = da$, где a — локальное сечение $\mathcal{O}_X$.

Делается это так. Сначала поднимем a до сечения $\widetilde{a}$ над $\widetilde{X}$ и образуем $d\widetilde{\Phi}^*(\widetilde{a})$. Эта форма равна нулю по модулю p, поэтому ее можно разделить на p. Наконец, $c_{\widetilde{\Phi}}(da)$ — это редукция по модулю p формы $p^{-1}d\widetilde{\Phi}^*(\widetilde{a})$. Довольно легко проверяется, что определение не зависит от подъема a и что форма $c_{\widetilde{\Phi}}(da)$ гомологична $a^{p-1}da$.

Таким образом, в этом идеализированном случае комплекс де Рама $(\Phi_*\Omega_X, d)$ оказывается квазиизоморфен комплексу с нулевым (!) дифференциалом $(\Omega^*_X, 0)$. Утверждение о вырождении получается теперь моментально. В самом деле,

$$\mathbf{H}^k(X, \Omega^{\cdot}_X) = \mathbf{H}^k(X, \Phi_*\Omega^{\cdot}_X) \simeq \mathbf{H}^k(X, (\Omega^*_X, 0)) = \bigoplus_{i+j=m} H^j(X, \Omega^i_X).$$

Идеализированный случай, когда морфизм Фробениуса продолжается в нулевую характеристику, для полных многообразий встречается довольно редко (хотя включает проективные пространства и любые торические многообразия). Локально же Фробениус всегда продолжается. Если проанализировать влияние неоднозначности продолжения Φ, то окажется, что имеется морфизм Ω^1_X в $\Phi_*\Omega^{\cdot}_X$, но уже не как морфизм комплексов, а лишь как морфизм объектов производной категории. Если $p > \dim X$, этот морфизм по мультипликативности можно продолжить до квазиизоморфизма $(\Omega^*_X, 0)$ в комплекс $(\Phi_*\Omega^{\cdot}_X, d)$. После этого утверждение о вырождении получается как выше. (Уточнения и подробности см. в [29].)

6.6. Теоремы об обращении в нуль. Приведенный выше метод применим также для получения теорем об обращении в нуль.

Часто полезно знать, что некоторые когомологии обращаются в нуль. Например, формула Римана—Роха дает $\chi(X, F)$; если знать, что пучок F ацикличен, мы получаем размерность $H^0(X, F)$. Мы уже встречались с двумя результатами такого сорта. Первый — обращение в нуль H^q при $q > \dim X$ (п. 1.5). Второй — теорема Серра (п. 2.3): $H^q(X, F(m)) = 0$ при $q > 0$ и $m \gg 0$. Иначе говоря, достаточно обильный пучок ацикличен. Результат Кодаиры, о котором здесь пойдет речь, гораздо более точен: обратимый пучок ацикличен, если он обильнее канонического пучка ω_X.

Пусть X — гладкое проективное многообразие, L — обратимый пучок на X. В силу двойственности (п. 5.3) следующие утверждения эквивалентны:

(i) $H^i(X, \Omega^j_X \otimes L) = 0$ при $i + j > \dim X$:

(ii) $H^i(X, \Omega^j_X \otimes L^{-1}) = 0$ при $i + j < \dim X$.

Любое из них называется *теоремой Кодаиры—Накано об обращении в нуль.*

Теорема. Предположим, что обратимый пучок L обилен. Тогда теорема Кодаиры—Накано об обращении в нуль выполнена в следующих случаях:

а) если характеристика K равна 0;

б) если $\dim X$ не превосходит характеристики K, а многообразие X допускает продолжение в нулевую характеристику.

Утверждение а) сводится, как в п. 6.3, к конечным полям и утверждению б). В случае б), воспользуемся приведенным выше утверждением о квазиизоморфности $\Phi_*\Omega^{\cdot}_X$ и Ω^*_X и, получим следующие неравенства, верные для произвольного обратимого пучка M (p обозначает здесь характеристику основного поля K):

$$\sum_{i+j=k} \dim H^j(X, \Omega_X^i \otimes M) \leqslant \sum_{i+j=k} \dim H^j(X, \Omega_X^i \otimes M^{\otimes p}).$$

В самом деле, так как комплекс $(\Phi_* \Omega_X^{\cdot}) \otimes M$ квазиизоморфен комплексу $\Omega_X^* \otimes M$ с нулевым дифференциалом,

$$\sum_{i+j=k} \dim H^j(X, \Omega_X^i \otimes M) = \dim \mathbf{H}^k(X, \Omega_X^* \otimes M) =$$

$$= \dim \mathbf{H}^k(X, \Phi_* \Omega_X^{\cdot} \otimes M) \leqslant \sum_{i+j=k} \dim H^j(X, \Phi_* \Omega_X^i \otimes M).$$

По формуле проекции

$$\Phi_*(\Omega_X^i) \otimes M = \Phi_*(\Omega_X^i \otimes \Phi^* M) = \Phi_*(\Omega_X^i \otimes M^{\otimes p}),$$

откуда $H^j(X, \Phi_*(\Omega_X^i) \otimes M) = H^j(X, \Omega_X^i \otimes M^{\otimes p})$.

Применим эти неравенства к теореме об обращении в нуль. Так как L — обильный, по теореме Серра $H^j(X, \Omega_X^i \otimes L^{\otimes p^m}) = 0$ при $j > 0$ и большом m. Вместе с предыдущими неравенствами это дает, что $H^j(X, \Omega_X^i \otimes L) = 0$ при $i + j > \dim X$.

(Другие обобщения теоремы Кодаиры и применения см. в [32], [63], [76].)

6.7. Свойства когомологий де Рама. Когомологии де Рама дают чисто алгебраическую теорию когомологий для полных гладких многообразий, обладающую многими чертами теории сингулярных когомологий $H^*(X, \mathbf{C})$ над полем $\mathbf{C}$. Укажем главные свойства:

I. Двойственность Пуанкаре. Если $n = \dim X$, то $H_{\mathrm{DR}}^{2n}(X \mid K) = H^n(X, \Omega_X^n) \simeq K$ и спаривание

$$H_{\mathrm{DR}}^k(X \mid K) \times H_{\mathrm{DR}}^{2n-k}(X \mid K) \to H_{\mathrm{DR}}^{2n}(X \mid K) \simeq K$$

не вырожденно. Это следует из самодвойственности комплекса $\Omega_X^{\cdot}$.

II. Формула Кюннета: $H_{\mathrm{DR}}^*(X \times Y \mid K) = H_{\mathrm{DR}}^*(X \mid K) \otimes_K H_{\mathrm{DR}}^*(Y \mid K)$.

III. Отображение цикла. Имеется гомоморфизм кольца Чжоу $A^*(X)$ в кольцо $H_{\mathrm{DR}}^{2*}(X \mid K)$. Для гладкого подмногообразия $Y \subset X$ коразмерности k класс Y определяется как класс, двойственный по Пуанкаре к гомоморфизму $H_{\mathrm{DR}}^{2n-2k}(X \mid K) \to H_{\mathrm{DR}}^{2n-2k}(Y \mid K) = K$. В частности, имеется гомоморфизм первого класса Чженя

$$c : \mathrm{Pic}\, X \to H_{\mathrm{DR}}^2(X \mid K).$$

Его можно более явно задать с помощью гомоморфизма пучков $d \log : \mathcal{O}_X^* \to \Omega_X^1$, $d \log a = da/a$.

6.8. Кристаллические когомологии. Когомологии де Рама были введены Гротендиком [42]. Для поля K нулевой характеристики они являются «правильной» теорией когомологий, хотя бы в том смысле, что в случае $K = \mathbf{C}$ совпадают с теорией $H^*(X, \mathbf{C})$. Однако над полями положительной характеристики они не всегда дают «правильные» числа Бетти — может случиться, что $h^{0,1} \neq h^{1,0}$ и т. п. Эти недостатки устранимы, если многообразие X продолжается в нулевую характеристику до схемы $\widetilde{X}$ над кольцом векторов Витта $W = W(K)$. В этом случае гиперкогомологии $\mathbf{H}^*(\widetilde{X}, \Omega^*_{\widetilde{X}/W})$ не зависят от $\widetilde{X}$ и дают «правильные» числа Бетти. Однако сфера применимости такой теории ограничена многообразиями, продолжаемыми в нулевую характеристику. Гротендику принадлежит оригинальная идея кристаллических когомологий $H^*_{\mathrm{cris}}(X/W)$, использующих локальный подъем в нулевую характеристику. Получается хорошая теория когомологий с коэффициентами в кольце $W(K)$, обладающая приведенными в п. 6.7 свойствами. Мы не можем подробнее останавливаться на кристаллических когомологиях, отсылая к [20], но три вещи сказать стоит.

Первое — о связи с когомологиями де Рама. Грубо говоря, последние представляют собой редукцию по модулю p кристаллических когомологий. Точнее говоря, имеется точная последовательность «универсальных коэффициентов»

$$0 \to H^k_{\mathrm{cris}}(X) \underset{W}{\otimes} K \to H^k_{\mathrm{DR}}(X) \to \mathrm{Tor}_1^W\left(H^{k+1}_{\mathrm{cris}}(X), K\right) \to 0.$$

В частности, первое (кристаллическое) число Бетти b^1, т. е. ранг H^1_{cris}, удовлетворяет неравенству

$$b^1 \leqslant \dim H^1_{\mathrm{cris}} \otimes K \leqslant \dim H^1_{\mathrm{DR}} \leqslant h^{0,1} + h^{1,0}.$$

Второе. Иллюзи в [60] построил некоторый комплекс $W\Omega^{\cdot}_X$, который обобщает комплекс де Рама и для которого $\mathbf{H}^*(X, W\Omega^{\cdot}_X) = H^*_{\mathrm{cris}}(X/W)$. Соответствующая спектральная последовательность «наклона»

$$E_1^{ij} = H^j\left(X, W\Omega^i_X\right) \Rightarrow H^{i+j}_{\mathrm{cris}}(X/W)$$

вырождается в члене E_1 (по крайней мере, по модулю кручения).

Третье. Эндоморфизм Фробениуса $\Phi: X \to X$ индуцирует действие на $H^*_{\mathrm{cris}}(X/W)$ и на спектральной последовательности «наклона». При этом p-адические оценки *действия Фробениуса* на пространстве $H^j(X, W\Omega^i_X)$ располагаются в интервале $[i, i+1)$, чем и объясняется вырождение спектральной последовательности. В конечном счете эти факты служат глубоким основанием для теорем типа Варнинга—Шевалле (см. § 1 гл. 4 и [66]).

Глава 3

КОГОМОЛОГИИ КОМПЛЕКСНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Алгебраические схемы, определенные над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$, кроме топологии Зарисского обладают более привычной и более сильной классической топологией. Локально эта топология индуцируется евклидовой метрикой на $\mathbf{C}^n$. С давних пор эта топология позволяла применять к комплексным алгебраическим многообразиям методы анализа и алгебраической топологии. Позднее многие полученные трансцендентными методами факты были осмыслены алгебраически и перенесены на абстрактные многообразия, заданные над произвольным полем; другие так и остались трансцендентными. В любом случае комплексные многообразия выступали как образец, указывая направление правильных абстрактных формулировок (хотя были примеры и обратного влияния).

Надо сказать, что наиболее тонкие вопросы топологии комплексных алгебраических многообразий, связанные с привлечением теории Ходжа, рассматриваются в выходящем вскоре обзоре о комплексных алгебраических многообразиях. Мы лишь слегка касаемся их в § 3.

В этой главе под схемой понимается отделимая алгебраическая $\mathbf{C}$-схема.

§ 1. Комплексные многообразия как топологические пространства

1.1. Классическая топология. С каждой $\mathbf{C}$-схемой X можно связать комплексное аналитическое пространство $X^{\text{ан}}$, состоящее из множества $X(\mathbf{C})$, снабженного классической топологией, и пучка колец $\mathcal{O}_{X^{\text{ан}}}$. Сначала это делается для аффинных схем. Предположим, что аффинная схема X реализуется как замкнутая подсхема аффинного пространства $\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}$, заданная уравнениями $f_i=0$, где f_i — многочлены от $T_1, \ldots, T_n$. Эти же многочлены, рассматриваемые как аналитические функции на $\mathbf{C}^n$, задают аналитическое подпространство в $\mathbf{C}^n$, которое и обозначается через $X^{\text{ан}}$. Как множество оно отождествляется с $X(\mathbf{C})$ — множеством $\mathbf{C}$-значных точек X. Классическая топология на $X(\mathbf{C})$ индуцируется евклидовой метрикой $\mathbf{C}^n$. Пучок $\mathcal{O}_{X^{\text{ан}}}$ — это пучок ростков аналитических функций на $X(\mathbf{C})$. В силу очевидной функториальности конструкция переносится на произвольные схемы и дает функтор аналитизации $X \mapsto X^{\text{ан}}$ из категории схем в категорию аналитических пространств. Аналитическим аспектом мы займемся в следующем параграфе, а сейчас займемся более грубой, топологической частью $X(\mathbf{C})$.

Примеры. Аналитизация $\mathbf{P}^1$ дает обычное комплексное проективное пространство $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. В частности, $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ гомеоморфно сфере Римана S^2. Для эллиптической кривой X пространство $X(\mathbf{C})$ гомеоморфно двумерному тору $S^1 \times S^1$. Проколотая прямая $\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$ гомотопически эквивалентна окружности S^1.

Как множество, $X(\mathbf{C})$ состоит из $\mathbf{C}$-значных точек схемы X; далее слово «точка» употребляется именно в этом значении. Топология $X(\mathbf{C})$ действительно сильнее, чем ограничение топологии Зарисского на $X(\mathbf{C})$. Наконец, надо отметить, что топологическое пространство $(X \times Y)(\mathbf{C})$ совпадает с произведением $X(\mathbf{C})$ и $Y(\mathbf{C})$.

1.2. Свойства классической топологии. Пространства вида $X(\mathbf{C})$ обладают некоторыми хорошими свойствами, выделяющими их среди всех топологических пространств. Простейшие свойства даются в следующем предложении:

Предложение. а) Для любой схемы X пространство $X(\mathbf{C})$ отделимо, локально компактно и счетно в бесконечности.

б) Схема X полна тогда и только тогда, когда пространство $X(\mathbf{C})$ компактно.

И вообще, морфизм $f: X \to Y$ — собственный тогда и только тогда, когда отображение $f(\mathbf{C}): X(\mathbf{C}) \to Y(\mathbf{C})$ собственно, т. е. когда прообраз любого компакта — компакт.

Более сильное ограничение на локальное строение $X(\mathbf{C})$ накладывает триангулируемость. Иначе говоря, $X(\mathbf{C})$ гомеоморфно полиэдру некоторого симплициального множества, которое к тому же локально конечно и не более чем счетно.

Принцип построения триангуляции можно увидеть на примере алгебраической кривой. Проектируя ее конечно на $\mathbf{P}^1$, мы получаем конечное накрытие $X \to \mathbf{P}^1$, ветвящееся в конечном числе точек $p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{P}^1$. Возьмем теперь триангуляцию сферы Римана $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, содержащую среди вершин точки p_i. После этого каждый симплекс триангуляции $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ поднимается наверх, в $X(\mathbf{C})$. Очень схематично это изображено на рис. 1.

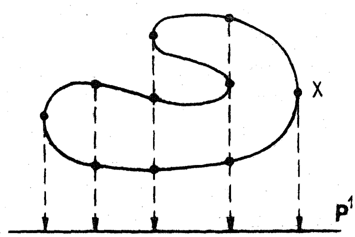


Рис. 1

В общем случае также используются общие проекции, хотя технически все становится гораздо сложнее и требует более точной, индуктивной формулировки. Зато и доказать удается больше. Во-первых, каждый симплекс триангуляции можно сделать полуалгебраическим (вещественно; т. е. он задается неравенствами вида $g_i \geqslant 0$, где g_i — вещественно-алгебраические функции на $X(\mathbf{C})$). Во-вторых, если часть $X(\mathbf{C})$ уже (полуалгебраически) триангулирована, можно найти триангуляцию $X(\mathbf{C})$, согласованную с частичной триангуляцией. (Подробнее см. [57].)

Простым следствием триангулируемости является локальная стягиваемость. В самом деле, звезда любой вершины стягивается в эту вершину. Глобальные следствия триангулируемости мы обсудим в следующем пункте.

Последним важным топологическим свойством $X(\mathbf{C})$ является его четномерность и ориентируемость. Однако в связи с наличием особенностей более точную формулировку мы отложим до п. 1.4.

1.3. Сингулярные (ко)гомологии. Как и для любого топологического пространства, для $X(\mathbf{C})$ имеют смысл *сингулярные гомологии* $H_k(X)=H_k(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ и *когомологии* $H^k(X)=$ $=H^k(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ (иногда вместо $\mathbf{Z}$ в качестве коэффициентов мы будем брать $\mathbf{Q}$ или $\mathbf{C}$). Из триангулируемости $X(\mathbf{C})$ следует, что сингулярные когомологии совпадают также с когомологиями любой триангуляции, а также с когомологиями $H^k(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}_{X(\mathbf{C})})$ постоянного пучка $\mathbf{Z}_{X(\mathbf{C})}$.

Предложение. Для любой схемы X группы $H_k(X)$ и $H^k(X)$ имеют конечное число образующих.

Для доказательства вложим X в полное многообразие $\bar{X}$ и пусть $Y=\bar{X} \setminus X$. Возьмем триангуляцию $\bar{X}(\mathbf{C})$, продолжающую триангуляцию $Y(\mathbf{C})$. Пусть U — звездная окрестность $Y(\mathbf{C})$. Тогда $X(\mathbf{C})$ — звездная окрестность $\bar{X}(\mathbf{C}) \setminus U$, и можно деформационно проретрагировать $X(\mathbf{C})$ на $\bar{X}(\mathbf{C}) \setminus U$ (рис. 2). При этом (ко)гомологии не изменятся. Но последнее пространство уже — конечный полиэдр.

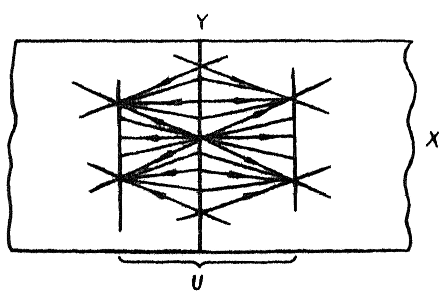


Рис. 2

Определение. Ранг группы $H^k(X)$ (или $H_k(X)$), или размерность пространства $H^k(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$, называется k-м *числом Бетти* схемы X и обозначается через $b^k(X)$.

1.4. Гомологии Бореля—Мура. При работе с неполными многообразиями иногда удобно пользоваться гомологиями, построенными с помощью локально конечных цепей. Пользуясь триангуляцией $X(\mathbf{C})$, этому можно придать наглядный смысл. Существует другой подход. Пусть $X \hookrightarrow \bar{X}$ — алгебраическая компактификация X (т. е. открытое вложение в полное многообразие $\bar{X}$) и $D = \bar{X} \setminus X$. *Гомологиями Бореля—Мура* $H_k^{\text{BM}}(X)$ называются относительные гомологии $H_k(\bar{X}(\mathbf{C}), D(\mathbf{C}); \mathbf{Z})$ пары $(\bar{X}(\mathbf{C}), D(\mathbf{C}))$.

Можно показать, что это определение не зависит от выбора компактификации $X \hookrightarrow \bar{X}$ и что эти группы имеют конечный тип. Гомологии Бореля—Мура являются также ковариантными образованиями относительно собственных морфизмов. Для полного многообразия X они совпадают, разумеется, с $H_k(X)$; для неполного могут отличаться. Например,

$$H_k^{\text{BM}}(\mathbf{A}^n) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq 2n, \\ \mathbf{Z}, & \text{если } k = 2n. \end{cases}$$

Если Y — замкнутая подсхема X, то имеется длинная точная последовательность

$$\ldots \to H_k^{\text{BM}}(Y) \to H_k^{\text{BM}}(X) \to H_k^{\text{BM}}(X \setminus Y) \to H_{k-1}^{\text{BM}}(Y) \to \ldots$$

Гомологии Бореля—Мура интересны тем, что именно в них лежит т. н. фундаментальный класс. Пусть для начала X — гладкое многообразие чистой размерности n. Тогда $X(\mathbf{C})$ обладает структурой топологического многообразия размерности $2n$. Если выбрать ориентацию $\mathbf{C}$ (т. е., по существу, выбрать один из корней $\sqrt{-1}$), то многообразие $X(\mathbf{C})$ снабжается канонической ориентацией. В терминах триангуляции это можно выразить так: каждый симплекс размерности $2n$ ориентируется так, что соседние симплексы ориентированы согласованно. Полученная цепь размерности $2n$ является циклом из $H_{2n}{}^{\text{BM}}(X)$, который называется *фундаментальным классом* X и обозначается через μ_X. В общем случае, когда многообразие X может иметь особенности, фундаментальный класс μ_X определяется из равенства

$$H_{2n}^{\text{BM}}(X) = H_{2n}^{\text{BM}}(X \setminus \operatorname{Sing} X),$$

который следует из предыдущей точной последовательности и неравенства $\dim \operatorname{Sing} X < n$.

Для неприводимого m-мерного подмногообразия $Y \subset X$ определим его класс $\operatorname{cl}(Y)$ в $H_{2m}^{\text{BM}}(X)$ как образ μ_Y при естественном гомоморфизме $H_{2m}^{\text{BM}}(Y) \to H_{2m}^{\text{BM}}(X)$. По линейности это отображение продолжается на любые алгебраические циклы. Класс цикла не меняется при рациональной (и алгебраической) эквивалентности и потому определяет гомоморфизм

$$\mathrm{cl}: A_*(X) \to H_{2*}^{\text{ВМ}}(X).$$

В некоторых простых случаях это отображение является изоморфизмом. Например, это — так, если многообразие X обладает «клеточным» разложением, как проективное пространство или многообразие Грассмана. В частности, нечетномерные гомологии $\mathbf{P}^n$ равны 0, а $H_{2m}(\mathbf{P}^n)$ свободно порождаются классом m-мерного линейного подпространства $\mathbf{P}^m$ пространства $\mathbf{P}^n$.

1.5. Теория пересечений. Для любой схемы X имеется топологическое $\cap$-произведение

$$H^k(X) \otimes H_i^{\text{ВМ}}(X) \to H_{i-k}^{\text{ВМ}}(X).$$

В частности, если X — схема чистой размерности n, умножение на фундаментальный класс $\mu_X \in H_{2n}^{\text{ВМ}}(X)$ дает гомоморфизм

$$H^k(X) \to H_{2n-k}^{\text{ВМ}}(X).$$

Теорема (двойственность Пуанкаре—Лефшеца). Для гладкого многообразия это — изоморфизм.

Доказательство можно найти в [31]. Обратное отображение строится геометрически с помощью клеточного разбиения $X(\mathbf{C})$, двойственного к некоторой триангуляции $X(\mathbf{C})$ ([40]).

Пользуясь двойственностью, умножение в когомологиях можно перенести в умножение-пересечение в гомологиях

$$H_k^{\text{ВМ}}(X) \otimes H_m^{\text{ВМ}} \to H_{2n-k-m}^{\text{ВМ}}(X).$$

Геометрически пересечение циклов устроено так. Заменяя циклы гомологичными, можно считать, что они пересекаются трансверсально. Тогда симплексам из их пересечения надо приписать знак $\pm$ в зависимости от ориентации. Умножение-пересечение в кольцах A_* и $H_*^{\text{ВМ}}$ согласовано с отображением класса цикла cl.

Следствие. Пусть X — гладкая полная схема чистой размерности n. Тогда спаривание пересечения

$$H_k(X) \otimes H_{2n-k}(X) \to H_0(X) = \mathbf{Z}$$

унимодулярно, т. е. определяемое им отображение

$$H_k(X) \to \mathrm{Hom}(H_{2n-k}(X), \mathbf{Z})$$

сюръективно, а ядро совпадает с кручением в $H_k(X)$.

В частности, в средних (ко)гомологиях $H_n(X)$ гладкого полного многообразия имеется невырожденная форма пересечения, симметричная при четном n и кососоммутативная при нечетном n. Отсюда следует, что для нечетного n пространство $H_n(X)$ четномерно. Из теории Ходжа следует, что это верно для любых гомологий нечетной степени.

Для многообразия с особенностями пространства H_k и H_{2n-k} уже могут иметь разные размерности. Горецки и Макферсон ([39]) предложили интересный вариант «гомологий», промежуточных между H_* и H_*^{BM}, для которых двойственность верна всегда.

1.6. Формула Лефшеца. Пусть $f: X \to X$ эндоморфизм гладкой полной схемы X. Формула Лефшеца дает выражение для числа неподвижных точек f в терминах действия f в когомологиях $H^k(f): H^k(X) \to H^k(X)$. Конечно, неподвижные точки считаются с учетом кратности. Пусть $\Gamma_f \subset X \times X$ — график отображения f. Неподвижные точки f отождествляются с пересечением $\Gamma_f \cap \Delta$, где $\Delta \subset X \times X$ диагональ. Поэтому естественно назвать *числом неподвижных точек* f индекс пересечения циклов Γ_f и Δ в кольце $A^*(X \times X)$ (или $H^*(X \times X)$). Формула Лефшеца

$$(\Gamma_f . \Delta) = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \operatorname{Tr} H^k(f)$$

является формальным следствием двойственности Пуанкаре и формулы Кюннета

$$H^*(X \times Y, \mathbf{Q}) = H^*(X, \mathbf{Q}) \otimes H^*(Y, \mathbf{Q}).$$

В самом деле, пусть (e_i^r) — базис $H^r(X)$, а (ε_i^{2n-r}) — двойственный базис $H^{2n-r}(X)$. Тогда, как легко понять,

$$\operatorname{cl}(\Gamma_f) = \sum_{i,r} f^*(e_i^r) \otimes \varepsilon_i^{2n-r}.$$

Аналогично,

$$\operatorname{cl}(\Delta) = \sum_{i,r} e_i^r \otimes \varepsilon_i^{2n-r} = \sum_{i,r} (-1)^r \varepsilon_i^{2n-r} \otimes e_i^r.$$

Перемножая их в кольце $H^*(X \times X)$, получаем

$$(\Gamma_f . \Delta) = \sum_r (-1)^r \sum_i (f^*(e_i^r) \cdot \varepsilon_i^{2n-r}) = \sum_r (-1)^r \operatorname{Tr} H^r(f).$$

В частности, для тождественного морфизма получаем формулу

$$(\Delta . \Delta) = \sum_k (-1)^k b^k(X) = \chi(X).$$

Отметим, что самопересечение диагонали $(\Delta . \Delta)$ представляется также как старший класс Чженя $c_n(T_X)$ касательного пучка T_X на X.

Формула Лефшеца — одна из серьезных причин для проникновения когомологий в алгебраическую геометрию. Хотя ее левая часть — чисто алгебраическая, справа участвуют все когомологии.

Пример. Пусть X — эллиптическая кривая, факторпространство $\mathbf{C}$ по решетке $\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\cdot\tau$, $\operatorname{Im}\tau>0$. Пусть f — отражение от нуля: $z\mapsto -z$. Тогда $H^0(f)$ — тождественное отображение, $H^1(f)$ задается матрицей $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, А $H^2(f)$ — умножение на степень f, т. е. снова 1. Поэтому эндоморфизм f имеет по формуле Лефшеца $1-(-2)+1=4$ неподвижные точки. Конечно, это — четыре точки второго порядка: 0, $1/2$, $\tau/2$, $1/2+\tau/2$.

§ 2. Когомологии когерентных пучков

2.1. Функтор аналитизации. В п. 1.1 с каждой схемой X было связано аналитическое пространство $X^{\text{ан}}$ с пространством-носителем $X(\mathbf{C})$ и пучком колец $\mathcal{O}_{X^{\text{ан}}}$. Имеется также естественный морфизм окольцованных пространств

$$\varphi: X^{\text{ан}}\to X.$$

Поэтому для любого пучка $\mathcal{O}_X$-модулей F можно определить его *аналитизацию*

$$F^{\text{ан}}=\varphi^*F=\varphi^{-1}F\underset{\varphi^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes}\mathcal{O}_{X^{\text{ан}}}.$$

Конечно, это — функтор, причем точный и консервативный (т. е. если $F^{\text{ан}}=0$, то и $F=0$). Для когерентного пучка F на X пучок $F^{\text{ан}}$ — когерентный, аналитический на $X^{\text{ан}}$. Займемся теперь связью между когомологиями пучка F в топологии Зарисского на X и пучка $F^{\text{ан}}$ в классической топологии на $X(\mathbf{C})$. Первый результат в этом направлении:

Теорема. Пусть схема X аффинна. Тогда $H^q(X(\mathbf{C}),F^{\text{ан}})=0$ при $q>0$ для любого когерентного пучка F на X.

Это частный случай теоремы А. Картана ([53], теорема В). Отметим аналогию с теоремой Серра из п. 1.2 гл. 2. В частности, когомологии $F^{\text{ан}}$ снова можно вычислять с помощью аффинных покрытий X. И вообще, теории когомологий когерентных пучков алгебраических многообразий и аналитических пространств во многом параллельны. Хотелось бы даже сказать, что классическая топология применительно к когерентным пучкам не дает ничего нового. Конечно, буквально это не так: целых функций на $\mathbf{C}^n$ гораздо больше, чем полиномиальных. Видимо, если наложить условия роста на бесконечности, теории действительно совпадут. Если схема — полная, никаких условий на рост накладывать не надо. Результаты такого рода называются GAGA по аббревиатуре названия работы Серра [73], в которой они были установлены в проективном варианте.

2.2. Теорема сравнения. Пусть $f: X\to Y$ — собственный морфизм схем, F — когерентный пучок на X. Тогда естественный гомоморфизм замены базы

$$(R^q f_* F)^{\text{ан}} \to (R^q f_*^{\text{ан}})(F^{\text{ан}})$$

является изоморфизмом.

В силу стандартных редукций (гл. 2, § 3) можно считать $X=\mathbf{P}_Y^n$, $F=\mathcal{O}(m)$. Покроем $\mathbf{P}^n$ стандартными аффинными картами $U_i\simeq\mathbf{A}^n$. Тогда и левая, и правая части вычисляются с помощью этого покрытия. Разница только в том, что слева мы имеем дело с многочленами Лорана, а справа — с рядами Лорана. Однако на когомологиях это не сказывается.

В частности, пучки $(R^q f_*^{\text{ан}})(F^{\text{ан}})$ когерентны. На самом деле, этот факт верен для любого собственного морфизма аналитических пространств (*теорема Грауэрта*). Более простой факт: конечномерность когомологий когерентного аналитического пучка на компактном аналитическом пространстве — см. в [53].

Следствие. Пусть F — когерентный пучок на полной схеме X. Тогда $H^q(X, F)\simeq H^q(X(\mathbf{C}), F^{\text{ан}})$.

Это следствие имеет массу применений.

2.3. Применение к когомологиям де Рама. Как уже говорилось в § 6 гл. 2, аналитический комплекс де Рама $\Omega^{\cdot}_{X^{\text{ан}}}=(\Omega^{\cdot}_X)^{\text{ан}}$ является резольвентой постоянного пучка $\mathbf{C}_{X(\mathbf{C})}$ на пространстве $X(\mathbf{C})$. Отсюда следует, что для гладкого X существует изоморфизм

$$H^*(X(\mathbf{C}), \mathbf{C})\simeq \mathbf{H}^*(X(\mathbf{C}), \Omega_X^{\cdot\text{ан}}).$$

С другой стороны, верна следующая

Теорема (Гротендик). Для гладкой схемы X

$$\mathbf{H}^*(X, \Omega^{\cdot}_X)\simeq\mathbf{H}^*(X(\mathbf{C}), \Omega_X^{\cdot\text{ан}}).$$

Мы покажем это только для полных схем (в общем случае рассуждение сложнее — см. [42]). В этом случае обе части являются пределами спектральных последовательностей с изоморфными, согласно GAGA, начальными членами $H^j(X, \Omega^i_X)$ и $H^j(X(\mathbf{C}), \Omega_X^{i\,\text{ан}})$.

Таким образом, для гладких $\mathbf{C}$-схем сингулярные когомологии $H^*(X, \mathbf{C})$ совпадают с когомологиями де Рама $H^*_{\text{DR}}(X/\mathbf{C})$.

Следствие. Пусть X — гладкая аффинная схема. Тогда $H^m(X(\mathbf{C}), \mathbf{C})=0$ при $m>\dim X$.

В самом деле, в силу ацикличности пучков $(\Omega^i_X)^{\text{ан}}$ (см. теорему из п. 2.1) пространства $H^m(X(\mathbf{C}), \mathbf{C})$ совпадают с когомологиями комплекса $\Omega_X^{\cdot\text{ан}}(X(\mathbf{C}))$ (или $\Omega^{\cdot}_X(X)$) длины $n=\dim X$.

Замечание. На самом деле, любое многообразие Штейна M гомотопически эквивалентно конечному клеточному комплексу размерности $\leqslant\dim M$ ([10]). Поэтому предыдущее утверждение верно и для коэффициентов $\mathbf{Z}$.

2.4. Слабая теорема Лефшеца. Пусть X — гладкое проективное многообразие чистой размерности n и $Y \subset X$ — его гиперплоское сечение (или обильный дивизор). Тогда гомоморфизмы

$$H_m(Y) \to H_m(X)$$

являются изоморфизмами при $m < n-1$ и эпиморфизмом при $m = n-1$.

В силу точной последовательности из п. 1.4 достаточно проверить, что $H_m^{\text{вм}}(X \setminus Y) = 0$ при $m < n$ или, по двойственности Пуанкаре—Лефшеца, что $H^m(X \setminus Y) = 0$ при $m > n$. Но последнее вытекает из следствия в п. 2.3 в силу аффинности $X \setminus Y$.

Двойственным образом отображение $H^m(X) \to H^m(Y)$ является изоморфизмом при $m < n-1$ и мономорфизмом при $m = n-1$. Таким образом, принципиально новые когомологии n-мерного проективного многообразия (по сравнению с когомологиями многообразий меньшей размерности) лежат в средней размерности n.

2.5. Теорема об алгебраизации. На полной схеме X совпадают не только когомологии пучков F и $F^{\text{ан}}$, но и любой когерентный аналитический пучок алгебраизуем. Более точно, верна

Теорема. Пусть X — полная схема. Тогда функтор аналитизации устанавливает эквивалентность категории когерентных пучков на X и категории когерентных аналитических пучков на $X^{\text{ан}}$.

Заметим сначала, что при аналитизации не появляется новых морфизмов. В самом деле, для пучков F и G на X

$$\operatorname{Hom}(F, G) = H^0(X, \operatorname{Hom}(F, G)) = H^0(X^{\text{ан}}, \operatorname{Hom}(F, G)^{\text{ан}}) =$$
$$= H^0(X^{\text{ан}}, \operatorname{Hom}(F^{\text{ан}}, G^{\text{ан}})) = \operatorname{Hom}(F^{\text{ан}}, G^{\text{ан}}).$$

Проверим теперь, что любой аналитический пучок алгебраизуем. Стандартные редукции ([45]) снова позволяют ограничиться случае $X = \mathbf{P}^n$.

Итак, пусть $\widetilde{F}$ — когерентный аналитический пучок на $X^{\text{ан}}$. Пользуясь индукцией по размерности и фактом конечномерности когомологий, о котором мы упоминали в п. 2.2, легко получить, что подкрученный пучок $\widetilde{F} \otimes \mathcal{O}(m)^{\text{ан}}$ порождается глобальными сечениями ([40]). Но тогда $\widetilde{F}$ представляется как коядро некоторого гомоморфизма пучков

$$\widetilde{\alpha}: \bigoplus_i \mathcal{O}(m_i)^{\text{ан}} \to \bigoplus_j \mathcal{O}(m_j)^{\text{ан}}.$$

Как показано выше, $\widetilde{\alpha} = \alpha^{\text{ан}}$ для некоторого гомоморфизма $\alpha: \bigoplus_i \mathcal{O}(m_i) \to \bigoplus_j \mathcal{O}(m_j)$. Ясно, что $\widetilde{F} = \operatorname{Coker}(\alpha)^{\text{ан}}$.

Следствие 1. Любое аналитическое подпространство полной схемы является алгебраической подсхемой.

Применительно к подпространствам $\mathbf{P}^n$ этот факт установил Чжоу.

Следствие 2. Любой аналитический морфизм между двумя полными схемами алгебраизуем.

В самом деле, его график — замкнутое аналитическое подпространство в $X \times Y$. В частности, если полные схемы изоморфны как аналитические пространства, они изоморфны и как схемы. Без предположения полноты это уже не верно (см. пример в [54]).

2.6. Теорема о связности. Если схема X связна, то связно и пространство $X(\mathbf{C})$.

Конечно, верно и обратное, но это уже тривиально. Приведем набросок доказательства. Во-первых, схему X можно считать приведенной и неприводимой. Во-вторых, пользуясь теоремой Хиронаки о разрешении особенностей, можно считать схему X гладкой. В-третьих, возьмем гладкую компактификацию $X \hookrightarrow \bar{X}$; так как $\bar{X} \setminus X$ имеет меньшую размерность, $X(\mathbf{C})$ и $\bar{X}(\mathbf{C})$ связны одновременно. Поэтому можно считать X полной схемой. Теперь действует GAGA: $H^0(X(\mathbf{C}), \mathcal{O}_{X^{\text{ан}}}) = H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathbf{C}$, так что $X(\mathbf{C})$ связно.

Теорема о связности кажется тоненькой ниточкой, соединяющей топологические свойства X и $X(\mathbf{C})$. Однако в силу ее универсальности, применимости к любой схеме, эта связь позволяет в конечном счете чисто алгебраически вытянуть почти всю классическую топологию — см. § 4.

2.7. Теорема существования Римана. Вопрос о том, какие компактные аналитические пространства алгебраизуемы, — довольно деликатный и далекий от разрешения. Некоторые его аспекты обсуждаются в книгах [13], [54]. Мы же рассмотрим здесь простейший относительный вариант этой проблемы.

Пусть даны полная схема Y, аналитическое пространство $\tilde{X}$ и собственное голоморфное отображение $f: \tilde{X} \to Y^{\text{ан}}$ с конечными слоями. Применяя теорему об алгебраизации (п. 2.5) к когерентному пучку алгебр $f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}$, мы получаем, что существует конечная Y-схема X, такая что $\tilde{X} = X^{\text{ан}}$.

Интересно, что в этом утверждении можно отказаться от полноты Y, потребовав взамен нормальность Y и $\tilde{X}$. Еще более важен для дальнейшего следующий вариант (Риман, Грауэрт — Реммерт, Гротендик):

Теорема. Пусть X — схема. Тогда любое конечное неразветвленное накрытие аналитического пространства $X^{\text{ан}}$ алгебраизуемо.

По причине жесткости этальных накрытий можно уменьшить X и считать его гладким и аффинным. Возьмем теперь гладкую компактификацию $X \hookrightarrow \bar{X}$, такую что дивизор $D = \bar{X} \setminus X$ имеет трансверсальные пересечения. Пользуясь явным локальным описанием конечных накрытий, ветвящихся вдоль D, можно продолжить накрытие $\widetilde{Y} \to X^{\text{ан}}$ до конечного накрытия $\widetilde{Y}' \to \overline{X}^{\text{ан}}$ и затем воспользоваться приведенной ранее теоремой существования Римана для полного $\overline{X}$.

2.8. **Экспоненциальная последовательность.** Она служит хорошим примером связи топологии, геометрии и анализа. Пусть дана схема X. Тогда на $X(\mathbf{C})$ имеется точная последовательность абелевых пучков (называемая *экспоненциальной*)

$$0 \to \mathbf{Z}_{X(\mathbf{C})} \to \mathcal{O}_{X^{\text{ан}}} \to \mathcal{O}^*_{X^{\text{ан}}} \to 1.$$

(см. пример 3 из п. 3.4 гл. 1). В когомологиях получаем точную последовательность

$$H^1(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \to H^1(X(\mathbf{C}), \mathcal{O}_{X^{\text{ан}}}) \to$$
$$\to H^1(X(\mathbf{C}), \mathcal{O}^*_{X^{\text{ан}}}) \xrightarrow{\delta} H^2(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \to H^2(X(\mathbf{C}), \mathcal{O}_{X^{\text{ан}}}).$$

(Если схема X — полная, слева можно добавить нуль.) С геометрической точки зрения здесь наиболее важен средний член $H^1(X(\mathbf{C}), \mathcal{O}^*_{X^{\text{ан}}})$. Элементы этой группы соответствуют обратимым пучкам на $X^{\text{ан}}$. Для такого пучка L его образ в группе $H^2(X, \mathbf{Z})$ называется *классом Чженя* и обозначается через $c_1(L)$. Для дивизора Картье D на X класс Чженя $c_1(\mathcal{O}(D))$ двойственнен по Пуанкаре классу $\mathrm{cl}(D)$.

Предположим теперь, что X — полное многообразие. Тогда, в силу GAGA, алгебраизуются как обратимые пучки на $X^{\text{ан}}$, так и когомологии $\mathcal{O}_{X^{\text{ан}}}$. Предыдущую последовательность можно переписать как

$$0 \to H^1(X, \mathbf{Z}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{Pic}\, X \xrightarrow{\delta} H^2(X, \mathbf{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X).$$

Правая часть ее дает знаменитую *теорему Лефшеца—Ходжа*: целочисленный класс когомологий c из $H^2(X, \mathbf{Z})$ представляется как класс Чженя обратимого пучка тогда и только тогда, когда c переходит в нуль в $H^2(X, \mathcal{O}_X)$. Далее, пусть $\mathrm{Pic}^0 X$ — ядро δ; это — обобщение на многомерный случай группы дивизоров нулевой степени на кривой. Мы видим, что $\mathrm{Pic}^0 X$ представляется как факторгруппа конечномерного векторного $\mathbf{C}$-пространства $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ по решетке $H^1(X, \mathbf{Z})$. Тем самым группа $\mathrm{Pic}^0 X$ снабжается структурой комплексно-аналитического многообразия. Более глубокий факт состоит в алгебраизуемости этого многообразия $\mathrm{Pic}^0 X$, называемого *многообразием Пикара* схемы X. В частности, любое линейное расслоение с тривиальным классом Чженя можно алгебраически продеформировать в тривиальное расслоение. Наконец, факторгруппа $\mathrm{NS}(X) = \mathrm{Pic}\, X/\mathrm{Pic}^0 X$ (она называется *группой Нерона—Севери*) вкладывается в $H^2(X, \mathbf{Z})$ и потому имеет конечное число образующих.

Все эти факты, приведенные здесь для $\mathbf{C}$-схем, допускают алгебраическую формулировку и переносятся на абстрактные алгебраические многообразия над любым полем.

§ 3. Веса в когомологиях

3.1. Весовая фильтрация. С топологической точки зрения алгебраические многообразия устроены в каком-то смысле наиболее просто. Это проявляется в том, что спектральные последовательности вырождаются в начальных членах, и связано с наличием в когомологиях замечательной весовой фильтрации. Изложим кратко основные факты, следуя [25]; подробнее см. [24].

Мы будем в этом параграфе иметь дело с когомологиями с рациональными коэффициентами $H^k(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$, обозначая их просто $H^k(X)$. Для каждой схемы X пространство $H^k(X)$ обладает возрастающей фильтрацией (*весовой*) W:

$$\ldots \subset W_{-1} \subset W_0 \subset \ldots \subset H^k(X),$$

состоящей из векторных $\mathbf{Q}$-подпространств. При этом $W_{-1}=0$ и $W_{2k}=H^k(X)$. Эта фильтрация зависит от структуры схемы на X, а не только от топологического пространства $X(\mathbf{C})$. Факторы этой фильтрации $\mathrm{gr}_r H^k(X) = W_r/W_{r-1}$ называются *частями веса* r. *Весами* H^k называются те r, для которых соответствующие весовые части отличны от нуля. Если отлична от нуля только часть веса r, говорят, что H^k имеет *чистый вес* r.

На самом деле, весовую фильтрацию можно определить для когомологий любой пары $X \subset Y$ (и даже любого морфизма схем $X \to Y$). Однако эти объекты играют вспомогательную роль.

3.2. Функториальность весов. Замечательное свойство весовой фильтрации состоит в том, что она согласована (и даже строго) со всеми естественными операциями в когомологиях. Например, если $f: X \to Y$ — морфизм схем, то гомоморфизм $f^*: H^*(Y) \to H^*(X)$ переводит W_r в W_r и, более того,

$$f^*H^*(Y) \cap W_r H^*(X) = f^*(W_r H^*(Y)).$$

Если даны пары $Z \subset Y$ и $Y \subset X$, то в точной последовательности тройки

$$\ldots \to H^k(X, Z) \to H^k(Y, Z) \to H^{k+1}(X, Y) \to H^{k+1}(X, Z) \to \ldots$$

все гомоморфизмы строго согласованы с весовой фильтрацией. Наконец, с весовой фильтрацией согласованы изоморфизмы Кюннета.

3.3. Сборка и разборка. Ключевым фактом является то, что для полного и гладкого многообразия X пространство $H^k(X)$ имеет чистый вес k. С этой чистотой связано также и то, что рациональный гомотопический тип такого многообразия восстанавливается по алгебре когомологий $H^*(X)$ (см. [28]).

В общем случае в весах $H^*(X)$ отражается то, как многообразие X строится из гладких полных кусков в результате операций сложения и вычитания. Покажем это на примерах.

Пример 1. Пусть X — гладкое полное многообразие, $Y\subset X$ — гладкое замкнутое подмногообразие. Из последовательности

$$H^{k-1}(Y)\to H^k(X, Y)\to H^k(X)$$

видно, что веса когомологий $H^k(X, Y)$ (или, что то же самое, когомологий с компактными носителями $H_c^k(X\setminus Y)$) лежат в $\{k-1, k\}$. При этом весовая часть $H_c^k(X\setminus Y)$ веса k вкладывается в $H^k(X)$.

Рассмотрим более конкретный пример: $X=\mathbf{P}^1$, а Y состоит из точек 0 и ∞, так что $X\setminus Y=\mathbf{C}\setminus\{0\}=\mathbf{C}^*$. Точна последовательность

$$0\to H_c^0(\mathbf{C}^*)\to H^0(\mathbf{P}^1)\to \mathbf{Q}^2\to H_c^1(\mathbf{C}^*)\to H^1(\mathbf{P}^1)\to$$
$$\to 0\to H_c^2(\mathbf{C}^*)\to H^2(\mathbf{P}^1)\to 0.$$

Отсюда $H_c^0(\mathbf{C}^*)=0$, $H_c^1(\mathbf{C}^*)=\mathbf{Q}$ и имеет вес 0, $H_c^2(\mathbf{C}^*)=0$ и имеет вес 2. По двойственности $H^0(\mathbf{C}^*)=\mathbf{Q}$ имеет вес 0, $H^1(\mathbf{C}^*)\simeq\mathbf{Q}$ и веса 2, $H^2(\mathbf{C}^*)=0$.

Пример 2. Пусть X состоит из двух гладких полных компонент X_1 и X_2, пересекающихся по гладкому подмногообразию $X_1\cap X_2$. Из последовательности Майера—Виеториса

$$H^{k-1}(X_1\cap X_2)\to H^k(X)\to H^k(X_1)\oplus H^k(X_2)$$

следует, что веса $H^k(X)$ снова лежат в множестве $\{k-1, k\}$. Таким образом, хотя элементы из H^{k-1} попадают в H^k, они не смешиваются с остальными когомологиями «правильного» веса k, помнят свое происхождение.

Можно обобщить пример 2, рассмотрев многообразие X, покрытое конечным числом гладких полных многообразий X_i, любое пересечение которых тоже гладкое. Как для любого замкнутого покрытия, имеется спектральная последовательность (см. п. 4.4 гл. 1)

$$E_1^{p,q}=\bigoplus_{i_0,\ldots,i_p} H^q(X_{i_0}\cap\ldots\cap X_{i_p})\Rightarrow H^{p+q}(X).$$

Замечательно, что в нашем случае она вырождается в члене E_2. Это легко объяснить идеологией весов — дифференциалы d_r при $r\geqslant 2$ должны были бы уменьшить вес и поэтому равны нулю.

Пример 3. Пусть полное многообразие X имеет одну особую точку P и $\pi:\widetilde{X}\to X$ — разрешение этой особенности. Тогда имеется точная последовательность

$$H^{k-1}(\pi^{-1}(P))\to H^k(X)\to H^k(\widetilde{X})\oplus H^k(P).$$

Если многообразие $\pi^{-1}(P)$ — гладкое, веса $H^k(X)$ лежат в $\{k-1, k\}$.

Можно показать, что для любого полного многообразия X веса $H^k(X)$ расположены между 0 и k. Вообще, для любого многообразия X веса $H_c^k(X)$ расположены между 0 и k.

3.4. Случай гладких многообразий. Весовую структуру когомологий гладких многообразий размерности n можно изучать с помощью двойственности Пуанкаре—Лефшеца

$$H^k(X)\times H_c^{2n-k}(X)\to H_c^{2n}(X)\simeq\mathbf{Q}.$$

При этом нужно помнить, что вес $H_c^{2n}(X)$ равен $2n$. В частности, веса $H^k(X)$ для гладкого X расположены от k до $2n$.

Предложение. Пусть $\overline{X}$ — гладкая компактификация многообразия X. Тогда $W_kH^k(X)$ совпадает с образом $H^k(\overline{X})$ при отображении ограничения $H^k(\overline{X})\to H^k(X)$.

По двойственности надо проверить, что ядро отображения $H_c^m(X)\to H_c^m(\overline{X})=H^m(\overline{X})$ совпадает с $W_{m-1}H_c^m(X)$. Но это видно из точной последовательности примера 1 (п. 3.3).

3.5. Непрерывность весов. Весовая фильтрация непрерывно зависит от многообразия X. Более точно, предположим, что дан собственный морфизм $f: X\to S$. Тогда для точки $t\in S$ слой пучка $R^kf_*\mathbf{Q}$ в t отождествляется с пространством $H^k(X_t)$, где $X_t=$ $=f^{-1}(t)$. Если при этом все пространства $H^k(X_t)$ изоморфны друг другу, точнее — если пучок $R^kf_*\mathbf{Q}$ является локальной системой на S, то весовые части W_r в слоях $H^k(X_t)$ склеиваются в локальную подсистему пучка $R^kf_*\mathbf{Q}$.

Теорема (Делинь). Пусть $f: X\to S$ — гладкий собственный морфизм. Тогда спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q}=H^p(S, R^qf_*\mathbf{Q})\Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbf{Q})$$

вырождается в члене E_2.

Это еще одно подтверждение топологической простоты алгебраических многообразий. В частности, имеется сюръекция

$$H^k(X, \mathbf{Q})\to H^0(S, R^kf_*\mathbf{Q}).$$

Элементы $H^0(S, R^kf_*\mathbf{Q})$ отождествляются с элементами $H^k(X_t)$, инвариантными относительно *монодромии* (т. е. действия фундаментальной группы $\pi_1(S, t)$ на $H^k(X_t)$). Поэтому предыдущая сюръекция означает, что любой инвариантный класс когомологий слоя X_t продолжается до класса когомологий всего X. На самом деле верно большее: такой класс продолжается на любую гладкую компактификацию $X\subset\overline{X}$ многообразия X (*теорема об инвариантном подпространстве*). В самом деле, вес любого элемента $H^k(X_t)$ равен k. Поэтому инвариантный класс продолжается до класса из $W_kH^k(X)$ и остается воспользоваться предложением из п. 3.4.

Верен также локальный вариант предыдущего утверждения: пусть $f: X\to S$ — собственный морфизм гладких многообразий, гладкий всюду, кроме слоя над точкой $t_0 \in S$; если класс из $H^k(X_t)$ инвариантен относительно локальной монодромии (группы $\pi_1(S \setminus t_0)$), то он продолжается до класса на всем X.

3.6. Существование весов. Имеется два способа определения весовой фильтрации. Первый — посредством смешанных структур Ходжа, в которые весовая фильтрация входит как одна из составляющих. Второй — при помощи l-адических когомологий и имеющейся в них весовой структуры (§ 8 гл. 4). Последние когомологии определены чисто алгебраически и имеют смысл для любого поля, а не только $\mathbb{C}$. В следующем параграфе мы более алгебраически взглянем на классическую топологию, чтобы затем этот подход реализовать для абстрактных многообразий.

§ 4. Алгебраический подход к классической топологии

Этот параграф полезно прочитать перед следующей главой, чтобы понять, *почему* этальный подход разумен и *как* до него можно было бы догадаться.

4.1. Что дает топология Зарисского. Основным понятием симплициального подхода к гомологиям является понятие цепи как непрерывного образа полиэдра. При этом гомологии полиэдра по ковариантности переносятся на многообразие. Такой подход разумен, если есть много отображений полиэдров в многообразие. Возможен дуальный подход, основанный на непрерывных отображениях в полиэдры. В этом случае уже когомологии полиэдра по контравариантности внедряются в многообразие. Для триангулируемых пространств оба подхода оказываются эквивалентными. Однако в абстрактном случае второй подход более перспективен.

Дело в том, что фактически второй подход связан с рассмотрением открытых покрытий. Как мы видели в п. 4.4 гл. 1, если все U_i и их всевозможные пересечения $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}$ устроены с когомологической точки зрения просто, мы получаем возможность определить когомологии чисто комбинаторно, как когомологии покрытия. Именно так обстоит дело при покрытии звездами триангуляции.

В абстрактном случае имеются только открытые по Зарисскому подмножества. Можно ли рассчитывать, что такие множества можно выбрать достаточно ацикличными? Какое-то упрощение при переходе к «малым» открытым по Зарисскому подмножествам происходит. В самом деле, мы знаем, например, что когомологии $H^k(U)$ аффинных частей U обращаются в нуль при $k > \dim U$. Однако дальше дело не идет и дальнейшее уменьшение U не делает его более ацикличным. Возьмем простейший случай — кривые. Топологически аффинная кривая — это риманова поверхность с конечным числом проколов (рис. 3). С гомотопической точки зрения это — одномерный полиэдр, букет нескольких окружностей. Поэтому у таких открытых кусков отсутствуют когомологии размерности 2 и выше. Однако одномерные гомологии имеются и за счет дальнейшего

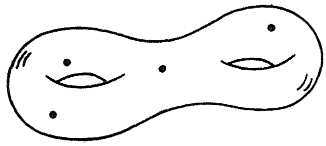


Рис. 3

уменьшения кривой, т. е. за счет дополнительных проколов, ситуация не упрощается. Мы не только не убиваем какие-либо петли, но лишь добавляем новые вокруг проколов.

4.2. Идея Гротендика. Она заключается в том, что 1-циклы надо убивать не за счет уменьшения U, а за счет перехода к неразветвленному накрытию $U' \to U$. Отложим временно вопрос о том, как алгебраически реализовывать накрытие, и продолжим обсуждение этой идеи. Трудность, в основном психологическая, состоит в том, что «открытым» куском предлагается считать не подмножество исходного многообразия X, а отображение в X. Во всяком случае, нужно пересмотреть многие привычные понятия. Например, что считать пересечением двух «открытых» $U \to X$ и $U' \to X$? Довольно легко понять, что правильнее всего под этим понимать расслоенное произведение $U \times_X U'$. Но тогда надо быть готовым к тому, что «самопересечение» $U \times_X U$ может оказаться отличным от U и нести интересную информацию.

П р и м е р. Пусть $X = S^1$ — окружность, $U = \mathbf{R}^1$ — прямая и $e : \mathbf{R} \to S^1$ — обычная обмотка (скажем, $e(t) = \exp(2\pi i t)$). Тогда $U \times_X U$ — это подмножество в $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, состоящее из пар чисел (t, t'), для которых $t - t'$ — целое число. Поэтому $U \times_X U$ состоит из диагонали $\Delta = \{(t, t) \mid t \in \mathbf{R}\}$ и ее сдвигов на целые числа (рис. 4).

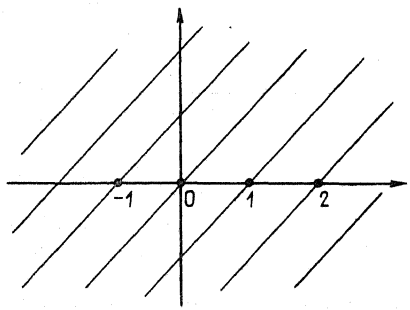


Рис. 4

В главе 4 мы встретимся с аналогичным явлением расщепления точки $\operatorname{Spec} \mathbf{F}_{qn}$. Причина одна — «открытый» кусок $U \to X$ обладает автоморфизмами.

Заметим, что в данном случае множество связных компонент $U \to U$ отождествляется с фундаментальной группой $X = S^1$. Конечно, это вызвано тем, что $U \to X$ — универсальное накрытие X.

4.3. Хорошие окрестности. В реализации приведенной программы первым решающим обстоятельством является следующий факт, восходящий к Лефшецу и доказанный М. Артином. Скажем, что схема U — «хорошая», если пространство $U(\mathbf{C})$ имеет гомотопический тип $K(\pi, 1)$, т. е. если универсальная накрывающая $U(\mathbf{C})$ стягиваема.

Теорема. Пусть многообразие X — гладкое. Тогда любая точка обладает «хорошей» окрестностью Зарисского.

Для кривой это верно. В общем случае многообразие X расслаивается на кривые и рассуждение идет индукцией по размерности. Будем считать X проективным и пусть задан дивизор D на X, не проходящий через нашу точку $x \in X$. Возьмем общую линейную проекцию $f: X \to \mathbf{P}^{n-1}$, где $n = \dim X$. Тогда слой $f^{-1}(f(x))$ — гладкий и трансверсален к D; это же верно и для близких слоев. Пусть теперь V — достаточно малая «хорошая» окрестность точки $f(x)$ в $\mathbf{P}^{n-1}$. Тогда возникает локально тривиальное (топологически) расслоение $f^{-1}(V) \setminus D \to V$, слои которого — открытые кривые. Так как база V и слой имеют тип $K(\pi, 1)$, таким же будет и $f^{-1}(V) \setminus D$.

4.4. Идеализированная схема восстановления. Схема восстановления классической топологии схемы X выглядит так. Сначала покрываем X «хорошими» открытыми по Зарисскому подмножествами $U_1, \ldots, U_N$ и для каждого U_i берем универсальную накрывающую $\widetilde{U}_i$. Так получается покрытие «первого уровня» $\{\widetilde{U}_i \to X\}$. Нерв этого покрытия, т. е. симплициальное множество (где $\widetilde{U} = \coprod\limits_i \widetilde{U}_i$)

$$\pi_0(\widetilde{U}) \leftleftarrows \pi_0(\widetilde{U} \underset{X}{\times} \widetilde{U}) \overset{\leftarrow}{\leftleftarrows} \pi_0(\widetilde{U} \underset{X}{\times} \widetilde{U} \underset{X}{\times} \widetilde{U}) \overset{\leftleftarrows}{\leftleftarrows} \cdots$$

дает правильные группы H^0 (что не удивительно) и H^1 (что существенно), однако неправильные H^2 и т. д. Дело в том, что «пересечения» $\widetilde{U}_i \underset{X}{\times} \widetilde{U}_j$ в общем не ацикличны. Поэтому нужно каждое такое пересечение в свою очередь покрыть «хорошими» окрестностями, взять у них универсальные накрывающие и т. д. Два способа реализации этой идеи можно найти в [65], [77] и в [49], [24]. Мы лишь поясним ее на примере.

Пусть $X = \mathbf{P}^1$ — сфера Римана. Покроем ее двумя картами: $U_0 = \mathbf{P}^1 \setminus \{\infty\}$ и $U_1 = \mathbf{P}^1 \setminus \{0\}$. Каждая карта стягиваема, что упрощает дело на первом этапе. Но если мы этим покрытием ограничимся, то нерв его даст при геометрической реализации отрезок, не имеющий никаких двумерных когомологий. Однако если к делу подключить универсальную накрывающую $U_0 \cap U_1 = \mathbf{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$, гомотопически эквивалентную окружности S^1, мы получим, что геометрическая реализация гомотопна надстройке над $K(\mathbf{Z}, 1)$ (рис. 5),

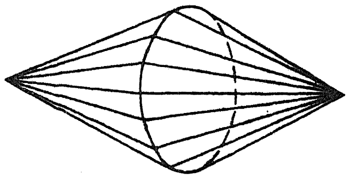


Рис. 5

что уже похоже на S^2 и дает правильную группу $H^2 = \mathbf{Z}$.

4.5. Алгебраические накрывающие. Вернемся к вопросу об алгебраической реализации универсальных накрывающих и внесем соответствующие коррективы в программу из п. 4.4.

Пусть $f : Y \to X$ — морфизм схем, для которого отображение $f(\mathbf{C}) : Y(\mathbf{C}) \to X(\mathbf{C})$ является неразветвленным накрытием. Тогда f — конечный этальный морфизм; верно и обратное. Таким образом, универсальную накрывающую можно надеяться реализовать алгебраически только для многообразий с *конечной* фундаментальной группой. А это бывает крайне редко, что видно уже на примере кривых.

Остается, правда, надежда, что можно алгебраически реализовать любое «конечное» приближение к универсальному накрытию. И здесь нас ожидает вторая удача. В самом деле, как было показано в п. 2.7, любое конечное неразветвленное накрытие любого алгебраического многообразия реализуется алгебраически.

Внесем нужные изменения в программу из п. 4.4, чтобы получить более реалистическую картину. Вместо универсальных накрытий $\tilde{U}_i \to U_i$ надо брать их конечные аппроксимации, то же с пересечениями и т. д. Конечно, рассчитывать на то, что такое «гиперпокрытие» сразу даст правильные когомологии, не приходится — оно дает лишь приближение. Для получения лучшего приближения надо брать более тонкое гиперпокрытие. Так что удается восстановить не гомотопический тип $X(\mathbf{C})$, а лишь его «проконечное пополнение». Не будем объяснять, что это такое, отсылая к [77]. Отметим лишь, что в этом есть свои достоинства. Например, если наше многообразие было определено над полем $\mathbf{Q}$, как $\mathbf{P}^n$ или грассманианы, все конструкции можно провести над $\mathbf{Q}$. Тогда на получающемся «проконечном пополнении» действует группа Галуа поля $\mathbf{Q}$.

Для нас важнее, что приведенную схему можно реализовать для любого многообразия над любым полем. Роль топологии Зарисского в том, чтобы поставлять «хорошие» открытые множества. Этальные накрытия «раскручивают» их. И открытые вложения, и этальные накрытия — частные случаи понятия этального морфизма. Поэтому ясно, что этальные морфизмы должны играть главную роль при построении «алгебраической топологии» алгебраических схем.

4.6. Поучительный пример. Систематическое изложение этального подхода дано в главе 4. Однако прежде стоит еще немного задержаться на простом примере $X = \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$, который подготовит нас к тому, что встретится в этальном мире. С гомотопической точки зрения $\mathbf{C}^*$ — окружность, и универсальное накрытие $\mathbf{C}^*$ алгебраически не реализуемо. Хорошим приближением к нему следует считать циклическое накрытие степени m, $\mathbf{C}^* \xrightarrow{m} \mathbf{C}^*$, $z \mapsto z^m$. Оно тем лучше, чем больше m. Группа автоморфизмов этого накрытия G изоморфна группе μ_m корней m-й степени из 1, т. е. группе $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.

Если построить нерв «покрытия» $\mathbf{C}^* \xrightarrow{m} \mathbf{C}^*$, можно убедиться, что его когомологии (которые по идее должны служить приближением к когомологиям $\mathbf{C}^*$) есть не что иное, как когомологии группы G. О том, что это такое, можно узнать в [14], [75]. В нашем простом случае вычисление облегчается тем, что группа $G \simeq \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ — циклическая. Пусть γ — ее образующая. Тогда когомологии G с коэффициентами в абелевой G-группе A есть не что иное, как когомологии комплекса

$$A \xrightarrow{T} A \xrightarrow{N} A \xrightarrow{T} A \xrightarrow{N} \ldots,$$

где $T(a) = a - \gamma a$, а $N(a) = \sum_{g \in G} ga = a + \gamma a + \gamma^2 a + \ldots + \gamma^{m-1} a$.

Нас интересуют коэффициенты A с тривиальным действием G, поэтому комплекс еще более упрощается:

$$A \xrightarrow{0} A \xrightarrow{m} A \xrightarrow{0} A \xrightarrow{m} \ldots$$

Его когомологии — это A, $\operatorname{Ker} m$, A/mA, $\operatorname{Ker} m$ и т. д. Таким образом, в качестве приближения к $H^*(\mathbf{C}^*, \mathbf{Z})$ мы получаем группы $\mathbf{Z}$, 0, $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, 0, $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ и т. д., т. е. ничего похожего, кроме H^0!

Причина неуспеха в том, что в качестве коэффициентов была взята группа $A = \mathbf{Z}$. Как легко понять, группа $H^1(X, \mathbf{Z})$ классифицирует неразветвленные накрытия X со слоем $\mathbf{Z}$, и конечными приближениями такие накрытия не уловить. Правильнее работать с конечными коэффициентами. Пусть A — конечная группа с тривиальным действием G. Если число m делит порядок группы A, то в качестве когомологий Галуа $H^*(G, A)$ мы получаем группы A, A, 0, A, ... Еще лучше будет, когда мы перейдем к пределу по m. Если $m'=km$, то гомоморфизмы $H^*(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, A)\to$ $\to H^*(\mathbf{Z}/m'\mathbf{Z}, A)$ имеют вид

$$\begin{array}{cccccc} A & A & 0 & A & 0 & A \ \dots \\ \downarrow 1 & \downarrow 1 & \downarrow k & \downarrow k & \downarrow k^2 & \downarrow k^2 \\ A & A & 0 & A & 0 & A \ \dots \end{array}$$

В пределе, при $m\to\infty$, мы получаем уже вполне разумные для $H^*(\mathbf{C}^*, A)$ ответы: A, A, 0, 0, 0, ...

Глава 4

ЭТАЛЬНЫЕ КОГОМОЛОГИИ

В этой главе рассказывается о т. н. этальной топологии схем и соответствующих когомологиях. Они интересны тем, что позволяют для произвольных алгебраических многообразий получать когомологии, похожие на когомологии $H^*(X, \mathbf{Z})$ в случае $\mathbf{C}$-схем. Необходимость в таких когомологиях была указана А. Вейлем — об этом § 1; § 2 также имеет подводящий характер. После этого мы приступаем к систематическому изложению теории, достигающей своей вершины в доказательстве гипотез Вейля.

§ 1. Гипотезы Вейля

1.1. Конечные поля. Если мы интересуемся целочисленными решениями уравнения $F(T_1, \dots, T_n)=0$ (предполагается, что коэффициенты многочлена F — также целые), естественно обратиться к разрешимости его в поле $\mathbf{R}$, а также разрешимости по модулю простых чисел p. Так, уравнение $Y^2=X^3-X-1$ не имеет целочисленных решений, ибо не имеет решений по модулю 3. Это приводит к исследованию решений уравнений над конечными полями $\mathbf{F}_p=\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ или, на геометрическом языке, к изучению $\mathbf{F}_p$-значных точек соответствующих $\mathbf{F}_p$-схем. Если мы интересуемся также решениями в кольцах алгебраических чисел, мы должны заняться точками со значениями в конечных расширениях поля $\mathbf{F}_p$. С конечными полями мы уже встречались в § 6 гл. 2; остановимся на них подробнее.

Напомним прежде всего, как устроены конечные поля и, более конкретно, конечные расширения простого поля $\mathbf{F}_p$. Пусть K — расширение степени m, т. е. $\dim_{\mathbf{F}_p} K=m$. Тогда K состоит из $q=p^m$ элементов. Мультипликативная группа $K^*=K\setminus\{0\}$ состоит из $q-1$ элемента, поэтому для любого элемента $x\in K^*$ выполнено $x^{q-1}=1$, или $x^q=x$. Последнему уравнению удовлетворяют уже все элементы K. Поэтому поле K совпадает с множеством всех корней уравнения $X^q-X=0$ и определено однозначно (с точностью до изоморфизмов). Обратно, для любого $q=p^m$ существует поле с q элементами; оно обозначается через $\mathbf{F}_q$.

В поле $\mathbf{F}_q$ выполняется соотношение $(x+y)^p=x^p+y^p$. Поэтому отображение $x\mapsto\Phi(x)=x^p$ является эндоморфизмом поля $\mathbf{F}_q$, который называется *эндоморфизмом Фробениуса*. Так как $\Phi:\mathbf{F}_q\to\mathbf{F}_q$ инъективно, оно и сюръективно, т. е. является автоморфизмом поля $\mathbf{F}_q$. Элементы простого поля $\mathbf{F}_p\subset\mathbf{F}_q$ остаются при этом на месте. Кроме того, $\Phi^m=\mathrm{id}$, где $q=p^m$. Отсюда мы заключаем, что группа Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}_q/\mathbf{F}_p)$ имеет порядок m и порождается автоморфизмом Фробениуса Φ.

Взглянем на это чуть более геометрически. Схема $X=\mathrm{Spec}\,\mathbf{F}_q$ состоит из одной точки и является схемой над $\mathbf{F}_q$. Однако, как говорилось в [5], правильное представление о схеме мы получаем лишь после ее геометризации, т. е. после замены поля $\mathbf{F}_p$ его алгебраическим замыканием $\overline{\mathbf{F}}_p=\mathbf{F}_{p^\infty}$. После замены

$$\begin{array}{ccc} X & \leftarrow & \mathrm{Spec}(\mathbf{F}_q\otimes\overline{\mathbf{F}}_p)=\overline{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\,\mathbf{F}_p & \leftarrow & \mathrm{Spec}\,\overline{\mathbf{F}}_p \end{array}$$

точка X расщепляется на m точек схемы $\overline{X}$, каждая из которых изоморфна $\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbf{F}}_p$. Представьте, что вы взглянули в телескоп на яркую звезду и поняли, что на самом деле это — не одна звезда, а целое созвездие правильной формы (рис. 6).

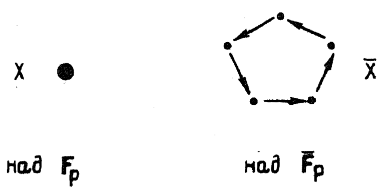


Рис. 6

Симметрия получаемся из-за того, что группа Галуа продолжает действовать на $\overline{X}$, переставляя по циклу ее точки.

1.2. Уравнения над конечными полями. Вернемся к уравнениям. Пусть дан многочлен $f\in\mathbf{F}_q[T_1,\ldots,T_n]$, и мы интересуемся решениями уравнения $f=0$ в поле $\mathbf{F}_q$. Множество решений — конечное, обозначим число его элементов через $N(f)$. В зависимости от f это число может меняться от 0 до q^n. Однако интуитивно чувствуется, что для «рядового» уравнения число $N(f)$ должно быть близко к q^{n-1}. Можно ли этому ощущению придать более точный смысл?

Обозначим через M_d множество всех многочленов степени $\leqslant d$ из кольца $\mathbf{F}_q[T_1, \ldots, T_n]$. Тогда среднее значение $N(f)$ равно q^{n-1}:

$$\frac{1}{|M_d|} \sum_{f \in M_d} N(f) = q^{n-1}.$$

В самом деле, рассмотрим «универсальный» многочлен F на $\mathbf{F}_q^n \times M_d$. Множество $[F=0]$ его нулей проектируется как на M_d, так и на $\mathbf{F}_q^n$. Число точек в нем равно $\Sigma N(f)$. Относительно проекции на $\mathbf{F}_q^n$ слои являются гиперплоскостями в M_d, так что число точек в $[F=0]$ равно $|M_d| \cdot q^{n-1}$.

Можно показать ([64]), что среднее квадратичное отклонение $N(f)$ от q^{n-1} равно $q^{n-1} - q^{n-2}$. Таким образом, следует ожидать, что разность $N(f) - q^{n-1}$ имеет порядок $\sqrt{q^{n-1}}$. Гипотезы Вейля уточняют эти оценки в когомологических терминах, индивидуализируя их для каждого f. Однако, прежде чем переходить к ним, остановимся коротко на уравнениях малой степени (о них имеется огромная литература — см. [64]).

Теорема (Варнинг). Пусть степень f меньше n. Тогда $N(f)$ делится на p (характеристику поля $\mathbf{F}_q$).

Для доказательства образуем вспомогательный многочлен $F = 1 - f^{q-1}$. Тогда F равен 1 на корнях f и равен 0 в остальных точках $\mathbf{F}_q^n$. Поэтому $N(f) = \sum_{x \in \mathbf{F}_q^n} F(x)$.

Покажем теперь, что сумма справа равна 0, причем это верно не только для нашего многочлена F (степени $< n(q-1)$), но и для любого многочлена степени $< n(q-1)$. По линейности это достаточно проверять для мономов $T_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot T_n^{a_n}$. Для них эта сумма равна $\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{x \in \mathbf{F}_q} x^{a_i} \right)$. Так как $\sum a_i < n(q-1)$, одно из $a_i < q-1$. Теперь все вытекает из того совсем уж простого факта, что при $a < q-1$ $\sum_{x \in \mathbf{F}_q} x^a = 0$.

Следствие (Шевалле). Если $f \in \mathbf{F}_q[T_1, \ldots, T_n]$ — однородный многочлен степени $0 < \deg(f) < n$, то уравнение $f=0$ имеет нетривиальное решение в поле $\mathbf{F}_q$.

Вообще, если поле K обладает свойством, что любое однородное уравнение $F(T_1, \ldots, T_n) = 0$ степени $< n$ имеет нетривиальное решение в K, это поле называется *квазиалгебраически замкнутым* (см. также [14]). С одним важным примером таких полей мы встретимся в § 5.

1.3. Дзета-функция. Обобщая предыдущий пункт, рассмотрим произвольную алгебраическую схему X над конечным полем $\mathbf{F}_q$. Для каждого целого $n \geqslant 1$ схема X имеет конечное число точек со значениями в поле F_{q^n} (т. е. морфизмов $\operatorname{Spec} F_{q^n}$ в X над F_q); количество таких точек обозначим через $N(X, n)$. Конечность числа точек, возможность их пересчитать делает конечные поля уникальным полигоном для исследования алгебраических многообразий (п. 6.4 гл. 2).

Пример. Имеется один случай, когда числа $N(X, n)$ считаются просто. А именно, пусть $X = \mathbf{A}^d$ — аффинное пространство над F_q. Тогда $X(F_{q^n}) = F^d_{q^n}$ состоит из q^{nd} элементов.

Вообще, пусть схема X обладает «клеточным» разложением, т. е. разбивается на «клётки», изоморфные $\mathbf{A}^i$, в числе b_{2i}. Тогда

$$N(X, n) = \sum_{i=0}^{\dim X} b_{2i} \cdot q^{ni}.$$

Это — первый намек на то, что $N(X, \cdot)$ имеет связь с когомологиями X, ибо в любом разумном смысле b_{2i} должны быть числами Бетти схемы X (ср. с п. 1.4 гл. 3).

Числа $N(X, n)$ довольно регулярно зависят от n и их удобно «упаковать» в формальный ряд (*Z-функцию*)

$$Z(X, t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N(X, n)}{n} t^n\right) \in \mathbf{Q}[[t]],$$

несущий в себе всю информацию о $N(X, n)$. Можно показать, что

$$Z(X, t) = \prod_{x \in X} (1 - t^{\deg(x)})^{-1} \in \mathbf{Z}[[t]].$$

Произведение здесь берется по всем замкнутым точкам $x \in X$, а $\deg(x) = [k(x) : F_q]$, где $k(x)$ — поле вычетов x, представляет «относительный размер» точки x. Иначе говоря, с каждой точкой x мы связываем ряд

$$Z(x, t) = 1 + t^{\deg(x)} + t^{2\deg(x)} + \ldots,$$

а затем их перемножаем. И хотя точек бесконечно много, на каждую фиксированную степень t^k влияет лишь конечное число точек, так что произведение определено.

Например,

$$Z(\mathbf{A}^d, t) = \exp\left(\sum \frac{q^{nd}}{n} t^n\right) = \frac{1}{1 - q^d t}.$$

Для $\mathbf{P}^d = \mathbf{A}^d \cup \mathbf{A}^{d-1} \cup \ldots \cup \mathbf{A}^0$

$$Z(\mathbf{P}^d, t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt) \cdot \ldots \cdot (1-q^d t)}.$$

При подстановке $t = q^{-u}$ Z-функция превращается в т. н. *дзета-функцию*

$$\zeta(X, u) = Z(X, q^{-u}) = \prod_{x \in X} (1 - q^{-\deg(x) u})^{-1}.$$

Если обозначить «абсолютный размер» точки x через $N(x) = q^{\deg(x)} = |k(x)|$, то $\zeta(X, u)$ есть произведение рядов $(1-N(x)^{-u})^{-1}$ по всем замкнутым точкам $x \in X$. В таком виде определение годится уже для любой $\mathbf{Z}$-схемы конечного типа. Например, для $X = \operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ получается обычная дзета-функция Римана

$$\zeta(u) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-u}} = \frac{1}{2^u} + \frac{1}{3^u} + \frac{1}{4^u} + \ldots .$$

1.4. Теорема Вейля. Рассмотрим первый нетривиальный случай, когда X — кривая (связная, полная и гладкая) рода g над $\mathbf{F}_q$. Из теоремы Римана—Роха следует, что

$$Z(X, t) = \frac{P(t)}{(1-t)(1-qt)},$$

где $P(t)$ — многочлен степени $2g$ с целыми коэффициентами, $P(0) = 1$. По аналогии с классической гипотезой Римана Э. Артин предположил (и проверил для $g = 1$), что «обратные нули» $\alpha_1, \ldots, \alpha_2$ многочлена P (это значит, что $P(t) = \prod_j (1-\alpha_j t)$) по модулю равны $\sqrt{q}$. В силу соотношения

$$N(X, n) = 1 + q^n - \left(\sum_{j=1}^{2g} \alpha_j^n \right)$$

это дает следующую оценку для числа точек на кривой X:

$$|N(X, n) - (q^n + 1)| \leqslant 2g\sqrt{q^n}.$$

В 1940—41 гг. А. Вейль доказал эту гипотезу. Ниже мы наметим одно из его доказательств, а пока рассмотрим

Пример. Пусть X — эллиптическая кривая и α, $\bar{\alpha}$ — пара «обратных корней». Тогда $\alpha\bar{\alpha} = q$, $\alpha + \bar{\alpha} = N(X, 1) - (q+1)$. Поэтому число $N(X, 1) = |X(\mathbf{F}_q)|$ определяет все остальные $N(X, n)$.

Возьмем теперь совсем уж конкретную кривую $y^2 = x^3 - x$ над полем $\mathbf{F}_3$. Так как $|X(\mathbf{F}_3)| = 4$, $\alpha + \bar{\alpha} = 0$ и α, $\bar{\alpha} = \pm\sqrt{-3}$. Поэтому

$$N(X, n) = |X(\mathbf{F}_{3^n})| = \begin{cases} 3^n + 1, & \text{если } n \text{ нечетно}, \\ (3^{n/2} \pm 1)^2, & \text{если } n \text{ четно} \end{cases}$$

Заметим, что числа $N(X, n)$ не делятся на 3, так что в группе точек конечного порядка эллиптической кривой X отсутствуют точки порядка 3. Это несколько необычно и свидетельствует о том, что X — т. н. *суперсингулярная эллиптическая кривая* (что это такое — см. [70], [54]).

1.5. Доказательство теоремы Вейля. Начальная часть рассуждения годится для произвольной схемы X над $\mathbf{F}_q$. Пусть $\bar{X} = X \underset{\mathbf{F}_q}{\otimes} \bar{\mathbf{F}}_q$ — геометризация схемы X и $\Phi: \bar{X} \to \bar{X}$ — морфизм Фробениуса над F_q (в координатах его действие задается формулой $\Phi(x_1, \ldots, x_k) = (x_1^q, \ldots, x_k^q)$). Мы уже видели в п. 1.1, что при проекции $\overline{X} \to X$ каждая точка $x \in X$ расщепляется на $\deg(x)$ точек $\overline{X}$, переставляемых отображением Φ. Неподвижные точки Φ отождествляются при этом с рациональными точками X, т.е. с $X(\mathrm{F}_q)$. Аналогично, для любого n множество $\mathrm{Fix}(\Phi^n)$ неподвижных точек Φ^n отождествляется с $X(F_{q^n})$, так что $N(X, n) = |\mathrm{Fix}\,\Phi^n|$. Остается найти число неподвижных точек Φ^n, но в этом-то вся задача.

Вернемся теперь к кривым и рассмотрим задачу об отыскании числа неподвижных точек отображения $f: C \to C$, где C — кривая над алгебраически замкнутым полем K (пока для нас несущественно, что $K = \overline{\mathrm{F}}_q$). Это число определяется как индекс пересечения $(\Gamma_f \cdot \Delta)$ — см. п, 1.6 гл. 3.

Рассмотрим более общую задачу о пересечении дивизоров на поверхности $C \times C'$, где C и C' — кривые. Дивизоры нас будут интересовать с точностью до численной эквивалентности. Простейшие (вырожденные) дивизоры на $C \times C'$ образованы из «горизонтальных» слоев $C \sim C \times \{p'\}$ и «вертикальных» слоев $C' \sim \{p\} \times C'$. Каждый дивизор D имеет ортогональное разложение

$$D = \delta(D) + \varepsilon(D),$$

где $\delta(D) = (D.C')C + (D.C)C'$ — вырожденная часть D, а $\varepsilon(D)$ — «остаток». Тогда для дивизоров D и D' на $C \times C'$

$$(D.D') = (\delta(D).\delta(D')) + (\varepsilon(D).\varepsilon(D')).$$

Первый член $(\delta(D).\delta(D'))$ находится обычно легко. Что касается второго, то Вейль дает для него оценку. А именно, согласно теореме Ходжа об индексе (п. 5.4 гл. 2), форма пересечения на ортогональном дополнении к C и C' отрицательно определена. Поэтому из неравенства Коши—Буняковского

$$(\varepsilon(D).\varepsilon(D'))^2 \leqslant \varepsilon(D)^2 \cdot \varepsilon(D')^2.$$

Вернемся к морфизму $f: C \to C$ и пусть $D = \Gamma_f$. Так как Γ_f — прообраз диагонали $\Delta \subset C \times C$ при морфизме $(f, 1): C \times C \to C \times C$, $(\Gamma_f.\Gamma_f) = (2 - 2g)\deg(f)$, где g — род кривой C. Отсюда легко получить что $\varepsilon(\Gamma_f)^2 = 2g \cdot \deg(f)$ и затем

$$((\Gamma_f.\Delta) - 1 - \deg(f))^2 \leqslant 4g^2 \deg(f).$$

Применим теперь это к случаю $f = \Phi^n$, где Φ — морфизм Фробениуса над F_q. Так как степень Φ равна q, мы получаем нужное неравенство

$$||\mathrm{Fix}\,\Phi^n| - (1 + q^n)| \leqslant 2g\sqrt{q^n}.$$

1.6. Гипотезы Вейля. В 1949 г. А. Вейль сформулировал ([79]) обобщение гипотезы Э. Артина на гладкие проективные многообразия произвольной размерности над F_q. Главная часть его гипотез состояла в том, что для многообразия X размерности d

$$Z(X,t)=\frac{P_1(t)\cdot P_3(t)\cdot\ldots\cdot P_{2d-1}(t)}{P_0(t)\cdot P_2(t)\cdot\ldots\cdot P_{2d}(t)},$$

где $P_i(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами, $P_i(0)=1$. Более того, если $P_i(t)=\prod\limits_j(1-\alpha_{ij}t)$ — разложения на линейные множители (с комплексными α_{ij}), то $|\alpha_{ij}|=q^{i/2}$.

В терминах чисел $N(X, n)$ эти гипотезы означают следующее. Первая часть, о рациональности $Z(X, t)$, дает разложение на «гармоники»

$$N(X, n)=\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i\left(\sum_{j=1}^{b_i}\alpha_{ij}^n\right),$$

где $b_i=\deg P_i$. Таким образом, многообразие как бы разлагается на элементарные куски, связанные с корнями α_{ij} (или какими-то их группами), и каждый такой кусок дает вклад в число точек, равный $(-1)^i\alpha_{ij}$. Вторая, количественная или риманова, часть гипотез дает оценку для группы слагаемых «веса» i:

$$\left|\sum_{j=1}^{b_i}\alpha_{ij}^n\right|\leqslant b_i\sqrt{q^{in}}.$$

Главный вклад в рост дает член веса $2d$, для которого $b_{2d}=1$ (если X неприводимо), так что

$$N(X, n)=q^{n\dim X}+O(q^{n(\dim X-1/2)}).$$

1.7. Когомологии Вейля. А. Вейль предложил также почти фантастический путь для проверки своих гипотез. А именно, он предположил, что для абстрактных алгебраических многообразий должна существовать гипотетическая теория когомологий $X\mapsto H^*(X)$, похожая на классические когомологии комплексных многообразий. Более точно, $H^*(X)$ должны принимать значения в конечномерных алгебрах над полем F, и должны выполняться свойства I—III из п. 6.7 гл. 2. Так как формула Лефшеца (п. 1.6 гл. 3) является формальным следствием этих свойств, мы получали бы соотношение

$$|\operatorname{Fix}\Phi^n|=\sum_i(-1)^i\operatorname{Tr}(\Phi^n\,|\,H^i(\bar X)),$$

где Tr обозначает след соответствующего гомоморфизма в когомологиях. Тогда многочлены P_i из гипотез Вейля — это характеристические многочлены действия Φ в когомологиях H^i, $P_i(t)=\det(1-t\Phi\,|\,H^i(\bar X))$, а α_{ij} — собственные значения Φ на пространстве $H^i(\bar X)$.

Упоминавшиеся ранее факты о многообразиях с «клеточным» разложением и о кривых хорошо укладываются в эту картину.

Идея Вейля в огромной степени повлияла на все последующее развитие алгебраической геометрии. Кроме создания этальных когомологий, которым посвящена эта глава, его идея вызвала три последовательные перестройки «оснований» алгебраической геометрии, предпринятые самим Вейлем, Серром и, наконец, Гротендиком.

Надо сразу сказать, что, когда Вейль формулировал свою идею, не было не только никаких когомологий абстрактных многообразий, но и само понятие абстрактного многообразия нужно было формировать. С одной такой теорией когомологий мы уже встречались — с когомологиями де Рама. Эта теория обладает нужными формальными свойствами и дает формулу для числа неподвижных точек, но, к сожалению, только в поле $K=\overline{\mathbf{F}}_p$, т. е. по модулю p. Конечно, уже это дает какие-то утверждения типа теоремы Варнинга из п. 1.2. Их обобщения с использованием кристаллических когомологий обсуждаются в [66]. Однако, чтобы получить настоящую формулу для числа неподвижных точек, поле коэффициентов F теории когомологий должно иметь нулевую характеристику.

Укажем еще одно неожиданное ограничение на поле коэффициентов F. Как заметил Серр, этим полем не может быть поле $\mathbf{R}$ (и любое его подполе). В самом деле, для любого многообразия X кольцо его эндоморфизмов $\mathrm{End}(X)$ (а тогда и $\mathrm{End}(X)\otimes\mathbf{R}$) по функториальности должно действовать на пространстве $H^1(X)$. В частности, это так и для кривой X из примера в п. 1.4. Но для этой кривой кольцо $\mathrm{End}(X)\otimes\mathbf{R}$ является телом кватернионов ([70]) и не может действовать на двумерном пространстве $H^1(X)$. По аналогичным причинам полем коэффициентов F не может служить поле p-адических чисел $\mathbf{Q}_p$, где p — характеристика основного поля.

С другой стороны, как мы увидим в § 7, для любого простого $l\neq p$ имеется т. н. *теория l-адических когомологий с коэффициентами* $\mathbf{Q}_l$ (а также *теория кристаллических когомологий*). Такое обилие теорий заставляет думать, что все они — лишь проявление какой-то одной, универсальной теории когомологий. Например, существует ли теория когомологий с полем коэффициентов $\overline{\mathbf{Q}}^{ab}$ — максимальным абелевым расширением $\mathbf{Q}$, или полем всех алгебраических чисел $\overline{\mathbf{Q}}$? Видимо, такие вопросы тесно связаны с теорией мотивов [8].

§ 2. Алгебраическая фундаментальная группа

Прежде чем переходить к этальной топологии, стоит задержаться на понятии фундаментальной группы. Кроме прочего, она имеет прямое отношение к одномерным когомологиям (забегая вперед, скажем, что $H^1(X, A) = \mathrm{Hom}(\pi_1(X), A)$ для конечной абелевой группы A). А это — решающий шаг, так как остальные когомологии так или иначе сводятся к одномерным. Здесь и всюду далее схемы предполагаются отделимыми и нётеровыми; при желании можно даже ограничиться алгебраическими схемами (над полями или над $\mathbf{Z}$, чтобы не лишаться арифметических применений).

2.1. Этальные морфизмы. Этальные морфизмы играют исключительную роль в этальной топологии. Напомним их определение и главные свойства; подробности см. в [5], [45], [68], [71].

Морфизм конечного типа $f: X \to Y$ называется *этальным*, если он плоский и диагональ в $X \times X$ открыта и замкнута. Можно также сказать, что это — гладкий морфизм относительной размерности 0. Для схем над алгебраически замкнутым полем можно дать более наглядное определение: для любой точки $x \in X$ индуцированное отображение касательных конусов $d_x f: C_x X \to C_{f(x)} Y$ должно быть изоморфизмом.

Приведем наиболее распространенные примеры этальных морфизмов. Открытое вложение, конечно, этально. Если $Y = \mathrm{Spec}\, K$, где поле K алгебраически замкнуто, то этальность X над Y означает, что X изоморфно нескольким экземплярам Y, т. е. что X — конечная приведенная схема. Если $Y = \mathrm{Spec}\, K$, где K — произвольное поле, то этальность X над Y эквивалента этальности $X \underset{K}{\otimes}$ над $\mathrm{Spec}\, \bar{K}$, где $\bar{K}$ — алгебраическое замыкание поля K.

Для схем над полем $\mathbf{C}$ этальность морфизма $f: X \to Y$ эквивалентна тому, что отображение $f(\mathbf{C}): X(\mathbf{C}) \to Y(\mathbf{C})$ является локальным изоморфизмом в классической топологии. Это дает основание считать, что в абстрактном случае этальные морфизмы осуществляют локальные изоморфизмы относительно некоторой топологии, более сильной, чем топология Зарисского.

Еще несколько своийтв этальных морфизмов: этальность сохраняется при композиции морфизмов и при замене базы; если X и Y—этальные S-схемы, то любой S-морфизм $X \to Y$ этален.

2.2. Этальные накрытия. Пусть T — «хорошее» топологическое пространство (скажем, полиэдр). Фундаментальную группу $\pi_1(T)$ можно определить двумя способами — через замкнутые пути и через неразветвленные накрытия. В абстрактном случае имеет смысл лишь второй способ. Предварительно напомним связь двух определений π_1.

Пусть $f: T' \to T$ — неразветвленное накрытие топологических пространств и $t \in T$. Тогда фундаментальная группа $\pi_1(T, t)$ при помощи монодромии действует на слой $F = f^{-1}(t)$, и это действие однозначно определяет накрытие. Таким образом, задать неразветвленное накрытие пространства T — то же самое, что задать действие группы $\pi_1(T)$ на некотором множестве F. Связные компоненты T' соответствуют при этом орбитам $\pi_1(T)$ на F. Действие π_1 на себе левыми сдвигами приводит к универсальному (связному) накрытию $\tilde{T}\to T$. Поэтому $\pi_1(T)$ можно определить как группу автоморфизмов универсального накрытия $\tilde{T}\to T$.

Перейдем теперь к алгебраизации этих понятий. Алгебраический аналог неразветвленного накрытия — это конечный этальный морфизм (короче — *этальное накрытие*). Связная схема X называется *односвязной*, если любое ее этальное накрытие тривиально, т. е. является прямой суммой нескольких экземпляров X.

Пример 1. Покажем, что проективная прямая $\mathbf{P}^1$ над алгебраически замкнутым полем односвязна, как и следует ожидать из аналогии с комплексным случаем. В самом деле, пусть $f: X\to\mathbf{P}^1$ — этальное накрытие степени d. Тогда для канонического пучка ω выполнено соотношение $\omega_X=f^*\omega_{\mathbf{P}^1}$. Степень ω_X в d раз больше степени $\omega_{\mathbf{P}^1}$, равной -2, так что $\deg\omega_X=-2d$. С другой стороны, из теоремы Римана—Роха мы знаем, что $\deg\omega_X=2g-2\geqslant-2$, где g — род кривой X. Значит $-2d\geqslant-2$, т. е. $d\leqslant1$.

Пример 2. Покажем, что схема $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$ односвязна. Это один из фундаментальных фактов теории чисел — *теорема Минковского*. Пусть $\operatorname{Spec}A\to\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$ — конечное накрытие степени n, где A — некоторое кольцо алгебраических чисел. Ветвление этого морфизма задается т. н. дискриминантом D. Например, для кольца Гаусса $A=\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\sqrt{-1}$ дискриминант равен -4, так что соответствующее накрытие ветвится над точкой $(2)\in\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$. Есть еще два двулистных накрытия $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$ с ветвлением в точке (2) — это $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}[\sqrt{\pm2}]$.

Накрытие не разветвлено, если его дискриминант D обратим в $\mathbf{Z}$, т. е. $D=\pm1$. В теории чисел имеется довольно нетривиальная оценка для дискриминанта ([2], стр. 174):

$$|D|\geqslant\left(\frac{\pi}{4}\right)^n\frac{n^{2n}}{(n!)^2}.$$

Из нее легко получить, что $|D|=1$ только при $n=1$.

Топологически $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$ надо представлять как что-то вроде трехмерной сферы, расслоенной по Хопфу над S^2.

2.3. Алгебраическая фундаментальная группа. сть X — связная схема. Этальное накрытие $\tilde{X}\to X$ называется *универсальным*, если схема $\tilde{X}$ односвязна. Такое название связано с тем, что любое этальное накрытие $X'\to X$ доминируется универсальным. В самом деле, образуем расслоенное произведение

$$\begin{array}{ccc} X' & \leftarrow & X'\times_X\tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \leftarrow & \tilde{X}. \end{array}$$

Пусть Z — компонента связности схемы $X' \times_X \widetilde{X}$. Тогда проекция $Z \to \widetilde{X}$ является этальным накрытием, а значит, в силу односвязности $\widetilde{X}$, изоморфизмом. Вторая проекция дает тогда морфизм $\widetilde{X} \leftarrow\!\!\!\sim Z \to X'$.

Отсюда следует, что универсальное накрытие, с точностью до изоморфизма, определено однозначно. Кроме того, имеется ровно $\deg(\widetilde{X} \mid X)$ автоморфизмов схемы $\widetilde{X}$ над X. Наконец, видно, что X' можно представить как факторпространство схемы $\widetilde{X}$ по действию конечной подгруппы $\mathrm{Aut}(\widetilde{X} \mid X') \subset \mathrm{Aut}(\widetilde{X} \mid X)$. Все это дает основания назвать группу $\mathrm{Aut}(\widetilde{X} \mid X)$ (алгебраической *фундаментальной группой* схемы X и обозначить ее через $\pi_1(X)$.

К сожалению, универсальное накрытие существует довольно редко. Мы уже видели это (в комплексном случае) для $\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$. Другой пример — $\mathrm{Spec}\, \mathbf{F}_p$, у которого также существуют этальные накрытия (т. е., по существу, конечные расширения поля $\mathbf{F}_p$) сколь угодно большой степени. Пример поля $\mathbf{R}$, у которого есть универсальное накрытие $\mathrm{Spec}\, \mathbf{C} \to \mathrm{Spec}\, \mathbf{R}$, почти уникален. Выход здесь, как и в § 4 гл. 3, — замена универсального накрытия его конечными приближениями.

Определение. Этальное накрытие $\overline{X} \to X$ называется *накрытием Галуа*, если $\overline{X}$ связно и группа $\mathrm{Aut}(\overline{X} \mid X)$ состоит из $\deg(\overline{X} \mid X)$ элементов.

Таким образом, накрытие Галуа максимально симметрично. В топологии такие неразветвленные накрытия называются регулярными; они соответствуют нормальным делителям в π_1. Накрытий Галуа уже достаточно много: любое этальное накрытие (и даже любой конечный набор таких накрытий) доминируется некоторым накрытием Галуа.

Таким образом, все обстоит, как в топологии, только накрытия схемы X контролируются не одной группой $\pi_1(X)$, а проективной системой конечных групп $\mathrm{Aut}(\overline{X} \mid X)$, где $\overline{X}$ пробегает все накрытия Галуа схемы X. Обычно здесь переходят к пределу; группу (проконечную) $\varprojlim_{\overline{X}} \mathrm{Aut}(\overline{X} \mid X)$ также называют *алгебраической фундаментальной группой* схемы X и обозначают через $\pi_1(X)$ или $\pi_1^{\mathrm{al}}(X)$. Итог предыдущих рассуждений можно подвести в следующей теореме:

Теорема. Категория $\mathrm{Fet}(X)$ конечных этальных накрытий схемы X эквивалентна категории конечных $\pi_1(X)$-множеств, т. е. множеств, снабженных непрерывным действием группы $\pi_1(X)$.

Пример 1. Пусть $X = \mathrm{Spec}\, K$ — спектр поля K. Связные этальные накрытия $X' \to X$ соответствуют конечным сепарабельным расширениям полей $K \subset K'$; накрытия Галуа соответствуют при этом расширениям Галуа. Поэтому фундаментальная группа $\pi_1(\operatorname{Spec} K)$ — это в точности группа Галуа $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ поля K. Таким образом, с «топологической» точки зрения одноэлементная схема $\operatorname{Spec} K$ устроена, как пространство $K(\pi, 1)$, где $\pi = \operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$. Только, если поле K алгебраически замкнуто, $\operatorname{Spec} K$ — топологически тривиальный объект.

В п. 1.1 мы видели, как устроены расширения поля $\mathbf{F}_p$. Фундаментальная группа $\pi_1(\operatorname{Spec} \mathbf{F}_p)$ изоморфна проконечному пополнению группы $\mathbf{Z}$. Таким образом, «топологически» $\operatorname{Spec} \mathbf{F}_p$ похожа скорее всего на окружность S^1.

Пример 2. Пусть X — алгебраическая схема над $\mathbf{C}$. Тогда $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X)$ совпадает с проконечным пополнением $\pi_1(X(\mathbf{C}))$. На самом деле, это означает лишь, что конечные неразветвленные накрытия у схемы X и у топологического пространства $X(\mathbf{C})$ совпадают, что мы видели в § 2 гл. 3.

2.4. Функториальные свойства фундаментальной группы. Фундаментальная группа — это просто способ в сжатом и привычном виде хранить информацию об этальных накрытиях. Например, морфизм связных схем $f: X \to Y$ индуцирует функтор замены базы $f^*: \operatorname{Fet}(Y) \to \operatorname{Fet}(X)$. В терминах фундаментальной группы это означает наличие гомоморфизма

$$f_*: \pi_1(X) \to \pi_1(Y).$$

Вот несколько примеров перевода с языка накрытий на язык фундаментальных групп:

а) гомоморфизм $f_*: \pi_1(X) \to \pi_0(Y)$ сюръективен тогда и только тогда, когда для любого связного этального накрытия $Y' \to Y$ многообразие $X \times Y'$ связно;

б) гомоморфизм $f_*: \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ инъективен тогда и только тогда, когда любое накрытие $X' \to X$ можно получить как прямое слагаемое некоторого индуцированного накрытия $X \times_Y Y' \to X$;

в) гомоморфизм $f_*: \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ равен нулю тогда и только тогда любое этальное накрытие $Y' \to Y$ тривиализируется над X.

Пример. Рассмотрим гомоморфизм $\pi_1(\mathbf{P}^1) \to \pi_1(\mathbf{P}^n)$, индуцированный вложением прямой $\mathbf{P}^1 \subset \mathbf{P}^n$. Утверждается, что он сюръективен; вместе с примером 1 из п. 2.2 это дает односвязность $\mathbf{P}^n$. В соответствии с а) нужно проверить, что для любого связного этального накрытия $f: X \to \mathbf{P}^n$ прообраз $f^{-1}(\mathbf{P}^1)$ связен. Это следует из теоремы о связности (см. п. 5.6 гл. 2 или [5]).

Вообще, если X — неприводимое проективное многообразие размерности $\geqslant 2$ и $H \subset X$ — гиперплоское сечение, то гомоморфизм $\pi_1(H) \to \pi_1(X)$ сюръективен. Если к тому же X — гладкое многообразие и $\dim X \geqslant 3$, то это — изоморфизм (см. [46]).

В частности, любая гиперповерхность в $\mathbf{P}^n$, $n \geqslant 3$, односвязна. (Подробнее о технике вычисления π_1 см. [45].)

2.5. Конструирование накрытий. Во многих случаях нужно уметь явно предъявлять этальные накрытия. Имеется два общих приема делать это. Первый основан на сравнении с нулевой характеристикой — см. пример 2 из п. 2.3. Второй связан с использованием алгебраических групп. Пусть G — алгебраическая группа, а N — конечная подгруппа в G. Тогда морфизм факторизации $G \to G/N$ дает этальное накрытие со слоями, изоморфными N. Поэтому морфизм $X \to G/N$ индуцирует накрытие X, быть может тривиальное.

Чаще всего этот прием применяется в случае, когда $G = \mathbf{G}_m$ — мультипликативная группа. Если n не делит характеристику основного поля, то гомоморфизм умножения на n, $\mathbf{G}_m \xrightarrow{n} \mathbf{G}_m$, $z \mapsto z^n$, является этальным накрытием.

Полезен также следующий вариант этой конструкции: пусть L — линейное расслоение над X; тогда имеется канонический морфизм X-схем $\eta: L \to L^{\otimes n}$, который точку L с координатами (x, t) переводит в точку (x, t^n) на $L^{\otimes n}$; пусть теперь f — сечение расслоения $L^{\otimes n}$; подсхема $X' = \eta^{-1}(f)$ конечна над X и этальна, если n и f обратимы. Заметим, что обратимость f означает тривиальность расслоения $L^{\otimes n}$. Это показывает наличие тесной связи между этальными накрытиями X и элементами конечного порядка в группе Пикара $\operatorname{Pic} X$ (теория Куммера — см. п. 4.6).

§ 3. Этальная топология

Как объяснялось в § 4 гл. 3, основная идея этальной топологии заключается в том, чтобы этальные морфизмы объявить «локально тривиальными» отображениями. Посмотрим, как при этом меняются понятия пучка, слоя в точке и т. п. Как мы увидим, фактически ничего менять не приходится.

3.1. Этальные предпучки. Предпучок на топологическом пространстве T определялся как контравариантный функтор на категории $O(T)$ открытых подмножеств T. В этальной топологии роль категории $O(T)$ играет категория $\operatorname{Et}(X)$ всех этальных над X схем.

Определение. *Этальным предпучком* множеств (групп, абелевых групп и т. д.) на схеме X называется контравариантный функтор из категории $\operatorname{Et}(X)$ в категорию множеств (соответственно, групп, абелевых групп и т. д.).

Смысл этого понятия в том, что многие объекты, которые мы раньше связывали с открытыми подсхемами в X, можно на самом деле связать с любой (или только этальной) X-схемой.

Пример 1. Возьмем фиксированную схему Y над X и с каждой X-схемой U свяжем множество

$$h_Y(U) = \mathrm{Hom}_X(U, Y).$$

Ясно, что h_Y — контравариантный функтор по U. Ограничение его на категорию $\mathrm{Et}(X)$ дает этальный предпучок на X. Заметим, что такие функторы называются *представимыми* (схемой Y).

Пример 2. Пусть имеется пучок $\mathcal{O}_X$-модулей F. С каждой X-схемой $f: U \to X$ свяжем группу

$$F(U) = (f^{-1}F \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_U)(U).$$

Это — снова функтор, а значит и этальный предпучок, который мы обозначаем через F_{et} (ср. с п. 2.1 гл. 3).

Пример 3. Свяжем с каждой X-схемой U группу Пикара $\mathrm{Pic}\, X$. Это — снова предпучок.

3.2. Этальные пучки. В § 3 гл. 1 мы уже интерпретировали аксиому пучка как условие коммутирования с пределами. В такой форме условие прямо переносится на категорию $\mathrm{Et}(X)$ и выглядит в ней даже более естественно. Дело в том, что в категории $\mathrm{Et}(X)$ существуют естественные конечные прямые пределы (правда, если допустить неотделимые схемы).

Определение. Этальный предпучок F называется *этальным пучком* (или просто — *пучком*), если он переводит прямые пределы в обратные, т. е.

$$F(\varinjlim U_\alpha) = \varprojlim F(U_\alpha).$$

Поясним это требование. По существу, оно сводится к двум условиям:

а) $F(U \amalg U') = F(U) \times F(U')$;

б) если $U' \to U$ — сюръективный морфизм в категории $\mathrm{Et}(X)$ (такой морфизм называется *этальным покрытием* U), то точна последовательность

$$F(U) \to F(U') \rightrightarrows F(U' \times_U U').$$

В самом деле, если $U' \to U$ — сюръективный этальный морфизм, то U отождествляется с коуравнителем пары морфизмов $U' \times_U U' \rightrightarrows U'$, т. е. с факторсхемой схемы U' по отношению эквивалентности $U' \times_U U' \subset U' \times U'$.

Можно показать, что любой предпучок из примера 1 в п. 3.1 является пучком в этальной топологии. Это важное замечание — чтобы какой-то контравариантный функтор был представимым, он должен быть пучком в этальной топологии. Напротив, любой этальный пучок представляется в этом смысле некоторой «этальной» X-схемой Y; кавычки стоят потому, что схема Y может быть неотделимой и бесконечного типа над X. Можно также сказать, что категория этальных пучков над X получается из категории $\mathrm{Et}(X)$ добавлением всевозможных индуктивных пределов.

Предпучки из примера 2 в п. 3.1 также являются этальными пучками. Напротив, предпучок Pic из примера 3 в п. 3.1 не является пучком ни в этальной топологии, ни даже в топологии Зарисского (взять стандартное покрытие $\mathbf{P}^1$ и пучок $\mathcal{O}(1)$). Чтобы лучше освоиться с понятием этального пучка, рассмотрим подробнее схемы, состоящие из единственной точки.

Пример. Пусть $X = \mathrm{Spec}\, K$, где K — поле, для начала — алгебраически замкнутое. Как объяснялось в п. 2.1, любая этальная схема над X изоморфна прямой сумме экземпляров X (а категория $\mathrm{Et}(X)$ эквивалентна категории конечных множеств). В силу условия а) предпучок на X определяется множеством $F(X)$ и мы не будем делать различия между пучком F и множеством $F(X)$.

Теперь пусть поле K — произвольное. В этом случае категория $\mathrm{Et}(X)$ изоморфна категории конечных G-множеств, где $G = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ — группа Галуа поля K. Если F — этальный предпучок, то он сопоставляет каждой этальной X-схеме X' множество $F(X')$, и эти множества связаны друг с другом сетью отображений. В частности, для каждого X' имеется каноническое отображение $F(X) \to F(X')$, а если X' — объект Галуа, то на $F(X')$ действует группа $\mathrm{Aut}(X' | X)$, оставляя $F(X)$ неподвижным.

Какие же ограничения на это хозяйство накладывает аксиома пучка? Требование а) позволяет ограничиться связными X'. Пусть X' — накрытие Галуа с группой G. Тогда аксиома б), примененная к покрытию $X' \to X$, означает, что $F(X)$ отождествляется с множеством элементов $F(X')$, неподвижных относительно действия G. Теперь уже ясно, что задать этальный пучок F на X — то же самое, что задать множество $\varinjlim_{X'} F(X')$ (где X' пробегает накрытия Галуа X), снабженное непрерывным действием проконечной группы $\pi_1(X) = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$.

3.3. Категория пучков. Как в случае топологических пространств, с каждым этальным предпучком F на X можно связать ассоциированный с ним этальный пучок $\tilde{F}$. Снова это — формальное упражнение на индуктивные пределы. Например, если X — как в примере из п. 3.2 и F — этальный предпучок на X, то пучок $\tilde{F}$ соответствует G-множеству $\varinjlim F(X')$.

Морфизмы пучков (и предпучков) определяются очевидным образом как морфизмы функторов. Таким образом, тальные пучки образуют категорию (эквивалентную категории «этальных» X-схем — см. предыдущий пункт). В частности, если $Y \to Z$ — морфизм X-схем, то он индуцирует морфизм пучков $h_Y \to h_Z$. Стоит напомнить лишний раз, что эпиморфность морфизма пучков $u : F \to G$ не означает эпиморфность их как предпучков, и сечение $t \in G(X)$ поднимается до сечения F лишь локально: найдутся этальное покрытие $U \to X$ и $s \in F(U)$, такие что $u(s) = t|U$.

Пример. Пусть $u : Y \to Z$ — гладкий сюръективный морфизм схем над X. Тогда соответствующий морфизм пучков $h_Y \to h_Z$ эпиморфен. Дело в том, что гладкий морфизм всегда обладает этальным квазисечением, тогда как глобальные (или даже локальные по Зарисскому) сечения существуют крайне редко.

Для этальных пучков имеют смысл понятия прямого и обратного образа пучка. С прямым все очень просто. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм схем. Для «открытого» $V \in \mathrm{Et}(Y)$ его «прообраз» $f^{-1}(V) = X \underset{Y}{\times} V$ также «открыт», т. е. принадлежит $\mathrm{Et}(X)$. Поэтому морфизм f можно считать «непрерывным» в этальном смысле и для пучка F на X определить пучок f_*F на Y, полагая

$$(f_*F)(V) = F(f^{-1}(V)).$$

Это — действительно пучок, и он называется *прямым образом* F при морфизме f. Из формальных соображений для f_* существует левый сопряженный функтор *обратного образа* f^{-1}. Он переводит пучки на Y в пучки на X. Если пучок G на Y представлен «этальной» Y-схемой, которую мы снова обозначим через G, то $f^{-1}G$ представляется «этальной» Y-схемой $G \underset{Y}{\times} X$.

3.4. Слой пучка в точке. Один частный случай операции обратного образа особенно важен. *Геометрической точкой* схемы X называется морфизм $u : \xi \to X$, где ξ — спектр алгебраически замкнутого поля. *Слоем пучка* F в такой точке называется пучок $F_\xi = u^{-1}(F)$ на ξ. Как объяснялось в примере из п. 3.2, пучок можно отождествить с множеством, которое можно описать явно.

Этальной окрестностью геометрической точки $\xi \to X$ назовем любую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d] \\ \xi \arrow[ur] \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

с этальным $U \to X$. Этальные окрестности образуют направленную категорию, и F_ξ есть не что иное, как $\varinjlim F(U)$ по этой категории. Роль функтора слоя показывает следующее

Предложение. Морфизм пучков $F \to G$ является изоморфизмом (мономорфизмом, эпиморфизмом) тогда и только тогда, когда таковым является морфизм слоев $F_\xi \to G_\xi$ во всех геометрических точках ξ.

3.5. Этальная локализация. Пусть $\xi \to X$ — геометрическая точка схемы. Часто бывает удобно перейти к проективному пределу по всем этальным окрестностям точки ξ. Такой предел $\widetilde{X}_\xi = \varprojlim U$ в категории схем существует и называется *строгой локализацией* схемы X в геометрической точке ξ. Это просто спектр кольца $\varinjlim_U H^0(U, \mathcal{O}_U)$. В некотором смысле это — «наименьшая этальная окрестность» ξ, хотя, строго говоря, морфизм $\widetilde{X}_\xi \to X$ не этален, а про-этален. Интуитивно $\widetilde{X}_\xi$ соответствует понятию малой ε-окрестности для комплексной схемы. Конечно, малость здесь относительна: любые две такие окрестности $\widetilde{X}_\xi$ и $\widetilde{X}_{\xi'}$ всегда «пересекаются» над общей точкой X. Главное: как и малый шар, схема $\widetilde{X}_\xi$ представляет гомотопически тривиальный объект. Это вытекает из следующего, по существу тавтологического, свойства: если $U \to \widetilde{X}_\xi$ — этальное покрытие, то оно имеет сечение.

Схема $\widetilde{X}_\xi$ локальна и обладает еще одним очень важным свойством: если $Y \to \widetilde{X}_\xi$ — конечный морфизм схем, то Y есть прямая сумма локальных схем. Такие схемы и соответствующие им кольца называются *гензелевыми* (в честь Гензеля, установившего это свойство для кольца p-адических чисел $\mathbf{Z}_p$). (Подробнее о гензелевых кольцах и схемах см. [48], [68], [71].)

§ 4. Когомологии этальных пучков

4.1. Абелевы пучки. Понятие когомологий имеет смысл для пучков абелевых групп, поэтому мы начнем с них. Правда, H^0 определено для любого пучка множеств, а H^1 — для любого пучка групп (имеются обобщения и на высшие H^q), но мы не будем на это отвлекаться.

Абелевым (этальным) *пучком* на схеме X называется пучок на X со значениями в категории абелевых групп. Можно также сказать, что это пучок множеств со структурой абелевой группы. Категория абелевых пучков абелева, так что имеет смысл говорить о точных последовательностях абелевых пучков (впрочем, слово «абелев» мы будем часто опускать). Последовательность пучков $F \to G \to H$ точна тогда и только тогда, когда для любой геометрической точки ξ точна последовательность абелевых групп $F_\xi \to G_\xi \to H_\xi$ (ср. с п. 3.4). Ниже приведены два главных примера абелевых пучков:

Пример 1. Пусть A — абелева группа. Для любой схемы X можно определить постоянный пучок A_X, полагая для $U \in \mathrm{Et}(X)$ $A_X(U) = A^{\pi_0(U)}$. Этот пучок представляется X-схемой

$A \times X$. Слой его в любой точке равен A. Чаще всего в качестве A будет браться группа $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$; случай $\mathbf{Z}$ менее интересен.

Пример 2. Пусть A — коммутативная групповая схема. Тогда пучок, представимый схемой $A \times X$, очевидно, абелев. Здесь главный пример: $A = \mathbf{G}_m = \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[T, T^{-1}]$ (т. н. мультипликативная группа). Соответствующий пучок сопоставляет каждому $U \in \operatorname{Et}(X)$ группу $H^0(U, \mathcal{O}_U^*)$ обратимых функций на U и обозначается через $\mathcal{O}^*$.

Ядро гомоморфизма умножения на n в этом пучке (в мультипликативной записи — возведения в n-ю степень) $\mathcal{O}^* \xrightarrow{n} \mathcal{O}^*$ обозначается через μ_n. Этот абелев пучок представлен групповой схемой $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}[T]/(T^n - 1)$. Если n обратимо на схеме X, пучок μ_n локально изоморфен постоянному пучку $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Лемма. Если n обратимо на X, то последовательность

$$0 \to \mu_n \to \mathcal{O}^* \xrightarrow{n} \mathcal{O}^* \to 1$$

абелевых пучков на X точна.

Дело в том, что морфизм $\mathbf{G}_m \xrightarrow{n} \mathbf{G}_m$ в этом случае является этальным накрытием (см. п. 2.5 или п. 3.3). В топологии Зарисского эта последовательность уже не точна. Она называется *последовательностью Куммера* и отчасти заменяет экспоненциальную последовательность для комплексных многообразий.

4.2. Когомологии. Как и у любых пучков, у этальных пучков главный интерес представляют глобальные сечения. Группа $F(X)$ глобальных сечений пучка F на X обозначается также через $H^0(X, F)$. Функтор H^0 точен слева, но не справа; чтобы контролировать эту неточность, вводят функторы H^q когомологий как производные функторы для H^0 (см. §§ 1, 4 гл. 1). Это возможно в силу того, что в категории этальных абелевых пучков много инъективных объектов. Можно также воспользоваться этальным вариантом вялой резольвенты Годемана, когда пучку F сопоставляется вялый пучок $\prod_{\xi} F_{\xi}$, где ξ пробегает точки X. Главное то, что для любой точной последовательности абелевых пучков

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

имеется длинная точная последовательность когомологий

$$0 \to H^0(X, A) \to H^0(X, B) \to H^0(X, C) \to H^1(X, A) \to \ldots$$
$$\ldots \to H^q(X, A) \to H^q(X, B) \to H^q(X, C) \to H^{q+1}(X, A) \to \ldots$$

Аналогично определяются функторы высших прямых образов $R^q f_*$ для любого морфизма схем $f: X \to Y$. Как в § 4 гл. 1, имеется *спектральная последовательность Лере*

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_* F) \Rightarrow H^{p+q}(X, F).$$

Когомологии редко вычисляют, пользуясь их определением, хотя в конечном счете к этому все можно свести. Ниже мы приведем два важных случая, когда этальные когомологии удается свести к известным ранее объектам.

4.3. Когомологии Галуа. Пусть X — простейшая схема — спектр поля K. Как объяснялось в примере из п. 3.2, абелев пучок F на X — это то же самое, что абелева группа A, снабженная действием группы Галуа $G=\mathrm{Gal}(\bar{K}|K)$ поля K. При этом $H^0(X, F)$ соответствует группе инвариантов A^G, или $\mathrm{Hom}_G(\mathbf{Z}, A)$, где группа $\mathbf{Z}$ берется с тривиальным действием G. Довольно ясно тогда, что $H^q(X, F)$ совпадают с т. н. когомологиями G-модуля A—$H^q(G, A)$ (см. [75], а также § 4 гл. 3). Заметим, что и тут вместо инъективной резольвенты G-модуля A берут обычно проективную резольвенту тривиального G-модуля $\mathbf{Z}$. Стандартная форма такой резольвенты как свободной абелевой группы над симплициальным G-множеством

$$\{*\} \leftarrow G \leftleftarrows G \times G \leftleftarrows \ldots$$

вызывает ассоциации с комплексом «универсального покрытия» $\tilde{X} \to X$. В частности, $H^1(G, A)$ состоит из 1-коциклов по модулю 1-кограниц. 1-коцикл — это отображение $\varphi: G \to A$, для которого $\varphi(gg') = g\varphi(g') + \varphi(g)$. Если $\varphi(g) = ga - a$ для некоторого $a \in A$, коцикл называется *кограницей*. Например, если группа G тривиально действует на A, $H^1(G, A)$ совпадает с группой $\mathrm{Hom}(G, A)$ групповых гомоморфизмов G в A.

Так как группа Галуа G — проконечная, для тривиального G-модуля $\mathbf{Z}$ $H^1(G, \mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}(G, \mathbf{Z}) = 0$.

4.4. Когомологии когерентных пучков. По аналогии с GAGA можно ожидать, что когомологии когерентных этальных пучков F_{et}, определенных в примере 2 из п. 3.1, тесно связаны с когомологиями когерентного пучка F в топологии Зарисского. На самом деле, они просто совпадают, причем, в отличие от GAGA, для любых схем, а не только полных.

Теорема. Пусть F — квазикогерентный пучок в топологии Зарисского на схеме X. Тогда имеются канонические изоморфизмы

$$H^q(X_{\mathrm{zar}}, F) \xrightarrow{\sim} H^q(X_{\mathrm{et}}, F_{\mathrm{et}}).$$

Достаточно проверить это для аффинной схемы X, а затем — для любого этального покрытия $U \to X$. Пусть $X = \mathrm{Spec}\, A$, $U = \mathrm{Spec}\, B$, а F соответствует A-модулю M. Тогда когомологии для этого покрытия превращаются в когомологии комплекса

$$M \to M \underset{A}{\otimes} B \rightrightarrows M \underset{A}{\otimes} B \underset{A}{\otimes} B \rightrightarrows \ldots,$$

ацикличного, как уже говорилось в п. 1.2 гл. 2.

Таким образом, этальные когомологии когерентных пучков не дают ничего нового по сравнению с топологией Зарисского, и мы можем все внимание переключить на «дискретные» пучки.

Следствие. Пусть K' — расширение Галуа поля K с группой Галуа G. Тогда $H^q(G, K') = 0$ при $q > 0$.

Впрочем, это видно также из того, что K' как G-модуль изоморфен групповой алгебре $K[G']$ ([75]).

4.5. Торзеры. Элементы первой группы когомологий H^1 допускают геометрическую интерпретацию как торзеры, что часто помогает при их вычислении или использовании. Объясним, что такое торзер. Пусть для простоты дана конечная группа A. Скрученная форма постоянного пучка A_X называется *главным A-накрытием* или *A-торзером*. Иначе говоря, это — X-схема Z с действием группы A, которая локально (в этальной топологии) изоморфна тривиальному накрытию со слоем A, т. е. существует этальное покрытие $U \to X$ такое, что $Z \underset{X}{\times} U$ изоморфно $A \times U$.

Можно показать, что в этом случае Z также является этальным покрытием X и что в качестве U можно взять как раз Z. Из § 2 можно понять, что для связной схемы X множество A-торзеров (с точностью до изоморфизма) отождествляется с множеством групповых гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(\pi_1(X), A)$ (ср. также с п. 4.3). Если группа A абелева, последнее множество также является группой и изоморфно $H^1(X_{\mathrm{et}}, A_X)$.

Аналогичные утверждения остаются верными, когда группа A заменяется а) любой аффинной схемой групп, б) любым абелевым пучком ([68]).

Один частный случай особенно важен — торзеры пучка $\mathcal{O}^*$ или схемы групп $\mathbf{G}_m$. Мы знаем, что в топологии Зарисского группа Пикара $\mathrm{Pic}\, X$ интерпретируется как $H^1(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{O}_X{}^*)$. Оказывается, это же верно для этальной топологии, т. е.

$$H^1(X_{\mathrm{et}}, \mathcal{O}^*) = \mathrm{Pic}\, X.$$

Это — снова формальное упражнение на тему спуска, и мы ограничимся одним важным случаем, когда X — спектр поля K. В этом случае предыдущее утверждение превращается в утверждение (известное как *теорема Гильберта 90*) о тривиальности группы $H^1(G, \bar{K}^*)$, где $\bar{K}$ — конечное расширение Галуа с группой Галуа G.

В самом деле, пусть дан 1-коцикл $\varphi: G \to \bar{K}^*$. Для $\theta \in \bar{K}$ образуем «резольвенту» $\beta = \sum_{g \in G} \varphi(g) \cdot g(\theta)$. Тогда для «общего» θ элемент β отличен от нуля. Легко проверить, что $g(\beta) = \varphi(g^{-1})\beta$, т. е. $\varphi(g) = \beta/\varphi(\beta)$ и φ — кограница.

4.6. Теория Куммера. Применяя когомологии к точной последовательности Куммера из примера 2 в п. 4.1 и пользуясь данной в п. 4.4 интерпретацией $H^1(\mathcal{O}^*)$, мы получаем точную последовательность

$$0 \to \mu_n(X) \to H^0(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{n} H^0(X, \mathcal{O}^*) \to H^1(X, \mu_n) \to$$
$$\to \mathrm{Pic}\, X \xrightarrow{n} \mathrm{Pic}\, X \to H^2(X, \mu_n) \to H^2(X, \mathcal{O}^*).$$

Предположим теперь, что X — схема над алгебраически замкнутым полем K (на самом деле, нужно только, чтобы в поле K существовали корни n-й степени из 1) и что n обратимо в K. Тогда пучок μ_n изоморфен $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ и точна последовательность групп

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}^*)/H^0(X, \mathcal{O}^*)^n \to H^1(X, \mu_n) \to \operatorname{Pic}(X)_n \to 0.$$

Иначе говоря, любое этальное накрытие X со слоем $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ получается конструкцией, приведенной в п. 2.5. Если к тому же X — полное многообразие, то $H^0(X, \mathcal{O}^*) = K^*$, и мы получаем

$$H^1(X, \mu_n) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic}(X)_n = \operatorname{Ker}(\operatorname{Pic} X \xrightarrow{n} \operatorname{Pic} X).$$

4.7. Ацикличность конечных морфизмов. Пусть $f: X \to Y$ — морфизм схем, F — абелев пучок на X, $\xi \to Y$ — геометрическая точка. Пользуясь понятием этальной локализации, можно дать описание слоя пучка $R^q f_* F$ в точке ξ. А именно, пусть $\widetilde{Y} = \widetilde{Y}_\xi$ — строгая локализация схемы Y в точке ξ (см. п. 3.5). Тогда

$$(R^q f_* F)_\xi = H^q(X \times_Y \widetilde{Y}, \widetilde{F}), \qquad (*)$$

где $\widetilde{F}$ — «ограничение» пучка F на $X \times_Y \widetilde{Y}$. В самом деле, левая часть есть индуктивный предел когомологий $H^q(X \times_Y V, F)$, когда V пробегает этальные окрестности точки $\xi \to Y$.

Теорема. Предположим, что морфизм $f: X \to Y$ конечен. Тогда $R^q f_* F = 0$ при $q > 0$.

Для доказательства надо показать, что для любой геометрической точки $\xi \to Y$ слой $(R^q f_* F)_\xi$ тривиален. В силу $(*)$ схему Y можно считать строго локальной. Но тогда по свойству гензелевости, приведенному в п. 3.5, схема X является прямой суммой конечного числа строго локальных схем, ацикличных в этальном смысле.

Слои пучка $f_* F$ также легко описать. Из этого можно получить, что нильпотенты (и конечные радикальные расширения) не сказываются на этальных когомологиях, так что всюду далее можно ограничиться приведенными схемами.

§ 5. Когомологии алгебраических кривых

В этом параграфе будут рассмотрены этальные когомологии простейших алгебро-геометрических объектов — кривых. Этот случай очень важен потому, что к нему, пользуясь различными ухищрениями, вроде расслоения на подмногообразия меньшей размерности, удается свести многие вопросы. Всюду в этом параграфе k обозначает алгебраически замкнутое поле, n — целое число, обратимое в k, X — гладкую неприводимую кривую над k.

5.1. Стратегия подхода. Нас будут интересовать когомологии кривой X с коэффициентами в пучке $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Однако придем мы к ним в результате обходного маневра. Пусть $\eta = \operatorname{Spec} k(X)$ — общая (не геометрическая) точка X. Сначала изучаются когомологии точки η с коэффициентами в пучке $\mathcal{O}^*$. Здесь применимы методы когомологий Галуа; главный результат:

Теорема 1. $H^q(\eta, \mathcal{O}^*) = 0$ при $q > 0$.

После этого мы переходим уже к кривой X, но все еще с пучком $\mathcal{O}^*$:

Теорема 2. $H^q(X, \mathcal{O}^*) = 0$ при $q > 1$.

После этого все довольно быстро завершается с помощью теории Куммера.

Поясним, чем вызван такой маневр. Мы хотим получить этальный аналог того топологического факта, что открытая кривая, по существу, одномерна (переход от X к общей точке η дела не меняет). Могло бы показаться даже, что $H^q(\eta) = 0$ при $q > 1$ не только для пучка $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, но и вообще для любого пучка на η. Но это уже неверно; например, из точной тройки $0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0$ видно, что $H^2(\eta, \mathbf{Z}) = H^1(\eta, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ — очень большая группа. Впрочем, мы уже понимаем, что разумные ответы можно ждать лишь от конечных коэффициентов.

Для вычисления $H^q(\eta, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ естественно обратиться к теории Куммера, что и приводит к теореме 1. Однако, имея ее, удобно возвращаться не через $H^q(\eta, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, а через $H^q(X, \mathcal{O}^*)$.

5.2. Теорема Тзена. Пусть $K = k(X)$ — поле рациональных функций на кривой X и L — конечное расширение Галуа поля K. Теорема 1 из п. 5.1 будет доказана, если мы проверим, что для любого такого расширения

$$H^q(\operatorname{Gal}(L/K), L^*) = 0 \text{ при } q > 0.$$

Мы уже видели это при $q = 1$ (п. 4.5). Довольно формальные редукции ([15], [75]) дают, что достаточно проверить обращение в нуль «модифицированных по Тейту» нульмерных когомологий

$$\hat{H}^0(\operatorname{Gal}(L/K), L^*) = K^*/NL^*,$$

где $N: L \to K$ — отображение нормы. Сюръективность N в нашем случае следует из такого специфического свойства полей функций на кривых, как квазиалгебраическая замкнутость (см. § 1, а также [14], § 11). В самом деле, пусть $d = [L:K]$. Тогда уравнение $N(x) = ax_0{}^d$ — однородное степени d от $d+1$ переменных $x_0, x_1, \ldots, x_d$ и, в силу квазиалгебраической замкнутости, имеет нетривиальное решение.

Тем самым теорема 1 из п. 5.1 свелась к следующей *теореме Тзена*:

Теорема. Если поле K имеет степень трансцендентности 1 над алгебраически замкнутым полем, то оно квазиалгебраически замкнуто.

Поясним, как этот результат доказывается. Рассмотрим сначала случай чисто трансцендентного расширения $K=k(T)$. Пусть $F=\sum\limits_{m} a_m(T)X^m$ — однородный многочлен степени $|m|\leqslant d$, где $m=(m_0,\ldots,m_d)$ — мультииндекс. Умножив F на знаменатели a_m, можем считать $a_m(T)$ многочленами от T некоторой степени $\leqslant A$. Будем искать решение $X_i=X_i(T)$, $i=0,\ldots,d$, в виде многочленов степени N от T методом неопределенных коэффициентов. $F(X(T))$ — многочлен степени $A+dN$, коэффициенты которого — многочлены от $(d+1)(N+1)$ неопределенных коэффициентов многочленов $X_0,\ldots,X_d$. Приравнивая нулю коэффициенты $F(X(T))$, мы получаем $A+dN+1$ уравнений от $(d+1)(N+1)$ переменных. Они имеют, конечно, тривиальное решение; наличие же нетривиального решения следует из подсчета размерностей (см. [5], гл. 2, § 3): при $N\geqslant A$ $(d+1)(N+1)>dN+A+1$.

Пусть теперь K — расширение поля $k(T)$ степени r и $e_1,\ldots,e_r$ — базис K над $k(T)$. Представим переменную X_i как $\sum\limits_{j=1}^{r} Y_{ij}e_j$, где Y_{ij} мы ищем в поле $k(T)$. Уравнение $F(X)=0$ приобретает в этом случае форму однородного уравнения $N_{K/k(T)}F(\Sigma Y_{ij}e_j)=0$ над полем $k(T)$. Степень его равна $r\cdot\deg F$, переменных $\geqslant r(\deg F+1)$ и по предыдущему оно имеет решение.

5.3. Когомологии пучка $\mathcal{O}^*$. Пусть теперь x — замкнутая (она же — геометрическая) точка кривой X. Сравним когомологии X и $X\setminus\{x\}$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{O}^*$. Для этого пусть $\tilde{X}$ обозначает строгую локализацию X в точке x. Последовательность Майера — Виеториса для покрытия X «открытыми» $X\setminus\{x\}$ и $\tilde{X}$ дает точную последовательность

$$H^{q-1}(\tilde{X}\setminus\{x\})\to H^q(X)\to H^q(X\setminus\{x\})\oplus H^q(\tilde{X})\to H^q(\tilde{X}\setminus\{x\})$$

(коэффициенты везде $\mathcal{O}^*$). Так как $\tilde{X}\setminus\{x\}=\operatorname{Spec}\tilde{K}$, где $\tilde{K}$ — поле частных схемы $\tilde{X}$, по той же теореме Тзена $H^q(\tilde{X}\setminus\{x\},\mathcal{O}^*)=0$ при $q>0$. Схема $\tilde{X}$ ациклична, поэтому при $q>1$ мы получаем изоморфизм

$$H^q(X,\mathcal{O}^*)\xrightarrow{\sim}H^q(X\setminus\{x\},\mathcal{O}^*).$$

Выбрасывая так точку за точкой, в пределе получим изоморфизм

$$H^q(X,\mathcal{O}^*)\xrightarrow{\sim}H^q(\eta,\mathcal{O}^*)$$

при $q>1$. Теперь теорема 2 из п. 5.1 следует из теоремы 1.

5.4. Когомологии полной кривой. Пусть теперь X — полная кривая. Теория Куммера (п. 4.6) дает точную последовательность

$$0 \to H^1(X, \mu_n) \to \mathrm{Pic}\, X \xrightarrow{n} \mathrm{Pic}\, X \to H^2(X, \mu_n) \to 0,$$

а также обращение в нуль $H^q(X, \mu_n)$ при $q > 2$. Чтобы дальше идентифицировать H^1 и H^2, нам нужно напомнить некоторые факты о группе Пикара кривой.

Первый факт — точность последовательности

$$0 \to \mathrm{Pic}^0 X \to \mathrm{Pic}\, X \xrightarrow{\deg} \mathbf{Z} \to 0.$$

Второй — то, что группа $\mathrm{Pic}^0 X$ классов дивизоров степени 0 отождествляется с группой рациональных точек $J(k)$ некоторого абелева многообразия J — т. н. *якобиана* кривой X. Размерность многообразия J равна g — роду кривой X, т. е. $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Чтобы несколько рассеять таинственность, заметим, что по теореме Римана — Роха (п. 4.1 гл. 2) любой дивизор степени g эквивалентен эффективному дивизору, т. е. сумме точек $P_1 + \ldots + P_g$. Зафиксировав точку $P_0 \in X$, мы получаем сюръекцию $X(k)^g \to \mathrm{Pic}^0 X$, $(P_1, \ldots, P_g) \mapsto \sum_{i=1}^{g} (P_i - P_0)$. Теперь уже легко поверить, что некоторое факторпространство многообразия X^g имеет своими точками группу $\mathrm{Pic}^0 X$; в силу полноты X^g это многообразие J — также полное ([74]).

Рассмотрим гомоморфизм умножения на n, $J \xrightarrow{n} J$. Дифференциал этого морфизма — тоже умножение на n, поэтому он биективен. Значит, морфизм $J \xrightarrow{n} J$ — этальный и, в силу полноты J, сюръективный. Отсюда мы получаем

$$H^2(X, \mu_n) = \mathrm{Coker}\,(\mathbf{Z} \xrightarrow{n} \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}.$$

Ядро гомоморфизма $J \xrightarrow{n} J$ — конечная группа, изоморфная $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{2g}$, как видно из теории абелевых многообразий ([71]). Подведем итог вычислений:

Теорема. Пусть X — полная гладкая кривая. Тогда

$$H^q(X, \mu_n) = \begin{cases} \mu_n \simeq \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} & \text{при } q = 0, \\ \mathrm{Pic}^0(X)_n \simeq (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{2g} & \text{при } q = 1, \\ \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} & \text{при } q = 2, \\ 0 & \text{при } q > 2. \end{cases}$$

5.5. Двойственность на полной кривой. По-прежнему X — полная гладкая кривая. Умножение в когомологиях дает спаривание

$$H^q(X, \mu_n) \otimes H^{2-q}(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to H^2(X, \mu_n) = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}.$$

Теорема. Для полной гладкой кривой X это спаривание совершенно и отождествляет $H^{2-q}(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ с группой $\mathrm{Hom}(H^q(X, \mu_n), \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$.

Главный нетривиальный случай: $q=1$. Нужно убедиться, что любой гомоморфизм $\alpha: H^1(X, \mu_n) \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ определяет некоторый элемент группы $H^1(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, т. е. $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$-торзер над X. Геометрическая конструкция здесь такая. Морфизм $J \xrightarrow{n} J$ можно рассматривать как торзер над J со структурной группой $J(k)_n \simeq H^1(X, \mu_n)$. Применение гомоморфизма α дает $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$-торзер над J; остается сделать замену базы $\varphi: X \to J$, $\varphi(P)$ — класс $(P-P_0)$. Невырожденность спаривания следует из третьего факта о группе Пикара кривой: φ индуцирует изоморфизм

$$\varphi^*: \mathrm{Pic}^0 J \to \mathrm{Pic}^0 X = J$$

(*автодуальность* якобиана).

5.6. Случай открытой кривой. Он легко получается из полного случая в духе п. 5.3. Из делимости $\mathrm{Pic}\, X$ для неполной кривой X сразу получается $H^2(X, \mu_n)=0$. Группа $H^1(X, \mu_n)$ является свободным $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$-модулем с $2g+s-1$ образующими, где $s \geqslant 1$ — число «проколов».

При рассмотрении открытых многообразий полезны бывают т. н. *когомологии с компактными носителями* $H_c^q(X, \mu_n)$. Подробнее о них будет сказано в следующем параграфе, а пока будем их понимать как $H^q(\bar{X}, j_!\mu_n)$, где $\bar{X}$ — гладкая компактификация кривой X, а пучок $j_!\mu_n$ получен из $\mu_{n,X}$ продолжением нулем, так что точна последовательность пучков на $\bar{X}$

$$0 \to j_!\mu_n \to \mu_{n,\bar{X}} \to \mu_{n,S} \to 0.$$

Из нее легко получается, что

а) $H_c^2(X, \mu_n) = H^2(\bar{X}, \mu_n) = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$,

б) $H_c^0(X, \mu_n) = 0$ (если $S = \bar{X} \setminus X$ не пусто),

в) точна последовательность

$$0 \to \mu_n \to \mu_n^S \to H_c^1(X, \mu_n) \to H^1(\bar{X}, \mu_n) \to 0.$$

Пользуясь п. 5.5, можно показать, что $\cup$-произведение устанавливает совершенное спаривание

$$H_c^q(X, \mu_n) \otimes H^{2-q}(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to H_c^2(X, \mu_n) = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}.$$

В общем, все обстоит как в комплексном случае. (Подробнее см. [50], [68].)

§ 6. Фундаментальные теоремы

Всюду далее под *схемой* понимается алгебраическая схема над фиксированным полем k.

6.1. Конструктивные пучки. Разумные ответы в этальной теории получаются только для «конечных» пучков, вроде $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Уточним требование конечности.

Назовем пучок множеств F на схеме X *локально постоянным*, если он становится постоянным пучком с конечными слоями после замены X некоторым этальным покрытием $U\to X$. В этом случае пучок F представляется некоторым этальным накрытием $Z\to X$ или задается представлением $\pi_1(X)$ на конечном множестве.

Конструктивные пучки определяются индуктивно. Пучок F на схеме X *конструктивен*, если он локально свободен на некотором непустом открытом по Зарисскому подмножестве $U\subset X$ и конструктивен на дополнении $X\setminus U$. Из определения сразу видно, что все слои конструктивного пучка конечны, но этого мало — нужна еще конструктивная зависимость от точки ξ числа точек в слое F_ξ. Можно, наконец, сказать, что конструктивные пучки представляются квазиконечными (неотделимыми) схемами над X.

Класс конструктивных абелевых пучков — достаточно гибкий, чтобы в нем было удобно работать. Он замкнут относительно расширений, обратных и прямых образов.

6.2. Теорема о замене базы. Пусть $f: X\to Y$ — морфизм схем, F — абелев пучок на X, ξ — геометрическая точка Y. Теорема о замене базы сравнивает слой пучка $(R^qf_*F)_\xi$ с когомологиями $H^q(X_\xi, F_\xi)$, где $X_\xi=X\times_Y\xi$ — «слой» морфизма f над точкой ξ, а F_ξ — индуцированный на X_ξ пучок.

Теорема. Пусть морфизм f — собственный, а пучок F — конструктивный. Тогда канонический гомоморфизм

$$(R^qf_*F)_\xi\to H^q(X_\xi, F_\xi)$$

является изоморфизмом для всех $q\geqslant 0$.

Заметим, что для обычных топологических пространств аналогичное утверждение верно для любого пучка ([38]). В этальном случае это же верно для конечных морфизмов (п. 4.7); для произвольных собственных морфизмов приходится дополнительно требовать конструктивность F.

Скажем кратко о доказательстве (подробнее см. [50], [49]). Пользуясь леммой Чжоу и расслаивая X гиперплоскими сечениями, можно все свести к случаю, когда слои морфизма f имеют размерность $\leqslant 1$. Пользуясь ацикличностью конечных морфизмов и заменяя, если нужно, X конечным накрытием, можно считать $F=\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Заменяя Y строгой локализацией в ξ, можно считать схему Y строго локальной и доказывать биективность гомоморфизмов

$$H^q(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})\to H^q(X_\xi, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}).$$

Более того, формальные гомологические редукции позволяют ограничиться доказательством биективности лишь при $q=0$, а при $q>0$ нужно устанавливать только сюръективность. В силу п. 5.4 достаточно рассмотреть случаи $q=0, 1, 2$, которые разбираются отдельно с привлечением геометрии.

Случай $q=0$. Для любой схемы X $H^0(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})=(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{\pi_0(X)}$, где $\pi_0(X)$ — множество компонент связности. Поэтому нужно установить биективность отображения

$$\pi_0(X_\xi)\to\pi_0(X).$$

В силу собственности f любая компонента X пересекает замкнутый слой X_ξ. Поэтому остается показать, что слой X_ξ связен для связной схемы X. Пользуясь разложением Штейна морфизма ([5], гл. 2, § 3), можно считать f конечным. Теперь все следует из основного свойства гензелевых колец (п. 3.5).

Случай $q=1$. По предыдущему X и X_ξ можно считать связными. Элементы $H^1(\ldots, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ классифицируют $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$-торзеры, поэтому достаточно проверить, что любое этальное накрытие $X_\xi'\to X_\xi$ продолжается до этального накрытия $X'\to X$.

Делается это так. Сначала накрытие (беспрепятственно) продолжается на любую инфинитезимальную окрестность слоя X_ξ в X. По теореме Гротендика об алгебраизации формальных схем ([47]) отсюда получается этальное накрытие, но не совсем X, а схемы $X\otimes_A\hat{A}$, где $\hat{A}$ — пополнение локального кольца $A=\mathcal{O}_{Y,\xi}$. Наконец, применяется теорема М. Артина об аппроксимации ([16]).

Случай $q=2$. Надо проверить сюръективность $H^2(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})\to H^2(X_\xi, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$. Теория Куммера дает морфизм $\operatorname{Pic} X\to H^2(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ для любой схемы X. Из п. 5.4 легко получить, что для полной кривой X_ξ это — сюръекция. Поэтому остается доказать сюръективность отображения ограничения

$$\operatorname{Pic} X\to\operatorname{Pic} X_\xi.$$

Т. е. надо продолжить дивизор Картье D_ξ на X_ξ до дивизора Картье D на X. Можно считать, что D_ξ сосредоточен в одной точке кривой X_ξ. Продолжая на X локальное уравнение дивизора D_ξ, мы получим дивизор D на X, который высекает на X_ξ дивизор D_ξ плюс еще что-то, расположенное далеко. Теперь надо воспользоваться гензелевостью Y и взять ту компоненту D, которая проходит через D_ξ.

6.3. Когомологии с компактными носителями. Пусть F — конструктивный пучок на схеме X. Вложим X как открытую подсхему в полную схему $\overline{X}$, $j: X\to\overline{X}$. Обозначим через $j_! F$ продолжение F нулем на $\overline{X}\setminus X$; иначе говоря, ограничение $j_! F$ на X равно F, а на $\overline{X}\setminus X$ — нулевой пучок. Ясно, что пучок $j_! F$ также конструктивен.

Определение. Группы $H_c^q(X, F)=H^q(\overline{X}, j_! F)$ называются группами *когомологий с компактными носителями.*

Для полной схемы X очевидно $H^q_c(X, F) = H^q(X, F)$. В общем случае, однако, совсем не очевидно, что определение не зависит от выбора компактификации $X \subset \bar{X}$. Покажем это. Пусть дана другая компактификация $j' : X \to \bar{X}'$; как обычно, можно считать, что $j' = f \circ j$, где $f : \bar{X} \to \bar{X}'$ — (собственный) морфизм. В силу спектральной последовательности Лере достаточно проверить, что $f_*(j_! F) = j'_! F$ и $R^q f_*(j_! F) = 0$ при $q > 0$. Обе проверки можно делать поточечно для точек $\xi \to \bar{X}'$; с помощью теоремы из п. 6.2 они становятся тривиальными. Это доказывает независимость определения $H^q_c(X, F)$ от компактификации.

Компактные когомологии часто удобнее обычных благодаря следующему свойству «аддитивности» (ср. с п. 1.4 гл. 3): если $i : Y \to X$ — замкнутое вложение, то точна последовательность

$$\ldots \to H^q_c(X \setminus Y, F) \to H^q_c(X, F) \to H^q_c(Y, i^*F) \to$$
$$\to H^{q+1}_c(X \setminus Y, F) \to \ldots$$

Аналогично, если $f : X \to S$ — морфизм и $X \xrightarrow{j} \bar{X} \xrightarrow{\bar{f}} S$ — его разложение на открытое вложение j и собственный морфизм $\bar{f}$, то можно определить пучки

$$R^q f_!(F) = R^q \bar{f}_*(j_! F).$$

Снова определение не зависит от выбора разложения, если пучок конструктивен. Уже для любого морфизма f верна теорема о замене базы

$$(R^q f_! F)_\xi = H^q_c(X_\xi, F_\xi)$$

и имеется спектральная последовательность

$$E_2^{p,q} = H^p_c(S, R^q f_! F) \Rightarrow H^{p+q}_c(X, F).$$

6.4. Теорема конечности. Пусть $f : X \to S$ — морфизм конечного типа и F — конструктивный пучок на X. Тогда пучки $R^q f_! F$ конструктивны.

Стандартные редукции, как в п. 6.2, позволяют считать, что f — расслоение на полные кривые и $F = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Заменяя S открытым подмножеством, можно считать f еще и гладким. Но тогда когомологии всех слоев одинаковы (см. теорему из п. 5.4).

Аналогичное рассуждение показывает, что $R^q f_! F = 0$ при $q > 2d$, если размерности слоев f не превышают d.

Следствие. Пусть X — алгебраическая схема над алгебраически замкнутым полем. Тогда группы $H_c^q(X, F)$ конечны при всех q и равны нулю при $q > 2 \dim X$.

Замечание. Аналогичные утверждения верны и для обычных (некомпактных) когомологий, хотя доказательства — более изощренные ([50], [49]). Более того, если схема X аффинна, то $H^q(X, F) = 0$ уже при $q > \dim X$. Это — этальный аналог следствия из п. 2.3 гл. 3; как и там, вместе с двойственностью этот факт влечет слабую теорему Лефшеца о гиперплоских сечениях (п. 7.7).

6.5. Сравнение с классическими когомологиями. Предыдущие результаты показывают, что этальные когомологии конечных пучков «похожи» на классические. Для комплексных схем это можно уточнить. Пусть F — конструктивный пучок на $\mathbf{C}$-схеме X, и $F(\mathbf{C})$ — соответствующий пучок на $X(\mathbf{C})$. Тогда

$$H_c^q(X, F)=H_c^q(X(\mathbf{C}), F(\mathbf{C})).$$

Аналогичное равенство есть и для обычных когомологий H^q. Доказательство сводится, как и раньше, к случаю гладких полных кривых и пучку $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, где верна теорема из п. 5.4.

6.6. Специализация и исчезающие циклы. При изучении комплексных многообразий важную роль играет монодромия ([30]). Ее определение основано на том, что гладкий морфизм $f: X \to S$ с топологической точки зрения локально устроен тривиально. В этальной топологии «одинаковости» слоев нет и можно лишь надеяться на «одинаковость» когомологий слоев. Обсудим проблему сравнения когомологий близких слоев.

Напомним сначала, как это делается в классическом случае. Пусть $f: X \to S$ — морфизм $\mathbf{C}$-схем, собственный и гладкий всюду, кроме слоя над точкой $s_0 \in S$. Выбрав путь Γ из точки $s \in S$ в точку s_0, можно построить отображение специализации $\Gamma: X_s(\mathbf{C}) \to X_{s_0}(\mathbf{C})$, определенное с точностью до гомотопии. Соответствующее отображение в когомологиях $\Gamma_*: H^*(X_*) \to \to H^*(X_s)$ также называется *специализацией*. В случае гладкого семейства специализация — изоморфизм; в общем случае некоторые циклы могут исчезать и для их выявления надо принимать в расчет высшие прямые образы отображения $\Gamma: X_s(\mathbf{C}) \to \to X_{s_0}(\mathbf{C})$. Для этого поступают так. Пусть x — точка слоя X_s и B — малый шар в $X(\mathbf{C})$ вокруг x. Для точек $s \in S$, близких к s_0, пересечение $B \cap X_s(\mathbf{C})$ не зависит от выбора B и s и называется *многообразием исчезающих циклов*. Его когомологии и есть слои пучков $R^q\Gamma_*$.

Это же можно проделать в абстрактной ситуации и даже, в каком-то смысле, более естественно. Напомним, что аналогом малого шара является строгая локализация (п. 3.5). Мы ограничимся далее геометрической ситуацией, считая поле k алгебраически замкнутым, а точки $s_0 \in S$ и x замкнутыми, т. е. геометрическими. Соответствующие локализации обозначим через $\widetilde{S}$ и $\widetilde{X}$.

$$\begin{array}{ccccc}
x \in X & \leftarrow & \widetilde{X} & \leftarrow & \widetilde{X} \times_{\widetilde{S}} \bar{\eta} \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
s_0 \in S & \leftarrow & \widetilde{S} & \leftarrow & \bar{\eta}
\end{array}$$

Что касается «близкой» точки $s \in S$, то в качестве нее удобнее всего взять общую точку η схемы S. Пусть $\bar{\eta}$ — геометрическая точка над η.

Определение. *Специализацией* (или *путем*) из точки $\bar{\eta}$ в точку s_0 называется задание S-морфизма $\bar{\eta} \to \tilde{S}$. *Многообразием исчезающих* (в точке x) *циклов* называется схема $\tilde{X}_{\bar{\eta}} = \tilde{X} \times_{\tilde{S}} \bar{\eta}$.

Заметим, что схема $\tilde{X}_{\bar{\eta}}$ над полем $k(\bar{\eta})$ — не алгебраическая, а лишь предел алгебраических схем, но это не очень существенно. Приведенные когомологии схемы $\tilde{X}_{\bar{\eta}}$ называются *исчезающими* (в точке x) *когомологиями*. Если они отсутствуют, т. е. если $H^0(\tilde{X}_{\bar{\eta}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, тогда как $H^q(\tilde{X}_{\bar{\eta}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0$ при $q > 0$, то морфизм f называется *локально ацикличным* в точке x.

6.7. Ацикличность гладких морфизмов. Локальная тривиальность гладкого морфизма заменяется следующим утверждением:

Теорема. Гладкий морфизм $f: X \to S$ локально ацикличен.

Утверждение локально в этальной топологии, поэтому можно считать, что база S — строго локальная схема и $X = \mathbf{A}_S^N$; индукция позволяет считать $N = 1$. Поэтому все сводится к следующей ситуации: пусть A — локальное строго гензелево кольцо, $A\{T\}$ — (строгая) гензелизация кольца многочленов $A[T]$, $S = \operatorname{Spec} A$, $X = \operatorname{Spec} A\{T\}$; нужно проверить ацикличность слоя $X \to S$ над $\bar{\eta}$ — геометрической общей точкой. Слой $X_{\bar{\eta}}$ — проалгебраическая кривая, поэтому $H^q(X_{\bar{\eta}}) = 0$ при $q > 1$; остается убедиться, что $H^0(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ и что $H^1(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0$ (n предполагается обратимым в A).

Случай H^0. Здесь надо показать, что слой $X_{\bar{\eta}}$ связен. Этот слой равен $\operatorname{Spec} A\{T\} \otimes_A \bar{K}$, где $\bar{K}$ — алгебраическое замыкание поля частных K кольца A. Поле $\bar{K}$ есть предел конечных расширений K', так что достаточно проверить целостность кольца $A\{T\} \otimes_A K'$. Пусть A' — целое замыкание A в поле K'; это — снова гензелево кольцо. Так как $A\{T\} \otimes_A A' = A'\{T\}$, можно, заменяя A на A', считать кольцо A нормальным и доказывать целостность кольца $A\{T\} \otimes_A K$. Теперь уже все ясно: кольцо $A[T]$, как и его этальные расширения, нормально и целостно; значит, таким же является и его локализация $A\{T\} \otimes_A K$.

Случай H^1. Нам нужно проверить, что у $X_{\bar{\eta}}$ нет нетривиальных $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$-торзеров. Пусть такой торзер есть. Заменяя $\bar{K}$ на K', а A на A', как выше, можно считать, что такой торзер имеется уже в схеме $X_\eta = \operatorname{Spec}(A\{T\} \otimes_A K)$. По теории Куммера такое накрытие задается уравнением $Z^n = g$, где $g \in A\{T\}$. Оно не разветвлено над X_η, поэтому $g = u \cdot a$, где u обратимо, а $a \in A$. Если теперь заменить A на $A' = A[\sqrt[n]{a}]$, мы получим нужную нам тривиализацию накрытия.

(Снова подробности см. в [50], [49].)

6.8. Этальная монодромия. Для краткости обозначим через Λ пучок или группу $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, n обратимо в k. Пусть $f: X \to S$ — собственный гладкий морфизм; именно в этой ситуации определялась классическая монодромия. Ее этальным аналогом является утверждение о локальной постоянности пучков $R^q f_* (\Lambda_X)$ на S.

Теорема. В описанной выше ситуации любая специализация $\bar\eta \to s$ на S дает изоморфизм $H^q(X_s, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^q(X_{\bar\eta}, \Lambda)$.

Снова можно считать S строго локальной схемой. Образуем декартову диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} X_{\bar\eta} & \xrightarrow{\varepsilon'} & X & \leftarrow & X_s \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \\ \bar\eta & \xrightarrow{\varepsilon} & S & \leftarrow & \{s\}. \end{array}$$

По теореме о замене базы из п. 6.2 $H^*(X_s, \Lambda) = H^*(X, \Lambda)$, так что остается убедиться в биективности $\varepsilon'^*: H^*(X, \Lambda) \to H^*(X_{\bar\eta}, \Lambda)$. Если воспользоваться спектральной последовательностью Лере, для этого нужно убедиться, что $\varepsilon'_* \Lambda = \Lambda$ и что $R^q \varepsilon'_* \Lambda = 0$ при $q > 0$. Но слои этих пучков как раз и есть исчезающие когомологии, нулевые по теореме из п. 6.7.

Похожим образом можно исследовать поведение когомологий слоев при вырождении. Единичный диск $0 \in \Delta \subset \mathbf{C}$ классической теории заменяется гензелевой стрелкой $S = \operatorname{Spec} k\{T\}$; пунктированный диск $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$ — на $S^* = S \setminus \{0\} = \operatorname{Spec} k\{T\}[T^{-1}]$. Фундаментальная группа $\pi_1(\Delta^*) = \mathbf{Z}$ заменяется на $\pi_1(S^*)$; с точностью до p-кручения она изоморфна $\hat{\mathbf{Z}}$. Мы отсылаем к [30], где излагается теория Пикара—Лефшеца простейших квадратичных вырождений, нужная для когомологического исследования пучков Лефшеца.

§ 7. l-адические когомологии

В этом параграфе поле k алгебраически замкнуто; схема — алгебраическая схема над k. Построенные в предыдущих разделах когомологии с коэффициентами в пучках $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ дают конечную аппроксимацию классических целочисленных когомологий. Чтобы сделать аппроксимацию более завершенной, переходят к пределу при $n \to \infty$.

7.1. l-адические пучки. Зафиксируем простое число l, обратимое в поле k (или отличное от характеристики поля k). Проективная система этальных пучков на схеме X

$$\mathbf{Z}/l\mathbf{Z} \leftarrow \mathbf{Z}/l^2\mathbf{Z} \leftarrow \ldots \leftarrow \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z} \leftarrow \ldots$$

дает проективную систему групп когомологий

$$H^q(X, \mathbf{Z}/l\mathbf{Z}) \leftarrow \ldots \leftarrow H^q(X, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}) \leftarrow \ldots$$

Ее предел $\varprojlim_n H^q(X, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z})$ символически обозначается через $H^q(X, \mathbf{Z}_l)$ и называется группой *l-адических когомологий X*. Заметим, что это — не этальные когомологии пучка $\mathbf{Z}_l$ на X! l-адические когомологии — модули над кольцом $\mathbf{Z}_l = \varprojlim \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}$ целых l-адических чисел.

Кольца такого вида, построенные Гензелем, играют важную роль в алгебраической теории чисел. Они связывают нулевую и положительную характеристики. В самом деле, поле вычетов $\mathbf{Z}_l/l\mathbf{Z}_l = \mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$ — конечное простое поле из l элементов, тогда как поле частных $\mathbf{Q}_l = \mathbf{Z}_l[l^{-1}]$ — поле l-адических чисел — имеет нулевую характеристику. Мы уже пользовались этим в п. 6.3 гл. 2.

Вернемся к когомологиям. Удобно работать не только с постоянными коэффициентами вроде $\mathbf{Z}_l$, но и со скрученными их формами. *l-адическим пучком* (или *пучком $\mathbf{Z}_l$-модулей*) называется проективная система конструктивных пучков

$$F = (F_1 \leftarrow F_2 \leftarrow \ldots \leftarrow F_n \leftarrow \ldots).$$

При этом каждый пучок F_n — это пучок модулей над $\mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}$, а F_n должен совпадать с $F_{n+1}/l^nF_{n+1} = F_{n+1} \otimes (\mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z})$. Когомологиями такого пучка F называются $\mathbf{Z}_l$-модули

$$H^q(X, F) = \varprojlim_n H^q(X, F_n).$$

Если все F_n локально постоянны в смысле п. 6.1, l-адический пучок F также называется *локально постоянным* или *гладким*; такой пучок задается представлением фундаментальной группы $\pi_1(X, x)$ в слое F_x как $\mathbf{Z}_l$-модуле.

Кроме постоянного пучка $\mathbf{Z}_l$, важную роль играет пучок

$$\mathbf{Z}_l(1) = (\mu_l \leftarrow \mu_{l^2} \leftarrow \ldots \leftarrow \mu_{l^n} \leftarrow \ldots)$$

Он изоморфен (не канонически) пучку $\mathbf{Z}_l$. Подобная щепетильность бывает полезной, если хочется контролировать действие группы Галуа (см. п. 7.9). Тензорная степень $\mathbf{Z}_l(1)$ обозначается через $\mathbf{Z}_l(m)$.

Часто когомологиями и пучками интересуются лишь с точностью до кручения. В этом случае говорят также о *$\mathbf{Q}_l$-пучках*, а когомологии обозначают через $H^q(X, \mathbf{Q}_l)$. Мы покажем, что эти когомологии удовлетворяют формальным требованиям из п. 1.7 для когомологий Вейля. Как правило, нужные свойства легко получаются из аналогичных свойств для конструктивных пучков.

7.2. Конечномерность. Когомологии с коэффициентами $\mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}$ довольно регулярно зависят от n и поэтому в пределе также получаются разумные вещи.

Предложение. Пусть дан пучок $\mathbf{Z}_l$-модулей $F=(F_n)$ и каждый F_n локально свободен как пучок над $\mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}$. Тогда $\mathbf{Z}_l$-модули $H^q(X, F)$ имеют конечное число образующих и выполняется формула универсальных коэффициентов

$$0\to H^q(X, F)\otimes(\mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z})\to H^q(X, F_n)\to H^{q+1}(X, F)_{l^n}\to 0.$$

Аналогичное утверждение имеет место для когомологий с компактными носителями. Размерность $\mathbf{Q}_l$-пространства $H^q(X, \mathbf{Q}_l)$ называется q-м *l-адическим числом Бетти* и обозначается через $b^q(X)$. Как мы увидим позже, числа Бетти не зависят от l (и совпадают с топологическими числами Бетти для схем над $\mathbf{C}$).

7.3. Формула Кюннета. Пусть X и Y — полные многообразия. Тогда

$$H^*(X\times Y, \mathbf{Q}_l)=H^*(X, \mathbf{Q}_l)\otimes_{\mathbf{Q}_l}H^*(Y, \mathbf{Q}_l).$$

Аналогичная формула верна, когда вместо коэффициентов $\mathbf{Q}_l$ даны $\mathbf{Q}_l$-пучки F на X и G на Y. Можно также отказаться от предположения полноты X и Y, работая с компактными когомологиями.

Конечно, эта формула получается из аналогичной формулы с конечными коэффициентами $\Lambda=\mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}$. Здесь существенны два шага. Пусть $p: X\times Y\to X$ — проекция; чтобы воспользоваться спектральной последовательностью Лере, надо знать пучки $R^qp_*\Lambda$. Первый шаг: по теореме о замене базы из п. 6.1 они равны $\Lambda_X\otimes H^q(Y, \Lambda)$. Второй шаг: как от коэффициентов Λ перейти к коэффициентам $H^q(Y)$ — типичная задача универсальных коэффициентов.

7.4. Двойственность Пуанкаре: ориентация. В комплексном случае двойственность на гладком d-мерном многообразии X и даже фундаментальный класс, т. е. изоморфизм $\mathbf{Z}\xrightarrow{\sim}H_{2d}^{\text{BM}}(X)$ или $H_c^{2d}(X)\xrightarrow{\sim}\mathbf{Z}$, зависели от выбора ориентации $X(\mathbf{C})$, в конечном счете — от выбора ориентации $\mathbf{C}$. Последняя определяется выбором одного из корней $\sqrt{-1}$ или, более вычурно, выбором изоморфизма группы $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ с группой μ_∞ корней из 1.

В случае кривых мы также видели (п. 5.6), что изоморфизм между $H_c^2(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ и $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ становится каноническим, если пучок $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ заменить пучком μ_n. Поэтому и в общем случае *фундаментальным классом* правильнее считать изоморфизм

$$H_c^{2d}(X, \mathbf{Z}_l(d))\xrightarrow{\sim}\mathbf{Z}_l,$$

существование которого мы сейчас установим. Пучок $\mathbf{Z}_l(d)$, где $d=\dim X$, называется *ориентирующим* (ср. с дуализирующим пучком ω_X в когерентной теории из п. 5.6 гл. 2).

Теорема. Для каждого неприводимого d-мерного многообразия X существует канонический изоморфизм

$$H_c^{2d}(X, \mathbf{Z}_l(d)) \tilde{\to} \mathbf{Z}_l.$$

Этот изоморфизм каноничен в том смысле, что он согласован с открытыми вложениями и конечными накрытиями. Если U — открытая подсхема в X, то $X \setminus U$ имеет меньшую размерность и поэтому (см. пп. 6.3 и 6.4) отображение $H_c^{2d}(U, \mathbf{Z}_l(d)) \to H_c^{2d}(X, \mathbf{Z}_l(d))$ есть изоморфизм. Поэтому при определении фундаментального класса многообразие X можно заменять любым открытым по Зарисскому куском. Вспоминая конструкцию «хороших» окрестностей из § 4 гл. 3, можно считать, что X обладает гладким собственным морфизмом $f: X \to Y$ в гладкое многообразие Y размерности $d-1$. Так как $R^q f_* = 0$ при $q > 2$ и $H_c^q(Y) = 0$ при $q > 2d-2$, $H_c^{2d}(X, \mathbf{Z}_l(d)) = H_c^{2d-2}(Y, R^2 f_* \mathbf{Z}_l(d))$. Но из § 6 мы знаем, что $R^2 f_* \mathbf{Z}_l(1)_X = \mathbf{Z}_{l,Y}$.

7.5. Двойственность Пуанкаре: спаривание. Пусть X — снова неприводимое многообразие размерности d. Умножение в когомологиях дает спаривание

$$H_c^q(X, F) \otimes H^{2d-q}(X, F^{\check{}}) \to H_c^{2d}(X, \mathbf{Z}_l(d)) = \mathbf{Z}_l,$$

где $F^{\check{}} = \mathrm{Hom}(F, \mathbf{Z}_l(d))$.

Теорема. Если многообразие X — гладкое, а пучок $\mathbf{Z}_l$-модулей F — локально свободный, то это спаривание устанавливает двойственность по модулю кручения.

Обычно этим результатом пользуются для гладких полных многообразий, где он дает двойственность между $H^q(X, \mathbf{Q}_l)$ и $H^{2d-q}(X, \mathbf{Q}_l)$. Однако доказывать удобнее в «открытом» варианте. Более того, при доказательстве приходится иметь дело не только с локально свободными, но и с конструктивными пучками. Поэтому удобнее доказывать теорему двойственности в форме

$$H_c^q(X, F) \times \mathrm{Ext}_X^{2d-q}(F, \Lambda(d)) \to \Lambda.$$

Здесь $\Lambda = \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}$; мы не будем подробно объяснять, что такое Ext; скажем только, что это — производные для функтора $F \mapsto \mathrm{Hom}_X(F, \Lambda)$; в каком-то смысле это — гомологии пучка F.

Схема доказательства такая: главный момент — установить, что двойственность для многообразия X и любого его открытого подмногообразия — вещи равноценные (здесь работает индукция по размерности носителя пучка); после этого, уменьшая X, можно сделать пучок F локально свободным, а поднимаясь на этальное накрытие, — свободным и даже изоморфным Λ; наконец, пользуясь «хорошими» окрестностями, можно считать, что X расслоено на гладкие полные кривые над гладкой базой Y. По индукции двойственность есть на Y, а также на слоях (§ 5), откуда уже несложно получить двойственность для X. (Подробности см. в [50], [49], [68].)

7.6. Гомоморфизм Гизина. Как и в комплексном случае, двойственность позволяет придать когомологиям, контравариантным по своей природе, некие ковариантные черты. А именно, пусть $f: X \to Y$ — собственный морфизм с гладким Y, $d = \dim X$, $\dim Y = d + \delta$. Определим *гомоморфизмы Гизина*

$$f_*: H^q(X, \mathbf{Q}_l) \to H^{q+2\delta}(Y, \mathbf{Q}_l(\delta))$$

как двойственные по Пуанкаре к отображениям

$$f^*: H_c^{2d-q}(Y, \mathbf{Q}_l(d)) \to H_c^{2d-q}(X, \mathbf{Q}_l(d)).$$

Отображения Гизина функториальны и удовлетворяют *формуле проекции*

$$f_*(\alpha \cup f^*(\beta)) = f_*(\alpha) \cup \beta$$

для $\alpha \in H^*(X)$, $\beta \in H^*(Y)$.

В частности, если X — замкнутое неприводимое подмногообразие коразмерности δ в гладкой схеме Y, образ $1_X \in H^0(X, \mathbf{Q}_l)$ при отображении Гизина задает т. н. *класс* $\mathrm{cl}(X) \in H^{2\delta}(Y, \mathbf{Q}_l(\delta))$ *подмногообразия* X. Как в классическом случае, cl продолжается до кольцевого гомоморфизма класса цикла кольца Чжоу $A^*(X)$ в кольцо когомологий $\bigoplus\limits_{r \geq 0} H^{2r}(Y, \mathbf{Q}_l(r))$.

В случае дивизоров получается гомоморфизм

$$\mathrm{Pic}\, Y \to H^2(Y, \mathbf{Q}_l(1)),$$

с которым мы уже встречались, по существу, в теории Куммера (п. 4.6). Непрерывная часть группы Пикара, т. е. $\mathrm{Pic}^0 Y$, переходит при этом в 0. В свою очередь, группа $\mathrm{Pic}^0 Y$ тесно связана с пространством $H^1(Y, \mathbf{Q}_l(1))$ (см. снова теорию Куммера). В частности, если $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$, то $\mathrm{Pic}^0 Y = 0$ и, следовательно, $H^1(Y, \mathbf{Q}_l(1)) = 0$. Обратно, если $H^1(Y, \mathbf{Q}_l(1)) = 0$, группа $\mathrm{Pic}^0(Y)$ — инфинитезимальная.

Приведем еще несколько следствий развитого формализма.

7.7. Слабая теорема Лефшеца. Пусть X — n-мерное проективное многообразие, $Y \subset X$ — гиперплоское сечение. Так как многообразие $X \setminus Y$ — аффинное, $H^i(X \setminus Y) = 0$ при $i > n$ (см. замечание в п. 6.4). Предположим, что $X \setminus Y$ — гладкое. Тогда по двойственности Пуанкаре $H_c^i(X \setminus Y) = 0$ при $i < n$, и из длинной точной последовательности в п. 6.3

$$\ldots \to H_c^i(X \setminus Y) \to H^i(X) \to H^i(Y) \to H_c^{i+1}(X \setminus Y) \to \ldots$$

мы получаем изоморфизмы $H^i(X) \xrightarrow{\sim} H^i(Y)$ при $i < n-1$ и вложение $H^{n-1}(X) \hookrightarrow H^{n-1}(Y)$. Если многообразия X и Y — гладкие, то двойственные к предыдущим отображения Гизина дают изоморфизмы $H^i(Y) \xrightarrow{\sim} H^{i+2}(X)$ при $i \geqslant n$ и эпиморфизм $H^{n-1}(Y) \to H^{n+1}(X)$.

7.8. Формула следа Лефшеца. Для эндоморфизма $f: X \to X$ обозначим через $f^* | H^r(X)$ индуцированный эндоморфизм в когомологиях $H^r(X, \mathbf{Q}_l)$. Если многообразие X — гладкое и полное, то число неподвижных точек f (см. п. 1.6 гл. 3) дается следующей формулой Лефшеца:

$$(\Gamma_f . \Delta) = \sum_{r \geqslant 0} (-1)^r \operatorname{Tr}(f^* | H^r(X)).$$

Доказывается она как в п. 1.6 гл. 3. При помощи отображения cl вычисление индекса пересечения $(\Gamma_f . \Delta)$ переводится в кольцо $H^*(X \times X)$ и далее повторяется без изменения.

7.9. Применение к Z-функции. В этом и следующем пунктах X обозначает алгебраическую схему над конечным полем $\mathbf{F}_q$, $\overline{X} = X \underset{\mathbf{F}_q}{\otimes} \overline{\mathbf{F}}_q$ — ее геометризация, $\Phi: \overline{X} \to \overline{X}$ — эндоморфизм Фробениуса над $\mathbf{F}_q$. Предположим, что схема X — гладкая и полная, $\dim X = d$. Как объяснялось в п. 1.7, из формулы Лефшеца следует рациональность Z-функции

$$Z(X, t) = \prod_{r=0}^{2d} P_r(t)^{(-1)^{r+1}}, \qquad (*)$$

где $P_r(t) = \det(1 - t\Phi^* | H^r(\overline{X}, \mathbf{Q}))$. Априори $P_r(t)$ — многочлены с коэффициентами из $\mathbf{Q}_l$. Однако, пользуясь тем, что $Z(X, t)$ — ряд с целыми коэффициентами, а также тем, что корни P_r не пересекаются (см. следующий параграф), можно получить, что многочлены P_r имеют целые коэффициенты и не зависят от l. Числа Бетти $b^r(X)$ — это степени P_r, поэтому они также не зависят от l.

Из двойственности Пуанкаре вытекает функциональное уравнение

$$Z(X, q^{-d}t^{-1}) = \pm q^{\frac{d\chi}{2}} t^{\chi} Z(X, t),$$

где $\chi = \Sigma(-1)^r b^r(X)$ — топологическая эйлерова характеристика.

На самом деле, для любого (т. е. не обязательно полного или гладкого) многообразия имеет место разложение $(*)$, где

$$P_r(t) = \det(1 - t\Phi^* | H_c^r(\overline{X}, \mathbf{Q})).$$

Удобнее доказывать даже более общее утверждение, где постоянный пучок $\mathbf{Q}_l$ заменен произвольным $\mathbf{Q}_l$-пучком F.

7.10. L-функции. Пусть F — $\mathbf{Q}_l$-пучок на схеме X и $\overline{F}$ — его подъем на $\overline{X}$. Тогда имеется канонический изоморфизм $\overline{F} \simeq \Phi^* \overline{F}$, что позволяет определить эндоморфизм Фробениуса

$$\Phi^*: H_c^r(\bar{X}, \bar{F}) \to H_c^r(\bar{X}, \bar{F}).$$

Рассмотрим подробнее случай, когда схема $X = \operatorname{Spec} \mathbf{F}_{q^n}$ состоит из единственной точки x степени n над $\mathbf{F}_q$. Тогда многообразие $\bar{X}$ состоит из n различных точек $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, циклически переставляемых эндоморфизмом Φ. Пучок $\bar{F}$ превращается в n слоев — пространств $F_{\bar{x}_1}, \ldots, F_{\bar{x}_n}$, переставляемых вслед за точками (рис. 7).

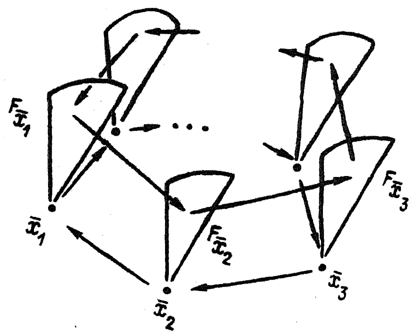


Рис. 7

Итерированное n раз, это отображение дает уже эндоморфизм слоя $F_{\bar{x}}$, который обозначается через $\Phi_x: F_{\bar{x}} \to F_{\bar{x}}$. Можно проверить, что Φ_x обратен к действию Фробениуса как элемента группы Галуа $\mathrm{Gal}(k(\bar{x}) \mid k(x))$ в геометрическом слое пучка F (см. пример в п. 3.2).

С каждой парой (X, F), где X — схема над $\mathbf{F}_q$, а F — $\mathbf{Q}_l$-пучок на X, свяжем соответствующую Z-функцию (называемую также L-функцией):

$$Z(X, F; t) = \prod_{x \in X} \det(1 - \Phi_x t^{\deg(x)})^{-1}.$$

Здесь, как и в п. 1.3, x пробегает все замкнутые точки схемы X, а Φ_x понимается как описанный выше эндоморфизм $\mathbf{Q}_l$-пространства $F_{\bar{x}}$, где $\bar{x}$ — геометрическая точка над x. В частном случае $F = \mathbf{Q}_l$ мы получаем обычную Z-функцию. Обобщая формулу (*) в п. 7.9, Гротендик получил следующее «интегральное» представление, или когомологическую интерпретацию Z-функции:

$$Z(X, F; t) = \prod_{r=0}^{2\dim X} \det(1 - t\Phi^* \mid H_c^r(\bar{X}, \bar{F}))^{(-1)^{r+1}}.$$

Эта формула просто выводится из *обобщенной формулы следа*

$$\sum_{\bar{x} \in \mathrm{Fix}\,\Phi} \mathrm{Tr}\,(\Phi_{\bar{x}} \mid F_{\bar{x}}) = \sum_r (-1)^r \,\mathrm{Tr}\,(\Phi^* \mid H_c^r(\bar{X}, \bar{F}))$$

(конечно, аналогичная формула имеется и для Φ^n). (Доказательство ее можно найти в [50], [49], [68].)

Левую часть последней формулы при подходящих X и F удается интерпретировать как тригонометрические суммы (см. [50]). Об оценках правой части см. следующий параграф.

§ 8. Теорема Делиня

Пусть X — многообразие над конечным полем. Тогда когомологии $H^*(\bar{X}, \mathbf{Q}_l)$ — это не просто векторные пространства над $\mathbf{Q}$. На них действует эндоморфизм Фробениуса. Теорема Делиня отвечает на вопрос о собственных значениях этого эндоморфизма и, в частности, дает утвердительный ответ на риманову часть гипотез Вейля (п. 1.6). Для формулировки утверждений удобно пользоваться понятием веса. Тогда, грубо говоря, r-мерные когомологии имеют вес r, так что имеется полная аналогия с классическим случаем (см. § 3 гл. 3). Более того, многие результаты о классических когомологиях можно представлять как следствие результатов о когомологиях многообразий над конечными полями.

8.1. Веса. Собственные значения эндоморфизма Фробениуса, как и любого эндоморфизма векторного пространства над полем $\mathbf{Q}_l$, — это числа, алгебраические над $\mathbf{Q}_l$, т. е. элементы алгебраического замыкания $\bar{\mathbf{Q}}_l$. Скажем, что число $\alpha \in \bar{\mathbf{Q}}_l$ — *чистое*, если при любом вложении полей $\iota: \bar{\mathbf{Q}}_l \to \mathbf{C}$ модуль $|\iota\alpha|$ комплексного числа $\iota\alpha$ не зависит от ι; мы обозначаем его просто через $|\alpha|$. Конечно, чистые числа очень специфичны; например, они — алгебраические над $\mathbf{Q}$. Если задано натуральное число N, то *весом* (чистого) числа $\alpha \in \bar{\mathbf{Q}}_l$ относительно основания N называется вещественное число

$$w(\alpha) = w_N(\alpha) = 2 \log_N |\alpha|.$$

Пусть теперь X — схема над полем $\mathbf{F}_q$ и F — l-адический пучок на X (l взаимно просто с q). Тогда на пучке $\bar{F}$ над $\bar{X} = X \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q$ действует эндоморфизм Фробениуса Φ (п. 7.10). В точке (геометрической) $\bar{x}$ над $x \in X$ этот эндоморфизм $\Phi_x: F_{\bar{x}} \to F_{\bar{x}}$ обратен к действию элемента Фробениуса из группы Галуа $\mathrm{Gal}\,(k(\bar{x}) \mid k(x))$ (пп. 1.1 и 7.10).

Определение. Пучок F называется *чистым пучком веса* r, если для любой точки $x \in X$ все собственные значения эндоморфизма $\Phi_x: F_{\bar{x}} \to F_{\bar{x}}$ — чистые числа веса r относительно основания $N(x) = \mathrm{Card}\,(k(x))$ — «абсолютного размера» точки x.

Пример. Тривиальный пучок $\mathbf{Q}_l$, очевидно, — чистый веса 0, так как Фробениус тривиально действует на его слоях.

Более интересны пучки $\mathbf{Q}_l(1)$ и $\mathbf{Z}_l(1)$. Последний получается как проективный предел пучков μ_{l^n} корней из 1 (п. 7.1). Фробениус действует по формуле $\alpha \mapsto \alpha^q$ или, в аддитивной записи, как умножение на q. Поэтому обратный к нему эндоморфизм Φ_x действует на $\mathbf{Q}_l(1)_{\bar{x}} \simeq \mathbf{Q}_l$ как умножение на $N(x)^{-1}$. Отсюда следует, что вес пучка $\mathbf{Q}_l(1)$ равен -2.

Ясно, как вес преобразуется при операциях тензорного произведения чистых пучков, перехода к двойственному пучку и т. д. Однако сумма чистых пучков разного веса уже не будет чистым пучком. По этой причине удобно ввести понятие *смешанного пучка* как пучка с фильтрацией, все факторы которого — чистые пучки. Делинь предполагает, что любой пучок — смешанный. *Весами* смешанного пучка называются веса его чистых факторов.

8.2. Главная теорема. Если $f: X \to C$ — морфизм схем над конечным полем (или над $\mathbf{Z}$) и F — смешанный пучок на X с весами $\leqslant n$, то для любого r пучок $R^r f_!(F)$ на Y — смешанный с весами $\leqslant n+r$.

Следствие 1. Пусть F — смешанный пучок с весами $\leqslant n$ на схеме X. Тогда собственные значения Фробениуса на $H_c^r(\bar{X}, \bar{F})$ — чистые веса $\leqslant n+r$.

Ср. с п. 3.3 гл. 3. По двойственности отсюда можно получить

Следствие 2. Пусть многообразие X — гладкое и F — гладкий смешанный пучок с весами $\geqslant n$. Тогда собственные значения Фробениуса на $H^r(\bar{X}, \bar{F})$ — чистые веса $\geqslant n+r$.

Ср. с п. 3.4 гл. 3. Применительно к случаю гладкого полного многообразия X и пучка $F = \mathbf{Q}_l$ мы получаем утвердительный ответ на риманову часть гипотез Вейля:

Теорема. Пусть X — гладкое полное многообразие над $\mathbf{F}_q$. Тогда характеристический многочлен Фробениуса $\det(1 \cdot t - \Phi^* \mid H^r(\bar{X}, \mathbf{Q}_l))$ имеет целые коэффициенты и все его корни по модулю равны $q^{r/2}$.

Иначе говоря, вес $H^r(X, \mathbf{Q})$ как пучка над $\operatorname{Spec} \mathbf{F}_q$ равен r. Значение этого утверждения и применение его к оценкам числа целых точек объяснялись в п. 1.3. Мы приведем лишь два примера:

Пример 1. Пусть $X \subset \mathbf{P}^{n+r}$ — гладкое полное пересечение размерности n над полем $\mathbf{F}_q$. Тогда

$$\| X(\mathbf{F}_q) \| - | \mathbf{P}^n(\mathbf{F}_q) \| \leqslant b q^{n/2},$$

где b — n-е число Бетти X.

Дело тут в том, что когомологии полного пересечения совпадают с когомологиями $\mathbf{P}^n$ всюду, кроме средней размерности (см. п. 7.7). Член $bq^{n/2}$ как раз отвечает вкладу $H^n(X)$.

Пример 2. Пусть Q — многочлен степени d от n переменных над $\mathbf{F}_q$ и $\psi: \mathbf{F}_q \to \mathbf{C}^*$ — нетривиальный аддитивный характер. Предположим, что d взаимно просто с q и что гиперповерхность в $\mathbf{P}^{n-1}$, заданная уравнением $Q_d=0$, где Q_d — однородная часть Q степени d, — гладкая. Тогда тригонометрическая сумма

$$\Sigma = \sum_{x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{F}_q} \psi(Q(x_1, \ldots, x_n))$$

допускает оценку $|\Sigma| \leqslant (d-1)^n q^{n/2}$.

Снова здесь дело в том, что когомологии $H_c^*(\mathbf{A}^n)$ (с коэффициентами в подходящем пучке F — см. формулу следа в п. 7.10) не тривиальны лишь в размерности n. Пространство же $H_c^n(\mathbf{A}^n, F)$ имеет вес n и размерность $(d-1)^n$.

(О p-адических оценках действия Фробениуса см. [66].)

8.3. Механика доказательства. А. Стандартные редукции, вроде расслоения на кривые, позволяют свести общее утверждение из п. 8.2 к следующему утверждению о кривых над $\mathbf{F}_q$:

Если X — гладкая полная кривая, $j: U \to X$ — открытое вложение и F — гладкий пучок на U веса n, то пространство $H^r(X, j_*F)$ имеет чистый вес $n+r$.

По двойственности ключевой случай здесь — H^1.

Б. Нас интересует пучок j_*F, а мы знаем нечто о весе пучка F. Важный момент состоит в том, что веса пучка j_*F в точках $s \in X \setminus U$ не больше n (и даже равны $n-k$, где k — целое неотрицательное число).

Рассуждение здесь характерное — из общих соображений можно проверить, что вес $(j_*F)_s$ (обозначим его через t) не превосходит $n+2$, причем это верно для любого пучка F. Применяя эту оценку к пучку $F^{\otimes k}$, мы получаем, что $k \cdot t \leqslant k \cdot n + 2$, откуда $t \leqslant n$.

В. Далее удобно считать, что F — чистый пучок веса 0. Так как пучки j^*F_* и $j_!F$ отличаются незначительно, все сводится к утверждению «в условиях **А** веса пространства $H_c^1(U, F) = H^1(X, j_!F)$ не превосходят 1».

Г. Непосредственно (в духе Адамара и Валле-Пуссена) устанавливается, что веса $H_c^1(U, F)$ *строго меньше* 2; это — ключевой момент. Нам же нужно убедиться, что веса $\leqslant 1$. Теперь снова применяется трюк, похожий на **Б**.

А именно, допустим, нам известно, что веса пространства $H_c^2(U \times U, F \boxtimes F)$ меньше $2+\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда из формулы Кюннета следует, что веса $H_c^1(U, F)$ меньше $1+\varepsilon/2$.

Д. Для исследования когомологий $H_c^2(U \times U, \cdot F \boxtimes F) = H^2(X \times X, j_!F \boxtimes j_!F)$ поверхность $X \times X$ расслаивается пучком Лефшеца. Точнее, расслаивается, конечно, раздутие $X \times X$ вдоль оси пучка, но это совершенно несущественно.

Будем считать, что $f: X \times X \to \mathbf{P}^1$ — наше расслоение, а $G = j_! F \boxtimes j_! F$.

Предположим, что мы доказали (см. Е), что пучок $R^1 f_* G$ имеет веса $\leqslant 1$. Тогда из пункта Г мы получаем, что веса $H^1(\mathbf{P}^1, R^1 f_* G)$ меньше 3. Это пространство, по существу, совпадает с $H_c^2(U \times U, F \boxtimes F)$, так что и веса $H_c^2(U \times U, F \boxtimes F)$ меньше 3. Согласно замечанию Г, тогда веса $H_c^1(U, F)$ меньше $1+1/2$, причем это верно для любого пучка F веса 0. Применяя эту улучшенную оценку к когомологиям пучка $R^1 f_* G$ (вес которого $\leqslant 1$), мы получаем, что веса $H^1(\mathbf{P}^1, R^1 f_* G)$ (или $H_c^2(U \times U, F \boxtimes F)$) меньше $1+(1+1/2)$. Отсюда веса $H_c^1(U, F)$ меньше $1+1/4$, затем $1+1/8$, $1+1/16$ и т. д. В конце концов получаем что веса $H_c^1(U, F)$ не больше 1.

Е. Остается оценить веса пучка $R^1 f_* G$ в общих точках прямой $\mathbf{P}^1$. Любой элемент слоя $(R^1 f_* G)_t$ над такой точкой $t \in \mathbf{P}^2$ (т. е. элемент пространства $H^1(f^{-1}(t), G_t)$) либо исчезает в некотором специальном слое, либо не исчезает нигде. Элементы второго типа образуют гладкий подпучок в $R^1 f_* G$ и не дают вклада в когомологии $H^1(\mathbf{P}^1, R^1 f_* G)$, потому что $\mathbf{P}^1$ односвязно. Элементы первого типа, как следует из локальных вычислений в слоях их исчезновения, имеют целые веса. Эти веса к тому же <2 (см. Г), поэтому, по существу, веса $R^1 f_* G$ не превосходят 1 и можно рассуждать, как в **Д**.

(Подробное доказательство см. в [27]; доказательство для гладкого полного X см. в [26], [61].)

8.4. Геометрические применения. Помимо естественных применений к многообразиям над конечными полями, Делинь приводит несколько геометрических следствий своей основной теоремы, которые относятся к многообразиям над произвольным алгебраически замкнутым полем k. Принцип сведения к конечным полям см. в п. 6.3 гл. 2.

Теорема о полупростоте. Пусть $f: X \to Y$ — гладкий собственный морфизм k-схем и Y — нормальное многообразие. Тогда пучки $R^r f_*(\mathbf{Q}_l)$ на Y полупросты.

Последнее означает, что представление $\pi_1(Y)$ в слое $H^r(X_y, \mathbf{Q}_l)$ этого пучка полупросто, или вполне приводимо. Это утверждение редуцируется к схемам над конечным полем $\mathbf{F}_q$. Из теоремы в п. 8.2 мы знаем, что пучки $R^r f_*(\mathbf{Q}_l)$ — чистые веса r. Поэтому достаточно установить следующий факт для многообразий над $\mathbf{F}_q$: пусть Y — гладкая схема над $\mathbf{F}_q$ и F — гладкий чистый $\mathbf{Q}_l$-пучок на Y; тогда пучок $\bar{F}$ на $\bar{Y} = Y \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q$ — полупростой.

Для проверки этого обозначим через $\bar{F}'$ наибольший полупростой подпучок в $\bar{F}$ (сумму простых подпучков). Он инвариантен относительно действия Фробениуса и потому происходит из некоторого подпучка $F' \subset F$. Тогда F получается как расширение пучка $F''=F/F'$ при помощи F' и задается некоторым элементом $\mathrm{Ext}^1(F'', F')=H^1(Y, \mathrm{Hom}(F'', F'))$. Веса F' и F'' одинаковы, поэтому пучок $\mathrm{Hom}(F'', F')$ имеет вес 0, а пространство $H^1(\bar{Y}, \mathrm{Hom})$, согласно п. 8.2, имеет веса $\geqslant 1$. Поэтому оно не содержит инвариантных элементов, расширение тривиально и $F''=0$.

8.5. Трудная теорема Лефшеца. Еще одно геометрическое следствие. Пусть X — проективное многообразие над k, $Y \subset X$ — гиперплоское сечение, η — класс Y в $H^2(X, \mathbf{Q}_l)$ (см. п. 7.6; мы не делаем здесь различия между $\mathbf{Q}_l$ и $\mathbf{Q}_l(1)$).

Теорема. Пусть X — гладкое проективное многообразие размерности n. Тогда для любого $r \geqslant 0$ умножение на η^r

$$\eta^r : H^{n-r}(X, \mathbf{Q}_l) \to H^{n+r}(X, \mathbf{Q}_l)$$

является изоморфизмом.

Умножение на $\eta = \mathrm{cl}(Y)$ можно получить как композицию ограничения $i^* : H^*(X) \to H^*(Y)$ и гомоморфизма Гизина $i_* : H^*(Y) \to H^{*+2}(X)$. Поэтому умножение на η^r можно представить как

$$H^{n-r}(X) \xrightarrow{i^*} H^{n-r}(Y) \xrightarrow{\eta^{r-1}} H^{n+r-2}(Y) \xrightarrow{i_*} H^{n+r}(X).$$

Если $r \geqslant 2$, крайние члены — изоморфизмы по слабой теореме Лефшеца (п. 7.7), а средний — по индукции. Поэтому остается рассмотреть критический случай $r=1$. Биективность композиции вложения $H^{n-1}(X) \to H^{n-1}(Y)$ и сюръекции $H^{n-1}(Y) \to H^{n+1}(X)$ эквивалентна невырожденности формы пересечения

$$H^{n-1}(Y) \times H^{n-1}(Y) \to H^{2n-2}(Y) = \mathbf{Q}_l$$

на образе $H^{n-1}(X)$.

Для интерпретации образа $H^{n-1}(X)$ в $H^{n-1}(Y)$ гиперплоское сечение Y включается в пучок Лефшеца (Y_t), $t \in \mathbf{P}^1$. Пусть $S \subset \mathbf{P}^1$ — конечное множество вырожденных слоев. Тогда $\mathrm{H}^{n-1}(Y_t)$ являются слоями гладкого пучка $R^{n-1}f_*\mathbf{Q}_l$ (где $f : \tilde{X} \to \mathbf{P}^1$ — соответствующее расслоение) на $\mathbf{P}^1 \setminus S$. Фундаментальная группа $\pi_1(\mathbf{P}^1 \setminus S)$ действует на $H^{n-1}(Y)$. Пользуясь индуктивным предположением о справедливости теоремы Лефшеца для Y, можно показать (см. [30] и п. 8.6), что подпространство $H^{n-1}(X)$ совпадает с подпространством инвариантов $H^{n-1}(Y)^{\pi_1(\mathbf{P}^1 \setminus S)}$ в $H^{n-1}(Y)$.

В силу п. 8.4 представление $\pi_1(\mathbf{P}^1 \setminus S)$ в $H^{n-1}(Y)$ вполне приводимо и сохраняет форму пересечения. Обозначим через W дополнительное к $H^{n-1}(X)$ пространство в $H^{n-1}(Y)$. Она уже не имеет тривиальных факторпространств. Скалярное произведение с любым элементом из $H^{n-1}(X)$ является инвариантным линейным функционалом на W, нулевым в силу сказанного выше. Это значит, что W ортогонально к $H^{n-1}(X)$, т. е. что ограничение формы пересечения на $H^{n-1}(X)$ не вырождено.

Следствие. Пусть X — гладкое проективное многообразие над полем k. Тогда числа Бетти $b^r(X)$ четны для нечетных r и положительны для четных r, $0 \leqslant r \leqslant 2 \dim X$.

Вероятно, это верно для любых гладких полных многообразий.

8.6. Теорема об инвариантном подпространстве. Пусть $f: X \to S$ — гладкий собственный морфизм k-многообразий. Как и в классическом случае, из трудной теоремы Лефшеца можно вывести утверждение о вырождении в члене E_2 спектральной последовательности Лере (ср. с п. 3.5 гл. 3)

$$E_2^{pq} = H^p(S, R^q f_* \mathbf{Q}_l) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbf{Q}_l).$$

В частности, сюръективно каноническое отображение

$$H^r(X, \mathbf{Q}_l) \to H^0(S, R^r f_* \mathbf{Q}_l) = H^r(X_s, \mathbf{Q}_l)^{\pi_1(S,s)},$$

где s — замкнутая точка S, а $X_s = f^{-1}(s)$ — слой над s. Рассуждая, как в комплексном случае, и апеллируя к весам, мы получаем следующее утверждение:

Теорема. Пусть в приведенных выше обозначениях и предположениях $\bar{X}$ — гладкая компактификация X. Тогда образ $H^r(\bar{X}, \mathbf{Q}_l)$ в $H^r(X, \mathbf{Q}_l)$ совпадает с подпространством инвариантных элементов $H^r(X_s, \mathbf{Q}_l)^{\pi_1(S,s)}$.

Имеет место также локальный вариант этой теоремы ([27]): пусть $f: X \to S$ — собственный морфизм, s — замкнутая, а η — общая точка S; предположим, что морфизм f — гладкий над точкой η; тогда для любой специализации $\bar{\eta}$ в s (п. 6.6) гомоморфизм специализации

$$H^*(X_s) \to H^*(X_{\bar{\eta}})^{\mathrm{Gal}(\bar{\eta}|\eta)}$$

сюръективен.

Таким образом, положение с l-адическими когомологиями алгебраических многообразий над алгебраически замкнутыми полями — в точности такое же, как с классическими когомологиями комплексных многообразий. Более того, указанные выше результаты о классических когомологиях, включая теорию весов в § 3 гл. 3, можно получать из соответствующих l-адических утверждений. Как отмечает Тейт, в одном отношении l-адические когомологии даже лучше классических — на них действует группа Галуа основного поля. Рассмотрим кратко одну связанную с этим гипотезу.

8.7. Гипотеза Тейта. Обратимся от геометрического случая (основное поле k алгебраически замкнуто) к арифметическому (основное поле K конечно порождено над своим простым подполем). Пусть X — алгебраическое многообразие над K, гладкое и полное. Если $\bar{K}$ — алгебраическое замыкание K, то группа Галуа $G = \mathrm{Gal}(\bar{K}|K)$ действует на пространствах когомологий $H^*(\bar{X}, \mathbf{Q}_l(m))$. Вспоминая определение класса алгебраического цикла из п. 7.6, мы видим, что класс любого алгебраического цикла коразмерности r, определенного над K, инвариантен относительно действия группы Галуа на пространстве $H^{2r}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l(r))$. Иначе говоря, подпространство в $H^{2r}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l(r))$, порожденное алгебраическими циклами коразмерности r, содержится в подпространстве инвариантов $H^{2r}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l(r))^G$. Гипотеза Тейта об алгебраических циклах состоит в том, что на самом деле эти пространства совпадают ([78]).

Эта гипотеза чем-то похожа на классическую гипотезу Ходжа, хотя прямые связи указать трудно. Более точные связи имеются между этими гипотезами и стандартными гипотезами Гротендика об алгебраических циклах ([43], [62]).

По поводу гипотез Тейта о связи ранга группы алгебраических циклов с порядками нулей и полюсов ζ-функции многообразия X мы отсылаем к [78].

ЛИТЕРАТУРА

Общие вопросы гомологической алгебры излагаются в [22], [41]. Непревзойденным введением в эту область является [38]. Современное состояние см. в [3]. Когомологии пучков рассматриваются также в [4], [10], [14], [40], [53], [54], [72].

Когомологии когерентных алгебраических пучков появились в [72]. Наиболее доступно эта теория изложена в [54], а наиболее фундаментально — в [47]. См. также [69], [70], [72]. Более специальные вопросы, связанные с теоремой Римана—Роха, обсуждаются в [7], [34], [35], [52], [58]. Двойственность нигде не изложена удовлетворительно; отчасти причина в том, что это требует привлечения производных категорий. См., впрочем, [3], [4], [56], [40].

Топология комплексных алгебраических многообразий, несмотря на классичность сюжета, также нигде хорошо не изложена. Обычно ограничиваются случаем гладких многообразий (см. [13], [40]); общий случай обсуждается в [34], [36]. Комплексные алгебраические многообразия в рамках аналитических многообразий изучаются в [40], [53], см. также [10]. Сравнение алгебраических и аналитических подходов было начато работой [73]; см. также [45] и [42]. Структурам Ходжа в когомологиях алгебраических многообразий посвящены работы [23], [24]; см. также обзор [11].

Как уже говорилось, теория этальных когомологий была вызвана к жизни гипотезами Вейля [79]; история вопроса отражена в [61], [54], [68]. Конечным полям и уравнениям над ними посвящена монография [64]; там же имеется обширная библиография. Прекрасный очерк об арифметике алгебраических кривых — [67]. Этальные когомологии лучше всего излагаются в [50]; см. также [68], [49], [9]. Доказательства гипотез Вейля — [26], [27], [61].

1. *Бейлинсон А. А.* Высшие регуляторы и значения L-функций // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Соврем. пробл. мат. Новейшие достижения.— 1984.— *24*.— С. 181—238
2. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел.— М.: Наука, 1985.— 504 с.
3. *Гельфанд С. И., Манин Ю. И.* Методы гомологической алгебры. Т. I.— М.: Наука, 1988.— 416 с.
4. *Головин В. Д.* Гомологии аналитических пучков и теоремы двойственности.— М.: Наука, 1986.— 191 с.
5. *Данилов В. И.* Алгебраические многообразия и схемы // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направл.— 1988.— *23*.— С. 172—302
6. *Зархин Ю. Г., Паршин А. И.* Проблемы конечности в диофантовой гео-

метрии // Ленг С. Основы диофантовой геометрии.— М.: Мир, 1986.— С. 369—438
7. *Манин Ю. И.* Лекции по алгебраической геометрии. Ч. 2. *K*-функтор в алгебраической геометрии.— М.: МГУ, 1971.— 86 с.
8. — Соответствия, мотивы и моноидальные преобразования // Мат. сб.— 1968.— *77*, № 4.— С. 475—507
9. — Алгебраическая топология алгебраических многообразий // Успехи мат. наук.— 1965.— *20*, № 6.— С. 3—12
10. *Онищик А. Л.* Методы теории пучков и пространства Штейна // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направл.— 1986.— *10*.— С. 5—73
11. *Паламодов В. П.* Деформации комплексных пространств // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направл.— 1986.— *10*.— С. 123—221
12. *Степанов С. А.* Сравнения с двумя неизвестными // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1972.— *36*, № 4.— С. 683—711
13. *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии.— 2 изд., перераб. и доп.— М.: Наука, 1988.— Т. 1, 345 с. Т. 2, 304 с.
14. — Основные понятия алгебры // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направл.— 1986.— *11*.— С. 5—288
15. Algebraic number theory / Ed. Cassels J. W. S., Fröhlich A.— London: Academic Press, 1967 (Пер.: Алгебраическая теория чисел.— М.: Мир, 1969.— 483 с.)
16. *Artin M.* Algebraic approximation of structures over complete local rings // Publ. Math. IHES.— 1969.— *36*.— С. 23—58 (Пер.: *Артин М.* Алгебраическая аппроксимация структур над полными локальными кольцами // Математика.— 1970.— *14*, № 3.— С. 1—39)
17. — Algebraic spaces.— New Haven: Yale Univ. Press, 1971 (Пер.: *Артин М.* Алгебраические пространства // Успехи мат. наук.— 1980.— *26*, № 1.— С. 181—205)
18. *Beilinson A.* Notes on absolute Hodge cohomology // Contemp. Math.— 1986.— *55*, part 1.— С. 35—68
19. —, *MacPherson R.*, *Schechtman V.* Notes on motivic cohomology // Duke Math. J.— 1987.— *54*.— С. 579—716
20. *Bethelot P.*, *Ogus A.* Notes on cristalline cohomology.— Princeton Univ. Press, 1978.— 241 с.
21. *Bloch S.* Algebraic cycles and values of *L*-functions. II // Duke Math. J.— 1985.— *52*.— С. 379—397
22. *Cartan H.*, *Eilenberg S.* Homological algebra.— Princeton Univ. Press, 1956 (Пер.: *Картан А.*, *Эйленберг С.* Гомологическая алгебра.— М.: ИЛ, 1960.— 510 с.)
23. *Deligne P.* Theorie de Hodge. II // Publ. Math. IHES.— 1971.— *40*.— С. 5—58 (Пер.: *Делинь П.* Теория Ходжа. II // Математика.— 1973.— *17*, № 5.— С. 3—57)
24. — Theorie de Hodge. III // Publ. Math. IHES.— 1974.— *44*.— С. 5—77
25. — Poids dans la cohomologie des variétés algébriques // Actes ICM.— Vancouver, 1974.— С. 79—85
26. — La conjecture de Weil. I // Publ. Math. IHES.— 1974.— *43*.— С. 273.—308 (Пер.: *Делинь П.* Гипотеза Вейля. I // Успехи мат. наук.— 1976.— *30*, № 5.— С. 159—190)
27. — La conjecture de Weil. II // Publ. Math. IHES.— 1980.— *52*.— С. 132—252
28. —, *Griffiths Ph.*, *Morgan J.*, *Sullivan D.* Real homotopy theory of Kähler manifold // Invent. math.— 1975.— *29*, № 3.— С. 245—274 (Пер.: *Гриффитс Ф.*, *Делинь П.*, *Морган Дж.*, *Сюлливан Д.* Вещественная гомотопическая теория кэлеровых многообразий // Успехи мат. наук.— 1977.— *32*, № 2.— С. 119—152)
29. —, *Illusie L.* Relevements modulo p^2 et decomposition de complexe de De Rham // Invent. math.— 1987.— *89*, № 2.— С. 247—270

30. —, *Katz N.* Groupes de monodromie en géométrie algébriques.— Berlin: Springer, 1973.— 438 c.
31. *Dold A.* Lectures on algebraic topology.— Berlin: Springer, 1972 (Пер.: *Дольд А.* Лекции по алгебраической топологии.— М.: Мир, 1976.— 463 с.)
32. *Esnault H., Viehweg E.* Logarithmic De Rham complexes and vanishing theorems // Invent. math.— 1986.— *86*.— С. 161—194
33. *Faltings G.* Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlenkörpern // Invent. math.— 1983.— *73*.— С. 349—366
34. *Fulton W.* Intersection theory.— Berlin: Springer, 1984.— 470 с. (Пер.: *Фултон У.* Теория пересечений.— М.: Мир, 1988)
35. —, *Lang S.* Riemann—Roch algebra.— N. Y.: Springer, 1986.— 203 с.
36. —, *MacPherson R.* Categorical framework for the study of singular spaces // Mem. Amer. Math. Soc.— 1981.— *31*, № 243 (Пер.: *Фултон У., Макферсон Р.* Категорный подход к изучению пространств с особенностями.— М.: Мир, 1983.— 216 с.)
37. *Gabriel P., Zisman M.* Calculus of fractions and homotopy theory.— Berlin: Springer, 1967.— 186 с. (Пер.: *Габриэль П., Цисман М.* Категории частных и теория гомотопий.— М.: Мир, 1971.— 295 с.)
38. *Godement R.* Topologie algébrique et théorie des faisceaux.— Paris: Hermann, 1958.— 283 с. (Пер.: *Годеман Р.* Алгебраическая топология и теория пучков.— М.: ИЛ, 1961.— 320 с.)
39. *Goresky M., MacPherson R.* Intersection homology theory // Topology.— 1980.— *19*.— С. 135—162
40. *Griffiths Ph., Harris J.* Prinsiples of algebraic geometry.— N. Y. e. a.: Wiley, 1978.— 813 с. (Пер.: *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии.— М.: Мир, 1982.— 862 с.)
41. *Grotendieck A.* Sur quelques points d'algèbre homologique // Tohoku Math. J.— 1957.— *9*.— С. 119—221 (Пер.: *Гротендик А.* О некоторых вопросах гомологической алгебры.— М.: ИЛ, 1961.— 175 с.)
42. — On the de Rham cohomology of algebraic varieties // Publ. Math. IHES.— 1966.— *29*.— S. 351—359
43. — Standard conjectures on algebraic cycles // Algebraic geometry.— London, 1969.— С. 193—199
44. — Cristals and the De Rham cohomology of schemes // Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas.— Amsterdam: North-Holland, 1968.— С. 306—358
45. — Revetements étale et groupe fondamental.— Berlin: Springer, 1971.— 447 с.
46. — Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théoremès de Lefschetz locaux et globaux.— Amsterdam: North-Holland, 1968.— 287 с.
47. —, *Dieudonne J.* Eléments de géométrie algébrique. III. Etude cohomologique des faisceaux cohérents // Publ. Math. IHES.— 1961.— *11;* 1963.— 17
48. —, — Eléments de géométrie algébrique. IV. Etude locale des schémes et des morphismes de schémas // Publ. Math. IHES.— 1967.— *32*
49. — *et al.* Théorie des topos et cohomologie étale des schémas.— Berlin: Springer.— Vol. 1, 1972, 525 с. Vol. 2, 1972, 420 с. Vol. 3, 1973, 640 с.
50. — *et al.* Cohomologie étale.— Berlin: Springer, 1977.— 312 с.
51. — *et al.* Cohomologie l-adique et fonction L.— Berlin: Springer, 1977
52. — *et al.* Théorie des intersections et théorème de Riemann—Roch.— Berlin: Springer, 1977.— 700 с.
53. *Gunning R. C., Rossi H.* Analytic functions of several complex variables.— Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1965.— 317 с. (Пер.: *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных.— М.: Мир, 1969.— 396 с.)
54. *Hartshorne R.* Algebraic geometry.— N. Y.: Springer, 1977.— 496 с. (Пер.: *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия.— М.: Мир, 1981.— 600 с.)

55. — On the De Rham cohomology of algebraic varities // Publ. Math. IHES.— 1976.— *45.*— C. 5—99
56. — Residues and duality.— Heidelberg: Springer, 1966.— 423 c.
57. *Hironaka H.* Triangulation of algebraic sets // Proc. Symp. Pure Math.— 1975.— *29.*— C. 165—185
58. *Hirzebruch F.* Neue Topologische Methoden in der Algebraische Geometrie.— Berlin e. a.: Springer, 1956.— 165 c. (Пер.: *Хирцебрух Ф.* Топологические методы в алгебраической геометрии.— М.: Мир, 1973.— 280 с.)
59. *Horrocks G., Mumford D.* A rank 2 vector bundle on $\mathbf{P}^4$ with 15 000 symmetries // Topology.— 1973.— *12,* № 1.— S. 63—81
60. *Illusie L.* Complexe de De Rham—Witt et cohomologie cristalline // Ann. Sci. ENS.— 1979.— *12.*— C. 501—661
61. *Katz N.* An overview of Deligne's proof of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields (Hilbert's problem 8) // Math. Develop. Arising from Hilbert Probl. Proc. Symp. Pure Math.— 1976.— *28.*— C. 275—306
62. *Kleiman S. L.* Algebraic cycles and the Weil conjectures // Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas.— Amsterdam: North-Holland, 1968.— C. 359—386
63. *Kollár J.* Higher direct images of dualizing sheaves // Ann. Math.— 1986.— *123.*— C. 11—40
64. *Lidl R., Niederreiter H.* Finite Fields.— London: Addison—Wesley, 1983 (Пер.: *Лидл Р., Нидеррейтер Х.* Конечные поля.— М.: Мир, 1988.— 822 с.)
65. *Lubkin S.* On a conjecture of Andre Weil // Amer. J. Math.— 1967.— *89,* № 2.— C. 443—548
66. *Mazur B.* Eigenvalues of Frobenius acting on algebraic varieties over finite fields // Proc. Symp. Pure Math.— 1975.— *29.*— C. 231—261
67. — Arithmetic on curves // Bull. Amer. Math. Soc.— 1986.— *14,* № 2.— C. 207—259
68. *Milne J. S.* Étale cohomology.— Princeton Univ. Press, 1980 (Пер.: *Милн Дж.* Этальные когомологии.— М.: Мир, 1983.— 392 с.)
69. *Mumford D.* Lectures on curves on an algebraic surface.— Princeton Univ. Press, 1966.— 200 с. (Пер.: *Мамфорд Д.* Лекции о кривых на алгебраической поверхности.— М.: Мир, 1968.— 236 с.)
70. — Abelian varieties.— Oxford Univ. Press, 1970.— 300 с. (Пер.: *Мамфорд Д.* Абелевы многообразия.— М.: Мир, 1971.— 300 с.)
71. *Raynaud M.* Anneaux locaux henseliens.— Berlin e. a.: Springer, 1970.— 133 с.
72. *Serre J.-P.* Faisceaux algébriques cohérents // Ann. Math.— 1955.— *61.*— C. 197—278 (Пер.: *Серр Ж.-П.* Когерентные алгебраические пучки // Расслоенные пространства и их приложения.— М.: ИЛ, 1958.— С. 372—458)
73. — Géométrie algébriques et géométrie analytique // Ann. Inst. Fourier.— 1956.— *6.*— C. 1—42
74. — Groupes algébriques et corps de classes.— Paris: Hermann, 1959.— 202 с. (Пер.: *Серр Ж.-П.* Алгебраические группы и поля классов.— М.: Мир, 1968.— 285 с.)
75. — Cohomologie galoisienne.— Berlin e. a.: Springer, 1964.— 214 с. (Пер.: *Серр Ж.-П.* Когомологии Галуа.— М.: Мир, 1968.— 208 с.)
76. *Shiffman B., Sommese A.* Vanishing theorems on complex manifolds.— Boston: Birkhäuser, 1985.— 170 с.
77. *Sullivan D.* Geometric topology.— Cambridge: MIT, 1970 (Пер.: *Салливан Д.* Геометрическая топология.— М.: Мир, 1975.— 284 с.)
78. *Tate J. T.* Algebraic cycles and poles of the Zeta-function // Arithmetical algebraic geometry / Ed. Schilling.— N. Y.: Harper and Row, 1965.— C. 93—110 (Пер.: *Тэйт Дж.* Алгебраические классы когомологий // Успехи мат. наук.— 1965.— *20,* № 6.— С. 27—40)
79. *Weil A.* Number of solutions of equations over finite fields // Bull. Amer. Math. Soc.— 1949.— *55.*— C. 497—508

УДК 512.73

I. В. И. Данилов. Когомологии алгебраических многообразий. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 35 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1989, 5—130

Обзор посвящен изложению основных понятий и фактов о когомологиях алгебраических многообразий и применению их к геометрическим задачам. Состоит он из четырех глав.

В гл. 1 приводятся необходимые понятия гомологической алгебры: комплексы, спектральные последовательности, пучки и их когомологии.

В гл. 2 рассказывается о когомологиях когерентных пучков: теоремы конечности и Римана — Роха, двойственность, когомологии де Рама.

Гл. 3 имеет дело с комплексными многообразиями и классической топологией. Именно здесь зародились те понятия и результаты, которые были образцом при обобщении на абстрактные алгебраические многообразия. Мы лишь бегло касаемся теории Ходжа.

В гл. 4 речь идет об этальной топологии, с помощью которой удалось перенести на абстрактный случай такие понятия, как числа Бетти, теорему Лефшеца о неподвижных точках и т. п. Начинается она с формулировки гипотез Вейля, давших стимул к поиску «абстрактных когомологий»; заканчивается доказательством этих гипотез П. Делинем. Библ. 79.

УДК 512.774

II. В. А. Исковских, И. Р. Шафаревич. Алгебраические поверхности. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 35 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1989, 131—263

В обзоре представлена связная картина теории алгебраических поверхностей, разъяснены типичные постановки задач и описаны основные методы их решений. Изложение ведется на сравнительно элементарном уровне — доказательства даются лишь в тех случаях, когда они необходимы для выявления новых идей развития теории. В центре внимания авторов находится комплексная задача бирациональной классификации неособых проективных поверхностей над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 и даже более конкретно — над полем комплексных чисел. Некоторые отличия, возникающие в случае полей ненулевой характеристики, описаны в отдельном параграфе. Статья содержит также очень краткое изложение теории двумерных компактных комплексных многообразий в ее сопоставлении с алгебраической теорией. Библ. 79.

Технический редактор *З. А. Прусакова* Корректор *Н. В. Шуликина*

Сдано в набор 14.03.89 Подписано в печать 11.09.89
Формат бумаги 60×90 1/16 Бум. кн.-журн. Литературная гарнитура
Высокая печать. Усл. печ. л. 17,0 Усл. кр.-отт. 17,0 Уч.-изд. л. 17,41
Тираж 800 экз. Заказ 2004 Цена 3 р. 90 к.

Адрес редакции: 125219, Москва, А-219, Балтийская ул., 14. Тел. 155-43-29

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ,
140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

ISSN 0233—6723. ИНТ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 35. 1989. 1— 272.