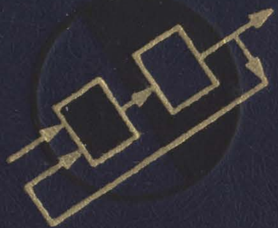


Ф. А. МИХАЙЛОВ

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

ТЕОРИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

Ф.А. МИХАЙЛОВ

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1986

ББК 32.81
М 69
УДК 62.501.12.001

Михайлов Ф.А. Теория и методы исследования нестационарных линейных систем. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 320 с.

Развиваются теория и методы исследования непрерывных нестационарных линейных систем. Рассматриваются детерминированные и стохастические системы. Излагаются основы теории этих систем, методы расчета и анализа процессов свободных колебаний и процессов, вызванных детерминированными и случайными воздействиями, методы анализа устойчивости процессов.

Для научных работников, инженеров, слушателей факультетов повышения квалификации и аспирантов, специализирующихся в областях теории автоматического управления, теории колебаний и смежных областей науки и техники.

Табл. 6. Ил. 24. Библиогр. 147 назв.

Рецензент
доктор физико-математических наук *К.А. Абгарян*

Федор Андреевич Михайлов

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Серия
"Теоретические основы технической кибернетики", № 87

Редактор *Д.С. Фурманов*
Художественный редактор *Т.Н. Кольченко*
Технический редактор *С.В. Геворкян*
Корректоры *Г.В. Барбашина, Т.В. Обод*

Набор осуществлен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 12896

Сдано в набор 25.12.85. Подписано к печати 17.04.86
Т–11003. Формат 84 Х 108 1/32. Бумага офсетная № 1
Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная. Усл. печ.л. 16,80
Усл.кр.-отт. 16,80. Уч.-изд.л. 18,95
Тираж 3000 экз. Тип. зак. 26 . Цена 3 р. 20 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука"
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства "Наука"
630077 г. Новосибирск-77, ул. Станиславского, 25

М $\dfrac{1502000000-090}{053(02)-86}$ 147-86

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга систематизирует результаты исследований, проведенных моими учениками, коллегами и мною, порознь и совместно, по некоторым новым направлениям теории нестационарных непрерывных линейных систем и наиболее существенные (с моей точки зрения) результаты, полученные другими авторами. Теория систем рассматриваемого класса сложнее теории аналогичных стационарных систем, так как сложнее объект исследований. Этим объясняется сравнительно медленное ее развитие и разнохарактерность подходов к ее построению. В книге теория изучаемых систем излагается с позиций общей теории систем, в которой в последнее время достигнут значительный прогресс. Излагаемая теория имеет структуру, аналогичную структуре теории стационарных систем.

Практический выход теории — методы исследования. К настоящему времени предложено и в большей или меньшей мере разработано большое число методов, осветить их все в одной монографии трудно. При отборе методов для изложения в данной работе я руководствовался следующими требованиями: методы должны быть строгими, алгоритмы приближенных вычислений — итеративными; в случае стационарных систем методы должны превращаться в известные методы теории стационарных систем или в равноценные им по сложности.

В книге освещается круг вопросов, традиционный при изложении теории систем того или иного класса, при этом детерминистский подход сочетается со стохастическим. Наряду с результатами, известными по более ранним публикациям, излагаются новые результаты, к числу которых относятся:

а) развитие теории обобщенного характеристического уравнения на основе понятия корня обобщенного характеристического уравнения в функциональном кольце (понятие корня в кольце, оценка числа корней в различных кольцах, структура рядов, представляющих корни);

б) теория передаточного функционала (понятие и применение в теории вынужденных колебаний);

в) обобщение понятия спектральной плотности на случай нестационарного стохастического сигнала и применение этого понятия в теории вынужденных колебаний;

г) обобщение метода канонических преобразований на задачу исследования устойчивости процессов в системах с запаздыванием.

Книга предназначена для научных работников, инженеров-исследователей, преподавателей высших учебных заведений и аспирантов, интересующихся вопросами исследования нестационарных динамических систем.

Большую пользу при подготовке материалов, включенных в книгу, мне принесло преподавание курсов "Анализ и синтез нестационарных линейных систем" и "Динамика нестационарных линейных систем" в МАИ им. С. Орджоникидзе на факультетах повышения квалификации инженеров и преподавателей. Ряд отраженных в книге вопросов появился в результате бесед со слушателями, которым я выражаю свою признательность.

Профессор К.А. Абгарян высказал много ценных замечаний о содержании рукописи. Эти замечания я принял с благодарностью и учел при доработке рукописи.

Декабрь 1984 г. *Ф. Михайлов*

ВВЕДЕНИЕ

Книга посвящена теории и методам исследования нестационарных непрерывных линейных систем – частного вида динамических систем. В целях определения понятия этого вида систем излагается понятие динамической системы и указываются признаки, выделяющие этот вид. При изложении понятия динамической системы используются эвристические представления и строгие математические определения. Приводятся определения непрерывности, линейности и нестационарности динамической системы – признаков, делающих ее системой изучаемого вида. Определяются частные виды процессов, протекающих в такой системе: свободные и вынужденные колебания.

§ 0.1. Реальные системы и их математические модели

Теория нестационарных линейных систем принадлежит к числу точных наук, т.е. к таким наукам, в которых применяются строгие методы исследования. Вместе с тем реальные технические системы, рассматриваемые как системы изучаемого вида, как правило, не поддаются точному математическому описанию, т.е не могут служить предметом строгого математического исследования. Это противоречие разрешается следующим образом: в теории нестационарных линейных систем рассматриваются не реальные системы, а их математические модели.

При сравнении математических моделей систем в различных областях техники часто обнаруживается их полное или почти полное совпадение (с точностью до численных характеристик). Это обосновывает целесообразность построения общей теории систем различных классов, для математического описания которых используются тождественные математические модели. При этом физическое содержание процессов и технический смысл систем являются категориями, выходящими за рамки теории. Теория нестационарных линейных систем является примером такой общей теории.

Математическая модель системы – это ее абстрактное математическое представление. Поскольку модели принципиально неадекватны моделируемым системам, в научной практике используются модели, отражающие свойства систем лишь приближенно [4, с. 15].

Распространенным подходом к построению модели является использование физических законов, которым подчиняются протекающие в системе явления, и учет эмпирических характеристик элементов системы. Как правило, получаемая таким путем модель выражается в терминах известных в высшей математике уравнений, в которых независимые переменные представляют время и, возможно, пространственные координаты системы, а зависимые – внешние воздействия и физические величины, изменение которых во времени в совокупности воспринимается нами как картина процесса, протекающего в системе. Чтобы применение полученной модели было правомерно, ее соответствие оригиналу должно быть подтверждено экспериментально. Схема эксперимента состоит в возбуждении реальной системы и модели внешними воздействиями с одинаковым математическим описанием и в сравнении соответствующих процессов в оригинале и в модели. Вопрос подтверждения правомерности модели с практической точки зрения является весьма важным.

Другим подходом к построению модели системы является экспериментальное исследование последней. При этом подходе заранее предполагается класс математических моделей, к которому принадлежит искомая модель, и последняя определяется на основании анализа информации об условиях работы системы и о протекающих в ней процессах. Этот процесс определения модели называется *идентификацией системы.*

Очевидно, возможен и комбинированный подход, при котором облик модели выясняется частично на основании применения физических законов, частично из эксперимента.

Математические модели систем автоматического управления и других, родственных по характеру модели технических систем, согласно терминологии А.А. Андронова, А.А. Витта и С.Э. Хайкина [4], называются *динамическими моделями реальных систем.* В дальнейшем в классе этих моделей был выделен класс моделей, обладающих некоторыми характерными свойствами. Такие модели стали называть *динамическими системами.*

§ 0.2. Понятие динамической системы

Динамическая система имеет "входы", к которым прилагаются внешние воздействия (входные сигналы), и "выходы", на которых наблюдается или изучается реакция системы на эти воздействия. Говорят, что входные сигналы преобразуются в системе в выходные сигналы. Предполагается, что входные сигналы и законы преобразований определены в заданной временнóй области I, причем преобразования не обязательно однозначны.

Чтобы определить динамическую систему, очевидно, следует указать: а) какой класс моделей рассматривается; б) в чем состоит свойство, характеризующее модель как динамическую систему.

Приведем определение для класса моделей с конечным числом k входов и конечным числом m выходов. Систему сигналов на всех входах опишем k-мерной вектор-функцией $\mathbf{y}(t)$, а систему сигна-

Рис. 0.1. Динамическая система

лов на всех выходах — m-мерной вектор-функцией $\mathbf{u}(t)$ (рис. 0.1), где $t \in I$. При $k(m) = 1$ соответствующая вектор-функция превращается в числовую функцию.

Обозначим символом a выбранный момент времени, представленный внутренней точкой области I, символом $P(a)$ ("Past" — прошлое) — подобласть I, выделяемую неравенством $t < a$, символом $F(a)$ ("Future" — будущее) — подобласть I, выделяемую неравенством $t > a$ (рис. 0.2), символом Y_I — заданное на I множество вектор-функций $\mathbf{y}(t)$, символом U_I — заданное на I множество вектор-функций $\mathbf{u}(t)$, символами U_P и U_F — соответствующие им множества вектор-функций, определенных только в $P(a)$ и в $F(a)$, символами $\mathbf{u}_P(t)$ и $\mathbf{u}_F(t)$ — элементы этих множеств, символом $\mathbf{u}_F^*(t)$ — вектор-функции описывающие сигналы, получающиеся в результате преобразования системой входных сигналов, описываемых вектор-функциями из множества Y_I.

Определение 0.1. Модель с конечным числом входов и конечным числом выходов называется *динамической системой*, если:

1) при любых a, $\mathbf{y}(t)$ и $\mathbf{u}_P(a)$ вектор-функция $\mathbf{u}_F^*(t)$ однозначно определена и принадлежит U_F;

2) существует такая пара a, $\mathbf{y}(t)$, при которой $\mathbf{u}_F^*(t)$ зависит от $\mathbf{u}_P(t)$.

Согласно этому определению, данная модель рассматривается как динамическая система, если:

1) *входные и выходные сигналы принадлежат заданным множествам*,

2) *для всех или некоторых моментов времени из заданной временной области, принятых в качестве разделяющих прошлое и будущее, выходные сигналы в будущем зависят от входных и/или выходных сигналов в прошлом и определяются ими.*

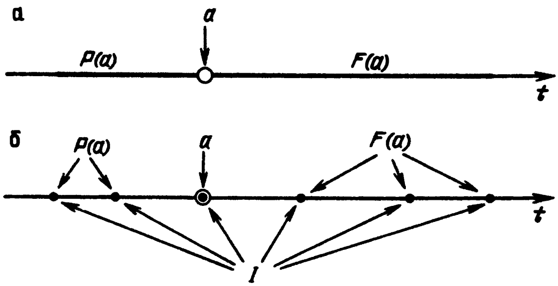


Рис. 0.2. Структура области I: *а* – случай непрерывного аргумента; *б* – случай дискретного аргумента

Если обозначить через U_F^* множество всех вектор-функций $\mathbf{u}_F^*(t)$, а символом I_i – множество всех внутренних точек области I, то из определения 0.1 следует: в случае динамической системы для всех $a \in I_i$ отображение $Y_I \times U_P \to U_F^*$ определено однозначно и при этом $U_F^* \subset U_F$.

Приведенное определение охватывает как частный случай отсутствие входных сигналов. В этом случае Y_I – пустое множество и вектор-функция $\mathbf{u}_F^*(t)$ однозначно определена значением a и вектор-функцией $\mathbf{u}_P(t)$.

В случае модели с бесконечными счетными множествами входов и/или выходов вектор-функции $\mathbf{y}(t)$ и/или $\mathbf{u}_F^*(t)$ являются бесконечномерными. Если же эти множества континуальны – входы и/или выходы определены на некоторых континуумах $\mathcal{L}_1$ и/или $\mathcal{L}_2$, каждый элемент которых является точкой пространственной области, характеризуемой координатами $l_{11}, \ldots, l_{1q_1}$ и/или $l_{21}, \ldots, l_{2q_2}$, то вектор-функции заменяются другими характеристиками распределенных на $\mathcal{L}_1$ и/или $\mathcal{L}_2$ сигналов, являющимися функциями t и $l_{11}, \ldots, l_{1q_1}$ и/или $l_{21}, \ldots, l_{2q_2}$. За исключением этих изменений, определение динамической системы остается прежним.

§ 0.3. Основные задачи анализа систем и состав данных, необходимых для их решения

Одной из основных задач анализа динамических систем, называемой в дальнейшем *первой основной задачей анализа*, является установление для заданного момента времени a соответствия*) между заданным множеством пар вектор-функций $\mathbf{y}(t)$ и $\mathbf{u}_P(t)$ (или других характеристик входных сигналов в I и выходных

*) Под соответствием между множествами понимается поэлементное соответствие.

сигналов в $P(a)$) и множеством вектор-функций $\mathbf{u}_F^*(t)$ или других характеристик выходных сигналов в $F(a)$, порожденных элементами первого множества. Согласно определению динамической системы, отображение множества пар $(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}_P(t))$ в множество вектор-функций $\mathbf{u}_F^*(t)$ является однозначным. Однако не ясно, является ли однозначным обратное отображение. Задача считается решенной, если найдено правило, определяющее для каждой пары вектор-функций $\mathbf{y}(t)$ и $\mathbf{u}_P(t)$ (или других характеристик входных сигналов в I и выходных сигналов в $P(a)$) характеристики выходных сигналов в $F(a)$ и выяснено, является ли однозначным отображение множества характеристик выходных сигналов в $F(a)$ в множество пар $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{u}_P(t)$ (или пар других характеристик соответствующих сигналов).

Второй основной задачей анализа является задача нахождения тех или иных оценок характеристик выходных сигналов в $F(a)$. По аналогии с предыдущей задачей ее можно сформулировать как задачу установления соответствия между заданным множеством пар вектор-функций $\mathbf{y}(t)$ и $\mathbf{u}_P(t)$ или других характеристик входных сигналов в I и выходных сигналов в $P(a)$ и множеством оценок выходных сигналов в $F(a)$.

Первая задача в простейшем случае, когда рассматривается только один процесс, называется *задачей расчета процесса*. Аналогичный вариант второй задачи называется *задачей расчета оценок выходных сигналов*.

Третьей основной задачей анализа является задача об устойчивости процесса, в которой изучаются свойства процессов на бесконечных интервалах времени или счетных множествах моментов времени*).

При решении перечисленных основных задач анализа часто появляется необходимость в решении некоторых вспомогательных задач, в частности, задачи расчета характеристик системы по известным характеристикам ее звеньев, задачи пересчета одних характеристик системы в другие, задачи о "физической определенности процесса" (см. п.3.1.4), возникающей при рассмотрении процессов, развивающихся из бесконечного прошлого, т.е. предельных моделей процессов при $a \to -\infty$.

Выясним состав данных, необходимых для решения основных задач анализа.

Для решения первых двух задач, кроме информации о входных сигналах в области $a \cup F(a)$ необходимо располагать информацией, в которой отражается предыстория процессов в области $P(a)$,

---

*) Здесь и в дальнейшем "устойчивость" понимается в классическом смысле. Об устойчивости на конечном интервале см. § 8.1.

и описанием преобразований, которым подвергаются входные сигналы в системе.

Информация, в которой отражается предыстория процессов, не обязательно должна содержать исчерпывающие сведения о входных и выходных сигналах в $P(a)$. Обычно достаточна более скудная информация. Минимальная необходимая информация определяет начальное состояние системы. Математические данные, характеризующие *начальное состояние* системы, называются *начальными данными*. Обозначим их совокупность символом $\mathrm{s}(a)$, а множество всех возможных $\mathrm{s}(a)$ – символом $S(a)$.

Математические данные, характеризующие преобразования сигналов в системе, называются *характеристиками системы*. Ту или иную совокупность начальных данных и ту или иную совокупность характеристик системы будем называть *исчерпывающими*, если они совместно при полностью известных характеристиках входных сигналов в $a \cup F(a)$ вполне определяют выходные сигналы в $F(a)$.

Понятия начальных данных и характеристик системы поясним на простейшем примере. Пусть $a = 0$, входной сигнал – один и приложен в этот момент времени, выходной сигнал – также один, а преобразование, связывающее сигналы, определено на интервале (b, c), где $b < a < c$, и описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, составленным относительно выходного сигнала. Тогда дифференциальное уравнение есть характеристика системы, а значения входного и выходного сигналов и некоторого числа их начальных производных при $t = a - 0$ представляют начальные данные.

В решении первых двух основных задач анализа участвуют характеристики входных сигналов, характеристики системы и начальные данные. Однако, как мы увидим в гл. 8, при решении третьей задачи для линейных систем информация о начальных данных не требуется.

§ 0.4. Непрерывные и дискретные системы

Динамическая система называется *непрерывной* [18, с.68], если преобразования, которым подвергаются в ней входные сигналы, определены на некотором интервале времени. Этот интервал называется *интервалом определения системы* и, как было принято выше, обозначается в дальнейшем символом I.

Динамическая система называется *дискретной* [18, с.66], если преобразования, которым подвергаются входные сигналы, определены на дискретном множестве моментов времени.

§ 0.5. Непрерывные линейные системы

Частным видом непрерывной системы является непрерывная линейная система. Понятие "линейности" системы определим для системы с конечными или счетными множествами входов и выходов.

Пусть Y_I и U_I – линейные пространства, Y_P – линейное пространство, образованное всеми вектор-функциями $\mathbf{y}(t) \in Y_I$ с областью определения $P(a)$. Пусть для всех a исчерпывающая совокупность начальных данных $\mathbf{s}(a)$ – конечная или счетная система чисел и/или функций временных и/или пространственных аргументов, причем сформулирована таким образом, что

$$\mathbf{s}(a) = A_{\mathbf{su}a}\,\mathbf{u}(t) + A_{\mathbf{sy}a}\,\mathbf{y}(t)\,, \quad t \in P(a)\,,$$

где $A_{\mathbf{su}a}$ – *линейный оператор* [39, с. 124], определенный на U_P, $A_{\mathbf{sy}a}$ – линейный оператор, определенный на Y_P. Тогда множество $S(a)$ также является линейным пространством.

Пусть $Y_{a\,\cup F}$ – линейное пространство, образованное всеми вектор-функциями $\mathbf{y}(t)$ на интервале $a \cup F(a)$, $\mathbf{y}_{a\,\cup F}(t)$ – его элементы, A_a – оператор, определяющий отображение $S(a) \times Y_{a\,\cup F} \to$ $\to U_F^*$, т.е.

$$\mathbf{u}_F^*(t) = A_a(\mathbf{s}(a)\,, \quad \mathbf{y}_{a\,\cup\,F}(t)).$$

Пусть A_a (0, 0) = **0**, где символом **0** обозначена система чисел и/или функций, состоящая только из нулей или нулевых констант. Тогда система называется *линейной,* если для всех a

$$A_a(s(a)\,, \quad \mathbf{y}_{a\,\cup F}(t)) = A_{a\,\mathbf{s}}\,s(a) + A_{a\mathbf{y}}\,\mathbf{y}_{a\,\cup F}(t)\,, \tag{0.1}$$

где $A_{a\mathbf{s}}$ и $A_{a\mathbf{y}}$ – линейные операторы, определенные на линейных пространствах $S(a)$ и $Y_{a\,\cup F}$.

Приведенное определение линейной системы легко обобщается на системы с континуальным множеством входов и/или выходов путем замены вектор-функций $\mathbf{y}(t)$ и/или $\mathbf{u}(t)$ другими характеристиками сигналов.

§ 0.6. Задачи, приводящие к изучению непрерывных линейных систем

Описание систем линейными моделями широко распространено в области автоматического управления и в ряде смежных областей. Поскольку теория линейных систем является сравнительно простой, мы часто постулируем линейность системы и, далее, пользуемся этой теорией. Кроме этого непосредственного применения теории линейных систем, мы прибегаем к этой теории также в ряде случаев при изучении нелинейных систем. Отметим два из них.

1. Изучение *малых колебаний* нелинейных систем часто сопровождается переходом от исходной нелинейной модели к линейной. Этот переход связан с тем процессом в нелинейной системе, малые колебания около которого изучаются. Приведем следующий пример.

Пусть

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, \ldots, x_n, t), \qquad i = 1, \ldots, n \tag{0.2}$$

— уравнение динамики некоторой непрерывной линейной системы и $\varphi_i(t), i = 1, \ldots, n$ — частное решение этой системы уравнений, описывающее процесс, малые колебания около которого изучаются. Пусть, кроме того, для функции $F_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ при каждом значении t существует разложение в ряд Тейлора по аргументам $x_1, \ldots, x_n$ около точки $x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$ (будем сокращенно это условие обозначать в виде $x = \varphi$), сходящееся в некоторых окрестностях этой точки. Тогда в общей области сходимости разложений уравнений динамики можно представить в виде

$$\dot{x}_i = F_i[\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t), t] + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} [x_j - \varphi_j(t)] + R_i, \tag{0.3}$$

$$i = 1, \ldots, n,$$

где R_i — суммы членов, содержащих вторые и высшие степени разностей $x_j - \varphi_j(t)$.

Приняв во внимание, что в силу исходного уравнения

$$F_i[\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t), t] = \dot{\varphi}_i(t),$$

отбросив все R_i и обозначив

$$\Delta x_j \stackrel{\Delta}{=} x_j - \varphi_j(t), \tag{0.4}$$

вместо уравнений (0.3) получим уравнения

$$\Delta \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) \Delta x_j, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{0.5}$$

где

$$a_{ij}(t) = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{x=\varphi}.$$

Полученные уравнения представляют линейную модель системы.

Заметим, что коэффициенты этих уравнений зависят не только от вида функциональных зависимостей F_i от $x_1, \ldots, x_n, t$, но также от частного решения $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$. Следовательно, нелинейной системе можно сопоставить бесконечное множество линейных моделей, если задачу изучения малых колебаний нелинейной системы поставить для произвольного протекающего в ней процесса.

2. Системы с переменной структурой, а также многие виды релейных, импульсных и самонастраивающихся систем автоматического управления относятся к классу *систем с дискретноперестраиваемыми параметрами* [71], т.е. к классу систем, определенных на некотором интервале времени и обладающих таким свойством, что этот интервал может быть разбит на подынтервалы, на которых они описываются линейными моделями; границы подынтервалов — "моменты переключения". В эти моменты происходит переключение с одной линейной модели на другую. Общий метод изучения таких систем состоит в изучении свойств упомянутых линейных моделей, алгоритмов переключения и сочетания свойств линейных моделей с алгоритмами переключения.

Для изучения линейных моделей необходимо владеть теорией линейных систем и, в частности, если модели нестационарны, теорией нестационарных линейных систем.

§ 0.7. Классификация непрерывных линейных систем

Если система имеет один вход (или не имеет ни одного входа) и один выход, то, следуя [67, с.12], будем ее называть *односвязной* В противном случае система называется *многосвязной* [24, с. 328].

Для непрерывных линейных систем с конечными или счетными множествами входов и выходов введем следующие определения.

Определение 0.2. Система называется *внешне стационарной,* если для любых $a \in I_l$ и любых входных сигналов, описываемых вектор-функциями $\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t)$, являющимися на $a \cup F(a)$ элементами линейного пространства $Y_{a \cup F(a)}$ и равными нулю на $P(a)$, при нулевых начальных данных в момент $t = a$ для соответствующих им выходных сигналов, описываемых вектор-функциями $\mathbf{u}_1(t)$ и $\mathbf{u}_2(t)$, из равенства

$$\mathbf{y}_2(t) = \mathbf{y}_1(t + \Delta)$$

для всех таких t и Δ, что $t, t + \Delta \in a \cup F(a)$, следует равенство

$$\mathbf{u}_2(t) = \mathbf{u}_1(t + \Delta).$$

Определение 0.3. Система называется *внутренне стационарной,* если при входных сигналах, принимающих нулевые значения на интервале $t_0 \cup F(t_0)$, и произвольных начальных данных, отнесенных к моментам $t_0 = a$ и $t_0 = a + \Delta$, вектор-функции $\mathbf{u}_1(t)$ и $\mathbf{u}_2(t)$, описывающие соответствующие им выходные сигналы, удовлетворяют равенству

$$\mathbf{u}_2(t) = \mathbf{u}_1(t + \Delta)$$

при всех таких t и Δ, при которых $t, t + \Delta \in F(a)$.

Определение 0.4. Система называется *стационарной,* если она стационарна внутренне и внешне.

Определение 0.5 [74]. Система называется *нестационарной,* если она не обладает внутренней или внешней стационарностью.

В ряде случаев можно перейти от нестационарной системы к стационарной в результате замены переменной t [69] или переменных, описывающих сигналы, другими переменными. Если известна такая замена переменных, то систему целесообразно исследовать в новых переменных как стационарную, а затем с помощью обратной замены переменных выяснять свойства системы в исходных переменных.

Для формализации понятий стационарности систем с бесконечными множествами входов и/или выходов, распределенных на континуумах $\mathcal{L}_1$ и/или $\mathcal{L}_2$, вектор-функции следует заменить другими характеристиками сигналов.

Непрерывная линейная система называется *детерминированной* [24, с. 13, 74], если все ее характеристики, необходимые для расчета процесса на интервале $F(t_0)$ при заданных исчерпывающей системе начальных данных и сигналах $\mathbf{y}(t)$ и $\mathbf{u}_P(t)$, известны.

Непрерывную линейную систему будем называть:

– *недетерминированной,* если информация о всех или некоторых из таких ее характеристик неполная, причем характеристики, о которых не имеется полных сведений, определены как неизвестные элементы заданных множеств;

– *стохастической,* если упомянутая выше информация неполная, причем неполностью определенные характеристики описываются в вероятностном аспекте*).

Далее в книге рассматриваются *непрерывные нестационарные линейные системы.* В качестве простейшего примера такой системы приведем электрический колебательный контур, содержащий источник питания с эдс $e(t)$, сопротивление R, индуктивность L и переменную емкость $C(t)$ (рис. 0.3), в котором эдс играет роль входного сигнала, ток $i(t)$ – выходного. Обозначив через $q(t)$ заряд конденсатора, систему уравнений процесса в контуре запишем в виде

$$\begin{aligned} &Lpi = -Ri - q/C(t) + e(t), \\ &pq = i, \qquad p \equiv d/dt. \end{aligned} \tag{0.6}$$

---

*) П. Деруссо, Р. Рой и Ч. Клоуз [24, с. 13] термины "недетерминированная система" и "стохастическая система" рассматривают как синонимы, причем понятие стохастической системы определяют столь узко, что его практическая целесообразность сомнительна.

Если процесс в контуре рассматривается на каком-либо интервале времени, $e(t)$ рассматривается как входной сигнал, а $i(t)$ – как выходной и заданные множества входных и выходных сигналов определены как множества всех непрерывных и кусочно-непрерывных вещественных функций от t, то рассматриваемый контур является непрерывной линейной динамической системой.

Эта система *не обладает внутренней стационарностью,* так как в случае $e(t) \equiv 0$ при заданных для произвольного момента t_0

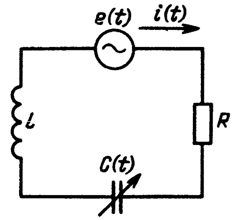


Рис. 0.3. Электрический колебательный контур с переменной емкостью

времени заряде $q(t)$ и токе $i(t)$ в точке $t = t_0$ правая производная функции $i(t)$ в силу первого уравнения системы (0.6) зависит от $C(t_0)$.

Система *не обладает* также *внешней стационарностью,* так как при $q(t_0) = i(t_0) = 0$ в силу того же уравнения для произвольного момента времени t_0 значение правой производной функции $i(t)$ при $t = t_0$ зависит от $e(t_0)$.

§ 0.8. Свободные и вынужденные колебания

В теории непрерывных линейных систем существенную роль играют понятия свободных и вынужденных колебаний. Эти понятия базируются на понятии *состояния покоя* системы.

Ограничиваясь системами с конечным числом входов и выходов, причем такими, что их выходные сигналы описываются дифференцируемыми функциями времени, для данного $t_0 \in I$ определим на $F(t_0)$ состояние покоя системы как процесс, при котором на этом интервале

$$\dot{\mathbf{u}} = 0. \tag{0.7}$$

В частности, при принятых при определении линейности системы структуре системы начальных данных $\mathbf{s}(a)$ и свойствах оператора A_a (см. § 0.5) состоянием покоя является процесс, развивающийся при нулевых входных сигналах из начального состояния, характеризуемого нулевыми начальными данными. Наряду с равенством (0.7) в этом случае на $F(t_0)$ будет выполняться также равенство

$$\mathbf{u} = 0.$$

Это состояние покоя будем называть *основным.*

Фиксируя то или иное состояние покоя, можно выделить на интервале $F(t_0)$ два частных вида процессов по признакам их отношения к этому состоянию. Сделаем это для основного состояния покоя. Пусть $\mathbf{s}_0 \triangleq 0$ и $\mathbf{y}_0(t) \triangleq 0$ и выполняются условия, принятые в § 0.5 при определении линейности системы. Тогда если $\mathbf{s} \neq \mathbf{s}_0$, $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{y}_0(t)$ при $t \in t_0 \cup F$, то процесс называется *свободными колебаниями*, а если $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0$, $\mathbf{y}(t) \not\equiv \mathbf{y}_0(t)$ на $t_0 \cup F$, то процесс называется *вынужденными колебаниями*.

Обобщения определений основного состояния покоя и свободных и вынужденных колебаний на случай системы с бесконечным множеством входов и/или выходов будут приводиться далее по тексту в тех местах, где рассматриваются соответствующие процессы для систем этого вида.

Любой процесс может рассматриваться как суперпозиция свободных и вынужденных колебаний. В частности, если эти понятия определены по отношению к основному состоянию покоя, то в случае системы с конечным числом входов и выходов

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t), \tag{0.8}$$

где $\mathbf{u}_1(t)$ – вектор-функция, описывающая выходные сигналы в процессе свободных колебаний, соответствующем заданным начальным данным при $\mathbf{y}(t) = 0$ на $t_0 \cup F$, $\mathbf{u}_2(t)$ – аналогичная вектор-функция для процесса вынужденных колебаний при $\mathbf{s}(t_0) = 0$ и заданной на $t_0 \cup F$ вектор-функции $\mathbf{y}(t)$.

Глава 1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ, СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ И ПРОЦЕССА

Сигналы, состояние системы и *процесс* являются понятиями, относящимися ко всем системам изучаемого класса. Ниже рассматриваются эти понятия в общетеоретическом и математическом аспектах.

§ 1.1. Формы задания и классификация сигналов

1.1.1. Формы задания сигналов. Определим три формы задания сигнала.

Если на заданном t-интервале I сигнал определен как числовая или обобщенная функция времени и, возможно, пространственных аргументов явно или неявно (с помощью других, невременных характеристик), то такую форму задания сигнала будем называть *детерминированной*.

Если по информации о сигнале нельзя установить его описание в виде числовой или обобщенной функции времени и, возможно, пространственных аргументов, но известно то или иное условие или система условий, которым эта функция удовлетворяет, то такую форму задания сигнала будем называть *недетерминированной*.

Если сигнал не задан в детерминированной форме, но в его описании участвуют вероятностные характеристики, то такую форму задания сигнала будем называть *вероятностной*.

1.1.2. Классификация сигналов. *По временно́й области определения* сигналы делятся на *непрерывные* и *дискретные*. Непрерывные сигналы определены на интервале времени, дискретные — на дискретном множестве моментов времени. Анализ вынужденных колебаний непрерывных систем возможен только в том случае, когда входные сигналы заданы как непрерывные. Однако в качестве выходных сигналов, в зависимости от того, интересуют ли нас эти сигналы на каком-либо временно́м интервале или только в некоторые моменты времени, могут рассматриваться как непрерывные, так и дискретные сигналы.

По моменту появления сигнала, т.е. моменту во временной области определения сигнала, являющемуся точной верхней (правой) границей области нулевых значений сигнала, сигналы классифицируются на:

а) *сигналы, момент появления которых конечен,*

б) *сигналы, момент появления которых удален в минус бесконечность.*

Если момент появления сигнала t_0 — конечный, причем отличный от нуля, то переход к новой независимой переменной $t' = t - t_0$ позволяет привести этот случай к случаю $t_0 = 0$. Поэтому, рассматривая сигналы первого вида, можно ограничиться сигналами, появляющимися в момент $t_0 = 0$.

Дальнейшая классификация сигналов приводится *для непрерывных сигналов.*

По информированности о сигнале сигналы делятся на *детерминированные, недетерминированные* и *стохастические.* Если сигнал *задан,* то это разделение соответствует указанным в п. 1.1.1 трем формам его задания (детерминированной, недетерминированной и вероятностной). Если сигнал *находится* в результате анализа прохождения тех или иных сигналов через систему, то это разделение соответствует тем формам задания сигнала, которые получаются в результате решения задачи анализа.

По аргументам, от которых зависят сигналы, они делятся на сосредоточенные и распределенные. Сосредоточенными, следуя [67], будем называть сигналы, зависящие только от времени.

При изучении ряда систем, таких как системы, включающие модели сплошных сред, упругих летательных аппаратов, электропро-

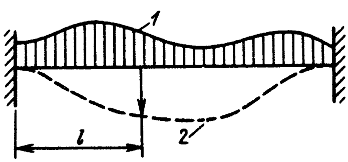


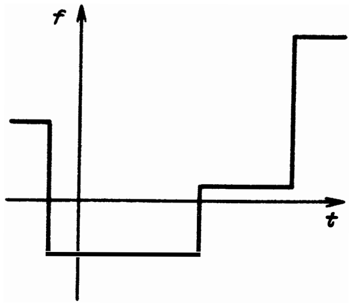
Рис. 1.1. Схема упругих колебаний балки с закрепленными концами: *1* – распределенная нагрузка; *2* – линия прогиба

водящих жидкостей (см. [92]), обычно возникает необходимость в рассмотрении сигналов, зависящих как от времени, так и от непрерывных пространственных аргументов. Встречаются два вида таких сигналов:

а) сигналы, функционально зависящие от пространственных аргументов,

б) сигналы, значения которых в любой момент времени в их пространственной области определения почти всюду равны нулю, но обладающие тем свойством, что для любого момента времени для любой внутренней точки пространственной области определения сигналов существует ее окрестность, в которой суммарное значение сигналов (интеграл сигналов в окрестности) конечно (в общем случае – ненулевое).

Рис. 1.2. Ступенчатая функция



Сигнал первого вида можно рассматривать как континуум сосредоточенных сигналов, элементы которого — сигналы, сосредоточенные в точках заданной пространственной области. Сигнал второго вида будем рассматривать как единый сигнал, распределенный в упомянутой области, и называть распределенным. Сигналы обоих видов встречаются, например, при изучении изгибных колебаний балки, вызванных изменяющейся во времени распределенной нагрузкой (рис. 1.1). Распределенная нагрузка является сигналом второго вида, а прогиб балки (как функция времени и координаты, отсчитываемой по длине балки) — сигналом первого вида.

Сосредоточенные сигналы делятся на несколько видов, в зависимости от того, какие из следующих составляющих они содержат: *непрерывно изменяющиеся, ступенчатые, кратковременные импульсы*. Без потери общности можно считать, что составляющих других видов у сигналов нет. Непрерывно изменяющиеся составляющие описываются непрерывными функциями времени, ступенчатые — ступенчатыми функциями (рис. 1.2). Под кратковременными импульсами понимаются такие импульсы, длительность которых столь мала, что без нарушения допустимой точности решаемых задач они могут рассматриваться как мгновенные. Математическое описание мгновенных импульсов строится на базе дельта-функции и имеет вид

$$c\delta(t-u), \tag{1.1}$$

где c — вещественное число, называемое далее *коэффициентом модуляции* импульса, u — вещественное число, представляющее *момент появления* импульса, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция.

В дальнейшем кратковременные импульсы описываются как мгновенные и называются *импульсами*. Сигнал, состоящий из двух или более импульсов, называется *потоком импульсов* [74]; сигнал, не содержащий импульсов, — *безымпульсным* [67].

Приведенная классификация применима также к распределенным сигналам, если рассматривать суммарные сигналы в окрестностях внутренних точек пространственной области определения распределенного сигнала.

§ 1.2. Описание детерминированных сигналов

1.2.1. Описание сигналов функциями времени и пространственных аргументов. Простейшей формой математического описания сосредоточенного детерминированного сигнала является его представление в виде функции времени. В зависимости от постановок рассматриваемых задач анализа или синтеза областью определения сигналов является либо вся числовая ось $(-\infty, \infty)$, либо какой-нибудь ее подынтервал.

Для удобства исследования действительные сигналы часто представляют в виде сумм формально определяемых сигналов, описываемых комплекснозначными функциями времени. Поэтому целесообразно эти составляющие включить в множество рассматриваемых сигналов, т.е. определить класс возможных сигналов некоторым классом описывающих их комплекснозначных (в том числе вещественных) функций от t. Будем считать, что вещественные и мнимые составляющие таких функций и обобщенных функций имеют ту же структуру, которую мы отметили в предыдущем разделе, характеризуя действительные сигналы. В соответствии с предположенной структурой последних такие функции будем считать непрерывными всюду, за исключением, возможно, дискретного множества точек, имеющими в точках нарушения непрерывности разрывы 1-го рода и/или включения типа дельта-функции. Безымпульсные составляющие сигналов описываются числовыми функциями, импульсы и потоки импульсов – обобщенными функциями.

Базируясь на свойствах реальных сигналов, наблюдаемых при изучении технических систем, будем считать, что на любом конечном интервале число моментов скачков сигнала и импульсных включений конечно. Все возможные функции, обладающие указанным свойством, образуют линейное пространство, которое обозначим символом $Q'(I)$. Множество всех функций, описывающих сосредоточенные сигналы указанного выше вида,но имеющие только безымпульсные составляющие, также является линейным пространством, обозначаемым далее символом $Q(I)$. Очевидно, $Q(I) \subset Q'(I)$. В случае $I = [a, b]$ функции, принадлежащие $Q(I)$, называются *кусочно-непрерывными.* Этот термин мы будем применять также к функциям, являющимся элементами $Q(I)$ в общем случае.

В случае одномерной системы с распределенными параметрами континуумы сосредоточенных сигналов описываются функциями $f(t, l)$ двух аргументов, где l – пространственная координата. При фиксированном значении l функции $f(t, l)$ превращаются в функции времени, которые можно считать обладающими отмеченными выше свойствами. С другой стороны, при фиксированном моменте времени t функции $f(t, l)$ превращаются в функции только аргумента l. Будем предполагать, что эти функции обладают такими же свойствами, как упомянутые выше функции времени.

Распределенные детерминированные сигналы в случае одномерной системы с распределенными параметрами характеризуются их *плотностями* $\varphi(t, l)$, которые будем считать обладающими такими же свойствами, какими обладают функции $f(t, l)$ и с помощью которых их суммы на любых интервалах (a, b) определяются в виде

$$\int_a^b \varphi(t, l) dl. \tag{1.2}$$

В случае k-мерных систем с распределенными параметрами континуумы сосредоточенных сигналов описываются функциями $f(t, l_1, \ldots, l_j)$, $1 \leqslant j \leqslant k$, а распределенные сигналы – функциями $\varphi(t, l_1, \ldots, l_j)$ – j-мерными плотностями сигналов. Будем считать, что структура сечений этих функций по всем аргументам одинакова и совпадает со структурой функций времени, описывающих сосредоточенные сигналы. Суммы распределенных сигналов в любых односвязных пространственных областях $\mathbf{L}$ определяются через их j-мерные плотности в виде

$$\int_{\mathbf{L}} \varphi(t, l_1, \ldots, l_j) dl_1 \ldots dl_j.$$

Очевидно, функция $\varphi(t, l_1, \ldots, l_j)$ представима в виде

$$\varphi(t, l_1, \ldots, l_j) =$$

$$= \varphi_0(t, l_1, \ldots, l_j) + \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(l_1, \ldots, l_j) \delta(t - u_j), \tag{1.3}$$

где функция $\varphi_0(t, l_1, \ldots, l_j)$ описывает безымпульсный распределенный сигнал, а выражения под знаком суммы – распределенные импульсы.

1.2.2. Аппроксимация функции, описывающей безымпульсный сосредоточенный сигнал, линейной комбинацией экспонент. При применении некоторых методов расчета реакции системы на входной сигнал (гл. 6) сложность расчета существенно зависит от вида входного сигнала и сравнительно невелика для сигналов вида $C \exp rt$, где C и r – числа в общем случае комплексные. Поэтому представляет интерес задача аппроксимации заданного входного безымпульсного сосредоточенного сигнала линейной комбинацией экспонент.

Поставим задачу следующим образом. На интервале $[a, b]$ задана вещественная числовая функция $f(t)$. Требуется аппроксимировать ее функцией $\tilde{f}(t)$ вида

$$\tilde{f}(t) = C_1 \exp r_1 t + \ldots + C_n \exp r_n t, \tag{1.4}$$

где n – заданное натуральное число, $C_1, \ldots, C_n$, $r_1, \ldots, r_n$ – комплексные числа. Числа $C_1, \ldots, C_n$ будем называть *коэффициентами*, числа $r_1, \ldots, r_n$ – *характеристическими показателями*.

Так как замена t на $t' = t - a$ переводит заданный интервал в интервал $[0, b - a]$, то, не нарушая общности рассмотрения, в исходной постановке задачи ограничимся случаем $a = 0$.

Ниже приводятся различные способы решения поставленной задачи аппроксимации, основанные на идее интерпретации аппроксимирующей функции как частного решения некоторого линейного однородного дифференциального уравнения порядка n

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n x = 0 \tag{1.5}$$

с постоянными вещественными коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$. Если соответствующее этому уравнению характеристическое уравнение

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{1.6}$$

не имеет кратных корней, то из упомянутой интерпретации функции $\tilde{f}(t)$ следует, что числа $r_1, \ldots, r_n$ – корни этого уравнения. Числом n в аппроксимационной формуле (1.4) задаемся. Числа $r_1, \ldots, r_n$ и $C_1, \ldots, C_n$ разыскиваем. Задача решается в два этапа: сначала разыскиваются характеристические показатели, затем коэффициенты.

Расчет характеристических показателей. Разбиваем отрезок $[0, b]$ точками $t_1 = 0$, $t_2, t_3, \ldots, t_n = b$ на $n - 1$ равных интервалов и ищем коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ из условия, чтобы в указанных точках функция $\tilde{f}(t)$ удовлетворяла уравнению (1.5). Получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$f^{(n-1)}(t_1) a_1 + \ldots + f^{(1)}(t_1) a_{n-1} + f(t_1) a_n = -f^{(n)}(t_1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n-1)}(t_n) a_1 + \ldots + f^{(1)}(t_n) a_{n-1} + f(t_n) a_n = -f^{(n)}(t_n),$$

где

$$f^{(i)}(t_j) = \left. \frac{d f^{(i)}(t)}{dt^i} \right|_{t = t_j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Эта система разрешима, когда ее определитель отличен от нуля. Если это условие не выполняется, то возникает особый случай, который требует дополнительных исследований. Далее предполагается равенство нулю определителя.

Определив коэффициенты уравнения (1.6), числа $r_1, \ldots, r_n$ находим как его корни. При этом возможны два случая: а) все числа $r_1, \ldots, r_n$ различны; б) среди них есть равные. В первом случае переходим к расчету коэффициентов $C_1, \ldots, C_n$. Во втором случае от аппроксимационной формулы (1.4) следует отказаться, заменив ее другой формулой. Расчет аппроксимационной формулы в этом случае см. ниже ("Случай кратных характеристических показателей"). Другие способы расчета характеристических показателей см. в [74].

Расчет коэффициентов. Задача расчета коэффициентов $C_1, \ldots, C_n$ имеет смысл, если среди характеристических показателей нет кратных. Пусть это условие выполняется. Приведем два способа расчета.

Первый способ. Аппроксимирующая функция $\tilde{f}(t)$ ищется из условия равенства значений этой функции и ее $n-1$ низших производных значениям функции $f(t)$ и соответствующих ее производных в точке $t = 0$. Это приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$
\begin{aligned}
&C_1 + \ldots + C_n = f(0),\\
&r_1 C_1 + \ldots + r_n C_n = [pf]_{t=0},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&r_1^{n-1} C_1 + \ldots + r_n^{n-1} C_n = [p^{n-1} f]_{t=0}, \quad p \equiv d/dt.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Эта система имеет единственное решение, однозначно определяющее аппроксимационную формулу (1.4).

Точность аппроксимации по этому способу оценена в [45].

Второй способ. Делим отрезок $[0, b]$ точками $t_1 = 0, t_2, \ldots$ $\ldots, t_n = b$ на $n-1$ равных интервалов и коэффициенты формулы (1.4) ищем из условия, чтобы в указанных точках выполнялось равенство $\tilde{f}(t) = f(t)$. Получаем систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&C_1 \exp r_1 t_1 + \ldots + C_n \exp r_n t_1 = f(t_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_1 \exp r_1 t_n + \ldots + C_n \exp r_n t_n = f(t_n),
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

имеющую единственное решение.

Случай кратных характеристических показателей. В этом случае аппроксимационную формулу можно принять в виде

$$\tilde{f}(t) = P_1(t)\exp r_1 t + \ldots + P_k(t)\exp r_k t, \qquad (1.8а)$$

где $r_1, \ldots, r_k$ – различные характеристические показатели;

$$P_i(t) = C_{i0} + C_{i1}t + \ldots + C_{i,\,\mu_i - 1}\, t^{\mu_i - 1}, \qquad i = 1, \ldots, k;$$

$C_{i0}, C_{i1}, \ldots, C_{i,\mu_i - 1}$ – комплексные числа ("коэффициенты"), μ_i – кратность r_i. Общее число коэффициентов в этой формуле также равно n. Их можно найти по способам, являющимся некоторыми модификациями изложенных выше способов.

Первый способ. Из условия, указанного выше (при изложении первого способа), вместо системы уравнений (1.7) получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} P_i(0) = f(0),\\
&\sum_{i=1}^{k} [(p + r_i)P_i(t)]_{t=0} = [pf]_{t=0},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum_{i=1}^{k} [(p + r_i)^{n-1}P_i(t)]_{t=0} = [p^{n-1}f]_{t=0}.
\end{aligned} \qquad (1.9)$$

Это – система линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов. Так как функции

$$\exp r_1(t), \ldots, t^{\mu_1 - 1}\exp r_1 t, \ldots, \exp r_k t, \ldots, t^{\mu_k - 1}\exp r_k t$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (1.5) и, следовательно, вронскиан этой системы функций отличен от нуля при всех t, то, учитывая, что при $t = 0$ он совпадает с определителем системы (1.9), заключим, что последний также отличен от нуля. Поэтому система (1.9) однозначно разрешима.

Второй способ. Аналогично предыдущему, вместо системы (1.8) получим систему

$$\sum_{i=1}^{k} P_i(t_j)\exp r_i t_j = f(t_j), \qquad j = 1, \ldots, n,$$

также являющуюся системой линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов, имеющей единственное решение.

1.2.3. Описание сосредоточенного сигнала функцией комплексного аргумента. Для описания сигналов в теории стационарных линейных систем широко применяются "изображения" функций $f(t)$, описывающих сосредоточенные сигналы, конструируемые при применении преобразования Лапласа (*изображения Лапласа*). Известны два подхода к их определению.

П е р в ы й п о д х о д [25, 27, 46]. Требуется, чтобы:

– область определения функции $f(t)$ включала интервал $[0, \infty)$ [27];

– функция $f(t)$ на любом конечном интервале $[0, T]$ была абсолютно интегрируемой и имела не более чем конечное число точек разрыва;

– существовали такие вещественные числа M и s_0, что $|f(t)| < M \exp s_0 t$ [46, с. 462].

Эти требования предъявляются к *числовым* функциям $f(t)$, следовательно, к функциям $f_0(t)$, описывающим *безымпульсные составляющие* сигналов.

Изображение Лапласа $F(s)$ функции $f(t)$ определяется в некоторой области $\operatorname{Re} s > c$ равенством

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \exp(-st)\, dt. \tag{1.10}$$

Приведенное определение, согласно [25], распространяется на случай функций $f(t)$, описывающих сосредоточенные сигналы в целом, если в соответствии с изложенным в п. 1.1.2 рассматривать функцию $\delta(t-u)$ как предел последовательности функций, описывающих кратковременные импульсы, отличных от нуля только на некоторых конечных интервалах, которые включают точку u и стягиваются с увеличением номера последовательности к этой точке. При таком рассмотрении учитывается любая импульсная составляющая сигнала

$$f_1(t) \triangleq \sum_{i=1}^{m} c_i \delta(t-u_i), \qquad u_1 < u_2 < \ldots,$$

за исключением такой, для которой $u_1 = 0$. В этом случае при произвольном конструировании последовательности кратковременных импульсов, стремящихся к первому импульсу, только часть интервала жизни каждого такого импульса принадлежит интервалу $[0, \infty)$. Чтобы правильно учесть и этот случай, Г. Дёч [25] предлагает следующее правило: при $u_1 = 0$ рассматривать первый импульс как предел последовательности кратковременных импульсов, *зарождающихся в момент* $u_1 = 0$.

Для существования области сходимости интеграла (1.10) в рассматриваемом общем случае при конечном m достаточно существования вещественных чисел M и c, при которых для всех $t \in (0, \infty)$

$$|f_0(t)| \leqslant M \exp ct,$$

а при бесконечном – этого условия и неравенства

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i| (-cu_i) < \infty.$$

В т о р о й   п о д х о д [26, 30]. Требуется, чтобы область определения сигнала включала интервал (T, ∞), где T – какое-либо отрицательное число, и, если имеется область сходимости указанного ниже интеграла для всех $\epsilon \in (T, 0)$ и существует указанный ниже предел, изображение определяется равенством

$$F(s) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{\infty} f(t) \exp(-st) dt. \qquad (1.11)$$

При принятой нами структуре сигналов их поведение на интервале $(T, 0)$ не влияет на достаточные условия сходимости интеграла (они те же, что и при первом подходе).

Оба подхода приводят к одинаковым изображениям $F(s)$. При этом если изображение существует, то функция $F(s)$ определена на некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} s > c$ и является аналитической в этой области [30, с. 613]. Для дальнейшего примем второй вариант определения. При этом при применении формулы (1.11) ее правую часть будем записывать в виде

$$\int_{0-}^{\infty} f(t) \exp(-st) dt.$$

Можно распространить определение $F(s)$ на всю комплексную плоскость, за исключением особых точек, применив методы аналитического продолжения [40, с. 214–215].

Если функции $f(t)$ и $F(s)$ связаны преобразованием Лапласа, то это обозначается следующим образом:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)], \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]. \qquad (1.12)$$

В ряде случаев вместо символов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{-1}$ будем применять символы $\mathcal{L}_t$, $\mathcal{L}_t^{-1}$, и $\mathcal{L}_{t/s}$, $\mathcal{L}_{t/s}^{-1}$.

Если через J обозначить множество всех значений t из интервала $[0, \infty)$, за исключением моментов появления импульсов, то при всех $t \in J$ для пары $[f(t), F(s)]$, связанной преобразованием Лапласа, справедливо равенство [30, с. 619]

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) \exp st\, ds, \qquad (1.13)$$

где c – любое вещественное число, такое, что интеграл в (1.12) сходится на полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant c$. Для точек непрерывности оригинала

$$\tfrac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)] = f(t). \qquad (1.14)$$

В точках разрывов 1-го рода (соответствующих скачкам сигнала) значение оригинала слева (справа) от точки разрыва находится согласно равенству

$$f(t \mp 0) = \lim_{\epsilon \to 0} f(t \mp \epsilon), \quad \epsilon > 0. \tag{1.15}$$

Остается дополнить формулу (1.13) правилом определения значения оригинала в точках, соответствующих моментам приложения импульсов. Согласно [26, с. 70], если сигнал содержит импульс вида $c_1 \delta(t)$, то*)

$$c_1 = \lim_{s \to \infty} F(s). \tag{1.16}$$

Применяя этот результат и *теорему запаздывания* [30, с. 615], найдем, что если сигнал содержит импульсы вида $c_1 \delta(t)$ и $c_2 \delta(t - u_2)$, то

$$c_2 = \lim_{s \to \infty} [F(s) - c_1] \exp s u_2. \tag{1.17}$$

Аналогично, если сигнал дополнительно содержит импульс вида $c_3 \delta(t - u_3)$, то

$$c_3 = \lim_{s \to \infty} \{[F(s) - c_1] \exp s u_2 - c_2\} \exp s u_3.$$

Процесс продолжения этих соотношений при дальнейшем учете следующих импульсов очевиден.

Приведенный алгоритм расчета коэффициентов модуляции импульса или потока импульсов опирается на информацию о моментах приложения импульсов. Считая, что момент приложения первого импульса u_1 всегда равен нулю (при отсутствии импульса в этот момент времени считаем $c_1 = 0$), моменты приложения следующих импульсов определяем по следующему правилу: для каждого $i = 1, 2, \ldots$ значение u_i такое, при котором c_i, определенное согласно расчетному алгоритму, удовлетворяет неравенству $0 < |c_i| < \infty$. Очевидно, значения c_i при этом находятся однозначно.

1.2.4. Описание сосредоточенного сигнала функцией двух аргументов: вещественного и комплексного. Пусть функция $f(t)$, описывающая сигнал, задана на интервале $I = (-\infty, T)$, $T \leqslant \infty$, и пусть она удовлетворяет условиям, обеспечивающим сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{t+0} |f(u)| \exp[s(u - t)]\, du \tag{1.18}$$

при каком-либо вещественном значении c комплексного параметра

*) Этот и все следующие пределы берутся при изменении s в области определения $F(s)$ равенством (1.10). Поэтому следует считать $\operatorname{Re} s > 0$.

s при всех $t \in T$. Тогда в области $\operatorname{Re} s > c$, $t \in I$ этой функции однозначно соответствует функция $F(s, t)$ определенная как изображение по Лапласу (в смысле второго определения п. 1.2.2) функции $f(t-\tau)$, где τ рассматривается как аргумент, а t – как параметр, т.е.

$$F(s, t) = \int_{0-}^{\infty} f(t-\tau)\exp(-s\tau)\,d\tau. \tag{1.19}$$

Функция $F(s, t)$ является в указанной выше области аналитической функцией от s. Ее область определения по этому аргументу может быть распространена на всю комплексную плоскость, за исключением особых точек, путем *аналитического продолжения* [101, с. 161].

Заметим, что если $T = \infty$ и $f(t)$ является аналитической функцией, определенной с точностью до некоторого числа числовых параметров, то условия, которым должны удовлетворять параметры для существования в заданной области значений s функций $F(s)$ и $F(s, t)$, определенных, соответственно, равенствами (1.11) и (1.19), существенно различны. Например, если $f(t) = \exp \lambda t$, то в области $\operatorname{Re} s > 0$ для сходимости интеграла в (1.11) необходимо и достаточно неравенства $\lambda < 0$, а для сходимости интеграла в (1.19) необходимо и достаточно неравенства $\lambda > 0$.

Операцию перехода от функции $f(t)$ к функции $F(s, t)$, следуя [74], будем называть *левым преобразованием Лапласа,* функцию $f(t)$ – *оригиналом,* функцию $F(s, t)$ – *левым изображением.* Если функции $f(t)$ и $F(s, t)$ связаны левым преобразованием Лапласа, то это обозначается следующим образом:

$$F(s, t) = \Lambda[f(t)], \quad f(t) = \Lambda^{-1}[F(s, t)]. \tag{1.20}$$

В таблице 1.1 приведены левые изображения простейших оригиналов для $t \geqslant 0$.

Свойства левого преобразования Лапласа подробно изучены в [52, 74], где читатель может с ними познакомиться. Здесь мы остановимся лишь на формулах обращения. Их две: *интегральная* и *дифференциальная.*

Интегральная формула обращения имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \to 0} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s, t)\exp st\,ds, \tag{1.21}$$

где c имеет смысл, указанный выше.

Дифференциальная формула обращения [74, с. 496] имеет вид

$$f(t) = sF(s, t) + \frac{\partial F(s, t)}{\partial t}.$$

Таблица 1.1

Левые изображения простейших функций при $t \geqslant 0$
(a – вещественное число, λ – комплексное число)

$f(t)$	$F(s, t)$	$f(t)$	$F(s, t)$
$\delta(t-a)$	0 при $t<a$, $\exp s(a-t)$ при $t \geqslant a$	0 при $t<0$, $\exp \lambda t$ при $t \geqslant 0$	$\dfrac{\exp \lambda t - \exp(-st)}{s+\lambda}$
1	$1/s$	$\cos \lambda t$	$\dfrac{s \cos \lambda t + \lambda \sin \lambda t}{s^2+\lambda^2}$
0 при $t<0$ 1 при $t \geqslant 0$	$\dfrac{1-\exp(-st)}{s}$	0 при $t<0$, $\cos \lambda t$ при $t \geqslant 0$	$\dfrac{s \cos \lambda t + \lambda \sin \lambda t - s \exp(-st)}{s^2+\lambda^2}$
t	$\dfrac{st-1}{s^2}$	$t \exp \lambda t$	$\dfrac{st+\lambda t-1}{s^2+\lambda^2}$
0 при $t<0$, t при $t \geqslant 0$	$\dfrac{st+\exp(-st)-1}{s^2}$	0 при $t<0$, $t \exp \lambda t$ при $t \geqslant 0$	$\dfrac{(st+\lambda t-1)\exp \lambda t - \exp(-st)}{(s+\lambda)^2}$
$\exp \lambda t$	$\dfrac{\exp \lambda t}{s+\lambda}$		

Заметим, что аналога последней формулы в теории обычного преобразования Лапласа нет.

1.2.5. Спектр сосредоточенного сигнала. Понятие "спектр сигнала" является обобщением и некоторой модификацией понятия "комплексный спектр" [97, с. 110] сигнала, описываемого абсолютно интегрируемой функцией, и понятия "линейный частотный спектр" [97, с. 106] периодического сигнала. Оно применимо к сигналам, определенным на интервале $(-\infty, T)$, где $T \leqslant \infty$ и представимым в виде

$$f(t) = f_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} f_k \exp i\omega_k t, \tag{1.22}$$

где $f_0(t)$ – абсолютно интегрируемая на интервале $(-\infty, T)$ комплекснозначная функция, f_k – комплексные числа, причем такие, что ряд в формуле (1.22) сходится, ω_k – вещественные числа.

Обозначив спектр сигнала $f(t)$ символом $\varphi_f(\omega)$, определим его равенством

$$\varphi_f(\omega) = \int_{-\infty}^{T} f_0(t) \exp(-i\omega t) dt + 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} f_k \delta(\omega - \omega_k). \tag{1.23}$$

Заметим, что при принятом определении спектр сигнала зависит от значения T. Однако указывать эту зависимость в обозначениях нецелесообразно, так как обычно при решении той или иной задачи анализа области определения всех сигналов совпадают и, следовательно, для всех сигналов T – одно и то же число. Заметим также, что спектр сигнала в нашем смысле существенно отличается от спектра функции в смысле Н.Винера [144].

§ 1.3. Стохастические сигналы

1.3.1. Описание безымпульсных сосредоточенных стохастических сигналов как случайных функций времени. В общем случае стохастический сигнал характеризуется в детерминистском и вероятностном аспектах. Наиболее полной системой вероятностных характеристик безымпульсного сосредоточенного стохастического сигнала является система характеристик, определяющих сигнал как случайную функцию времени.

Определение 1.1 (Слуцкий [139]). Функция вещественного аргумента t, значения которой – вещественные случайные величины, называется *случайной функцией* (*вероятностным процессом, реализуемым как случайная функция, случайным процессом* [96]), если для любой системы значений аргумента $t_1, t_2, \ldots, t_n$ из области ее определения определена функция F распределения системы случайных величин $G(t_1), G(t_2), \ldots, G(t_n)$.

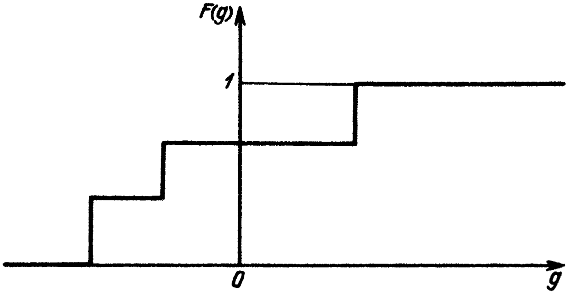


Рис. 1.3. Функция распределения дискретной случайной величины

Случайная величина $G(t_i)$, где t_i – фиксированное значение t, называется *сечением* в точке t_i случайной функции $G(t)$. Функция распределения $F(g \mid t_i)$ сечения случайной функции в точке t_i называется *одномерной функцией распределения* случайной функции в точке t_i.

Области возможных значений сечений случайной функции могут совпадать или не совпадать с числовой осью $(-\infty, \infty)$. Но поскольку функция распределения любой случайной величины, в частности сечения случайной функции, определена на всей числовой оси, то при рассмотрении сечений с областями возможных значений, не заполняющих числовую ось, их заменяют случайными величинами, определенными на всей оси. При этом требуется выполнение следующего условия эквивалентности в вероятностном смысле исходной и вводимой величин: для любого значения или любой области значений исходной случайной величины из области ее возможных значений вероятности того, что вводимая случайная величина принимает данное значение или принадлежит данной области, равны вероятностям тех же событий для исходной случайной величины. В частности, сечение, являющееся дискретной случайной величиной (т.е. такой случайной величиной, область возможных значений которой – конечное или счетное множество вещественных чисел), заменяется случайной величиной, определенной на интервале $(-\infty, \infty)$. Функция распределения вводимой случайной величины принадлежит к классу ступенчатых функций. Пример такой функции распределения показан на рис. 1.3.

Не нарушая практически общности, одномерную функцию распределения можно считать дифференцируемой на всех подынтервалах ее непрерывности. Если, кроме того, пользуясь понятием дельта-функции, определить операцию дифференцирования с учетом дифференцирования скачков так, как это предлагает В.С.Пугачев [86, с. 42], то производную $dF(g \mid t_i)/dg$ можно определить на всей числовой оси. Эта производная, которую обозначим символом $f(g \mid t_i)$, называется *одномерной плотностью распределения вероятностей случайной функции в точке* t_i. Если в точке t_i функция распределения имеет скачок, то

$$f(g \mid t_i) = p_i f(t - t_i),$$

где

$$p_i = F(g \mid t_i + 0) - F(g \mid t_i - 0).$$

В соответствии с общими свойствами плотностей распределения вероятностей, одномерная плотность распределения случайной функции в точке t_i является неотрицательной функцией и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(g \mid t_i)\,dg = 1. \tag{1.24}$$

Если одномерная функция распределения и плотность распределения вероятностей в точке t_i определены для всех t_i из интервала определения случайной функции, то, заменяя число t_i переменной t, получаем *одномерную функцию распределения и плотность распределения вероятностей случайной функции* (без добавления "в точке") как функцию двух переменных g и t.

Аналогично определяются n-мерные функции распределения и плотность распределения вероятностей случайной функции:

а) n-мерная функция распределения случайной функции – как функция $2n$ аргументов $F(g_1 \mid t_1, \ldots, g_n \mid t_n)$, где $t_1, \ldots, t_n$ – переменные;

б) n-мерная плотность распределения вероятностей $f(g_1 \mid t_1, \ldots$ $\ldots, g_n \mid t_n)$ – как функция $2n$ аргументов, являющаяся смешанной n-й частной производной указанной выше n-мерной функции распределения по аргументам $g_1, \ldots, g_n$:

$$\frac{\partial F(g_1 \mid t_1, \ldots, g_n \mid t_n)}{\partial g_1 \ldots \partial g_n}. \tag{1.25}$$

Случайной функции $G(t)$ соответствует множество вещественных числовых функций $g(t)$, значениями которых являются значения сечений случайной функции. Функция $g(t)$ называется *реализацией* случайной функции $G(t)$. Если сигнал не охарактеризован в детерминистском аспекте, то его реализациями принципиально могут быть любые числовые функции. Но возможно также, что оговорены условия, которым последние должны удовлетворять. В этом случае множество всех функций, удовлетворяющих этим условиям, называется *множеством возможных реализаций*.

Случайная функция задана, если заданы все ее n-мерные функции распределения. Отсюда следует, что случайную функцию нельзя задать, например, с помощью конечного числа числовых функций. Объем информации, необходимый для задания случайной функции, в общем случае является бесконечным. Поэтому на практике пользуются менее полным математическим описанием стохастических сигналов. С этой целью применяются следующие вероятностные характеристики сигналов: а) математическое ожидание; б) корреляционная функция; в) одномерная функция распределения и плотность распределения вероятностей случайной функции, описывающей сигнал.

Математическое ожидание $\mathrm{M}G(t)$ сигнала $G(t)$ не является его непременной характеристикой. Возможны сигналы, математическое ожидание которых определено не для всех моментов времени или не определено для всех моментов времени. Критерий существования математического ожидания – сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(g \mid t)\, dg. \tag{1.26}$$

Если интеграл сходится при данном значении t, то его значение называется *математическим ожиданием сигнала в момент времени t*. Обозначим

$$\mathrm{M}G(t) \triangleq m_G(t). \tag{1.27}$$

Корреляционной функцией сигнала называется функция

$$R_G(t_1, t_2) \triangleq \mathrm{M}\mathring{G}(t_1)\mathring{G}(t_2) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathring{g}_1 \mathring{g}_2 f(\mathring{g}_1 \mid t_1, \mathring{g}_2 \mid t_2)\, d\mathring{g}_1\, d\mathring{g}_2, \tag{1.28}$$

где $\mathring{G}(t_{1,2}) \triangleq G(t_{1,2}) - m_G(t_{1,2})$ – центрированные случайные величины, $g_{1,2}$ – их значения. Корреляционная функция определена для тех значений аргументов t_1 и t_2, для которых существуют математические ожидания $m_G(t_1)$ и $m_G(t_2)$ и интеграл в правой части равенства (1.28) сходится.

Одномерная функция (или *плотность*) *распределения* сигнала – характеристики, упомянутые в п. "в" (см. выше). Они определены для всех значений аргументов на интервале, где сигнал определен как случайная функция.

Во многих задачах анализа приходится рассматривать одновременно несколько стохастических сигналов. Совокупность конечного числа или счетного множества случайных функций рассматривается как *векторная случайная функция* [86, с. 304]. Под этим понимается, что определены совместные функции распределения любой конечной системы сечений случайных функций, входящих в данную совокупность. Множество совместных функций распределения всех возможных систем сечений является полной вероятностной характеристикой векторной случайной функции.

Для решения ряда задач анализа часто бывает достаточной более бедная вероятностная характеристика векторной случайной функции — множество математических ожиданий всех компонент и смешанных центральных моментов 2-го порядка (*корреляционных моментов* [86, с. 80]) для всех комбинаций сечений компонент. Однако, как и в случае случайной функции, все или некоторые из этих характеристик могут не существовать.

Переход к континуальному множеству стохастических сигналов не требует принципиального изменения изложенных выше понятий. Однако они несколько усложняются. В частности, в случае континуума сигналов, соответствующего заданному интервалу изменения одного пространственного аргумента, понятие случайной функции должно быть обобщено на случай двух аргументов, t и l. Такое обобщение не представляет затруднений и дается следующим определением.

Функция $G(t, l)$ двух вещественных аргументов t и l, значения которой — вещественные случайные величины, называется *случайной функцией*, если для любой системы значений $t_1, \ldots, t_n$ аргумента t и системы значений $l_1, \ldots, l_m$ аргумента l из области ее определения определена функция распределения системы случайных величин $G(t_i, l_j)$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$.

Простейшее обобщение понятий математического ожидания, корреляционной функции и одномерной функции или плотности распределения сигнала, описываемого такой случайной функцией, следующее: эти понятия применяются к сечениям функции $G(t, l)$ для данного значения l; варьируя l, получаем зависимость упомянутых выше характеристик от l (как от параметра).

1.3.2. Стационарные сосредоточенные стохастические сигналы. Сосредоточенные стохастические сигналы называются *стационарными*, если они описываются *стационарными случайными функциями*.

Различают два вида стационарных случайных функций: 1) случайные функции, стационарные в узком смысле; 2) случайные функции, стационарные в широком смысле.

Случайная функция $G(t)$ называется *стационарной в узком смысле*, если на интервал ее определения I любая n-мерная функция распределения не изменяется при замене $t_1, \ldots, t_n$ на $t_1 + u, \ldots, t_n + u$, т. е.

$$F(g_1 \mid t_1, \ldots, g_n \mid t_n) = F(g_1 \mid t_1 + u, \ldots, g_n \mid t_n + u) \tag{1.29}$$

при любом таком вещественном числе u, что $t_i, t_i + u \in I$, $i = 1, \ldots, n$.

Случайная функция $G(t)$ называется *стационарной в широком смысле*, если:

а) она определена на интервале $(-\infty, \infty)$ [21, с. 246],

б) ее математическое ожидание определено и одинаково для всех $t \in (-\infty, \infty)$,

в) корреляционная функция определена для всех $t_1, t_2 \in \in (-\infty, \infty)$ и не изменяется при замене t_1, t_2 на t_1+u, t_2+u, т.е.

$$R_G(t_1, t_2) = R_G(t_1 + u, t_2 + u) \tag{1.30}$$

при любом вещественном u.

Если случайная функция стационарна в широком смысле, то равенство (1.29) может и не выполняться, но обязательно существование ее математического ожидания и корреляционной функции и выполнение условий (б) и (в). Для случайной функции, стационарной в широком смысле, полагая $u = -t_2$, получим $R_G(t_1, t_2) = R_G(t_1 - t_2, 0)$. Следовательно, корреляционная функция сигнала в этом случае является функцией одного аргумента – разности $t_1 - t_2$. Обозначив эту разность символом τ, для корреляционной функции как функции одного аргумента, введем обозначение $R_G^*(\tau)$. В силу коммутативности операции умножения в правой части равенства (1.28), справедливо равенство

$$R_G^*(\tau) = R_G^*(-\tau), \tag{1.31}$$

т.е. функция $R_G^*(\tau)$ – четная.

Далее будем рассматривать сигналы, описываемые случайными функциями, стационарными в широком смысле. Пусть $G(t)$ – случайная функция этого класса и один из интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} [R_G^*(\tau)]^2 d\tau, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |R_G^*(\tau)|\, d\tau \tag{1.32}$$

существует (ограничен). Тогда к функции $R_G^*(\tau)$ может быть применено [39, 144] преобразование Фурье. Следовательно, можно определить функцию $S_G(\omega)$:

$$S_G(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} R_G^*(\tau) \exp(-i\omega\tau)\, d\tau, \quad \omega \in (-\infty, \infty). \tag{1.33}$$

Эта функция называется *спектральной плотностью* случайной функции $G(t)$. В силу четности корреляционной функции и равенства (1.26) спектральная плотность – также четная функция, а равенство (1.33) эквивалентно равенству

$$S_G(\omega) = 2\int_0^{\infty} R_G^*(\tau) \cos \omega\tau\, d\tau.$$

Кроме того, как показано в [86], спектральная плотность – неотрицательная функция.

Если известна спектральная плотность случайной функции и ее корреляционная функция непрерывна и абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty, \infty)$, то последняя может быть найдена с помощью обратного преобразования Фурье [39]:

$$R_G^*(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_G(\omega) \exp i\omega\tau \, d\omega. \tag{1.34}$$

В силу четности спектральной плотности формулу (1.34) можно заменить формулой

$$R_G^*(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_G(\omega) \cos \omega\tau \, d\omega.$$

Полагая в этой формуле $\tau = 0$, получим следующее выражение для *дисперсии* случайной функции:

$$D_G \equiv R_G^*(0) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} S_G(\omega) \, d\omega.$$

Стационарная в широком смысле случайная функция называется *эргодической* [86], если с вероятностью 1 существует указанный ниже предел и удовлетворяется условие

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \, dt = m_G$$

для произвольной реализации $g(t)$. Это условие говорит о том, что математическое ожидание случайной функции $G(t)$ с вероятностью 1 равно среднему значению ее произвольной реализации.

Поясним понятие эргодичности функции. Пусть Ω – множество возможных реализаций случайной функции и ω – произвольный элемент этого множества. Пусть Ω_1 – множество реализаций, для которых существует указанный предел и удовлетворяется указанное условие. Тогда в случае эргодической случайной функции $P(\omega \in \Omega_1) = 1$. Согласно [86, с. 324], необходимым и достаточным условием эргодичности стационарной в широком смысле случайной функции $G(t)$ является существование и равенство нулю предела

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_G^*(\tau) \, d\tau.$$

Стационарная в широком смысле случайная функция называется *эргодической по отношению к корреляционной функции* [86], если случайная функция $H(t) \triangleq [G(t) - m_G][G(t+\tau) - m_G]$, где τ — произвольный вещественный параметр, является стационарной в широком смысле и эргодической, т.е. если с вероятностью 1 существует указанный предел в левой части равенства

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [g(t) - m_G][g(t+\tau) - m_G]\, dt = R_G^*(\tau)$$

и для любого τ равенство справедливо для произвольной реализации $g(t)$. Смысл этого условия: значение корреляционной функции при данном значении τ с вероятностью 1 равно среднему значению произведения $[g(t) - m_G][g(t+\tau) - m_G]$ для произвольной реализации.

Свойства эргодичности случайной функции эффективно используются на практике при работе со случайными функциями. Наличие этих свойств позволяет при вычислении математического ожидания и корреляционной функции заменить осреднение по множеству реализаций осреднением по времени в одной реализации.

Пример 1.1. В качестве иллюстрации применим этот прием при вычислении корреляционной функции сигнала, описываемого случайной функцией

$$G(t) = a \cos(\omega_0 t + \Phi), \quad t \in (-\infty, \infty),$$

где a и ω_0 — положительные числа, Φ — вещественная случайная величина, равномерно распределенная на интервале $(-\pi, \pi)$. Эта случайная функция стационарна не только в широком, но и в узком смысле и эргодическая по отношению к корреляционной функции *).

Заменим осреднение по множеству реализаций осреднением по времени в одной произвольной реализации. При этом, так как на любых интервалах длительности периода $T = 2\pi/\omega$ оно дает одинаковые результаты, достаточно осреднения за период. Для удобства левую границу интервала выберем так, чтобы имело место равенство $\varphi = 0$ и отсчет времени будем вести с этой границы. Получим

$$R_G^*(\tau) = \frac{a^2}{T} \int_0^T \cos \omega_0 t \cdot \cos \omega_0 (t+\tau)\, dt =$$

$$= \frac{a^2}{T} \left(\int_0^T \cos^2 \omega_0 t \cos \omega_0 \tau\, dt - \frac{1}{2} \int_0^T \sin 2\omega_0 t \sin \omega_0 \tau\, dt \right) \equiv \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau.$$

*) В этом можно убедиться, проверив выполнение приведенного выше критерия эргодичности для функции $a^2 \cos(\omega_0 t + \Phi) \cos[\omega_0 (t+u) + \Phi]$, при произвольном вещественном u.

К числу стационарных стохастических сигналов относится также так называемый "белый шум". Он определяется как предел произвольной последовательности $G_1(t)$, $G_2(t)$, ... стационарных в широком смысле случайных функций, соответствующей стремящейся к нулю последовательности положительных чисел ϵ_i, $i = 1, 2, ...$, и удовлетворяющей условиям $m_{G_i} = 0$, $R^*_G(\tau) = Cd_i(t)$, где C – положительное число, одинаковое для всех членов последовательности, $d_i(t)$ – неотрицательная функция, обладающая следующими свойствами:

$$d_i(t) = 0 \quad \text{при} \quad |t| > \epsilon_i, \qquad \int_{-\epsilon_i}^{\epsilon_i} d_i(t)\,dt = 1.$$

Последовательность корреляционных функций таких случайных функций стремится к пределу

$$R^*_G(\tau) = C\delta(\tau).$$

Этот предел рассматривается как корреляционная функция белого шума.

Спектральная плотность белого шума получается в виде

$$S_G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C\delta(\tau)\exp(-i\omega\tau)\,d\tau = C.$$

Белый шум не имеет математического описания в виде случайной функции. Известные в литературе сигналы этого типа требуют для математического описания применения расширенного понятия случайной функции. Это расширение состоит в допущении включения в реализации случайной функции составляющих вида дельта-функции. Простейшим примером такого сигнала является симметричный импульсный шум – сигнал, представляющий собой организованный определенным образом стохастический поток импульсов (см. п. 1.3.4).

1.3.3. Нестационарные стохастические сигналы 2-го порядка. Естественным обобщением понятия стационарного стохастического сигнала, описываемого стационарной в широком смысле случайной функцией, является понятие "нестационарный стохастический сигнал 2-го порядка".

Стохастическим сигналом 2-го порядка будем называть стохастический сигнал $G(t)$, определенный на произвольном заданном интервале I, описываемый случайной функцией 2-го порядка [137], т.е. случайной функцией, имеющей при всех t, t_1, $t_2 \in I$ определенные математическое ожидание $m_G(t)$ и корреляционную функцию $R_G(t_1, t_2)$. Стохастический сигнал 2-го порядка будем называть *нестационарным*, если он не является стационарным сигналом (п. 1.3.2).

Полагая $t_1 \geqslant t_2,\ t_1 - t_2 = \tau$, корреляционную функцию такого сигнала можно представить в виде

$$R_G(t, t-\tau) \triangleq R_G^*(\tau, t).$$

Теорема 1.1. *Пусть для всех* $t \in I$ *интеграл*

$$\int_0^{t-a} [R_G^*(\tau, t)]^2 d\tau,$$

где a *– левая граница интервала* I, *существует и ограничен. Тогда для любого* $t \in I$ существует функция

$$S_G(\omega, t) \triangleq 2 \int_0^{t-a} R_G^*(\tau, t) \cos \omega\tau d\tau, \tag{1.35}$$

где $\omega \in (-\infty, \infty)$.

Доказательство. Расширим область определения функции $R_G^*(\tau, t)$ до интервала $(-\infty, \infty)$, положив $R_G^*(\tau, t) = 0$, если $t - \tau \notin I$ и $R_G^*(\tau, t) = R_G^*(-\tau, t)$, если $\tau \in (-\infty, 0)$. Тогда для каждого $t \in I$ определена функция (см. вывод формулы (1.33))

$$S_G(\omega, t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} R_G^*(\tau, t) \cos \omega\tau d\tau. \tag{1.36}$$

Так как функция $R_G^*(\tau, t)$ при указанном доопределении четная и, кроме того, $R_G^*(\tau, t) = 0$ при $t - \tau < a$, то отсюда следует (1.35).

Функцию $S_G(\omega, t)$ будем называть *спектральной плотностью*. При $I = (-\infty, \infty)$ и независимости $R_G^*(\tau, t)$ от t функция $S_G(\omega, t)$ превращается в спектральную плотность сигнала, описываемого стационарной в широком смысле случайной функцией.

Из (1.35) следует

$$R_G^*(\tau, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_G(\omega, t) \cos \omega\tau d\omega$$

и, в частности,

$$D_G(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_G(\omega, t) d\omega.$$

1.3.4. Стохастические импульсы и потоки импульсов. Наряду с сосредоточенными сигналами, описываемыми случайными функциями, будем рассматривать сосредоточенные стохастические сигналы, состоящие только из мгновенных импульсов. Такие сигналы будем называть *стохастическими импульсами*, или *стохастическими* *потоками импульсов*, если сигнал состоит из двух или большего числа импульсов.

Стохастический импульс имеет математическое описание $G(t) = C\delta(t - T)$, где C, T – система вещественных случайных величин. В классе стохастических потоков импульсов выделим *потоки единичных импульсов* (если все импульсы единичные) и *потоки модулированных импульсов* (если в потоке есть импульсы, отличные от единичных).

Поскольку у потока единичных импульсов случайными элементами могут быть только моменты появления импульсов, то такой поток является стохастическим, если множество упомянутых моментов определено как система случайных величин, случайная последовательность или точечный процесс. Полной системой характеристик этого стохастического потока является полная система вероятностных характеристик множества моментов. Обозначая случайные моменты появления импульсов символами T_k, стохастический поток единичных импульсов в случае, когда множество моментов – система случайных величин, можно описать обобщенной случайной функцией

$$G(t) \triangleq \sum_{k=0}^{r} \delta(t - T_k), \qquad (1.37а)$$

где r – натуральное число; а когда множество моментов – случайная последовательность – обобщенной случайной функцией

$$G(t) \triangleq \sum_{k=q}^{r} \delta(t - T_k), \qquad (1.37б)$$

где по крайней мере один из двух пределов бесконечен ($q = -\infty$ или $r = \infty$).

Математическое описание стохастического потока единичных импульсов в случае, когда множество моментов появления импульсов – точечный процесс, несколько сложнее. Это связано с определением точечного процесса.

Под точечным процессом будем понимать стохастически определенное случайное бесконечное дискретное множество точек на числовой оси, причем такое, что при произвольно выбранном вещественном числе a в каждой реализации процесса точки могут быть пронумерованы в порядке возрастания (или убывания) их абсцисс, с привязкой точки t_1 к точке a как ближайшей к ней справа (или слева). Под стохастической определенностью такого множества понимаем следующее:

а) для каждого целого числа i определена случайная величина $T_i(a)$ функцией распределения $F[t_i(a)]$, б) множество ... $T_{-1}(a)$, $T_0(a)$, $T_1(a)$, ... определено как двусторонняя случайная последовательность *).

Из приведенного определения следует, что нумерация точек в точечном процессе привязана к выбранному началу отсчета; для задания процесса необходимо задать характеристики случайных последовательностей для всех возможных точек отсчета (т.е. для любых чисел a).

В силу изложенного стохастический поток единичных импульсов в рассматриваемом случае можно описать в виде

$$G(t, a) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[t - T_k(a)]. \tag{1.37в}$$

У потока модулированных импульсов случайными элементами могут быть как моменты появления импульсов, так и коэффициенты модуляции. Поток модулированных импульсов является стохастическим, если по крайней мере одно из двух множеств (множество моментов появления импульсов и множество коэффициентов модуляции) характеризуется в вероятностном аспекте. В соответствии с тем, характеристики какого множества являются вероятностными, какова структура множества моментов появления импульсов и на каком множестве определены коэффициенты модуляции, можно различить десять видов таких потоков:

■ I. $G(t) = c(t) \sum_{k=q}^{r} \delta(t - T_k).$

II. $G(t) = \sum_{k=q}^{r} c_k \delta(t - T_k).$

III. $G(t) = C(t) \sum_{k=q}^{r} \delta(t - T_k).$

IV. $G(t) = \sum_{k=q}^{r} C_k \delta(t - T_k).$

---

*) Это определение точечного процесса отличается от определения Дж. А. Макфаддена [133], согласно которому точечный процесс – это случайное бесконечное дискретное множество точек на числовой оси, элементы которого T_l образуют двустороннюю случайную последовательность, подчиняющуюся соотношению $T_{l+1} \geqslant T_l$. Оно также отличается от определения Й. Керстена, К. Маттеса и Й. Мекке [35, с. 10], рассматривающих точечный процесс как случайный элемент некоторого измеримого пространства.

V. $G(t) = C(t) \sum_{k=q}^{r} \delta(t - T_k)$.

VI. $G(t) = \sum_{k=q}^{r} C_k \delta(t - T_k)$.

VII. $G(t, a) = c(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[t - T_k(a)]$.

VIII. $G(t, a) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta[t - T_k(a)]$.

IX. $G(t, a) = C(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[t - T_k(a)]$.

X. $G(t, a) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta[t - T_k(a)]$. □ (1.38)

Здесь $c(t)$ – вещественная функция, c_k – элементы конечного множества вещественных чисел или вещественной последовательности, $C(t)$ – случайная функция, C_k, T_k – элементы системы вещественных случайных величин или вещественных случайных последовательностей, $T_k(a)$ – элементы точечного процесса.

Учитывая структуру стохастических потоков импульсов вида (1.37а), (1.37б) и I–VI из (1.38), их математические образы будем называть *обобщенными случайными функциями*. Если в описывающих их формулах заменить случайную функцию $C(t)$ ее реализацией $c(t)$, а случайные величины C_k и T_k – их значениями c_k и t_k, то описываемые получаемыми формулами обобщенные функции будем называть *реализациями обобщенной случайной функции* $G(t)$ и обозначать символом $g(t)$. Очевидно, функцией $g(t)$ описывается детерминированный поток импульсов

Более сложными видами стохастического потока импульсов являются потоки вида (1.37в) и VII–X из (1.38). Их математические описания не укладываются в рамки понятия обобщенной случайной функции (ввиду зависимости их вероятностных характеристик от a). Условимся называть математические образы таких потоков *дельта-процессами*. Очевидно, при фиксированном a дельта-процесс превращается в обобщенную случайную функцию.

Стохастические потоки импульсов вида III–VI, IX, X из (1.38) могут быть названы *потоками импульсов со случайной модуляцией*. По характеру модуляции такие потоки можно разделить на два вида:

а) потоки, у которых коэффициенты модуляции являются зависимыми случайными величинами;

б) потоки, у которых коэффициенты модуляции – независимые случайные величины.

Одним из простейших примеров потока первого вида является поток IV в случае, когда коэффициенты модуляции образуют марковскую цепь. Частным случаем потока второго вида со случайными моментами появления импульсов является "импульсный шум".

Определение 1.2 [67]. *Импульсным шумом* называется стохастический поток импульсов вида IX, X из (1.38), если все сечения случайной функции $C(t)$ или случайные величины C_k независимы и одинаково распределены с конечными математическими ожиданиями и дисперсиями, а моменты появления импульсов образуют стационарный точечный процесс.

Понятие *стационарный точечный процесс* в этом определении имеет следующий смысл.

Определение 1.3 [134]. Точечный процесс называется *стационарным*, если вероятностные характеристики случайной последовательности $...T_{-1} - a$, $T_0 - a$, $T_1 - a$, ... не зависят от a.

Стационарный точечный процесс с независимыми длинами интервалов между соседними точками называется *рекуррентным потоком* [37].

Очевидно, для импульсного шума математические описания IX и X в (1.38) эквивалентны. В дальнейшем будем пользоваться формулой X.

Импульсный шум называется *центрированным* [67], если $\mathrm{M}C_k = 0$. В частном случае, когда плотность распределения случайных величин C_k – четная функция, он называется *симметричным* [67].

Особый интерес как база, на которой можно построить удобные методы исследования случайных процессов в системах рассматриваемого класса, представляет собой частный вид импульсного шума, удовлетворяющий следующим условиям:

а) моменты появления импульсов образуют рекуррентный поток;

б) для любой последовательности интервалов $(-l_i, l_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, где l_i – убывающая, стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел, отношение вероятности размещения на интервале двух или большего числа моментов появления импульсов к длине интервала стремится к нулю.

Такой импульсный шум называется *цепным* [67]. Частный случай цепного шума, характеризуемый пуассоновским распределением чисел появления импульсов на интервале заданной длины, описывает по терминологии Дж.Х.Лэнинга и Р.Г.Бэттина [50] *чистый дробовой эффект*. Симметричный импульсный шум этого вида называется *дробовым шумом* [74].

1.3.5. Сосредоточенные стохастические сигналы общего вида. В общем случае будем рассматривать сосредоточенные стохастические сигналы, содержащие в качестве составляющих безымпульсные стохастические сигналы и стохастический импульс или стохастический поток импульсов, предполагая, что между составляющими нет стохастической зависимости. Математически такой сигнал не укладывается в рамки понятия случайной функции. Поэтому, говоря о его математическом описании, будем применять при наличии в сигнале стохастического импульса и/или стохастического потока импульсов вида (1.37а), (1.37б) и I–VI из (1.38) термин "обобщенная случайная функция"; при наличии стохастического потока импульсов вида (1.37в) и VII–X – термин "сумма случайной функции и дельта-процесса"; при наличии составляющих обоих видов – термин "сумма обобщенной случайной функции и дельта-процесса".

§ 1.4. Понятие состояния системы

Понятие *состояние динамической системы* принадлежит к числу исходных понятий теории систем и, следовательно, не может быть определено дедуктивно [24, с. 340]. Однако в соответствии с изложенным в § 0.2 его можно пояснить следующим образом. Пусть система определена и указаны ее входы и выходы. Пусть выделен некоторый момент времени t_0 из области I определения системы и сигналов, который принят за начальный, и ему ставится в соответствие *начальное состояние* системы (§ 0.2). Понятие начального состояния имеет следующий смысл: в данных, характеризующих начальное состояние, содержится информация о прошлом системы $(t < t_0)$, необходимая для определения ее реакции при $t > t_0$ на любые входные сигналы, действующие при $t \geqslant t_0$. Начальное состояние полностью охарактеризовано, если совокупность данных является исчерпывающей (§ 0.3).

Рассматривая в качестве начального произвольный момент времени $a \in I$, переходим от начального состояния к состоянию в текущий момент времени. Следовательно, знание состояния в текущий момент времени a доставляет дополнительную информацию, вносящую определенность в соотношение между входными сигналами в этот момент времени и на следующем за ним интервале *) $F(a)$ и выходными сигналами на $F(a)$.

---

*) Согласно обозначениям, принятым в § 0.2, $P(a)$ – часть интервала I, выделяемая неравенством $t < a$, $F(a)$ – часть интервала I, выделяемая неравенством $t > a$.

В соответствии со сказанным о начальных данных в § 0.3 и 0.5, состояние непрерывной линейной системы в произвольный момент времени a можно охарактеризовать конечной или счетной системой $s(a)$ чисел и/или функций временных и/или пространственных аргументов, формируемых по информации о функциях, описывающих входные и выходные сигналы на интервале $P(a)$.

Рассмотрим односвязную систему, причем такую, процессы в которой описываются дифференциальным уравнением

$$[p^n + b_1(t)p^{n-1} + \ldots + b_n(t)]x =$$

$$= [a_0(t)p^{n-1} + a_1(t)p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(t)]y, \quad p \equiv d/dt, \qquad (1.39)$$

с непрерывными коэффициентами, связывающим входной сигнал y с выходным x. Пусть $a \in I$ – заданный момент времени и функция $y(t)$ $(n-1)$-кратно дифференцируема *). Тогда состояние системы в момент a определяется системой предельных значений функции $x(t)$ и $n-1$ ее низших производных и функции $y(t)$ и $n-2$ ее низших производных при $t \to a$ слева. Так как указанные функции и их производные непрерывны в точке a, то их упомянутые предельные значения совпадают с их значениями в этой точке. В этом случае состояние системы можно описать так, как предложил Л.Заде и Ч.Дезоер [30] – системой значений в точке a функций $x(t)$ и $y(t)$ и указанных выше их низших производных.

При таком описании состояние системы определяется $2n$ числами. Однако его можно описать и более компактно: системой линейных комбинаций предельных значений перечисленных величин. Чтобы полностью охарактеризовать состояние, достаточно задать n таких линейных комбинаций – предельных значений линейных форм переменных $x(t)$, $y(t)$ и упомянутых их производных при $t \to a$ слева, сформированных таким образом, чтобы они были равны предельным значениям функции $x(t)$ и $n-1$ ее низшей производной при $t \to a$ справа при условии отключения в момент a входного сигнала, т.е. при $y(t) = 0$ при $t \geqslant a$. (Это следует из того, что частное решение линейного однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (1.39), на $F(a)$ вполне определено этими предельными значениями, а решение уравнения (1.39) на том же интервале при учете заданной функции $y(t)$ определяется этими значениями и функцией $y(t)$ на интервале $a \cup F(a)$.)

---

*) Это обеспечивает при произвольных начальных условиях существование и единственность решения уравнения (1.39) [36, с. 72].

Состояние системы, процессы в которой описываются системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + \sum_{j=1}^{k} b_{ij}(t)y_j, \quad i = 1, ..., n, \tag{1.40}$$

в которой $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$ – вещественные непрерывные функции, переменные $x_1, ..., x_n$ представляют собой выходные сигналы, а переменные $y_1, ..., y_k$ – входные, определяется значениями в рассматриваемый момент времени левых пределов искомых функций; в случае безымпульсных входных сигналов значения этих пределов совпадают со значениями функций.

Участие в описании состояния системы временных характеристик характерно для систем с запаздыванием, в частности [42], систем с уравнениями процесса вида

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}(t)x_j(t) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{r} c_{ij}^{(l)}(t)x_j[t - \tau_l(t)]\} + \sum_{j=1}^{k} b_{ij}(t)y_j(t),$$

$$i = 1, ..., n; \quad t \in (-\infty, T), \tag{1.41}$$

где $\tau_l(t)$ – неотрицательные функции, отличные от нулевой константы $r \geqslant 1$, $T \leqslant \infty$, $x_1, ..., x_n$ – выходные сигналы, $y_1, ..., y_k$ – входные. Коэффициенты системы (1.41) будем считать вещественными непрерывными функциями t.

Если все τ_l постоянны, то дифференциальные уравнения (1.41) относятся к классу дифференциально-разностных уравнений [8]; в общем случае уравнения (1.41) – дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом [82].

В описании состояния в момент a системы с запаздыванием рассматриваемого вида участвуют все или некоторые функции $x_j(t)$, $j = 1, ..., n$, каждая из которых задана на интервале $(a - \tau^{(j)}(a), a)$, где

$$\tau^{(j)}(a) = \max_{l'} \tau_{l'}(a),$$

l' – такие значения индекса l, для которых хотя бы один из коэффициентов $c_{ij}^{(l)}(t)$, $i = 1, ..., n$, при $t \in I$ не равен тождественно нулю.

Пусть в системе уравнений (1.41) $r = 1$, $\tau_1 \triangleq \tau$ и точная верхняя граница последовательности $\tau(a)$, $\tau[a + \tau(a)]$, $\tau\{a + \tau[a + \tau(a)]\}$,... не меньше T и пусть все функции $x_i(t)$ непрерывны или кусочно-непрерывны на интервале $(a - \tau(a), a)$. Тогда состояние системы в момент $t = a$ определено системой этих функций в указанной области.

Действительно, при рассмотрении процесса при $t > a$ в предположении, что функции $x_i(t)$ на интервале $(a - \tau(a), a)$ известны, функции $x_i[t - \tau(t)]$ можно рассматривать как функции $y_j(t)$, $j = k + 1, \ldots, k + n$, описывающие дополнительные входные сигналы. При предполагаемом характере функций $y_j(t)$, $j = 1, \ldots, k$ (см. п. 1.2.1) решение рассматриваемого частного вида системы (1.41)

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}(t)x_j(t) + c_{ij}(t)x_j[t - \tau(t)]\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} b_{ij}(t)y_j(t), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

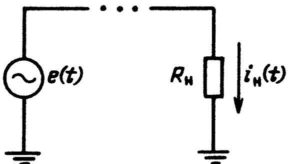
на интервале $(a, a + \tau(a)) \cap I$ определено функциями $y_j(t)$, $j = 1, \ldots, k + n$, на этом интервале, их составляющими вида $c\delta(t - a)$ (если они имеются) и числами $x_i(a - 0)$, $i = 1, \ldots, n$. Так как решение системы непрерывно или кусочно-непрерывно, то функции $y_j(t)$, $j = k + 1, \ldots, k + n$, не содержат составляющих типа дельта-функции. При этом решение на интервале $(a, a + \tau(a)) \cap I$ не зависит от значений этих функций при $t \leqslant a$ и, следовательно, от значений функций $x_i(t)$ при $t \leqslant a - \tau(a)$. Поэтому задание функций $x_i(t)$ на интервале $(a - \tau(a), a)$ дает исчерпывающую информацию о прошлом системы для определения при заданных функциях $y_j(t)$, $j = 1, \ldots, k + n$, состояния системы на интервале $(a, a + \tau(a)) \cap I$.

Если интервал I содержит полностью или частично интервал $(\tau(a), \tau(a + \tau(a)))$, то решение определено и на этом интервале, в силу транзитивного перехода. Очевидно, путем продолжения этого процесса доказывается определенность решения на всем интервале $F(a)$.

Если в системе уравнений (1.41) $r > 1$, то, полагая $\tau(a) = \min\limits_{l} \tau_l(a)$, при упомянутом выше условии на верхнюю границу последовательности $\tau(a)$, $\tau[a + \tau(a)]$, ... состояние системы в момент $t = a$ определим системой функций $x_i(t)$ на интервале $(a - \tau'(a), a)$, где $\tau'(a) \triangleq \max\limits_{l} \tau_l(a)$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству предыдущего утверждения.

Непрерывная линейная система называется *системой с распределенными параметрами* [92, с. 33], если ее характеристики зависят от пространственных координат. Наиболее распространенный подкласс таких систем объединяет системы, процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями с частными производными (аргументы: время и пространственные координаты). Их состояния в произвольный момент времени определяются системами функций пространственных аргументов, дополненными, возможно, системами чисел.



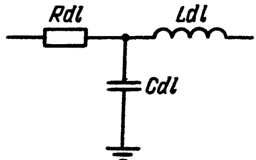


Рис. 1.4. Однопроводная линия электропередачи

Рис. 1.5. Элементарная ячейка линии

П р и м е р 1.2. Рассмотрим однопроводную линию электропередачи с активной нагрузкой (рис. 1.4). Представим ее в виде последовательного соединения бесконечного числа ячеек длиной dl, где l – расстояние от начала линии (места включения эдс). Пусть Rdl, $L\,dl$ и Cdl – соответственно активное сопротивление, индуктивность и емкость ячейки (рис. 1.5). Пусть $v(t, l)$ и $i(t, l)$ – напряжение и ток в точке линии с абсциссой l в момент t, m – длина линии. Тогда, очевидно, $v(t, 0) = e(t)$, $i(t, m) = i_{н}(t)$.

На основании второго закона Кирхгофа для произвольной ячейки справедливо равенство

$$-\frac{\partial v}{\partial l}\,dl = iR\,dl + \frac{\partial i}{\partial t}\,L\,dl.$$

С другой стороны, количество электричества, приобретенного ячейкой за время dt, т.е.

$$[i(t, l) - i(t, l + dl)]\,dt \equiv -\frac{\partial i}{\partial l}\,dl\,dt, \tag{1.42}$$

равно (при отсутствии утечки электричества через изоляцию) приращению заряда ячейки, т.е.

$$C[v(t + dt, l) - v(t, l)]\,dl \equiv C\,\frac{\partial v}{\partial t}\,dt\,dl. \tag{1.43}$$

Сравнение (1.42) и (1.43) дает

$$\frac{\partial i}{\partial l} + C\,\frac{\partial v}{\partial t} = 0. \tag{1.44}$$

Таким образом, динамика линии описывается системой уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial l} + L\,\frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0, \qquad \frac{\partial i}{\partial l} + C\,\frac{\partial v}{\partial t} = 0. \tag{1.45}$$

Если дополнительно учесть утечку заряда через изоляцию на участке линии длиной dl за время dt, $Gv\,dl\,dt$, то вместо системы (1.45) получим систему

$$\frac{\partial v}{\partial l} + L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0, \qquad \frac{\partial i}{\partial l} + C\frac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0, \tag{1.46}$$

называемую системой *телеграфных уравнений* [102, с. 30–31].

Система (1.46) дает математическое описание процесса в линии. Однако в ней не учтены входной сигнал – эдс $e(t)$ источника энергии и сопротивление нагрузки $R_н$. Поэтому это описание является неполным. Чтобы сделать его полным, надо дополнительно учесть указанные факторы. Это приводит к уравнениям

$$v(t,0) = e(t), \qquad v(t,m) = i_н(t)R_н, \tag{1.47}$$

определяющим *граничные условия* [102, с. 39]. Уравнения (1.46) – (1.47) составляют исчерпывающую систему уравнений процесса, т.е. при вполне определенном начальном состоянии системы однозначно определяют процесс.

При выводе уравнений (1.46) параметры R, L, C, G считались постоянными. Если сопротивление нагрузки $R_н$ также постоянное, то динамическая система, описываемая уравнениями (1.46) – (1.47), – стационарная. Если же сопротивление нагрузки изменяется во времени, то система – нестационарная. Система может быть нестационарной также при постоянном сопротивлении нагрузки, но при переменных параметрах R и G, например при изменении температурного режима окружающей среды. Уравнения (1.46) и путь их получения при этом не изменяется.

Начальное состояние рассматриваемой системы определяется распределением силы тока и напряжения по длине линии в начальный момент времени $t = 0$, т.е. функциями $i(0, l)$ и $v(0, l)$. Состояние в текущий момент времени t характеризуется функциями $i(t, l)$ и $v(t, l)$.

Динамика системы с распределенными параметрами при двух и большем числе аргументов, по которым распределяются параметры, описывается дифференциальными уравнениями в частных производных с тремя и большим числом аргументов. В этом случае функции, описывающие сигналы, зависят от времени и двух или большего числа других аргументов. В случае одного дифференциального уравнения состояние системы в данный момент времени определено некоторым числом функций двух и большего числа дополняющих время аргументов, описывающих сигналы и некоторым числом их частных производных в этот момент.

Систему данных, вполне характеризующих состояние системы, будем называть *исчерпывающей,* а исчерпывающую систему данных, из которой нельзя исключить ни одного элемента, и которую нельзя заменить другой системой с меньшим числом элементов — *минимальной исчерпывающей.* Наряду с термином "данные, характеризующие состояние системы", будем применять также равнозначный ему термин "характеристики состояния".

В случае системы с сосредоточенными параметрами, описываемой уравнением (1.39) с $(n-1)$-кратно дифференцируемой функцией $y(t)$, минимальную исчерпывающую систему характеристик состояния в момент a образуют те предельные значения величин

$x, px, \ldots, p^{n-1}x$ при $t \to a$ справа, которые они имели бы, если бы при $t \geqslant a$ выполнялось условие $y(t) = 0$ (см. с. 49).

§ 1.5. Пространство состояний

1.5.1. Определение и частные виды. Рассмотрим систему, описываемую уравнением (1.39) с $(n-1)$-кратно дифференцируемой функцией $y(t)$. Пусть $Y_I = C_{n-1}(I)$ – множество всех $(n-1)$-кратно дифференцируемых на I (в случае замкнутого слева (справа) интервала I – дифференцируемых на соответствующей границе справа (слева)) комплексных функций от t, $U_I = C_n(I)$ – аналогичное множество всех комплексных функций от t, n-кратно дифференцируемых на I. Принимая в качестве минимальной исчерпывающей системы характеристик состояния в момент a предельные значения величин $x, px, \ldots, p^{n-1}x$ при $t \to a$ справа, соответствующие условию, указанному в конце предыдущего параграфа, и учитывая, что:

1) для любых двух систем этих значений u и v, представляющих два состояния системы, система чисел w, полученная покомпонентным сложением первых двух систем $(w = u + v)$, также представляет некоторое состояние системы;

2) при умножении всех элементов системы u на одно и то же число α получаем новую систему (αu), которой также соответствует некоторое состояние системы;

3) любые операции над полными системами элементов, состоящие из конечного числа операций покомпонентного сложения систем и умножения на число, удовлетворяют условиям:

а) $u + v = v + u$;

б) $u + (v + w) = (u + v) + w$;

в) каковы бы ни были u и v, существует система, w, удовлетворяющая равенству $u + w = v$;

г) для любых чисел α и β справедливы равенства

$$\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, \qquad (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \qquad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v;$$

д) $1 \cdot u = u$,

множество всех систем числовых значений характеристик состояния можно рассматривать как *линейное* [38, 39] (*векторное* [39]) пространство. Это линейное пространство будем называть *пространством состояний*, а его элементы – *векторами состояния*.

В зависимости от того, являются ли компоненты векторов состояния и упомянутые выше числа α и β комплексными или только вещественными, будем различать *комплексные* и *вещественные* пространства состояний. Вещественные пространства состояний являются линейными подпространствами соответствующих комплексных. В дальнейшем, если не оговаривается противное, рассматриваются комплексные пространства состояний.

В случае системы, процессы в которой описываются системой дифференциальных уравнений (1.40), в которых все переменные x_i представляют выходные сигналы, в качестве вектора состояния в момент a можно принять систему значений пределов

$$\lim_{t \to a-0} x_i(t), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Множество всех возможных таких систем является пространством состояний.

Аналогично вводится пространство состояний для систем других видов. Компонентами вектора состояния могут быть числа и/или функции временно́го (временны́х) и/или пространственного (пространственных) аргументов, образующих в совокупности минимальную исчерпывающую систему характеристик состояния.

Пространства состояний как линейные пространства могут иметь различную размерность. Данное пространство состояний является *n-мерным*, если вектор состояния состоит из n чисел. Любая система n линейно независимых элементов этого пространства является его *базисом* [39, с. 30], т.е. системой, позволяющей выразить любой вектор состояния как линейную комбинацию ее элементов. Все n-мерные пространства состояний называются *конечномерными*.

Совокупность координат вектора состояния в данном базисе конечномерного пространства состояний также образует минимальную исчерпывающую систему характеристик состояния и, следовательно, может рассматриваться как вектор состояния. Таким образом, вектор состояния и, следовательно, пространство состояний можно определить различными способами. При этом между пространствами состояний, определенными различными способами, существует взаимно однозначное соответствие, а отображение одного пространства в другое является *изоморфизмом* [40, с. 370] относительно сложения и умножения.

В случае системы с запаздыванием, описываемой системой дифференциальных уравнений (1.41), определим Y_I как множество всех заданных на I вектор-функций $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), \ldots, y_n(t)]^{\mathrm{T}}$, где $y_i(t) \in Q'(I)$, $i = 1, \ldots, k$ (см. п. 1.2.1), а U_I как множество $Q_n(I)$ всех кусочно-непрерывных функций с n кусочно-непрерывными производными с конечным числом точек разрыва на любом конечном подынтервале и предположим, что при всех a последовательность

$$\tau(a), \tau[a + \tau(a)], \ \tau\{a + \tau[a + \tau(a)]\}, \ldots$$

где

$$\tau(a) \triangleq \min_l \ \tau_l(a),$$

в случае $T = \infty$ является неограниченной, а в случае $T < \infty$ – неограниченной или ограниченной с пределом, не меньшим T.

Пусть $x_j(t)$, $j = 1, \ldots, m$ ($m \leqslant n$) – те компоненты векторы-функции $\mathbf{u}(t)$, для которой существуют такие значения индексов i и l, при которых коэффициент $c_{ij}^{(l)}(t)$ не равен тождественно нулю на I, а остальные компоненты (если они имеются) обладают противоположным свойством. Тогда вектор состояния для момента a может быть составлен как n-мерный вектор, первые m компонент которого – определенные на интервалах $(a - \tau_j(a), a)$ (см. § 1.4) функции $x_1(t), \ldots, x_m(t)$, а последующие – пределы при $t \to a - 0$ остальных функций $x_j(t)$. Множество всех возможных таких векторов является пространством состояний.

Действительно, рассматриваемые системы функций и чисел, в силу сделанного выше предположения, определяют при заданных на интервале $a \cup F(a)$ входных сигналах решения системы (1.41) на всем интервале $F(a)$; при этом координаты решения при любых $y_i(t) \in Q'$ являются на интервале $F(a)$ функциями непрерывными или кусочно-непрерывными с конечным числом точек разрыва на любом конечном подынтервале, т.е. $U_F^* \subset U_F$ (см. § 0.2). Следовательно, рассматриваемая система является динамической системой. Но так как упомянутая система функций и чисел удовлетворяет аксиомам линейного пространства, то множество всевозможных таких систем является пространством состояний.

Заметим, что в рассматриваемом случае пространство состояний является *функциональным пространством* [20, с. 10–11].

В случае системы с распределенными параметрами структура вектора состояния зависит от того, является ли система *свободной* или *связанной*, т.е. от того, определяется ли поведение системы на ее пространственных границах только процессами *внутри* пространственной области определения системы или дополнительно подчинено внешним связям. Примером системы первого вида является *балка* [16, с. 321] в свободном падении при столь малых отклонениях ее формы от прямолинейного отрезка, что связь нагрузки, приложенной к балке, с ее деформациями можно считать подчиняющейся закону Гука. Примером системы второго вида является балка, свободно опертая по концам [16, с. 326] при том же предположении. Связанная система отличается от свободной наличием связей на границах ее пространственной области определения.

Свободные системы с распределенными параметрами часто описываются *дифференциальными уравнениями с частными производными* [55, с. 110], связанные системы – этими уравнениями и уравнениями связей, называемыми *граничными условиями*.

Состояние *свободной* системы с распределенными параметрами исчерпывающе характеризуется некоторой системой функций (от аргументов, по которым распределены параметры). Без существенного сокращения области практических приложений теории таких систем эти функции можно считать непрерывными. Можно ожидать, что для многих свободных систем с распределенными параметрами множество всех возможных систем непрерывных функций от упомянутых аргументов содержит подмножество, которое можно рассматривать как пространство состояний. Таким образом, и в этом случае пространство состояний является функциональным пространством.

Состояние *связанной* системы с распределенными параметрами характеризуется функциями от пространственных аргументов, определяющими состояние соответствующей ей свободной системы с распределенными параметрами и, возможно, дополнительно числами или функциями, определяющими совместно с первыми функциями состояние системы на ее границах (в случаях, когда на границе или на границах к свободной системе подключены динамические системы достаточно высоких порядков; например, в случае однопроводной линии электропередачи (§ 1.4), когда к концу линии подключена "нагрузка", представленная динамической системой третьего порядка).

Рассмотренные выше функциональные пространства систем с запаздыванием и систем с распределенными параметрами относятся к классу *бесконечномерных* линейных пространств [39, с. 122]. К этому классу относятся также пространства состояний, в которых векторы состояния – последовательности чисел. Такие пространства состояний могут быть определены для некоторых частных видов систем с запаздыванием (см. пример 1.3) и систем с распределенными параметрами. В случае бесконечномерных пространств для целей прикладных исследований наиболее интересны *нормированные* пространства [103, с. 19–20], т.е. пространства, в которых каждому вектору состояния s поставлено в соответствие неотрицательное вещественное число (*норма*) $\| s\|$ так, что выполняются следующие три аксиомы:

1) $\| s\| \geqslant 0$; $\| s\| = 0$ в том и только в том случае, когда $s = 0$;
2) для всех чисел λ: $\| \lambda s \| = | \lambda | \cdot \| s \|$;
3) $\| s_1 + s_2 \| \leqslant \| s_1 \| + \| s_0 \|$.

Во всех возможных вариантах пространства состояний вектор состояния в момент $t = a$ будем обозначать символом $\mathrm{s}(a)$. Ограничимся случаем таких динамических систем, для которых существует пространство состояний S единое для всех $a \in I_i$, понимая под этим следующее: при произвольных $\mathrm{s}(a) \in S$, $a \in I_i$ и $\mathrm{y}(t) \in Y_I$ имеется для каждого $t \in F(a)$ элемент $\mathrm{s}(t) \in S$, являющийся вектором состояния в момент t, в который при изменении времени преобразуется в силу свойств системы элемент $s(a)$.

П р и м е р 1.3. Состояние в момент a системы с запаздыванием, описываемой уравнением [113]

$$[p^n + b_1(t)p^{n-1} + \ldots + b_n(t)]x(t) + c_1(t) \left.\frac{d^{n-1}x(v)}{dv^{n-1}}\right|_{v=t-\tau} + \ldots$$

$$\ldots + c_n(t)x(t-\tau) = y(t)$$

($p \equiv d/dt$) с непрерывными коэффициентами $b_i(t)$, $c_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, в котором $y(t)$ – функция, описывающая входной сигнал на единственном входе, а $x(t)$ – функция, описывающая выходной сигнал на единственном выходе, вполне характеризуется функцией $\varphi(v)$, описывающей выходной сигнал на интервале $(a - \tau, a)$. Если при заданных множествах I, Y_I и U_I любая такая функция разлагается в суммируемый ряд

$$\varphi(v) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(v),$$

где a_k – числа, а $\varphi_k(v)$, $k = 1, 2, \ldots$, – заданная последовательность функций, то эквивалентной ей характеристикой состояния является последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ Если при этом сходятся аналогичные разложения функций $\varphi(v)$, описывающих выходной сигнал на всех принадлежащих $F(a)$ интервалах $(t, t + \tau)$, то пространство состояний можно определить как некоторое подпространство бесконечномерного линейного пространства $\mathbf{R}^\infty$ [39, с. 121]. Признаком принадлежности элемента пространства $\mathbf{R}^\infty$ такому подпространству является сходимость разложений функций $\varphi(v)$ на всех упомянутых выше интервалах.

1.5.2. Дополнение к классификации непрерывных линейных систем. Структура вектора состояния является еще одним классификационным признаком для непрерывных линейных систем.

Непрерывную линейную систему назовем *системой конечного порядка* (1-го, 2-го и т.д.), если компоненты вектора состояния – числа и число их конечно (одна компонента, две и т.д.).

Непрерывную линейную систему назовем *системой бесконечного порядка,* если вектор состояния – бесконечное упорядоченное множество чисел. Если это множество счетно, то систему назовем *счетной,* если оно континуально – *континуальной.*

§ 1.6. Формы задания состояния

Определим три формы задания состояния.

Если для данного момента времени вектор состояния задан, то такое задание состояния будем называть *детерминированным.*

Если для данного момента времени вектор состояния неизвестен, то дана область в пространстве состояний и известно, что он принадлежит этой области, то такое задание состояния будем называть *недетерминированным.*

Задание состояния будем называть *вероятностным,* если для данного момента времени вектор состояния неизвестен, но задан

– как система случайных величин (случай системы конечного порядка): полностью – их совместной функцией распределения *) – или неполностью – например, их математическими ожиданиями, дисперсиями и корреляционными моментами;

– как случайная последовательность (случай счетной системы бесконечного порядка);

– как случайная функция времени, система таких функций, случайная функция или система случайных функций двух или большего числа аргументов (п. 1.3.1), система, состоящая из случайных функций и случайных величин (случай континуальной системы бесконечного порядка).

При этом во втором и третьем случаях, так же как в первом, допускается возможность неполного задания соответствующего математического описания.

В случае системы n-го порядка, описываемой системой дифференциальных уравнений (1.40) относительно выходных сигналов $x_1, \ldots, x_n$ при детерминированном задании состояния для данного момента времени a определены значения левых пределов в точке a функций $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$; при недетерминированном задании состояния для данного момента времени a определена область в пространстве состояний, образованная векторами $[x_1, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}$; при вероятностном задании состояния в вещественном пространстве состояний для данного момента времени a определена совместная функция распределения $F(x_1, \ldots, x_n)$, *плотность распределения,* соответствующая F [28, с. 13]:

$$\acute{F}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n},$$

или другие вероятностные характеристики вектора состояния.

Пример 1.6. Рассмотрим электрический колебательный контур (рис. 0.3). Пусть все элементы (R, L и C) переменны. Представим его в виде последовательного соединения (рис. 1.6) подсистемы I с выходным сигналом q и дифференцирующего звена II.

Дифференцирующее звено характеризуется уравнением

$$i = pq, \qquad p \equiv d/dt.$$

Уравнение первой подсистемы имеет вид

$$pL(t)pq + R(t)pq + q/C(t) \equiv L(t)p^2 q + [\dot{L}(t) + R(t)]pq + q/C(t) = e.$$

---

*) Если $X_1, \ldots, X_n$ – случайные величины, то их совместной функцией распределения называется функция F, определенная [20, с. 13] равенством

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{P}(X_j \leqslant x_j \mid j = 1, \ldots, n).$$

Для данного момента времени t_0 исчерпывающей системой характеристик состояния первой подсистемы является пара чисел: $q(t_0)$ и $[pq(t)]_{t=t_0}$. Подключение второй подсистемы не приводит к дополнительным характеристикам. Поэтому состояние системы в целом также характеризуется указанной парой чисел.

При детерминированном задании состояния эти числа заданы. Примером недетерминированного задания состояния является его задание с помощью неравенств

$$|q(t_0)| < a, \quad |[pq(t)]_{t=t_0}| < b,$$

где a и b – положительные числа.

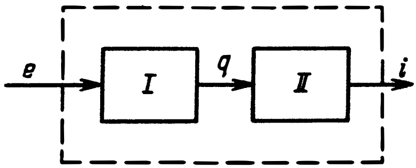


Рис. 1.6. Представление электрического колебательного контура в виде последовательного соединения двух систем

При вероятностном задании состояния может быть определена функция распределения

$$F(q_0, i_0) = \mathrm{P}[Q(t_0) \leqslant q_0, \quad I(t_0) \leqslant i_0],$$

где $q_0 \triangleq q(t_0)$, $i_0 \triangleq i(t_0)$, а $Q(t)$ и $I(t)$ – случайные функции, описывающие соответственно изменение заряда и тока во времени.

§ 1.7. Понятие процесса

Примем следующее определение.

Определение 1.4. *Процессом* называется изменение состояния системы во времени.

§ 1.8. Формы описания процесса

Различные математические описания процесса можно разделить на "явные" и "неявные".

Основной формой *явного* математического описания процесса является его описание в терминах теории пространства состояний, заключающееся в случае конечномерного пространства состояний в следующем: процесс описывается вектор-функцией $\mathrm{s}(t)$, значения которой для каждого t – векторы состояния в эти моменты времени.

Упомянутой вектор-функции соответствует n числовых функций времени, значения которых – координаты векторов состояния. Эти функции называются *переменными состояния* [24]. Поэтому в рассматриваемом варианте описания процесса можно говорить также, что "процесс описывается переменными состояния".

Понятие переменных состояния как координат изменяющегося во времени вектора состояния и связанная с ними форма математического описания процесса могут быть обобщены на случаи систем других классов. В частности, в случае системы с распределенными параметрами к переменным состояния – числовым функциям времени добавляются переменные состояния, являющиеся числовыми функциями времени и пространственных координат.

Явное математическое описание процесса, при котором указываются все переменные состояния, назовем *детерминированным*. Фиксируя t, мы получаем детерминированное задание состояния (§ 1.6). По аналогии с недетерминированным и вероятностным заданием состояния можно определить также недетерминированное и вероятностное описание процесса. В случае конечномерного пространства состояний при недетерминированном описании процесса указывается зависящая от времени область в пространстве состояний, которой принадлежит вектор состояния; при вероятностном описании процесса указывается изменяющаяся во времени совместная функция или плотность распределения системы случайных координат вектора состояния или другие его вероятностные характеристики.

Одной из наиболее распространенных форм *неявного* описания процесса является его описание уравнением процесса с заданием начального состояния и входных сигналов. Понятие уравнения процесса определим следующим образом.

Определение 1.5. *Уравнением процесса* называется уравнение, которому удовлетворяет на интервале $F(t_0)$ вектор состояния $\mathrm{s}(t)$ и которое при заданном $\mathrm{s}(t_0)$ определяет $\mathrm{s}(t)$ однозначно.

Глава 2

ВНУТРЕННИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ

Можно выделить два вида характеристик системы: *внутренние* и *внешние*. Внутренние характеристики – это те характеристики, от которых зависят характеристики выходных сигналов в процессе *свободных* колебаний. Внешние характеристики – это те характеристики, от которых зависят характеристики выходных сигналов в процессе *вынужденных* колебаний. Ту или иную внутреннюю характеристику или систему внутренних характеристик в соответствии с терминологией, принятой в § 0.3, будем называть *исчерпывающей,* если при детерминированном задании начального состояния системы эта характеристика или система характеристик вполне определяют выходные сигналы в процессе свободных колебаний.

§ 2.1. Внутренние характеристики односвязных систем конечного порядка

2.1.1. Переходная матрица состояний. Как указывалось в § 0.5, вектор-функция $\mathbf{u}_F^*(t)$, описывающая на интервале $F(a)$ выходные сигналы непрерывной линейной системы конечного порядка или счетной бесконечного порядка, связана с вектором состояния $\mathbf{s}(a)$ и вектор-функцией $y_{a \cup F}(t)$, описывающей входные сигналы на интервале $a \cup F(a)$, равенством

$$\mathbf{u}_F^*(t) = A_{a\mathbf{s}}\mathbf{s}(a) + A_{a\mathbf{y}}y_{a \cup F}(t).$$

В режиме свободных колебаний $\mathbf{y}_{a \cup F}(t) = 0$ и это равенство принимает вид

$$\mathbf{u}_F^*(t) = A_{a\mathbf{s}}\mathbf{s}(a). \tag{2.1}$$

Отсюда следует, что множество операторов $A_{a\mathbf{s}}$ для всех $a \in I_i$ является исчерпывающей внутренней характеристикой системы.

В случае односвязной системы $\mathbf{u}_F^*(t) = u_F^*(t)$ – скалярная функция и уравнение (2.1) имеет вид

$$u_F^*(t) = A_{a\mathbf{s}}\mathbf{s}(a). \tag{2.2}$$

Ограничиваясь случаем системы конечного порядка, представим (2.2) в виде

$$u_F^* = A_{u s_t} A_{s_t s_a} s(a),$$

где

$$A_{s_t s_a} s(a) = s(t). \qquad (2.3)$$

Поскольку в случае системы n-го порядка векторы $s(a)$ и $s(t)$ для всех a, t – n-мерные, оператор $A_{s_t s_a}$ представляет операцию умножения вектора $s(a)$ на некоторую $n \times n$-матрицу с зависящими от t элементами. Обозначим эту матрицу символом $\Phi(t, a)$ и, следуя Л. Заде и Ч. Дезоеру [30, с. 390], будем называть ее *переходной матрицей состояний.*

Пусть $s_1(a), \ldots, s_n(a)$ – произвольный базис пространства состояний (S), $\Phi(t, a)$ – неособая матрица. Тогда $s_1(t), \ldots, s_n(t)$ – также базис S.

Равенство (2.3), определенное для всех $a \in I_i$, определяет некоторое отображение пространства S в себя. В случае неособой матрицы $\Phi(t, a)$ при этом отображении любой базис переходит также в базис.

2.1.2. Матричное дифференциальное уравнение процесса. Если для всех $a \in I_i$, $s(t)$ – дифференцируемая на $F(a)$ вектор-функция, то из равенства (2.3) следует

Теорема 2.1. *Если для всех* $a \in I_i$ *и всех* $t \in F(a)$:

1) $s(t)$ – *дифференцируемая вектор-функция,*

2) *матрица* $\Phi(t, 0)$ – *неособая,*

то существует такая матрица $A(t)$, *что для любой системы* $s_1(t), \ldots$ $\ldots, s_n(t)$, *образующей базис, справедливо равенство*

$$[\dot{s}_1(t), \ldots, \dot{s}_n(t)] = A(t)\,[s_1(t), \ldots, s_n(t)]. \qquad (2.4)$$

Доказательство. В силу условия (2) $s_1(t), \ldots, s_n(t)$ – базис S. В силу условия (1) $\dot{s}_1(t), \ldots, \dot{s}_n(t) \in S$, и, следовательно, эти элементы линейно выражаются через любой базис, т.е. справедливо (2.4). В силу линейности операции дифференцирования $A(t)$ не зависит от $s_1(t), \ldots, s_n(t)$. Теорема доказана.

В общем случае равенством (2.4) матрица $A(t)$ определена неоднозначно. Однако при некотором дополнительном условии она определяется однозначно.

Теорема 2.2. *Если дополнительно к условиям теоремы* 1.1 *выполняется условие*

3) *если для каждого* $t \in F(a)$ *существует базис* $s_1(t), \ldots$ $\ldots, s_n(t)$, *для которого* $\dot{s}_1(t), \ldots, \dot{s}_n(t)$ – *также базис, то в уравнении* (2.4) *матрица* $A(t)$ *определена однозначно*; *при этом она неособая и непрерывная.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть условие (3) выполняется и $s_1(t), \ldots, s_n(t)$ – отвечающий ему базис. Тогда из (2.4) следует

$$\mathbf{A}(t) = [\mathbf{s}_1(t), \ldots, \mathbf{s}_n(t)]^{-1}[\dot{\mathbf{s}}_1(t), \ldots, \dot{\mathbf{s}}_n(t)],$$

т.е. матрица $\mathbf{A}(t)$ определена однозначно и как произведение двух неособых матриц – неособая (см. [14], с. 99–100). В силу линейности операции дифференцирования $\mathbf{A}(t)$ не зависит от $\mathbf{s}_1(t), \ldots, \mathbf{s}_n(t)$, а в силу дифференцируемости этих элементов все элементы матрицы $[\mathbf{s}_1(t), \ldots, \mathbf{s}_n(t)]^{-1}[\dot{\mathbf{s}}_1(t), \ldots, \dot{\mathbf{s}}_n(t)]$ непрерывны, следовательно, непрерывна матрица $\mathbf{A}(t)$.

Пусть $U_1 = C_n(I)$ (см. п. 1.5.1). Тогда вектор состояния системы может быть принят в виде

$$\mathbf{s}(t) = [u(t), pu(t), \ldots, p^{n-1}u(t)]^{\mathrm{T}}, \quad p \triangleq d/dt.$$

В этом случае

$$\mathbf{u}^*_F(t) = [1\ 0 \ldots\ 0]\ \mathbf{s}(t) \triangleq \mathbf{E}\mathbf{s}(t) \tag{2.5}$$

и уравнения (2.4) и (2.5) совместно образуют исчерпывающую систему внутренних характеристик.

2.1.3. Векторно-матричное уравнение процесса. Уравнение (2.4) равнозначно системе уравнений

$$\dot{\mathbf{s}}_i(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{s}_i(t), \qquad i = 1, \ldots, n$$

или, поскольку любой элемент $\mathbf{s}_i(t)$ можно выбрать произвольно (за исключением $\mathbf{s}_i(t) = 0$), – векторно-матричному дифференциальному уравнению*)

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{s} \tag{2.6}$$

(справедливому также в случае $\mathbf{s}(t) \equiv 0$). Уравнение (2.6) совместно с уравнением, выражающим выходной сигнал через вектор состояния (например, с уравнением (2.5)) образует исчерпывающую систему внутренних характеристик.

Во многих практических задачах исходная информация о системе содержит вместо уравнения (2.6) уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}, \tag{2.7}$$

составленное относительно некоторой n-мерной вектор-функции $\mathbf{x}(t)$, связанной с $\mathbf{s}(t)$ равенством

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{B}(t)\,\mathbf{x}(t), \tag{2.8}$$

где $\mathbf{B}(t)$ – неособая $n \times n$-матрица. Уравнения (2.7) и (2.8) совместно образуют систему уравнений процесса. Исчерпывающую систему внутренних характеристик здесь составляют уравнения

---

*) Аргумент искомой вектор-функции опущен для упрощения записи.

(2.7), (2.8) и уравнение, выражающее выходной сигнал через вектор состояния.

Если матрица $\mathbf{A}(t)$ непрерывна, то определенные на $F(a)$ решения уравнения (2.7) – дифференцируемые вектор-функции [36, с. 24]. Так как фундаментальная система решений уравнения (2.7) $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ при заданных для $t = a$ начальных условиях вполне определяет частное решение на $F(a)$, а точку a можно сколь угодно приблизить к левой границе интервала I, то любая такая система, определенная на I_i, совместно с уравнением (2.8) и уравнением, выражающим выходной сигнал через вектор состояния, также является исчерпывающей внутренней характеристикой.

Представим вектор-функции $\mathbf{x}_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, в виде

$$\mathbf{x}_i(t) \triangleq [x_{i1}(t), \ldots, x_{in}(x)]^{\mathrm{T}},$$

где для каждого значения t величина x_{ij}, $j = 1, \ldots, n$, – j-я компонента вектора $\mathbf{x}_i$, и образуем матрицу

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \ldots & x_{n1}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1n}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}, \qquad t \in I_i.$$

Эта матрица – неособая при всех $t \in I_i$ и называется *фундаментальной матрицей* [47].

Так как каждой фундаментальной матрице взаимно однозначно соответствует некоторая фундаментальная система решений уравнения (2.7), то фундаментальная матрица в указанном выше сочетании с другими характеристиками является исчерпывающей внутренней характеристикой.

Частным случаем фундаментальной матрицы является матрицант [40] $\mathbf{K}(t, a)$, определяемый условием $\mathbf{\Phi}(a) = \mathbf{I}$ для всех $a \in I_i$.

Для произвольной фундаментальной матрицы $\mathbf{\Phi}(t)$ справедливо равенство (см. [1], с. 149)

$$\mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{\Phi}^{-1}(a) = \mathbf{K}(t, a).$$

В случае $\mathbf{s}(t) \equiv \mathbf{x}(t)$ $\mathbf{K}(t, a)$ – переходная матрица состояний (см. п. 2.1.1).

2.1.4. Структурная схема системы и система уравнений звеньев. *Структурной схемой* [95, с. 70] системы называется условное графическое изображение ее элементов (звеньев) и их связей. Всякая односвязная непрерывная линейная система конечного порядка, которая допускает ее описание уравнением вида (2.5) и уравнениями (2.6) или (2.7) и (2.8), может быть изображена в виде структурной схемы, содержащей не более четырех видов звеньев: интегрирующих, дифференцирующих, суммирующих и

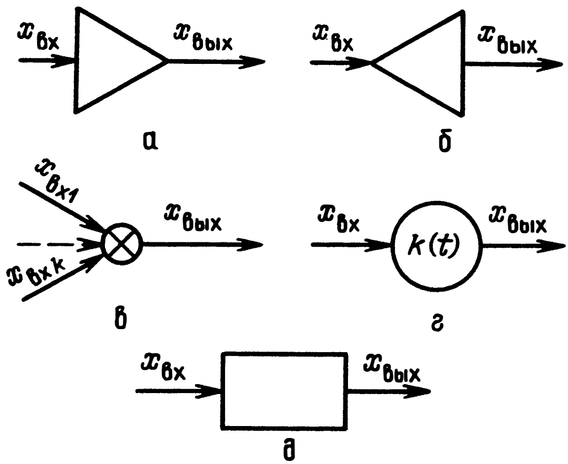


Рис. 2.1. Графическое изображение звеньев системы

усилительных [95]. Каждое из таких звеньев имеет один или более входов и один выход.

Интегрирующее звено имеет один вход и связь между выходным и входным сигналами дается соотношением $dx_{вых}/dt = x_{вх}$, где $x_{вх}$ – входной, $x_{вых}$ – выходной сигнал. Схематическое изображение звена показано на рис. 2.1, *а*.

Дифференцирующее звено (рис. 2.1, *б*) также имеет один вход и связь между выходным и входным сигналами выражается соотношением $x_{вых} = dx_{вх}/dt$.

Суммирующее звено (рис. 2.1, *в*) имеет несколько входов и связь выходного сигнала с входными $x_{вх1}, \dots, x_{вхk}$, где k – число суммируемых сигналов, выражается соотношением $x_{вых} = x_{вх1} + \dots + x_{вхk}$.

Усилительное звено (рис. 2.1, *г*) имеет один вход, связь выходного сигнала с входным выражается соотношением $x_{вых} = k(t)\, x_{вх}$. Коэффициент $k(t)$ называется *коэффициентом усиления*. Он может быть как переменным, так и постоянным.

Перечисленные звенья называются *элементарными* [95, с. 71].

На практике часто возникает необходимость в исследовании более укрупненных структур систем. В этих случаях указанный набор элементарных звеньев дополняется сложными звеньями – односвязными системами, связь между входными и выходными сигналами которых выражается линейными дифференциальными уравнениями или системами линейных дифференциальных уравнений относительно выходных сигналов. Такое звено будем изображать в виде, показанном на рис. 2.1, *д*.

Структурная схема системы с указанным ее выходом совместно с заданными коэффициентами усиления усилительных звеньев и уравнениями или системами уравнений, описывающими процессы в сложных звеньях, является исчерпывающей внутренней характеристикой.

2.1.5. Уравнение свободных колебаний.

П р и в е д е н и е с и с т е м ы у р а в н е н и й п р о ц е с с а к о д н о м у у р а в н е н и ю. Систему уравнений, равнозначную векторно-матричному уравнению (2.7), и систему уравнений, фигурирующих в описании структурной схемы, при некоторых ограничениях, наложенных на ее коэффициенты, можно привести к одному уравнению.

Известны два метода приведения системы линейных (в общем случае неоднородных) дифференциальных уравнений к одному уравнению: *метод последовательного дифференцирования* и *метод уравнивающих операторов*. Оба эти метода достаточно широко освещены в литературе (см. например, [62, 74, 94–96]). Ими можно воспользоваться как в случае, когда исходной характеристикой является уравнение (2.7), так и в случае, когда система характеризуется структурной схемой и уравнениями, связывающими входные и выходные сигналы звеньев.

Метод последовательного дифференцирования удобен тогда, когда исходной характеристикой является уравнение (2.7). Он позволяет выразить коэффициенты искомого уравнения через коэффициенты уравнения (2.7) по универсальным расчетным формулам. Приведем их. (Вывод формул см. в [62, 74].)

Пусть ищется уравнение, которому удовлетворяет переменная x_1, и пусть коэффициенты системы, равнозначной уравнению (2.7), многократно дифференцируемы, причем кратность дифференцируемости такова, что определены и непрерывны следующие функции:

$$d_{ij}(t) \triangleq a_{ij}(t), \qquad j = 1, \ldots, n;$$

$$d_{ij}(t) \triangleq \dot{d}_{i-1,j}(t) + \sum_{k=1}^{n} d_{i-1,k}(t)\, a_{kj}(t),$$

$$i = 2, \ldots, n; \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Пусть $\Delta_{i1}(t)$, $i = 1, \ldots, n$ – алгебраические дополнения i-х элементов первого столбца определителя

$$\Delta(t) \triangleq \det \mathbf{D}(t), \qquad \mathbf{D}(t) \triangleq \| d_{ij}(t) \|_1^n$$

и пусть $\Delta_{n1}(t) \neq 0$ для всех $t \in I$. Тогда искомое уравнение имеет вид

$$[p^n + b_1(t) p^{n-1} + \ldots + b_n(t)]\, x_1 = 0, \qquad p \equiv d/dt, \tag{2.9}$$

причем все решения допустимы [т.е. каждое решение имеет в качестве прообраза какое-либо решение уравнения (2.7)], а коэффициенты определены, непрерывны и связаны с коэффициентами уравнения (2.7) равенствами [74, с. 44–45]

$$b_i(t) = \frac{\Delta_{n-i,1}(t)}{\Delta_{n1}(t)}, \qquad i = 1, \ldots, n-1;$$

$$b_n(t) = -\frac{\Delta(t)}{\Delta_{n1}(t)}.$$

Отметим достаточное условие приводимости уравнения (2.7) к уравнению (2.9):

а) достаточная кратность дифференцируемости коэффициентов $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$;

б) $\Delta(t) \neq 0$ для $t \in I$;

в) $\Delta_{n1}(t) \neq 0$ для $t \in I$.

Метод уравнивающих операторов удобен, когда исходная информация о системе дана в виде структурной схемы и уравнений

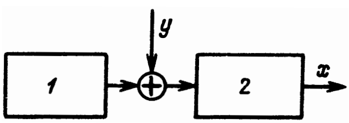


Рис. 2.2. Пример системы, в котором применение метода уравнивающих операторов для получения уравнения свободных колебаний может привести к неправильному результату

звеньев. Его применение при наличии входного сигнала описано в п. 3.3.1. Указанной там процедурой можно воспользоваться и в случае, когда входной сигнал отсутствует. С этой целью структурную схему следует дополнить входом системы (в известной мере произвольным) и в находимом соответствующим этой схеме неоднородном уравнении приравнять нулю входной сигнал. Произвольность выбора входа системы ограничивается требованием, чтобы действие входного сигнала распространялось *на все звенья* системы. Пример, когда это нарушается, показан на рис. 2.2. При выборе входа системы имеет смысл руководствоваться соображениями большей простоты алгоритмов преобразования коэффициентов уравнений звеньев в коэффициенты уравнения системы.

Определение уравнения свободных колебаний. Дифференциальное уравнение с вещественными коэффициентами

$$D(p, t)x \triangleq [p^n + b_1(t)p^{n-1} + \ldots + b_n(t)]\, x = 0, \tag{2.10}$$

составленное относительно выходного сигнала x, имеющее порядок n, равный размерности пространства состояний, и определенное на интервале определения системы I, называется *уравнением* *свободных колебаний.* Эта внутренняя характеристика является исчерпывающей и задается определяющей ее системой функций $b_1(t), \ldots, b_n(t)$.

Уравнение (2.10) – более компактная характеристика, чем уравнение (2.7). Поэтому методы исследования, в которых используется это уравнение, как правило, приводят к менее емким вычислительным алгоритмам, чем методы, использующие уравнение (2.7).

Классификация уравнений свободных колебаний. Пусть коэффициенты уравнения свободных колебаний принадлежат некоторому коммутативному кольцу R_b [14, с. 49–50], т.е. множеству функций, определенных на I, для элементов которого определены операции "сложения" и "умножения" с выполнением следующих аксиом:

1) суммы и произведения любых элементов множества также являются элементами множества,

2) уравнение $a + y = b$ разрешимо относительно y для любых элементов множества a, b,

3) операции сложения и умножения подчиняются некоторым законам ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности (которые мы не приводим по причине, указанной ниже).

Определим операции сложения и умножения как одноименные алгебраические операции над функциями. При этом третья аксиома выполняется и существенны только первые две.

Тогда уравнения свободных колебаний можно классифицировать по виду кольца R_b. Выделим следующие четыре вида этого уравнения: уравнение с непрерывными коэффициентами, уравнение с постоянными коэффициентами, уравнение со счетно-дифференцируемыми коэффициентами, уравнение с коэффициентами, представимыми функциональными рядами.

Уравнение свободных колебаний с непрерывными коэффициентами. В качестве кольца R_b в этом случае примем множество всех вещественных непрерывных функций $C^r(I)$.

Уравнение свободных колебаний с постоянными коэффициентами. Здесь кольцо R_b определим как кольцо вещественных констант R_0^r.

Уравнение свободных колебаний со счетно-дифференцируемыми коэффициентами. Кольцо R_b определим как кольцо вещественных счетно-дифференцируемых функций R_∞^r. Частным случаем уравнения этого вида является уравнение с аналитическими коэффициентами. В этом случае в качестве кольца R_b можно принять множество всех вещественных аналитических функций.

Уравнение свободных колебаний с коэффициентами, представимыми функциональными рядами. Пусть $I = (a, b)$, где $a \geqslant -\infty$,

$b \leqslant \infty$, и пусть коэффициенты $b_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, являются вещественными непрерывными функциями и имеют вид

$$B_{i1} u(t, \boldsymbol{\beta}_{i1}), \tag{2.11}$$

или

$$B_{i1} u(t, \boldsymbol{\beta}_{i1}) + \ldots + B_{ik} u(t, \boldsymbol{\beta}_{ik}), \tag{2.12}$$

или представимы функциональными рядами вида

$$B_{i1} u(t, \boldsymbol{\beta}_{i1}) + B_{i2} u(t, \boldsymbol{\beta}_{i2}) + \ldots, \tag{2.13}$$

где B_{ij}, $j = 1, 2, \ldots$, – вещественные числа; $\boldsymbol{\beta}_{ij} = [\beta_{ij1}, \ldots, \beta_{ijm}]^{\mathrm{T}}$, $j = 1, \ldots, n$, – вещественные числовые векторы, при этом для всех i справедливо соотношение $\boldsymbol{\beta}_{i,j+1} < \boldsymbol{\beta}_{ij}$ со следующим смыслом знака "$<$":

а) $\boldsymbol{\beta}_{i,j+1} < \boldsymbol{\beta}_{ij}$, если $\beta_{i,j+1,1} < \beta_{ij1}$;

б) $\boldsymbol{\beta}_{i,j+1} < \boldsymbol{\beta}_{ij}$, если $\beta_{i,j+1,k} = \beta_{ijk}$, $k = 1, \ldots, l$; $\beta_{i,j+1,l+1} < \beta_{i,j,l+1}$;

$u(t, \boldsymbol{\beta}_{ij})$ – элементы m-параметрического семейства U_m функций $u(t, \boldsymbol{\alpha})$, где $\boldsymbol{\alpha}$ – произвольный вещественный числовой m-мерный вектор из заданного множества А, обладающие следующими свойствами:

а) функция $u(t, \boldsymbol{\alpha})$ дифференцируема по t, причем

$$\frac{\partial u(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} f_i(\boldsymbol{\alpha}) u(t, \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{g}_i), \tag{2.14}$$

где $\mathbf{g}_i$ – вещественные числовые m-мерные векторы, $f_i(\boldsymbol{\alpha})$ – вещественные функции;

б) $u(t, \boldsymbol{\alpha}_1) u(t, \boldsymbol{\alpha}_2) = u(t, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2)$;

в) $u(t, \mathbf{0}) = 1$,

где $\mathbf{0} = [0, \ldots 0]^{\mathrm{T}}$.

При $m = 1$ $\boldsymbol{\alpha} = \alpha$ (вещественное число).

Примеры семейств функций U_1:

при $a = 0$, $b \leqslant 1$ – множество всех функций вида $u(t, \alpha) = |t^{-\alpha}|$;

при $a = -\infty$, $b \leqslant 0$ – множество всех функций вида $u(t, \alpha) = \exp(-\alpha t)$;

при $a \geqslant 1$, $b = \infty$ – множество всех функций вида $u(t, \alpha) = |t^{\alpha}|$;

при $a \geqslant 0$, $b = \infty$ – множество всех функций вида $u(t, \alpha) = \exp \alpha t$.

Каждая из функций указанного вида вполне определена значением α. Соответствующее семейство U_1 является множеством всех функций данного вида, в которое отображается множество всех $\alpha \in (-\infty, \infty)$.

Очевидно, функции $u(t, \alpha)$ всех упомянутых видов на указанных интервалах t положительны и обладают свойством $u(t, \alpha_2) <$

$< u(t, \alpha_1)$, если $\alpha_2 < \alpha_1$, причем

$f_1(\alpha) = -\alpha, \quad g_1 = 1 \quad$ для $\quad u(t, \alpha) = |t^{-\alpha}|$;

$f_1(\alpha) = -\alpha, \quad g_1 = 0 \quad$ для $\quad u(t, \alpha) = \exp(-\alpha t)$;

$f_1(\alpha) = \alpha, \quad g_1 = -1$ для $\quad u(t, \alpha) = |t^{\alpha}|$;

$f_1(\alpha) = \alpha, \quad g_1 = 0 \quad$ для $\quad u(t, \alpha) = \exp \alpha t$.

Введем операции сложения и умножения одночленов, сумм и рядов (2.11)–(2.13) как соответствующие одноименные алгебраические операции с объединением членов с равными значениями параметра α и с последующим расположением слагаемых в порядке уменьшения параметра.

Пусть ряды (2.13) принадлежат к некоторому классу рядов, такому, что в результате применения к представляющим любые функции $b_i(t) \in C^r(I)$ одночленам, суммам и рядам операций сложения и умножения получаются одночлены, суммы и ряды, представляющие функции, получающиеся в результате применения тех же операций к исходным функциям, представленным упомянутыми рядами (т.е. отображение представляющих функции одночленов, сумм и рядов на множество функций является *гомоморфизмом* [40, с. 370] относительно сложения и умножения). Тогда для данного семейства U_m кольцо R_b определим как множество всех таких функций. Этот вид кольца обозначим символом $R^r_{U_m}$.

Для рассмотренных семейств U_1 отображение множества представляющих функции одночленов, сумм и рядов на множество представленных ими вещественных непрерывных функций является гомоморфизмом относительно сложения и умножения, если вблизи $t = c$, где для указанных выше 4 случаев c равно соответственно $0, -\infty, \infty, \infty$ ряды являются асимптотическими разложениями функций *).

Примерами функций $u(t, \alpha)$ семейства U_2 являются функции $|t^{\alpha_2} \exp \alpha_1 t|$ и $\cos^q \omega t \sin^r \omega t$, где ω – положительное вещественное число, q, r – неотрицательные целые числа, определяемые параметрами α_1 и α_2 согласно равенствам $\alpha_1 = -q - r$, $\alpha_2 = -q$. Область определения параметров α_1 и α_2 для функций первого

---

*) Ряд $f_1(t) + f_2(t) + \ldots$ называется *асимптотическим разложением* функции $f(t)$ вблизи точки $t = c$, если все функции $f(t), f_1(t), f_2(t), \ldots$ заданы в одной и той же области T, не обязательно содержащей точку c [55, с. 27], и в этой области при $t \to c$ для всех k [101, с. 537]

$$f(t) - \sum_{i=1}^{k} f_k(t) = o[f_k(t)].$$

вида — вещественная ось, для функций второго вида — множество неотрицательных целых чисел.

Кольцо R_b образуют такие всевозможные вещественные непрерывные функции вида (2.11) и (2.12), а также представимые рядами (2.13), при которых имеется гомоморфизм по сложению и умножению отображения множества элементов (2.11)–(2.13) на множество функций, а функция $u(t, \boldsymbol{\alpha})$ имеет один из указанных выше видов.

В случае $u(t, \alpha_1, \alpha_2) = \cos^q \omega t \sin^r \omega t$ элементы кольца R_b являются периодическими функциями с периодом $2\pi/\omega$. Уравнение (2.10) в этом случае относится к классу уравнений с периодическими коэффициентами. Кольцо R_b здесь обозначим символом R^r_Ω.

Примером функций $u(t, \boldsymbol{\alpha})$ семейства U_3 являются функции $\cos^{\alpha_3 - \alpha_2} \omega t \sin^{-\alpha_3} \omega t\, u(t, \alpha_1)$, где $u(t, \alpha_1)$ — вещественные функции от t, принадлежащие одному из классов U_1.

Кольцо R_b может быть построено в этом случае так же, как и в предыдущем.

Все указанные выше кольца R_b являются *кольцами с единицей* [14, с. 50, 52], причем во всех случаях роль единичного элемента играет единичная константа. Нулевым элементом всех колец является нулевая константа.

Уравнения (2.10) с комплексными коэффициентами и их классификация. При анализе вынужденных колебаний системы в некоторых случаях, например при применении в качестве внешней характеристики системы передаточного функционала (об этом речь пойдет ниже — в п. 3.1.8), возникает необходимость в рассмотрении уравнения вида (2.10), но с комплексными коэффициентами. Приведенная выше классификация легко распространяется на этот случай путем замены обладающих теми или иными свойствами вещественных коэффициентов уравнения (2.10) аналогичными комплексными. В случае непрерывных коэффициентов уравнения (2.10) в качестве множества, к которому принадлежат все такие коэффициенты, может быть принято кольцо комплексных непрерывных функций $C(I)$; в случае постоянных коэффициентов — кольцо комплексных констант R_0; в случае счетно-дифференцируемых коэффициентов — кольцо комплексных счетно-дифференцируемых функций R_∞; в случаях коэффициентов, представимых функциональными рядами — кольца R_{U_m} — комплексные аналоги колец $R^r_{U_m}$, отличающиеся от них комплексностью коэффициентов B_{ij} в формулах (2.11)–(2.13).

Фундаментальная система решений уравнения свободных колебаний. Как известно [36, с. 94], уравнение (2.10) с непрерывными, в общем случае — комплексными, коэффициентами при произвольных начальных условиях для $t = a \in I$ имеет на I единственное решение; это решение является непрерывной n-кратно дифференцируемой функцией от t. Более того, существует n решений, линейно независимых на I (*фундаментальная система решений* [47]). Любая фундаментальная система решений

$$\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t) \tag{2.15}$$

уравнения свободных колебаний с непрерывными (вещественными) коэффициентами является исчерпывающей внутренней характеристикой системы. В случае непрерывности коэффициентов этого уравнения функции (2.15) непрерывны и n раз дифференцируемы. Более того, как утверждается в приводимой ниже теореме, существует фундаментальная система решений, элементы которой обладают некоторым дополнительным свойством.

Теорема 2.3. [74]. *Уравнение свободных колебаний с непрерывными коэффициентами, определенное на интервале I (замкнутом, полуоткрытом или открытом), имеет фундаментальную систему решений, элементы которой не принимают нулевых значений на I.*

Доказательство.

При $n = 1$ справедливость теоремы очевидна.

Пусть $n \geqslant 2$. Сначала докажем, что существует хотя бы одно решение, не принимающее нулевых значений на I. Пусть $x_1(t), \ldots$ $\ldots, x_n(t)$ – фундаментальная система вещественных решений. Если хотя бы одно из этих решений не принимает на I нулевых значений, то доказывать нечего. Поэтому будем считать, что все решения имеют на I конечное или бесконечное множество нулей, причем очевидно, что бесконечное множество может быть только счетным.

Пусть T – множество всех нулей решения $x_1(t)$. Покажем, что существует вещественное решение, не имеющее нулей, принадлежащих T. Действительно, множество всех вещественных решений есть векторное пространство размерности n. Множество всех вещественных решений, обращающихся в нуль в точке $t = t_k \in T$, есть его подпространство. Так как существуют решения, не принадлежащие этому подпространству, то его размерность меньше n. Множество всех вещественных решений, имеющих нуль хотя бы в одной точке множества T, есть сумма не более чем счетного множества упомянутых подпространств. Так как n-мерное векторное пространство не может быть представлено в виде конечной или счетной суммы пространств меньшей размерности, то существует вещественное решение, не принимающее нулевых значений на T. Обозначив такое решение символом $x_{n+1}(t)$, образуем новое решение:

$$x^*_1(t) = x_1(t) + ix_{n+1}(t), \qquad i = \sqrt{-1}.$$

Оно не имеет нулей на I, так как x_1 и x_2 не обращаются в нуль одновременно.

Докажем теперь, что существует фундаментальная система таких решений. Если бы было только $r \leqslant n-1$ линейно независимых вещественных решений, не принимающих нулевых значений на T, то множество всех вещественных решений, обладающих таким свойством, содержалось бы в r-мерном векторном пространстве, построенном на указанной системе решений как на базисе, и множество всех вещественных решений (состоящее из этого множества и множества вещественных решений, имеющих нули на T) не превышало бы счетную сумму подпространств размерности не выше $n-1$, чего, очевидно, быть не может.

Пусть $x_{n+1}(t), \ldots, x_{2n}(t)$ – фундаментальная система вещественных решений, не принимающих нулевых значений на T. Тогда, комбинируя их с решением $x_1(t)$, получим фундаментальную систему решений

$$x^*_j(t) = x_1(t) + ix_{n+j}(t), \qquad j = 1, \ldots, n,$$

не имеющих нулей на I.

Частным случаем уравнения свободных колебаний с непрерывными коэффициентами является *уравнение с периодическими коэффициентами*, характеризуемое дополнительным условием

$$b_i(t+\Omega) = b_i(t), \quad i = 1, \ldots, n, \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{2.16}$$

где Ω – заданное положительное число. Это уравнение обладает изложенными ниже свойствами.

Теорема 2.4 (Флоке) [124]. *Уравнение* (2.10) *с непрерывными коэффициентами, удовлетворяющими условию* (2.16), *имеет по крайней мере одно ненулевое решение* $x_1(t)$, *обладающее свойством*

$$x_1(t+\Omega) = \kappa x_1(t), \tag{2.17}$$

где κ *– некоторое отличное от нуля число.*

Доказательство см. в [124].

Как показал Флоке, число κ удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\kappa^n + A_1\kappa^{n-1} + \ldots + A_n = 0, \tag{2.18}$$

где $A_1, \ldots, A_n$ – некоторые вещественные числа, однозначно определяемые коэффициентами уравнения (2.10). Это уравнение Флоке назвал *фундаментальным* и показал, что если $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ – корни уравнения (2.18), то эти числа суть те значения κ, которым соответствуют некоторые ненулевые решения уравнения (2.10), обладающие свойством (2.17), и нет других ненулевых решений, обладающих этим свойством при других значениях κ. Среди корней $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ нет нулевых, так как коэффициент A_n не равен нулю [124].

Решения уравнения (2.10), обладающие свойством (2.17), представимы в виде [124]

$$x_i(t) = \theta_i(t) \exp \alpha_i t, \tag{2.19}$$

где $\theta_i(t)$ – непрерывные n-кратно дифференцируемые периодические функции с периодом Ω, $\alpha_i = \ln \kappa_i / \Omega$ (числа α_i называются *характеристическими показателями* [108]). Поэтому если фундаментальное уравнение не имеет кратных корней, то, рассматривая все корни, получим n решений такого вида. Любая комбинация из n таких решений с различными характеристическими показателями образует фундаментальную систему.

Если фундаментальное уравнение имеет кратные корни, то число линейно независимых решений вида (2.19) может быть меньше n, но оно не меньше числа различных корней. В этом случае каждому μ-кратному корню $\kappa_1 = \kappa_{i+1} = \ldots = \kappa_{i+\mu}$ соответствует μ линейно независимых решений. Существует фундаментальная система, состоящая из групп решений (которых не менее 1 и не более n) и такая, что решения каждой l-й группы $x_1^{(l)}(t), \ldots, x_{n_l}^{(l)}(t)$ имеют вид

$$\varphi_j^{(l)}(t) = \sum_{j=0}^{n_l-1} t^j \chi_{ij}^{(l)}(t) \exp \alpha_l t, \quad i = 1, \ldots, n_l, \tag{2.20}$$

где все $\chi_{ij}^{(l)}(t)$ – непрерывные n-кратно дифференцируемые периодические функции с периодом Ω, причем $\chi_{i,i-1}^{(l)} \not\equiv 0$ [124], $1 \leqslant n_l \leqslant \leqslant n$, $n_1 + \ldots + n_m = n$. В некоторых группах характеристические показатели могут быть равными; суммарное число элементов в таких группах равно кратности корня, соответствующего этому характеристическому показателю.

Указанными выше свойствами обладает также уравнение вида (2.10) с комплексными непрерывными периодическими коэффициентами (см. [36], с. 90–93).

2.1.6. Обобщенное характеристическое уравнение. О с н о в н ы е о п р е д е л е н и я. *Обобщенным характеристическим уравнением* (ОХУ) [74] называется уравнение

$$D(p + \zeta, t) \cdot 1 \equiv$$

$$\equiv (\zeta + p)^{n-1} \zeta + b_1(t)(\zeta + p)^{n-2} \zeta + \ldots + b_{n-1}(t) \zeta + b_n(t) = 0, \tag{2.21}$$

получаемое из уравнения (2.10) в результате подстановки

$$x = \exp \int \zeta \, dt. \tag{2.22}$$

Очевидно, между уравнением свободных колебаний и ОХУ имеет место взаимно однозначное соответствие. Поэтому *обобщенное характеристическое уравнение является исчерпывающей внутренней характеристикой системы.*

При $n = 1$ ОХУ – линейное алгебраическое уравнение

$$\zeta + b_1(t) = 0,$$

имеющее единственное решение

$$\zeta_1(t) = -b_1(t).$$

При $n > 1$ ОХУ – нелинейное дифференциальное уравнение, в общем случае – аналитически не решаемое (возможность аналитического решения появляется только при определенных сочетаниях его коэффициентов; такие случаи см. в [53, 118]).

В силу ассоциативности операции $\zeta + p$,

$$(\zeta + p)f = \zeta f + pf,$$

левую часть уравнения (2.21) можно представить в виде полинома

$$P(\zeta, p\zeta, \ldots, p^{n-1}\zeta)$$

от неизвестной ζ и ее производных. Этот полином назовем *обобщенным характеристическим полиномом.* Он имеет вид

$$P = P_n + b_1(t)P_{n-1} + \ldots + b_{n-1}(t)P_1 + b_n(t), \tag{2.23}$$

где $P_1 = \zeta$, а $P_2, \ldots, P_n$ – полиномы, вычисляемые по рекуррентной формуле

$$P_k = \zeta P_{k-1} + \dot{P}_{k-1}. \tag{2.24}$$

Формулы полиномов P_k для $k = 1, \ldots, 5$ приведены в таблице 2.1.

Если $x \neq 0$, то из равенства (2.22) следует

$$\zeta = \frac{\dot{x}}{x}. \tag{2.25}$$

Таблица 2.1.

Представление выражений $(\zeta + p)^{k-1}\zeta$ в виде полиномов (P_k)

$k = 1$:	$P_1 = \zeta$
$k = 2$:	$P_2 = \zeta^2 + \dot{\zeta}$
$k = 3$:	$P_3 = \zeta^3 + 3\zeta\dot{\zeta} + \ddot{\zeta}$
$k = 4$:	$P_4 = \zeta^4 + 6\zeta^2\dot{\zeta} + 4\zeta\ddot{\zeta} + \dddot{\zeta}$
$k = 5$:	$P_5 = \zeta^5 + 10\zeta^3\dot{\zeta} + 10\zeta^2\ddot{\zeta} + 12\zeta\dot{\zeta}^2 + 5\zeta\dddot{\zeta} + 4\dot{\zeta}\ddot{\zeta} + \ddddot{\zeta}$

Определим понятие решения ОХУ с непрерывными коэффициентами следующим образом.

Определение 2.1. *Решением* $\zeta_i(t)$ *обобщенного характеристического уравнения* назовем любую функцию от t, непрерывную всюду, за исключением, возможно, не более чем счетного множества точек, удовлетворяющую этому уравнению всюду на I, за исключением точек разрыва, и на всех интервалах, где она непрерывна, связанную с одним и тем же решением x_i уравнения свободных колебаний равенством $\zeta_i(t) = \dot{x}_i(t)/x_i(t)$.

В соответствии с этим определением решения могут быть непрерывными и разрывными.

Каждому решению уравнения свободных колебаний, не принимающему на I нулевых значений, однозначно соответствует некоторое непрерывное решение ОХУ. Как показано в [68], каждому решению, принимающему нулевое значение в какой-либо точке I, соответствует разрывное решение ОХУ, непрерывное всюду, за исключением нулей решения уравнения свободных колебаний; при этом все разрывы – 2-го рода. Заметим, что свойство непрерывности решения ОХУ связано с интервалом определения ОХУ. В частности, решение, не являющееся непрерывным на интервале I, может оказаться непрерывным на интервале $I' \subset I$.

Пусть R_ζ – некоторое коммутативное кольцо, элементами которого являются функции, определенные на I, за исключением, возможно, дискретного множества точек, а сложение и умножение определены как одноименные алгебраические операции. Тогда примем следующее определение.

Определение 2.2. *Корнем обобщенного характеристического уравнения в кольце* R_ζ назовем его решение, являющееся вместе с его первыми $n-1$ производными элементом этого кольца.

В случае уравнения (2.10) с комплексными коэффициентами подстановка (2.22) также приводит к уравнению (2.10), но с комплексными коэффициентами. Приведенные выше понятия распространяются и на этот случай. Упомянутые свойства ОХУ и его решений сохраняются.

Выбор колец R_ζ. Рассмотрим некоторые частные случаи.

Уравнение свободных колебаний с непрерывными коэффициентами. Коэффициенты такого уравнения являются элементами кольца $C^r(I)$. Если в качестве кольца R_ζ выбрать то же кольцо, то корни ОХУ в кольце R_ζ – все вещественные непрерывные решения ОХУ. Если же в качестве кольца R_ζ выбрать кольцо комплексных непрерывных функций $C(I)$, то корнями ОХУ в кольце R_ζ будут все комплексные непрерывные решения ОХУ.

Уравнение свободных колебаний с постоянными коэффициентами. Если в качестве кольца R_ζ выбрать кольцо R_0 комплексных констант, то корнями ОХУ в кольце R_ξ будут корни характеристического уравнения

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \ldots + b_n = 0 \tag{2.26}$$

и только они. Если же выбрать $R_\xi = C(I)$, то при $n > 1$ множество корней ОХУ в кольце R_ξ помимо корней характеристического уравнения будет содержать также некоторые отличные от констант непрерывные функции. Число корней в кольце R_0 равно числу различных корней характеристического уравнения; при $n > 1$ множество корней в кольце $C(I)$ бесконечно [135].

Если принять промежуточное определение кольца R_ξ (при $n > 1$), а именно: определить его как кольцо R_P полиномов от t^{-1}, то корнями ОХУ в кольце R_ξ будут различные корни характеристического уравнения (2.26) и дополнительные корни вида

$$\lambda_i + \frac{1}{t}, \quad \lambda_i + \frac{2}{t}, \ldots, \lambda_i + \frac{\mu_i - 1}{t}, \tag{2.27}$$

где λ_i – i-й из различных корней характеристического уравнения, μ_i — его кратность.

Дополнительные корни – логарифмические производные решений уравнения свободных колебаний вида

$$t^k \exp \lambda_i t, \qquad k = 1, 2, \ldots, \mu_i - 1. \tag{2.28}$$

Уравнение свободных колебаний со счетно-дифференцируемыми коэффициентами. Предположим дополнительно $b_n(t) \not\equiv 0$ для всех t. В этом случае любое решение ОХУ – комплекснозначная функция, непрерывная и счетно-дифференцируемая всюду на I, за исключением, возможно, дискретного множества точек. В этом легко убедиться, если почленно продифференцировать уравнение (2.10), исключить в результирующем уравнении переменную x в силу уравнения (2.10), применить ту же процедуру к полученному в результате этого уравнению и т.д. Каждое полученное уравнение является уравнением с непрерывными коэффициентами, разрешимым относительно старшей производной неизвестной функции, откуда, в силу свойств решений обобщенного характеристического уравнения для уравнения свободных колебаний с непрерывными коэффициентами (см. текст перед определением 2.1), следует высказанное утверждение.

Кольцо комплекснозначных функций, счетно-дифференцируемых всюда на I, за исключением, возможно, дискретного множества точек, обозначим символом R'_∞.

Уравнение свободных колебаний с коэффициентами, представимыми функциональными рядами. В случаях уравнений свободных колебаний с непрерывными коэффициентами, представимыми рядами рассмотренного в п. 2.1.5 вида при условии (п. 2.1.5) гомоморфизма (относительно сложения и умножения) отображения множества сумм и рядов на множество функций положим $R_b = R^r_{U_m}$. Кольцо R_ζ определим как кольцо вида R_{U_m}, т.е. как множество всех функций $f(t)$, представимых в общем случае рядами

$$f(t) \sim F_1 u(t, \varphi_1) + F_2 u(t, \varphi_2) + \ldots, \tag{2.29}$$

а в частных случаях – имеющих вид частичных сумм таких рядов и обладающих тем свойством, что отображение множества представляющих функции сумм и рядов на множество функций является гомоморфизмом относительно сложения и умножения. В (2.29) F_i, $i = 1, 2, \ldots,$ – комплексные числа, φ_i – вещественные m-мерные векторы, связанные соотношением $\varphi_{i+1} < \varphi_i$(п. 2.1.5), $u(t, \varphi)$ – элементы того же семейства функций U_m, которое используется при построении кольца R_b.

В случае уравнения с периодическими коэффициентами при $R_b = R^r_{U_2} = R^r_\Omega$ решения обобщенного характеристического уравнения, соответствующие решениям вида (2.19) уравнения (2.10), имеют вид

$$\zeta_i(t) = \frac{\dot\theta_i(t) + \alpha_i\theta_i(t)}{\theta_i(t)} = \alpha_i + \frac{\dot\theta_i(t)}{\theta_i(t)} \tag{2.30}$$

и, следовательно, являются непрерывными периодическими функциями, $(n - 1)$-кратно дифференцируемыми на I, за исключением, возможно, дискретного множества точек.

Решения обобщенного характеристического уравнения, соответствующие решениям вида (2.20) уравнения (2.10), в общем случае являются дробно-рациональными функциями от t с периодическими коэффициентами. После деления числителей этих функций на знаменатели по правилам деления полиномов они представляются в виде

$$\zeta_i(t) \sim \psi_{i0}(t) + t^{-1}\psi_{i1}(t) + t^{-2}\psi_{i2}(t) + \ldots, \tag{2.31}$$

где $\psi_{ij}(t)$, $j = 1, 2, \ldots,$ – непрерывные $(n - 1)$-кратно дифференцируемые на I, за исключением, возможно, дискретного множества точек, периодические функции.

Очевидно, решения вида (2.30) являются корнями ОХУ в кольце R_Ω периодических функций (с периодом Ω), непрерывных на I, за исключением, возможно, дискретного множества точек, а также вместе с решениями вида (2.31) – корнями ОХУ в кольце R'_Ω дробно рациональных функций от t с коэффициентами из кольца R_Ω.

З н а ч е н и е п о н я т и я к о р н я О Х У в к о л ь ц е R_ζ.

Теоретическое значение. Корни ОХУ в кольце R_ζ – это некоторые его решения, которым соответствуют обладающие определенными свойствами решения уравнения свободных колебаний. Если корни (или корень) в данном кольце R_ξ существуют, то, значит, существуют такие решения (или решение) уравнений свободных колебаний. Следовательно, задача о существовании решений уравнения свободных колебаний, обладающих теми или иными специальными свойствами, при условии формирования кольца R_ξ как класса функций, обладающих этими свойствами, сводится к задаче о существовании в этом кольце корня ОХУ. Представляет интерес и постановка обратной задачи: для данного кольца R_b определить кольцо R_ξ так, чтобы в нем существовал корень ОХУ.

Понятие "корень в кольце R_ξ" позволяет провести широкую систематизацию методов исследования уравнений свободных колебаний различных классов.

Практическое значение. Если существование корня в данном кольце установлено и имеется метод вычисления корней, в котором корень ищется именно в этом классе функций, то этот метод является теоретически обоснованным. С другой стороны, решение обратной задачи, в которой определяется кольцо R_ξ, подсказывает путь формирования метода вычисления корней. Таким образом, для изучаемых в современной теории нестационарных линейных систем видов уравнений свободных колебаний и для их новых видов, к которым может появиться интерес в будущем, процесс поиска новых методов вычисления решений ОХУ и, соответственно, решений уравнения свободных колебаний, обладающих данными комплексами свойств, может быть регуляризован.

Наконец, различные классы уравнений свободных колебаний могут быть объединены в укрупненные классы, для которых возможны единые схемы вычисления корней ОХУ и их аппроксимаций.

2.1.7. Фундаментальная система решений обобщенного характеристического уравнения.

Определение 2.3. *Фундаментальной системой решений обобщенного характеристического уравнения* назовем систему n решений, которым, в силу соотношения (2.22), соответствует n таких семейств решений уравнения свободных колебаний, что их представители, по одному от каждого семейства, образуют фундаментальную систему.

Определение 2.4. Если все элементы фундаментальной системы решений обобщенного характеристического уравнения – корни в данном кольце R_ξ, то такую фундаментальную систему решений назовем *фундаментальной системой корней ОХУ в этом кольце.*

В зависимости от рассматриваемого уравнения и выбранного кольца R_ξ фундаментальная система корней в кольце R_ξ может существовать или не существовать. Если такая система существует, то она — исчерпывающая внутренняя характеристика системы.

В случае уравнения свободных колебаний с непрерывными коэффициентами из теоремы 2.3 следует существование фундаментальной системы корней в кольце $C(I)$.

Для уравнения свободных колебаний с периодическими коэффициентами при отсутствии кратных корней фундаментального уравнения из изложенного в предыдущем разделе следует: существует фундаментальная система решений этого уравнения, состоящая из функций вида (2.30). Так как функции этого вида принадлежат кольцу R_Ω (п. 2.1.6) периодических комплекснозначных функций, то отсюда следует существование фундаментальной системы корней ОХУ в этом кольце.

В зависимости от вида колец R_b и R_ζ фундаментальная система корней ОХУ в кольце R_ζ, если она существует, может быть или не быть единственной. Так, если $R_b = R_\zeta$, а $R_\zeta = C(I)$, то фундаментальных систем корней при $n > 1$ бесконечное множество, а в рассмотренном выше частном случае уравнения с периодическими коэффициентами она — одна.

2.1.8. Корневое уравнение. Введем еще одну внутреннюю характеристику системы — *корневое уравнение* (КУ) [67]. Определим его как алгебраическое уравнение n-й степени с коэффициентами, зависящими от t как от параметра, корнями которого являются элементы фундаментальной системы решений ОХУ, и запишем его в виде

$$\zeta^n + c_1(t)\,\zeta^{n-1} + \ldots + c_n(t) = 0. \tag{2.32}$$

Если рассматривать только такие фундаментальные системы решений ОХУ, в которых мнимые и существенно комплексные корни имеются только в составе сопряженных пар, то все коэффициенты КУ — вещественные функции.

Очевидно, элементы фундаментальной системы решений ОХУ связаны с коэффициентами КУ *формулами Виета* [100, с. 92]:

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\zeta_1(t) - \ldots - \zeta_n(t), \\ c_2(t) &= \zeta_1(t)\zeta_2(t) + \zeta_1(t)\zeta_3(t) + \ldots + \zeta_{n-1}(t)\zeta_n(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n(t) &= (-1)^n \zeta_1(t) \ldots \zeta_n(t). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Поскольку между решениями ОХУ и коэффициентами КУ имеется взаимооднозначное соответствие, корневое уравнение является исчерпывающей внутренней характеристикой системы.

При $n = 1$ КУ имеет вид

$$\zeta + c_1(t) = 0, \tag{2.34}$$

причем $c_1(t) = b_1(t)$.

При $n > 1$ коэффициенты КУ не выражаются в явном виде через коэффициенты уравнения свободных колебаний, но связаны с ними как элементы решения системы некоторых дифференциальных уравнений, коэффициенты которых являются функциями коэффициентов уравнения свободных колебаний. Получим эту систему. Раскрыв скобки в уравнении (2.21), перепишем его в виде

$$\zeta^n + b_1(t)\zeta^{n-1} + \ldots + b_n(t) = -\vartheta, \tag{2.35}$$

где ϑ – сумма членов, дополняющих левую часть уравнения (2.35) до левой части уравнения (2.21). Подставив в уравнение (2.35) $\zeta = \zeta_i$, $i = 1, \ldots, n$, получим n равенств:

$$\zeta_i^n + b_1\zeta_i^{n-1} + \ldots + b_n = -\vartheta_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.36}$$

где ϑ_i – полиномы от $p\zeta_i, \ldots, p^{n-1}\zeta_i$ и $b_1, \ldots, b_{n-2}$. Очевидно, для каждой функции $\zeta_i(t)$ всегда можно найти такие функции $d_1(t), \ldots, d_n(t)$, чтобы выполнялось равенство

$$\vartheta_i = d_1(t)\zeta_i^{n-1}(t) + d_2(t)\zeta_i^{n-2}(t) + \ldots + d_n(t).$$

Потребуем, чтобы для всех i эти функции были одни и те же. Это приведет к системе алгебраических уравнений

$$d_1\zeta_i^{n-1} + \ldots + d_n = \vartheta_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.37}$$

относительно неизвестных $d_1, \ldots, d_n$ с коэффициентами, зависящими от t. Определитель системы

$$\det\begin{bmatrix} \zeta_1^{n-1} & \ldots & \zeta_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \zeta_n^{n-1} & \ldots & \zeta_n & 1 \end{bmatrix}$$

при данном значении t отличен от нуля, если значения всех решений ζ_i различные. Для решений, образующих фундаментальную систему, не существует интервалов, на которых какие-либо из них совпадают. Поэтому при $t \in I$, за исключением, возможно, дискретного множества точек, система (2.37) однозначно разрешима.

Решая эту систему, получим выражения коэффициентов $d_1, \ldots$ $\ldots, d_n$ через решения ОХУ, их первые $n - 1$ производные и коэффициенты $b_1, \ldots, b_{n-2}$. В этих выражениях указанные производные решений могут быть представлены как дробно-рациональные функции коэффициентов $c_1, \ldots, c_n$, их первых $n - 1$ производных и решений. Действительно, первые производные решений могут быть найдены как компоненты решения системы линейных алгебраических уравнений (в которых они рассматриваются как неизвестные)

$$\dot\zeta_1 + \ldots + \dot\zeta_n = \dot s_1,$$
$$2\zeta_1\dot\zeta_1 + \ldots + 2\zeta_n\dot\zeta_n = \dot s_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n\zeta_1^{n-1}\dot\zeta_1 + \ldots + n\zeta_n^{n-1}\dot\zeta_n = \dot s_n,$$

где s_i, $i = 1, \ldots, n$ – целые рациональные функции от коэффициентов $c_1, \ldots, c_n$, в которые превращаются суммы $\zeta_1^i + \ldots + \zeta_n^i$ после их выражения через указанные коэффициенты. Следующие производные можно найти путем последовательного дифференцирования формул для первых производных. Очевидно, в формулах для k-х производных решений появятся производные функций $s_1, \ldots, s_n$, до k-х включительно и, в силу структуры этих функций, – производные тех же порядков коэффициентов $c_1, \ldots, c_n$.

После выражения производных корней по получаемым формулам, коэффициенты $d_1, \ldots, d_n$ примут вид симметрических функций корней с коэффициентами, зависящими от коэффициентов $b_1, \ldots, b_{n-2}$ и коэффициентов $c_1, \ldots, c_n$ и их первых $n - 1$ производных. На основании теоремы о симметрических функциях эти симметрические функции можно рационально выразить, причем единственным образом, через коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$. Таким образом, получим коэффициенты $d_1, \ldots, d_n$ в виде дробно-рациональных функций от коэффициентов и производных коэффициентов корневого уравнения (в общем случае до $(n - 1)$-х включительно) с коэффициентами, являющимися функциями от коэффициентов $b_1(t), \ldots, b_{n-2}(t)$ уравнения свободных колебаний.

Сравнив уравнения (2.32) и (2.36) и учтя (2.37), найдем $c_i = b_i + d_i$, $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, коэффициенты $d_i(t)$ суть поправки, которые следует внести в коэффициенты $b_i(t)$, чтобы получить коэффициенты корневого уравнения. Выразив эти поправки по получаемым при применении указанной выше процедуры формулам, получим дифференциальные уравнения для коэффициентов $c_1, \ldots, c_n$.

Другой путь получения дифференциальных уравнений относительно коэффициентов $c_1, \ldots, c_n$ изложен в [80, с. 156–157].

При $n = 2$ оба пути приводят к системе уравнений [79]

$$c_1 = b_1 + \frac{c_1\dot c_1 - 2\dot c_2}{c_1^2 - 4c_2},$$

$$c_2 = b_2 + \frac{2\dot c_1 c_2 - c_1\dot c_2}{c_1^2 - 4c_2}.$$

При $n = 3$ изложенный выше метод приводит к системе уравнений [79]

$$c_1 = b_1 + \frac{b_1}{V^2}(\dot R_1 P_5 + \dot R_2 P_3 + 2\dot R_3 P_1) +$$

$$+ \frac{1}{V^2}[\ddot R_1 P_5 + A_2 P_3 + 2A_3 P_1 - 3(2\dot R_1 P_7 + \dot R_2 P_4 + \dot R_3 P_2)],$$

$$c_2 = b_2 + \frac{b_1}{V^2}(\dot R_1 P_9 + 2\dot R_2 P_6 + \dot R_3 P_3) + \frac{1}{V^2}[\ddot R_1 P_9 + 2A_2 P_6 +$$

$$+ A_3 P_3 - 3(\dot R_1 P_{10} + \dot R_2 P_8 + \dot R_3 P_4)],$$

$$c_3 = b_3 + \frac{b_1}{V^2}(\dot R_1 P_{11} + \dot R_2 P_9 + \dot R_3 P_5) + \frac{1}{V^2}[\ddot R_1 P_{11} + A_2 P_9 + A_3 P_5 -$$

$$- 3(\dot R_1 P_{12} + \dot R_2 P_{10} + 2\dot R_3 P_7)],$$

где

$$A_2 = \ddot R_2 - \frac{1}{V^2}(\dot R_1 P_{11} + 2\dot R_2^2 P_6 + 2\dot R_3^2 P_1 + 2\dot R_1 \dot R_2 P_9 +$$

$$+ 2\dot R_1 \dot R_3 P_5 + 2\dot R_2 \dot R_3 P_3),$$

$$A_3 = \ddot R_3 + \frac{2}{V^2}(\dot R_1^2 P_{12} + \dot R_2^2 P_6 + \dot R_3^2 P_2 + 2\dot R_1 \dot R_2 P_{10} +$$

$$+ 4\dot R_1 \dot R_3 P_7 + 2\dot R_2 \dot R_3 P_4),$$

$$R_1 = -c_1,\quad R_2 = \frac{c_1^2}{2} - c_2,\quad R_3 = -\frac{c_1^2}{3} + c_1 c_2 - c_3,$$

$$P_1 = c_1^2 - 3c_2,\quad P_2 = c_1 c_2 - 9c_3,\quad P_3 = 2c_1^3 - 7c_1 c_2 + 9c_3,$$

$$P_4 = c_1^2 c_2 - 3c_1 c_3 - 2c_2^2,\quad P_5 = c_1^2 c_2 + 3c_1 c_3 - 4c_2^2,$$

$$P_6 = c_1^4 - 4c_1^2 c_2 + 6c_1 c_3 + c_2^2,\quad P_7 = c_1^2 c_3 - 3c_2 c_3,$$

$$P_8 = c_1^3 c_2 - c_1^2 c_3 - 3c_1 c_2^2 + 3c_2 c_3,$$

$$P_9 = c_1^3 c_2 + c_1^2 c_3 - 4c_1 c_2^2 + 6c_2 c_3,$$

$$P_{10} = 2c_1^3 c_3 - 7c_1 c_2 c_3 + 9c_3^2,$$

$$P_{11} = c_1^2 c_2^2 - 2c_1^3 c_3 + 10c_1 c_2 c_3 - 4c_2^3 - 9c_3^2,$$

$$P_{12} = c_1^2 c_2 c_3 + 3c_1 c_3^2 - 4c_2^2 c_3,$$

$$V^2 = c_1^2 c_2^2 - 4c_1^3 c_3 - 4c_2^3 + 18c_1 c_2 c_3 - 27c_3^2.$$

Систему дифференциальных уравнений, полученную другим путем, см. в [80, с. 164–169].

Пусть в данном кольце R_ξ существует фундаментальная система корней ОХУ. Тогда, в силу равенств (2.33), существует система функций $c_1(t), \ldots, c_n(t)$, элементы которой также принадлежат этому кольцу.

2.1.9. Система дифференциальных уравнений относительно канонических составляющих решения уравнения свободных колебаний.

Каноническое преобразование. В большинстве излагаемых в гл. 5 и 8 книги методов анализа свободных колебаний, базирующихся на уравнении свободных колебаний, используются канонические преобразования [61] этого уравнения. Цель канонических преобразований – преобразование уравнения (2.10) в такую систему дифференциальных уравнений 1-го порядка, матрица коэффициентов которой близка к диагональной.

Пусть коэффициенты уравнения (2.10) непрерывны и $\xi_1 \equiv \equiv \xi_1(t), \ldots, \xi_n \equiv \xi_n(t)$ – некоторые вещественные или комплекснозначные функции от t, непрерывные и $n-1$ раз дифференцируемые, причем такие, что при всех $t \in I$ определитель

$$W \triangleq \det \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ (\xi_1 + p)\xi_1 & \ldots & (\xi_n + p)\xi_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\xi_1 + p)^{n-2}\xi_1 & \ldots & (\xi_n + p)^{n-2}\xi_n \end{bmatrix}$$

отличен от нуля. Тогда уравнение (2.10) можно заменить системой линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка согласно подстановке

$$\begin{aligned} x &= z_1 + \ldots + z_n, \\ px &= \xi_1 z_1 + \ldots + \xi_n z_n, \\ p^2 x &= [(\xi_1 + p)\xi_1] z_1 + \ldots + [(\xi_n + p)\xi_n] z_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p^{n-1} x &= [(\xi_1 + p)^{n-2}\xi_1] z_1 + \ldots + [(\xi_n + p)^{n-2}\xi_n] z_n, \end{aligned} \tag{2.38}$$

где $z_1, \ldots, z_n$ – новые переменные (*канонические составляющие*).

Система уравнений, которой удовлетворяют переменные $z_1, \ldots \ldots, z_n$, имеет вид

$$\dot{z}_1 = \xi_i(t) z_i + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(t) z_j, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2.39}$$

где

$$h_{ij} = -\frac{w_{ni}}{W}\left[(\xi_j + p)^{n-1}\xi_j + b_1(\xi_j + p)^{n-2}\xi_j + \ldots + b_n\right],$$

w_{ni} – алгебраическое дополнение элемента n-й строки i-го столбца определителя W. Приведем ее вывод. Продифференцировав уравнения (2.38) и исключив переменную x путем сравнения каждого k-го уравнения ($k = 1, 2, \ldots, n - 1$) системы, полученной в результате дифференцирования, с $(k + 1)$-м уравнением системы (2.38), а n-е уравнение полученной системы – с уравнением (2.10), найдем

$$\begin{aligned}
&\dot z_1 + \ldots + \dot z_n = \xi_1 z_1 + \ldots + \xi_n z_n,\\
&\xi_1 \dot z_1 + \ldots + \xi_n \dot z_n = \xi_1^2 z_1 + \ldots + \xi_n^2 z_n,\\
&[(\xi_1 + p)\xi_1]\dot z_1 + \ldots + [(\xi_n + p)\xi_n]\dot z_n =\\
&= \xi_1[(\xi_1 + p)\xi_1] z_1 + \ldots + \xi_n[(\xi_n + p)\xi_n] z_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[(\xi_1 + p)^i\xi_1]\dot z_1 + \ldots + [(\xi_n + p)^i\xi_n]\dot z_n =\\
&= \xi_1[(\xi_1 + p)^i\xi_1] z_1 + \ldots + \xi_n[(\xi_n + p)^i\xi_n] z_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[(\xi_1 + p)^{n-2}\xi_1]\dot z_1 + \ldots + [(\xi_n + p)^{n-2}\xi_n]\dot z_n =\\
&= -[p(\xi_1 + p)^{n-2}\xi_1 + b_1(\xi_1 + p)^{n-2}\xi_1 + \ldots + b_n] z_1 - \ldots\\
&\ldots - [p(\xi_n + p)^{n-2}\xi_n + b_1(\xi_n + p)^{n-2}\xi_n + \ldots + b_n] z_n - \ldots
\end{aligned}$$

Рассматривая эту систему как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\dot z_1, \ldots, \dot z_n$ и решая ее, получим (2.39).

В системе (2.39) коэффициенты ξ_i и h_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, непрерывны и в общем случае комплексны. Кроме того, если система функций $\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$ состоит из вещественных функций и комплексно сопряженных пар, то $h_{ij} = \overline{h}_{kl}$, если $\xi_i = \overline{\xi}_k$ и $\xi_j = \overline{\xi}_l$.

Переход от уравнения (2.10) к уравнению (2.39) называется *каноническим преобразованием* [61], функции $\xi_i(t)$ – *определяющими функциями* [74]; уравнение $\xi^n + d_1(t)\,\xi^{n-1} + \ldots + d_n(t) = 0$, корнями которого являются определяющие функции, назовем *определяющим уравнением.*

Если система определяющих функций является фундаментальной системой решений ОХУ $\zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t)$, то коэффициенты h_{ij} обращаются в нуль и система (2.39) принимает вид

$$\dot z_i = \zeta_i(t) z_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2.40}$$

т.е. распадается на n уравнений 1-го порядка, содержащих по одной переменной z_i каждое, причем решение любого из них является также решением уравнения (2.10). Если решения ОХУ заменить аппроксимирующими их функциями $\tilde{\zeta}_1(t), \ldots, \tilde{\zeta}_n(t)$, то получим систему (2.39) с такой матрицей коэффициентов, которая тем ближе к диагональной, чем точнее аппроксимация.

Каждая система дифференциальных уравнений относительно канонических составляющих является внутренней характеристикой системы и совместно с системой определяющих функций образует исчерпывающую систему внутренних характеристик.

2.1.10. Вычисление решений обобщенного характеристического уравнения. Как было отмечено выше, при $n = 1$ решение обобщенного характеристического уравнения известно. Поэтому будем считать, что $n \geqslant 2$. Обобщенное характеристическое уравнение как нелинейное дифференциальное уравнение можно приближенно интегрировать известными в теории дифференциальных уравнений методами. В частности, записав ОХУ в виде

$$p^{n-1}\zeta = f(p^{n-2}\zeta, \ldots, p\zeta, t) \tag{2.41}$$

и учтя, что f является непрерывной функцией всех аргументов, можно применить *метод последовательных приближений Пикара–Ленделёфа* [104]. Этот метод позволяет сформировать аппроксимации решения с заданными начальными условиями. Однако для вычисления корней ОХУ в заданном кольце R_ζ этот путь нецелесообразен, так как неизвестно, какими начальными условиями следует задаться, чтобы искомое решение было корнем.

В работах [72–74, 80] описан ряд методов приближенного вычисления корней ОХУ в некоторых кольцах для уравнения свободных колебаний со счетно-дифференцируемыми коэффициентами, с периодическими коэффициентами, с коэффициентами, разлагающимися в ряды по степеням времени и т.д. Эти методы являются итеративными. Они позволяют построить последовательности аппроксимаций корней, каждые члены которых вычисляются с помощью некоторых алгоритмов по предшествующим членам. Как правило, т.е. в *типовых* случаях, находятся аппроксимации всех элементов некоторой фундаментальной системы корней. Однако возможны также случаи (*особые*), когда либо аппроксимируемые корни не образуют фундаментальной системы (т.е. соответствующие решения уравнения (2.10) линейно зависимы), либо число аппроксимируемых корней меньше n. Если последовательность аппроксимаций для того или иного корня, получаемая по тому или иному методу, сходится к корню, то по отношению к этому корню данный метод является методом последовательных приближений.

Ниже для частных видов уравнения свободных колебаний приводится ряд методов вычисления корней ОХУ в различных кольцах (R_ζ).

Уравнение свободных колебаний со счетно-дифференцируемыми коэффициентами. Приведем для уравнения этого вида методы вычисления некоторых корней ОХУ в кольцах счетно-дифференцируемых функций (R_∞) и функций, счетно-дифференцируемых всюду, за исключением, возможно, дискретного множества точек (R'_∞).

Метод корневого уравнения [67, с. 61]. Этот метод состоит в следующем. По итерационной схеме, приведенной в п. 2.1.11 (для уравнения со счетно-дифференцируемыми коэффициентами) вычисляются аппроксимации коэффициентов корневого уравнения. Эти аппроксимации принадлежат вещественному подкольцу R'^r_∞ кольца R'_∞. После получения достаточно точных аппроксимаций коэффициентов вычисляются корни соответствующей аппроксимации корневого уравнения. Очевидно, вычисленные корни – аппроксимации элементов фундаментальной системы корней ОХУ в кольце R'_∞ .

Метод канонических преобразований [74, с. 81–82]. В этом методе ищутся корни ОХУ в кольце R_∞. В качестве аппроксимаций корней принимаются *определяющие функции* канонического преобразования (п. 2.1.9). Рассматривается последовательность канонических преобразований, элементы которой различаются системами определяющих функций. Поэтому этот метод, как и предыдущий, является итеративным. Способы построения определяющих функций см. в [62, 65]. Если принятый способ при выбранной исходной системе определяющих функций является удачным, т.е. позволяет получить систему уравнений относительно канонических составляющих с матрицей коэффициентов, близкой к диагональной, то соответствующий вариант метода вычисления корней ОХУ позволяет найти аппроксимации n корней, образующих в совокупности фундаментальную систему [74, с. 82].

Алгебраический метод. Этот метод базируется на алгебраическом подходе к вычислению корней. ОХУ представляется в виде

$$\zeta^n + e_1\zeta^{n-1} + \ldots + e_{n-1}\zeta + e_n = 0, \tag{2.42}$$

где коэффициенты $e_1, \ldots, e_n$ – полиномы от коэффициентов $b_1, \ldots, b_n$ и производных неизвестной ζ. Уравнение (2.42) с точностью до коэффициентов совпадает с корневым уравнением. Однако коэффициенты этого уравнения существенно отличаются от коэффициентов корневого уравнения. Во-первых, они являются функциями не только t, но и производных неизвестных ζ. Во-вторых, корневое уравнение строилось таким образом, чтобы его корни были одновременно корнями ОХУ, образующими в совокупности фундаментальную систему. Если же подставить в выражения для коэффициентов уравнения (2.42) корень ОХУ из любой фундаментальной системы, а затем повторить то же для других корней этой системы, то в общем случае получим n разных уравнений, коэффициенты которых, как в случае корневого уравнения, являются функциями от t. Каждое такое уравнение имеет n корней, но (в общем случае) только один его корень является корнем ОХУ.

Корни ОХУ вычисляются рекуррентно следующим образом.

I. Задаемся исходной аппроксимацией $\zeta_1^{(0)}(t)$ некоторого неизвестного корня $\zeta_1(t)$.

II. Вычисляем соответствующие этой функции аппроксимации коэффициентов уравнения (2.42) в виде функций времени. Обозначив их символами $e_1^{(0)}(t), \ldots, e_n^{(0)}(t)$, формируем уравнение

$$\zeta^n + e_1^{(0)}(t)\,\zeta^{n-1} + \ldots + e_n^{(0)}(t) = 0. \tag{2.43}$$

Оно решается как алгебраическое и выделяется корень $\zeta_1^{(1)}(t)$ как наиболее близкий к функции $\zeta_1^{(0)}(t)$. Близость корней при каждом значении t оцениваем модулем их разности.

III. Вычисляем соответствующие функции $\zeta_1^{(1)}(t)$ аппроксимации коэффициентов уравнения (2.42) (также функции времени). Получается новое алгебраическое уравнение

$$\zeta^n + e_1^{(1)}(t)\,\zeta^{n-1} + \ldots + e_n^{(1)}(t) = 0. \tag{2.44}$$

Решая это уравнение и выделяя корень, наиболее близкий к использованному корню уравнения (2.43), получаем новую аппроксимацию искомого корня ОХУ.

Очевидно, описанный процесс допускает итеративное продолжение.

Заметим, что поскольку на каждом шаге нас интересует только один корень, то нет необходимости полностью решать соответствующие уравнения; можно ограничиться вычислением только интересующих нас корней. Один из способов решения последней задачи см. в [56].

Общая характеристика методов. Все изложенные методы нацелены на вычисление фундаментальной системы корней ОХУ. Во всех методах присутствует элемент вычисления корней алгебраических уравнений, зависящих от t. Поэтому они относятся к классу численных методов.

Уравнение свободных колебаний с коэффициентами, представимыми функциональными рядами. Приведем методы вычисления корней ОХУ в кольце R_ζ вида R_{U_m} (см. п. 2.1.6), предполагая, что:

1) функции $u(t, \varphi)$ – элементы того же семейства функций U_m, которое используется при построении кольца R_b, т.е. что $U_m^r \subset U_m$;

2) существует непустое подмножество кольца R_ζ, элементы которого $n-1$-кратно дифференцируемы по t, причем соответствующие их производные также принадлежат кольцу R_ζ;

3) отображение множества конечных сумм и рядов, представляющих элементы R_ζ, в R_ζ является гомоморфизмом также относительно $n-1$-кратного дифференцирования.

В этих методах применяется единый подход к задаче вычисления корней ОХУ в кольце вида R_{U_m}, состоящий в следующем: коэффициенты уравнения свободных колебаний представляются рядами, устанавливается способ построения рядов, представляющих искомые корни, находятся полные или частичные суммы этих рядов и определяются (точно или приближенно) соответствующие рядам корни.

Не умаляя общности методов, ограничимся случаем $b_n(t) \neq 0$. Это оправдано тем, что в противном случае подстановка $\dot{x} = x_1$, приводит уравнение свободных колебаний к аналогичному уравнению, но с пониженным на единицу порядком. Способы построения рядов, представляющих корни ОХУ в данном кольце, изложены ниже для колец R_b видов $R^r_{U_1}, R^r_{U_2}, R^r_{U_3}$.

Случай $m = 1$. Пусть ряды, представляющие те коэффициенты $b_i(t)$, которые не имеют вида (2.11) или (2.12), являются вблизи $t = c$, где $c = a \vee b$, их асимптотическими разложениями (п. 2.1.5). Тогда определим кольцо R_b как множество всех заданных на $I = (a, b)$ вещественных непрерывных функций, имеющих вид (2.11) или (2.12) или представимых рядами, обладающими упомянутым выше свойством (при таком определении кольца R_b отображение множества представляющих функции сумм и рядов на множество функций является гомоморфизмом). Кольцо R_ζ определим так, как указано в п. 2.1.6.

Построение рядов, представляющих корни ОХУ в кольце R_ζ, производится следующим образом.

Подставив в обобщенный характеристический полином (2.23) вместо ζ формальный ряд

$$H_{i1} u(t, \eta_{i1}) + H_{i2} u(t, \eta_{i2}) + \dots \tag{2.45}$$

вида (2.32), представим полином в виде

$$Q_n + b_1(t) Q_{n-1} + \dots + b_{n-1}(t) Q_1 + b_n(t), \tag{2.46}$$

где Q_1 — выражение (2.45), а $Q_2, \dots, Q_n$ — выражения, вычисляемые по рекуррентной формуле $Q_k = Q_1 Q_{k-1} + \dot{Q}_{k-1}$. Каждое слагаемое выражения (2.46) может быть представлено выражением вида (2.29) (или аналогичной конечной суммой). Это позволяет представить (2.46) в виде ряда

$$L_{i1}u(t, \lambda_{i1}) + L_{i2}u(t, \lambda_{i2}) + \ldots,$$

$$\lambda_{i1} > \lambda_{i2} > \ldots, \tag{2.47}$$

где коэффициенты $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, L_{i1}, L_{i2}, \ldots$ и состав каждого слагаемого (т.е. набор вошедших в него одночленов – членов разложения слагаемых выражения (2.46)) зависит от $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots$ $\ldots, H_{i1}, H_{i2}, \ldots$ и в общем случае при варьировании этих коэффициентов изменяется.

Если ряд (2.46) – асимптотическое разложение корня ОХУ в кольце R_{U_1} или если его частичная сумма – корень, то все члены ряда (2.47) должны обращаться в нуль, что возможно только тогда, когда все коэффициенты L_{ij} равны нулю. Приравнивая их нулю поочередно, получаем алгоритм для расчета коэффициентов H_{i1} и η_{i1}. Этот алгоритм в общем случае приводит к неоднозначному результату, т.е. выявляется сразу несколько рядов вида (2.45).

Согласно [73, с. 174], коэффициент L_{ij} зависит только от коэффициентов $\eta_{i1}, \ldots, \eta_{ij}$ и $H_{i1}, \ldots, H_{ij}$. Поэтому процесс определения параметров рядов можно организовать таким образом, чтобы пары H_{ij} и η_{ij} вычислялись поочередно ($j = 1, 2, \ldots$): H_{i1} и η_{i1} – из условия $L_{i1} = 0$, H_{i2} и η_{i2} – из условия $L_{i2} = 0$ с учетом найденных значений H_{i1} и η_{i1} и т.д.

Имея в виду, что условие $b_n(t) \not\equiv 0$ выполняется и, следовательно, обобщенное характеристическое уравнение не имеет нулевого корня, будем считать в дальнейшем, что $H_{i1} \neq 0$ для всех i.

Коэффициенты H_{i1} и η_{i1} определяются последовательно: сначала коэффициент η_{i1}, затем коэффициент H_{i1}.

Полагаем в (2.45) $H_{i2} = H_{i3} = \ldots = 0$ и, подставляя $\zeta = H_{i1}u(t, \eta_{i1})$ в левую часть ОХУ, приводим ее к виду

$$S_0^{(1)} = (\zeta_i^{(0)})^n + c_1(\zeta_i^{(0)})^{n-1} + \ldots + c_n, \tag{2.48}$$

где $\zeta_i^{(0)} = H_{i1}u(t, \eta_{i1})$, а $c_1, \ldots, c_n$ – в общем случае функциональные ряды вида

$$C_{j1}u(t, \gamma_{j1}) + C_{j2}u(t, \gamma_{j2}) + \ldots, \tag{2.49}$$

$$\gamma_{j1} > \gamma_{j2} > \ldots, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

а в частных случаях – конечные суммы (в том числе одночлены) того же вида. В этих рядах и конечных суммах в случае, когда все коэффициенты $b_i(t)$ отличны от нуля, коэффициенты γ_{j1} находятся по формулам*)

$$\gamma_{11} = \max(g_1, \beta_{11}),$$

$$\gamma_{21} = \max(2g_1, g_1 + \beta_{11}, \beta_{21}), \ldots, \gamma_{n-1,1} =$$

$$= \max[(n-1)g_1, (n-2)g_2 + \beta_{11}, \ldots, \beta_{n-1,1}],$$

$$\gamma_{n1} = \beta_{n1}.$$

Если же какой-либо из коэффициентов b_i равен нулю, то соответствующая формула корректируется: при выборе максимального элемента не учитывается элемент, содержащий β_{i1}. Вид коэффициентов C_{i1}, кроме коэффициента C_{n-1}, равного B_{n1}, зависит от того, какие элементы являются максимальными. Например, при формировании коэффициента C_{11} возможны три варианта:

$$\gamma_{11} = g_1 > \beta_{11}, \ \gamma_{11} = g_1 = \beta_{11}, \ \gamma_{11} = \beta_{11} > g_1.$$

В первом случае**) $C_{11} = f_1(\eta_{i1})$, во втором случае $C_{11} = f_1(\eta_{i1}) + B_{11}$, в третьем случае $C_{11} = B_{11}$.

Первое слагаемое в (2.48) – одночлен

$$(\zeta_i^{(0)})^n = H_{i1} u(t, n\eta_{i1}), \tag{2.50}$$

а первые члены рядов (2.49) имеют вид

$$C_{j1} H_{i1}^{n-j} u\,[t, \gamma_{j1} + (n-j)\eta_{i1}], \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{2.51}$$

Так как в выражениях (2.50)–(2.51) сомножители, зависящие от коэффициента H_{i1}, имеют вид его целой неотрицательной степени, то ненулевые значения H_{i1} (только они нас интересуют), удовлетворяющие условию $L_{i1} = 0$, могут существовать только тогда, когда в формировании первого члена ряда (2.47) участвует не менее двух членов с разными степенями коэффициента H_{i1}. Отсюда следует описанный ниже *алгебраический способ* вычисления коэффициента H_{i1}.

Приравниваем параметры функций $u(t, \alpha)$ для каждой пары выражений (2.50)–(2.51). Получаются линейные уравнения

$$j\eta_{i1} = \gamma_{j1}, \qquad j = 1, \ldots, n;$$

$$\gamma_{11} + (j-1)\eta_{i1} = \gamma_{j1}, \qquad j = 2, \ldots, n, \ldots;$$

$$\gamma_{n-1,1} + \eta_{i1} = \gamma_{n1}.$$

Решая эти уравнения, находим значения коэффициента η_{i1}. Далее проверяем, не превышают ли значения параметра в других выражениях (2.50)–(2.51), значений параметра в выбранной паре

---

*) Смысл символа $g_1(\eta_{i1})$ пояснен в п. 2.1.5.

**) Смысл символа $f_1(\eta_{i1})$ пояснен в п. 2.1.5.

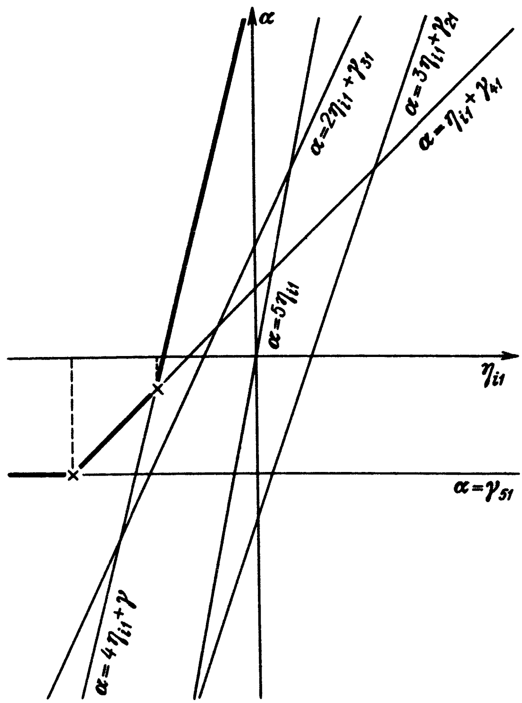


Рис. 2.3. Графоаналитический способ определения коэффициентов η_{i1}. Случай $n = 5$

выражений. Если для всех проверяемых слагаемых получаем отрицательный ответ, то найденное значение коэффициента η_{i1} расцениваем как возможное.

Этот способ при применении к уравнениям свободных колебаний высоких порядков может привести к довольно большому объему вычислений в связи с необходимостью перебора всех комбинаций пар выражений (2.50)–(2.51), решения соответствующего большого числа линейных уравнений и проверкой неравенств – при определении возможных значений η_{i1}. Решение задачи можно облегчить, если воспользоваться изложенным ниже *графоаналитическим способом.*

Отложим по осям декартовой системы координат значения коэффициента η_{i1} и соответствующие значения α функции $u(t, \alpha)$ в выражениях (2.50)–(2.51) (рис. 2.3). Все зависимости $\alpha(\eta_{i1})$ линейны и, следовательно, представляются прямыми. Рассмотрим ломаную – верхнюю огибающую этого семейства прямых (на рисунке показана жирной линией). В соответствии с описанной выше процедурой отбора возможных значений η_{i1} абсциссы угловых точек ломаной – возможные значения η_{i1}.

Заметим, что на основе этого способа легко доказывается существование возможного значения параметра η_{i1} и то, что число возможных значений не превышает η_{i1}. Действительно, зависимость $\alpha(\eta_{i1})$, соответствующая коэффициенту b_n, выражается на графике прямой, параллельной оси абсцисс. Показатель степени H_{i1} в этом случае – нулевой, во всех остальных – положительный. Поэтому упомянутая прямая пересекается со всеми остальными. Самая левая точка пересечения является угловой точкой ломаной. Так как примыкающие к этой точке участки ломаной соответствуют выражениям с разными показателями степени коэффициента H_{i1}, то абсцисса ломаной – возможное значение параметра η_{i1}. Число прямых, образующих ломаную, не превышает $n + 1$. Поэтому число находимых значений η_{i1} не превышает n.

Теперь вычисляем коэффициент H_{i1} для каждого возможного значения η_{i1}. С этой целью, рассматривая каждое возможное значение η_{i1}, отбираем из выражений (2.50)–(2.51) такие, которые имеют наивысшее значение параметра α. Приравнивая нулю сумму коэффициентов при функциях $u(t, \alpha)$ в отобранных выражениях, получаем алгебраическое уравнение для определения коэффициента H_{i1}. Это уравнение может иметь ненулевые решения или не иметь их. В типовом случае число ненулевых решений равно разности показателей наивысшей и наинизшей степеней в отобранных выражениях. Это может нарушиться, если коэффициент при какой-либо степени H_{i1} в этих выражениях равен нулю. Если это не наивысшая или наинизшая степень H_{i1}, то число ненулевых решений не изменится. Особые случаи возникают тогда и только тогда, когда коэффициент H_{i1} при наивысшей и/или наинизшей степени H_{i1} равен нулю. В этих случаях число ненулевых решений меньше указанной разности или равно нулю.

Рассматривая каждое найденное значение H_{i1} вместе с соответствующим ему значением η_{i1}, получим некоторое число пар значений H_{i1} и η_{i1}, удовлетворяющих условию $L_{i1} = 0$ (возможны тождественные пары). Таким образом, сразу выявляются первые члены разложений не одного, а нескольких корней ОХУ в кольце R_{U_1}. Решение отсутствует только тогда, когда из-за особых случаев не находится ни одного ненулевого значения H_{i1}. Значению коэффициента η_{i1} соответствует одно или большее число ненулевых значений H_{i1}, причем суммарное число последних, подсчитанное для всех возможных значений η_{i1} с учетом кратности корней соответствующих алгебраических уравнений, при отсутствии особых случаев равно n. Особые случаи уменьшают число выявляемых пар H_{i1}, η_{i1}.

Пусть коэффициенты H_{ij} и η_{ij} для $j \leqslant k$ $(k \geqslant 1)$ вычислены, причем функция

$$\zeta_i^{(k-1)} = \sum_{j=1}^{k} H_{ij} u(t, \eta_{ij})$$

не является решением ОХУ (в противном случае задача определения следующих членов разложения (2.45) не возникает). Тогда, положив в (2.46) $H_{ij} = 0$ при $j > k+1$, это выражение можно привести к виду

$$S_0^{(k)} + S_\Delta^{(k)} \Delta\zeta_i^{(k)} + R^{(k)},$$

где

$$\Delta\zeta_i^{(k)}(t) \triangleq H_{i,k+1} u(t, \eta_{i,k+1}),$$

$H_{i,k+1}$, $\eta_{i,k+1}$ – неизвестные величины, $S_0^{(k)}$ – результат подстановки $\zeta = \zeta_i^{(k-1)}$ в (2.46), $S_\Delta^{(k)}$ – частное от деления на $\Delta\zeta^{(k)}$ суммы тех слагаемых выражения, получаемого из (2.46) при подстановке $\zeta = \zeta_i^{(k)}$, которые содержат $H_{i,k+1}$ в 1-й степени, $R^{(k)}$ – сумма членов, содержащих 2-е и высшие степени $H_{i,k+1}$. Структуру выражения $S_\Delta^{(k)}$ см. в [62, с. 253].

Выражения $S_0^{(k)}$, $S_\Delta^{(k)}$, $R^{(k)}$ в общем случае – функциональные ряды вида (2.29) (в частных случаях – конечные суммы), причем в случае ряда $S_0^{(k)}$ коэффициенты при функциях $u(t, \alpha)$ и параметры α – известные числа; в случае ряда $S_\Delta^{(k)}$ параметры α – также известные числа, но коэффициенты зависят от $\eta_{i,k+1}$ (при некоторых значениях $\eta_{i,k+1}$ возможны нулевые значения коэффициентов); в случае ряда $R^{(k)}$ параметры α зависят от $\eta_{i,k+1}$, а коэффициенты – от $H_{i,k+1}$ и $\eta_{i,k+1}$ (также возможны нулевые значения коэффициентов).

Обозначим символами M_{k-1} и μ_{k-1} соответственно коэффициент и параметр α в первом члене ряда $S_0^{(k)}$, символами $M_\Delta^{(k)}(\eta_{i,k+1})$ и μ_Δ – аналогичные величины в первом члене ряда $S_\Delta^{(k)}$, символами $M_R^{(k)}(H_{i,k+1}, \eta_{i,k+1})$ и $\mu_R^{(k)}(\eta_{k,k+1})$ – то же для первого члена ряда $R^{(k)}$. Ряды $S_0^{(k)}$, $S_\Delta^{(k)}$ (при $M_\Delta^{(k)} \neq 0$) и $R^{(k)}$ (при $M_R^{(k)} \neq 0$) оцениваются в виде: при $t \to c$

$$S_0^{(k)} = M_{k-1} u(t, \mu_{k-1}) [1 + o(1)],$$

$$S_\Delta^{(k)} = M_\Delta^{(k)}(\eta_{i,k+1}) u(t, \mu_\Delta^{(k)}) [1 + o(1)],$$

$$R^{(k)} = M_R^{(k)}(H_{i,k+1}, \eta_{i,k+1}) u(t, \mu_R^{(k)}) [1 + o(1)].$$

Предполагая, что для находимых значений

$$M_\Delta^{(k)} \neq 0, \qquad \mu_R^{(k)} < \mu_0, \tag{2.52}$$

и учитывая приведенные выше оценки, коэффициенты $H_{i,k+1}$ и $\eta_{i,k+1}$ определим из условия

$$M_{k-1}u(t, \mu_{k-1}) + M_\Delta^{(k)}(\eta_{i,k+1}) H_{ik} \times$$
$$\times u(t, \mu_\Delta^{(k)}) u(t, \eta_{i,k+1}) = 0. \tag{2.53}$$

Решая это уравнение, получим

$$\eta_{i,k+1} = \mu_{k-1} - \mu_\Delta^{(k)}, H_{i,k+1} = -\frac{M_{k-1}}{M_\Delta^{(k)}(\eta_{i,k+1})}. \tag{2.54}$$

Вторым из равенств (2.54) нельзя воспользоваться в случае, когда $M_\Delta^{(k)} = 0$ для найденного значения $\eta_{i,k+1}$. Такой случай будем называть *первым особым случаем.* Возможен также *второй особый случай*, когда расчетная формула для $H_{i,k+1}$ неверна из-за нарушения второго из условий (2.52) и требуется ее уточнение с учетом первого члена ряда $R^{(k)}$.

Пример 2.1. Рассмотрим уравнение

$$\{p^2 - 2(at+b)p + [(at+b)^2 - a]\}\, x = 0, \quad a \neq 0, \quad t \in (0, \infty). \tag{2.55}$$

Ему соответствует обобщенное характеристическое уравнение

$$\zeta^2 + \dot{\zeta} - 2(at+b)\zeta + (at+b)^2 - a = 0. \tag{2.56}$$

Полагая $c = \infty$ и $u(t, \alpha) = |t^\alpha|$, корни ОХУ в кольце R_{U_1} будем искать в виде

$$\zeta_i \sim H_{i_1}|t^{\eta_{i_1}}| + H_{i_2}|t^{\eta_{i_2}}| + \ldots \equiv$$
$$\equiv \zeta_i^{(0)} + \Delta\zeta_i^{(1)} + \ldots, \qquad \eta_{i_1} > \eta_{i_2} > \ldots$$

Вычислим коэффициенты H_{i_1} и η_{i_1}. После подстановки $\zeta = \zeta_i^{(0)} \equiv H_{i_1}|t^{\eta_{i_1}}|$ в левую часть обобщенного характеристического уравнения получим

$$S_0 = (\zeta_i^{(0)})^2 + c_1\zeta_i^{(0)} + c_2,$$

где $c_1 = -2(at+b) + \eta_{i_1}t^{-1}$, $c_2 = (at+b)^2 - a$. Первые члены разложения слагаемых S_0 имеют вид

$$H_{i_1}^2|t^{2\eta_{i_1}}|, -2aH_{i_1}|t^{\eta_{i_1}-1}|, a^2t^2.$$

Для вычисления коэффициента η_{i_1} применим алгебраический способ. Приравнивая показатели степеней t в каждой паре, получим уравнения

$$2\eta_{i_1} = \eta_{i_1} - 1, \quad 2\eta_{i_1} = 2, \quad \eta_{i_1} - 1 = 2.$$

Решив их и оценив решения, находим единственное возможное значение коэффициента: $\eta_{i_1} = 1$. Решая уравнение

$$H_{i_1}^2|t^{2\eta_{i_1}}| - 2aH_{i_1}|t^{\eta_{i_1}+1}| + a^2t^2 = 0$$

с учетом найденного значения η_{i_1}, находим $H_{i_1} = a, i = 1, 2$.

Таким образом, $\zeta_1^{(0)} = \zeta_2^{(0)} \equiv at$. Подставив $\zeta = \zeta_{1,2}^{(0)}$ в уравнение (2.55), убеждаемся, что эти функции не являются его решениями.

Вычислим коэффициенты H_{i_2} и η_{i_2}. Для этого в левую часть уравнения (2.55) подставим

$$\zeta = \zeta_i^{(1)} = \zeta_i^{(0)} + \Delta\zeta_i^{(1)} = H_{i_1} | t^{\eta_{i_1}} | + H_{i_2} | t^{\eta_{i_2}} | .$$

Получим выражение

$$S_0^{(1)} + S_\Delta^{(1)} \Delta\zeta_i^{(1)} + R^{(1)},$$

где

$$S_0^{(1)} = (-2b + t^{-1}) at + 2abt + b^2 - a \equiv b^2,$$

$$S_\Delta^{(1)} = b_1(t) + 2\zeta_i^{(0)} + \eta_{i_2} t^{-1} \equiv -2b + \eta_{i_2} t^{-1};$$

$$R^{(1)} = (\Delta\zeta_i^{(1)})^2 \equiv | t^{2\eta_{i_2}} |.$$

Теперь представим $S_0^{(1)}$ и $S_\Delta^{(1)}$ при $t \to \infty$ в виде

$$S_0^{(1)} = M_0 t^{\mu_0} + o(t^{\mu_0}) \equiv b^2 t^0,$$

$$S_\Delta^{(1)} = M_\Delta^{(1)} [t^{\mu_\Delta^{(1)}} + o(t^{\mu_\Delta^{(1)}})] \equiv -2bt^0 + o(t^0)$$

и по формулам (2.54) получим

$$\eta_{i_2} = \mu_0 - \mu_\Delta^{(i)} = 0, \qquad H_{i_2} = -\frac{M_0}{M_\Delta^{(1)}} = \frac{b}{2}, \qquad i = 1, 2.$$

Однако значение коэффициента H_{i_2} найдено неверно. Один из корней ОХУ, вычисленный согласно результату интегрирования уравнения (2.55), приведенному в [32], имеет вид $\zeta = at + b$. Следовательно, должно было бы быть $H_{i_2} = b$. Проверим условия (2.52). Очевидно, первое условие выполняется. Но второе условие нарушено, так как $\mu_R^{(1)} = 2\eta_{i_2} = 0 = \mu_0$. Таким образом, это второй особый случай.

Учитывая $R^{(1)}$, уравнение (2.53) заменим уравнением

$$M_0 u(t, \mu_0) + M_\Delta^{(1)}(\eta_{i_2}) H_{i_2} u(t, \mu_\Delta^{(1)}) u(t, \eta_{i_2}) +$$
$$+ M_R^{(1)}(H_{i_1}, \eta_{i_2}) u(t, \mu_R^{(1)}) = 0.$$

Так как для найденного значения η_{i_2} параметр α для всех слагаемых имеет равные значения, из этого уравнения следует

$$M_0 + M_\Delta^{(1)} H_{i_2} + M_R^{(1)}(H_{i_1}, \eta_{i_2}) = 0,$$

или, с учетом конкретных значений коэффициентов, $b^2 - 2bH_{i_2} + H_{i_2}^2 = 0$, откуда следует $H_{i_1} = b, i = 1, 2$. Таким образом,

$$\zeta_1^{(1)} = at + b, \qquad i = 1, 2.$$

Найденные функции $\zeta_{1,2}^{(1)}(t)$ – корни ОХУ в кольце R_{U_1}.

Пример 2.2. Рассмотрим уравнение

$$(p^3 + c | t^\sigma |) x = 0.$$

Положим, как в предыдущем примере, $c = \infty$, $u(t, \alpha) = | t^\alpha |$. В данном случае

$$S_0^{(1)} = (\zeta_i^{(0)})^3 + c_1 (\zeta_i^{(0)})^2 + c_2 \zeta_i^{(0)} + c_3, \tag{2.57}$$

где в выражениях (2.49), представляющих коэффициенты $c_j(t)$,

$$\gamma_{11} = -1, \qquad \gamma_{21} = -2, \qquad \gamma_{31} = \sigma. \tag{2.58}$$

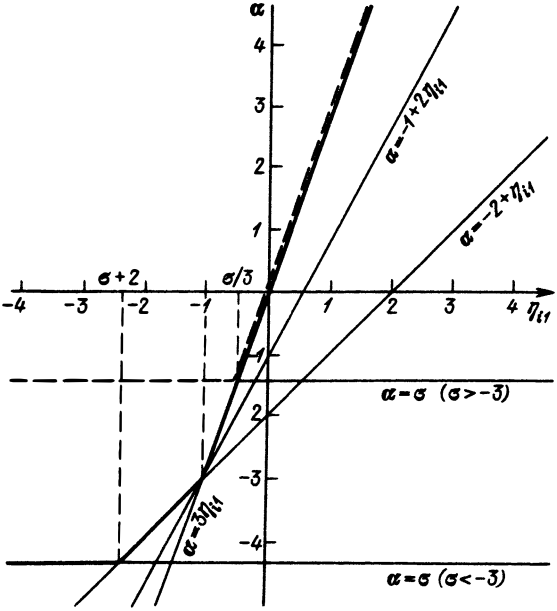


Рис. 2.4. Применение графоаналитического способа для определения коэффициентов η_{11}, η_{21} и η_{31}

Применим для определения коэффициента η_{i1} графоаналитический способ. Прямые, выражающие зависимости параметра α в выражениях (2.50) – (2.51) от η_{i1} изображены на графике, представленном на рис. 2.4. Верхняя огибающая семейства этих прямых при $\sigma \leqslant -3$ показана жирной сплошной линией, а при $\sigma \geqslant -3$ – жирной штриховой линией. Согласно графику, при $\sigma \leqslant -3$ имеются два возможных значения η_{i1}: $\eta_{i1} = \sigma + 2$ и $\eta_{i1} = -1$ (при $\sigma = -3$ они совпадают): при $\sigma \geqslant -3$ единственное возможное значение $\eta_{i1} = \sigma/3$.

Придавая коэффициенту η_{i1} найденные значения и в каждом случае приравнивая нулю сумму коэффициентов при функциях $u(t, \alpha)$ в выражениях (2.50) – (2.51), содержащих наибольшие значения параметра α, получим следующие уравнения для определения коэффициентов H_{i1}:

1) при $\sigma < -3$

а) $(\sigma + 2)(\sigma + 1) H_{i1} + c = 0$ для $\eta_{i1} = \sigma + 2$, (2.59)

б) $H_{i1}^3 - 3H_{i1}^2 + 2H_{i1} = 0$ для $\eta_{i1} = -1$; (2.60)

2) при $\sigma = -3$

$H_{i1}^3 - 3H_{i1}^2 + 2H_{i1} + c = 0$; (2.61)

3) при $\sigma > -3$

$H_{i1}^3 + c = 0$. (2.62)

Искомые значения коэффициента H_{i1} – ненулевые корни этих уравнений, причем при каждом значении σ находятся три пары H_{i1}, η_{i1}, т.е. все случаи – типовые.

Вычислим коэффициенты η_{i2} и H_{i2} для случая $\sigma > -3$. Так как

$$S_0^{(1)} = \sigma H_{i1} t^{\frac{\sigma}{3} - 1} \left(H_{i1} t^{\frac{\sigma}{3}} + \frac{\sigma - 3}{9} t^{-1} \right), \tag{2.63}$$

$$S_\Delta^{(1)} = H_{i1} t^{\frac{\sigma}{3}} \left[3H_{i1} t^{\frac{\sigma}{3}} + (\sigma + 3\eta_{i2}) t^{-1} \right] + \eta_{i2}(\eta_{i2} - 1) t^{-2}, \tag{2.64}$$

то в данном случае

$$\mu_0 = 2\sigma/3 - 1, \quad \mu_\Delta^{(1)} = 2\sigma/3. \tag{2.65}$$

По формулам (2.54) найдем

$$\eta_{i2} = -1, \quad H_{i2} = \sigma/3, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.66}$$

Если при вычислении коэффициентов разложения корней ОХУ в кольце вида R_{U_1} в ряды встречаются только типовые случаи, то возможны два исхода:

а) на конечном этапе вычисления точно находится корень;

б) получается ряд.

Во втором случае возникает задача нахождения корня, соответствующего ряду. Рассчитывать на аналитическое решение этой задачи, при котором корни выражаются аналитически через элементарные функции, в общем случае не приходится. Поэтому исходная задача заменяется задачами о наилучшей или достаточно точной аппроксимации корня.

Определим приближенное выражение для некоторого корня $\zeta_i(t)$ как частичную сумму ряда, т.е. в виде

$$\tilde{\zeta}_i(t) = \sum_{j=1}^{k} H_{ij} u(t, \eta_{ij}), \tag{2.67}$$

и погрешность аппроксимации в виде

$$r_k(t) = \tilde{\zeta}_i(t) - \zeta_i(t). \tag{2.68}$$

Применение аппроксимационной формулы (2.67) обосновано в случае ряда, сходящегося при $t \in I$. Если точность аппроксимации задана, то в одних случаях при выборе надлежащего числа членов разложения ее можно обеспечить на всем интервале I, в других случаях такой возможности нет. Сходящиеся ряды первого типа называются *равномерно сходящимися* [101]. Чтобы задача получения аппроксимационной формулы вида (2.67) с заданной на I точностью была обоснована, следует убедиться в равномерной сходимости ряда. Достаточные условия равномерной сходимости функциональных рядов см., например, в [101].

Для рассмотренных выше частных классов U_1 вопрос о сходимости получаемых рядов при определенных условиях сводится к вопросу о сходимости рядов Дирихле. Покажем это для варианта $u(t, \alpha) = | t^{\alpha} |$. Рассмотрим ряд (2.45) для этого класса функций $\dot{U}_1$ и, введя замену независимой переменной $t = \exp s$, запишем его в виде

$$H_{i1} \exp \eta_{i1} s + H_{i2} \exp \eta_{i2} s + \ldots \tag{2.69}$$

Будем считать, что число l членов ряда (2.69) с неотрицательными значениями коэффициентов η_{ij} конечно (в частном случае, возможно, $l = 0$). Тогда вопрос о сходимости исходного ряда сводится к вопросу о сходимости ряда

$$H_{i,\, l+1} \exp \eta_{i,\, l+1} s + H_{i,\, l+2} \exp \eta_{i,\, l+2} s + \ldots \tag{2.70}$$

к функции

$$\zeta_i(t) - \sum_{j=1}^{l} H_{ij} \exp \eta_{ij} s, \tag{2.71}$$

где $\zeta_i(t)$ – некоторый корень ОХУ в кольце R_{U_1}.

Ограничимся случаем

$$\lim_{j \to \infty} \eta_{ij} = -\infty. \tag{2.72}$$

При этом условии ряд (2.70) называется *рядом Дирихле* [119]. Достаточные условия равномерной сходимости ряда Дирихле см. в [101, 119]. Из равномерной сходимости ряда (2.70) не следует, что он сходится к функции (2.71). Однако сходимость к этой функции по-видимому, следует из процедуры построения ряда (2.45), согласно которой между величинами $S_0^{(m)}(t)$ и $S_0^{(m+1)}(t)$, получающимися в результате подстановок

$$\zeta_i^{(k-1)}(t) = \sum_{j=1}^{k} H_{ij} | t^{\eta_{ij}} |, \quad k = m, \quad m+1, \tag{2.73}$$

в левую часть уравнения (2.21) вместо неизвестной ζ имеет место соотношение

$$S_0^{(m+1)}(t) = o \, | S_0^{(m)}(t) | \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{2.74}$$

В случае расходящегося ряда существенно сужаются возможности получения приближенных формул для корня на базе учета конечного числа членов разложения. Однако если рассматриваемый ряд является асимптотическим разложением корня вблизи точки $t = c$, то при каждом k можно получить аппроксимирующие формулы заданной точности для некоторого примыкающего к точке a подынтервала интервала I. Проверка наличия этого свойства ряда является сложной задачей, которая здесь не рассматривается.

Если ряд является асимптотическим разложением функции $\zeta_i(t)$, то при применении аппроксимационной формулы (2.67), согласно определению асимптотического разложения,

$$\lim_{t \to c} \frac{r_k(t)}{\zeta_i(t)} = 0. \tag{2.75}$$

Это равенство показывает, что при любом k относительная погрешность стремится к нулю при $t \to c$.

Случай $m = 2$. Ограничимся случаем уравнения с периодическими коэффициентами. Приняв в качестве кольца R_b множество вещественных непрерывных периодических функций, определим кольцо R_ζ как кольцо R'_Ω комплекснозначных периодических функций непрерывных на I, за исключением, возможно дискретного множества точек. Будем искать аппроксимации корней ОХУ в кольце R'_Ω как элементы подкольца R_Ω, объединяющего все непрерывные на I функции.

Применив замену независимой переменной, перейдем к уравнению свободных колебаний, коэффициенты которого – периодические функции с периодом 2π, и, сохранив символ t для обозначения нового аргумента, представим их рядами вида *)

$$b_i(t) = B_{i0} + B'_{i1}\cos t + B''_{i1}\sin t + B'_{i2}\cos^2 t +$$
$$+ B''_{i2}\cos t \sin t + B'''_{i2}\sin^2 t + \ldots \tag{2.76}$$

или аналогичными конечными суммами. В аналогичном виде будем искать корни ОХУ:

$$\zeta_i(t) = H_{i0} + H'_{i1}\cos t + H''_{i1}\sin t + \ldots, \tag{2.77}$$

где $H_{i0}, H'_{i1}, H''_{i1}, \ldots$ – комплексные числа. Вычисление коэффициентов разложения (2.77) проводим в следующем порядке. На первом этапе в левую часть ОХУ подставим $\zeta_i = H_{i0}$. Представив коэффициенты этого уравнения их разложениями вида (2.76), выписываем сумму членов не содержащих тригонометрических функций. Обозначим эту сумму символом L_{i0}, коэффициент H_{i0} определяем из условия

$$L_{i0} = 0. \tag{2.78}$$

Степень этого уравнения совпадает с порядком уравнения (2.10), и поэтому получаем n значений коэффициента H_{i0}, причем k из них $(1 \leqslant k \leqslant n)$ – различные. Дальнейшие вычисления проводим только для корней ζ_i, соответствующих ненулевым значениям H_{i0}.

---

*) Эти ряды получаются из рядов Фурье, если выразить тригонометрические функции $\cos kt$ и $\sin kt$ $(k = 2, 3, \ldots)$ суммами вида $\sum\limits_{i,j} a_{kij}\cos^i t \sin^j t$, где $i + j = k$.

На втором этапе ищем коэффициенты H'_{i1} и H''_{i1}. Для этого в левую часть ОХУ подставляем

$$\zeta_i = H_{i0} + H'_{i1}\cos t + H''_{i1}\sin t \tag{2.79}$$

и выделяем из результата выражения вида $L'_{i1}\cos t$ и $L''_{i1}\sin t$, где L'_{i1} и L''_{i1} – функции от коэффициентов H'_{i1} и H''_{i1}. Искомые коэффициенты определяем из системы линейных алгебраических уравнений

$$L'_{i1} = 0, \qquad L''_{i1} = 0. \tag{2.80}$$

Если система (2.80) для данного фиксированного H_{i0} имеет решение, то получаем одну пару значений H'_{i1} и H''_{i1}. Особые случаи, когда система неразрешима, рассматривать не будем.

При выполнении вычислительных операций на втором и следующих этапах воздерживаемся от каких-либо тригонометрических преобразований. Например, недопустима замена суммы $\cos^2 t + \sin^2 t$ единицей. Только при этом условии коэффициенты рядов (2.79), вычисленные на предыдущих этапах, не изменятся. В частности, если бы на втором этапе мы воспользовались упомянутой в качестве недопустимого примера заменой, то нарушилось бы равенство (2.78) и первый этап расчета пришлось бы выполнить заново.

На следующих этапах в левую часть ОХУ подставляем частичные суммы рядов (2.76) и (2.79), заканчивающиеся вторыми, третьими и т.д. степенями тригонометрических функций, и находим коэффициенты при этих степенях тригонометрических функций в разложениях (2.79). Для этого придется решать системы трех, четырех и т.д. линейных алгебраических уравнений. Процедура расчета заканчивается либо получением точного корня, либо некоторого его приближенного выражения.

Пример 2.3. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b(1 - \epsilon \sin t)x = 0, \tag{2.81}$$

где $a > 0$, $b > 0$, $\epsilon > 0$. Оборвем ряд (2.79) на первых трех членах, т.е. будем искать аппроксимации корней $\tilde{\zeta}_i(t)$ в виде

$$\zeta_i(t) = H_{i0} + H'_{i1}\cos t + H''_{i1}\sin t, \tag{2.82}$$

ОХУ в данном случае имеет вид

$$\vartheta(\zeta) \equiv \dot{\zeta} + \zeta^2 + a\zeta + b - b\epsilon \sin t = 0. \tag{2.83}$$

Первый этап. В соответствии с уравнением (2.81) уравнение (2.78) имеет вид

$$H_{i0}^2 + aH_{i0} + b = 0. \tag{2.84}$$

Отсюда следует

$$H_{10} = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \quad H_{20} = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}. \tag{2.85}$$

Второй этап. Подстановка

$$\xi = H_{i0} + H'_{i1} \cos t + H''_{i1} \sin t \tag{2.86}$$

в левую часть уравнения (2.81) и приравнивание нулю суммы коэффициентов при первых степенях синусов и косинусов приводит к системам уравнений (2.80) вида:

а) для первого корня

$$H'_{11} \sqrt{a^2 - 4b} + H''_{11} = 0, \quad -H'_{11} + H''_{11} \sqrt{a^2 - 4b} = b\epsilon; \tag{2.87}$$

б) для второго корня

$$H'_{21} \sqrt{a^2 - 4b} - H''_{21} = 0, \quad H'_{21} + H''_{21} \sqrt{a^2 - 4b} = b\epsilon. \tag{2.88}$$

Решая эти системы, найдем

$$\begin{gathered} H'_{11} = -\frac{b\epsilon}{1 + a^2 - 4b}, \quad H''_{11} = \frac{b\epsilon\sqrt{a^2 - 4b}}{1 + a^2 - 4b}, \\ H'_{21} = \frac{b\epsilon}{1 + a^2 - 4b}, \quad H''_{21} = \frac{b\epsilon\sqrt{a^2 - 4b}}{1 + a^2 - 4b}. \end{gathered} \tag{2.89}$$

Процедуру расчета на третьем этапе см. в [74].

Случай $m = 3$. Ограничимся случаем функций $u(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ вида

$$u(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = |t^{\alpha_1}| \cos^{\alpha_3 - \alpha_2} \omega t \sin^{-\alpha_3} \omega t, \qquad \omega > 0, \tag{2.90}$$

и, приняв в качестве кольца R_b множество вещественных непрерывных функций, представимых (с соблюдением указанного в п. 2.1.5 гомоморфизма) рядами (2.13) или являющихся конечными суммами того же вида, определим кольцо R_ξ как кольцо $C'(I)$ комплексных функций, непрерывных за исключением, возможно, дискретного множества точек, представимых аналогичными рядами с комплексными коэффициентами или являющихся конечными суммами того же вида.

Объединяя способы построения рядов, представляющих корни ОХУ, для уравнения с коэффициентами из кольца R_{U_1} и уравнения с периодическими коэффициентами, нетрудно сформировать метод вычисления корней ОХУ в указанном кольце. С этим методом читатель может познакомиться в [73].

Уравнение свободных колебаний 2-го порядка. Изложенные выше методы вычисления корней ОХУ, в частности, могут быть применены в случае уравнения 2-го порядка. Эти методы являются итеративными и для уравнения низкого порядка просты в реализации. Помимо этих методов специально для уравнения 2-го порядка нетрудно определить и обосновать ряд других итеративных методов. Некоторые из них приведены в работах [66, 143]. В данном разделе мы дополнительно рассмотрим один способ приближенного вычисления корней ОХУ в кольце $C(I)$ непрерывных комплекснозначных функций для уравнения 2-го порядка, приводящий к аппроксимационной формуле, точность которой часто практически вполне приемлема.

Рассматривая обобщенное характеристическое уравнение для уравнения 2-го порядка

$$\zeta^2 + b_1\zeta + b_2 + \dot{\zeta} = 0, \tag{2.91}$$

как квадратное алгебраическое уравнение относительно ζ, получим

$$\zeta_{1,2} = -\frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - b_2 - \dot{\zeta}_{1,2}}. \tag{2.92}$$

Вводя функцию

$$D(t) \triangleq \frac{b_1^2}{4} + \frac{\dot{b}_1}{2} - b_2, \tag{2.93}$$

предполагая, что

$$C(t) \equiv \left| p\sqrt{\frac{b_1^2}{4} - b_2 - \dot{\zeta}_{1,2}} \right| \leqslant |D(t)|, \tag{2.94}$$

и принимая на этом основании

$$\sqrt{1 - \frac{(\dot{b}_1/2) + \dot{\zeta}_{1,2}}{D}} \approx 1 - \frac{(\dot{b}_1/2) + \dot{\zeta}_{1,2}}{2D}, \tag{2.95}$$

после несложных преобразований [12] получим

$$\tilde{\zeta}_{1,2} = -\frac{b_1}{2} - \frac{\dot{D}}{4D} \pm \sqrt{D}. \tag{2.96}$$

В частности, для стационарной системы формула (2.96) превращается в известную формулу для вычисления корней характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - b_2}. \tag{2.97}$$

2.1.11. Вычисление коэффициентов корневого уравнения. В случае уравнения свободных колебаний со счетно-дифференцируемыми коэффициентами для приближенного вычисления коэффициентов корневого уравнения можно применить описываемый ниже итерационный метод. В качестве исходного приближения коэффициентов c_i, $i = 1, \ldots, n$ в принципе могут быть приняты любые непрерывные функции $c_i^{(0)}(t)$. Конечно, от этого выбора зависит и сам факт сходимости процесса и скорость сходимости. Один из вариантов исходного приближения – коэффициенты уравнения свободных колебаний b_i.

Рекуррентный процесс вычисления аппроксимаций коэффициентов строим на базе систем дифференциальных уравнений относительно коэффициентов корневого уравнения (п. 2.1.8). Один из возможных вариантов, оправданный практикой его применения, заключается в следующем. Дифференциальные уравнения относительно коэффициентов корневого уравнения представляются в виде $c_i = b_i + d_i$, $i = 1, \ldots, n$ (п. 2.1.8), где d_i – некоторые функции коэффициентов $c_1, \ldots, c_n$ и их производных (в общем случае до $(n-1)$-й включительно), способ нахождения которых указан в п. 2.1.8. Расчет ведется по схеме

$$c_i^{(k+1)} = b_i + d_i^{(k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.98}$$

где $d_i^{(k)}$ получается из d_i при подстановке $c_j = c_j^{(k)}$, $j = 1, \ldots, n$. В случае $n = 2$ такая схема реализуется уравнениями

$$\begin{aligned} c_1^{(k+1)} &= b_1 + \frac{\dot{c}_1^{(k)} c_1^{(k)} - 2\dot{c}_2^{(k)}}{(c_1^{(k)})^2 - 4c_2^{(k)}}, \\ c_2^{(k+1)} &= b_2 + \frac{2\dot{c}_1^{(k)} c_2^{(k)} - c_1^{(k)} \dot{c}_2^{(k)}}{(c_1^{(k)})^2 - 4c_2^{(k)}}. \end{aligned} \tag{2.99}$$

Схема итерации при $n > 2$ аналогична. Простейший вариант исходной аппроксимации коэффициентов: $c_i^{(0)} = b_i$, $i = 1, \ldots, n$. Для многих классов уравнений этот итерационный процесс является сходящимся.

Процесс приближенного вычисления коэффициентов корневого уравнения в случае уравнения свободных колебаний с однотипными коэффициентами, принадлежащими данному кольцу R_b, в случаях колец вида $R^r_{U_m}$ (см. п. 2.1.5), может быть построен по тому же принципу поиска формул коэффициентов в виде рядов как элементов кольца R_ζ. При этом, так как можно ограничиться вещественными коэффициентами, то кольцо R_ζ можно заменить подкольцом, образованным его вещественными элементами т.е. кольцом $R^r_{U_m}$.

2.1.12. Вычисление фундаментальной системы решений уравнения свободных колебаний. Если найдена аппроксимация некоторой фундаментальной системы решений *обобщенного характеристического уравнения* $\tilde{\zeta}_1(t), \ldots, \tilde{\zeta}_n(t)$, и функции $\tilde{\zeta}_1(t), \ldots, \tilde{\zeta}_n(t)$ интегрируемы на I в смысле Римана, то соответствующая ей аппроксимация некоторой фундаментальной системы решений *уравнения свободных колебаний* при заданном начальном моменте времени $a \in I$ может быть принята в виде

$$\tilde{\varphi}_i(t) = \int_a^t \tilde{\zeta}_i(u)\,du, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

2.1.13. Понижение порядка уравнения свободных колебаний. Сложность приближенного вычисления решений уравнения свободных колебаний (УСК) увеличивается с ростом порядка уравнения. Поэтому если известны его частные решения, одно или более, то целесообразно учесть эти решения и свести задачу к вычислению приближенных решений линейного дифференциального уравнения более низкого порядка.

Пусть $n \geqslant 2$, $R_b = C^r(I)$ и известен один корень ОХУ $\zeta_1(t)$ в кольце $R_\zeta = C(I)$ (п. 2.1.5). Тогда замена переменной

$$x = \exp \int \zeta_1(t)\,dt \int y\,dt \tag{2.100}$$

переводит исходное УСК в уравнение

$$[p^{n-1} + c_1(t)p^{n-2} + \ldots + c_{n-1}(t)]\,y = 0, \tag{2.101}$$

коэффициенты которого находятся по формуле [57]

$$c_i = b_i + \sum_{i=1}^{k} \binom{n-k+i}{i} b_{k-i}(\zeta_1 + p)^{i-1}\zeta_1, \qquad b_0 = 1. \tag{2.102}$$

Решения уравнения (2.101) можно вычислить, рассчитывая корни его ОХУ. Если функция $\zeta_1(t)$ вещественна, то коэффициенты этого уравнения также вещественны и принадлежат тому же кольцу R_b, к которому принадлежат коэффициенты исходного уравнения: следовательно, его корни можно искать в том же кольце, в котором искались корни ОХУ для исходного уравнения.

Если функция $\zeta_1(t)$ комплекснозначна, то коэффициенты $c_1(t), \ldots, c_n(t)$ также комплекснозначны и принадлежат расширению кольца R_b, являющегося множеством комплекснозначных функций, вещественные и мнимые части которых принадлежат этому кольцу. К уравнению с коэффициентами такого вида может быть применен метод поиска корней ОХУ, применимый для исходного уравнения, т.е. его корни можно искать в том же кольце $R_\zeta = C(I)$.

Каждому корню ОХУ $\mu_i(t)$ для уравнения пониженного порядка соответствует семейство частных решений исходного уравнения вида

$$x_i(t) = \exp \int \zeta_1(t)\,dt \int \exp \int \mu_i(t)\,dt\,dt.$$

В случае комплекснозначного корня $\zeta_1(t)$ известен также корень

$\zeta_2(t) = \overline{\zeta}_1(t)$. Поэтому здесь возможно понижение порядка исходного уравнения сразу на два. С этой целью следует найти корень ОХУ $\mu_1(t)$ для уравнений (2.101), соответствующий корню $\zeta_2(t)$ ОХУ для исходного уравнения и, использовав найденный корень, понизить порядок уравнения (2.101).

Пусть $\zeta_{1,2}(t) = \alpha(t) \pm \sqrt{-1}\,\beta(t)$. Тогда очевидно, что

$$\zeta_2 = \zeta_1 - 2\beta\sqrt{-1}. \tag{2.103}$$

Но, с другой стороны,

$$\zeta_2 = \zeta_1 + \frac{\exp\int \mu_1 dt}{\int \exp\int \mu_1 dt\, dt}. \tag{2.104}$$

Сравнивая эти выражения, получим [57]

$$\mu_1 = \frac{\dot\beta}{\beta} - 2\beta\sqrt{-1}. \tag{2.105}$$

Используя этот корень для понижения порядка уравнения (2.101), получим искомое уравнение. Если $\beta \neq 0$ для всех значений t, то коэффициенты полученного уравнения — элементы того же кольца R_b.

§ 2.2. Внутренние характеристики односвязных систем с запаздыванием

Внутренние характеристики системы с запаздыванием, например векторно-матричное уравнение процесса, структурная схема, уравнение свободных колебаний, обобщенное характеристическое уравнение и система уравнений относительно канонических составляющих, могут быть получены путем обобщения одноименных характеристик системы конечного порядка.

2.2.1. Уравнение свободных колебаний. В частности, уравнение относительного выходного сигнала $(q_k \equiv d/du_k,\ u_k \stackrel{\Delta}{=} t - \tau_k(t))$

$$p^n x(t) + \sum_{i=1}^{n} [b_i(t) p^{n-i} x(t) + \sum_{k=1}^{r} c_{ik}(t)\, q_k^{n-i}\, x(t - \tau_k(t))] = 0 \tag{2.106}$$

с непрерывными вещественными коэффициентами $b_i(t)$ и $c_{ik}(t)$ и неотрицательными непрерывными вещественными функциями $\tau_k(t)$, удовлетворяющими условию, указанному в § 1.4 при рассмотрении системы уравнений (1.41), при условии, что при определении динамической системы в качестве множества U_I принято множество всех непрерывных функций с непрерывными $n - 1$ начальными производными, является исчерпывающей внутренней характеристикой. Это следует из того, что подстановка $x_i = p^{i-1}x$, $i = 1, \ldots, n$, переводит уравнение (2.106) в систему вида (1.41), которая в силу изложенного в § 1.4 является исчерпывающей внутренней характеристикой.

Уравнение (2.106) при выполнении указанных выше условий назовем уравнением свободных колебаний.

2.2.2. Система уравнений относительно канонических составляющих. Преобразуем уравнение (2.106) в систему уравнений согласно подстановке (2.38), где в качестве функций $\xi_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, примем определяющие функции для уравнения

$$[p^n + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)p^{n-i}]x(t) = 0. \tag{2.107}$$

Система уравнений, которой удовлетворяют канонические составляющие $z_1, \ldots, z_n$, получается в виде

$$\dot{z}_i(t) = \xi_i(t)z_i(t) + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(t)z_j(t) + \\ + \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} l_{ij}^{(k)}(t)z_j(t - \tau_k(t)), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.108}$$

где коэффициенты $h_{ij}(t)$ имеют вид, указанный в п. 2.1.9, а коэффициенты $l_{ij}^{(k)}(t)$ выражаются в виде

$$l_{ij}^{(k)}(t) = -\frac{w_{ni}(t)}{W(t)} \times \\ \times [\sum_{m=1}^{n-1} c_{mk}(t)[\xi(t - \tau_k(t)) + q_k]^{n-m-1}\xi_j(t - \tau_k(t)) + c_{nk}(t)]. \tag{2.109}$$

Смысл символов w_{ni} и W см. в пояснениях к формуле (2.39).

Система (2.108) равнозначна векторно-матричному уравнению

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + \sum_{k=1}^{r} L^{(k)}(t)z(t - \tau_k(t)), \tag{2.110}$$

где

$$z(\cdot) = [z_1(\cdot) \ldots z_n(\cdot)]^{\mathrm{T}},$$

$$A = \| \delta_{ij}\xi_i + h_{ij} \|_1^n, \qquad L^{(k)} = \| l_{ij}^{(k)} \|_1^n.$$

§ 2.3. Внутренние характеристики односвязных систем с распределенными параметрами

Если процессы в *одномерной* линейной системе с распределенными параметрами описываются одним линейным однородным дифференциальным уравнением с частными производными с функцией $x(t, l)$ в качестве неизвестной, сечение которой $x(t, l_1)$ на границе $l = l_1$ пространственной области определения системы описывает выходной сигнал, то такая система с распределенными параметрами является односвязной. Исчерпывающую систему ее внутренних характеристик составляют:

а) дифференциальное уравнение динамики системы (уравнение процесса в *свободной системе*, п. 1.5.1)

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{p} a_{ij}(t, l) \frac{\partial^i \partial^j x(t, l)}{\partial t^i \partial l^j} = 0, \tag{2.111}$$

где m и p – целые положительные числа;

б) граничные условия.

Граничные условия либо непосредственно определяют решение уравнения (2.111) или его производные по t и/или l на границах пространственной области определения системы (как функции t), либо связывают эти величины, подчиняя их алгебраическим уравнениям с коэффициентами, в общем случае зависящими от t. В силу линейности системы эти уравнения связи – линейные, однородные или неоднородные.

При рассмотрении внутренних характеристик функции, определяющие граничные значения решения и его производных, целесообразно положить равными нулю (если они не были таковыми), а неоднородные уравнения заменить однородными, т.е. рассматривать *однородные* граничные условия. При этом замененные нулевой константой функции можно рассматривать как функции, описывающие некоторые входные сигналы, и их влияние на процесс в системе учитывать в рамках теории вынужденных колебаний (подробнее см. ниже).

Если пространственная область определения системы неразрывна, т.е. представляет собой некоторый интервал (l_0, l_1), то однородные граничные условия могут быть представлены в виде

$$\sum_{s=0}^{1} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{r} b_{ijs}^{(k)}(t) \left.\frac{\partial^i \partial^j x(t, l)}{\partial t^i \partial l^j}\right|_{l = l_s} = 0, \qquad k = 1, \ldots, u, \tag{2.112}$$

где m, r и u – целые неотрицательные числа.

Аналогично могут быть охарактеризованы многие двумерные и трехмерные системы: линейными однородными дифференциальными уравнениями с частными производными и *однородными* граничными условиями. В частности, в случае двумерной системы с односвязной пространственной областью определения и замкнутой границей исчерпывающую систему внутренних характеристик составляют:

а) уравнение динамики свободной системы

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=0}^{v} a_{ij}(t, l_1, l_2) \frac{\partial^i \partial^j \partial^k x(t, l_1, l_2)}{\partial t^i \partial l_1^j \partial l_2^k} = 0; \tag{2.113}$$

б) граничные условия

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{r}\sum_{w=0}^{s}\left[b_{ijw}^{(k)}(t,l_1,l_2)\left.\frac{\partial^i\partial^j\partial^w x(t,l_1,l_2)}{\partial t^i\partial l_1^j\partial l_2^w}\right|_{(l_1,l_2)\in D}\right]=0,$$

$$k=1,\ldots,u, \tag{2.114}$$

где D – граница пространственной области определения системы. Такая система рассматривается как односвязная, если выходной сигнал – сосредоточенный – $u \doteq x(t, a, b)$, где a и b – заданные значения l_1 и l_2.

Комплекс граничных условий выясняется из анализа условий функционирования системы. С математической точки зрения, этот комплекс должен удовлетворять следующим условиям:

а) должен быть достаточным для полной определенности процесса при детерминированном задании начального состояния и известных уравнениях динамики свободной системы;

б) не должен переопределять задачу, т.е. не должен содержать несовместных условий и условий, несовместимых с информацией о начальном состоянии системы, и быть столь жестким, что задача превращается в неразрешимую.

Граничные условия целесообразно включить в систему уравнений процесса (дополнительно к уравнению динамики свободной системы). Это позволяет при изучении систем с распределенными параметрами не прибегать к дополнительным понятиям, помимо используемых при изучении систем более простых видов понятий: система, состояние, процесс, сигналы. В дальнейшем, рассматривая системы с распределенными параметрами, систему уравнений процесса будем понимать именно в этом смысле.

Чтобы система с распределенными параметрами была линейной, граничные условия должны быть также линейными, т.е. выражаться линейными уравнениями. При учете граничных условий в качестве внутренних характеристик системы всегда можно ограничиться однородными граничными условиями. При переходе от неоднородных граничных условий к однородным полагаются равными нулю свободные члены уравнений. Эти свободные члены удобно рассматривать как дополнительные входные сигналы и учитывать при изучении вынужденных колебаний системы. При этом принцип суперпозиции, изложенный в § 0.5, при пополнении множества входных сигналов упомянутыми выше дополнительными сохраняет силу. Дальнейшее изложение материала, относящегося к системам с распределенными параметрами, идет в рамках этой интерпретации.

В случае односвязной одномерной системы с распределенными параметрами имеется другой вариант описания системы, принципиально отличный от рассмотренного выше. Для ряда таких систем исчерпывающая внутренняя характеристика может быть получена в виде одного обыкновенного линейного однородного дифференциального уравнения бесконечного порядка, составленного относительного выходного сигнала, или системы таких уравнений. Метод получения этих уравнений для случая, когда свободная система является однородной (т.е. с параметрами, не зависящими от l), состоит в следующем.

Свободная система заменяется аппроксимирующей ее системой конечного порядка вида последовательного соединения n однотипных звеньев с одним или большим числом входных (и выходных) сигналов. Путем исключения промежуточных сигналов и учета граничных уловий находится уравнение или система уравнений относительно выходного сигнала системы. Заключительным этапом является определение предельного вида уравнений при $n \to \infty$.

Глава 3

ВНЕШНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ

В данной главе изучаются внешние характеристики односвязных линейных систем с одним входом и одним выходом; такими системами, в частности, могут быть системы с сосредоточенными параметрами, системы с запаздыванием, системы с распределенными параметрами. Система рассматриваемого класса называется *нормальной*, если выходной сигнал в процессе, вызванном мгновенным импульсом, приложенным в произвольный момент времени, описывается числовой функцией.

§ 3.1. Внешние характеристики односвязных детерминированных систем

3.1.1. Система уравнений процесса. *Система уравнений процесса,* т.е. система уравнений, описывающая вынужденные колебания, является исчерпывающей внешней характеристикой односвязной детерминированной системы. В случае *системы с сосредоточенными параметрами* такой системой уравнений может быть система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + b_i(t)y, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ — вещественные непрерывные функции, а одна из переменных x_i, пусть x_1, представляет выходной сигнал. Эта система может быть записана в виде векторно-матричного уравнения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)y, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{A}(t) = \| a_{ij}(t)\|_1^n$, $\mathbf{B}(t) = [b_1(t), \ldots, b_n(t)]^{\mathrm{T}}$. Как отмечалось в п. 2.1.2, всякая сложная односвязная система с сосредоточенными параметрами может быть представлена в виде соединения элементарных звеньев (интегрирующих, дифференцирующих, суммирующих и усилительных) и сложных звеньев, являющихся более простыми односвязными системами. Структурная схема системы с указанными входом и выходом совместно с заданными коэффициентами усиления усилительных звеньев и системами уравнений процессов в сложных звеньях, также является исчерпывающей внешней характеристикой системы. Систему уравнений процесса здесь составляют уравнения процесса в звеньях и уравнения их соединения, в которых в соответствии со структурной схемой указываются равенства входных сигналов одних звеньев выходным сигналам других.

Система с запаздыванием (§ 1.4) состоит из подсистем, являющихся звеньями указанных выше видов систем с сосредоточенными параметрами, и *звеньев запаздывания* – звеньев, описываемых уравнениями вида

$$x_{\text{вых}}(t) = x_{\text{вх}}(t - \tau),$$

где τ – время запаздывания, постоянное или зависящее от t. Систему уравнений процесса здесь также составляют уравнения звеньев и уравнения их соединений. При постоянном запаздывании эта система может быть сведена к системе *дифференциально-разностных уравнений* [8], при переменном – к системе *дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом* [113].

В случае *системы с распределенными параметрами* система уравнений процесса обычно формируется из дифференциальных уравнений в частных производных, характеризующих свойства свободной системы, и граничных условий, характеризующих связи, которым подчиняются сигналы системы на ее границах. Однако возможен также вариант формирования системы уравнений процесса, при котором она состоит из одного обыкновенного дифференциального уравнения (см. ниже) или системы таких уравнений.

3.1.2. Уравнение вынужденных колебаний. Если система уравнений процесса сводится к одному уравнению (дифференциальному, дифференциально-разностному или дифференциальному с отклоняющимся аргументом) с выходным сигналом в качестве неизвестной, и если это уравнение является исчерпывающей внешней характеристикой системы, то будем называть его *уравнением вынужденных колебаний.*

Уравнение вынужденных колебаний *нормальной системы с сосредоточенными параметрами* имеет вид

$$D(p, t)x = K(p, t)y, \tag{3.2}$$

где y и x – соответственно входной и выходной сигналы,

$$p \triangleq d/dt, \quad D(p, t) = p^n + b_1(t)p^{n-1} + \ldots + b_n(t),$$

$$K(p, t) = a_0(t)p^{n-1} + a_1(t)p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(t).$$

В дальнейшем ограничимся случаем, когда функции $b_1(t), \ldots, b_n(t)$ и $a_0(t), \ldots, a_{n-1}(t)$ – непрерывные. Уравнение вынужденных колебаний *системы с распределенными параметрами* имеет также вид (3.2), но в этом случае

$$D(p, t) = d_0(t) + d_1(t)p + d_2(t)p^2 + \dots,$$
$$K(p, t) = k_0(t) + k_1(t)p + k_2(t)p^2 + \dots,$$

причем число ненулевых слагаемых первого ряда не может быть конечным, а для второго ряда такая возможность допускается.

Рассматривая уравнения вынужденных колебаний этого вида, мы также ограничимся случаем непрерывных коэффициентов $d_i(t)$ и $k_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$.

Пример 3.1. Рассмотрим однопроводную линию электропередачи с активной нагрузкой, система уравнений процесса которой в виде системы

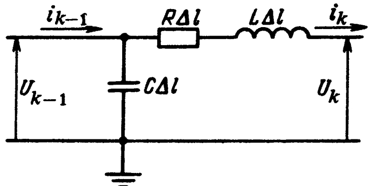


Рис. 3.1. Звено системы с сосредоточенными параметрами, аппроксимирующей однопроводную линию электропередачи

уравнений, включающей дифференциальные уравнения с частными производными, получена в § 1.4. Будем считать, что $R_н(t)$ – счетно дифференцируемая функция.

Сначала найдем уравнение вынужденных колебаний системы с сосредоточенными параметрами, аппроксимирующей исходную систему с распределенными параметрами. С этой целью разделим линию на n участков, заменив каждый k-й участок электрической цепью, представленной на рис. 3.1. На основании законов Кирхгофа получим

$$v_{k-1} = v_k + \Delta l(R + Lp)i_k, \quad i_{k-1} = i_k + C\Delta l p v_{k-1}.$$

Разрешая эту систему уравнений относительно v_{k-1} и i_{k-1}, получим

$$[v_{k-1}, i_{k-1}]^{\mathrm{T}} = A[v_k, i_k]^{\mathrm{T}}, \tag{3.3}$$

где

$$A \equiv \| a_{ij} \|_1^2, \ a_{11} = 1, \ a_{12} = \Delta l(R + lp) \equiv a\Delta l, \ a_{21} = C\Delta l p \equiv$$
$$\equiv b\Delta l; \ a_{22} = 1 + C(\Delta l)^2(R + Lp)p \equiv c(\Delta l).$$

Применяя равенство (3.3) к каждой паре соседних цепей вида (3.1), получим уравнение, связывающее векторы $[v_0, i_0]^{\mathrm{T}}$ и $[v_n, i_n]^{\mathrm{T}}$:

$$[v_0, i_0]^{\mathrm{T}} = A^n[v_n, i_n]^{\mathrm{T}}. \tag{3.4}$$

Учитывая в (3.4) граничные условия $v_0 = e(t)$, $v_n = R_н(t)i_н$, а также тождество $i_n = i_н$, получим

$$[e(t), i_0]^{\mathrm{T}} = A^n[R_н(t)i_н, i_н]^{\mathrm{T}}. \tag{3.5}$$

Оценивая элементы первой строки матрицы A^n при больших n с учетом равенства $n\Delta l = m$, где m – длина линии, и переходя к пределу при $n \to \infty$, из (3.5) получим

$$D(p, t) i_н = e(t), \tag{3.6}$$

где $D(p, t)$ – ряд с коэффициентами $d_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, являющимися функциональными рядами, члены которых – функции от t вида

$$d_i(t) = \delta_{i0} + \delta_{i1} \frac{m}{1!} + \delta_{i2} \frac{m^2}{2!} + \ldots,$$

где δ_{ij}, $j = 0, 1, 2, \ldots$, рационально выражаются через R, L, C, $R_н(t)$ и производные $R_н(t)$. Если эти ряды сходятся, то уравнение (3.5) – уравнение вынужденных колебаний рассматриваемой динамической системы. (См. также Дополнение при корректуре.)

3.1.3. Импульсная переходная функция.

Определение. *Импульсной переходной функцией* [95] (*весовой функцией* [50]) системы с сосредоточенными параметрами называется функция двух вещественных аргументов t и u, описывающая выходной сигнал в текущий момент времени t в процессе, развивающемся из основного состояния покоя под действием единичного импульса (см. п. 1.1.2), приложенного в момент u.

Это определение применимо без изменений ко всем односвязным непрерывным линейным системам.

В общем случае импульсная переходная функция может содержать составляющие типа дельта-функции и ее производных. В случае нормальной системы импульсная переходная функция – *числовая*. В дальнейшем в этом разделе, если не делается оговорок, рассматриваются нормальные системы.

В динамических системах реакция на то или иное возбуждение не возникает ранее момента возбуждения (§ 0.2). В частности, если процесс вызван импульсом, приложенным в момент u, то реакция системы на этот импульс отсутствует при $t < u$. Поэтому импульсная переходная функция обладает свойством $w(t, u) = 0$ при $t < u$. Это ее свойство называется *условием физической осуществимости системы.*

Пусть функции $y(t)$ и $w(t, u)$ определены и ограничены на любом замкнутом интервале $[a, b]$, принадлежащем открытому слева интервалу определения системы I; пусть, кроме того, функция $y(t)$ *интегрируема в смысле Римана* [40, с. 113] по t, а функция $w(t, u)$ – по u при любом $t \in [a, b]$. Тогда при условии, что $x(t) \equiv y(t) \equiv 0$ при $t < a$, имеет место соотношение [50, с. 202]

$$x(t) = \int_a^t w(t, u) y(u) du, \quad t \in [a, b],$$

определяющее при заданных $y(t)$ и $w(t, u)$ выходной сигнал на $[a, b]$. Следовательно, если рассматриваются входные сигналы, описываемые функциями $y(t)$, имеющими указанное выше свойство, и система с импульсной переходной функцией, обладающей указанным выше свойством, то импульсная переходная функция является исчерпывающей внешней характеристикой системы.

Если система внешне стационарна, то значения импульсной переходной функции вполне определяются значениями разности аргументов t и u. Это позволяет представить импульсную переходную функцию внешне стационарной системы как функцию одного аргу-

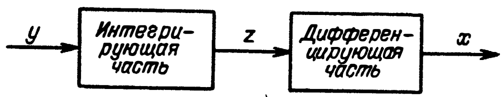


Рис. 3.2. Представление системы с сосредоточенными параметрами в виде последовательного соединения двух подсистем

мента $\tau \triangleq t - u$. В случае системы, не обладающей внешней стационарностью, такое упрощение исключается.

Не сокращая практически области применения понятия импульсной переходной функции, будем считать ее далее ограниченной на любых конечных интервалах аргументов t и u.

Импульсная переходная функция системы с сосредоточенными параметрами. *Представление системы в виде последовательного соединения двух подсистем.* Если процессы в системе с сосредоточенными параметрами описываются уравнением (3.2), то ее можно представить в виде последовательного соединения двух подсистем: интегрирующей части и дифференцирующей части (рис. 3.2). *Интегрирующей частью* называется подсистема, процессы в которой описываются уравнением

$$D(p, t)z = y, \tag{3.7}$$

где y — входной сигнал, z — выходной сигнал.

Дифференцирующей частью называется подсистема, преобразующая выходной сигнал z интегрирующей части в выходной сигнал полной системы x. Если коэффициенты $b_1(t)$, ..., $b_n(t)$ $(n - 1)$-кратно дифференцируемы, то уравнение вынужденных колебаний этой подсистемы можно получить, сопоставляя уравнения (3.2) и (3.7). Это уравнение имеет порядок старшей производной в правой части равный или превышающий порядок старшей производной в левой части, и поэтому описываемая им подсистема не является нормальной системой.

Импульсная переходная функция $g(t, u)$ интегрирующей части системы. По определению, импульсная переходная функция $g(t, u)$ интегрирующей части системы является решением уравнения (3.7) при начальных условиях

$$(p^i z)_{t=u-0} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

В силу того, что при $t > u$ входной сигнал отсутствует, процесс при $t > u$ имеет характер свободных колебаний. Роль импульса сводится к мгновенному изменению в момент u состояния системы. Новое состояние соответствует начальным условиям [67]

$$(p^i z)_{t=u+0} = 0,\ i = 0, 1, \dots, n-1,\ (p^{n-1} z)_{t=u+0} = 1. \tag{3.8}$$

Так как при $t > u$ процесс может рассматриваться как свободные колебания, то функция $g(t, u)$ при $t > u$ может рассматриваться как решение уравнения свободных колебаний

$$D(p, t)x = 0. \tag{3.9}$$

Это является мостом, позволяющим свести задачу вычисления $g(t, u)$ к задаче интегрирования уравнения (3.9). Не касаясь здесь методов решения последней задачи и предположив, что нам удалось найти фундаментальную систему решений уравнения (3.9)

$$\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), \tag{3.10}$$

найдем формулу, выражающую связь функции $g(t, u)$ с элементами этой фундаментальной системы. Очевидно, как частное решение уравнения (3.9) функцию $g(t, u)$ можно представить в виде

$$g(t, u) = C_1(u)\varphi_1(t) + \dots + C_n(u)\varphi_n(t), \tag{3.11}$$

где $C_1(u), \dots, C_n(u)$ – некоторые комплекснозначные функции u. Продифференцировав $n-1$ раз уравнение (3.11) по t, получим

$$p^i g(t, u) = C_1(u)p^i\varphi_1(t) + \dots + C_n(u)p^i\varphi_n(t), \tag{3.12}$$

$$i = 1, \dots, n-1.$$

Полагая $t = u + 0$ и учитывая начальные условия (3.8), для определения функций $C_1(u), \dots, C_n(u)$ получим систему линейных алгебраических уравнений

$$C_1(u)q^i\varphi_1(u+0) + \dots + C_n(u)q^i\varphi_n(u+0),$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1, \tag{3.13}$$

где $q \triangleq d/du$, $q^0 \triangleq 1$. Решая эту систему, найдем

$$C_1(u) = \frac{A_{ni}(u)}{\Delta(u)}, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{3.14}$$

где

$$\Delta(u) = \det \| d_{ij}(u) \|_1^n, \quad d_{ij}(u) = q^{i-1}\varphi_j(u+0), \tag{3.15}$$

A_{ni} – алгебраическое дополнение элемента n-й строки i-го столбца определителя Δ.

Подставив $C_1, \ldots, C_n$ из (3.14) в (3.11), получим

$$g(t, u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{ni}(u)\varphi_i(t)}{\Delta(u)}, \tag{3.16}$$

или

$$g(t, u) = \frac{1}{\Delta(u)} \det \begin{bmatrix} \varphi_1(u+0) & \ldots & \varphi_n(u+0) \\ q\varphi_1(u+0) & \ldots & q\varphi_n(u+0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q^{n-2}\varphi_1(u+0) & \ldots & q^{n-2}\varphi_n(u+0) \\ \varphi_1(t) & \ldots & \varphi_n(t) \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

Пусть решения (3.10) определены при $t \in I$ и выражены в виде

$$\varphi_i(t) = \exp \int_{t_0}^{t} \zeta_i(v)\,dv, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.18}$$

где $\zeta_i(t)$ – непрерывные решения ОХУ, t_0 – левая граница интервала I. С учетом (3.18) определитель (3.15) принимает вид

$$\Delta(u) = \varphi_1(u) \ldots \varphi_n(u) W(u), \tag{3.19}$$

где

$$W(u) = \det [\eta_1(u) \ldots \eta_n(u)], \tag{3.20}$$

$$\eta_i(u) = [1\ \zeta_i(u) \ldots (\zeta_i(u) + q)^{n-2}\zeta_i(u)]^{\mathrm{T}},$$

$$i = 1, \ldots, n. \tag{3.21}$$

В результате аналогичного преобразования второй сомножитель в правой части равенства (3.17) принимает вид

$$\varphi_1(u) \ldots \varphi_n(u) W_1(u), \tag{3.22}$$

где

$$W_1(t, u) = \det [\boldsymbol{\rho}_1(t, u) \ldots \boldsymbol{\rho}_n(t, u)], \tag{3.23}$$

$$\boldsymbol{\rho}_i(t, u) = [1\ \zeta_i(u) \ldots (\zeta_i(u) + q)^{n-3}\zeta_i(u) \exp \int_u^t \zeta(v)\,dv]^{\mathrm{T}},$$

$$i = 1, \ldots, n. \tag{3.24}$$

Учитывая вид (3.19) и (3.22) определителей в (3.17), получим

$$g(t, u) = W_1(t, u)/ W(u). \tag{3.25}$$

Формула (3.25) имеет смысл при $n \geqslant 2$. При $n = 1$

$$g(t, u) = \exp \int_u^t \zeta_1(v)dv, \tag{3.26}$$

где $\zeta_1(t)$ – решение ОХУ (для $n = 1$ – единственное).

Раскрыв в (3.25) определитель $W_1(t, u)$ по элементам последней строки, найдем

$$g(t, u) = \sum_{i=1}^{n} D_i(u) \exp \int_u^t \zeta_i(v)dv, \tag{3.27}$$

где $D_i(u) = w_{ni}(u)/W(u)$, а $w_{ni}(u)$ – алгебраическое дополнение элемента n-й строки i-го столбца определителя $W(u)$.

Пример 3.2. Для уравнения вынужденных колебаний

$$\dot{x} + \frac{2}{2+t} x = y, \qquad \zeta_1(t) = -\frac{2}{2+t} \tag{3.28}$$

по формуле (3.26) получим

$$g(t, u) = \exp \int_u^t \left(-\frac{2}{2+v}\right) dv = \left(\frac{2+u}{2+t}\right)^2.$$

Пример 3.3. Рассмотрим на интервале $(0, \infty)$ уравнение вынужденных колебаний

$$\ddot{x} + \frac{2}{t+10}\dot{x} + \frac{2}{5}x = y. \tag{3.29}$$

Соответствующее ему ОХУ имеет вид

$$\zeta^2 + \dot{\zeta} + \frac{2}{t+10}\zeta + \frac{2}{5} = 0. \tag{3.30}$$

Легко проверить, что функции

$$\zeta_{1,2}(t) = \pm \frac{2\sqrt{-1}}{5} - \frac{1}{t+10} \tag{3.31}$$

являются его решениями. Отсюда следует

$$\exp \int_u^t \zeta_{1,2}(v)dv = \frac{u+10}{t+10} \exp\left[\pm \frac{2(t-u)\sqrt{-1}}{5}\right]. \tag{3.32}$$

Применив формулу (3.27), получим

$$g(t, u) = \frac{5(u+10)}{2(t+10)} \sin \frac{2(t-u)}{5}. \tag{3.33}$$

Импульсная переходная функция $w(t, u)$ полной системы. Если импульсная переходная функция интегрирующей части системы найдена, то для того, чтобы найти импульсную переходную функцию полной системы, принципиально возможен такой путь: найти импульсную переходную функцию дифференцирующей части системы, а затем перейти к импульсной переходной функции полной системы, определив ее как импульсную переходную функцию последовательно соединенных звеньев (п. 3.3.2). Однако здесь сразу же возникают трудности, так как порядок старшей производной в правой части уравнения дифференцирующей части системы не ниже порядка старшей производной в его левой части. Поэтому при возбуждении дифференцирующей части импульсом в выходном сигнале появятся составляющие, описываемые с помощью дельта-функции и/или ее производных. Следовательно, импульсная переходная функция дифференцирующей части системы является обобщенной функцией (дифференцирующая часть системы не является нормальной системой с сосредоточенными параметрами). Это требует привлечения для решения рассматриваемой задачи математического аппарата теории обобщенных функций.

Из изложенного следует, что импульсная переходная функция является удобной характеристикой только для ее интегрирующей части: удобную характеристику дифференцирующей части следует искать среди характеристик другого вида. При этом очевидна целесообразность следующих двух условий:

а) искомая характеристика является математическим описанием выходного сигнала, вызванного некоторым входным сигналом;

б) входной сигнал должен быть таким, чтобы выходной сигнал описывался числовой функцией (а не обобщенной).

Если коэффициенты $a_{i-1}(t)$ и $b_i(t)$, $i = 1, ..., n$, $n - 1$ – кратно дифференцируемы, что предполагается в дальнейшем до конца гл. 3, то этим условиям удовлетворяет функция, описывающая выходной сигнал дифференцирующей части в процессе, вызванном входным сигналом, описываемым импульсной переходной функцией $g(t, u)$ интегрирующей части. Очевидно, эта характеристика также является функцией двух аргументов (t и u) и равна нулю при $t < u$; при $t > u$ она имеет вид [74, с. 245]

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j}^{n-1} (-1)^i \binom{i}{j} \frac{d^{i-j} a_{n-1-i}(u)}{du^{i-j}} \frac{\partial^j g(t, u)}{\partial u^j}. \qquad (3.34)$$

Так как эта характеристика описывает выходной сигнал подсистемы, возбужденной входным сигналом, описываемым импульсной переходной функцией интегрирующей части системы, т.е. сигналом, возникающим на выходе интегрирующей части при возбуждении ее единичным импульсом, то она совпадает с импульсной переходной функцией полной системы. Таким образом, для $t > u$ справедливо равенство

$$w(t, u) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j}^{n-1} (-1)^i \binom{i}{j} \frac{d^{i-j} a_{n-1-i}(u)}{du^{i-j}} \cdot \frac{\partial^j g(t, u)}{\partial u^j}. \quad (3.35)$$

Следовательно, если известна импульсная переходная функция интегрирующей части системы, то импульсную переходную функцию полной системы можно вычислить по формуле (3.35).

В формуле (3.35) участвуют $(n-1-i)$-е производные коэффициентов $a_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Поэтому указанное выше условие дифференцируемости этих коэффициентов является необходимым. Требуемая дифференцируемость коэффициентов $b_i(t)$ обусловлена тем, что функция $g(t, u)$ как функция от u является решением дифференциального уравнения

$$(-1)^n q^n x^* + (-1)^{n-1} q^{n-1} [b_1(u) x^*] + \ldots + b_n(u) x^* = \delta(t-u),$$

$$q \triangleq \frac{d}{du}, \quad (3.36)$$

удовлетворяющим условию $x^* = 0$ при $u > t$ [95, с. 286]. Приведенное выше условие дифференцируемости этих коэффициентов обеспечивает непрерывность коэффициентов уравнения (3.36) и, следовательно, существование фигурирующих в формуле (3.35) производных функции $g(t, u)$.

Импульсная переходная функция полной системы при $t > u$ является решением уравнения свободных колебаний, так как импульс оказывает воздействие на систему только в момент его приложения. Роль импульса сводится к заданию начального состояния, из которого развиваются эти колебания. Это свойство импульсной переходной функции мы отмечали и использовали выше при рассмотрении импульсной переходной функции интегрирующей части системы. Там были найдены начальные условия, которым удовлетворяет функция $g(t, u)$ как решение уравнения свободных колебаний (3.9). Здесь приведем решение той же задачи для полной системы.

Эта задача решается просто: функции, представляющие начальные данные решения

$$\left. \frac{\partial^k w(t, u)}{\partial t^k} \right|_{t=u+0} \triangleq w_k(u) \quad (3.37)$$

легко находятся по формуле (3.35) с учетом начальных условий для функции $g(t, u)$, представленной рядом (3.52). Таким образом, импульсная переходная функция $w(t, u)$ при $t > u$ есть частное решение уравнения (3.9), определенное начальными данными (3.37).

Пример 3.4. Найдем начальные условия, которым удовлетворяет импульсная переходная функция как решение уравнения (3.9) в случае системы, уравнение вынужденных колебаний которой имеет вид

$$\ddot{x} + b_1(t)\dot{x} + b_2(t)x = a_0(t)\dot{y} + a_1(t)y. \tag{3.38}$$

Учтя, что функция $g(t, u)$ вблизи $\tau = 0$ представима рядом (3.52) и применив формулу (3.35), найдем

$$\begin{aligned} &w_0(u) = a_0(u), \\ &w_1(u) = a_0(u)b_1(u) + a_1(u) - \dot{a}_0(u). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Пусть $\zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t)$ – фундаментальная система решений ОХУ. Выразим импульсную переходную функцию $w(t, u)$ через соответствующую ей фундаментальную систему решений уравнения свободных колебаний (см. формулы (3.18)). Такая задача была решена выше для импульсной переходной функции $g(t, u)$ интегрирующей части системы. Полученное решение: формула (3.27). Теперь найдем аналогичную формулу для функции $w(t, u)$, которую будем искать в виде

$$w(t, u) = \sum_{i=1}^{n} E_i(u) \exp \int_u^t \zeta_i(v) dv. \tag{3.40}$$

Система уравнений для определения функций $E_i(u)$ получается в результате учета начальных данных (3.37) и имеет вид

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} E_i(u) = w_0(u), \\ &\sum_{i=1}^{n} E_i(u)\zeta_i(u) = w_1(u), \\ &\sum_{i=1}^{n} E_i(u)[\zeta_i(u) + q]\zeta_i(u) = w_2(u), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\sum_{i=1}^{n} E_i(u)[\zeta_i(u) + q]^{n-2}\zeta_i(u) = w_{n-1}(u), \quad q = \frac{d}{du}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Отсюда

$$E_i(u) = W_i(u)/W(u), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3.42}$$

где $W_i(u)$ – определитель, получающийся из определителя $W(u)$

заменой i-го столбца столбцом, состоящим из коэффициентов правой части системы (3.41).

Пример 3.5. Рассмотрим систему, уравнение вынужденных колебаний которой имеет вид

$$\ddot{x} + b_1(t)\dot{x} + b_2(t)x = a_1(t)y. \tag{3.43}$$

В данном случае $w_0(u) = 0$ (пример 3.4). Поэтому в соответствии с формулами (3.42) найдем

$$E_1(u) = -E_2(u) = \frac{w_1(u)}{\zeta_2(u) - \zeta_1(u)} = \frac{a_1(u)}{\zeta_2(u) - \zeta_1(u)}. \tag{3.44}$$

Согласно (3.40), для импульсной переходной функции получим

$$w(t, u) = \frac{a_1(u)[\exp \int\limits_u^t \zeta_1(v)dv - \exp \int\limits_u^t \zeta_2(v)dv]}{\zeta_2(u) - \zeta_1(u)}. \tag{3.45}$$

Степенные разложения импульсных переходных функций. Считая, что исходная информация о системе представлена уравнением (3.2), рассмотрим несколько вариантов разложения импульсных переходных функций интегрирующей части системы и полной системы в степенные ряды. Эти разложения не представляют практического интереса для построения аналитических аппроксимационных формул импульсных переходных функций в виде частичных сумм рядов, так как для хорошей аппроксимации требуется учет большого числа членов разложения, что связано с большой сложностью формул, а область значений аргументов, в которой аппроксимации можно доверять, ограничена областью сходимости разложения. Однако они полезны для формирования методов приближенного вычисления других характеристик системы, например, передаточной функции (п. 3.1.4).

Сначала найдем разложения функции $g(t, u)$, а затем, используя (3.35), получим разложения для $w(t, u)$. Пусть I — открытый интервал и коэффициенты $b_i(t)$, $i = 1, ..., n$, уравнения (3.2) являются сечениями для $z = t$ аналитических функций $b_i(z)$, определенных в односвязной области G z-плоскости, включающей интервал I. Тогда, представив уравнение (3.2) в виде векторно-матричного уравнения (3.1), в котором $\mathbf{x} = [x, px, ..., p^{n-1}x]^{\mathrm{T}}$, распространив это уравнение на область G и воспользовавшись известным результатом из теории линейных дифференциальных уравнений в комплексной области с аналитическими коэффициентами [36, с. 102], найдем, что это уравнение имеет единственное аналитическое решение $\varphi(z)$, удовлетворяющее условию $\boldsymbol{\varphi}(z) = [0, ...$ $..., 0, 1]^{\mathrm{T}}$. Очевидно $\varphi_1(z) = g(t, u)$ при $z = t > u$. Отсюда следует, что при любом $u \in I$ функцию $g(t, u)$ можно разложить на некотором конечном интервале $(u, T(u))$ в сходящийся ряд Тейлора

$$g(t, u) = g_0(u) + g_1(u)\frac{\tau}{i\,!} + \ldots + g_i(u)\frac{\tau^i}{i\,!} + \ldots, \tag{3.46}$$

где

$$\tau = t - u, \quad g_i(u) = p^i g(t, u)\,|_{t=u+0}, \quad i = 0, 1, 2 \ldots$$

Согласно начальным условиям (3.8),

$$g_i(u) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-2, \quad g_{n-1}(u) = 1. \tag{3.47}$$

При $i \geqslant n$ коэффициенты $g_i(u)$ рационально выражаются через коэффициенты и производные коэффициентов уравнения (3.2) по формулам [74, с. 241–243]

$$g_i = -b_{1,i-n},$$

$$b_{j,m+1} = \dot{b}_{jm} + b_{j+1,m} - b_{1m}b_{j0}, \quad m \geqslant 0,$$

$$b_{j0} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$b_{j0} = 0, \quad j > n.$$

Разложим теперь функцию $g(t, u)$ в ряд по степеням τ при данном значении t. Для этого, учтя (3.47) и произведя в (3.46) подстановку $u = t - \tau$, перепишем (3.46) в виде

$$g(t, u) \equiv g(t, t-\tau) = \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{i=n}^{\infty} g_i(t-\tau)\frac{\tau^i}{i\,!}. \tag{3.48}$$

Разложив коэффициенты $g_i(t - \tau)$ по степеням τ в ряды Тейлора, получим

$$g(t, u) \sim \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{i=n}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} p^\nu g_i(t)\frac{(-1)^\nu \tau^i}{\nu\,!\,i\,!}. \tag{3.49}$$

Для выяснения условий сходимости ряда (3.49) рассмотрим оператор, сопряженный с исходным оператором $D(p, t)$ [96, с. 172],

$$D^*(p, t) \triangleq c_0(t)p^n + c_1(t)p^{n-1} + \ldots + c_n(t),$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$c_0(t) = (-1)^n,$$

$$c_k(t) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{n-i}\binom{n-1}{k-1}p^{k-i}b_i(t),$$

$$b_0(t) = 1, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Пусть функции $c_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, являются сечениями для $t = z$ функций $c_i(z)$ – аналитических в области G согласно формулам построения этих функций. Тогда, повторяя рассуждения, относящиеся к уравнению (3.2) (см. выше), найдем, что уравнение (3.1), соответствующее уравнению $D^*(p, t)x = 0$, имеет единственное аналитическое решение $\varphi^*(z)$, удовлетворяющее условию

$$\varphi^*(u) = [0, \ldots, 0, 1]^{\mathrm{T}}.$$

Как известно [96], при $y = \delta(t-u)$, $t < u$, уравнение

$$D^*(p, t)x = y.$$

имеет решение $g^*(t, u) = g(u, t)$. При $z = t < u$

$$g^*(t, u) = \varphi_1^*(z).$$

Следовательно, при любом $t \in I$ ряд в правой части (3.49) сходится к функции $g(t, u)$ на некотором конечном интервале $(0, T^*(t))$ изменения τ. Заменив суммирование по i суммированием по $s = i + \nu$ и учтя неравенство $s - \nu \geqslant n$, приведем (3.49) к виду

$$g(t, u) = \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{s=n}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{s-n} \frac{(-1)^{\nu}\tau^{s}}{\nu!(s-\nu)!} p^{\nu} g_{s-\nu}(t). \tag{3.50}$$

Обозначив

$$\hat{g}_s(t) = \sum_{\nu=0}^{s-n} (-1)^{\nu} \binom{s}{\nu} p^{\nu} g_{s-\nu}(t), \tag{3.51}$$

формулу (3.50) перепишем в виде

$$g(t, u) = \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{s=n}^{\infty} \hat{g}_s(t) \frac{\tau^s}{s!}. \tag{3.52}$$

Коэффициенты $\hat{g}_s$ начальных членов разложения в случаях уравнения 1-го, 2-го, 3-го и 4-го порядка приведены в [67].

Перейдем к импульсной переходной функции полной системы. Пусть $a_0(t), \ldots, a_{n-1}(t)$ – сечения аналитических функций с упомянутой выше областью определения G. Тогда, считая $\tau = |z|$, $t + z \in G$, выражая в (3.35) функцию $g(t, u)$ по формуле (3.52), а коэффициенты $a_{n-1-i}(u)$ – по формуле

$$a_{n-1-i}(u) \equiv a_{n-1-i}(t-\tau) = \sum_{r=1}^{\infty} \hat{a}_{n-1-i,r}(t) \frac{\tau^r}{r!}, \tag{3.53}$$

где, очевидно, $\hat{a}_{n-1-i,r}(t) = (-1)^r p^r a_{n-1-i}(t)$, $\tau = t - u$; осуществляя указанные в правой части формулы (3.35) операции и объединяя члены с одинаковыми степенями τ, получим

$$w(t,u) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \hat{w}_k(t)\,\frac{\tau^k}{k!} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j}^{n-1} (-1)^i(-1)^{i-j}\sum_{r=1}^{\infty} \hat{a}_{n-1-i,r} \times$$

$$\times \frac{\tau^{r-i+j}}{(r-i+j)}\,(-1)^j \sum_{l=n-1}^{\infty} g_l(t)\,\frac{\tau^{l-j}}{(l-j)!}. \qquad (3.54)$$

При фиксированных i, j, l, рассматривая l-й член последней суммы, следует учесть только $r = (k - l + i)$-й член предпоследней суммы. Поэтому

$$\hat{w}_k(t) = k!\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j}\sum_{l=n-1}^{k+j}\frac{\hat{a}_{n-1-i,k-l+i}\hat{g}_l(t)}{(l-j)!(k-l+j)!}.$$

Это равенство можно записать также в виде

$$\hat{w}_k(t) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j}^{n-1}\binom{i}{j}\sum_{l=n-1}^{k+j}\binom{k}{l-j}\hat{a}_{n-1-i,\,k-l+i}(t)\hat{g}_l(t). \qquad (3.55)$$

Импульсная переходная функция периодической системы [141]. Импульсная переходная функция периодической системы обладает свойством $w(t + \nu T, u) = w(t, u - \nu T)$, где T – минимальный общий период изменения коэффициентов уравнения вынужденных колебаний, ν – произвольное целое число. Полагая $b(t,\tau) \triangleq w(t, t-\tau)$, из этого равенства получим

$$b(t,\tau) = b(t + \nu T, \tau). \qquad (3.56)$$

Таким образом, функция $b(t,\tau)$ является периодической относительно t с периодом T. Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$b(t,\tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} B_\nu(t)\exp i\nu\omega t, \qquad (3.57)$$

где $\omega = 2\pi/T$,

$$B_\nu(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T b(t,\tau)\exp(-i\nu\omega t)dt. \qquad (3.58)$$

Методы вычисления импульсных переходных функций. Импульсная переходная функция системы в общем случае не выражается аналитически через коэффициенты уравнения вынужденных колебаний. Поэтому все известные аналитические методы ее вычисления направлены на поиск ее аппроксимации $\tilde{w}(t,u)$. Если известна аппроксимация фундаментальной системы корней ОХУ в том или ином кольце R_ζ

$$\tilde{\zeta}_1(t), \ldots, \tilde{\zeta}_n(t), \tag{3.59}$$

то функция $\tilde{w}(t, u)$ может быть вычислена по формуле

$$\tilde{w}(t, u) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{E}_i(u) \exp \int_u^t \tilde{\zeta}_i(v)\,dv, \tag{3.60}$$

которая получается из формулы (3.40), если функции $\zeta_i(t)$ под знаками интегралов и при вычислении $E_i(u)$ заменить их аппроксимациями $\tilde{\zeta}_i(t)$.

Известны также другие аналитические методы вычисления аппроксимаций импульсных переходных функций $w(t,u)$ и $g(t,u)$. Если исходная информация о системе дана в виде уравнения (3.1), в котором первая координата x_1 вектора x – выходной сигнал, то, рассматривая систему как многосвязную с выходными сигналами $x_1, \ldots, x_n$ и применяя для приближенного вычисления *импульсной переходной матрицы* $\mathbf{w}(t,u) = [w_{11}(t,u), \ldots, w_{n1}(t,u)]^{\mathrm{T}}$ (см. ниже п. 4.5.1) *метод Абгаряна* [1, с. 269–277], аппроксимацию импульсной переходной функции исходной системы можно найти как первый элемент получаемого по этому методу аппроксимации вектора $\mathbf{w}(t,u)$. Методы приближенного вычисления импульсных переходных функций для случаев полиномиальных и периодических коэффициентов уравнения (3.9) см. в [67, 117] метод для случая периодических коэффициентов уравнения (3.2) см. в [141].

П р и м е р 3.6. В п. 2.1.10 были найдены следующие аппроксимации корней ОХУ в кольце $C(I)$ для системы второго порядка:

$$\tilde{\zeta}_{1,2} = -\frac{b_1}{2} - \frac{\dot{D}}{4D} \pm \sqrt{D}, \tag{3.61}$$

где $D = b_1^2/4 + \dot{b}_1/2 - b_2$. Подставив (3.61) в (3.27), получим следующие аппроксимации функции $g(t,u)$:

а) при $D > 0$ для всех $t \in I$

$$\tilde{g}(t, u) = \frac{1}{\sqrt[4]{|D(u)D(t)|}} \exp\left[-\frac{1}{2} \int_u^t b_1(v) \times \right.$$

$$\left. \times\, dv\right] \operatorname{sh} \int_u^t \sqrt{D(v)}\,dv, \tag{3.62}$$

б) при $D < 0$ для всех $t \in I$

$$\tilde{g}(t, u) = \frac{1}{\sqrt[4]{|D(u)D(t)|}} \exp\left[-\frac{1}{2} \int_u^t b_1(v)\,dv\right] \sin \int_u^t \sqrt{|D(v)|}\,dv. \tag{3.63}$$

Если $D \equiv 0$, то получается точная формула:

$$g(t, u) = (t - u) \exp\left[-\frac{1}{2} \int_u^t b_1(v)\,dv\right]. \tag{3.64}$$

3.1.4. Передаточная функция.

Определение. Понятие передаточной функции нестационарной линейной системы обязано своим происхождением желанию многих исследователей обобщить метод расчета вынужденных колебаний стационарных систем, основанный на применении преобразования Лапласа, или родственный ему символический метод Хевисайда на нестационарные системы. Поиски обобщения привели к двум определениям, одно из которых принадлежит И.З. Штокало [110], а другое – Ш. Блану [120]. Термин "передаточная функция" не применялся ни тем, ни другим автором и появился позднее наряду с другими синонимами. Упомянутые авторы рассматривали некоторые классы систем с сосредоточенными параметрами. Введенные ими характеристики систем являются функциями комплексного и вещественного аргументов и отличаются областями определения по комплексному аргументу и классами систем, к которым они применимы. Однако в общей области определения и применения они эквивалентны. В процессе дальнейшего развития теории нестационарных систем укоренилось определение Ш. Блана. Обобщим его на произвольные односвязные линейные системы и приведем в несколько уточненном виде.

Определение 3.1 (Блан [120]). *Передаточной функцией нестационарной системы* называется функция

$$W(s, t) \triangleq \mathcal{L}_{\tau/s}\,[w(t, t-\tau)], \tag{3.65}$$

где s – комплексный аргумент, принимающий значения из области сходимости интеграла, $\mathcal{L}_{\tau/s}$ – изображение Лапласа функции $w(t, t-\tau)$, рассматриваемой как функция τ (п.1.2.3).

В соответствии с принятым в п. 1.2.3 определением преобразования Лапласа

$$\mathcal{L}_{\tau/s}\,[w(t, t-\tau)] = \int_{0-}^{\infty} w(t, t-\tau)\exp(-s\tau)\,d\tau \equiv$$

$$\equiv \exp(-st) \int_{-\infty}^{t+0} w(t, u)\exp su\,du \tag{3.66}$$

(пояснение смысла нижнего предела "0–" приведено в п. 1.2.3). Уточнение оригинального определения состоит в замене в формуле, определяющей изображение, нижнего предела интегрирования "0" пределом "0 –" и введено для того, чтобы охватить случай, когда функция $w(t,u)$ имеет составляющую типа дельта-функции с аргументом $t-u$. Рассмотрим, например, случай усилительного звена.

Если $k(t)$ – коэффициент усиления, то импульсная переходная функция имеет вид $w(t,u) = k(u)\,\delta(t-u)$. Так как в оригинальном определении точка $u = t$ при интегрировании по u лежит на границе интервала интегрирования, то для определения $W(s, t)$ требуется регуляризация подынтегрального выражения, например, предложенная Г. Дёчем (п.1.2.3). Применение же определения (3.65) с уточнением (3.66) дает

$$W(s, t) = \int_{0-}^{\infty} k(t - \tau)\delta(\tau)\exp(-s\tau)d\tau \equiv k(t),$$

что в случае стационарного звена автоматически приводит к привычному определению передаточной функции усилительного звена.

Возможны системы, у которых передаточной функции не существует (случаи, в которых не существует области значений аргумента s, где интеграл сходится). Если передаточная функция существует, то ее областью определения по аргументу t является некоторый интервал $(-\infty, T)$, где $T \leqslant \infty$, а по аргументу s – некоторая полуплоскость $\operatorname{Re} s > c(t)$ с зависящей от t границей (в частных случаях или для некоторых значений t – вся комплексная плоскость). Ради общности, вариант определения $W(s, t)$ во всей комплексной плоскости (при всех или некоторых значениях t) будем также характеризовать неравенством $\operatorname{Re} s > c(t)$, считая, что в этом случае $c(t) = -\infty$.

Если передаточная функция существует, то в силу равенства (3.65) она и импульсная переходная функция взаимно однозначно друг друга определяют. Поэтому передаточная функция является исчерпывающей внешней характеристикой системы.

Интегрирование в (3.65) осуществляется от 0 – до ∞. Следовательно, при заданном значении t понятием передаточной функции можно пользоваться только в том случае, если импульсная переходная функция определена для $-\infty < u \leqslant t + 0$. Если же последняя определена для $0 \leqslant u \leqslant t + 0$, то ее необходимо доопределить для $-\infty < u < 0$. Это доопределение в известной мере произвольно. Целесообразные варианты определяются решаемыми задачами. Явно нецелесообразны варианты, при которых теряется область сходимости интеграла в (3.66); они приводят к системам, у которых нет передаточной функции.

Если система внешне стационарна, то импульсная переходная функция, рассматривается как функция от t и τ, не зависит от t и превращается в функцию $h(\tau)$ одной независимой переменной, описывающую выходной сигнал в момент t, вызванный единичным импульсом, приложенным в варьируемый момент $t - \tau$, т.е. является характеристикой *множества процессов* для данного момента наблюдения выходного сигнала. Уравнение (3.65) принимает вид

$$H(s)=\int\limits_{0-}^{\infty} h(\tau)\exp(-s\tau)d\tau, \tag{3.67}$$

где $H(s)$ – передаточная функция стационарной системы.

Изложенное позволяет интерпретировать передаточную функцию стационарной системы также *как некоторую характеристику множества процессов*. Определение 3.1 передаточной функции нестационарной системы обобщает понятие передаточной функции стационарной системы в этой интерпретации. Нестационарность системы проявляется в зависимости результатов суммирования выходных сигналов от момента времени, выбранного для их наблюдения.

Представляет интерес для обобщения на нестационарные системы также другой вариант интерпретации передаточной функции стационарной системы, который мы изложим для системы с сосредоточенными параметрами, характеризуемой уравнением (3.2) вынужденных колебаний. Рассмотрим процесс, вызванный входным сигналом $\exp st$. Пусть такой входной сигнал действует на стационарную систему с момента $t=-\infty$ и s не является полюсом передаточной функции. Тогда, как известно, существует частное решение уравнения (3.2), причем единственное, имеющее вид

$$x(t)=H(s)\exp st. \tag{3.68}$$

Как показывает равенство (3.68), передаточная функция есть отношение выходного сигнала, описываемого указанным частным решением уравнения (3.2), к входному сигналу вида $\exp st$.

Такая интерпретация передаточной функции возможна также в случае нестационарной системы. В частности, если уравнение (3.2) определено на $I=(-\infty,\infty)$, причем $a_{n-1}(t)=1, a_0(t)=\ldots=a_{n-2}(t)=0$, а коэффициенты $b_1(t),\ldots,b_n(t)$ – ограниченные функции, то как показал И.З. Штокало [110], в случае $y(t)=\exp st$ уравнение (3.2) в области $\operatorname{Re} s>c$, где c – некоторое вещественное число, имеет единственное решение вида

$$x(t)=\beta(s,t)\exp st, \tag{3.69}$$

где функция $\beta(s,t)$ – ограниченная относительно t и аналитическая относительно s. Из сравнения этого результата с результатом, полученным Ш. Бланом [120], следует, что функция $\beta(s,t)$ – передаточная функция $W(s,t)$.

Чтобы распространить этот результат на более общий случай, ограничимся предположением о непрерывности импульсной переходной функции как функции аргументов t и u и обратимся к равенству [74, с. 318]

$$x(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} w(t,u)y(u)du, \tag{3.70}$$

связывающему в процессе вынужденных колебаний входной сигнал, приложенный в момент $t = -\infty$, с выходным. Если $c(t)$ — абсцисса сходимости интеграла (3.66), то в случае $y(t) = \exp st$, $\operatorname{Re} s > c(t)$ интеграл (3.70) сходится и

$$x(t) = W(s, t)\exp st, \tag{3.71}$$

т.е. передаточная функция есть отношение выходного сигнала к входному в процессе, вызванном входным сигналом $\exp st$.

Рассмотренный аспект понятия передаточной функции нуждается, однако, в дополнительных пояснениях. Дело в том, что процесс, вызванный сигналом указанного выше вида, в некоторых случаях существует только теоретически. Такие случаи появляются, когда процесс физически не определен на интервале наблюдения из-за ненаблюдаемости выходного сигнала. Ненаблюдаемость выходного сигнала связана с характером колебаний системы. Чтобы процесс был физически определен, его наблюдаемая стадия должна быть нечувствительна к возмущениям начального состояния.

Так как начальное состояние в данном случае связано с моментом $t = -\infty$, то это условие следует уточнить. Пусть для выбранной системы переменных состояния в пространстве состояний введена *норма* [39, с. 139] $R(s) \triangleq \|s\|$, т.е. функционал, удовлетворяющий следующим трем условиям:

1) $R(s) \geqslant 0$, причем $R(s) = 0$ только для $s = 0$,
2) $R(s_1 + s_2) \leqslant R(s_1) + R(s_2)$, $s_1, s_2 \in S$,
3) $R(\alpha s) = |\alpha| R(s)$, каково бы ни было число α.

Оценим с помощью этой характеристики отклонение состояния системы в данный момент времени от основного состояния покоя. Так как, согласно первому условию, в основном состоянии покоя $R = 0$, то $R(s)$ реализует такую оценку. Пусть, кроме того, R стремится к нулю, когда значения всех переменных состояния стремятся к нулю. Тогда зададимся произвольно отрицательным значением $t = t_0$ и положительным числом r и будем интересоваться величиной $\max R[s(0)]$ для множества процессов свободных колебаний, развивающихся с момента t_0 из начальных состояний, для которых $R[s(t_0)] \leqslant r$. Пусть $t_0 \to -\infty$. Тогда наблюдаемая стадия процесса нечувствительна к возмущениям начального состояния, если

$$\lim_{t_0 \to -\infty} \max R[s(0)] = 0. \tag{3.72}$$

Таким образом, (3.72) является достаточным условием физической определенности процесса.

Условие (3.72) может быть истолковано в понятиях теории устойчивости. С этой целью рассмотрим систему, в которую превращается исходная система, если ввести новое время $t_1 = -t$. Очевидно, новая система определена на интервале $(-\infty, T)$. Условие, эквивалентное (3.72), состоит в следующем: процесс, развивающийся с момента $t_1 = 0$ из любого возмущенного начального состояния, является расходящимся: $R[s(t_1)] = \infty$ при $t_1 \to \infty$. Основное состояние покоя в системе, обладающей таким свойством, назовем *сильно неустойчивым по отношению к величине* R. Очевидно, наличие сильной неустойчивости устанавливается на основании исследования уравнения свободных колебаний. Методы такого исследования для систем с сосредоточенными параметрами приведены ниже в п. 8.2.5.

В случае системы с сосредоточенными параметрами возможна еще одна интерпретация передаточной функции. Она связана с дифференциальным уравнением

$$D(p+s, t)X = K(s, t), \tag{3.73}$$

полученным Л. Заде [144] путем сопоставления уравнений (3.2) и (3.65). Здесь $X \equiv X(s, t)$ – искомая функция от t, зависящая от параметра s. Передаточная функция $W(s, t)$ – некоторое решение этого уравнения.

Чтобы определить какое это решение, рассмотрим сначала случай стационарной системы. В этом случае уравнение (3.73) принимает вид

$$D(p+s)X = K(s) \tag{3.74}$$

и имеет бесконечное множество решений, в общем случае зависящих от t. Однако в области $\operatorname{Re} s > c$ имеется также решение-константа (зависящая от s). Это решение $H(s)$ и есть передаточная функция. Однако и здесь, так же как при изложении предыдущего варианта интерпретации передаточной функции, необходимы пояснения.

Рассмотрим уравнение (3.74) как уравнение процесса в некоторой абстрактной динамической системе с выходным сигналом X и процессы, развивающиеся в такой системе из бесконечного прошлого. Последние могут быть физически определенными или не обладать физической определенностью. Чтобы при данном значении s процесс, в котором выходной сигнал описывается функцией-константой $H(s)$, был физически определен, необходимо и достаточно, чтобы при произвольном возмущении начального состояния системы все решения однородного уравнения $D(p+s)X = 0$ стремились к нулю с увеличением интервала времени между моментом возмущения системы и моментом наблюдения выходного сигнала. Это будет иметь место тогда и только тогда, когда все корни полинома $D(\lambda + s)$, где λ – аргумент, имеют отрицательные вещественные части. Если полиномы $D(\lambda)$ и $K(\lambda)$ не имеют общих корней, то процесс, в котором выходной сигнал описывается функцией $H(s)$ физически определен при $\operatorname{Re} s > c$. Если же упомянутые полиномы имеют общий корень, вещественная часть которого превышает c, то область значений s, при которых процесс физически определен, сокращается: в приведенном неравенстве число c следует заменить вещественной частью этого корня (или, если таких корней несколько, – наибольшей вещественной частью). В случае, когда процесс с выходным сигналом $H(s)$ физически определен, на любом конечном подынтервале I все решения уравнения (3.74), исходящие из заданной ограниченной области начальных данных для момента t_0 стремятся к решению $H(s)$ при $t_0 \to -\infty$.

В случае нестационарной системы, если существует область значений s, обеспечивающих: 1) при любых начальных данных для момента t_0 на любом конечном подынтервале I стремление к нулю решений уравнения

$$D(p+s,t)X=0$$

при $t_0 \to -\infty$; 2) существование на любом конечном подынтервале I при $t_0 \to -\infty$ предела решений уравнения (3.73), удовлетворяющих при $t = t_0$ нулевым начальным условиям, то в этой области значений s упомянутый предел является единственным и удовлетворяет уравнению (3.73). Это предельное решение – передаточная функция $W(s, t)$.

С т е п е н н о е р а з л о ж е н и е п е р е д а т о ч н о й ф у н к ц и и. В п. 3.1.3 для систем конечного порядка, описываемых уравнениями вынужденных колебаний с коэффициентами, являющимися аналитическими функциями времени, в некоторой полуокрестности ($\tau > 0$) точки $\tau = 0$ было получено разложение импульсной переходной функции в степенной ряд вида

$$w(t, t-\tau) = \hat{w}_0(t) + \hat{w}_1(t)\tau + \hat{w}_2(t)\frac{\tau^2}{2} + \ldots, \tag{3.75}$$

коэффициенты которого вычисляются по коэффициентам уравнения вынужденных колебаний. Аналогичное разложение можно получить для любой односвязной системы, если ее импульсная переходная функция при $\tau > 0$ является аналитической функцией от τ. Предполагая, что последнее условие выполнено, и что ряд (3.75) записан для общего случая, рассматривая τ как независимую переменную, t – как параметр и преобразуя ряд по Лапласу, получим формальное разложение передаточной функции в ряд Лорана (о ряде Лорана см., например, [101, с. 107–109] :

$$W(s,t) \sim \frac{\hat{w}_0(t)}{s} + \frac{\hat{w}_1(t)}{s^2} + \frac{w_2(t)}{s^3} + \ldots \tag{3.76}$$

В соответствии с [25, с. 188] из существования области сходимости ряда (3.75) не следует существования области сходимости ряда (3.76), но следует, что ряд (3.76) является асимптотическим разложением функции $W(s, t)$ при $|s| \to \infty$.

Аппроксимация передаточной функции дробно-рациональной функцией. В общем случае передаточную функцию в аналитическом виде найти не удается. Поэтому на практике обычно ищут ее аппроксимацию. Наиболее удобна аппроксимация вида

$$\widetilde{W}(s, t) = \frac{c_0(t)s^{N-1} + c_1(t)s^{N-2} + \ldots + c_{N-1}(t)}{s^N + d_1(t)s^{N-1} + \ldots + d_N(t)}, \tag{3.77}$$

где $c_{i-1}(t)$, $d_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$ – вещественные непрерывные функции времени. Поскольку функция $\widetilde{W}(s, t)$ – однозначная и аналитическая в некоторой окрестности точки $|s| = \infty$ (т.е. для всех достаточно больших по модулю значений s), она всегда допускает в этой окрестности сходящееся разложение в ряд Лорана

$$\widetilde{W}(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{w}_k(t)/s^{k+1}.$$

Коэффициенты $\widetilde{w}_k(t)$ этого ряда определяются через коэффициенты функции $\widetilde{W}(s, t)$ по приведенной в [76] рекуррентной формуле

$$\widetilde{w}_k(t) = c_k(t) - \sum_{i=1}^{N} d_i(t)\widetilde{w}_{k-i}(t), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{3.78}$$

где предполагается, что $c_k = 0$ при $k > N - 1$, $w_{k-i}(t) = 0$ при $i > k$. Согласно (3.78), все коэффициенты функции $\widetilde{W}(s, t)$ могут быть найдены, если известны $2N$ первых коэффициентов $\widetilde{w}_k(t)$. Поэтому в основу аппроксимации положим требование

$$\widetilde{w}_k(t) = \hat{w}_k(t), \quad k = 0, 1, \ldots, n - 1, \tag{3.79}$$

где $\hat{w}_k(t)$ – коэффициенты разложения (3.75).

Решение задачи аппроксимации передаточной функции таким способом – неоднозначное, так как зависит от выбора степени N полинома знаменателя аппроксимирующей функции. Если N выбрано, то коэффициенты аппроксимирующей функции связаны с первыми $2N$ коэффициентами ряда (3.76) системой линейных алгебраических уравнений, образованной первыми $2N$ уравнениями счетной системы уравнений (3.78), в которых коэффициенты $\widetilde{w}_k(t)$ заменены на $\hat{w}_k(t)$.

Путь решения этой системы следующий. Выделив систему уравнений относительно коэффициентов $d_i(t)$ $(k = N, N + 1, \ldots$

$\dots, 2N - 1)$, находим все $d_i(t)$. Из оставшихся уравнений ($k = 0, 1, \dots, N - 1$), подставив в них найденные $d_i(t)$, получим формулы для всех коэффициентов $c_{i-1}(t)$. Система уравнений для расчета коэффициентов $d_i(t)$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\hat{w}_{N-1} d_1 + \dots + \hat{w}_0 d_N = \hat{w}_N,\\
&\hat{w}_N d_1 + \dots + \hat{w}_1 d_N = \hat{w}_{N+1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\hat{w}_{2N-2} d_1 + \dots + \hat{w}_{N-1} d_N = \hat{w}_{2N-1}.
\end{aligned}
$$

Коэффициенты $c_{i-1}(t)$ после определения коэффициентов $d_i(t)$ рассчитываются по формуле

$$c_i = \hat{w}_i + \sum_{k=1}^{N} d_k \hat{w}_{i-k}.$$

Возможны случаи, когда система уравнений относительно коэффициентов $d_i(t)$ не имеет решения, так как определитель системы тождественно равен нулю. В этом случае следует перейти к новой аппроксимирующей функции $\tilde{W}(s, t)$, увеличив N.

Передаточная функция системы конечного порядка. Как отмечалось выше, передаточная функция системы с сосредоточенными параметрами, если она существует, является некоторым частным решением уравнения (3.73).

Передаточная функция как решение уравнения Заде. Если уравнение (3.73) определено на интервале $I = [0, \infty)$, то каждое его частное решение вполне определено системой n функций от s, представляющих собой решение и его начальные $n - 1$ производные по t при $t = 0$. При этом выбор частного решения, интерпретируемого как передаточная функция, не является единственным. Как отмечается в [74], выделение частных решений, интерпретируемых как передаточная функция, связано с доопределением уравнения (3.2) на интервале $(-\infty, 0)$, которое в известной мере произвольно. Если при данном доопределении равенство (3.65), определяющее передаточную функцию, имеет смысл при $t = 0$, то этому доопределению соответствует упомянутая выше система функций от s, и определенное этой системой частное решение уравнения (3.73) может рассматриваться как передаточная функция.

Пусть $\omega_0(s), \omega_1(s), \dots, \omega_{n-1}(s)$ — функции, являющиеся сечениями функций, представляющих решение, рассматриваемое как передаточная функция, и его $n - 1$ начальные производные, в точке $t = 0$. Тогда при $t \in I$ это решение имеет вид

$$
\begin{aligned}
W(s, t) = [&\sum_{k=1}^{n} N_k(s) x_k(t) + \int_0^t g(t, u) \times\\
&\times K(s, u) \exp su\, du] \exp(-st),
\end{aligned}
\tag{3.80}
$$

где функции $N_1(s), \ldots, N_n(s)$ находятся путем решения системы уравнений

$$N_1(s)x_1(0) + \ldots + N_n(s)x_n(0) = \omega_0(s),$$
$$N_1(s)[(p-s)x_1(t)]_{t=0} + \ldots + N_n(s)[(p-s)x_n(t)]_{t=0} = \omega_1(s),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$N_1(s)[(p-s)^{n-1}x_1(t)]_{t=0} + \ldots + N_n(s)[(p-s)^{n-1}x_n(t)]_{t=0} =$$
$$= \omega_{n-1}(s),$$

а $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ – элементы фундаментальной системы решений уравнения (3.9) свободных колебаний $D(p, t)x = 0$. Чтобы убедиться в справедливости формулы (3.80), в уравнении (3.73) следует произвести замену переменных $X = X_1 \exp(-st)$, которая переводит его в уравнение

$$D(p, t)X_1 = K(s, t)\exp st. \tag{3.81}$$

Выражение в квадратных скобках в формуле (3.80) – решение этого уравнения, соответствующее рассматриваемому решению уравнения (3.73).

Пусть $\operatorname{Re} s > c$ – некоторая полуплоскость, на которой каждое слагаемое правой части равенства (3.80) при некотором $t = t_1$ является аналитической функцией. Тогда эти слагаемые останутся аналитическими функциями также при любых $t = t_2$. При $t = 0$ равенство (3.80) принимает вид

$$W(s, 0) = \sum_{k=1}^{n} N_k(s).$$

Поэтому, в силу отмеченного соответствия, можно сделать следующий вывод: если $\operatorname{Re} s > c$ – максимальная полуплоскость, на которой функции $N_k(s)$ – аналитические, то функция $W(s, t)$ определена на этой полуплоскости при всех $t \in [0, \infty)$.

Чтобы найти функции $\omega_0(s)$, $\omega_1(s), \ldots, \omega_{n-1}(s)$, можно воспользоваться равенством (3.65). Но для этого необходимо, чтобы уравнение вынужденных колебаний было определено также на интервале $(-\infty, 0)$. Эту определенность можно внести одним из способов [74, с. 263], предположив, что:

1) система на интервале $(-\infty, 0)$ стационарна, причем структура уравнения вынужденных колебаний на этом интервале совпадает со структурой исходного уравнения, а коэффициенты – константы, значения которых совпадают со значениями в момент $t = 0$ соответствующих коэффициентов исходного уравнения;

2) система на интервале $(-\infty, 0)$ стационарна, причем все коэффициенты правой части уравнения вынужденных колебаний равны нулю;

3) система на интервале $(-\infty, 0)$ нестационарна, уравнение вынужденных колебаний имеет ту же структуру, а его коэффициенты определяются теми же формулами, что и на интервале $[0, \infty)$.

Очевидно, допустимы только такие доопределения, при которых функция $W(s, 0)$ существует (т.е. определена в некоторой полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > c$).

Методы вычисления передаточной функции. Задача нахождения передаточной функции системы с сосредоточенными параметрами при заданном уравнении вынужденных колебаний решается алгоритмически с помощью конечного числа операций только в частных случаях. Ввиду неразрешимости этой задачи в общем случае, на практике она заменяется задачей получения аналитических выражений, приближенно описывающих передаточную функцию.

В настоящее время известны три подхода к решению этой задачи. Они основаны:

а) на применении определяющего равенства (3.65);

б) на представлении передаточной функции системы или ее интегрирующей части как решения уравнения Заде;

в) на представлении передаточной функции системы или ее интегрирующей части как решения некоторого уравнения в комплексной плоскости (в области аргумента s).

В основанных на этих подходах методах решения приближенно вычисляется передаточная функция либо системы в целом, либо только ее интегрирующей части. Во втором случае для получения окончательного результата необходимо пересчитать (с учетом правой части уравнения вынужденных колебаний) передаточную функцию $G(s, t)$ интегрирующей части в передаточную функцию $W(s, t)$ полной системы. Согласно [74], формула пересчета имеет вид

$$W(s, t) = \sum_{j=0}^{n-1} s^{j} \Lambda(a_{n-1-j}(t)) * G(s, t), \tag{3.82}$$

где $\Lambda(\cdot)$ — левое изображение, а знаком $*$ обозначена операция свертки в комплексной области, определяемая равенством

$$F_1(s) * F_2(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} F_1(\sigma) F_2(s - \sigma)\, d\sigma,$$

где $i = \sqrt{-1}$, $\alpha > \alpha_1$, $\mathrm{Re}\, s > \alpha_2$, α_1 и α_2 — соответственно показатели роста функций $f_1(\tau) = \mathcal{L}_\tau^{-1}[F_1(s)]$ и $f_2(\tau) = \mathcal{L}_\tau^{-1}[F_2(s)]$. Заметим, что, согласно формуле (3.82), необходимым условием существования передаточной функции полной системы при существовании передаточной функции ее интегрирующей части является существование левых изображений коэффициентов правой части уравнения вынужденных колебаний. Об этом следует помнить, если процесс рассматривается на интервале $(-\infty, T)$, где $T > 0$. Если же процесс рассматривается только на интервале $[0, T)$, то в качестве коэффициентов правой части уравнения вынужденных колебаний на интервале $(-\infty, 0)$ можно принять произвольные вещественные функции; произвольность ограничивается лишь требованием существования левых изображений этих функций. Очевидно, различным наборам коэффициентов будут соответствовать различные передаточные функции $W(s, t)$, т.е. решение задачи нахождения передаточной функции полной системы в этом случае неоднозначно.

Простейшим методом, основанном на первом подходе, является метод, предложенный К.А. Абгаряном [1, с. 285–286]. Он состоит в следующем: в формуле (3.65) импульсная переходная функция $w(t, u)$ заменяется аппроксимирующей ее функцией $\widetilde{w}(t, u)$ и аппроксимация передаточной функции находится по формуле

$$W(s, t) = \mathcal{L}_{\tau/s}[\widetilde{w}(t, t - \tau)].$$

Практически такой прием позволяет найти функцию $\widetilde{W}(s, t)$ в виде аналитического выражения, не содержащего интегралы, только для частных видов аппроксимаций $\widetilde{w}(t, u)$. Это существенно ограничивает область применения метода.

Более широкую область применения имеет метод, использующий дробно-рациональную аппроксимацию передаточной функции (3.77), коэффициенты которой, как указано в п. 3.1.4, выражаются через коэффициенты $\hat{w}_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, 2q - 1$, разложения (3.75) импульсной передаточной функции, а затем с помощью формул для $\hat{w}_k(t)$ (см. пояснения к формуле (3.54)), коэффициенты функции (3.77) выражаются через коэффициенты уравнения вынужденных колебаний.

Метод приближенного вычисления передаточной функции $W(s, t)$ *периодической системы,* основанной на разложении импульсной переходной функции в ряд Фурье (п. 3.1.3), см. в [141].

К методам, основанным на втором подходе, относятся *методы Заде* [145]. В этих методах передаточная функция $W(s, t)$ ищется как решение уравнения (3.73), либо близкое к $K(s, t)/D(s, t)$ (*второй метод Заде*), либо близкое к $K(s, t)/D_0(s, t)$ (*первый метод Заде*), где $D_0(s)$ получается из $D(s, t)$ при аппроксимации коэффициентов константами. Первый метод применим в случае, когда переменные составляющие коэффициентов малы по сравнению с постоянными [74]. Второй метод целесообразен [74] в случае, когда искомая передаточная функция медленно изменяется при изменении t.

К методам, основанным на третьем подходе, относится предложенный Ш. Бланом [120] метод приближенного вычисления передаточной функции интегрирующей части системы с медленно изменяющимися коэффициентами оператора $D(p, t)$, причем такими, что коэффициенты сопряженного оператора $D^*(p, t)$ (см. п. 3.1.3) являются аналитическими функциями, допускающими разложения в сходящиеся ряды Тейлора по степеням τ при всех $t \in (-\infty, T)$. Передаточная функция ищется как решение дифференциального уравнения *)

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{\partial^l}{\partial s^l}\left[X \frac{\partial^l}{\partial t^l} D^*(-s, t)\right] = 1, \tag{3.83}$$

где

$$\frac{\partial^0 f(s, t)}{\partial s^0} \equiv f(s, t),$$

$X \equiv X(s, t)$ – искомая функция от s, зависящая от параметра t. Передаточная функция $G(s, t)$ – некоторое решение этого уравнения.

В соответствии с предположенными свойствами коэффициентов оператора $D^*(p, t)$ область применения уравнения (3.83) ограничивается требованием, чтобы система была определена на интервале $(-\infty, T)$, где $T \leqslant \infty$. Если система определена на интервале $[0, T)$, то, применяя уравнение (3.83), можно приближенно вычислить передаточную функцию интегрирующей части системы и в этом случае; при этом будет получена передаточная функция, соответствующая такому доопределению на интервале $(-\infty, 0)$ ее уравнения вынужденных колебаний, при котором на этот интервал распространяются формулы разложения функций $b_i(t - \tau)$ в ряды Тейлора по степеням τ при всех $t \in [0, T)$. К результату, полученному таким путем, можно отнестись с доверием, если для доопределенного указанным образом уравнения вынужденных колебаний передаточная функция интегрирующей части системы существует и разложения коэффициентов этого уравнения и функция $c_i(t - \tau)$ по степеням τ при $t \in [0, T)$ сходятся на интервале $(0, \infty)$.

Предположив, что передаточная функция – частное решение уравнения (3.83), близкое к функции $1/D(s, t)$, Ш. Блан нашел следующую приближенную формулу для ее вычисления:

$$G(s, t) \approx \frac{1}{D^*(-s, t)}\left\{1 - \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{D^*(-s, t)} \frac{\partial}{\partial t} D^*(-s, t)\right]\right\}. \tag{3.84}$$

---

*) Это уравнение для частного случая, когда коэффициенты оператора $D(p, t)$ – полиномы, в другой форме записи получено также Б.Е. Рудницким [90].

3.1.5. Частотные характеристики. Понятия "частотные характеристики", пользующиеся широким признанием при изучении процессов в стационарных линейных системах, обобщены на случай нестационарных линейных систем.

Комплексная частотная характеристика $C(\omega, t)$ определяется как отношение выходного сигнала к входному в процессе, вызванном сигналом $\exp i\omega t$ (где ω – вещественное число – частота колебаний).

При этом предполагается, что момент приложения входного сигнала – минус бесконечность, и что система определена на интервале $(-\infty, T)$, где $T \leqslant \infty$. В отличие от стационарных систем, где это отношение, если оно существует (т.е., если выходной сигнал принимает вполне определенные значения в конечные моменты времени), постоянно во времени, комплексная частотная характеристика нестационарной системы является функцией не только частоты, но и времени.

Понятие комплексной частотной характеристики в приведенном выше определении, как и следующие из него понятия других частотных характеристик (см. ниже), приложимы не ко всем системам. Для существования частотных характеристик система должна обладать определенными динамическими свойствами. Достаточно двух свойств:

– импульсная переходная функция системы при всех $t \in I$ удовлетворяет [74] условию

$$\int_0^\infty |\, w(t, t-\tau)\,|\, d\tau < \infty;$$

– внутренние характеристики системы таковы, что процесс физически определен.

Представим функцию $C(\omega, t)$ в показательной форме:

$$C(\omega, t) = A(\omega, t) \exp [i\theta(\omega, t)].$$

Функция $A(\omega, t) \equiv |\, C(\omega, t)\,|$ называется *амплитудной частотной характеристикой,* функция $\theta(\omega, t) \equiv \arg C(\omega, t)$ – *фазовой частотной характеристикой.* Представив $C(\omega, t)$ в алгебраической форме $C(\omega, t) = P(\omega, t) + iQ(\omega, t)$, где $P(\omega, t)$ и $Q(\omega, t)$ – вещественные функции, получим еще две частотные характеристики. Функция $P(\omega, t)$ называется *вещественной частотной характеристикой,* функция $Q(\omega, t)$ – *мнимой частотной характеристикой.*

Если до некоторого момента $t = t'$ система была стационарна, то ее частотные характеристики на t-интервале $(-\infty, t')$ не зависят от t.

Экспериментальное определение частотных характеристик. Возможность экспериментального определения частотных характеристик базируется на равенстве

$$\left.\frac{x(t)}{y(t)}\right|_{y(t)=\exp i\omega t} = C(\omega, t),$$

лежащем в основе определения комплексной частотной характеристики. В силу этого равенства, для того чтобы снять комплексную частотную характеристику, достаточно записать выходной сигнал на интересующем нас конечном интервале времени в процессах, вызванных входными сигналами:

$$y_i'(t) = a_i \cos \omega_i t, \quad y_i''(t) = a_i \sin \omega_i t, \quad i = 1, \ldots, m,$$

при произвольно выбранных амплитудах a_i и при частотах ω_i, достаточно плотно заполняющих интервал $[\Omega_1, \Omega_2]$. Границы Ω_1 и Ω_2 этого интервала выбираются так, чтобы охватить весь диапазон частот, определяющих простейшие гармонические входные сигналы, на которые система практически реагирует.

Комплексная частотная характеристика, а также совокупность амплитудной и фазовой (или вещественной и мнимой) частотных характеристик являются исчерпывающими внешними характеристиками системы.

3.1.6. Спектр системы. Смешанная природа частотных характеристик, выражающаяся в их зависимости от частоты и времени, приводит при решении задач анализа и синтеза к необходимости прибегать к операциям как в частотной, так и во временной областях. Это значительно снижает практическую ценность частотных характеристик и побуждает к поиску существенно новых (не имеющих аналога в теории стационарных систем), чисто частотных характеристик. Такой чисто частотной характеристикой является "спектр" системы. Приведем определение этой харатеристики.

Пусть к системе приложен входной сигнал $y(t) = \exp i\omega t$ и пусть на интервале $(-\infty, T)$ система реагирует на этот сигнал вполне определенным образом. Предположим, что выходной сигнал может быть представлен в виде

$$x_\omega(t) = x_{\omega 0}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} x_{\omega k} \exp i\Omega_k t, \tag{3.85}$$

где $x_{\omega, 0}(t)$ – абсолютно интегрируемая функция на интервале $(-\infty, T)$, $x_{\omega, k}$ – комплексные числа, Ω_k – вещественные числа. Варьируя ω и вводя вещественный параметр Ω, определим *спектр системы* как спектр выходного сигнала равенством (см. п. 1.2.5)

$$\theta(\Omega, \omega) = \int_{-\infty}^{T} x_{\omega 0}(t) \exp(-i\Omega t)\, dt +$$

$$+ 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} x_{\omega k}\, \delta[\Omega - \Omega_k(\omega)]. \tag{3.86}$$

Первое слагаемое в (3.86) – интеграл Фурье от функции

$$f(t) = \begin{cases} x_{\omega 0}(t) & \text{при} \quad t < T, \\ 0 & \text{при} \quad t \geqslant T. \end{cases}$$

Если при каких-либо значениях ω и Ω первое слагаемое в правой части (3.86) – расходящийся интеграл и задача исследования поставлена для конечного интервала $[0, T)$, то можно заменить расходящийся интеграл сходящимся, включив между входным сигналом и системой "звено включения" – усилительное звено с коэффициентом усиления равным нулю при $t < 0$ и единице при $t > 0$. Передаточная функция звена включения равна его коэффициенту усиления. Выходной сигнал последовательного соединения звена включения и системы в процессе, вызванном входным сигналом $\exp i\omega t$, выражается через передаточную функцию соединения $W_1(s, t)$ в виде

$$x_{\omega}(t) \equiv x_{\omega 0}(t) = \begin{cases} = 0 & \text{при} \quad t < 0, \\ = W_1(i\omega, t) & \text{при} \quad t > 0, \end{cases}$$

а спектр соединения – в виде

$$\theta(\Omega, \omega) = \int_0^T W_1(i\omega, t) \exp i(\omega - \Omega) t \, dt.$$

В некоторых случаях предложенная мера может обеспечить сходимость интеграла и при $T = \infty$.

Спектр системы является исчерпывающей внешней характеристикой.

В частном случае, когда система – внешне стационарная, причем такая, что протекающие в ней процессы асимптотически устойчивы по отношению к выходному сигналу (см. гл. 8), спектр системы имеет вид

$$\theta(\Omega, \omega) = 2\pi C(\omega) \delta(\Omega - \omega), \tag{3.87}$$

т.е. вид линейного спектра, состоящего всего из одной составляющей; $C(\omega)$ – комплексная частотная характеристика.

3.1.7. **Интегральные характеристики.** При решении ряда задач анализа нет необходимости в полной информации о рассматриваемой системе, достаточно знать лишь ее некоторые специальные характеристики. Например, для вычисления дисперсии выходного сигнала в процессе, вызванном белым шумом (см. п. 6.3.1), достаточно знать лишь одну интегральную характеристику системы:

$$\mu(t) = \int_0^{\infty} w^2(t, t - \tau) \, d\tau. \tag{3.88}$$

Эта характеристика в [74] названа *степенью подвижности* системы. Ее существование обусловлено сходимостью интеграла в определяющем равенстве. Если степень подвижности существует, то в силу соотношения между импульсной переходной функцией и передаточной функцией она также может быть выражена через передаточную функцию, а именно

$$\mu(t) \triangleq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |W(i\omega, t)|^2 dt. \tag{3.89}$$

Переход от (3.88) к (3.89) осуществляется с помощью *теоремы Релея* [88] и идентичен аналогичному переходу в случае стационарной системы.

Анализ *задачи Булгакова* [11] об оценке выходного сигнала в процессе, вызванном входным сигналом, ограниченным по модулю, приводит к следующему результату: если a – верхняя граница модуля функции $y(u)$ на интервале $(-\infty, t)$ и импульсная переходная функция удовлетворяет условию п. 3.1.5, то

$$\max_t |x(t)| \leqslant a \int_0^\infty |w(t, t-\tau)|\, d\tau.$$

Таким образом, функция

$$\eta(t) \triangleq \int_0^\infty |w(t, t-\tau)|\, d\tau$$

является интегральной характеристикой системы, определяющей границы возможных отклонений выходного сигнала в процессе, развивающемся из бесконечного прошлого и вызванном ограниченным по модулю входным сигналом.

Для нахождения одномерной плотности распределения выходного сигнала в процессе, вызванном цепным шумом (см. п. 6.2.7), достаточно знать следующие интегральные характеристики системы:

$$\mu_k(t) = \int_0^\infty w^k(t, t-\tau)\, d\tau, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{3.90}$$

3.1.8. Передаточный функционал. Определение 3.1 передаточной функции нестационарной системы как обобщение определения передаточной функции стационарной системы обладает тем недостатком, что в отличие от своего прототипа приводит к функции двух переменных (s и t), вычисляемой в аналитическом виде только приближенно, причем довольно сложно. Другое обобщение предложено В.С. Пугачевым [86] и развито автором [70].

О п р е д е л е н и е   п е р е д а т о ч н о г о   ф у н к ц и о н а л а. Новый вариант подсказывает третья интерпретация понятия передаточной функции стационарной системы (п. 3.1.4), в которой передаточная функция рассматривается как отношение сигнала на выходе системы к сигналу на входе в случае, когда последний приложен в момент $t_0 = -\infty$ и имеет вид $\exp st$, а система определена на интервале $(-\infty, b)$, где $b \leqslant \infty$. При таком входном сигнале при подходящем выборе параметра s выходной сигнал имеет вид $H \exp st$, где H – константа, зависящая от s, т.е. с точностью до постоянного множителя совпадает с входным сигналом: это обеспечивает независимость передаточной функции от t. В случае нестационарной системы выходной сигнал не имеет такого вида, и это является причиной зависимости передаточной функции от второго аргумента.

Можно, однако, изменить входной сигнал, заменив его сигналом

$$\exp \int_{-\infty}^{t} \zeta(u)\, du, \qquad t \in (-\infty, b),$$

где $\zeta(t)$ – такая комплексная функция, при которой на выходе системы появляется сигнал вида

$$H \exp \int_{-\infty}^{t} \zeta(u)\, du, \qquad t \in (-\infty, b),$$

где H – число, зависящее от $\zeta(t)$. Семейство функций $\zeta(t)$ обладающих этим свойством, обозначим символом Z. Тогда $H(\zeta)$ – функционал, определенный на Z. Этот функционал в [70] назван *передаточным функционалом.*

Приведенное определение передаточного функционала применимо, если система определена на каком-либо интервале $I = (-\infty, b)$. Так как областью определения системы в практических задачах часто является конечный или ограниченный слева интервал, то представляет интерес обобщить это определение на случай произвольного открытого интервала I. Такое обобщение приводится ниже.

Определение 3.2. Пусть $I = (a, b)$, где $a \geqslant -\infty$, $b \leqslant \infty$, а $y(t)$ – входной сигнал вида

$$y(t) = \exp \int_{a}^{t} \zeta(u)\, du,$$

где $\zeta(t)$ – интегрируемая на любом конечном подынтервале интервала (a, b) комплексная функция.

Если при произвольно заданном $t_0 \in I$ существует состояние системы, при котором процесс на $F(t_0)$ таков, что

$$x(t) = H \exp \int_{t_0}^{t} \zeta(u)\, du, \qquad H = \text{const},$$

и Z – множество всех обладающих этим свойством функции $\zeta(t)$, то определенный на Z функционал $H(\zeta)$ назовем *передаточным функционалом.*

Передаточный функционал системы с сосредоточенными параметрами. Очевидно, передаточный функционал системы с сосредоточенными параметрами с уравнением вынужденных колебаний (3.2) выражается в виде

$$H(\zeta) = \frac{a_0(p+\zeta)^{n-2}\zeta + \ldots + a_{n-1}}{(p+\zeta)^{n-1}\zeta + \ldots + b_n}.$$

Так как правая часть этого равенства однозначно определяет уравнение (3.2), передаточный функционал – исчерпывающая внешняя характеристика системы.

Если коэффициенты уравнения (3.2) постоянны, то множество Z содержит подмножество S констант s. На этом подмножестве передаточный функционал тождественен передаточной функции.

Перепишем приведенное выше равенство в виде

$$H(\zeta) = \frac{K(p+\zeta, t)\cdot 1}{D(p+\zeta, t)\cdot 1}.$$

Из этой формулы следует, что множество Z есть множество функций $\zeta(t)$, интегрируемых на любом конечном подынтервале I и являющихся при каком-либо значении H функционала $H(\zeta)$ решением уравнения

$$[HD(p+\zeta, t) - K(p+\zeta, t)]\cdot 1 = 0. \tag{3.91}$$

Если исключить не представляющий интереса случай $H = 0$ и определить

$$D_H(p, t) \triangleq D(p, t) - H^{-1}K(p, t),$$

то уравнение (3.2) для $y(t)$, указанного в определении 3.2 вида, можно записать в виде

$$D_H(p, t)x = 0,$$

а уравнение (3.91) – в виде

$$D_H(p+\zeta, t)\cdot 1 = 0. \tag{3.92}$$

Первое уравнение имеет вид уравнения (2.10) с комплексными коэффициентами; соответственно, второе уравнение можно рассматривать как обобщенное характеристическое уравнение некоторой новой системы.

Если Z_H – множество интегрируемых на I решений уравнения (3.92) при данном значении H, то Z – объединение всех множеств Z_H, причем множество возможных значений H – все точки комплексной плоскости, за исключением нулевой.

Вычисление передаточного функционала. Очевидно, если задано уравнение вынужденных колебаний, то мы располагаем явным выражением передаточного функционала, приведенным выше. Поэтому, в отличие от задачи вычисления передаточной функции, задачи вычисления передаточного функционала не возникает. Однако в случае передаточного функционала, в отличие от случая передаточной функции, возникают сложности с определением в явном виде области определения функционала. Практически в общем случае при данном значении H мы не можем найти множество Z_H; мы можем найти только множество $\tilde{Z}_H$ аппроксимаций $\tilde{\zeta}_H(t)$ функций $\zeta_H(t)$, являющихся решениями уравнения (3.92), определенными на I. Для поиска таких аппроксимаций можно применить все методы вычисления решений обобщенного характеристического уравнения, изложенные для случая уравнения (2.10) с вещественными коэффициентами в п. 2.1.10. При этом, применяя передаточный функционал к задачам расчета или анализа вынужденных колебаний, можно ограничиться поиском аппроксимаций корней уравнения (3.92) в тех или иных кольцах.

§ 3.2. Внешние характеристики односвязных стохастических систем

Стохастические системы (§ 0.7) характеризуются тем, что некоторые из их характеристик (или все характеристики) заданы в вероятностном аспекте. Стохастическую систему будем называть *стохастически определенной*, если элементы какой-либо исчерпывающей системы ее характеристик определены как числовые или случайные функции. В данном разделе мы ограничимся стохастической определенностью по отношению к внешним характеристикам систем, т.е. будем считать систему стохастически определенной, если указанным выше свойством обладает какая-либо исчерпывающая система внешних характеристик.

В тех случаях, когда исчерпывающая система внешних характеристик детерминированной системы состоит из числовых функций одного аргумента, то в соответствующей ей системе внешних характеристик стохастически определенной системы все или некоторые из упомянутых функций заменены случайными функциями или системами случайных функций. Примером может служить случай, когда информация о системе заключена в коэффициентах уравнения вынужденных колебаний, часть которых задана числовыми функциями времени, а другая часть – случайными функциями времени.

Если исчерпывающая система характеристик детерминированной системы состоит из числовых функций двух аргументов (например, импульсная переходная функция или частотные характеристики), то соответствующая система характеристики стохастической системы содержит случайные функции одного аргумента (например, момента приложения импульса в случае, когда используется импульсная переходная функция, или частоты входного сигнала, когда используются частотные характеристики), зависящие от другого аргумента как от параметра.

При анализе процессов в стохастических системах там, где это удобно, детерминированную характеристику можно рассматривать как случайную, определенную в вероятностном аспекте и совпадающую с вероятностью 1 с детерминированной характеристикой.

Рассмотрим следующие внешние характеристики стохастической системы: импульсную переходную функцию, частотные характеристики и спектр системы.

Импульсная переходная функция стохастической системы, как указывалось выше, может рассматриваться как случайная функция от аргумента u, зависящая от t как от параметра. Подчеркивая ее случайный характер, символ $w(t,u)$ заменим символом $W(t,u)$. В соответствии с понятием "случайная функция" (п. 1.3.1) эта внешняя характеристика определена, если для каждого значения t заданы все ее n-мерные функции распределения. Поскольку информация в таком объеме в общем случае не может быть ни задана, ни использована, возникает потребность в описании этой характеристики с помощью сравнительно малого комплекса числовых функций.

Для выяснения связи между входными и выходными сигнала (в этом случае — в плане лишь избранных соотношений) первостепенное значение имеют две следующие числовые характеристики: математическое ожидание импульсной переходной функции

$$m_W(t,u) \triangleq \mathrm{M}\, W(t,u)$$

и ее корреляционная функция

$$R_W(t,u_1,u_2) \triangleq \mathrm{M}\{[W(t,u_1) - m_W(t,u_1) \times \\ \times [W(t,u_2) - m_W(t,u_2)]\}.$$

Для решения задачи об одномерном распределении выходного сигнала в процессе, вызванном стохастическим входным сигналом, дополнительно требуется знание характеристик $\mathrm{M}\, W^{2k}(t,u)$, $k = 1, 2, \ldots$

Пара *частотных характеристик*, вещественная и мнимая, рассматриваемые как случайные функции от ω (зависящие от t как от параметра), ввиду их взаимосвязи образуют систему случайных функций. Наиболее полный комплекс информации о них в рамках корреляционной теории заключается в задании кроме их математических ожиданий и корреляционных функций также и взаимных корреляционных функций:

$$R_{PQ}(\omega_1, \omega_2, t) \triangleq \mathrm{M}\{[P(\omega_1, t) - m_P(\omega_1, t) \times$$
$$\times [Q(\omega_2, t) - m_Q(\omega_2, t)]\},$$

$$R_{QP}(\omega_1, \omega_2, t) \triangleq \mathrm{M}\{[Q(\omega_1, t) - m_Q(\omega_1, t)] \times$$
$$\times [P(\omega_2, t) - m_P(\omega_2, t)]\}.$$

Спектр стохастической системы (см. п. 3.1.6) может рассматриваться как обобщенная случайная функция от Ω, зависящая от ω как от параметра. При этом составляющая спектра (см. (3.86))

$$\int_{-\infty}^{T} X_{\omega 0}(t) \exp(-i\Omega t)\, dt,$$

где $X_{\omega 0}(t)$ – комплексная случайная функция, является комплексной случайной функцией от Ω, а составляющая

$$2\pi \sum_{k=1}^{\infty} X_{\omega k} \delta[\Omega - \Omega_k(\omega)],$$

где $X_{\omega k}$ и $\Omega_k(\omega)$ – случайные величины, – стохастическим потоком импульсов (см. п. 1.3.4), определенным в области возможных значений аргумента ω, формально рассматриваемого как время. Наиболее простой характеристикой спектра стохастической системы является его математическое ожидание.

§ 3.3. Алгебра структурных преобразований

Пусть система задана структурной схемой, включающей в себя элементарные звенья и сложные звенья, являющиеся односвязными системами. Тогда для определения характеристик системы по характеристикам звеньев возможен такой порядок действия, при котором используются соотношения между характеристиками систем и звеньев для систем, полученных как параллельное и последовательное соединения двух звеньев и как циклическое соединение одного звена (рис. 3.3). Эта возможность является общей для всех видов односвязных линейных систем, за исключением случаев, когда система такова, что она не поддается детализации с помощью структурной схемы указанного выше вида (такие случаи могут встретиться при рассмотрении систем с распределенными параметрами). В этих случаях возникает необходимость в учете более сложных видов соединений.

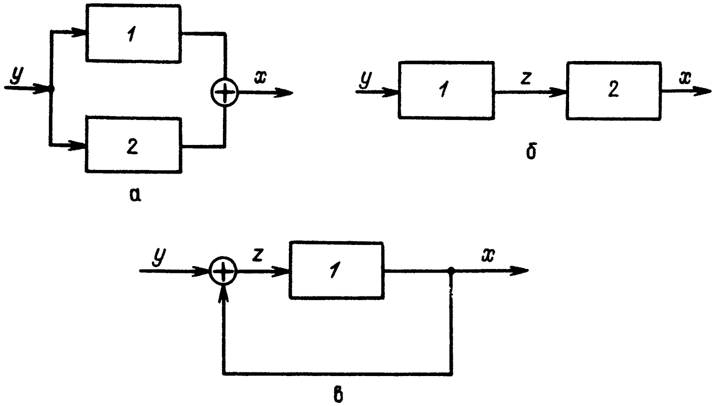


Рис. 3.3. Элементарные соединения: *а* – параллельное; *б* – последовательное; *в* – циклическое

Задачей *алгебры структурных преобразований* является установление соотношений между характеристиками системы и звеньев. Нас будут интересовать соотношения между внешними характеристиками. В силу указанного выше возможного порядка действий для решения этой задачи ограничимся рассмотрением параллельного, последовательного и циклического соединения звеньев. Приведем решение задачи для четырех вариантов математического описания систем и звеньев: описание уравнениями вынужденных колебаний, импульсными переходными функциями, передаточными функциями и описание спектрами. В дальнейшем, для краткости, системы, получаемые в результате указанных соединений звеньев, будем называть *соединениями.*

3.3.1. Вариант описания систем и звеньев уравнениями вынужденных колебаний. Этот вариант мы рассмотрим для систем с сосредоточенными параметрами. Будем считать, что все звенья – сложные. Удобным инструментом для установления соотношений между уравнениями вынужденных колебаний звеньев и соединений является *метод уравнивающих операторов* [74, 94, 95]. Воспользуемся им.

Рассмотрим сначала параллельное соединение (рис. 3.4, *а*). Запишем уравнения вынужденных колебаний звеньев в виде

$$D_1(p,t)x_1 = K_1(p,t)y, \quad D_2(p,t)x_2 = K_2(p,t)y, \tag{3.93}$$

где x_1 и x_2 – выходные сигналы звеньев. Очевидно,

$$x = x_1 + x_2. \tag{3.94}$$

Исключим из системы (3.93) переменные x_1 и x_2. С этой целью подвергнем обе части уравнений (3.93) действию операторов

$U(p, t)$ (для первого уравнения) и $V(p, t)$ (для второго уравнения), выбрав порядки и коэффициенты этих операторов так, чтобы выполнялось условие

$$U(p, t) * D_1(p, t) = V(p, t) * D_2(p, t), \tag{3.95}$$

где операция, помеченная знаком $*$, определяется равенством

$$F(p, t) G(p, t) z \triangleq [F(p, t) * G(p, t)]\, z.$$

Операторы $U(p, t)$ и $V(p, t)$, удовлетворяющие условию (3.95), называются *уравнивающими операторами*. Складывая преобразованные уравнения (3.93) и учитывая (3.94), получим

$$D(p, t) x = K(p, t) y,$$

где $D(p, t) = U * D_1 + V * D_2$, $K(p, t) = U * K_1 + V * K_2$.

Теперь осталось определить уравнивающие операторы. Начнем с определения их порядков. С этой целью заметим, что операция, обозначенная символом $*$, является ассоциативной, т.е.

$$A(p, t) B(p, t) C(p, t) = A(p, t) [B(p, t) * C(p, t)] =$$
$$= [A(p, t) * B(p, t)]\, C(p, t).$$

Поэтому если при некоторых порядках операторов U и V они являются уравнивающими, то, подвергнув обе части равенства (3.95) действию произвольного оператора, мы не нарушим равенства, но придем к новым уравнивающим операторам более высоких порядков. Поэтому, чтобы определить их однозначно и вместе с тем наиболее просто, будем искать уравнивающие операторы минимального порядка.

Согласно [74], минимальный порядок оператора U равен порядку оператора D_2, скажем n_2. Аналогично, минимальный порядок оператора V равен порядку оператора D_1, скажем n_1. Следует, однако, заметить, что могут встретиться особые случаи, когда этот порядок – ниже.

Теперь для типового (т.е. не особого) случая определим коэффициенты операторов U и V. Для этого, представив их в виде

$$U = u_0(t) p^{n_2} + u_1(t) p^{n_2 - 1} + \ldots + u_{n_2}(t),$$
$$V = v_0(t) p^{n_1} + v_1(t) p^{n_1 - 1} + \ldots + v_{n_1}(t),$$

найдем формулы для коэффициентов операторов

$$U * D_1 \equiv c_0(t) p^N + c_1(t) p^{N-1} + \ldots + c_N(t),$$
$$V * D_2 \equiv d_0(t) p^N + d_1(t) p^{N-1} + \ldots + d_N(t),$$

где $N = n_1 + n_2$, и, приравняв $c_i = d_i$, $i = 0, 1, \ldots, N$, получим $N + 1 = n_1 + n_2 + 1$ уравнений для определения искомых коэффициентов.

Число неизвестных в этих уравнениях $(n_1 + n_2 + 2)$ на единицу больше числа уравнений. Формулы для коэффициентов операторов $U * D_1$ и $V * D_2$ могут быть получены на основании формулы Бурле [122, с. 155–156]:

$$S = Q * R = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{\partial^i R}{\partial t^i} \frac{\partial^i Q}{\partial p^i}.$$

Если

$$Q = q_0(t) p^n + q_1(t) p^{n-1} + \ldots + q_n(t),$$
$$R = r_0(t) p^m + r_1(t) p^{m-1} + \ldots + r_m(t),$$
$$S = s_0(t) p^{n+m} + s_1(t) p^{n+m+1} + \ldots + s_{n+m}(t),$$

то, согласно [94],

$$s_i(t) = \sum_{j=0}^{n} q_i(t) N_{ji}(t), \qquad (3.96)$$

где

$$N_{ji}(t) = \sum_{k=0}^{i} \binom{j}{j-i+k} p^{j-i+k} r_k(t).$$

Так как, согласно формуле (3.96), коэффициенты операторов $U * D_1$ и $V * D_2$ линейно зависят от коэффициентов операторов U и V, то уравнения $c_i = d_i$ являются линейными алгебраическими уравнениями. Так как эти уравнения однородные и число их меньше числа неизвестных, то составленная из них система непременно обладает решениями, отличными от нулевого [74].

Чтобы получить однозначное решение, удобнее всего до решения системы уравнений задаться одним из искомых коэффициентов. Тогда получается система неоднородных уравнений, и если эта система разрешима, то решение — единственное. Разрешимость системы следует контролировать при выборе коэффициента, исключаемого из числа неизвестных.

Для вычисления коэффициентов операторов $K(p, t)$ и $D(p, t)$ также можно воспользоваться формулой (3.96). Однако здесь не требуется решать уравнения, так как все коэффициенты операторов, из которых формируются искомые операторы, теперь известны.

Заметим, что применение описанной процедуры возможно в том случае, когда коэффициенты операторов D_1, D_2, K_1 и K_2 допускают дифференцирование нужной кратности. Наличие этих свойств упомянутых коэффициентов нами предполагается.

Получение соотношения между уравнениями вынужденных колебаний *последовательного соединения* и входящих в него звеньев представляет собой задачу той же сложности, что и предыдущая. Пусть

$$D_1(p,t)z = K_1(p,t)y, \qquad D_2(p,t)x = K_2(p,t)z \tag{3.97}$$

— уравнения последовательно соединенных звеньев (рис. 3.4, *б*), а

$$D(p,t)x = K(p,t)y \tag{3.98}$$

— уравнение системы в целом. Тогда, чтобы установить соотношения между операторами звеньев и соединения, необходимо исключить из системы уравнений (3.97) промежуточную переменную z. Умножим обе части уравнений (3.97) на операторы $U(p,t)$ (первое уравнение) и $V(p, t)$ (второе уравнение). Порядки и коэффициенты операторов U и V определим из условия $U * D_1 = V * K_2$ так же, как это делалось при решении предыдущей задачи. Получим минимальный порядок оператора U равным порядку m_2 оператора K_2, минимальный порядок оператора V равным порядку n_1 оператора D_1 (в особых случаях возможно понижение порядка). Сравнивая преобразованные уравнения, найдем

$$[V(p,t) * D_2(p,t)]\, x = [U(p,t) * K_1(p,t)]\, y. \tag{3.99}$$

Сравнивая (3.97) и (3.98), найдем

$$D(p,t) = V(p,t) * D_2(p,t), \; K(p,t) = U(p,t) * K_1(p,t). \tag{3.100}$$

Формулы (3.100) дают решение задачи. При этом в типовом случае порядок уравнения вынужденных колебаний соединения окажется равным сумме порядков уравнений вынужденных колебаний звеньев, а коэффициенты уравнения вынужденных колебаний соединения рационально выразятся через коэффициенты и производные коэффициентов уравнений вынужденных колебаний звеньев. Очевидно, для возможности решения задачи необходима дифференцируемость определенной кратности коэффициентов уравнений звеньев.

Соотношение между уравнениями вынужденных колебаний звена и образованного на его основе *циклического соединения* (рис. 3.4, *в*) находится значительно проще. Действительно, записав уравнение вынужденных колебаний звена в виде $D_1(p, t)\, x = K_1(p,t)\, z$ и учтя, что $z = x + y$, сразу получим

$$[D_1(p,t) - K_1(p,t)]\, x = K_1(p,t)y.$$

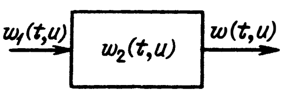
Следовательно, для операторов в уравнении вынужденных колебаний соединения $D(p,t)\, x = K(p,t)\, y$ получим формулы

$$D(p,t) = D_1(p,t) - K_1(p,t), \qquad K(p,t) = K_1(p,t).$$

Согласно этим формулам, уравнения вынужденных колебаний системы и соединения имеют один и тот же порядок, а коэффициенты одного уравнения линейно выражаются через коэффициенты другого.

3.3.2. Вариант описания систем и звеньев импульсными переходными функциями. Импульсная переходная функция *параллельного соединения* находится элементарно просто: в силу линейности системы она равна сумме импульсных переходных функций $w_1(t,u)$ и $w_2(t,u)$ и звеньев: $w(t,u) = w_1(t,u) + w_2(t,u)$.

Импульсную переходную функцию *последовательного соединения* двух звеньев можно найти как выходной сигнал второго



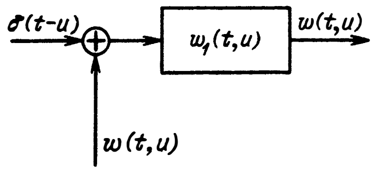


Рис. 3.4. Схема решения задачи установления связи между импульсной переходной функцией последовательного соединения и импульсными переходными функциями входящих в него звеньев

Рис. 3.5. Схема решения задачи установления связи между импульсной переходной функцией циклического соединения и импульсной переходной функцией входящего в него звена

звена, возбужденного входным сигналом $w_1(t, u)$ (рис. 3.4). По этой схеме для импульсной переходной функции системы $w(t, u)$ Л.А. Заде [147] получим

$$w(t,u) = \int_u^t w_2(t,\eta)\, w_1(\eta,u)\, d\eta. \qquad (3.101)$$

Импульсную переходную функцию *циклического соединения* можно рассматривать как выходной сигнал входящего в это соединение звена (с импульсной переходной функцией $w_1(t, u)$) возбужденного входным сигналом $\delta(t-u) + w(t, u)$ (рис. 3.5). Это приводит к интегральному уравнению

$$w(t,u) = w_1(t,u) + \int_u^t w_1(t,\eta)\, w(\eta,u)\, d\eta, \qquad (3.102)$$

полученному С.В. Мальчиковым [54].

3.3.3. Вариант описания систем и звеньев передаточными функциями. В силу линейности системы передаточная функция $W(s, t)$ *параллельного соединения* связана с передаточными функциями $W_1(s,t)$ и $W(s,t)$ звеньев собтношением

$$W(s,t) = W_1(s,t) + W_2(s,t).$$

Для вычисления передаточной функции *последовательного соединения* $W(s, t)$ воспользуемся формулой (3.101) для импульсной переходной функции этого соединения. Заменив переменную интегрирования η на $t-\xi$, получим

$$w(t,u)=\int_0^{t-u} w_2(t,t-\xi)\,w_1(t-\xi,u)\,d\xi. \tag{3.103}$$

Подставим в (3.103) вместо функции $w_2(t,\ t-\xi)$ ее выражение через передаточную функцию

$$w_2(t,t-\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} W_2(\sigma,t)\exp\sigma\xi\ d\sigma, \tag{3.104}$$

второго звена, где c – положительное число, выбранное с таким расчетом, чтобы для всех $t\in(-\infty,\ T)$ и $\xi\in[0,\ \infty)$ интеграл абсолютно сходился при всех $\mathrm{Re}\,\sigma\geqslant c$. Получим

$$w(t,u)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} W_2(\sigma,t)\int_0^{t-u} w_1(t-\xi,u)\exp\sigma\xi\ d\xi d\sigma. \tag{3.105}$$

Произведем замену u на $t-\tau$ и применим к обеим частям равенства (3.105) преобразование Лапласа по аргументу τ. После преобразования получим

$$W(s,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}\exp(-s,\tau)\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} W_2(\sigma,t)\int_0^{\tau} w_1(t-\xi,\ t-\tau)\times$$

$$\times\exp\sigma\xi\ d\xi d\sigma d\tau. \tag{3.106}$$

Учитывая, что $w_1(t-\xi,\ t-\tau)=0$ при $\xi>\tau$, верхний предел интегрирования по ξ заменим на ∞.

Предположим, что все интегралы в (3.106) сходятся равномерно. В силу этого предположения можно изменить порядок интегрирования:

$$W(s,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} W_2(\sigma,t)\int_0^{\infty}\exp\sigma\xi\int_0^{\infty} w_1(t-\xi,t-\tau)\times$$

$$\times\exp(-s\tau)\,d\tau\ d\xi\ d\sigma. \tag{3.107}$$

Представив внутренний интеграл в виде

$$\int_0^{\infty} w_1[t-\xi,(t-\xi)-(\tau-\xi)]\exp(-s\tau)d\tau$$

и ограничиваясь случаем $\xi\leqslant\tau$ (так как в области $\xi>\tau$ подынтегральное выражение равно нулю) по первой теореме смещения [25], приведем его к виду

$$\exp(-s\xi)W_1(s,t-\xi). \tag{3.108}$$

Теперь интеграл по ξ можно рассматривать как смещенное на комплексное число σ *левое изображение* (п. 1.2.4) функции $W_1(s, t)$, рассматриваемой как функция от t:

$$\int_0^{\infty} W_1(s, t-\xi) \exp\left[-\xi(s-\sigma)\right] d\xi \equiv \Lambda_{t/s-\sigma}[W_1(s, t)]. \tag{3.109}$$

Здесь нижние индексы при знаке левого преобразования Лапласа указывают аргументы (вещественный и комплексный) изображения. Перепишем формулу (3.107) с учетом (3.108) и (3.109):

$$W(s, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} W_2(\sigma, t) \Lambda_{t/s-\sigma}[W_1(s, t)] d\sigma. \tag{3.110}$$

Таким образом, передаточная функция последовательного соединения $W(s, t)$ выражается в явном виде через передаточные функции звеньев $W_1(s, t)$ и $W_2(s, t)$. Заметим, что эта зависимость является очень сложной.

Формула (3.110), очевидно, должна быть справедлива и для случая стационарной системы с передаточными функциями звеньев $W_1(s)$ и $W_2(s)$. Действительно, в этом случае

$$\Lambda_{t/s-\sigma}[W_1(s)] = \frac{W_1(s)}{s-\sigma}, \tag{3.111}$$

и тогда

$$W(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} W_2(\sigma) \frac{W_1(s)}{s-\sigma} d\sigma =$$

$$= \frac{W_1(s)}{2\pi i} \int_{c+i\infty}^{c-i\infty} \frac{W_2(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma. \tag{3.112}$$

Это равенство определено для $\operatorname{Re} \sigma \geqslant c$. Но в этом случае на основании интегральной формулы Коши интеграл в (3.112) равен $2\pi i W_2(s)$. Отсюда

$$W(s) = W_1(s) W_2(s). \tag{3.113}$$

Для нахождения передаточной функции *циклического соединения* воспользуемся соотношением (3.103). По аналогии с (3.110) сразу запишем

$$W(s, t) = W_1(s, t) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} W_1(\sigma, t) \Lambda_{t/s-\sigma}[W(s, t)] d\sigma. \tag{3.114}$$

Уравнение (3.114) является сложным интегральным уравнением, в котором искомая неизвестная $W(s, t)$ – функция двух аргументов. Неизвестно и сомнительно, можно ли, решая уравнение, найти эту функцию в явном виде. В случае стационарной системы уравнение (3.114) превращается в известное соотношение

$$W(s) = W_1(s) + W_1(s)W(s), \qquad (3.115)$$

которое разрешимо относительно $W(s)$.

Таким образом, для всех трех видов соединений мы располагаем формулами, выражающими передаточную функцию соединения через передаточные функции звеньев, либо уравнением, связывающим эти передаточные. функции. Но формула для передаточной функции последовательного соединения и уравнение для передаточной функции циклического соединения неудобны для практического применения. Поэтому для последовательного и циклического соединений возникает задача нахождения практически удобного способа формирования аппроксимации передаточной функции соединения. Практически приемлемые результаты получаются в случае, когда передаточные функции звеньев $W_i(s, t)$ или их аппроксимации $\widetilde{W}_i(s, t)$, $i = 1, 2$, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} W_i(s, t) &= \\ \widetilde{W}_i(s, t) &= \end{aligned}\right\} = \frac{c_{i0}(t)s^{N_i-1} + c_{i1}(t)s^{N_i-2} + \ldots + c_{i,N_i-1}(t)}{s^{N_i} + d_{i1}(t)s^{N_i-1} + \ldots + d_{iN_i}(t)},$$

где $c_{i0}(t), \ldots, c_{i,N_i-1}(t)$; $d_{i1}(t), \ldots, d_{1N_i}(t)$ – вещественные функции, дифференцируемые требуемое число раз; N_i – целые положительные числа.

При такой информации о звеньях можно сравнительно просто получить аппроксимацию того же вида передаточной функции соединения. Метод получения таких аппроксимаций предложен в [75] и базируется на разложении импульсных переходных функций в ряды Тейлора по степеням разностей $t-u$ с коэффициентами, зависящими от t. Суть метода состоит в следующем. Передаточные функции звеньев или их аппроксимации и предполагаемые аппроксимации передаточных функций соединений (с заданной степенью знаменателя N и неопределенными коэффициентами) разлагаются в ряды по отрицательным степеням s. Далее на основе формул для коэффициентов разложения в ряды Тейлора по степеням разности $t-u$ импульсных переходных функций соединения и звеньев и формул связи между импульсными переходными функциями ищутся коэффициенты разложения аппроксимации импульсной переходной функции соединения. Отсюда находятся коэффициенты разложения по отрицательным степеням s аппроксимации передаточной функции соединения:

$$\widetilde{W}(s, t) = \frac{c_0(t)s^{N-1} + \ldots + c_{N-1}(t)}{s^N + d_1(t)s^{N-1} + \ldots + d_N(t)},$$

и уравнения для определения коэффициентов $c_{j-1}(t)$, $d_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, этой аппроксимации.

Аппроксимация передаточной функции последовательного соединения. Задаемся числом N. Представим аппроксимации передаточных функций звеньев (если передаточная функция того или иного звена имеет указанный выше вид, то считаем, что она тождественна своей аппроксимации) и соединения рядами

$$\widetilde{W}_i(s, t) \sim \widetilde{w}_{i0}(t)s^{-1} + \widetilde{w}_{i1}(t)s^{-2} + \ldots, \qquad i = 1, 2,$$

$$\widetilde{W}(s, t) \sim \widetilde{w}_0(t)s^{-1} + \widetilde{w}_1(t)s^{-2} + \ldots$$

Согласно [75], в случае, когда аппроксимации этих передаточных функций тождественны самим функциям, коэффициенты разложений связаны зависимостью

$$\widetilde{w}_r(t) = \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1-l} (-1)^{r-1-l-k} \binom{r-1-l}{k} \widetilde{w}_{2k}(t) p^{r-1-l-k} \widetilde{w}_{1l}(t). \tag{3.116}$$

Пользуясь этой формулой, находим первые $2N$ коэффициентов разложения для $\widetilde{W}(s, t)$.

Найденные коэффициенты определяют систему уравнений относительно коэффициентов $c_{j-1}(t)$ и $d_j(t)$ (эта система состоит из первых $2N$ уравнений системы (3.78)). Решая эту систему, получаем формулы, выражающие коэффициенты аппроксимации передаточной функции соединения через коэффициенты аппроксимаций передаточных функций звеньев.

Примеры формул для случая $N = N_1 + N_2$ приведены в табл. 3.1.

Аппроксимация передаточной функции циклического соединения. Коэффициенты $\widetilde{w}_r(t)$ разложения аппроксимации передаточной функции циклического соединения согласно [76] выражаются через коэффициенты $\widetilde{w}_{1k}(t)$ разложения аппроксимации передаточной функции звена, охваченного обратной связью, в виде следующих реккурентных соотношений:

$$\widetilde{w}_r = \widetilde{w}_{1k} + \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1-l} (-1)^{r-1-l-k} \binom{r-1-l}{k} \widetilde{w}_{1k} p^{r-1-l-k} \widetilde{w}_l,$$

$$\widetilde{w}_0 = \widetilde{w}_1, \qquad r = 1, 2, \ldots$$

Таблица 3.1

Передаточная функция последовательного соединения

1	$\widetilde{W}_1 = \dfrac{c}{s+d}$ $\widetilde{W}_2 = \dfrac{c_0}{s+d_1}$ $\widetilde{W} = \dfrac{c_0^* s + c_1^*}{s^2 + d_1^* s + d_2^*}$	$d_1^* = d + d_1 + \dfrac{\dot{c}}{c}$; $d_2^* = dd_1 + d\dfrac{\dot{c}}{c} - \dot{d} - \dfrac{\ddot{c}}{c} + \left(\dfrac{\dot{c}}{c}\right)^2$; $c_0^* = 0$; $c_1^* = cc_0$;
2	$\widetilde{W}_1 = \dfrac{c}{s+d}$ $\widetilde{W}_2 = \dfrac{c_1}{s^2 + d_1 s + d_2}$ $\widetilde{W} = \dfrac{c_0^* s^2 + c_1^* s + c_2^*}{s^3 + d_1^* s^2 + d_2^* s + d_3^*}$	$d_1^* = d + d_1 + 2\dfrac{\dot{c}}{c}$; $d_2^* = d_2 + dd_1 + \dfrac{\dot{c}}{c}(2d + d_1) + 4\left(\dfrac{\dot{c}}{c}\right)^2 - 3\dfrac{\ddot{c}}{c} - 2\dot{d}$; $d_3^* = dd_2 + 2dd_1\dfrac{\dot{c}}{c} - d_1\dot{d} - 3d\dfrac{\ddot{c}}{c} + 3\ddot{d} - 4\dfrac{\dddot{c}}{c} - 4d\left(\dfrac{\dot{c}}{c}\right)^2 - 12\dfrac{\dot{c}\ddot{c}}{c^2} - 2\dfrac{\dot{c}}{c}\dot{d}$; $c_0^* = c_1^* = 0$; $c_2^* = cc_1$;

3	$\widetilde{W}_1 = \dfrac{c_1}{s^2 + d_1 s + d_2}$ $\widetilde{W}_2 = \dfrac{c}{s + d}$ $\widetilde{W} = \dfrac{c_0^* s^2 + c_1^* s + c_2^*}{s^3 + d_1^* s^2 + d_2^* s + d_3^*}$	$d_1^* = d_1 + d + \dfrac{\dot{c}_1}{c_1};$ $d_2^* = d_2 + dd_1 + d_1 \dfrac{\dot{c}_1}{c_1} - \dot{d}_1 - \dfrac{\ddot{c}_1}{c_1} + \left(\dfrac{\dot{c}_1}{c_1}\right)^2;$ $d_3^* = dd_2 + d_2 \dfrac{\dot{c}_1}{c_1} + \dfrac{\dot{c}_1}{c_1}(d - d_1) + \left(\dfrac{\dot{c}_1}{c_1}\right)^2 (d_1 - d) + \dfrac{\dddot{c}_1}{c_1} + \left(\dfrac{\dot{c}_1}{c_1}\right)^3 + \dot{d}_1 - \dot{d}_2 - 2\dfrac{\dot{c}_1 \ddot{c}_1}{c_1^2};$ $c_0^* = c_1^* = 0; \quad c_2^* = cc_1;$
4	$\widetilde{W}_1 = \dfrac{c}{s^2 + ds + f}$ $\widetilde{W}_2 = \dfrac{c_1}{s^2 + d_1 s + d_2}$ $\widetilde{W} = \dfrac{c_0^* s^3 + c_1^* s^2 + c_2^* s + c_3^*}{s^4 + d_1^* s^3 + d_2^* s^2 + d_3^* s + d_4^*}$	$c_0^* = c_1^* = c_2^* = 0; \quad c_3^* = cc_1; \quad d_1^* = d + d_1 + 2\dfrac{\dot{c}}{c};$ $d_2^* = d_2 + dd_1 + f + \dfrac{\dot{c}}{c}(2d + d_1) + 4\left(\dfrac{\dot{c}}{c}\right)^2 - 3\dfrac{\ddot{c}}{c} - 2\dot{d};$ $d_3^* = dd_2 + d_1 f + \dfrac{\dot{c}}{c}(2d_1^2 + 3dd_1 - d^2 - 2d_2 - f) - d\dot{d} - 5d\dfrac{\ddot{c}}{c} + \dfrac{\dddot{c}}{c} - 2\dot{f} + \ddot{d} - 6\dot{d}\dfrac{\dot{c}}{c} - 12\dfrac{\dot{c}\ddot{c}}{c^2};$ $d_4^* = d_2 f - \dfrac{\dot{c}}{c}(10d^3 + 22d^2 d_1 + 6dd_1^2 + 12d_1^3 - 10df - 15d_1 f - 8dd_2 - 12d_1 d_2) - 8\dot{d}(d^2 + dd_1 + d_1^2 - f - d_2) -$ $- \dfrac{\ddot{c}}{c}(10d^2 + 10dd_1 + 7d_1^2 - 3f - 10d_2) - 4\ddot{d}(d + d_1) - \left(\dfrac{\dot{c}}{c}\right)^2 (4d^2 - 4dd_1 - 3d_1^2 - 8f + 4d_2) - d_1\dot{f} - 8d_1\dot{d}\dfrac{\dot{c}}{c} - 2\dfrac{\dot{c}\ddot{c}}{c^2}(4d - 3d_1);$

Продолжение таблицы 3.1

	$\widetilde{W}_1=\dfrac{c}{s+d}$	$c_0^*=c_1^*=c_2^*=0;\ c_3^*=cc_2;\ d_1^*=d+d_1+3\dfrac{\dot c}{c};$ $d_2^*=d_2+dd_1+\dfrac{\dot c}{c}(3d+2d_1)-3\dot d-6\dfrac{\ddot c}{c}+9\left(\dfrac{\dot c}{c}\right)^2;$
5	$\widetilde{W}_2=\dfrac{c_2}{s^3+d_1s^2+d_2s+d_3}$ $\widetilde{W}=\dfrac{c_0^*s^3-c_1^*s+c_2^*s+c_3}{s^4+d_1^*s^3+d_2^*s^2+d_3^*s+d_4^*}$	$d_3^*=d_3+dd_2-\dfrac{\dot c}{c}(8d^2+14dd_1+8d_1^2-d_2)+2d_1\dot d-\dfrac{\ddot c}{c}(18d+22d_1)+3\left(\dfrac{\dot c}{c}\right)^2(3d+d_1)+27\left(\dfrac{\dot c}{c}\right)^3-30\dot d\dfrac{\dot c}{c}-6\ddot d-10\dfrac{\dddot c}{c};$ $d_4^*=dd_3-\dfrac{\dot c}{c}(12d^3+20d^2d_1+28dd_1^2+16d_1^3-13dd_2-14d_1d_2+6d_3)-\dot d(12d^2+6dd_1+12d_1^2-11d_2)-\dfrac{\dddot c}{c}(30d+40d_1)-$ $-\dfrac{\ddot c}{c}(48d^2+90dd_1+65d_1^2-27d_2)-\left(\dfrac{\dot c}{c}\right)^2(18d^2+45dd_1+31d_1^2+3d_2)-27\left(\dfrac{\dot c}{c}\right)^3(3d+d_1)-\dfrac{\dot c\ddot c}{c^2}(144d+168d_1)-$ $-10\dddot d+81\left(\dfrac{\dot c}{c}\right)^4-\dfrac{\dot c}{c}\dot d(66d+74d_1)-21\dot d^2-153\dot d\left(\dfrac{\dot c}{c}\right)^2-162\dfrac{\ddot c}{c}\left(\dfrac{\dot c}{c}\right)^2-30\dot d\dfrac{\dot c}{c}-\ddot d(24d+22d_1)-66\dfrac{\dot c}{c}\ddot d-15\dfrac{c^{(IV)}}{c}.$

Таблица 3.2

Передаточная функция циклического соединения

1	$\widetilde{W}_1 = \dfrac{c_0}{s+d_1}$ $\widetilde{W} = \dfrac{c_0^*}{s+d_1^*}$	$c_0^* = c_0;$ $d_1^* = d_1 - c_0.$
2	$\widetilde{W}_1 = \dfrac{c_0 s + c_1}{s^2 + d_1 s + d_2}$ $\widetilde{W} = \dfrac{c_0^* s + c_1^*}{s^2 + d_1^* s + d_2^*}$	$c_0^* = c_0;\ c_1^* = c_1 + c_0(d_1^* - d_1 + c_0);$ $d_1^* = d_1 - c_0 + \dfrac{c_0\dot{c}_0(c_0 d_1 - c_0^2 - c_1) + c_0^2(\ddot{c}_0 - \dot{c}_1 + c_0\dot{d}_1)}{c_1^2 - c_0 c_1 d_1 + c_0^2 d_2 + c_0^2\dot{c}_0};$ $d_2^* = d_2 - c_1 + 2\dot{c}_0 + \dfrac{c_0(c_0 d_1 - c_0^2 - c_1)(\dot{c}_0 d_1 + \ddot{c}_0 - c_0\dot{c}_1 + c_0^2\dot{d}_1) +}{c_1^2 - c_0 c_1 d_1 + c_0^2 d_2 + c_0^2 c_0} \rightarrow$ $\rightarrow \dfrac{+ c_0^2\dot{c}_0(2c_1 - d_2 - \dot{c}_0 - c_0 d_1 + c_0^2)}{}.$

(для компактности записи аргументы опущены). Пользуясь этими соотношениями и задаваясь степенью N знаменателя в формуле аппроксимации передаточной функции соединения, находим коэффициенты аппроксимации. Последовательность операций в этом случае такая же, как для последовательного соединения.

Формулы для коэффициентов аппроксимаций передаточных функций циклических соединений для случая $N = N_1$ приведены в табл. 3.2.

3.3.4. Вариант описания систем и звеньев спектрами. Очевидно, спектр $\theta(\Omega, \omega)$ параллельного соединения звеньев со спектрами $\theta_1(\Omega, \omega)$ и $\theta_2(\Omega, \omega)$ выражается через последние в виде

$$\theta(\Omega, \omega) = \theta_1(\Omega, \omega) + \theta_2(\Omega, \omega). \tag{3.117}$$

Согласно [67], спектр *последовательного соединения* выражается через спектры звеньев в виде

$$\theta(\Omega, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \theta_2(\Omega, \omega_1)\theta_1(\omega_1, \omega)\,d\omega_1, \tag{3.118}$$

а спектр *циклического соединения* является решением интегрального уравнения

$$\theta(\Omega, \omega) = \theta_1(\Omega, \omega) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \theta_1(\Omega, \omega_1)\theta(\omega_1, \omega)\,d\omega_1. \tag{3.119}$$

Для практического применения соотношений (3.117)–(3.119) удобна матричная алгебра. Для того чтобы ее можно было применить, бесконечные пределы интегрирования в указанных соотношениях заменяются конечными, а интегралы аппроксимируются суммами, причем суммирование ведется по одинаковой для всех аргументов сетке частот. При этом спектры представляются квадратными матрицами, а операция свертывания спектров заменяется операцией перемножения матриц.

Соотношение (3.117) принимает вид $M = M_1 + M_2$, где M, M_1 и M_2 – квадратные матрицы, представляющие спектры соединения и звеньев. В той же символике при предварительном переходе к "безразмерным" частотам $\omega^{(0)}$, $\Omega^{(0)}$, $\omega_1^{(0)}$ из условия $\Delta\omega^{(0)} = \Delta\Omega^{(0)} = \Delta\omega_1^{(0)} = 2\pi$ (где символ Δ использован для обозначения приращения частоты при перемещении на один шаг сетки) соотношения (3.118) и (3.119) принимают вид $M = M_2 M_1$, $M = M_1 + M_1 M$. Второе соотношение является матричным уравнением, которое при условии $M_1 \neq I$ разрешимо относительно M: $M = (I - M_1)^{-1} M_1$.

Глава 4

ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ

Согласно определению (§ 0.7), *многосвязной* называется такая система, которая имеет более чем один вход или более чем один выход. В частных случаях многосвязная система может иметь: а) более одного входа и один выход: б) один вход и более одного выхода; в) ни одного входа и более одного выхода.

§ 4.1. Многосвязные системы конечного порядка

Многосвязная система конечного порядка имеет конечное число входов и выходов, причем по крайней мере – два или более входов или два или более выходов. Исследование таких систем в общем случае связано с решением более сложных задач, чем исследование односвязных систем того же класса. Трудности возникают, главным образом, в случае вероятностного аспекта исследований, а именно:

– когда рассматривается несколько входов, к которым приложены взаимно зависимые стохастические сигналы;

– когда рассматривается несколько выходов и исследуется стохастическая зависимость выходных сигналов;

– при вероятностном задании тех или иных характеристик системы.

Решение большинства задач для детерминированных систем рассматриваемого класса сводится к решению аналогичных задач для выделяемых из многосвязных систем односвязных и объединению результатов на основе принципа суперпозиции. Во многих случаях многосвязная система конечного порядка, имеющая k входов и m выходов, может быть описана системой дифференциальных уравнений

$$V_{11}(p,t)x_1 + \ldots + V_{1m}(p,t)x_m =$$

$$= U_{11}(p,t)y_1(t) + \ldots + U_{1k}(p,t)y_k(t),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$V_{m1}(p,t)x_1 + \ldots + V_{mm}(p,t)x_m =$$

$$= U_{m1}(p,t)y_1(t) + \ldots + U_{mk}(p,t)y_k(t), \qquad (4.1)$$

где $p \equiv d/dt$;

$$V_{ij}(p, t) = v_{ij0}(t) + v_{ij1}(t) + \ldots + v_{ijr_j}p^{r_j}, \quad i, j = 1, \ldots, m;$$

r_j – максимальная степень полиномов $V_{ij}(p, t)$, $i = 1, \ldots, m$; $U_{ij}(p, t) = u_{ij0}(t) + u_{ij1}(t)p + \ldots + u_{ijq_j}(t)p^{q_j}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, k$; q_j – максимальная степень полиномов $U_{ij}(p, t)$, $i = 1, \ldots, m$; $v_{ij0}(t), \ldots, v_{ijr_j}(t)$, $u_{ij0}(t), \ldots, u_{ijr_j}(t)$ – функции времени, которые будем считать непрерывными; y_i, $i = 1, \ldots, k$, – входные сигналы; x_i, $i = 1, \ldots, m$, – выходные сигналы. Если все коэффициенты полиномов V_{ij} и U_{ij} константы, то система – стационарная.

При изучении односвязных систем конечного порядка мы преимущественно базировались на математическом описании системы одним дифференциальным уравнением n-го порядка. Поэтому мы наилучшим способом использовали бы в теории многосвязных систем результаты, полученные в теории односвязных систем, если бы каждая односвязная система, выделяемая из многосвязной, допускала такое же математическое описание. Однако не всегда представляется такая возможность: если исходная информация о многосвязной системе дана в виде системы дифференциальных уравнений, то помешать приведению этой системы к одному уравнению может характер коэффициентов: например, отсутствие их дифференцируемости требуемой кратности.

Если получение односвязных моделей многосвязной системы не представляет больших затруднений и изучение многосвязной системы можно свести к изучению односвязных моделей, то переход к этим моделям всегда целесообразен. Система уравнений процесса, получаемых в результате перехода, имеет вид

$$D_i(p, t)x_i = K_{ij}(p, t)y_j, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$j = 1, \ldots, k,$$

где $D_i(p, t)$, $K_{ij}(p, t)$ – линейные операторы – полиномы от p с зависящими от t коэффициентами.

Этот путь, однако, при больших числах m и k сопряжен с большим объемом исследований, так как приходится рассматривать $m \times k$ односвязных систем с m различными вариантами левых частей уравнений, для каждого из которых используемые в исследовании характеристики системы определяются самостоятельно. Если система уравнений (4.1) может быть приведена к системе уравнений, имеющей нормальную форму Коши (см. ниже), то существует возможность сократить объем исследований, а именно следующим образом. Учитывается только k дифференциальных уравнений с одинаковыми операторами в левой части, например

$$D_1(p, t)x_1 = K_{ij}(p, t)y_j, \quad j = 1, \dots, k,$$

а вместо остальных дифференциальных уравнений используются функциональные зависимости каждой из переменных $x_2, \dots, x_n$ от переменных $x_1, y_1, \dots, y_k$ и некоторого числа их начальных производных. Эти зависимости для каждого момента времени являются линейными. Такая возможность следует из алгоритма приведения системы уравнений в форме Коши к одному уравнению по методу последовательного дифференцирования [74, с. 42–47].

Другой путь изучения системы рассматриваемого класса связан с переходом от исходной системы уравнений к системе уравнений, имеющей нормальную форму Коши. С этой целью переписываем левые части уравнений (4.1) в виде

$$[V_{i1}(p, t) - v_{i10}(t)(p + p^2 + \dots + p^{r_1})]x_1 + \dots$$
$$\dots + [V_{im}(p, t) - v_{im0}(t)(p + p^2 + \dots + p^{r_m})]x_m +$$
$$+ v_{i10}(t)(p + p^2 + \dots + p^{r_1})x_1 + \dots + v_{imr_m}(t) \times$$
$$\times (p + p^2 + \dots + p^{r_m})x_m, \quad i = 1, \dots, m$$

и, вводя векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{v}$ с элементами соответственно $x_1, px_1 \dots$ $\dots, p^{r_1 - 1}x_1, \dots, x_m, px_m, \dots, p^{r_m - 1}x_m$ и $y_1, py_1, \dots, p^{q_1}y_1, \dots, y_k$, $py_k \dots, p^{q_k}y_k$, представим систему (4.1) в виде векторно-матричного уравнения

$$\mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{E}(t)\mathbf{v},$$

где $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{D}(t)$, $\mathbf{E}(t)$ – матрицы. Если это уравнение разрешимо относительно $\dot{\mathbf{v}}$, то, решая его, получим

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{v}, \tag{4.2}$$

где $\mathbf{A}(t)$ – $n \times n$-матрица, $\mathbf{B}(t)$ – $n \times l$-матрица, n – число элементов вектора $\mathbf{x}$, l – число элементов вектора $\mathbf{v}$. Вектор $\mathbf{v}$ можно интерпретировать как вектор входных сигналов, вектор $\mathbf{x}$ – как вектор выходных сигналов. Между вектор-функциями $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{u}(t) \equiv [x_1(t), \dots, x_m(t)]^{\mathrm{T}}$, очевидно, имеет место соотношение $\mathbf{u}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$, где $\mathbf{C}$ – некоторая постоянная $m \times n$-матрица. Уравнение (4.2) равнозначно системе уравнений относительно координат вектора $\mathbf{x}$. Если матрицы $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{B}(t)$ непрерывны, то система имеет нормальную форму.

Отметим два частных вида рассматриваемых многосвязных систем.

1. С и с т е м а с д в у м я и л и б о л е е в х о д а м и и о д н и м в ы х о д о м. Такая система может оказаться приводимой к односвязной, что имеет следующий смысл. Исходной системе можно поставить в соответствие односвязную систему, удовлетворяющую следующим условиям:

1) внутренние характеристики систем идентичны;

2) любой совокупности входных сигналов исходной системы (из заданной области) можно поставить в соответствие входной сигнал односвязной системы так, чтобы выходные сигналы систем совпадали.

Приводимую систему можно изучать, определив соответствующую ей односвязную систему и исследуя эту систему.

2. С и с т е м а с о д н и м в х о д о м и д в у м я и л и б о л е е в ы х о д а м и. Такая система может изучаться как совокупность односвязных систем с различными выходами и одним и тем же сигналом на входе. При решении задач анализа в детерминистском аспекте каждая система может изучаться самостоятельно. При решении задач в вероятностном аспекте может оказаться необходимым дополнительное изучение стохастической зависимости выходных сигналов.

§ 4.2. Многосвязные системы с запаздыванием

Многосвязная система с запаздыванием так же, как многосвязная система с сосредоточенными параметрами, имеет конечное число входов и выходов, причем по крайней мере – два или более входов или два и более выходов. Решение большинства задач исследования детерминированных систем этого класса также сводится к решению аналогичных задач для выделяемых из многосвязных систем односвязных и суммирования результатов на основе принципа суперпозиции.

Детерминированная система с k входами и m выходами может быть описана системой дифференциальных уравнений

$$\sum_{l_1=1}^{q_1} V_{i1}^{(l_1)}(p,t)u_1[t-\tau_{l_1}(t)] + \ldots + \sum_{l_2=m}^{q_2} V_{im}^{(l_m)}(p,t) \times$$

$$\times u_m[t-\tau_{l_m}(t)] = \sum_{s_1=1}^{w_1} U_{i1}^{(s_1)}(p,t)y[t-\tau_{l_1}(t)] + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{s_k=1}^{w_k} U_{ik}^{(s_k)}(p,t)y_k[t-\tau_{s_k}(t)], \quad i=1,\ldots,m,$$

где

$$V_{ij}^{(l_j)}(p,t)=v_{ij0}^{(l_j)}(t)+v_{ij1}^{(l_j)}(t)p+\ldots+v_{ija}^{(l_j)}(t)p^a,\quad j=1,\ldots,m,$$

$$U_{ij}^{(s_j)}(p,t)=u_{ij0}^{(s_j)}(t)+u_{ij1}^{(s_j)}(t)p+\ldots+u_{ijb}^{(s_j)}(t)p^b,\quad j=1,\ldots,k,$$

a, b – максимальная степень соответственно первых и вторых полиномов, $v_{ij0}^{(l_j)}(t),\ldots,v_{ija}^{(l_j)}(t)$, $u_{ij0}^{(s_j)}(t),\ldots,u_{ijb}^{(s_j)}(t)$ – функции времени, которые будем предполагать непрерывными; остальные обозначения те же, что в (4.1).

§ 4.3. Многосвязные системы с распределенными параметрами

Многосвязные системы с сосредоточенными параметрами и многосвязные системы с запаздыванием имеют конечное число входов и выходов. Более сложными являются многосвязные системы с континуальными множествами входов или выходов. К таким системам относятся системы с распределенными параметрами (§ 1.4) в тех случаях, когда входные сигналы являются распределенными или выходные сигналы образуют множество, определенное в некоторой непрерывной области пространственных аргументов (§ 1.4). Многосвязные системы с распределенными параметрами так же, как односвязные, во многих случаях могут быть описаны дифференциальными уравнениями или системами дифференциальных уравнений с частными производными, возможно, дополненными функциональными или обыкновенными дифференциальными уравнениями. Примерами таких систем с распределенными параметрами являются многие аэродинамические, магнитные, газодинамические и упругие системы [92], электрические длинные линии.

Существенное облегчение при решении задач анализа систем с распределенными параметрами, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными и функциональными или обыкновенными дифференциальными уравнениями (представляющими граничные условия) дает их *эквивалентирование* *) системами, описываемыми такими же уравнениями или системами уравнений, какими описываются системы с сосредоточенными параметрами, но бесконечного порядка. Такие модели систем с распределенными параметрами условимся называть *системами с сосредоточенными параметрами бесконечного порядка.*

---

*) *Эквивалентирование* – замена одной системы другой, ей эквивалентной по соотношениям "вход–выход" и "начальное состояние – состояние в текущий момент времени".

Рассмотрим в качестве примера одномерную систему с распределенными параметрами, процессы в которой описываются дифференциальным уравнением с частными производными с двумя аргументами – временем t и пространственной координатой l:

$$B_0(t, l)\frac{\partial^n x}{\partial t^n}+B_1(t, l)\frac{\partial^{n-1} x}{\partial t^{n-1}}+\ldots+B_n(t, l)x=$$

$$=\varphi(t, l), \quad t\in I, \quad l\in[0, L]; \tag{4.3}$$

граничные условия

$$x(t, 0)=x(t, L)=0. \tag{4.4}$$

В уравнениях (4.3)–(4.4) $x\equiv x(t, l)$ – выходной сигнал, $\varphi(t, l)$ – *плотность* (п. 1.2.1) распределенного входного сигнала,

$$B_i(t, l)=\beta_0(t, l)\frac{\partial}{\partial l}+\beta_{i1}(t, l), \quad i=0, 1, \ldots, n, \tag{4.5}$$

где $\beta_{i0}(t, l)$ и $\beta_{i1}(t, l)$ – непрерывные функции. Пусть решение уравнения (4.3), удовлетворяющее граничным условиям (4.4) и произвольным начальным условиям из заданного класса, и все его частные производные, появляющиеся при подстановке решения в левую часть уравнения, при любом t равномерно непрерывны по l на $(0, L)$. Тогда рассматриваемую систему с распределенными параметрами можно эквивалентировать системой с сосредоточенными параметрами бесконечного порядка.

Для решения задачи эквивалентирования можно применить следующий способ. Определим начальные условия равенствами

$$\left.\frac{\partial^i x}{\partial t^i}\right|_{t=0}=d_i(l), \quad i=0, 1, \ldots, n-1, \quad l\in[0, L] \tag{4.6}$$

и ограничимся случаем непрерывных функций $d_i(l)$. Рассматривая l как аргумент, t – как параметр, представляя решение уравнения (4.3) при граничных условиях (4.4) и произвольных начальных условиях (в рамках принятых ограничений) его разложением в ряд Фурье по синусам на интервале $[0, L]$ как на полупериоде [17, с. 176] и предполагая сходимость разложения при всех $l\in[0, L]$ запишем

$$x(t, l)=\xi_1(t)\sin\Omega l+\xi_3(t)\times$$

$$\times\sin 2\Omega t+\xi_5(t)\sin 3\Omega l+\ldots, \tag{4.7}$$

где $\Omega=\pi/L$. Ограничиваясь непрерывными и кусочно монотонными [17, с. 162] на $[0, L]$ (при всех $t\in I$) функциями $\varphi(t, l)$ и

$\beta_{ij}(t, l)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1$, представим их на интервале $[0, L]$ аналогичными разложениями в ряды по косинусам:

$$\varphi(t, l) = \eta_0(t) + \eta_2(t)\cos\Omega l + \eta_4(t)\cos 2\Omega l + \ldots,$$

$$\beta_{ij}(t, l) = \beta_{ij0}(t) + \beta_{ij2}(t)\cos\Omega l + \beta_{ij4}\cos 2\Omega l + \ldots,$$

сходящимися при $l \in (0, L)$. Предельные значения разложений на границах этого интервала совпадают со значениями разлагаемых функций.

Предполагая, что функция $\partial x(t, l)/\partial l$ также разлагается на $[0, L]$, как на полупериоде, в сходящийся ряд Фурье, из (4.7) получим

$$\partial x(t, l)/\partial l = \Omega\xi_1(t)\cos\Omega l + 3\Omega\xi_3(t)\cos 3\Omega l + \ldots$$

Заменяя функции $x(t, l)$, $\varphi(t, l)$, $\partial x(t, l)/\partial l$, $\beta_{ij}(t, l)$, $j = 0, 1$, $i = 0, 1, \ldots, n$, их разложениями, уравнение (4.3) приведем к виду

$$\sum_{j,\,k=0}^{\infty} \varphi_j(l)[\gamma_{0kj}(t)p^n + \gamma_{1kj}(t)p^{n-1} + \ldots + \gamma_{nkj}(t)]\xi_k =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \eta_{2j}(t)\varphi_{2j}(l), \tag{4.8}$$

где $p \equiv d/dt$, $\varphi_0(l) = 1$, $\varphi_{2u-1}(l) = \sin u\Omega l$, $\varphi_{2u}(l) = \cos u\Omega l$, $u = 1, 2, \ldots$; $\gamma_{0kj}(t), \ldots, \gamma_{nkj}(t)$ – известные функции от t – некоторые линейные комбинации функций $\beta_{rqs}(t)$, $q = 0, 1$; $r = 0, 1, \ldots, n$; $s = 0, 1, 2, \ldots$. Так как уравнение (4.8) должно удовлетворяться при всех $l \in (0, L)$, то, приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях $\varphi_j(l)$ в левой и правой частях этого уравнения, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} [\gamma_{0kj}(t)p^n + \gamma_{1kj}(t)p^{n-1} + \ldots + \gamma_{nkj}(t)]\xi_k = \eta_i(t),$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.9}$$

где $\eta_j = 0$ при $j = 1, 3, 5, \ldots$. Система (4.9) является счетной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, и, таким образом, может рассматриваться как система уравнений процесса некоторой системы с сосредоточенными параметрами счетного порядка.

В предыдущих разделах, рассматривая системы с сосредоточенными параметрами, мы привыкли оперировать с одним дифференциальным уравнением или с системой дифференциальных уравнений 1-го порядка. Система же (4.9) содержит дифференциальные уравнения n-го порядка. Однако она легко преобразуется в систему уравнений 1-го порядка с помощью замены переменных:

$$p^{i-1}\xi_{k+1} = x_{kn+i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{4.10}$$

Осуществив эту замену, получим уравнения (4.9) в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} [\gamma_{0kj}(t)\dot{x}_{kn+n} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ikj}(t)x_{kn+n-i+1}] = \eta_j(t), \tag{4.11}$$

$j = 0, 1, 2, \dots$

Новую систему уравнений процесса составляют уравнения (4.11) с новыми левыми частями и уравнения

$$\dot{x}_{kn+1} = x_{kn+2}, \dots, \dot{x}_{kn+n-1} = x_{kn+n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{4.12}$$

непосредственно следующие из замены переменных (4.10). Если обозначить $\eta_j \triangleq y_{j+n}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, и положить $y_j = 0$ для j не кратных n, то системе (4.9), дополненной уравнениями (4.12), можно придать вид векторно-матричного уравнения:

$$\mathrm{B}_0(t)\dot{\mathrm{x}} + \mathrm{B}_1(t)\mathrm{x} = \mathrm{y}, \tag{4.13}$$

где $\mathrm{x} = [x_1, x_2, \dots]^{\mathrm{т}}$, $\mathrm{y} = [y_1, y_2, \dots]^{\mathrm{т}}$, $\mathrm{B}_0(t), \mathrm{B}_1(t)$ – бесконечные матрицы. Уравнение (4.13) можно рассматривать как уравнение процесса некоторой системы с сосредоточенными параметрами бесконечного порядка, эквивалентной исходной системе с распределенными параметрами.

Во многих более сложных случаях аналогичную задачу эквивалентирования можно решать по такой же схеме, с некоторыми усложнениями или отклонениями. Например, если, в отличие от рассмотренного случая, в уравнении процесса наивысший порядок дифференцирования x по l – второй, а граничное условие (4.4) дополнено условием

$$\left.\frac{\partial x(t,l)}{\partial l}\right|_{l=0} = \left.\frac{\partial x(t,l)}{\partial l}\right|_{l=L} = 0, \tag{4.14}$$

то можно воспользоваться теми же разложениями функций $x(t, l)$, $\varphi(t, l)$ и коэффициентов дифференциальных операторов

$$\mathrm{B}_i(t,l) = \beta_{i0}(t,l)\frac{\partial^2}{\partial l^2} + \beta_{i1}(t,l)\frac{\partial}{\partial l} + \beta_{i2}(t,l), \tag{4.15}$$

$i = 0, 1, \dots, n,$

и решать задачу эквивалентирования по аналогии с решением рассмотренной задачи.

Другая возможность связана с применением другой системы ортогональных функций (вместо синусов и косинусов) для разложения в ряды коэффициентов дифференциальных операторов, входных сигналов и решений.

§ 4.4. Внутренние характеристики многосвязных систем

Если многосвязная система имеет один выход, то при нулевых входных сигналах она не отличается от односвязной и, следовательно, ее внутренние характеристики такие же, как у любой из односвязных систем, соответствующей произвольно выбранной паре вход–выход.

Если многосвязная система имеет несколько (конечное число) выходов и является детерминированной, то по каждому выходу она может рассматриваться как односвязная и совокупность внутренних характеристик всех таких односвязных систем составляет совокупность внутренних характеристик рассматриваемой многосвязной системы. В частности, исчерпывающую систему внутренних характеристик системы с сосредоточенными параметрами составляют:

– система m уравнений свободных колебаний (неизвестные в этих уравнениях – выходные сигналы);

– матрица

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \ldots & x_{n1}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1m}(t) & \ldots & x_{nm}(t) \end{bmatrix}, \tag{4.16}$$

j-е элементы столбцов которой – решения j-го уравнения свободных колебаний, а j-е строки – функции, образующие в совокупности фундаментальные системы решений j-х уравнений;

– система m обобщенных характеристических уравнений;

– матрица

$$\mathbf{Z}(t) = \begin{bmatrix} \zeta_{11}(t) & \ldots & \zeta_{n1}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \zeta_{1m}(t) & \ldots & \zeta_{nm}(t) \end{bmatrix},$$

построенная из фундаментальных систем решений ОХУ (строки) для всех m уравнений свободных колебаний по тому же правилу, по которому строилась матрица $\mathbf{X}(t)$;

– система m корневых уравнений.

Исчерпывающей системой внутренних характеристик системы с сосредоточенными параметрами является также векторно-матричное уравнение относительно вектора состояния $\mathbf{v} = [x_1, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{v} \tag{4.17}$$

($\mathbf{A}(t)$ – матрица с непрерывными элементами) или любая фундаментальная система ее решений и уравнение $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{v}$ (§ 4.1), связывающее вектор состояния с вектором выходных сигналов.

Если исходная система дифференциальных уравнений процесса (с нулевыми правыми частями) или уравнение (4.17) допускают сведение к одному скалярному дифференциальному уравнению с непрерывными коэффициентами

$$[p^n + b_1(t)p^{n-1} + \ldots + b_n(t)]x = 0, \tag{4.18}$$

имеющему в качестве неизвестной функции x одну из переменных $x_1, \ldots, x_m$, то появляется еще один вариант математического описания системы. Тогда каждый из выходных сигналов $x_1, \ldots, x_m$ связан с переменной x и ее производными (до $(n-1)$-й включительно) линейной зависимостью

$$e_{i0}(t)x_i + e_{i1}(t)x + e_{i2}(t)px + \ldots + e_{in}(t)p^{n-1}x = 0, \tag{4.19}$$

где $e_{ij}(t)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, — непрерывные функции. Уравнение (4.18) совместно с системой равенств (4.19) составляет исчерпывающую систему внутренних характеристик.

Стохастическая многосвязная система с несколькими выходами имеет в качестве внутренних характеристик как характеристики соответствующих односвязных систем, так и характеристики, отражающие стохастическую взаимосвязь внутренних характеристик односвязных систем с различными выходами. Например, если система имеет два выхода и каждая из односвязных систем характеризуется уравнением свободных колебаний с коэффициентами, определенными как система случайных функций времени, то, помимо этих уравнений, внутренними характеристиками являются также математические описания стохастической взаимозависимости между системами коэффициентов, относящихся к разным уравнениям.

Внутренние характеристики системы с континуальным множеством выходов имеют более сложный характер. Так, например, внутренние характеристики одномерной системы с распределенными параметрами являются функциями или уравнениями с двумя аргументами — временем t и пространственной координатой l. К числу таких характеристик относятся дополненные граничными условиями однородное уравнение или система однородных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих динамику процесса; эта система внутренних характеристик является исчерпывающей. Другой исчерпывающей системой внутренних характеристик является фундаментальная система решений системы уравнений процесса свободных колебаний — аналог фундаментальной системы решений уравнения свободных колебаний системы с сосредоточенными параметрами.

Фундаментальную систему решений системы уравнений процесса свободных колебаний определим для двух классов систем:

1) для систем, динамика которых описывается уравнением вида (4.2) с областью определения по t – некоторым интервалом I, замкнутым слева (t_0), по l – интервалом $(-\infty, \infty)$;

2) для систем, допускающих эквивалентирование системой с сосредоточенными параметрами счетного порядка.

В первом случае предположим, что

а) система свободна (нет связей на границах);

б) все функции

$$x(t_0, l), \left.\frac{\partial x(t_0, l)}{\partial t}\right|_{t=t_0}, \ldots, \left.\frac{\partial^{n-1} x(t_0, l)}{\partial t^{n-1}}\right|_{t=t_0}, \tag{4.20}$$

характеризующие начальное состояние системы, для любого возможного начального состояния таковы, что их можно представить интегралами Фурье (как функции от l);

в) процессы, развивающиеся из возможных начальных состояний системы, описываются решениями, представимыми вместе со своими первыми $n - 1$ производной при любом t интегралами Фурье (как функции от l).

Тогда любое решение, описывающее указанный в п. (в) процесс, определено начальными данными (4.20) и системой однопараметрических семейств функций двух аргументов (t, l – аргументы, Ω – параметр):

$$\begin{aligned} &x'_1(t, l, \Omega), \ldots, x'_n(t, l, \Omega), \\ &x''_1(t, l, \Omega), \ldots, x''_n(t, l, \Omega), \end{aligned} \tag{4.21}$$

где $x'_k(t, l, \Omega)$, $x''_k(t, l, \Omega)$, $k = 1, \ldots, n$ – решения при начальных данных

$$\left.\frac{\partial^{k-1} x'(t, l)}{\partial t^{k-1}}\right|_{t=t_0} = \sin \Omega l, \quad \left.\frac{\partial^{i} x'(t, l)}{\partial t^{i}}\right|_{t=t_0} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k-1,$$

$$\left.\frac{\partial^{k-1} x''(t, l)}{\partial t^{k-1}}\right|_{t=t_0} = \cos \Omega l, \quad \left.\frac{\partial^{i} x''(t, l)}{\partial t^{i}}\right|_{t=t_0} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k-1.$$

Таким образом, множество функций (4.21) является исчерпывающей внутренней характеристикой системы.

Рассмотрим теперь второй случай. Если система с распределенными параметрами допускает ее эквивалентирование системой с сосредоточенными параметрами счетного порядка, то множество функций, рассматриваемое как фундаментальная система решений, может быть сокращено до счетного множества. Однако и в этом случае для задания фундаментальной системы решений требуется весьма емкая информация: счетное множество функций. Поэтому при решении практических задач часто идут по линии дальнейшего упрощения: система счетного порядка аппроксимируется системой конечного порядка. Один из возможных путей получения аппроксимирующей модели изложен ниже в § 7.5.

§ 4.5. Внешние характеристики многосвязных систем

Многосвязную систему, имеющую по крайней мере один вход, будем называть *нормальной*, если все односвязные системы, получаемые из нее при фиксировании каждой пары вход – выход, являются нормальными (см. начало гл. 3). В данном разделе изучаются внешние характеристики нормальных многосвязных систем.

4.5.1. Внешние характеристики многосвязной системы с конечным числом входов и выходов. Система уравнений (4.1) при нулевых начальных условиях и при заданных входных сигналах вполне определяет выходные сигналы. Поэтому она является исчерпывающей внешней характеристикой системы. На основании принципа суперпозиции для расчета выходных сигналов системы действие каждого входного сигнала можно рассматривать отдельно, а затем на каждом выходе просуммировать получающиеся сигналы. Но при расчете сигнала на i-м выходе при возбуждении системы на j-м входе требуется знание лишь импульсной переходной функции $w_{ij}(t, u)$ односвязной системы с указанными входом и выходом. Поэтому матрица импульсных переходных функций

$$\mathbf{w}(t, u) = \begin{bmatrix} w_{11}(t, u) & \dots & w_{1k}(t, u) \\ \dots & \dots & \dots \\ w_{m1}(t, u) & \dots & w_{mk}(t, u) \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

является исчерпывающей внешней характеристикой системы. Будем ее называть *импульсной переходной матрицей.*

Если система определена на неограниченном слева интервале I и после замены переменной $u = t - \tau$ все элементы матрицы (4.22) при $t \in I$ допускают преобразование Лапласа по аргументу τ, т.е. если передаточные функции системы существуют для всех комбинаций входов и выходов, то определим *передаточную матрицу* [67, с. 215] $W(s, t)$ равенством

$$\mathbf{W}(s, t) = \begin{bmatrix} W_{11}(s, t) & \dots & W_{1k}(s, t) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{m1}(s, t) & \dots & W_{mk}(s, t) \end{bmatrix}. \tag{4.23}$$

Элементы этой матрицы – передаточные функции односвязных систем, полученных из рассматриваемой многосвязной при учете j-го входа и i-го выхода. Передаточная матрица является исчерпывающей внешней характеристикой системы.

Известны также другие определения импульсной переходной матрицы и передаточной матрицы. Эти определения применяются при описании процесса векторно-матричными уравнениями (4.2) и $\mathbf{u}=C\mathbf{x}$, где компоненты вектора $\mathbf{v}$ рассматриваются как входные сигналы. В соответствии с этим описанием импульсная переходная матрица и передаточная матрица определяются как $m \times l$-матрицы (см. § 4.1 и [127]). Частный случай этих определений (для $\mathbf{u}(t) \equiv \equiv \mathbf{x}(t)$) приведен в [1].

По аналогии с импульсной переходной матрицей и передаточной матрицей в первом варианте определения определим *спектральную матрицу* $\boldsymbol{\theta}(\Omega, \omega)$ как $m \times k$-матрицу, элементы которой являются спектрами соответствующих односвязных систем.

Все рассмотренные внешние характеристики являются исчерпывающими. Связи между импульсной переходной матрицей, передаточной матрицей и спектральной матрицей определяются связями между соответствующими элементами этих матриц. Переход от уравнений, описывающих процесс, к упомянутым матричным характеристикам связан с решением этих уравнений. Обратная задача – построение уравнений (4.2) и (4.3) по импульсной переходной матрице – рассмотрена в [127], там же приведен обзор работ по этому вопросу.

В случае стохастической системы элементы матриц $\mathbf{w}(t, u)$, $\mathbf{W}(s, t)$, $\boldsymbol{\theta}(\Omega, \omega)$ описываются в вероятностном аспекте. Кроме того, поскольку выходные сигналы стохастически взаимосвязаны и, возможно, имеется стохастическая взаимосвязь между входными сигналами, дополнительно появляются вероятностные характеристики, описывающие взаимосвязь элементов матриц.

Рассмотренные матричные характеристики применимы без каких-либо изменений к системам с запаздыванием. В частности, понятие передаточной матрицы во втором определении распространяется без изменения [13] на системы, процессы в которых описываются системой уравнений

$$\begin{gathered}
\dot{v}_1(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{q} a_{1i}^{(k)}(t) v_i[t - \tau_k(t)] + z_1(t), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dot{v}_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{q} a_{1i}^{(k)} v_i[t - \tau_k(t)] + z_n(t),
\end{gathered} \tag{4.24}$$

где $\tau_k(t)$ – вещественные неотрицательные функции. Функции $z_1(t), \dots, z_n(t)$ рассматриваются формально как входные сигналы, а переменные $v_1, \dots, v_n$ – как выходные сигналы.

4.5.2. Внешние характеристики многосвязной системы с континуальным множеством входов и/или выходов. Внешние характеристики

ристики многосвязной системы с континуальным множеством входов и/или выходов, естественно, существенно сложнее. В частности, в случае одномерной системы с распределенными параметрами с континуальным множеством выходов, распределенных по аргументу l, и с одним входом (возможные входные сигналы — только сосредоточенные) импульсная переходная матрица, передаточная матрица (в первом определении) и спектральная матрица заменяются скалярными функциями трех аргументов: $w(t, u, l)$, $W(s, t, l)$, $\theta(\Omega, \omega, l)$. Если же система имеет также континуальное множество входов (входные сигналы являются распределенными), то появляется четвертый аргумент, указывающий место приложения импульса (соответствующее значение пространственной координаты). В частности, импульсная переходная функция принимает вид $w(t, u, l, m)$, где аргумент l определяет место наблюдения процесса, а аргумент m — место приложения импульса. Полезно заметить, что для второй пары аргументов (l, m), отсутствуют ограничения на вид функции w, аналогичные условию физической осуществимости системы, и что входной сигнал (единичный импульс в точке m) описывается в виде $\delta(t - u)\delta(l - m)$.

Импульсной переходной функцией одномерной системы с распределенными параметрами с континуальным множеством входов и одним выходом будем называть функцию w трех вещественных аргументов t, u и l, описывающую выходной сигнал в текущий момент времени в процессе, развивающимся из основного состояния покоя под действием единичного импульса, приложенного в момент u к точке системы с пространственной координатой l. Аналогичный смысл вложим в понятие импульсной переходной функции двумерной и трехмерной системы с распределенными параметрами того же типа. В этих случаях место приложения импульса определяется не одной, а соответственно двумя и тремя пространственными координатами. Импульсная переходная функция является исчерпывающей внешней характеристикой системы с распределенными параметрами.

Глава 5

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ

В данной главе рассматриваются две основные задачи анализа систем: установление соответствия между заданным множеством начальных состояний и:

а) множеством выходных сигналов в процессах свободных колебаний, развивающихся из принадлежащих этому множеству начальных состояний;

б) множеством оценок этих выходных сигналов.

Для систем конечного порядка рассматривается первая задача при детерминированном, недетерминированном и вероятностном задании начального состояния (см. § 1.6) и вторая задача при детерминированном задании начального состояния. Для систем с распределенными параметрами рассматривается первая задача при детерминированном задании начального состояния.

§ 5.1. Свободные колебания односвязных систем конечного порядка

5.1.1. Первая основная задача анализа. Как показано в п. 2.1.1, на интервале $F(t_0)$ выходной сигнал $u_F^*(t)$ системы конечного порядка связан с вектором начального состояния $\mathrm{s}(t_0)$ равенством

$$u_F^*(t) = \mathbf{A}_{u\mathrm{s}_t}\mathbf{\Phi}(t, t_0)\,\mathrm{s}(t_0),$$

где $\mathbf{A}_{u\mathrm{s}_t}$ – матрица-строка, $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$ – переходная матрица состояний, $\mathrm{s}(t)$ – вектор состояния.

С л у ч а й   д е т е р м и н и р о в а н н о г о   з а д а н и я   н а ч а л ь н о г о   с о с т о я н и я. Пусть вектор состояния $\mathrm{s}(t_0)$ известен.

Вариант использования в качестве внутренней характеристики системы векторно-матричного уравнения процесса. Пусть процесс свободных колебаний системы подчиняется векторно-матричному уравнению (2.7)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)x, \qquad t \in I, \tag{5.1}$$

где $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}$, $x_1 \triangleq u$, $\mathbf{A}(t) \equiv \| a_{ij}(t) \|_1^n$ – непрерывная матрица. Предполагая, что все координаты вектора $\mathbf{x}$ могут быть выражены через функцию $u(t)$ и ее производные, выберем этот вектор в качестве вектора состояния s (см. § 1.5).

Рассмотрим простейший вариант первой основной задачи анализа: *установить соответствие между множеством всех возможных начальных состояний* (множеством всех векторов $\mathbf{x}(t_0) \in \mathbf{C}^n$, где $\mathbf{C}^n$ – линейное пространство, образованное всеми n-мерными числовыми векторами, в общем случае с комплексными элементами; $t_0 \in I$ *и множеством определенных ими выходных сигналов* (множеством функций $u_F^*(t)$ см. § 0.2).

Эту задачу можно разделить на следующие подзадачи:

– задачу установления соответствия между множествами векторов $\mathbf{x}(t_0)$ и вектор-функций $\mathbf{x}(t)$,

– задачу установления соответствия между множествами вектор-функций $\mathbf{x}(t)$ и функций $u_F^*(t)$.

Рассмотрим сначала первую подзадачу. Решение уравнения (5.1) при заданном $\mathbf{x}(t_0)$ выражается в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{K}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0), \qquad (5.2)$$

где $\mathbf{K}(t, t_0)$ – матрицант (см. п. 2.1.3). Поскольку матрица $\mathbf{K}(t, t_0)$ – неособая, эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами $\{\mathbf{x}(t_0)\}$ и $\{\mathbf{x}(t)\}$.

Перейдем ко второй подзадаче. При $a \in F(t_0)$ каждому вектору $\mathbf{x}(a)$ однозначно соответствует значение выходного сигнала $u_F^*(a)$, а на интервале $F(t_0)$ каждой вектор-функции $\mathbf{x}(t)$ однозначно соответствует функция $u_F^*(t)$. Однако характер обратного соответствия не очевиден. Поставим вопрос следующим образом. На $F(t_0)$ задана функция $u_F^*(t)$, определена ли при этом на $F(t_0)$ вектор-функция $\mathbf{x}(t)$? Это – вопрос *о наблюдаемости системы по выходному сигналу* [96, с. 480]. При положительном ответе, согласно Н.Н. Красовскому [43], система называется *вполне наблюдаемой.*

Эвристически ясно, что для того, чтобы определить вектор-функцию $\mathbf{x}(t)$, т.е. систему n функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ в исходных данных должно содержаться также n функций. Очевидно также, что исходной информацией для построения такой системы функций по постановке задачи может служить только функция $u_F^*(t)$. Учитывая эти соображения и предполагая, что функции $\dot{u}_F^*(t), \ddot{u}_F^*(t), \ldots, d^{n-1}u_F^*(t)/dt^{n-1}$ определены на $F(t_0)$, непрерывны и дифференцируемы, примем в качестве исходных данных эту систему функций, дополненную функцией $u_F^*(t)$. Тогда введем вектор-функцию

$$\boldsymbol{\xi}(t) = [u_F^* \; pu_F^* \ldots p^{n-1}u_F^*]^{\mathrm{T}}, \qquad p \equiv d/dt, \qquad (5.3)$$

и выясним, как она связана с вектор-функцией $\mathbf{x}(t)$.

Если непрерывны и дифференцируемы функции

$$b_{1j}(t) = a_{1j}(t), \quad j = 1, \ldots, n,$$
$$b_{ij}(t) = \dot{b}_{i-1,j}(t) + \sum_{k=1}^{n} b_{i-1,k}(t) a_{ij}(t), \tag{5.4}$$
$$i = 2, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n,$$

то, согласно алгоритму приведения по методу последовательного дифференцирования уравнения (5.1) к уравнению свободных колебаний [74, гл. 2, § 3], вектор-функции $\boldsymbol{\xi}(t)$ и $\mathbf{x}(t)$ связаны уравнением

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{B}(t)\,\mathbf{x}(t), \tag{5.5}$$

где $\mathbf{B} \triangleq \| b_{ij} \|_1^n$. Отсюда следует, что вектор-функция $\xi(t)$ однозначно определяет вектор-функцию $\mathbf{x}(t)$, если $\det \mathbf{B}(t) \neq 0$ при $t \in I$. Заметим, что справедливость принятого выше предположения о непрерывности и дифференцируемости функций pu_F^*, $p^2 u_F^*$, ..., $p^{n-1} u_F^*$, в силу (5.5), следует из непрерывности $\mathbf{B}(t)$.

Суммируя сказанное выше, делаем вывод, что *для того, чтобы функция* $u_F^*(t)$ *вполне определяла вектор-функцию* $\mathbf{x}(t)$ (т.е. чтобы система была вполне наблюдаема по выходному сигналу), *достаточно, чтобы на I была определена, непрерывна и невырождена матрица* $\mathbf{B}(t)$. Если объединить результаты решений рассмотренных подзадач, то можно заключить, что для взаимно однозначного соответствия начального вектора состояния $\mathbf{x}(t_0)$ и выходного сигнала $x(t)$ достаточно приведенного выше условия полной *наблюдаемости системы по выходному сигналу*. В силу равенств (5.2) и соотношения между вектор-функцией $\mathbf{x}(t)$ и функцией $u_F^*(t)$ соответствие устанавливает равенство

$$u_F^*(t) = \mathbf{E}\mathbf{K}(t, t_0)\,\mathbf{x}(t_0), \tag{5.5}$$

где $\mathbf{E} = [1 \ 0 \ \ldots \ 0]$.

Полученные результаты справедливы также в случае вещественного пространства состояний: $S = \mathbf{R}^n$.

Вариант использования уравнения свободных колебаний. Пусть коэффициенты уравнения свободных колебаний (2.10)

$$[p^n + b_1(t)p^{n-1} + \ldots + b_n(t)]u = 0 \tag{5.6}$$

непрерывны. Тогда непрерывно любое решение этого уравнения и его производные, от первой до n-й. В этом случае в качестве вектора состояния может быть выбран вектор $\boldsymbol{\xi}$. В простейшем варианте задачи (которым мы ограничимся) требуется установить соответствие между множеством всех векторов $\boldsymbol{\xi}(t_0) \in \mathbf{C}^n$ (или $\in \mathbf{R}^n$) и множеством U_F^* определенных ими функций $u_F^*(t)$.

Так же как и в предыдущем варианте, задачу можно подразделить на две следующие подзадачи:

— задачу установления соответствия между множествами векторов $\boldsymbol{\xi}(t_0)$ и вектор-функций $\boldsymbol{\xi}(t)$,

— задачу установления соответствия между множествами вектор-функций $\boldsymbol{\xi}(t)$ и функций $u_F^*(t)$.

Рассмотрим первую подзадачу. Заменив уравнение (5.6) векторно-матричным уравнением

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{C}(t)\boldsymbol{\xi}, \qquad t \in F(t_0), \tag{5.7}$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_n & -b_{n-1} & -b_{n-2} & \dots & -b_1 \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

решение последнего при заданном векторе $\boldsymbol{\xi}(t_0)$, согласно (5.2), выразим в виде

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{L}(t, t_0)\boldsymbol{\xi}(t_0), \tag{5.9}$$

где $\mathbf{L}(t, t_0)$ — матрицант для этого уравнения. Равенство (5.9) устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами $\boldsymbol{\xi}(t_0)$ и $\boldsymbol{\xi}(t)$.

Перейдем ко второй подзадаче. Вектор-функция $\boldsymbol{\xi}(t)$ однозначно определяет функцию $u_F^*(t)$ (как свою первую координату). С другой стороны, $n - 1$ раз дифференцируя $u_F^*(t)$ мы восстанавливаем вектор-функцию $\boldsymbol{\xi}(t)$. Поэтому между множествами $\{\boldsymbol{\xi}(t)\}$ и U_F^* существует взаимно однозначное соответствие.

Таким образом, приходим к следующему выводу: для взаимнооднозначного соответствия между множеством векторов $\boldsymbol{\xi}(t_0)$ и множеством порожденных ими функций $u_F^*(t)$ достаточно непрерывности коэффициентов уравнения свободных колебаний.

В силу равенства (5.9) и соотношения между вектор-функцией $\boldsymbol{\xi}(t)$ и функцией $u_F^*(t)$ соответствие устанавливается равенством

$$u_F^*(t) = \mathbf{EL}(t, t_0)\boldsymbol{\xi}(t_0). \tag{5.10}$$

Случай недетерминированного задания начального состояния. Пусть:

— процесс свободных колебаний системы подчиняется уравнению (5.1),

— в качестве вектора состояния выбран вектор $\mathbf{x}$,

— $x_1 \equiv u$,

— состояние системы в начальный момент времени не определено, но известна область в пространстве состояний, являющаяся заданным множеством векторов состояния (такую область будем называть *областью возможных состояний*).

Тогда множество процессов, определенное областью возможных состояний, заданной для начального момента времени, характеризуется в каждый последующий момент времени также некоторой областью возможных состояний. Последняя определяется первой и в общем случае отлична от нее.

Рассмотрим задачу установления соответствия между этими областями. Ограничимся случаем простой конфигурации исходной области: будем считать, что при геометрической интерпретации пространства состояний она является объединением точек, принадлежащих центральному действительному эллипсоиду*) или области, ограниченной этой поверхностью. Сразу же возникает вопрос: к какому классу поверхностей принадлежит граница области возможных состояний при $t \neq t_0$, если исходная область возможных состояний имеет указанную выше конфигурацию? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 5.1. [74]. *Если исходная область возможных состояний является геометрическим местом точек, заполняющих пространство, ограниченное центральным действительным эллипсоидом, включая эллипсоид, то в любой точке интервала I область возможных состояний имеет такой же характер. Точками исходной области возможных состояний, принадлежащих границе области, соответствуют точки в последующих областях возможных состояний, также принадлежащие границам этих областей.*

Доказательство этой теоремы см. в [74, с.172–174].

Базируясь на этой теореме, найдем уравнение эллипсоида, ограничивающего область возможных состояний в текущий момент времени. Очевидно, это уравнение можно записать в виде

$$\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(t) x_i x_j = 1. \qquad (5.11)$$

---

*) *Центральным действительным эллипсоидом* [85] называют множество элементов – векторов x n-мерного вещественного линейного пространства, координаты которых x_i, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j = 1, \qquad g_{ij} = g_{ji},$$

где g_{ij} – вещественные числа, причем такие, что матрица $\| g_{ij} \|_1^n$ – положительно определенная. Частным случаем центрального действительного эллипсоида является *центральная гиперсфера* [55], т.е. множество векторов x, удовлетворяющих уравнению $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \text{const} \neq 0$.

Дифференцируя (5.11) и используя уравнение (5.1), получим

$$\sum_{i,j=1}^{n} \dot{d}_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i,j,k=1}^{n} d_{ij} a_{jk} x_i x_k = 0. \tag{5.12}$$

Это уравнение должно удовлетворяться при всех значениях переменных $x_1, \ldots, x_n$, соответствующих точкам искомого эллипсоида. Но это возможно только тогда, когда коэффициенты при каждом произведении $x_i x_j$ равны нулю, т.е. когда удовлетворяется система уравнений

$$\dot{d}_{ij} + \sum_{k=1}^{n} (d_{ik} a_{jk} + d_{jk} a_{ki}) = 0,$$

$$i, j = 1, \ldots, n. \tag{5.13}$$

Решая эту систему дифференциальных уравнений, можно найти коэффициенты d_{ij} как функции времени, т.е. решить поставленную задачу.

Заметим, что из n^2 уравнений системы (5.13) только $n(n+1)/2$ независимы (уравнения при $i = l$, $j = m$ и при $j = m$, $i = l$ на основании равенства $d_{lm} = d_{ml}$ тождественны). Указанное число независимых уравнений можно получить из системы (5.13), если ограничиться уравнениями, для которых $i \geqslant j$. При этом, используя равенство $d_{ji} = d_{ij}$, следует сократить число неизвестных, в частности, например, оставить только те из них, для которых $i \geqslant j$.

Если заданной внутренней характеристикой системы является уравнение свободных колебаний (5.6), то, вводя новые переменные $\xi_1, \ldots, \xi_n$ равенствами

$$\xi_i = p^{i-1} u, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.14}$$

заменим уравнение (5.1) уравнением (5.7). Выбрав в качестве вектора состояния вектор $\boldsymbol{\xi}$ (см. (5.3)), рассматриваемую задачу сводим к рассмотренной выше, что позволяет применить теорему 5.1 и – для расчета коэффициентов уравнения эллипсоида – применить уравнения (5.13).

При найденной области возможных состояний в данный момент времени t область возможных значений выходного сигнала находится путем решения задачи на условный экстремум: найти экстремумы квадратичной формы x_1^2 при условии (5.11). Эта задача решается следующим образом: вводится неопределенный числовой множитель λ, который находится из условия разрешимости системы уравнений, получаемых путем дифференцирования по $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ квадратичной формы

$$\lambda x_1^2 + \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j,$$

т.е. системы уравнений

$$2\lambda x_1 + \sum_{j=1}^{n} (d_{1j} + d_{j1}) x_j = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (d_{ij} + d_{ji}) x_i = 0, \qquad i = 2, \ldots, n.$$

Далее, решая эту систему, выражаем все неизвестные через x_1. Исключая $x_2, \ldots, x_n$ в уравнении (5.11), приводим его к виду $e(t)x_1^2 = 1$, где $e(t)$ – положительная функция. Отсюда следует

$$-\frac{1}{\sqrt{e(t)}} \leqslant x_1(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{e(t)}}.$$

Случай вероятностного задания начального состояния. Пусть процесс свободных колебаний подчиняется векторно-матричному уравнению

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}, \qquad t \in I, \tag{5.15}$$

где $\mathbf{A}(t)$ – матрица такая же, как в (5.1), $\mathbf{X} \triangleq [X_1(t) \ldots X_n(t)]^{\mathrm{T}}$ – *векторная случайная функция* (п. 1.3.1), множество возможных реализаций которой определено как множество вещественных непрерывных вектор-функций; и пусть $X_1(t) = U(t)$ – случайная функция, описывающая выходной сигнал, I – замкнутый слева интервал с границей $t = t_0$.

Рассмотрим два следующих варианта первой основной задачи анализа:

– установить соответствие между n-мерными плотностями распределения случайных векторов $\mathbf{X}(t_0)$ и $\mathbf{X}(t)$ для всех $t \in I$,

– установить соответствие между математическими ожиданиями, дисперсиями и корреляционными моментами (п. 1.3.1) случайных величин $X_1(t_0), \ldots, X_n(t_0)$ и $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ (для всех $t \in I$).

В решении обеих задач используется соотношение (5.2) между векторами $\mathbf{x}(t_0)$ и $\mathbf{x}(t)$, координаты которых рассматриваются как значения случайных величин – координат векторов $\mathbf{X}(t_0)$ и $\mathbf{X}(t)$.

Решение первого варианта задачи. Пусть $f_0[x_1, \ldots, x_n]$ – плотность распределения случайного вектора $\mathbf{X}(t_0)$. Перейдем от аргументов $x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)$ к аргументам $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, согласно равенству

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{K}^{-1}(t, t_0)\,\mathbf{x}(t), \tag{5.16}$$

следующему из (5.2), и полученную новую функцию обозначим $f_1[x_1(t), \ldots, x_n(t), t]$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2. (Саати [137]). *Плотность распределения* $f(x_1, \ldots, x_n|t)$ *случайного вектора* $\mathbf{X}(t)$ *связана с функцией* $f_1[x_1(t), \ldots, x_n(t), t]$ *соотношением*

$$f = f_1 \exp[-\int_{t_0}^{t} \mathrm{Sp}\, \mathbf{A}(u)\, du]. \tag{5.17}$$

Доказательство см. в [137, с. 363–365].

Следствие. Пусть процесс описывается уравнением

$$[p^n + b_1(t)p^{n-1} + \ldots + b_n(t)]X = 0 \tag{5.18}$$

с той же областью определения, как в случае уравнения (5.15); $X = X(t)$ – случайная функция описывающая выходной сигнал, множество возможных реализаций которой определено как множество вещественных непрерывных функций. Пусть ставится задача установления соответствия между плотностями распределения векторов $\mathbf{\Xi}(t) \triangleq [X(t) \quad pX(t) \quad \ldots p^{n-1}X(t)]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{\Xi}(t_0)$. Тогда с помощью замены переменных (5.14) преобразуем уравнение (5.18) в уравнение

$$\dot{\mathbf{\Xi}} = \mathbf{C}(t)\mathbf{\Xi}, \tag{5.19}$$

что сводит задачу к рассмотренной выше. Соотношение (5.17) дает решение задачи, выражаемое в данном случае равенством

$$f = f_1 \exp \int_{t_0}^{t} b_1(u)\, du. \tag{5.20}$$

Возвращаясь к теореме 2, заметим, что при найденной плотности распределения $f(x_1, \ldots, x_n|t)$ плотность распределения ее выходного сигнала $U = X_1$ находится путем интегрирования $f(x_1, \ldots, x_n|t)$ по аргументам $x_2, \ldots, x_n$ в пределах от $-\infty$ до ∞.

Решение второго варианта задачи. Ограничимся случаем описания процесса уравнением (5.18). Обозначим

$$\Xi_i(t) \triangleq p^{i-1}X(t), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.21}$$

Предположим, что математические ожидания, дисперсии и корреляционные моменты случайных величин $\Xi_i(t)$, $t \in I$, существуют. Пусть $m_1(t), \ldots, m_n(t)$ – математические ожидания случайных функций $\Xi_i(t)$, $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ – частные решения уравнения (5.3) при начальных условиях соответственно

$$\mathbf{\Xi}(t_0) = [1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0]^{\mathrm{T}}, \ldots, \mathbf{\Xi}(t_0) = [0 \quad \ldots 0 \quad 1]^{\mathrm{T}}. \tag{5.22}$$

Тогда, переходя в обеих частях равенств

$$\Xi_i(t) = \Xi_1(t_0)p^{i-1}\varphi_1(t) + \ldots$$
$$\ldots + \Xi_n(t_0)p^{i-1}\varphi_n(t), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.23}$$

к математическим ожиданиям, получим

$$m_i(t) = m_1(t_0)p^{i-1}\varphi_1(t) + \ldots$$

$$\ldots + m_n(t_0)p^{i-1}\varphi_n(t), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{5.24}$$

Теперь рассмотрим центрированные случайные функции $\overset{\circ}{\Xi}_i(t) \triangleq \Xi_i(t) - m_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Из (5.23) следует

$$\overset{\circ}{\Xi}_i(t)\overset{\circ}{\Xi}_j(t) = \sum_{k,\, l=1}^{n} \overset{\circ}{\Xi}_k(t_0)\overset{\circ}{\Xi}_l(t_0)\,[p^{i-1}\varphi_k(t)]\,p^{j-1}\varphi_l(t),$$

$$i, j = 1, \ldots, n.$$

Переходя в обеих частях этих равенств к математическим ожиданиям, получим

$$R_{ij}(t) = \sum_{k,\, l=1}^{n} R_{kl}(t_0)[p^{i-1}\varphi_k(t)]\,p^{j-1}\varphi_l(t),$$

$$i, j = 1, \ldots, n, \tag{5.25}$$

где при $\alpha \neq \beta$ функция $R_{\alpha\beta} = \mathrm{M}\overset{\circ}{\Xi}_\alpha\overset{\circ}{\Xi}_\beta$ — корреляционный момент случайных величин Ξ_α и Ξ_β; при $\alpha = \beta$ — дисперсия случайных величин Ξ_α и Ξ_β.

Пример 5.3. Рассмотрим уравнение свободных колебаний

$$\ddot{x} = 0, \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{5.26}$$

Найдем плотность распределения вероятностей системы случайных величин $X(t)$, $\dot{X}(t)$ для произвольного значения t из указанного интервала в случае нормального распределения системы случайных величин $X(0) = A_1$, $\dot{X}(0) = A_2$ с плотностью распределения

$$f_0(a_1, a_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{a_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right]. \tag{5.27}$$

Выберем в качестве фундаментальной системы решений уравнения (5.26) систему

$$\varphi_1(t) = 1, \quad \varphi_2(t) = t. \tag{5.28}$$

Тогда соответствующая фундаментальная матрица уравнения (5.7) имеет вид

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.29}$$

Следовательно,

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{5.30}$$

и $\mathbf{L}(t, 0) = \mathbf{\Phi}(t)$. Используя равенство (5.9), получим

$$a_1 = x - t\dot{x}, \qquad a_2 = \dot{x}. \tag{5.31}$$

Учитывая (5.31) в (5.27), найдем

$$f_1(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 2tx\dot{x} + t^2\dot{x}^2}{\sigma_1^2} + \frac{\dot{x}^2}{\sigma_2^2}\right)\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2 - 2tx\dot{x}}{\sigma_1^2} + \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 t^2)\dot{x}^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)\right]. \quad (5.32)$$

В данном примере $b_1 = 0$ и, следовательно (см. (5.22)), $f = f_1$. Найденное распределение также является нормальным.

5.1.2. Оценки решений уравнения свободных колебаний. При решении многих технических задач, связанных с анализом нестационарных линейных систем, вычисление решения уравнения свободных колебаний не является необходимым. Достаточно располагать оценками решений. Эта потребность приводит ко второй основной задаче анализа – к *задаче оценки выходных сигналов* (§ 0.3). Для получения оценок удобнее работать с системой дифференциальных уравнений 1-го порядка, чем с одним дифференциальным уравнением n-го порядка. Подходящей системой для получения эффективных результатов является система уравнений относительно канонических составляющих.

В дальнейшем будем считать, что область I определения уравнения свободных колебаний замкнута слева и $t = 0$ – левая граница.

Простейшие оценки. Обозначим матрицу коэффициентов системы уравнений относительно канонических составляющих (2.39) символом **A**, а символом μ_n обозначим наибольшее характеристическое число эрмитовой матрицы

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^*}{2}, \quad (5.33)$$

где $\mathbf{A}^*$ – матрица, полученная из матрицы **A** путем перехода к комплексно-сопряженным величинам и транспонирования. Введем норму r решения системы (2.39) равенством

$$r = \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2}. \quad (5.34)$$

Тогда, согласно одной из теорем Т. Важевского [141], имеет место оценка

$$r(t) \leqslant r(0) \exp \int_0^t \mu_n(u)\,du. \quad (5.35)$$

Так как в силу первого уравнения системы (2.38)

$$|x| \leqslant r\sqrt{n}, \quad (5.36)$$

то из равенства (5.35) следует оценка

$$|x(t)| \leqslant r(0)\sqrt{n} \exp \int_0^t \mu_n(u)\,du. \quad (5.37)$$

Оценка (5.37) тем сильнее, чем ближе матрица **A** к диагональной.

В случае, когда **A** — диагональная, оценка принимает вид

$$|x(t)| \leqslant r(0)\sqrt{n}\exp\int_0^t \max_i \operatorname{Re}\xi_i(u)\,du. \tag{5.38}$$

Получим теперь оценку другого вида. Для упрощения записи обозначим

$$a_{ij} = \delta_{ij}\xi_i + h_{ij}. \tag{5.39}$$

Тогда система (2.39) примет вид

$$\dot z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) z_j, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{5.40}$$

Суммируя все левые и все правые части уравнений (5.40), получим

$$\dot x = \sum_{j=1}^{n} c_j(t) z_j, \qquad c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}. \tag{5.41}$$

Отсюда на основании неравенства Коши следует

$$|\dot x| \leqslant L(t) r, \quad L(t) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2}. \tag{5.42}$$

Оценивая функцию r с помощью неравенства (5.35), получим

$$x(0) - r(0)\int_0^t L(u)\exp\int_0^u \mu_n(v)\,dv\,du \leqslant$$

$$\leqslant x(t) \leqslant x(0) + r(0)\int_0^t L(u)\exp\int_0^u \mu_n(v)\,dv\,du. \tag{5.43}$$

Фазовые коэффициенты решений системы уравнений относительно канонических составляющих. *Фазовыми коэффициентами* ненулевого решения системы уравнений относительно канонических составляющих в [62] названы величины $e_1, \ldots, e_n$, связанные с каноническими составляющими и нормой решения равенством

$$z_i = r e_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{5.44}$$

Важным для дальнейшего изложения свойством фазовых коэффициентов является их взаимная зависимость, выражающаяся равенством

$$e_1\bar e_1 + \ldots + e_n\bar e_n = 1, \tag{5.45}$$

которое следует из равенств (5.34) и (5.44). Заметим, что в силу непрерывности и дифференцируемости функций $z_i(t)$, функция $r(t)$ также непрерывна и дифференцируема. Так как, кроме того, $r(t) \neq 0$ при $t \in I$ для любого ненулевого решения, то из непрерывности и дифференцируемости упомянутых функций следует непрерывность и дифференцируемость фазовых коэффициентов.

Связь между логарифмической производной нормы решения системы уравнений относительно канонических составляющих и его фазовыми коэффициентами. Из равенства (5.34) следует

$$\dot{r}r = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (\dot{z}_i\bar{z}_i + z_i\dot{\bar{z}}_i). \tag{5.46}$$

Исключая из (5.46) производные величин z_i и $\bar{z}_i$ на основании уравнений (5.40), получим

$$\dot{r}r = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_{ij} + \bar{a}_{ji}}{2} \bar{z}_i z_j. \tag{5.47}$$

Почленно разделив это уравнение на r^2, найдем

$$\frac{\dot{r}}{r} \equiv \frac{d}{dt} \ln r = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_{ij} + \bar{a}_{ji}}{2} \bar{e}_i e_j. \tag{5.48}$$

Формула (5.48) связывает логарифмическую производную нормы решения системы (5.40) с его фазовыми коэффициентами; она позволяет для произвольного момента времени t определить логарифмическую производную нормы решения, если при этом значении t известны фазовые коэффициенты.

Система дифференциальных уравнений относительно фазовых коэффициентов. Вернемся к равенствам (5.44). Продифференцировав эти равенства, получим

$$\dot{z}_i = \dot{r}e_i + r\dot{e}_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.49}$$

Исключая из (5.49) производные канонических составляющих на основании уравнений (5.40), найдем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j = \dot{r}e_i + r\dot{e}_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.50}$$

После почленного деления этих уравнений на r получим

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j - \frac{\dot{r}}{r} e_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.51}$$

Выражая $\dot{r}/r$ по формуле (5.48), найдем

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j - e_i \sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_{ij} + \bar{a}_{ji}}{2} \bar{e}_i e_j. \tag{5.52}$$

Уравнения (5.52) составляют систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно фазовых коэффициентов. Из всех ее решений нас интересуют только те, для которых при $t = 0$ выполняется условие (5.45). Такие решения для всех комбинаций начальных значений фазовых коэффициентов, удовлетворяющих этому условию, существуют и являются единственными.

Уточнение оценок. Оценка (5.37) равнозначна двусторонней оценке

$$\mathrm{Min}_1 x(t) \leqslant x(t) \leqslant \mathrm{Maj}_1 x(t), \tag{5.53}$$

где

$$\mathrm{Min}_1 x(t) = -r(0)\sqrt{n}\exp\int_0^t \mu_n(u)\,du,$$

$$\mathrm{Maj}_1 x(t) = r(0)\sqrt{n}\exp\int_0^t \mu_n(u)\,du$$

– соответственно миноранта и мажоранта решения. Если рассматривается конечный интервал времени, то эту оценку можно неограниченно уточнять. Способы уточнения для вещественных решений уравнения свободных колебаний предложены в [62] и состоят в построении последовательностей мажорант $\mathrm{Maj}_k x(t)$ и минорант $\mathrm{Min}_k x(t)$ удовлетворяющих следующим условиям:

$$\mathrm{Min}_1 x(t) \leqslant \mathrm{Min}_2 x(t) \leqslant \ldots \leqslant x(t) \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant \mathrm{Maj}_2 x(t) \leqslant \mathrm{Maj}_1 x(t), \tag{5.54}$$

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{Min}_k x(t) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{Maj}_k x(t) = x(t). \tag{5.55}$$

В этих способах используется система уравнений, получаемая из системы (5.52) при замене переменных $e_1, \ldots, e_n$ переменными $f_1, \ldots, f_n$ по следующим правилам:

а) для индексов i, соответствующим вещественным функциям $\xi_i(t)$

$$f_i = e_i, \tag{5.56}$$

б) для индексов j и k; соответствующих комплекснозначным комплексно сопряженным функциям $a_{jj}(t)$ и $a_{kk}(t)$

$$f_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_j + e_k), \qquad f_k = \frac{i}{\sqrt{2}}(e_j - e_k), \qquad i = \sqrt{-1}. \tag{5.56а}$$

Переменные $f_1, \ldots, f_n$ вещественны, если вещественно соответствующее им решение уравнения свободных колебаний.

В новых переменных система (5.52) принимает вид

$$\dot{f}_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} f_j - F f_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{5.57}$$

где

$$F = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} f_i f_j, \tag{5.58}$$

$c_{ij} \equiv c_{ij}(t)$ – вещественные коэффициенты, выраженные через коэффициенты $a_{kl}, k, l = 1, \ldots, n$. Если индексы канонических составляющих распределены так, что в системе (5.40) коэффициенты $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{n-2m,\, n-2m}$ вещественны, а коэффициенты $a_{n-2m+1,\, n-2m+1}$ и $a_{n-m+1,\, n-m+1}, \ldots, a_{n-m,\, n-m}$ и a_{nn} комплексно сопряженные, то формулы коэффициентов c_{ij} имеют [74] вид

$$c_{ij} = a_{ij} \text{ при } i, j \leqslant n - 2m.$$

$$c_{ij} = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\, a_{ij}, \qquad c_{i,j+1} = -\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\, a_{ij}$$

$$\text{при } i \leqslant n-2m, \qquad n - 2m < j \leqslant n - m;$$

$$c_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Re}\, a_{ij},\; c_{m+i,j} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Im}\, a_{ij}$$

$$\text{при } n < 2m < i \leqslant n - m, \qquad j \leqslant n - 2m;$$

$$c_{ij} = \mathrm{Re}(a_{ij} + a_{i,j+m}), \quad c_{i,j+m} = \mathrm{Im}(a_{i,j+m} - a_{ij}),$$

$$c_{i+m,j} = \mathrm{Im}(a_{ij} + a_{i,j+m}), \quad c_{i+m,\, j+m} = \mathrm{Re}(a_{ij} - a_{i,j+m})$$

$$\text{при } n - 2m < i, \qquad j \leqslant n - m.$$

Первый способ. При заданных начальных условиях для решения уравнения свободных колебаний строятся последовательности минорант и мажорант функций $f_i(t)$ на основе уравнения (5.57) и $r(t)$ – на основе уравнения

$$\frac{\dot{r}}{r} = F, \tag{5.59}$$

следующего из (5.48) и (5.58). Эти последовательности обладают свойствами, аналогичными свойствам (5.54) и (5.55) последовательностей минорант и мажорант решения уравнения свободных колебаний. Далее, на основе равенства

$$x(t) = r \sum_{i=1}^{n-2m} f_i + r\sqrt{2} \sum_{i=n-2m+1}^{n-m} f_i, \tag{5.60}$$

(в котором предполагается указанное выше распределение индексов канонических составляющих) строятся последовательности мажорант и минорант функции $x(t)$ [62].

Второй способ. Из уравнений (5.57)–(5.59) следует

$$\frac{d(rf_i)}{dt} = r \sum_{j=1}^{n} c_{ij} f_j, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{5.61}$$

Сохраняя индексацию переменных систем уравнений относительно канонических составляющих, принятую при изложении первого способа, на основании уравнения (5.61) и указанной выше замены переменных $e_1, \ldots, e_n$ на $f_1, \ldots, f_n$ получим

$$\dot{x}(t) = r \sum_{j=1}^{n-m} q_j f_j, \tag{5.62}$$

где

$$q_j = \sum_{i=1}^{n-2m} c_{ij} + \sqrt{2} \sum_{i=n-2m+1}^{n-m} c_{ij}. \tag{5.63}$$

Обозначив

$$\chi(t) \triangleq \min \sum_{j=1}^{n} q_j(t) f_j, \tag{5.64}$$

где минимум в правой части ищется при условиях $f_1^2 + \ldots + f_n^2 = 1$ (следует из (5.45)) и

$$\text{Min}\, f_i \leqslant f_j \leqslant \text{Maj}\, f_j, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{5.65}$$

и обозначив

$$\xi(t) \triangleq \max \sum_{j=1}^{n} q_j(t) f_j, \tag{5.66}$$

где максимум ищется при тех же условиях, в силу уравнения (5.62) получим

$$r(t)\chi(t) \leqslant \dot{x}(t) \leqslant \xi(t) r(t). \tag{5.67}$$

Оценивая функцию $r(t)$ минорантой и мажорантой, получим следующие формулы для минорант и мажорант функции $x(t)$:

$$\text{Min}\, x(t) = x(0) + \int_0^t \min[\chi(u)\text{Min}\, r(u),$$

$$\chi(u)\,\text{Maj}\, r(u)]\, du,$$

$$\text{Maj}\, x(t) = x(0) + \int_0^t \max[\xi(u)\text{Min}\, r(u),$$

$$\xi(u)\,\text{Maj}\, r(u)]\, du. \tag{5.68}$$

По вопросам точности оценок и построения последовательностей оценок, удовлетворяющих условиям (5.55) и (5.54), справедливы замечания, сделанные в конце изложения первого способа.

Другие способы получения мажорантных и минорантных оценок решения уравнения свободных колебаний, связанные с переходом к системе уравнений относительно так называемых "взвешенных канонических составляющих" см. в [62, с. 133–141].

П р и м е р 5.4. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} - (t^2 + 1)x = 0 \tag{5.69}$$

Каноническое преобразование при $\xi_{1,2}(t) = \lambda_{1,2}(t) \equiv \pm\sqrt{t^2+1}$ переводит это уравнение в систему 2-го порядка вида (2.39) со следующими коэффициентами h_{ij}:

$$h_{11} = -h_{12} = -h_{21} = h_{22} = -\frac{t}{2(t^2+1)}.$$

Таким образом, система (2.39) в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= -\left(\sqrt{t^2+1} + \frac{t}{2(t^2+1)}\right) z_1 + \frac{t}{2(t^2+1)} z_2, \\ \dot z_2 &= \frac{t}{2(t^2+1)} z_1 + \left(\sqrt{t^2+1} - \frac{t}{2(t^2+1)}\right) z_2. \end{aligned} \tag{5.70}$$

Найдем оценки частного решения уравнения (5.69), удовлетворяющего начальным условиям $x(0) = 1, \dot x(0) = -1$. Из системы (5.70) для $t = 0$ найдем $z_1(0) = 1$, $z_2(0) = 0$. Следовательно, $r(0) = 1$. Матрица коэффициентов системы (5.70) является симметрической и вещественной. Для такой матрицы $\mathbf{B} = \mathbf{A}$. Поэтому характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{B}$ имеет вид

$$\det \begin{bmatrix} -\left(\sqrt{t^2+1} + \dfrac{t}{2(t^2+1)}\right) - \mu & \dfrac{t}{2(t^2+1)} \\ \dfrac{t}{2(t^2+1)} & \sqrt{t^2+1} - \dfrac{t}{2(t^2+1)} - \mu \end{bmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим

$$\mu^2 - \frac{t}{t^2+1}\mu - t^2 - 1 = 0.$$

Решив это уравнение, найдем

$$\mu_{1,2} = -\frac{t}{2(t^2+1)} \mp \sqrt{\frac{t^2}{4(t^2+1)^2} + t^2 + 1}.$$

В силу неравенства (5.35), получим

$$r(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{t^2+1}} \exp\left[-\int_0^t \sqrt{\frac{u^2}{4(u^2+1)^2} + u^2 + 1}\, du\right].$$

График *1* этой оценки для интервала [0, 1] показан на рис. 5.1. Там же для сравнения нанесен график *2* точных значений функции $r(t)$, рассчитанной для оцениваемого частного решения по известной [32] формуле общего решения этого уравнения:

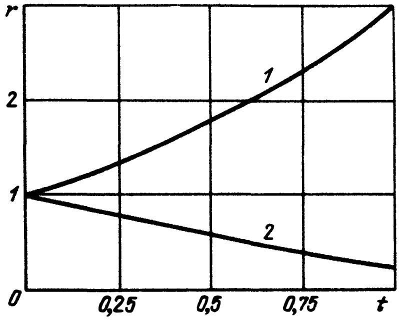
$$x(t) = \left[C_1 + C_2 \int_0^t \exp(-u^2)\, du\right] \exp\frac{t^2}{2}.$$

Оценку решения уравнения (5.69) по формуле (5.37) найдем в виде

$$|x(t)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{t^2+1}} \exp\left[-\int_0^t \sqrt{\frac{u^2}{4(u^2+1)^2} + u^2 + 1}\, du\right].$$

Уточнение этой оценки по первому способу см. в [62].

Оценим теперь рассматриваемое решение уравнения (5.69) с помощью неравенств (5.43). В данном случае $L(t) = \sqrt{2(t^2+1)}$ и неравенства (5.44)



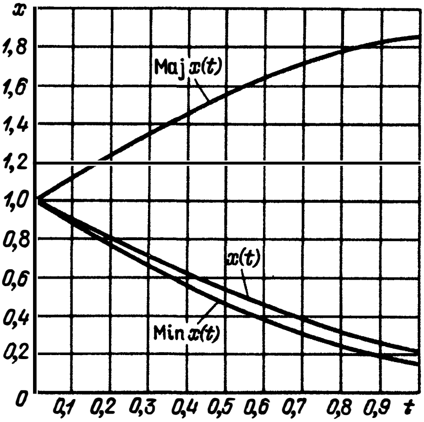


Рис. 5.1. Оценка нормы решения системы уравнений относительно канонических составляющих (5.70)

Рис. 5.2. Мажорантная и минорантная оценки частного решения уравнения (5.69)

принимают вид

$$1-\int_0^t \sqrt[4]{4(u^2+1)}\exp\left[-\int_0^u \sqrt{\frac{v^2}{4(v^2+1)}+v^2+1\,dv}\right]du <$$

$$< x(t) < 1+\int_0^t \sqrt[4]{4(u^2+1)}\exp\left[-\int_0^u \sqrt{\frac{v^2}{4(v^2+1)}+v^2+1\,dv}\right]du.$$

Уточнение этой оценки по второму способу см. в [74, с. 168–169]. Графики функции $x(t)$ и ее оценок представлены на рис. 5.2.

5.1.3. Приближенные аналитические формулы решений уравнения свободных колебаний. Как отмечалось в п. 5.1.1, при заданном для некоторого момента времени t_0 состоянии системы и известной матрице $\mathbf{L}(t, t_0)$ соответствующее частное решение уравнения свободных колебаний находится по формуле (5.10).

Поэтому вопрос о приближенных аналитических формулах решений уравнения свободных колебаний сводится к вопросу об аппроксимации матрицы $\mathbf{L}(t, t_0)$. Обозначив через $\tilde{\mathbf{L}}(t, t_0)$ матрицу, аппроксимирующую $\mathbf{L}(t, t_0)$, приближенную формулу решения запишем в общем виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{E}\tilde{\mathbf{L}}(t, t_0)\boldsymbol{\xi}(t_0).$$

Частные виды этой формулы определяются конкретизацией $\tilde{\mathbf{L}}(t, t_0)$. Одну из формул можно получить, если мы располагаем n формулами приближенных аналитических выражений решений обобщенного характеристического уравнения $\tilde{\zeta}_1(t), \ldots, \tilde{\zeta}_n(t)$ и эти аппроксимации решений удовлетворяют условию

$$\det\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \tilde{\zeta}_1(t) & \dots & \tilde{\zeta}_n(t) \\ \\ \dots & \dots & \dots \\ [\tilde{\zeta}_1(t)+p]^{n-2}\tilde{\zeta}_1(t) & \dots & [\tilde{\zeta}_n(t)+p]^{n-2}\tilde{\zeta}_n(t) \end{bmatrix} \neq 0, \qquad (5.71)$$

$t \in I$,

т.е. могут рассматриваться как аппроксимации элементов некоторой фундаментальной системы решений. Эта формула имеет вид

$$x(t) \approx \tilde{C}_1 \exp \int_{t_0}^{t} \tilde{\zeta}_1(u)\,du + \dots + \tilde{C}_n \exp \int_{t_0}^{t} \tilde{\zeta}_n(u)\,du. \qquad (5.72)$$

При этом вектор $\tilde{\mathbf{C}} \equiv [\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_n]^{\mathrm{T}}$ находится по формуле

$$\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{\Phi}}^{-1}(t_0)\,\boldsymbol{\xi}(t_0), \quad \boldsymbol{\xi}(t) \triangleq [x, px, \dots, p^{n-1}x]^{\mathrm{T}},$$

где $\tilde{\mathbf{\Phi}}(t)$ – матрица в выражении (5.71).

Оценим точность формулы (5.72). Пусть $\zeta_1(t), \dots, \zeta_n(t)$ решения ОХУ, аппроксимируемые функциями $\tilde{\zeta}_1(t), \dots, \tilde{\zeta}_n(t)$, а $C_1^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}$ – значения констант в формуле общего решения

$$x(t) = C_1 \exp \int_{t_0}^{t} \zeta_1(u)\,du + \dots + C_n \exp \int_{t_0}^{t} \zeta_n(u)\,du,$$

соответствующие тому же вектору $\boldsymbol{\xi}(t_0)$. Обозначим

$$x_k(t) = C_k^{(0)} \exp \int_{t_0}^{t} \zeta_k(u)\,du,$$

$$\tilde{x}_k(t) = \tilde{C}_k \exp \int_{t_0}^{t} \tilde{\zeta}_k(u)\,du, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Подстановка функции $\tilde{x}_j(t)$ вместо функции $u(t)$ в левую часть уравнения (5.6) даст

$$\frac{d^n \tilde{x}_j}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1}\tilde{x}_j}{dt^{n-1}} + \dots + b_n \tilde{x}_j = -\vartheta_j \tilde{x}_j, \qquad (5.73)$$

где

$$\vartheta_j = [(\tilde{\zeta}_j + p)^{n-1}\tilde{\zeta}_j] + b_1[(\tilde{\zeta}_j + p)^{n-1}\tilde{\zeta}_j] + \dots + b_n.$$

Следовательно, функция $\tilde{x}_j(t)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{d^n \tilde{x}_j}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1}\tilde{x}_j}{dt^{n-1}} + \dots + b_{n-1}\frac{d\tilde{x}_j}{dt} + (b_n + \vartheta_j)\tilde{x}_j = 0,$$

в котором коэффициент $b_n + \vartheta_j$, вообще говоря, — комплексно-значная функция t.

Введем переменные $u_1, \ldots, u_n$, характеризующие погрешность аппроксимации, равенствами $u_j = \tilde{x}_j - x_j$, $j = 1, \ldots, n$. Вычитая из уравнения (5.73) уравнение

$$\frac{d^n x_j}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} x_j}{dt^{n-1}} + \ldots + b_n x_j = 0,$$

найдем

$$\frac{d^n u_j}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} u_j}{dt^{n-1}} + \ldots + b_n u_j = -\vartheta_j \tilde{x}_j. \tag{5.74}$$

Следовательно, переменная u_j удовлетворяет уравнению (5.74). Правая часть этого уравнения нам известна, начальные условия для переменной u_j в силу построения функций $\tilde{x}_j(t)$ и $x_j(t)$ — ненулевые. Применив к уравнению (5.74) каноническое преобразование, определенное подстановкой

$$u_j = v_{j1} + \ldots + v_{jn},$$

$$\frac{du_j}{dt} = \tilde{\zeta}_1 v_{j1} + \ldots + \tilde{\zeta}_n v_{jn}, \ldots,$$

$$\frac{d^{n-1} u_j}{dt^{n-1}} = [(\tilde{\zeta}_1 + p)^{n-2} \tilde{\zeta}_1] v_{j1} + \ldots + [(\tilde{\zeta}_n + p)^{n-2} \tilde{\zeta}_n] v_{jn},$$

получим систему уравнений относительно канонических составляющих $v_{j1}, \ldots, v_{jn}$ в виде

$$\dot{v}_{jr} = \tilde{\zeta}_r v_{jr} + \sum_{j=1}^{n} h_{rs} v_{js} - \frac{\vartheta_j \tilde{x}_j w_{nr}}{W}, \qquad r = 1, \ldots, n, \tag{5.75}$$

где W — определитель в левой части (5.71), w_{nr} — алгебраическое дополнение его элемента n-й строки r-го столбца, h_{rs} — коэффициенты, определяемые по формуле $h_{rs} = -w_{nr} \vartheta_s / W$.

Переходя в уравнениях (5.75) к комплексно сопряженным величинам, умножая r-е уравнение системы (5.75) на $\bar{v}_{jr}$, а r-е уравнение новой системы — на v_{jr} и почленно складывая все уравнения, получим

$$2\dot{r}_j r_j = r_j^2 \sum_{r=1}^{n} [(\tilde{\zeta}_r + \bar{\tilde{\zeta}}_r) e_{jr} \bar{e}_{jr} +$$

$$+ \bar{e}_{jr} \sum_{s=1}^{n} h_{rs} e_{js} + e_{jr} \sum_{s=1}^{n} \bar{h}_{rs} \bar{e}_{js}] -$$

$$- \frac{\vartheta_j \tilde{x}_j r_j}{W} \sum_{r=1}^{n} w_{nr} e_{jr} - \frac{\bar{\vartheta}_j \bar{\tilde{x}}_j r_j}{\bar{W}} \sum_{r=1}^{n} \bar{w}_{nr} e_{jr}, \tag{5.76}$$

где

$$r_j = \sqrt{v_{j1}\bar{v}_{j1} + \ldots + v_{jn}\bar{v}_{jn}},$$

$$e_{jr} = \frac{v_{jr}}{r_j}, \quad r = 1, \ldots, n.$$

Из уравнения (5.76) следует

$$\dot{r}_j \leqslant r_j \mu_n + \nu_j, \tag{5.77}$$

где

$$\mu_n = \max_{\|e_j\| = 1} \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{n} [(\tilde{\zeta}_r + \bar{\tilde{\zeta}}_r) e_{jr} \bar{e}_{jr} +$$

$$+ (h_{rs} + \bar{h}_{sr}) \bar{e}_{jr} e_{js}], \quad \|e_j\| = \sqrt{|e_{j1}|^2 + \ldots + |e_{jn}|^2},$$

$$\nu_j = \left| \frac{\vartheta_j \tilde{x}_j}{W} \right| \sqrt{\sum_{r=1}^{n} w_{nr} \bar{w}_{nr}}.$$

В силу формулы общего решения линейного дифференциального уравнения 1-го порядка и неравенства (5.77) получим

$$r_j(t) \leqslant \exp \int_{t_0}^{t} \mu_n(u)\, du \{ \int_{t_0}^{t} \nu_j(t) \times$$

$$\times \exp [-\int_{t_0}^{t} \mu_n(u)\, du]\, dt + r_j(t_0)\}. \tag{5.78}$$

Отсюда в силу неравенства $|u_j| \leqslant \sqrt{n}\, r_j$ (п. 5.1.2) следует оценка для $u_j(t)$.

Полагая $j = 1, \ldots, n$, получим систему неравенств, при помощи которой можно оценить точность аппроксимации решения, найденной по формуле (5.72). Однако это можно сделать только с точностью до неизвестной величины $r_j(t_0)$. Неопределенность $r_j(t_0)$ следует из неопределенности констант $C^{(0)}$, ..., $C_n^{(0)}$ (в силу того, что решения ОХУ $\zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t)$ неизвестны). Можно более определенно оценить точность формулы (5.72), если применить тот же путь получения оценок, но рассмотреть вместо разностей $\tilde{x}_j - x_j$ разность $\tilde{x} - x$, где $\tilde{x} = \tilde{x}_1 + \ldots + \tilde{x}_n$, и перейти к системе уравнений относительно канонических составляющих этой разности [72]. Неопределенность пропадет ввиду одинаковых начальных условий для x и $\tilde{x}$.

Наличие точностных оценок обосновывает применение формулы (5.72) для расчета частных решений. Если в каком-либо случае точность оказывается неудовлетворительной, то можно уточнить формулу. Укажем на две возможности уточнения: 1) уточнение приближенных выражений решений ОХУ; 2) внесение в формулу в виде слагаемого поправки, вычисляемой по какому-либо известному методу приближенного интегрирования линейных дифференциальных уравнений.

Уточнение приближенных формул решений ОХУ можно произвести либо с помощью того же алгоритма, который был применен для отыскания использованных приближенных формул решений (путем перехода к следующей итерации), либо заменяя алгоритм.

Для внесения поправки в виде слагаемого можно применить метод Щелкунова приближенного интегрирования. Изложим метод применительно к уравнению свободных колебаний и найденному по приближенной формуле исходному приближенному выражению решения. Пусть $x_0(t)$ – приближенное решение уравнения (5.6), полученное по примененной приближенной формуле частного решения. Тогда оно удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению

$$\frac{d^n x}{dt^n} + b'_1(t)\ \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + b'_n(t)\, x = 0,$$

которое получается после раскрытия определителя из уравнения

$$\det\begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 & x \\ \tilde{\zeta}_1 & \ldots & \tilde{\zeta}_n & \dfrac{dx}{dt} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\tilde{\zeta}_1 + p)^{n-1}\tilde{\zeta}_1 & \ldots & (\tilde{\zeta}_n + p)^{n-1}\tilde{\zeta}_n & \dfrac{d^n x}{dt^n} \end{bmatrix} = 0.$$

Поправки к исходному приближенному решению находятся как решения $x_k(t)$ дифференциальных уравнений

$$\sum_{i=0}^{n} b'_1(t)\ \frac{d^{n-i} x_k(t)}{dt^{n-i}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [b'_i(t) - b_i(t)]\ \frac{d^{n-1} x_{k-1}(t)}{dt^{n-i}}\ ,$$

$$b'_0(t) = 1, \quad k = 1, 2, \ldots$$

с нулевыми начальными условиями; k-е приближение $x^{(k)}(t)$ решения уравнения (2.6) определяется по формуле

$$x^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{k} x_j(t)\ .$$

П р и м е р 5.5. Если в случае уравнения 2-го порядка воспользоваться приближенной формулой решений ОХУ (2.96) (п. 2.1.10), то приближенную формулу его общего решения в соответствии с (5.72) получим [12] в виде

$$x(t) \approx |D|^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} b_1 dt\right) \times$$
$$\times \left[C_1 \exp\int_{t_0}^{t} \sqrt{D} dt + C_2 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \sqrt{D} dt\right)\right],$$

где $D = \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{\dot{b}_1}{2} - b_2$.

При $b_1 \equiv 0$ эта формула превращается в формулу, известную как *БВК-аппроксимация* [121].

П р и м е р 5.6. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + ct^\nu x = 0, \qquad c \neq 0, \qquad \nu > -2, \qquad 0 < t < \infty. \tag{5.79}$$

Принимая коэффициенты уравнения (5.79) в качестве исходных аппроксимаций $c_{1,2}^{(0)}$ коэффициентов корневого уравнения, предполагая, что

$$t^{\nu+2} \neq \frac{\nu^2}{16c}, \tag{5.80}$$

и применяя метод вычисления коэффициентов корневого уравнения, приведенный в п. 2.1.11, получим первые аппроксимации этих коэффициентов: $c_1^{(1)} = \nu/2t$, $c_2^{(1)} = ct^\nu$. Соответствующие им аппроксимации решений ОХУ имеют вид

$$\zeta_{1,2}^{(1)} = -\frac{\nu}{4t} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu^2}{4t^2} - 4ct^\nu}.$$

Коэффициенты h_{ij} $(i, j = 1, 2)$ получим в виде

$$h_{11} = -h_{21} = +\frac{\nu}{4t^2}\left(\frac{\nu}{2} + 1\right)\theta^{-\frac{1}{2}} + \frac{\nu}{4t} - \frac{1}{4}\frac{d\ln\theta}{dt},$$

$$h_{22} = -h_{12} = -\frac{\nu}{4t^2}\left(\frac{\nu}{2} + 1\right)\theta^{-\frac{1}{2}} + \frac{\nu}{4t} - \frac{1}{4}\frac{d\ln\theta}{dt},$$

где

$$\theta = \frac{\nu^2}{4t^2} - 4ct^\nu.$$

Применив формулы (5.72) и положив $\tilde{\zeta}_i = \zeta_i^{(1)} + h_{ii}$,

$$\tilde{x}(t) = \theta^{-\frac{1}{4}}\left\{C_1 \exp\int \theta^{-\frac{1}{2}}\left(2ct^\nu + \frac{\nu}{4t^2}\right)dt + \right.$$
$$\left. + C_2 \exp\int\left[-\theta^{-\frac{1}{2}}\left(2ct^\nu + \frac{\nu}{4t^2}\right)\right]dt\right\}.$$

Таблица 5.1

Решение уравнения (5.41) и его аппроксимации

t	2,0	2,25	2,5	2,75	3,0	3,25	3,5
x точн.	−0,015	−0,282	−0,510	−0,658	−0,695	−0,603	−0,392
x прибл.	−0,015	−0,281	−0,506	−0,652	−0,687	−0,593	−0,385
t	3,75	4,0	4,25	4,5	4,75	5,0	5,25
x точн.	−0,096	0,220	0,482	0,618	0,584	0,382	0,063
x прибл.	−0,093	0,219	0,477	0,610	0,576	0,375	0,061
t	5,5	5,75	6,0	6,25	6,5	6,75	7,0
x точн.	−0,274	−0,519	−0,582	−0,435	−0,123	0,236	0,498
x прибл.	−0,272	−0,513	−0,575	−0,428	−0,119	0,235	0,492
t	7,25	7,5	7,75	8,0	8,25	8,5	8,75
x точн.	0,550	0,362	0,011	−0,344	−0,533	−0,459	−0,152
x прибл.	0,542	0,355	0,009	−0,340	−0,526	−0,452	−0,148
t	9,0	9,25	9,5	9,75	10,0		
x точн.	0,233	0,492	0,480	0,197	−0,199		
x прибл.	0,231	0,486	0,473	0,193	−0,198		

В частности, для $c = 1$, $\nu = 1$

$$\tilde{x}(t) = C_1'\left(t - \frac{1}{16t^2}\right)^{-\frac{1}{4}} \times$$

$$\times \sin\left\{\frac{1}{6}\sqrt{16t^3 - 1} - \frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{4\sqrt{t^3}} + C_2'\right\}, \tag{5.81}$$

где C_1' и C_2' – константы. Как известно, решение уравнения (5.79) при $c = 1$ и $\nu = 1$ выражается через функции Бесселя и для начальных условий $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ имеет вид [93]

$$x(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt[3]{3}}\sqrt{t}\,J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right), \tag{5.82}$$

а его производная – вид

$$\dot{x}(t) = \sqrt[3]{3}\,\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\sqrt{t}\,J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right). \tag{5.83}$$

При $t = 2$, согласно (5.82) и (5.83), имеем

$$x = -0{,}015, \qquad \dot{x} = -1{,}097. \tag{5.84}$$

При $t > 2$ условие (5.80) выполняется, и, следовательно, формула (5.81) применима.

Расчет решения по формуле (5.81) при начальных условиях (5.84) на интервале [2, 10] показал, что расхождение между решением и его аппроксимацией не превышает по величине 0,010. Данные приближенного и точного

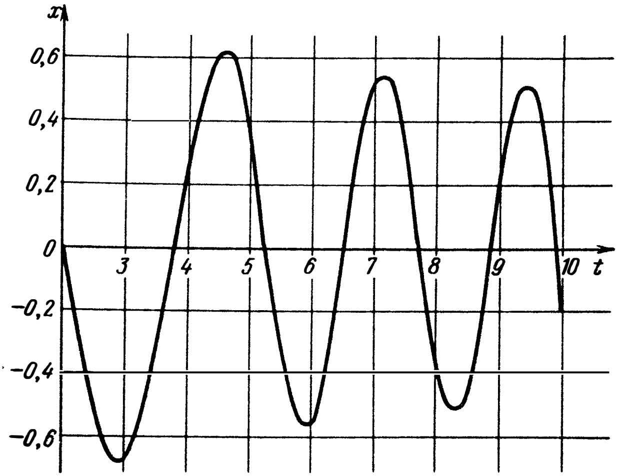


Рис. 5.3. Частное решение уравнения (5.79)

расчета приведены в табл. 5.1, график решения – на рис. 5.3; график аппроксимации решения отсутствует, так как он практически совпадает с графиком решения.

5.1.4. Амплитуда и темп свободных колебаний. Разнотемповые системы. Если система не обладает внутренней стационарностью, то ее свободные колебания являются сложным процессом, для описания которого привлекается большой объем данных. Однако на практике часто свободные колебания характеризуют более скупо, отражая в характеристиках процесса прежде всего ответы на вопросы:

– насколько значителен процесс? (с каким размахом он протекает?),

– каков темп процесса? (какова быстрота изменения выходного сигнала?).

В определении математического содержания этих характеристик нет общего стандарта. Более того, чаще всего такое определение просто отсутствует. Отсюда – целесообразность введения строго определенных математически числовых характеристик размаха и темпа свободных колебаний. Очевидно, из-за возможного изменения размаха и темпа процесса во времени эти характеристики должны зависеть от времени. Ниже предлагаются такие характеристики для систем, уравнения свободных колебаний которых удовлетворяют следующим условиям:

– существует кольцо R_ξ^t (п. 2.1.7), содержащее одну и только одну фундаментальную систему решений обобщенного характеристического уравнения;

– не существует другого кольца R''_ζ, обладающего тем же свойством при другой фундаментальной системе решений обобщенного характеристического уравнения;

– элементы фундаментальной системы корней в кольце R'_ζ определены во всей области определения уравнения свободных колебаний.

Общее решение уравнения свободных колебаний такой системы имеет вид

$$x(t) = C_1 \exp \int_{t_0}^{t} \zeta_1(u)\,du + \ldots + C_n \exp \int_{t_0}^{t} \zeta_n(u)\,du,$$

где $C_1, \ldots, C_n$ – произвольные числа, $\zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t)$ – фундаментальная система корней ОХУ в кольце R'_ζ.

Выходные сигналы в реальных процессах свободных колебаний описываются вещественными решениями. Поэтому далее будем предполагать, что $x(t)$ – вещественная функция. При этом условии из вещественности коэффициентов уравнения свободных колебаний и единственности фундаментальной системы корней ОХУ в кольце R'_ζ следует, что система $(\zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t))$ состоит из вещественных элементов и комплексно сопряженных пар.

Амплитудой свободных колебаний назовем функцию

$$a(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |C_i|^2 \exp 2 \int_{t_0}^{t} \operatorname{Re} \zeta_i(u)\,du}. \tag{5.85}$$

Темпом свободных колебаний назовем интервал $[b(t), c(t)]$, где

$$b(t) = \min_i |\zeta_i(t)|, \qquad c(t) = \max_i |\zeta_i(t)|.$$

Введенные определения обобщают обычные представления об амплитуде и темпе свободных колебаний простейших линейных стационарных систем. В частности, при $n = 2$ для системы с характеристическим уравнением $\lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0$ при условии $b_1^2 > 4b_2$ амплитуда свободных колебаний в смысле определения (5.85) совпадает с амплитудой свободных колебаний в обычном смысле. Если для той же системы $b_1 = 0$, то, интервал, характеризующий темп свободных колебаний, стягивается в точку, и темп равен частоте колебаний. При $n = 1$ решение уравнения свободных колебаний стационарной системы имеет вид $x(t) = C\exp\alpha t$, где C и α – константы; темп здесь равен $|\alpha|$. Очевидно, нулевой темп имеют только свободные колебания, в которых выходной сигнал – постоянный.

Опираясь на понятие "темп свободных колебаний", можно выделить один важный класс нестационарных линейных систем, а именно класс систем, допускающих декомпозицию системы на подсистемы, темпы свободных колебаний которых при каждом значении t характеризуются непересекающимися интервалами. Такие системы будем называть *разнотемповыми*.

Понятие "разнотемповость" системы часто встречается в литературе [15, 16] и, так же как в приведенном выше определении, связывается с возможностью декомпозиции системы на подсистемы, свободные колебания которых протекают с различными темпами. Однако в известных автору работах отсутствует математическое определение понятия "темп процесса" и математически сформулированный определяющий признак разнотемповости системы.

5.1.5. Свободные колебания, развивающиеся из бесконечного прошлого. Предположим, что момент t_0 возмущения основного состояния покоя системы при произвольных и не зависящих от t_0 начальных данных неограниченно удаляется в прошлое ($t_0 \to -\infty$). Тогда если на конечном интервале наблюдения реакции системы (пусть этот интервал – $[0, T]$) при указанном варьировании момента возмущения с произвольным дискретным изменением t_0 последовательность функций, описывающий выходной сигнал системы, стремится к какой-либо предельной функции, то можно представить себе определенную модель свободных колебаний, которую мы назовем *свободными колебаниями, развивающимися из бесконечного прошлого*. Упомянутая предельная функция описывает выходной сигнал в этом процессе. Если предельная модель существует, то мы говорим, что процесс *физически определен* (§ 0.3).

Свойство физической определенности процесса обусловлено некоторыми свойствами свободных колебаний системы. Для системы конечного порядка в случае, когда ее свободные колебания описываются дифференциальным уравнением порядка n, введя норму решения r в виде

$$r = \sqrt{|x|^2 + |px|^2 + \ldots + |p^{n-1}x|^2},$$

достаточное условие физической определенности процесса можно сформулировать следующим образом: для произвольных положительных чисел δ и ϵ можно указать такое отрицательное число T, что при любом $t_0 \leqslant T$ для всех частных решений уравнения свободных колебаний, удовлетворяющих неравенству $r(t) < \delta$, справедливо неравенство $r(0) < \epsilon$. Очевидно, предельная модель свободных колебаний в этом случае – основное состояние покоя (см. § 0.8).

§ 5.2. Свободные колебания односвязных систем с распределенными параметрами

Рассмотрим односвязную одномерную систему с распределенными параметрами, определенную в области пространственного аргумента $l \in [0, L]$ и времени $t \in [0, T]$. Пусть $x(t, L)$ – выходной сигнал и пусть свободные колебания системы описываются однородным дифференциальным уравнением с частными производными

$$\sum_{i=0}^{n} P_i \frac{\partial^i x(t,l)}{\partial t^i} = 0,$$

где P_i – дифференциальный оператор вида

$$P_i = \sum_{j=0}^{m_i} a_{ij}(t,x) \frac{\partial^{m_i-j}}{\partial l^{m_i-j}},$$

которое отражает динамические свойства системы, и однородными граничными условиями

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left[b_{ki0}(t,l) \frac{\partial^i x(t,l)}{\partial l^i} \bigg|_{l=0} + b_{ki1}(t) \frac{\partial^i x(t,l)}{\partial l^i} \bigg|_{l=L} \right] = 0,$$

$$k = 0, 1, \ldots, m; \qquad m = \max_i m_i$$

(где $b_{ki0}(t, l)$ и $b_{ki1}(t, l)$ – непрерывные функции), отражающими связи в системе. Охарактеризуем задачу расчета свободных колебаний при начальных условиях

$$\frac{\partial^j x(t,l)}{\partial t^j} \bigg|_{t=0} = \varphi_j(l), \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

(где $\varphi_j(l)$ – непрерывные функции), вполне определяющих (но не переопределяющих) начальное состояние системы, и при $l = 0$, $l = L$ не противоречащих граничным условиям.

Определенная выше система уравнений процесса содержит в качестве неизвестной функцию двух аргументов $x(t, l)$, в то время как выходной сигнал $x(t, L)$ (то, что нас интересует) описывается функцией одного аргумента – сечением при $l = L$ функции $x(t, l)$. Для расчета свободных колебаний в принятой постановке достаточно селективного решения задачи – такого решения, при котором находится только функция $x(t, L)$. Однако все известные методы приближенного решения дифференциальных уравнений с частными производными связаны с поиском функции $x(t, l)$. Это значит, что вместо требуемого расчета свободных колебаний односвязной системы рассчитываются свободные колебания многосвязной системы с континуальным множеством выходов. К такому же выводу можно прийти, если рассмотреть задачу расчета свободных колебаний для других частных видов систем с распределенными параметрами.

Следовательно, задача расчета свободных колебаний рассматриваемой односвязной системы с распределенными параметрами решается в рамках теории многосвязных систем. Пути ее решения освещены ниже в § 7.1.

Переход к многосвязной системе при расчете свободных колебаний является правилом для любых систем с распределенными параметрами, в описании которых участвуют дифференциальные уравнения с частными производными. Однако если процесс описывается уравнением свободных колебаний, являющимся обыкновенным дифференциальным уравнением бесконечного порядка (см. § 2.3 и п. 3.1.2), возможны методы расчета основанные на приближенном интегрировании этого дифференциального уравнения. В этом случае система с распределенными параметрами при расчете свободных колебаний рассматривается как односвязная.

Глава 6

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ

Во введении (§ 0.3) мы отметили три основные задачи анализа систем. В данной главе приводятся различные варианты постановок и решений первых двух задач для односвязных систем в предположении, что процессы в системе развиваются из основного состояния покоя, т. е., что в системе происходят вынужденные колебания

Для решения этих задач необходимо оговорить множество, к которому принадлежат входные сигналы. В дальнейшем предполагается , что детерминированный входной сигнал описывается комплексной функцией $y(t)$, непрерывной всюду, за исключением, возможно, дискретного множества точек, имеющей в точках нарушения непрерывности либо разрывы 1-го рода (скачки), либо включения типа дельта-функции (либо и то и другое), причем на любом конечном интервале множество таких точек конечно, а функция, описывающая безымпульсную составляющую сигнала, является *функцией с ограниченной вариацией* (п. 1.2.1). Все такие функции и обобщенные функции, образуют линейное пространство, которое обозначим символом L'_C, а все числовые функции этого пространства образуют его подпространство, которое обозначим символом L_C. Очевидно, L_C является подпространством пространства $Q(I)$ всех кусочно непрерывных функций $L'_C \in Q'(I)$ (см. п. 1.2.1), а множество $Y_{a \cup F}$ (см. § 0.5) является некоторым подпространством пространства $Q'(a \cup F)$.

Рассматривая стохастические входные сигналы, ограничимся только такими, реализации которых описываются вещественными функциями или обобщенными функциями. Будем предполагать, что стохастический входной сигнал в общем случае описывается обобщенной случайной функцией $Y(t)$ (п. 1.3.5) и состоит из двух стохастически независимых компонент: сигнала, описываемого случайной функцией, и *стохастического импульса,* или *стохастического потока импульсов* (п. 1.3.4). Множество возможных реализаций обобщенной случайной функции указанного вида определим как линейное пространство L'^r_C, образованное вещественными элементами пространства L'_C.

§ 6.1. Процессы, вызванные детерминированными входными сигналами

6.1.1. Первая основная задача анализа. Рассмотрим первую основную задачу анализа в следующей постановке: *установить соответствие между заданным множеством входных сигналов, приложенных в момент t_0 и описываемых числовыми или обобщенными функциями, принадлежащими некоторому линейному пространству L_Y, и множеством U_F^* выходных сигналов, порождаемых входными сигналами в $F(t_0)$*. Под соответствием между упомянутыми множествами понимается отображение множества входных сигналов в заданное множество выходных сигналов U_F, а под задачей установления соответствия – определение правила отображения, выделение в множестве U_F подмножества U_F^* и выяснение является ли соответствие между L_Y и U_F^* *взаимно однозначным* [40, с. 370].

Ограничимся *нормальными системами* (см. начало гл. 3). В этом случае с учетом указанных в п. 1.2.1 свойств функций, описывающих сигналы, в качестве множества L_Y можно принять множество L'_C, а в качестве множества U_F – множество Q, элементы которого определены на $F(t_0)$. При этом множества U_F и U_F^* также являются линейными пространствами. В дальнейшем предполагается указанный выше вид множеств L_Y и U_F.

Рассмотрим четыре варианта определения отображения $L_Y \to U_F^*$, использующие следующие внешние характеристики системы: импульсную переходную функцию, передаточную функцию, спектр системы, передаточный функционал. Эти варианты различаются структурой оператора A_{uy}, ставящего в соответствие каждому элементу $y(t) \in L'_C$ некоторую определенную на $F(t_0)$ функцию $u(t) \in L_C$ $[u(t) = A_{uy}\, y(t)]$.

В дальнейшем при обозначении выходных сигналов символ u заменим символом x.

Решение задачи с использованием импульсной переходной функции. Если входной сигнал является безымпульсным и на интервале $(0, T)$, где $T \leqslant \infty$, известны описывающая его функция $y(t)$ и импульсная переходная функция системы $w(t, u)$, причем первая функция равна нулю при $t < 0$, а вторая непрерывна или *кусочно-непрерывна* [40, с. 106] по обоим аргументам и при всех $t \in (0, T)$ интегрируема по u на любом конечном подынтервале интервала $(0, T)$, то при $t \in (0, T)$ соответствие между входным и выходным сигналами выражает формула

$$x(t) = \int_0^t w(t, u)\, y(u)\, du \equiv \int_0^t w(t, t-\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau. \qquad (6.1)$$

Согласно этой формуле, оператор A_{uy} представляется в виде последовательности следующих операций: 1) в $y(t)$ заменяется t на u, 2) результат умножается на $w(t,u)$, 3) результат интегрируется в пределах от 0 до t.

Если входной сигнал является сигналом общего вида [$y(t) \in \in L'_C$], определенным на $[0, T)$, причем $y(t) = 0$ при $t < 0$ и $w(t,u)$ удовлетворяет на $(0, T)$ указанным выше условиям, то выходной сигнал на $(0, T)$ может иметь скачки. С учетом этой возможности формула (6.1) уточняется следующим образом:

$$x(t) = \int_{0-}^{t} w(t, u) y(u) du. \tag{6.2}$$

При этом функция $x(t)$ определена всюду, кроме моментов приложения импульсов (если в этих точках она имеет разрывы).

Приведенные формулы устанавливают правила отображения множества входных сигналов $L_Y = L'_C$ или $L_Y = L_C$ в множество выходных сигналов $U_F = Q(F)$.

Чтобы интегрирование в правых частях равенств (6.1) и (6.2) было выполнимо аналитически, необходимо располагать аналитическими выражениями функций $w(t,u)$ и $y(u)$, причем в сочетании, допускающем сведение интегралов к табличным. Поскольку импульсную переходную функцию можно получить в упомянутом виде лишь для очень узкого класса систем, то, как правило, для аналитического интегрирования в (6.2) необходимо заменить импульсную переходную функцию ее аналитической аппроксимацией.

Перейдем теперь к случаю, когда момент приложения входного сигнала удален в минус бесконечность. Формула (6.1) для $t > 0$ здесь заменяется формулой

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} w(t, u) y(u) du, \tag{6.3}$$

имеющей смысл только в случае сходимости интеграла. В силу *неравенства Гёльдера* [40] при $y(t) \in L_C$ для сходимости достаточно, чтобы при каком-либо вещественном числе α существовали интегралы

$$\int_{-\infty}^{t} w^2(t, u) \exp \alpha u \, du, \quad \int_{-\infty}^{t} |y(u)|^2 \exp(-\alpha u) du. \tag{6.4}$$

Сходимость интеграла в (6.3), однако, не гарантирует физического существования процесса, рассчитанного по этой формуле, так как процесс может быть *физически не определен* (п. 3.1.4). Физическая определенность процесса является вторым необходимым условием того, чтобы рассматриваемый случай вынужденных колебаний имел смысл, а в совокупности со сходимостью интеграла — достаточным условием этого. Достаточное условие физической определенности процесса для системы, свободные колебания которой описываются дифференциальным уравнением порядка n, приведено в п. 5.1.7.

При $y(t) \in L'_C$ формула (6.3) сохраняет силу, но функция $x(t)$ определена всюду, за исключением, возможно, моментов приложения импульсов. Изменяются также условия сходимости интеграла. Очевидное достаточное условие сходимости: существование вещественного числа α, при котором функция $|w(t,u)| \exp \alpha u$ ограничена на интервале интегрирования и

$$\int_{-\infty}^{t} y(u) \exp(-\alpha u)\, du \tag{6.5}$$

существует.

Выясним теперь, является ли отображение $U_F^* \to L_Y$ однозначным. Ограничимся случаем входных сигналов, описываемых функциями $y(t) \in L_C$ и приложенными в момент $t = 0$. Предположим, что однозначности нет. Тогда существуют два различных входных сигнала, описываемых функциями $y_1(t)$ и $y_2(t)$, порождающие один и тот же выходной сигнал. На основании (6.1) получим

$$\int_0^t w(t,u)[y_1(u) - y_2(u)]\, du = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{6.6}$$

Поскольку оба сомножителя под интегралом *интегрируемы по Лебегу* [39, с. 294–295], то на основании обобщения В.А. Диткиным и А.П. Прудниковым [27, с. 85–86] *теоремы Титчмарша* [140], один из сомножителей должен быть равен нулю. Если системе не является *инвариантной*, т.е. условие $w(t,u) = 0$ при $t \in [0, T]$ не выполняется, то $y_1(t) - y_2(t) = 0$, $t \in [0, T]$, т.е. высказанное выше предположение ошибочно.

Таким образом, сделаем следующий вывод. Если система не является инвариантной, то отображение $U_F^* \to L_Y$ однозначно. Суммируя этот результат с однозначностью отображения $L_Y \to U_F^*$, заключим, что при указанных условиях соответствие между множествами L_Y и U_F^* — взаимно однозначное.

Соотношение между входным и выходным сигналами, устанавливаемое через передаточную функцию. Пусть передаточная функция $W(s, t)$ существует, определена в области $0 \leqslant t < T \leqslant \infty$, $\operatorname{Re} s \geqslant c$ и является в этой области аналитической функцией от s. Пусть входной сигнал приложен в момент $t_0 = 0$ и определен на интервале $[0, T)$. Тогда в зависимости от используемой характеристики сигнала возможны две формулы перехода к выходному сигналу.

1. В качестве характеристики входного сигнала используется его *изображение по Лапласу* $Y(s)$. Очевидно, для этого требуется,

чтобы функция $y(t)$ была определена на интервале $[0, \infty)$ [если $T < \infty$, то ее следует доопределить на интервале $[T, \infty)$] и могла быть преобразована по Лапласу. При этом функция $Y(s)$ является аналитической в некоторой области $\operatorname{Re} s \geqslant c_1$.

Пусть для всех $t \in [0, T)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{c_2 - i\infty}^{c_2 + i\infty} |W(s, t)\, Y(s)|\, ds < \infty, \tag{6.7}$$

где $c_2 = \max(c, c_1)$, $i = \sqrt{-1}$, гарантирующее существование приведенного ниже интеграла. Тогда справедливо равенство ([24, 67])

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_2 - i\infty}^{c_2 + i\infty} W(s, t) Y(s) \exp st\, ds, \quad 0 \leqslant t < T. \tag{6.8}$$

Это – *формула Заде* [146].

2. В качестве характеристики выходного сигнала используется его *левое изображение* $Y(s, t)$. Для этого функция $y(t)$ должна быть определена на интервале $(-\infty, T)$ и преобразуема в смысле левого преобразования Лапласа. Считая, что $y(t) = 0$ при $t < 0$, заключим, что функция $Y(s, t)$ является аналитической во всей комплексной плоскости, за исключением, возможно, бесконечно удаленной точки [40, с. 200]. При выполнении указанных условий и условия

$$\int\limits_{c - i\infty}^{c + i\infty} |W(s, t) Y(-s, t)|\, ds < \infty, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{6.9}$$

гарантирующего существование приведенного ниже интеграла [39, с. 423], выходной сигнал связан [74] с входным сигналом равенством

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c - i\infty}^{c + i\infty} W(s, t) Y(-s, t)\, ds, \quad 0 \leqslant t < T. \tag{6.10}$$

Рассмотрим теперь случай $t_0 \neq 0$. Если входной сигнал приложен в конечный момент времени $t_0 \neq 0$, то, заменяя t на $t_1 = t - t_0$, приходим к рассмотренному выше случаю. Поэтому достаточно рассмотреть случай $t_0 = -\infty$. В этом случае формула (6.8) неприменима, а формула (6.10) остается в силе, если функция $Y(s, t)$ определена и является аналитической функцией от s в области $-\infty < t < T$, $\operatorname{Re} s \geqslant c_1$, где c_1 – вещественное число, удовлетворяющее [74] неравенству $c_1 < -c$. Заметим, что, так же как в случае расчета выходного сигнала с использованием импульсной переходной функции, данные расчета, доставляемые формулой (6.10), при $t_0 = -\infty$ адекватны выходному сигналу только тогда, когда процесс физически определен.

С о о т н о ш е н и е м е ж д у с п е к т р а м и в х о д н о г о и в ы х о д н о г о с и г н а л о в. Соотношение между спектрами выходного сигнала $\varphi_x(\Omega)$, входного сигнала $\varphi_y(\Omega)$ и системы $\theta(\Omega, \omega)$ устанавливается [67] следующим равенством:

$$\varphi_x(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_y(\omega)\theta(\Omega, \omega)\, d\omega. \tag{6.11}$$

Равенство (6.11) представляет собой некоторое видоизменение известного соотношения между изображениями Фурье входного и выходного сигналов, заданных на интервале $(-\infty, \infty)$; оно выражает соотношение между изображениями Фурье входного и выходного сигналов, заданных на интервале $(-\infty, T)$ и дополненных нулевыми сигналами на интервале $[T, \infty)$.

Для иллюстрации соотношения (6.11) рассмотрим следующий пример.

П р и м е р 6.1. Пусть система внешне стационарна и такова, что ее спектр существует. Тогда, согласно (3.87),

$$\theta(\Omega, \omega) = 2\pi W(i\omega)\delta(\Omega - \omega), \tag{6.12}$$

где $W(s)$ – передаточная функция системы. Используя (6.12) в (6.11), получим

$$\varphi_x(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_y(\omega)\, W(i\omega)\delta(\Omega - \omega)d\omega = W(i\Omega)\varphi_y(\Omega).$$

С о о т н о ш е н и е м е ж д у в х о д н ы м и в ы х о д н ы м с и г н а л а м и, у с т а н а в л и в а е м о е ч е р е з п е р е д а т о ч н ы й ф у н к ц и о н а л. Если входной сигнал задан на интервале $(-\infty, T)$, где $T \leqslant \infty$, и имеет вид

$$y(t) = C \exp \int_{-\infty}^{T} \zeta(u)\, du,$$

где C – константа, а $\zeta(t)$ принадлежит области определения Z передаточного функционала (п. 3.1.8), то

$$x(t) = CH(\zeta) \int_{-\infty}^{t} \zeta(u)\, du.$$

В случае входного сигнала вида

$$y(t) = \sum_i C_i \exp \int_{-\infty}^{t} \zeta_i(u)\, du, \tag{6.13}$$

где $\zeta_i(t) \in \mathbf{Z}$ и число слагаемых конечно, выходной сигнал имеет вид

$$x(t) = \sum_i C_i H(\zeta_i) \exp \int_{-\infty}^{t} \zeta(u)\, du. \tag{6.14}$$

Если входной сигнал задан на ограниченном слева интервале (t_0, T) и имеет вид

$$y(t) = C \exp \int_{t_0}^{t} \zeta(u)\,du,$$

и если при $t = t_0$ существует состояние системы (характеризуемое вектором состояния s_1), при котором выходной сигнал имеет вид

$$x_1(t) = CH(\zeta) \exp \int_{t_0}^{t} \zeta(u)\,du,$$

то выходной сигнал в процессе вынужденных колебаний $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \tag{6.15}$$

где $x_2(t)$ – выходной сигнал в процессе свободных колебаний, развивающихся из начального состояния, характеризуемого вектором состояния $s_2 = -s_1$.

В случае входного сигнала вида (6.13), составляющие которого удовлетворяют указанным выше условиям, выходной сигнал также можно представить в виде (6.15), но в этом случае $x_1(t)$ – правая часть равенства (6.14), а $x_2(t)$ – выходной сигнал в процессе свободных колебаний, развивающихся из начального состояния, характеризуемого вектором состояния $s_2 = -s_1$, где s_1 – сумма векторов начального состояния системы для парциальных процессов, вызванных каждой составляющей входного сигнала.

6.1.2. Приближенные формулы для расчета выходного сигнала. Вариант использования передаточной функции. Если передаточная функция аппроксимирована дробной рациональной функцией от s – функцией $\widetilde{W}(s, t)$, имеющей степень знаменателя выше степени числителя и аналитической в области $\operatorname{Re} s \geqslant c$, то при надлежащих областях определения и свойствах входного сигнала аппроксимация выходного сигнала может быть рассчитана по формулам

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{c}_2 - i\infty}^{\tilde{c}_2 + i\infty} \widetilde{W}(s, t)\, Y(s) \exp st\, ds \tag{6.16}$$

или

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c - i\infty}^{c + i\infty} \widetilde{W}(s, t)\, Y(-s, t)\, ds, \tag{6.17}$$

где $\tilde{c}_2 = \max(\tilde{c}, c_1)$, $i = \sqrt{-1}$. Для применения первой формулы входной сигнал должен быть определен на интервале $[0, \infty)$, преобразуем по Лапласу и должен удовлетворять при замене $W(s, t)$ на $\widetilde{W}(s, t)$ и c на $\widetilde{c}$ неравенству (6.7). Для применения второй формулы входной сигнал должен быть определен на интервале $(-\infty, T)$, преобразуем в смысле левого преобразования Лапласа и должен удовлетворять при замене $W(s, t)$ на $\widetilde{W}(s, t)$ и c на $\widetilde{c}$ неравенству (6.9).

Если путем аналитического продолжения расширить области определения функций $\widetilde{W}(s, t)$ и $Y(s)$ до всей комплексной плоскости и при этом вторая функция окажется аналитической всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек (первая функция обладает этим свойством), а произведение функций – удовлетворяющим *лемме Жордана* *), то при применении формулы (6.15) аппроксимация выходного сигнала для $t > 0$ может быть рассчитана по формуле

$$\widetilde{x}(t) = \sum_i \operatorname*{Re\,s}_{s_i} [\widetilde{W}(s, t) Y(s) \exp st],$$

где суммирование распространяется на все особые точки функций $\widetilde{W}(s, t)$ и $Y(s)$, за исключением бесконечно удаленной точки (если она оказывается особой).

Если функция $Y(-s, t)$ имеет структуру

$$Y(-s, t) = A(s, t) + B(s, t) \exp st,$$

где $A(s, t)$ и $B(s, t)$ – дробно-рациональные функции **), причем такие, что старшие степени s в знаменателях произведений $\widetilde{W}(s, t)A(s, t)$ и $\widetilde{W}(s, t)B(s, t)$ выше старших степеней s в соответствующих числителях, причем в первом случае разность указанных степеней – не менее двух, то при $t > 0$ аппроксимация выходного сигнала $\widetilde{x}(t)$ может быть рассчитана по формуле

$$\widetilde{x}(t) = \sum \operatorname{Res} [\widetilde{W}(s, t) Y(-s, t)], \tag{6.18}$$

где вычеты берутся только по полюсам функции $\widetilde{W}(s, t)$.

Для слагаемого $\widetilde{x}(t)$, получаемого при интегрировании выражения $\widetilde{W}(s, t)B(s, t) \exp st$ это следует из леммы Жордана; обоснование для второго слагаемого см. в [40, с. 213, лемма 1].

Если входной сигнал приложен в момент $t = 0$ и на интервале $[0, T)$ может быть аппроксимирован функцией $y(t)$, представляющей собой линейную комбинацию экспонент с постоянными

---

*) То есть при $|s - c| \to \infty$ функция $\widetilde{W}(s + t) Y(s)$ при $t > 0$ стремится в полуплоскости $\mathrm{Re} \leqslant \widetilde{c}$ к нулю равномерно по $\arg (s - c)$ [40, с. 161–162].

**) Функции $Y(-s, t)$ для простейших оригиналов $y(t)$, кроме $\delta(t - 0)$, удовлетворяют этому условию (табл. 1.1 в п. 1.2.4).

(формула (1.4)) или с полиномиальными (формула (1.8а)) коэффициентами (п. 1.2.2), а передаточная функция удовлетворяет условию

$$W(s, t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0, \tag{6.19}$$

то можно получить простые формулы для соответствующей аппроксимации выходного сигнала. В частности, в случае, когда входной сигнал аппроксимирован функцией вида (1.4), продолжив действие описывающей ее формулы на интервал $(-\infty, 0)$ (в силу (6.19) это не отразится на результатах расчета) и применив формулу (6.3), получим

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \exp r_i t \int_0^{\infty} w(t, t-\tau) \exp(-r_i \tau)\, d\tau \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n} C_i \exp r_i t\, W(r_i, t).$$

Пример 6.2. Рассчитаем реакцию стационарного апериодического звена с передаточной функцией

$$W(s, t) = \frac{1}{1 + T_1 s}, \quad T_1 = \text{const} > 0,$$

на входной сигнал $y(t) = 1 - \exp at$, приложенный в момент $t = 0$. Применим формулу (6.10). Поскольку единственная особая точка функции $W(s, t)$ – полюс $s_1 = -1/T_1$, то можно принять $c = 0$. По табл. 1.1 находим

$$Y(s, t) = \frac{1 - \exp(-st)}{s} - \frac{\exp at - \exp(-st)}{s + a} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{s} - \frac{a \exp(-st)}{s(s+a)} - \frac{\exp at}{s + a}.$$

Так как произведение

$$W(s, t)\, Y(-s, t) = -\frac{1}{s(1 + T_1 s)} - \frac{a \exp st}{s(s-a)(1 + T_1 s)} + \frac{\exp at}{(s - a)(1 + T_1 s)}$$

удовлетворяет лемме Жордана, то для вычисления выходного сигнала можно воспользоваться формулой (6.18) (в данном случае $\tilde{W} \equiv W$, $\tilde{x} \equiv x$). Вычисляя вычет в точке s_1, получим

$$x(t) = 1 - \frac{aT_1}{1 + aT_1} \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) - \frac{\exp at}{1 + aT_1}.$$

Заметим, что выходной сигнал в рассматриваемой задаче можно вычислить также по формуле Заде (6.8) с применением аппарата теории вычетов. Однако при этом придется вычислять вычеты как в полюсах передаточной функции, так и в полюсах функции $Y(s)$, что несколько усложнит расчет.

Если видоизменить пример, заменив постоянную T_1 положительной функцией $T_1(t)$, то схема расчета по обоим вариантам не изменится и приведет к результату

$$x(t) = 1 - \frac{\exp aT}{1 + aT_1(t)} - \frac{aT_1(t)}{1 + aT_1(t)} \exp\left(-\frac{t}{T_1(t)}\right).$$

Пример 6.3. Рассчитаем реакцию рассмотренного в предыдущем примере стационарного апериодического звена на входной сигнал $y(t) = \sin t$, приложенный в бесконечно удаленном прошлом. По табл. 2.1 находим

$$Y(s, t) = \frac{s \sin t - \cos t}{s^2 + 1}.$$

Из этого выражения видно, что функция $Y(-s, t)$ имеет полюса $s_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$. Для того чтобы можно было применить формулу (6.10) требуется наложить такие ограничения на вид функции $T_1(t)$, чтобы выполнялось условие $c_1 > -c$, т.е. чтобы число c удовлетворяло неравенству $c < -c_1$. В данном случае в качестве c_1 может быть принято любое положительное число. Поэтому достаточно неравенства $c < 0$. Это условие выполняется в силу положительности функции $T_1(t)$.

Так как произведение $W(s, t)Y(-s, t)$ удовлетворяет лемме Жордана, то, применяя формулу (6.18) и учитывая, что $\widetilde{W} = W, \widetilde{x} = x$, получим

$$x(t) = \frac{\sin t - T_1(t)\cos t}{[T_1(t)]^2 + 1}. \tag{6.20}$$

Вариант использования передаточного функционала. Как указывалось в предыдущем разделе, в случае входного сигнала вида (6.13) выходной сигнал имеет вид (6.14). Этот результат обобщается на случай входного сигнала общего вида, если последний можно с достаточной точностью аппроксимировать сигналом $\widetilde{y}(t)$, имеющим структуру (6.13), где функции $\zeta_i(t)$ заменены функциями $\widetilde{\zeta}_i(t)$, аппроксимирующими их с достаточной точностью. Приближенная формула для расчета выходного сигнала в этом случае имеет вид

$$\widetilde{x}(t) = \sum_i C_i H(\widetilde{\zeta}_i) \exp \int_{-\infty}^{t} \widetilde{\zeta}_i(u)\,du. \tag{6.21}$$

Таким образом, задача расчета выходного сигнала сводится к выбору из множества Z некоторого набора функций $\zeta_i(t)$, к аппроксимации этих функций функциями $\widetilde{\zeta}_i(t)$ и к соответствующей аппроксимации входного сигнала.

Несколько сложнее расчет выходного сигнала в случае, когда входной сигнал задан на интервале (t_0, T), $t_0 > -\infty$. Здесь расчет по предыдущей схеме позволяет найти только составляющую $\widetilde{x}_1(t)$ аппроксимации выходного сигнала $\widetilde{x}(t)$. Другая составляющая $\widetilde{x}_2(t)$ рассчитывается как аппроксимация выходного сигнала в процессе свободных колебаний, развивающихся из начального состояния, характеризуемого вектором $s_2 = -s_1$, где s_1 — вектор начального состояния в момент $t_0 + 0$, определяемый функциями $\widetilde{y}(t)$ и $\widetilde{x}_1(t)$ так же, как это указывалось для функций $y(t)$ и $x_1(t)$ в п. 6.1.1.

§ 6.2. Процессы, вызванные стохастическими входными сигналами

6.2.1. Типовые варианты первой основной задачи анализа. В статистической динамике линейных систем наиболее часто встречающаяся постановка первой основной задачи анализа вписывается в рамки корреляционной теории случайных функций: при условии, что математические ожидания и корреляционные функции входных и выходных сигналов существуют, требуется установить соотношения между этими характеристиками. Более сложным вариантом первой основной задачи анализа является задача установления соотношения между корреляционной функцией и одномерной плотностью распределения входного сигнала, с одной стороны, и аналогичными характеристиками выходного сигнала, с другой стороны.

Упомянутые варианты первой основной задачи анализа рассматриваются в пп. 6.2.3–6.2.4 и 6.2.7. В п. 6.2.2 определяется соотношение между случайными функциями, описывающими входные и выходные сигналы. Это соотношение является базовым для решения рассматриваемых задач. В п. 6.2.6 рассматривается задача о формирующем фильтре, результаты решения которой используются при рассмотрении второго варианта первой основной задачи анализа в п. 6.2.7.

6.2.2. Основное соотношение. Пусть ко входу находящейся в основном состоянии покоя системы в момент $t_0 = 0$ приложен стохастический входной сигнал, описываемый на интервале $[0, T)$ (где $T \leqslant \infty$) обобщенной случайной функцией $Y(t)$, множество возможных реализаций которой определено так, как указано в начале главы. Пусть импульсная переходная функция системы $w(t, u)$ в области $t, \; u \in (0, T)$ непрерывна по обоим аргументам и при всех $t \in (0, T)$ интегрируема по u на любом конечном подынтервале интервала $(0, T)$. Тогда выходной сигнал описывается случайной функцией $X(t)$, связанной с $w(t, u)$ и $Y(u)$ равенством

$$X(t) = \int_{0-}^{t} w(t, u) Y(u) \, du. \tag{6.22}$$

Формально равенство (6.22) получается из равенства (6.2), если числовую функцию $x(t)$ заменить случайной функцией, а обобщенную функцию $y(t)$ – обобщенной случайной функцией.

Правая часть (6.22) содержит интеграл обобщенной случайной функции, смысл которого определяется условиями (*аксиомами*), которыми, предполагается, связаны случайные элементы $X(t)$ и $Y(t)$. Для случая, когда $X(t)$ и $Y(t)$ – *случайные функции 2-го порядка* (п. 1.3.5), классический вариант системы аксиом см., например, в [132]; при этом интеграл называется *стохастическим* [137].

Отступив от классического построения аксиоматики, мы определим интеграл в правой части (6.22) для общего случая обобщенной случайной функции $Y(t)$, описывающей сосредоточенный стохастический сигнал рассматриваемого нами вида (см. п. 1.3.5) и общего случая случайной функции $X(t)$, описывающей сосредоточенный безымпульсный стохастический сигнал (п. 1.3.1) в предположении существования их математических ожиданий *) $m_Y(t)$ и $m_X(t)$ следующими аксиомами:

а) каждой реализации $y(t)$ соответствует реализация $x(t)$; соответствие устанавливается равенством (6.2);

б) существует реализация $y(t)$, совпадающая с $m_Y(t)$, и ей соответствует реализация $x(t)$, совпадающая с $m_X(t)$.

При упомянутых предположениях интеграл будем называть *обобщенным стохастическим интегралом,* опуская слово "обобщенный", если входной сигнал – безымпульсный.

В случае $t_0 = -\infty$ и $I = (-\infty, T)$ вместо (6.22) имеем

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} w(t, u) Y(u) du.$$

Смысл этого интеграла определим по аналогии со смыслом предыдущего, заменив в первой аксиоме равенство (6.2) равенством (6.5) и требуя дополнительно, чтобы с вероятностью 1 интеграл сходился, т.е. чтобы существовало такое подмножество Ω_Y множества возможных реализаций $L_C'^r$ обобщенной случайной функции $Y(t)$, что:

а) $\mathrm{P}[Y(t) \in \Omega_Y] = 1$,

б) для всех $t \in I$ и $y(t) \in \Omega_Y$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, w(t, u) y(u) \,|\, du < \infty.$$

6.2.3. Соотношение между математическими ожиданиями сигналов. Пусть математические ожидания $m_Y(t) \equiv \mathrm{M}\, Y(t)$ и $m_X(t) \equiv \equiv \mathrm{M} X(t)$ существуют. Тогда при $t_0 = 0$ на основании (6.22) и принятого определения стохастического интеграла имеет место равенство

$$m_X(t) = \mathrm{M} \int_{0-}^{t} w(t, u) Y(u) du = \int_{0-}^{t} w(t, u) m_Y(u) du. \qquad (6.23)$$

При $t_0 = -\infty$ и выполнении дополнительного условия, приведенного

*) Если сигнал $Y(t)$ содержит стохастический импульс $C\delta(t - T)$, причем C и T – независимые случайные величины, то $m_Y(t)$ содержит составляющую $\mathrm{M}C \cdot \delta(t - \mathrm{M}T)$.

в конце предыдущего раздела, вместо (6.23) имеем

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{t} w(t, u) m_Y(u)\, du.$$

6.2.4. Соотношение между корреляционными функциями сигналов. Пусть $Y(t)$ и $X(t)$ – стохастические сигналы 2-го порядка (§ 1.3.3), определенные на $I \equiv [0, T)$. Тогда для центрированных случайных функций $\mathring{Y}(t)$ и $\mathring{X}(t)$ в силу соотношений (6.22) и (6.23) получим

$$\mathring{X}(t) = \int_{0-}^{t} w(t, u)\, \mathring{Y}(u)\, du.$$

Используя это соотношение, найдем корреляционную функцию выходного сигнала:

$$R_X(t_1, t_2) \equiv \mathrm{M}\, \mathring{X}(t_1) \mathring{X}(t_2) =$$

$$= \int_{0-}^{t_1} w(t_1, u) \mathring{Y}(u) du \int_{0-}^{t_2} w(t_2, u)\, \mathring{Y}(u)\, du =$$

$$= \mathrm{M} \int_{0-}^{t_2} \int_{0-}^{t_1} w(t_1, u)\, \mathring{Y}(u)\, w(t_2, v)\, \mathring{Y}(v)\, du\, dv =$$

$$= \mathrm{M} \int_{0-}^{t_2} \left[\int_{0-}^{t_1} \mathring{Y}(u) \mathring{Y}(v) w(t_1, u) du\right] w(t_2, v) dv,$$

$$t_1, t_2 \in (0, T). \tag{6.24}$$

Внутренний интеграл в правой части (6.24) – стохастический интеграл случайной функции $Z(u, v) \equiv \mathring{Y}(u)\, \mathring{Y}(v) w(t_1, u)$, где u – аргумент, а v а t_1 – параметры. Обозначим этот интеграл символом $A(t_1, v)$ и, рассматривая его как случайную функцию аргумента v, зависящую от параметра t_1, в силу (6.23) получим

$$\mathrm{M} \int_{0}^{t_2} w(t_2, v) A(t_1, v)\, dv = \int_{0}^{t_2} w(t_2, v) \mathrm{M}\, [A(t_1, v)]\, dv. \tag{6.25}$$

Но (также в силу (6.23))

$$\mathrm{M}\, [A(t_1, v)] \equiv \mathrm{M} \left[\int_{0}^{t_1} w(t_1, u) Z(u, v)\, du\right] =$$

$$= \int_{0}^{t_1} w(t_1, u) \mathrm{M}\, [Z(u, v)]\, du \equiv$$

$$\equiv \int_{0}^{t_1} w(t_1, u) R_Y(u, v)\, du. \tag{6.26}$$

Сравнив (6.24), (6.25) и (6.26), найдем

$$R_X(t_1, t_2) = \int_0^{t_2}\int_0^{t_1} R_Y(u, v)w(t_1, u)w(t_2, u)\,du\,dv, \tag{6.27}$$

$t_1, t_2 \in (0, T]$.

Если случайная функция $Y(t)$ стационарна в широком смысле, то ее корреляционная функция $R_Y(t_1, t_2)$ превращается в функцию одного аргумента $R_Y^*(t_1 - t_2)$ и формула (6.24) принимает вид

$$R_X(t_1, t_2) = \int_0^{t_2}\int_0^{t_1} R_Y^*(u - v)\,w(t_1, u)w(t_2, u)\,du\,dv. \tag{6.28}$$

В предельном случае белого шума на входе $R_Y^*(u - v) = C\delta(u - v)$. $C > 0$, и из формулы (6.28) следует

$$R_X(t_1, t_2) = C\int_{0-}^{t_1} w(t_1, u)w(t_2, u)du \equiv$$

$$\equiv C\int_{0-}^{t_2} w(t_1, u)w(t_2, u)du. \tag{6.29}$$

Пусть $Y(t)$ – стохастический сигнал 2-го порядка, определенный на $I = (-\infty,\ T)$, и случайная функция $Z(t_1, t_2) \triangleq \overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)$ такова, что существует подмножество Ω_Z' множества возможных реализаций $z(t_1, t_2)$ функции $Z(t_1, t_2)$, удовлетворяющее условиям:

а) $\mathrm{P}[Z(t_1, t_2) \in \Omega_Z'] = 1$;

б) для всех $t_1, t_2 \in I$ и $z(t_1, t_2) \in \Omega_Z'$

$$\int_{-\infty}^{t_2}\int_{-\infty}^{t_1} |z(t_1, t_2)w(t_1, u)w(t_2, v)|\,du\,dv < \infty.$$

Тогда корреляционный момент $R_X(t_1, t_2)$ существует для каждой пары значений t_1, t_2, за исключением, возможно, дискретного множества пар. Если $R_X(t_1, t_2)$ – непрерывная функция, то $X(t)$ – стохастический сигнал 2-го порядка, $R_X(t_1, t_2)$ – его корреляционная функция и

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_2}\int_{-\infty}^{t_1} R_Y(u, v)w(t_1, u)w(t_2, v)\,du\,dv.$$

Для случая стационарной в широком смысле случайной функции вместо (6.28) получим

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_2}\int_{-\infty}^{t_1} R_Y^*(u-v)w(t_1, u)w(t_2, v)\,du\,dv,$$

а в предельном случае белого шума вместо (6.29) получим

$$R_X(t_1, t_2) = C \int_{-\infty}^{t_{1,2}} w(t_1, u) w(t_2, u) du.$$

6.2.5. Задача о формирующем фильтре. Во многих задачах анализа пользуются интерпретацией стохастического сигнала как белого шума, прошедшего через формирующий фильтр. Такая интерпретация для случая сигнала, описываемого стационарной в широком смысле случайной функцией, содержится в неявном виде в работах [126] и [128] и в явном – в [60]. Однако это возможно не для всякого сигнала. В частности, в упомянутом выше случае стационарного сигнала согласно [99] для этого необходимо и достаточно, чтобы спектральная плотность сигнала $S_Y(\omega)$ удовлетворяла неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln S_Y(\omega)|}{1+\omega^2} d\omega < \infty.$$

Выяснение вопроса о возможности такой интерпретации и (в случае положительного ответа) задачу определения характеристик фильтра называют *задачей о формирующем фильтре* (*проблемой формирующего фильтра*). Ниже эта задача рассматривается для стохастического сигнала, предполагаемого в общем случае нестационарным.

Возможны несколько вариантов задачи, различающиеся тем, какая характеристика ищется. Мы рассмотрим два варианта:

а) когда искомой характеристикой фильтра является импульсная переходная функция $w_0(t, u)$;

б) когда искомой характеристикой фильтра является передаточная функция $W_0(s, t)$.

Вариант определения импульсной переходной функции фильтра.

Постановка задачи. Приведем постановку задачи в таком виде, как ее сформулировал Е.Б.Стир [99]. Пусть на заданном интервале I стохастический сигнал описан случайной функцией 2-го порядка $Y(t)$ (п. 1.3.3), непрерывной в среднем (т.е. $\mathrm{M}\,|Y(t) - Y(s)|^2 \to 0$, если $|t-s| \to 0$ [99]). Требуется показать, что возможно представление

$$Y(t) = \int_I w_0(t, t-\tau) Z(\tau) d\tau,$$

причем $w_0(t, u)$ непрерывна по обоим аргументам, $Z(t)$ – белый шум. Требуется также указать метод нахождения $w_0(t, u)$.

Решение задачи в случае, если указанное представление возможно, согласно изложенному в предыдущем разделе сводится к решению интегрального уравнения

$$R_Y(t_1, t_2) = C \int_{-\infty}^{\infty} w_0(t_1, u) w_0(t_2, u) du, \tag{6.30}$$

где, предполагая спектральную плотность белого шума единичной, можно принять $C = 1$. Эта задача еще не решена для общего случая произвольной непрерывной корреляционной функции $R_Y(t_1, t_2)$.

Уравнение (6.30) получается из уравнения (6.23), связывающего корреляционную функцию нестационарного выходного сигнала с корреляционной функцией стационарного в широком смысле входного сигнала, если в качестве последнего рассмотреть белый шум со спектральной плотностью $s(\omega) = C$ (п. 6.2.3).

Ввиду трудности решения уравнения (6.30), поиск путей решения сопровождался сужением класса рассматриваемых случайных сигналов $Y(t)$. Результативным оказалось такое сужение, которое позволило искать фильтр в классе нестационарных линейных систем с сосредоточенными параметрами. В соответствии со структурой импульсной переходной функции системы этого класса и уравнением (6.30), корреляционная функция входного сигнала, согласно А.М.Баткову [6], при $t_1 \geqslant t_2$ имеет вид

$$R_Y(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t_1) p_i(t_2), \tag{6.31}$$

где $n \geqslant 1$, а функции $q_i(t)$ имеют n первых непрерывных производных. При этом функции $q_i(t)$ можно считать линейно независимыми, так как случай их линейной зависимости сводится к случаю линейной независимости с меньшим числом членов в суммах правой части равенства (6.31).

Как утверждает Е.Б.Стир и показано автором [134], функцию $w_0(t, u)$ в этом случае можно искать в виде

$$w_0(t, u) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} q_i(t) \beta_i(u), & t \geqslant u, \\ 0, & t < u, \end{cases} \tag{6.32}$$

т.е. задача сводится к определению n функций $\beta_i(u)$. Действительно, если учесть (6.32) в уравнении (6.30) и принять $t_1 \geqslant t_2$, то в силу равенства (6.31) и равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_0(t_1, u) w_0(t_2, u) du = \int_{-\infty}^{t_2} w_0(t_1, u) w_0(t_2, u) du =$$

$$= \int_{-\infty}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} q_i(t_1) \beta_i(u) \sum_{i=1}^{n} q_i(t_2) \beta_i(u) du,$$

получим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} q_i(t_1)p_i(t_2) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t_1)\gamma_i(t_2), \tag{6.33}$$

где

$$\gamma_i(t_2) = \int_{-\infty}^{t_2} \beta_i(u) \sum_{j=1}^{n} q_j(t_2)\beta_j(u)du =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} q_j(t_2) \int_{-\infty}^{t_2} \beta_i(u)\beta_j(u)du. \tag{6.34}$$

Очевидно, равенство (6.33) будет выполняться, если выполняется система равенств $p_i(t) = \gamma_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, что приводит к следующей системе интегральных уравнений относительно функций $\beta_1(u), \ldots, \beta_n(u)$:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j(t_2) \int_{-\infty}^{t_r} \beta_i(u)\beta_j(u)du = p_i(t_2), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Не останавливаясь на вопросе разрешимости этой системы, предположим, что для заданной функции $R_Y(t_1, t_2)$ она имеется. Тогда остается решить систему этих уравнений. В векторной форме ее можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{t_2} C(u)du \cdot q(t_2) = p(t_2), \tag{6.35}$$

где $C(u) = \| c_{ij} \|_1^n$, $c_{ij} = \beta_i\beta_j$, $q(t_2)$ и $p(t_2)$ – матрицы-столбцы с компонентами $q_i(t_2)$ и $p_i(t_2)$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, решение проблемы формирующего фильтра сводится к решению векторного интегрального уравнения (6.35). Комплекс условий, достаточных для существования решения уравнения (6.35) не выяснен, но, следуя аналогии с рассмотренной ниже *задачей Стира*, в качестве одной из компонент этого комплекса целесообразно принять условие непрерывности в среднем случайной функции $Y(t)$, т.е. условие $\mathrm{M}[\,|Y(t) - Y(u)|\,] \to 0$ при $|t - u| \to 0$ для всех $t,\ u \in (-\infty, \infty)$.

Проблема формирующего фильтра не усложняется и все сказанное выше остается в силе, если при ее постановке интервал времени $(-\infty, \infty)$ заменить интервалом $(-\infty,\ T)$, где $T < \infty$.

Е.Б.Стир рассмотрел следующую модификацию проблемы: для заданной на интервале $[0,\ T]$ корреляционной функции $R_Y(t_1, t_2)$ вида (6.31) и заданных моментах

$$\mathrm{M}\,Y^{(i)}(0)Y^{(j)}(0), \qquad i, j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{6.36}$$

где

$$Y^{(0)}(t) = Y(t), \qquad Y^{(j)}(t) = \frac{d^j Y(t)}{dt^j},$$

требуется выяснить возможность интерпретации сигнала $Y(t)$ на интервале $[0, T]$ как белого шума, прошедшего через фильтр, и в случае положительного ответа определить фильтр.

Информация о моментах в изложенной постановке задачи определяет начальные условия свободных колебаний в фильтре, дополняющих вынужденные колебания, развивающиеся с момента $t = 0$ из основного состояния покоя $(Y(t) \equiv 0)$. Если предположить, что временной областью определения процесса и фильтра является интервал $(-\infty, T]$, то свободные колебания можно рассматривать как реакцию системы на интервале $[0, T]$ на воздействие белого шума на предшествующем интервале $(-\infty, 0)$.

Поскольку функции $q_i(t)$ в (6.31) в силу (6.32) образуют фундаментальную систему решений уравнения свободных колебаний фильтра

$$(p^n + b_1(t)p^{n-1} + \ldots + b_n(t))y = 0, \quad p \triangleq d/dt, \tag{6.37}$$

то коэффициенты этого уравнения равны соответствующим коэффициентам уравнения

$$\det \begin{bmatrix} q_1(t) & \ldots & q_n(t) & y \\ p^n q_1(t) & \ldots & p^n q_n(t) & p^n y \end{bmatrix} = 0.$$

Пусть $\mathbf{Q} \triangleq \| p^{j-1} q_i \|_1^n$. Матрица Коши $\mathbf{L}(t, u)$ для уравнения $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{C}(t)\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\xi} \triangleq [x, px, \ldots, p^{n-1}x]^{\mathrm{T}}$, соответствующего уравнению (6.37), выражается через матрицу $\mathbf{Q}$ в виде $\mathbf{L}(t, u) = \mathbf{Q}(t)\,\mathbf{Q}^{-1}(u)$.

Пусть $[r_1(t), \ldots, r_n(t)]$ – первая строка матрицы $\mathbf{L}(t, 0)$. Тогда корреляционная функция $G(t_1, t_2)$ свободной составляющей сигнала при $t_1, t_2 \in [0, T]$ получается в виде

$$G(t_1, t_2) = \sum_{i, j = 1}^{n} \mathrm{M}[Y^{(i)}(0) Y^{(j)}(0)] r_i(t) r_j(t),$$

и вместо уравнения (6.30) получаем

$$R_Y(t_1, t_2) = G(t_1, t_2) + \int_0^T w_0(t_1, u) w_0(t_2, u)\,du. \tag{6.38}$$

В предположении о расширенной области определения процесса и фильтра (интервал $(-\infty, T]$), сравнение (6.30) и (6.38) дает

$$G(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{0} w_0(t_1, u) w_0(t_2, u) du, \tag{6.39}$$

что соответствует указанной выше интерпретации свободных колебаний. Е.Б.Стир доказывает, что решение уравнения (6.38) существует, отвечает физически реализуемому фильтру и указывает способ его получения.

Частный случай задачи Стира рассмотрен В.В.Солодовниковым и В.В.Семеновым [98]. В постановке задачи, рассматриваемой этими авторами, предполагаются нулевые начальные условия, т.е. равенство нулю всех указанных выше моментов и, как следствие, — корреляционной функции свободной составляющей сигнала $G(t_1, t_2)$. Если интерпретировать этот случай в расширенной временной области определения процесса и фильтра (интервал $(-\infty, T]$), то, очевидно, импульсная переходная функция искомого фильтра должна удовлетворять условию $w(t, u) = 0$ при $t < 0$.

В задачах Стира и Солодовникова — Семенова существенную роль играют начальные условия для входного сигнала. Вопрос начальных условий требует пояснений, так как в общем случае моменты (6.36) могут быть не определены ввиду разрыва в точке $t = 0$ функций $\mathrm{M}Y^{(i)}(t)Y^{(j)}(t)$. Поэтому правильнее говорить о начальных данных как о пределах соответствующих функций при приближении к точке $t = 0$ слева или справа (соответственно: $0-$ или $0+$).

Уточнение, которое в соответствие со сказанным следует внести в задачу Стира, состоит в следующем: в уравнениях (6.36), (6.38) и (6.39) точку $t = 0$ следует заменить точкой $t = 0+$. Это уточнение распространяется и на задачу Солодовникова — Семенова. Его важность здесь особо наглядна. В самом деле, если не вносить уточнения, то в силу "нулевых начальных условий" в уравнении (6.38) мы должны положить $G(t_1, t_2) = 0$. При этом получим $R_Y(0, 0) = 0$, что отбрасывает все случаи задания входного сигнала, не удовлетворяющего этому условию.

Вариант определения передаточной функции фильтра. Как следует из изложенного выше, задача о формирующем фильтре в случае нестационарного входного сигнала является весьма сложной. Поэтому представляют интерес также упрощенные постановки этой задачи, в которых искомыми являются те или иные функции, аппроксимирующие какие-либо характеристики фильтра. В частности, рассмотрим задачу вычисления функции, аппроксимирующей передаточную функцию фильтра с выполнением следующих условий:

а) дисперсия $D_Y(t)$ сигнала $Y(t)$ совпадает с дисперсией сигнала на выходе фильтра;

б) в случае стационарного сигнала $Y(t)$ корреляционная функция $R^*_Y(\tau)$ совпадает с корреляционной функцией сигнала на выходе фильтра.

Постановка задачи. Пусть на заданном интервале $I = (-\infty, T)$, $T \leqslant \infty$, стохастический входной сигнал описывается случайной функцией 2-го порядка $Y(t)$, причем корреляционная функция такова, что существует спектральная плотность (см. п. 1.3.3) $S_Y(\omega, t)$. Требуется указать условия существования такой аппроксимации $\widetilde{W}_0(s, t)$ передаточной функции фильтра $W_0(s, t)$, при которой удовлетворяются указанные выше условия, и метод ее вычисления.

Решение задачи. Согласно (1.36) (п. 1.3.3),

$$D_Y(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_Y(\omega, t) d\omega.$$

С другой стороны, если передаточная функция фильтра существует, то согласно [50, с. 214] в случае белого шума с единичной спектральной плотностью

$$D_Y(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |W_0(i\omega, t)|^2 d\omega.$$

Из сравнения этих формул очевидно, что аппроксимация $\widetilde{W}_0(s, t)$ передаточной функции удовлетворяет условию "а", если

$$|\widetilde{W}_0(i\omega, t)|^2 = S_Y(\omega, t). \tag{6.40}$$

Это соотношение можно положить в основу метода вычисления функции $\widetilde{W}_0(i\omega, t)$, а именно: сечение этой функции для каждого значения t ищется так же, как ищется передаточная функция стационарного фильтра в случае стационарной в широком смысле функции $Y(t)$ [74, с. 373–374]. Для этого требуется, чтобы функция $S_Y(\omega, t)$ имела вид дробно рациональной функции от ω^2 с зависящими от t коэффициентами. Указанное условие является достаточным условием существования функции $\widetilde{W}_0(i\omega, t)$, удовлетворяющей условию (6.40).

В случае стационарной в широком смысле функции $Y(t)$ соотношение (6.40) принимает вид

$$|\widetilde{W}(i\omega)|^2 = S_Y(\omega),$$

и искомая функция $\widetilde{W}_0(i\omega)$ совпадает с передаточной функцией фильтра. При этом спектральная плотность $S_Y(\omega)$ совпадает со спектральной плотностью сигнала на выходе фильтра, откуда следует совпадение корреляционных функций сигналов, т.е. удовлетворяется условие "б".

6.2.6. Дисперсия выходного сигнала. Рассмотрим сначала случай $t_0 = 0$. На основании равенств $D_X(t) = R_X(t, t)$ и (6.24) при $t \in (0, T)$ дисперсия выходного сигнала выражается в виде

$$D_x(t) = \int_{0-}^{t} \int_{0-}^{t} R_Y(u, v) w(t, u) w(t, v) du\, dv.$$

В случае, когда случайная функция $Y(t)$ стационарна в широком смысле, полагая в (6.29) $t_1 = t_2 = t$, получим

$$D_X(t) = \int_{0-}^{t} \int_{0-}^{t} R_Y^*(u-v) w(t, u) w(t, v) du\, dv. \tag{6.41}$$

В предельном случае, когда $Y(t)$ – белый шум (с корреляционной функцией $R_Y^*(u-v) = C_\delta(u-v)$), из (6.41) следует

$$D_X(t) = C \int_{0-}^{t} w^2(t, v) dv.$$

Пусть случайная функция, описывающая входной сигнал, является стационарной в широком смысле, но характеристики этой функции нам известны только частично. Тогда дисперсия выходного сигнала не определена, но возможны варианты информации о характеристиках входного сигнала, допускающие ее оценивание. В первом варианте будем предполагать, что известно лишь максимальное значение спектральной плотности входного сигнала $S_{\max} = \max_{\omega} S(\omega)$; во втором варианте известной будем считать дисперсию входного сигнала D_Y. Используя эту информацию, оценим дисперсию выходного сигнала.

Заменим условия поставленной задачи следующими эквивалентными условиями: входной сигнал приложен в момент $t_0 = -\infty$, система имеет импульсную переходную функцию $w^*(t, u)$, совпадающую с $w(t, u)$ при $u > 0$ и равную нулю при $u < 0$. При такой модифицированной постановке задача решается просто [74, с. 401]. В первом варианте решение получается в виде неравенства

$$D_X(t) \leqslant \mu(t) S_{\max} \tag{6.42}$$

(равенство – в случае белого шума), где

$$\mu(t) = \int_0^t w^2(t, t-\tau) d\tau.$$

Во втором варианте решение выражается неравенством

$$D_X(t) \leqslant \eta^2(t) D_Y, \quad \eta(t) = \int_0^t |w(t, t-\tau)|\, d\tau. \tag{6.43}$$

Остановимся теперь на случае конечного $t_0 \neq 0$ ($I = [t_0, \infty)$). В силу замены независимой переменной, указанной в п. 6.2.1, все полученные выше результаты остаются в силе, если всюду заменить в нижнем пределе интегрирования 0 на t_0. Если при $t_0 \to -\infty$ подынтегральные выражения всех интегралов, фигурирующих в полученных равенствах и неравенствах определены и интегралы абсолютно сходятся, то в случае $t_0 = -\infty$ получим:

а) для стохастического входного сигнала 2-го порядка

$$D_X(t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{t} R_Y(u, v) w(t, u) w(t, v)\, du\, dv;$$

б) для стохастического входного сигнала, стационарного в широком смысле

$$D_X(t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{t} R_Y^*(u - v) w(t, u) w(t, v)\, du\, dv; \tag{6.44}$$

в) для белого шума на входе

$$D_X(t) = C \int_{-\infty}^{t} w^2(t, v)\, dv.$$

При этом, если спектральная плотность $S_X(\omega)$ сигнала и передаточная функция $W(s, t)$ системы существуют, то [50] из (6.44) следует

$$D_X(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_X(\omega) |W(i\omega, t)|^2 d\omega.$$

В предельном случае белого шума это равенство принимает вид

$$D_X(t) = \frac{C}{\pi} \int_0^{\infty} |W(i\omega, t)|^2 d\omega. \tag{6.45}$$

Неравенства (6.42) и (6.43) остаются в силе, но функции $\mu(t)$ и $\eta(t)$ определяются тогда следующими равенствами:

$$\mu(t) = \int_0^{\infty} w^2(t, t-\tau)\, d\tau, \quad \eta(t) = \int_0^{\infty} |w(t, t-\tau)|\, d\tau.$$

В этом случае интегральная характеристика $\mu(t)$ называется *степенью подвижности системы.*

Если $Y(t)$ – стохастический сигнал 2-го порядка (п. 1.3.3) и определена аппроксимация $\widetilde{W}_0(s, t)$ передаточной функции $W(s, t)$ системы, то рассматривая последовательное соединение формирующего фильтра и исследуемой системы, предполагая, что функции $\widetilde{W}_0(s, t)$ и $W(s, t)$ удовлетворяют условиям, указанным при выводе формулы (3.110) передаточной функции последовательного соединения, для приближенного вычисления $D_X(t)$ на основании (6.45) получим

$$D_X(t) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |\widetilde{W}_1(i\omega, t)|^2 d\omega,$$

где $\widetilde{W}_1(s, t)$ – аппроксимация передаточной функции упомянутого последовательного соединения.

6.2.7. Одномерная функция распределения выходного сигнала. При решении многих практических задач описание стохастических выходных сигналов с помощью характеристик, применяемых в корреляционной теории случайных функций, не позволяет ответить на многие важные вопросы, в том числе на вопрос: какова точность решения задачи управления? Практически оценка точности связывается с вероятностной оценкой максимальных выбросов выходного сигнала, а это возможно только при известном распределении случайных значений сигнала. Это распределение обычно априори не известно, но ясно, что оно значительно отличается от нормального, что не позволяет применить полученные для нормального распределения вероятностные оценки выбросов. Отсюда ясна целесообразность дополнения применяемого в корреляционной теории комплекса вероятностных характеристик сигнала одномерной функцией или плотностью распределения сигнала.

Чтобы вычислить (даже приближенно) одномерную функцию (или плотность) распределения сигнала, очевидно, необходимо соответственно расширить комплекс учитываемых характеристик входного сигнала. Если опираться на соотношения между моментами входного и выходного сигналов, то необходимо учитывать моменты всех порядков любой системы сечений случайной функции, описывающей входной сигнал. Такую информацию в общем случае нельзя ни получить, ни использовать. Возникает вопрос: нельзя ли приближенно вычислить одномерную функцию (или плотность) распределения входного сигнала, учитывая дополнительно к комплексу вероятностных характеристик, используемому в корреляционной теории, лишь одномерную функцию (или плотность) распределения входного сигнала или какую-либо другую вероятностную характеристику или систему вероятностных характеристик входного сигнала примерно той же сложности?

Оказывается, что в ряде случаев такая возможность имеется. Ниже излагается решение поставленной в таком виде задачи для двух типов входного сигнала: симметричного цепного шума и безымпульсного стохастического сигнала.

Случай симметричного цепного шума на входе. Определение симметричного цепного шума было дано в п. 1.3.4. Его математическое описание имеет вид

$$Y(t, a) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta [t - T_k(a)]$$

(пояснения смысла символов приведены в упомянутом разделе). Предположим, что все моменты случайных величин C_k и сечений выходного сигнала $X(t)$ в любой момент времени t, принадлежащий заданному интервалу I, существуют *) и все характеристики действующего на входе шума указанного выше вида заданы. Рассмотрим задачу определения моментов любого порядка сечений выходного сигнала и его одномерной функции распределения.

Прежде всего, рассмотрим некоторые характеристики стационарного точечного процесса, образованного моментами появления импульсов в симметричном цепном шуме, и их взаимосвязь. Примем следующее правило нумерации импульсов: импульсу, момент появления которого является ближайшим предшествующим моментом к моменту t наблюдения реакции системы (но не совпадающему с ним), приписываем номер 1, следующему предшествующему – номер 2, и т.д. (рис. 6.1); импульсу, момент появления которого непосредственно следует за моментом наблюдения реакции (или совпадает с ним), приписываем номер 0, следующему – номер –1, и т.д. Интервал, содержащий момент наблюдения t в соответствии с [31] назовем *нулевым*, интервал от точки t до момента появления импульса 1 – *начальным*, а интервал между k-м и $(k + 1)$-м импульсом при $k \geqslant 1$ – *установившимся*. Обозначим через Z длину установившегося интервала, а через $f(z)$ – ее плотность распределения вероятностей; через Z_0 и $f_Z(z_0)$ – длину нулевого интервала и ее плотность распределения вероятностей, через Z_k и $\varphi_k(z_k)$ – длину интервала между моментом t и моментом появления k-го импульса ($k = 1, 2, \ldots$) и ее плотность распределения.

---

*) Мы не оговариваем, о каких моментах идет речь, так как в силу симметрии импульсного шума центральные моменты указанных выше величин совпадают с начальными.

Как показано в [31, 133] функция $f_Z(z_0)$ связана с функцией $f(z)$ равенством

$$f_Z(z_0) = z_0 f(z_0)\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} z f(z)dz\Big)^{-1}, \tag{6.46}$$

а функция $\varphi_1(z_1)$ связана с $f_Z(z)$ равенством

$$\varphi_1(z_1) = \int\limits_{z_1}^{\infty} \frac{f_Z(z)}{z} dz. \tag{6.47}$$

Обозначим $\mathcal{L}[f(z)] = \hat{f}(s)$, $\mathcal{L}[\varphi_i(z_i)] = \hat{\varphi}_i(s)$. Согласно [2],

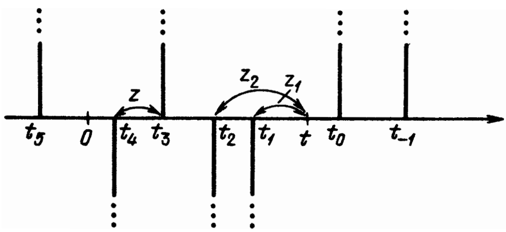


Рис. 6.1. Нумерация импульсов

функции $\varphi_i(z_i)$ выражаются через функции $\hat{f}(s)$ и $\hat{\varphi}_i(s)$ в виде $\varphi_k(z_k) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{\varphi}(s)\hat{f}^{k-1}(s)]$.

Вычисление моментов выходного сигнала. Очевидно,

$$x(t) = C_1 w(t, t - Z_1) + C_2 w(t, t - Z_2) + \ldots \tag{6.48}$$

В дальнейшем для краткости будем обозначать $w(t, t - Z_k) = W_k$.

Приведем формулы для вычисления степеней $X^n(t)$ ($n = 1, 2, \ldots$). С этой целью обозначим $C_k W_k = a_k$ и рассмотрим сумму $A_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Для n-й степени этой суммы справедлива формула

$$A_k^n = \sum_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_k} \frac{n!}{\mu_1!\,\mu_2!\ldots\mu_k!} a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2} \ldots a_k^{\mu_k}, \tag{6.49}$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_k$ — целые неотрицательные числа, а сумма берется по всем различным комбинациям этих чисел, удовлетворяющим условию $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k = n$. Полагая в формуле $k \to \infty$ и учитывая (6.48), получим $\mathrm{M}[X^n(t)] = \mathrm{M}[A^n]$, где $A = \lim\limits_{k \to \infty} A_k$. Применяя теоремы о математическом ожидании суммы и произведения независимых случайных величин, и, учитывая, что в силу симметрии шума $M[C_i] = M[C_i^3] = \dots = 0$ найдем, что математические ожидания нечетных степеней $X(t)$ равны нулю, а в формулах для моментов четного порядка не содержатся нечетные степени величин a_i.

Обозначим

$$M[C_i^n] = a_{Cn}, \qquad M[X^n(t)] = a_{Xn}.$$

Тогда для моментов величины $X(t)$ получим

$$a_{X2} = a_{C2} M \sum_i W_i^2,$$

$$a_{X4} = a_{C4} M \sum_i W_i^4 + 6a_{C2}^2 M \sum_{i,j}{}' W_i^2 W_j^2,$$

$$a_{X6} = a_{C6} M \sum_i W_i^6 + 15 a_{C2} a_{C4} M \sum_{i,j}{}' W_i^4 W_j^2 +$$

$$+ 90 a_{C2}^3 M \sum_{i,j,k}{}' W_i^2 W_j^2 W_k^2. \tag{6.50}$$

Штрих у символа суммы Σ означает, что индексы различны, и что учитываются только различные слагаемые (как одинаковые рассматриваются такие слагаемые, которые совпадают при какой-либо перестановке индексов у сомножителей).

Для коэффициентов при моментах в первых слагаемых в формулах (6.50), т.е. величин

$$M[W_1^n + W_2^n + \dots], \qquad n = 2, 4, \dots,$$

как показано в [74], справедлива формула

$$M[W_1^n + W_2^n + \dots] = \nu \int_0^\infty w^n(t, t-z)\, dz,$$

где ν – математическое ожидание числа импульсов на интервале единичной длины, причем $\nu = \mathcal{L}^{-1}[\varphi_1(s)/(1 - f(s)]$.

Перейдем к вычислению математических ожиданий сумм вида

$$\sum_{i,j,\dots,q}{}' W_i^{\alpha_i} \cdot W_j^{\alpha_j} \dots W_q^{\alpha_q}, \qquad \alpha_i + \alpha_j + \dots + \alpha_q = n,$$

где штрих у символа Σ имеет смысл, указанный выше. Для иллюстрации метода, который будет далее применен для решения задачи, рассмотрим простейший пример – вычисление математического ожидания $M W_1^2 W_2^2$. Согласно определению математического ожидания, имеем

$$M W_1^2 W_2^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty w(t, t-z_1) w^2(t, t-z_2) \varphi_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2)\, dz_1 dz_2,$$

где $\varphi_{Z_1,Z_2}(z_1, z_2)$ – плотность распределения вероятностей системы случайных величин Z_1, Z_2. Эта функция не известна, однако известно, что величины Z_1 и Z_2 связаны соотношением $Z_2 = Z_1 + Z$. Поэтому предыдущее соотношение можно записать в виде

$$\mathrm{M} W_1^2 W_2^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty w^2(t, t - z_1) \times$$

$$\times w^2(t, t - z_1 - z)\, \varphi_{Z_1,Z}(z_1, z)\, dz_1 dz;$$

где $\varphi_{Z_1,Z}(z_1, z)$ – плотность распределения вероятностей системы случайных величин Z_1 и Z. Но величины Z и Z_1 независимы. Следовательно, $\varphi_{Z_1 Z}(z_1, z) = \varphi_1(z_1) f(z)$ и формула для математического ожидания примет вид

$$\mathrm{M} W_1^2 W_2^2 = \int_0^\infty w^2(t, t - z_1)\, \varphi_1(z_1) \times$$

$$\times \int_0^\infty w^2(t, t - z_1 - z) f(z)\, dz\, dz_1.$$

После замены переменных $z = u - z_1$ получим

$$\mathrm{M} W_1^2 W_2^2 = \int_0^\infty w^2(t, t - z_1)\, \varphi_1(z_1) \times$$

$$\times \int_{z_1}^\infty w^2(t, t - u) f(u - z_1)\, du\, dz_1. \qquad (6.51)$$

Обобщим формулу (6.51) на случай $\mathrm{M} W_i^2 W_j^2$, где i и j – произвольные числа и $j > i$. Построения, аналогичные использованным выше, приводят к результату

$$\mathrm{M} W_i^2 W_j^2 = \int_0^\infty w^2(t - z_i)\, \varphi_i(z_i) \times$$

$$\times \int_{z_i}^\infty w^2(t, t - u) f_{j-i}(u - z_i)\, du\, dz_i, \qquad (6.52)$$

где $f_{j-i}(v)$ – плотность распределения длины интервала между моментами появления i-го и j-го импульсов.

Применим формулу (6.42) для вычисления $\mathrm{M} \sum_{i,j}' W_i^2 W_i^2$. Получим

$$\mathrm{M} \sum_{i,j}' W_i^2 W_j^2 =$$

$$= \mathrm{M}\,[W_1^2(W_2^2 + W_3^2 + \ldots) + W_2^2(W_3^2 + \ldots) + \ldots] =$$

$$= \int_0^\infty w^2(t, t - z_1)\, \varphi_1(z_1)\, [\int_{z_1}^\infty w^2(t; t - u) f_1(u - z_1)\, du +$$

$$+ \int_{z_1}^\infty w^2(t, t - u) f_2(u - z_1)\, du + \ldots]\, dz_1 +$$

$$+\int_0^\infty w^2(t,t-z_1)\varphi_2(z_2)\,[\int_{z_2}^\infty w^2(t,t-u)f_2(u-z_1)\,du+$$

$$+\int_{z_2}^\infty w^2(t,t-u)f_2(u-z_2)\,du+\ldots]\,dz_2+\ldots=$$

$$=\int_0^\infty w^2(t,t-z)\varphi_1(z)\int_z^\infty w^2(t,t-u)\sum_{i=1}^\infty f_i(u-z)\,du\;dz+$$

$$+\int_0^\infty w^2(t,t-z)\varphi_2(z)\int_z^\infty w^2(t,t-u)\sum_{i=1}^\infty f_i(u-z)\,du\;dz+\ldots \tag{6.53}$$

В силу равенств

$$\hat{f}_i(s)=\hat{f}^i(s),\qquad f_i(u-z)=L^{-1}_{u-z}[\hat{f}^i(s)]\,,\qquad i=1,2,\ldots$$

найдем

$$\sum_{i=1}^\infty f_i(u-z)=\mathcal{L}^{-1}_{u-z}\left[\frac{\hat{f}(s)}{1-\hat{f}(s)}\right],$$

где в нижнем индексе символа L^{-1}_{u-z} указан аргумент оригинала. Обозначив $\sum\limits_{i=1}^\infty f_i(v)=\rho(v)$, формулу (6.53) приведем к виду

$$\mathrm{M}\sum_{i,j}{}' W_i^2W_j^2=\int_0^\infty w^2(t,t-z)\times$$

$$\times\sum_{i=1}^\infty \varphi_i(z)\int_z^\infty w^2(t,t-u)\,\rho(u-z)\,du\;dz.$$

Но $\sum\limits_{i=1}^\infty \varphi_i(z)=\nu$. Поэтому получим

$$\mathrm{M}\sum_{i,j}{}' W_i^2W_j^2=$$

$$=\nu\int_0^\infty w^2(t,t-z)\int_z^\infty w^2(t,t-u)\,\rho(u-z)\,du\;dz. \tag{6.54}$$

Аналогично вычисляются математические ожидания в других слагаемых правых частей формул (6.50). В частности [2], получим

$$\mathrm{M}\sum_{i,j}{}' W_i^4W_j^2=$$

$$=\nu\int_0^\infty w^4(t,t-z)\int_z^\infty w^2(t,t-u)\,\rho(u-z)\,du\;dz+$$

$$+\nu\int_0^\infty w^2(t,t-z)\int_z^\infty w^4(t,t-u)\,\rho(u-z)\,du\;dz, \tag{6.55}$$

$$\mathrm{M} \sum_{i,j,k}' W_i^2 W_j^2 W_k^2 = \nu \int_0^\infty w^2(t, t-z) \int_z^\infty w^2(t, t-u) \times$$

$$\times \rho(u-z) \int_u^\infty w^2(t, t-v) \rho(v-u)\, dv\, du\, dz. \qquad (6.56)$$

Общая процедура вычисления состоит в следующем.

1. Рассматриваемая сумма

$$\sum_{i,\ldots,m}' W_i^{\mu_i} \ldots W_m^{\mu_m}$$

с фиксированными показателями степеней $\mu_i, \ldots, \mu_m$ представляется в виде

$$\sum_{\alpha,\beta,\ldots,\delta}' W_\alpha^{\eta_\alpha} W_\beta^{\eta_\beta} \ldots W_\delta^{\eta_\delta},$$

где $\alpha < \beta < \ldots < \delta$ (при этом показатели степеней $\eta_\alpha, \eta_\beta, \ldots, \eta_\delta$ в каждом слагаемом принимают значения, совпадающие с точностью до порядка следования с числами $\mu_i, \ldots, \mu_m$. Эта сумма разбивается на частные суммы, содержащие только слагаемые с одним и тем же порядком следования значений показателей степеней $\eta_\alpha, \eta_\beta, \ldots, \eta_\delta$.

2. К каждой частной сумме применяется операция перехода к математическому ожиданию, в результате чего каждая сумма выражается в виде

$$\nu \int_0^\infty w^{\eta_\alpha}(t, t-y) \int_y^\infty w^{\eta_\beta}(t, t-z) \rho(y-z) \ldots \times$$

$$\times \int_u^\infty w^{\eta_\delta}(t, t-v) \rho(v-u)\, du \ldots dy\, dz.$$

3. Суммируются математические ожидания частных сумм.

Используя равенства (6.54) – (6.56) в формулах (6.50), можно получить формулы для моментов четного порядка выходного сигнала. В частности, первые три таких момента выражаются в виде

$$a_{X2} = a_{C2} \nu \int_0^\infty w^2(t, t-z)\, dz, \qquad (6.57)$$

$$a_{X4} = a_{C4} \nu \int_0^\infty w^4(t, t-z)\, dz + 6 a_{C2}^2 \nu \int_0^\infty w^2(t, t-z) \times$$

$$\times \int_z^\infty w^2(t, t-u) \rho(u-z)\, du\, dz, \qquad (6.58)$$

$$a_{X6} = a_{C6} \nu \int_0^\infty w^6(t, t-z)\, dz +$$

$$+ 15 a_{C2} a_{C4} \nu \int_0^\infty [w^4(t, t-z) \int_z^\infty w^2(t, t-u) +$$

$$+ w^2(t, t-z) \int\limits_z^\infty w^4(t, t-u)] \rho(u-z)\, du\; dz +$$

$$+ 90 a_{Cl}^3 \nu \int\limits_0^\infty w^2(t, t-z) \int\limits_z^\infty w^2(t, t-u) \rho(u-z) \times$$

$$\times \int\limits_u^\infty w^2(t, t-v) \rho(v-u)\, dv\; du\; dz. \tag{6.59}$$

Пример 6.5. В случае дробового шума плотность распределения вероятностей длины установившегося интервала имеет вид $f(z) = \nu \exp(-\nu z)$. Отсюда

$$\hat{f}(s) = \frac{\nu}{\nu + s}, \qquad \frac{\hat{f}(s)}{1 - \hat{f}(s)} = \frac{\nu}{s}, \qquad \rho(z) = \mathfrak{L}_z^{-1}\left[\frac{\hat{f}(s)}{1 - \hat{f}(s)}\right] = \nu. \tag{6.60}$$

В силу (6.60) формулы для сумм смешанных моментов величины W_i упрощаются. В частности, формула (6.54) принимает вид

$$\mathrm{M} \sum_{i,j}{}' W_i^2 W_j^2 = \nu^2 \int\limits_0^\infty w^2(t, t-z) \int\limits_z^\infty w^2(t, t-u)\, du\; dz$$

и допускает дальнейшее упрощение. Обозначив

$$\int\limits_0^u w^2(t, t-u)\, du = \Phi(u),$$

получим

$$\mathrm{M} \sum_{i,j}{}' W_i^2 W_j^2 = \nu^2 \int\limits_0^\infty [\Phi(\infty) - \Phi(z)]\, d\Phi(z) =$$

$$= \frac{\nu^2}{2} \Phi^2(\infty) = \frac{\nu^2}{2} [\int\limits_0^\infty w^2(t, t-z)\, dz]^2.$$

В силу (6.50) и (6.58) формулы для моментов a_{X2} и a_{X4} принимают вид

$$a_{X2} = a_{C2} \nu \int\limits_0^\infty w^2(t, t-z)\, dz,$$

$$a_{X4} = a_{C4} \nu \int\limits_0^\infty w^4(t, t-z)\, dz + 3 a_{C2}^2 \nu^2 [\int\limits_0^\infty w^2(t, t-z)\, dz]^2.$$

Если перейти от моментов a_{Xk} к кумулянтам*) κ_{Xk}, $k = 2, 4, \ldots$, то

---

*) *Кумулянтами* [50] (*семиинвариантами* [40]) случайной величины G называются числа

$$\kappa_{Gk} = i^k \left.\frac{d^k \ln \chi_G(q)}{dq^k}\right|_{q=0}$$

(q – вещественная переменная, $i = \sqrt{-1}$), определяющие коэффициенты разложения в ряд Тейлора по степеням q функции $\ln \chi_G(q)$,

$$\ln \chi_G(q) \sim 1 + i\kappa_{G1} q - \frac{\kappa_{G2}}{2!} q^2 + \frac{i\kappa_{G3}}{3!} q^3 + \ldots,$$

где $\chi_G(q)$ – *характеристическая функция* [40, с. 548].

получим

$$\kappa_{X2} = a_{C2}\nu \int_0^\infty w^2(t, t-z)\,dz,$$

$$\kappa_{X4} = a_{C4}\nu \int_0^\infty w^4(t, t-z)\,dz.$$

Как и следовало ожидать, этот результат совпадает с известным результатом Дж. Лэнинга, Р. Бэттина [50].

Пример 6.6. Рассмотрим цепной шум с плотностью распределения длины установившегося интервала вида $f(z) = a^2 z \exp(-az)$, $a > 0$.

По формулам (6.46) и (6.47) плотности распределения вероятностей длин нулевого и начального интервалов получим соответственно в виде

$$f_Z(z) = 1/2\, a^3 z^2 \exp(-az),$$

$$\varphi_1(z_1) = 1/2\, a^3 (1 + az_1) \exp(-az_1).$$

Изображения функций $f(z)$ и $\varphi_1(z)$ имеют вид

$$\hat{f}(s) = \frac{a^2}{(s+a)^2}, \qquad \hat{\varphi}_1(s) = \frac{a(s+2a)}{2(s+a)^2}.$$

Отсюда следует

$$\nu \equiv \mathfrak{L}_z^{-1}\left[\frac{\hat{\varphi}_1(s)}{1-\hat{f}(s)}\right] = \frac{a}{2},$$

$$\rho(z) \equiv \mathfrak{L}_z^{-1}\left[\frac{\hat{f}(s)}{1-\hat{f}(s)}\right] = \nu[1 - \exp(-4\nu z)].$$

На основании формул (6.57) – (6.59) получим моменты a_{X2}, a_{X4}, a_{X6} в виде

$$a_{X2} = a_{C2}\nu \int_0^\infty w^2(t, t-z)\,dz,$$

$$a_{X4} = a_{C4}\nu \int_0^\infty w^4(t, t-z)\,dz +$$

$$+ 6a_{C2}^2\nu^2 \int_0^\infty w^2(t, t-z) \int_z^\infty w(t, t-u)\{1 - \exp[-4\nu(u-z)]\}\,du\,dz,$$

$$a_{X6} = a_{C6}\nu \int_0^\infty w^6(t, t-z)\,dz + 15 a_{C2} a_{C4} \nu^2 \times$$

$$\times \int_0^\infty w^4(t, t-z) \int_z^\infty w^4(t, t-u)\,\{1 - \exp[-4\nu(u-z)]\}\,du\,dz +$$

$$+ \int_0^\infty w^2(t, t-z) \int_z^\infty w^4(t, t-u)\,\{1 - \exp[-4\nu(u-z)\,du\,dz]\} +$$

$$+ 90 a_{C2}^3 \nu^3 \int_0^\infty w^2(t, t-z) \int_z^\infty w^2(t, t-u)\,\{1 - \exp[-4\nu(u-z)]\} \times$$

$$\times \int_u^\infty w^2(t, t-v)\,\{1 - \exp[-4\nu(v-u)]\}\,du\,dv\,dz.$$

Способы приближенного вычисления функции распределения по моментам см. в [74]. Простейший способ, когда учитываются только моменты a_{X2} и a_{X4} приведен в конце данного раздела.

Случай безымпульсного стохастического входного сигнала. Безымпульсный стохастический сигнал — стохастический сигнал, не содержащий импульсов. Будем рассматривать входные сигналы этого типа, предполагая, что они определены на интервале $(-\infty, T)$ как случайные функции времени $Y(t)$.

Чтобы приближенно вычислить одномерную функцию распределения выходного сигнала в процессе, вызванном входным сигналом этого типа, удобно применить гипотезу о происхождении центрированной случайной составляющей входного сигнала $[\overset{\circ}{Y}(t) = Y(t) - m_Y(t)]$, как симметричного цепного шума, преобразованного формирующим фильтром. Для этого необходимо, чтобы для всех моментов времени от минус бесконечности до момента наблюдения выходного сигнала существовали и были известны математическое ожидание входного сигнала и его корреляционная функция, а плотность распределения всех сечений его центрированной составляющей была четной функцией.

Рассмотрим два случая:

а) функция $Y(t)$ является стационарной в широком и узком смысле;

б) функция $Y(t)$ является случайной функцией общего вида.

В первом случае предположим, что для всех $t \in (-\infty, T)$ равны нулю все нечетные моменты a_{Yk} и конечны все четные, корреляционная функция $R^*_Y(\tau)$ такова, что проблема формирующего фильтра разрешима, и что функция $R^*_Y(\tau)$ и все числа a_{Yk} заданы. При этих условиях для приближенного вычисления моментов выходного сигнала можно применить следующую гипотезу о происхождении сигнала $Y(t)$: этот сигнал появился в результате прохождения симметричного цепного шума $Z(t)$ через формирующий фильтр (см. рис. 6.2).

Задача решается по следующей схеме. Задаваясь функцией $\rho(v)$ (характеристика реккурентного потока моментов появления импульсов) и применяя формулы, связывающие моменты входного и выходного сигналов, находим характеристики симметричного цепного шума $Z(t)$. Далее находим импульсную переходную функцию $w_1(t, u)$ последовательного соединения формирующего фильтра и заданной системы и применяя те же формулы находим для всех t моменты сечений случайной функции $X(t)$. По моментам приближенно вычисляем функции распределения упомянутых сечений.

Во втором случае эта схема не подходит, так как моменты a_{C4} в силу нестационарности сигнала находятся как функции от t и, следовательно, соответствующий им сигнал $Z(t)$ не является симметричным цепным шумом. Это принуждает нас учитывать только часть информации о сигнале $Y(t)$, рассматривая вместо всех высших моментов, начиная с 4-го порядка, лишь этот момент и искать в классе констант дополнительно к моменту a_{C2} лишь момент a_{C4}. Принципиально решение такой задачи возможно: ищется такая характеристика $\rho(v)$ реккурентного потока моментов появления импульсов, при которой $a_{C4} = \text{const}$.

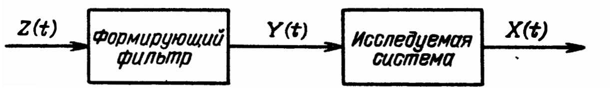


Рис. 6.2. Схема решения задачи об одномерной функции распределения выходного сигнала: $Z(t)$ – симметричный цепной шум, $Y(t)$ – входной сигнал, $X(t)$ – выходной сигнал

Найдя характеристики цепного шума, моменты 2-го и 4-го порядка сечений функции $X(t)$ находим так же, как в предыдущем случае. По моментам находим функции распределения сечений.

Схема решения задачи следующая.

1. В рамках корреляционной теории случайных функций ищем импульсную переходную функцию фильтра, преобразующего белый шум единичной интенсивности в стохастический сигнал с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией, тождественной корреляционной функции заданного входного сигнала.

2. Ищем характеристики цепного шума – ν, $\rho(z)$, a_{C2} и a_{C4} из условия, что при его преобразовании фильтром на выходе фильтра появляется сигнал с такими же корреляционной функцией и моментом 4-го порядка, как у центрированной составляющей заданного сигнала.

3. Ищем импульсную переходную функцию последовательного соединения фильтра и заданной системы.

4. Ищем моменты 2-го и 4-го порядка выходного сигнала упомянутого выше последовательного соединения, предполагая, что на входе действует цепной шум с найденными в п. 2 характеристиками.

5. Рассматривая этот выходной сигнал как выходной сигнал заданной системы, возбужденной центрированной составляющей заданного сигнала, ищем его одномерную функцию распределения.

6. Используя математическое ожидание заданного входного сигнала и импульсную переходную функцию заданной системы, рассчитываем математическое ожидание выходного сигнала.

В этой схеме гипотеза о происхождении заданного входного сигнала используется в пп. 2 и 4. Смысл ее применения следующий: заданному входному сигналу приписывается некоторая структура, сохраняющая содержащиеся в задании его характеристики и, вместе с тем, позволяющая рассчитать аналогичные характеристики (в случае разрешимости задачи, сформулированной в п. 4) выходного сигнала. Очевидно, что возможное несовпадение рассчитываемых характеристик выходного сигнала с действительными связано с неполнотой имеющейся информации о стохастическом входном сигнале.

Разрешимость задачи в целом определяется разрешимостью всех ее подзадач, каждая из которых, кроме пятой, может оказаться неразрешимой. Пятая задача всегда разрешима, причем неоднозначно.

Охарактеризуем каждую подзадачу.

Первая подзадача – это задача о формирующем фильтре.

Вторая подзадача является обратной по отношению к задаче о прохождении цепного шума через систему (см. выше), в несколько видоизмененном варианте – учитываются только 2-е и 4-е моменты случайных величин.

Третья задача является одной из задач алгебры структурных преобразований и рассмотрена в гл. 3.

Четвертая подзадача есть часть задачи о прохождении цепного шума через систему, которая рассмотрена выше.

Пятая подзадача не представляет сколько-либо существенных сложностей.

Шестая подзадача рассмотрена в п. 6.3.2.

Из приведенной характеристики подзадач следует, что три из них являются типовыми задачами, рассмотренными в других разделах книги. Таким образом, следует рассмотреть три остальные: вторую, четвертую и пятую.

Для решения второй подзадачи можно воспользоваться полученными в данном разделе уравнениями, связывающими моменты сигнала на выходе системы (в данном случае – фильтра) с моментами коэффициента модуляции цепного шума. Так как сигнал на выходе фильтра в дальнейшем будет интерпретироваться как сигнал на входе заданной системы, будем обозначать его символом $Y(t)$; для амплитуд импульсов сохраним прежние обозначения – символы C_k. Взаимосвязи между известными и неизвестными величинами устанавливают уравнения (6.58) и (6.57):

$$a_{Y2}(t) = a_{C2}\nu\int_0^\infty w_0^2(t, t-z)\,dz, \tag{6.61}$$

$$a_{Y4}(t) = a_{C4}\nu\int_0^\infty w_0^4(t, t-z)\,dz + 6a_{C2}^2\nu\int_0^\infty w_0^2(t, t-z) \times$$

$$\times \int_{z} w_0^2(t, t-u)\, \rho(u-z)\, du\ dz, \tag{6.62}$$

где $w_0(t, v)$ – импульсная переходная функция формирующего фильтра. Заметим, что в этих уравнениях a_{Y2} и a_{Y4} – функции от t, а a_{C2} и a_{C4} – постоянные величины. Неизвестными являются три числа a_{C2}, a_{C4} и ν и одна функция $\rho(v)$. Число неизвестных можно сократить, применив следующую замену неизвестных:

$$a_{C2}\nu = a^0_{C2}, \qquad a_{C4}\nu = a^0_{C4}, \qquad \frac{\rho(v)}{\nu} = \rho^0(v). \tag{6.63}$$

Так как выше предполагалось, что искомый цепной шум является белым шумом единичной интенсивности, то $a^0_{C2} = 1$ и уравнение (6.61) в решении задачи не участвует. Уравнение (6.62) после замены (6.63) принимает вид

$$a_{Y4}(t) - a^0_{C4} \int_0^\infty w_0^4(t, t-z)\, dz =$$

$$= 6 \int_0^\infty w_0^2(t, t-z) \int_z^\infty w_0^2(t, t-u)\, \rho^0(u-z)\, du\, dz. \tag{6.64}$$

Это уравнение можно рассматривать как интегральное уравнение относительно функции $\rho^0(v)$ с параметром a^0_{C4}. В качестве приемлемых значений этого параметра может быть принято любое положительное число, при котором выполняются следующие условия: а) уравнение (6.64) разрешимо в классе неотрицательных функций, б) существует такое положительное значение ν, при котором $a^0_{C4}\nu > 1$, а функция $\rho^0(v)$ принадлежит к некоторому классу функций, определенному свойствами, присущими ей как характеристике цепного шума.

Обозначив

$$a^0_{C4} \int_0^\infty w_0^4(t, t-z)\, dz = \lambda, \qquad \int_z^\infty w_0^2(t, t-u)\, \rho(u-z)\, du = \sigma(z), \tag{6.65}$$

вопрос разрешимости уравнения (6.64) можно свести к вопросам разрешимости уравнения

$$a_{Y4}(t) - \lambda = 6 \int_0^\infty w_0^4(t, t-z)\, \sigma(z)\, dz,$$

в котором $\sigma(z)$ – неизвестная функция, λ – вещественный положительный параметр, и уравнения (6.65), в котором неизвестной функцией являются $\rho(v)$. Эти вопросы должны решаться последовательно.

Достаточное условие разрешимости проблемы моментов [5] в данном случае выражается в виде $a^0_{C4}\nu > 1$. Класс функций, к которому принадлежит функция $\rho^0(v)$, определяется уравнениями (см. первую часть этого раздела)

$$\rho(v)=\mathcal{L}_v^{-1}\left(\frac{\hat{f}(s)}{1-\hat{f}(s)}\right),\qquad v=\mathcal{L}_v^{-1}\left(\frac{\hat{\varphi}_1(s)}{1-\hat{f}(s)}\right),$$

совместно с уравнением (6.47). Из уравнений (6.65) следует

$$\rho^0(z)=\mathcal{L}_z^{-1}\left[\frac{\hat{f}(s)}{s\hat{\varphi}_1(s)}\right]. \tag{6.66}$$

Учитывая (6.47) и (6.66), получим

$$\rho^0(z)=\mathcal{L}_z^{-1}\left(\frac{\hat{f}(s)}{s\mathcal{L}_z[\int\limits_z^\infty u^{-1}f_Z(u)\,du]}\right).$$

Это уравнение ставит в соответствие каждой плотности распределения $f(z)$ некоторую функцию $\rho^0(z)$. Множеству возможных плотностей распределения соответствует класс функций $\rho^0(z)$, к которому принадлежит решение интегрального уравнения (6.64).

Очевидно, согласно общим свойствам плотности распределения, функцией $f(z)$ может быть любая измеримая [59] неотрицательная вещественная числовая функция с возможными включениями типа дельта-функции. При этом, поскольку аргументом является длина интервала, $f(z)=0$ при $z<0$. Кроме того, для однозначности описания стационарного точечного процесса следует исключить возможность включений типа дельта-функции в точке $z=0$.

Решение четвертой подзадачи дают уравнения (6.57) и (6.58), которые в соответствии с обозначениями (6.63) с учетом равенства $a^0_{C2}=1$ принимают вид

$$a_{X2}(t)=\int\limits_0^\infty w_1^2(t,t-z)\,dz, \tag{6.67}$$

$$a_{X4}(t)=a^0_{C4}\int\limits_0^\infty w_1^4(t,t-z)+6\int\limits_0^\infty w_1^2(t,t-z)\,\sigma(z)\,dz, \tag{6.68}$$

где $w_1(t,u)$ – импульсная переходная функция последовательного соединения формирующего фильтра и заданной системы.

Пятая подзадача, как уже отмечалось, имеет неоднозначное решение. Простейшая возможность связана с интерпретацией искомого распределения как одного из следующих трех: β-распределения, нормального распределения, распределения Стьюдента. При этом в соответствии с [9] выбор вида распределения для данного значения определяется отношением $k=a_{X4}/a^2_{X2}$, а именно: при $1<k<3$ – β-распределение, при $k=3$ – нормальное распределение, при $k > 3$ – распределение Стьюдента. Случай $k < 1$ не рассматривается, так как при этих значениях k *проблема моментов Гамбургера* [5, с. 142] для последовательности 1, a_{X2}, a_{X4}, ... неразрешима, т.е. не существует отвечающей ей функции распределения с бесконечным числом точек роста [5, с. 143].

§ 6.3. Вынужденные колебания стохастических систем

Будем предполагать, так же как мы это делали для детерминированных систем, что стохастическая система является нормальной. Будем рассматривать только такие входные сигналы, которые описываются вещественными функциями или обобщенными функциями времени, если они – детерминированные и случайными или обобщенными случайными функциями времени, если они – стохастические. При этом функции и обобщенные функции, описывающие как детерминированные сигналы, так и реализации стохастических сигналов, будем считать принадлежащими векторному пространству L'^r_C.

Далее, будем считать, что имеется такая полнота вероятностного описания системы, при которой каждому детерминированному входному сигналу соответствует стохастический выходной сигнал, представляемый случайной функцией. Множество всех случайных функций обозначим символом L^r_X. Оно является векторным пространством. В силу линейности системы множество всех случайных функций, описывающих выходные сигналы, порожденные рассматриваемыми входными, является его подпространством. Обозначим его символом L^{rA}_X.

При высказанных предположениях стохастическая система характеризуется оператором A_{Xy}, ставящим в соответствие каждому $y(t) \in L'^r_C$ некоторый элемент $X(t) \in L^{rA}_X$. Отсюда вытекает следующая постановка первой основной задачи анализа: определить оператор A_{Xy} и выяснить, является ли отображение взаимно однозначным.

Второй вариант первой основной задачи анализа возникает в случае стохастического входного сигнала, характеризуемого случайной или обобщенной случайной функцией $Y(t)$ с реализациями из множества L'^r_C. Множество всех случайных и обобщенных случайных функций этого вида является векторным пространством, которое обозначим символом L^{r*}_Y. Постановка задачи здесь следующая: определить оператор A_{XY}, осуществляющий отображение $L^{r*}_Y \to L^r_X$, и выяснить, является ли отображение взаимно однозначным.

Оба варианта задачи существенно сложнее аналогичных вариантов для детерминированных систем, причем уровень сложности зависит от того, какие характеристики системы заданы в вероятностном аспекте: коэффициенты уравнения или системы уравнений процесса, импульсная переходная функция, частотные характеристики и т.д. Наиболее распространенная форма вероятностного описания системы – через вероятностное задание коэффициентов – приводит к наиболее сложным задачам. Так, например, в случае системы с сосредоточенными параметрами коэффициенты задаются как функции времени и конечного числа случайных параметров (переменных или постоянных). Трудности здесь связаны с тем, что в общем случае операторы A_{Xy} и A_{XY} нелинейно зависят от этих параметров.

Первая основная задача анализа для нестационарных линейных систем общего вида практически не изучена. Поэтому ограничимся системами с сосредоточенными параметрами. Возможность простых решений появляется только в случаях линейного характера упомянутой зависимости и тогда, когда диапазоны возможных значений случайных параметров достаточно малы и практически допускают линейную аппроксимацию зависимости оператора от параметров. Путь решения в этих случаях состоит в решении задачи в детерминистском аспекте для математических ожиданий параметров и сигналов с внесением аддитивной стохастической поправки в выходной сигнал. При постоянных параметрах поправка может быть внесена по *методу, основанному на теории чувствительности* [74, с. 410–413], [96, с. 466–472], при переменных параметрах – на методе [74, с. 408–409], базирующемся на *методе Щелкунова* [74, с. 332–333].

Некоторые методы решения первой основной задачи анализа, не использующие предположение о малости случайных параметров при вариантах описания системы уравнениями процесса, импульсной переходной функцией и частотными характеристиками см. в [74, с. 413–434].

Глава 7

ПРОЦЕССЫ В МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМАХ

В данной главе рассматриваются свободные и вынужденные колебания многосвязных систем.

§ 7.1. Свободные колебания

7.1.1. Свободные колебания многосвязных систем с одним или несколькими выходами. Как было замечено в § 4.4, внутренние характеристики многосвязной системы *с одним выходом* могут рассматриваться как внутренние характеристики некоторой односвязной системы, а внутренние характеристики *детерминированной* многосвязной системы с *несколькими выходами* – как внутренние характеристики некоторой совокупности односвязных систем. Поэтому задача изучения таких многосвязных систем сводится к аналогичным задачам для односвязных систем.

Анализ свободных колебаний *стохастических* многосвязных систем с несколькими выходами несколько сложнее. Часть результатов здесь можно получить в той же схеме рассмотрения – при эквивалентировании исходной системы совокупностью односвязных систем. Но появляется также новый аспект исследований: изучение стохастической взаимосвязи выходных сигналов. Эта взаимосвязь определяется как стохастической взаимосвязью внутренних характеристик эквивалентирующих односвязных систем, так (в случае вероятностного задания начального состояния, § 1.6) и единством начального состояния упомянутых односвязных систем. Она может еще более усложниться при наличии стохастической взаимосвязи между начальными данными и внутренними характеристиками системы.

7.1.2. Свободные колебания многосвязных систем с континуальным множеством выходов. Большие сложности представляет анализ свободных колебаний систем с континуальным множеством выходов. В частности, для расчета процесса в одномерной системе с распределенными параметрами в варианте использования в качестве внутренней характеристики уравнения или системы уравнений процесса необходимо решать (приближенно) дифференциальные уравнения в частных производных – задача, существенно более сложная, чем задача интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Существенно проще рассчитывать свободные колебания такой системы в варианте использования в качестве внутренней характеристики *аналога фундаментальной системы решений обыкновенного линейного однородного дифференциального уравнения* (§ 4.4). Однако задача получения такого аналога в численном или аналитическом виде представляет большие и неизученные трудности.

Расчет свободных колебаний системы с распределенными параметрами. Задача расчета свободных колебаний системы с распределенными параметрами сводится к интегрированию одного дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений в частных производных с заданными краевыми условиями. Поскольку точное аналитическое решение уравнения или системы уравнений в частных производных может быть найдено только в простейших случаях, при решении большинства практических задач приходится прибегать к методам приближенного интегрирования.

Классические методы. К этим методам в первую очередь относятся конечно-разностные методы, метод конечных элементов и вариационные методы. Другие известные методы – либо разновидность, либо некоторая комбинация этих основных методов.

Конечно-разностные методы [33, 22] наиболее многочисленны. Они относятся к категории численных методов, универсальны, алгоритмы их просты и легко реализуются на цифровых вычислительных машинах. Однако общеизвестны и трудности, связанные с их применением. Главные из них: неустойчивость многих аппроксимационных схем, сложность исследования устойчивости этих схем, большие затраты машинного времени.

Метод конечных элементов (*метод дискретного параметра*) [89] позволяет решать задачи различной сложности, начиная с таких, как расчет колебаний простейших механических систем (нитей, винтов и др.) и до пространственных задач теории упругости со сложными краевыми условиями. Известны случаи применения метода конечных элементов в задачах механики жидкости, теплопередачи, электромагнетизма. Метод основан на эквивалентировании системы с распределенными параметрами системой с сосредоточенными параметрами высокого порядка. Однако этот метод – инструмент для решения лишь простейших задач и только при хорошо подобранной эквивалентирующей модели дает решение, близкое к решению исходной задачи. Кроме того, неудобством применения метода является также необходимость численного интегрирования уравнений процесса эквивалентирующей системы. Заменить численные методы приближенными аналитическими практически возможно лишь в тех случаях, когда порядок системы дифференциальных уравнений достаточно низок.

Вариационные методы (*метод Галеркина, метод локальных вариаций и др.*) [33, 34] являются приближенными аналитическими методами и наиболее разработаны применительно к задачам теории упругости [34] и к задаче о стационарном распределении температур в неоднородной среде, т.е. не к задачам теории динамических систем. Однако в тех случаях, когда математические постановки задач расчета процессов в динамических системах формально совпадают с постановками указанных выше задач, методы решения последних можно применить для решения первых.

Итерационный метод [77, 78]. Этот метод является методом приближенного интегрирования дифференциального уравнения в частных производных произвольного порядка с двумя аргументами, один из которых в нашем случае представляет собой время t, а другой – пространственная координата l. Основная идея метода – замена исходного дифференциального уравнения в частных производных двумя аппроксимирующими его обыкновенными дифференциальными уравнениями, в одном из которых t играет роль аргумента, l – параметра, а в другом l – роль аргумента, а t – параметра. Эти дифференциальные уравнения формируются рекуррентно, причем рекуррентный процесс строится так, чтобы на основе решений этих уравнений можно было получить аппроксимации решений исходной задачи.

Приведем вариант метода, предложенный в [77]. Вариант, предложенный в [78], отличается алгоритмом построения аппроксимирующих дифференциальных уравнений.

П о с т а н о в к а з а д а ч и. Рассмотрим линейную систему с распределенными параметрами, процессы в которой описываются дифференциальным уравнением вида

$$\sum_{i=0}^{m} Q_i \frac{\partial^i x(t, l)}{\partial l^i} = 0, \quad l_0 \leqslant l \leqslant l_1, \quad t_0 \leqslant t < T < \infty, \tag{7.1}$$

где

$$Q_i = \sum_{j=0}^{n_i} a_{ij}(t, l) \frac{\partial^{n_i - j}}{\partial t^{n_i - j}}, \tag{7.2}$$

причем $a_{ij}(t, l)$ – непрерывные функции, при следующих граничных условиях:

$$\sum_{s=0}^{1} \sum_{i=0}^{n-1} b_{\nu is}(t, l) \left. \frac{\partial^i x(t, l)}{\partial l^i} \right|_{l = l_s} = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{7.3}$$

где $b_{\nu is}(t, l)$ – непрерывные функции. Сформируем метод приближенного расчета свободных колебаний такой системы, т.е. метод приближенного вычисления решения уравнения (7.1), удовлетворяющего граничным условиям (7.3) и заданным начальным условиям. Начальные условия примем в виде

$$\left.\frac{\partial^j x(t, l)}{\partial t^j}\right|_{t=t_0} = \varphi_j(l), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{7.4}$$

где $\varphi_j(l)$ – непрерывные функции.

Решение задачи. Перепишем уравнение (7.1) в виде

$$\sum_{j=0}^{n} P_j \frac{\partial^j x(t, l)}{\partial t^j} = 0, \tag{7.5}$$

где

$$P_j = \sum_{i=0}^{m_j} c_{ji}(t, l) \frac{\partial^{m_j - i}}{\partial l^{m_j - i}}, \tag{7.6}$$

причем $\max\limits_j m_j = m$. В основе метода лежит итеративная процедура формирования аппроксимаций искомого решения в виде линейных комбинаций результатов интегрирования уравнения (7.1) по переменной l и уравнения (7.5) – по переменной t.

Обозначим символом $w(t, l)$ искомое решение. Построим последовательность аппроксимаций функции $w(t, l)$, выполняя на каждом итерационном шаге следующие четыре операции:

1) интегрирование уравнения, аппроксимирующего уравнения (7.1), с заданными начальными условиями;

2) интегрирование уравнения, аппроксимирующего уравнение (7.5), с заданными граничными условиями;

3) формирование аппроксимации решения уравнения (7.1) при заданных краевых условиях как полусуммы решений, полученных в пп. 1) и 2);

4) уточнение уравнений, аппроксимирующих уравнения (7.1) и (7.5).

Рассмотрим первый итерационный шаг.

Операция 1. Введем обозначения

$$u_0(t, l) \triangleq x(t, l), \quad u_1(t, l) \triangleq \frac{\partial x(t, l)}{\partial l},$$

$$u_2(t, l) \triangleq \frac{\partial^2 x(t, l)}{\partial l^2}, \ \ldots, \ u_m(t, l) \triangleq \frac{\partial^m u(t, l)}{\partial l^m} \tag{7.7}$$

и перепишем уравнение (7.1) в виде

$$Q_0 u_0(t, l) + Q_1 u_1(t, l) + \ldots + Q_m u_m(t, l) = 0. \tag{7.8}$$

Выберем дифференциальный оператор Q_k, содержащий максимальную степень оператора дифференцирования $\partial/\partial t$, а если таких дифференциальных операторов несколько, то – тот из них, у которого индекс выше (т.е. тот, который стоит перед производной наиболее высокого порядка переменной x по l). Далее, полагая остальные дифференциальные операторы равными нулю, аппроксимируем уравнение (7.1) уравнением

$$Q_k u_k(t, l) = 0. \tag{7.9}$$

В соответствии с (7.2) оно имеет вид

$$a_{k0}(t, l) \frac{\partial^n u_k(t, l)}{\partial t^n} + a_{k1}(t, l) \frac{\partial^{n-1} u_k(t, l)}{\partial t^{n-1}} + \ldots$$

$$\ldots + a_{kn}(t, l) u_k(t, l) = 0. \tag{7.10}$$

Уравнение (7.10) является обыкновенным дифференциальным уравнением с независимой переменной t, в котором переменная l участвует в качестве параметра. Приближенно интегрируя это уравнение с учетом начальных условий

$$\left. \frac{\partial^j u_k(t, l)}{\partial t^j} \right|_{t=t_0} = \frac{\partial^k \varphi_j(l)}{\partial l^k}, \quad j = 0, 1, \ldots, n, \tag{7.11}$$

следующих из условий (7.4), находим нулевое приближение $u_k^{(0)}(t, l)$ k-й производной по l некоторого решения уравнения (7.1); при этом указанная производная удовлетворяет заданным начальным условиям.

После этого находим нулевое приближение $x^{(0)}(t, l)$ решения уравнения (7.1) при заданных краевых условиях путем k-кратного интегрирования функции $u_k^{(0)}(t, l)$ по аргументу l, определяя зависящие от параметра t произвольные константы из граничных условий (7.3).

Операция 2. Алгоритм построения уравнения, аппроксимирующего уравнение (7.5) аналогичен приведенному выше алгоритму аппроксимации уравнения (7.1). Вводим переменные

$$v_0(t, l) \triangleq x(t, l), \quad v_1(t, l) \triangleq \frac{\partial x(t, l)}{\partial t}, \ldots,$$

$$v_n(t, l) \triangleq \frac{\partial^n x(t, l)}{\partial t^n} \tag{7.12}$$

и выделяем из дифференциальных операторов P_0, P_1, ..., P_n оператор P_r, содержащий максимальную степень оператора $\partial/\partial l$, а если таких дифференциальных операторов несколько, то – тот из них, у которого индекс выше. Приравняв все остальные дифференциальные операторы нулю, записываем исходную аппроксимацию уравнения (7.5) в виде

$$P_r v_r(t, l) \equiv c_{r0}(t, l) \frac{\partial^m v_r(t, l)}{\partial l^m} +$$

$$+ c_{r1}(t, l) \frac{\partial^{m-1} v_r(t, l)}{\partial l^{m-1}} + \ldots + c_{rm}(t, l) v_r(t, l) = 0. \tag{7.13}$$

Приближенно интегрируем это уравнение с учетом граничных условий (7.3). Это дает нулевое приближение $v_r^{(0)}(t, l)$ r-й производной по t некоторого решения уравнения (7.5); при этом указанная производная удовлетворяет заданным граничным условиям. Соответствующее нулевое приближение $v^{(0)}(t, l)$ решения уравнения (7.1) находим путем r-кратного интегрирования функции $v_r^{(0)}(t, l)$ по аргументу t с определением зависящих от параметра l произвольных констант из начальных условий (7.4).

Операция 3. Определяем аппроксимацию искомого решения уравнения (7.1) как завершающую для первого итерационного шага в виде

$$w^{(0)}(t, l) = \frac{u^{(0)}(t, l) + v^{(0)}(t, l)}{2}. \tag{7.14}$$

Операция 4. Подставляя $x(t, l) = w^{(0)}(t, l)$ в выражения

$$-\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{m} Q_i \frac{\partial^i x(t, l)}{\partial l^i}, \qquad -\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq r}}^{n} P_j \frac{\partial^j x(t, l)}{\partial t^j}$$

и обозначая результат подстановки в первом случае символом $y^{(0)}(t, l)$, а во втором – символом $z^{(0)}(t, l)$, сформируем первые аппроксимации уравнений (7.1) и (7.5) в виде

$$Q_k u_k(t, l) = y^{(0)}(t, l), \quad P_r u_r(t, l) = z^{(0)}(t, l). \tag{7.15}$$

Эта операция завершает первый итерационный шаг. Следующие шаги аналогичны. Если приписать аппроксимациям решений уравнения (7.1), получаемым в результате операций 1 и 2 на q-м итерационном шаге, индекс $q - 1$ и ввести вспомогательные функции $w^{(q-1)}(t, l)$, $y^{(q-1)}(t, l)$ и $z^{(q-1)}(t, l)$ по аналогии с соответствующими функциями, введенными на первом итерационном шаге, то результат q-го итерационного шага выразится дифференциальными уравнениями

$$Q_k u_k(t, l) = y^{(q-1)}(t, l), \qquad P_r v_r(t, l) = z^{(q-1)}(t, l), \tag{7.16}$$

отличающимися от уравнений (7.15) лишь видом правых частей. Эти уравнения используются на $(q+1)$-м итерационном шаге.

Функция $w^{(q-1)}(t, l)$ – $(q-1)$-я аппроксимация искомого решения уравнения (7.1). В общем случае она не удовлетворяет заданным краевым условиям, но в некоторой степени их учитывает. Если при $q \to \infty$ указанный итеративный процесс сходится, а также сходятся последовательности $u^{(0)}(t,l), u^{(1)}(t,l), \ldots$ и $v^{(0)}(t, l)$, $v^{(1)}(t, l), \ldots$ и выполняется условие

$$\lim_{q \to \infty} u^{(q)}(t, l) = \lim_{q \to \infty} v^{(q)}(t, l), \tag{7.17}$$

то полученные последовательности сходятся к решению уравнения (7.1). Это следует из построения функций $u^{(q)}(t, l)$ и $v^{(q)}(t, l)$.

Пример 7.1. Рассмотрим нормированное уравнение малых колебаний струны [17]

$$\frac{\partial^2 x(t, l)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 x(t, l)}{\partial l^2} = 0, \quad 0 \leqslant l \leqslant L, \quad 0 \leqslant t < T \leqslant \infty. \tag{7.18}$$

Будем искать аппроксимации его решения, удовлетворяющего следующим краевым условиям:

а) начальным

$$x(0, l) = \varphi(l), \quad \left.\frac{\partial x(t, l)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0;$$

б) граничным

$$x(t, 0) = x(t, L) = 0,$$

где $\varphi(l)$ – непрерывная и дважды дифференцируемая на $[0, L]$ функция, принимающая нулевые значения при $l = 0$ и $l = L$.

Рассмотрим последовательно все этапы формирования первой аппроксимации этого решения.

1. После перехода к переменным (7.7) уравнение (7.18) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u_0(t, l)}{\partial t^2} - u_2(t, l) = 0. \tag{7.19}$$

Аппроксимирующее уравнение (7.9) в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_0(t, l)}{\partial t^2} = 0. \tag{7.20}$$

Интегрируя это уравнение с учетом заданных начальных условий, находим нулевое приближение функции $u_0(t, l)$ как искомого решения уравнения (7.19):

$$u_0^{(0)}(t, l) = \varphi(l). \tag{7.21}$$

2. Перейдем к переменным (7.12) и перепишем уравнение (7.18) в виде

$$v_2(t, l) - \frac{\partial^2 v_0(t, l)}{\partial l^2} = 0. \tag{7.22}$$

Согласно (7.13), исходная аппроксимация уравнения (7.22) имеет вид

$$\frac{\partial^2 v_0(t,l)}{\partial l^2} = 0. \qquad (7.23)$$

Интегрируя это уравнение с учетом заданных граничных условий, получим исходную аппроксимацию функции $v_0(t, l)$ как решения уравнения (7.22), в виде

$$v_0^{(0)}(t,l) = 0. \qquad (7.24)$$

3. Согласно (7.14), нулевое приближение искомого решения получим в виде

$$w^{(0)}(t,l) = ½[\varphi(l)]. \qquad (7.25)$$

4. Дифференцируя функцию $w^{(0)}(t, l)$ по аргументам l и t, найдем

$$\frac{\partial^2 w^{(0)}(t,l)}{\partial l^2} = \frac{\partial^2 \varphi(l)}{2\partial l^2}, \qquad (7.26)$$

$$\frac{\partial^2 w^{(0)}(t,l)}{\partial t^2} = 0. \qquad (7.27)$$

Учитывая полученные выражения в правых частях уравнений (7.15), первые аппроксимации уравнений (7.19) и (7.22) получим в виде

$$\frac{\partial^2 x(t,l)}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \varphi(l)}{\partial l^2}, \qquad \frac{\partial^2 x(t,l)}{\partial t^2} = 0. \qquad (7.28)$$

Интегрируя эти уравнения с учетом заданных начальных и граничных условий и формируя функцию $w^{(1)}(t, l)$ как полусумму их решений, получим первое приближение искомого решения уравнения (7.18) в виде

$$w^{(1)}(t,l) = \frac{1}{2}\varphi(l) + \frac{t^2}{8}\,\frac{d^2\varphi(l)}{dl^2}. \qquad (7.29)$$

Не приводя вычислений, запишем формулы для трех следующих приближений:

■ $$w^{(2)}(t,l) = \frac{5}{8}\varphi(l) + \frac{t^2}{8}\,\frac{d^2\varphi(l)}{dl^2} + \frac{t^4}{8\cdot 4!}\,\frac{d^4\varphi(l)}{dl^4},$$

$$w^{(3)}(t,l) = \frac{5}{8}\varphi(l) + \frac{3t^2}{8\cdot 2!}\,\frac{d^2\varphi(l)}{dl^2} + \frac{t^4}{8\cdot 4!}\,\frac{d^4\varphi(l)}{dl^4} + \frac{t^6}{8\cdot 6!}\,\frac{d^6\varphi(l)}{\partial l^6},$$

$$w^{(4)}(t,l) = \frac{11}{16}\varphi(l) + \frac{3t^2}{8\cdot 2!}\,\frac{d^2\varphi(l)}{dl^2} + \frac{t^4}{4\cdot 4!}\,\frac{d^4\varphi(l)}{dl^4} +$$

$$+ \frac{t^6}{16\cdot 6!}\,\frac{d^6\varphi(l)}{dl^6} + \frac{t^8}{16\cdot 8!}\,\frac{d^8\varphi(l)}{dl^8}. \ \square \qquad (7.30)$$

Оценим, насколько использованный итерационный процесс позволяет приблизиться к решению поставленной задачи. Для этого следует проверить, в какой мере находимые аппроксимации решения уравнения (7.18) удовлетворяют заданным начальным условиям, граничным условиям и самому уравнению. Используя уравнения (7.30) и (7.29) и обозначая через $w(t, l)$ искомое решение уравнения (7.18), составим таблицу 7.1.

Из таблицы 7.1 видно, что начальное сечение ($t = 0$) аппроксимаций решения приближается к решению с развитием итерационного процесса, а на-

Таблица 7.1

Начальные условия для решения $w(t, l)$ и его аппроксимаций

$w^{(0)}(0, l)$	$w^{(1)}(0, l)$	$w^{(2)}(0, l)$	$w^{(3)}(0, l)$	$w^{(4)}(0, l)$	$w(0, l)$
$1/2\varphi(l)$	$1/2\varphi(l)$	$5/8\varphi(l)$	$5/8\varphi(l)$	$11/16\varphi(l)$	$\varphi(l)$
$\left.\dfrac{\partial w^{(0)}(t, l)}{\partial t}\right\|_{t=0}$	$\left.\dfrac{\partial w^{(1)}(t, l)}{\partial t}\right\|_{t=0}$	$\left.\dfrac{\partial w^{(2)}(t, l)}{\partial t}\right\|_{t=0}$	$\left.\dfrac{\partial w^{(3)}(t, l)}{\partial t}\right\|_{t=0}$	$\left.\dfrac{\partial w^{(4)}(t, l)}{\partial t}\right\|_{t=0}$	$\left.\dfrac{\partial w(t, l)}{\partial t}\right\|_{t=0}$
0	0	0	0	0	0

чальные сечения производных аппроксимаций решения по t совпадают с начальным значением упомянутой производной решения.

Из структуры аппроксимаций решения следует, что граничные условия удовлетворяются при $t = 0$, однако нарушаются при $t > 0$. Точность учета граничных условий в последнем случае оценим после того, как будут оценены аппроксимации решения в плане удовлетворения уравнению (7.18).

Оценим, в какой мере аппроксимации решения удовлетворяют уравнению (7.18). С этой целью заметим, что если распространить область определения функции $\varphi(l)$ на всю числовую ось и доопределить функцию $\varphi(l)$ при $l < 0$ и $l > L$, как нечетную периодическую с периодом $2L$, то нетрудно убедиться, что функция

$$\frac{\varphi(l+t)+\varphi(l-t)}{2}$$

является решением уравнения (7.18). Действительно, подставляя это выражение в уравнение (7.18), получим

$$\frac{\partial^2\varphi(l+t)}{2\partial t^2}+\frac{\partial^2\varphi(l-t)}{2\partial t^2}-\frac{\partial^2\varphi(l+t)}{2\partial l^2}-\frac{\partial^2\varphi(l-t)}{2\partial l^2}\equiv 0.$$

Предположим дополнительно, что функция $\varphi(l+a)$ разлагается в сходящийся ряд Тейлора по степеням l при любом $a \in (-\infty, \infty)$ и $l \in [0, T]$. Тогда

$$\frac{\varphi(l+t)+\varphi(l-t)}{2}=\varphi(l)+\frac{t^2}{2}\,\frac{d^2\varphi(l)}{\partial l^2}+\ldots+\frac{t^{2k}}{(2k)!}\,\frac{d^{2k}\varphi(l)}{dl^{2k}}+\ldots$$

Если сравнить ряд в правой части этого равенства с найденными выражениями аппроксимаций решения, то можно заметить, что коэффициенты при производных аппроксимаций решения по мере развития итерационного процесса сближаются с коэффициентами приведенного ряда. Это позволяет предположить, что с возрастанием числа итераций k функции $w^{(k)}(l,t)$ стремятся к рассматриваемому решению уравнения (7.18). Допустим, что это действительно имеет место; тогда

$$\frac{\varphi(l+t)+\varphi(l-t)}{2}=w(t,l).$$

Теперь вернемся к вопросу сопоставления граничных условий при $l = L$ для аппроксимаций решения и самого решения. В силу последнего равенства предельным видом этого граничного условия является следующее:

$$w(t,L)\equiv\frac{\varphi(L+t)+\varphi(L-t)}{2}=0,$$

т.е. получаем заданное граничное условие.

Из изложенного следует, что при справедливости высказанных выше предположений итерационный процесс приводит к последовательности функций $w^{(0)}(t,l)$, $w^{(1)}(t,l)$, ... сходящейся к искомому решению.

Метод гармонического баланса. Большой практический интерес представляет путь изучения свободных колебаний одномерной системы с распределенными параметрами и континуальным множеством выходов, основанный на приближенном эквивалентировании такой системы системой с конечным множеством выходов и использующий для этой цели разложение сигналов в ряды Фурье в области изменения пространственного аргумента. Возможно, целесообразен двухэтапный процесс такого эквивалентирования. На первом этапе система с континуальным множеством выходов заменяется системой со счетным множеством выходов, на втором этапе – множество выходов сводится до конечного. Пример первого этапа эквивалентирования был рассмотрен в п. 4.3. Полученный там результат: определен эквивалент исходной системы в виде системы с сосредоточенными параметрами счетного порядка.

Рассмотрим второй этап эквивалентирования для этого примера. Положим в уравнении (4.13)

$$\mathbf{B}_0(t)\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_1(t)\mathbf{x} = \mathbf{y},$$

описывающем процесс в полученном в § 4.2 эквиваленте исходной системы, $\mathbf{y} = 0$ (так как рассматриваются свободные колебания) и ограничиваясь случаем $\det \mathbf{B}_0(t) \neq 0$, $t \in I$ новое уравнение запишем в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{A}(t) = -[\mathbf{B}_0(t)]^{-1}\mathbf{B}_1(t). \tag{7.31}$$

Пусть уравнение (7.31) определено в области $I = [0, T]$. Определим класс F вектор-функций $\mathbf{f}(t) \triangleq [f_1(t), f_2(t), \ldots]^{\mathrm{T}}$ следующими условиями:

а) функции $f_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, абсолютно непрерывны;

б) $\|\mathbf{f}(t)\| \triangleq \sum\limits_{i=1}^{\infty} |f_i(t)| \leqslant \gamma < \infty$;

в) норма $\|\mathbf{f}(t)\|$ непрерывна.

Тогда справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 7.1 (Ш о у [138]). *Если каждый элемент $a_{ij}(t)$ матрицы $\mathbf{A}(t)$ – измеримая функция и удовлетворяются условия*:

1) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_{ij}(t)| \leqslant \alpha < \infty$, *суммы равномерно сходятся,*

2) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}(t)| \leqslant \beta < \infty$,

то заданному числовому вектору $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \ldots]^{\mathrm{T}}$ *с ограниченной нормой*

$$\|\mathbf{c}\| \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|$$

соответствует единственное решение уравнения (7.31) *в классе* F, *для которого* $\mathbf{x}'(0) = \mathbf{c}$.

Теперь, поскольку понятие решения бесконечной системы дифференциальных уравнений определено и его существование и единственность (при заданных начальных данных) доказаны, можно рассмотреть задачу аппроксимации такой системы конечной. С этой целью построим последовательность уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}^{(n)}(t) = \mathbf{A}^{(n)}\mathbf{x}^{(n)}(t), \tag{7.32}$$

где $\mathbf{x}$ и $\dot{\mathbf{x}}$ – n-мерные векторы, $\mathbf{A}^{(n)}(t)$ – $n \times n$-матрица с элементами $a_{ij}^{(n)}(t)$ полученными путем усечения векторов и матриц в (7.31) с отбрасыванием всех элементов за пределами n-й строки и n-го столбца. Определим векторы $\mathbf{x}'^{(n)}(t)$ равенствами

$$\mathbf{x}_i'^{(n)}(t) = \mathbf{x}^{(i)}(t), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$\mathbf{x}_i'^{(n)}(t) = \mathbf{0}, \qquad i = n + 1,\ n + 2, \ldots$$

Тогда, заменив систему (7.20) бесконечной системой

$$\dot{\mathbf{x}}'^{(n)}(t) = \mathbf{A}'^{(n)}(t)\,\mathbf{x}'^{(n)}(t), \tag{7.33}$$

где бесконечная матрица $\mathbf{A}'^{(n)}(t)$ построена из $\mathbf{A}^{(n)}(t)$ путем дополнения строками и столбцами с нулевыми элементами, на основании теоремы 7.1 убедимся в существовании и единственности в классе F вектор-функций решения уравнения (7.33) и, следовательно, в существовании и единственности в соответствующем классе вектор-функций n-го порядка решения уравнения (7.32).

Возможность аппроксимации системы (7.31) системой (7.32) устанавливает следующая теорема.

Теорема 7.2 (Шоу [138]). *В условиях теоремы* 7.1 *при заданном векторе с с ограниченной нормой последовательность решений уравнений* (7.33) *равномерно сходится к решению* $\mathbf{x}'(t)$ *уравнения* (7.31).

Поскольку уравнение (7.32) может рассматриваться как система уравнений процесса системы с сосредоточенными параметрами, теорема 7.2 дает завершение второго этапа эквивалентирования, так как определяет способ эквивалентирования и обосновывает его аппроксимационную ценность.

§ 7.2. Вынужденные колебания

7.2.1. Связь между входными и выходными сигналами. Рассмотрим многосвязную систему с сосредоточенными параметрами, имеющую k входов и m выходов и характеризуемую *импульсной переходной матрицей* $\mathbf{w}(t, u)$ (п. 4.5.1). Обозначим вектор входных сигналов с элементами $y_1(t), \ldots, y_k(t)$ символом $\mathbf{y}(t)$ и вектор выходных сигналов с элементами $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ символом $\mathbf{x}(t)$. Тогда для заданного момента приложения входных сигналов $t_0 \in I$ соотношение между векторами входных и выходных сигналов устанавливает равенство

$$\mathbf{x}(t)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{w}(t,u)\,\mathbf{y}(u)\,du. \tag{7.34}$$

Если информация о системе заключена в ее передаточной матрице $W(s,t)$, то при соответствующих областях определения системы и сигналов (I) и свойствах входных сигналов связь между характеристиками входных и выходных сигналов устанавливают приведенные ниже соотношения.

1. Если $I=[0,\infty)$, все входные сигналы преобразуемы по Лапласу и $Y(s)$ – вектор их изображений, то при $t\geqslant t_0$

$$\mathbf{x}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathbf{W}(s,t)\,\mathbf{Y}(s)\exp st\,ds, \tag{7.35}$$

где c – вещественное число, выбираемое как наибольшее из чисел c для односвязных систем, определяемых каждой парой вход – выход, $i=\sqrt{-1}$.

2. Если $I=(-\infty,T)$, $T\leqslant\infty$, все входные сигналы имеют *левые изображения* (п. 1.2.4), $\mathbf{Y}(s,t)$ – вектор этих изображений и процесс на интервале наблюдения физически определен, то при $t\geqslant t_0$

$$\mathbf{x}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathbf{W}(s,t)\,\mathbf{Y}(-s,t)\,ds, \tag{7.36}$$

где c – вещественное число, выбираемое так же, как в случае 1.

Эти соотношения являются очевидными обобщениями аналогичных соотношений для односвязных систем.

Если система описана спектральной матрицей $\boldsymbol{\theta}(\Omega,\omega)$ и спектры ее входных и выходных сигналов существуют, то вектор спектров входных сигналов $\boldsymbol{\varphi}_y(\omega)$ связан с вектором спектров выходных сигналов $\boldsymbol{\varphi}_x(\omega)$ соотношением

$$\boldsymbol{\varphi}_x(\Omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\theta}(\Omega,\omega)\,\boldsymbol{\varphi}_y(\omega)\,d\omega, \tag{7.37}$$

обобщающим аналогичное соотношение для односвязных систем.

Подводя итог изложенному выше, мы можем заключить, что в случае детерминированной системы с сосредоточенными параметрами и детерминированных входных сигналов переход от односвязной системы к многосвязной не вносит принципиально новых трудностей в решение задачи установления соответствия между входными и выходными сигналами или их характеристиками; по существу, эта задача для многосвязной системы сводится к решению $k\times m$ таких задач для односвязных систем.

Иначе обстоит дело в случае стохастической системы и стохастических входных сигналов. Здесь переход от односвязной системы к многосвязной приносит новые трудности. Источником трудностей является стохастическая взаимосвязь между элементами как векторов сигналов, так и матричных характеристик системы, в силу чего задачу изучения многосвязной системы нельзя свести к задаче изучения некоторого числа односвязных систем.

Для установления связи между характеристиками входных и выходных сигналов в качестве базовых соотношений могут быть использованы соотношения, получаемые из (7.34) – (7.37) путем замены векторов сигналов системами случайных функций одного аргумента и матричных характеристик системы системами случайных функций двух аргументов. Применяя эти соотношения, можно установить связь между моментными характеристиками системы и сигналов. При этом стохастическая взаимосвязь элементов векторов или матричных характеристик не проявляется только при установлении соотношений между математическими ожиданиями сигналов.

Все изложенное выше справедливо также для систем с запаздыванием и систем, процессы в которых описываются разностными уравнениями.

Соотношения между входными и выходными сигналами для *систем с распределенными параметрами* с континуальным множеством входов и/или выходов в случае детерминированной системы и детерминированных сигналов имеет характер формул пересчета функций нескольких переменных (в общем случае), описывающих входные сигналы, в функции также нескольких переменных (в общем случае), описывающих выходные сигналы. При этом формулы содержат кратные интегралы. В частности, в случае одномерной системы с распределенными по аргументу l параметрами, с сосредоточенным входным сигналом и с континуальным множеством выходов исчерпывающей внешней характеристикой системы является функция $w(t, u, l)$ (п. 4.5.2), описывающая выходной сигнал в точке l в момент t в процессе, вызванном единичным импульсом, приложенным в момент u. Если область определения системы и сигналов по аргументу l – замкнутый интервал $[0, L]$ и t_0 – момент приложения входного сигнала, соотношение между входным и распределенным выходным сигналом имеет вид

$$x(t, l) = \int_{t_0}^{t} w(t, u, l) y(u) du. \tag{7.38}$$

Если же входной сигнал также является распределенным, то, как указывалось в п. 4.5.2, исчерпывающей внешней характеристикой системы является функция $w(t, u, l, m)$, смысл которой до четвертого аргумента тот же, что и у предыдущей, а четвертый аргумент указывает на место приложения сосредоточенного импульса.

Вместо соотношения (7.38) в этом случае имеем ($\varphi(u,m)$ см. в п.1.2.1)

$$x(t, l) = \int_0^L \int_{t_0}^t w(t, u, l, m)\varphi(u, m)\,du\,dm. \qquad (7.39)$$

Задача об определении соотношений между характеристиками *стохастических* входных и выходных сигналов системы с распределенными параметрами является весьма сложной. Ее решение можно базировать на соотношениях, совпадающих по форме с соотношениями (7.38) и (7.39), но отличающихся от них тем, что числовые функции (все или некоторые) заменены случайными. В частности, в случае детерминированной системы и стохастических входных сигналов соотношение, аналогичное (7.39), имеет вид

$$\mathbf{X}(t, l) = \int_0^L \int_{t_0}^t w(t, u, l, m)\mathbf{\Phi}(u, m)\,du\,dm, \qquad (7.40)$$

где $\mathbf{X}(t, l)$ и $\mathbf{\Phi}(u, m)$ – случайные функции двух аргументов: t и l, u и m.

7.2.2. Задачи об оптимальных входных сигналах. В этих задачах предполагается, что действие входных сигналов целенаправленно. Цель формулируется в виде условий, которым должны удовлетворять выходные сигналы. Предполагается, что эти условия являются абсолютно жесткими (т.е. должны быть удовлетворены) или, если им нельзя удовлетворить, то приближенными (т.е. должны удовлетворяться условия, близкие к заданным). Ставится задача определения оптимальных входных сигналов (в случае одного входа – оптимального входного сигнала), причем критерием оптимальности в первом случае служит минимум затрат на достижение цели, а во втором – максимум той или иной меры приближения к цели.

Временной областью при постановке задач рассматриваемого типа обычно является конечный интервал $[t_0, T]$, причем правая граница интервала для одних задач предполагается фиксированной, для других – свободной, выбираемой в результате решения задачи.

Очевидно, затраты зависят от входных сигналов и длительности процесса. Поэтому они характеризуются некоторым функционалом F, определенном на множестве Y допустимых векторов входных сигналов $\mathbf{y}(t)$, зависящим от T как от параметра.

Точность достижения цели измеряется отклонением от цели. В качестве меры этого отклонения принимается некоторый функционал G, определенный на множестве X векторов выходных сигналов $\mathbf{x}(t)$, также в общем случае зависящий от T как от параметра.

Во многих математических работах (см., например, [114]), оба функционала объединяются в один, определенный как на множестве допустимых векторов входных сигналов, так и на множестве соответствующих им векторов выходных сигналов. Это позволяет рассматривать задачи в более общем виде и искать унифицированные подходы к решению двух указанных выше задач.

Так как затраты на достижение цели или приближения к цели в реальных задачах всегда ограничены, то возникает вопрос об учете этого ограничения. Оно может осуществляться двояко: либо при определении множества допустимых векторов входных сигналов, либо путем введения дополнительного функционала типа функционала F с требованием, чтобы значение этого функционала не превышало заданного числа.

Как отмечает Р.Т. Янушевский [115], задачи об оптимальных входных сигналах являются далеко не элементарными. Это относится и к широко освещаемой в литературе задаче об оптимальном быстродействии, поставленной Л.С. Понтрягиным, В.Г. Болтянским, Р.З. Гамкрелидзе и Е.Ф. Мищенко в [84]. Рассмотрим эту задачу в качестве примера.

Пусть уравнение процесса нестационарной линейной системы с сосредоточенными параметрами имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{y}, \tag{7.41}$$

поясненный в деталях в § 7.1. Предполагая, что к моменту $t = t_0$ система находилась в основном состоянии покоя, определим цель как достижение нового состояния с заданными значениями переменных состояния. В качестве затрат будем рассматривать время, необходимое для решения этой задачи. Значит, в данном случае функционал F вырождается в простую функцию параметра T:

$$F = T - t_0. \tag{7.42}$$

Множество допустимых векторов входных сигналов определим требованием: возможны любые кусочно-непрерывные функции $y_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, не превышающие по модулю заданных для каждой функции положительных чисел. Тогда под задачей об оптимальном быстродействии понимается задача определения вектора входных сигналов, минимизирующего F вида (7.42). Эта задача легко формулируется, но трудно решается. Общее решение получено, согласно [115], лишь для стационарной системы 2-го порядка.

Математическая модель системы, выражаемая уравнением (7.41), совместно с целью, сформулированной выше при изложении задачи об оптимальном быстродействии, определяют класс задач, различающихся лишь структурой функционала F. Множество допустимых векторов входных сигналов в задачах этого класса определяется так же, как в задаче об оптимальном быстродействии. Общий подход к их решению следующий.

1. Постулируется существование решения задачи и устанавливаются необходимые условия, которым должен удовлетворять оптимальный вектор входных сигналов.

2. Находится вектор входных сигналов, удовлетворяющий этим условиям.

3. Доказывается, что найденный вектор входных сигналов дает решение задачи. При этом а) либо доказывается, что необходимым условиям удовлетворяет только этот вектор; б) либо устанавливаются достаточные условия оптимальности и доказывается, что найденный вектор им удовлетворяет.

Комплекс необходимых условий определен в [84] и назван авторами "принцип максимума". Это дает общее решение подзадачи 1. Однако общего решения подзадач 2 и 3 до настоящего времени не получено. Что же касается существования решения, постулируемого в подзадаче 1, то по этому вопросу можно адресовать читателя к книге [114], где формулируются и доказываются теоремы существования.

Глава 8

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЦЕССОВ

Согласно А.М. Ляпунову [51] вопрос об устойчивости процессов возникает в тех случаях, когда интервал I определения системы является неограниченным справа, т.е., когда предполагается, что процесс может продолжаться сколь угодно долго. Ляпунов предложил получившее широкое признание определение понятия устойчивости и разработал некоторые методы исследования устойчивости. В данной главе приводится определение устойчивости по Ляпунову, его последующие обобщения и излагаются два метода исследования устойчивости: *прямой метод Ляпунова и метод канонических преобразований.*

§ 8.1. Понятия устойчивости и неустойчивости процесса

А.М. Ляпунов [51] исследовал свойства динамических систем, процессы в которых подчиняются системе дифференциальных уравнений*)

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, \ldots, x_n, t), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{8.1}$$

в предположении, что переменные $x_1, \ldots, x_n$ и функции $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ вещественны, причем последние определены при всех значениях $x_1, \ldots, x_n \in G$, где G – заданная область и $t \in [t_0, \infty)$, где t_0 – заданный момент времени, и непрерывны в указанной области изменения аргументов. Интересовавшие Ляпунова свойства систем заключались в *устойчивости* их движения.

Поскольку ко времени Ляпунова процесс формирования достаточно общего понятия устойчивости движения еще не был завершен, первое, что ему пришлось сделать, это – предложить математическое определение такого понятия. В поисках определения Ляпунов связал понятие устойчивости движения не с произволь-

---

*) Строго говоря, А.М. Ляпунов рассматривал систему дифференциальных уравнений более частного вида, однако введенные им определения устойчивости и неустойчивости процесса применимы к динамическим системам, описываемым уравнениями (8.1), чем и вызвано это обобщение, ставшее традиционным.

ным процессом, а с вполне определенным — с *заданным*, предполагая, что заданный процесс представлен известным частным решением системы (8.1)

$$\dot{x}_i = f_i(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{8.2}$$

определенным для $t \geqslant t_0$ и не покидающим области G. Заданный процесс Ляпунов назвал *невозмущенным движением.* Так как начало отсчета времени всегда можно совместить с моментом t_0, в дальнейшем будем считать $t_0 = 0$.

В частных случаях невозмущенным движением может быть состояние покоя (положение равновесия) системы.

Понятие устойчивости невозмущенного движения Ляпунов определил через свойства возмущенных движений, понимая под последними любые процессы, подчиняющиеся той же системе дифференциальных уравнений, но отличные от невозмущенного движения. Очевидно, возмущенные и невозмущенное движения различаются только за счет начальных значений переменных x_i: векторы $\mathrm{x}(0) = [x_1(0), \ldots, x_n(0)]^{\mathrm{T}}$ для возмущенных движений отличаются от вектора $f(0) = [f_1(0), \ldots, f_n(0)]^{\mathrm{T}}$ и различны для различных возмущенных движений. Разности

$$\epsilon_i = x_i(0) - f_i(0), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

называются *начальными возмущениями.* Для невозмущенного движения $\epsilon_1 = \ldots = \epsilon_n = 0$; для возмущенного движения хотя бы одно из чисел ϵ_i отлично от нуля.

Понятие устойчивости невозмущенного движения Ляпунов определил по отношению к величинам $Q_1, \ldots, Q_p$, являющимися заданными функциями переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Определение 8.1 (Ляпунов [51]). Невозмущенное движение *устойчиво* по отношению к величинам $Q_1, \ldots, Q_p$, если при любых положительных числах $L_1, \ldots, L_p$ можно определить такие положительные числа $E_1, \ldots, E_n$, чтобы при всех возмущенных движениях, в которых начальные возмущения удовлетворяют условию

$$|\epsilon_i| \leqslant E_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

частные решения системы (8.1) не покидали области G и чтобы при всяком $t > 0$ выполнялись неравенства

$$|Q_i^{(\epsilon)}(t) - Q_i^{(0)}(t)| < L_i, \qquad i = 1, \ldots, p,$$

где $Q_i^{(0)}(t)$ — функции, в которые превращаются величины Q_i в невозмущенном движении, $Q_i^{(\epsilon)}(t)$ — аналогичные функции для возмущенного движения; если указанное условие не выполняется, то невозмущенное движение *неустойчиво* по отношению к величинам $Q_1, \ldots, Q_p$.

Как следует из определения, понятие устойчивости невозмущенного движения имеет смысл некоторой качественной характеристики зависимости близости функций $Q_i^{(\epsilon)}$ и $Q_i^{(0)}$, $i = 1, \ldots, p$, (т.е. разброса текущих значений величин $Q_1, \ldots, Q_p$ в возмущенных движениях относительно их значений в те же моменты времени в невозмущенном движении) от близости чисел $x_i(0)$ и $f_i(0)$, $i = 1, \ldots, n$, (т.е. от разброса начальных возмущений). В общем случае эта характеристика зависит от выбранного невозмущенного движения и выбранной системы величин $Q_1, \ldots, Q_p$; поэтому при одной и той же системе величин $Q_1, \ldots, Q_p$ одно невозмущенное движение может быть устойчивым, а другое неустойчивым, а при различных системах этих величин одно и то же невозмущенное движение может быть устойчивым относительно одной системы величин, но неустойчивым относительно другой.

Есть и еще один важный аспект определения 8.1. Процессы в одной и той же динамической системе можно описать различными системами дифференциальных уравнений, переходя от одной системы искомых функций к другой. Пусть исходные искомые функции $x_1, \ldots, x_n$ являются явными функциями новых искомых функций $x'_n, \ldots, x'_n$, т.е. $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x}')$. Тогда

$$Q_i(\mathbf{x}) = Q_i[\varphi(\mathbf{x}')],$$

$$i = 1, \ldots, p,$$

и зависимость величин Q_i от начальных возмущений (ϵ_i — для исходной системы дифференциальных уравнений и ϵ'_i — для новой) при переходе к новой системе дифференциальных уравнений изменяется. Поэтому в соответствии с определением 8.1 при заданных величинах $Q_1, \ldots, Q_p$ при описании процессов одной системой дифференциальных уравнений невозмущенное движение может оказаться устойчивым, а другой — неустойчивым.

Определение 8.1 несколько громоздко, и это явилось причиной поиска эквивалентного ему, но более компактного определения. Приведем результат этого поиска для случая, когда область G не ограничена, т.е. когда функции X_i в системе (8.1) определены при любых значениях $x_1, \ldots, x_n$.

Рассматривая систему чисел ϵ_i, $i = 1, \ldots, n$, как вектор, а систему разностей $Q_i^{(\epsilon)}(t) - Q_i^{(0)}(t)$, $i = 1, \ldots, p$, как вектор-функцию и вводя их нормы $\|\epsilon\|$ и $\|\mathbf{Q}^{(\epsilon)} - \mathbf{Q}^{(0)}\|$ (в случае существования этой величины) как

$$\|\epsilon\| = \sqrt{\epsilon_1^2 + \ldots + \epsilon_n^2},$$

$$\|\mathbf{Q}^{(\epsilon)} - \mathbf{Q}^{(0)}\| = \sup_t \sqrt{|Q_1^{(\epsilon)}(t) - Q_1^{(0)}(t)|^2 + |Q_p^{(\epsilon)}(t) - Q_p^{(0)}(t)|^2},$$

или как

$$\|\epsilon\| = \max_i |\epsilon_i|, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$\|\mathbf{Q}^{(\epsilon)} - \mathbf{Q}^{(0)}\| = \sup_t \max_i |Q_i^{(\epsilon)}(t) - Q_i^{(0)}(t)|,$$

$$i = 1, \ldots, p, \qquad t > t_0,$$

определение 8.1 с учетом указанного выше уточнения без изменения его смысла можно заменить следующим.

Определение 8.2. Невозмущенное движение *устойчиво* по отношению к величинам $Q_1, \ldots, Q_p$, если для любого положительного числа A найдется такое положительное число η, что из неравенства $\|\epsilon\| < \eta$ следует существование $\|Q^{(\epsilon)} - Q^{(0)}\|$ и неравенство $\|\mathbf{Q}^{(\epsilon)} - \mathbf{Q}^{(0)}\| \leqslant A$. В противном случае оно *неустойчиво.*

Частный случай этого определения для $Q_i = x_i$, $i = 1, \ldots, p$; $p = n$ и первого варианта нормы предложен Н.Г. Четаевым [108, с. 15–16]. Для того же случая, но при втором определении нормы определение, близкое к 8.2, приведено в работе С. Лефшеца [48].

Если рассматривать все процессы, удовлетворяющие при заданном η неравенству $\|\epsilon\| < \eta$, и для множества этих процессов в случае существования нормы $\|\mathbf{Q}^{(\epsilon)} - \mathbf{Q}^{(0)}\|$ определить точную нижнюю границу $B(\eta) \triangleq \inf A$ чисел A, удовлетворяющих неравенству $\|\mathbf{Q}^{(\epsilon)} - \mathbf{Q}^{(0)}\| \leqslant A$, то определение 8.2 можно переформулировать следующим образом.

Определение 8.3. Невозмущенное движение *устойчиво* по отношению к величинам $Q_1, \ldots, Q_p$, если функция $B(\eta)$ определена в какой-либо полуокрестности $(\eta \geqslant 0)$ точки $\eta = 0$ и непрерывна справа в этой точке. В противном случае оно *неустойчиво.*

Приведенные определения устойчивости и неустойчивости в последние десятилетия были обобщены в направлениях более широкого класса функций, из которых выбираются величины $Q_1, \ldots, Q_p$, и более широкого класса рассматриваемых систем. Первое обобщение предложено Н.Г. Четаевым [108, с. 9–11] и состоит в следующем: аргументами функций Q_i, $i = 1, \ldots, p$, могут быть не только переменные $x_1, \ldots, x_n$, но также и время t. При этом определения 8.1–8.3 не изменяются. Дальнейшие обобщения по структуре формул, выражающих зависимость величин Q_i от аргументов, и по набору аргументов связано с рассмотренным ниже обобщением определения устойчивости на более широкий класс систем, идея которого принадлежит А.А. Мовчану [81], и сводятся к следующему: величины Q_i определяются как зависящие от t функционалы $Q_i(\mathrm{s}, t)$ (где s – *исчерпывающая система характеристик состояния*, см. § 1.4), определенные на множествах $S(t)$ возможных значений этой системы характеристик. Приведем определение для динамических систем общего вида, предполагая, что их входные сигналы заданы. При этом сначала рассмотрим случай одной величины $Q_i \triangleq Q$.

Пусть $q(t) \triangleq Q(\mathrm{s}(t), t)$ – функция от t, в которую превращается величина $Q(\mathrm{s}, t)$ для процесса, развивающегося из начального состояния, характеризуемого $\mathrm{s}(0) \in S(0)$; $M(t)$ – множество значений всех таких функций при данном t; F_1 – неотрицательный вещественный функционал на множестве $S(0)$; $F_2(t)$ для данного значения t – неотрицательный вещественный функционал на множестве $M(t)$; $F_1 = 0$ при $\mathrm{s}(0) = \mathrm{s}_0$, где s_0 – начальное значение s для заданного процесса; $F_2(t) \equiv 0$ для заданного процесса и только в этом случае. Тогда примем следующее определение.

Определение 8.4. Заданный процесс *устойчив по отношению к величине* $Q(\mathrm{s}, t)$ *по двум функционалам* F_1 *и* $F_2(t)$, если для любого положительного числа A найдется такое положительное число η, при котором подмножество $S_\eta(0)$ множества $S(0)$, определенное неравенством $F_1 \leqslant \eta$, отображается в множество $M(t)$ так, что для всех возмущенных процессов $\sup\limits_t F_2(t) < A$. В противном случае заданный процесс *неустойчив по отношению к величине* $Q(\mathrm{s}, t)$ по функционалам F_1 и $F_2(t)$.

В определении А.А. Мовчана вместо функционалов фигурируют *метрики* [40], определенные на тех же множествах.

Теперь обобщим введенное определение устойчивости на случай конечного или счетного множества величин $Q_i(\mathrm{s}, t)$. В этом случае функция $q(t)$ заменяется вектор-функцией $\mathrm{q}(t)$, элементами множества $M(t)$ для данного значения t являются векторы, а $F_2(t)$ определяется как функционал на множестве $M(t)$ с указанными в определении 8.4 свойствами. Заданный процесс будем называть *устойчивым по отношению к данному множеству величин* $Q_i(\mathrm{s}, t)$ по функционалам F_1 и $F_2(t)$, если удовлетворяется условие, указанное в определении 8.4.

Частным видом устойчивости является *асимптотическая устойчивость*. Это понятие применительно к системам конечного порядка также введено Ляпуновым, хотя термин "асимптотическая устойчивость" появился позднее (см. ниже). Приведем определение асимптотической устойчивости для системы, процессы в которой описываются уравнениями (8.1).

Пусть заданный процесс устойчив по отношению к заданной системе величин*) $Q_1, \ldots, Q_p$. Тогда возможны два случая:

---

*) См. определение 8.1.

1. В области G существует такая окрестность точки $f(0)$, что для всех исходящих из этой окрестности решений системы (8.1) разности $Q_i^{(\epsilon)} - Q_i^{(0)}$, $i = 1, \ldots, p$, стремятся к нулю при $t \to \infty$.

2. Такой окрестности не существует.

Если имеет место первый случай, то согласно К.П. Персидскому [83] процесс называется *асимптотически устойчивым* по отношению к рассматриваемой системе величин*).

Свойства устойчивости и асимптотической устойчивости процессов представляют интерес при решении практических задач анализа и синтеза систем с длительным временем функционирования (когда можно предположить, что процесс длится сколь угодно долго). При этом преимущественно интересуются асимптотической устойчивостью процессов.

Частным видом асимптотической устойчивости является *асимптотическая устойчивость в большом* (asymptotic stability in the large [131]). Это понятие введено Ж. Ла Саллем и С. Лефшецом для частного случая невозмущенного движения – состояния покоя и частного случая величин $Q_1, \ldots, Q_p$, а именно $Q_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n$; $p = n$ и уточнено А.М. Летовым [48]. Обобщая определение Летова на случай произвольного невозмущенного движения и произвольной системы величин $Q_1, \ldots, Q_p$, сформулируем его следующим образом.

Определение 8.5 (Летов [47]). *Процесс асимптотически устойчив в большом по отношению к величинам* $Q_1, \ldots, Q_p$, если он асимптотически устойчив и все частные решения, исходящие при $t = t_0$ из области G, остаются в этой области, причем разности $Q_i^{(\epsilon)} - Q_i^{(0)}$, $i = 1, \ldots, p$, стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Это определение, однако, имеет существенный недостаток, а именно: в общем случае часть частных решений, развивающихся из области G, покидает эту область. Следствием этого является то, что свойством быть асимптотически устойчивым в большом асимптотически устойчивые процессы будут обладать весьма редко. Учитывая это, уточним предыдущее определение следующим образом. Введем подобласть $\Gamma \subset G$, определив ее следующими свойствами: все частные решения системы (8.1), развивающиеся при $t = 0$ из области Γ, не покидают при $t \in (0, \infty)$ области G.

Определение 8.6. *Процесс асимптотически устойчив в большом по отношению к величинам* $Q_1, \ldots, Q_p$, если он асимптотически устойчив и при этом для всех частных решений, исхо-

---

*)Указанная ссылка на работу К.П. Персидского относится к термину "асимптотическая устойчивость". Определение обозначаемого им понятия дано А.М. Ляпуновым [51].

дящих при $t = 0$ из области Г, разности $Q_i^{(\epsilon)} - Q_i^{(0)}$, $i = 1, \ldots, p$, стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Определение асимптотической устойчивости следующим образом легко обобщается на случай непрерывной линейной системы общего вида.

Определение 8.7. Если заданный процесс устойчив в смысле определения 8.4 по отношению к вектор-функции $Q(s, t)$ по функционалам $F_1(t)$ и $F_2(t)$ и *в некоторой окрестности* s_0

$$\lim_{t \to \infty} \sup F_2(t) = 0,$$

то он *асимптотически устойчив* по отношению к вектор-функции $Q(s, t)$ по двум функционалам $F_1(t)$ и $F_2(t)$.

Частным видом неустойчивости является *условная устойчивость*. Применительно к системам, процессы в которых описываются уравнениями вида (8.1), это понятие А.М. Ляпунов [51] определяет следующим образом.

Определение 8.8 (Ляпунов [51]). Если заданный процесс неустойчив по отношению к системе величин $Q_1, \ldots, Q_p$, но существуют такие числа $E_1, \ldots, E_n$, что для начальных возмущений, подчиненных условиям вида $f = 0$ или $f \geqslant 0$, где f – функция величин $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$, обращающаяся в нуль, когда все эти величины равны нулю, выполняются условия, указанные в определении 8.1, то этот процесс *условно устойчив*.

Неустойчивый процесс, не обладающий условной устойчивостью, будем называть *сильно неустойчивым*.

Соотношения между понятиями устойчивости и неустойчивости в смысле Ляпунова и определенными выше дополнительными понятиями представлены на схеме, приведенной на рис. 8.1.

Во всех приведенных выше определениях устойчивости неограниченность справа интервала, на котором рассматриваются процессы, является существенным моментом. Если перейти к конечному интервалу, то смысл определений теряется. Как отмечает К.А. Абгарян [1, с. 358], *понятие устойчивости, введенное для бесконечного интервала времени, не может быть использовано для оценки свойств процессов на конечном интервале времени.*

Традицию связывать понятие устойчивости с бесконечным интервалом времени нарушил Н.Г. Четаев [107], предложивший определение *устойчивости на конечном интервале времени.* В настоящее время известно большое число различных определений устойчивости на конечном интервале времени (см., например, [1], [42]). Все они по существу связаны со сравнением областей действительных значений тех или иных переменных для множества процессов, развивающихся из заданной области в пространстве

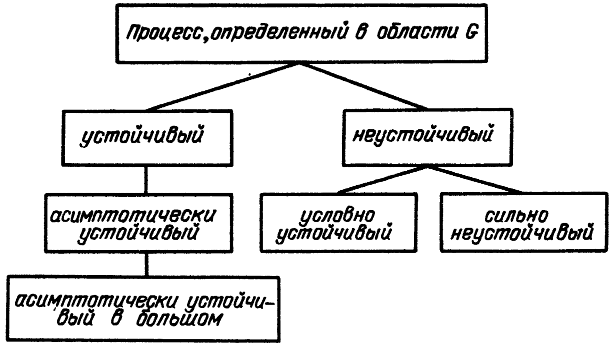


Рис. 8.1. Классификация процессов, описываемых системой уравнений (8.1), по признаку устойчивости

состояний, с некоторыми заданными областями. Поэтому исследование устойчивости на конечном интервале времени сводится к нахождению области, содержащей область действительных значений переменных, и ее сравнению с заданной областью, т.е. к решению и анализу результатов решения *задач об оценках выходных сигналов и других переменных* (см. главу 2).

В силу изложенного определения и методы исследования устойчивости на конечном интервале времени в данной работе не рассматриваются.

§ 8.2. Устойчивость процессов в линейных системах с сосредоточенными параметрами

8.2.1. Конкретизация понятий устойчивости и неустойчивости процесса для линейных систем с сосредоточенными параметрами. Изучая устойчивость процессов в линейных системах с сосредоточенными параметрами, в качестве величин $Q_1, \ldots, Q_p$ выберем выходные сигналы системы. В соответствии с этим в случае многосвязной системы с несколькими выходами нас будет интересовать устойчивость по отношению к системе величин – совокупности выходных сигналов, а в случае односвязной системы или многосвязной с одним выходом – устойчивость по отношению к единственному выходному сигналу.

В качестве исходной системы уравнений процесса примем систему

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(t)y_j, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{8.3}$$

с непрерывными коэффициентами $a_{ij}(t)$ и $b_{ij}(t)$, считая, что первые p переменных x_i этой системы представляют выходные сигналы.

В § 8.1 мы констатировали, что для однои и той же системы ответ на вопрос об устойчивости зависит от того, какой процесс принимается за невозмущенное движение, и что невозмущенным движением может быть любой процесс, в котором переменные $x_1, \ldots, x_n$ системы уравнений процесса (8.1) не покидают области определения G функций $X_1, \ldots, X_n$. Однако линейность системы вносит в этот вопрос свою специфику. Во-первых, областью G в этом случае является векторное пространство $\mathbf{R}^n$, и, следовательно, ни одно частное решение системы (8.3) ее не покидает. Во-вторых, при изучении всех видов устойчивости несущественно, каковы входные сигналы и какой процесс выбран в качестве невозмущенного движения. Иными словами, свойство устойчивости не зависит от входных сигналов $y_1, \ldots, y_m$ и начальных значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, определяющих невозмущенное движение [67, с. 229].

Заметим, что, согласно определению, об устойчивости и неустойчивости всех видов мы судим по разностям значений величин $x_1, \ldots, x_p$, принимаемых ими в возмущенных и невозмущенном движениях. Но эти разности тождественно равны соответствующим разностям значений, принимаемых величинами Δx_i в возмущенных и невозмущенном движениях (нули в последнем случае). Поэтому устойчивость процессов по отношению к величинам $x_1, \ldots, x_p$ и соответственно устойчивость процессов по отношению к величинам $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_p$ – свойства тождественные.

Рассмотрим случай односвязной системы. Предположим, что систему уравнений относительно Δx_i

$$\Delta \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, \Delta x_j, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{8.4}$$

можно свести к одному линейному дифференциальному уравнению относительно переменной $x \triangleq \Delta x_1$ с непрерывными коэффициентами

$$[p^n + b_1(t) p^{n-1} + \ldots + b_n(t)]\, x = 0, \qquad p \equiv \frac{d}{dt}. \tag{8.5}$$

Напомним, что оно было названо выше (см. гл. 2) уравнением свободных колебаний. Пусть между системами начальных значений переменных $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ и переменных $x, px, \ldots, p^{n-1}x$ существует взаимооднозначное соответствие. Тогда справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 8.1 [63]. *Процессы в системе, описываемой уравнением* (8.5), *устойчивы по отношению к выходному сигналу x,* *если все частные решения уравнения* (8.5) *ограничены. Эти процессы неустойчивы, если среди частных решений существует неограниченное решение.*

Доказательство. Заменим уравнение (8.5) системой

$$\dot{x}_i = x_{i-1}, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$
$$\dot{x}_n = -b_{n-1}(t)x_1 - \ldots - b_1(t)x_n, \tag{8.6}$$

где $x_1 \equiv x$. Если все частные решения уравнения (8.5) ограничены, то для любых положительных чисел E_i^*, $i = 1, \ldots, n$, существует такое положительное число L^*, что для всех решений системы уравнений (8.6), исходящих из области $|x_i| \leqslant E_i$, $i = 1, \ldots, n$, справедливо неравенство $|x(t)| < L^*$. Отсюда в силу свойства линейности системы следует, что для всякого положительного числа L существуют такие числа E_i, $i = 1, \ldots, n$ (а именно, $E_i = E_i^* L/L^*$), что для всех решений, исходящих из области $|x_i| \leqslant \leqslant E_i$, $i = 1, \ldots, n$, выполняется неравенство $|x(t)| < L$. Принимая в качестве невозмущенного движения процесс, описываемый нулевым решением уравнения (8.5), заключим, что согласно определению 8.1 это – случай устойчивости процессов.

С другой стороны, для решения уравнения (8.5) с произвольно выбранными начальными данными

$$\psi_0 = x(0), \qquad \psi_1 = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}, \ldots, \psi_{n-1} = \left.\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right|_{t=0} \tag{8.7}$$

всегда можно указать такое положительное число C, которое определит решение с начальными данными $C\psi_0, C\psi_1, \ldots, C\psi_{n-1}$, принадлежащими заданной окрестности начала координат пространства начальных данных. Поэтому если существует неограниченное решение уравнения (8.5), то такое же решение имеется среди решений, исходящих из заданной окрестности. Так как такое число может быть указано для любой заданной окрестности, то, в силу определения 8.1, процессы неустойчивы.

Если система – многосвязная, описывается системой уравнений (8.3) и имеет $p(\leqslant n)$ выходных сигналов $x_1, \ldots, x_p$, то, используя определение (8.1) и свойство линейности системы, получим следующий результат.

Теорема 8.2. *Процессы в системе, описываемой уравнениями* (8.3), *устойчивы по отношению к выходным сигналам* $x_1, \ldots$ $\ldots, x_p$, *если все частные решения системы* (8.4) *таковы, что функции* $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_p$, *определенные как координаты решения, ограничены. Эти процессы неустойчивы, если среди частных решений существует решение, по крайней мере одна из координат* $\Delta x_1, \ldots$ $\ldots, \Delta x_p$ *которого не ограничена.*

Пусть процессы в односвязной или многосвязной системах рассматриваемых видов устойчивы по отношению к выходным сигналам. Тогда возможны два случая.

1. Для всех решений уравнения (8.5) (случай односвязной системы) или системы (8.3) (случай многосвязной системы) выходные сигналы стремятся к нулю при $t \to \infty$.

2. Существуют решения, в которых выходные сигналы не обладают свойством 1.

Если имеет место первый случай, то в соответствии с определением асимптотической устойчивости, приведенным в § 8.1, в силу линейности системы, следует, что процессы в системе асимптотически устойчивы по отношению к выходным сигналам. Свойством асимптотической устойчивости по отношению к той или иной системе величин, так же как и свойством устойчивости, одновременно обладают или не обладают все процессы, отличающиеся входными сигналами и начальными условиями. Поэтому понятие асимптотической устойчивости процесса также можно не связывать с каким-либо конкретным процессом, принимая под невозмущенным движением произвольный процесс в изучаемой системе.

Приведенные выше определения понятий устойчивости и асимптотической устойчивости относятся к детерминированным системам. Обобщая эти понятия на недетерминированные и стохастические системы, многие авторы применяют такой подход: недетерминированную или стохастическую систему заменяют классом детерминированных систем, элементами которого являются возможные реализации рассматриваемой системы, каждый элемент этого класса характеризуют интересующими нас свойствами процессов (устойчивость, асимптотическая устойчивость, неустойчивость) и устанавливают, обладают ли данным свойством все элементы или только та или иная их часть. Изучая устойчивость процессов в детерминированных и стохастических системах, мы будем пользоваться определениями, соответствующими этому направлению обобщения.

Будем называть процессы в недетерминированной системе *абсолютно устойчивыми* по отношению к той или иной величине или системе величин, если устойчивы процессы во всех возможных реализациях системы. Аналогично определяется абсолютная асимптотическая устойчивость и абсолютная неустойчивость процессов. Очевидно, возможны случаи, когда при одних реализациях процессы устойчивы, а при других – неустойчивы. Также возможны абсолютно устойчивые процессы, асимптотически устойчивые при одних реализациях и устойчивые, но не асимптотически – при других. Можно представить себе и другие случаи с невыраженными "абсолютными" свойствами множества возможных процессов.

В случае стохастической системы класс детерминированных систем, получаемый при переходе к ее реализациям можно разбить на три подкласса, включив в первый – системы с асимптотически устойчивыми процессами, во второй – системы с процессами устойчивыми, но не асимптотически, и в третий – системы с неустойчивыми процессами (некоторые из этих классов могут оказаться пустыми множествами). Если в соответствии с заданными характеристиками стохастических параметров P_1 – вероятность принадлежности системы к первому классу, P_2 – ко второму и P_3 – к третьему $(P_1 + P_2 + P_3 = 1)$, то будем говорить, что вероятность асимптотической устойчивости процессов равна P_1, устойчивости $(P_1 + P_2)$ и неустойчивости – P_3.

Если вероятность асимптотической устойчивости, устойчивости или неустойчивости равна единице, то, придерживаясь терминологии, предложенной Ф.Козиным [129, 130], будем говорить, соответственно, что процессы в системе *почти наверное асимптотически устойчивы*, *почти наверное устойчивы* или *почти наверное неустойчивы.*

Если процессы в стохастической системе абсолютно асимптотически устойчивы (устойчивы, неустойчивы), то они почти наверное асимптотически устойчивы (устойчивы, неустойчивы).

8.2.2. Достаточные условия устойчивости процессов в односвязных детерминированных системах. Согласно теореме 8.1, для того чтобы убедиться в наличии устойчивости процессов по отношению к выходному сигналу, следует доказать ограниченность решений уравнения свободных колебаний, а в соответствии с изложенным в п. 8.2.1 для выяснения асимптотической устойчивости следует исследовать, стремятся ли все решения уравнения свободных колебаний к нулю при $t \to \infty$. Таким образом, исследование устойчивости и асимптотической устойчивости сводится к изучению асимптотического поведения (при $t \to \infty$) произвольного решения уравнения свободных колебаний.

Для определения достаточных условий устойчивости и асимптотической устойчивости можно применить *прямой* (*второй*) *метод Ляпунова* и *метод канонических преобразований.* Практически удобнее метод канонических преобразований.

Метод канонических преобразований [63]. Поясним сущность метода. Для исследования устойчивости процессов относительно переменной x, удовлетворяющей уравнению (8.5), это уравнение подвергается *каноническому преобразованию* (см. п. 2.1.9) – приводится к *системе уравнений относительно канонических составляющих. Определяющие функции* канонического преобразования выбираются исследователем, и от того, насколько удачно они выбраны, зависит эффективность получаемых условий устойчивости и асимптотической устойчивости.

Исследование устойчивости связано с оценкой нормы решений системы уравнений относительно канонических составляющих (в частности, на основании теоремы Важевского [141]) с последующим переходом к оценке модуля функции $x(t)$ и выяснением его асимптотического поведения*) при $t \to \infty$.

Основные теоремы. Перейдем от уравнения свободных колебаний к системе уравнений относительно канонических составляющих $z_1, \ldots, z_n$. Запишем ее в виде (2.39)

$$\dot{z}_i = \xi_i(t) z_i + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(t) z_j, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{8.8}$$

где

$$h_{ij} = -\frac{w_{ni} D(p + \xi_j, t) \cdot 1}{W} \tag{8.9}$$

(смысл символов в правой части формулы см. в пп. 2.1.6 и 2.1.9).

Пусть A – матрица коэффициентов правой части системы (8.9), $B \triangleq (A + A^*)/2$, $\mu_n(t)$ – максимальное характеристическое число матрицы B. Тогда, так как решение уравнения свободных колебаний и начальное значение нормы r решения системы (8.8) (см. п. 5.1.2) связаны неравенством (5.37)

$$|x(t)| \leqslant \sqrt{n}\, r(0) \exp \int_0^t \mu_n(u) du, \tag{8.10}$$

то для ограниченности произвольного решения уравнения свободных колебаний достаточно ограниченности правой части неравенства (8.10), а для того, чтобы произвольное решение уравнения свободных колебаний стремилось к нулю при $t \to \infty$, достаточно, чтобы правая часть этого неравенства стремилась к нулю при $t \to \infty$. Поэтому справедливы следующие теоремы.

Теорема 8.3. *Для устойчивости процессов относительно выходного сигнала достаточно выполнения неравенства*

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \int_0^t \mu_n(u) du < \infty. \tag{8.11}$$

Теорема 8.4. *Для асимптотической устойчивости процессов относительно выходного сигнала достаточно выполнения равенства*

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \int_0^t \mu_n(u) du = -\infty. \tag{8.12}$$

---

*) В последнее десятилетие появились работы, авторы которых претендуют на роль первооткрывателей метода канонических преобразований. В частности, В.П. Кузнецов и А.В. Марков [44] предлагают *метод, в котором объединяются канонические преобразования* "с оценками устойчивости, вытекающими из неравенства Важевского". Но, согласно [63], метод канонических преобразований заключается именно в этом объединении.

Условие устойчивости (8.11) выполняется, если при каком-либо $T > 0$ на интервале (T, ∞) справедливо неравенство

$$\mu_n(t) \leqslant 0. \tag{8.13}$$

Условие асимптотической устойчивости (8.12) выполняется, если существуют такие положительные числа T и C, что на интервале (T, ∞) справедливо неравенство

$$\mu_n(t) < -C. \tag{8.14}$$

Следовательно, неравенства (8.13) и (8.14) (последнее при $C > 0$ также являются достаточными условиями устойчивости и асимптотической устойчивости соответственно. В общем случае они менее эффективны, но более удобны в применении.

Рассмотрим эти условия более подробно. Неравенство (8.13) справедливо на интервале (T, ∞) тогда и только тогда, когда матрица **B** при всех значениях t из этого интервала неположительна *). В соответствии с критерием неположительности соответствующей этой матрице эрмитовой формы [19] для этого необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры четного порядка матрицы **B** были неотрицательны, а все главные миноры нечетного порядка – неположительны.

Неравенство (8.14) справедливо на интервале (T, ∞) тогда и только тогда, когда матрица $\mathbf{B} + C\,\mathbf{I}$ при всех значениях t из этого интервала – отрицательно определенная [40, с. 402]. В силу критерия отрицательной определенности, соответствующей этой матрице эрмитовой формы [19], для этого необходимо и достаточно неравенств

$$\operatorname{Re}(\xi_1 + h_{11}) < -C,$$

$$(-1)^k \det \begin{bmatrix} 2\operatorname{Re}(\xi_1 + h_{11}) + 2C & \dots & h_{1k} + \bar{h}_{k1} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{1k} + \bar{h}_{k1} & \dots & 2\operatorname{Re}(\xi_k + h_{kk}) + 2C \end{bmatrix} > 0, \tag{8.15}$$

$k = 2, \dots, n.$

Рассмотрим теперь случай, когда каноническое преобразование приводит к системе уравнений относительно канонических составляющих, коэффициенты которой удовлетворяют условиям:

---

*) В соответствии с определением неположительности эрмитовой матрицы [40, с. 402] матрица **B** неположительна при всех $t \in (T, \infty)$, если неположительна при этих значениях эрмитова форма

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} [(h_{ij} + \bar{h}_{ji})\bar{e}_i e_j + \operatorname{Re} \xi_i \bar{e}_i e_i].$$

а) существует такое положительное число T и значение m индекса j, что при $t > T$ справедливы неравенства

$$\operatorname{Re} \xi_m \geqslant \operatorname{Re} \xi_j, \qquad j = 1, \dots, n; \tag{8.16}$$

б) при $t > T$ функция $\operatorname{Re} \xi_m$ не принимает нулевых значений и не изменяет знака;

в) при $t \to \infty$

$$h_{jk} = o(\operatorname{Re} \xi_m), \qquad j, k = 1, \dots, n. \tag{8.17}$$

В этом случае величины μ_n и $\operatorname{Re} \xi_m$ связаны зависимостью, указанной в следующей лемме.

Лемма 8.1. [74]. *Если выполняются условия* "а"–"в", *то*

$$\mu_n = \operatorname{Re} \xi_m + o(\operatorname{Re} \xi_m). \tag{8.18}$$

Доказательство см. в [74, с. 445–446].

Так как величина $\operatorname{Re} \xi_m$ по условию "б" при достаточно большом T не изменяет знака на интервале (T, ∞), то в силу соотношения (8.18) и условия (8.13) для устойчивости достаточно неравенства

$$\operatorname{Re} \xi_m(t) < 0, \qquad T < t < \infty. \tag{8.19}$$

Но поскольку по условию "а" вещественные части функций $\xi_i (i \neq m)$ не превышают вещественной части функции ξ_m, то (8.19) выполняется тогда и только тогда, когда коэффициенты *определяющего уравнения* (п. 2.1.9)

$$\xi^n + d_1(t)\xi^{n-1} + \dots + d_n(t) = 0 \tag{8.20}$$

при $t > T$ удовлетворяют критериям Гурвица [74, 105] или Рауса [19, с. 425].

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 8.5. *Если каноническое преобразование приводит уравнение* (8.5) *к такой системе уравнений относительно канонических составляющих, что выполняются указанные выше условия* "а" – "в", *то для устойчивости процессов по отношению к выходному сигналу достаточно, чтобы существовало такое положительное число* T_1, *чтобы при* $t > T_1$ *коэффициенты уравнения* (8.20) *удовлетворяли критерям Гурвица или Рауса.*

Для того чтобы при тех же условиях обнаружить асимптотическую устойчивость, условие (8.19), очевидно, следует заменить условием: *существует такое положительное число* C, *что*

$$\operatorname{Re} \xi_m + C < 0 \tag{8.21}$$

(следует из (8.14) и (8.18)). Замена переменной $\xi = \pi - C$ приводит уравнение (8.20) к виду

$$\pi^n + e_1 \pi^{n-1} + \ldots + e_n = 0, \tag{8.22}$$

где $e_i = e_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, – новые переменные коэффициенты.

Если при некотором $C > 0$ вещественные части его корней отрицательны, то существует положительное число C, удовлетворяющее неравенству (8.21).

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 8.6. *Если выполняются условия теоремы* 8.5, *то для асимптотической устойчивости процессов по отношению к выходному сигналу достаточно, чтобы существовали такие положительные числа* T_1 *и* C, *что при* $t > T_1$ *коэффициенты уравнения* (8.22) *удовлетворяют критерям Гурвица или Рауса.*

Теоремы 8.5 и 8.6 являются следствиями теорем 8.3 и 8.4 для случая, когда коэффициенты системы уравнений относительно канонических составляющих удовлетворяют условиям "а" – "в". Ниже приводится теорема об устойчивости, в условиях которой фигурируют другие свойства коэффициентов системы уравнений относительно канонических составляющих.

Теорема 8.7. *Если каноническое преобразование, построенное на базе определяющих функций* $\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$, *удовлетворяющих условию*

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \int_0^t \operatorname{Re} \xi_i(u) du < \infty, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{8.23}$$

приводит уравнение (8.5) *к такой системе уравнений относительно канонических составляющих, что выполняется условие*

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \int_0^t | h_{ij}(u) | du < \infty, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{8.24}$$

то процессы устойчивы по отношению к выходному сигналу.

Доказательство. Пусть выполняются условия (8.23). Тогда все решения системы

$$\dot{u}_i = \xi_i u_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{8.25}$$

и след матрицы ее коэффициентов $c_1(t) = \xi_1(t) + \ldots + \xi_n(t)$ ограничены. При условии (8.24) на основании теоремы Л.Чезари [106] отсюда следует ограниченность решений системы (8.8). Норма r упомянутых решений при этом, очевидно, также ограничена. В силу неравенства $|x| \leqslant \sqrt{n} r$ отсюда следует ограниченность решений уравнения (8.5), т.е. утверждение теоремы.

Рекомендации по практическому применению основных теорем. Теперь уделим немного внимания практической стороне исследования устойчивости. При определении достаточных условий устойчивости и асимптотической устойчивости по теоремам 8.3 и 8.4 приходится выяснять асимптотическое поведение функции $\mu_n(t)$ или интеграла $\int \mu_n(t)dt$. Но это можно сделать тогда, когда функция $\mu_n(t)$ выражена в аналитической форме через коэффициенты уравнения свободных колебаний и определяющие функции, причем и коэффициенты и определяющие функции выражены в аналитической форме. Такая возможность имеется в случае, когда в качестве определяющих функций принимаются аппроксимации корней ОХУ в кольцах вида R_{U_m}, найденные по методу функциональных рядов, и по тому же методу *) найдена аппроксимация $\tilde{\mu}_n(t)$ функции $\mu_n(t)$, причем при $t \to \infty$ $\tilde{\mu}_n(t) - \mu_n(t) = o(\mu_n(t))$. Однако при применении других методов формирования определяющих функций эта возможность имеется только для уравнений свободных колебаний низших порядков, практически не выше третьего, хотя уже и для этого порядка получаемые аналитические выражения громоздки и неудобны для анализа. Поэтому возникает задача об определении оценок сверху для $\mu_n(t)$ и $\int \mu_n(t)dt$; причем оценки должны аналитически выражаться через коэффициенты уравнения свободных колебаний и определяющие функции. Если такие оценки будут найдены, то с их помощью можно сформулировать более сильные (более жесткие) достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости, применять которые, однако, существенно легче.

Установим одну из таких оценок для функции $\mu_n(t)$. В соответствии с известным равенством из теории матриц

$$\mu_n = \max_{\mathbf{z}^*\mathbf{z} = 1} \frac{\mathbf{z}^* \mathbf{B} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^* \mathbf{z}}, \tag{8.26}$$

где $\mathbf{z}^* \equiv \bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}$. Представим матрицу $\mathbf{B}$ в виде

$$\mathbf{B} = \operatorname{Re} \mathbf{D} + \frac{\mathbf{H} + \mathbf{H}^*}{2}, \tag{8.27}$$

где $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\mathbf{H} \triangleq \| h_{ij} \|_1^n$, $\mathbf{H}^* \equiv \bar{\mathbf{H}}^{\mathrm{T}}$. Очевидно,

$$\mu_n \leqslant \max \operatorname{Re} \xi_i + \nu_n, \tag{8.28}$$

где ν_n – наибольшее характеристическое число матрицы $\dfrac{\mathbf{H} + \mathbf{H}^*}{2}$.

---

*) Коэффициенты матрицы $\mathbf{B}$ представляются функциональными рядами, и в таком же виде ищется $\mu_n(t)$.

Оценим ν_n:

$$\nu_n = \max_{z^*z=1} \frac{z^*(H+H^*)z}{2z^*z} \equiv$$

$$\equiv \frac{H+H^*}{2} \leqslant \frac{\|H\| + \|H^*\|}{2}. \qquad (8.29)$$

Но в соответствии с формулой коэффициентов h_{ij} (см. п. 2.1.9)

$$H = -\frac{\vartheta^{\mathrm{T}} w_n}{W}, \qquad (8.30)$$

где $\boldsymbol{\vartheta}^{\mathrm{T}} \triangleq [\vartheta_1 \dots \vartheta_n]^{\mathrm{T}}$; $\vartheta_j = (\xi_j + p)^{n-1}\xi_j + \dots + b_n$, $j = 1, \dots, n$; $w_n =$ $= [w_{n1} \dots w_{nn}]$. Отсюда, определяя $\|\boldsymbol{\vartheta}^{\mathrm{T}}\| = \sum_{j=1}^{n} |\vartheta_j|^2$, $\|w_n\| = \sum_{i=1}^{n} |w_{ni}|^2$, на основании *теоремы Важевского* [142, теорема 2] получим

$$\|H\| \equiv \|H^*\| \leqslant \frac{\|\boldsymbol{\vartheta}^{\mathrm{T}}\| \cdot \|w_n\|}{|W|}. \qquad (8.31)$$

Учтя (8.31) в (8.29), найдем

$$\nu_n \leqslant \frac{\|\boldsymbol{\vartheta}^{\mathrm{T}}\| \cdot \|w_n\|}{W}. \qquad (8.32)$$

Правая часть этого неравенства содержит определяющие функции. Поэтому при применении теорем (8.5)–(8.7) и неравенств (8.28) и (8.32) исследование устойчивости практически возможно, если определяющие функции выражены аналитическими формулами, допускающими изучение их асимптотического поведения (при $t \to \infty$). Следовательно, если в качестве определяющих функций принимать аппроксимации решений ОХУ, то подойдут только такие аппроксимации, которые получены в аналитическом виде.

Возможен и другой практически приемлемый путь исследования, не требующий аналитического вида определяющих функций. Он основан на следующем: правую часть неравенства (8.32) можно заменить оценками, выраженными через коэффициенты определяющего уравнения и уравнения свободных колебаний. Действительно, квадрат правой части неравенства (8.32) можно представить в виде $\|\boldsymbol{\vartheta}^{\mathrm{T}}\|^2 \|w_n\|^2 / |W^2|$, где $\|\boldsymbol{\vartheta}^{\mathrm{T}}\|^2$ и $\|w_n\|^2$ после исключения в определяющих их выражениях производных определяющих функций превращаются в эрмитовы формы от этих функций с коэффициентами, зависящими от коэффициентов и производных коэффициентов определяющего уравнения; W^2 после аналогичных операций превращается в симметричную функцию от определяющих функций и, в конечном счете, – в рациональную функцию от коэффициентов определяющего уравнения и их производных.

Эрмитовы формы, выражающие $\|\vartheta^{\mathrm{T}}\|^2$ и $\|\mathbf{w}_n\|^2$, можно оценить сверху в виде

$$\mathrm{Maj}\,\|\vartheta^{\mathrm{T}}\| = f(d_1, \dots, d_n;$$

$$pd_1, \dots, pd_n; \dots; p^{n-1}d_1, \dots, p^{n-1}d_n; b_1, \dots, b_n),$$

$$\mathrm{Maj}\,\|\mathbf{w}_n\|^2 = g(d_1, \dots, d_n;$$

$$pd_1, \dots, pd_n; \dots; p^{n-1}d_1, \dots, p^{n-1}d_n),$$

где f и g – рациональные функции от указанных аргументов. Эти оценки находятся дифференцированно для случаев одной пары комплексно сопряженных определяющих функций, двух пар и т.д. Идентифицировать каждый такой случай по коэффициентам определяющего уравнения можно по методу квадратичных форм Ф.Р.Гантмахера [19, гл. XX, § 9 и 11].

При формировании системы определяющих функций из вещественных элементов эрмитовы формы, выражающие $\|\vartheta^{\mathrm{T}}\|^2$ и $\|\mathbf{w}_n\|^2$, превращаются в квадратичные и могут быть выражены в виде функциональных зависимостей той же структуры $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$. В этом случае

$$\mathrm{Maj}\,\|\vartheta^{\mathrm{T}}\|^2 \equiv \|\vartheta^{\mathrm{T}}\|, \qquad \mathrm{Maj}\,\|\mathbf{w}_n\|^2 \equiv \|\mathbf{w}_n\|^2.$$

С учетом указанных оценок из неравенства (8.32) следует

$$\nu_n \leqslant \sqrt{\frac{fg}{|W^2|}} \triangleq k. \tag{8.33}$$

Объединив неравенства (8.29) и (8.33), получим

$$\mu_n \leqslant \max_i \operatorname{Re} \xi_i + k. \tag{8.34}$$

Учтя оценку (8.34), можно получить достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости в случае вещественных определяющих функций в более удобном виде, чем устанавливаемые теоремами (8.3)–(8.7). Например, в соответствии с теоремой (8.4) достаточным условием асимптотической устойчивости процессов в односвязной системе является неравенство (8.14) для

$t \in (T, \infty)$ при каких-либо положительных числах T и C. В силу неравенства (8.34) следствием этого достаточного условия является следующее: для асимптотической устойчивости достаточно, чтобы существовали такие положительные числа T и C, что при $t \in (T, \infty)$

$$\max_{i(t)} \operatorname{Re} \xi_i(t) + k(t) + C < 0.$$

Заменим это неравенство эквивалентной ему системой неравенств, не содержащих определяющих функций. С этой целью введем новые переменные $\rho_i = \xi_i + k + C$, $i = 1, \ldots, n$, и составим алгебраическое уравнение n-й степени, которому они удовлетворяют:

$$\rho^n + e_1 \rho^{n-1} + \ldots + e_n = 0, \tag{8.35}$$

где $e_i \triangleq e_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ – коэффициенты, рационально выражающиеся через величины k и C и коэффициенты определяющего уравнения $c_1, \ldots, c_n$.

Для асимптотической устойчивости достаточно, чтобы существовало $C > 0$ такое, что при $t \in (T, \infty)$ коэффициенты уравнения (8.35) удовлетворяют критериям Гурвица или Рауса.

В неравенствах, участвующих в этом условии, содержатся коэффициенты уравнения свободных колебаний и коэффициенты определяющего уравнения. Это условие практически полезно, если упомянутые коэффициенты выражены в аналитической форме.

Другие пути получения достаточных условий устойчивости. Для получения достаточных условий устойчивости и асимптотической устойчивости можно воспользоваться системой уравнений относительно взвешенных канонических составляющих [62]

$$Z_i = z_i \exp \int_0^t (-\xi_i(u))du, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

обладающей тем свойством, что при представлении ее в форме Коши в случае $\xi_i = \zeta_i$, $i = 1, \ldots, n$, матрица коэффициентов содержит только нулевые элементы.

Интересные дополнительные возможности анализа устойчивости появляются при рассмотрении систем частных видов, в частности систем, коэффициенты уравнения свободных колебаний которых являются периодическими функциями с общим периодом, и систем, уравнение свободных колебаний которых имеет коэффициенты, разложимые в асимптотические ряды по убывающим степеням аргумента. Некоторые из таких возможностей для систем первого вида рассмотрены ниже в п. 8.2.6. Для систем второго вида исследование устойчивости можно связать со свойствами рядов, выявляемых при построении аппроксимирующих формул для корней обобщенного характеристического уравнения по способу, изложенному в п. 2.1.10. Если эти ряды являются асимптотическими разложениями некоторых корней обобщенного характеристического уравнения, образующих в совокупности фундаментальную систему, то установить наличие устойчивости или асимптотической устойчивости весьма просто. Трудности здесь связаны, главным образом, с доказательством того, что ряды являются упомянутыми асимптотическими разложениями.

Пример 8.1. Найдем достаточное условие устойчивости процессов в системе, уравнение свободных колебаний которой имеет вид

$$\ddot{x} + at^{\alpha}\dot{x} + ct^{\nu}x = 0, \qquad \nu > -2, \qquad 2\alpha < \nu, \qquad c > 0.$$

В качестве определяющих функций выберем аппроксимации корней обобщенного характеристического уравнения в кольце комплекснозначных функций, разложимых в асимптотические ряды по убывающим степеням аргумента, способом, изложенным в п. 2.1.10. Ограничиваясь нулевым приближением ($\xi_{1,2} = \xi_{1,2}^{(0)}$), получим

$$\xi_{1,2}(t) = \pm\, i\sqrt{ct^{\nu}}, \qquad i = \sqrt{-1}.$$

При выбранных определяющих функциях система уравнений относительно канонических составляющих имеет вид

$$\dot{z}_1 = \left(i\sqrt{c}\,t^{\nu/2} - \frac{\nu t^{-1}}{4} - \frac{at^{\alpha}}{2}\right)z_1 + \left(\frac{\nu t^{-1}}{4} + \frac{at^{\alpha}}{2}\right)z_2,$$

$$\dot{z}_2 = \left(\frac{\nu t^{-1}}{4} + \frac{at^{\alpha}}{2}\right)z_1 + \left(-i\sqrt{c}\,t^{\nu/2} - \frac{\nu t^{-1}}{4} - \frac{at^{\alpha}}{2}\right)z_2,$$

где символами $t^{\nu/2}, t^{\alpha}$ обозначены главные ветви степенных функций.

Матрица $\mathbf{B}$, соответствующая этой системе уравнений, имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\nu t^{-1}}{4} - \dfrac{at^{\alpha}}{2} & \dfrac{\nu t^{-1}}{4} + \dfrac{at^{\alpha}}{2} \\ \dfrac{\nu t^{-1}}{4} + \dfrac{at^{\alpha}}{2} & -\dfrac{\nu t^{-1}}{4} - \dfrac{at^{\alpha}}{2} \end{bmatrix}.$$

Уравнение для определения характеристических чисел этой матрицы получим в виде

$$\mu^2 + \left(\frac{\nu t^{-1}}{2} - at^{\alpha}\right)\mu = 0.$$

Это уравнение имеет один нулевой корень. Следовательно, для устойчивости процессов по отношению к x достаточно, чтобы второй корень, начиная с какого-либо значения $t = T$, был неположителен.

Если $\alpha < -1$, то это условие выполняется при $\nu > 0$.

Если $\alpha = -1$, то это условие выполняется при $a \geqslant -\nu/2$.

Если $\alpha > -1$, то это условие выполняется при $a > 0$.

В частности, при $\alpha = -1$ и $\nu = 1$ достаточное условие устойчивости имеет вид $a \geqslant -1/2$. Оценим эффективность этого достаточного условия.

Можно показать, уточнив определяющие функции, что при $a > -1/2$ имеет место асимптотическая устойчивость. При $a = -1/2$ и $c = 9/4$ общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид $x(t) = C_1 \cos(t^{-3/2} + C_2)$. Следовательно, наименьшее значение коэффициента a, при котором устойчивость гарантируется найденным достаточным условием, совпадает с границей устойчивости в области изменения этого коэффициента. Это свидетельствует о высокой эффективности полученного достаточного условия устойчивости.

Пример 8.2. Обобщим найденное в предыдущем примере достаточное условие устойчивости на случай уравнения

$$\ddot{x} + m\dot{x} + qx = 0. \tag{8.36}$$

Рассматривая уравнение, исследованное в предыдущем примере, как частный случай уравнения (8.36), заметим, что определяющие функции в предыдущем примере, удовлетворяют равенству

$$\xi_{1,2}(t) = \pm\sqrt{q}. \tag{8.37}$$

Введем определяющие функции (8.37) для уравнения (8.36). Систему уравнений относительно канонических составляющих при этом получим в виде

$$\dot{z}_1 = \left(i\sqrt{q} - \frac{\dot{q}}{4q} - \frac{m}{2}\right)z_1 + \left(\frac{\dot{q}}{4q} + \frac{m}{2}\right)z_2,$$

$$\dot{z}_2 = \left(\frac{\dot{q}}{4q} + \frac{m}{2}\right)z_1 - \left(i\sqrt{q} + \frac{\dot{q}}{4q} + \frac{m}{e}\right)z_2.$$

Для этой системы

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\dfrac{m}{2} - \dfrac{\dot{q}}{4q} & \dfrac{m}{2} + \dfrac{\dot{q}}{4q} \\ \dfrac{m}{2} + \dfrac{\dot{q}}{4q} & \dfrac{m}{2} - \dfrac{\dot{q}}{4q} \end{bmatrix}. \tag{8.38}$$

Уравнение для характеристических чисел матрицы получим в виде

$$\mu^2 + \left(m + \frac{\dot{q}}{2q}\right)\mu = 0. \tag{8.39}$$

Его корни (характеристические числа матрицы)

$$\mu_{1,2} = 0, \qquad \mu_{2,1} = -m - \frac{\dot{q}}{2q}. \tag{8.40}$$

Двойные индексы объясняются тем, что наибольшим корнем (которому мы приписываем индекс 2) может быть как нулевой корень, так и корень, равный $-m - \dfrac{\dot{q}}{2q}$, т.е.

$$\mu_2 = \max\left(0, -m - \frac{\dot{q}}{2q}\right). \tag{8.41}$$

Неравенство (8.13), выполнения которого достаточно для устойчивости процессов по отношению к выходной величине, в данном случае принимает вид

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t \max\left(0, -m - \frac{\dot{q}}{2q}\right)dt < \infty. \tag{8.42}$$

Отсюда следует, что для устойчивости процессов по отношению к выходному сигналу достаточно, чтобы величина $m + (\dot{q}/2q)$, начиная с какого-либо значения t, не принимала отрицательных значений. Если же это условие не выполняется, т.е. если имеются интервалы, на которых $m + (\dot{q}/2q) < 0$, то для устойчивости достаточно, чтобы сумма интегралов от указанной величины на этих интервалах была ограничена. Обозначив символом T область, состоящую из интервалов, на которых эта величина отрицательна, последнее достаточное условие устойчивости запишем в виде

$$\left| \int_T \left(m + \frac{\dot{q}}{2q} \right) dt \right| < \infty. \tag{8.43}$$

8.2.3. Необходимые условия устойчивости процессов в одиосвязных детерминированных системах. Задача выяснения эффективного необходимого условия устойчивости процессов по отношению к выходному сигналу (т.е. необходимого условия, близкого к какому-либо достаточному) для односвязных детерминированных систем существенно сложнее, чем задача выяснения эффективного достаточного условия их устойчивости (т.е. достаточного условия, близкого к какому-либо необходимому). Это объясняется тем, что каждое необходимое условие устойчивости эквивалентно невыполнению некоторого достаточного условия неустойчивости, а эффективное достаточное условие неустойчивости найти труднее, чем эффективное достаточное условие устойчивости, так как во втором случае мы ищем ответ на вопрос "когда *все* решения уравнения свободных колебаний ограничены по модулю?", а в первом случае – на вопрос "*существуют* ли решения уравнения свободных колебаний, не обладающие этим свойством?"

Если применяется метод канонических преобразований, то при удачно выбранных определяющих функциях эффективное достаточное условие устойчивости находится сравнительно просто на основании оценивания сверху (по Т. Важевскому [142]) нормы произвольного решения системы уравнений относительно канонических составляющих. В рамках того же метода для выяснения достаточного условия неустойчивости следует найти условие существования решения, норма которого определенным образом оценивается снизу. Оценки снизу той же сложности получены также для нормы *произвольного* решения и поэтому в общем случае малоэффективны при применении к частным решениям. Их использование в общем случае приводит к низкой эффективности выясняемого условия. Исключение составляют случаи $n = 1$ и $n = 2$, которыми мы ограничимся.

В случае $n = 1$ общее решение уравнения свободных колебаний имеет вид

$$x(t) = C \exp\left[-\int_0^t b_1(u)du\right], \tag{8.44}$$

где C – произвольная константа. Поэтому необходимое и достаточное условие устойчивости:

$$c \triangleq \varliminf_{t\to\infty} \int_0^t b_1(u)du > -\infty; \tag{8.45}$$

необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости:

$$c = \infty. \tag{8.46}$$

Перейдем к случаю $n = 2$. Пусть найдены аппроксимации решений ОХУ в виде непрерывных функций $\tilde{\zeta}_{1,2}(t)$, причем $\tilde{\zeta}_1 = \bar{\tilde{\zeta}}_2, \tilde{\zeta} \neq \tilde{\zeta}_2$ для всех $t \in I$ и $\mathrm{Re}\,\tilde{\zeta}_{1,2}(t)$ не имеет нулей на некотором интервале $(T, \infty) \subset I$; пусть эти аппроксимации приняты в качестве определяющих функций. Тогда справедлива

Теорема 8.8. *Если при $t\to\infty$*

$$h_{ij} = o(\mathrm{Re}\tilde{\zeta}_{1,2}), \qquad i, j = 1, 2, \tag{8.47}$$

то для устойчивости процессов необходимо выполнение неравенства

$$d \triangleq \varlimsup_{t\to\infty} \int_T^t \mathrm{Re}\tilde{\zeta}_{1,2}(u)du < \infty, \tag{8.48}$$

для асимптотической устойчивости необходимо выполнение равенства

$$d = -\infty. \tag{8.49}$$

Доказательство. Поскольку коэффициенты h_{ij} системы уравнений относительно канонических составляющих

$$\dot{z}_1 = (\tilde{\zeta}_1 + h_{11})z_1 + h_{12}z_2, \quad \dot{z}_2 = \tilde{\zeta}_2 z_1 + (\tilde{\zeta}_2 + h_{22})z_2$$

связаны зависимостями (п. 2.1.9)

$$h_{11} = -h_{21}, \quad h_{22} = -h_{12}, \quad h_{22} = h_{11}, \quad h_{21} = h_{12},$$

для характеристических чисел $\mu_{1,2}$ матрицы $\mathbf{B}$ получим

$$\mu_1 = \mathrm{Re}\,\tilde{\zeta}_{1,2} + \min(0, -2\,\mathrm{Re}\,h_{11}),$$

$$\mu_2 = \mathrm{Re}\,\tilde{\zeta}_{1,2} + \max(0, -2\,\mathrm{Re}\,h_{11}).$$

Отсюда видно, что, в силу (8.47), при $t\to\infty$ имеем $\mu_1 \sim \mathrm{Re}\,\tilde{\zeta}_{1,2} \sim \mu_2$, где знак "$\sim$" указывает на асимптотическую эквивалентность. Далее, поскольку

$$r(T)\exp\int_T^t \mu_1(u)du \leqslant r(t) \leqslant r(T)\exp\int_T^t \mu_n(u)du,$$

из полученных асимптотических соотношений следует

$$r(t) = r(T)\exp\int_T^t \mathrm{Re}\,\tilde{\zeta}_{1,2}(u)[1 + o(1)]\,du,$$

где оценка порядка $o(1)$ относится к $u\to\infty$.

Теперь заметим, что среди решений уравнения свободных колебаний, исходящих из области, определенной заданным значением $r(T)$, при любом t всегда существует такое, для которого $x(t) = \sqrt{2}r(t)$ (фазовые коэффициенты соответствующего решения системы (2.39) при этом значении t принимают значения $1/\sqrt{2}$). Следовательно, для любого t всегда можно указать такое решение уравнения свободных колебаний, для которого

$$x(t) = \sqrt{2}\, r(T) \exp \int_T^t \operatorname{Re} \zeta_{1,2}(u)[1 + o(1)]\, du.$$

Если фиксировать $r(T)$ и варьировать t, то это выражение можно рассматривать как уравнение верхней огибающей семейства решений уравнения свободных колебаний, определенного данным значением $r(T)$. Если имеет место устойчивость, то функция, описывающая эту огибающую, должна быть ограниченной при $t \to \infty$, а в случае асимптотической устойчивости должна стремиться к нулю при $t \to \infty$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Пример 8.3. Найдем необходимое и достаточное условия устойчивости процессов по отношению к выходному сигналу в односвязной системе с уравнением свободных колебаний

$$\ddot{x} + ct^{\nu}x = 0, \quad c > 0, \quad \nu > -2; \tag{8.50}$$

необходимое – для иллюстрации приведенных выше результатов, достаточное – для сравнения с необходимыми с целью оценки эффективности результатов.

Для решения обеих задач применим к уравнению (8.50) каноническое преобразование. В качестве определяющих функций выберем корни уравнения

$$\tilde{\zeta}^2 + c_1^{(1)}(t)\,\tilde{\zeta} + c_2^{(1)}(t) = 0, \tag{8.51}$$

аппроксимирующего корневое уравнение, с коэффициентами, полученными на первом шаге итерации по уравнениям (2.99) при исходной позиции $c_1^{(0)} = b_1 = 0, c_2^{(0)} = b_2 = ct^{\nu}$ и имеющими вид

$$c_1^{(1)} = \frac{\nu}{2t},$$
$$c_2^{(1)} = ct^{\nu}. \tag{8.52}$$

При $t^{\nu+2} \neq \nu^2/16c$ определяющие функции получим в виде

$$\xi_{1,2}(t) = \tilde{\zeta}_{1,2}(t) = -\frac{\nu}{4t} \pm \sqrt{\frac{\nu^2}{4t^2} - 4ct^{\nu}}. \tag{8.53}$$

На интервалах, не содержащих этой точки, система уравнений относительно канонических составляющих имеет вид

$$\dot{z}_1 = (\tilde{\zeta}_1 + h_{11})z_1 + h_{12}z_2, \quad \dot{z}_2 = h_{21}z_1 + (\tilde{\zeta}_2 + h_{22})z_2, \tag{8.54}$$

где

$$h_{11} = -h_{21} = \frac{\nu}{4t^2}\left(\frac{\nu}{2}+1\right)\theta^{-1/2} + \frac{\nu}{4t} - \frac{\dot\theta}{4\theta},$$

$$h_{22} = -h_{12} = -\frac{\nu}{4t^2}\left(\frac{\nu}{2}+1\right)\theta^{-1/2} + \frac{\nu}{4t} - \frac{\dot\theta}{4\theta},$$

$$\theta = \frac{\nu^2}{4t^2} - 4ct^{\nu}.$$

При достаточно больших значениях t справедливо неравенство $t^{\nu+2} > \frac{\nu^2}{16c}$, и

$$\tilde\zeta_1 = \bar{\tilde\zeta}_2, \quad h_{11} = \bar h_{22}, \quad h_{12} = \bar h_{21}. \tag{8.55}$$

Уравнение для определения характеристических чисел матрицы **B**, построенное по коэффициентам матрицы системы (8.54), при этих значениях t имеет вид

$$\mu^2 + 2\,\mathrm{Re}(\tilde\zeta_1 + h_{11})\mu + [\mathrm{Re}(\tilde\zeta_1 + h_{11})]^2 - |h_{11}|^2 = 0,$$

или

$$\mu^2 + \frac{\dot\theta\mu}{2\theta} + \frac{\nu^2}{16t^2}\left[\frac{(\nu/2+1)^2}{\theta t^2} - 1\right] + \frac{\nu\dot\theta}{8\theta t} = 0. \tag{8.56}$$

Для корней $\mu_{1,2}$ этого уравнения получим формулу

$$\mu_{1,2} = -\frac{\dot\theta}{4\theta} \mp \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\dot\theta^2}{\theta^2} - \frac{2\nu\dot\theta}{\theta t} - \frac{\nu^2}{t^2}\left[\frac{(\nu/2+1)^2}{\theta t^2} - 1\right]}. \tag{8.57}$$

При $t \to \infty$ имеем $\mu_{1,2} = -\frac{\nu}{4t} + O(t^{-1-\alpha})$, где α – некоторая положительная постоянная. Интегрируя это выражение, найдем

$$\int \mu_{1,2}\,dt = -\frac{\nu}{4}\ln t + O(t^{-\alpha}) + \mathrm{const}. \tag{8.58}$$

Легко видеть, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int \mu_{1,2}\,dt = \underline{\lim_{t\to\infty}} \int \mu_{1,2}\,dt = \infty \quad \text{при} \quad \nu < 0,$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int \mu_{1,2}\,dt = \underline{\lim_{t\to\infty}} \int \mu_{1,2}\,dt = -\infty \quad \text{при} \quad \nu > 0.$$

Отсюда следует, что для асимптотической устойчивости процессов достаточно неравенства

$$\nu > 0. \tag{8.59}$$

Перейдем к определению необходимых условий устойчивости. Прежде всего, заметим, что при достаточно больших значениях t функции $\tilde\zeta_1$ и $\tilde\zeta_2$ – комплексно сопряженные и, следовательно, мы имеем дело со случаем, рассмотренным в теореме 8.8.

Условие теоремы выполняется, так как $|h_{ij}| = o(t^{-1})$, $i, j = 1, 2$.

Заметив, что при $\nu > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \int_T^t \operatorname{Re} \tilde{\xi}_{1,2}(t)\, dt = -\frac{\nu}{4} \lim \ln \frac{t}{T} = -\infty$$

и применяя теорему 8.8, найдем, что при $\nu > 0$ необходимое условие асимптотической устойчивости выполняются. Суммируя этот результат с полученным выше, заключим, что неравенство (8.59) является необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости.

При $\nu < 0$ необходимое условие устойчивости не выполняется. Поэтому при $\nu < 0$ процессы неустойчивы.

8.2.4. Достаточные условия устойчивости процессов в многосвязных детерминированных системах. Пусть свободные колебания в системе описываются уравнениями

$$\dot{x}_i = a_{i1}(t)x_1 + \ldots + a_{in}(t)x_n, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8.60}$$

с непрерывными коэффициентами $a_{ij}(t)$ и все переменные x_i рассматриваются как выходные сигналы. Тогда для исследования устойчивости могут быть применены *прямой метод Ляпунова* и *метод канонических преобразований.*

Прямой метод Ляпунова. Основные теоремы прямого метода Ляпунова сформулированы и доказаны А.М. Ляпуновым [51] и К.П. Персидским [83].

Теорема 8.9 (Ляпунов [51]). *Процессы в системе, свободные колебания которой подчиняются уравнениям* (8.60), *устойчивы по отношению к переменным* $x_1, \ldots, x_n$, *если существуют такие непрерывные функции* $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ *и* $W(x_1, \ldots, x_n)$, *первая из которых дифференцируема по всем аргументам, что выполняются следующие условия:*

а) $W(x_1, \ldots, x_n) > 0$,

если хотя бы один из аргументов отличен от нуля;

б) $V(0, \ldots, 0, t) = W(0, \ldots, 0) = 0$;

в) *существует такое вещественное число* T, *что при* $t > T$ *выполняются неравенства*

$$V(x_1, \ldots, x_n t) - W(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n) \leqslant 0.$$

Доказательство см. в [51].

Практическое значение этой теоремы следующее. Если нам удалось найти функции V и W, удовлетворяющие ее условиям, то тем самым существование таких функций доказано и, следовательно, доказана устойчивость процесса.

К.П. Персидский доказал обратимость теоремы Ляпунова.

Теорема 8.10 (Персидский [83]). *Если процессы в системе, уравнения свободных колебаний которой имеют вид* (8.60), *устойчивы по отношению к переменным* $x_1, \ldots, x_n$, *то существуют функции* $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ *и* $W(x_1, \ldots, x_n)$, *обладающие указанными в условиях теоремы* 8.9 *свойствами.*

Теоремы Ляпунова и Персидского являются основной теоретической базой прямого метода Ляпунова. Различные направления практического развития этого метода связаны со способами построения функций V и W, удовлетворяющих условиям теоремы 8.9. Следует заметить, что данное Ляпуновым доказательство теоремы не содержит конструктивных указаний по формированию таких способов. Поскольку до сих пор не известны общие способы построения этих функций, позволяющие найти их во всех случаях устойчивости процессов, то на практике задача обнаружения устойчивости процессов с помощью теоремы 8.9 решается следующим образом. По тому или иному способу строятся непрерывные функции $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ и $W(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющие части условий а)–в) теоремы, и проверяется другая часть условий. В соответствии с результатами исследований К.П. Персидского во всех случаях функции V и W строятся в виде квадратичных форм переменных $x_1, \ldots, x_n$. Каждый способ имеет свою область применения, определяемую соответствующим ему классом коэффициентов системы (8.60), и определяет некоторую границу в классе устойчивых процессов (из области его применения), разделяющую все системы с устойчивыми процессами на системы, для которых использование данного способа позволяет обнаружить устойчивость, и на системы, для которых устойчивость с помощью данного способа нельзя обнаружить.

Простейший способ построения функций V и W указан Г.Н. Дубошиным [29] и состоит в следующем:

$$V = W = x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

В этом случае выполняются условия "а", "б" и первое неравенство из условия "в". Требуется проверить выполнение второго неравенства условия "в". Эффективность способа в общем случае невысока.

Обзоры предложенных до настоящего времени способов построения функций V и W содержатся в работах В.А. Короткова [41], В.В. Румянцева [91], О. Джерала и А. Лапидуса [125], Л.Ю. Анапольского, В.Д. Иртегова и В.М. Матросова [3].

Достаточное условие асимптотической устойчивости устанавливает следующая теорема.

Теорема 8.11 (Ляпунов [51]). *Если удовлетворяются условия теоремы* 8.9 *и условия:*

а) существует такое положительное число h, что при $|x_i| \leqslant h$, $i = 1, \ldots, n$, справедливо неравенство $\lim\limits_{t \to \infty} V(x_1, \ldots, x_n, t) < \infty$;

б) если варьировать h, то при всех значениях t справедливо неравенство $\lim\limits_{h \to 0} V(x_1, \ldots, x_n, t) = 0$;

в) существует функция $U(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая неравенству $U > 0$, если $x_i \neq 0$ хотя бы для одного значения i, и неравенству

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n) \leqslant - U(x_1, \ldots, x_n)$$

при всех достаточно больших значениях t, то процессы по отношению к переменным $x_1, \ldots, x_n$ асимптотически устойчивы.

Если найдены функции V и W, удовлетворяющие условиям теоремы 8.9, то мы можем утверждать, что процессы устойчивы. Чтобы установить наличие асимптотической устойчивости, можно воспользоваться этими же функциями и проверить, удовлетворяют ли они условиям теоремы 8.11. Такой подход, однако, может оказаться неудачным из-за того, что ни одно из условий теоремы 8.11 при построении упомянутых функций не учитывалось. Поэтому при исследовании асимптотической устойчивости процессов целесообразно отдавать предпочтение таким способам построения функций V и W, в которых часть условий упомянутой теоремы учитывается.

Метод канонических преобразований. Теперь перейдем к более общему случаю, когда $m (\leqslant n)$ переменных $x_1, \ldots, x_m$ являются выходными сигналами. Рассмотрим путь исследования устойчивости по методу канонических преобразований. Он состоит в следующем. Рассматривая формально одну из переменных системы (8.60) как выходной сигнал x некоторой односвязной системы и получив уравнение свободных колебаний (8.5) этой системы, применяем к нему каноническое преобразование; далее, выражая выходные сигналы $x_1, \ldots, x_m$ через сигнал x и его производные и затем через переменные $z_1, \ldots, z_n$ системы уравнений (8.9), полученной в результате канонического преобразования, оцениваем норму решения этой системы и затем сигналы $x_1, \ldots, x_m$. Достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости формулируются в виде требований к асимптотическому поведению оценок сигналов $x_1, \ldots, x_m$.

Пусть система (8.60) допускает сведение к одному дифференциальному уравнению (8.5), имеющему в качестве искомой функции x одну из искомых функций системы (8.60), и при этом между начальными значениями искомых функций системы (8.60), искомой функции и ее $n - 1$ производной уравнения (8.5) существует взаимно однозначное соответствие. Пусть $x_1, \dots, x_m$ — выходные сигналы системы. Тогда переменные $x_1, \dots, x_m$ можно выразить через переменную x и ее производные в виде (§ 4.4)

$$x_i = [e_{i1}(t) + e_{i2}(t)p + \dots + e_{in}(t)p^{n-1}]\, x, \quad i = 1, \dots, m, \tag{8.61}$$

где $e_{i1}(t), \dots, e_{in}(t), i = 1, \dots, m,$ — непрерывные функции. Оценка для переменной x была приведена в п. 8.2.2 и может быть записана в виде

$$|x(t)| \leqslant \sqrt{2}\, r(0) \exp \int_0^t \mu_n(u)\, du \triangleq g_1(t)\, r(0). \tag{8.62}$$

Аналогичные оценки для ее производных, как показано в [74], имеют вид

$$|px| \leqslant r(0) \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i(t)|^2} \exp \int_0^t \mu_n(u) du \triangleq g_2(t)\, r(0), \dots$$

$$|p^{n-1}x| \leqslant r(0) \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |[\xi_i(t) + p]^{n-2} \xi_i(t)|^2} \times$$

$$\times \exp \int_0^t \mu_n(u) du \triangleq g_n(t)\, r(0). \tag{8.63}$$

Используя уравнения (8.61) и оценки (8.62) и (8.63), легко убедиться в справедливости следующей теоремы:

Теорема 8.14 [74]. *Если систему* (8.60) *относительно одной из ее переменных* $x_k \triangleq x$ *можно свести к дифференциальному уравнению* (8.5) *с непрерывными коэффициентами, и при этом между начальными значениями искомых функций системы* (8.60), *с одной стороны, и искомой функции уравнения* (8.5) *и ее начальных производных с другой стороны, существует взаимнооднозначное соответствие, то для устойчивости процессов по отношению к выходным сигналам* $x_1, \dots, x_m$, $m \leqslant n$, *достаточно выполнения неравенств*

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \max_j |e_{ij}(t) g_j(t)| < \infty, \quad i = 1, \dots, m,$$

а для асимптотической устойчивости достаточно выполнения равенств

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \max_j |e_{ij}(t) g_j(t)| = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Можно обобщить теорему 8.14 на случай выходных сигналов $u_1, \dots, u_{m'}, m \leqslant n$, являющихся линейными формами (т.е. линейными однородными функциями [100]) от переменных $x_1, \dots, x_n$

с коэффициентами, непрерывно зависящими от t. Запишем эти линейные формы в виде

$$u_i = d_{i1}(t)x_1 + \ldots + d_{in}(t)x_n, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8.64}$$

где $d_{ij}(t)$, $j = 1, \ldots, n$, — вещественные непрерывные функции. Предположив, что система (8.60) может быть преобразована к одному линейному дифференциальному уравнению n-го порядка с непрерывными коэффициентами относительно одной из переменных $x_k \stackrel{\Delta}{=} x$, получим уравнение свободных колебаний (8.5). Определение А.М. Ляпунова для рассматриваемого вида устойчивости эквивалентно следующему определению, аналогичному определениям 8.2–8.4.

Определение 8.5. Процессы *устойчивы по отношению к величинам* $u_1, \ldots, u_m$, если при всех частных решениях уравнения (8.5), исходящих из ограниченной n-мерной области начальных значений величин $x, px, \ldots, p^{n-1}x$ величины $u_1, \ldots, u_m$ ограничены. Процессы *неустойчивы*, если среди частных решений, исходящих из указанной области, существует решение, для которого одна из величин u_i не ограничена. Процессы *асимптотически устойчивы*, если для всех решений рассматриваемого класса $u_i \to 0$, $i = 1, \ldots, m$, при $t \to \infty$.

Используя это определение и приведенные выше оценки для переменной x и ее производных, найдем достаточное условие устойчивости интересующего нас вида. С этой целью выразим переменные $u_1, \ldots, u_m$ через переменную x и ее производные. На основании уравнений (8.61) и (8.64) получим $\mathbf{u} = \mathbf{DE}\,\boldsymbol{\xi}$, где

$$\mathbf{u} = [u_1, \ldots, u_m]^{\text{т}}, \quad \boldsymbol{\xi} = [x, px, \ldots, p^{n-1}x]^{\text{т}},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{m1} & \ldots & d_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_{11} & \ldots & e_{1n} \\ & & \\ e_{n1} & \ldots & e_{nn} \end{bmatrix}.$$

Обозначим матрицу, равную произведению матриц $\mathbf{DE}$, символом $\mathbf{F}$. Пусть f_{ij}, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$, — элементы этой матрицы, тогда получим

$$u_i = [f_{i1}(t) + f_{i2}(t)p + \ldots + f_{in}(t)p^{n-1}]\,x, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Эти равенства с точностью до коэффициентов совпадают с равенствами (8.64). Поэтому, повторив логику доказательства теоремы 8.14, найдем достаточные условия устойчивости по отношению к выходным сигналам в виде

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \max_j |f_{ij}(t) g_j(t)| < \infty, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8.65}$$

где $g_j(t)$ — оценки для переменной x и ее производных, формулы которых приведены выше. Если же справедливы равенства

$$\lim_{t \to \infty} \max_j | f_{ij}(t) g_j(t) | = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8.66}$$

то функции $u_1, \ldots, u_m$ не только ограничены, но и стремятся к нулю при $t \to \infty$, т.е. процессы асимптотически устойчивы.

Эти результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 8.15 [74]. *Для устойчивости процессов по отношению к величинам $u_1, \ldots, u_m$ достаточно выполнения неравенств* (8.65), *для асимптотической устойчивости по отношению к тем же величинам достаточно выполнения равенств* (8.66).

Все изученные выше виды устойчивости являются частными случаями рассмотренного вида устойчивости. Для каждого частного случая получаем свой вид матрицы F. Если в качестве переменной x во всех случаях выбирается одна и та же величина, то это различие является единственным и сводится к различию в матрицах D. Если же величина x выбирается по-разному, то различаются также матрицы E и функции $g_j(t), j = 1, \ldots, n$. В зависимости от вида указанных матриц и функций достаточные условия устойчивости (8.65) и асимптотической устойчивости (8.66) в каждом случае получают конкретную реализацию.

Найдем теперь достаточные условия устойчивости процессов по отношению к произвольной заданной системе переменных, опираясь на метод оценки решений системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами, обобщающий метод А.Д. Горбунова [74] для систем с вещественными коэффициентами. Образуем вспомогательную эрмитову форму

$$K = k_1(t) z_1 \bar{z}_1 + \ldots + k_n(t) z_n \bar{z}_n$$

с коэффициентами

$$k_i(t) = \exp\left(-2 \int_{t_0}^{t} \operatorname{Re} \xi_i(v)\, dv\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Очевидно, это – положительно определенная форма. Вычислим производную по t формы K при условии, что переменные z_i удовлетворяют уравнениям (8.8). Получим

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{i,j=1}^{n} (k_i h_{ij} + k_j \bar{h}_{ji}) \bar{z}_i z_j.$$

Правую часть этого равенства, также являющуюся эрмитовой формой, обозначим символом M. Коэффициенты этой формы имеют вид

$$m_{ij} = k_i h_{ij} + k_j \bar{h}_{ji}.$$

Применив теорему 4.1 из [74], найдем

$$|z_i| \leqslant r(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} [\operatorname{Re} \xi_i(v) + \nu_n(v)]\, dv, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8.67}$$

где ν_n — наибольший корень уравнения

$$\det \| m_{ij} - 2k_i \nu \delta_{ij} \|_1^n = 0. \tag{8.68}$$

Используя оценки (8.67), найдем достаточное условие устойчивости по отношению к величинам $u_1, \ldots, u_m$. Рассмотрев асимптотический характер этих оценок, получим результат, который запишем в виде следующей теоремы.

Теорема 8.16 [74]. *Для устойчивости процессов относительно величин $u_1, \ldots, u_m$ достаточно выполнения неравенств*

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \sum_{j=1}^{m} |f_{ji}(t)|\, g_i(t) \exp\left[-\int_0^t \mu_n(u)\, du\right] \times$$

$$\times \exp \int_{t_0}^{t} [\operatorname{Re} \xi_i(v) + \nu_n(v)]\, dv < \infty; \quad i = 1, \ldots, n; \tag{8.69}$$

для асимптотической устойчивости относительно тех же величин достаточно выполнения равенств

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \sum_{j=1}^{m} |f_{ji}(t)|\, g_i(t) \exp\left[-\int_0^t \mu_n(u)\, du\right] \times$$

$$\times \exp \int_{t_0}^{t} [\operatorname{Re} \xi_i(v) + \nu_n(v)\, dv = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{8.70}$$

Доказательство. Так как величины z_i удовлетворяют неравенствам (8.67), то для ограниченности функций $u_j(t)$ достаточно выполнения неравенств (для $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$)

$$|f_{ij}(t)|\, g_i(t) \exp\left[-\int_0^t \mu_n(u)\, du\right] \exp \int_{t_0}^{t} [\operatorname{Re} \xi_i(v) + \nu_n(v)]\, dv < \infty,$$

$$i, j = 1, \ldots, n.$$

Но эти неравенства следуют из неравенств (8.69), что доказывает достаточность выполнения последних для устойчивости. Достаточность равенств (8.70) для асимптотической устойчивости относительно величин $u_1, \ldots, u_m$ доказывается аналогично.

В некоторых случаях можно усилить полученные и сформулированные в теореме 8.16 результаты, если несколько видоизменить структуру коэффициентов $k_i(t)$ в эрмитовой форме K, а именно: определив эти коэффициенты равенствами

$$k_i(t) = \exp\left(-2 \int_{t_0}^{t} [\operatorname{Re} \xi_i(v) + h_{ii}(v)\, dv\right), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{8.71}$$

При этом текст теоремы (8.16) не изменится, коэффициент ν_n

будет по-прежнему иметь смысл наибольшего корня уравнения (8.68), но формулы для m_{ij} теперь будут справедливы только для недиагональных коэффициентов m_{ij}, а все коэффициенты m_{ii} заменяются нулями.

8.2.5. Сильная неустойчивость процессов в детерминированных системах. С понятием "сильная неустойчивость процессов" в частном случае системы с сосредоточенными параметрами мы познакомились в п. 3.4.1 при обсуждении понятия физической определенности процесса. Далее будем рассматривать следующий случай: процесс описывается системой уравнений (8.60) с непрерывными коэффициентами, причем такими, которые допускают приведение этой системы к одному уравнению (8.5) (также с непрерывными коэффициентами) с одной из переменных $x_1, \ldots, x_n$ в качестве переменной x; свойство сильной неустойчивости рассматривается по отношению к величинам $R_1, \ldots, R_q$, являющимся заданными функциями переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Примем следующее определение.

Определение 8.9. Данный процесс *сильно неустойчив* по отношению к величинам $R_1, \ldots, R_q$, если для каждой из этих величин разности функций времени, в которые они превращаются, когда выходные сигналы учитываются как функции времени в данном процессе и в любом другом процессе, отличающемся начальными данными, неограниченно возрастают при $t \to \infty$.

Достаточное условие сильной неустойчивости для случая $q = 1$, $R \triangleq R_1 = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$ устанавливает следующая теорема.

Теорема 8.17. *Для сильной неустойчивости процессов по отношению к R достаточно выполнения равенства*

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \nu_1(t) \exp 2 \int_0^t \mu_1(t)\, dt = \infty,$$

где $\nu_1(t)$ – минимальное характеристическое число эрмитовой матрицы, являющейся матрицей коэффициентов эрмитовой формы $S(z_1, \ldots, z_n)$, в которую превращается R^2 после перехода от системы уравнений (8.60) к уравнению (8.5) и далее к системе уравнений относительно канонических составляющих и следующей отсюда замены переменных исходной системы линейными комбинациями канонических составляющих; $\mu_1(t)$ – минимальное характеристическое число матрицы B (см. стр. 272).

Доказательство. Все процессы по отношению к сильной неустойчивости рассматриваемого вида одинаковы. Поэтому в качестве данного процесса можно принять любой. Выберем основное состояние покоя. Согласно определению 8.9, основное состояние покоя обладает сильной неустойчивостью, если при любом начальном состоянии системы, отличном от основного состояния покоя, справедливо равенство $\overline{\lim\limits_{t \to \infty}}\, S = \infty$. Представив S в виде $S = (S/r^2) r^2$ и оценивая снизу отношение эрмитовых форм S/r^2 и эрмитову форму r^2, придем к утверждению теоремы.

Приняв R за меру отклонения текущего состояния системы от основного состояния покоя, эту теорему можно применить для установления достаточного условия *физической определенности процесса* (п. 3.4.1).

8.2.6. Условия устойчивости процессов в детерминированных системах с периодически изменяющимися параметрами. К исследованию устойчивости процессов в линейной системе с периодически изменяющимися параметрами, как к частному случаю системы с сосредоточенными параметрами, применимы все методы, изложенные в пп. 8.2.2–8.2.5. Специфический характер коэффициентов уравнений свободных колебаний системы с периодически изменяющимися параметрами позволяет дополнить эти методы методами, учитывающими эту специфику.

Рассмотрим один из таких методов на примере односвязной системы. Обратимся к системе уравнений

$$\dot{x}_{i-1} = x_i, \quad i = 2, \ldots, n,$$
$$\dot{x}_n = -b_n(t) x_1 - b_{n-1}(t) x_2 - \ldots - b_1(t) x_n,$$

эквивалентной уравнению свободных колебаний (8.5), и представим ее в виде векторно-матричного уравнения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}(t)\, \mathbf{x}, \tag{8.72}$$

где $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}$,

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -b_n & -b_{n-1} & -b_{n-2} & \ldots & -b_1 \end{bmatrix}$$

Пусть T – общий период функций $b_1(t), \ldots, b_n(t)$, т.е. $\mathbf{C}(t+T) = \mathbf{C}(t)$.

Решение системы (8.72) связано с начальными данными зависимостью $\mathbf{x}(t) = \mathbf{K}(t, 0)\, \mathbf{x}(0)$, где $\mathbf{K}(t, 0)$ – *матрицант* (п.2.1.1). Для асимптотической устойчивости процессов по отношению к выходному сигналу необходимо и достаточно, чтобы $x(t) \to 0$ при любом $x(0)$ и при $t \to \infty$. Это условие эквивалентно следующему: модули корней фундаментального уравнения (п. 2.1.5) $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ меньше единицы. Но эти корни являются [23] в то же время характеристическими числами матрицы $\mathbf{K}(t,0)$. Следовательно, для асимптотической устойчивости процессов по отношению к выходному сигналу необходимо и достаточно, чтобы модули характеристических чисел матрицы $\mathbf{K}(t,0)$ были меньше единицы.

Так как матрица $\mathbf{K}(T,0)$ может быть найдена в результате численного интегрирования уравнения (8.72) на интервале $[0,T]$, то приведенный критерий асимптотической устойчивости процессов позволяет свести исследование к анализу результатов такого интегрирования. Этот путь с рекомендациями по выбору метода численного интегрирования и шага интегрирования освещен Е. Девисоном [123].

Другой путь использования критерия состоит в получении оценок сверху модулей корней на базе мажорантных и минорантных оценок координат решений уравнения (8.72). Для асимптотической устойчивости достаточно, чтобы верхние оценки модулей корней были меньше единицы. Этот путь позволяет получить достаточные условия асимптотической устойчивости в виде неравенств, которым должны удовлетворять мажорантные и минорантные оценки элементов матрицы $\mathbf{K}(t,0)$, и освещен в [72].

Пример 8.3 [62]. Найдем достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости процессов по отношению к выходному сигналу x системы с уравнением свободных колебаний

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b(1 - \epsilon\sin t)x = 0$$

при условии

$$a^2 < 4b(1-\epsilon). \tag{8.73}$$

Выберем в качестве определяющих функций $\xi_{1,2}(t)$ корни формального характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a\lambda + b(1 - \epsilon\sin t) = 0,$$

т.е.

$$\xi_{1,2}(t) = -\frac{a}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4b(1-\epsilon) - a^2}.$$

В силу (8.73) для всех t имеем $\xi_1(t) \neq \xi_2(t)$, и коэффициенты h_{ij} системы уравнений (8.9) выражаются в виде

$$h_{11} = h_{22} = -h_{12} = -h_{21} = \frac{b\epsilon\cos t}{4b(1-\epsilon\sin t) - a^2} \triangleq h.$$

Характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{B}$ в данном случае имеет вид

$$\mu^2 - \mu(2h - a) + a^2/4 - ah = 0.$$

Наибольший корень этого уравнения

$$\mu_2 = -\frac{a}{2} + \max(0,h) = -\frac{a}{2} + \max\left(0, \frac{b\epsilon\cos t}{4b(1-\epsilon\sin t) - a^2}\right) =$$

$$= -\frac{a}{2} + \max\left\{0, -\frac{1}{2}\ln[4b(1-\epsilon\sin t) - a^2/4]\right\}.$$

Заметим, что

$$\frac{\epsilon\cos t}{4b(1-\epsilon\sin t)-a^2}\quad\begin{cases} >0 & \text{при } -\pi/2<t<\pi/2,\\ <0 & \text{при } \pi/2<t<3\pi/2.\end{cases}$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mu_2(t)dt=-\frac{a}{2}-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\ln[4b(1-\epsilon\sin t)-a^2]\,dt\equiv$$

$$\equiv-\frac{a}{2}+\frac{1}{4\pi}\,\frac{4b(1+\epsilon)-a^2}{4b(1-\epsilon)-a^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mu_2(t)dt=0,\quad\text{или}\quad\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mu_2(t)dt<0,$$

если, соответственно,

$$\epsilon\leqslant(1-a^2/4b)\,\mathrm{th}\,\pi a, \tag{8.74}$$

или

$$\epsilon<(1-a^2/4b)\,\mathrm{th}\,\pi a. \tag{8.75}$$

Условие (8.74) является достаточным условием устойчивости, условие (8.75) – достаточным условием асимптотической устойчивости. Другие достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости, полученные по методу канонических преобразований, см. в [62, с. 219–222].

8.2.7. Устойчивость процессов в стохастических системах. В предыдущих разделах для получения условий устойчивости процессов в детерминированных системах во всех случаях по коэффициентам исходных уравнений процесса строились некоторые функции от t и выяснялось, каким условиям должны удовлетворять эти функции, чтобы была гарантирована устойчивость или асимптотическая устойчивость, или каким условиям они удовлетворяют, если процессы в действительности устойчивы или асимптотически устойчивы. По такой же схеме можно исследовать устойчивость процессов в стохастических системах, заменив числовые функции времени случайными и оценивая вероятность, с какой они удовлетворяют тем или иным условиям. Такая возможность появляется, если случайные функции, которые мы должны построить, существуют и таковы, что необходимые их характеристики можно найти по характеристикам случайных функций, представляющих собой коэффициенты исходных уравнений процесса.

Для иллюстрации сказанного обратимся к теореме 8.3, устанавливающей достаточное условие устойчивости процессов в односвязной системе. Изменим исходные условия, заменив детерминированное уравнение свободных колебаний стохастическим:

$$(p^n+B_1(t)p^{n-1}+\ldots+B_n(t))X=0, \tag{8.76}$$

и определим его коэффициенты как случайные функции времени. Далее применим тот же прием: подвергнем уравнение (8.76) каноническому преобразованию. Для выбора определяющих функций здесь есть различные возможности: их можно определить либо как числовые функции, либо как случайные функции. Первый вариант, очевидно, проще, но очевидно также, что по предельной эффективности результатов (при варьировании определяющих функций) он уступает второму.

Остановимся на первом варианте и сведем вопрос их выбора к уже изученному, построив вспомогательное уравнение (8.5), коэффициенты которого определим в виде

$$b_i(t) = \mathbf{M}[B_i(t)], \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{8.77}$$

Очевидно, это можно сделать только тогда, когда $\mathbf{M}[B_i(t)]$ существуют.

При преобразовании (2.38) система уравнений относительно канонических составляющих (случайных функций $z_i(t)$) получается в виде

$$\dot{Z}_i = \xi_i(t) Z_i + \sum_{i,j}^{n} H_{ij}(t) Z_j, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{8.78}$$

где $H_{ij}(t)$ – случайные функции, связанные со случайными функциями $B_1(t), \ldots, B_n(t)$ теми же формулами, какие связывают функции $h_{ij}(t)$ с функциями $b_1(t), \ldots, b_n(t)$.

Заметим, что случайные функции $H_{ij}(t)$: а) в общем случае комплекснозначны, т.е. имеют структуру $H_{ij}(t) = U(t) + \sqrt{-1}V(t)$, где $U(t)$ и $V(t)$ – обычные (вещественные) случайные функции; б) являются линейными комбинациями (с переменными коэффициентами) функций $B_1(t), \ldots, B_n(t)$. Эрмитова матрица $\mathbf{B}$ превращается в матрицу, элементы которой – случайные функции. Эти элементы определяют характеристические числа матрицы, в частности максимальное характеристическое число $M_n(t)$, как случайные функции.

Для вероятности асимптотической устойчивости P_1 получаем следующую оценку:

$$P_1 > \mathrm{P}[\overline{\lim_{t \to \infty}} \int_0^t M_n(t)\,dt = -\infty];$$

для вероятности устойчивости $P_1 + P_2$ – оценку

$$P_1 + P_2 > \mathrm{P}[\overline{\lim_{t \to \infty}} \int_0^t M_n(t)\,dt < \infty];$$

и для вероятности неустойчивости P_3 – оценку

$$P_3 < \mathrm{P}[\overline{\lim_{t \to \infty}} \int_0^t M_n(t)\,dt = \infty].$$

В частности, отсюда следует достаточное условие устойчивости почти наверное:

$$P[\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t M_n(t)dt < \infty] = 1, \tag{8.79}$$

и достаточное условие асимптотической устойчивости почти наверное:

$$P[\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t M_n(t)dt = -\infty] = 1. \tag{8.80}$$

Заметим, что изложенный путь исследования нигде не требовал оперирования с многомерными распределениями случайных функций и информация о таких распределениях нигде не использовалась. Поэтому коэффициенты уравнения (8.76) достаточно определить как случайные величины, зависящие от параметра t, иначе говоря, как случайные функции, но без задания многомерных распределений (п.1.3.1). В силу того же обстоятельства математический аппарат исследований не содержит принципиальных сложностей.

Неучет многомерных распределений случайных функций, представляющих коэффициенты, объясняется не отсутствием их связи с устойчивостью (она имеется), а принятым вариантом выбора определяющих функций. Если же последние формировать как случайные функции, то упомянутая информация потребуется. Однако при этом процесс анализа существенно усложнится.

Пример 8.4. Найдем достаточное условие асимптотической устойчивости процессов (почти наверное) в односвязной системе 2-го порядка с уравнением свободных колебаний вида

$$\ddot{X} + 2a\dot{X} + [1 + F(t)]X = 0, \tag{8.81}$$

где $a = \text{const} > 0$, $F(t)$ – стационарная в узком смысле случайная функция с нулевым математическим ожиданием и обладающая следующим эргодическим свойством: с вероятностью 1

$$M|F(t)| = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |F(t)|dt. \tag{8.82}$$

Определив коэффициенты вспомогательного уравнения (8.5) по формулам (8.77), получим его в виде

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + x = 0. \tag{8.83}$$

Исключая случай $a = 1$, выберем в качестве определяющих функций канонического преобразования корни формального характеристического уравнения, соответствующего уравнению (8.83), т.е. константы

$$\xi_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}. \tag{8.84}$$

При этом для коэффициентов H_{ij} получим следующие формулы:

$$H_{11} = H_{12} = \frac{F(t)}{\sqrt{a^2 - 1}} = -H_{21} = -H_{22}. \tag{8.85}$$

Рассмотрим сначала случай $a < 1$. В этом случае H_{11}, H_{12}, H_{21} и H_{22} – мнимые величины и матрица **B** имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -a & \dfrac{F(t)}{2\sqrt{a^2-1}} \\ -\dfrac{F(t)}{2\sqrt{a^2-1}} & -a \end{bmatrix}. \tag{8.86}$$

Для наибольшего характеристического числа этой матрицы $M_2(t)$ получим

$$M_2(t) = -a + \frac{|F(t)|}{2\sqrt{1-a^2}}. \tag{8.87}$$

В силу указанного в условиях задачи эргодического свойства функции $F(t)$ для среднего значения по времени $M_2(t)$ с вероятностью 1 получим

$$[M_2(t)]_{\text{ср}} = -a + \frac{K}{2\sqrt{1-a^2}}, \tag{8.88}$$

где $K = \mathrm{M}|F(t)|$. Отсюда следует достаточное условие асимптотической устойчивости:

$$K < 2a\sqrt{1-a^2}. \tag{8.89}$$

Перейдем к случаю $a > 1$. Здесь все коэффициенты H_{ij} вещественные и матрица **B** имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -a+\sqrt{a^2-1}+\dfrac{F(t)}{2\sqrt{a^2-1}} & 0 \\ 0 & -a-\sqrt{a^2-1}-\dfrac{F(t)}{2\sqrt{a^2-1}} \end{bmatrix}. \tag{8.90}$$

Вычисляя наибольшее характеристическое число $M_2(t)$ и осредняя его по времени, аналогично предыдущему случаю получим достаточное условие асимптотической устойчивости в виде

$$K < 2a\sqrt{a^2-1} - 2(a^2-1). \tag{8.91}$$

§ 8.3. Устойчивость процессов в линейных системах с запаздыванием

8.3.1. Конкретизация понятий устойчивости и неустойчивости процессов для линейных систем с запаздыванием. Изучая устойчивость процессов в линейных системах с запаздыванием, в качестве величин $Q_1, \ldots, Q_p$ так же, как в случае линейных систем конечного порядка (см. п. 8.2.1), выберем выходные сигналы системы. Рассматриваемую динамическую систему будем характеризовать уравнением или системой уравнений процесса, заданными на интервале $I = (-\infty, \infty)$.

В случае многосвязной системы с конечным числом выходов будем рассматривать систему уравнений процесса вида

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}(t)x_j(t) + c_{ij}(t)x_j(t - \tau(t))] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} b_{ij}(t)y_j(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{8.92}$$

с непрерывными вещественными коэффициентами $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $c_{ij}(t)$ и отличной от нулевой константы неотрицательной вещественной функцией $\tau(t)$, удовлетворяющей условию, указанному в § 1.4, и условию: величина $h = \sup \tau(t)$ существует.

Будем считать, что все переменные x_i этой системы представляют выходные сигналы, общее число которых – n, а переменные y_j – входные сигналы.

Для линейной системы свойство процесса быть устойчивым, асимптотически устойчивым или неустойчивым не зависит от входных сигналов. Поэтому будем рассматривать свободные колебания системы, заменив уравнения (8.92) уравнениями

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}(t)x_j(t) + c_{ij}(t)x_j(t - \tau(t))]; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{8.93}$$

Определим заданное множество выходных сигналов U_I как множество всех заданных на I непрерывных вектор-функций $\mathbf{x}(t) \triangleq [x_1(t), \ldots, x_n(t)]^{\mathrm{T}}$. При этом в качестве пространства состояний $S(0)$ можно принять, как это делает Н.Н. Красовский [42, с. 151], множество всех вектор-функций $\mathbf{x}(v)$, определенных и равномерно непрерывных на интервале $(-h, 0)$. Каждая вектор-функция этого вида – некоторый вектор состояния $s(0)$, а каждая вектор-функция $\mathbf{x}(t + \vartheta)$ – вектор состояния $s(t)$.

В случае односвязной системы будем рассматривать уравнение процесса вида

$$p^n + \sum_{i=1}^{n} [b_i(t)p^{n-i}x(t) + \sum_{k=1}^{q} c_{ik}(t)\, q_k^{n-i}\, x(t - \tau_k(t))] = 0,$$

$$p \equiv d/dt, \; q_k \equiv d/du_k, \quad u_k = t - \tau_k(t), \tag{8.94}$$

с непрерывными вещественными коэффициентами и неотрицательными непрерывными вещественными функциями $\tau_k(t)$, удовлетворяющими условию, указанному в § 1.4 при рассмотрении системы уравнений (1.41). Примем $U_I = C_n(I)$. При этом в качестве пространства состояний $S(0)$ можно принять множество всех функций $x_P(t) \in U_{P(a)}$.

Для линейной системы с запаздыванием, так же как в случае линейной системы конечного порядка, свойство процесса быть устойчивым, асимптотически устойчивым или неустойчивым по заданным функционалам F_1 и $F_2(t)$ не зависит от заданного процесса, а свойства асимптотической устойчивости и асимптотической устойчивости в большом идентичны.

8.3.2. Достаточные условия устойчивости. Пути распространения *прямого метода Ляпунова* исследования устойчивости и асимптотической устойчивости процессов на случай системы с запаздыванием определены в работах Б.С. Разумихина [87] и Н.Н. Красовского [42]. Достаточное условие асимптотической устойчивости процессов в многосвязной системе по функционалам

$$F_1 = \max_i \sup |x_i(\vartheta)|, \qquad F_2(t) = \max_i |x_i(t)|,$$

сформированным в предположении, что в качестве заданного процесса принято основное состояние покоя системы, получено Н.Н. Красовским [42] (см. также [113]). Этот результат, с которым можно ознакомиться в указанной литературе, обобщает теорему 8.11 Ляпунова об асимптотической устойчивости процессов в линейных системах конечного порядка и распространяется на системы более широкого класса, чем класс систем, определенный уравнениями вида (8.93).

Другая возможность исследования устойчивости и асимптотической устойчивости процессов в системах с запаздыванием связана с распространением на случай этих систем *метода канонических преобразований* (п. 8.2.2).

Рассмотрим односвязную систему с уравнением свободных колебаний (8.94). Соответствующая этому уравнению система уравнений относительно канонических составляющих (см. п. 2.2.2) имеет вид (2.108) и равнозначна векторно-матричному уравнению (2.110).

Умножив слева обе части уравнения (2.110) на $\bar{z}^{\mathrm{T}}(t)$, а обе части уравнения, полученного из (2.110) путем перехода к комплексно сопряженным величинам, на $z^{\mathrm{T}}(t)$ и сложив получаемые уравнения почленно, результат запишем в виде

$$2\dot{r}(t)r(t) = \bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{A}(t)\,\mathbf{z}(t) + \mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{A}^*(t)\,\bar{\mathbf{z}}(t) + \\ + \sum_{k=1}^{q} [\,\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{L}^{(k)}(t)\,\mathbf{z}(t-\tau_k(t)) + \mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t)\,\overline{\mathbf{L}^{(k)}}(t)\,\bar{\mathbf{z}}(t-\tau_k(t)), \tag{8.95}$$

где $r(\cdot) = \sqrt{|z_1(\cdot)|^2 + \ldots + |z_n(\cdot)|^2}$.

Оценим слагаемые в правой части равенства (8.95). Обозначим

$$\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{A}(t)\,\mathbf{z}(t) + \mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{A}^*(t)\,\bar{\mathbf{z}}(t) \triangleq 2\mu(t)r(t).$$

Тогда, согласно [19, с. 258, 273], $\mu_1(t) \leqslant \mu(t) \leqslant \mu_n(t)$, где μ_1 и μ_n — минимальное и максимальное характеристические числа матрицы $\mathbf{B} \triangleq (\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)/2$.

Аналогично, обозначив

$$\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{L}^{(k)}(t)\mathbf{z}(t-\tau_k(t))+\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{L}^{(k)}(t)\bar{\mathbf{z}}(t-\tau_k(t))\triangleq$$
$$\triangleq 2\lambda^{(k)}(t)r(t)r(t-\tau_k(t))$$

и применив неравенство Коши, найдем $|\lambda^{(k)}(t)|\leqslant\sqrt{\lambda_n^{(k)}(t)}$, где $\lambda_n^{(k)}$ – максимальное характеристическое число матрицы $\mathbf{M}^{(k)}\triangleq\triangleq\mathbf{L}^{(k)*}\mathbf{L}^{(k)}$.

Из изложенного при условии, что величина $h\triangleq\max\limits_k \tau_k(0)$ конечна, следует справедливость следующего утверждения.

Т е о р е м а 8.18. *Для асимптотической устойчивости процессов по отношению к выходному сигналу x по функционалам $F_1 = \sup|x(\vartheta)|$, определенному на множестве всех равномерно непрерывных функций $x(\vartheta)$ с равномерно непрерывными $n-1$ начальными производными, заданных на интервале $(-h, 0)$, и $F_2(t) = |x(t)|$, определенному при каждом значении t на множестве значений при данном t функций $x(t)$, являющихся решениями уравнения* (8.94) *при начальных условиях указанного выше вида, достаточно, чтобы при произвольных непрерывных функциях $r(\vartheta)$, $\mu(t)$ и $\lambda^{(k)}(t)$, удовлетворяющих условиям $0\leqslant r(\vartheta)\leqslant 1$, $\mu_1(t)\leqslant\mu(t)\leqslant\mu_n(t)$ и $0\leqslant\lambda^{(k)}(t)\leqslant\sqrt{\lambda_n^{(k)}(t)}$, все неотрицательные решения уравнения*

$$\dot{r}(t)=\mu(t)r(t)+\sum_{k=1}^{q}\sqrt{\lambda_n^{(k)}(t)}\,r(t-\tau_k(t)) \qquad (8.96)$$

стремились к нулю при $t\to\infty$.

§ 8.4. Устойчивость процессов в линейных системах с распределенными параметрами

Задача об устойчивости процессов в линейных системах с распределенными параметрами сравнительно мало изучена. Трудности здесь связаны не столько с постановкой задачи, сколько с методами ее решения. Это объясняется существенно более сложным математическим описанием процессов по сравнению с описанием процессов в системах с сосредоточенными параметрами и в системах с запаздыванием.

Удобными (для постановки задачи) определениями устойчивости и асимптотической устойчивости систем являются определения 8.4 и 8.7. При этом конкретизация постановки задачи в каждом частном случае состоит в определении пространства состояний S и функционалов F_1 и $F_2(t)$.

Методы решения задачи могут быть сформулированы как обобщения известных методов для систем с сосредоточенными параметрами, в частности, прямого метода Ляпунова и метода канонических преобразований.

Трудности с распространением прямого метода Ляпунова на системы с распределенными параметрами имеют разный уровень в зависимости от того, является ли система *свободной* или *связанной* (п. 1.5.1). В случае одномерной свободной системы при описании процесса системой дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = f_i\left(t, l, x_1, \ldots, x_n; \frac{\partial x_1}{\partial l}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial l}; \frac{\partial^2 x_1}{\partial l^2}, \ldots, \frac{\partial^2 x_n}{\partial l^2}\right),$$
$$i = 1, \ldots, n, \tag{8.97}$$

где $x_i(t, l)$ — функции, описывающие выходные сигналы, f_i — вещественные линейные функции от x_i, $\partial x_i/\partial l$ и $\partial^2 x_i/\partial l^2$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n$, с непрерывно зависящими от t и l коэффициентами, исследование устойчивости процессов по отношению к выходным сигналам состоит в построении обладающего определенными свойствами функционала $V_\varphi(t) \equiv V[\varphi(t, l), t]$, определенного на множестве решений $\varphi(t, l) \equiv [\varphi_1(t, l) \ldots \varphi_n(t, l)]^{\mathrm{T}}$ уравнения (8.97), в выяснении его поведения при $t \to \infty$ и свойств и поведения при $t \to \infty$ его производной по t в силу дифференциальных уравнений (8.97) ([92]).

Такой подход, однако, неправомерен в случае связанной системы, так как в нем не учитываются граничные условия, а последние существенно влияют на то, будут ли процессы устойчивы, асимптотически устойчивы или неустойчивы.

Метод канонических преобразований наиболее просто может быть распространен на задачи исследования устойчивости одномерных систем, эквивалентируемых системой с сосредоточенными параметрами бесконечного порядка (§ 4.3). Как отмечалось в § 2.3, в ряде случаев описание изучаемой системы как системы этого класса может быть получено непосредственно по исходным данным задачи без предварительного описания системы дифференциальными уравнениями с частными производными, содержащими в качестве неизвестных функции времени и пространственного аргумента.

Охарактеризуем задачу определения достаточных условий устойчивости и асимптотической устойчивости по отношению к выходному сигналу x в случае односвязной одномерной системы, для которой определено в качестве исчерпывающей внутренней характеристики уравнение свободных колебаний

$$D(p, t)x \equiv$$
$$\equiv [d_0(t) + d_1(t)p + d_2(t)p^2 + \ldots]\, x = 0 \tag{8.98}$$

бесконечного порядка, где $d_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, – вещественные непрерывные функции, причем последовательность этих функций такова, что существует ее подпоследовательность $d_{i_j}(t)$, $j = 1, 2, \ldots$, $i_{j+1} > i_j$, элементы которой не принимают на I нулевых значений.

Очевидно, если при данном $a \in I$ решение этого уравнения на $F(a)$ существует, то оно определено вектором $\xi(a)$, где $\xi(t) = [x(t) \quad px(t) \quad p^2x(t) \quad \ldots]^{\mathrm{T}}$. Нас интересуют случаи, когда решение не только существует, но и является единственным. В п. 7.1.2 приведена теорема Шоу (теорема 7.1), устанавливающая достаточное условие существования и единственности решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений бесконечного порядка. По аналогии с этой теоремой можно ожидать, что достаточным условием существования и единственности решения уравнения (8.98) при заданном векторе $\xi(a)$, принадлежащем некоторому линейному пространству, на любом конечном интервале $[a, T] \in I$ является ограниченность при каждом $t \in I$ некоторой нормы $\| \mathbf{d}(t) \|$ вектора $\mathbf{d}(t) = [d_1(t) \quad d_2(t) \quad \ldots]^{\mathrm{T}}$, причем, если норма вектора $\xi(a)$ ограничена, то при каждом $t \in I$ ограничена та же норма вектора $\xi(t)$.

Пусть достаточное условие существования и единственности решения, имеющее указанный выше смысл, выяснено и выполняется. Тогда при отсутствии входных сигналов система, характеризуемая уравнением (8.98), является динамической по отношению к множеству $U_I = R_\infty^{rN}$ функций, описывающих выходной сигнал; здесь символом R_∞^{rN} обозначено линейное пространство, объединяющее все такие счетно дифференцируемые функции $f(t)$, которые при любом $t \in I$ удовлетворяют условию ограниченности нормы вектора $\mathbf{f}(t) = [f(t) \quad pf(t) \quad p^2f(t) \quad \ldots]^{\mathrm{T}}$ того же вида, что и норма вектора $\mathbf{d}(t)$. Очевидно, R_∞^{rN} – подпространство пространства R_∞^r (п. 2.1.5) – множества всех вещественных счетно дифференцируемых функций, являющегося одновременно кольцом и вещественным линейным пространством.

Следующим шагом является установление связи между асимптотическими свойствами (при $t \to \infty$) решений уравнения (8.98) и решений уравнений

$$D^{(n)}(p, t)\,x^{(n)} = 0, \quad n = i_1, i_2, \ldots, \tag{8.99}$$

где

$$D^{(n)}(p, t) = d_0(t) + d_1(t)p + \ldots + d_n(t)p^n.$$

Результатом решения этой задачи должно быть достаточное условие существования такого $n = n_0$ при котором из ограниченности или стремления к нулю при $t \to \infty$ решений уравнений (8.99) для всех $n \geqslant n_0$ следуют аналогичные свойства для решений уравнения (8.98). Частичным результатом в направлении решения аналогичной задачи для систем линейных однородных дифференциальных уравнений бесконечного порядка является теорема 7.2 (п. 7.1.2). Следует определить аналог этой теоремы в рассматриваемом случае.

Далее следует определить оценки сверху модулей решений уравнений (8.99), развивающихся из произвольного начального состояния, отнесенного к моменту $t = 0$ и характеризуемого вектором $\xi(0) \in R^n$. С этой целью можно воспользоваться методом канонических преобразований. Применив к n-му уравнению из (8.99) подстановку (2.38), преобразуем его в систему уравнений вида (2.39):

$$z^{(n)} = \xi_i^n(t)\, z_i^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{(n)}(t)\, z_j^{(n)}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8.100}$$

где $\xi_1^{(n)}(t), \ldots, \xi_n^{(n)}(t)$ – определяющие функции, а $h_{ij}^{(n)}(t)$ рассчитываются по формулам, приведенным в п.2.1.9.

Обозначив символом $\mathrm{A}^{(n)}$ матрицу коэффициентов системы (8.100), определив $\mathrm{B}^{(n)} \triangleq (\mathrm{A}^{(n)} + \mathrm{A}^{(n)*})/2$ и $\mu_n(t)$ – как максимальное характеристическое число матрицы $\mathrm{B}^{(n)}(t)$, в силу (8.10) получим

$$|x^{(n)}(t)| \leqslant \sqrt{n}\, r^{(n)}(0) \exp \int_0^t \mu_n(u)\, du, \tag{8.101}$$

где $r^{(n)}(0) = \sqrt{|z_1^{(n)}|^2 + \ldots + |z_n^{(n)}|^2}$. Рассматривая все значения n из указанной выше последовательности, получим последовательность неравенств вида (8.101). Для того, чтобы, анализируя эти неравенства, можно было бы сделать вывод об асимптотическом поведении функций $x^{(n)}(t)$ при любом сколь угодно большом n, практически необходимо так выбирать определяющие функции, чтобы функции $\xi_i^{(n+1)}(t)$ при $i \leqslant n$ рассчитывались путем введения аддитивных добавок к функциям $\xi_i^{(n)}(t)$. Это ограничивает свободу выбора определяющих функций. Подходящим алгоритмом является, например, следующий: $\xi_i^{(n+1)}(t) = \xi_i^{(n)}(t) + h_{ii}^{(n)}(t)$.

Заключительный шаг – выяснение достаточных условий ограниченности сверху и стремления к $-\infty$ при $t \to \infty$ интегралов

$$\int_0^t \mu_n(u)\, du$$

для любого достаточно большого n, выраженных в соотношениях, связывающих коэффициенты уравнения (8.98). Очевидно, при выполнении первого условия имеет место устойчивость по отношению к выходному сигналу по функционалам $F_1 = \|\xi(0)\|$ и $F_2(t) = |x(t)|$, при выполнении второго условия – асимптотическая устойчивость того же вида.

ДОПОЛНЕНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

Об уравнении вынужденных колебаний линии электропередачи

В п. 3.1.2 в примере 3.1 изложена методика вывода уравнения вынужденных колебаний для линии электропередачи, рассматриваемой как динамическая система с током нагрузки $i_{\text{н}}$ в качестве выходного сигнала. Показано, что это уравнение имеет вид

$$D(p,t)\, i_{\text{н}} = e(t), \tag{1}$$

где

$$D(p,t) = d_0(t) + d_1(t)\,p + d_2(t)\,p^2 + \ldots,$$

а коэффициенты $d_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, представлены функциональными рядами, указана структура этих рядов и отмечено, что рассматриваются случаи, когда эти ряды сходятся.

Поясним путь получения формул коэффициентов рядов. В результате перехода к пределу при $n \to \infty$ уравнение (3.5)

$$[e(t) \quad i_0]^{\text{т}} = \mathbf{A}^n [R_{\text{н}}(t)\, i_{\text{н}} \quad i_{\text{н}}]^{\text{т}}$$

принимает вид

$$[e(t) \quad i_0]^{\text{т}} = \mathbf{A}^{(\infty)} [R_{\text{н}}(t)\, i_{\text{н}} \quad i_{\text{н}}]^{\text{т}} \tag{2}$$

где $\mathbf{A}^{(\infty)} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{A}^n$. При этом элементы $a_{11}^{(\infty)}(p)$ и $a_{12}^{(\infty)}(p)$ первой строки матрицы $\mathbf{A}^{(\infty)}$ получаются в виде

$$a_{11}^{(\infty)} = 1 + \frac{m^2 c}{2!} + \frac{m^4 c^2}{4!} + \ldots,$$

$$a_{12}^{(\infty)} = am\left(1 + \frac{m^2 c}{3!} + \frac{m^4 c^2}{5!} + \ldots\right), \tag{3}$$

где $a = R + Lp$, $c = C(R + Lp)\,p$. В силу (1) и (2)

$$D(p,t) = a_{11}^{(\infty)}(p)\, R_{\text{н}}(t) + a_{12}^{(\infty)}(p).$$

Перестроив ряды (3) в порядке возрастания степеней p, преобразовав $p^k R_{\text{н}}(t)\, i_{\text{н}}$ при $k > 0$ по схеме

$$p^i f(t) g = p^{i-1} \dot f(t) g + p^{i-1} f(t) pg, \qquad i = k, \ldots, 1,$$

и снова перестроив ряды в порядке возрастания степеней p, получим

$$d_0(t) = R_{\text{н}} + Rm + \frac{C(R\dot R_{\text{н}} + L\ddot R_{\text{н}})}{2!} + \ldots$$

и в аналогичном виде $d_1(t)$, $d_2(t)$ и т.д. В случае $R_{\text{н}} = \text{const}$ ряды, представляющие $d_i(t)$, превращаются в полиномы от m, в частности,

$$d_0 = R_{\text{н}} + Rm,$$

$$d_1 = Lm + \tfrac{1}{2} CRR_{\text{н}} m^2 + \tfrac{1}{6} CR^2 m^3,$$

$$d_2 = \tfrac{1}{2} CLR_{\text{н}} m^2 + \tfrac{1}{3} CRLm^3 + \tfrac{1}{24} C^2 R^2 R_{\text{н}} m^4 + \tfrac{1}{120} C^2 R^3 m^5.$$

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$a \triangleq b$ – a равно b по определению

δ_{ij} – символ Кронекера

$f(t) = o[g(t)]$ при $t \to a$ означает, что $f(t)/g(t) \to 0$ при $t \to a$

$f(t) = O[g(t)]$ при $t \to a$ означает, что $f(t)/g(t)$ ограничено при $t \to a$

$\| \mathbf{z} \|$ – норма вектора $\mathbf{z}$

I – единичная матрица

$\operatorname{Maj} f(t)$ – верхняя оценка вещественной функции $f(t)$

$\operatorname{Min} f(t)$ – нижняя оценка вещественной функции $f(t)$

$\sup f(t)$ – точная верхняя граница вещественной функции $f(t)$

$\inf f(t)$ – точная нижняя граница вещественной функции $f(t)$

$\overline{\lim\limits_{t \to a}} f(t)$ – верхний предел функции $f(t)$ при $t \to a$

$\underline{\lim\limits_{t \to a}} f(t)$ – нижний предел функции $f(t)$ при $t \to a$

$\mathrm{P}(A)$ – вероятность события A

$\mathrm{M}X$ – математическое ожидание случайной величины X

$\mathbf{R}^n$ – вещественное векторное пространство, образованное всевозможными упорядоченными наборами из n вещественных чисел

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А б г а р я н К.А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. – М.: Наука, 1973. – 431 с.
2. А л ф е р о в С.М., М и х а й л о в Ф.А. О прохождении цепного шума через непрерывную линейную систему. – Problems of Control and Information Theory, 1977, т. 6, № 1, p. 3–16.
3. А н а п о л ь с к и й Л.Ю., И р т е г о в В.А., М а т р о с о в В.М. Способы построения функций Ляпунова. – В кн.: Итоги науки и техники. Общая механика, т. 2. – М.: ВИНИТИ, 1975. – с. 53–112.
4. А н д р о н о в А.А., В и т т А.А., Х а й к и н С.Э. Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959. – 519 с.
5. А х и е з е р Н.И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. – М.: Физматгиз, 1961. – 310 с.
6. Б а т к о в А.М. Обобщение метода формирующего фильтра на нестационарные случайные процессы. – Автоматика и телемеханика, 1959, т. 20, № 8, с. 1081–1094.
7. Б а х в а л о в Н.С. Численные методы, т. 1. – М.: Наука, 1975. – 631 с.
8. Б е л л м а н Р., К у к К. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
9. Б о л ь ш е в Л.Н., С м и р н о в Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Изд-во вычислит. центра АН СССР, 1968. – 474 с.
10. Б р о н ш т е й н И.Н., С е м е н д я е в К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1979. – 608 с.
11. Б у л г а к о в Б.В. Колебания. М.: Гостехиздат, 1954. – 891 с.
12. Б у л е к о в В.П., М и х а й л о в Ф.А. Динамические свойства и характеристики линейных систем второго порядка. – Изв. АН СССР, сер. Техническая кибернетика, 1967, № 4, с. 173–180.
13. В а л е е в К.Г. Про одне узавальнення операцийного методу Й.З. Штокало. – Доповіді АН УРСР, 1972, с. 5 – 10.
14. В а н д е н В а р д е н Б.Л. Алгебра. – М.: Наука, 1979. – 623 с.
15. В и к т о р о в Б.В. Особенности поведения систем управления с резко отличными темпами составляющих движения. – Изв. АН СССР, сер. Техническая кибернетика, 1967, № 5, с. 190–195.
16. В и к т о р о в Б.В. Расщепление систем дифференциальных уравнений динамики разнотемповых линейных систем автоматического управления. – В кн.: Многорежимные и нестационарные системы автоматического управления/Под ред. Б.Н. Петрова. М.: Машиностроение, 1978, с. 119–135.
17. В о р о б ь е в Н.Н. Теория рядов. – М.: Наука, 1979. – 367 с.
18. В о р о н о в А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. – М.: Наука, 1979. – 335 с.
19. Г а н т м а х е р Ф.Р. Теория матриц. – М.: Гостехтеориздат, 1954. – 491 с.

20. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.
21. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов, т. 1. – М.: Наука, 1971. – 664 с.
22. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1973. – 399 с.
23. Демидович Е.Д. Лекции по математической теории устойчивости.– М.: Наука, 1967. – 472 с.
24. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. – М.: Наука, 1970. – 620 с.
25. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
26. Джеймс Х., Вейсс П. Математические основы теории. – В кн.: Теория следящих систем/Под ред. Х. Джеймса, Н. Никольса, Р. Филлипса. М.: ИЛ, 1953, с. 31–94.
27. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1975. – 407 с.
28. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. – М.: ИЛ, 1956. – 605 с.
29. Дубошин Г.Н. Основы теории устойчивости. – М.: Изд-во МГУ, 1952. – 318 с.
30. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. Метод пространства состояний. – М.: Наука, 1970. – 703 с.
31. Иноземцев С.П., Михайлов Ф.А. О некоторых свойствах стохастических последовательностей, встречающихся в технических задачах. – В кн.: Теория и проектирование систем автоматического управления летательными аппаратами. Труды МАИ им. С. Орджоникидзе, вып. 189. М.: Машиностроение, 1970, с. 87–97.
32. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: ИЛ, 1976. – 828 с.
33. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Физматгиз, 1962. – 324 с.
34. Качалов Л.М. О вариационных методах решения задач теории упругости. – Прикладная математика и механика, 1959, т. 23, вып. 3, с. 26 – 42.
35. Керстан Й., Маттем К., Мекке Й. Безгранично делимые точечные процессы. – М.: Наука, 1982. – 391 с.
36. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1958. – 474 с.
37. Кокс Д., Смит У. Теория очередей. – М.: Мир, 1966. – 218 с.
38. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: Мир, 1969. – 447 с.
39. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1978. – 542 с.
40. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1973. – 831 с.
41. Коротков В.А. Возможные методы построения функций Ляпунова для энергетических систем. – В кн.: Труды II семинара-симпозиума по применению метода функций Ляпунова. М.: Наука, 1970, с. 73–95.
42. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
43. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 475 с.
44. Кузнецов В.П., Марков А.В. Устойчивость процессов в нестационарных непрерывных системах. – В кн.: Автоматика и вычисли-

тельная техника, вып. 7. Республ. межвед. сб. Минск: Вышейшая школа, 1977, с. 49–55.
45. Куликов Н.К., Тимохович А.Е. Методы нахождения импульсной переходной функции линейной динамической системы с переменными параметрами. – В кн.: Кибернетика и диагностика, вып. 2. Рига: Зинатне, 1968, с. 175–189.
46. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1965. – 716 с.
47. Ладис Н.Н. Линейное дифференциальное уравнение обыкновенное. В кн.: Математическая энциклопедия, т. 3. М.: Советская энциклопедия, 1982, с. 339–343.
48. Летов А.М. Устойчивость линейных регулируемых систем. – М.: Физматгиз, 1963. – 483 с.
49. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений.– М.: ИЛ, 1961. – 385 с.
50. Лэнинг Дж. Х., Бэттин Р.Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. – М.: ИЛ, 1958. – 387 с.
51. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 471 с.
52. Мальчик Ю.Н. О левом преобразовании Лапласа и его свойствах.– В кн.: Автоматическое управление. Межвуз. сб. научных трудов. М.: МИРЭА, 1977, с. 3 – 14.
53. Мальчик Ю.Н. Некоторые признаки интегрируемости в квадратурах уравнения свободных колебаний нестационарной линейной системы. – В кн.: Теория автоматического управления и регулирования. Межвуз. сб. научных трудов. М.: МИРЭА, 1978, с. 54–63.
54. Мальчиков С.В. О синтезе линейных систем автоматического управления с переменными параметрами. – Автоматика и телемеханика, 1959, т. 20, № 12, с. 1583–1596.
55. Мантуров О.В., Солнцев Ю.К., Соркин Ю.И. и др. Толковый словарь математических терминов. – М.: Просвещение, 1965. – 539 с.
56. Маханько А.В. Об одном приближенном способе нахождения корней обобщенного характеристического уравнения нестационарной линейной системы. – В кн.: Труды КАИ, вып. 146. Казань: КАИ, 1972, с. 65–69.
57. Маханько А.В. О понижении порядка линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. – В кн.: Труды КАИ, вып. 187. Казань: КАИ, 1975, с. 39–42.
58. Месерович М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы. – М.: Мир, 1978. – 311 с.
59. Михайлов Ф.А. О выборе параметров регулятора, работающего в системе автоматической стабилизации. – В кн.: Труды МАИ им. С. Орджоникидзе, вып. 41. – М.: Оборонгиз, 1955.
60. Михайлов Ф.А. О предельных значениях квадратичных оценок качества и их применении к выбору параметров систем автоматического регулирования. – В кн.: Труды второго Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1955, с. 425–441.
61. Михайлов Ф.А. Канонические преобразования уравнений свободных колебаний линейных систем с переменными параметрами и их применение к анализу колебаний. – В кн.: Труды МАИ им. С. Орджоникидзе, вып. 121. М.: Оборонгиз, 1960, с. 31–43.

62. Михайлов Ф.А. Свободные колебания линейных систем с переменными параметрами. Труды МАИ им. С. Орджоникидзе, вып. 135. М.: Оборонгиз, 1961. – 270 с.
63. Михайлов Ф.А. Об устойчивости колебаний линейных систем с переменными параметрами. – В кн.: Труды МАИ им. С. Орджоникидзе, вып. 139. М.: Оборонгиз, 1961, с. 39–70.
64. Михайлов Ф.А. Об одном методе анализа устойчивости колебаний линейных систем с переменными параметрами. – Известия АН СССР, сер. Техническая кибернетика, 1963, № 4, с. 171–179.
65. Михайлов Ф.А. Метод анализа свободных колебаний нестационарных линейных систем, основанный на канонических преобразованиях уравнения свободных колебаний. – В кн.: Теория и проектирование систем автоматического управления летательными аппаратами. Труды МАИ им. С. Орджоникидзе, вып. 189. М.: Машиностроение, 1970, с. 5 – 32.
66. Михайлов Ф.А. Новые варианты систем дифференциальных уравнений для коэффициентов корневого уравнения нестационарной линейной системы второго порядка. – В кн.: Вопросы исследования и проектирования систем управления. IV. Темат. сб. научных трудов МАИ им. С. Орджоникидзе, вып. 367. М.: МАИ, 1976, с. 5 – 12.
67. Михайлов Ф.А. Анализ и синтез нестационарных линейных систем.– М.: Машиностроение, 1977. – 296 с.
68. Михайлов Ф.А. К теории нестационарных линейных систем: расширение понятия корня обобщенного характеристического уравнения.– В кн.: Электронные системы управления и контроля летательных аппаратов. Межвуз. научный сб., № 3. Уфа: УфАИ, 1978, с. 16–26.
69. Михайлов Ф.А. Об условиях приводимости уравнения свободных колебаний нестационарной линейной системы к уравнению с постоянными коэффициентами. – В кн.: Электронные системы управления и контроля летательных аппаратов. Межвуз. научный сб., № 4. Уфа: УфАИ, 1979.
70. Михайлов Ф.А. Новое обобщение понятия передаточной функции на нестационарные системы: передаточный функционал. – В кн.: Вопросы анализа систем автоматического управления и их модулей. Темат. сб. научных трудов МАИ им. С. Орджоникидзе. М.: МАИ, 1983, с. 3 – 4.
71. Михайлов Ф.А., Булеков В.П. Системы с дискретно-перестраиваемыми параметрами. – В кн.: Задачи динамики управления летательных аппаратов. Труды МАИ им. С. Орджоникидзе, вып. 240. М.: МАИ, 1972.
72. Михайлов Ф.А., Орешников В.Г. Об одном классе достаточных условий асимптотической устойчивости периодических движений. – В кн.: Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления. М.: Наука, 1975.
73. Михайлов Ф.А., Саликова И.М. Формальные решения уравнения свободных колебаний непрерывной нестационарной линейной системы одного класса. – В кн.: Многорежимные и нестационарные системы автоматического управления/Под ред. Б.Н. Петрова. М.: Машиностроение, 1978, с. 172–181.
74. Михайлов Ф.А., Теряев Е.Д., Булеков В.П. и др. Динамика непрерывных линейных систем с детерминированными и случайными параметрами. – М.: Наука, 1971. – 561 с.
75. Михайлов Ф.А., Тыхевич О.Ф., Хаджинов М.К. Вычисление характеристик структурных соединений линейных нестационарных

систем. – В кн.: Задачи динамики управления летательных аппаратов. Труды МАИ им. С. Орджоникидзе, вып. 240. М.: МАИ, 1972, с. 116–122.
76. Михайлов Ф.А., Тыхевич О.Ф., Хаджинов М.К. Применение структурных преобразований к анализу нестационарных линейных систем. – Problems of Control and Information Theory, 1975, v. 4, № 1, p. 71–93.
77. Михайлов Ф.А., Ульященко А.Е. Приближенное интегрирование уравнений процесса линейной системы с распределенными параметрами. – В кн.: Многорежимные и нестационарные системы автоматического управления/Под ред. Б.Н. Петрова. М.: Машиностроение, 1978, с. 181–192.
78. Михайлов Ф.А., Ульященко А.Е. Приближенный метод расчета колебаний линейных систем с распределенными параметрами. – В кн.: Теория информационных систем и систем управления с распределенными параметрами. Материалы Всесоюзного симпозиума ТИССУРП–III. М.: Наука, 1978, с. 3 – 17.
79. Михайлов Ф.А., Хаджинов М.К. Применение обобщенного характеристического уравнения к расчету процессов в нестационарных линейных системах. – В кн.: Задачи динамики управления летательных аппаратов. Труды МАИ им. С. Орджоникидзе, вып. 240. М.: МАИ, 1972, с. 96 – 105.
80. Михайлов Ф.А., Червяков В.П. Приближенные формулы решений уравнения свободных колебаний непрерывной нестационарной линейной системы. – В кн.: Многорежимные и нестационарные системы автоматического управления/Под ред. Б.Н. Петрова. М.: Машиностроение, 1978, с. 152–171.
81. Мовчан А.А. Устойчивость процессов по двум метрикам. – Прикладная математика и механика, 1960, т. 24, с. 983–1001.
82. Мышкис А.Д. Дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом. – В кн.: Математическая энциклопедия, т. 2. М.: Советская энциклопедия, 1979, с. 294–298.
83. Персидский К.П. К теории устойчивости решений дифференциальных уравнений. Докторская диссертация. Краткое содержание. – Успехи математических наук, 1946, I. – Вып. 5 – 6, с. 250–255.
84. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969. – 384 с.
85. Постников И.М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1979. – 312 с.
86. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. – М.: Физматгиз, 1960. – 883 с.
87. Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием. – Прикладная математика и механика, 1956, т. 20, № 4, с. 500–512.
88. Римский-Корсаков А.В. Вычисление энергии колебательной системы с помощью операционного исчисления. – Журнал технической физики, 1938, т. 8, № 2.
89. Розан Л.А. Основы метода конечных элементов в теории упругости.– Л.: Изд-во Ленингр. политехн. ин-та, 1972. – 311 с.
90. Рудницкий Б.Е. Определение передаточных функций некоторых систем с переменными параметрами. – Автоматика и телемеханика, 1960, т. 21, № 12.
91. Румянцев В.В. Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения. – В кн.: Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука, 1968, с. 7 – 66.

92. Сиразетдинов Т.К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. – Казань: Изд-во КАИ, 1971. – 180 с.
93. Смирнов А.Д. Таблицы функций Эйри и специальных вырожденных гипергеометрических функций. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 260 с.
94. Солодов А.В. Структурные преобразования линейных систем с переменными параметрами. – Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 5, с. 577 – 588.
95. Солодов А.В. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами. – М.: Физматгиз, 1962. – 324 с.
96. Солодов А.В., Петров Ф.С. Линейные автоматические системы с переменными параметрами. – М.: Наука, 1971. – 620 с.
97. Солодовников В.В. Преобразования Фурье и Лапласа и их применение к анализу переходных процессов. – В кн.: Основы автоматического регулирования. Теория/Под ред. В.В. Солодовникова. М.: Машгиз, 1954, с. 100–136.
98. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. – М.: Наука, 1974. – 329 с.
99. Стир Е.Б. Формирующие фильтры для стохастических процессов. – В кн.: Современная теория систем управления/Под ред. К.Т. Леондеса. М.: Наука, 1970, с. 121–155.
100. Сушкевич А.К. Основы высшей алгебры. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1941. – 460 с.
101. Титчмарш Е. Теория функций. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1951.– 560 с.
102. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966.
103. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 495 с.
104. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. – М.: Физматгиз, 1969. – 800 с.
105. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах. – М.: Мир, 1966. – 230 с.
106. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1964. – 477 с.
107. Четаев Н.Г. Об одной мысли Пуанкаре. – В кн.: Сб. научных трудов Казанского авиационного института, № 3. Казань: Изд-во КАИ, 1935.
108. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. – М.: Гостехтеориздат, 1955.– 207 с.
109. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. чч. 1 – 2. – М.: Наука, 1969. 528 с.
110. Штокало И.З. Обобщение основной формулы символического метода на случай линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. – Доклады АН СССР, 1945, т. 42, № 1, с. 9 – 10.
111. Штокало И.З. Операционные методы и их развитие в теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.– Киев.: Изд-во АН УССР, 1961. 128 с.
112. Эйкгофф П. Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975. – 683 с.
113. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. – М.: Мир, 1971. 296 с.
114. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1974. 488 с.
115. Янушевский Р.Т. Теория линейных оптимальных многосвязных систем управления. – М.: Наука, 1973. 464 с.
116. D'Angelo H. Linear Time–Varying Systems: Analysis and Synthesis. Boston: Allyn and Bacon, 1970. – 346 p.

117. D'Angelo H., Higgins T. Determination of the impulsive response of two classes of linear time–varying systems. – IEEE Intern. Convent. Rec., part 7, 1965, p. 188 – 193.
118. Bell S.S., Brown D.P. New properties of 2nd and 3rd order systems with time-varying parameters. – Proc. 13 Midwest Symp. Circuit Theory. – New York, 1970.
119. Bernstein V. Leçons sur le progrès recent de la thèorie des series de Dirichlet professées au college de France. – Paris, 1933. – 320 p.
120. Blanc Ch. Sur les équation différentielles linéaires a coefficients lentement variable. – Bull. technique de la Suisse romande, 1948, v. 74, № 15, p. 182 – 189.
121. Brillouin L. The BWK approximations and Hill's equations. II. – Quart. Appl. Math., 1950, v. 7, №4, p. 363 – 381.
122. Davis H.T. The Theory of Linear Operatirs from the Standpoint of Differential Equation of Infinite Order. – Bloomington, 1936.
123. Davison E.G. Stability of periodic linear systems. – Internation. Journ. Control, 1968, v. 7, № 3, p. 377–381.
124. Floquet M.G. Sur les équations differéntielles linéaires a coefficients périodiques. – Annales scientifique de l'Ecole Superieure, 1883, v. 12, deuzieme série, p. 47 – 88.
125. Gurel A., Lapidus L. A guide to the generation of Liapunov Functions. – Ind. and Eng. Chem., 1969, v. 61, № 3, p. 30 – 41.
126. Hanner O. Deterministic and nondetrministic stationary random processes. – Ark. Math. Journ., 1949, v. 1, p. 161 – 177.
127. Kamen E. New results in realization theory for linear time-varying analytic systems. – IEEE Transactions on Automatic Control, 1979, AC–24, №6, p. 866 – 877.
128. Karhunen E. Über die Struktur stationärer zufalliger Funktionen. – Ark. Math. Journ., 1949, v. 1, 141 – 160.
129. Kozin F. On almost sure stability of linear systems with random coefficients. – Journ. Math. and Physics, 1963, v. 42, p. 59 – 67.
130. Kozin F. A survey of stability of stochastic systems. – Automatica, 1965, v. 5, № 1, p. 95 – 112.
131. La Salle J., Lefschets S. Stability by Liapunov's Direct Method with Applications. – New York; London: Academic Press, 1961.
132. Loève M. Probability Theory. – 3rd ed. – New York: Princeton, 1963.
133. McFadden J.A. On the lengths of intervals in a stationary point process. – Journ Royal Statistical Society, 1962, v. 24, № 2.
134. Mikhailov F.A. The methods of time-varying systems analysis based on new trends in theory of this systems. – Proc. of Fifth IFAC Congress, June 12 – 17, Paris. – Pittsburgh, 1972, p. 35.3 1–9.
135. Mikhailov F.A. The method of generalized characteristic equation in the theory of linear time-varying systems. – Problems of Control and Information Theory, 1976, v. 5, № 2, p. 149 – 165.
136. Mikhailov F.A. On Zadeh's block–diagram algebra. – Automatica, 1976, v. 12, p. 103 – 105.
137. Saaty Td. L. Modern Nonlinear Equations. – New York; St. Louis; Toronto; London; San Francisco; Sydney, 1967.
138. Shaw L. Solutions of infinite–matrix differential equations. – Journ. Math. Analysis and Applications, 1973, v. 41, p. 373–388.
139. Slutsky E. Sur les fonctions aléatoires presque périodiques et sur la décomposition des fonctions, aleatoires stationnaires en composantes. – Actualités scient. et ind., v. 738, 5 éme part., 1938, p. 38–57.

140. T i t c h m a r s h E.C. The zeros of certain integral functions. – Proc. London Math. Society, 1926, v. 25, p. 283 – 302.
141. U n b e h a u e n R. Über die Analyse von Regelkreisen mit sich periodish ändernden Parametern. – Regelungstechnik, Heft 7, S. 318 – 325.
142. W a ż e w s k i T. Sur la limitation des intégrales des systèmes d'equations différentielles linéaires ordinaires. – Studia Mathematica, 1948, v. 10, p. 48 – 59.
143. W e n t z e l G., Eine Verallgemeinerung der Quantenbediengungen fur die Zwecke der Wellemechanik. – Zeitschrift rur Physik, 1926, v. 38, p. 518 – 529.
144. W i e n e r N. Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. – New York: John Wiley & Sons, 1949. – 163 p.
145. Z a d e h L.A. Frequency analysis of variable networks. – Proc. IRE, 1950, v. 38, № 3, p. 291 – 299.
146. Z a d e h L.A. Circuit analysis of linear varying-parameter networks. – Journ. Applied Physics, 1950, v. 21, № 6, p. 1171 – 1177.
147. Z a d e h L.A. On stability of linear varying-parameter systems. – Journ. Applied Physics, 1951, v. 22, № 4, p. 402 – 405.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

3 р. 20 к.