

П АЛЬФОРС



# ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЁБИУСА В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ



**Ordway Professorship Lectures  
in Mathematics**

**MÖBIUS TRANSFORMATIONS  
IN SEVERAL DIMENSIONS**

**LARS V. AHLFORS**

School of Mathematics  
University of Minnesota 1981

**СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА**

**ВВОДНЫЕ КУРСЫ**

Л. АЛЬФОРС

# **ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЁБИУСА В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

Перевод с английского  
Н. А. ГУСЕВСКОГО

под редакцией  
С. Л. КРУШКАЛЯ

МОСКВА «МИР»  
1986

ББК 22.16

А 59

УДК 517.5

**Альфурс Л.**

**А 59** Преобразования Мёбиуса в многомерном пространстве: Пер. с англ. — М.: Мир, 1986. — 112 с., ил.

Книга написана крупным американским специалистом по математическому анализу и содержит краткое и ясное изложение преобразования Мёбиуса в многомерном пространстве. Много внимания уделено применению современных методов топологии, эргодической теории, теории отображений и новым результатам.

Для специалистов по математическому анализу, топологии и геометрии, для преподавателей и студентов математических специальностей.

А  $\frac{1702050000-130}{041(01)-86}$  17-86, ч. 1

ББК 22.16  
517.2

*Редакция литературы по математическим наукам*

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Мёбиусовы преобразования — это композиции конечного числа инверсий относительно сфер в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  (точнее, его пополнении  $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ ). Они занимают особое место в математике. На комплексной плоскости это простейшие конформные отображения, а в размерности  $n > 2$  все конформные отображения областей в  $\mathbb{R}^n$  по теореме Лиувилля являются мёбиусовыми. Группа всех мёбиусовых преобразований пространства  $\overline{\mathbb{R}^n}$  конечномерна, а ее подгруппа, составленная из отображений, сохраняющих ориентацию, изоморфна  $SO(n+1, 1)$ .

Роль мёбиусовых преобразований обусловлена, во-первых, их важным значением для теории униформизации и, во-вторых, тем, что они служат движениями в модели Пуанкаре пространства Лобачевского, реализуемой на шаре  $B^n$  или, что равносильно, на полупространстве  $\mathbb{R}_+^n$ . Можно добавить, что всякое односвязное полное риманово многообразие постоянной отрицательной кривизны изометрично шару  $B^n$  с гиперболической метрикой Пуанкаре — Лобачевского. На этом пути и возникает исключительно содержательная теория с разнообразными приложениями к дифференциальной геометрии, теории гармонических функций на симметрических пространствах, общей теории гиперболических многообразий, теории разрывных групп, эргодической теории и другим областям математики.

Эти вопросы и составляют содержание новой книги выдающегося современного аналитика Ларса Альфорса, основанной на его курсе лекций в Миннесотском университете в 1980 г. Несмотря на небольшой объем, книга не только хорошо вводит читателя в указанные области, но и подводит его к современному состоянию и самым последним исследованиям в теории разрывных групп и теории пространственных отображений.

Разумеется, многие важные разделы, интенсивно исследуемые в последние годы, остались за пределами книги. Это, например, вопросы жесткости деформаций пространственной гиперболической структуры, связанные с известной теоремой Мостова и смежными результатами; проблема существования конформной структуры на многообразиях; проблема описания многообразий, допускающих введение гиперболической структуры; теория многообразий с особенностями, примерами которых служат факторпространства  $B^n/\Gamma$ , где  $\Gamma$  — разрывные группы мёбиусовых автоморфизмов с кручением, и др.

Остановимся еще на последней главе книги. В комплексном анализе и его приложениях, как известно, большую роль играет  $\bar{\partial}$ -проблема, связанная с решением переопределенных систем дифференциальных уравнений вида  $\bar{\partial}f = g$ . Наиболее простой случай — одного комплексного переменного, когда  $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$  и функция  $f$  восстанавливается по  $g$  с помощью хорошо известной формулы Помпейю. Целью автора является развитие соответствующей теории для  $n$ -мерного вещественного пространства (тогда обобщением оператора  $\bar{\partial}$  служит некоторая  $n \times n$ -матрица  $S$  с нулевым следом, выражаемая через матрицу Якоби) и ее приложений в двух тесно связанных направлениях: 1) к пространственным квазиконформным деформациям и 2) к вещественным автоморфным формам-тензорам и воспроизводящим их гиперболически инвариантным интегральным операторам.

Деформации порождают квазиконформные потоки. Такой подход к квазиконформным отображениям оказался весьма полезным, например, в вопросах продолжения квазиконформных отображений в пространство большей размерности с сохранением нужных свойств. Можно ожидать также, что применение техники деформаций и матричного подхода позволит продвинуться и в получении теорем существования для пространственных квазиконформных отображений, рассматривая их как решения соответствующих (переопределенных) систем дифференциальных уравнений.

Следует отметить, что вопросы, связанные с теорией квазиконформных деформаций и ее приложениями, в иных аспектах были далеко продвинуты также в работах Ю. Г. Решетняка и его учеников.

Одна из центральных проблем теории форм на гиперболических многообразиях — получение теорем конечности, являющихся хотя бы ослабленными аналогами классических теорем о конечной размерности пространств мероморфных форм на компактных римановых поверхностях. Такого типа результаты еще не получены.

Лекции Альфорса хорошо отражают присущие ему глубину исследований и исключительную ясность изложения. Мы старались сохранить стиль автора и по возможности избегали разъясняющих примечаний. В текст перевода внесены изменения и исправления, любезно присланные Л. Альфорсом. Книга доступна даже студентам младших курсов, однако чтение ее требует вдумчивого и углубленного отношения. Я не сомневаюсь, что читатели найдут в ней много новых идей и материал для дальнейших исследований.

*С. Л. Крушкаль*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга представляет собой записи лекций, прочитанных мною в Миннесотском университете осенью 1980 г. в качестве приглашенного профессора.

Часть материала связана с аналогичным курсом, который я раньше читал в Мичиганском университете, а также с небольшими курсами в университетах Вены и Граца. Настоящие записи составлены более подробно, но все еще не имеют законченного вида.

В моем достаточно элементарном курсе я стремился ознакомить слушателей с геометрическими и аналитическими свойствами мёбиусовых отображений в  $n$ -мерном вещественном пространстве. Он может служить введением в теорию дискретных групп неевклидовых движений гиперболического пространства, построенным главным образом на основе свойств решений гиперболически инвариантного уравнения Лапласа и квазиконформных деформаций.

Я хотел бы поблагодарить за приглашение Миннесотский университет и декана математического факультета, а особенно инициатора визита — моего друга и бывшего моего студента Элберта Мардена. Я благодарен также многим преподавателям факультета и студентам, которые имели терпение сидеть на моих лекциях до самого конца.

Я очень обязан доктору Хельмуту Майеру, который помог мне издать эти заметки и просмотрел машинописный текст. Хочется выразить свои симпатии и машинистке, хотя она мне не известна.

*Ларс В. Альфорс*

# I. КЛАССИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

## 1.1. Дробно-линейные отображения

$$\gamma(z) = (az + b)/(cz + d), \quad (1)$$

где  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  и  $ad - bc \neq 0$ , известны каждому. Они действуют на расширенной комплексной плоскости  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , которую мы отождествляем с одномерным проективным пространством  $P_1(\mathbb{C})$ .

В терминах однородных координат можно выразить  $w = \gamma(z)$  матричным уравнением

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Преимущество такой формы записи состоит в том, что группа Мёбиуса — группа всех отображений вида (1) — может быть представлена как матричная группа посредством либо *общей линейной группы*  $GL_2(\mathbb{C})$ , либо унимодулярной, или *специальной, линейной группы*  $SL_2(\mathbb{C})$ . Точнее, мёбиусова группа изоморфна группе  $GL_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^*$ , где  $\mathbb{C}^*$  — мультипликативная группа отличных от нуля комплексных чисел, и группе

$$PSL_2(\mathbb{C}) = SL_2(\mathbb{C})/\{\pm I\},$$

где  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Однако мы предпочитаем обозначать группу Мёбиуса символом  $M_2(\mathbb{C})$  вместо  $PSL_2(\mathbb{C})$  по той простой причине, что отождествление ее с  $PSL_2(\mathbb{C})$  не переносится на более высокие размерности.

Для упрощения мы часто будем писать  $\gamma z$  вместо  $\gamma(z)$  и понимать  $\gamma$  как матрицу, нормированную условием  $ad - bc = 1$ . При этом, конечно, имеется в виду, что  $\gamma$  и  $-\gamma$  представляют одно и то же мёбиусово отображение. Полезно также запомнить формулу для обратного элемента в  $SL_2$ :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (3)$$

1.2. На группе  $GL_2(\mathbb{C})$  имеется естественная топология, поэтому есть топология и на группах  $SL_2(\mathbb{C})$  и  $M_2(\mathbb{C})$ . Груп-

па  $GL_2(\mathbb{C})$  связна, так как пространство всех комплексных  $2 \times 2$ -матриц имеет действительную размерность 8, а размерность пространства вырожденных матриц — только 6. Отображение

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left\{ \begin{array}{cc} \frac{a}{ad-bc} & \frac{b}{ad-bc} \\ c & d \end{array} \right\}$$

группы  $GL_2(\mathbb{C})$  на  $SL_2(\mathbb{C})$  показывает, что  $SL_2(\mathbb{C})$  также связна. Можно рассматривать  $SL_2(\mathbb{C})$  как двулистное накрытие  $M_2(\mathbb{C})$ .

Соответствующие подгруппы с действительными коэффициентами обозначаются через  $GL_2(\mathbb{R})$ ,  $SL_2(\mathbb{R})$  и  $M_2(\mathbb{R})$ . Имеется еще подгруппа  $GL_2^+(\mathbb{R})$  матриц из  $GL_2(\mathbb{R})$  с положительным определителем. Группы  $GL_2^+(\mathbb{R})$  и  $SL_2(\mathbb{R})$  связны, а  $GL_2(\mathbb{R})$  не связна, так как невозможно непрерывно перейти от матрицы с положительным определителем к матрице с отрицательным определителем.

Каждый элемент  $\gamma \in M_2(\mathbb{R})$  отображает действительную ось, а также верхнюю и нижнюю полуплоскости на себя. Это очевидно из равенства

$$\gamma z - \overline{\gamma z} = (z - \bar{z})/|cz + d|^2. \quad (4)$$

1.3. Непосредственным вычислением из (1) получаем

$$\gamma(z) - \gamma(z') = \frac{(ad - bc)(z - z')}{(cz + d)(cz' + d)}, \quad (5)$$

откуда в пределе при  $z' \rightarrow z$  имеем

$$\gamma'(z) = (ad - bc)/(cz + d)^2. \quad (6)$$

Отсюда, в частности, следует, что отображение  $z \mapsto \gamma z$  конформно. Перепишем формулу (5) в виде

$$\gamma(z) - \gamma(z') = \gamma'(z)^{1/2} \gamma'(z')^{1/2} (z - z'), \quad (7)$$

считая, что  $\gamma'(z)^{1/2} = \sqrt{ad - bc}/(cz + d)$  и значение квадратного корня фиксировано.

1.4. Двойное отношение упорядоченной четверки точек  $z, z', \zeta, \zeta'$  определяется формулой

$$(z, z', \zeta, \zeta') = \frac{z - \zeta}{z - \zeta'} : \frac{z' - \zeta}{z' - \zeta'}, \quad (8)$$

когда она имеет смысл, т. е. когда среди этих точек не более двух совпадающих. Из (7) следует, что

$$(\gamma z, \gamma z', \gamma \zeta, \gamma \zeta') = (z, z', \zeta, \zeta'), \quad (9)$$

поскольку все производные взаимно сокращаются. Другими словами, двойное отношение инвариантно относительно всех мёбиусовых преобразований.

Двойное отношение действительно тогда и только тогда, когда все четыре точки лежат на окружности или прямой. Отметим еще, что наше определение дает

$$(z, 1, 0, \infty) = z.$$

1.5. Из (6) получается соотношение

$$\gamma''(z)/\gamma'(z) = -2c/(cz + d), \quad (10)$$

и потому если  $c \neq 0$ , то

$$\frac{\gamma'(z)}{\gamma''(z)} = -\frac{1}{2} \left( z + \frac{d}{c} \right). \quad (11)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\gamma'(z)}{\gamma''(z)} - \frac{\gamma'(\xi)}{\gamma''(\xi)} = -\frac{1}{2} (z - \xi), \quad (12)$$

и в пределе при  $\xi \rightarrow z$  имеем

$$D \frac{\gamma'(z)}{\gamma''(z)} = -\frac{1}{2}. \quad (13)$$

Это эквивалентно обращению в нуль производной Шварца:

$$\frac{\gamma'''}{\gamma''} - \frac{3}{2} \left( \frac{\gamma''}{\gamma'} \right)^2 = \left( \frac{\gamma''}{\gamma'} \right)' - \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma''}{\gamma'} \right)^2 = 0. \quad (14)$$

Существует тесная связь между двойным отношением и шварцианом

$$S_f = \frac{f'''}{f''} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2 \quad (15)$$

произвольной мероморфной функции  $f$ . Тем, кто любит вычисления, я предлагаю доказать формулу

$$\begin{aligned} (f(z + ta), f(z + tb), f(z + tc), f(z + td)) = \\ = (a, b, c, d) \left( 1 + \frac{t^2}{6} (a - b)(c - d) S_f(z) \right) + O(t^3). \end{aligned} \quad (16)$$

1.6. *Верхняя полуплоскость.* Вернемся к действию группы  $SL_2(\mathbb{R})$  на верхней полуплоскости  $H^2 = \{z = x + iy; y > 0\}$ . Будем пользоваться обозначением  $G = SL_2(\mathbb{R})$  (или  $M_2(\mathbb{R})$ ).

Обозначим через  $K$  группу изотропии точки  $i$ . Из равенства  $(ai + b)/(ci + d) = i$  получаем, что  $a = d$ ,  $b = -c$ ,  $a^2 + b^2 = 1$ . Следовательно, каждый элемент  $g \in K$  имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Иначе говоря,  $K \cong SO(2)$ . Точнее,  $\theta$  и  $\theta + \pi$  определяют различные элементы группы  $K$ , но один и тот же элемент группы  $M_2(\mathbb{R})$ .

Пусть  $A$  — группа гомотетий  $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$ ,  $t > 0$ , и  $N$  — группа переносов  $\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Группа  $NA$  есть группа подобий; кроме того, она является группой изотропии точки  $\infty$ . Из равенства

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} (i) = u + t^2 i$$

видно, что  $NA$  действует транзитивно на  $H^2$ . Следовательно,  $G = NAK$ ; это есть разложение Ивасава группы  $G$ . Каждый элемент  $g \in G$  имеет единственное разложение  $g = nak$ . Более подробно: если  $g(i) = x + iy$ ,  $y > 0$ , то  $g$  имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Каждая функция  $f$ , определенная на  $H^2$ , может быть поднята до функции  $\underline{f}$  на группе  $G$ , если положить  $\underline{f}(g) = f(gi)$ . Обратно, функция, определенная на группе  $G$ , становится функцией на  $H^2$ , если она постоянна на левых классах смежности  $gK$ . Полуплоскость  $H^2$  отождествляется с фактором  $G/K$  (многие авторы предпочитают обозначение  $K \setminus G$ ).

1.7. Окружности, ортогональные действительной оси, в том числе вертикальные прямые, отображаются друг на друга всеми элементами  $g \in G$ . Они служат прямыми в модели Пуанкаре гиперболической, или неевклидовой, геометрии. Любые две различные точки  $z_1, z_2 \in H^2$  лежат на единственной неевклидовой прямой (рис. 1).

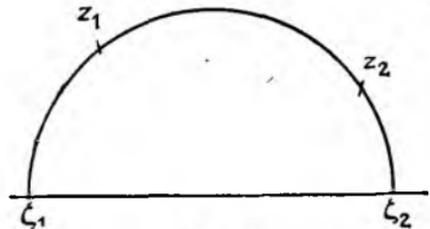


Рис. 1

Расстояние в  $H^2$  можно определить формулой

$$\delta(z_1, z_2) = \left| \frac{z_1 - z_2}{z_1 - \bar{z}_2} \right|; \quad (19)$$

оно инвариантно относительно группы  $M_2(\mathbb{R})$ ; инвариантность видна из соотношения

$$\delta(z_1, z_2)^2 = (z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2). \quad (20)$$

Переходя к пределу при  $z_2 \rightarrow z_1$ , получаем *инфинитезимальный инвариант*

$$ds = |dz|/y \quad (21)$$

(мы опустили множитель 2). Это определяет *метрику Пуанкаре* на  $H^2$  и приводит к новой функции расстояния  $d(z_1, z_2)$ , определяемой формулой

$$d(z_1, z_2) = \min \int_{z_1}^{z_2} \frac{|dz|}{y}, \quad (22)$$

где минимум берется по всем путям, соединяющим точки  $z_1$  и  $z_2$ . Кратчайшие кривые — это *геодезические*. Для нахождения геодезической, проходящей через  $z_1$  и  $z_2$ , воспользуемся элементом  $g \in G$ , который переводит  $z_1, z_2$  в  $iy_1, iy_2$ . Легко видеть, что наименьшую длину имеет вертикальный отрезок, соединяющий  $iy_1$  с  $iy_2$ , и, таким образом,

$$d(iy_1, iy_2) = |\log(y_2/y_1)|. \quad (23)$$

Отсюда следует, что геодезическими являются дуги окружностей, ортогональных действительной оси.

Расстояния  $\delta$  и  $d$  связаны формулой

$$\delta(iy_1, iy_2) = \frac{y_2 - y_1}{y_2 + y_1} = \frac{e^{d(iy_1, iy_2)} - 1}{e^{d(iy_1, iy_2)} + 1},$$

из которой выводится, что

$$\delta = \text{th}(d/2). \quad (24)$$

Функция расстояния  $d$  аддитивна на неевклидовых прямых, т. е.  $d(z_1, z_3) = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$ , если  $z_2$  лежит на прямой между  $z_1$  и  $z_3$ .

Формулу (24) можно использовать для проверки того, что  $\delta$  является функцией расстояния; действительно, если  $d \leq d_1 + d_2$ , то

$$\delta = \text{th}(d/2) \leq \frac{\text{th}(d_1/2) + \text{th}(d_2/2)}{1 + \text{th}(d_1/2)\text{th}(d_2/2)} \leq \delta_1 + \delta_2.$$

1.8. Имеется другой способ вычисления функции  $d(z_1, z_2)$ , который доказывает попутно и ее аддитивность. Вернемся к рис. 1 и вычислим  $(z_2, z_1, \xi_1, \xi_2)$ . Если нарисованная окружность отображается на мнимую ось, то двойное отношение переходит в

$$(iy_2, iy_1, 0, \infty) = y_2/y_1.$$

Этим доказывается равенство

$$d(z_1, z_2) = \log(z_2, z_1, \xi_1, \xi_2), \quad (25)$$

В такой форме  $d(z_1, z_2)$  можно рассматривать как направленное расстояние, которое становится отрицательным при перестановке  $z_1$  и  $z_2$ . Аддитивность на геодезических сразу следует из того, что

$$(z_2, z_1, \xi_1, \xi_2) (z_3, z_2, \xi_1, \xi_2) = (z_3, z_1, \xi_1, \xi_2).$$

1.9. Длина дуги выражается интегралом  $\int_c \frac{|dz|}{y}$ , а площадь измеримого множества  $E$  — интегралом  $\int_E \frac{dx dy}{y^2}$ .

В качестве полезного упражнения вычислим площадь неевклидова многоугольника  $P$  (рис. 2).

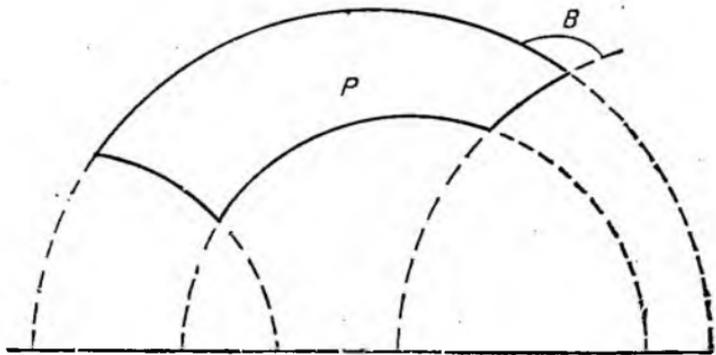


Рис. 2

По формуле Стокса площадь  $A$  многоугольника  $P$  равна

$$A = \int_P \frac{dx \wedge dy}{y^2} = \int_P d\left(\frac{1}{y}\right) \wedge dx = \int_{\partial P} \frac{dx}{y}.$$

Каждая сторона  $P$  является дугой окружности  $z - a = re^{i\theta}$ ; кроме того,  $dx/y = -d\theta$ . Интеграл  $\int d\theta$  служит мерой изменения угла касательной. Для односвязного многоугольника полное изменение, включая скачки в вершинах, равно  $2\pi$ . Если внешние углы многоугольника  $P$  равны  $\beta_\nu$ , а внутренние  $\alpha_\nu$ , то

$$A = \sum \beta_\nu - 2\pi = (n - 2)\pi - \sum \alpha_\nu.$$

1.10. Нетрудно перейти от верхней полуплоскости  $H^2$  к единичному кругу  $B_2 = \{\xi \in \mathbb{C}: |\xi| < 1\}$ . Мы хотим выбрать каноническое мёбиусово отображение  $H^2 \rightarrow B^2$ . Например, хорошим отображением будет то, при котором точки  $z = 0$ ,

$i, \infty$  переходят соответственно в  $\xi = -i, 0, i$ . Тогда

$$\xi = i \frac{z-i}{z+i}, \quad z = -i \frac{\xi+i}{\xi-i}. \quad (26)$$

Введем обозначение  $\xi^* = 1/\bar{\xi} = \xi/|\xi|^2$  для точки, симметричной  $\xi$  относительно единичной окружности. По принципу симметрии  $z$  и  $\bar{z}$  переходят в  $\xi$  и  $\xi^*$ , а в силу инвариантности двойного отношения

$$(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = (\xi_1, \xi_1^*, \xi_2, \xi_2^*) = \frac{|\xi_1 - \xi_2|^2}{|1 - \xi_1 \bar{\xi}_2|^2}. \quad (27)$$

Это показывает, что инвариантом относительно мёбиусовых отображений круга  $B^2$  является

$$\delta(\xi_1, \xi_2) = |\xi_1 - \xi_2| / |1 - \bar{\xi}_1 \xi_2|,$$

а соответствующая метрика Пуанкаре есть

$$ds = 2|d\xi| / (1 - |\xi|^2) \quad (28)$$

(напомним, что мы опустили множитель 2).

Опять-таки тривиально, что диаметры являются геодезическими, а потому то же самое справедливо для всех окружностей, ортогональных единичной окружности. Расстояние от 0 до  $r > 0$  равно

$$\begin{aligned} d = d(0, r) &= \int_0^r \frac{2 dt}{1-t^2} = \\ &= \log \frac{1+r}{1-r}, \quad r = \text{th} \frac{d}{2}. \end{aligned}$$

Заметим, что  $\delta(0, r) = r$ .

Другое наблюдение показывает, что

$$\begin{aligned} (r, 0, -1, 1) &= \\ &= (1+r)/(1-r). \end{aligned}$$

Поэтому если геодезическая, проходящая через точки  $\xi_1$

и  $\xi_2$ , пересекает единичную окружность в точках  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , то

$$d(\xi_1, \xi_2) = \log(\xi_2, \xi_1, \omega_1, \omega_2).$$

С этого момента мы будем использовать для точек единичного круга переменную  $z$ ; тогда в обозначениях рис. 3 имеем

$$d(z_1, z_2) = \log(z_2, z_1, \xi_1, \xi_2). \quad (29)$$

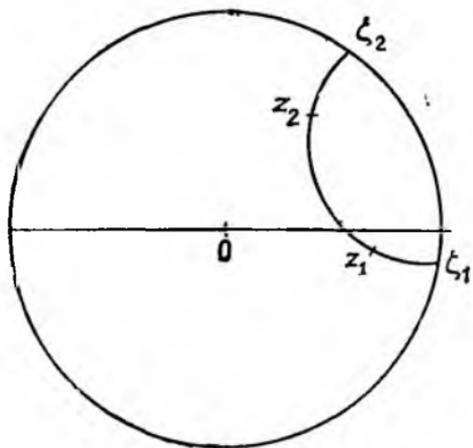


Рис. 3

1.11. Отображения круга  $B^2$  на себя, которые переводят точку  $a$  в  $0$ , имеют вид

$$\gamma z = e^{i\theta} (z - a) / (1 - \bar{a}z). \quad (30)$$

Мы хотим вывести эту формулу геометрическим путем.

С этой целью построим точку  $a^*$  и ортогональную окружность с центром в  $a^*$ , как показано на рис. 4. Отображение

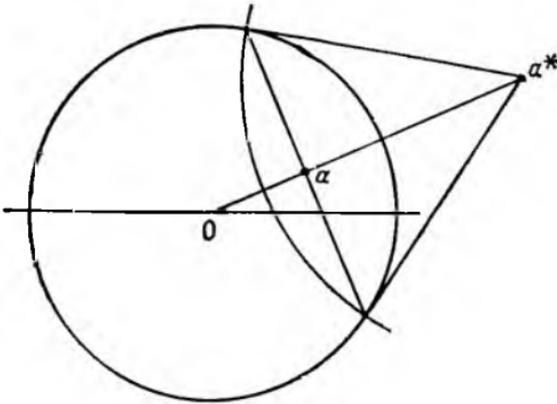


Рис. 4

относительно этой ортогональной окружности переводит точку  $a$  в  $0$ , а произвольную точку  $z$  в

$$\sigma_a z = a^* + (|a^*|^2 - 1)(z - a^*)^* = -\frac{a}{\bar{a}} \frac{\bar{z} - \bar{a}}{1 - \bar{a}z}.$$

Для получения отображения, сохраняющего ориентацию, рассмотрим композицию отображения  $\sigma_a$  с отражением относительно прямой, проходящей через начало координат перпендикулярно вектору  $a$ . Если  $\arg a = \alpha$ , то это отражение есть  $w \mapsto -e^{2i\alpha}\bar{w}$ , а в результате получаем отображение

$$z \mapsto T_a z = (z - a) / (1 - \bar{a}z). \quad (31)$$

Наиболее общее отображение круга на себя является композицией  $T_a$  и вращения вокруг начала координат и поэтому имеет вид (30). Обратим внимание на формулы

$$\begin{aligned} T'_a(z) &= (1 - |a|^2) / (1 - \bar{a}z)^2, \\ 1 - |T_a z|^2 &= (1 - |a|^2)(1 - |z|^2) / |1 - \bar{a}z|^2, \\ |T'_a(z)| / (1 - |T_a z|^2) &= 1 / (1 - |z|^2), \end{aligned} \quad (32)$$

которые хорошо известны в теории конформных отображений. Последняя формула выражает инвариантность метрики Пуанкаре. Нормировка отображения  $T_a$  выбрана так, что  $T'_a(a) > 0$  и  $T'_a(0) > 0$ .

Заметим еще, что  $T_a 0 = -a$  и, следовательно,  $T_{-a} = T_a^{-1}$ .

## II. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

2.1. Прежде чем перейти к общему случаю, обратим внимание на группу  $M(H^3)$  преобразований Мёбиуса, действующих в верхнем полупространстве  $H^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3); x_3 > 0\}$ . Еще Пуанкаре хорошо понимал, что действие группы  $M(\mathbb{C})$  можно продолжить до действия в  $H^3$ , или, если угодно, до действия во всем  $\mathbb{R}^{3,1}$ . В самом деле, любое отображение  $\gamma \in M(\mathbb{C})$  является произведением отражений относительно окружностей (или прямых); окружности определяют полусферы (соответственно полуплоскости) в  $H^3$ , ортогональные  $\mathbb{S}^1$ , а все отражения относительно них продолжают до отражений относительно полусфер (полуплоскостей). Необходимо, конечно, показать, что конечный результат не зависит от представления  $\gamma$  в виде произведения отражений.

Трехмерное верхнее полупространство весьма специфично, так как для его изучения можно использовать кватернионы и притом в очень элегантной форме.

Кватернионы можно отождествить с матрицами

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $u, v \in \mathbb{C}$ . В самом деле, положив

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

и  $u = u_1 + iu_2, v = v_1 + iv_2$ , получим, что

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} = u_1 + u_2 i + v_1 j + v_2 k = u + v j. \quad (2)$$

Сопряженным с кватернионом  $z = u + v j$  является  $\bar{z} = \bar{u} - v j$ , а абсолютная величина  $|z|$  находится из равенства  $|z|^2 = z\bar{z} = |u|^2 + |v|^2$ . При вычислении произведения мы пользовались правилом  $aj = j\bar{a}$ , где  $a$  — произвольное комплексное число.

Точки пространства  $\mathbb{R}^3$  обозначим теперь через  $z = x + yj$ , где  $x \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{R} (y > 0, \text{ если } z \in H^3)$ . Предположим, что  $\gamma \in SL_2(\mathbb{C})$  дается матрицей

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1.$$

<sup>1)</sup> Здесь мы заменили обозначение  $M_2(\mathbb{C})$  на  $M(\mathbb{C})$ .

Определим действие элемента  $\gamma$  на кватернион  $z$  по одной из формул

$$\gamma z = (az + b)(cz + d)^{-1} = (zc + d)^{-1}(za + b). \quad (3)$$

Необходимо показать, что два эти выражения равны и что  $\gamma z$  является кватернионом того же вида, что и  $z$ .

Чтобы доказать первое, заметим, что два выражения в (3) равны тогда и только тогда, когда

$$(zc + d)(az + b) - (za + b)(cz + d) = 0.$$

Это равенство преобразуется в равенство

$$zcb + daz - zad - bcz = 0,$$

которое справедливо, поскольку  $ad - bc$  действительно.

Следующий шаг состоит в вычислении  $\gamma z$ . Прежде всего

$$\gamma z = \frac{(az + b)\overline{(cz + d)}}{|cz + d|^2}.$$

Далее, так как

$$cz + d = cx + d + cyj, \quad \overline{cz + d} = \bar{c}\bar{x} + \bar{d} - cyj,$$

$$az + b = ax + b + ayj,$$

то

$$\begin{aligned} (az + b)\overline{(cz + d)} &= (ax + b)(\bar{c}\bar{x} + \bar{d}) + a\bar{c}y^2 + \\ &\quad + [-(ax + b)cy + ay(cx + d)]j = \\ &= (ax + b)(\bar{c}\bar{x} + \bar{d}) + a\bar{c}y^2 + yj. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\gamma z = \frac{(ax + b)(\bar{c}\bar{x} + \bar{d}) + a\bar{c}y^2 + yj}{|cz + d|^2}, \quad (4)$$

что и является искомой формой  $\gamma z$ . Отметим также, что  $|cz + d|^2 = |cx + d|^2 + |c|^2y^2$ .

2.2. Выведем теперь формулу для разности  $\gamma z - \gamma z'$ . Имеем

$$\begin{aligned} \gamma z - \gamma z' &= (az + b)(cz + d)^{-1} - (z'c + d)^{-1}(z'a + b) = \\ &= (z'c + d)^{-1} [(z'c + d)(az + b) - (z'a + b)(cz + d)](cz + d)^{-1} = \\ &= (z'c + d)^{-1}(z - z')(cz + d)^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Такая форма записи  $\gamma z - \gamma z'$  по крайней мере похожа на соответствующую формулу (1.4) в комплексном случае.

Переходя к абсолютным значениям, находим

$$|\gamma z - \gamma z'| = \frac{|z - z'|}{|cz + d||cz' + d|}, \quad (6)$$

и в инфинитезимальной форме

$$|d\gamma(z)| = |dz|/|cz + d|^2. \quad (7)$$

Сравнение с (4) показывает, что

$$ds = |dz|/y \quad (8)$$

является инвариантом.

Двойное отношение следует определить как

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1 - z_3)(z_1 - z_4)^{-1}(z_2 - z_4)(z_2 - z_3)^{-1}.$$

Используя (5), получаем

$$(\gamma z_1, \gamma z_2, \gamma z_3, \gamma z_4) = (z_3c + d)^{-1}(z_1, z_2, z_3, z_4)(z_3c + d).$$

Таким образом, матрицы, соответствующие кватернионам  $(\gamma z_1, \gamma z_2, \gamma z_3, \gamma z_4)$  и  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ , подобны. Из того, что абсолютная величина кватерниона равна квадратному корню из определителя, а действительная часть равна половине следа матрицы (1), вытекает, что абсолютная величина и действительная часть двойного отношения инвариантны.

Стабилизатор точки  $j$  совпадает с группой унитарных матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Полная группа  $M(H^3)$  транзитивна, ибо точка  $j$  переводится в произвольную точку  $\gamma j = u + vj$ ,  $v > 0$ , отображением

$$\gamma = \begin{pmatrix} v^{1/2} & uv^{-1/2} \\ 0 & v^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

**2.3.** Кватернионная техника работает только для  $M(H^3)$  и, хотя выглядит элегантной, не особенно полезна. Рассмотрим опять действие мёбиусовой группы на всем пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Мы будем использовать обозначение  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  и при операциях с матрицами обращаться с  $x$  как с вектор-столбцом. Группа *подобий* состоит из всех отображений

$$x \mapsto tx + b, \quad (9)$$

где  $b \in \mathbb{R}^n$ , а  $t$  — конформная матрица, т. е.  $t = \lambda k$ , где  $\lambda > 0$  и  $k \in O(n)$ .

Отражение относительно единичной сферы определяется как

$$x \mapsto x^* = Jx = x/|x|^2 \quad (J0 = \infty, J\infty = 0); \quad (10)$$

здесь, конечно,  $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ . Мы используем в основном обозначение  $x^*$ , но иногда, когда нужен буквенный

символ для отображения, будем писать  $J$ . Очевидно, что  $J^2 = I$ , где  $I$  — тождественное отображение. Единичную матрицу будем обозначать  $I_n$ .

Примем следующее определение.

**Определение.** Полной группой Мёбиуса  $\hat{M}(\mathbb{R}^n)$  называется группа, порожденная  $J$  и всеми подобиями. Группой Мёбиуса  $M(\mathbb{R}^n)$  называется подгруппа  $\hat{M}(\mathbb{R}^n)$ , состоящая из элементов, являющихся произведением четного числа сомножителей, равных  $J$ , и любого числа сохраняющих ориентацию подобий.

Другими словами,  $M(\mathbb{R}^n)$  — это подгруппа сохраняющих ориентацию элементов группы  $\hat{M}(\mathbb{R}^n)$ . Отмечу, что я не пользуюсь обозначением  $M(\mathbb{R}^n)$ , как этого требовала бы чрезмерная педантичность.

*Производная* дифференцируемого отображения  $f$ , действующего из одного открытого подмножества  $\mathbb{R}^n$  в другое, определяется как его матрица Якоби и обозначается через  $f'(x)$  или  $Df(x)$ ; ее элементами служат

$$f'(x)_{ij} = \partial f_i / \partial x_j = D_j f_i(x). \quad (11)$$

Производной подобия  $\gamma x = tx + b$  является постоянная конформная матрица  $t$ . Матрица  $J'(x)$  при  $x \neq 0$  имеет компоненты

$$J'(x)_{ij} = \frac{1}{|x|^2} \left( \delta_{ij} - \frac{2x_i x_j}{|x|^2} \right). \quad (12)$$

Нам придется очень часто встречаться с одной матрицей, для которой мы введем специальное обозначение  $Q(x)$ ; эта матрица имеет элементы

$$Q(x)_{ij} = x_i x_j / |x|^2. \quad (13)$$

Тогда (12) можно записать в виде

$$J'(x) = \frac{1}{|x|^2} (I - 2Q(x)). \quad (14)$$

По-видимому, это наиболее важная формула во всей теории мёбиусовых преобразований.

Из соотношения  $Q^2 = Q$  получаем равенство

$$(I - 2Q)^2 = I,$$

которое означает, что  $I - 2Q \in O(n)$ . Таким образом,  $J'(x)$  является конформной матрицей для всех  $x \neq 0$ .

Из правила дифференцирования композиции отображений теперь следует, что  $\gamma'(x)$  — конформная матрица для любого элемента  $\gamma \in \hat{M}(\mathbb{R}^n)$ . Другими словами, все мёбиусовы отображения *конформны* при подходящем способе интерпретации конформности в точках  $\infty$  и  $\gamma^{-1}\infty$ .

**Определение.** Для любого элемента  $\gamma \in M(\mathbb{R}^n)$  обозначим через  $|\gamma'(x)|$  положительное число, при котором  $\gamma'(x)/|\gamma'(x)| \in O(n)$ . Другими словами,  $|\gamma'(x)|$  есть коэффициент линейного растяжения в точке  $x$ , одинаковый во всех направлениях.

Еще одно применение правила дифференцирования композиции позволяет доказать, что

$$|\gamma x - \gamma y| = |\gamma'(x)|^{1/2} |\gamma'(y)|^{1/2} |x - y|. \quad (15)$$

В самом деле, это равенство тривиально, если  $\gamma$  — подобие, а для отображения  $J$ , используя (14), получаем<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} |Jx - Jy|^2 &= \left| \frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2} \right|^2 = \frac{1}{|x|^2} + \frac{1}{|y|^2} - \frac{2xy}{|x|^2|y|^2} = \\ &= \frac{|x - y|^2}{|x|^2|y|^2} = |J'(x)| |J'(y)| |x - y|^2. \end{aligned}$$

Если  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  удовлетворяют соотношению (15), то оно также справедливо для  $\gamma_1\gamma_2$ , так как

$$\begin{aligned} \gamma_1\gamma_2x - \gamma_1\gamma_2y &= |\gamma_1'(\gamma_2x)|^{1/2} |\gamma_1'(\gamma_2y)|^{1/2} |\gamma_2x - \gamma_2y| = \\ &= |\gamma_1'(\gamma_2x)|^{1/2} |\gamma_2'(x)|^{1/2} |\gamma_1'(\gamma_2y)|^{1/2} |\gamma_2'(y)|^{1/2} |x - y| = \\ &= |(\gamma_1\gamma_2)'(x)|^{1/2} |(\gamma_1\gamma_2)'(y)|^{1/2} |x - y|. \end{aligned}$$

Аналогично комплексному случаю было бы желательно использовать (15) для доказательства инвариантности двойного отношения; однако теперь можно определить лишь *абсолютное двойное отношение*

$$|a, b, c, d| = \frac{|a - c|}{|a - d|} \cdot \frac{|b - c|}{|b - d|}, \quad (16)$$

которое с очевидностью инвариантно в том смысле, что

$$|\gamma a, \gamma b, \gamma c, \gamma d| = |a, b, c, d|. \quad (17)$$

Эту инвариантность можно использовать для доказательства того, что окружности отображаются на окружности. Действительно, имеется классическая теорема для пространств  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$ , обобщаемая на пространство  $\mathbb{R}^n$ , которая утверждает, что точки  $a, b, c, d$  лежат на окружности в циклическом порядке тогда и только тогда, когда

$$|a - b| |c - d| + |b - c| |d - a| = |a - c| |b - d|.$$

А это условие можно переписать в инвариантной форме

$$|a, d, b, c| + |c, d, b, a| = 1.$$

<sup>1)</sup> Здесь, как обычно,  $xy = x_1y_2 + \dots + x_ny_n$ .

В качестве второго применения (17) докажем следующую важную лемму.

**Лемма 1.** *Если  $\gamma$  оставляет точку  $\infty$  неподвижной, то  $\gamma$  является подобием.*

*Доказательство.* Если  $\gamma\infty = \infty$ , то точки 0 и  $\infty$  остаются неподвижными при отображении  $x \mapsto \gamma x - \gamma 0$ . Поэтому достаточно доказать, что из условий  $\gamma 0 = 0$  и  $\gamma\infty = \infty$  вытекает, что  $\gamma x = tx$ , где  $t$  — постоянная конформная матрица. Другими словами, нужно доказать, что  $\gamma'(x)$  постоянна.

Прежде всего,  $|\gamma x, \gamma y, 0, \infty| = |x, y, 0, \infty|$ , откуда

$$\left| \frac{\gamma x}{\gamma y} \right| = \left| \frac{x}{y} \right|, \quad \frac{|\gamma x|}{|x|} = \lambda = \text{const.}$$

Далее, равенство  $|\gamma x, 0, \gamma y, \infty| = |x, 0, y, \infty|$  дает

$$|\gamma x - \gamma y| / |\gamma y| = |x - y| / |y|.$$

Отсюда  $|\gamma x - \gamma y|^2 = \lambda^2 |x - y|^2$ , и потому  $(\gamma x, \gamma y) = \lambda^2 (x, y)$ .

Получаем, что  $|\gamma(x+y) - \gamma x - \gamma y|^2 = \lambda^2 |(x+y) - x - y|^2 = 0$ , и, следовательно,

$$\gamma(x+y) = \gamma x + \gamma y, \quad \gamma'(x+y) = \gamma'(x) = \text{const.}$$

**Следствие.** *Если точки  $a, b$  обе конечны и  $a \neq b$ , то наиболее общее отображение  $\gamma \in \hat{M}(\mathbb{R}^n)$ , удовлетворяющее условиям  $\gamma a = 0, \gamma b = \infty$ , имеет вид*

$$\gamma x = t[(x-b)^* - (a-b)^*], \quad (18)$$

где  $t$  — постоянная конформная матрица.

В самом деле, совершенно очевидно, что отображение  $(x-b)^* - (a-b)^*$  переводит точку  $a$  в 0, а точку  $b$  в  $\infty$ .

**2.4.** Обозначим через  $\hat{M}(B^n)$  и  $M(B^n)$  подгруппы  $\hat{M}(\mathbb{R}^n)$  и  $M(\mathbb{R}^n)$  соответственно, оставляющие инвариантным шар  $B^n = \{x; |x| < 1\}$ . Так как мёбиусовы отображения биективны на единичной сфере  $S^{n-1} = \{x; |x| = 1\}$ , то внешность  $B^n$  также инвариантна.

**Лемма 2.** *Если  $\gamma \in \hat{M}(B^n)$  и  $\gamma 0 = 0$ , то  $\gamma$  является вращением (т. е.  $\gamma x = kx$ , где  $k \in O(n)$ ).*

*Доказательство.* Если  $\gamma\infty = \infty$ , то из леммы 1 следует, что  $\gamma = tx$ , а так как  $|tx| = 1$  для  $|x| = 1$ , то  $t = k \in O(n)$ .

Допустим теперь, что  $\gamma^{-1}\infty = b \neq \infty$ . Применяя (18), получим  $|(x-b)^* + b^*| = \text{const}$  для  $|x| = 1$ . Но

$$|(x-b)^* + b^*| = \frac{|x|}{|x-b||b|}.$$

Поэтому  $|x - b| = \text{const}$  для  $|x| = 1$ , а это невозможно, так как  $b \neq 0$ .

2.5. Определим теперь вид наиболее общего элемента  $\gamma \in \bar{M}(B^n)$ . Это делается почти так же, как в п. 1.11 для  $n = 2$ , с той лишь разницей, что здесь нет комплексных обозначений.

Начнем с доказательства следующего нетривиального тождества.

**Лемма 3.**

$$(x - y^*)^* + y = |y|^2(I - 2Q(y))(x^* - y)^*. \quad (19)$$

*Доказательство.* Заметим, что формула (19) не имеет смысла для  $y = 0$ , тем не менее очевидно, что обе ее части стремятся к 0, когда  $y \rightarrow 0$ . Предположим теперь, что  $y \neq 0$ , и напомним

$$\begin{aligned} Ax &= (x - y^*)^*, \\ Bx &= |y|^2(I - 2Q(y))(x^* - y)^* - y. \end{aligned} \quad (20)$$

Другими словами, будем считать  $y$  постоянным и докажем, что  $Ax = Bx$ .

Сразу получаем  $Ay^* = By^* = \infty$ ,  $A\infty = B\infty = 0$ . Поэтому 0 и  $\infty$  являются неподвижными точками отображения  $AB^{-1}$  и по лемме 1 производная  $(AB^{-1})'$  постоянна. Но тогда выражение  $A'(x)B'(x)^{-1}$  также постоянно, поскольку

$$\begin{aligned} (AB^{-1})'(x) &= A'(B^{-1}x) \cdot (B^{-1})'(x) = \\ &= A'(B^{-1}x) \cdot B'(B^{-1}x)^{-1} = (A'B'^{-1}) \circ B^{-1}x = \text{const}. \end{aligned}$$

Из (20) и (14) имеем

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{I - 2Q(x - y^*)}{|x - y^*|^2}, \\ B'(x) &= \frac{|y|^2(I - 2Q(y))(I - 2Q(x^* - y))(I - 2Q(x))}{|x^* - y|^2|x|^2} \end{aligned} \quad (21)$$

и при  $x = y$  находим

$$A'(y) = B'(y) = \frac{(I - 2Q(y))|y|^2}{(1 - |y|^2)^2}.$$

Следовательно,  $A'(x) = B'(x)$  для всех  $x$ , а так как  $A0 = B0 = -y$ , то  $Ax = Bx$ .

Сравнивая теперь формулы (21) для  $A'(x)$  и  $B'(x)$ , получаем важное тождество

$$\begin{aligned} (I - 2Q(y))(I - 2Q(x - y^*)) &= \\ &= (I - 2Q(x^* - y))(I - 2Q(x)). \end{aligned} \quad (22)$$

2.6. Применим конструкцию, использованную в п. 1.11, и рассмотрим ту же самую конфигурацию. Для произвольной фиксированной точки  $a \in B^n$  ( $a \neq 0$ ) построим точку  $a^*$  и сферу  $S^{n-1}(a^*, (|a^*|^2 - 1)^{1/2})$  радиуса  $\sqrt{1 - |a|^2}/|a|$  с центром в  $a^*$ ; эта сфера ортогональна единичной сфере  $S^{n-1}$ . Отражение относительно построенной сферы дается формулой

$$\sigma_a x = a^* + (|a^*|^2 - 1)(x - a^*)^*. \quad (23)$$

Рассмотрим отображение, являющееся композицией  $\sigma_a$  и отражения относительно плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно вектору  $a$ . Нетрудно заметить, что второе отражение совпадает с умножением на матрицу  $I - 2Q(a)$ . Действительно,

$$y' = (I - 2Q(a))y = y - \frac{2(ya)a}{|a|^2},$$

а рис. 5 показывает положение точки  $y'$ , которая является образом  $y$  при этом отражении.

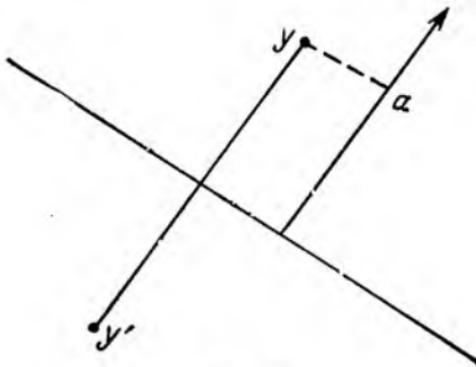


Рис. 5

Определим каноническое отображение

$$T_a x = (I - 2Q(a))\sigma_a x. \quad (24)$$

Теперь можно сказать, что наиболее общий элемент  $\gamma \in \hat{M}(B^n)$ , переводящий точку  $a$  в 0, имеет вид  $kT_a$ , где  $k \in O(n)$ .

Явное выражение для  $T_a x$  становится намного проще, если воспользоваться тождеством (19). Очевидно, что  $(I - 2Q(a))a^* = -a^*$ , и таким образом мы находим, что

$$T_a x = -a^* + (|a^*|^2 - 1)(I - 2Q(a))(x - a^*)^*.$$

Заменяя в (19)  $y$  на  $a$  и умножая на  $I - 2Q(a)$ , получаем

$$(I - 2Q(a))(x - a^*)^* = a + |a|^2(x^* - a)^*,$$

$$T_a x = -a^* + (|a^*|^2 - 1)a + (1 - |a|^2)(x^* - a)^*.$$

В результате имеем

$$T_a x = -a + (1 - |a|^2)(x^* - a)^*. \quad (25)$$

Это самое простое выражение для  $T_a x$ , но если желательно избежать применения обозначения  $x^*$ , то легко перейти к виду

$$T_a x = \frac{(1 - |a|^2)(x - a) - |x - a|^2 a}{[x, a]^2}, \quad (26)$$

где  $[x, a] = |x| |x^* - a| = |a| |x - a^*|$  и  $[x, a]^2 = 1 + |x|^2 |a|^2 - 2xa$ .

2.7. Соберем вместе все выведенные нами выражения для  $T_y x$ :

$$a) T_y x = (I - 2Q(y))(y^* + (|y^*|^2 - 1)(x - y^*)^*),$$

$$b) T_y x = -y + (1 - |y|^2)(x^* - y)^*,$$

$$c) T_y x = \frac{(1 - |y|^2)x - (1 - 2xy + |x|^2)y}{[x, y]^2},$$

$$d) T_y x = \frac{(1 - |y|^2)(x - y) - |x - y|^2 y}{[x, y]^2}.$$

Напомним, что  $[x, y] = |x| |y - x^*| = |y| |x - y^*|$ . Дифференцируя выражения а) и б), получаем

$$\begin{aligned} T'_y(x) &= \frac{1 - |y|^2}{[x, y]^2} (I - 2Q(y))(I - 2Q(x - y^*)) = \\ &= \frac{1 - |y|^2}{[x, y]^2} (I - 2Q(x^* - y))(I - 2Q(x)). \end{aligned} \quad (27)$$

Мы уже отмечали (см. (22)) тождество этих двух матричных произведений. Введем следующее обозначение:

$$\Delta(x, y) = (I - 2Q(y))(I - 2Q(x - y^*)).$$

Ясно, что  $\Delta(x, y) = \Delta(y, x)^T$ , а это можно переписать в виде

$$\Delta(x, y)\Delta(y, x) = I. \quad (28)$$

Полезно рассматривать формулу

$$T'_y x = \frac{1 - |y|^2}{[x, y]^2} \Delta(x, y) \quad (29)$$

как представление в «полярных координатах»: выражение

$$|T'_y x| = \frac{1 - |y|^2}{[x, y]^2} \quad (30)$$

можно считать «абсолютной» величиной, а  $\Delta(x, y)$  — «аргументом»  $T'_y x$ .

Обратим внимание на некоторые конкретные значения  $T'_y x$ . Именно

$$T'_y(0) = 1 - |y|^2, \quad T'_y(y) = 1/(1 - |y|^2). \quad (31)$$

Кроме того,  $T_y(0) = -y$ , и потому  $T_{-y} = T_y^{-1}$ .

Прямое вычисление  $|T_y x|$  по любой из формул а) — д) чрезвычайно трудоемко. К счастью, мы можем воспользоваться формулой для разности и тогда получим, что

$$|T_y x| = |T_y x - T_y y| = |T'_y(x)|^{1/2} |T'_y(y)|^{1/2} |x - y|,$$

или, что то же самое,

$$|T_y x| = |x - y|/[x, y]. \quad (32)$$

Теперь простое вычисление дает

$$1 - |T_y x|^2 = (1 - |x|^2)(1 + |y|^2)/[x, y]^2. \quad (33)$$

Учитывая (29), заключаем отсюда, что

$$|T'_y(x)|/(1 - |T_y x|^2) = 1/(1 - |x|^2). \quad (34)$$

Тем самым доказана инвариантность метрики Пуанкаре

$$ds = 2dx/(1 - |x|^2). \quad (35)$$

Мы видим опять, что окружности в  $B^n$ , ортогональные  $S^{n-1}$ , являются геодезическими. Гиперболическое расстояние между началом координат и точкой  $x \in B^n$  дается формулой

$$d(0, x) = \log \frac{1 + |x|}{1 - |x|}, \quad (36)$$

а между произвольными точками  $x, y \in B^n$  оно равно

$$d(x, y) = \log |y, x, \xi, \eta|, \quad (37)$$

где  $\xi$  и  $\eta$  — концы ориентированной геодезической, проходящей через  $x$  и  $y$ .

**2.8.** Между отображениями  $T_y x$  и  $T_x y$  имеется тесная связь. Чтобы ее найти, докажем сначала следующую лемму.

**Лемма.** Для любого элемента  $\gamma \in \hat{M}(B^n)$  выполняется равенство

$$T_{\gamma y}(\gamma x) = \frac{\gamma'(y)}{|\gamma'(y)|} T_y x. \quad (38)$$

*Доказательство.* Пусть  $Lx$  и  $Rx$  — левая и правая части равенства (38). Ясно, что  $Ly = Ry = 0$  и потому  $LR^{-1}(0) = 0$ . С другой стороны,

$$L'(y) = \gamma'(y)/(1 - |\gamma y|^2) = R'(y).$$

Здесь левое равенство очевидно, а правое получается применением (34). Отсюда

$$(LR^{-1})'(0) = L'(y)R'(y)^{-1} = 1$$

и, таким образом,  $LR^{-1} = I$ . Применим лемму, положив  $\gamma = T_x$ . Тогда левая часть будет равна  $T_{T_x y}(0) = -T_x y$ , откуда следует, что

$$T_x y = \frac{T'_x(y)}{|T'_x(y)|} T_y x.$$

На основании (29) и (30) имеем

$$T_x y = -\Delta(y, x) T_y x, \quad T_y x = -\Delta(x, y) T_x y. \quad (39)$$

*Замечание.* Отображение  $T_y$  не определено для  $|y| = 1$ , но формула б) позволяет написать по непрерывности  $T_y x = -y$ . Следовательно, согласно формулам (39),

$$\begin{aligned} T_x y &= \Delta(y, x) y \quad \text{для } |y| = 1, \\ T_y x &= \Delta(x, y) x \quad \text{для } |x| = 1. \end{aligned} \quad (40)$$

Выведем еще одно соотношение. Продифференцируем равенство (38) по  $x$ ; получим

$$T'_{\gamma y}(\gamma x) \gamma'(x) = \frac{\gamma'(y)}{|\gamma'(y)|} T'_y(x). \quad (38')$$

Приравняв аргументы в (29), найдем, что <sup>1)</sup>

$$\Delta(\gamma x, \gamma y) \frac{\gamma'(x)}{|\gamma'(x)|} = \frac{\gamma'(y)}{|\gamma'(y)|} \Delta(x, y). \quad (41)$$

**2.9.** Хотя формулы для мёбиусовых отображений шара  $B^n$  на себя довольно просты, иногда предпочтительнее обратиться к геометрической картине.

<sup>1)</sup> Приведем доказательство формулы (41). Подставив значение  $T'_y x = (1 - |y|^2/[x, y]^2) \Delta(x, y)$  в формулу (38'), убеждаемся, что достаточно доказать равенство

$$\frac{1 - |\gamma y|^2}{1 - |y|^2} \frac{[x, y]^2}{[\gamma x, \gamma y]^2} = \frac{1}{|\gamma'(x)|}.$$

Но из (34) вытекает, что  $|\gamma'(z)| = (1 - |\gamma z|^2)/(1 - |z|^2)$ , поэтому достаточно проверить, что

$$|\gamma'(y)| \frac{[x, y]^2}{[\gamma x, \gamma y]^2} |\gamma'(x)| = 1,$$

а из (15) следует, что для этого достаточно доказать равенство

$$|\gamma x - \gamma y|/[\gamma x, \gamma y] = |x - y|/[x, y],$$

т. е. установить инвариантность величины  $|x - y|/[x, y] = h(x, y)$  относительно мёбиусовых отображений  $\gamma \in M(B^n)$ . Но  $|T_y x| = |x - y|/[x, y]$  и  $|T_{\gamma y} \gamma x| = h(\gamma x, \gamma y)$ , а на основании формулы (38)  $|T_{\gamma y}(\gamma x)| = |T_y x|$ , так что действительно  $h(x, y) = h(\gamma x, \gamma y)$  для любого  $\gamma \in M(B^n)$ . — *Прим. перев.*

Напомним, что каждый элемент  $\gamma \in M(B^n)$ ,  $\gamma \neq I$ , имеет каноническое представление

$$\gamma = kT_a, \quad (42)$$

где  $a = \gamma^{-1}(0)$  и  $k \in SO(n)$ . Так как  $|k| = 1$ , то

$$|\gamma'(x)| = |T'_a(x)| = \frac{1 - |a|^2}{|x - a|^2}. \quad (43)$$

Множество  $\{x; |\gamma'(x)| = 1\}$  является не чем иным, как сферой, ортогональной  $S^{n-1}$ , с центром в точке  $a^*$ . Ничто не мешает нам рассматривать всю сферу, а не только ее часть, расположенную внутри  $B^n$ . Эта сфера называется *изометрической сферой* отображения  $\gamma$  и обозначается через  $K(\gamma)$ . Обозначим еще через  $I(\gamma)$  внутренность  $K(\gamma)$  и через  $E(\gamma)$  внешность  $K(\gamma)$ . Отметим, что тождественное отображение не имеет изометрической сферы.

Применив к равенству  $\gamma[\gamma^{-1}x] = x$  правило дифференцирования композиции, получим соотношение

$$|\gamma'[\gamma^{-1}x]| |(\gamma^{-1})'(x)| = 1,$$

а из равенства  $\gamma^{-1}(\gamma(x)) = x$  — соотношение

$$|(\gamma^{-1})'(\gamma x)| |\gamma'(x)| = 1.$$

Отсюда выводим следующие заключения:

$\gamma$  отображает  $I(\gamma)$  на  $E(\gamma^{-1})$  и  $E(\gamma)$  на  $I(\gamma^{-1})$ ,  
 $\gamma^{-1}$  отображает  $I(\gamma^{-1})$  на  $E(\gamma)$  и  $E(\gamma^{-1})$  на  $I(\gamma)$ .

Это, конечно, не определяет отображения  $\gamma$  полностью, однако своими изометрическими сферами  $K(\gamma)$  и  $K(\gamma^{-1})$  отображение  $\gamma$  вполне определено с точностью до поворотов вокруг общей оси единичной и изометрической сфер.

Более того, ограничение  $\gamma: K(\gamma) \rightarrow K(\gamma^{-1})$  является изометрией, и потому оно сохраняет конгруэнтность как в евклидовой, так и неевклидовой геометрии.

### III. ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1. В этой короткой главе изложены следующие два отдельных вопроса:

1° вывод некоторых формул гиперболической тригонометрии;

2° представление групп Мёбиуса матричными группами.

3.2. Пусть  $ABC$  — неевклидов треугольник в  $B^n$ . Обозначим через  $A, B, C$  его углы, а через  $a, b, c$  — неевклидовы длины противолежащих сторон. Будут доказаны следующие теоремы,

### I. Гиперболическая теорема косинусов:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos C. \quad (1)$$

### II. Гиперболическая теорема синусов:

$$\frac{\sin A}{\operatorname{sh} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{sh} b} = \frac{\sin C}{\operatorname{sh} c}. \quad (2)$$

3.3. Доказательство теоремы I. Без ограничения общности можно считать, что  $C = 0$ , сторона  $a$  идет вдоль положительной полуоси  $x_1$ , а сторона  $b$  лежит в плоскости  $x_1 x_2$ . Таким образом, достаточно рассмотреть случай  $n = 2$ , в котором можно использовать комплексные обозначения.

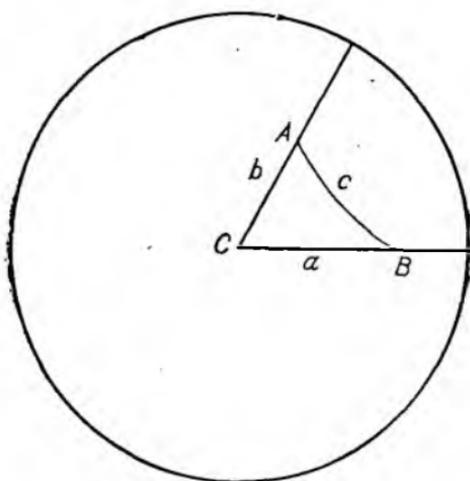


Рис. 6

Точки  $B$  и  $A$  находятся на евклидовых расстояниях  $\operatorname{th}(a/2)$  и  $\operatorname{th}(b/2)$  от начала координат. Поэтому  $B$  и  $A$  представляются в виде  $\operatorname{th}(a/2)$  и  $\operatorname{th}(b/2)e^{iC}$ . Неевклидово расстояние  $\delta$  между  $A$  и  $B$  равно

$$\delta(A, B) = \frac{\left| \operatorname{th} \frac{a}{2} - \operatorname{th} \frac{b}{2} e^{iC} \right|}{\left| 1 - \operatorname{th} \frac{a}{2} \operatorname{th} \frac{b}{2} e^{-iC} \right|} = \operatorname{th} \frac{c}{2}. \quad (3)$$

Как и в обычной тригонометрии, все гиперболические функции можно рационально выразить через  $\operatorname{th}(x/2)$ . Формулы таковы:

$$\operatorname{ch} x = \frac{1 + \operatorname{th}^2(x/2)}{1 - \operatorname{th}^2(x/2)},$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{th}(x/2)}{1 - \operatorname{th}^2(x/2)}.$$

Из (3) находим

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} c &= \frac{\left(1 + \operatorname{th}^2 \frac{a}{2}\right) \left(1 + \operatorname{th}^2 \frac{b}{2}\right) - 4 \operatorname{th} \frac{a}{2} \operatorname{th} \frac{b}{2} \cos C}{\left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{a}{2}\right) \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{b}{2}\right)} = \\ &= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos C. \end{aligned}$$

3.4. Доказательство теоремы II. Из (1) получаем

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} c}{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}, \\ \sin^2 C &= \frac{(\operatorname{ch}^2 a - 1)(\operatorname{ch}^2 b - 1) - (\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} c)^2}{\operatorname{sh}^2 a \operatorname{sh}^2 b}, \\ \frac{\sin^2 C}{\operatorname{sh}^2 c} &= \frac{1 - \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{ch}^2 b - \operatorname{ch}^2 c + 2 \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c}{\operatorname{sh}^2 a \operatorname{sh}^2 b \operatorname{sh}^2 c}. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу симметрии формул, следует теорема II.

3.5. В этом пункте мы хотим показать, что группа  $M(\mathbb{R}^{n-1})$  изоморфна группе  $M(B^n)$ . Для  $n = 2$  это уже было сделано в гл. I. Там было отмечено, что обе группы  $M(\mathbb{R}^1)$  и  $M(H^2)$  совпадают с  $PSL_2(\mathbb{R})$ , а, с другой стороны, группы  $M(H^2)$  и  $M(B^2)$  изоморфны, так как существует конформное отображение  $H^2$  на  $B^2$ .

В общем случае мы начнем с конструкции продолжения любого отображения  $\gamma \in M(\mathbb{R}^{n-1})$  до отображения из  $M(H^n)$ . Для этого отождествим  $\mathbb{R}^{n-1}$  с подпространством  $\{x_n = 0\}$  в  $\mathbb{R}^n$ . Напомним (следствие 2.5), что любой элемент  $\gamma \in M(\mathbb{R}^{n-1})$ , для которого  $\gamma a = 0$ ,  $\gamma b = \infty$ ,  $b \neq \infty$ , представляется единственным образом в виде

$$\gamma x = m[(x - b)^* - (a - b)^*], \quad (4)$$

где  $m = \lambda k$ ,  $\lambda > 0$ ,  $k \in O(n-1)$ . Если заменить матрицу  $k$  матрицей

$$\tilde{k} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(n),$$

то получим отображение пространства  $\mathbb{R}^n$ , ограничение которого на  $H^n$  служит продолжением отображения  $\gamma$ . (В случае  $b = \infty$  представление (4) нужно заменить на  $\gamma x = m(x - a)$ .) Эта конструкция показывает, что группа  $M(\mathbb{R}^{n-1})$  изоморфна  $M(H^n)$ .

Осталось доказать, что группа  $M(H^n)$  изоморфна  $M(B^n)$ . Для этого достаточно найти стандартное мёбиусово отображение  $\sigma: H^n \rightarrow B^n$ , которое мы выберем так, чтобы точки  $x = 0$ ,  $e_n$ ,  $\infty$  соответствовали точкам  $y = \sigma x = -e_n$ ,  $0$ ,  $e_n$ .

где  $e_n$  — последний координатный вектор. Ограничением отображения  $\sigma$  на  $\mathbb{R}^{n-1}$  является обычная стереографическая проекция. Приведенные картинке лучше слов иллюстрируют

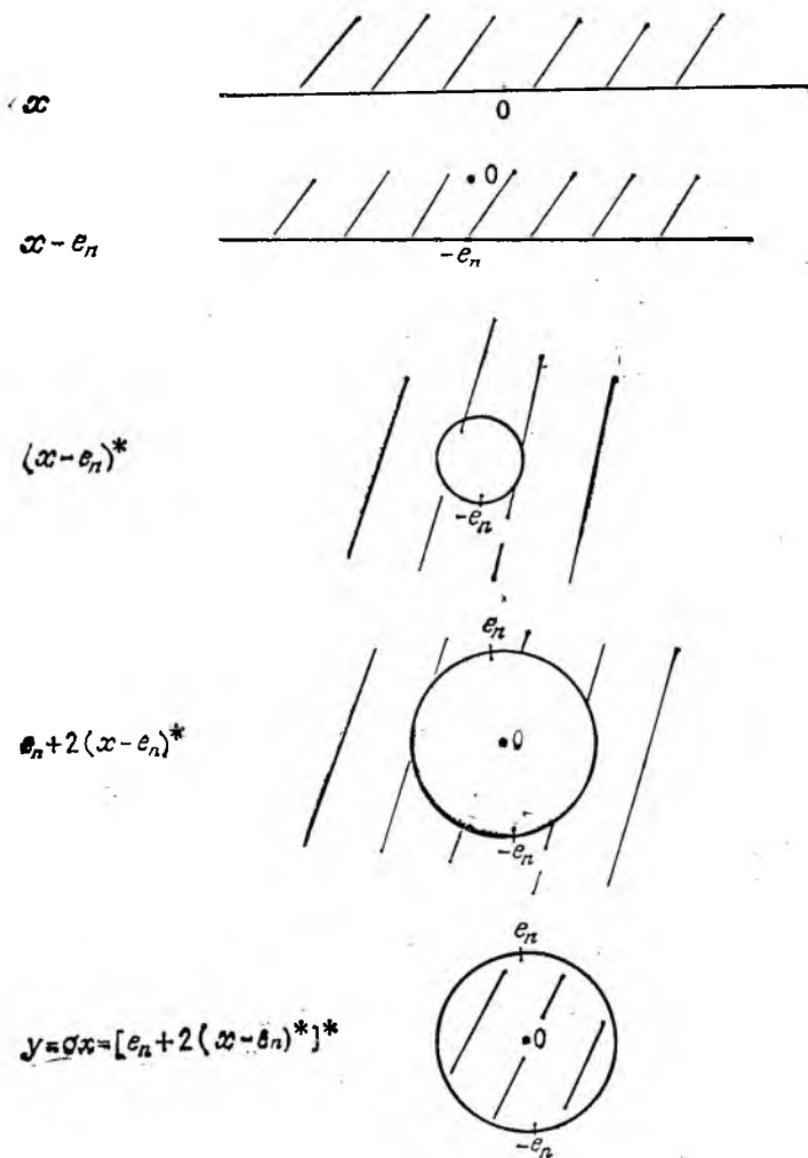


Рис. 7

наш выбор, Нужное соответствие дается тем самым формулой

$$\begin{aligned} y &= (e_n + 2(x - e_n))^*, \\ x &= e_n + 2(y^* - e_n)^*, \end{aligned} \quad (5)$$

или в координатной форме:

$$\begin{aligned} y_i^* &= \frac{2x_i}{|x - e_n|^2} \quad (i = 1, \dots, n-1), \\ y_n^* &= \frac{|x|^2 - 1}{|x - e_n|^2} \end{aligned} \quad (6)$$

и

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{2y_i}{|y - e_n|^2} \quad (i = 1, \dots, n-1), \\ x_n &= \frac{1 - |y|^2}{|y - e_n|^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Легко проверить, что если  $x_n = 0$ , то  $|y|^2 = 1$ ,  $y^* = y$  и выражения (6) приводятся к виду

$$y_i = \frac{2x_i}{|x|^2 + 1}, \quad y_n = \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}, \quad (8)$$

а для  $|y| = 1$  имеем

$$x_i = \frac{y_i}{1 - y_n}, \quad x_n = 0. \quad (9)$$

Мы пришли к известным формулам.

3.6. Стереографическая проекция (8) отображает шар  $B^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0); x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < 1\}$  на нижнюю полусферу сферы  $S^{n-1}$ , т. е. на множество  $\{y \in \mathbb{R}^n; |y| = 1, y_n < 0\}$ . Если рассмотреть композицию стереографической проекции с отображением  $(y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$ , то получим отображение шара  $B^{n-1}$  на себя, имеющее вид

$$y = \frac{2x}{|x|^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R}^{n-1}, |x| < 1). \quad (10)$$

Это отображение, конечно, не мёбиусово, поскольку отображение  $(y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$  не конформно.

Какова структура отображения (10)? Стереографическая проекция конформна и оставляет сферу  $S^{n-2} = \{x_n = 0, |x| = 1\}$  неподвижной. Поэтому она переводит ортогональные окружности шара  $B^{n-1}$ , т. е. окружности, ортогональные сфере  $S^{n-2}$ , в окружности на полусфере, которые также ортогональны  $S^{n-2}$  (рис. 8). Но всякая такая ортогональная окружность на полусфере лежит в плоскости, параллельной вектору  $e_n$ , а ее проекция есть прямолинейный отрезок. Другими словами, отображение (10) переводит каждую геодезическую в  $B^{n-1}$  в отрезок, соединяющий ее концевые точки. Этот факт также с очевидностью следует из простых вычислений. Уравнение такой ортогональной окружности имеет вид

$$|x - a|^2 = |a|^2 - 1 \quad (|a| > 1),$$

или

$$|x|^2 + 1 = 2xa,$$

и, таким образом, соотношение (10) эквивалентно равенству  $ay = 1$ , а это есть уравнение прямой. Все это может быть использовано для построения модели Клейна гиперболического пространства. В модели Клейна неевклидовыми прямыми служат отрезки прямых в шаре  $B^{n-1}$ . Расстояние между двумя точками  $y'$  и  $y''$  определяется как гиперболическое расстояние  $d(x', x'')$  между соответствующими точками в модели Пуанкаре.

Если взглянуть на рис. 9, то видно, что  $|a', b', c, d| = |a, b, c, d|^2$ . Поэтому неевклидово расстояние между точками  $x$  и  $y$  в модели Клейна равно  $\frac{1}{2} \log |x, y, \xi, \eta|$ .

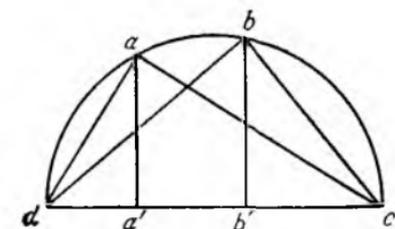


Рис. 8

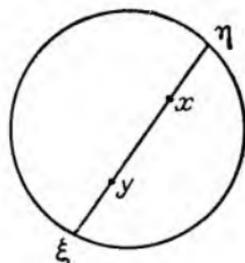


Рис. 9

**3.7.** Перейдем теперь к матричному представлению групп Мёбиуса. Напомним, что матричная группа, оставляющая инвариантной квадратичную форму

$$(x, x) = x_{n+1}^2 - (x_1^2 + \dots + x_n^2),$$

обозначается через  $O(n, 1)$ . На языке теории матриц  $A \in O(n, 1)$ , если

$$A^T \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где  $A^T$  — транспонированная матрица  $A$  и  $I_n$  — единичная матрица в размерности  $n$ . Из (11) следует, что  $(\det A)^2 = 1$ . Подгруппа матриц из  $O(n, 1)$  с  $\det A = 1$  обозначается через  $SO(n, 1)$ .

Пользуясь геометрическим языком, можно сказать, что «световой конус»  $\{\langle x, x \rangle = 0\}$  и его внутренность  $\{\langle x, x \rangle > 0\}$  инвариантны относительно всех  $A \in O(n, 1)$ . То же самое справедливо и для *единичного гиперboloида*  $\{\langle x, x \rangle = 1\}$ , который обозначим через  $S_h^n$ . Этот гиперboloид имеет две половины, для одной из которых  $x_{n+1} > 0$ , а для другой  $x_{n+1} < 0$ ; верхнюю половину мы будем обозначать через  $(S_h^n)^+$ . Для подгрупп, сохраняющих знак координаты  $x_{n+1}$ , примем обозначения  $O(n, 1)^+$  и  $SO(n, 1)^+$ .

Уже было показано, что полные группы Мёбиуса  $\tilde{M}(\mathbb{R}^{n-1})$  и  $\tilde{M}(H^n)$  изоморфны, так же как и группы  $M(\mathbb{R}^{n-1})$  и  $M(H^n)$ . Кроме того, имеет место классический результат о том, что они изоморфны группам  $O(n, 1)^+$  и  $SO(n, 1)^+$  соответственно. Чтобы получить его, мы считаем полезным подчеркнуть большое сходство между стереографической проекцией, действующей из пространства  $\mathbb{R}^n$  в единичную сферу  $S^n$ , и определенным аналогично отображением из  $\mathbb{R}^n$  в гиперboloид  $S_h^n$ .

Отправной точкой для нас будет тождество

$$\left(\frac{1+|x|^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-|x|^2}{2}\right)^2 + |x|^2,$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Его можно переписать либо в виде

$$\left|\frac{2x}{1+|x|^2}\right|^2 + \left(\frac{1-|x|^2}{1+|x|^2}\right)^2 = 1, \quad (12)$$

либо в виде

$$\left(\frac{1+|x|^2}{1-|x|^2}\right)^2 - \left|\frac{2x}{1-|x|^2}\right|^2 = 1. \quad (13)$$

Из (12) видно, что отображение  $\sigma$ , определенное формулой

$$\sigma(x) = \left(\frac{2x}{1+|x|^2}, \frac{1-|x|^2}{1+|x|^2}\right), \quad (14)$$

есть не что иное, как стандартная стереографическая проекция  $\mathbb{R}^n \rightarrow S^n$ , с той лишь разницей, что знак последней координаты выбран так, что единичный шар  $B^n$  отображается на верхнюю полусферу. Заметим, что (14) определяет  $\sigma(x)$  как точку декартова произведения  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , которое можно отождествить с пространством  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Из равенства (13) видно, что отображение  $\sigma_h$ , определяемое формулой

$$\sigma_h(x) = \left(\frac{2x}{1-|x|^2}, \frac{1+|x|^2}{1-|x|^2}\right), \quad (15)$$

является отображением из  $B^n$  на  $(S_h^n)^+$ . Более того, это гомеоморфизм, и обратным к нему служит отображение

$$\sigma^{-1}(y) = y/(1+y_{n+1}). \quad (16)$$

В п. 2.6 было показано, что отображения из группы  $M(B^n)$  имеют вид  $kT_a$ , где  $k$  принадлежат  $O(n)$  (и  $SO(n)$ , если они сохраняют ориентацию), а отображение  $T_a$  задается по любой из формул п. 2.6 или 2.7. Очевидно, что  $M(B^n)$  изоморфна группе  $\sigma M(B^n)\sigma^{-1}$ . Мы сейчас покажем прямым вычислением, что  $\sigma M(B^n)\sigma^{-1}$  является группой линейных отображений пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$  и, следовательно, может быть представлена матричной группой. Так как  $(S_h^n)^+$  инвариантна относительно  $\sigma_h M(B^n)\sigma_h^{-1}$ , а отображение  $\sigma_h$  биективно, то эта матричная группа является либо группой  $O(n, 1)^+$ , либо группой  $SO(n, 1)^+$ .

Начнем с очевидного факта, что отображение  $\sigma k \sigma^{-1}$  представляется матрицей  $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , которая принадлежит либо  $O(n, 1)^+$ , либо  $SO(n, 1)^+$ . Поэтому достаточно рассмотреть отображение  $\sigma T_a \sigma^{-1}$ , которое линейно, если  $\sigma T_a x$  — линейная функция переменной  $\sigma x$ .

Мы применим формулу с) из п. 2.7, в которой  $y$  заменим на  $a$ , а также следующие два тождества:

$$1 - |T_a x|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |x|^2)}{[x, a]^2},$$

$$1 + |T_a x|^2 = \frac{(1 + |a|^2)(1 + |x|^2) - 4ax}{[x, a]^2}.$$

Первое из них есть просто формула (33) п. 2.7, а второе легко выводится из формулы (32) этого же пункта. Находим, что

$$\frac{2T_a x}{1 - |T_a x|^2} = \left(1 + \frac{2aa^T}{1 - |a|^2}\right) \frac{2x}{1 - |x|^2} - \frac{2a}{1 - |a|^2} \cdot \frac{1 + |x|^2}{1 - |x|^2},$$

$$\frac{1 + |T_a x|^2}{1 - |T_a x|^2} = \frac{1 + |a|^2}{1 - |a|^2} \cdot \frac{1 + |x|^2}{1 - |x|^2} - \frac{2a^T}{1 - |a|^2} \cdot \frac{2x}{1 - |x|^2};$$

здесь  $a$  понимается как вектор-столбец, а  $a^T$  — как соответствующая вектор-строка;  $aa^T$  есть матрица с элементами  $a_i a_j$ . Было показано, что  $\sigma(T_a x) = A_a \sigma(x)$ , где

$$A_a = \begin{pmatrix} I_n + \frac{2aa^T}{1 - |a|^2} & -\frac{2a}{1 - |a|^2} \\ -\frac{2a^T}{1 - |a|^2} & \frac{1 + |a|^2}{1 - |a|^2} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Эта блочная матрица приспособлена для использования в декартовом произведении  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

Мы уже знаем, что  $A_a$  принадлежит  $O(n, 1)^+$ ; в этом можно убедиться также, проверив выполнение условия (11). Не-

трудно заметить, что определитель матрицы  $A_a$  равен определителю матрицы

$$\begin{pmatrix} I_n & \frac{-2a}{1-|a|^2} \\ -a^T & \frac{1+|a|^2}{1-|a|^2} \end{pmatrix},$$

который в свою очередь равен 1. Поэтому  $A_a \in SO(n, 1)^+$ .

Очевидно, что отображение  $kT_a$  соответствует матрице

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T_a,$$

которая принадлежит группе  $O(n, 1)^+$ , если  $k \in O(n)$ , и группе  $SO(n, 1)^+$ , если  $k \in SO(n)$ . Тем самым доказательство изоморфизмов  $\hat{M}(\mathbb{R}^{n-1}) \cong O(n, 1)^+$  и  $M(\mathbb{R}^{n-1}) \cong SO(n, 1)^+$  закончено.

Переход к группе  $O(n, 1)$  приводит к потере двух размерностей. Например, классическая группа Мёбиуса  $M(\mathbb{C})$  представляется лоренцевой группой  $SO(3, 1)$  матриц размера  $4 \times 4$ . В практических приложениях это вряд ли ведет к упрощению, но с теоретической точки зрения важно знать, что каждая группа Мёбиуса может быть представлена матричной группой.

#### IV. ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

**4.1.** Я хочу рассмотреть дифференциальную геометрию с несколько наивной точки зрения — просто как набор правил для замены координат.

Дифференцируемое  $n$ -мерное многообразие — это множество, покрытое координатными окрестностями так, что пересекающиеся части связаны заменами координат вида

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Эти замены координат должны быть обратимыми, что эквивалентно невырожденности матрицы Якоби  $\|\partial \bar{x}_i / \partial x_j\|$ . Кроме того, замены координат всегда предполагаются отображениями класса  $C^\infty$ .

Типичным *контравариантным вектором* служит *дифференциал*

$$d\bar{x}^i = \sum_j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x_j} dx^j. \quad (2)$$

Отметим, что верхние индексы всегда используются здесь только для дифференциалов и никогда не используются для переменных.

Произвольный контравариантный вектор представляет собой систему векторнозначных функций, одну для каждой системы координат, связанных соотношениями вида (2), а именно

$$\bar{a}^i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} a^j. \quad (3)$$

Здесь использовано соглашение о суммировании по одинаковым индексам, которое всегда будет применяться и в дальнейшем.

Подобно этому, типичным ковариантным вектором является производная (или градиент)

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i}. \quad (4)$$

Будем использовать нижние индексы для ковариантных векторов. Общее правило при замене координат для произвольных ковариантных векторов выглядит так:

$$\bar{b}_i = b_j \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i}. \quad (5)$$

Эта идея переносится и на тензоры более высокого ранга. Ниже выписаны правила для контравариантных, ковариантных и смешанных тензоров второго порядка:

$$\bar{a}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_h} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_k} a^{hk},$$

$$\bar{a}_{ij} = a_{hk} \frac{\partial x_h}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_j},$$

$$\bar{a}_j^i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_h} a_k^h \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_j}.$$

Имеет смысл говорить о симметрических или о кососимметрических тензорах, поскольку если  $a^{hk} = a^{kh}$ , то и  $\bar{a}^{ij} = \bar{a}^{ji}$ , т. е. эти свойства сохраняются при заменах координат.

Символ Кронекера  $\delta_j^i$  является смешанным тензором с одинаковыми компонентами во всех координатных системах. Действительно,

$$\bar{\delta}_j^i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_h} \delta_k^h \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_j} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial \bar{x}_j} = \delta_j^i,$$

так как матрицы  $\partial \bar{x}_i / \partial x_j$  и  $\partial x_j / \partial \bar{x}_i$  взаимно обратны.

**4.2.** Важным способом образования новых тензоров является *свертка*. Например, если  $a_j^k$  — дважды ковариантный

и один раз контравариантный тензор, то

$$a_i = a^j_{ij} \quad (\text{суммирование по } j!)$$

есть ковариантный вектор, поскольку

$$\bar{a}^k_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i} a^h_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_l}$$

и

$$\bar{a}^j_{ij} = \delta_{hs} a^h_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial \bar{x}_i} = a^s_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial \bar{x}_i}$$

**4.3.** Дифференцируемое многообразие становится римановым пространством, если определить на нем метрический тензор  $g_{ij}$ , матрица которого положительно определена. Этот тензор служит различным целям:

- 1) определяет элемент длины и элемент объема;
- 2) употребляется для поднятия и опускания индексов;
- 3) определяет ковариантное дифференцирование;
- 4) определяет параллельный перенос.

Элемент длины определяется формулой

$$ds = (g_{ij} dx^i dx^j)^{1/2},$$

а длина кривой  $\gamma$  — формулой

$$l(\gamma) = \int_{\gamma} ds.$$

Так как  $g_{ij}$  является ковариантным тензором второго ранга, а дифференциалы  $dx^i$  контравариантны, то значения  $ds$  не зависят от выбора локальных координат.

Определитель матрицы  $g_{ij}$  обозначим через  $g$ . Тогда  $\sqrt{g}$  преобразуется при заменах координат как *плотность*, в том смысле, что

$$\sqrt{\bar{g}} = \left( \det \frac{\partial (x_1, \dots, x_n)}{\partial (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} \right) \sqrt{g}.$$

Это следует из правила умножения определителей. Вышесказанное позволяет определить инвариантный объем при помощи формулы

$$V = \int \sqrt{g} dx^1 \dots dx^n$$

(здесь мы рассматриваем только замены координат, сохраняющие ориентацию).

**4.4.** Обозначим матрицу, обратную к матрице  $g_{ij}$ , через  $g^{ij}$ . Она с очевидностью задает контравариантный тензор

ранга 2. Умножение тензоров на  $g_{ij}$  или на  $g^{ij}$  с последующей сверткой приводит к поднятию или опусканию индексов. Например,

$$g_{ij}a^j = a_i, \quad g^{ij}b_j = b^i.$$

Смешанные компоненты тензора  $g_{ij}$  равны

$$g_j^i = g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i.$$

4.5. Градиент  $\partial f/\partial x_i$  скалярной функции  $f$  является ковариантным вектором. Для других тензоров дифференцирование компонент не приводит само по себе к новому тензору. Поэтому его необходимо заменить ковариантным дифференцированием, которое мы дальше определим.

Введем символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right), \quad (6)$$

$$\Gamma_{ij}^h = g^{hk}\Gamma_{ij,k}. \quad (7)$$

Для того чтобы узнать, как они преобразуются при замене координат, начнем с соотношения

$$g_{ij} = g_{ab} \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{x}_b}{\partial x_j}.$$

Продифференцировав его по правилу дифференцирования композиции, получим

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial g_{ab}}{\partial \bar{x}_c} \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{x}_b}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{x}_c}{\partial x_k} + g_{ab} \left( \frac{\partial^2 \bar{x}_a}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial \bar{x}_b}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \bar{x}_a}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial \bar{x}_b}{\partial x_i} \right)$$

(в последнем члене мы поменяли местами индексы  $a$  и  $b$ ).

Перестановка нижних индексов приводит к соотношению

$$\Gamma_{ij,k} = \overline{\Gamma_{ab,c}} \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{x}_b}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{x}_c}{\partial x_k} + g_{ab} \frac{\partial^2 \bar{x}_a}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \bar{x}_b}{\partial x_k}. \quad (8)$$

Дополнительный член справа показывает, что  $\Gamma_{ij,k}$  не является тензором.

Умножив обе части равенства (8) на

$$g^{hk} = \frac{\partial x_h}{\partial \bar{x}_d} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_c} g^{cd},$$

получим

$$\Gamma_{ij}^h = \overline{\Gamma_{ab}^d} \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{x}_b}{\partial x_j} \frac{\partial x_h}{\partial \bar{x}_d} + \frac{\partial^2 \bar{x}_d}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_h}{\partial \bar{x}_d}. \quad (9)$$

Здесь опять присутствует дополнительный член.

Используем равенство (9) для нахождения смешанных производных  $\frac{\partial^2 \bar{x}_k}{\partial x_i \partial x_j}$ . Умножив (9) на  $\frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_h}$ , придем к равенству

$$\frac{\partial^2 \bar{x}_k}{\partial x_i \partial x_j} = \Gamma_{ij}^h \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_h} - \Gamma_{a,b}^k \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{x}_b}{\partial x_j}. \quad (10)$$

**4.6.** Покажем, что если  $v^i$  — контравариантный вектор, то

$$\nabla_i v^j = \frac{\partial v^j}{\partial x_i} + \Gamma_{ik}^j v^k \quad (11)$$

является смешанным тензором. Из равенства

$$\bar{v}^j = \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_h} v^h$$

получаем

$$\frac{\partial \bar{v}^j}{\partial x_i} = \frac{\partial v^h}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_h} + \frac{\partial^2 \bar{x}_j}{\partial x_h \partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_i} v^h.$$

Для исключения смешанных производных воспользуемся равенством (10):

$$\frac{\partial \bar{v}^j}{\partial x_i} = \frac{\partial v^h}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_h} + \left( \Gamma_{hk}^a \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_a} - \Gamma_{ab}^j \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial x_h} \frac{\partial \bar{x}_b}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial x_i} v^h.$$

Последний член этого равенства приводится к  $\bar{\Gamma}_{ai}^j \bar{v}^a$ . Перенесем его в левую часть, которая после этого станет равной

$$\frac{\partial \bar{v}^j}{\partial x_i} + \bar{\Gamma}_{ai}^j \bar{v}^a = \nabla_i \bar{v}^j.$$

Справа у нас осталось

$$\frac{\partial v^h}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_h} + \Gamma_{hk}^a \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_a} \frac{\partial x_k}{\partial x_i} v^h.$$

Поменяв местами индексы  $h$  и  $a$  во втором члене, получим, что правая часть равна

$$\left( \frac{\partial v^h}{\partial x_k} + \Gamma_{ak}^h v^a \right) \frac{\partial x_k}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_h},$$

и тем самым мы показали, что

$$\nabla_i \bar{v}^j = \nabla_k v^h \frac{\partial x_k}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_h},$$

а это есть правило преобразования смешанных тензоров,

На эту формулу похоже выражение для ковариантной производной ковариантного вектора:

$$\nabla_i u_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \Gamma_{ij}^a u_a.$$

Доказательство этого соотношения мы опускаем.

Общее правило ковариантного дифференцирования заключается в том, чтобы прибавить один член для каждого контравариантного индекса и вычесть один член для каждого ковариантного индекса. Например,

$$\nabla_h v_{ij}^k = \frac{\partial v_{ij}^k}{\partial x_h} + \Gamma_{ha}^k v_{ij}^a - \Gamma_{ih}^a v_{aj}^k - \Gamma_{jh}^a v_{ai}^k.$$

Можно проверить, что ковариантное дифференцирование произведения подчиняется обычным правилам. Другое практическое правило заключается в том, что метрические тензоры  $g_{ij}$ ,  $g^{ij}$ ,  $\delta_j^i$  при ковариантном дифференцировании ведут себя как постоянные. Например,

$$\begin{aligned} \nabla_k g_{ij} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \Gamma_{ki}^a g_{aj} - \Gamma_{kj}^b g_{ib} = \\ &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \Gamma_{ki, j} - \Gamma_{kj, i} = 0. \end{aligned}$$

Как обычно, будем писать  $\nabla^k = g^{kh} \nabla_h$ .

4.7. Если  $f$  — скаляр, то

$$\nabla_k \nabla_j f = \nabla_k \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} - \Gamma_{jk}^a \frac{\partial f}{\partial x_a}$$

симметрично по  $j$  и  $k$ , откуда

$$(\nabla_k \nabla_j - \nabla_j \nabla_k) f = 0.$$

Для других тензоров такое соотношение не верно. Например, действуя на ковариантный вектор, получаем, что

$$(\nabla_k \nabla_j - \nabla_j \nabla_k) v_i = R_{ijk}^a v_a,$$

где  $R_{ijk}^a$  — тензор, называемый *тензором кривизны метрики*  $g_{ij}$ . Он выражается довольно сложной формулой

$$R_{ijk}^h = \frac{\partial \Gamma_{kl}^h}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^h}{\partial x_k} + \Gamma_{ki}^a \Gamma_{aj}^h - \Gamma_{ji}^a \Gamma_{ak}^h, \quad (12)$$

вывод которой мы опускаем.

Свертка тензора кривизны по индексам  $h$  и  $k$  приводит к кривизне Риччи

$$R_{ij} = R^a_{ija}, \quad (13)$$

а двойная свертка — к скалярной кривизне

$$R = R^a_a = g^{ab} R_{ab}. \quad (14)$$

4.8. Как векторы, так и тензоры лежат в касательных пространствах, приложенных к каждой точке дифференцируемого многообразия, однако никакого способа автоматического сравнения векторов и тензоров в различных точках нет. Этой цели служит понятие параллельного переноса, или связности. Мы будем использовать только самую простую связность, известную как риманова связность.

Пусть  $x = x(t)$  представляет кривую  $\gamma$  в римановом пространстве с метрическим тензором  $g_{ij}$ ; предположим, что  $x(t) \in C^\infty$ . Пусть  $\xi(t)$  — контравариантный вектор в точке  $x(t)$ .

**Определение.** Будем говорить, что вектор  $\xi(t)$  остается параллельным вдоль кривой  $\gamma$ , если для всех  $t$

$$\nabla_k \xi^i(t) x'_k(t) = 0. \quad (15)$$

В более явном виде (15) записывается так:

$$\left( \frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} + \Gamma^i_{kj} \xi^j \right) \frac{dx_k}{dt} = 0 \quad (16)$$

или

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial t} + \Gamma^i_{kj} \frac{dx_k}{dt} \xi^j = 0. \quad (17)$$

Это есть система линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Так как  $\Gamma^i_{kj}$  и  $\frac{dx_k}{dt}$  принадлежат классу  $C^\infty$ , то она имеет единственное решение при заданных начальных условиях  $\xi^i(t_0)$ . Другими словами, каждый вектор  $\xi(t_0)$  определяет вектор  $\xi(t)$ , полученный параллельным переносом вдоль  $\gamma$ .

4.9. Длина вектора  $\xi$  в римановой метрике равна

$$\langle \xi, \xi \rangle^{1/2} = \left( \sum_{i,j} g_{ij} \xi^i \xi^j \right)^{1/2},$$

а угол между векторами  $\xi$  и  $\eta$  находится из равенства

$$\cos \theta = \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{\langle \xi, \xi \rangle^{1/2} \langle \eta, \eta \rangle^{1/2}},$$

где

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} \xi^i \eta^j.$$

**Теорема.** *Внутреннее произведение  $\langle \xi, \eta \rangle$ , а вместе с ним длина и угол остаются постоянными при параллельном переносе.*

Доказательство теоремы получается прямым вычислением с использованием формулы (16) и тождества

$$\Gamma_{ki, j} + \Gamma_{kj, i} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}.$$

**4.10. Определение.** Кривая  $x(t)$ ,  $0 \leq t \leq t_0$ , называется *геодезической*, если касательный вектор  $x'(t)$  остается параллельным самому себе.

Положив в уравнении (16)  $\xi^i = dx_i/dt$ , получим уравнение геодезической

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \Gamma_{kj}^i \frac{dx_k}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0. \quad (18)$$

Является ли данная кривая геодезической или нет, зависит не только от ее формы, но и от параметризации. На основании теоремы длина вектора  $x'(t)$  остается вдоль геодезической постоянной. Если мы заменяем параметр  $t$  на  $\tau$ , то длина должна умножаться на  $dt/d\tau$ , а при линейной замене  $t = a\tau + b$  длина будет отличаться от исходной лишь постоянным множителем.

Можно рассматривать (18) как систему дифференциальных уравнений для функций  $x_i(t)$ . Согласно общей теории дифференциальных уравнений, можно задавать любые начальные значения функций  $x_i(0)$  и производных  $x'_i(0)$ . Другими словами, существуют геодезические, выходящие из любой точки в любом направлении. Кроме того, можно произвести нормировку так, чтобы касательный вектор имел единичную длину; в этом случае параметр  $t$  равен длине кривой и обычно обозначается через  $s$ .

Теорема существования обеспечивает существование решения  $x(t)$  только в некотором малом интервале  $[0, t_0]$ , однако можно начать снова из точки  $x(t_0)$ . Тем самым геодезическую можно продолжать до тех пор, пока она не «дойдет до идеальной границы».

Геодезическая является, по крайней мере локально, кратчайшей дугой между своими концами. Этот факт доказывается в *вариационном исчислении*.

**4.11.** Применим теперь введенные дифференциально-геометрические понятия к единичному шару  $B^n$  с метрикой Пуан-

каре

$$ds^2 = \frac{4(dx_1^2 + \dots + dx_n^2)}{(1 - |x|^2)^2}. \quad (19)$$

Необычность ситуации состоит в том, что можно использовать единую систему координат во всем пространстве  $B^n$ , а именно отождествить каждую точку  $x \in B^n$  с ее евклидовыми координатами  $(x_1, \dots, x_n)$ . Любой диффеоморфизм шара  $B^n$  приводит к другой системе координат, но мы рассмотрим только те замены координат, которые имеют вид

$$\bar{x} = \gamma x, \quad (20)$$

где  $\gamma \in M(B^n)$ . Это означает, что мы интересуемся только *конформной структурой*  $B^n$ .

Метрика (19) соответствует метрическому тензору

$$g_{ij} = \frac{4\delta_{ij}}{(1 - |x|^2)^2}, \quad g^{ij} = \frac{(1 - |x|^2)^2}{4} \delta_{ij}. \quad (21)$$

Мы рассмотрим несколько более общую ситуацию, а именно произвольную конформную метрику

$$ds^2 = \rho^2 |dx|^2,$$

для которой

$$g_{ij} = \rho^2 \delta_{ij}, \quad g^{ij} = \rho^{-2} \delta_{ij}$$

(здесь  $\delta_{ij}$  — элементы единичной матрицы, а не тензора).

Вычислим тензор кривизны. Удобно пользоваться следующими обозначениями:

$$u = \log \rho, \quad u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} &= 2\rho^2 \delta_{ij} u_k, \\ \Gamma_{ij, k} &= \rho^2 (\delta_{ik} u_j + \delta_{jk} u_i - \delta_{ij} u_k), \\ \Gamma_{ij}^h &= \delta_{ih} u_j + \delta_{jh} u_i - \delta_{ij} u_h, \\ \frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x_k} &= \delta_{ih} u_{jk} + \delta_{jh} u_{ik} - \delta_{ij} u_{hk}, \\ R_{ijk}^h &= \delta_{hk} (u_{ij} - u_i u_j) - \delta_{ik} (u_{hj} - u_h u_j) + \\ &\quad + \delta_{ij} (u_{hk} - u_h u_k) - \delta_{hj} (u_{ik} - u_i u_k) + \\ &\quad + (\delta_{ij} \delta_{hk} - \delta_{ik} \delta_{hj}) |\nabla u|^2, \\ R_{ij} &= \delta_{ij} \Delta u + (n-2) (u_{ij} - u_i u_j + \delta_{ij} |\nabla u|^2). \end{aligned}$$

Для метрики Пуанкаре имеем:

$$u = \log \rho = \log 2 - \log (1 - |x|^2),$$

$$u_i = \frac{2x_i}{1 - |x|^2}, \quad u_{ij} = \frac{2\delta_{ij}}{1 - |x|^2} + \frac{4x_i x_j}{(1 - |x|^2)^2},$$

$$u_{ij} - u_i u_j = \frac{2\delta_{ij}}{1 - |x|^2}, \quad |\nabla u|^2 = \frac{4|x|^2}{(1 - |x|^2)^2},$$

$$R_{ijk}^h = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} (\delta_{hk} \delta_{ij} - \delta_{ik} \delta_{hj}),$$

$$R_{hijk} = \frac{16}{(1 - |x|^2)^4} (\delta_{hk} \delta_{ij} - \delta_{ik} \delta_{hj}) = g_{hk} g_{ij} - g_{ik} g_{jh},$$

$$R_{ij} = \frac{4(n-1)\delta_{ij}}{(1 - |x|^2)^2}, \quad R = g^{ij} R_{ij} = n(n-1).$$

Скалярная кривизна постоянна, но не равна  $-1$ . Однако формула для  $R_{hijk}$  показывает<sup>1)</sup>, что секционная кривизна постоянна и равна  $-1^2$ .

**4.12. Параметр Бельтрами.** Есть три важных инвариантных дифференциальных оператора, обобщающих — градиент, дивергенцию и лапласиан.

а) Градиент отображает функции в векторы. Если  $f$  — скалярная функция, то

$$\nabla_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

является ковариантным вектором. Ему соответствует контравариантный вектор

$$\nabla^i f = g^{ij} \nabla_j f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Квадрат длины градиента  $\nabla_i f$  можно записать либо в виде скалярного произведения  $\nabla^i f \cdot \nabla_i f$ , либо в виде

$$g_{ij} \nabla^i f \nabla^j f = g^{ij} \nabla_i f \nabla_j f = |\nabla f|^2 = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}. \quad (22)$$

<sup>1)</sup> См. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1948, с. 104, формула (25.9). [Подробное изложение этих вопросов можно найти в любой книге по современной дифференциальной геометрии; см., например, Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. Пер. с англ. — М.: Наука, 1981. — *Ред.*]

<sup>2)</sup> Напомним, что секционная кривизна риманова многообразия  $M$  в точке  $x$  вдоль двумерной плоскости  $E$  касательного пространства  $T_x(M)$  — это гауссова кривизна  $K(x, E)$  в точке  $x$  поверхности  $\text{Exp}(N_0 \cap E)$ , где  $N_0$  — окрестность нуля в  $T_x(M)$  и  $\text{Exp}$  — экспоненциальное отображение. Если при этом  $R_{ijkl} = -K(x)(g_{jk}(x)g_{il}(x) - g_{ik}(x)g_{jl}(x))$ , то  $K(x, E) = K(x)$  для любого плоского сечения  $E$ ; если, кроме того,  $M$  связно и  $\dim M \geq 3$ , то по лемме Шура кривизна  $K(x)$  постоянна на  $M$ . — *Прим. перев.*

Выражение  $|\nabla f|^2$  в (22) называется *первым параметром Бельтрами* и обычно обозначается через  $\nabla_1 f$ . Он очевидным образом служит обобщением квадрата градиента.

б) Дивергенция переводит векторы в скаляры. Если  $v$  — векторнозначная функция, то ее дивергенция определяется как

$$\operatorname{div} v = \nabla_i v^i = \nabla^i v_i. \quad (23)$$

Два выражения, данные в (23), совпадают, поскольку  $g^{ij}$  ведет себя как постоянная, и мы получаем, что

$$\nabla_i v^i = \nabla_i g^{ij} v_j = g^{ij} \nabla_i v_j = \nabla^i v_j.$$

Из равенства  $\nabla_i v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x_i} + \Gamma_{ik}^i v^k$  следует, что

$$\nabla_i v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x_i} + \Gamma_{ik}^i v^k. \quad (24)$$

Существует простая формула для  $\Gamma_{ik}^i$ . На основании известного правила дифференцирования определителя имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \log g = \operatorname{tr} \left( g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_k} \right) = g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}.$$

Но  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = \Gamma_{ki, j} + \Gamma_{kj, i}$  и, следовательно,

$$g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = g^{ij} \Gamma_{ki, j} + g^{ij} \Gamma_{kj, i} = 2\Gamma_{ki}^i;$$

поэтому имеет место равенство

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{\partial}{\partial x_k} \log \sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_k} \sqrt{g}. \quad (25)$$

Из (24) и (25) получается формула

$$\operatorname{div} v = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{g} v^i). \quad (26)$$

с) Комбинируя оба оператора, получаем *второй параметр Бельтрами*:

$$\Delta_2 f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right). \quad (27)$$

Он является прямым обобщением лапласиана и часто называется оператором Лапласа — Бельтрами.

Этот оператор важен потому, что он не зависит от выбора локальных координат. Например, если функция  $f$  определена

на  $B^n$  и мы используем в  $B^n$  метрику Пуанкаре, то для любого элемента  $\gamma \in M(B^n)$

$$\Delta_2(f \circ \gamma) = (\Delta_2 f) \circ \gamma. \quad (28)$$

Для краткости решения уравнения  $\Delta_2 f = 0$  в шаре  $B^n$  будем называть *гиперболически гармоническими* или *гипергармоническими функциями*. Из равенства (28) видно, что если  $f$  — гипергармоническая функция, то функция  $f \circ \gamma$  также гипергармонична. Для обычных гармонических функций это не имеет места, за исключением, как мы увидим позже, случая  $n = 2$ .

В римановом пространстве решения уравнения  $\Delta_2 f = 0$  будем называть просто *гармоническими функциями*, так как нет опасности спутать их с другими.

**4.13.** Вычислим  $\Delta_2 f$  для конформной метрики  $ds = \rho |dx|$ . Получим просто

$$\Delta_2 f = \rho^{-n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho^{n-2} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right). \quad (29)$$

В частном случае  $\rho = \frac{2}{1 - |x|^2}$  имеем

$$\Delta_2 f = \frac{(1 - |x|^2)^2}{4} \left[ \Delta f + \frac{2(n-2)}{1 - |x|^2} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right]. \quad (30)$$

Применяя обычное обозначение  $|x| = r$ , получаем

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = r \frac{\partial f}{\partial r},$$

$$\Delta_2 f = \frac{(1 - r^2)^2}{4} \left[ \Delta f + \frac{2(n-2)}{1 - r^2} r \frac{\partial f}{\partial r} \right]. \quad (31)$$

Для верхнего полупространства  $\rho = 1/x_n$  и

$$\Delta_2 f = x_n^2 \left[ \Delta f - (n-2) \frac{1}{x_n} \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]. \quad (32)$$

## V. ГИПЕРГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

**5.1.** Теперь мы изучим гипергармонические функции в шаре  $B^n$ . Нашей первой задачей будет нахождение всех решений  $u(x)$  уравнения  $\Delta_2 u = 0$ , зависящих только от  $r = |x|$ . Для функции  $u(r)$  имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u'(r) \frac{x_i}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u''(r) \frac{x_i x_j}{r^2} + u'(r) \left( \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3} \right)$$

и, следовательно,

$$\Delta u = u''(r) + (n-1) \frac{u'(r)}{r}.$$

Согласно уравнению (31) из п. 4.13, функция  $u(r)$  удовлетворяет уравнению

$$u''(r) + (n-1) \frac{u'(r)}{r} + \frac{2(n-2)}{1-r^2} r u'(r) = 0. \quad (1)$$

При  $u'(r) \neq 0$  его можно переписать в виде

$$\frac{u''(r)}{u'(r)} + \frac{(n-1)}{r} + \frac{2(n-2)r}{1-r^2} = 0$$

или

$$\frac{d}{dr} [\log u'(r) + (n-1) \log r - (n-2) \log(1-r^2)] = 0,$$

откуда заключаем, что

$$u'(r) \frac{r^{n-1}}{(1-r^2)^{n-2}} = \text{const.}$$

Это приводит к общему решению

$$u(r) = a \int \frac{(1-t^2)^{n-2}}{t^{n-1}} dt + b. \quad (2)$$

Отсюда видно, что ни одно решение не может оставаться конечным для  $r=0$ . В качестве нормированного решения возьмем функцию

$$g(r) = \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n-2}}{t^{n-1}} dt. \quad (3)$$

Для  $n=2$  имеем  $g(r) = \log \frac{1}{r}$ , а если  $n > 2$ , то  $g(r) \sim \frac{1}{n-2} r^{2-n}$  при  $r \rightarrow 0$  и  $g(r) = O((1-r)^{n-1})$  при  $r \rightarrow 1$ . Для  $n=3$

$$g(r) = \left( \sqrt{r} - \frac{1}{\sqrt{r}} \right)^2 = \frac{1}{r} + r - 2.$$

**5.2.** Если  $g(r)$  — гипергармоническая функция, то для любого элемента  $\gamma \in M(B^n)$  функция  $g(|\gamma x|)$  также будет гипергармонической, поскольку из формулы (29) п. 4.13 следует, что  $\gamma$  коммутирует с оператором Лапласа — Бельтрами. В частности, функция

$$g(x, y) = g(|T_y x|) = g\left(\frac{|x-y|}{[x, y]}\right) \quad (4)$$

имеет особенность в точке  $y$  и может рассматриваться как функция Грина с полюсом в  $y$ .

5.3. Тот факт, что гипергармоническая функция, зависящая только от  $r$ , либо постоянна, либо имеет довольно сильную особенность, наводит на мысль, что любая изолированная особенность каждой гипергармонической функции также должна быть существенной. В теории функций для изучения таких вопросов обычно применяют интегральные формулы, главным образом интегральную формулу Коши, а для обычных гармонических функций — формулу Грина.

В случае гипергармонических функций есть два подхода к данному вопросу. Один — вывод формулы Грина в общем случае римановых пространств; второй, относящийся только к гиперболическому пространству, — применение классической формулы Грина для выбранных подходящим образом функций, которые естественно связаны с гиперболической метрикой.

Мы будем применять оба метода, но начнем со второго, поскольку он намного проще.

5.4. В качестве подготовительного этапа полезно собрать некоторые факты, касающиеся кратных интегралов; в основном нас будут интересовать интегралы, связанные со сферами.

Напомним, что  $\Gamma$ -функция и  $B$ -функция Эйлера определяются формулами

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re} a > 0, \quad (5)$$

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \quad \operatorname{Re} a > 0, \quad \operatorname{Re} b > 0. \quad (6)$$

Эти функции тесно связаны между собой. Подстановка  $t = x^2$  в (5) дает

$$\Gamma(a) = 2 \int_0^{\infty} x^{2a-1} e^{-x^2} dx, \quad (7)$$

а если в выражение для  $B(a, b)$  подставить  $t = \sin^2 \varphi$ , то получим

$$B(a, b) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1} \varphi \cos^{2b-1} \varphi d\varphi. \quad (8)$$

Из (7) имеем

$$\Gamma(a) \Gamma(b) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^{2a-1} y^{2b-1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

и, перейдя к полярным координатам, найдем, что

$$\begin{aligned} \Gamma(a) \Gamma(b) &= 4 \int_0^{\infty} r^{2a+2b-1} e^{-r^2} dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2a-1} \varphi \sin^{2b-1} \varphi d\varphi = \\ &= \Gamma(a+b) B(a+b). \end{aligned}$$

Поэтому

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad (9)$$

В частности, так как  $B(1/2, 1/2) = \pi$  и  $\Gamma(1) = 1$ , то

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \quad (10)$$

Обозначим через  $\omega_n$  «площадь поверхности», или  $(n-1)$ -мерную евклидову меру,  $(n-1)$ -мерной единичной сферы  $S^{n-1}$  (некоторые авторы предпочитают обозначение  $\omega_{n-1}$ ). Тогда площадь  $(n-1)$ -мерной сферы  $S^{n-1}(r)$  радиуса  $r$  равна  $\omega_n r^{n-1}$ , а объем  $n$ -мерного шара  $V^n(r)$  равен

$$V_n(r) = \int_0^r \omega_n r^{n-1} dr = \frac{\omega_n}{n} r^n.$$

Для вычисления площади сферической шапочки радиуса  $\varphi$  (измеряемой относительно единичной сферы) спроектируем ее на экваториальную плоскость  $x_n = 0$  и заметим, что элемент площади на сфере равен

$$d\sigma = \frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{x_n}.$$

Поэтому площадь шапочки равна

$$A(\varphi) = \omega_{n-1} \int_0^{\sin \varphi} \frac{r^{n-2}}{x_n} dr.$$

Полагая  $r = \sin \theta$ ,  $dr = \cos \theta d\theta$ ,  $x_n = \cos \theta$  (см. рис. 10), находим, что

$$A(\varphi) = \omega_{n-1} \int_0^{\varphi} \sin^{n-2} \theta d\theta. \quad (11)$$

В частности,

$$\omega_n = 2A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\omega_{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} \theta d\theta,$$

и потому

$$\frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} = B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Отсюда получаем, что  $\omega_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}$  не зависит от  $n$ , и так как  $\omega_2 = 2\pi$ , то

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \quad (12)$$

Для сравнения вычислим также площадь сферы и объем шара в гиперболическом пространстве. Напомним, что гиперболический радиус  $s$  шара с центром в точке  $O$  связан с евклидовым радиусом соотношением  $r = \text{th} \frac{s}{2}$ . Поэтому неевклидова площадь сферы равна

$$\omega_n \frac{2^{n-1} r^{n-1}}{(1-r^2)^{n-1}} = \omega_n \text{sh}^{n-1} s,$$

а объем шара равен

$$V_h(s) = \omega_n \int_0^s \text{sh}^{n-1} t \, dt \quad (13)$$

(обозначение  $V_h(s)$  устанавливается для неевклидова

объема). Таким образом, получаются те же самые формулы, что и прежде, только обычный синус заменяется гиперболическим, а вместо  $n$  стоит  $n+1$ .

5.5. Вернемся к гипергармоническим функциям. Напомним классическую формулу Грина:

$$\int_D u \Delta v \, dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma - \int_D (\nabla u \cdot \nabla v) \, dx; \quad (14)$$

здесь  $D$  — область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $dx = dx_1 \dots dx_n$ ,  $\partial/\partial n$  — производная по направлению внешней нормали к гладкой границе  $\partial D$  и  $(\nabla u \cdot \nabla v)$  — внутреннее произведение градиентов.

Предположим теперь, что  $D$  лежит в шаре  $B^n$ , и заменим все величины, входящие в формулу (14), гиперболическими эквивалентами, используя для них следующие обозначения:

$$\text{элемент объема} \quad dx_h = \frac{2^n dx}{(1-|x|^2)^n},$$

$$\text{элемент площади} \quad d\sigma_h = \frac{2^{n-1} d\sigma}{(1-|x|^2)^{n-1}},$$

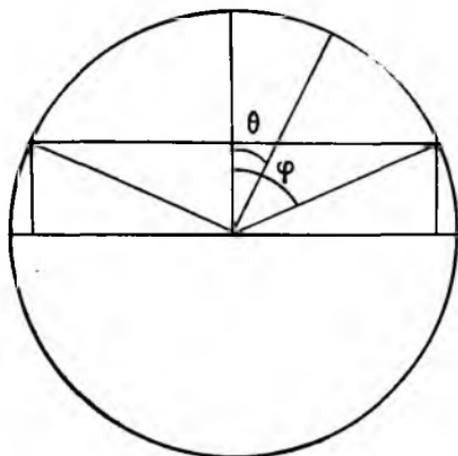


Рис. 10

нормальная производная  $\frac{\partial v}{\partial n_h} = \frac{1 - |x|^2}{2} \frac{\partial v}{\partial n}$ ,

градиент  $\nabla_h u = \frac{1 - |x|^2}{2} \nabla \hat{u}$ ,

лапласиан  $\Delta_h v = \Delta_2 v$ .

В этих обозначениях справедлива

**Лемма 1:**

$$\int_D u \Delta_h v \, dx_h = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n_h} \, d\sigma_h - \int_D (\nabla_h u \cdot \nabla_h v) \, dx_h. \quad (15)$$

Легко проверить, что это в точности формула (14), в которой  $u$  заменено на  $\hat{u} = 2^{n-2} (1 - |x|^2)^{2-n} u$ . Как обычно, можно исключить из правой части «интеграл Дирихле», если поменять местами  $u$  и  $v$  и вычесть одно из другого. В результате получим формулу

$$\int_D (u \Delta_h v - v \Delta_h u) \, dx_h = \int_{\partial D} \left( u \frac{\partial v}{\partial n_h} - v \frac{\partial u}{\partial n_h} \right) \, d\sigma_h, \quad (16)$$

которая является наиболее употребительной.

В частном случае  $v = 1$  получаем, что

$$\int_D \Delta_h u \, dx = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n_h} \, d\sigma_h \quad (17)$$

и для каждой гипергармонической функции поток равен нулю:

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n_h} \, d\sigma_h = 0. \quad (18)$$

В евклидовых терминах равенство (18) записывается в виде

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{d\sigma}{(1 - |x|^2)^{n-2}} = 0. \quad (19)$$

Если  $D = B(r)$ , то<sup>1)</sup>,

$$\int_{S(r)} \frac{\partial u}{\partial r} \, d\sigma = 0.$$

Другими словами, среднее значение

$$m(r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S(r)} u \, d\sigma$$

<sup>1)</sup> Начиная с этого момента  $n$  считается фиксированным, а вместо  $B^n$  в  $S^{n-1}$  мы будем писать соответственно  $B$  и  $S$ .

постоянно. В частности, если  $u$  является гипергармонической функцией в полной окрестности начала координат, то

$$u(0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S(r)} u d\sigma \quad (20)$$

для всех достаточно малых  $r$ . Это свойство среднего значения (теорема о среднем). Можно брать среднее значение относительно объема; при этом в силу сферической симметрии не важно, какой пользоваться мерой — евклидовой или неевклидовой. Однако неевклидово среднее инвариантно, и мы получаем, что справедлива следующая

**Лемма 2.** *Значение гипергармонической функции в центре неевклидовой сферы или шара равно ее неевклидову среднему.*

*Замечание.* Формулу для среднего значения можно доказать вообще без всяких вычислений. Действительно, можно написать

$$m(|x|) = \int_{O(n)} u(kx) dk,$$

где  $dk$  — мера Хаара на группе  $O(n)$ . Так как  $u(kx)$  является гипергармонической для всех  $k$ , то  $m(|x|)$  — гипергармоническая функция, зависящая только от  $|x|$ , и, значит, постоянная.

Следствием свойства среднего значения является выполнение для гипергармонических функций принципа максимума и минимума:

*Непостоянная гипергармоническая функция не может иметь локального максимума или минимума на открытом связном множестве.*

Доказательство такое же, как при  $n = 2$ .

**5.6.** Вопрос об устранимых особенностях гипергармонических функций имеет следующий ответ.

**Теорема 1.** *Пусть множество  $D \subset V$  открыто и точка  $a \in D$ . Если функция  $u(x)$  гипергармонична в  $D \setminus \{a\}$  и*

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) |x - a|^{n-2} = 0 \quad \text{при } n > 2$$

*или же*

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) \frac{1}{\log(1/|x - a|)} = 0 \quad \text{при } n = 2,$$

*то  $u$  имеет гипергармоническое продолжение в  $D$ .*

*Доказательство.* Без ограничения общности можно считать, что  $a = 0$  и  $D = B(\rho)$ ,  $\rho > 0$ . Фиксируем произвольную точку  $y \in B(\rho)$ ,  $y \neq 0$ , и применим лемму 1 к функциям  $u = u(x)$  и  $v = g(x, y)$  в области  $B(\rho) \setminus (B(r) \cup B(y, r))$ , где  $r < \min(|y|, \rho - |y|)$ . Так как  $\Delta_h u = \Delta_h v = 0$ , то

$$\int_{S(\rho) + S(r) + S(y, r)} \left( u(x) \frac{\partial g(x, y)}{\partial n_h} - g(x, y) \frac{\partial u(x)}{\partial n_h} \right) d\sigma_h(x) = 0. \quad (21)$$

Найдем предел этого интеграла при  $r \rightarrow 0$ . Рассмотрим сначала интеграл по сфере  $S(y, r)$ . Очевидно, что интеграл от второго члена стремится к 0, поскольку  $g(x, y) = O(1/r^{n-2})$  (или  $O(\log(1/r))$ ), в то время как  $\partial u / \partial n_h$  ограничена и  $d\sigma_h$  содержит множитель  $r^{n-1}$ . Интеграл от первого члена можно переписать в виде

$$-2^{n-2} \int_{|x-y|=r} (1 - |x|^2)^{2-n} u(x) \frac{\partial g(x, y)}{\partial r} r^{n-1} d\omega, \quad (22)$$

где  $d\omega$  — элемент телесного угла (или мера на сфере  $S^{n-1}$ ).

Напомним, что  $g(x, y) = g(|T_y x|)$  и  $|T_y x| = |x - y| / |x, y|$ . Поэтому

$$\begin{aligned} -\frac{\partial g(x, y)}{\partial r} &= -g'(|T_y x|) \frac{\partial |T_y x|}{\partial r} = \\ &= \frac{(1 - |T_y x|^2)^{n-2}}{|T_y x|^{n-1}} |T_y x| \frac{\partial}{\partial r} \log |T_y x| = \\ &= \left( \frac{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}{|x, y|^2} \right)^{n-2} \left( \frac{|x, y|}{|x - y|} \right)^{n-2} \frac{\partial}{\partial r} \log |T_y x| = \\ &= \left( \frac{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}{|x, y|} \right)^{n-2} \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial}{\partial r} \log |T_y x|. \end{aligned}$$

При этом  $[x, y] \rightarrow 1 - |y|^2$ , когда  $x \rightarrow y$ , и

$$r \frac{\partial}{\partial r} \log |T_y x| = r \frac{\partial}{\partial r} \log \frac{r}{|x, y|} \rightarrow 1.$$

Отсюда следует, что выражение (22) стремится к  $2^{n-2} \omega_n u(y)$ .

Теперь мы должны исследовать часть выражения (21), относящуюся к сфере  $S(r)$ . Заметим сначала, что на основании формулы Грина интеграл

$$\int_{S(r)} \left( u(x) \frac{\partial g(x, y)}{\partial n_h} - g(x, y) \frac{\partial u}{\partial n_h} \right) d\sigma_h(x) \quad (23)$$

не зависит от  $r$  и поэтому определен для всех  $y \in B(\rho) \setminus \{0\}$ . Более того, так как  $g(x, y) = g(y, x)$ , этот интеграл, очевидно, является гипергармонической функцией по  $y$ . Мы хотим

показать, что при выполнении условия ограниченности теоремы 1 этот интеграл тождественно равен нулю.

Перепишем формулу (23) в виде

$$\frac{2^{n-2}r^{n-1}}{(1-r^2)^{n-2}} \int_{S(1)} \left( u(r\xi) \frac{\partial g(r\xi, y)}{\partial r} - g(r\xi, y) \frac{\partial u(r\xi)}{\partial r} \right) d\omega(\xi). \quad (24)$$

Заметим, что функции  $g$  и  $\partial g/\partial r$  остаются ограниченными, когда  $r \rightarrow 0$ . Таким образом, условие  $u(x) |x|^{n-2} \rightarrow 0$  гарантирует, что предел первого члена равен нулю.

Для изучения второго члена напомним

$$\mu(r) = \int_{S(1)} g(r\xi, y) \frac{\partial u(r\xi)}{\partial r} d\omega(\xi).$$

Получаем, что

$$\begin{aligned} \int_r^{2r} \mu(t) dt &= \int_{S(1)} d\omega \int_r^{2r} g(t\xi, y) \frac{\partial u(t\xi)}{\partial t} dt = \\ &= \int_{S(1)} \left[ g(t\xi, y) u(t\xi) \Big|_r^{2r} - \int_r^{2r} u(t\xi) \frac{\partial g(t\xi, y)}{\partial t} dt \right] d\omega(\xi). \end{aligned}$$

Это выражение имеет порядок  $o(1/r^{n-2})$ . Следовательно, найдется  $t$ , лежащее между  $r$  и  $2r$ , для которого  $\mu(t) = o(1/t^{n-1})$ , и, так как  $\lim r^{n-1}\mu(r)$  существует, он обязательно равен нулю.

Теперь из (21) можно заключить, что

$$u(y) = -\frac{1}{\omega_n} \int_{S(\rho)} \left( u(x) \frac{\partial g(x, y)}{\partial n_h} - g(x, y) \frac{\partial u}{\partial n_h} \right) d\sigma_h.$$

Правая часть этого равенства является гипергармонической функцией в шаре  $B(\rho)$  и определяет искомое продолжение функции  $u$ .

**5.7. Граничные значения.** Если  $u$  гипергармонична в шаре  $B$  и имеет непрерывное продолжение на замыкание  $\bar{B}$ , то по теореме о среднем

$$u(0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} u(x) d\omega. \quad (25)$$

Применяя формулу (25) к функции  $u \circ \gamma$ , где  $\gamma \in M(B^n)$ , получим более общую формулу

$$u(\gamma 0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} u(\gamma x) d\omega(x). \quad (26)$$

Это можно сделать, так как функция  $u \circ \gamma$  также гипергармонична и непрерывно продолжается на границу.

Положим  $\gamma = T_y^{-1}$  для некоторой фиксированной точки  $y \in B$ . Так как  $T_y^{-1}0 = y$ , то

$$u(y) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} u(T_y^{-1}x) d\omega(x).$$

Заменив в этом интеграле  $x$  на  $T_y x$ , получим, что

$$u(y) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} u(x) |T'_y(x)|^{n-1} d\omega(x),$$

или, в более явном виде,

$$u(y) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} \left( \frac{1 - |y|^2}{|x - y|^2} \right)^{n-1} u(x) d\omega, \quad (27)$$

где мы воспользовались тем, что  $[x, y] = |x - y|$  для  $|x| = 1$ .

Это формула Пуассона для шара. Заметим, что ядро в ней есть не что иное, как  $(n - 1)$ -я степень ядра Пуассона для  $n = 2$ .

5.8. Введем обозначение

$$k(x, y) = (1 - |y|^2) / |x - y|^2,$$

считая, что  $|x| = 1$  и  $|y| < 1$ . Формула (27) позволяет предположить, что функция  $k(x, y)$  всегда гипергармонична по  $y$ .

Прямая проверка этого факта не представляет трудностей, но гораздо быстрее его можно получить, перейдя к верхнему полупространству  $H^n$ . Напомним, что для полупространства лапласиан имеет вид

$$\Delta_h = x_n^2 \left( \Delta - \frac{n-2}{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Отсюда сразу следует, что

$$\Delta_h x_n^\alpha = \alpha(\alpha - n + 1) x_n^\alpha.$$

Поэтому каждая функция  $x_n^\alpha$  является собственной функцией для оператора  $\Delta_h$ , а  $x_n^{n-1}$  гипергармонична.

Напомним (см. п. 3.5), что каноническое отображение  $B^n \rightarrow H^n$  обладает свойством

$$x_n = \frac{1 - |y|^2}{|y - e_n|^2} = k(e_n, y),$$

где  $x \in H^n$ ,  $y \in B^n$ . Отсюда заключаем, что  $k(e_n, y)^\alpha$  является собственной функцией для  $\Delta_h$  в шаре  $B^n$  и что  $k(e_n, y)^{n-1}$

гипергармонична. Для любой точки  $x \in S^{n-1}$  найдется такое вращение  $\beta$ , что  $\beta x = e_n$  (я приношу извинения за двоякое использование обозначения  $x$ ). Но очевидно, что  $k(x, y) = k(\beta^{-1}e_n, y) = k(e_n, \beta y)$ . На основании инвариантности заключаем, что

$$\Delta_n k(x, y)^\alpha = \alpha(\alpha - n + 1)k(x, y)^\alpha \quad (28)$$

и  $\Delta_n k(x, y)^{n-1} = 0$ .

5.9. Предположим теперь, что функция  $f(x)$  принадлежит классу  $L_1(S^{n-1})$ , т. е.

$$\int_{S^{n-1}} |f(x)| d\omega(x) < \infty.$$

Тогда можно определить функцию

$$u(y) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} k(x, y)^{n-1} f(x) d\omega(x), \quad (29)$$

которая с очевидностью является гипергармонической.

**Теорема 2.** *Функция  $u(y)$  почти всюду на  $S^{n-1}$  имеет радиальные пределы  $f(x)$ .*

*Доказательство.* Известно, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\int_{B(\xi, \delta)} f(x) d\omega(x)}{\int_{B(\xi, \delta)} d\omega(x)} = f(\xi) \quad (30)$$

для почти всех  $\xi \in S^{n-1}$  (см., например, Rudin W. Real and Complex Analysis. — New York: McGraw-Hill, 1966, теорема 8.8<sup>1)</sup>). Докажем, что  $u(r\xi) \rightarrow f(\xi)$  при  $r \rightarrow 1$ , если выполнено равенство (30). Можно считать, что  $\xi = e_n$ , и поэтому

$$u(re_n) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} k(x, re_n)^{n-1} f(x) d\omega(x).$$

Введем широту  $\varphi$ , определяемую из равенства  $x_n = \cos \varphi$ , и заменим обозначение ядра  $k(x, y)$  на

$$K(r, \varphi) = \frac{1}{\omega_n} \left( \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \varphi + r^2} \right)^{n-1}.$$

<sup>1)</sup> Это хорошо известное свойство суммируемых функций и их точек Лебега. — Прим. ред.

Кроме того, будем обозначать через

$$F(\varphi) = \int_{x_n > \cos \varphi} f(x) d\omega(x)$$

интеграл от функции  $f$  по полярной шапочке радиуса  $\varphi$ . Тогда очевидно, что формула для  $u(re_n)$  может быть записана в виде

$$u(re_n) = \int_0^\pi K(r, \varphi) F'(\varphi) d\varphi, \quad (31)$$

где  $F'(\varphi)$  существует почти всюду и мера  $F'(\varphi)d\varphi$  абсолютно непрерывна.

Интегрирование по частям дает

$$u(re_n) = K(r, \pi)F(\pi) - \int_0^\pi F(\varphi) \frac{\partial K(r, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi.$$

Мы хотим показать, что  $u(re_n) \rightarrow f(e_n)$ . Без ограничения общности можно считать, что  $f(e_n) = 0$ , иначе достаточно заменить  $f$  на  $f - f(e_n)$ .

Непосредственно видно, что функции  $K$  и  $\partial K/\partial \varphi$  равномерно стремятся к нулю при  $r \rightarrow 1$  в любом интервале  $\delta \leq \varphi \leq \pi$ ,  $\delta > 0$ . Следовательно, функция  $u(re_n)$  имеет тот же предел, что и

$$u_\delta(r) = - \int_0^\delta F'(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} K(r, \varphi) d\varphi.$$

Применяя (30), можно выбрать  $\delta$  столь малым, чтобы

$$|F(\varphi)| \leq \varepsilon A(\varphi) = \varepsilon \omega_{n-1} \int_0^\varphi \sin^{n-2} \theta d\theta.$$

Отсюда следует, что

$$|u_\delta(r)| \leq \varepsilon \int_0^\delta A(\varphi) \frac{\partial K}{\partial \varphi} d\varphi,$$

так как  $\partial K/\partial \varphi < 0$ . Интегрируя опять по частям и учитывая, что

$$\int_{S^{n-1}} K(r, \varphi) d\omega = 1$$

(это частный случай формулы Пуассона), получаем

$$|u_\delta(r)| \leq -\varepsilon A(\delta) K(\delta) + \varepsilon \int_0^\delta K A'(\varphi) d\varphi < \\ < \varepsilon \int_0^\pi K A'(\varphi) d\varphi = \varepsilon \int_{S^{n-1}} K(r, \varphi) d\omega = \varepsilon.$$

Откуда заключаем, что  $\lim_{r \rightarrow 1} u(re_n) = \lim_{\delta \rightarrow 0} u_\delta(r) = 0$ .

5.10. Несколько более общим фактом является то, что  $u(y) \rightarrow f(e_n)$  в любом «конусе Штольца», определяемом неравенством

$$|y - e_n| \leq M(1 - |y|). \quad (32)$$

Обозначим для краткости  $y' = |y|e_n$ . Согласно неравенству (32),

$$|x - y| \leq |x - y'| + |y - e_n| + |y' - e_n| \leq \\ \leq |x - y'| + (M + 1)(1 - |y|).$$

При  $|x| = 1$  это дает  $|x - y| \leq (M + 2)|x - y|$ . Аналогично,  $|x - y'| \leq |x - y| + |y - e_n| + |y' - e_n| \leq (M + 2)|x - y|$ .

Следовательно, отношение  $k(x, y)/k(x, y')$  ограничено сверху и снизу фиксированными постоянными, и мы заключаем, что предел разности  $u(y) - f(e_n)$  равен нулю, когда  $y \rightarrow e_n$  внутри конуса.

## VI. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ

6.1. Перейдем теперь от шара  $B = B^n$  к его единичному касательному пространству  $T_1(B)$ . Точками  $T_1(B)$  являются точки  $x \in B$  вместе с выбранным в каждой из них направлением<sup>1)</sup>. Направление задается единичным вектором  $\xi \in S = S^{n-1}$ . Поэтому  $T_1(B)$  можно отождествить с декартовым произведением  $B \times S$ , но мы предпочитаем рассматривать его как пространство направленных линейных элементов  $(x, \xi)$ . Из-за связей с динамикой иногда  $T_1(B)$  называют *фазовым пространством*.

Группа Мёбиуса  $M(B^n)$  очевидным образом действует на  $T_1(B)$ . Именно, если отображение  $\gamma \in M(B^n)$ , то ясно, что точка  $x$  должна отображаться в  $\gamma x$ . В то же время направле-

<sup>1)</sup> На самом деле  $T_1(B)$  есть единичное касательное расслоение. — *Прим. ред.*

ние  $\xi$  должно преобразовываться матрицей  $\gamma'(x)$  в новое направление  $\gamma'(x)\xi$  линейного элемента в точке  $\gamma x$ ; чтобы получить единичный вектор, нужно  $\gamma'(x)\xi$  разделить на  $|\gamma'(x)|$ .

Поэтому действие элемента  $\gamma \in M(B^n)$  на  $T_1(B)$  определяется формулой

$$\gamma: (x, \xi) \mapsto \left( \gamma x, \frac{\gamma'(x)}{|\gamma'(x)|} \xi \right). \quad (1)$$

Имеется очевидный инвариантный элемент объема, а именно

$$dm = dx_h d\omega(\xi), \quad (2)$$

где  $\omega(\xi)$  — телесный угол. В самом деле, метрика Пуанкаре инвариантна относительно  $\gamma$ , а  $\xi$  претерпевает вращение, которое оставляет сферическую меру инвариантной.

**6.2.** Интересно найти для пар точек  $(x, \xi)$  инвариант относительно действия (1) группы  $M(B^n)$ . Пусть  $(x, \xi)$  и  $(y, \eta)$  — два линейных элемента. Покажем, что подходящим инвариантом является

$$\delta |(x, \xi), (y, \eta)| = |\eta - \Delta(x, y)\xi|. \quad (3)$$

Прежде всего заметим, что это выражение симметрично. Действительно, умножение на  $\Delta(x, y)$  не меняет длину, а ввиду тождества  $\Delta(x, y)\Delta(y, x) = I$  справедливо равенство

$$\Delta(y, x)(\eta - \Delta(x, y)\xi) = \Delta(y, x)\eta - \xi.$$

Отсюда

$$|\eta - \Delta(x, y)\xi| = |\xi - \Delta(y, x)\eta|.$$

Проверим теперь инвариантность. При действии элемента  $\gamma \in M(B^n)$  одновременно на линейные элементы  $(x, \xi)$  и  $(y, \eta)$  выражение (3) перейдет в

$$\left| \frac{\gamma'(y)}{|\gamma'(y)|} \eta - \Delta(\gamma x, \gamma y) \frac{\gamma'(x)}{|\gamma'(x)|} \xi \right|. \quad (4)$$

Однако ранее мы доказали (см. формулу (41) в п. 2.8), что

$$\Delta(\gamma x, \gamma y) \frac{\gamma'(x)}{|\gamma'(x)|} = \frac{\gamma'(y)}{|\gamma'(y)|} \Delta(x, y).$$

Таким образом, выражение (4) становится равным

$$\left| \frac{\gamma'(y)}{|\gamma'(y)|} (\eta - \Delta(x, y)\xi) \right| = |\eta - \Delta(x, y)\xi|,$$

и тем самым инвариантность установлена.

**6.3.** Найдем теперь инфинитезимальную форму для инварианта (3). Другими словами, мы хотим вычислить

$$|\xi + d\xi - \Delta(x, x + dx)\xi|. \quad (5)$$

Вычисления дают

$$\begin{aligned}
 Q(x)_{ij} &= \frac{x_i x_j}{|x|^2}, \\
 dQ(x)_{ij} &= \frac{x_i dx_j + x_j dx_i}{|x|^2} - \frac{2x_i x_j (x dx)}{|x|^4}, \\
 (Q dQ)_{ij} &= \frac{x_i x_k}{|x|^2} \left( \frac{x_k dx_j + x_j dx_k}{|x|^2} - \frac{2x_j x_k (x dx)}{|x|^4} \right) = \\
 &= \frac{x_i dx_j}{|x|^2} - \frac{x_i x_j (x dx)}{|x|^4};
 \end{aligned} \tag{6}$$

здесь мы использовали соглашение о суммировании по одинаковым индексам. Далее,

$$\begin{aligned}
 [(I - 2Q(x)) dQ(x)]_{ij} &= \frac{x_j dx_i - x_i dx_j}{|x|^2}, \\
 \Delta(x, x + dx) &= (I - 2Q(x^* - x - dx))(I - 2Q(x)),
 \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
 Q(x^* - x - dx) &= Q\left(\frac{1 - |x|^2}{|x|^2} x - dx\right) = \\
 &= Q\left(x - \frac{|x|^2}{1 - |x|^2} dx\right) = Q(x) - \frac{|x|^2}{1 - |x|^2} dQ(x).
 \end{aligned}$$

Отсюда <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned}
 \Delta(x, x + dx) &= \left(I - 2Q(x) + \frac{2|x|^2}{1 - |x|^2} dQ(x)\right)(I - 2Q(x)) = \\
 &= I - \frac{2|x|^2}{1 - |x|^2} (I - 2Q(x)) dQ(x),
 \end{aligned}$$

и на основании (7)

$$\Delta(x, x + dx)_{ij} = \delta_{ij} + \frac{2(x_i dx_j - x_j dx_i)}{1 - |x|^2}. \tag{8}$$

Подставляя выражение (8) в (5), находим, что

$$[(\xi + d\xi - \Delta(x, x + dx)\xi)]_i = d\xi_i - 2 \frac{(dx\xi)_i x_i - (x\xi)_i dx_i}{1 - |x|^2}.$$

Тем самым доказано, что инфинитезимальным инвариантом является

$$\left| d\xi_i - 2 \frac{(\xi dx)_i x_i - (\xi x)_i dx_i}{1 - |x|^2} \right|. \tag{9}$$

<sup>1)</sup> Заметим, что из равенства  $(I - 2Q)^2 = I$  следует, что  $dQ(I - 2Q) = -(I - 2Q)dQ$ .

Теперь можно ввести на  $T_1(B)$  инвариантную риманову метрику, полагая

$$ds^2 = \frac{4|dx|^2}{(1-|x|^2)^2} + \left| d\xi - 2 \frac{(\xi dx)x - (\xi x) dx}{1-|x|^2} \right|^2. \quad (10)$$

**6.4.** Определим *геодезический поток* на  $T_1(B)$ , который является однопараметрической группой диффеоморфизмов  $V_t$  пространства  $T_1(B)$ , удовлетворяющих равенству  $V_s V_t = V_{s+t}$ .

Каждый линейный элемент  $(x, \xi)$  определяет *геодезический луч*, выходящий из точки  $x$  в направлении  $\xi$ . Фиксируем действительное число  $t$ . Пусть переменная точка  $x$  движется вдоль геодезической от точки  $x$  до точки  $x'$ , находящейся на расстоянии  $t$  от  $x$ ; расстояние считается положительным в направлении геодезического луча и отрицательным в противоположном направлении. Пусть одновременно с этим вектор  $\xi$  скользит к положительному касательному вектору  $\xi'$  в точке  $x'$  (рис. 11).

Положим

$$V_t(x, \xi) = (x', \xi'). \quad (11)$$

Совершенно очевидно, что  $V_s V_t = V_{s+t}$  и  $V_t^{-1} = V_{-t}$ . Более того, ясно, что приведенная конструкция инвариантна относительно мёбиусовых отображений в том смысле, что для всех  $\gamma \in M(B^n)$

$$V_t \circ \gamma = \gamma \circ V_t. \quad (12)$$

**6.5.** Наиболее важное свойство диффеоморфизмов  $V_t$  заключается в том, что они определяют поток в том смысле, что каждый  $V_t$  оставляет инвариантным элемент объема  $dm$ , определенный формулой (2). Мы докажем нужную инвариантность  $dm$ , вводя другой элемент объема  $d\bar{m}$  на  $T_1(B)$ , который инвариантен как относительно мёбиусовых отображений, так и относительно диффеоморфизмов  $V_t$ .

Если два элемента объема  $dm$  и  $d\bar{m}$  инвариантны относительно группы  $M(B)$ , то их отношение является автоморфной функцией. Но действие группы  $M(B)$  на  $T_1(B)$  транзитивно в том смысле, что каждый линейный элемент  $(x, \xi)$  может быть отображен на любой другой. Это означает, что отношение  $d\bar{m} : dm$  постоянно. Отсюда, так как  $d\bar{m}$

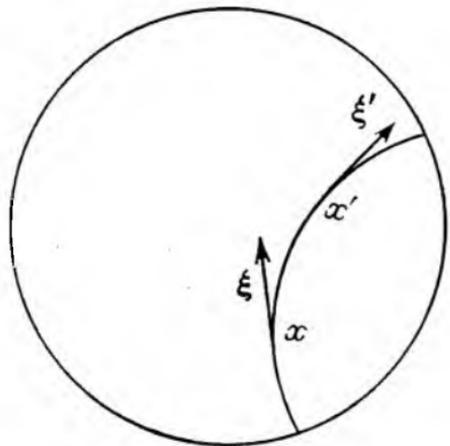


Рис. 11

инвариантен относительно всех  $V_i$ , следует, что то же самое справедливо и для  $dm$ .

Для построения  $d\bar{m}$  введем новую параметризацию на  $T_1(B)$ . Как уже было отмечено раньше, каждый линейный элемент  $(x, \xi)$  определяет проходящую через него ориентированную геодезическую. Пусть эта геодезическая имеет начальную точку  $u$  и конечную точку  $v$ . Ясно, что  $u$  и  $v$  можно выразить в явном виде через  $x$  и  $\xi$  по довольно сложной формуле.

Обратно, точки  $u$  и  $v$  определяют геодезическую, но нужен еще хотя бы один параметр для нахождения положения точки  $x$  на этой геодезической. Обозначим через  $\alpha = \alpha(u, v)$  среднюю точку геодезической, соединяющей  $u$  и  $v$ . Для установления положения точки  $x$  воспользуемся направленным евклидовым расстоянием  $s$  от точки  $\alpha$  до точки  $x$  (рис. 12).

Теперь очевидно, что между парами  $(x, \xi)$  и тройками  $(u, v, s)$  имеется биективное соответствие. На самом деле это соответствие является диффеоморфизмом между  $B \times S$  и  $S \times S \times \mathbb{R}$ .

Действие диффеоморфизма  $V$ , на тройку  $(u, v, s)$  определяется достаточно просто:  $(u, v, s)$  заменяется на  $(u, v, s + t)$ . В результате получаем, что элемент объема

$$d\omega(u) d\omega(v) ds$$

и более общий элемент вида

$$f(u, v) d\omega(u) d\omega(v) ds$$

инвариантны относительно такого действия.

Мы хотим найти элемент объема  $d\bar{m}$ , инвариантный также относительно всех отображений  $\gamma \in M(B)$ . Отображение  $\gamma$  переводит точку  $x$  в точку  $\gamma x$ , находящуюся на расстоянии  $s$  от точки  $\gamma\alpha$  и, следовательно, на направленном расстоянии  $s + d(\gamma\alpha, \alpha(\gamma u, \gamma v))$  от средней точки  $\alpha(\gamma u, \gamma v)$ . Это означает, что  $s$  инвариантно с точностью до добавочного члена, зависящего только от  $u$  и  $v$ . Так как

$$|\gamma u - \gamma v|^{2n-2} = |\gamma'(u)|^{n-1} |\gamma'(v)|^{n-1} |u - v|^{2n-2},$$

то элемент объема

$$d\bar{m} = \frac{d\omega(u) d\omega(v) ds}{|u - v|^{2n-2}}$$

инвариантен относительно  $\gamma$ . Отсюда заключаем, что

$$dm = c \frac{d\omega(u) d\omega(v) ds}{|u - v|^{2n-2}},$$

где  $c$  — некоторая постоянная. На самом деле можно показать, что  $c = 1$ .

## VII. ДИСКРЕТНЫЕ ПОДГРУППЫ

7.1. Как уже отмечалось в п. 2.6, любой элемент  $\gamma \in M(B^n)$  имеет вид  $kT_a$ , где  $k \in SO(n)$ ,  $a \in B^n$ . Поэтому  $M(B^n)$  можно снабдить топологией произведения  $SO(n) \times B^n$ . Подгруппа  $\Gamma \subset M(B^n)$  называется *дискретной*, если тождественный элемент  $I$  имеет окрестность в  $M(B^n)$ , пересекающуюся с  $\Gamma$  только по  $I$ . С этого момента  $\Gamma$  всегда будет обозначать дискретную подгруппу группы  $M(B^n)$ .

Мы знаем, что любой элемент  $\gamma \in M(B^n)$ , оставляющий неподвижным начало координат, принадлежит  $SO(n)$ . Так как группа  $SO(n)$  компактна, то подгруппа  $\Gamma$ , стабилизирующая точку  $0$ , является конечной подгруппой  $SO(n)$ .

Покажем, что множество  $\{\gamma 0; \gamma \in \Gamma\}$  состоит из изолированных точек. Действительно, если бы это было не так, то существовала бы бесконечная последовательность различных элементов  $\gamma_n \in \Gamma$ , такая, что  $\gamma_n^{-1} 0 = a_n \rightarrow a \in B^n$ . Мы знаем, что  $\gamma_n = \beta_n T_{a_n}$ , где  $\beta_n \in O(n)$ . Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что  $\beta_n \rightarrow \beta$  и потому  $\gamma_n \rightarrow \beta T_a$ . Но тогда  $\gamma_m \gamma_n^{-1} \rightarrow I$  при  $m, n \rightarrow \infty$ , откуда следует равенство  $\gamma_m = \gamma_n$  для всех пар  $m, n$ , за исключением конечного числа. Последнее противоречит выбору последовательности  $\gamma_n$ . Следовательно, когда  $\gamma$  пробегает бесконечную группу  $\Gamma$ ,  $\gamma 0$  стремится к  $S^{n-1}$ . Более того,  $\gamma a$  накапливаются к  $S^{n-1}$  для любой точки  $a \in B^n$ . Действительно, так как  $d(\gamma a, \gamma b) = d(a, b)$ , то неевклидово расстояние от  $0$  до  $\gamma a$  должно стремиться к бесконечности.

Верен и более общий факт: если  $K \subset B^n$  — компактное подмножество, то существует лишь конечное число элементов  $\gamma \in \Gamma$ , для которых  $K \cap \gamma K \neq \emptyset$ .

7.2. Точки  $a$  и  $\gamma a$ ,  $\gamma \in \Gamma$ , называются *эквивалентными*. Образуем фактор  $B^n/\Gamma$ , отождествляя все эквивалентные относительно  $\Gamma$  точки  $B^n$ , и обозначим его через  $\mathfrak{M}(\Gamma)$ . Во всех случаях  $\mathfrak{M}(\Gamma)$  — хаусдорфово пространство. Известно также, что  $\mathfrak{M}(\Gamma)$  является многообразием при  $n = 2$  и  $n = 3$ ; при  $n > 3$  мы будем называть его *фактормногообразием*, хотя оно, по-видимому, и не обязано быть многообразием,

При изучении свойств  $\mathfrak{M}(\Gamma)$  в случае, когда элементы  $\gamma \in \Gamma$  имеют неподвижные точки внутри  $B^n$ , возникают определенные трудности. Пусть  $a$  — неподвижная точка элемента  $\gamma$ . Тогда  $|\gamma'(a)| = 1$ , поскольку

$$\frac{|\gamma'(a)|}{1 - |\gamma a|^2} = \frac{1}{1 - |a|^2}.$$

Другими словами, точка  $a$  лежит на изометрической сфере  $K(\gamma)$  (см. п. 2.9), при условии что  $a \neq 0$ . Если же  $a = 0$ , то  $\gamma \in SO(n)$  и неподвижные точки  $\gamma$  заполняют некоторую  $k$ -мерную плоскость, где  $0 \leq k \leq n - 2$ . Следовательно, каждый элемент  $\gamma$ , имеющий неподвижные точки внутри  $B^n$ , оставляет неподвижным некоторое  $k$ -мерное геодезическое подпространство. Из приведенного выше уравнения видно, что  $|\gamma'(a)| \rightarrow 0$  равномерно для всех  $a$  из любого компактного множества, лежащего внутри  $B^n$ . Поэтому указанные подпространства накапливаются только к границе  $B^n$ . Отсюда заключаем, что каждая точка из  $B^n$  имеет окрестность, которая пересекает лишь конечное число этих неподвижных подпространств.

7.3. Введем следующее определение.

**Определение.** Точка  $b \in \bar{B}^n$  называется *предельной точкой* группы  $\Gamma$ , если существуют бесконечная последовательность элементов  $\gamma_\nu \in \Gamma$  и точка  $a \in \bar{B}^n$ , такие, что  $\gamma_\nu a \rightarrow b$ .

Множество  $\Lambda = \Lambda(\Gamma)$  всех предельных точек  $\Gamma$  называется *предельным множеством* группы  $\Gamma$ . Множество предельных точек орбиты  $\Gamma a$  обозначим через  $\Lambda(a)$ . Ясно, что  $\Lambda = \bigcup \Lambda(a)$ . Справедлива следующая

**Теорема.**  $\Lambda = \Lambda(a)$  для всех  $a \in \bar{B}^n$  (с несколькими тривиальными исключениями).

*Доказательство.* Если  $a, b \in B^n$ , то очевидно, что  $\Lambda(a) = \Lambda(b)$ , поскольку расстояние  $d(\gamma a, \gamma b) = d(a, b)$  не меняется. В частности,  $\Lambda(a) = \Lambda(0)$ .

Рассмотрим теперь случай, когда  $a \in S^{n-1}$ . Предположим, что  $\Gamma a \neq \{a\}$ , т. е.  $a$  не является неподвижной точкой для всех элементов группы  $\Gamma$ . Тогда найдется точка  $b = \gamma_0 a \neq a$ ,  $\gamma_0 \in \Gamma$ .

1) Докажем сначала, что  $\Lambda(0) \subset \Lambda(a)$ . Для этого выберем точку  $c$  внутри геодезической  $(a, b)$ , соединяющей  $a$  и  $b$  (рис. 13). Мы знаем, что  $\Lambda(c) = \Lambda(0)$ . Поэтому для каждой точки  $e \in \Lambda(0)$  существует последовательность  $\gamma_\nu \in \Gamma$ , такая, что  $\gamma_\nu c \rightarrow e$ . Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что  $\gamma_\nu a \rightarrow a'$  и  $\gamma_\nu b \rightarrow b'$ . Если  $a' = b'$ , то очевидно, что  $e = a'$ . С другой стороны, если  $a' \neq b'$ , то

последовательность  $\gamma_\nu c$  должна стремиться к геодезической  $(a', b')$  и одновременно к сфере  $S^{n-1}$ ; следовательно, она сходится либо к  $a'$ , либо к  $b'$ . Так как  $b \equiv \gamma_0 a$ , то обе точки  $a'$  и  $b'$  принадлежат  $\Lambda(a)$ . Значит,  $e \in \Lambda(a)$ , и тем самым доказано, что  $\Lambda(0) \subset \Lambda(a)$ .

2) Для доказательства противоположного включения выберем произвольную точку  $d \in \Lambda(a)$  и последовательность  $\{\gamma_\nu\}$  так, чтобы  $\gamma_\nu a \rightarrow d$  и в то же время  $\gamma_\nu 0 \rightarrow e$  и  $\gamma_\nu^{-1} 0 \rightarrow e'$ . Напомним, что  $K(\gamma)$ ,  $E(\gamma)$ ,  $I(\gamma)$  характеризуются соотношениями  $|\gamma'(x)| = 1$ ,  $|\gamma'(x)| < 1$  и  $|\gamma'(x)| > 1$  (см. п. 2.9). Так как  $0 \in E(\gamma_\nu)$ , то  $\gamma_\nu(0)$  принадлежат  $I(\gamma_\nu^{-1})$ , а  $\gamma_\nu^{-1}(0)$  принадлежат  $I(\gamma_\nu)$ . Отсюда вытекает, что  $I(\gamma_\nu^{-1})$  накапливаются к  $e$ , а  $I(\gamma_\nu)$  к  $e'$ .

Если  $a \neq e'$ , то  $a \in E(\gamma_\nu)$  для достаточно больших  $\nu$  и, следовательно,  $\gamma_\nu a \in I(\gamma_\nu^{-1}) \rightarrow e$ , т. е.  $d = e \in \Lambda(0)$ . Если же  $a = e' \in \Lambda(0)$ , то  $\gamma_\nu a \in \Lambda(0)$ , поскольку  $\gamma_\nu \Lambda(0) = \Lambda(0)$ . В силу замкнутости  $\Lambda(0)$  получаем опять, что  $d \in \Lambda(0)$ . Так как  $d$  была произвольной точкой из  $\Lambda(a)$ , то тем самым доказано, что  $\Lambda(a) \subset \Lambda(0)$ .

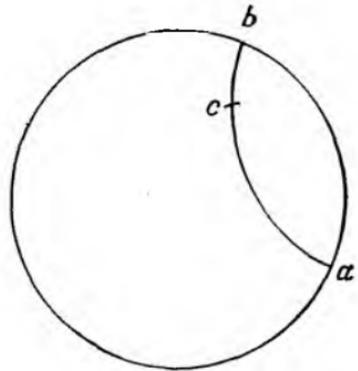


Рис. 13

Если  $a$  является неподвижной точкой всех элементов группы  $\Gamma$ , то это доказательство не проходит. Таких точек может быть не более двух, и все группы с таким свойством можно классифицировать — это так называемые элементарные группы.

#### 7.4. Перечислим свойства множества $\Lambda$ .

1)  $\Lambda$  замкнуто, так как  $\Lambda(0)$  замкнуто. Дополнение  $\Omega = \bar{B}^n \setminus \Lambda$  открыто и называется *множеством разрывности* группы  $\Gamma$ .

2)  $\Lambda$  инвариантно относительно  $\Gamma$ , и каждое инвариантное замкнутое множество (содержащее не менее двух точек) содержит  $\Lambda$ .

3) Либо  $\Lambda = S^{n-1}$ , либо  $\Lambda$  нигде не плотно в  $S^{n-1}$ . Группа  $\Gamma$  называется группой *первого рода*, если  $\Lambda = S^{n-1}$ , и *второго рода*, если  $\Lambda \neq S^{n-1}$ .

4)  $\Lambda$  не имеет изолированных точек и является *совершенным* множеством<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Это свойство справедливо только для неэлементарных групп. — *Прим. ред.*

5) Пусть  $A$  и  $B$  — компактные подмножества  $\Omega$ . Тогда  $A$  пересекает лишь конечное число образов  $\gamma B$ ,  $\gamma \in \Gamma$ .

Доказательства всех этих утверждений довольно просты и предоставляются читателю.

**7.5.** Предположим, что тождественный элемент есть единственный элемент  $\Gamma$ , лежащий в  $\Gamma \cap SO(n)$ , или, другими словами,  $0$  не является неподвижной точкой для всех  $\gamma \in \Gamma \setminus I$ . Тогда каждый элемент  $\gamma \in \Gamma \setminus I$  имеет изометрическую сферу  $K(\gamma)$  с соответствующими  $E(\gamma)$  и  $I(\gamma)$ . В дальнейшем эти обозначения будут использоваться только для частей  $K(\gamma)$ ,  $E(\gamma)$ ,  $I(\gamma)$ , принадлежащих  $B^n$ . В этом случае  $K(\gamma)$  — неевклидова гиперплоскость, а  $E(\gamma)$  и  $I(\gamma)$  — гиперболические полупространства.

Рассмотрим множество  $P = \bigcap_{\gamma \in \Gamma \setminus I} E(\gamma)$  и докажем, что оно обладает следующими свойствами:

- (i)  $P$  открыто;
- (ii)  $\partial P \subset \bigcup K(\gamma)$  (здесь  $\partial P$  — граница  $P$  в  $B^n$ );
- (iii) каждая точка  $x \in B^n$  эквивалентна либо единственной точке в  $P$ , либо по крайней мере одной точке на  $\partial P$ , причем в последнем случае число точек на  $\partial P$ , эквивалентных  $x$ , конечно.

Утверждения (i) и (ii) следуют из того факта, что для всякого  $r > 0$  пересечение  $P \cap B(r)$  содержится на самом деле лишь в конечном числе множеств  $E(\gamma)$  и, таким образом, является конечным пересечением.

Напомним опять, что  $K(\gamma)$ ,  $E(\gamma)$  и  $I(\gamma)$  характеризуются соотношениями  $|\gamma'(x)| = 1$ ,  $|\gamma'(x)| < 1$  и  $|\gamma'(x)| > 1$  соответственно и что  $|\gamma'(x)| / (1 - |\gamma x|^2) = 1 / (1 - |x|^2)$ . Отсюда следует, что включение  $x \in E(\gamma)$  эквивалентно условию  $|\gamma x| > |x|$ , а включение  $x \in K(\gamma)$  выполняется тогда и только тогда, когда  $|\gamma x| = |x|$ . Другими словами, точка принадлежит  $P$  в том и только том случае, когда расстояние от нее до  $0$  строго меньше, чем расстояние от  $0$  до всех ее образов, и точка принадлежит  $\partial P$ , если существуют несколько ближайших точек (включая случай ближайших неподвижных точек). Так как точки орбиты изолированы, то существование по крайней мере одной и самое большее конечного числа ближайших точек очевидно, откуда следует свойство (iii). Отметим весьма замечательный факт, что эквивалентные точки на  $\partial P$  равноудалены от  $0$ .

Свойство (iii) характеризует  $P$  как *фундаментальное множество*. Поскольку  $P$  есть пересечение полупространств, то оно *выпукло* в неевклидовом смысле. Множество  $P$  представляет собой неевклидов полиэдр и называется *фундаменталь-*

ным полиэдром Пуанкаре (или Дирихле) группы  $\Gamma$  с центром в 0. Грани  $P$  являются  $(n-1)$ -мерными пересечениями  $\partial P \cap \cap K(\gamma)$ . При этом грани, лежащие на  $K(\gamma)$  и  $K(\gamma^{-1})$ , эквивалентны и конгруэнтны в евклидовом и неевклидовом смысле.

**7.6. Сходимость и расходимость.** Нас будет прежде всего интересоваться, насколько быстро точки орбит приближаются к  $S^{n-1}$ , или, что то же самое, насколько быстро орбиты стремятся к бесконечности в гиперболическом смысле.

Первое наблюдение показывает, что любые две орбиты  $\Gamma a$  и  $\Gamma b$  сравнимы в том смысле, что отношения  $\frac{1-|\gamma a|}{1-|\gamma b|}$  заключены в некоторых конечных пределах.

Действительно, из равенства  $d(\gamma a, \gamma b) = d(a, b)$  следует, что

$$d(0, \gamma b) \leq d(0, \gamma a) + d(a, b),$$

или

$$\log \frac{1+|\gamma b|}{1-|\gamma b|} \leq \log \frac{1+|\gamma a|}{1-|\gamma a|} + d(a, b),$$

$$\frac{1+|\gamma b|}{1-|\gamma b|} \leq e^{d(a, b)} \frac{1+|\gamma a|}{1-|\gamma a|},$$

откуда заключаем, что для всех  $\gamma \in \Gamma$

$$1-|\gamma a| \leq 2e^{d(a, b)}(1-|\gamma b|).$$

Хорошим способом изучения плотности орбиты является исследование расходимости или сходимости рядов вида

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} (1-|\gamma a|)^\alpha$$

для различных степеней  $\alpha$ . Докажем сначала следующую лемму.

**Лемма 1.** Каждая дискретная группа  $\Gamma$  удовлетворяет условию

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} (1-|\gamma a|)^\alpha < \infty \quad \text{для всех } \alpha > n-1. \quad (1)$$

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть случай  $a=0$ . Пусть, как и прежде,  $P$  обозначает полиэдр Пуанкаре группы  $\Gamma$ . В силу условия  $\alpha > n-1$  имеем

$$\int_{B^n} (1-|x|^2)^{\alpha-n} dx = c < \infty.$$

Так как  $B^n = \cup \gamma P$  с точностью до множества меры нуль, то

$$c = \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma P} (1-|x|^2)^{\alpha-n} dx = \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_P (1-|\gamma x|^2)^{\alpha-n} |\gamma'(x)|^n dx.$$

Как обычно, мы обозначаем  $\gamma^{-1}(0) = a$ . Тогда

$$|\gamma'(x)| = |T'_a(x)| = \frac{1 - |a|^2}{[x, a]^2}$$

и

$$(1 - |\gamma x|^2) = (1 - |T_a x|^2) = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |x|^2)}{[x, a]^2}.$$

Это приводит к равенству

$$c = \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_P \frac{(1 - |x|^2)^{\alpha-n} (1 - |a|^2)^\alpha}{[x, a]^{2\alpha}} dx.$$

Здесь  $[x, a] \leq 2$ , поскольку  $[x, a]^2 = 1 + |x|^2|a|^2 - 2xa \leq 4$ . Поэтому

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} (1 - |a|^2)^\alpha \leq \frac{2^{2\alpha} c}{\int_P (1 - |x|^2)^{\alpha-n} dx} < \infty, \quad (2)$$

и тем самым лемма доказана.

Заметим, что (2) дает вычислимую верхнюю оценку для сумм рядов. Более того, поскольку

$$1 - |\gamma x|^2 = (1 - |x|^2) |\gamma'(x)|,$$

можно заключить, что выполнено неравенство

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |\gamma'(x)|^\alpha < \infty. \quad (3)$$

**7.7.** Для  $\alpha = n - 1$  ряды могут как сходиться, так и расходиться, и соответственно этому  $\Gamma$  называется группой *сходящегося типа* или *расходящегося типа*. Существует хорошая геометрическая характеристика этих двух типов групп.

Рассмотрим орбиту некоторого шара  $B_0$ , достаточно малого, так что образы  $\gamma B_0$  не пересекаются друг с другом. Пусть  $a$  — неевклидов центр и  $\rho$  — неевклидов радиус  $B_0$ .

Определим евклидовы радиус и центр  $B_0$ , которые будут использованы здесь и в дальнейшем. Диаметрально противоположные точки  $B_0$ , лежащие на прямой, проходящей через 0 и  $a$ , находятся на (направленных) евклидовых расстояниях

$$\operatorname{th} \frac{1}{2} \left( \log \frac{1 + |a|}{1 - |a|} \pm \rho \right) = \frac{|a| \pm \operatorname{th} \frac{\rho}{2}}{1 \pm |a| \operatorname{th} \frac{\rho}{2}}$$

от 0. При помощи этих выражений находим, что евклидов радиус выражается формулой

$$r = \frac{1}{2} \left( \frac{|a| + \operatorname{th} \frac{\rho}{2}}{1 + |a| \operatorname{th} \frac{\rho}{2}} - \frac{|a| - \operatorname{th} \frac{\rho}{2}}{1 - |a| \operatorname{th} \frac{\rho}{2}} \right) = \frac{(1 - |a|^2) \operatorname{th} \frac{\rho}{2}}{1 - |a|^2 \operatorname{th}^2 \frac{\rho}{2}}, \quad (4)$$

а центр  $c$  определяется из соотношения

$$|c| = \frac{|a| \left( 1 - \operatorname{th}^2 \frac{\rho}{2} \right)}{1 - |a|^2 \operatorname{th}^2 \frac{\rho}{2}}. \quad (5)$$

Если  $|a| \rightarrow 1$ , то из (4) видно, что  $r$  с точностью до постоянного множителя асимптотически ведет себя как  $(1 - |a|)$ , а площадь поверхности  $B_0$  — как  $(1 - |a|)^{n-1}$ . Отсюда заключаем:

*Г — группа сходящегося типа тогда и только тогда, когда сумма площадей поверхностей шаров  $\gamma B_0$  конечна.*

Вместо площадей поверхностей шаров  $\gamma B_0$  можно также рассматривать площади их центральных проекций, или «теней», на  $S^{n-1}$ .

7.8. Напомним, что  $\Gamma$  называется группой второго рода, если  $S^{n-1} \setminus \Lambda$  не пусто. Докажем теперь следующее утверждение.

**Лемма 2.** *Каждая группа второго рода есть группа сходящегося типа.*

*Доказательство.* Так как  $\Omega \neq \emptyset$ , то существует сферическая шапочка  $C$ , такая, что  $\bar{C} \subset \Omega$ . Из компактности  $\bar{C}$  следует, что  $C$  пересекает лишь конечное число своих образов  $\gamma C$ . Отсюда вытекает, что

$$\sum_{\gamma} \int_C |\gamma'(x)|^{n-1} d\omega(x) < \infty. \quad (6)$$

Используя принятое обозначение  $\gamma^{-1}(0) = a$ , мы можем написать

$$|\gamma'(x)| = \frac{1 - |a|^2}{|x, a|^2} \geq \frac{1 - |a|^2}{4}. \quad (7)$$

Из (6) и (7) сразу заключаем, что  $\sum_{a=\gamma^{-1}(0)} (1 - |a|)^{n-1} < \infty$ .

7.9. Тип группы  $\Gamma$  тесно связан с существованием функции Грина на  $\mathfrak{M}(\Gamma)$ . Любую функцию на  $\mathfrak{M}(\Gamma)$  можно рас-

сма тривать как проекцию функции на  $B^n$ , автоморфной относительно  $\Gamma$ . Функция Грина на  $\mathfrak{M}(\Gamma)$  с полюсом в проекции точки  $x_0$  определяется как проекция функции  $g_\Gamma(x)$  со следующими свойствами:

- 1)  $g_\Gamma$  гипергармонична для всех  $x \in B^n \setminus \Gamma x_0$ ;
- 2)  $g_\Gamma$  автоморфна, т. е.  $g_\Gamma(\gamma(x)) = g_\Gamma(x)$ ;
- 3) существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} (g_\Gamma(x) - g(x, x_0))$ ;

4)  $g_\Gamma$  является наименьшей положительной функцией с такими свойствами.

Для простоты будем считать, что  $x_0 = 0$ . Функция на  $\mathfrak{M}(\Gamma)$ , которая соответствует функции  $g_\Gamma$ , будет обозначаться через  $\tilde{g}_\Gamma$ .

**Теорема 1.**  $\Gamma$  является группой сходящегося типа тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{M}(\Gamma)$  имеет функцию Грина.

*Доказательство.* 1. Предположим, что  $\sum_{\Gamma} (1 - |a|)^{n-1} < \infty$ , где, как и прежде,  $a = \gamma^{-1}(0)$ . Покажем, что ряд

$$g_\Gamma(x) = \sum g(x, a) = \sum g(|T_a x|)$$

сходится и удовлетворяет условиям 1)–4). Сходимость следует из соотношений

$$g(|T_a x|) = O((1 - |T_a x|^2)^{n-1}),$$

$$1 - |T_a x|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |x|^2)}{|x, a|^2} \leq \frac{1 + |x|}{1 - |x|} (1 - |a|^2).$$

Очевидно, что  $g_\Gamma$  обладает свойствами 1)–3). Чтобы доказать 4), рассмотрим любую функцию  $h$  со свойствами 1), 2), и пусть  $g_\Gamma^N$  — частичная сумма ряда  $g_\Gamma$ . На границе имеем  $g_\Gamma^N = 0$ . По принципу максимума для гипергармонических функций  $g_\Gamma^N \leq h$  и, следовательно,  $g_\Gamma(x) \leq h(x)$ .

2. Предположим, что  $g_\Gamma$  существует. Обозначим через  $n(r)$  число точек  $a_\nu = \gamma_\nu(0)$  в шаре  $B(r)$ ; выберем  $r$  так, чтобы ни для какой точки  $a_\nu$  не выполнялось равенство  $|a_\nu| = r$ .

Возьмем  $\rho$  настолько малым, чтобы шары  $B(a_\nu, \rho)$  не пересекались и содержались в  $B(r)$ . Применяя формулу (17) из п. 5.5, заключаем, что

$$\int_{S(r) \cup S(a_\nu, \rho)} \frac{\partial g_\Gamma}{\partial n_h} d\sigma_h = 0. \quad (8)$$

Устремим теперь  $\rho$  к нулю и заметим, что интеграл по  $S(a_\nu, \rho)$  равен интегралу

$$\int_{S(a_\nu, \rho)} \frac{\partial g(x, a_\nu)}{\partial n_h} d\sigma_h,$$

а этот интеграл имеет при  $\rho \rightarrow 0$  тот же самый предел, что и интеграл

$$\frac{2^{n-2}}{(1 - |a_\nu|^2)^{n-2}} \int_{S(a_\nu, \rho)} \frac{\partial g(x, a_\nu)}{\partial n} d\sigma. \quad (9)$$

Здесь  $g(x, a_\nu) = g(|T_{a_\nu} x|)$  и

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(x, a_\nu)}{\partial n} &= g'(|T_{a_\nu} x|) \frac{\partial |T_{a_\nu} x|}{\partial n} = \left( \frac{1 - |T_{a_\nu} x|^2}{|T_{a_\nu} x|} \right)^{n-2} \frac{\partial}{\partial \rho} \log |T_{a_\nu} x| = \\ &= \left( \frac{(1 - |a_\nu|^2)(1 - |x|^2)}{[x, a_\nu]} \right)^{n-2} \frac{1}{\rho^{n-2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \log \frac{\rho}{[x, a_\nu]} \sim \\ &\sim (1 - |a_\nu|^2)^{n-2} \frac{1}{\rho^{n-1}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что выражение (9) стремится к  $2^{n-2}\omega_n$ , и из (8) заключаем, что

$$n(r) = \frac{1}{2^{n-2}\omega_n} \int_{S(r)} \frac{\partial g_\Gamma}{\partial n_h} d\sigma_h = - \frac{1}{\omega_n} \frac{r^{n-1}}{(1-r^2)^{n-2}} \int_{S(r)} \frac{\partial g_\Gamma}{\partial r} d\omega.$$

Теперь мы можем проинтегрировать и получим, что

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{S(1)} (g_\Gamma(r_0\xi) - g_\Gamma(r\xi)) d\omega(\xi) = \int_{r_0}^r \frac{(1-t^2)^{n-2}}{t^{n-1}} n(t) dt.$$

Здесь  $g_\Gamma(r\xi) > 0$  и в то же время  $g_\Gamma(r_0\xi)$  не зависит от  $r$ . Тем самым доказано, что интеграл

$$\int_{r_0}^1 \frac{(1-t^2)^{n-2}}{t^{n-1}} n(t) dt$$

сходится. Это означает, что

$$\int_0^1 (1-t)^{n-2} n(t) dt < \infty. \quad (10)$$

Нетрудно установить, пользуясь интегрированием по частям, что интеграл (10) сходится одновременно с интегралом

$$\int_0^1 (1-t)^{n-1} dn(t),$$

сходимость которого эквивалентна тому, что

$$\sum (1 - |a_v|)^{n-1} < \infty.$$

Теорема доказана.

7.10. В теории римановых поверхностей обычно говорят, что риманова поверхность принадлежит классу  $O_G$ , если она не имеет функции Грина. Ничто не мешает перенести эту терминологию на произвольные римановы многообразия и даже на те фактормногообразия  $\mathfrak{M}(\Gamma)$ , которые, возможно, не являются многообразиями. Наша теорема устанавливает, что  $\Gamma$  является группой расходящегося типа тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{M}(\Gamma) \subset O_G$ .

Подобно этому говорят, что риманова поверхность принадлежит классу  $O_{HB}$ , если на ней нет ограниченных гармонических функций, отличных от постоянных. Важная теорема П. Мирберга устанавливает, что

$$O_G \subset O_{HB}.$$

Другими словами, если на римановой поверхности существует нетривиальная ограниченная гармоническая функция, то существует также и функция Грина с полюсом в произвольной точке. Противоположное включение не имеет места<sup>1)</sup>.

Эта терминология и теорема переносятся на случай произвольных римановых пространств. Доказательство, по существу, остается таким же, как и для римановых поверхностей; мы отсылаем читателя к книге: Ahlfors L. V., Sario L. *Riemann Surfaces*. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1960, pp. 204—206.

Поэтому мы можем считать установленной следующую теорему.

**Теорема 2.** *Если  $\Gamma$  — группа расходящегося типа, то на  $\mathfrak{M}(\Gamma)$  не существует непостоянных ограниченных гармонических функций.*

7.11. Пусть  $G$  — группа преобразований, действующих на пространстве  $\mathfrak{M}$  с мерой. Говорят, что  $G$  действует на  $\mathfrak{M}$  эргодично, если каждое инвариантное относительно  $G$  подмножество  $\mathfrak{M}$  либо имеет меру нуль, либо есть дополнение множества меры нуль.

<sup>1)</sup> Вопрос о существовании римановых поверхностей, имеющих функцию Грина, но не имеющих ни одной (непостоянной) ограниченной гармонической функции, долгое время оставался открытым (ср. Неванлинна Р. Униформизация. Пер. с нем. — М.: ИЛ, 1955, гл. 10) и был решен (положительно) в конце 50-х годов. Соответствующая фуксова группа  $\Gamma$  действует на  $S^1 \times S^1$  не эргодично, но эргодична на  $S^1$  (см. п. 7.11). — *Прим. ред.*

**Теорема 3.** Если  $\Gamma$  — группа расходящегося типа, то  $\Gamma$  действует на  $S$  эргодично.

*Доказательство.* Действительно, если бы это было не так, то существовало бы инвариантное измеримое множество  $E \subset S$ , для которого  $0 < m(E) < m(S)$ . Воспользуемся формулой Пуассона (27) из п. 5.7 для построения гармонической функции, имеющей радиальные граничные значения, равные характеристической функции  $\chi$  множества  $E$ . Такая функция дается формулой

$$u(y) = \frac{1}{\omega_n} \int_S \left( \frac{1 - |y|^2}{|x - y|^2} \right)^{n-1} \chi(x) d\omega(x).$$

Так как  $\chi(\gamma x) = \chi(x)$  для всех  $\gamma \in \Gamma$ , то

$$\begin{aligned} u(\gamma y) &= \frac{1}{\omega_n} \int_S \left( \frac{1 - |\gamma y|^2}{|\gamma x - \gamma y|^2} \right)^{n-1} \chi(\gamma x) |\gamma'(x)|^{n-1} d\omega(x) = \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_S \left( \frac{1 - |y|^2}{|x - y|^2} \right)^{n-1} \chi(x) d\omega(x) = u(y); \end{aligned}$$

при этом использовались тождества

$$\begin{aligned} 1 - |\gamma y|^2 &= |\gamma'(y)| (1 - |y|^2), \\ |\gamma x - \gamma y|^2 &= |\gamma'(x)| |\gamma'(y)| |x - y|^2. \end{aligned}$$

Функция  $u$  автоморфна, гипергармонична и непостоянна. Но это противоречит теореме 2, поэтому множества  $E$  с указанными свойствами не существует.

**7.12.** Рассмотрим шар  $B_0 = B(r_0) = B_n(\rho_0)$  с центром в начале координат. Обозначим через  $L(B_0)$  множество всех точек  $\xi \in S$ , для которых радиус, проведенный в  $\xi$ , пересекает бесконечное множество образов  $\gamma B_0$ ,  $\gamma \in \Gamma$ . То же самое можно выразить иначе, сказав, что  $\xi \in L(B_0)$ , если существует бесконечное множество точек  $\gamma(0)$ , находящихся от радиуса  $(0, \xi)$  на неевклидовом расстоянии, меньшем  $\rho_0$ . Геометрически это означает, что внутри области в форме линзы, показанной на рис. 14, найдется бесконечно много точек  $\gamma(0) = a_\nu$ , сколь угодно близких к точке  $\xi$ . В частности, тогда имеется бесконечно много точек  $a_\nu$  в конусе Штольца с раствором  $\varphi_0 = 2 \operatorname{arctg} r_0$ . Точку  $\xi$ , для которой существует шар  $B_0$  с указанными свойствами, будем называть *конической предельной точкой*, а множество

$$L = \cup L(B_0)$$

*коническим предельным множеством* для  $\Gamma$ . Очевидно, что  $L \subset \Lambda$ .

Если  $\xi$  — коническая предельная точка для орбиты  $\Gamma(0)$ , то она будет конической предельной и для любой другой орбиты  $\Gamma(a)$ . Действительно, если  $\gamma(0)$  находится на неевклидовом расстоянии  $\leq \rho_0$  от радиуса  $(0, \xi)$ , то  $\gamma(a)$  находится от этого радиуса на расстоянии  $\leq \rho_0 + d(0, a)$ .

Это приводит к другой характеристике конических предельных точек. Радиус  $(0, \xi)$  является геодезической и проектируется в геодезическую на  $\mathfrak{M}(\Gamma)$ . Если  $\xi$  — коническая предельная точка, то эта геодезическая будет снова и снова появляться в пределах некоторого фиксированного расстоя-

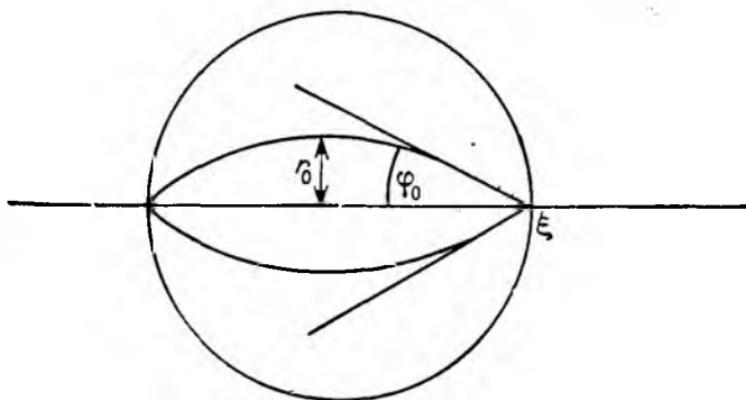


Рис. 14

ния от любой данной точки. Напротив, если  $\xi$  не является конической предельной точкой, то эта геодезическая рано или поздно покинет любое компактное множество (т. е. такая геодезическая стремится к «идеальной границе»). В частности, если многообразие  $\mathfrak{M}(\Gamma)$  компактно, то все  $\xi \in S$  являются коническими предельными точками.

**Лемма 3.** Если  $\Gamma$  — группа сходящегося типа, то  $m(L) = 0$ .

*Доказательство.* Как обычно, орбита  $\Gamma(0)$  будет записываться в виде последовательности  $\{a_v\}$ . Если  $\Gamma$  — группа сходящегося типа, то для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $v_0$ , что

$$\sum_{v > v_0} (1 - |a_v|)^{n-1} < \varepsilon. \quad (11)$$

Предположим, что  $\xi \in L(B_0)$ . Тогда внутри конуса Штольца с углом  $\varphi_0$  найдутся точки  $a_v$ ,  $v > v_0$ , сколь угодно близкие к точке  $\xi$ . Пусть  $\alpha_v$  — угол между  $\xi$  и  $a_v$ . То, что точка  $a_v$  находится в конусе Штольца, выражается тригонометрическим неравенством

$$\frac{2 \sin(\alpha_v/2)}{1 - |a_v|} \leq \frac{\sin(\varphi_0 + \alpha_v)}{\cos(\varphi_0 + \alpha_v/2)}$$

(рис. 15). В пределе получаем, что

$$\lim \frac{\alpha_\nu}{1 - |a_\nu|} \leq \operatorname{tg} \varphi_\nu \quad (12)$$

Точка  $\xi$  содержится в сферической шапочке радиуса  $\alpha_\nu$  с центром в  $a_\nu/|a_\nu|$ . При этом  $\xi$  накрывается всеми шапочками, у которых  $\nu > \nu_0$ . Площадь каждой шапочки асимптотически пропорциональна величине  $\alpha_\nu^{n-1}$ , которая мажорируется величиной  $(1 - |a_\nu|)^{n-1}$ . Поэтому в силу (11) мера

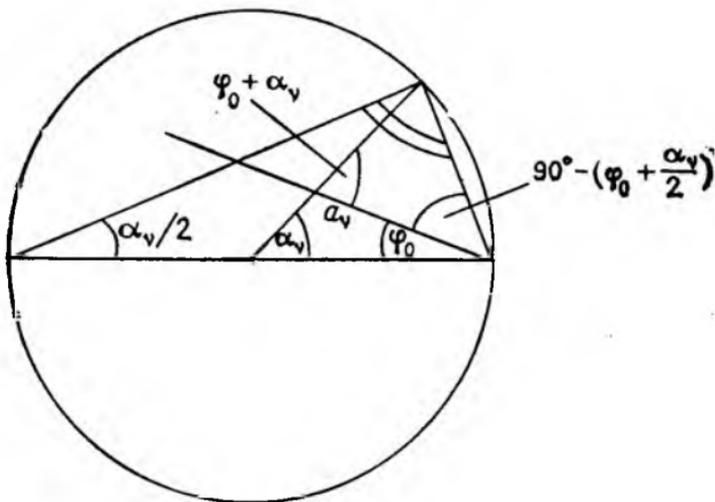


Рис. 15

множества  $L(B_0)$  меньше константы, умноженной на  $\varepsilon$ , и, следовательно, равна нулю. Наконец, само  $L$  есть счетное объединение множеств  $L(B_0)$ , и тем самым мы доказали, что  $m(L) = 0$ .

**7.13.** Коническое предельное множество всегда инвариантно относительно  $\Gamma$ , так как если  $\xi \in L$  и  $\gamma \in \Gamma$ , то  $\gamma$  отображает конус Штольца с вершиной в точке  $\xi$  на множество, которое содержится в несколько большем конусе Штольца в точке  $\gamma\xi$ .

Если  $\Gamma$  — группа расходящегося типа, то мы заключаем, что либо  $m(L) = 0$ , либо  $m(L) = \omega_n$ . Таким образом, для любой группы  $\Gamma$  возможен только один из двух крайних случаев.

В конечном счете мы докажем, что  $m(L) = \omega_n$  для всех групп  $\Gamma$  расходящегося типа, поэтому различие между сходимостью и расходимостью состоит в том, будет ли мера конического предельного множества  $L$  равна нулю или полной мере  $\omega_n$ .

Однако пришло время рассказать немного об истории данной проблемы. Вначале эта проблема касалась геодези-

ческих на замкнутой римановой поверхности. В 30-х годах нашего столетия появились фундаментальные работы Морса, Хедлунда, Мирберга и многих других. Решающий шаг был сделан Эберхардом Хопфом (в 1936 г.), который доказал, что группа  $\Gamma$  действует эргодично на  $S \times S$  в случае компактной римановой поверхности или поверхности с конечным числом проколов. Действие  $\Gamma$  на  $S \times S$  определялось как  $\gamma(\xi, \eta) = (\gamma\xi, \gamma\eta)$ . Этот результат, конечно, намного сильнее, чем просто эргодичность на  $S$ .

Вскоре Хопф обобщил свою теорему на многомерный случай, причем в гораздо более общей форме; именно, он показал, что конечность объема не является здесь самым точным условием. В 1939 г. он доказал следующую теорему.

**Теорема (Э. Хопф).** *Группа  $\Gamma$  действует эргодично на  $S \times S$  тогда и только тогда, когда  $m(L) = \omega_n$ .*

В доказательстве существенно используются эргодические теоремы Биркгофа, его нельзя провести элементарными средствами.

Самое недавнее продвижение в этой теории принадлежит Д. Сулливану (1978 г.)<sup>1)</sup>.

**Теорема (Д. Сулливан).** *Группа  $\Gamma$  действует эргодично на  $S \times S$  тогда и только тогда, когда  $\Gamma$  расходящегося типа.*

В доказательстве Сулливана используются марковские цепи, и я должен признаться, что не понимаю его. Однако сейчас имеются сравнительно элементарные доказательства того, что каждая группа расходящегося типа удовлетворяет условию  $m(L) = \omega_n$ . Такие доказательства есть и у Сулливана, и у Тёрстона. В дальнейшем мы приведем подробное изложение доказательства Тёрстона.

**7.14.** Действие группы  $\Gamma$  на  $S \times S$  определяется равенством  $\gamma(\xi, \eta) = (\gamma\xi, \gamma\eta)$ . Это действие называется *диссипативным*, если существует измеримое множество  $\Delta \subset S \times S$ , такое, что

$$1) \Delta \cap \gamma\Delta = \emptyset \text{ для всех } \gamma \in \Gamma \setminus I;$$

$$2) m\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma\Delta\right) = m(S \times S) = \omega_n^2$$

т. е., коротко говоря,  $\Delta$  является измеримым фундаментальным множеством.

<sup>1)</sup> См. Sullivan D. On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions. In: Riemann Surfaces and Related Topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (Ann. of Math. Studies, No 97.—Princeton: Princeton Univ. Press, 1981).—Прим. ред.

**Лемма 4.** Если  $m(L) = 0$ , то действие группы  $\Gamma$  на  $S \times S$  диссипативно.

*Доказательство.* Предположим, что  $(\xi, \eta) \in (S \setminus L) \times (S \setminus L) \setminus \{\text{диагональ}\}$ . Тогда

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1 - |\alpha_v|}{|\xi - a_v|} = 0, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1 - |a_v|}{|\eta - a_v|} = 0 \quad (13)$$

по определению множества  $L$ .

Как и прежде,  $\gamma_v^{-1}(0) = a_v$ , поэтому, согласно формуле (43) п. 2.9,

$$|\gamma'_v(\xi)| |\gamma'_v(\eta)| = \frac{(1 - |a_v|^2)^2}{|\xi - a_v|^2 |\eta - a_v|^2}.$$

Так как либо  $|\xi - a_v| \geq \frac{1}{2} |\xi - \eta|$ , либо  $|\eta - a_v| \geq \frac{1}{2} |\xi - \eta|$ , то

$$|\gamma'_v(\xi)| |\gamma'_v(\eta)| \leq \frac{4}{|\xi - \eta|^2} \max \left[ \left( \frac{1 - |a_v|}{|\xi - a_v|} \right)^2, \left( \frac{1 - |a_v|}{|\eta - a_v|} \right)^2 \right].$$

Поэтому, в силу (13),  $|\gamma'_v(\xi)| \cdot |\gamma'_v(\eta)| \rightarrow 0$ , и, следовательно, существует  $\gamma_0 \in \Gamma$ , для которого  $|\gamma'_0(\xi)| \cdot |\gamma'_0(\eta)|$  максимально. Так как

$$|\gamma\xi - \gamma\eta| = |\gamma'(\xi)|^{1/2} |\gamma'(\eta)|^{1/2} |\xi - \eta|,$$

то это эквивалентно тому, что  $|\gamma_0\xi - \gamma_0\eta|$  максимально. Другими словами, если  $\xi_0 = \gamma_0\xi$  и  $\eta_0 = \gamma_0\eta$ , то

$$|\xi_0 - \eta_0| \geq |\gamma\xi_0 - \gamma\eta_0| \quad (14)$$

для всех  $\gamma \in \Gamma$ , а это эквивалентно неравенству

$$|\gamma'(\xi_0)| |\gamma'(\eta_0)| \leq 1. \quad (15)$$

Предположим для простоты, что начало координат не является неподвижной точкой. Докажем, что множество

$$\Delta = \{(\xi, \eta); |\gamma'(\xi)| \cdot |\gamma'(\eta)| < 1 \text{ для } \gamma \in \Gamma \setminus I\}$$

обладает свойствами 1) и 2). Действительно, если точки  $(\xi, \eta)$  и  $(\xi_0, \eta_0)$  эквивалентны относительно  $\Gamma$ , то они не могут одновременно принадлежать множеству  $\Delta$ , поскольку из этого следовало бы, что  $|\xi_0 - \eta_0| > |\xi - \eta|$  и  $|\xi - \eta| > |\xi_0 - \eta_0|$ . Для доказательства свойства 2) заметим, что, как показывает наша конструкция, каждая точка  $(\xi, \eta)$  эквивалентна некоторой точке  $(\xi_0, \eta_0) \in \Delta$ , исключая лишь следующие случаи:

- $\xi = \eta$ ,
- $\xi \in L$  или  $\eta \in L$ ,
- $|\gamma'(\xi)| \cdot |\gamma'(\eta)| = 1$  для некоторого  $\gamma \in \Gamma \setminus I$ .

Ясно, что а) и с) выполняются только на множестве меры нуль, а если  $m(L) = 0$ , то же самое относится и к случаю б). Тем самым доказательство полностью завершено.

(Идея этого доказательства принадлежит Сулливану.)

7.15. Приступим теперь к предложенному Тёрстоном доказательству следующего факта.

**Теорема 4.** Если  $m(L) = 0$ , то  $\Gamma$  является группой сходящегося типа.

*Замечание.* Это следствие теоремы Сулливана. С другой стороны, теорема 4 превращает теорему Сулливана в следствие теоремы Хопфа.

*Доказательство (Тёрстон).* Рассмотрим опять шар  $B_0 = B(\rho_0)$  с центром в начале координат и обозначим его образы  $\gamma_v^{-1}B_0$  через  $B_v$ , а тень  $B_v$  через  $B'_v$ . Мера множества  $E \subset S$  вместо  $m(E)$  будем обозначать через  $|E|$ .

Условие  $m(L) = 0$  можно записать в виде

$$\lim_{v_0 \rightarrow \infty} \left| \bigcup_{v > v_0} B'_v \right| = 0. \quad (16)$$

Действительно, пусть  $\chi_{v_0}$  — характеристическая функция множества  $\bigcup_{v > v_0} B'_v$ . Тогда равенство (16) означает, что

$$\lim_{v_0 \rightarrow \infty} \int_S \chi_{v_0}(\xi) d\omega(\xi) = 0,$$

в то время как равенство  $|L| = 0$  равносильно равенству

$$\int_S \lim_{v_0 \rightarrow \infty} \chi_{v_0}(\xi) d\omega(\xi) = 0.$$

Эти условия выполняются одновременно на основании леммы Фату.

С другой стороны, утверждение, что  $\Gamma$  является группой сходящегося типа, как мы видели, эквивалентно неравенству

$$\sum_{v=0}^{\infty} |B'_v| < \infty. \quad (17)$$

Очевидно, что условие (16) влечет за собой (17), если тени  $B'_v$  налегают друг на друга не слишком сильно. Идея доказательства заключается в том, чтобы показать, что имеет место как раз этот случай.

*Шаг 1.* Покажем прежде всего, что для упрощения ситуации можно отбросить достаточно много шаров  $B_v$ . Для этого

выберем число  $\rho > 0$ , которое в конечном счете будет большим, и используем его для построения последовательности  $\{v_k\}_0^\infty$ , определяемой следующим образом:

1° положим  $v_0 = 0$ ;

2° допустим, что  $v_0, \dots, v_k$  выбраны так, что все попарные расстояния  $d(a_{v_i}, a_{v_j}) > \rho$ . Тогда в качестве  $v_{k+1}$  возьмем наименьший индекс  $v$ , для которого  $d(a_{v_i}, a_{v_{k+1}}) > \rho$  при всех  $i = 0, \dots, k$ .

Такой выбор всегда возможен, и мы видим, что справедливо следующее:

а)  $d(a_{v_h}, a_{v_k}) > \rho$  для всех  $h \neq k$ ;

б) для каждого  $v$  существует такое  $v_k$ , что  $d(a_v, a_{v_k}) \leq \rho$ . Имеется лишь конечное число  $N$  точек  $a_v$ , для которых  $d(a_v, 0) \leq \rho$ , а следовательно, также только  $N$  точек  $a_v$ , удовлетворяющих неравенству  $d(a_v, a_{v_k}) \leq \rho$ . Если это выполнено, то

$$\frac{1 - |a_v|}{1 - |a_{v_k}|} \leq M,$$

где  $M$  зависит только от  $\rho$ . Из неравенства

$$\sum (1 - |a_{v_k}|)^{n-1} < \infty$$

следует, что  $\sum (1 - |a_v|)^{n-1} < \infty$ .

Вернемся для простоты к обозначениям  $a_v$ , поскольку неравенство (16) остается при этом справедливым, а неравенство (17) достаточно доказать для подпоследовательности.

*Шаг 2.* Выберем число  $\rho$  настолько большим, чтобы шары  $B_v$  не пересекались. Поместим теперь наблюдателя в начало координат и будем говорить о полном или частичном затенении, в зависимости от того, как две тени налегают друг на друга. Все шары  $B_v$  разбиваются на классы в зависимости от числа шаров, которыми они затеняются.

Класс  $I_0$  состоит из одного шара  $B_0$ . Удалим  $B_0$  и определим  $I_1$  как класс всех шаров  $B_v$ , которые полностью видны из начала координат. Затем удалим все  $B_v \in I_1$  и определим  $I_2$  как класс тех шаров  $B_v$ , которые полностью видны в данный момент, и т. д. Очевидно, что каждый шар  $B_v$  попадает

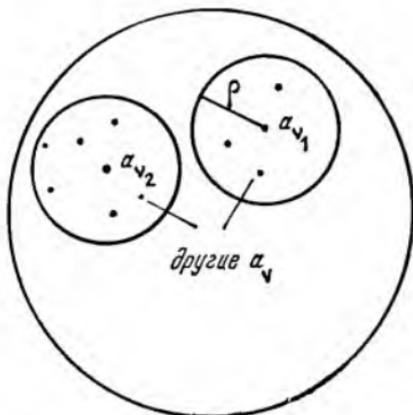


Рис. 16

в некоторый класс  $I_m$  и что тени шаров  $B_v \in I_m$  не пересекаются.

Будет показано, что

$$\sum_{I_{m+1}} |B'_v| \leq \kappa \sum_{I_m} |B'_v|,$$

где  $\kappa < 1$ . Отсюда с очевидностью будет следовать неравенство (17).

*Шаг 3.* Каждый шар  $B_j \in I_{m+1}$  частично или полностью затеняется некоторым шаром  $B_i \in I_m$ . Пусть  $r_i$  и  $r_j$  — евкли-

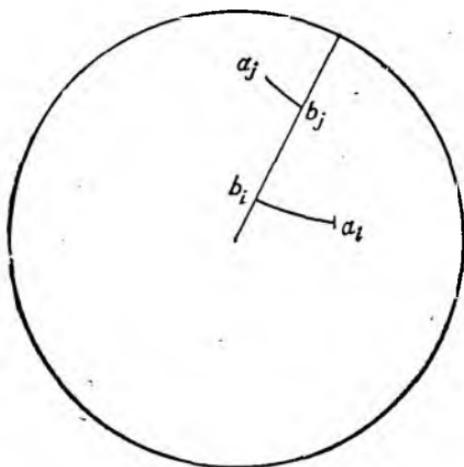


Рис. 17

довы радиусы шаров  $B_i$  и  $B_j$  соответственно. Нам понадобится верхняя оценка для отношения  $r_j/r_i$ .

Рассмотрим рис. 17, на котором точки  $a_i$  и  $a_j$  находятся на неевклидовом расстоянии, меньшем  $\rho_0$ , от одного и того же радиуса. Пусть  $b_i$  и  $b_j$  — неевклидовы ортогональные проекции точек  $a_i$  и  $a_j$  на этот радиус. Тогда

$$\begin{aligned} \rho < d(a_i, a_j) < d(b_i, b_j) + 2\rho_0 = \\ &= d(0, b_j) - d(0, b_i) + 2\rho_0 < d(0, a_j) - d(0, a_i) + 4\rho_0, \end{aligned}$$

или

$$d(0, a_j) > d(0, a_i) + \rho - 4\rho_0,$$

и

$$\frac{1 + |a_j|}{1 - |a_j|} > \frac{1 + |a_i|}{1 - |a_i|} e^{\rho - 4\rho_0},$$

что дает

$$1 - |a_i| < 2e^{-\rho + 4\rho_0} (1 - |a_j|).$$

Применяя формулу (4), находим окончательно

$$\frac{r_j}{r_i} < 4e^{-\rho+4\rho_0} \operatorname{ch} \frac{2\rho_0}{2}. \quad (18)$$

Главное здесь заключается в том, что это отношение можно сделать сколь угодно малым, выбирая  $\rho$  достаточно большим.

Рассмотрим теперь все шары  $B_j \in I_{m+1}$ , которые частично затеняются шарами  $B_i \in I_m$ . Их тени  $B'_j$  попарно не пересекаются и лежат асимптотически в пределах расстояния  $r_j$  от края тени  $B'_i$ . Поэтому их общая площадь асимптотически не превосходит

$$A(r_i + 2r_j) - A(r_i - 2r_j) \sim 4(n-1) \frac{r_j}{r_i} |B'_i|.$$

(Мы опять воспользовались обозначением  $A(r)$  для площади сферической шапочки радиуса  $r$ .) В силу этой оценки можно выбрать  $\rho$  так, чтобы для достаточно большого  $m$  общая площадь теней  $B'_j$  всех тех шаров  $B_j \in I_{m+1}$ , которые частично, но не полностью затеняются некоторыми шарами  $B_i \in I_m$ , была бы меньше, чем

$$\frac{1}{3} \sum_{B_i \in I_m} |B'_i|.$$

*Шаг 4.* Перейдем теперь к рассмотрению тех шаров  $B_j \in I_{m+1}$ , которые полностью затеняются шарами  $B_i \in I_m$ . Нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

**Лемма 5.** *Если  $\xi \in B'_i \cap B'_j$ , где  $B_i \in I_m$ ,  $B_j \in I_{m+1}$ , то геодезическая  $(a_i, \xi)$  пересекает шар  $B_j$  с центром  $a_j$  и неевклидовым радиусом  $2\rho_0$ , где  $\rho_0$  — радиус шара  $B_0$ .*

*Доказательство.* Отобразим единичный шар конформно на верхнее полупространство  $H^n$  так, чтобы точка 0 перешла в  $e_n$ , а точка  $\xi$  в  $\infty$ . Сохраним обозначения точек  $a_i$  и  $a_j$ . Геодезическая  $(0, \xi)$  перейдет в вертикальную прямую, проходящую через  $e_n$ , а геодезическая  $(a_i, \xi)$  в вертикальную прямую, проходящую через  $a_i$ . Пересечение последней с гиперплоскостью  $\mathbb{R}^{n-1}$  обозначим через  $c$  (рис. 18).

Пусть  $b_i, b_j$  — точки на вертикальной прямой, проходящей через 0, ближайšie к точкам  $a_i, a_j$ , а  $c_j$  — точка на вертикальной прямой, проходящей через  $c$ , ближайшая к  $b_j$  (рисунок может ввести в заблуждение, поскольку точка  $a_j$  не обязана лежать в той же плоскости, что и эти две вертикальные прямые). Имеют место следующие формулы для неевклидовых

расстояний:

$$d(a_i, b_i) = \int_{\varphi_i}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \log \operatorname{ctg} \frac{\varphi_i}{2},$$

$$d(b_j, c_j) = \int_{\varphi_j}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \log \operatorname{ctg} \frac{\varphi_j}{2}.$$

Однако

$$\cos \varphi_i = \frac{|c|}{|a_i|} = \frac{|c|}{|b_i|},$$

$$\cos \varphi_j = \frac{|c|}{|c - b_j|} < \frac{|c|}{|b_j|} < \frac{|c|}{|b_i|} = \cos \varphi_i,$$

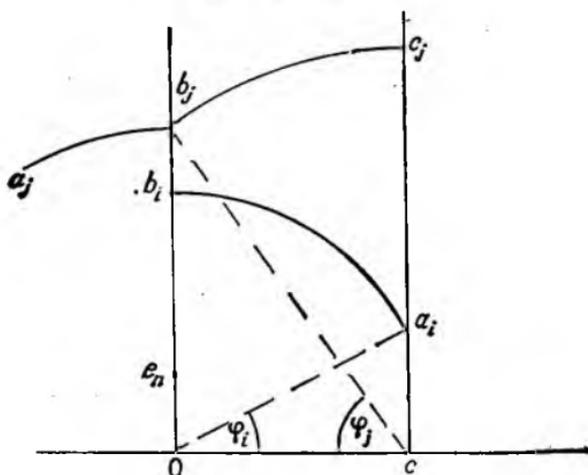


Рис. 18

так как  $|b_j| > |b_i|$ . Поэтому  $\varphi_j > \varphi_i$  и

$$d(b_j, c_j) < d(a_i, b_i) \leq \rho_0.$$

Следовательно,

$$d(a_j, c_j) \leq d(a_j, b_j) + d(b_j, c_j) \leq 2\rho_0,$$

и тем самым лемма доказана.

На следующем рисунке слева показаны шар  $B_i$  и некоторый полностью затененный шар  $B_j$  вместе с их тенями. Справа показана вся конфигурация, получаемая после применения отображения  $\gamma_i$ .

Образ  $\gamma_i B_j$  не совпадает с множеством  $(\gamma_i B_j)'$ . Тем не менее лемма утверждает, что  $\gamma_i B_j'$  содержится в  $(\gamma_i B_j)'$ .

Ясно, что условие (16) остается справедливым, когда шар  $B_0$  заменяется на  $\bar{B}_0$ , а каждый шар  $B_j$  на  $\bar{B}_j$ . Поэтому, как

только  $m$  достаточно велико,

$$\sum_I |\gamma_i B'_j| \leq \sum_I |(\gamma_i \bar{B}_j)'| < \epsilon. \quad (19)$$

С другой стороны, если  $\rho$ , монотонно возрастая, стремится к  $\infty$ , то точки  $\gamma_i(0)$  приближаются к границе, в то время как площадь тени шара  $B_0$ , если смотреть на него из точек  $\gamma_i(0)$ ,

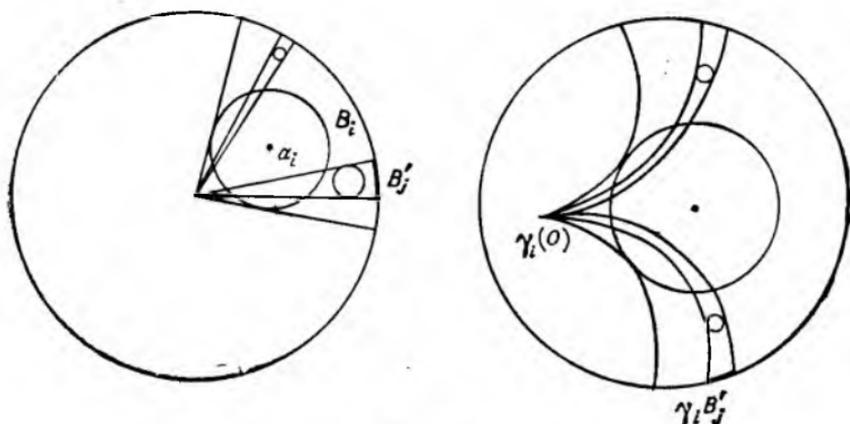


Рис. 19

бывает до некоторого положительного предела  $\alpha_0$ . Иначе говоря,

$$|\gamma_i B'_i| > \alpha_0. \quad (20)$$

Но

$$\begin{aligned} |\gamma_i B'_i| &> (\min |\gamma'_i(x)|)^{n-1} |B'_i|, \\ |\gamma_i B'_i| &< (\max |\gamma'_i(x)|)^{n-1} |B'_i|, \end{aligned} \quad (21)$$

где максимум и минимум берутся по всем шарам  $B'_i$ .

Из (19), (20) и (21) следует, что

$$\sum_I |B'_i| < \frac{\max |\gamma'_i(x)|^{n-1}}{\min |\gamma'_i(x)|^{n-1}} \frac{\epsilon}{\alpha_0} |B'_i|,$$

где максимум величины

$$|\gamma'_i(x)| = (1 - |a_i|^2) / |x - a_i|^2$$

берется в центре, а минимум на краю. Отношение стремится к тому же пределу, что и  $r_i / (1 - |a_i|)$ , а последний, как мы знаем, конечен. Поэтому существует постоянная  $K$ , такая, что

$$\sum_I |B'_i| \leq \frac{K\epsilon}{|\alpha_0|} |B'_i|.$$

Выберем  $\epsilon$  настолько малым, чтобы множитель справа стал меньше  $1/3$ .

Это позволяет заключить, что тени полностью затененных шаров  $B_j \in I_{m+1}$  составляют самое большее одну треть теней шаров  $B_i \in I_m$ . Вместе с предыдущим результатом для частично затененных шаров  $B_j$  это дает, что

$$\sum_{B_j \in I_{m+1}} |B'_j| < \frac{2}{3} \sum_{B_i \in I_m} |B'_i|$$

для всех достаточно больших  $m$ . Отсюда следует, что сумма всех  $|B'_i|$  конечна и потому

$$\sum_{v=0}^{\infty} (1 - |a_v|)^{n-1} < \infty.$$

Теорема доказана.

## VIII. КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

8.1. Напомним основные свойства квазиконформных отображений в  $n$ -мерном пространстве. Квазиконформное отображение является прежде всего *гомеоморфизмом*

$$F: \Omega \rightarrow \Omega'$$

одного открытого множества в пространстве  $\mathbb{R}^n$  на другое. Далее, оно должно быть в каком-нибудь смысле регулярным. Можно, например, потребовать от  $F$  абсолютной непрерывности на прямых. Это означает, что ограничение  $F$  на почти все прямые, параллельные координатным, является абсолютно непрерывным.

При этих условиях частные производные  $D_i F_j$  существуют почти всюду, и поэтому можно рассмотреть матрицу Якоби

$$DF = \|D_i F_j\|$$

отображения  $F$ , которая также определена почти всюду. Ее определитель будет обозначаться через  $JF$ . Введем также нормированный якобиан

$$XF = (JF)^{-1/n} DF \quad (1)$$

и симметризованный нормированный якобиан

$$MF = (XF)^T \cdot XF, \quad (2)$$

где  $X^T$  — транспонированная матрица  $X$ .

Отображение  $F$  называется  $K$ -квазиконформным, если

$$\|XF\|^2 = \text{tr } MF \leq nK^2, \quad (3)$$

Можно написать

$$MF = U^T \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} U, \quad (4)$$

где матрица  $U$  принадлежит  $SO(n)$  и  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ . Ясно, что

$$XF = V \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} U, \quad (5)$$

где  $V$  — некоторая другая ортогональная матрица (в случае одинаковых собственных значений матрицы  $U$  и  $V$  не определяются единственным способом). Заметим, что  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = 1$  и

$$nK^2 \geq \|XF\|^2 = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 \geq n. \quad (6)$$

Отсюда следует существование оценок сверху для  $\lambda_1$ ,  $\lambda_n^{-1}$  и  $\lambda_1/\lambda_n$ , и иногда  $K$  используется для обозначения одной из них.

8.2. Ввиду того что с квазиконформными отображениями в  $n$ -мерном пространстве трудно работать, имеет смысл их линеаризовать, перейдя к инфинитезимальному рассмотрению. Пусть  $F(x, t)$  — однопараметрическое семейство почти всюду дифференцируемых отображений, имеющих при  $t \rightarrow 0$  представление

$$F(x, t) = x + tf(x) + o(t). \quad (7)$$

Обозначим дифференцирование по  $t$  точкой сверху и напомним

$$\dot{F}(x) = \dot{F}(x, 0) = f(x). \quad (8)$$

Предполагая, что равенство (7) можно продифференцировать, получим

$$DF(x, t) = I + tDf(x) + o(t),$$

или

$$(DF)^{\cdot}(x) = Df(x). \quad (9)$$

Кроме того,

$$\dot{j}(x) = \text{tr } Df,$$

$$(XF)^{\cdot} = Df - \frac{1}{n} \text{tr } Df \cdot I, \quad (10)$$

$$(MF)^{\cdot} = Df + Df^T - \frac{2}{n} \text{tr } Df \cdot I.$$

Все это служит основанием для введения матрицы

$$Sf = \frac{1}{2}(Df + Df^T) - \frac{1}{n} \operatorname{tr} Df \cdot I, \quad (11)$$

или, в явном виде,

$$(Sf)_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\delta_{ij}}{n} \sum_1^n \frac{\partial f_k}{\partial x_k}. \quad (12)$$

Заметим, что  $\operatorname{tr} Sf = 0$ . Таким образом, матрица  $Sf$  получается симметризацией матрицы  $Df$  с последующим вычитанием кратного матрицы  $I$ , которое делает след равным нулю. Пространство симметрических матриц размера  $n \times n$  с нулевым следом будет обозначаться через  $SM^n$ . Мы будем использовать также квадрат нормы матрицы, определенный равенством

$$\|A\|^2 = \operatorname{tr}(A^T A). \quad (13)$$

**Определение 1.** Отображение  $f$  называется  $k$ -квазиконформной деформацией, если почти всюду в  $\Omega$

$$\|Sf\| \leq k \sqrt{n}.$$

Для  $n = 2$  можно использовать комплексные обозначения  $f = u + iv$ ,  $z = x + iy$ . Тогда оказывается, что

$$Sf = \begin{vmatrix} \operatorname{Re} f_{\bar{z}} & \operatorname{Im} f_{\bar{z}} \\ \operatorname{Im} f_{\bar{z}} & -\operatorname{Re} f_{\bar{z}} \end{vmatrix} \quad (14)$$

и  $\|Sf\|^2 = 2|f_{\bar{z}}|^2$ . Поэтому отображение  $f$  будет  $k$ -квазиконформной деформацией тогда и только тогда, когда  $|f_{\bar{z}}| \leq k$  почти всюду.

Ввиду формулы (14) имеет смысл рассматривать  $Sf$  как естественное обобщение комплексной производной  $f_{\bar{z}}$ .

8.3. Наше определение недостаточно полно, так как в нем не указаны нужные условия регулярности. Поэтому мы заменим его следующим определением.

**Определение 1'.** Гомеоморфизм  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется квазиконформной деформацией, если  $f$  имеет локально интегрируемые обобщенные производные  $D_j f_i$  и если матричнозначная функция  $Sf$ , образованная с помощью этих производных, имеет норму  $\|Sf\| \in L^\infty$ . Этот гомеоморфизм называется  $k$ -квазиконформной деформацией, если норма  $\|Sf\|$  в  $L^\infty$  не превосходит  $k\sqrt{n}$ .

При  $n = 2$  всякое 0-квазиконформное отображение конформно (это лемма Вейля); при  $n \geq 2$  все конформные ото-

бражения мёбиусовы<sup>1)</sup>. Можно ожидать, что при  $n > 2$  имеется совсем немного деформаций, удовлетворяющих условию  $Sf = 0$ .

**Лемма 1.** Если  $n > 2$ , то  $Sf = 0$  тогда и только тогда, когда  $f$  имеет вид

$$f = a + Sx + b|x|^2 - 2(bx)x, \quad (15)$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные векторы, а  $S$  — постоянная матрица, являющаяся суммой кососимметрической и диагональной (с одинаковыми элементами по диагонали).

*Доказательство.* Предположим сначала, что  $f \in C^3$ . Будем обозначать (только в этом доказательстве) компоненты  $f$  верхними индексами, а производные — нижними. Условие теоремы означает, что  $f_j^i = -f_i^j$  при  $i \neq j$  и  $f_i^i = f_j^j$ . Если числа  $i, j, k$  все различны, то  $f_{jk}^i = -f_{ik}^j = -f_{ki}^j = f_{ji}^k = -f_{jk}^i$  и потому  $f_{jk}^i = 0$ .

Если  $j \neq k$ , то существует  $h \neq j, k$ , и мы получаем, что  $f_{ijk}^i = f_{hjk}^h = 0$ . Кроме того,  $f_{kjl}^k = -f_{ljk}^k = -f_{hkk}^h = f_{khh}^k = -f_{jhh}^j = -f_{hjl}^h = -f_{kii}^k = 0$ . Аналогично,  $f_{iil}^i = 0$  как для  $i = j$ , так и для  $i \neq j$ .

Следовательно, все производные третьего и более высоких порядков равны нулю, и, как легко проверить, члены низших порядков должны быть такими, как в (15).

В случае существования у отображения  $f$  только обобщенных производных, применяется прием свертки с радиальной функцией  $\delta_\epsilon$  с носителем в  $B(\epsilon)$ . Так как  $S(f * \delta_\epsilon) = Sf * \delta_\epsilon = 0$ , то  $f * \delta_\epsilon$  имеет вид (15), и в пределе при  $\epsilon \rightarrow 0$  отображение  $f$  имеет тот же самый вид<sup>2)</sup>.

**8.4.** Пусть  $\varphi$  — дифференцируемая функция со значениями в  $SM^n$ . Определим  $S^*\varphi$  как векторнозначную функцию с компонентами

$$(S^*\varphi)_i = D_j \varphi_{ij}, \quad (16)$$

где опять используется соглашение о суммировании.

Из формулы Грина — Стокса сразу видно, что

$$\int (Sf \cdot \varphi) dx = - \int (f \cdot S^*\varphi) dx, \quad (17)$$

при условии что по крайней мере одна из функций  $f$  или  $\varphi$  имеет компактный носитель. Скалярные произведения в фор-

<sup>1)</sup> По обобщенной теореме Лиувилля. (См., например, Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. — Новосибирск: Наука, 1982.) — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Обратное получается дифференцированием (15). — *Прим. ред.*

муле (17) служат для сокращения записи выражений  $Sf_{ij}\varphi_{ij}$  и  $f_i(S^*\varphi)_i$ . На основании формулы (17) будем рассматривать  $S^*$  как сопряженную к  $S$ . Заметим, что формула остается справедливой, если функция  $\varphi$  непрерывна и имеет локально интегрируемые обобщенные производные; впредь будем считать это требуемой степенью регулярности.

Почитательно опять рассмотреть случай  $n = 2$ . Если

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{12} & -\varphi_{11} \end{pmatrix},$$

то будем писать  $\varphi = u + iv$ , где  $u = \varphi_{11}$ ,  $v = \varphi_{12}$ , и установим обозначение  $z = x + iy = x_1 + ix_2$  для независимой переменной. Если отождествить вектор  $S^*\varphi$  с  $(S^*\varphi)_1 + i(S^*\varphi)_2$ , то получим, что

$$S^*\varphi = 2\varphi_z. \quad (18)$$

Вместе с равенством  $Sf = f_z$  это дает  $S^*Sf = \frac{1}{2}\Delta f$ .

В общем случае

$$S^*Sf = \frac{1}{2}\Delta f + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) \text{grad div } f. \quad (19)$$

Операторы такого типа похожи на операторы в теории упругости.

**8.5.** Естественно рассмотреть фундаментальные решения уравнения  $S^*Sf = 0$ . Начнем с решений уравнения  $S^*\gamma = 0$ , где  $\gamma$  принимает значения в  $SM^n$ . В этом случае существует  $n$  линейно независимых решений  $\gamma^k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , имеющих самую слабую из возможных особенностей в нуле. Они даются в явном виде формулой

$$\gamma_{ij}^k(x) = \frac{\delta_{ik}x_j + \delta_{jk}x_i - \delta_{ij}x_k}{|x|^n} + (n-2) \frac{x_i x_j x_k}{|x|^{n+2}}. \quad (20)$$

Короткое вычисление показывает, что каждый член по отдельности аннулируется оператором  $S^*$ . Выбор в качестве решений именно таких линейных комбинаций объясняется тем, что след матрицы  $S\gamma$  должен равняться нулю. Особенность здесь достаточно слабая и не препятствует интегрируемости функций  $\gamma^k(x)$ , но их производные уже не интегрируемы.

При  $n = 2$  устанавливается, что функции  $\gamma^1$  и  $\gamma^2$  представляются соответственно функциями  $1/\bar{z}$  и  $i/\bar{z}$ . Связь с ядром Коши здесь очевидна, и мы найдем, что  $\gamma_{ij}^k$  действительно играют почти такую же роль, как ядро Коши.

8.6. Решим теперь уравнение

$$Sg^k = \gamma^k, \quad (21)$$

из которого будет следовать, что  $S^*Sg^k = 0$ . Компоненты функций  $g^k$  удобно взять в виде

$$g_i^k = a(r) \delta_{ik} + b(r) x_i x_k, \quad (22)$$

где, как обычно,  $r = |x|$ . Элементарное вычисление дает

$$(Sg^k)_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{a'(r)}{r} + b(r) \right) (\delta_{ik} x_j + \delta_{jk} x_i) + \frac{b'(r)}{r} x_i x_j x_k - \\ - \frac{1}{n} \delta_{ij} x_k \left( \frac{a'(r)}{r} + b(r) + r b'(r) \right).$$

Сравнение с формулой (20) приводит к условиям

$$\frac{1}{2} \left( \frac{a'(r)}{r} + b(r) \right) = \frac{1}{r^n}, \quad \frac{b'(r)}{r} = \frac{n-2}{r^{n+2}}, \\ - \frac{1}{n} \left( \frac{a'(r)}{r} + b(r) + r b'(r) \right) = \frac{-1}{r^n}.$$

Последнее из них является следствием первых двух. Отсюда находим, что

$$g_i^k(x) = \frac{-3n-2}{n(n-2)} \frac{\delta_{ik}}{r^{n-2}} - \frac{n-2}{n} \frac{x_i x_k}{r^n}, \quad (23)$$

если  $n > 2$ , и  $g_i^k = (\log r) \delta_{ik}$  при  $n = 2$ .

8.7. Совершенно естественно возникает следующая

**Проблема.** Если известна  $Sf$ , то как найти  $f$  и каким условиям должна удовлетворять матричнозначная функция  $Sf$ ? Другими словами, когда неоднородное уравнение

$$Sf = v \quad (24)$$

имеет решение и как найти это решение? Для  $n = 2$  известно, что уравнение всегда разрешимо и решение дается обобщенной интегральной формулой Коши, которую называют также формулой Помпейю.

Для простоты будем рассматривать только случай, когда функция  $v$  принадлежит классу  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  и имеет компактный носитель. Мы уже знаем из п. 8.3, что решение уравнения (24), если оно существует, единственно с точностью до функций вида (15).

Первая теорема является обобщением формулы Помпейю, которая связывает функции  $f$  и  $Sf$ .

**Теорема 1.** Каждая квазиконформная деформация  $f$  удовлетворяет условию

$$c_n f_k(y) = - \int_{B(y, r)} S f(x) \cdot \gamma^k(x-y) dx + \int_{S(y, r)} [(I + (n-2)Q(x-y)) f(x)]_k d\omega(x),$$

где  $c_n = 2(n-1)\omega_n/n$ . Если  $f$  имеет компактный носитель, то формула сводится к виду

$$c_n f_k(y) = - \int_{\mathbb{R}^n} S f(x) \cdot \gamma^k(x-y) dx.$$

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть случай  $y=0$ . Интегрирование по частям<sup>1)</sup> дает

$$\begin{aligned} \int_{B(r) \setminus B(r_0)} S f_{ij} \gamma_{ij}^k dx &= \int_{B(r) \setminus B(r_0)} D_i f_j \gamma_{ij}^k dx = \int_{S(r)} f_j \gamma_{ij}^k \frac{x_i}{r} d\omega \Big|_{r_0}^r = \\ &= \int_{S(r)} f_j \frac{x_i}{r} \left( \frac{\delta_{ik} x_j + \delta_{jk} x_i - \delta_{ij} x_k}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + (n-2) \frac{x_i x_j x_k}{r^{n+2}} \right) r^{n-1} d\omega \Big|_{r_0}^r = \\ &= \int_{S(r)} \left( f_k + (n-2) \frac{f(x)}{r^2} x_k \right) d\omega \Big|_{r_0}^r. \end{aligned}$$

В пределе при  $r_0 \rightarrow 0$  интеграл по сфере  $S(r_0)$  равен

$$\omega_n f_k(0) + (n-2) f_l(0) \int_{S(1)} x_l x_k d\omega.$$

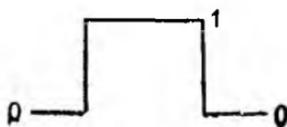
Очевидно, что

$$\int_{S(1)} x_l x_k d\omega = \delta_{lk} \frac{\omega_n}{n},$$

<sup>1)</sup> Если функция  $f$  имеет только обобщенные производные, то нужно рассматривать интегралы вида

$$\int D_i f_j(x) \lambda(|x|) \gamma_{ij}^k(x) dx,$$

где  $\lambda$  — функция, график которой похож на



и поэтому предел сводится к  $\frac{2(n-1)}{n} \omega_n f_k(0)$ . Поскольку  $\frac{f(x)x}{r^2} = Q(x)f$ , теорема доказана.

8.8. Определим теперь несколько более общий интеграл

$$I^{k\nu}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \nu_{ij}(x) \gamma_{ij}^k(x-y) dx, \quad (25)$$

являющийся  $k$ -й компонентой потенциала  $I\nu$  функции  $\nu$ ; предполагается, что  $\nu$  принадлежит классу  $L^1$  и имеет компактный носитель.

**Лемма 2.**  $I^{k\nu}$  имеет обобщенные производные<sup>1)</sup>

$$D_h I^{k\nu}(y) = -b_n \nu_{hk}(y) - P. V. \int \nu_{ij}(x) D_h \gamma_{ij}^k(x-y) dx \quad (26)$$

и  $D_h I^k \in L^p$  для каждого  $p > 1$ ,  $b_n = 4\omega_n/(n+2)$ .

Прежде чем доказывать эту лемму, выпишем явное выражение для  $D_h \gamma_{ij}^k(x)$ :

$$\begin{aligned} D_h \gamma_{ij}^k(x) &= \frac{\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{jk} \delta_{ih} - \delta_{ij} \delta_{hk}}{|x|^n} - \\ &- n \frac{\delta_{ik} x_j x_h + \delta_{jk} x_i x_h - \delta_{ij} x_k x_n}{|x|^{n+2}} + \\ &+ (n-2) \frac{\delta_{ih} x_j x_k + \delta_{ih} x_i x_k + \delta_{hk} x_i x_j}{|x|^{n+2}} - \\ &- (n^2 - 4) \frac{x_i x_j x_h x_k}{|x|^{n+4}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Покажем, что полученное выражение есть ядро Кальдерона — Зигмунда. Так как оно с очевидностью однородно степени  $-n$ , требуется только проверить, что

$$\int_{S(1)} D_h \gamma_{ij}^k(x) d\omega(x) = 0. \quad (28)$$

Это можно сделать прямым вычислением; единственное затруднение вызывает только последний член в формуле (27).

Кроме того, равенство можно вывести и без всяких вычислений: именно, по формуле Стокса

$$\int_{B(r_2) \setminus B(r_1)} D_h \gamma_{ij}^k(x) dx = \int_{S(r)} \gamma_{ij}^k(x) \frac{x_h}{r} d\sigma(x) \Big|_{r_1}^{r_2}.$$

<sup>1)</sup> Символ  $P. V.$  означает, что интеграл понимается в смысле главного значения. — Прим. ред.

Так как подынтегральные функции однородны степени нуль, то интегралы по сферам  $S(r_1)$  и  $S(r_2)$  равны. Следовательно, объемный интеграл слева обращается в нуль, а это влечет за собой равенство (28).

Из теории Кальдерона — Зигмунда известно, что главное значение интеграла в (26) существует почти всюду и представляет собой функцию из  $L^p$  для любого  $p > 1$ .

*Доказательство леммы 2.* Предположим сначала, что  $v \in C^\infty$ , и напишем равенство

$$\begin{aligned} I_\rho^k v(y) &= \int_{|x-y|>\rho} v_{ij}(x) \gamma_{ij}^k(x-y) dx = \\ &= \int_{|x|>\rho} v_{ij}(x+y) \gamma_{ij}^k(x) dx \end{aligned}$$

для сдвинутого потенциала. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} D_h I_\rho^k v(y) &= \int_{|x|>\rho} D_h v_{ij}(x+y) \gamma_{ij}^k(x) dx = \\ &= - \int_{|x|>\rho} v_{ij}(x+y) D_h \gamma_{ij}^k(x) dx - \int_{S(\rho)} v_{ij}(x+y) \gamma_{ij}^k(x) \frac{x_h}{\rho} d\sigma(x). \end{aligned} \quad (29)$$

При  $\rho \rightarrow 0$  поверхностный интеграл стремится к

$$v_{ij}(y) \int_{S(1)} \gamma_{ij}^k(x) x_h d\omega(x).$$

Чтобы оценить этот интеграл, требуется формула для

$$\int_{S(1)} x_i x_j x_h x_k d\omega(x).$$

Самый простой путь для получения этой формулы — подставить выражение (27) в равенство (28). Находим

$$\int_{S(1)} x_i x_j x_h x_k d\omega = \frac{\omega_n}{n(n+2)} (\delta_{ij} \delta_{hk} + \delta_{ih} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jh}),$$

и окончательно

$$\int_{S(1)} \gamma_{ij}^k(x) x_h d\omega = \frac{2\omega_n}{n+2} (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}) - \frac{4\omega_n}{n(n+2)} \delta_{ij} \delta_{hk}.$$

Теперь из (29) следует, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} D_h I_\rho^k(v_h) = -b_n v_{hk}(y) - P. V. \int v_{ij}(x) D_h \gamma_{ij}^k(x-y) dx.$$

Из теории сингулярных интегральных операторов Кальдерона — Зигмунда известно, что срезанный интеграл сходится к своему главному значению в пространстве  $L^p$  для каждого  $p > 1$ . Из этого тривиально следует, что предел  $D_h I_\rho^k$  является обобщенной производной  $D_h I^k$ , и тем самым лемма доказана для всех  $v \in C^\infty$ .

Чтобы доказать лемму для произвольной функции  $v$ , перейдем опять к свертке  $v * \delta_\varepsilon$ , где  $\delta_\varepsilon \in C^\infty$  и имеет носитель в шаре  $B_\varepsilon$ , а, кроме того,  $\int \delta_\varepsilon dx = 1$ . Из доказанного выше следует, что

$$D_h I^k (v * \delta_\varepsilon)(y) = -b_n (v_{hk} * \delta_\varepsilon)(y) - \\ - \text{P. V.} \int (v_{ij} * \delta_\varepsilon)(x) D_h \gamma_{ij}^k(x-y) dx. \quad (30)$$

Главное значение представляет собой ограниченный линейный оператор на пространстве  $L^p$ ,  $p > 1$ . Поэтому правая часть равенства (30) стремится в  $L^p$  к правой части (26). Следовательно, левая часть имеет предел в  $L^p$ , и этот предел является обобщенной производной. Лемма доказана.

8.9. Рассмотрим  $Iv$  как векторнозначную функцию с компонентами  $I^k v$ . Имеет смысл говорить о  $S(Iv)_{hk}$ . По лемме 2 сразу находим, что

$$S(Iv)_{hk} = -b_n v_{hk}(y) - \text{P. V.} \int v_{ij}(x) S\gamma_{ij, hk}(x-y) dx, \quad (31)$$

где  $S\gamma_{ij, hk}(x) = (S\gamma_{ij}^k)_{hk}$ , а через  $\gamma_{ij}^k$  обозначен вектор с компонентами  $\gamma_{ij}^k$ . В явном виде:

$$S\gamma_{ij, hk}(x) = \left( \delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{jk} \delta_{ih} - \frac{n+2}{2} \delta_{ij} \delta_{hk} \right) \frac{1}{|x|^n} + \\ + n (\delta_{ij} x_h x_k + \delta_{hk} x_i x_j) \frac{1}{|x|^{n+2}} - \\ - (\delta_{ik} x_j x_h + \delta_{ih} x_j x_k + \delta_{jh} x_i x_k + \delta_{jk} x_i x_h) \frac{1}{|x|^{n+2}} - \\ - (n^2 - 4) x_i x_j x_h x_k \frac{1}{|x|^{n+4}}.$$

Заметим, что  $S\gamma_{ij, hk} = S\gamma_{hk, ij}$ . Это выражение также является ядром Кальдерона — Зигмунда.

Предположим, что мы применяем (31) к  $v = Sf$ . Так как  $ISf = -c_n f$ , то  $S(Iv) = -c_n Sf = -c_n v$  и поэтому

$$a_n v_{hk}(y) = \text{P. V.} \int v_{ij}(x) S\gamma_{ij, hk}(x-y) dx, \quad (32)$$

где

$$a_n = c_n - b_n = \frac{2(n+1)(n-2)}{n(n+2)} \omega_n.$$

Обратно, если функция  $v$  (с компактным носителем) удовлетворяет соотношению (32), то из (31) следует, что

$$SIv(y)_{hk} = -c_n v_{hk}(y),$$

откуда получаем, что уравнение  $Sf = v$  имеет решение  $f = -\frac{1}{c_n} Iv$ . Тем самым доказана

**Теорема 2.** Если функция  $v \in L^\infty$  имеет компактный носитель, то для того, чтобы уравнение  $Sf = v$  имело решение  $f$  с компактным носителем, необходимо и достаточно, чтобы  $v$  удовлетворяла уравнению (32).

Что касается достаточности, мы не требуем, чтобы  $f = -\frac{1}{c_n} Iv$  имела компактный носитель, но так как  $Sf = 0$  в окрестности бесконечности, то функция  $f$  имеет там вид (15); вычитая это тривиальное решение уравнения  $Sf = 0$ , получаем решение уравнения  $Sf = v$  с компактным носителем.

**8.10.** Применим теперь теорему 1 для того, чтобы показать, что каждая квазиконформная деформация удовлетворяет почти липшицеву условию.

**Лемма 3.** Каждая квазиконформная деформация  $f$  удовлетворяет условию вида

$$|f(y) - f(y')| \leq A(R) |y - y'| \left(1 + \log^+ \frac{1}{|y - y'|}\right) \quad (33)$$

для  $|y|, |y'| \leq R < \infty$ <sup>1)</sup>.

*Доказательство.* Можно считать, что  $y' = 0$ . Из теоремы 1 получаем очевидную оценку

$$|f_k(y) - f_k(0)| \leq M \int_{B(2R)} \|\gamma^k(x-y) - \gamma^k(x)\| dx + C(R)|y|.$$

Заменим в интеграле  $x$  на  $|y|x$ . Так как  $\gamma^k(x)$  однородна степени  $1-n$ , то

$$\begin{aligned} \int_{B(2R)} \|\gamma^k(x-y) - \gamma^k(x)\| dx &= \\ &= |y| \int_{B(2R/|y|)} \left\| \gamma^k\left(x - \frac{y}{|y|}\right) - \gamma^k(x) \right\| dx. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Здесь, как обычно,  $\log^+$  означает положительную срезку логарифма. — Прим. ред.

Если  $|y| > R$ , то интеграл справа меньше, чем интеграл от той же самой функции по шару  $B(2)$ , который конечен ввиду сферической симметрии. Если же  $|y| \leq R$ , то нам нужно еще оценить интеграл по множеству  $2 \leq |x| \leq 2R/|y|$ .

Сразу видно, что  $\left\| \gamma^k \left( x - \frac{y}{|y|} \right) - \gamma^k(x) \right\| = O(|x|^{-n})$  при  $x \rightarrow \infty$ . Поэтому интеграл ограничен постоянной, умноженной на  $\log(R/|y|)$ , и мы заключаем, что неравенство (33) справедливо при подходящей постоянной  $A(R)$ .

**8.11.** Докажем теперь, что каждая квазиконформная деформация  $f(x)$  с компактным носителем порождает некоторую однопараметрическую группу квазиконформных отображений  $F_t(x) = F(x, t)$ , такую, что  $F_s \circ F_t = F_{s+t}$  и  $\dot{F}(x, 0) = f(x)$ . Точнее, имеет место

**Теорема 3.** Если  $f$  есть  $k$ -квазиконформная деформация, то  $F_t$  является  $e^{k|t|}$ -квазиконформным отображением.

(Эта теорема впервые была доказана М. Рейманом<sup>1)</sup>.)

*Доказательство.* Предположим сначала, что  $f$  принадлежит классу  $C^\infty$ . Для фиксированной точки  $x$  рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{F}(x, t) = f(F(x, t)) \quad (34)$$

с начальным условием  $F(x, 0) = x$ . Существование решения следует из классических теорем, а единственность — из того, что  $f$  удовлетворяет неравенству (33), которое есть не что иное, как «условие Осгуда». На самом деле решение существует для всех  $f$ , так как  $f$  ограничена. Кроме того,

$$F(x, s+t) = F(F(x, s), t),$$

поскольку обе части этого равенства являются решениями уравнения (34) с начальным условием  $F(x, s)$ . Это означает, что  $F_t \circ F_s = F_{s+t}$ . В частности,  $F_t \circ F_{-t} = x$ , и так как  $F(x, t)$  непрерывно по  $x$ , то оно гомеоморфно.

Дифференцирование равенства (34) по  $x$  дает

$$(DF)'(x, t) = (Df \circ F) DF(x, t).$$

Имеем также

$$(\log JF)' = \text{tr} (DF)^{-1} (DF)' = \text{tr} (Df \circ F).$$

<sup>1)</sup> Семейство  $\{F_t\}$  представляет собой квазиконформный поток. Такие потоки областей в  $\mathbb{R}^n$  независимо изучались Л. Альфорсом, М. Рейманом и В. И. Семеновым в их работах начиная с 1976 г. — *Прим. ред.*

Применяя это к  $XF = (JF)^{-1/n}DF$ , получаем

$$(XF)' = \left( -\frac{1}{n} \operatorname{tr}(Df \circ F) + Df \circ F \right) XF,$$

$$[(XF)^T(XF)]' = (XF)^T \left[ Df \circ F + Df^T \circ F - \frac{2}{n} \operatorname{tr}(Df \circ F) \right] XF,$$

откуда следует, что

$$\|XF\|^2' = 2 \operatorname{tr}[(Sf \circ F)XF(XF)^T].$$

Согласно неравенству Коши — Шварца,

$$|\operatorname{tr}(Sf) \cdot XX^T| \cdot \|Sf\| \cdot \|XX^T\| \leq \|Sf\| \cdot \|X\|^2.$$

Вместе с неравенством  $\|Sf\| \leq k$  это дает

$$\frac{d}{dt} \|XF\|^2 \leq 2k \|XF\|^2;$$

интегрируя, находим, что

$$\|XF(x, t)\| \leq \sqrt{n} e^{k|t|},$$

где мы воспользовались начальным условием

$$\|XF(x, 0)\| = \sqrt{n}.$$

Если функция  $f$  не дифференцируема, то образуем свертку  $f_\varepsilon = f * \delta_\varepsilon$  и используем ее для получения  $F_\varepsilon$ . Так как  $\|Sf_\varepsilon\| \leq k$ , то, как и раньше, отображение  $F_\varepsilon(x, t)$  является  $K$ -квазиконформным с  $K = e^{k|t|}$ . Запишем дифференциальное уравнение для  $F_\varepsilon$  в интегральной форме:

$$F_\varepsilon(x, t) = x + \int_0^t f_\varepsilon(F_\varepsilon(x, t)) dt.$$

Так как все отображения  $F_\varepsilon$   $K$ -квазиконформны с одним и тем же фиксированным  $K$ , то они равномерно непрерывны на каждом компактном множестве. Поэтому можно выбрать такую последовательность  $\varepsilon(N) \rightarrow 0$ , что отображения  $F_{\varepsilon(N)}$  сходятся к пределу  $F_0(x, t)$ , который удовлетворяет уравнению

$$F_0(x, t) = x + \int_0^t f(F_0(x, t)) dt.$$

Это означает, что  $F_0(x, t)$  — единственное решение уравнения (34) и, следовательно, равно  $F(x, t)$ . Так как оно является гомеоморфизмом и пределом  $K$ -квазиконформных отображений с  $K = e^{k|t|}$ , то оно само  $K$ -квазиконформно, и тем самым теорема доказана.

8.12. При композиции  $F$  с мёбиусовым отображением величина  $MF$  меняется очень просто, и это изменение легко описать. Соответствующие правила для операторов  $S$  и  $S^*$  не столь просты, но имеют первостепенное значение.

Так как мы уже использовали букву  $\gamma$  в весьма важной роли, то теперь для обозначения мёбиусовых отображений воспользуемся заглавными буквами  $A$ ,  $B$  и т. д. Напомним, что мёбиусово отображение  $A$  определяет замену координат, которую нам удобнее записывать в виде  $x = Ax$  (вместо  $\bar{x} = Ax$ ). Компоненты контравариантного вектора  $\bar{f}(x)$  в координатах  $\bar{x}$  таковы:

$$\bar{f}^i(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} f^l(x),$$

что можно записать также в виде

$$\bar{f}(\bar{x}) = A'(\bar{x})^{-1} f(x) = A'(\bar{x})^{-1} f(A\bar{x}).$$

Будем обозначать функцию  $\bar{f}$  через  $f_A$ . В явной форме

$$f_A(x) = A'(x)^{-1} f(Ax). \quad (35)$$

Формула (35) определяет *групповое представление*, поскольку

$$f_{AB} = (f_A)_B, \quad (36)$$

как это видно из следующей выкладки:

$$\begin{aligned} (f_A)_B(x) &= B'(x)^{-1} f_A(Bx) = B'(x)^{-1} A'(Bx)^{-1} f(ABx) = \\ &= (AB)'(x)^{-1} f(ABx) = f_{AB}(x). \end{aligned}$$

Основная формула для преобразования  $Sf$  дается следующей леммой.

**Лемма 4:**

$$S(f_A) = (DA)^{-1} (Sf \circ A) DA. \quad (37)$$

*Доказательство.* Заметим сначала, что дифференцирование тождества  $X^{-1}X = I$  приводит к равенству

$$(D_j X^{-1}) X + X^{-1} (D_j X) = 0,$$

и поэтому

$$D_j X^{-1} = -X^{-1} (D_j X) X^{-1}.$$

Отсюда, дифференцируя  $f_A = (DA)^{-1} (f \circ A)$ , получаем

$$(Df_A)_{ij} = -[(DA)^{-1} D_j DA]_{ik} (f \circ A)_k + ((DA)^{-1} (Df \circ A) DA)_{ij}. \quad (38)$$

В первом члене справа

$$[(DA)^{-1} D_f DA]_{ik} = [(DA)^{-1} D_k DA]_{ij} = (JA)^{-2/n} [(DA)^T D_k DA]_{ij};$$

мы воспользовались здесь тождеством

$$(DA)^T DA = (JA)^{2/n} I. \quad (39)$$

Дифференцирование (39) дает

$$\begin{aligned} (D_k DA)^T DA + (DA)^T D_k DA &= \frac{2}{n} (JA)^{2/n} (D_k \log JA) I = \\ &= \frac{2}{n} (JA)^{(2/n)-1} (\operatorname{tr} (DA)^{-1} D_k DA) I = \\ &= \frac{2}{n} (JA)^{2/n} (\operatorname{tr} (DA)^T D_k DA) I. \end{aligned}$$

Это показывает, что симметризация и нормирование первого члена в формуле (38) не вносит никакого вклада. Вследствие равенства (39)

$$[(DA)^{-1} (Df \circ A) DA]^T = (DA)^{-1} (Df \circ A)^T DA,$$

в то время как

$$\operatorname{tr} [(DA)^{-1} Df \circ A DA] = \operatorname{tr} Df \circ A.$$

Поэтому вклад второго члена в формуле (38) равен в точности  $(DA)^{-1} (Sf \circ A) DA$ .

Отметим, что в этом вычислении существенно использовалось то, что  $DA$  — конформная матрица. В более общей форме будем говорить, что функция  $\nu(x)$  со значениями в  $SM^n$  преобразуется подобно смешанному тензору, если

$$\nu_A = (DA)^{-1} (\nu \circ A) DA. \quad (40)$$

Заметим, что  $\nu_A$  опять принимает значения в  $SM^n$ .

**8.13.** Для того чтобы продолжить обсуждение свойств инвариантности, рассмотрим внимательнее соотношение

$$\int Sf \cdot \varphi dx = - \int f \cdot S^* \varphi dx. \quad (41)$$

Нам хотелось бы, чтобы эти внутренние произведения были инвариантными при замене  $f$  на  $f_A$  и  $\varphi$  на  $\varphi_A$ . Но это не так, поскольку  $Sf$  и  $\varphi$  преобразуются по формуле (40). В самом деле,

$$(Sf)_A \cdot \varphi_A = \operatorname{tr} (Sf)_A \varphi_A = \operatorname{tr} [DA^{-1} (Sf \circ A) (\varphi \circ A) DA] = (Sf \cdot \varphi) \circ A,$$

и интеграл в (41) не может оставаться инвариантным. Чтобы улучшить положение, рассмотрим интеграл как внутреннее

произведение функции  $Sf$  и меры  $\varphi dx$  и преобразуем меру по правилу

$$(\varphi dx)_A = DA^{-1}(\varphi \circ A) DA \cdot JA(x) dx.$$

Это равносильно преобразованию  $\varphi$  как *смешанной тензорной плотности* по правилу

$$\varphi_A(x) = A'(x)^{-1} \varphi(Ax) A'(x) |A'(x)|^n. \quad (42)$$

Подобным образом правая часть равенства (41) имеет смысл только в том случае, если рассматривать  $S^*\varphi$  как контравариантную векторную плотность. Для того чтобы вывести правило преобразования  $S^*\varphi$ , заметим, что если  $f$  — пробная функция, то, с одной стороны,

$$\int f \cdot S^*\varphi dx = \int (f \circ A) \cdot (S^*\varphi \circ A) |A'(x)|^n dx,$$

■ с другой —

$$\begin{aligned} \int f \cdot S^*\varphi dx &= - \int Sf \cdot \varphi dx = - \int (Sf \circ A) (\varphi \circ A) |A'(x)|^n dx = \\ &= - \int (Sf \circ A) \cdot A'(x) \varphi_A(x) A'(x)^{-1} dx = \\ &= - \int A'(x)^{-1} (Sf \circ A) A'(x) \cdot \varphi_A(x) dx = \\ &= - \int S(f_A) \cdot \varphi_A(x) dx = \\ &= \int f_A \cdot S^*\varphi_A(x) dx = \int f_A^T S^*\varphi_A(x) dx = \\ &= \int (f \circ A)^T (A'(x)^{-1})^T S^*\varphi_A dx = \\ &= \int (f \circ A) \cdot (A'(x)^{-1})^T S^*\varphi_A dx. \end{aligned}$$

Сравнение обоих выражений показывает, что

$$S^*(\varphi_A) = |A'(x)|^n A'(x)^T (S^*\varphi \circ A).$$

Здесь  $A'(x)^T = |A'(x)|^2 A'(x)^{-1}$ , и если бы мы рассматривали  $S^*\varphi$  как контравариантный вектор, то правило преобразования выглядело бы так:

$$S^*(\varphi_A) = |A'(x)|^{n+2} (S^*\varphi)_A. \quad (43)$$

Однако более естественно рассматривать  $\vartheta = S^*(\varphi_A)$  как ковариантную векторную плотность, которая преобразуется по правилу

$$\vartheta_A(x) = |A'(x)|^n A'(x)^T \vartheta(Ax),$$

поскольку тогда  $S^*$  удовлетворяет соотношению  $S^*(\varphi_A) = (S^*\varphi)_A$ . В итоге получаем, что спаривания

$$\langle f, v \rangle = \int f \cdot v \, dx, \quad \langle v, \varphi \rangle = \int v \cdot \varphi \, dx$$

определены и инвариантны относительно мёбиусовых отображений, если  $f$  — контравариантный вектор,  $v$  — ковариантная векторная плотность,  $v$  — смешанный тензор,  $\varphi$  — смешанная тензорная плотность и все эти величины преобразуются по следующим правилам:

$$\begin{aligned} f_A(x) &= A'(x)^{-1} f(Ax), \\ v_A(x) &= |A'(x)|^n A'(x)^T v(Ax), \\ v_A(x) &= A'(x)^{-1} v(Ax) A'(x), \\ \varphi_A(x) &= |A'(x)|^n A'(x)^{-1} \varphi(Ax) A'(x). \end{aligned}$$

Инвариантность здесь понимается в том смысле, что

$$\langle f_A, v_A \rangle = \langle f, v \rangle, \quad \langle v_A, \varphi_A \rangle = \langle v, \varphi \rangle.$$

Операторы  $S$  и  $S^*$  удовлетворяют соотношениям

$$S(f_A) = (Sf)_A, \quad S^*(\varphi_A) = |A'(x)|^{n+2} (S^*\varphi)_A.$$

Выражение  $Sf$  является смешанным тензором, а  $S^*\varphi$  — ковариантной векторной плотностью. Мы не определяем, что такое  $Sv$  и  $S^*v$ .

8.14. Тот факт, что  $Sf$  не является плотностью, а  $S^*v$  определяется только для плотностей, делает оператор  $S^*S$  бессмысленным, за исключением евклидова случая. Чтобы спасти положение, требуется инвариантная плотность. В гиперболическом пространстве такая плотность дается метрикой Пуанкаре. Будем пользоваться обозначением  $ds = \rho |dx|$ , где  $\rho = 2/(1 - |x|^2)$ , а сама плотность равна  $\rho^n$ .

Теперь можно переходить от тензоров и векторов к плотностям при помощи умножения на  $\rho^n$ . Например,  $\rho^n Sf$  — смешанная тензорная плотность,  $S^*\rho^n Sf$  — ковариантная векторная плотность, а  $\rho^{-n-2} S^*\rho^n Sf$  — контравариантный вектор. Для обоснования этих утверждений удобно определить два новых оператора, а именно  $P = \rho^n S$  и  $P^* = \rho^{-n-2} S^*$ . Они удовлетворяют соотношениям

$$P(f_A) = (Pf)_A, \quad P^*(\varphi_A) = (P^*\varphi)_A,$$

а следовательно, и соотношению

$$P^*P(f_A) = (P^*Pf)_A.$$

Основным инвариантным дифференциальным оператором второго порядка является  $P^*P$ , и в связи с этим будем говорить, что векторнозначная функция  $f$  гармонична, если  $P^*Pf = 0$ . Удобно разбить это равенство на две части:

$$\varphi = Pf, \quad P^*\varphi = 0 \quad (44)$$

или  $S^*\varphi = 0$ . При  $n = 2$  оказывается, что  $\varphi$  — голоморфный квадратичный дифференциал.

Как сравнить  $P^*P$  с оператором Лапласа — Бельтрами  $\Delta_h$ ? Во-первых,  $\Delta_h$  применяется к скалярам, а  $P^*P$  к векторам. Но в теории Ходжа — Де Рама имеются два инвариантных оператора  $d\delta$  и  $\delta d$ , которые применяются к дифференциальным формам любого порядка, в частности, к дифференциалам первого порядка

$$\alpha = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n,$$

которые можно отождествить с функциями  $f$ . Дифференциал  $\alpha$  является гармоническим, если  $(d\delta + \delta d)\alpha = 0$ , тогда как в нашей терминологии функция  $f$  гармонична, если

$$\left(\frac{1}{n} - 1\right) d\delta\alpha - \frac{1}{2} \delta d\alpha - R\alpha = 0.$$

Здесь  $R\alpha = R^i_j f_i dx_j$ , где  $R^i_j$  — тензор кривизны Риччи.

8.15. Изучим теперь подробнее теорию функций  $f$ , удовлетворяющих уравнению  $P^*Pf = 0$ .

**Лемма 5.** Если  $P^*Pf = 0$ , то

- a)  $\int_{S(r)} S f_{ij} x_j d\omega(x) = 0;$
  - b)  $\int_{S(r)} S f_{ij} x_i x_j d\omega(x) = 0;$
  - c)  $\int_{S(r)} S f_{ij} x_i x_j x_k d\omega(x) = 0.$
- (45)

*Доказательство.* По формуле Грина

$$\int_{S(r)} \rho^n S f_{ij} \frac{x_j}{r} d\sigma = \int_{B(r)} (S^* \rho^n S f)_{ij} dx = 0,$$

откуда следует равенство (45), а). Аналогично,

$$\int_{S(r)} \rho^n S f_{ij} x_i \frac{x_j}{r} d\sigma = \int_{B(r)} D_j (\rho^n S f_{ij} x_i) dx = \int_{B(r)} \rho^n S f_{ij} \delta_{ij} dx = 0$$

и

$$\begin{aligned} \int_{S(r)} \rho^n S f_{ij} \frac{x_i x_j x_k}{r} d\sigma &= \int_{B(r)} D_j (\rho^n S f_{ij} x_i x_k) dx = \\ &= \int_{B(r)} \rho^n S f_{ij} (\delta_{ij} x_k + \delta_{kj} x_i) dx = \\ &= \int_{B(r)} \rho^n S f_{ik} x_i dx = 0 \text{ в силу (45), а).} \end{aligned}$$

**Следствие.** Если  $P^* P f = 0$ , то

$$\int_{S(r)} S f_{ij} \gamma_{ij}^k(x) d\sigma(x) = 0.$$

Действительно,

$$S f_{ij} \gamma_{ij}^k(x) = \frac{2S f_{kj}}{r^n} x_j + \frac{(n-2)}{r^{n+2}} S f_{ij} x_i x_j x_k.$$

Теперь из теоремы 1 п. 8.2 получается следующая

**Формула для значения в центре:**

$$c_n f(0) = \int_{S(r)} (I + (n-2)Q(x)) f(rx) d\omega(x), \quad 0 \leq r < 1. \quad (46)$$

Напомним, что  $c_n = \frac{2(n-1)}{n} \omega_n$ .

Если функция  $f$  имеет непрерывное продолжение на сферу  $S(1)$  или хотя бы радиальные пределы почти всюду, то формула останется справедливой и для  $r = 1$ :

$$c_n f(0) = \int_{S(1)} (I + (n-2)Q(x)) f(x) d\omega(x). \quad (46')$$

Формула упрощается, если  $f(x)$  касательна к сфере  $|x| = 1$ , поскольку тогда

$$(Q(x)f(x))_i = x_i x_j f_j(x) = 0$$

и формула приводится к виду

$$f(0) = \frac{1}{c_n} \int_{S(1)} f(x) d\omega. \quad (46'')$$

**8.16.** Точно так же, как и в случае формулы Пуассона для гармонических функций, можно при помощи (46') выразить

<sup>1)</sup> То есть  $x \cdot f(x) \equiv 0$  при  $|x| = 1$  (где  $f(x)$  — радиальный предел).  
Прим. ред.

$f(y)$  через граничные значения. Ясно, что достаточно применить (46') к функции

$$f_{T_y^{-1}}(x) = (T_y^{-1})'(x)^{-1} f(T_y^{-1}x).$$

Так как  $T_y^{-1}(0) = y$ , то

$$c_n (T_y^{-1})'(0)^{-1} f(y) = \int_{S(1)} (I + (n-2)Q(x)) (T_y^{-1})'(x)^{-1} f(T_y^{-1}x) \times \\ \times d\omega(x).$$

Слева имеем

$$(T_y^{-1})'(0)^{-1} = T_y'(y) = (1 - |y|^2)^{-1},$$

а справа замена  $x$  на  $T_yx$  приводит к

$$c_n f(y) = (1 - |y|^2) \int_{S(1)} (I + (n-2)Q(T_yx)) T_y'(x) f(x) \times \\ \times |T_y'(x)|^{n-1} d\omega(x).$$

Напомним, что  $T_y'(x) = |T_y'(x)| \Delta(x, y)$  и

$$|T_y'(x)| = \frac{1 - |y|^2}{|x, y|^2} \quad \text{или} \quad \frac{1 - |y|^2}{|x - y|^2},$$

так как  $|x| = 1$ . Мы также показали (см. п. 2.8, формула (40)), что  $T_yx = \Delta(x, y)x$  при  $|x| = 1$ . Таким образом,

$$Q(T_yx)_{ij} = \Delta(x, y)_{ik} \Delta(x, y)_{jkh} x_k x_h$$

или

$$Q(T_yx) = \Delta(x, y) Q(x) \Delta(y, x), \\ Q(T_yx) \Delta(x, y) = \Delta(x, y) Q(x).$$

Учитывая все эти упрощения, в конечном счете получаем следующую теорему.

#### Теорема 4.

$$c_n f(y) = \int_{S(1)} \frac{(1 - |y|^2)^{n+1}}{|x - y|^{2n}} \Delta(x, y) (I + (n-2)Q(x)) f(x) d\omega(x). \quad (47)$$

Формула опять упрощается, если  $f$  удовлетворяет касательному условию, поскольку тогда  $Q(x)f(x) = 0$ . Более того,  $\Delta(x, y) = (I - 2Q(x, y))(I - 2Q(x))$ , и поэтому при желании формулу (47) можно записать в виде

$$c_n f(y) = \int_{S(1)} \frac{(1 - |y|^2)^{n+1}}{|x - y|^{2n}} (I - 2Q(x - y)) f(x) d\omega(x). \quad (47')$$

**8.17.** Очевидно, что можно получить соответствующую формулу для  $Sf(y)$  дифференцированием (47) или (47'). При

произвольном  $y$  вычислительные трудности становятся почти непреодолимыми, но, оказывается, можно ограничиться нахождением производных только при  $y = 0$ , используя для этого иной способ.

Отбрасывая квадратичные и более высокого порядка члены относительно  $y$ , получаем, что

$$\frac{(1 - |y|^2)^{n+1}}{|x - y|^{2n}} \sim \frac{1}{(1 - 2xy)^n} \sim 1 + 2n(xy)$$

и

$$Q(x - y)_{ij} = \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x - y|^2} \sim (x_i x_j - x_i y_j - x_j y_i)(1 + 2xy) \sim \\ \sim x_i x_j + 2x_i x_j (xy) - x_i y_j - x_j y_i,$$

так что

$$\frac{(1 - |y|^2)^{n+1}}{|x - y|^{2n}} (I - 2Q(x - y))_{ij} \sim (I - 2Q(x))_{ij} + \\ + 2n(I - 2Q(x))_{ij}(xy) - 4x_i x_j (xy) + 2(x_i y_j + x_j y_i).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \left[ \frac{(1 - |y|^2)^{n+1}}{|x - y|^{2n}} (I - 2Q(x - y))_{ij} \right]_{y=0} = \\ = 2n(I - 2Q(x))_{ij} x_k - 4x_i x_j x_k + 2(\delta_{jk} x_i + \delta_{ik} x_j) = \\ = 2n\delta_{ij} x_k + 2\delta_{jk} x_i + 2\delta_{ik} x_j - 4(n + 1)x_i x_j x_k.$$

Для простоты рассмотрим только касательный случай. Ввиду равенства  $x_j f_j = 0$  на границе, получим

$$c_n D_k f_i(0) = \int_{S(1)} (2n f_i x_k + 2 f_k x_i) d\omega(x).$$

Симметризация приводит к соотношению

$$c_n (D_k f_i(0) + D_i f_k(0)) = 2(n + 1) \int_{S(1)} (f_j x_k + f_k x_j) d\omega.$$

След матрицы справа всегда равен нулю, и мы находим, что

$$c_n S f(0)_{ik} = (n + 1) \int_{S(1)} (f_i x_k + f_k x_i) d\omega. \quad (48)$$

Эта формула уже довольно хороша, но будет еще лучше, если заменить интеграл по сфере объемным интегралом. По формуле Грина — Стокса

$$\int_S (f_i x_k + f_k x_i) d\omega = \int_B (D_k f_i + D_i f_k) dx$$

и аналогично

$$0 = \int_S f_h x_h d\omega = \int_B D_h f_h dx.$$

Поэтому из (48) заключаем, что

$$c_n S f(0) = 2(n+1) \int_B S f(x) dx. \quad (49)$$

Теперь легко перейти к общей формуле. Как и прежде, применим (49) к функции  $f_{T_y^{-1}}$ . Тогда  $S f(x)$  заменится на

$$(T_y^{-1})'(x)^{-1} S f(T_y^{-1}x) (T_y^{-1})'(x).$$

При  $x=0$  левый и правый множители сокращаются, а средний множитель равен  $S f(y)$ . В интеграле справа заменим переменную интегрирования на  $T_y x$ . Если заметить, что  $(T_y^{-1})'(T_y x)^{-1} = T_y'(x)$ , то интеграл станет равным

$$\int_B T_y'(x) S f(x) T_y'(x)^{-1} |T_y'(x)|^n dx.$$

Скалярные множители в  $T_y'(x)$  и  $T_y'(x)^{-1}$  сокращаются, и мы получаем, что

$$c_n S f(y) = 2(n+1) \int_B \Delta(x, y) S f(x) \Delta(y, x) \frac{(1-|y|^2)^n}{[x, y]^{2n}} dx. \quad (50)$$

Предпочтительно опять сосредоточить внимание на функции

$$\varphi(x) = \rho^n S f(x) = \left( \frac{2}{1-|x|^2} \right)^n S f(x).$$

Мы получим *воспроизводящую формулу* для  $\varphi$  в следующем виде.

**Теорема 5.** Если  $\varphi = \rho^n S f$ , где  $f$  удовлетворяет касательному условию, и  $S^* \varphi = 0$ , то

$$c_n \varphi(y) = 2(n+1) \int_B \frac{\Delta(x, y) \varphi(x) \Delta(y, x)}{[x, y]^{2n}} (1-|x|^2)^n dx. \quad (51)$$

Поучительно сравнить (51) с воспроизводящей формулой Бергмана для аналитических функций в единичном круге. Если  $\varphi(z)$  комплексно аналитична при  $|z| < 1$ , то

$$\varphi(\zeta) = \frac{3}{\pi} \iint_{|z| < 1} \frac{\varphi(z) (1-|z|^2)^2}{(1-\zeta\bar{z})^4} dx dy$$

для всех  $|\zeta| < 1$ , при условии что

$$\iint_{|z| < 1} |\varphi(z)| (1-|z|^2)^2 dx dy < \infty.$$

Можно проверить, что

$$\frac{2(n+1)}{c_n} = \frac{(n+1)n}{(n-1)\omega_n}$$

действительно равно  $3/\pi$ , когда  $n=2$ . Ясно, что матрицы  $\Delta(x, y)$  и  $\Delta(y, x)$  соответствуют аргументу ядра.

*Замечание.* Мы доказали теорему 5 при довольно слабых условиях, однако она остается справедливой и при

$$\int_B \|\varphi(x)\| (1 - |x|^2)^n dx < \infty. \quad (52)$$

**8.18.** В силу инвариантных свойств операторов  $P$  и  $P^*$  все наши рассуждения легко приспособляются к дискретным группам.

Пусть  $\Gamma$  — дискретная подгруппа группы Мёбиуса  $M(B^n)$ . Введем следующие определения.

**Определение 1.** Если векторнозначная функция  $f(x)$  удовлетворяет условию

$$f_A(x) = A'(x)^{-1}f(Ax) = f(x)$$

для всех  $A \in \Gamma$ , то  $f$  называется *автоморфной относительно  $\Gamma$* .

**Определение 2.** Смешанная тензорная плотность  $\varphi(x)$  называется *автоморфной относительно группы  $\Gamma$* , если для всех  $A \in \Gamma$

$$\varphi_A(x) = |A'(x)|^n A'(x)^{-1} \varphi(Ax) A'(x) = \varphi(x).$$

**Определение 3.** Смешанный тензор  $\nu(x)$  называется *дифференциалом Бельтрами*, если для всех  $A \in \Gamma$

$$\nu_A(x) = A'(x)^{-1} \nu(Ax) A'(x) = \nu(x).$$

Если функция  $f$  автоморфна, то  $Sf$  — дифференциал Бельтрами, а  $\rho^n Sf$  — автоморфная смешанная плотность. Обратно, если  $\varphi = Pf$  автоморфна, то отсюда не следует, что  $f$  автоморфна, а только лишь то, что она удовлетворяет уравнению  $S(f_A - f) = 0$ . Другими словами, функция  $f_A - f$  тривиальна, т. е. ее компоненты являются квадратичными полиномами. Обозначим  $f_A - f$  через  $\rho_A f$  и назовем  $\rho_A f$  *периодом функции  $f$  относительно отображения  $A$* .

Периоды удовлетворяют условию коцикла

$$\rho_{AB} f = (\rho_A f)_B + \rho_B f,$$

поскольку

$$\rho_{AB} f = (f_A)_B - f_B + (f_B - f) = (f_A - f)_B + (f_B - f).$$

Вектор-функция с нулевыми периодами определяет вектор-функцию на фактормногообразии  $M_\Gamma$ .

**8.19.** Что касается ограниченности, то имеются два важных условия.

**Условие 1.** Говорят, что смешанный тензор принадлежит классу  $L^\infty(\Gamma)$ , если он измерим, величина  $\|v(x)\|$  (в существенном) ограничена и  $v_A = v$  для всех  $A \in \Gamma$ .

Можно пользоваться той же терминологией и для тензорных плотностей  $\varphi(x)$ , когда  $v = \varphi(x) \left(\frac{1-|x|^2}{2}\right)^n$  принадлежит классу  $L^\infty(\Gamma)$ .

**Условие 2.** Говорят, что тензорная плотность  $\varphi(x)$  принадлежит классу  $L^1(\Gamma)$ , если

$$\int_{B/\Gamma} \|\varphi(x)\| dx < \infty.$$

Здесь подынтегральное выражение инвариантно, так что интеграл можно брать по любому фундаментальному множеству, например по фундаментальному полиэдру Пуанкаре  $P(\Gamma)$ .

*Замечание.* Напомним, что величина  $\|\varphi(x)\|$  совпадает с квадратом нормы матрицы.

В частности,  $\varphi \in L^1(I)$ , если  $\int_B \|\varphi\| dx < \infty$ , причем на  $\varphi$  не накладывается никаких условий автоморфности. В этой ситуации можно применять  $\theta$ -ряды Пуанкаре, и они приводят к плотностям  $\theta\varphi \in L^1(\Gamma)$ .

**Теорема 6.** Если  $\varphi \in L^1(I)$ , то ряд  $\theta\varphi = \sum_{A \in \Gamma} \varphi_A$  почти всюду абсолютно сходится и принадлежит  $L^1(\Gamma)$ .

*Доказательство.* Пусть  $P$  — фундаментальное множество группы  $\Gamma$ . По предположению

$$\int_B \|\varphi\| dx = \sum_{A \in \Gamma} \int_{AP} \|\varphi\| dx < \infty.$$

Но

$$\int_{AP} \|\varphi\| dx = \int_P \|\varphi(Ax)\| |A'(x)|^n dx$$

и  $\varphi_A(x) = |A'(x)|^n A'(x)^{-1} \varphi(Ax) A'(x)$ ,

$$\|\varphi_A(x)\| = |A'(x)|^n \|\varphi(Ax)\|.$$

Отсюда заключаем, что

$$\int_P \sum \|\varphi_A\| dx < \infty \quad (53)$$

и, следовательно, ряд сходится. Та же оценка показывает,

что

$$\int_P \|\theta\varphi\| dx < \infty.$$

Наконец,  $\theta\varphi$  автоморфна в силу равенства

$$(\theta\varphi)_B = \sum_A (\varphi_A)_B = \sum_A \varphi_{AB} = \theta\varphi.$$

**8.20.** Удобно использовать внутреннее произведение

$$(\varphi, \psi)_\Gamma = \int_{B/\Gamma} \varphi \cdot \psi (1 - |x|^2)^n dx,$$

где  $\varphi \in L^1(\Gamma)$ ,  $\psi \in L^\infty(\Gamma)$  (т. е.  $v = \psi(1 - |x|^2)^n \in L^\infty$ ). Инвариантность такого внутреннего произведения очевидна. Кроме того, если  $\varphi \in L^1(I)$ ,  $\psi \in L^\infty(\Gamma)$ , то  $(\theta\varphi, \psi)_\Gamma = (\varphi, \psi)_I$ .

*Доказательство.* Пусть  $\chi$  — характеристическая функция множества  $P$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\theta\varphi, \psi)_\Gamma &= (\theta\varphi, \chi\psi)_I = \sum_{A \in \Gamma} (\varphi_A, \chi\psi)_I = \sum_{A \in \Gamma} (\varphi, (\chi\psi)_{A^{-1}})_I = \\ &= \sum_{A \in \Gamma} (\varphi, (\chi \circ A^{-1})\psi)_I = (\varphi, \psi)_I. \end{aligned}$$

*Замечание.* Если  $\varphi$  и  $\psi \in L^1 \cap L^\infty$ , то  $(\theta\varphi, \psi)_\Gamma = (\varphi, \theta\psi)_\Gamma$ .

**8.21.** Вернемся к теореме 4 и формуле Пуассона (47). Фиксируем  $k$  и  $x$ ,  $|x|=1$ , и рассмотрим векторнозначное ядро  $K(x, y)$  с компонентами

$$K_i(y) = \frac{(1 - |y|^2)^{n+1}}{|x - y|^{2n}} \Delta(x, y)_{ik}. \quad (54)$$

Есть достаточные основания полагать, что  $K(y)$  удовлетворяет уравнению  $P^*PK = 0$ , но прямое вычисление опять наталкивается на почти непреодолимые трудности.

Отбросим пока условие  $|x|=1$  и заменим (54) на

$$K_i(y) = \frac{(1 - |y|^2)^{n+1}}{[x, y]^{2n}} \Delta(x, y)_{ik}. \quad (55)$$

Тогда

$$(1 - |x|^2)^n K_i(y) = \frac{(1 - |x|^2)^{n+1} (1 - |y|^2)^{n+1} \left(\frac{1 - |x|^2}{[x, y]^2}\right)^{-1}}{[x, y]^{2n+2}} \Delta(x, y)_{ik}.$$

По нашим обычным формулам

$$1 - |T_x y|^2 = \frac{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}{[x, y]^2},$$

$$T'_x(y) = \frac{1 - |x|^2}{[x, y]^2} \Delta(y, x), \quad T'_x(y)^{-1} = \left(\frac{1 - |x|^2}{[x, y]^2}\right)^{-1} \Delta(x, y),$$

так что  $(1 - |x|^2)^n K_i(y) = (1 - |T_{xy}|^2)^{n+1} T'_x(y)_{ik}^{-1}$ .

Правая часть этого равенства есть не что иное, как  $i$ -я компонента вектора  $[(1 - |y|^2)^{n+1} e_k]_{T_x}$ , где  $e_k$  — вектор с компонентами  $\delta_{kj}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Обозначение  $[ ]_{T_x}$  связывается с формулой (35) п. 8.12, в которой  $x$  нужно заменить на  $y$ ,  $f(x)$  на  $f(y) = (1 - |y|^2)^{n+1} e_k$  и  $A$  на  $T_x$ . Это означает, что

$$[(1 - |y|^2)^{n+1} e_k]_{T_x} = T'_x(y)^{-1} (1 - |T_{xy}|^2)^{n+1} e_k.$$

Для  $i$ -й компоненты имеем

$$(1 - |T_{xy}|^2)^{n+1} T'_x(y)_{ij}^{-1} \delta_{kj} = (1 - |T_{xy}|^2)^{n+1} T'_x(y)_{ik},$$

как и утверждалось выше. Отсюда

$$K(y) = (1 - |x|^2)^{-n} [(1 - |y|^2)^{n+1}]_{T_x}.$$

Почти без вычислений получаются равенства

$$P((1 - |y|^2)^{n+1} e_k)_{ij} = \text{const} \cdot (\delta_{ik} y_j + \delta_{jk} y_i - \frac{2}{n} \delta_{ij} y_k),$$

$$S^*P((1 - |y|^2)^{n+1} e_k)_i = \text{const} \cdot \delta_{ik},$$

$$P^*P((1 - |y|^2)^{n+1} e_k)_i = \text{const} \cdot (1 - |y|^2)^{n+2} \delta_{ik},$$

где точные значения постоянных не играют роли. Из того, что  $P^*P$  является инвариантным оператором, теперь следует, что

$$\begin{aligned} P^*PK(y)_i &= (1 - |x|^2)^{-n} \{P^*P[(1 - |y|^2)^{n+1} e_k]_{T_x}\}_i = \\ &= \text{const} \cdot (1 - |x|^2)^{-n} (1 - |T_{xy}|^2)^{n+2} T'_x(y)_{ik}^{-1} = \\ &= \text{const} \cdot \frac{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)^{n+1}}{[x, y]^{2n+4}} \Delta(x, y)_{ik}. \end{aligned}$$

Это алгебраическое тождество должно оставаться в силе и при  $|x|=1$ . Поэтому  $P^*PK(x, y) = 0$  для  $|x|=1$ . Сравнивая с (54), мы заключаем, что справедлива следующая

**Теорема 7.** Для любой интегрируемой векторнозначной функции  $h$  на  $S(1)$  интеграл

$$f(y) = \int_{S(1)} \frac{(1 - |y|^2)^{n+1}}{[x, y]^{2n}} \Delta(x, y) h(x) d\omega(x)$$

является гармонической функцией  $y$  при  $|y| < 1$ .

8.22. Подобный факт имеет место и в теореме 5. Более явно равенство (51) записывается в виде

$$c_n \Phi_{ij}(y) = 2(n+1) \int_B \frac{\Delta(x, y)_{ih}}{[x, y]^{2n}} \Delta(x, y)_{jk} \Phi_{hk}(x) (1 - |x|^2)^n dx.$$

Можно показать, что выражение

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\Delta(x, y)_{ih} \Delta(x, y)_{jk}}{[x, y]^{2n}}$$

имеет вид  $\tau_{hk}$ , где  $\tau_{hk} = -\tau_{kh}$  для  $h \neq k$  и  $\tau_{hh} = \tau_{kk}$  (косо-симметричность вне диагонали и постоянство на диагонали).

**Теорема 8.** Оператор  $L$ , определенный формулой

$$Lv(y) = \int_{B(1)} \frac{\Delta(x, y) v(x) \Delta(y, x)}{[x, y]^{2n}} dx,$$

обладает следующими свойствами:

- 1)  $S^*Lv(y) = 0$ , как только этот интеграл сходится;
- 2) если  $v$  — автоморфный смешанный тензор, то  $Lv$  — автоморфная тензорная плотность;
- 3) если  $v \in L^\infty(\Gamma)$ , то же самое справедливо и для  $Lv$ ;
- 4) если  $\varphi = (1 - |x|^2)^{-n} v$  принадлежит  $L^1(\Gamma)$ , то  $Lv$  также принадлежит  $L^1(\Gamma)$ .

*Доказательство.* 1) является непосредственным следствием свойств  $\tau_{hk}$ , указанных выше; 2) вытекает из элементарных инвариантных свойств  $\Delta(x, y)$  и  $[x, y]$ ; 3) очевидно. Для того чтобы доказать 4), заметим, что

$$\|Lv(y)\| \leq \int_B \frac{\|v(x)\|}{[x, y]^{2n}} dx,$$

и поэтому

$$\int_P \|Lv(y)\| dy \leq \int_P dy \int_B \frac{\|v(x)\|}{[x, y]^{2n}} dx.$$

Разбивая шар  $B$  на полиэдры  $AP$ , видим, что

$$\int_P \dots dy \int_B \dots dx = \int_P \dots dx \int_B \dots dy.$$

Таким образом,

$$\int_P \|Lv(y)\| dy \leq \int_P \|v(x)\| dx \int_B \frac{dy}{[x, y]^{2n}}.$$

Но

$$\int_B \frac{(1 - |x|^2)^n}{[x, y]^{2n}} dy = \frac{\omega_n}{n},$$

и мы получаем, что

$$\int_P \|Lv(y)\| dy \leq \frac{\omega_n}{n} \int_P \frac{\|v(x)\|}{(1 - |x|^2)^n} dx = \frac{\omega_n}{n} \int_P \|\varphi(x)\| dx.$$

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

**Бельтрами** дифференциал 106

— параметр первый 45

— — второй 45

**Геодезический поток** 61

**Градиент гиперболический** 51

**Грина** классическая формула 50

— функция 70

**Группа второго рода** 69

— гомотетий 11

— Мёбиуса 8, 19

— подобий 11, 18

— сходящегося типа 68

**Действие группы диссипативное** 76

— — эргодическое 72

**Деформация  $K$ -квазиконформная**

86

**Дифференциал гармонический** 101

**Кальдерона — Зигмунда** ядро 91

**Класс  $O_G$**  72

— *Онв* 72

**Лапласа — Бельтрами** оператор 45

**Лапласиан гиперболический** 51

**Матрица конформная** 18

—  $Q(x)$  19

**Метрика конформная** 43

**Множество коническое предельное** 73

— предельное 64

— фундаментальное 66

— — измеримое 76

**Объем инвариантный** 37

**Оператор  $S(f)$**  86

**Отношение двойное** 9, 18

— — абсолютное 20

**Отображение абсолютно непрерывное на прямых** 84

— дробно-линейное 8

— квазиконформное 84

—  $K$ -квазиконформное 84

**Отражение относительно единичной сферы** 18

**Период функции** 106

**Плотность инвариантная** 100

— ковариантная векторная 100

— тензорная 37

— — класса  $L^1(\Gamma)$  107

— — смешанная 100

— — — автоморфная 106

**Подгруппа дискретная** 63

**Поток геодезический** 61

— квазиконформный 95

**Принцип максимума и минимума для гипергармонических функций** 52

**Производная нормальная гиперболическая** 51

**Пространство единичное касательное** 58

— симметрических матриц с нулевым следом 86

**Пуанкаре** метрика 12, 14, 25

**Пуассона** формула 55

**Расстояние гиперболическое** 12, 14, 25

**Сулливана** теорема 76

**Сфера изометрическая** 27

**Теорема косинусов гиперболическая** 28

— синусов 28

**Точка предельная** 64

— — коническая 73

**Функция автоморфная** 70, 106

— гармоническая 46

— гиперболически гармоническая 46

**Ходжа — де Рама** теория 101

**Хопфа** теорема 76

**Шварца** производная 10

**Штольца** конус 58

**Элемент объема гиперболический** 50

— площади гиперболический 50

— — на сфере 49

**Якобиан нормированный** 84

— симметризованный 84

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие . . . . .	7
I. Классический случай . . . . .	8
II. Общий случай . . . . .	16
III. Гиперболическая геометрия . . . . .	27
IV. Элементы дифференциальной геометрии . . . . .	35
V. Гипергармонические функции . . . . .	46
VI. Геодезические потоки . . . . .	58
VII. Дискретные подгруппы . . . . .	63
VIII. Квазиконформные деформации . . . . .	84
Предметный указатель . . . . .	111

---

Ларс Альфорс

### ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕБИУСА В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ст. научный редактор Н. И. Плужникова.  
Художник А. В. Шипов.  
Технический редактор Л. В. Рыбалко.

Мл. научный редактор Э. И. Качулина.  
Художественный редактор В. И. Шаповалов.  
Корректор М. А. Смирнов.

ИБ № 4061

Сдано в набор 22.05.85. Подписано к печати 20.12.85. Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага кн.-журн. нмп. Печать высокая. Гарнитура литературная. Объем 3,50 бум. л. Усл. печ. л. 7,00. Усл. кр.-отт. 7,25. Уч.-изд. л. 5,56. Изд. № 1/3806. Тираж 4050 экз. Зак. № 636. Цена 90 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» 129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29