

С. П. Тимошенко

**ПРОЧНОСТЬ
И КОЛЕБАНИЯ
ЭЛЕМЕНТОВ
КОНСТРУКЦИЙ**

Избранные работы под редакцией
Э. И. ГРИГОЛЮКА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1975

Прочность и колебания элементов конструкций, С. П. Тимошенко, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1975, 704 стр.

В книге собрано 26 оригинальных работ С. П. Тимошенко по вопросам прочности и колебаний элементов конструкций. Эти работы, опубликованные в прошлые годы в редких изданиях, не только сохранили свое значение, но и приобрели в настоящее время особенное звучание.

Книга представляет интерес для широкого круга инженеров и научных работников, занимающихся расчетами конструкций на прочность и на колебания, а также для студентов и аспирантов.

Степан Прокопьевич Тимошенко

Прочность и колебания элементов конструкций

М., 1975 г., 704 стр. с илл.

Редактор *Н. И. Розальская*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *М. Л. Медведская*

Сдано в набор 30/IV 1975 г. Подписано к печати 13/X 1975 г. Бумага 60×90¹/₁₆. Физ. печ. л. 44+2 вкл. Условн. печ. л. 44,25. Уч.-изд. л. 43,42. Тираж 11 000 экз. Т-18502. Цена книги 3р. 14 к. Заказ № 2989.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам
издательства, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28

Отпечатано во 2-ой типографии издательства «Наука», Москва, Г-99, Шубинский пер., 10.

30106---142
Т 053 (02)-75 164-75

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1975.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие автора	9
От редактора	11
К вопросу о явлениях резонанса в валах	13
§ 1. Теоретическое рассмотрение простейшего случая	14
§ 2. Работы Г. Фрама	19
§ 3. Изложение общего приема вычислений	25
§ 4. Рассмотрение случая, когда моменты инерции шкивов малы по сравнению с моментом инерции вала	29
§ 5. Рассмотрение случая, когда моменты инерции шкивов велики по сравнению с моментом инерции вала	40
§ 6. Точное определение периода свободных колебаний вала, на концах которого имеются шкивы	45
§ 7. Рассмотрение случая вала с тремя шкивами	47
Описание прибора А. Н. Крылова для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений	55
§ 1. Механическое интегрирование уравнений	55
§ 2. Интеграф Томсона	55
§ 3. Множитель	57
§ 4. Уравниватель	58
§ 5. Общая теория	58
Формулы сложного сопротивления с точки зрения различных теорий прочности	63
§ 1. Введение	63
§ 2. Старые теории о прочности	64
§ 3. Новые опыты	68
§ 4. Работы А. Фёпеля	70
§ 5. Опыты В. Фойхта	72
§ 6. Работы Дж. Геста	75
§ 7. Теории Ш. Дюге и О. Мора	77
§ 8. Формулы сложного сопротивления	86
§ 9. Формулы сложного сопротивления для чугуна	94
К вопросу о дополнительных напряжениях, обусловленных жесткостью узлов	98
§ 1. Постановка задачи	98
§ 2. Уравнения и их решение	99
О влиянии круглых отверстий на распределение напряжений в пластинках	106
§ 1. Введение	106
§ 2. Плоская задача	106
§ 3. Граничные условия	109
§ 4. Пластинка подвергается одноосному равномерному растяжению или сжатию	110
§ 5. Пластинка подвергается равномерному растяжению или сжатию по двум взаимно-перпендикулярным направлениям	111

§ 6. Случай, когда напряжения меняются по линейному закону	114
§ 7. Перемещения в случае простого растяжения	117
§ 8. Растяжение пластинки конечной ширины.	119
§ 9. Работа П. А. Велихова.	121
О распределении напряжений в круговом кольце, сжатом двумя взаимно-противоположными силами	124
§ 1. Введение	124
§ 2. Сжатие кругового диска	124
§ 3. Распределение напряжений по окружности, концентрической с наружным контуром кольца	127
§ 4. Распределение напряжений в кольце	128
§ 5. Сравнение полученных результатов с результатами, основанными на общепринятых гипотезах	135
О вынужденных колебаниях призматических стержней. Приложение к исследованию колебаний мостов	139
I. Изложение общего метода	140
§ 1. Кинетическая и потенциальная энергии.	140
§ 2. Перемещения.	141
II. Продольные колебания призматических стержней	142
§ 3. Колебания стержня, один конец которого заделан, другой свободен	142
§ 4. Колебания стержня, к свободному концу которого подвешен груз P	145
§ 5. Колебания с ненулевой начальной скоростью и перемещением	150
III. Колебания кручения призматических стержней	153
§ 6. Общая теория	153
§ 7. Колебания вала, по концам которого насажены шкивы	155
IV. Поперечные колебания призматических стержней	160
§ 8. Основные соотношения	160
§ 9. Колебания стержней, опертых по концам	162
§ 10. Влияние периодической поперечной силы на прогиб	162
§ 11. Продолжение. Случай сплошной поперечной нагрузки	164
§ 12. Колебания при движении постоянной поперечной силы по балке	165
§ 13. Колебания при движущейся по балке равномерной поперечной нагрузке	169
§ 14. Динамические напряжения	170
V. Колебания мостов под действием подвижной нагрузки	172
§ 15. Невесомый мост	172
§ 16. Учет веса моста	174
§ 17. Колебания, вызываемые действием противовесов	176
§ 18. Одновременное действие нагрузки и веса моста	179
Применение нормальных координат к исследованию изгиба стержней и пластинок	180
§ 1. Нормальные координаты	180
I. Изгиб призматических стержней с опертыми концами	181
§ 2. Поперечная нагрузка	181
§ 3. Совместное действие поперечных и продольных сил	183
§ 4. Случай, когда продольная сила неизвестна	189
§ 5. Стержень на сплошном упругом основании	191
II. Изгиб стержней с заделанными концами	194
§ 6. Прогибы	194
§ 7. Опорные моменты	198
III. Изгиб прямоугольной пластинки, опертой по контуру	200
§ 8. Поперечная нагрузка	200
§ 9. Совместное действие поперечных нагрузок и растягивающих контурных сил, расположенных в срединной плоскости	204

§ 10. Действие сжимающих контурных сил, расположенных в срединной плоскости	212
IV. Изгиб цилиндрической трубки кругового поперечного сечения	212
§ 11. Малые перемещения	212
§ 12. Нелинейные перемещения	216
К вопросу о действии удара на балку	220
§ 1. Приближенные формулы.	220
§ 2. Более подробное исследование поперечного удара	223
§ 3. Примеры	228
Вопросы прочности в паровых турбинах	235
§ 1. Расчет быстро вращающегося кольца	236
§ 2. Расчет лопаток	238
§ 3. Расчет турбинных дисков	239
§ 4. Диск постоянной толщины	242
§ 5. Диск равного сопротивления	245
§ 6. Приближенные методы расчета дисков.	247
§ 7. О напряжениях в геометрически подобных дисках	252
§ 8. Материалы и допускаемые напряжения	252
§ 9. Расчет турбинных валов	254
§ 10. Критическая угловая скорость вала	256
Литература предмета.	262
Применение функции напряжений к исследованию изгиба и кручения призматических стержней	264
Кручение	265
§ 1. Функция напряжений при кручении.	265
§ 2. Общий метод определения функции напряжений	267
§ 3. Частные случаи.	270
Изгиб.	274
§ 4. Функция напряжений при изгибе	274
§ 5. Частные случаи	277
Об изгибе стержней, имеющих незначительную первоначальную кривизну	284
§ 1. Продольные силы заданы	284
§ 2. Продольные силы неизвестны	289
К вопросу о расчете сферических оболочек	292
§ 1. Постановка задачи	292
§ 2. О напряжениях в симметрично нагруженной сферической оболочке, не сопротивляющейся изгибу	293
§ 3. Напряжения от изгиба в сферической оболочке, подвижно опирающейся на круговой контур	295
§ 4. О напряжениях, возникающих в сферической оболочке при действии усилий, приложенных по круговому опорному контуру	301
§ 5. Численный пример	306
О влиянии первоначальной кривизны на изгиб прямоугольной пластинки с опертыми краями, подвергающейся действию растяжения или сжатия	310
О больших прогибах круглых пластинок	314
§ 1. Введение	314
§ 2. Дифференциальные уравнения равновесия для круглой пластинки в случае больших прогибов	316
§ 3. Приближенное интегрирование	318

К вопросу о прочности рельс	322
§ 1. Расчет рельса как балки на упругих опорах	322
§ 2. Изгиб стержня, лежащего на сплошном упругом основании	326
§ 3. Приложения к расчету рельс	329
§ 4. О динамических действиях катящегося колеса на рельс	334
§ 5. О колебаниях, возникающих при движении колеса по рельсу	337
§ 6. Влияние неправильностей колеса и рельса на напряжения в рельсах	342
§ 7. Действие на рельс системы подвижных грузов	351
§ 8. О вибрациях рельса	354
К вопросу о вибрациях рельс	359
§ 1. Метод исследования	359
§ 2. Прогобы рельса от переменной во времени поперечной силы	361
§ 3. Вынужденные колебания рельса при постоянной поперечной силе	364
§ 4. Действие на рельс переменной во времени силы, движущейся с постоянной скоростью	369
Влияние начальной осадки шпалы на условия изгиба рельс	371
§ 1. Постановка задачи	371
§ 2. Статическое нагружение	372
§ 3. Динамическое нагружение	375
Приближенный способ расчета перекрестных балок	381
К вопросу о допускаемых напряжениях в металлических мостах	389
§ 1. Принятая в настоящее время формула для определения допускаемых напряжений при действии вертикальных нагрузок	390
§ 2. Другие виды формул для определения допускаемых напряжений	392
§ 3. Действие подвижной нагрузки на мосты	397
§ 4. Опытное определение ударного действия подвижной нагрузки на мосты	399
§ 5. Выбор ударного коэффициента	405
§ 6. Предлагаемая формула для определения допускаемых напряжений	406
§ 7. О допускаемых напряжениях при совместном действии вертикальных нагрузок и ветра	414
§ 8. Проверка элементов мостовых ферм на устойчивость	415
§ 9. Проверка сжатых стержней на продольный изгиб	416
§ 10. Проверка на устойчивость пластинок	419
Заключение	421
Расчет упругих арок	424
Предисловие	424
<i>Глава I. Напряжения и деформации кривых брусьев</i>	425
§ 1. Общие положения	425
§ 2. Определение напряжений	426
§ 3. Деформация элемента кривого бруса	430
§ 4. Перемещения и углы поворота	431
<i>Глава II. Упругие двухшарнирные арки</i>	437
§ 5. Определение опорных реакций	437
§ 6. Случай сосредоточенной силы	443
§ 7. Симметричная параболическая арка	445
§ 8. Симметричная круговая арка	453
§ 9. Симметричная арка произвольного очертания	458
§ 10. Случай, когда продольная ось арки близка к веревочной кривой, построенной для нагрузки на арке	463
§ 11. Погрешности, вводимые при расчете двухшарнирных арок	466
§ 12. Деформации двухшарнирной арки	472

<i>Глава III. Арки с заделанными пятями</i>	476
§ 13. Выбор лишних неизвестных в случае симметричной арки	476
§ 14. Симметрично нагруженные арки	477
§ 15. Влияние изменений температуры и смещения опор	479
§ 16. Случай симметричной арки, нагруженной одной сосредоточенной силой	481
§ 17. Случай, когда продольная ось арки совпадает с веревочной кривой для действующих вертикальных нагрузок	483
<i>Глава IV. Круговая арка с заделанными пятями</i>	486
§ 18. Выбор лишних неизвестных	486
§ 19. Усилия, вызываемые изменением температуры	488
§ 20. Распределенная вертикальная нагрузка, меняющаяся по закону $q=q_0/\cos^3\varphi$	496
§ 21. Действие вертикальной сосредоточенной силы	499
§ 22. Круговая арка, нагруженная вертикальной равномерно распределенной нагрузкой	504
<i>Глава V. Параболические арки с заделанными пятями</i>	507
§ 23. Выбор лишних неизвестных	507
§ 24. Влияние изменений температуры	509
§ 25. Действие вертикальной равномерно распределенной нагрузки	514
§ 26. Линии влияния для параболической арки	515
<i>Глава VI. Арки различных очертаний с заделанными пятями</i>	522
§ 27. Случай, когда продольная ось арки имеет очертание катеноида	522
§ 28. Симметричная арка произвольного очертания	527
§ 29. Арка, продольная ось которой близка к веревочной кривой, построенной для действующих на арку вертикальных нагрузок	541
<i>Глава VII. Практические выводы</i>	549
§ 30. Выбор очертания продольной оси арки	549
§ 31. Влияние изменения температуры	551
§ 32. Степень приближения расчетов арок	553
Вопросы прочности в машиностроении	556
§ 1. Введение	556
§ 2. Растяжение и сжатие прямых стержней переменного поперечного сечения	560
§ 3. Кручение прямых призматических стержней	567
§ 4. Кручение стержней переменного поперечного сечения	573
§ 5. Изгиб прямых призматических стержней	575
§ 6. Изгиб стержней переменного поперечного сечения	579
§ 7. Изгиб за пределом упругости	582
§ 8. Изгиб с растяжением или сжатием	584
§ 9. Изгиб и кручение призматических стержней	588
§ 10. Совместный изгиб и кручение стержней переменного сечения	590
§ 11. Балки на податливом основании	591
§ 12. Применение тригонометрических рядов	596
§ 13. Стержни малой плоской кривизны	599
§ 14. Приближенные теории стержней большой кривизны	604
§ 15. Точные решения задачи изгиба стержней большой кривизны	609
§ 16. Опыты со стержнями большой кривизны	612
§ 17. Изгиб кривых труб	614
§ 18. Изгиб кругового кольца из его плоскости	616
§ 19. Пружины	619
§ 20. Листовые пружины	619
§ 21. Спиральные пружины	620
§ 22. Пружины Бельвилля	621
§ 23. Винтовые пружины	622
§ 24. Кольцевые пружины	625

§ 25. Изгиб прямоугольной пластинки по цилиндрической поверхности	625
§ 26. Жесткие прямоугольные пластинки	627
§ 27. Растягивающие и сжимающие температурные напряжения в стержнях	629
§ 28. Изгиб стержня вследствие температурных напряжений	630
§ 29. Изгиб пластинок вследствие температурных напряжений	631
§ 30. Остаточные напряжения при пластических деформациях	632
§ 31. Остаточные напряжения в поковках и отливках	636
§ 32. Остаточные напряжения при закалке	636
§ 33. Остаточные напряжения при холодной обработке	637
§ 34. Допускаемые напряжения при статическом нагружении	637
§ 35. Допускаемые напряжения при переменном нагружении	639
Д. И. Журавский и его вклад в теорию сооружений	644
История развития науки о сопротивлении материалов в России	652
Концентрация напряжений в истории сопротивления материалов	660
Кружок имени В. Л. Кирпичева	678
Перечень статей С. П. Тимошенко	688
Именной указатель	698
Предметный указатель	702

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В предыдущем сборнике¹⁾ я имел уже возможность поблагодарить Академию наук СССР за издание моих исследований. Я счастлив, что этим устанавливается более тесный контакт с русским читателем.

В сборник моих статей по прочности и колебаниям элементов конструкций включены двадцать шесть работ; они посвящены изучению деформированного и напряженного состояния стержневых систем (рамы, рельсы, мосты), тонких упругих пластин и оболочек, анализу изгиба и кручения призматических стержней, плоской задаче теории упругости и общим проблемам прочности: Кроме того, приведены статьи о колебаниях стержневых систем и об ударе по упругой балке.

Двадцать одна из этих работ были выполнены в России в период с 1905 по 1918 год и опубликованы в Известиях С.-Петербургского политехнического института, Электротехнического института, Института инженеров путей сообщения, Киевского политехнического института, а также в Вестнике общества технологов. Исключение составляют работы, вышедшие позднее: «Вопросы прочности в машиностроении» (1929), «Д. И. Журавский и его вклад в теорию сооружений» (1950), «История науки о сопротивлении материалов в России» (1953), «Концентрация напряжений в истории сопротивления материалов» (1954), «Кружок имени В. Л. Кирпичева» (1958).

Содержащиеся в представленных статьях результаты были учтены мною при написании двухтомной монографии «Курс теории упругости» (Петроград, 1914—1916), учебника «Курс сопротивления материалов» (1911, 1913, 1916, 1918), в книгах «Теория упругости»

¹⁾ [Имеется в виду сборник «Устойчивость стержней, пластин и оболочек». Издательство «Наука», М.-Л., 1971.]

(1933, русский перевод — 1934, 1937), «Теория пластин и оболочек» (1940, русский перевод — 1948, 1955), «Колебания пластин в инженерном деле» (1928, русский перевод — 1931, 1932, 1934, 1959) и в ряде других книг.

Автору трудно говорить о значении своих трудов, да к тому же и выполненных много лет тому назад. Как мне представляется, центральное место среди них занимают работы по вынужденным колебаниям стержней, учету поперечных сдвигов при колебаниях стержней, упругому удару груза о балку, а также по применению энергетического метода к решению плоской задачи теории упругости и по проблеме изгиба консольного стержня.

март 1967
Вупперталь
ФРГ

С. П. Тимошенко

ОТ РЕДАКТОРА

В 1971 году в издательстве «Наука» вышел в свет сборник оригинальных работ Степана Прокофьевича Тимошенко «Устойчивость стержней, пластин и оболочек», который был полностью просмотрен и одобрен автором. В этом сборнике дан был очерк жизни и научного творчества С. П. Тимошенко. Предлагаемый вниманию читателей сборник также был просмотрен автором и составлен согласно его желанию, хотя и выходит он уже после смерти С. П. Тимошенко, произошедшей 29 мая 1972 года в городе Вуппертале (Федеративная Республика Германия) на девяносто четвертом году жизни. Здесь содержатся двадцать шесть оригинальных работ С. П. Тимошенко по проблемам прочности и колебаний элементов конструкций. Эти исследования посвящены изучению резонансов валов, несущих диски, эффективному анализу продольных, крутильных и изгибных колебаний прямых стержней посредством использования энергетического метода и применению общей теории к расчету мостов при воздействии подвижной нагрузки, вычислению напряжений в валах, лопатках и дисках турбомашин, расчету напряжений в рельсе железнодорожной колеи как стержня, лежащего на упругом сплошном основании, при статических и динамических нагружениях. Детально рассмотрены важные вопросы допускаемых напряжений в металлических мостах.

Представлена теория напряженно-деформированного состояния арок с оценкой влияния многочисленных факторов на прочность арки, дан расчет жестких рам с учетом вторичных эффектов. Описана изящная модель расчета ортогональной решетки балок и дан ее анализ. Изучено напряженно-деформированное состояние пластин вблизи отверстий при различных видах нагружения и наряду с точным решением указан приближенный путь вычисления напряжений.

Изложен оригинальный общий приближенный метод решения проблемы изгиба и кручения стержней и даны применения его к различным частным задачам.

Представлен расчет напряжений в тонкой упругой сферической оболочке посредством асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений задачи. Выведены нелинейные дифференциальные уравнения конечного прогиба осесимметричных круговых

тонких пластин, для решения которых предложен численный метод, позволяющий определить прогибы и напряжения.

Сформулирована новая постановка проблемы удара груза о балку, позволяющая, в отличие от известной классической модели, вычислить контактную силу в месте удара и время соударения.

Указанные выше исследования были выполнены автором во время его жизни в России.

Представляет интерес вышедшая позднее статья по проблемам прочности в машиностроении, содержащая почти исчерпывающий обзор по прочности прямолинейных стержней при растяжении, кручении и изгибе, по изучению напряженного и деформированного состояния кривых стержней, труб, пластин и различных конструктивных элементов, а также статья по развитию состояния задачи о концентрации напряжений. Включены в сборник также три работы, освещающие вклад отечественных ученых и инженеров в теорию сооружений.

При издании были проверены и уточнены все упоминаемые в тексте литературные ссылки, затрагивающие двухсотлетний период исследований. В конце книги помещен перечень статей С. П. Тимошенко. Уточнение библиографических данных о статьях и книгах было бы невозможно без помощи моих коллег, а также ряда европейских и американских библиотек. Пользуюсь случаем поблагодарить всех тех, кто помог мне в этом кропотливом деле. Всюду в сборнике введены метрические меры. Замечания редактора заключены, как и в предыдущем сборнике, в квадратные скобки.

Статьи, содержащиеся в сборнике, широко известны. Они способствовали разработке различных аспектов теории расчета разнообразных конструкций на прочность и колебания. Эти работы не потеряли значения и в наше время. Они относятся к тем замечательным достижениям в области механики, которые всегда будут представлять интерес.

Я уверен, что сборник работ С. П. Тимошенко будет оценен специалистами в области механики сплошных сред и инженерами-проектировщиками.

К ВОПРОСУ О ЯВЛЕНИЯХ РЕЗОНАНСА В ВАЛАХ

Известия С.-Петербургского политехнического института, 1905, том 3, вып. 1—2, стр. 55—106.

При определении размеров различных частей инженерных сооружений и машин до настоящего времени пользуются почти исключительно расчетами статическими, тогда как динамические причины нередко играют первостепенную роль. Не умея вычислить напряжений, обусловленных динамическими причинами, ограничиваются обыкновенно тем, что в сомнительных случаях просто повышают коэффициент безопасности, другими словами, увеличивают размеры соответствующих конструкций. С таким решением вопроса нельзя согласиться, потому что увеличение размеров не всегда влечет за собой уменьшение напряжений, т. е. увеличение прочности.

Каждое сооружение можно рассматривать в некоторых пределах как упругую систему, которой свойственны вполне определенные виды собственных колебаний с вполне определенными периодами. Можно себе всегда представить систему периодически изменяющихся сил, которые способны вызвать тот или иной вид колебаний. Если период изменения сил совпадает с периодом соответствующих собственных колебаний, то мы будем иметь дело с хорошо известным явлением резонанса. В таком случае амплитуда колебаний возрастает пропорционально времени и напряжения в частях сооружения могут достигнуть опасных пределов. Величина действующих сил в этом случае играет второстепенную роль, и все обусловлено совпадением периода собственных колебаний с периодом действующих сил.

В настоящей статье мы займемся рассмотрением явлений резонанса в валах и на этом примере постараемся показать, как велико может быть различие между результатами статического и динамического расчетов. Вопросу этому за последнее время посвящено немало статей теоретического и экспериментального характера. Назову из них работы Г. Лоренца ¹⁾, Г. Фрама ²⁾,

¹⁾ Lorenz H. Dynamik der Kurbelgetriebe mit besonderer Berücksichtigung der Schiffsmaschinen. Leipzig, B. G. Teubner, 1901, S. 156.

²⁾ Frahm H. Neue Untersuchungen über die dynamischen Vorgänge in den Wellenleitungen von Schiffsmaschinen mit besonderer Berücksichtigung der Resonanzschwingungen. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1902, Bd. 46, № 22, SS. 797—803; № 24, SS. 880—888.

Г. Мельвилля¹⁾. Мы приведем результаты экспериментальных исследований Г. Фрама и остановимся на теоретическом рассмотрении тех случаев, которые у вышеприведенных авторов остались неразобранными.

§ 1. Теоретическое рассмотрение простейшего случая

Для большей ясности изложения мы начнем с рассмотрения самого простого случая (рис. 1), когда имеются два шкива *I* и *II*, соединенных упругим невесомым валом *AB*.

Назовем длину вала *AB* через *l*, и пусть θ_1 и θ_2 будут моменты инерции массы шкивов *I* и *II* относительно оси вала. К шкиву *I* приложен периодически меняющийся вращающий момент паровой машины; величину его обозначим через *Sr*, где *S* обозначает касательное усилие. К шкиву *II* приложено переменное сопротивление (сопротивление воды в случае гребного винта), момент которого обозначим через *Wr*. Трением в подшипниках для упрощения выкладок пренебрежем.

Для исследования колебаний рассечем нашу систему плоскостью *mn*, перпендикулярной оси вала, на две части и для каждой отсеченной части напишем уравнение движения. Для этого обозначим момент внутренних сил упругости по сечению *mn* относительно оси вала через *M*, а переменные углы поворота шкивов *I* и *II* — через φ_1 и φ_2 , тогда легко составить уравнения

$$\left. \begin{aligned} Sr - M &= \theta_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2}, \\ M - Wr &= \theta_2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Величину момента внутренних сил *M* легко, в случае невесомого вала, выразить через углы φ_1 и φ_2 . Если через *J_p* назовем полярный момент инерции поперечного сечения вала и через *G* —

¹⁾ Melville G. W. Die Vibrationen der Dampfschiffe. Schiffbau, 1903, Jahrgang IV, № 15, 8 Mai, SS. 707—712; № 16, 23 Mai, SS. 757—761; № 17, 8 Juni, SS. 802—807; № 18, 23 Juni, SS. 849—852; № 19, 8 Juli, SS. 903—908; № 20, 23 Juli, SS. 954—958; № 21, 8 August, SS. 1007—1011; № 22, 23 August, SS. 1058—1060; № 23, 8 September, SS. 1094—1097; № 24, 23 September, SS. 1133—1137; 1903, Jahrgang V, № 2, 23 Oktober, SS. 60—64; № 3, 8 November, SS. 110—113; № 4, 23 November, SS. 157—160; № 5, 8 Dezember, SS. 209—213; № 6, 23 Dezember, SS. 259—267, 1094.

модуль упругости стали при сдвиге, то на основании известной формулы строительной механики можем написать

$$M = \frac{GJ_p (\varphi_1 - \varphi_2)}{l}. \quad (2)$$

Подставляя найденное значение M в систему уравнений (1), получим

$$\left. \begin{aligned} Sr - \frac{GJ_p}{l} (\varphi_1 - \varphi_2) &= \theta_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2}, \\ -Wr + \frac{GJ_p}{l} (\varphi_1 - \varphi_2) &= \theta_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

Так как нас интересует вопрос о колебаниях вала, то нужно найти изменения разности углов поворота $\varphi_1 - \varphi_2$ в зависимости от времени. Для этого первое из уравнений (1') делим на θ_1 , второе на θ_2 и, вычитая из первого второе, получим

$$\frac{d^2 (\varphi_1 - \varphi_2)}{dt^2} + \frac{GJ_p}{l} (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \theta_2} = \frac{Sr}{\theta_1} + \frac{Wr}{\theta_2}. \quad (3)$$

Если бы вращающий момент и момент сопротивления были величинами постоянными, то уравнению (3) можно было бы удовлетворить, положив, что $\varphi_1 - \varphi_2$ равно некоторой постоянной величине $\Delta\varphi$, так что угол закручивания не меняется со временем. Такой случай мы будем иметь тогда, например, когда вал приводится во вращение электромотором, вращающий момент которого можно считать постоянным. Расчет вала в подобных случаях нужно вести по формулам, относящимся к статически приложенным силам.

Для поршневых машин вращающий момент не остается постоянным, так как касательное усилие меняется в зависимости от угла поворота машины. В таком случае правая часть уравнения (3) представляет собой некоторую функцию от угла поворота или, пренебрегая неравномерностью хода машины, такого же вида функцию от времени. Пусть

$$\frac{Sr}{\theta_1} + \frac{Wr}{\theta_2} = f(t),$$

где $f(t)$ представляет собой периодическую функцию времени, определяемую на основании диаграммы касательных усилий и изменений сопротивления W . Пользуясь теоремой Фурье, мы можем представить $f(t)$ в виде тригонометрического ряда

$$f(t) = A_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + \dots + B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t + \dots \quad (4)$$

Коэффициенты ряда определяются по известным формулам

$$A_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(i\omega t) d(\omega t), \quad B_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(i\omega t) d(\omega t),$$

ω в приведенном ряде, очевидно, соответствует угловой скорости машин и $f(t)$ по прошествии промежутка времени $T=2\pi/\omega$, соответствующего полному обороту машины, принимает свое прежнее значение.

Обыкновенно не имеется аналитического выражения $f(t)$, а на основании снятых индикаторных диаграмм возможно только графически представить изменение этой функции; тогда разложение в ряд (4) можно выполнить графическим приемом Фишер-Хиннена ¹⁾ или известным прибором «гармонический анализатор», который за один обвод дает пять коэффициентов ряда синусов и пять коэффициентов ряда косинусов, что вполне достаточно для практических целей. Когда разложение тем или другим способом выполнено, мы можем уравнение (3) переписать так:

$$\frac{d^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{dt^2} + c^2(\varphi_1 - \varphi_2) =$$

$$= A_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + \dots + B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t + \dots, \quad (3')$$

где

$$c = \sqrt{\frac{GJ_p(\theta_1 + \theta_2)}{I\theta_1\theta_2}}. \quad (5)$$

Составляя соответствующее уравнение без последнего члена и решая его, мы найдем выражение для свободных колебаний вала:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = A \cos ct + B \sin ct.$$

Это простое гармоническое колебание с периодом

$$T = \frac{2\pi}{c} = 2\pi \sqrt{\frac{I\theta_1\theta_2}{GJ_p(\theta_1 + \theta_2)}}.$$

Число свободных колебаний в минуту определится из формулы

$$n = \frac{30c}{\pi} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{GJ_p(\theta_1 + \theta_2)}{I\theta_1\theta_2}}. \quad (6)$$

¹⁾ Fisher-Hinnen J. Lösung einiger praktischer Fragen über Gleichstrommaschinen auf graphischem Wege. Elektrotechnische Zeitschrift, 1894, Jahrgang XV, Heft 29, 19 Juli, SS. 397—402. Eine neue Methode zur Vermeidung der Funkenbildung von Gleichstrommaschinen. Там же, 1898, Jahrgang XIX, Heft 5, 3 Februar, S. 93. Über Funkenbildung an Gleichstrommaschinen. Там же, 1898, Jahrgang XIX, Heft 51, 22 December, SS. 850—852; Heft 52, 29 December, SS. 867—872. Methode zur schnellen Bestimmung harmonischer Wellen. Там же, 1901, Jahrgang XXII, Heft 19, 9 Mai, SS. 396—398. [См. также: Houston E. J., Kennelly A. E. Über eine einfache Methode, näherungsweise die harmonischen Komponenten einer gegebenen Wellenlinie zu bestimmen. Там же, 1898, Jahrgang XIX, Heft 43, 27 October, SS. 714—715.] См. Lorenz H. Lehrbuch der technischen Physik. Bd. 1: Technische Mechanik starrer Systeme. München und Berlin, R. Oldenbourg, 1902, S. 626. См. SS. 63—73.

Для получения полного интеграла уравнения (3') найдем частное решение его; для этого положим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = C_0 + C_1 \sin \omega t + C_2 \sin 2\omega t + \dots + D_1 \cos \omega t + D_2 \cos 2\omega t + \dots$$

Подставляя это значение $\varphi_1 - \varphi_2$ в уравнение (3'), получаем следующие значения для коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \frac{A_0}{c^2}, \\ C_1 &= \frac{A_1}{c^2 - \omega^2}, & D_1 &= \frac{B_1}{c^2 - \omega^2}, \\ C_2 &= \frac{A_2}{c^2 - (2\omega)^2}, & D_2 &= \frac{B_2}{c^2 - (2\omega)^2}, \\ C_3 &= \frac{A_3}{c^2 - (3\omega)^2}, & D_3 &= \frac{B_3}{c^2 - (3\omega)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Полное решение уравнения (3) представится так:

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= A \cos ct + B \sin ct + \frac{A_0}{c^2} + \frac{A_1}{c^2 - \omega^2} \sin \omega t + \\ &+ \frac{A_2}{c^2 - (2\omega)^2} \sin (2\omega t) + \dots + \frac{B_1}{c^2 - \omega^2} \cos \omega t + \frac{B_2}{c^2 - (2\omega)^2} \cos 2\omega t + \dots \quad (8) \end{aligned}$$

Произвольные постоянные A и B должны быть определены из начальных условий. За начальный момент возьмем тот, которому соответствует угол закручивания

$$(\varphi_1 - \varphi_2)_{t=0} = \frac{A_0}{c^2}.$$

Тогда из (8) для определения A будем иметь

$$0 = A + \frac{B_1}{c^2 - \omega^2} + \frac{B_2}{c^2 - (2\omega)^2} + \dots,$$

откуда

$$A = -\frac{B_1}{c^2 - \omega^2} - \frac{B_2}{c^2 - (2\omega)^2} - \dots$$

Для определения B нужно задаться начальной относительной скоростью вращения шкивов I и II . Положим, что

$$\left[\frac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{dt} \right]_{t=0} = W_0,$$

тогда

$$B = \frac{W_0}{c} - \frac{\omega}{c} \cdot \frac{A_1}{c^2 - \omega^2} - \frac{2\omega}{c} \cdot \frac{A_2}{c^2 - (2\omega)^2}.$$

Подставляя найденные значения произвольных постоянных A и B в (8), мы будем иметь возможность вычислить $\varphi_1 - \varphi_2$ для любого

момента времени. Первые два слагаемые правой части (8) представляют собой, как мы видели, собственные свободные колебания вала, и при наличии трения они постепенно затухают. Член A_0/c^2 соответствует среднему значению угла закручивания: это тот угол, по которому определяются размеры вала при статическом расчете. Все остальные члены формулы представляют собой колебания вынужденные. Соединяя эти члены попарно, мы для каждой пары $M \sin(i\omega t) + N \cos(i\omega t)$ можем найти соответствующую амплитуду R и фазу ψ по формулам

$$R = \sqrt{M^2 + N^2}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{N}{M}.$$

Разберем теперь подробнее тот случай, когда период свободных колебаний совпадает или близок к совпадению с периодом одного из составляющих вынужденных колебаний. Положим, например, что

$$c = i\omega,$$

тогда члены с коэффициентами $\frac{A_i}{c^2 - (i\omega)^2}$ и $\frac{B_i}{c^2 - (i\omega)^2}$ играют самую существенную роль, и мы для упрощения выкладки остальные члены можем отбросить и выражение (8) представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 = & - \left(\frac{B_1}{c^2 - \omega^2} + \frac{B_2}{c^2 - (2\omega)^2} + \dots + \frac{B_i}{c^2 - (i\omega)^2} + \dots \right) \cos ct + \\ & + \left(\frac{W_0}{c} - \frac{\omega}{c} \cdot \frac{A_1}{c^2 - \omega^2} - \dots + \frac{i\omega}{c} \cdot \frac{A_i}{c^2 - (i\omega)^2} + \dots \right) \sin ct + \\ & + \frac{A_i}{c^2 - (i\omega)^2} \sin i\omega t + \frac{B_i}{c^2 - (i\omega)^2} \cos i\omega t. \end{aligned}$$

Отбрасывая все члены, кроме тех, которые имеют знаменателем

$$c^2 - (i\omega)^2,$$

получим

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 = & \frac{B_i}{c^2 - (i\omega)^2} [\cos(i\omega t) - \cos ct] + \\ & + \frac{A_i}{c^2 - (i\omega)^2} [\sin(i\omega t) - \sin ct] + \frac{A_i}{c + i\omega} \sin ct. \quad (9) \end{aligned}$$

При $c = i\omega$ первые два слагаемых (9) принимают форму 0/0.

Чтобы избежать неопределенности, введем некоторые преобразования. Положим $c - i\omega = \delta c$ и найдем, к какому пределу стремится $\varphi_1 - \varphi_2$, когда δc стремится к нулю. Мы можем (9) представить в виде

$$\varphi_1 - \varphi_2 = - \frac{B_i}{c + i\omega} \cdot \frac{\delta \cos ct}{\delta c} - \frac{A_i}{c + i\omega} \cdot \frac{\delta \sin ct}{\delta c} + \frac{A_i}{c + i\omega} \sin ct,$$

или, переходя к пределу, получим при $c = i\omega$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{B_i t}{c + i\omega} \sin ct - \frac{A_i t}{c + i\omega} \cos ct + \frac{A_i}{c + i\omega} \sin ct. \quad (10)$$

Из этого видно, что амплитуда в случае резонанса включает в себе член, возрастающий пропорционально времени, и, следовательно, размахи должны возрастать беспредельно. В действительности, конечно, $\varphi_1 - \varphi_2$ не растет беспредельно, так как налицо имеются сопротивления, которыми мы в своем выводе пренебрегли. От величины этих сопротивлений зависит окончательное значение $\varphi_1 - \varphi_2$, но, во всяком случае, это значение очень велико и может повлечь за собой опасные напряжения материала и даже служить причиной разрушения. Число оборотов машины, соответствующее явлению резонанса, будем называть *критическим*. Вычислить его нетрудно, раз имеется число собственных колебаний вала в единицу времени.

Положим, например, что число свободных колебаний вала равно 240, тогда критическими скоростями машины будут

$$\begin{aligned} n_1 &= 240 \text{ оборотов в минуту,} \\ n_2 &= \frac{240}{2} = 120 \text{ оборотов в минуту,} \\ n_3 &= \frac{240}{3} = 80 \text{ оборотов в минуту,} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Одним словом, всякий раз, когда число собственных колебаний вала кратно числу оборотов машины, мы имеем дело с явлениями резонанса и можем ожидать опасных напряжений в валу.

§ 2. Работы Г. Фрама

До сих пор мы занимались теоретическим рассмотрением вопроса, причем сделали для упрощения выводов ряд допущений; кроме того, мы ничего не говорили о том, как найти изменения вращающего момента и момента сопротивления, и считали, что $\frac{Sr}{\theta_1} + \frac{Wr}{\theta_2}$ уже представлено в виде тригонометрического ряда. При таких условиях исследование колебаний привело нас к очень простой задаче механики. В действительности вопрос этот гораздо сложнее, и только на основании экспериментальных исследований появляется возможность дать для конкретного явления аналитическое выражение. Наиболее полной работой в этом направлении безусловно является вышеупомянутая статья Г. Фрама ¹⁾, с которой я постараюсь познакомить читателя.

Как видно из заглавия статьи, исследования Г. Фрама относятся к паровым валам, и главная цель этих работ заключалась в отыскании причин, обуславливающих поломку паровых валов. Что касательные усилия, получаемые валом от паровой машины,

¹⁾ См. его работу, упомянутую в сноске ²⁾ на стр. 13.

не могут быть причиной такой поломки,— это совершенно ясно. Обыкновенно валы проектируются таких размеров, что при среднем значении вращающего момента машины наибольшие касательные напряжения τ не превосходят $200 \div 230 \text{ кг/см}^2$.

Если допустить, что в некоторых случаях касательные усилия могут возрасти на 50% против среднего своего значения, то и тогда максимальные значения τ колеблются в пределах $300 \div 350 \text{ кг/см}^2$, т. е. не достигают предельных допускаемых напряжений. Между тем характер излома во многих случаях ясно указывает на то, что разрушения происходят от скручивания, и это заставляло думать, что главные причины, обуславливающие разрушение,— динамические.

Г. Фрам для исследования явлений, сопровождающих работу пароводного вала, поставил целый ряд опытов, и в результате ему удалось выработать удовлетворительные методы исследования, которые привели его к очень интересным заключениям. Я не буду

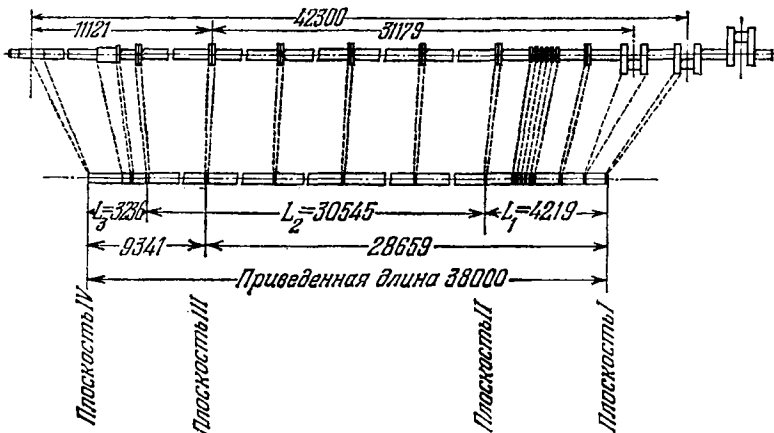


Рис. 2.

останавливаться на описании приборов, скажу только, что, пользуясь ими, Г. Фрам имел возможность с большой точностью измерять угол закручивания и скорости точек вала, соответствующих двум поперечным сечениям, из которых одно бралось у машины, другое — возможно близко к гребному винту.

1) *Наблюдения над изменениями угла закручивания вала и вычисление соответствующих напряжений материала.* Для удобства вычисления Г. Фрам начинает с приведения вала, состоящего из отдельных участков различных диаметров, к валу однообразной толщины диаметра d . Для этого каждый участок исследуемого вала какой-либо длины L и диаметра D заменяется соответствующим

участком вала выбранного нами диаметра d , длиной l , определяемой по формуле

$$\frac{L}{l} = \left(\frac{D}{d}\right)^4. \quad (1)$$

Формула эта является прямым следствием того положения, что углы закручивания двух валов при прочих равных условиях обратно пропорциональны моментам инерции поперечных сечений. Из рис. 2 (размеры даны в мм), взятого мной из опытов Г. Фрама над валом парохода «Безоцкий»¹⁾, ясно видно, как это преобразование выполняется.

Плоскости II и III соответствуют тем сечениям вала, в которых производились наблюдения. Плоскость IV есть срединная плоскость гребного винта, а I проходит через ось среднего цилиндра и названа Г. Фрамом срединной плоскостью паровой машины. Рас-

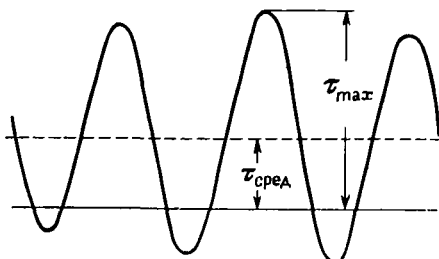


Рис. 3.

стояния между этими плоскостями назовем через L_1, L_2, L_3 . Угол закручивания вала, соответствующий участку L_2 , получается для любого момента непосредственно из опыта. Чтобы нагляднее представить изменения его в зависимости от угла поворота машины, или от времени (если пренебречь неравномерностью хода), Г. Фрам составил очень интересные диаграммы. Одна из них представлена на рис. 3. Диаграмма эта относится к вышеупомянутым опытам на пароходе «Безоцкий» и представляет собой изменения угла закручивания при скорости машины, соответствующей 83 оборотам в минуту. За один оборот машины угол закручивания, как видно из рисунка, переходит три раза через значения максимума и минимума. При этом максимальное значение угла закручивания почти втрое превосходит его среднее значение, показанное на рисунке пунктиром.

Получив опытным путем угол закручивания $\varphi_1 - \varphi_2$, нетрудно вычислить и соответствующий скручивающий момент по формуле

$$M_d = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) G J_p}{L_2}. \quad (2)$$

Определив по формуле (2) M_d , Г. Фрам вычислил максимальные напряжения τ_{\max} в валу при различных углах поворота машины и нашел, что среднее значение τ_{\max} равно 218 кг/см^2 , т. е. совпадает с данными статического расчета. Крайние же значения напряжений,

¹⁾ «Besocki».

соответствующие наибольшему и наименьшему значениям угла кручения, колеблются в пределах от 600 кг/см^2 до 166 кг/см^2 . Г. Фрам полагает, что при 85,8 оборотах машины (это соответствует критической скорости для исследуемого вала) максимальное напряжение превосходит 800 кг/см^2 .

Если принять во внимание, что эти высокие напряжения повторяются три раза за один оборот машины и сменяются каждый раз

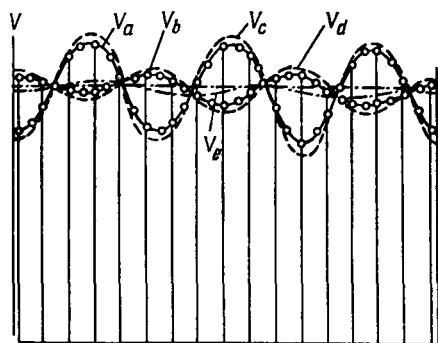


Рис. 4.

напряжениями противоположного знака, то совершенно понятно будет возможность поломки валов в машинах, число оборотов которых случайно совпадает с одной из критических скоростей.

2) *Определение угловых скоростей машины и гребного винта.* Если пренебречь массой вала, то относительные вращения двух поперечных сечений вала постоянного диаметра будут пропорциональны расстоянию между этими сечениями. Та же

пропорциональность, очевидно, имеет место и для относительных угловых скоростей вращения этих сечений. Назовем через V_a и V_b вращательные скорости, соответствующие сечениям II и III, получаемые непосредственно из опыта. Скорости V_c и V_d , относящиеся к сечениям I и IV, мы можем вычислить из таких соотношений:

$$\frac{V_c - V_b}{V_a - V_b} = \frac{L_1 + L_2}{L_2} \quad \text{и} \quad \frac{V_a - V_d}{V_a - V_b} = \frac{L_2 + L_3}{L_2}. \quad (3)$$

Изменения скоростей V_a и V_b , полученных Г. Фрамом опытным путем на пароходе «Безоцкий», и скоростей V_c и V_d , определенных по формулам (3), представлены на рис. 4.

Скорости V_a и V_b показаны на рисунке сплошными линиями, а вычисленные V_c и V_d — пунктирными. Линия V_e представляет собой изменение скорости в сечении, проходящем через узловую точку. Так как впоследствии эта точка нам понадобится, то определим положение ее в простейшем случае, рассмотренном нами в § 1.

Положим, что вал со шкивами I, II (см. рис. 1) закручен двумя равными и прямо противоположными парами сил. Если эти силы убрать, то предоставленный самому себе вал будет совершать колебания около положения, соответствующего ненапряженному состоянию. Сохраняя прежние обозначения, мы на основании закона сохранения момента количества движения можем написать

уравнение

$$\theta_1 \varphi_1' + \theta_2 \varphi_2' = 0, \quad (4)$$

откуда следует, что φ_1 и φ_2 противоположны по знаку и обратно пропорциональны соответствующим моментам инерции θ_1 и θ_2 . Сечение вала, остающееся во время колебаний в покое, очевидно, отстоит от концов вала на расстояниях l_1 и l_2 , определяемых по формулам

$$l_1 = \frac{l\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \quad \text{и} \quad l_2 = \frac{l\theta_1}{\theta_1 + \theta_2}. \quad (5)$$

Имея на рис. 4 кривую скоростей V для кривошипа, можно, пользуясь индикаторными диаграммами, составить довольно точное представление об изменениях касательных усилий, принимая во внимание неравномерность хода и инерцию движущихся взад и вперед частей машины. Построенная таким образом диаграмма касательных усилий, как выяснилось из опытов Г. Фрама, значительно отличается от диаграмм, которые обыкновенно строятся в том предположении, что угловая скорость вращения остается постоянной.

Для того чтобы иметь все данные, необходимые нам для теоретического решения задачи, остается еще исследовать вопрос о сопротивлении воды при вращении гребного винта.

Если назвать через θ_2 момент инерции гребного винта вокруг оси вала, через M_d — момент внутренних сил упругости вокруг той же оси, то для определения момента сопротивления Wr будем иметь

$$Wr = M_d - \theta_2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (6)$$

где $d^2\varphi/dt^2$ — угловое ускорение гребного винта, получаемое из диаграммы скоростей (рис. 4). Из ряда опытов Г. Фрам нашел, что сопротивление может быть представлено в форме

$$W = Cv^k, \quad (7)$$

где C — постоянный множитель; v — скорость вращения винта, а k — число, которое колеблется в пределах от 3,6 до 4.

Получив таким путем диаграмму для вращающего момента и момента сопротивления, Г. Фрам аналитически вычислил амплитуды соответствующих вынужденных колебаний. Результаты этих вычислений очень близко совпали с данными опыта.

Чтобы показать, как сильно растет амплитуда колебаний с приближением скорости вращения машины к критической, на рис. 5 представлена диаграмма ¹⁾, дающая колебания угла закручивания вала при различном числе оборотов машины.

¹⁾ Диаграмма эта получена Г. Фрамом при опытах на пароходе «Радамес» («Radames»).

Из опытов выяснилось, что, отклоняясь от критической скорости на 6—7 оборотов в ту или другую сторону, уже можно получить довольно спокойный ход машины, что ясно видно и на приложенном рис. 5.

В заключение своей работы Г. Фрам приходит к тому выводу, что общепринятых расчетов вала недостаточно, необходимо производить проверку на возможность явлений резонанса. Ход расчета должен быть такой: по существующим формулам строительной механики намечаем первоначальные размеры вала, потом определяем

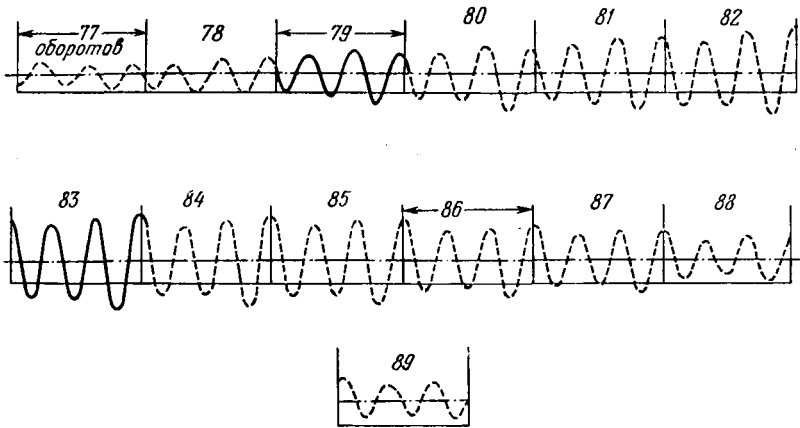


Рис. 5.

число собственных колебаний вала по формуле (6) § 1; если это число окажется кратным числу оборотов машины, то тогда размеры вала должны быть непременно изменены. В нашем распоряжении имеется диаметр вала, изменяя который, мы можем подобрать такой момент инерции J_p для поперечного сечения, чтобы нормальное число оборотов машины было далеко от критического числа оборотов. При такой проверке вала на резонанс может иногда оказаться выгодным даже уменьшение диаметра вала. Уменьшение диаметра, конечно, повысит в валу среднее значение напряжений, но отдаление числа собственных колебаний от критического числа дает больше уверенности в прочности вала.

Пока мы имеем дело с паровыми валами, формула (6) § 1 достаточно точна, потому что момент инерции самого вала невелик по сравнению с моментами инерции гребного винта и движущихся частей паровой машины. Далее, в § 3 мы выведем формулы для определения числа собственных колебаний вала, не пренебрегая массой самого вала.

Мы разберем три случая:

1) моменты инерции шкивов, помещенных на концах вала, малы по сравнению с моментом инерции самого вала;

2) моменты инерции шкивов и вала суть величины одного порядка;

3) момент инерции вала мал по сравнению с моментами инерции шкивов.

В заключение мы рассмотрим тот случай, когда на валу имеется три шкива.

Так как вопрос о точном определении различных типов колебаний и соответствующих им периодов для какой-либо системы, вообще говоря, представляет большие трудности, то обыкновенно пользуются различными приближенными методами. Мы будем пользоваться общим приемом, изложенным в известном сочинении лорда Рэля ¹⁾ «Теория звука», в применении к вопросу о колебании струны, масса которой распределена по длине неравномерно.

§ 3. Изложение общего приема вычислений

Сущность приема заключается в том, что мы вместо заданной системы выбираем систему более простую, для которой как типы колебаний, так и их периоды уже известны, и потом вводим соответствующие поправки в том предположении, что разность между заданной и выбранной нами системами очень мала.

Пусть Φ_1, Φ_2, \dots будут нормальные координаты для выбранной нами системы, тогда выражение для живой силы ²⁾ напишется так:

$$K = \frac{1}{2} a_1 (\dot{\Phi}_1')^2 + \frac{1}{2} a_2 (\dot{\Phi}_2')^2 + \frac{1}{2} a_3 (\dot{\Phi}_3')^2 + \dots \quad (1)$$

Потенциальная энергия в случае малых деформаций выразится функцией второй степени от координат, так как можно допустить, что твердые тела в некоторых пределах следуют закону Гука. Следовательно, можем написать, что

$$V = \frac{1}{2} c_1 \Phi_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \Phi_2^2 + \dots \quad (2)$$

Чтобы получить период свободных колебаний какого-либо типа, нужно только составить соответствующее уравнение Лагранжа. Положим, мы остановились на типе колебаний, определяемом координатой Φ_i . Относящееся сюда уравнение будет

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\Phi}_i'} + \frac{\partial V}{\partial \Phi_i} = 0,$$

¹⁾ Strutt J. W. (Rayleigh). The theory of sound. Vol. I. 2nd edition. London and New York, MacMillan and Co., 1894. См. pp. 180—246. [Перевод на русский язык: Стрэтт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука. Том I. М.—Л., Гостехиздат, 1940; Поперечные колебания струн, гл. 6, стр. 187—257.]

²⁾ [Кинетическая энергия.]

или на основании (1) и (2)

$$a_i \frac{d^2 \Phi_i}{dt^2} + c_i \Phi_i = 0. \quad (3)$$

Это уравнение соответствует простому гармоническому колебанию

$$\Phi_i = A \cos(n_i t + \alpha_i),$$

где

$$n_i = \sqrt{\frac{c_i}{a_i}}.$$

Период колебаний рассматриваемого типа будет

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a_i}{c_i}}. \quad (4)$$

Следовательно, в том случае, когда мы знаем выражение для живой силы и для потенциальной энергии выбранной нами системы в нормальных координатах, различные типы колебаний и соответствующие им периоды получить нетрудно. Если теперь в выбранной нами системе произвести малые изменения, то Φ_1 , Φ_2 , вообще говоря, не будут уже представлять собой системы нормальных координат, и, следовательно, в выражениях для живой силы и для потенциальной энергии кроме квадратов координат и соответствующих им скоростей войдут еще и произведения их, а также могут появиться и новые координаты. При малых изменениях системы коэффициенты при новых членах будут также малыми, и на этом допущении основано определение периодов колебаний, соответствующих измененной системе.

Выражения для живой силы и потенциальной энергии измененной системы представляются в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} K + \delta K &= \frac{1}{2} (a_1 + \delta a_{11}) (\Phi'_1)^2 + \frac{1}{2} (a_2 + \delta a_{22}) (\Phi'_2)^2 + \dots \\ &\quad \dots + \delta a_{12} \Phi'_1 \Phi'_2 + \dots, \\ V + \delta V &= \frac{1}{2} (c_1 + \delta c_{11}) \Phi_1^2 + \frac{1}{2} (c_2 + \delta c_{22}) \Phi_2^2 + \dots \\ &\quad \dots + \delta c_{12} \Phi_1 \Phi_2 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где δa_{11} , δa_{12} , \dots , δc_{11} , δc_{12} , \dots — малые величины, соответствующие малым изменениям первоначальной системы.

Пользуясь выражениями (5), нетрудно составить уравнения Лагранжа для измененной системы. Они напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} (a_1 + \delta a_{11}) \Phi'_1 + (c_1 + \delta c_{11}) \Phi_1 + \delta a_{12} \Phi'_2 + \delta c_{12} \Phi_2 + \delta a_{13} \Phi'_3 + \\ + \delta c_{13} \Phi_3 + \dots = 0, \\ \delta a_{21} \Phi'_1 + \delta c_{21} \Phi_1 + (a_2 + \delta a_{22}) \Phi'_2 + (c_2 + \delta c_{22}) \Phi_2 + \delta a_{23} \Phi'_3 + \\ + \delta c_{23} \Phi_3 + \dots = 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Пока Φ_1, Φ_2, \dots были нормальными координатами, изменения каждой координаты давали независимый тип колебаний и каждое из лагранжевых уравнений (3) заключало только одну координату. Теперь же, как видно из системы уравнений (6), в каждое уравнение входят все координаты, и в дальнейшем возможно лишь приближенное решение вопроса.

Возьмем какой-либо нормальный тип колебаний первоначальной системы, например тип, соответствующий изменению координаты Φ_r , причем все остальные координаты равны нулю. Всякое изменение в системе влечет за собой изменения в выбранном типе колебаний, что выразится в том, что к изменениям координат Φ_r прибавятся еще синхронные изменения других координат $\Phi_1, \dots, \Phi_{r-1}, \Phi_{r+1}, \dots$.

Пока изменения системы малы, отношения $\Phi_s : \Phi_r$ будут малы при всяких значениях s . Если мы найдем отношение $\Phi_s : \Phi_r$ для всех значений s , то тогда координаты Φ_1, Φ_2, \dots могут быть выражены через Φ_r и из уравнения r -го системы (6) мы найдем нормальный тип колебаний для измененной системы, близкий к типу Φ_r первоначальной системы.

Так как рассматриваемое колебание в целом есть колебание гармоническое, то мы можем положить, что каждая координата меняется по такому же закону, как $\cos p_r t$, где $2\pi/p_r$ есть период изучаемого колебания. Тогда для всякой координаты Φ_s будем иметь

$$\ddot{\Phi}_s^* = -p_r^2 \Phi_s,$$

и система уравнений (6) переписется так:

$$\left. \begin{aligned} & (-a_1 p_r^2 - \delta a_{11} p_r^2 + c_1 + \delta c_{11}) \Phi_1 + (-\delta a_{12} p_r^2 + \delta c_{12}) \Phi_2 + \\ & \quad \quad \quad + (-\delta a_{13} p_r^2 + \delta c_{13}) \Phi_3 + \dots = 0, \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & (-a_r p_r^2 - \delta a_{rr} p_r^2 + c_r + \delta c_{rr}) \Phi_r + \sum \Phi_s (-\delta a_{rs} p_r^2 + \delta c_{rs}) = 0, \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

Для определения отношения $\Phi_s : \Phi_r$ возьмем из системы (6') уравнение s -е; в нем координата Φ_s имеет конечный коэффициент

$$-a_s p_r^2 - \delta a_{ss} p_r^2 + c_s + \delta c_{ss}.$$

Коэффициент при координате Φ_r в том же уравнении будет

$$-\delta a_{rs} p_r^2 + \delta c_{rs}.$$

Члены, не заключающие Φ_s и Φ_r , можем отбросить, так как по отношению к оставленным величинам это будут величины малые. Тогда уравнение s -е переписется так:

$$(-a_s p_r^2 - \delta a_{ss} p_r^2 + c_s + \delta c_{ss}) \Phi_s + (-\delta a_{rs} p_r^2 + \delta c_{rs}) \Phi_r = 0,$$

откуда

$$\Phi_s : \Phi_r = - \frac{\delta c_{rs} - \delta a_{rs} p_r^2}{-a_s p_r^2 - \delta a_{ss} p_r^2 + c_s + \delta c_{ss}},$$

или, отбрасывая в знаменателе малые величины, получим

$$\Phi_s : \Phi_r = \frac{p_r^2 \delta a_{rs} - \delta c_{rs}}{c_s - a_s p_r^2}. \quad (7)$$

Из лагранжевых уравнений (3), относящихся к первоначальной системе, мы имеем

$$-a_s p_s^2 + c_s = 0,$$

на основании чего (7) можно переписать так:

$$\Phi_s : \Phi_r = \frac{p_r^2 \delta a_{rs} - \delta c_{rs}}{a_s (p_s^2 - p_r^2)}. \quad (7')$$

В тех случаях, когда изменения c_{rs} не влияют на потенциальную энергию системы, $\delta c_{rs} = 0$ и отношение $\Phi_s : \Phi_r$ напишется проще:

$$\Phi_s : \Phi_r = \frac{p_r^2}{p_s^2 - p_r^2} \frac{\delta a_{rs}}{a_s}. \quad (8)$$

Обратимся теперь к r -му уравнению системы (6') и из него постараемся определить период исследуемого колебания:

$$\Phi_r (-a_r p_r^2 - \delta a_{rr} p_r^2 + c_r + \delta c_{rr}) + \Phi_r \sum_s \frac{(-\delta a_{rs} p_r^2 + \delta c_{rs}) (\delta a_{rs} p_r^2 - \delta c_{rs})}{(p_s^2 - p_r^2) a_s} = 0;$$

отсюда получаем

$$p_r^2 = \frac{c_r + \delta c_{rr}}{a_r + \delta a_{rr}} - \sum_s \frac{(\delta c_{rs} - \delta a_{rs} p_r^2)^2}{(p_s^2 - p_r^2) a_s a_r}. \quad (9)$$

Мы остановились на выводе формулы (9), потому что считаем ее очень полезной для решения многих вопросов из области техники. Кроме исследования колебаний струны и валов ее можно применить при изучении поперечных колебаний балок, когда кроме равномерно распределенной нагрузки имеются еще и сосредоточенные грузы или когда сечение балки не остается постоянным по длине. Когда нужно только приблизительно оценить влияние на период колебаний тех или иных изменений в системе, то формулой (9) можно пользоваться даже и не при очень малых изменениях системы. Укажу такой пример: если массу струны, равномерно распределенную по длине, представить себе сосредоточенной в середине, то периоды колебаний, соответствующие основным тонам

этих систем, будут относиться между собой как $12 : \pi^2$. При приближенных расчетах можно воспользоваться и таким решением, как первым приближением.

Пока изменения системы настолько малы, что квадратами их мы можем пренебречь, следует пользоваться более простой формулой

$$p_r^2 = \frac{c_r + \delta c_{rr}}{a_r + \delta a_{rr}}. \quad (10)$$

Из формулы (10) можно сразу сделать некоторые заключения относительно влияния изменений системы на период колебаний. Всякое увеличение потенциальной энергии, соответствующее положительному δc_{rr} , увеличивает p_r^2 и уменьшает период колебаний, что и нужно было ожидать, так как возрастанию потенциальной энергии соответствует увеличение жесткости системы.

Изменения в кинетической энергии имеют противоположное влияние на период колебаний: увеличение кинетической энергии, соответствующее положительному δa_{rr} , увеличивает период колебаний. Этого и следовало ожидать, так как увеличение кинетической энергии, без изменения потенциальной, возможно только при увеличении движущихся масс.

§ 4. Рассмотрение случая, когда моменты инерции шкивов малы по сравнению с моментом инерции вала

Применим выведенные в предыдущем параграфе формулы к случаю цилиндрического вала, на концах которого насажены шкивы с моментами инерции θ_1 и θ_2 , малыми по сравнению с моментом инерции самого вала. Ход задачи должен быть такой: исследуем вопрос о колебаниях цилиндрического вала со свободными концами, а потом, пользуясь формулой (8), § 3, вычислим поправки, зависящие от величин θ_1 и θ_2 .

Пусть AB представляет собой цилиндрический вал длины l (рис. 6); J_p — полярный момент инерции поперечного сечения; F — площадь поперечного сечения; G — модуль упругости при сдвиге; μ — масса вала, приходящаяся на единицу длины; i — радиус инерции поперечного сечения.

Положим, что ось x совпадает с осью вала, и пусть O будет началом координат. Возьмем сечение $I - I$ на расстоянии x от начала координат, и пусть φ обозначает переменный угол поворота этого сечения во время колебания вала; тогда производная $d\varphi/dx$ даст нам

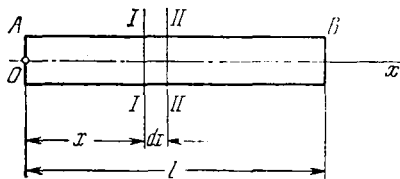


Рис. 6.

кручение вала в выбранном сечении. Момент внутренних сил упругости относительно оси вала в том же сечении будет, очевидно, равен

$$M = GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

В сечении $II - II$, отстоящем от $I - I$ на dx , момент внутренних сил будет несколько иным и определится из формулы

$$M' = M + dM = GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} + GJ_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx.$$

Сечениями $I - I$ и $II - II$ мы выделили бесконечно малый элемент вала длиной dx , считая по оси. Нам легко будет исследовать движение этого элемента, если воспользоваться принципом Даламбера. Соответствующее уравнение представится в виде

$$GJ_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \mu i^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (1)$$

или, деля обе части уравнения (1) на $F i^2$, получим

$$G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \delta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}; \quad (1')$$

здесь через δ обозначено μ/F — масса единицы объема вала.

Самое общее решение уравнения (1'), как известно, будет

$$\varphi = f(x - at) + f(x + at), \quad \text{где} \quad a^2 = \frac{G}{\delta}.$$

Мы должны выбрать такое решение, которое удовлетворяло бы условиям на концах вала. Так как концы вала свободны, то, следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad \text{при} \quad x = l. \quad (2)$$

Положим, что φ меняется со временем по закону $\cos p_i t$, тогда

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -p_i^2 \varphi,$$

и из уравнения (1') будем иметь

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -p_i^2 \varphi,$$

где

$$a^2 = \frac{G}{\delta}, \quad (3)$$

откуда

$$\varphi = A \cos \frac{p_i}{a} x + B \sin \frac{p_i}{a} x.$$

Чтобы удовлетворить условиям на концах (2), необходимо положить

$$B = 0 \quad \text{и} \quad \sin \frac{p_i}{a} l = 0,$$

другими словами, $p_i l / a = i\pi$, где i — целое число.

Определив таким образом произвольные постоянные, найдем частное решение уравнения (1') в таком виде:

$$\varphi = A \cos p_i t \cdot \cos \frac{i\pi}{l} x.$$

Давая числу i значения 1, 2, 3, . . . , получим ряд частных решений, соответствующих различным типам колебаний. Общий интеграл уравнения (1') представится так:

$$\varphi = \sum_{i=0}^{i=\infty} \cos \frac{i\pi x}{l} (A \cos p_i t + B \sin p_i t). \quad (4)$$

Колебания, соответствующие основному тону, получим, если положим $i=1$, тогда

$$\varphi = C \cos \frac{\pi x}{l} \cdot \cos \left(\frac{a\pi}{l} t - \alpha \right). \quad (5)$$

Соответствующий период $T=2l/a$, а число колебаний в минуту

$$n = \frac{30a}{l} = \frac{30}{l} \sqrt{\frac{G}{\delta}}. \quad (6)$$

При вычислениях по формуле (6) нужно помнить, что модуль упругости G обыкновенно задается в $\text{кг}/\text{см}^2$ и потому, если δ задано в килограммах, то под корнем будет еще множитель 981, соответствующий ускорению силы тяжести.

Как видно из формулы (6), число колебаний вала в минуту обратно пропорционально длине вала и совершенно не зависит от его диаметра. Полагая $i=2, 3, \dots$, мы бы получили типы колебаний с периодами вдвое, втрое и т. д. меньшими, чем в случае основного тона.

Сохраняя для нормальных координат прежние обозначения Φ_1, Φ_2, \dots , мы на основании предыдущего можем написать для вала со свободными концами

$$\varphi = \Phi_1 \cos \frac{\pi x}{l} + \Phi_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + \dots + \Phi_i \cos \frac{i\pi x}{l} + \dots,$$

где Φ_i меняется как $\cos p_i t$. Живая сила системы будет, очевидно,

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \theta_0 (\varphi')^2 dx = \\ = \frac{1}{2} \int_0^l \theta_0 \left(\Phi_1' \cos \frac{\pi x}{l} + \Phi_2' \cos \frac{2\pi x}{l} + \Phi_3' \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots \right)^2 dx.$$

Здесь через θ_0 обозначен момент инерции отрезка вала, длиной равного единице, относительно оси вала. Принимая во внимание, что

$$\int_0^l \theta_0 (\Phi_i')^2 \cos^2 \frac{i\pi x}{l} dx = (\Phi_i')^2 \theta_0 \frac{l}{2}$$

и

$$\int_0^l \theta_0 \Phi_s' \Phi_i' \cos \frac{s\pi x}{l} \cos \frac{i\pi x}{l} dx = 0,$$

можем выражение для живой силы представить в таком виде:

$$K = \frac{1}{2} a_1 (\Phi_1')^2 + \frac{1}{2} a_2 (\Phi_2')^2 + \dots + \frac{1}{2} a_r (\Phi_r')^2 + \dots, \quad (7)$$

где

$$a_r = l \frac{\theta_0}{2}. \quad (8)$$

Составим теперь выражение для потенциальной энергии скрученного вала в тех же координатах. Если представить себе отрезок вала, длиной равный единице, скрученным на угол ψ двумя равными и прямо противоположными парами сил, то потенциальная энергия будет

$$V = \frac{1}{2} GJ_p \psi^2. \quad (9)$$

Так как кручение вала в любом сечении определяется значением $d\varphi/dx$, то на основании (9) можем потенциальную энергию всего вала представить в таком виде:

$$V = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{l^2} GJ_p \int_0^l \left(\Phi_1 \sin \frac{\pi x}{l} + 2\Phi_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + 3\Phi_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \right)^2 dx, \quad (10)$$

или, принимая во внимание, что

$$\int_0^l \sin^2 \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}$$

и

$$\int_0^l \sin \frac{r\pi x}{l} \sin \frac{s\pi x}{l} dx = 0,$$

можем (10) переписать в таком виде:

$$V = \frac{1}{2} C_1 \Phi_1^2 + \frac{1}{2} C_2 \Phi_2^2 + \frac{1}{2} C_3 \Phi_3^2 + \dots, \quad (11)$$

где

$$C_r = \frac{r^2 \pi^2}{l^2} G J_p \frac{l}{2}.$$

Имея выражения (7) и (11), мы можем легко изучить любой тип колебаний. Возьмем, например, тип колебаний, соответствующий координате Φ_r . Период определится на основании формулы (4) § 3:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a_r}{C_r}} = \frac{2l}{r} \sqrt{\frac{\delta}{G}},$$

число колебаний в минуту будет

$$n_r = \frac{30r}{l} \sqrt{\frac{G}{\delta}},$$

что совершенно совпадает с формулой (6), выведенной выше для основного тона.

Рассмотрим теперь, какие изменения произойдут в нормальных типах колебаний вала, когда на его концы будут насажены шкивы с моментами инерции θ_1 и θ_2 . Величина потенциальной энергии не изменится, и, следовательно, δc_{rr} и δc_{rs} в формуле (9) § 3 будут равны нулю. Для определения δa_{rr} и δa_{rs} заметим, что теперь θ — момент инерции части вала, длина которой равна единице, — нельзя считать постоянным по длине и, следовательно, a_{rr} и a_{rs} должны быть вычислены по общим формулам

$$a_{rr} + \delta a_{rr} = \int_0^l \theta \cos^2 \frac{r\pi x}{l} dx,$$

$$a_{rs} + \delta a_{rs} = \int_0^l \theta \cos \frac{s\pi x}{l} \cos \frac{r\pi x}{l} dx.$$

Если положить $\theta = \theta_0 + \delta\theta$, то получим

$$\left. \begin{aligned} \delta a_{rr} &= \int_0^l \delta\theta \cos^2 \frac{r\pi x}{l} dx \\ \delta a_{rs} &= \int_0^l \delta\theta \cos \frac{r\pi x}{l} \cos \frac{s\pi x}{l} dx. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

и

В том частном случае, когда изменения системы заключаются в прибавлении двух шкивов на концах вала, формулы (12), очевидно, нам дадут

$$\delta a_{rr} = \theta_1 + \theta_2, \quad \delta a_{rs} = \theta_1 \pm \theta_2.$$

Причем знак плюс придется брать, когда r и s — оба четные или оба нечетные числа, и минус в том случае, когда одно из чисел четное, а другое нечетное. Для упрощения дальнейших выкладок положим $\theta_1 = \lambda_1 \theta_0$ и $\theta_2 = \lambda_2 \theta_0$, тогда

$$\delta a_{rr} = (\lambda_1 + \lambda_2) \theta_0 \quad \text{и} \quad \delta a_{rs} = (\lambda_1 \pm \lambda_2) \theta_0. \quad (13)$$

Займемся теперь определением периода колебаний, соответствующих координате Φ_1 , т. е. основному тону системы. Колебания эти представляют наибольший интерес в технике, так как по отношению к ним явления резонанса встречаются наиболее часто. Основная формула (9) § 3 в данном случае переписется так:

$$p_1^2 = \frac{c_1}{a_1 + \delta a_{11}} - \sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{p_1^4 (\delta a_{1s})^2}{a_1 a_s (p_s^2 - p_1^2)}.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{p_1^2}{p_s^2 - p_1^2} = \frac{1}{s^2 - 1},$$

получим

$$p_1^2 \left[1 + \sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{(\delta a_{1s})^2}{a_1 a_s} \frac{1}{s^2 - 1} \right] = \frac{c_1}{a_1 + \delta a_{11}}. \quad (14)$$

Если число колебаний вала со свободными концами в минуту назвать через n_1 , а число таких же колебаний при наличии на концах вала шкивов — через N_1 , то на основании (14) получим

$$N_1^2 \left[1 + \sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{(\delta a_{1s})^2}{a_1 a_s} \frac{1}{s^2 - 1} \right] = n_1^2 \frac{1}{1 + \frac{\delta a_{11}}{a_1}}.$$

Подставляя вместо a_1 , a_s , δa_{1s} , δa_1 их значения, будем иметь

$$N_1^2 \left[1 + 4 \sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{1}{s^2 - 1} \frac{(\lambda_1 \pm \lambda_2)^2}{l^2} \right] = n_1^2 \frac{1}{1 + 2 \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{l}}. \quad (15)$$

$\sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{1}{s^2 - 1} \frac{(\lambda_1 \pm \lambda_2)^2}{l^2}$ можно разбить на два слагаемых: в первое войдут члены, где s — нечетное и множитель $(\lambda_1 + \lambda_2)$, во второе

слагаемое — члены с s четным и множителем $(\lambda_1 - \lambda_2)$:

$$\sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s^2-1} \frac{(\lambda_1 \pm \lambda_2)^2}{l^2} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{l^2} \sum_s \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \frac{1}{7^2-1} + \dots \\ \dots + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{l^2} \sum_s \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \dots$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right),$$

получим для s нечетного

$$\sum_s \frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots \right) = \frac{1}{4}$$

и для s четного

$$\sum_s \frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \dots \right) = \frac{1}{2}.$$

Подставляя найденные значения сумм в формулу (15), получим

$$N_1^2 \left[1 + \frac{4(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{l^2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{l^2} \cdot \frac{1}{2} \right] = n_1^2 \frac{1}{1 + \frac{2(\lambda_1 + \lambda_2)}{l}}.$$

Если θ_1 и θ_2 малы по сравнению с моментом инерции вала, то величины $\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{l}$ и $\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{l}$ будут малы по сравнению с единицей, и мы для определения числа колебаний получим формулу

$$N_1^2 = n_1^2 \left[1 - \frac{2(\lambda_1 + \lambda_2)}{l} + \frac{3(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{l^2} - \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{l^2} \right]. \quad (16)$$

В частном случае, когда моменты инерции шкивов равны ($\lambda_1 = \lambda_2$),

$$N_1^2 = n_1^2 \left(1 - \frac{4\lambda}{l} + \frac{12\lambda^2}{l^2} \right). \quad (16')$$

По формулам (16) и (16') легко вычислить искомое число колебаний, так как n_1 определится по формуле (6), а λ_1 и λ_2 нетрудно вычислить по заданным величинам θ_1 , θ_2 и θ_0 .

Возьмем численный пример из статьи Г. Фрама:

длина вала $l = 3800$ см;

диаметр вала $d = 30,0$ см;

модуль упругости стали $G = 828 \cdot 10^3$ кг/см².

На концах вала имеются сосредоточенные грузы $m_1 = 31,68$ кг и $m_2 = 11,04$ кг, помещенные на расстоянии 53,5 см от оси вала.

Найдем

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 31,68 \cdot (53,5)^2, & \theta_2 &= 11,04 \cdot (53,5)^2, \\ \lambda_1 &= \frac{\theta_1 \cdot 32}{\pi d^4 \delta} = 152, & \lambda_2 &= \frac{\theta_2 \cdot 32}{\pi d^4 \delta} = 53. \end{aligned}$$

При вычислениях δ принято равным 0,0075 кг.

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{l} &= \frac{152 + 53}{3800} = 0,054, & \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{l}\right)^2 &= (0,054)^2 = 0,003, \\ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{l} &= \frac{152 - 53}{3800} = 0,026, & \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{l}\right)^2 &= (0,026)^2 = 0,001. \end{aligned}$$

$$n_1 = \frac{30}{l} \sqrt{\frac{G}{\delta}} = 2600 \text{ колебаний в минуту.}$$

Подставляя найденные величины в формулу (16), получим

$$N_1 = 0,965 \cdot 2600 = 2509,$$

т. е. число колебаний от прибавления шкивов уменьшилось на 3,5%.

Посмотрим теперь, как, пользуясь общим приемом, отыскать положение узловой точки в случае колебаний с наибольшим периодом. Пока концы вала свободны, колебания, соответствующие основному тону, определяются формулой

$$\varphi = A \cos \frac{\pi x}{l} \cos \left(\frac{\pi t}{l} t - \alpha \right)$$

и узловая точка соответствует $x = l/2$.

Если θ_1 и θ_2 не равны, то можно заранее сказать, что узловая точка переместится в направлении шкива с большим моментом инерции. Пусть новое положение определяется координатой $x + \delta x$. Пока θ_1 и θ_2 малы по сравнению с $l\theta_0$, δx будет величиной малой, и ее можно вычислить приближенным способом. Мы имели уже, что

$$\varphi_x = \Phi_1 \cos \frac{\pi x}{l} + \Phi_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + \Phi_3 \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots;$$

кроме того,

$$\varphi_{x+\delta x} = \varphi_x + \delta x \varphi'_x + \frac{(\delta x)^2}{1 \cdot 2} \varphi''_x + \dots$$

Полагая $x = l/2$, будем иметь

$$\varphi_{x+\delta x} = -\Phi_2 + \Phi_4 - \Phi_6 + \dots + \delta x \left(-\frac{\pi}{l} \Phi_1 - \frac{3\pi}{l} \Phi_3 - \dots \right) + \dots$$

Так как мы заняты колебаниями, определяемыми координатой Φ_1 , то Φ_3 , Φ_5 , Φ_7 , ... будут величины малые, а следовательно, произведения $\delta x \cdot \Phi_3$, $\delta x \cdot \Phi_5$, ... можно пренебречь как величинами второго порядка малости, тогда получим

$$\varphi_{x+\delta x} = -\Phi_2 + \Phi_4 - \Phi_6 - \dots - \delta x \cdot \frac{\pi}{l} \cdot \Phi_1.$$

Так как сечение $x + \delta x$ соответствует узловой точке, то $\varphi_{x+\delta x} = 0$, и для определения δx будем иметь

$$\delta x = -\frac{\Phi_2 + \Phi_4 - \Phi_6 + \dots}{\Phi_1} \cdot \frac{l}{\pi}.$$

Вместо координат Φ_2, Φ_4, \dots можно поставить их выражение через Φ_1 на основании формулы (8) § 3:

$$\Phi_s : \Phi_1 = \frac{1}{s^2 - 1} \cdot \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2)}{l},$$

тогда

$$\delta x = \frac{l}{\pi} \cdot \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2)}{l} \sum_{s=2}^{s=\infty} \pm \frac{1}{s^2 - 1}.$$

Суммирование распространяется на все четные значения s :

$$\begin{aligned} \sum_{s=2}^{s=\infty} \pm \frac{1}{s^2 - 1} &= -\frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{4^2 - 1} - \frac{1}{6^2 - 1} + \frac{1}{8^2 - 1} - \dots = \\ &= -\left(\frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{6^2 - 1} + \frac{1}{10^2 - 1} + \dots\right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{4^2 - 1} + \frac{1}{8^2 - 1} + \frac{1}{12^2 - 1} + \dots\right). \end{aligned}$$

Суммы, заключенные в скобках, можно преобразовать на основании выражения

$$\frac{1}{s^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right);$$

тогда

$$\begin{aligned} \sum_{s=2}^{s=\infty} \pm \frac{1}{s^2 - 1} &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \dots \right). \end{aligned}$$

Принимая во внимание ряд

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots,$$

получим для $x=1$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Следовательно, $\sum_{s=2}^{s=\infty} \pm \frac{1}{s^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$ для всех значений s четных.

С учетом приведенных преобразований мы получим для δx выражение

$$\delta x = \frac{l}{\pi} \cdot \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2)}{l} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)}{2} = (\lambda_1 - \lambda_2) \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right), \quad (17)$$

т. е. перемещение узловой точки тем больше, чем больше разность между моментами инерции шкивов, и направляется в сторону шкива с большим моментом инерции.

Посмотрим теперь, какое влияние на период колебаний будут оказывать утолщения вала. Заранее оценить это влияние затруднительно. Всякое утолщение увеличивает массу вала и этим должно замедлять колебания, но, с другой стороны, утолщения придают валу большую жесткость, что влияет на период колебаний в сторону противоположную.

Чтобы решить этот вопрос, применим прежний прием, но для упрощения выкладок пренебрежем членами, заключающими квадраты изменений первоначальной системы, т. е. воспользуемся формулой

$$p_r^2 = \frac{c_r + \delta c_{rr}}{a_r + \delta a_{rr}}.$$

a_r и c_r сохраняют прежние значения (8) и (11); для определения δa_{rr} и δc_{rr} положим, что момент инерции вала, отнесенный к единице длины в утолщенной части, будет

$$\vartheta = \theta_0 + \lambda \theta_0.$$

Полагая, что утолщение располагается в пределах от $x=l_1$ до $x=l_2$, получим

$$\delta a_{rr} = \int_{l_1}^{l_2} \lambda \theta_0 \cos^2 \frac{r\pi x}{l} dx$$

и

$$\delta c_{rr} = \frac{r^2 \pi^2}{l^2} G \int_{l_1}^{l_2} \Delta J_p \sin^2 \frac{r\pi x}{l} dx,$$

через ΔJ_p мы обозначили приращение момента инерции поперечного сечения вала в утолщенных частях; оно определится, очевидно из формулы

$$\Delta J_p = \frac{\lambda \theta_0}{\delta}.$$

Для основного тона, очевидно, получим

$$\rho_1^2 = \frac{\frac{\pi^2 G J_p}{2l} \left(1 + \frac{2\lambda}{l} \int_{l_1}^{l_2} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx \right)}{\frac{l\theta_0}{2} + \lambda\theta_0 \int_{l_1}^{l_2} \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx}.$$

Отсюда легко получается формула для определения числа колебаний в минуту:

$$N_1^2 = n_1^2 \left[\frac{1 + \frac{2\lambda}{l} \int_{l_1}^{l_2} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx}{1 + \frac{2\lambda}{l} \int_{l_1}^{l_2} \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx} \right].$$

Так как λ мало, то мы можем представить предыдущую формулу так:

$$N_1^2 = n_1^2 \left[1 + \frac{2\lambda}{l} \int_{l_1}^{l_2} \left(\sin^2 \frac{\pi x}{l} - \cos^2 \frac{\pi x}{l} \right) dx \right]. \quad (18)$$

Вставляя в каждом частном случае соответствующие пределы и вычисляя соответствующее λ , легко на основании формулы (18) определить число колебаний вала с утолщениями.

Та же формула (18) дает возможность определить сразу, в каких сечениях вала утолщения замедляют колебания и в каких учащают их.

Пока x меняется в пределах от $l/4$ до $3l/4$, мы имеем

$$\left| \sin \frac{\pi x}{l} \right| > \left| \cos \frac{\pi x}{l} \right|;$$

под знаком интеграла в формуле (18) будет все время величина положительная, и, следовательно, получим

$$N_1 > n_1.$$

Для x , изменяющегося в пределах от 0 до $l/4$ и от $3l/4$ до l , получим

$$N_1 < n_1.$$

Отсюда вывод такой: всякое утолщение вала, расположенное от середины на расстоянии, меньшем $l/4$, учащает колебания, а на расстоянии, большем $l/4$, замедляет колебания, соответствующие основному тону.

Подобным же образом можно было бы исследовать и колебания высших порядков, но мы на них останавливаться не будем, а перейдем к случаям, более интересным с точки зрения практических приложений.

§ 5. Рассмотрение случая, когда моменты инерции шкивов велики по сравнению с моментом инерции вала

В этом случае будем вести исследования в таком же порядке, как и прежде, т. е. вместо заданной системы возьмем систему более простую, для которой решение вопроса о колебаниях не представляет затруднений, и потом вычислим соответствующие поправки.

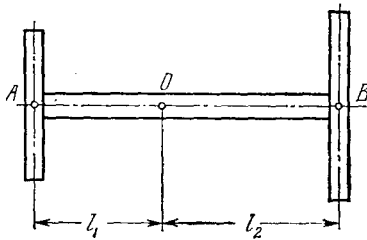


Рис. 7.

Когда момент инерции вала мал, то лучше всего исследование начать со случая двух шкивов, соединенных невесомым валом.

Если взять узловую точку O (рис. 7) за начало координат, то для угла поворота какого-либо поперечного сечения вала, находящегося на расстоянии x от начала координат, будем иметь

$$\varphi = Ax \cos pt = \Phi x,$$

где Φ — координата, определяющая положение системы. Живая сила системы будет

$$K = (\Phi')^2 \frac{\theta_1 l_1^2 + \theta_2 l_2^2}{2} = \frac{1}{2} a (\Phi')^2 \quad (1)$$

Здесь l_1 и l_2 обозначают расстояния узловой точки от концов вала, θ_1 и θ_2 сохраняют прежние значения,

$$a = \theta_1 l_1^2 + \theta_2 l_2^2.$$

Для определения потенциальной энергии системы заметим, что полный угол закручивания будет

$$\Delta\varphi = Al \cos pt$$

и, следовательно,

$$V = \frac{A^2 l^2 \cos^2 pt GJ_p}{2l} = \frac{1}{2} c \Phi^2, \quad (2)$$

где

$$c = GJ_p l.$$

Из (1) и (2) сейчас же получаем соответствующее уравнение движения

$$\Phi''a + \Phi c = 0,$$

откуда

$$\Phi = A \cos(pt + \alpha)$$

и

$$p = \sqrt{\frac{GJ_p l}{\theta_1 l_1^2 + \theta_2 l_2^2}}.$$

Подставляя вместо l_1 и l_2 их значения (5) § 2, найдем

$$p = \sqrt{\frac{GJ_p (\theta_1 + \theta_2)}{l \theta_1 \theta_2}} \quad \text{и} \quad n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{GJ_p (\theta_1 + \theta_2)}{l \theta_1 \theta_2}}, \quad (3)$$

что совершенно согласуется с результатами, полученными в § 1.

Посмотрим, какое влияние на период колебания оказывает масса самого вала. Нужно заметить, что некоторые авторы ¹⁾, желая принять во внимание влияние массы вала, поступают таким образом: они делят момент инерции вала пополам и части эти прибавляют к моментам инерции шкивов. Сосредоточивая массу всего вала на концах, эти авторы, очевидно, переоценивают влияние вала и получают в результате период колебания более действительного.

Мы для определения периода колебаний воспользуемся основной формулой (4) § 3, причем для упрощения пренебрежем поправками, соответствующими второй степени изменений первоначальной системы.

Если мы примем в расчет массу вала, то потенциальная энергия системы от этого не изменится, следовательно, $\delta c = 0$.

Для определения δa нужно определить предварительно приращение живой силы. Называя по-прежнему через θ_0 момент инерции отрезка вала, длиной равного единице, получим

$$\delta K = \frac{1}{2} \int_{-l_1}^{+l_2} \theta_0 (\varphi')^2 dx = \frac{1}{2} (\Phi')^2 \theta_0 \frac{l_2^3 + l_1^3}{3},$$

$$\text{откуда} \quad \delta a = \frac{l_1^3 + l_2^3}{3} \theta_0.$$

Число колебаний системы определится по формуле

$$N^2 = n^2 \left(\frac{1}{1 + \frac{\delta a}{a}} \right).$$

¹⁾ См. стр. 144 книги Н. Lorenz, упомянутой в сноске ¹⁾ на стр. 13, а также стр. 212 статьи G. W. Melville, указанной в сноске ³⁾ на стр. 13.

Подставляя вместо a и δa их значения и принимая во внимание, что $l\theta_0$ мало по сравнению с θ_1 и θ_2 , получим

$$N^2 = n^2 \left[1 - \frac{(l_1^2 + l_2^2) \theta_0}{3(\theta_1 l_1^2 + \theta_2 l_2^2)} \right]. \quad (4)$$

Если взять тот частный случай, когда $\theta_1 = \theta_2$, то

$$l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$$

и

$$N^2 = n^2 \left(1 - \frac{l\theta_0/6}{\theta_1} \right). \quad (5)$$

В этом частном случае n^2 определится из формулы

$$n^2 = \frac{30^2}{\pi^2} GJ_p \frac{2}{l\theta_1}. \quad (6)$$

Из формул (5) и (6) следует, что в случае шкивов с равными моментами инерции для вычисления числа колебаний нужно к моментам инерции шкивов прибавить по одной шестой от момента инерции вала и дальше вести расчет по тем же формулам, как и для невесомого вала.

Посмотрим, как нужно видоизменить это правило на случай шкивов с неравными моментами инерции. Подставим в формулу (4) вместо l_1 , l_2 и n их выражения через θ_1 и θ_2 . Тогда получим

$$N^2 = \frac{30^2}{\pi^2} \cdot \frac{GJ_p}{l} \cdot \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \theta_2} \left[1 - \frac{l\theta_0 (\theta_1^2 - \theta_1 \theta_2 + \theta_2^2)}{3(\theta_1 + \theta_2) \theta_1 \theta_2} \right].$$

Мы видим, что N^2 отличается от n^2 (см. формулу (3)) только тем, что вместо множителя

$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \theta_2}$$

входит множитель

$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \theta_2} \left[1 - \frac{l\theta_0 (\theta_1^2 - \theta_1 \theta_2 + \theta_2^2)}{3(\theta_1 + \theta_2) \theta_1 \theta_2} \right].$$

Пока $l\theta_0$ мало по сравнению с θ_1 и θ_2 , мы будем с достаточной точностью иметь

$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \theta_2} \left[1 - \frac{l\theta_0 (\theta_1^2 - \theta_1 \theta_2 + \theta_2^2)}{3(\theta_1 + \theta_2) \theta_1 \theta_2} \right] = \frac{\left(\theta_1 + \frac{l\theta_0}{3} \frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \right) + \left(\theta_2 + \frac{l\theta_0}{3} \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2} \right)}{\left(\theta_1 + \frac{l\theta_0}{3} \frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \right) \left(\theta_2 + \frac{l\theta_0}{3} \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2} \right)},$$

а если так, то, значит, N^2 отличается от n^2 тем, что вместо θ_1 и θ_2

поставлены соответственно

$$\theta_1 + \frac{l\theta_0}{3} \cdot \frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \quad \text{и} \quad \theta_2 + \frac{l\theta_0}{3} \cdot \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2}. \quad (7)$$

Отсюда мы можем вывести следующее правило для вычисления числа колебаний в случае неравных шкивов: *одну треть момента инерции вала делим в отношении, обратном θ_1 и θ_2 ; полученные величины прибавляем к моментам инерции шкивов и дальнейшие вычисления ведем по формулам, выведенным для случая невесомого вала.*

В виде *численного примера* разберем случай, приведенный у Г. Лоренца ¹⁾.

Паровая трехцилиндровая машина мощностью 3000 л. с. делает обычно 75 оборотов в минуту.

Полная длина вала

$$l = 50 \text{ м} = 5000 \text{ см.}$$

Полярный момент инерции поперечного сечения вала диаметром $d = 35 \text{ см}$ будет

$$J_p = 147\,324 \text{ см}^4.$$

Модуль упругости при сдвиге взят для стали

$$G = 880\,000 \text{ кг/см}^2.$$

Относительно моментов инерции масс, сосредоточенных по концам вала, имеются следующие данные.

Масса кривошипов 4500 кг с радиусом инерции относительно оси вала

$$r = 0,40 \text{ м.}$$

К этому нужно прибавить часть массы движущихся взад и вперед частей машины. Эту часть на основании своих расчетов Г. Лоренц оценивает в 7750 кг с радиусом инерции относительно оси вала $r_1 = 0,60 \text{ м}$.

Вес гребного винта принят равным 6480 кг.

Соответствующий ему радиус инерции $r_2 = 1 \text{ м}$.

Для удобства вычислений все массы приведены к радиусу инерции $r_1 = 0,60 \text{ м}$, соответствующему радиусу кривошипа.

Тогда момент инерции масс, соответствующих переднему концу вала, будет

$$\theta_1 = 4500 \cdot (0,40)^2 + 7750 \cdot (0,60)^2 = (2000 + 7750) \cdot 3600 \text{ кгсм}^2.$$

Подобным же образом для гребного винта будем иметь

$$\theta_2 = 6480 \cdot (1,0)^2 = 18\,000 \cdot 3600 \text{ кгсм}^2$$

¹⁾ См. стр. 144 его работы, указанной в сноске ¹⁾ на стр. 13.

Момент инерции самого вала относительно его оси будет

$$I_{\theta_0} = 1667 \cdot 3600 \text{ кгсм}^2.$$

Пользуясь приведенными данными, мы для сравнения подсчитаем число собственных колебаний в трех предположениях:

1) совершенно пренебрежем массой вала;

2) сделаем вычисления так, как рекомендует Г. Лоренц, т. е. разделим момент инерции вала пополам и полученные части прибавим к моменту инерции гребного винта, с одной стороны, и движущихся частей паровой машины — с другой;

3) решим ту же задачу, распределив момент инерции вала так, как нами было выведено выше.

Чтобы сравнить, насколько близки к истине полученные по этим трем способам результаты, мы в дальнейшем точно определим число колебаний, соответствующих выбранному валу.

1) Пока масса вала не принимается в расчет, число колебаний определяется по формуле

$$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{GJ_p (\theta_1 + \theta_2)}{I_{\theta_1} \theta_2}}.$$

Подставляя значения входящих в формулу величин, получим

$$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{880\,000 \cdot 147\,324 \cdot 27\,750 \cdot 3600 \cdot 981}{5000 \cdot 9750 \cdot 18\,000 \cdot (3600)^2}} = 319,2 \text{ колебания в минуту.}$$

2) Если вести расчет по способу Г. Лоренца, то придется вместо вычисленных выше значений θ_1 и θ_2 взять

$$\theta_1' = \theta_1 + \frac{I_{\theta_0}}{2} = (9750 + 833) \cdot 3600 = 10\,583 \cdot 3600 \text{ кгсм}^2,$$

$$\theta_2' = \theta_2 + \frac{I_{\theta_0}}{2} = (18\,000 + 833) \cdot 3600 = 18\,833 \cdot 3600 \text{ кгсм}^2;$$

на основании этого Г. Лоренц определяет число колебаний

$$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{880\,000 \cdot 147\,324 \cdot 29\,417 \cdot 3600 \cdot 981}{5000 \cdot 10\,583 \cdot 18\,833 \cdot (3600)^2}} = 309,3 \text{ колебания в минуту.}$$

3) При распределении момента инерции вала по формулам (7) будем иметь

$$\theta_1'' = \left(9750 + \frac{833}{3} \cdot \frac{18\,000}{18\,000 + 9750} \right) 3600 \text{ кгсм}^2,$$

$$\theta_2'' = \left(18\,000 + \frac{833}{3} \cdot \frac{9750}{18\,000 + 9750} \right) 3600 \text{ кгсм}^2,$$

$$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{GJ_p (\theta_1'' + \theta_2'')}{I_{\theta_1}'' \theta_2''}} = 314,1 \text{ колебания в минуту.}$$

Как мы увидим ниже, более точное вычисление дает для числа колебаний в минуту значение $n=314,9$.

Из этого примера видно, что, распределяя момент инерции вала по формулам (7), получаем результаты с точностью, вполне достаточной для практических целей.

§ 6. Точное определение периода свободных колебаний вала, на концах которого имеются шкивы

В тех случаях, когда моменты инерции шкивов θ_1 и θ_2 суть величины одного порядка с моментом инерции вала $I\theta_0$, мы не можем пользоваться ни одной из приближенных формул, выведенных в §§ 4 и 5, и для решения вопроса о периодах свободных колебаний нужно исходить из уравнения, выведенного в § 4 для цилиндрического вала:

$$G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \delta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Мы займемся случаем основного тона и для удобства поместим начало координат в узловой точке. Частное решение уравнения (1) возьмем в форме

$$\varphi = A \sin pt \sin \alpha x. \quad (2)$$

Из того условия, что значение φ , определяемое формулой (2), должно удовлетворять уравнению (1), найдем зависимость, которая должна существовать между α и p :

$$G\alpha^2 = \delta p^2. \quad (3)$$

Теперь постараемся для α найти такое значение, чтобы удовлетворить условиям на концах вала. Прилагая начало Даламбера, мы найдем, что к концам вала приложены моменты

$$M_1 = -\theta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad M_2 = -\theta_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2},$$

обусловленные силами инерции вращающихся шкивов.

Как мы видели в § 4, момент внутренних сил для какого-либо поперечного сечения вала может быть представлен формулой

$$M = GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (4)$$

Применяя формулу (3) к концам вала, будем иметь

$$\begin{aligned} -\theta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} &= GJ_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=l_1}, \\ -\theta_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} &= -GJ_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=l_2}. \end{aligned}$$

Здесь через l_1 и l_2 , как и раньше, мы обозначаем расстояния от узловой точки до концов вала.

Подставляя вместо φ_1 и φ_2 их значения, получим два следующих уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 p^2 \sin \alpha l_1 &= \alpha \cos \alpha l_1 G J_p, \\ \theta_2 p^2 \sin \alpha l_2 &= \alpha \cos \alpha l_2 G J_p. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Вместо p^2 можно в уравнения (5) подставить его значение из (3), тогда

$$\left. \begin{aligned} \alpha \operatorname{tg} \alpha l_1 &= \frac{\delta J_p}{\theta_1} = \frac{\theta_0}{\theta_1}, \\ \alpha \operatorname{tg} \alpha l_2 &= \frac{\delta J_p}{\theta_2} = \frac{\theta_0}{\theta_2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Если к этим уравнениям присоединим еще условие

$$l_1 + l_2 = l, \quad (7)$$

то для определения трех неизвестных l_1 , l_2 , α мы будем иметь достаточное число уравнений. Решать эти уравнения придется последовательными приближениями. Задаемся сначала какой-либо величиной l_1 и по ней из первого уравнения системы (6) определяем соответствующее значение α . Найденное α подставляем во второе уравнение (6) и определяем отсюда l_2 . Если полученное значение l_2 не удовлетворяет уравнению (7), то расчет нужно повторить, положив

$$l_1 = l - l_2.$$

Вычисление придется повторять до тех пор, пока l_1 и l_2 не будут с достаточной точностью удовлетворять уравнению (7). Когда моменты инерции шкивов велики по сравнению с моментом инерции вала, то подобрать для l_1 и l_2 достаточно точные значения можно довольно скоро. В этом случае начинаем с того, что полагаем

$$l_1 = l \frac{\theta_2 + \frac{l\theta_0}{3} \cdot \frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2}}{\theta_1 + \theta_2 + \frac{l\theta_0}{3}}. \quad (8)$$

Обыкновенно уже вторая подстановка дает для α значение, достаточно точное для практических целей. Применим вышесказанное к численному примеру предыдущего параграфа:

$$\begin{aligned} \alpha \operatorname{tg} \alpha l_1 &= \frac{\theta_0}{\theta_1} = \frac{1667}{5000 \cdot 9750}, \\ \alpha \operatorname{tg} \alpha l_2 &= \frac{\theta_0}{\theta_2} = \frac{1667}{5000 \cdot 18\,000}. \end{aligned}$$

Положим по формуле (8) $l_1 = 5000 \frac{18\,000 + 195}{28\,306} = 3214$ см. Подставляя l_1 в первое уравнение, найдем

$$\lg \alpha = 4,00453.$$

Соответствующее число колебаний будет

$$n = 314,1 \text{ колебания в минуту.}$$

После ряда последовательных подстановок получим

$$\lg \alpha = 4,00560.$$

Этому значению α соответствует

$$n = 314,9 \text{ колебания в минуту.}$$

Зная α , можно вычислить и напряжения, которые имеют место в вале во время колебаний. Для наибольших касательных напряжений в любом поперечном сечении вала будем иметь

$$\tau_{\max} = \frac{Gd}{2} \cdot \frac{d\varphi}{dx}$$

или, подставляя вместо $\frac{d\varphi}{dx}$ его значение, найдем

$$\tau_{\max} = \frac{Gd}{2} A\alpha \sin pt \cos \alpha x.$$

Величину A придется определить из наблюдений.

§ 7. Рассмотрение случая вала с тремя шкивами

Исследование вопроса о колебаниях вала нередко осложняется тем, что кроме сосредоточенных масс по концам имеется еще шкив в одном из промежуточных сечений вала. Такое расположение имеется, например, в случае паровой машины, приводящей в движение якорь динамомашин. На одном конце помещается якорь, на другом кривошип паровой машины, а в одном из промежуточных сечений располагают маховое колесо, которому для обеспечения равномерности хода машины нередко придают довольно значительные размеры. Мы в дальнейшем займемся только тем случаем, когда момент инерции вала мал и им можно пренебречь без большой погрешности. Тогда задача сведется к исследованию колебаний системы трех шкивов, соединенных невесомым упругим валом однообразного кругового сечения.

Пусть AB (рис. 8) будет рассматриваемый вал. Назовем через l_1 и l_2 расстояние между срединными плоскостями шкивов. Через

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ назовем моменты инерции масс шкивов относительно оси вала. При определении момента инерции θ_1 , соответствующего кривошипу паровой машины, нужно кроме массы кривошипа принять во внимание влияние инерции шатуна и поршней. Влияние это

переменное и при расчетах для упрощения полагают, что половина массы шатуна и поршней сосредоточена в пуговке мотыля.

На шкив A непосредственно передается от машины касательное усилие S , момент которого относительно оси вала будет Sr . Шкив B соответствует яко-

рю динамомашине, к нему приложены сопротивления, момент которых относительно оси вала назовем через Wr . К шкиву C никаких внешних сил не приложено.

Назовем через $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ переменные углы поворота, соответствующие шкивам A, C и B .

Живая сила системы напишется так:

$$K = \frac{1}{2} \theta_1 \left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \theta_2 \left(\frac{d\varphi_2}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \theta_3 \left(\frac{d\varphi_3}{dt} \right)^2. \quad (1)$$

Для модуля упругости и момента инерции поперечного сечения вала сохраним прежние обозначения G и J_p . Тогда момент внутренних сил упругости по сечению $I - I$ будет

$$M_1 = \frac{GJ_p}{l_1} (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (2)$$

Подобным же образом для сечения $II - II$ будем иметь

$$M_2 = \frac{GJ_p}{l_2} (\varphi_2 - \varphi_3). \quad (3)$$

На основании формул (2) и (3) мы можем написать следующее выражение для потенциальной энергии системы:

$$V = \frac{GJ_p}{l_1} \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} + \frac{GJ_p}{l_2} \frac{(\varphi_2 - \varphi_3)^2}{2}. \quad (4)$$

На основании (1) и (4) напишем систему уравнений движения

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \frac{GJ_p}{l_1} (\varphi_1 - \varphi_2) - Sr &= 0, \\ \theta_2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \frac{GJ_p}{l_2} (\varphi_2 - \varphi_3) - \frac{GJ_p}{l_1} (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0, \\ \theta_3 \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} - \frac{GJ_p}{l_2} (\varphi_2 - \varphi_3) + Wr &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

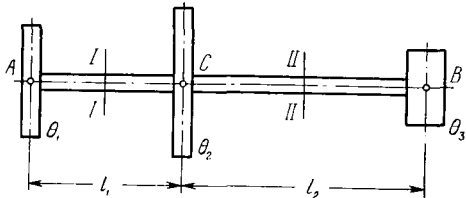


Рис. 8.

Так как нас интересует вопрос о колебании системы, то из уравнений (5) нужно найти $\varphi_1 - \varphi_2$ и $\varphi_2 - \varphi_3$ в функции от времени.

Деля первое уравнение системы (5) на θ_1 , а второе — на θ_2 и вычитая из первого второе, получим

$$\frac{d^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{dt^2} + \left(\frac{GJ_p}{l_1\theta_1} + \frac{GJ_p}{l_1\theta_2} \right) (\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{GJ_p}{l_2\theta_2} (\varphi_2 - \varphi_3) - \frac{Sr}{\theta_1} = 0. \quad (6)$$

Подобным же образом из второго и третьего уравнений системы (5) найдем

$$\frac{d^2(\varphi_2 - \varphi_3)}{dt^2} + \left(\frac{GJ_p}{l_2\theta_2} + \frac{GJ_p}{l_2\theta_3} \right) (\varphi_2 - \varphi_3) - \frac{GJ_p}{l_1\theta_1} (\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{Wr}{\theta_3} = 0. \quad (7)$$

Для сокращения письма введем такие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= z, & \varphi_2 - \varphi_3 &= y, \\ \frac{GJ_p}{l_1\theta_1} + \frac{GJ_p}{l_1\theta_2} &= \frac{GJ_p}{l_1} \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1\theta_2} \right) = a, \\ \frac{GJ_p}{l_2\theta_2} + \frac{GJ_p}{l_2\theta_3} &= \frac{GJ_p}{l_2} \left(\frac{\theta_2 + \theta_3}{\theta_2\theta_3} \right) = b, \\ \frac{GJ_p}{l_2\theta_2} = c, & \frac{GJ_p}{l_1\theta_1} = d, & \frac{Sr}{\theta_1} = Q, & \frac{Wr}{\theta_3} = R. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Тогда уравнения (6) и (7) перепишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2} + az - cy - Q &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + by - dx - R &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Дифференцируя первое из уравнений (9) дважды по t , получим

$$\frac{d^4z}{dt^4} + a \frac{d^2z}{dt^2} - c \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2Q}{dt^2} = 0. \quad (10)$$

Исключим из уравнения (10) y ; для этого из первого уравнения (9) определяем y и подставляем во второе; будем иметь

$$\frac{d^2y}{dt^2} = dz + R - \frac{b}{c} \left(\frac{d^2z}{dt^2} + az - Q \right).$$

На основании этого уравнение (10) можно представить в таком виде:

$$\frac{d^4z}{dt^4} + (a+b) \frac{d^2z}{dt^2} + (ab - cd) z = bQ + cR + \frac{d^2Q}{dt^2}. \quad (11)$$

Подобным же образом можно составить уравнение для определения y :

$$\frac{d^4y}{dt^4} + (a+b) \frac{d^2y}{dt^2} + (ab - cd) y = aR + Qd + \frac{d^2R}{dt^2}. \quad (12)$$

Уравнения (11) и (12) — линейные с постоянными коэффициентами, и решение их не представляет никаких затруднений. Так как они совершенно одинаковы по форме, то ограничимся рассмотрением только уравнения (11).

Соответствующее однородное уравнение без последнего члена будет

$$\frac{d^4 z}{dt^4} + (a+b) \frac{d^2 z}{dt^2} + (ab - cd) z = 0. \quad (13)$$

Полагая $z = e^{rt}$, для определения r будем иметь

$$r^4 + (a+b)r^2 + ab - cd = 0,$$

откуда

$$r = \pm \sqrt{-\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab + cd}}.$$

Нужно показать, что все четыре корня — мнимые.

В самом деле, выражение, стоящее под вторым корнем, — величина положительная и всегда меньше, чем $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, так как

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab + cd = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + cd$$

и

$$ab - cd > 0.$$

Последнее нетрудно доказать, если вместо a , b , c и d поставить их значения из (8):

$$ab - cd = \frac{G^2 J_p^2}{l_1 l_2 \theta_2^2} \left[\frac{(\theta_1 + \theta_2)(\theta_2 + \theta_3)}{\theta_1 \theta_3} - 1 \right];$$

выражение, заключенное в скобки, равно

$$\frac{\theta_2}{\theta_1 \theta_3} (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

и, следовательно, всегда больше нуля. Из всего этого следует, что всегда

$$-\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - cd} < 0.$$

Положим

$$\begin{aligned} -\frac{a+b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + cd} &= -k^2, \\ -\frac{a+b}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + cd} &= -q^2. \end{aligned}$$

Тогда корнями характеристического уравнения будем иметь

$$r = \pm ki, \quad r = \pm qi,$$

и общее решение уравнения без последнего члена может быть представлено в таком виде:

$$z = A \cos kt + B \sin kt + C \cos qt + D \sin qt.$$

Следовательно, свободные колебания, определяемые разностью углов

$$\varphi_1 - \varphi_2,$$

получаются от сложения двух простых гармонических колебаний с периодами

$$T_1 = \frac{2\pi}{k} \quad \text{и} \quad T_2 = \frac{2\pi}{q}$$

и фазами, определяемыми по начальным обстоятельствам, из уравнений

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{A}{B}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{C}{D}.$$

Точно таким же способом для колебаний, определяемых разностью

$$\varphi_2 - \varphi_3,$$

получим

$$y = A' \cos kt + B' \sin kt + C' \cos qt + D' \sin qt.$$

При наших обозначениях самые медленные колебания — основной тон — имеют период $2\pi/k$.

В этом случае на валу имеется только одна узловая точка, положение которой найдем таким образом (рис. 9).

Положим, что узловая точка находится в O на расстоянии x от шкива B . Если сечение вала O представить себе заделанным, то ясно, что период колебаний одного шкива B будет такой же, как и всей системы. Число колебаний шкива B нетрудно определить по формуле

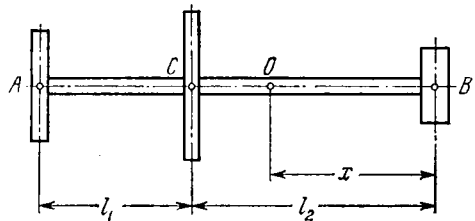


Рис. 9.

$$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{GJ_p}{x0_3}}.$$

Для определения x будем иметь уравнение

$$\sqrt{\frac{GJ_p}{x\theta_3}} = k = \sqrt{-\frac{a+b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab + cd}}$$

Если бы вычисленное по этой формуле расстояние x оказалось больше l_2 , то это указывало бы на неверность нашего предположения, что узловая точка лежит между шкивами B и C . В таком случае нужно поместить узловую точку между A и C и повторить расчет снова. Второму типу колебаний с периодом $T_2 = 2\pi/q$ соответствуют две узловые точки. Определение их положения ничем не отличается от вышеописанного.

До сих пор мы занимались уравнением (13) без последнего члена и рассмотрели свободные колебания системы. Посмотрим теперь, какое влияние на колебания могут оказывать периодически меняющиеся вращающий момент и момент сопротивлений. Перепишем уравнение (11) в таком виде:

$$z^{IV} + mz'' + \bar{n}z = bQ + cR + \frac{d^2Q}{dt^2}. \quad (14)$$

На основании того, что говорилось в § 1, мы можем правую часть уравнения (14) разложить в ряд Фурье:

$$bQ + cR + \frac{d^2Q}{dt^2} = A_0 + A_1 \cos \alpha t + A_2 \cos 2\alpha t + \dots \\ \dots + B_1 \sin \alpha t + B_2 \sin 2\alpha t + \dots$$

Здесь α — угловая скорость вращения паровой машины. Частное решение уравнения

$$z^{IV} + mz'' + \bar{n}z = A_0 + A_1 \cos \alpha t + A_2 \cos 2\alpha t + \dots + B_1 \sin \alpha t + \\ + B_2 \sin 2\alpha t + \dots \quad (15)$$

имеет форму

$$z = C_0 + C_1 \cos \alpha t + C_2 \cos 2\alpha t + \dots + D_1 \sin \alpha t + D_2 \sin 2\alpha t + \dots$$

Подставляя это значение z в уравнение (15), найдем для коэффициентов ряда следующие значения:

$$C_0 = \frac{A_0}{\bar{n}}, \\ C_1 = \frac{A_1}{\alpha^4 - m\alpha^2 + \bar{n}}, \quad D_1 = \frac{B_1}{\alpha^4 - m\alpha^2 + \bar{n}}, \\ C_2 = \frac{A_2}{(2\alpha)^4 - m(2\alpha)^2 + \bar{n}}, \quad D_2 = \frac{B_2}{(2\alpha)^4 - m(2\alpha)^2 + \bar{n}}, \\ \dots \dots \dots$$

На основании этого полный интеграл уравнения (15) будет

$$z = \varphi_1 - \varphi_2 = A \cos kt + B \sin kt + C \cos qt + D \sin qt + \frac{A_0}{n} + \\ + \frac{A_1}{\alpha^4 - m\alpha^2 + \bar{n}} \cos \alpha t + \frac{A_2}{(2\alpha)^4 - m(2\alpha)^2 + \bar{n}} \cos 2\alpha t + \dots \\ \dots + \frac{B_1}{\alpha^4 - m\alpha^2 + \bar{n}} \sin \alpha t + \frac{B_2}{(2\alpha)^4 - m(2\alpha)^2 + \bar{n}} \sin 2\alpha t + \dots$$

Первые слагаемые представляют, как мы видели, свободные колебания системы; при наличии различных сопротивлений они скоро затухают и с ними считаться не приходится.

Член A_0/\bar{n} дает среднее значение угла закручивания $\varphi_1 - \varphi_2$ и соответствует среднему значению

$$\Phi(t) = bQ + cR + \frac{d^2 Q}{dt^2}.$$

Остальные члены можно соединить попарно, и мы получим ряд вынужденных гармонических колебаний с периодами

$$2\pi/\alpha, 2\pi/2\alpha, 2\pi/3\alpha, \dots$$

Амплитуды этих колебаний легко найти, если известно значение коэффициентов

$$\frac{A_1}{\alpha^4 - m\alpha^2 + \bar{n}}, \quad \frac{A_2}{(2\alpha)^4 - m(2\alpha)^2 + \bar{n}}, \quad \dots$$

При некоторых значениях угловой скорости вращения машины амплитуды отдельных вынужденных колебаний приобретают особенно большое значение. Нетрудно видеть, что это будет в тех случаях, когда значение αi приближается к значению корня уравнения

$$(\alpha i)^4 - m(\alpha i)^2 + \bar{n} = 0, \quad (16)$$

тогда амплитуда вынужденных колебаний i -го порядка обращается в бесконечность.

Корни уравнения (16) равны, как мы видели выше, величинам k и q , пропорциональным числам свободных колебаний системы. Отсюда мы можем сделать такое заключение. Амплитуды вынужденных колебаний системы приобретают особенно большое значение, когда число собственных колебаний пропорционально числу оборотов машины.

Относительно назначения размеров вала нужно повторить то же, что было сказано в § 2. Предварительно намечаем диаметр вала по общепринятым формулам. По имеющимся размерам машины и вала вычисляем числа собственных колебаний системы

$$n_1 = \frac{30}{\pi} k \quad \text{и} \quad n_2 = \frac{30}{\pi} q.$$

Если окажется, что n_1 или n_2 кратны числу оборотов машины, то тогда диаметр вала должен быть изменен. Нужно заметить, что коэффициенты $A_6, A_7, \dots, B_6, B_7, \dots$ уравнения (15) обыкновенно очень малы, и потому с вынужденными колебаниями выше пятого порядка не придется считаться.

Численный пример¹⁾. Положим, что диаметр вала $d=20$ см,

$$l_1 = 1,30 \text{ м} = 130 \text{ см};$$

$$l_2 = 1,45 \text{ м} = 145 \text{ см};$$

$$\theta_1 = 1800 \cdot 60^2 \text{ кгсм}^2;$$

$$\theta_2 = 5000 \cdot (125)^2 \text{ кгсм}^2;$$

$$\theta_3 = 500 \cdot (30)^2 \text{ кгсм}^2;$$

$$k = -\frac{a+b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + cd} \approx 140.$$

Число свободных колебаний системы, соответствующее основному тону, равно

$$n_1 = \frac{30}{\pi} \cdot 140 \approx 1350 \text{ колебаний в минуту.}$$

Критические числа оборотов машины, соответствующие вынужденным колебаниям, будут

Порядок колебаний	Число оборотов в минуту	Порядок колебаний	Число оборотов в минуту
1	1350	4	$\frac{1350}{4} = 338$
2	$\frac{1350}{2} = 675$	5	$\frac{1350}{5} = 270$
3	$\frac{1350}{3} = 450$		

Нормальный ход машины 150 оборотов, следовательно, нельзя ожидать значительного возрастания амплитуды колебаний.

¹⁾ Числа, взятые в этом примере, приблизительно соответствуют паровой машине Гёрлицца, установленной на электрической станции С.-Петербургского политехнического института.

ОПИСАНИЕ ПРИБОРА А. Н. КРЫЛОВА ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ¹⁾

Известия С.-Петербургского политехнического института, 1905, том 3, вып. 3—4, стр. 397—406.

§ 1. Механическое интегрирование уравнений

Механическое интегрирование уравнений в приборе А. Н. Крылова распадается на ряд простых операций, выполняемых отдельными механизмами. Операции эти следующие.

1) По заданной функции $f(x)$ нужно автоматически получать функцию $\int_a^x f(x) dx$, что может быть выполнено любым интегралом.

2) Заданы $f_1(x)$ и $f_2(x)$, нужно автоматически находить их произведение $f_1(x) \cdot f_2(x)$ при непрерывном изменении x .

Для этой цели вводится особый прибор, названный у А. Н. Крылова множителем.

3) Третья операция заключается в том, чтобы между переменными величинами $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ поддерживать постоянную зависимость, определяемую таким уравнением:

$$z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} = 0. \quad (1)$$

Для этого служит особый прибор, уравниватель.

Раньше чем переходить к описанию общей теории прибора и схемы расположения механизмов, я вкратце познакомлю читателя с отдельными составными частями. Начну с описания интеграла Джемса Томсона ²⁾.

§ 2. Интеграл Томсона

Интеграл Джемса Томсона ²⁾ состоит из трех главных частей:

1) из диска, вращающегося на оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости;

¹⁾ Это описание взято из статьи Крылова А. Н. Sur un intégrateur des équations différentielles ordinaires [Об интеграторе обыкновенных дифференциальных уравнений], помещенной в Известиях Императорской Академии наук, 1904, 5 серия, том 20, январь, № 1, стр. 17—37. [См. Крылов А. Н. Собрание трудов. Том. 5, математика и механика. Изд. АН СССР, М.—Л., 1937, стр. 547—568.]

²⁾ [James Thomson]. Описание этого прибора приведено в сочинении: Lord Kelvin [W. T.], Tait P. G. Treatise on natural philosophy. Part I. Cambridge, University Press, 1896. Appendix B. Continuous calculating machines, pp. 479—508. См. Thomson's tide-predicting machine, pp. 488—492, оно имеется

2) из прямого кругового цилиндра, ось которого параллельна плоскости диска, и

3) из шара, помещаемого между цилиндром и диском. Эти части расположены таким образом, что при перемещении шара геометрическое место точек его касания с цилиндром представляет образующую цилиндра, в то время как точки касания с диском вычерчивают диаметр диска. Схема прибора представлена на рис. 1.

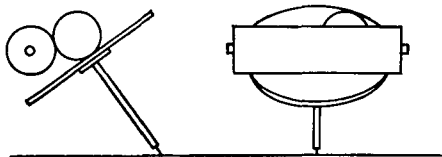


Рис. 1.

Представим себе, что вращение диска связано с перемещением плоскости, на которой вычерчена кривая $y = f(x)$, и положим, что эта кинематическая связь осуществлена таким образом, что всякому элементарному перемещению плоскости по направлению оси x соответствует равное ему перемещение точек диска, лежащих в расстоянии r от его центра. Если dx будет элементарное перемещение плоскости, то, очевидно, соответствующий угол поворота диска будет

$$d\omega = \frac{dx}{r}.$$

Положим теперь, что с помощью особой вилки мы во время перемещений плоскости устанавливаем шар таким образом, чтобы расстояние его центра до плоскости, проходящей через ось диска перпендикулярно оси цилиндра, оставалось все время равным

$$y = f(x).$$

Вращение шара передается трением цилиндру, и если движение совершается без скольжения, то очевидно, что элементарные перемещения точек цилиндра будут

$$y d\omega = \frac{y dx}{r}.$$

также в упомянутой в списке ¹⁾ статье А. Н. Крылова. См. также работы Джеймса Томсона и Вильяма Томсона: Thomson J. On an integrating machine having a new kinematic principle. Proceedings of the Royal Society of London, 1876, vol. 24, № 167, February 3, pp. 262—265. Thomson W. On an instrument for calculating $\left(\int \varphi(x)\psi(x)dx\right)$ the integral of the product of two given function. Там же, pp. 266—268. Mechanical integration of the linear differential equations of the second order with variable coefficients. Там же, pp. 269—271. Mechanical integration of the general linear differential equations of any order with variable coefficients. Там же, pp. 271—275. Harmonic analyzer. Там же, 1878, vol. 27, № 187, May 9, pp. 371—373. On a machine for the solution of simultaneous linear equations. Там же, 1878, vol. 28, № 191, December 5, pp. 111—113.

Называя через R радиус цилиндра и переходя к конечным перемещениям, будем иметь для угла поворота цилиндра

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{Rr} \int_a^x y dx.$$

Чтобы получить интегральную кривую, мы можем на основании цилиндра взять какую-либо точку на расстоянии l от оси цилиндра и перемещения ее связать с перемещениями Y карандаша. Тогда будем иметь

$$Y = l(\varphi - \varphi_0) = \frac{l}{Rr} \int_a^x y dx.$$

Если выбрать l так, чтобы

$$\frac{l}{Rr} = 1,$$

то карандаш будет чертить интегральную кривую в том же масштабе, в каком у нас представлена кривая

$$y = f(x).$$

§ 3. Множитель

Существенной частью этого прибора является коленчатый рычаг MON , вращающийся вокруг неподвижной точки O (рис. 2).

Оси Ox и Oy представляют собой систему прямоугольных координатных осей. На расстоянии $OK=1$ (единице длины от неподвижной точки O) закрепим линейку AB перпендикулярно оси x . По линейке свободно скользят салазки C со штифтом, который перемещается в прорезах OM коленчатого рычага. Салазки C перемещаются по линейке особым шаблоном так, что длина KC при непрерывном изменении x все время остается равной $f_1(x)$. При таких условиях коленчатый рычаг MON , поворачиваясь вокруг точки O , будет устанавливаться так, что

$$LMOX = LMOY = f_1(x).$$

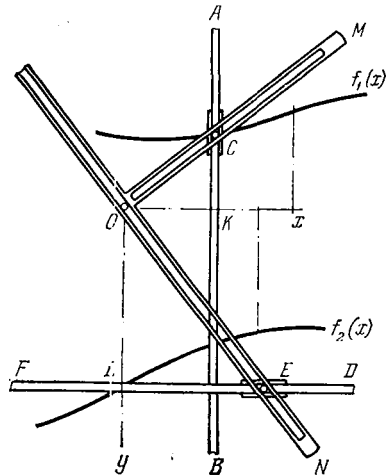


Рис. 2.

Положим теперь, что имеется подвижная линейка FD , параллельная оси x ; на ней имеются салазки E со штифтом, скользящим в прорезах ON коленчатого рычага. Расстояние OL линейки до оси x определяется все время особым шаблоном так, что при непрерывном изменении x OL все время остается равным $f_2(x)$.

Нетрудно видеть, что штифт E будет все время занимать положение, при котором

$$LE = LO \operatorname{tg} LOE = f_1(x)f_2(x).$$

§ 4. Уравнитель

Уравнитель (рис. 3) представляет собой видоизменение прибора лорда Кельвина для предсказания морских приливов и отливов¹⁾. Как видно из рисунка, этот механизм состоит из системы неподвижных блоков A_0, A_1, \dots, A_n , оси которых расположены по одной горизонтальной прямой, и системы блоков подвижных B_0, B_1, \dots, B_{n-1} , которые огибаются нерастяжимой нитью, как это указано на рисунке.

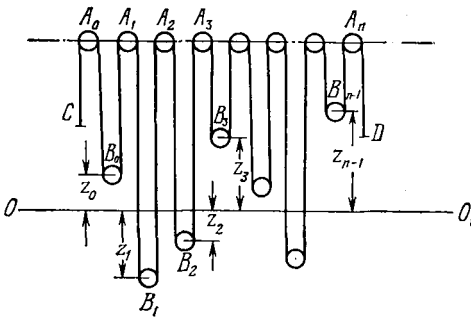


Рис. 3.

Конеч C нити закрепим и после этого установим блоки так, чтобы центры их расположились по нулевой линии OO_1 . После этого закрепляем и второй конец нити D . Если перемещения вверх от нулевой линии считать за положительные, а вниз за отрицательные, то нетрудно видеть, что при любом положении блоков B_1, B_2, B_3, \dots , определяемом ординатами z_1, z_2, \dots , первый блок B_0 занимает положение, при котором его ординаты z_0 удовлетворяют требуемому условию

$$z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1} = 0. \quad (1)$$

§ 5. Общая теория

Ознакомившись с отдельными приборами, перейдем к общей теории, на которой основывается механическое интегрирование уравнений, и начнем с рассмотрения линейных уравнений со свободным членом.

¹⁾ Kelvin [W. T.], Tait P. G. См. том I, стр. 44 работы, упомянутой в сноске²⁾ на стр. 55.

Имеется дифференциальное уравнение n -го порядка

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y + q = 0, \quad (2)$$

где p_1, p_2, \dots, p_n и q суть заданные функции от независимой переменной x .

Для определенности решения должны быть заданы начальные обстоятельства. Положим, что при $x = a$

$$\left. \begin{aligned} y &= b_0, \\ y' &= b_1, \\ y'' &= b_2, \\ &\dots \\ y^{(n-1)} &= b_{n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где b_0, b_1, \dots, b_{n-1} суть заданные постоянные величины. Начальное значение $y^{(n)}$ определится из уравнения (2), когда мы туда подставим вместо $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ их начальные значения $a, b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$.

Введем новые обозначения

$$y^{(n)} = z$$

и далее

$$\left. \begin{aligned} y^{(n-1)} &= \int_a^x z \, dx + b_{n-1} = z_1, \\ y^{(n-2)} &= \int_a^x z_1 \, dx + b_{n-2} = z_2, \\ y^{(n-3)} &= \int_a^x z_2 \, dx + b_{n-3} = z_3, \\ &\dots \\ y^{(n-k)} &= \int_a^x z_{k-1} \, dx + b_{n-k} = z_k, \\ y &= \int_a^x z_{n-1} \, dx + b_0 = z_n. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Уравнение (2) после этого примет форму

$$q + z + p_1 z_1 + p_2 z_2 + \dots + p_n z_n = 0. \quad (5)$$

Из рассмотрения уравнения (5) и системы (4) мы видим, что для непрерывного получения величин, им удовлетворяющих, необходимо выполнять следующие операции:

1) дано z_{k-1} , требуется найти z_k , что может быть выполнено интегралом;

2) дано p_k и z_k , требуется отыскать $p_k z_k$.

Это может быть выполнено множителем. Для этого штифт C должен быть соединен с цилиндром интеграфа, дающим z_k . Это соединение должно быть таково, чтобы ордината $СК$ была равна функции z_k . Положение подвижной линейки определяется шаблоном, представляющим функцию $p_k(x)$.

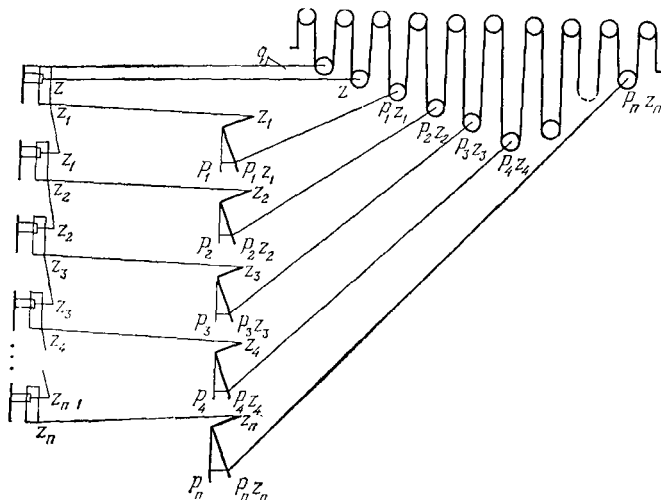


Рис. 4.

При этих условиях, как мы видели в § 3, штифт E (рис. 2) устанавливается так, что $LE = p_k(x)z_k$.

3) Третья операция выполняется уравнивателем и заключается в том, чтобы между $q, z, p_1z_1, p_2z_2, \dots, p_nz_n$ сохранялась зависимость

$$q + z + p_1z_1 + \dots + p_nz_n = 0.$$

Положение первого блока уравнивателя определяется шаблоном, представляющим $q(x)$; второй блок соединен с вилкой первого интеграфа и соответствует члену z уравнения (5); третий блок связан со штифтом первого множителя, дающим p_1z_1 , и т.д.

Схема всего расположения представлена на рис. 4.

Интеграфы числом n схематически изображены чертой, соответствующей диску, и прямоугольником, представляющим цилиндр. Линии, соединяющие на схеме какие-либо два элемента, указывают на то, что перемещения соответствующих элементов равны.

Положение всех дисков в начальный момент должно соответствовать $x=a$. Шаблоны q, p_1, p_2, \dots, p_n , перемещения которых связаны с перемещениями дисков, также должны быть установлены в своем начальном положении, соответствующем $x=a$. Вилки

интеграфов должны быть установлены так, чтобы

$$z_n = b_0, z_{n-1} = b_1, \dots, z_1 = b_{n-1}.$$

Связанные с вилками интеграфов штифты C множителей устанавливаются так, чтобы

$$(KC)_k = z_k.$$

Подвижные блоки уравнителя, связанные с множителями, займут положения, определяемые ординатами

$$q_{(a)}, p_{1(a)}b_{n-1}, p_{2(a)}b_{n-2}, \dots, p_{n(a)}b_0. \quad (6)$$

Ясно, что оставшийся подвижной блок непременно должен занять положение $z = b_n$ и этим определится положение вилки первого интеграфа.

Если теперь диски интеграфов и связанные с ними шаблоны привести в движение часовым механизмом, то положение первого подвижного блока, направляемого шаблоном q^x , будет определяться ординатой, соответствующей члену q уравнения (5).

Перемещения второго подвижного блока z передаются вилке первого интеграфа. Цилиндр первого интеграфа будет давать

$$z_1 = \int_a^x z dx + b_{n-1}, \text{ которое поступает на первый множитель. Здесь } z_1$$

помножается на p_1 и произведение $p_1 z_1$ передается третьему блоку уравнителя. С цилиндра первого интеграфа z_1 поступает на вилку второго, тогда цилиндр второго интеграфа будет давать z_2 и т. д. до цилиндра n -го интеграфа, который нам даст $z_n = y$, т. е. искомую функцию.

Из всего сказанного видно, что интегрирование линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и с последним членом может быть выполнено системой связанных между собой механизмов.

Число интеграфов, очевидно, должно равняться порядку уравнения (2), число множителей соответствует числу коэффициентов, отличных от единицы. Уравнитель имеет, очевидно, столько подвижных блоков, сколько членов в дифференциальном уравнении (5).

Покажем теперь, что механическое интегрирование с помощью прибора А. Н. Крылова возможно и в более общем случае. Рассмотрим уравнения, в которых неизвестная функция и ее производные входят алгебраически. Сохраняя обозначения (4), мы такое уравнение можем привести к виду

$$\sum p_i(x) z_n^a z_{n-1}^b \dots z^h = 0; \quad (7)$$

здесь $p_i(x)$ — заданная функция, x, a, b, c, \dots, h — целые положительные числа или нули.

Общая схема прибора в случае подобных уравнений остается прежней, и придется только вставить ряд добавочных множителей для составления соответствующих членов уравнения (5).

Положим, что имеется, например, такой член:

$$p(x) z_1^2 z_3;$$

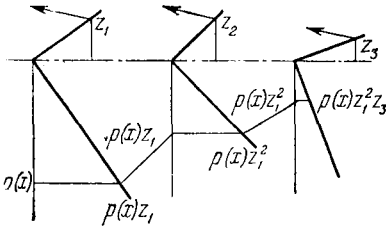
для его составления необходимо иметь три множителя, расположенных, как показано на рис. 5.

Первый множитель дает нам произведение

$$p(x) z_1.$$

Второй множитель, получая от первого $p(x) z_1$ и от соответствующего цилиндра z_1 , дает в результате величину

$$p(x) z_1^2;$$



это поступает на третий множитель, связанный с цилиндром z_3 , и в результате последнего умножения получим искомым член уравнения (5)

$$p(x) z_1^2 z_3,$$

Рис. 5.

который уже передается соответствующему блоку уравнителя.

В вышеупомянутой статье А. Н. Крылова интересующиеся могут найти указания относительно интегрирования уравнений вида

$$p_i(x) \varphi_{0i}(z) \varphi_{1i}(z_1) \varphi_{2i}(z_2) \dots \varphi_{ni}(z_n) = 0, \quad (8)$$

где $p_i, \varphi_{0i}, \dots, \varphi_{ni}$ суть функции одной переменной, поставленной в скобках. Там же помещены указания на видоизменения прибора, с помощью которых возможно: 1) механически разлагать любую функцию в тригонометрический ряд и 2) решать численные уравнения вида

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Относительно точности прибора А. Н. Крылов, на основании подробного изучения отдельных входящих механизмов, полагает, что ошибки при интегрировании несложных, например линейных, уравнений не будут превосходить 1/2%.

ФОРМУЛЫ СЛОЖНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТЕОРИЙ ПРОЧНОСТИ ¹⁾

Известия С.-Петербургского политехнического института, 1905, том 3, вып. 3—4
стр. 415—455.

§ 1. Введение

Вопрос о прочности материалов в различных случаях напряженного состояния является вопросом первостепенной важности. От правильного его разрешения зависят не только величины допускаемых напряжений при различных видах напряженного состояния, но также и самый вид формул сложного сопротивления, по которым производится расчет размеров инженерных сооружений и машинных частей.

Как о самостоятельных видах прочности материалов, говорят о прочности при растяжении, при сжатии и иногда о прочности при сдвиге. Осуществить линейное напряженное состояние наиболее просто, и потому вопрос о пределе упругости или о временном сопротивлении при растяжении и сжатии является вполне выясненным для большинства материалов. Случай чистого сдвига, т. е. такого напряженного состояния, при котором одно из главных напряжений равно нулю, а два других равны по величине и противоположны по знаку, нетрудно осуществить кручением стержней кругового поперечного сечения. Для железа, стали, меди и др. металлов имеется немало опытных данных и для этого случая напряженного состояния. Если же мы пойдем далее и возьмем более общие случаи напряженного состояния, то увидим, что относительно них имеется весьма мало опытных исследований, и потому все наши суждения о прочности в случаях сложного сопротивления строятся до настоящего времени на произвольных гипотезах, которые нередко стоят в противоречии с имеющимися данными.

В настоящей статье мы приведем как старые теории, так и новые опытные исследования о прочности материалов. В заключение разберем несколько случаев сложного напряженного состояния и покажем, как видоизменяются формулы сложного сопротивления в зависимости от положенной в основание теории о прочности.

¹⁾ Доклад, читанный в лаборантском кружке С.-Петербургского политехнического института.

§ 2. Старые теории о прочности

В случае испытания различных материалов на растяжение и на сжатие различают обыкновенно два предельных напряженных состояния. Первое соответствует пределу упругости рассматриваемого материала, второе — моменту разрушения. Оба эти предельные состояния определяются величиной соответствующих напряжений и играют существенную роль при назначении допускаемых напряжений. Задача различных теорий о прочности состоит в том, чтобы данные, имеющиеся для растяжения и сжатия, перенести и на всякий другой вид напряженного состояния. Здесь приходится отметить три различных взгляда на прочность.

Первая гипотеза — теория максимального нормального напряжения. Прочность вполне определяется величиной напряжений. При любом напряженном состоянии прочность считается обеспеченной, если величина напряжений нигде не превосходит пределов, установленных для линейного напряженного состояния, т. е. для простого растяжения или для простого сжатия.

Напряженное состояние в любой точке может быть вполне определено тремя главными напряжениями

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z.$$

Положим, что

$$\sigma_x < \sigma_y < \sigma_z.$$

Если через x_1 и x_2 назовем напряжения, соответствующие пределу упругости при простом растяжении и сжатии, то на основании первой гипотезы предел упругости для любого напряженного состояния будет иметь место, если

$$\sigma_x = -x_2, \quad \sigma_z \leq x_1$$

или

$$\sigma_x \geq -x_2, \quad \sigma_z = x_1.$$

Эта теория — самая старая; она высказывалась еще Галилео Галилеем и Готфридом Вильгельмом Лейбницем ¹⁾. В позднейшее время теория эта разделялась такими знаменитыми работниками в

¹⁾ См. исторический обзор Сен-Венана в книге: Navier [C. L. M. H] Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. Troisième édition avec des notes et des appendices par M. Barré de Saint-Venant. Première partie. Contenant les leçons sur la résistance des matériaux et sur l'établissement des constructions en terre, en maçonnerie et en charpente. Première section. De la résistance des corps solides. Tome I, fascicule I. Paris, Dunod, 1864, pp. CXCIX—CCV, разделы XLIV—XLV.

области теории упругости, как Г. Ламэ¹⁾ и А. Клебш²⁾. В Англии, благодаря М. Рэнкину, теория эта нашла большое распространение; и до сих пор английские и американские инженеры почти исключительно ею пользуются для случаев сложного сопротивления. Опытные данные, которыми мы располагаем в настоящее время, все без исключения противоречат этой теории. Относительно более новых работ я буду подробнее говорить ниже, а здесь приведу старые исследования И. Баушингера³⁾.

И. Баушингер произвел ряд опытов с образцами стали при различном содержании углерода. Для каждого сорта были произведены опыты на разрыв, на сжатие, изгиб, сдвиг и кручение. При чем каждый раз определялся предел упругости и соответствующие ему напряжения. Если бы первая гипотеза была верна, то в случае кручения наибольшие сдвигающие напряжения T_1 , соответствующие пределу упругости, очевидно, должны были быть равны пределу упругости при простом растяжении, так как $\tau_{\max} = \sigma_z = -\sigma_x$.

В действительности же И. Баушингер нашел, что $\tau_{\max} \approx 0,5\chi_1$, т. е. наибольшее сдвигающее напряжение при кручении, соответствующее пределу упругости, приблизительно равняется половине предела упругости при простом растяжении. Это заключение вполне подтвердилось новыми опытами Дж. Геста⁴⁾ над образцами железа, стали и меди.

Вторая гипотеза — теория максимальной линейной относительной деформации. Вполне естественное допущение, что прочность определяется величиной наибольшего напряжения, как мы видели, опытами не подтверждается, и потому очень давно уже возникла вторая гипотеза, которая полагает, что прочность может быть определена величиной наибольших растяжений. Впервые эта гипотеза высказана была Э. Мариоттом⁵⁾ в 1682 году так: «Элементы

¹⁾ Lamé [G a b r i e l]. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Deuxième éditions. Paris, Gauthier — Villars, 1866, 335 p. См. pp. 27—38.

²⁾ C l e b s c h [A.]. Théorie de l'élasticité des corps solides. Traduite par Barré de Saint-Venant et Flamant. Avec des notes étendues de M. De Saint-Venant. Paris, Dunod, 1883, 900 p. См. § 37, p. 247.

³⁾ B a u s c h i n g e r J. Versuche über die Festigkeit des Bessemer — Stahles von verschiedenem Kohlenstoffgehalte. Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der Königlichlichen technischen Hochschule, München, Th. Ackermann, 1874, Heft 3, 16 S.

⁴⁾ G u e s t J. J. On the strength of ductile materials under combined stress. Philosophical Magazine and Journal of Science, 1900, Series 5, vol. 50, № 302, July, pp. 69—132.

⁵⁾ [По-видимому, здесь автор следует точке зрения Сен-Венана (см. его Histoire abrégé, упомянутой на стр. 64 настоящего издания), который пишет, что «с 1682 года Мариотт основал иной принцип, ибо он заметил, что растянутые части разрываются только потому, что их удлинения достигают некоторой величины». См. мемуары: M a r i o t t e Ed. Observation sur la resistance de tuy aux de contuite d'eau; Sur la dépense nécessaix dieaux pour l'entretien des jets et sur la resistance des

объема не разрушаются только тогда, когда удлинения их не превышают вполне определенные значения». Условия прочности с точки зрения этой гипотезы будут таковы:

$$\begin{aligned}\sigma_z - k(\sigma_y + \sigma_x) &\leq x_1, \\ \sigma_x - k(\sigma_z + \sigma_y) &\geq -x_2.\end{aligned}$$

Как мы видим, условия прочности зависят от коэффициента поперечного сжатия k .

Нетрудно показать, что при $k=1/4$ в случае чистого сдвига напряжения $\tau_{\max} \leq 0,8x_1$, т. е. наибольшее касательное напряжение, соответствующее пределу упругости, равно 0,80 от того же предела при простом растяжении. Это, как мы видели, не согласуется ни с опытами И. Баушингера, ни Дж. Геста.

Исходя из этой гипотезы, А. Мишон ¹⁾, а затем и Ж. Понселе старались объяснить разрушение тел при сжатии не чем иным, как поперечным расширением. Полагая для большинства материалов $k=1/4$, они находили, что сопротивление тел простому сжатию должно в четыре раза превосходить сопротивление их растяжению.

Вторая гипотеза положена в основание известных французских курсов сопротивления материалов 1-й половины 19 века Жана Понселе ²⁾ и Луи Навье ³⁾. Наиболее полное развитие эта теория

tuyaux de conduite d'eau. Histoire de l'Académie royale des sciences. Depuis 1666 jus qu'à 1698. 1733, tome I. Этот вопрос обсуждается в книге: Mariotte E. Traité du mouvement des eaux et des autres corps fluides. Divisé en V parties. Par feu M Mariotte. Mis en lumière par les soins de M. de La Hire. Paris, E. Michallet, 1686, X+408 p. См. также следующее издание этой книги: Nouvelle édition corrigée. Paris, J. Jombert, 1700, X+390 p. Эд. Мариотт на стр. 352 отмечает: «Я предполагаю, во-первых, что дерево, железо и другие твердые тела имеют волокна и волокнистые частицы, вплетенные одна в другую, которые могут разделяться посредством некоторой силы, во-вторых, что эти частицы могут вытягиваться более или менее различными грузами и что, наконец, имеется такое удлинение, которое они могут выдержать без разрыва». См. далее Mariotte E. Oeuvres de Mr. Mariotte, de l'Académie Royale des Sciences. Divisées en deux tomes. Comprenant tous les Traitez de cet Auteur, tant ceux qui avoient déjà paru séparément, que ceux qui n'avoient pas encore été publiez. Tome premiere. A Leide, Chez Pierre Vander Aa, 1717, 701 p.+35 p. См. pp. 460—461.]

¹⁾ Michon [A.]. Stabilité des constructions. Introduction sur la resistance des materiause suivil d'applications ause preecees drodes et aux fermes de charpente des bâtimes. Metz. Lithographic de l'ecole d'application de l'Ardillerie et du Génie de Metz. Janvier 1848, 291+5 pp.

²⁾ Poncelet J. V. Mécanique industriel. Exposant les principes de statique et de dynamique, les organes mécaniques et les moteurs. Bruxelles. Meline, Canst et Co., 1839, 597 p. См. pp. 396—417.

³⁾ Navier [Claud Louis Marie Henri]. Résumé des leçons données à l'école royale des ponts et chaussées. Sur l'application de la mécanique a l'établissement des constructions et des machines. Partie I. Contenant les leçons sur la résistance des matériaux, et sur l'établissement des constructions en terre, en maçonnerie et en charpente. Paris, Chez F. Didot, 1826, 428 p. Navier [C. L. M. H.]. Résumé des leçons données a l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique a l'établissement des constructions et des machines. Partie I. Deuxième édition. Paris, Chez Carilian — Goeury, 1833, 448 p. См. p. 10.

получила у Барре Сен-Венана, который ее распространил и на случай неизотропных тел ¹⁾). В Германии эта теория введена и нашла всеобщее распространение со времени Ф. Грасгофа ²⁾).

Насколько вторая гипотеза применима к моменту разрушения тел, трудно сказать, так как мы ничего не знаем о распределении напряжений за пределами упругости. Опыты А. Фёппля над разрушением цементных кубиков и В. Фойхта с образцами каменной соли, во всяком случае, стоят в противоречии с этой теорией. Что касается предельного состояния, соответствующего пределу упругости, то теория эта опровергается как вышеупомянутыми опытами И. Баушингера и Дж. Геста, так и известными работами Г. Вехаге ³⁾. На основании своих опытов над разрушением при изгибе круглых пластинок Г. Вехаге делает два следующих заключения:

1) если железный лист в какой-либо точке испытывает напряжения по двум взаимно перпендикулярным направлениям, то разрушение наступает при деформациях вдвое меньших, нежели в случае простого растяжения;

2) растяжение по какому-либо направлению становится опаснее, если оно сопровождается растяжением в направлении, перпендикулярном первому.

Второе положение стоит в явном противоречии с гипотезой наибольших растяжений.

Третья гипотеза — теория максимальной разности нормальных напряжений — впервые высказана Шарлем Кулоном в его известном сочинении ⁴⁾).

Прочность на основании этой теории определяется величиной наибольших касательных напряжений.

Так как наибольшие касательные напряжения имеют место в плоскостях, проходящих через направление среднего по величине

¹⁾ C l e b s c h A. См. Note finale du § 37, pp. 252—282 его книги, указанной в сноске ³⁾ на стр. 65.

²⁾ [G r a s h o f F. Die Festigkeitslehre mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse des Maschinenbaues. Berlin, Verlag von R. Gärtner, 1866, XI > +294 S, Theorie der Elasticität und Festigkeit mit Bezug auf ihre Anwendungen in der Technik. Zweite erweiterte, wesentlich umgearbeitete Auflage der «Festigkeitslehre». Berlin, Verlag von Rudolf Gärtner. 1878, 408 S. См. SS. 202, 204, 208, 266—217.]

³⁾ W e h a g e H. Über die massgebenden Dehnungen bei Körpern, welche nach mehreren Richtungen zugleich beansprucht werden. Mitteilungen aus den Königlichen technischen Versuchsanstalten zu Berlin. 1888, Jahrgang 6, Heft 3, SS. 89—98.

⁴⁾ [C o u l o m b Ch. A. Essai. Sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'Architecture. Mémoires de Mathématique et de Physique, Présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans, et lus dans Ses Assemblées. Année 1773. Paris, de l'Imprimerie Royale, 1776, pp. 343—382. См. также C o u l o m b Ch. A. Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages. Nouvelle édition, à laquelle on a ajouté les mémoires du même auteur. Paris, Bachelier, 1821, 368 p. См. pp. 357—363.] См. также стр. СХХV книги L. Navier, указанной в сноске ¹⁾ на стр. 64.

из трех главных напряжений, то при определении прочности играют роль только наибольшее и наименьшее главные напряжения. Нетрудно показать, что величина наибольших касательных напряжений равна полуразности между наибольшим и наименьшим главными напряжениями.

В случае простого растяжения будем иметь

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_z}{2} \leq \frac{x_1}{2}.$$

В общем случае условие прочности напишется так:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_z - \sigma_x) \leq \frac{x_1}{2}.$$

Применяя это к случаю кручения, когда

$$\tau_{\max} = \sigma_z = -\sigma_x,$$

будем иметь, что предел упругости в случае чистого сдвига равен половине предела упругости при простом растяжении, что вполне подтверждается опытами И. Баушингера, Дж. Геста и др. Последователями этой теории являются Г. Треска ¹⁾ и Дж. Дарвин ²⁾. На работы последнего ссылается лорд Кельвин в своем знаменитом сочинении «Натуральная философия» ³⁾ и высказывает тот взгляд, что при оценке склонности материала к разрушению существенную роль должна играть разность между наибольшим и наименьшим главными напряжениями.

Прежде чем перейти к изложению дальнейшего развития третьей гипотезы, я приведу ряд новых экспериментальных исследований, которые дают основание считать третью гипотезу более совершенной, более близкой к действительности.

§ 3. Новые опыты

Окончательное решение вопроса о зависимости между видом напряженного состояния и прочностью материала возможно только на основании научно обработанных опытных данных. Чтобы найти

¹⁾ [Tresca H. Mémoire sur l'écoulement des corps solides. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France. Paris, 1868, tome DIX — Huitième, Savants étrangers — XVIII, pp. 733—799. См. также Tresca H. Mémoire sur l'écoulement des corps solides. Там же, 1872, tome Vingtième, Savants étrangers — XX, pp. 75—135; Applications de l'écoulement des corps solides au laminage et au forgeage. Там же, pp. 137—183; Complément au mémoire sur l'écoulement des corps solides. Там же, pp. 281—286; Écoulement des corps solides. Mémoire sur le poinçonnage des métaux. Там же, pp. 617—838.]

²⁾ Darwin G. H. On the stresses caused in the interior of the earth by the weight of continents and mountains. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 1882, vol. 173, Part I, pp. 187—230.

³⁾ Kelvin [William Thomson], Tait P. G. Treatise on natural philosophy. Part 2. Cambridge, University Press, 1895, 527 p. См. p. 422.

эту зависимость, необходимо начать исследование со случаев однообразно деформированных тел, когда для любой точки тела напряженное состояние определяется одними и теми же значениями главных напряжений σ_x , σ_y , σ_z . Только установив законы прочности в этих элементарных случаях, возможно перейти к исследованию прочности в случае неоднородно деформированных тел, как, например, изгиб, кручение стержней сплошного сечения и др.

При опытах важно отметить два предельных напряженных состояния: одно, соответствующее пределу упругости материала, другое — моменту разрушения. Для стали, железа и других металлов, имеющих предел упругости, особенное значение имеет первое предельное состояние, так как допускаемые напряжения обыкновенно назначаются в зависимости от предела упругости. Кроме того, распределение напряжений внутри тела для этого предельного состояния может быть определено на основании данных теории упругости и сопротивления материалов. Что касается второго предельного состояния, то оно имеет особое значение для таких материалов, как чугун, цемент и др., для которых допускаемое напряжение назначается в зависимости от временного сопротивления.

Задаваясь различными соотношениями между главными напряжениями σ_x , σ_y , σ_z , мы будем получать различные виды напряженного состояния. Для каждого такого вида мы, увеличивая напряжения, получим свои предельные состояния. Вопрос о прочности какого-либо материала можно считать окончательно решенным только в том случае, когда нам будут известны все возможные предельные напряженные состояния. Наиболее удобно совокупность этих предельных состояний представить, пользуясь построением, предложенным Г. Герцем ¹⁾. Прием Г. Герца заключается в следующем. Выбираем систему прямоугольных координат и для каждого предельного напряженного состояния строим точку, координаты которой x , y , z будут равны соответствующим главным напряжениям σ_x , σ_y , σ_z , отложенным в определенном масштабе. Изменяя соотношение между главными напряжениями, мы получим ряд предельных напряженных состояний и каждое из них представится некоторой точкой. Совокупность этих точек даст поверхность прочности для данного материала.

Раз поверхность прочности для какого-либо материала известна, то вопрос о прочности в случае любого вида напряженного состояния легко решается.

До сих пор имеется еще очень мало опытных данных для построения поверхностей прочности, и для наиболее важных материалов

¹⁾ Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1882, Bd. 92, Heft 1—2, SS. 156—171. [Перепечатка: Hertz Heinrich. Gesammelte Werke. Bd. 1. Leipzig, J. A. Barth, 1895, 368 S. См. SS. 155—173.]

известны только немногие точки этих поверхностей; для большинства же материалов даже вид поверхностей прочности остается неизвестным.

Главная трудность опытных исследований в этом направлении заключается в том, чтобы создать напряженное состояние определенного вида. В простейших случаях, например, при простом растяжении или простом сжатии, уже весьма затруднительно получить равномерное распределение напряжений по площади поперечного сечения испытуемого образца, и то, что мы называем прочностью материала при растяжении или сжатии, очень часто далеко не соответствует действительной его прочности в случае линейного напряженного состояния. Опыты А. Фёппля ¹⁾ над разрывом цементных образцов ясно показали, например, что действительное сопротивление цемента растяжению несравненно больше, нежели мы считаем на основании разрывов на приборе Михаэлиса. Это подтверждается и опытами М. Грюблера ²⁾ над разрывом точильных камней при быстром вращении. Относительно неравномерности распределения напряжений при разрыве железных стержней можно найти некоторые указания у М. Руделоффа ³⁾.

Чтобы создать напряженное состояние, в самом общем случае, определяемое главными напряжениями σ_x , σ_y , σ_z , нужно иметь возможность производить равномерно распределение давления или растяжения по каждой паре противоположных граней прямоугольного параллелепипеда, вырезанного из испытуемого материала.

До сих пор мы не имеем удачного разрешения этой задачи, и те опыты, которые приведены будут ниже, еще далеки от той общности, которая необходима для полного выяснения законов прочности различных материалов.

§ 4. Работы А. Фёппля

А. Фёппль ⁴⁾ исследовал прочность кубиков цемента и естественных камней: 1) в случае простого сжатия; 2) в случае равномерного всестороннего давления и 3) в случае равномерного давления по четырем граням кубика.

¹⁾ F ö p p l A. I. Die Biegungselastizität der Steinbalken (SS. 1—41); II. Belastungsversuche an einen Tonnenflechtwerkdache (SS. 41—49); III. Versuche über die Ausschläge schnell umlaufender Wellen (SS. 49—52). Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der Königlichen technischen Hochschule München, Verlag von T. Ackermann, 1896, Heft 24.

²⁾ G r ü b l e r M. Der Spannungszustand in Schleifsteinen und Schmirgelscheiben. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1897, Bd. 41, № 30, SS. 860—864. G r ü b l e r M. Versuche über die Festigkeit von Scheifsteinen. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1899, Bd. 43, № 42, SS. 1294—1300.

³⁾ R u d e l o f f M. Beitrag zum Studium des Bruchaussehens zerrissener Stäbe. Baumaterialienkunde, 1899, Jahrgang 4, Heft 6/7, SS. 85—95.

⁴⁾ См. его работу, указанную выше в сноске ¹⁾.

При простом сжатии А. Фэппль показал, какую важную роль играют силы трения, имеющие место по граням кубика, прикасающимся к доскам пресса. Смазкой из сала и стеарина А. Фэпплю удалось уменьшить эти трения и довести их до незначительной величины; тогда оказалось, что сопротивление цементных кубиков раздавливанию уменьшается почти вдвое по сравнению с опытами без смазки. Вид разрушения при смазке тоже изменяется: цементный кубик разделяется на несколько плиток плоскостями, параллельными какой-либо паре свободных граней.

Для всестороннего сжатия А. Фэппль пользовался стальным цилиндром с толстыми стенками. Цилиндр наполнялся касторовым маслом, в которое погружался образец испытуемого материала. Давление на масло производилось особым поршнем из инструментальной стали. Установив весь прибор между досками сильного гидравлического пресса, А. Фэппль мог получить в цилиндре давление до 3500 атм.

Опыты над всесторонним сжатием показали, что изотропные тела даже самой незначительной прочности, как, например, кристаллы каменной соли, могут выдерживать громадные давления без всяких признаков разрушения. Неизотропные тела, как цемент, естественные камни и другие, обычно разрушались при давлениях гораздо меньших, нежели 3000 атм.

Наиболее интересные данные А. Фэппль получил при раздавливании цементных кубиков посредством особого прибора (сжимающего креста), схематически представленного на рис. 1.

Если по направлениям, указанным стрелками, производят давления P , то благодаря шарнирным сочленениям каждой диагонали a передается усилие $P\sqrt{2}$, в чем нетрудно убедиться простым разложением сил P . Усилия в диагоналях a посредством стальных плиток m передаются четырем граням испытуемого кубика. Грани кубика, параллельные плоскости рисунка, остаются свободными. Чтобы избежать влияния трения, грани кубика, подвергающиеся давлениям, предварительно покрывались слоем смазки из стеарина и сала.

При разрушении цементные кубики разделяются на ряд плиток плоскостями, параллельными свободным граням.

В этом случае напряженного состояния одно из главных напряжений равно нулю, два других равны по величине и отрицательны по знаку. Для прочности материала при этом напряженном состоянии А. Фэппль вводит особый термин «опоясывающая прочность».

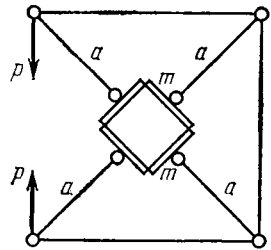


Рис. 1.

Испытаниям подверглись кубики, приготовленные из одной части цемента и трех частей песка, через шесть — десять дней после затвердения.

При простом раздавливании кубиков цемента между досками прессы без смазки оказалось, что среднее сопротивление равно 247 *атм.*

При раздавливании со смазкой сопротивление составляло только 56% от предыдущего и равнялось в среднем 139 *атм.*

При давлении по четырем граням («опоясывающая прочность») сопротивление в среднем равнялось 147 *атм.*

Из этой серии опытов видно, что сопротивление цемента при простом раздавливании приблизительно совпадает с сопротивлением при давлении по четырем граням. Это заключение совпадает с третьей теорией, по которой разность между наибольшим и наименьшим напряжениями определяет прочность материала. Опыты с естественными камнями дали подобные же результаты. Для песчаника сопротивление при раздавливании без смазки получилось 624 *атм.*, сопротивление со смазкой — 249 *атм.*, сопротивление при давлении по четырем граням — 243 *атм.*

Для гранита в первом случае получилось 1460 *атм.*, во втором — 407 *атм.* и в третьем — 453 *атм.*

Из этих опытов можно видеть, насколько сильно влияет на результат опыта сила трения.

Для решения вопроса о прочности материалов А. Фёппль произвел еще несколько опытов, при которых одно из главных напряжений — нуль, два других — растяжения, равные по величине. Определенных каких-либо заключений из этих опытов ему вывести не удалось.

§ 5. Опыты В. Фойхта¹⁾

Как мы видели, работы А. Фёппля касаются плоского напряженного состояния и именно того частного случая, когда оба главных напряжения равны между собой. В. Фойхту удалось рассмотреть более общий случай напряженного состояния — у него все три главных напряжения не нули; два из них (сжимающие) равны между собой.

Для осуществления подобного вида напряженного состояния В. Фойхт пользовался особым цилиндром, в котором давление при помощи сжатого углекислого газа возможно было доводить до 50 *атм.* Помещаемый в этот цилиндр образец испытываемого ма-

¹⁾ Voigt W. Beobachtungen über der Festigkeit bei homogener Deformation. Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge, 1894, Bd. 53, № 9, SS. 43—56; Beobachtungen über der Festigkeit bei homogener Deformation, angestellt von L. Januszkiewicz. Там же, 1899, Bd. 67, № 2, SS. 452—458; Zur Festigkeitslehre. Annalen der Physik, Vierte Folge, 1901, Bd. 4, № 3, SS. 567—591.

териала подвергается таким образом всестороннему равномерному давлению. С помощью особой пружины к образцу возможно приложить продольное растягивающее усилие, величина которого может быть произвольно изменяема при помощи особого винта. Измеряя всестороннее давление манометром и определяя продольное усилие на основании растяжения пружины, возможно очень точно определить напряженное состояние в любой момент.

При постоянном боковом давлении, постепенно увеличивая продольное растягивающее усилие, возможно испытуемый образец довести до разрушения. Чтобы боковое давление, обыкновенно не превосходившее 50 *атм*, могло оказывать заметное влияние на сопротивление образца разрыву, нужно было подобрать материал весьма малой прочности. В своих опытах В. Фойхт пользовался каменной солью и особым сплавом из 61,5% стеариновой кислоты, 22% пальмитиновой кислоты и 16,5% парафина. Результаты как одной, так и другой серии опытов совершенно совпадают между собой и стоят в прямом противоречии как с гипотезой наибольших напряжений, так и с гипотезой наибольших растяжений.

Пусть S — продольное растягивающее усилие в граммах, соответствующее разрыву; Q — площадь поперечного сечения образца в $мм^2$. D — всестороннее давление в граммах на $мм^2$. Тогда в случае разрывов при атмосферном давлении имеем следующие средние значения из тринадцати опытов с каменной солью:

$$\frac{S}{Q} = 578 \pm 37 \text{ г/мм}^2, \quad D = 0.$$

Для того же материала опыты на разрыв в сосуде со сгущенной углекислотой дали следующие средние значения:

$$\frac{S}{Q} = 562 \pm 18 \text{ г/мм}^2, \quad D = 519 \text{ г/мм}^2.$$

Продольное напряжение p по оси образца получим, если из натяжения пружины вычтем действующее в противоположную сторону давление сгущенной углекислоты:

$$p = 562 - 519 \approx 40 \text{ г/мм}^2.$$

Предельное состояние, соответствующее разрыву образца при атмосферном давлении, определяется напряжениями 0; 0; 578 $г/мм^2$.

В случае разрыва при всестороннем давлении имеем предельные главные напряжения —519, —519, +40 $г/мм^2$.

Сразу видно, что данные этих опытов не согласуются с первой гипотезой — гипотезой наибольших напряжений.

Чтобы оценить, насколько приложима в данном случае вторая гипотеза (гипотеза наибольших растяжений), вычислим те наибольшие удлинения, при которых наступает разрыв.

Заметим, что каменная соль до самого разрушения следует довольно строго закону Гука, и назовем соответствующий модуль упругости через E . Коэффициент поперечного сжатия для каменной соли с достаточной точностью можно принять равным $1/4$. Тогда наибольшее удлинение в случае разрывов при всестороннем давлении будет

$$\lambda = \frac{1}{E} \left(\frac{S}{Q} - D \right) + \frac{1}{2} \frac{D}{E} \approx \frac{300}{E}. \quad (1)$$

То же удлинение в случае опытов при атмосферном давлении будет

$$\lambda' = \frac{1}{E} \frac{S}{Q} \approx \frac{580}{E}. \quad (2)$$

Из сравнения (1) и (2) сразу видно, что в данном случае величина наибольших растяжений не может служить мерилom прочности материала.

Заметим, что натяжение пружины, соответствующее разрыву образца, одинаково в обоих случаях. Так как это натяжение соответствует разности двух главных напряжений, то этими опытами подтверждается третья гипотеза — гипотеза наибольших скалывающих напряжений.

В 1899 году В. Фойхт ¹⁾ совместно с Л. Янушкевичем повторил эти опыты, причем образцы готовились из вышеприведенного сплава. Благодаря большей однородности материала результаты отдельных опытов очень мало отклонялись друг от друга и еще убедительнее подтвердили выводы, сделанные на основании опытов с каменной солью.

Сохраняя прежние обозначения, получим следующие результаты в случае разрывов при атмосферном давлении:

$$\frac{S}{Q} = 145 \pm 1,9 \text{ г/мм}^2, \quad D = 10 \text{ г/мм}^2.$$

При всестороннем давлении

$$\frac{S}{Q} = 146 \pm 2,5 \text{ г/мм}^2, \quad D = 413 \text{ г/мм}^2.$$

Напряжения в первом случае будут -10 , -10 , $+135$ г/мм², во втором случае будут -413 , -413 , -267 г/мм².

Особенно важно отметить, что во втором случае разрушение наступает, когда все главные напряжения являются сжимающими.

Натяжение пружины, соответствующее моменту разрыва, опять остается приблизительно постоянной величиной.

¹⁾ См. работу W. Voigt, упомянутую в сноске ¹⁾ на стр. 72.

§ 6. Работы Дж. Геста ¹⁾

Исследования Дж. Геста «О прочности мягких материалов при комбинированных напряжениях» представляют для техники наибольший интерес, так как испытанию подвергались такие важные строительные материалы, как сталь, железо и медь. Опыты производились над трубками диаметром 3,18 см, длиной 30,5 см и толщиной стенок 0,064—0,091 см. Концы трубок впаивались в особые наконечники, посредством которых испытываемому образцу передавались усилия от машины. Благодаря трубчатой форме образцов имелась возможность создать несколько различных видов напряженного состояния и для каждого такого вида с большой точностью определить предел упругости.

Прилагая растягивающее усилие, действующее по оси трубки, мы получим линейное напряженное состояние. Величину напряжения получим, деля приложенную силу на площадь поперечного сечения трубки.

Скручивая образец, мы будем иметь случай чистого сдвига, когда одно из главных напряжений равно нулю, а два других равны по величине и противоположны по знаку. Эта серия опытов имеет большое преимущество перед ранее упомянутыми работами И. Баушингера, который подвергал скручиванию цилиндрические образцы сплошного кругового сечения. При малой толщине стенок трубчатых образцов разность между наибольшими сдвигающими напряжениями, соответствующими наружной и внутренней поверхностям трубы, не превосходила 2%—3%, и потому с большой точностью можно было считать напряжение по всей стенке постоянным, равным

$$q = \frac{\text{крутящий момент}}{\text{площадь поперечного сечения} \times \text{средний радиус}}.$$

При таких условиях Дж. Гесту с гораздо большей точностью, нежели И. Баушингеру, удавалось отметить предел упругости, соответствующий чистому сдвигу.

Третий тип напряженного состояния возможно было получать, нагнетая внутрь трубки масло и доводя внутреннее давление p_0 до 100 и более атмосфер. В этом случае все три главных напряжения не равны нулю. Называя через r_0 наружный радиус трубки, t — толщину стенки, s — площадь поперечного сечения, найдем, что напряжение, параллельное оси трубки, равно

$$p_1 = \frac{\pi (r_0 - t)^2 p_0}{s}. \quad (1)$$

¹⁾ См. работу J. J. Guest, упомянутую в сноске ⁴⁾ на стр. 65.

Тангенциальное напряжение p_2 меняется по толщине стенки и может быть для любого элемента определено по формуле

$$p_2 = C \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right), \quad (2)$$

где r — расстояние от рассматриваемого элемента до оси трубки. На основании (2) нетрудно доказать, что отношение между наибольшим и наименьшим тангенциальными напряжениями при малой толщине стенки с достаточной точностью можно принять равным

$$m = 1 + \frac{t}{r_0}.$$

При выбранных размерах трубок разность между тангенциальными напряжениями не превосходила 3%, и потому их без большой погрешности можно было заменить некоторым постоянным средним значением.

Что касается радиального напряжения, то величина его меняется от p_0 на внутренней поверхности трубки до 0 на свободной наружной поверхности. Величина его, во всяком случае, невелика по сравнению с первыми двумя напряжениями.

Комбинируя растяжение с кручением и внутренним давлением, Дж. Гест имел возможность исследовать еще ряд промежуточных напряженных состояний и для них также установить предел упругости.

В виде примера привожу некоторые данные опытов над трубками из мягкой стали, для которой модуль упругости при растяжении $E = 2,02 \cdot 10^6$ кг/см², при сдвиге $g = 0,763 \cdot 10^6$ кг/см² [$k = 0,32$],

$$r_0 = \frac{3,18}{2} \text{ см}, \quad t = 0,064 \text{ см}:$$

P , кг	W , кг	p_0 , кг/см ²	σ_1 , кг/см ²	σ_2 , кг/см ²	σ_3 , кг/см ²	Максимальное сдвигающее напряжение, кг/см ²	Наибольшее относительное удлинение $\times 10^6$
680	—	127	2420	2660	0 до —120	1390	925
907	—	116	2680	2450	0 до —110	1400	926
907	34,0	—	2500	—352	—	1430	1130
—	27,2	98,4	2730	366	0 до —91,5	1410	1500
1724	—	—	2760	—	—	1380	1360
—	40,8	—	1580	—1580	0	1580	1040

В этой таблице P означает продольное растягивающее усилие; W — сила, производящая кручение. Ее плечо во время опытов равнялось $15d$; σ_1 , σ_2 , σ_3 — главные напряжения; p_0 — внутреннее давление. Силы даны в килограммах, а напряжения в кг/см².

На основании целого ряда опытов Дж. Гест делает следующие заключения. Предел упругости может иметь место при весьма различных значениях наибольших напряжений и наибольших растяжений, и только разность между наибольшим и наименьшим главными напряжениями сохраняет приблизительно постоянную величину. Среднее по величине главное напряжение не оказывает на предел упругости никакого влияния. Следовательно, по отношению к пределу упругости для стали, железа, меди опыты Дж. Геста подтверждают справедливость третьей гипотезы.

§ 7. Теории Ш. Дюге и О. Мора

Познакомив читателя с новыми опытными исследованиями, результаты которых ближе всего совпадают с третьей гипотезой (гипотезой максимального касательного напряжения), мы переходим к изложению теорий Ш. Дюге и О. Мора, которые представляют собой дальнейшее развитие этой гипотезы.

Шарль Кулон, высказав свой взгляд, что разрушение обусловлено наибольшими сдвигающими напряжениями, исследовал только случаи растяжения и сжатия. Полное развитие эта теория получила у Ш. Дюге ¹⁾, который ее приложил к самому общему случаю напряженного состояния. Подобно Ш. Кулону он полагает, что разрушение материалов является результатом сдвига. Сопротивление сдвигу зависит не только от сцепления, свойственного данному материалу, но и от внутреннего трения, величина которого меняется в зависимости от нормальных напряжений, действующих по плоскости сдвига.

Если сопротивление какого-либо материала в случае чистого сдвига назовем через S , то величина сдвигающего напряжения τ , которое может произвести сдвиг по некоторой плоскости, при всяком другом виде напряженного состояния определится из формулы

$$\tau = S \mp f\sigma.$$

Здесь через σ мы обозначили величину нормальных напряжений, соответствующих плоскости сдвига, f — коэффициент внутреннего трения, который Ш. Дюге считает постоянным и равным 0,176. Нетрудно найти положение плоскостей, для которых $\tau + f\sigma$ и $T - f\sigma$ получают значение максимума. Эти плоскости, очевидно, будут плоскостями сдвигов в случае растяжения и сжатия.

Если положить

$$f = \operatorname{tg} \psi,$$

то угол, составляемый плоскостью сдвига с направлением

¹⁾ D u g u e t Ch. Limite d'élasticité et résistance à la rupture. Partic I. Statique spéciale. Paris, Gauthier — Villars, 1882, 213 p.

действующих сил в случае растяжения, будет

$$\varphi_1 = 45 + \frac{\psi}{2},$$

в случае сжатия этот угол будет

$$\varphi_2 = 45 - \frac{\psi}{2}.$$

Для некоторых материалов появление этих плоскостей сдвигов удалось наблюдать. Наиболее полной работой в этом направлении является известное исследование Л. Гартманна ¹⁾, где интересующиеся найдут целый ряд снимков, великолепно подтверждающих теорию сдвигов.

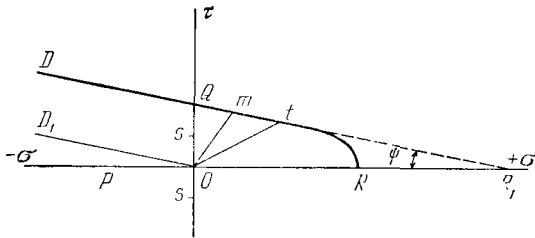


Рис. 2.

Для пояснения своей теории Ш. Дюге пользуется следующим графическим построением (рис. 2).

Пусть ss — элементарная площадка и Om представляет по величине и направлению напряжение, которое может вызвать сдвиг по площадке ss . Если по оси абсцисс откладывать нормальные, а по оси ординат скалывающие напряжения, то координатами точки m будут σ и τ . Но, как мы видели,

$$\tau + f\sigma = S = \text{const.}$$

Следовательно, геометрическое место точек m есть прямая DR_1 , наклоненная под углом ψ к оси абсцисс. Ш. Дюге полагает, что с возрастанием σ возрастает и коэффициент трения f , и потому часть прямой DR_1 он заменяет кривой, пересекающей ось абсцисс в точке R .

Всякий вектор Ot , проведенный из начала координат O в любую точку t контура DtR , даст нам одно из предельных напряженных состояний. Например, вектор OQ , проведенный в точку Q , абсцисса

¹⁾ Hartmann L. Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts. Paris — Nancy, Berger — Levrault et C^{ie}, Libraires — éditeurs, 1896, 201 p.

которой равна нулю, представит собой сопротивление материала в случае чистого сдвига. Напряжения, направления которых лежат внутри угла POD_1 , совершенно не могут привести материал к разрушению, что соответствует допущению, что всестороннее сжатие не должно разрушать изотропных тел. На изложении дальнейших подробностей графического построения Ш. Дюге мы останавливаться не будем, а перейдем к теории О. Мора, которая гораздо общее и заключает в себе теории Ш. Кулона и Ш. Дюге как частные случаи.

Впервые О. Мор выступил со своей теорией еще в 1882 году ¹⁾, но без особого успеха. Только после новых опытных исследований вторая статья О. Мора, опубликованная в 1900 году ²⁾, привлекла к себе должное внимание и появились попытки перестроить формулы сложного сопротивления на основании этой теории ³⁾. Мы начнем с изложения очень изящного графического приема, которым О. Мор пользуется для наглядного представления напряжений по различным плоскостям.

Напряженное состояние в любой точке определено, если заданы три главных напряжения σ_x , σ_y , σ_z . Положим, что

$$\sigma_x < \sigma_y < \sigma_z. \quad (1)$$

В рассматриваемой точке A тела вырежем сферический элемент бесконечно малого радиуса. Совокупность напряжений по всем элементам полученной сферической поверхности определит собой напряжение в точке A . Положим, что на рис. 3 представлено сечение сферического элемента плоскостью xz , проходящей через

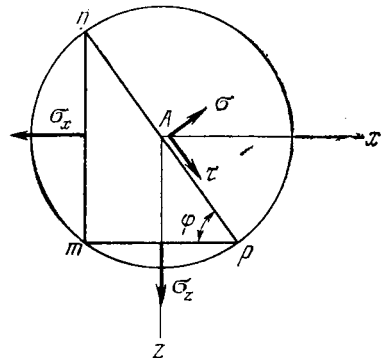


Рис. 3.

¹⁾ M o h r O. Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes und über die Anwendung derselben in der Festigkeitslehre. Der Civilingenieur, 1882, Jahrgang 1882 (Der neuen Folge), Bd. 28, SS. 113—156.

²⁾ M o h r O. Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materiales? Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1900, Bd. 44, № 45, SS. 1524—1530. [Перевод на русский язык: М о р О. Чем обусловлены предел упругости и временное сопротивление материала? «Новые идеи в технике», Сборник № 1, Теории прочности, Изд-во «Образование», Петроград, 1915, стр. 1—50.]

³⁾ R o t h P. Die Festigkeitstheorien und die von ihnen abhängigen Formeln des Maschinenbaues. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1902, Bd. 48, Heft 2, SS. 285—316. [Перевод на русский язык двух последних глав этой работы (SS. 301—316): Р о т П. Теории прочности и построенные на них формулы машиностроения. «Новые идеи в технике», Сборник № 1, Теории прочности, Изд-во «Образование», Петроград, 1915, стр. 103—121.]

главные напряжения σ_x и σ_z . Третье главное напряжение, очевидно будет перпендикулярно плоскости рисунка.

Рассмотрим первоначально, как будут меняться напряжения для различных элементов сферы, лежащих по большому кругу XZ , и представим графически эти изменения.

Положим, что в сферический элемент A вписана трехгранная призма, две грани которой перпендикулярны осям x и z . Пусть треугольник mnp (рис. 3) представляет основание этой призмы; высота ее, очевидно, будет параллельна среднему по величине

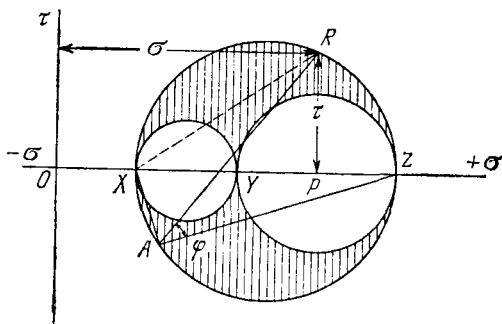


Рис. 4.

главному напряжению σ_y . Если мы будем менять угол φ между гранями mp и np призмы, то напряжения по плоскостям np будут соответствовать напряжениям по различным элементам сферы, лежащим на большом круге XZ .

Так как основание призмы перпендикулярно главному напряжению σ_y , то в плоскости mnp нет сдвигающих напряжений и, следовательно, напряжение по любой плоскости np будет параллельно плоскости рисунка. Пусть σ — нормальная и τ — тангенциальная составляющая этого напряжения, тогда из условия равновесия трехгранной призмы mnp легко получить следующие два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_z \sin^2 \varphi + \sigma_x \cos^2 \varphi, \\ \tau &= (\sigma_z - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Исключая из уравнения (2) переменную величину φ , мы получим зависимость между σ и τ такого вида:

$$(\sigma - \sigma_x)(\sigma_z - \sigma) = \tau^2. \quad (3)$$

Если нормальные напряжения σ откладывать в известном масштабе по оси абсцисс, а сдвигающие напряжения τ по оси ординат, то нетрудно видеть, что уравнение (3) представит собой круг диа-

метра $d = \sigma_z - \sigma_x$. Центр этого круга лежит на оси абсцисс на расстоянии $\frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}$ от начала координат (рис. 4).

Этот способ графического представления имеет значительные преимущества перед эллипсом напряжений, так как из рисунка можно сразу получить, к какой именно плоскости данное напряжение относится. В самом деле, пусть R — одна из точек нашего круга; координаты ее σ и τ будут составляющие напряжения по одной из плоскостей, проходящих через направление σ_y . Чтобы определить положение этой плоскости, нужно знать только угол φ (см. рис. 3). Для этого возьмем любую точку A круга и соединим ее с точками X , Z и R . Докажем, что AR составляет с AX и AZ такие же углы, как σ с главными напряжениями σ_x и σ_z (см. рис. 3).

Из рис. 4 имеем

$$RP = t = XZ \sin RAZ \cos RAZ = (\sigma_z - \sigma_x) \sin RAZ \cos RAZ. \quad (4)$$

Сравнивая (2) и (4), найдем, что

$$\angle RAZ = \angle \varphi.$$

Пользуясь рис. 4, мы можем определить напряжение для всякой элементарной площадки, лежащей на большом круге XZ выделенного сферического элемента.

Подобным же образом мы можем построить еще два круга с диаметрами $XY = \sigma_y - \sigma_x$ и $YZ = \sigma_z - \sigma_y$, определяющих напряжения для тех элементов сферической поверхности, которые располагаются по большим кругам XY и YZ . В силу нашего предположения (1) первый построенный нами круг на диаметре XZ заключает в себе два других круга с диаметрами XY и YZ . Напряжение по какому-либо элементу поверхности сферы, не лежащему на больших кругах XZ , XY , YZ , будет представлено координатами одной из точек заштрихованной площади, заключенной между тремя построенными кругами.

При суждении о прочности особенно важную роль должен играть круг XZ , построенный на разности между наибольшим и наименьшим главными напряжениями. На нем лежат не только те точки, которые определяют наибольшие нормальные напряжения σ_{\max} и наибольшие сдвигающие напряжения τ_{\max} , но также и точки, которые при заданном нормальном напряжении определяют наибольшие скалывающие напряжения.

О. Мор кладет эти круги в основание графического представления своей теории о прочности и называет их главными кругами.

Применим построение О. Мора к изображению самых простых случаев напряженного состояния.

1. *Простое растяжение*

$$\sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = x_1.$$

Этому виду напряженного состояния, очевидно, будет соответствовать круг *I* (см. рис. 5), диаметр которого $OZ = x_2$.

2. Простое сжатие

$$\sigma_y = \sigma_z = 0, \quad \sigma_x = -x_2.$$

На рисунке сжатие представится кругом *III*, диаметр которого

$$OX = x_2.$$

3. Чистый сдвиг

$$\sigma_y = 0, \quad \sigma_z = -\sigma_x = x_2.$$

Этот вид напряженного состояния изобразится кругом *II*, центр которого совпадает с началом координат и диаметр равен $2x_2$.

Также просто этим способом изобразить и более сложные случаи напряженного состояния. Интересующиеся могут найти примеры

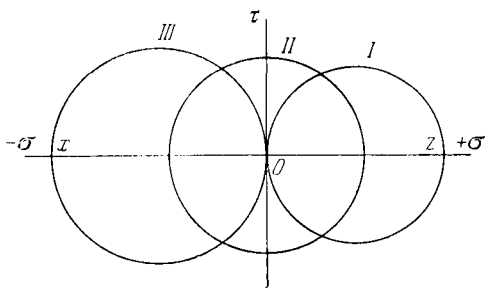


Рис. 5.

таких построений в вышеупомянутых статьях О. Мора и П. Рота, где, между прочим, разобраны случаи сложного сопротивления изгибу и кручению цилиндрического вала кругового сечения и напряжения в различных точках толстостенной трубы.

Мы не будем более останавливаться на графическом построении, а перейдем

к физической стороне теории О. Мора. В своей теории О. Мор делает два основных допущения:

1) остаточная деформация и разрушение являются результатом сдвигов по некоторым плоскостям (плоскости скольжения) и обусловлены действующими по этим плоскостям напряжениями.

О. Мор принимает в расчет не только касательную, но и нормальную составляющую напряжений и окончательно формулирует первое свое положение так: «Предел упругости и предел прочности материала будет определяться напряжениями, возникающими в плоскостях скольжения и разрушения», «касательные напряжения, возникающие в плоскостях скольжения, достигают в пределе с некоторым нормальным напряжением наибольшей величины, являющейся свойством материала».

Отсюда как следствие вытекает и второе положение:

2) плоскости, по которым происходят сдвиги или разрушения, проходят через направление σ_y , т. е. направление среднего из главных напряжений, и, следовательно, перпендикулярны плоскости, заключающей наибольшее и наименьшее из главных напряжений.

Обращаясь к графическому представлению, мы можем сказать, что точки q_1 , q_2 (рис. 6), характеризующие предельное напряженное состояние, лежат на главном круге XZ , потому что именно этот круг заключает точки, которые, при заданной абсциссе σ_1 , имеют наибольшую ординату τ_1 .

При любом соотношении между σ_x и σ_z мы можем, повышая напряжения, прийти к предельному напряженному состоянию (О. Мор применяет свою теорию как к пределу упругости, так и к разрушению), которое изображается своим предельным главным кругом. Так как для определенного материала при заданном нормальном напряжении имеется вполне определенное сдвигающее напряжение, могущее произвести сдвиг или разрушение, то последовательные предельные круги представят собой систему кругов взаимно пересекающихся. Кривая, обертывающая эту систему пересекающихся предельных кругов, будет заключать в

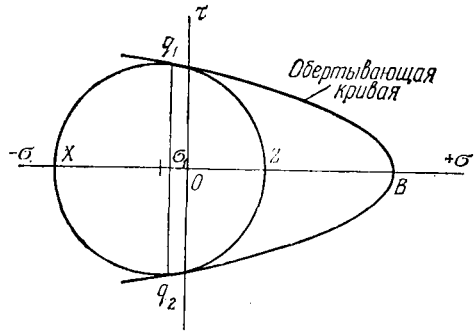


Рис. 6.

себе все точки, характеризующие предельное напряженное состояние. Чтобы пользоваться теорией О. Мора для установления формул сложного сопротивления, необходимо найти аналитическое выражение для обертывающей кривой. В самом общем виде кривая эта представит собой некоторую функцию от σ и τ и отдельные ее точки могут быть найдены опытным путем. Из того соображения, что однородные изотропные тела не должны разрушаться при равномерном всестороннем сжатии и разрушаются при всестороннем растяжении, О. Мор заключает, что обертывающая кривая имеет вид параболы $q_1 B q_2$ (см. рис. 6), симметрично расположенной относительно оси абсцисс и вогнутою направленная в сторону отрицательных σ . Опытных данных для более точного построения обертывающей кривой пока не имеется, и О. Мор предлагает для наиболее часто встречающихся в практике случаев напряженного состояния поступать таким образом.

Пусть I и II на рис. 7 будут предельные круги для случаев простого растяжения и простого сжатия.

Часть обертывающей кривой между точками A и B О. Мор предлагает заменить прямой, касательной к предельным кругам I и II . Этим определяются предельные напряженные состояния, соответствующие наиболее часто встречающимся на практике случаям: растяжению, сжатию, изгибу, кручению и др.

Если x_1 — предел упругости при растяжении, а x_2 — при сжатии, то уравнение касательной AB будет

$$\tau = \frac{1}{2} \sqrt{x_1 x_2} \left(1 - \sigma \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \right),$$

τ и σ — координаты любой точки касательной AB представляют собой касательную и нормальную составляющие напряжения по плоскости сдвига в момент предельного напряженного состояния.

Возьмем, например, случай чистого сдвига, тогда

$$\sigma_z = x_3, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_x = -x_3.$$

В этом случае предельный круг будет иметь своим центром начало координат O .

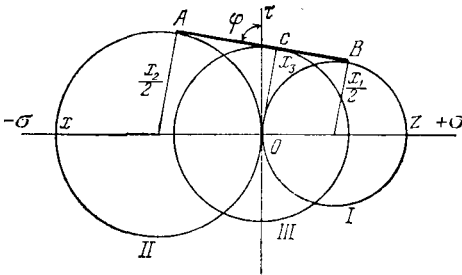


Рис. 7.

Радиус круга $x_3 = CC$ определится из такой пропорции:

$$\left(\frac{x_2}{2} - x_3 \right) : \left(x_3 - \frac{x_1}{2} \right) = x_2 : x_1$$

и будет равен

$$x_3 = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}.$$

Таким образом, имея пределы упругости x_1 и x_2 , нетрудно найти x_3 — предел упругости при чистом сдвиге.

Угол φ наклона касательной AB к оси ординат определится для каждого материала по такой формуле:

$$\cos \varphi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1}$$

и, следовательно, не зависит от вида напряженного состояния, а только от отношения между пределами упругости x_1 и x_2 .

В случае железа и стали пределы упругости при растяжении и сжатии приблизительно одинаковы, следовательно,

$$x_2 = x_1, \quad \varphi = 0,$$

и касательная AB параллельна оси абсцисс.

В этом случае касательные напряжения τ для всех предельных напряженных состояний равны и теория О. Мора совпадает с третьей гипотезой (гипотезой максимального касательного напряжения).

Это, как мы видели, подтверждается как старыми работами И. Баушингера, так и более новыми исследованиями Дж. Геста.

Обычно $x_2 > x_1$ и угол φ острый. Это видно из следующей таблицы:

x_2/x_1	1	2	4
φ	90°	71°	53°

Для чугуна, например, Карл Бах нашел ¹⁾ следующие величины для временного сопротивления: $x_1 = 16 \text{ кг/мм}^2$, $x_2 = 75 \text{ кг/мм}^2$, $x_3 = 13 \text{ кг/мм}^2$.

Эти данные совершенно совпадают с теорией О. Мора

$$x_3 = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{16 \cdot 75}{16 + 75} = 13.$$

Новые опыты, исследующие напряженное состояние до предела упругости, дают результаты, совпадающие с теорией О. Мора.

Что касается опытов над разрушением, то работы В. Фойхта не согласуются с теорией. Построенные по способу О. Мора предельные круги, в случае разрушения образцов из каменной соли и парафина, иногда не пересекались, а лежали один внутри другого. Следовательно, теория О. Мора не имеет на самом деле той всеобщности, на которую претендует ее автор.

В этом отношении нельзя не согласиться с В. Фойхтом, который в последней своей статье ²⁾ говорит, между прочим, что обстоятельства, обуславливающие разрушение материалов, весьма сложны. Они различны для материалов хрупких, ковких и т. д.

В силу этого едва ли возможно все эти явления охватить одним каким-либо простым законом, каким является, например, теория О. Мора.

Если на теорию О. Мора и нельзя смотреть как на полное решение интересующего нас вопроса, то все же она лучше старых гипотез, совершенно произвольных. Заклучая в себе больше независимых переменных, теория О. Мора может быть применена к большему числу различных материалов, и гипотезы Ш. Кулона и Ш. Дюге являются только ее частными случаями.

В случае железа, стали и других ковких материалов, употребляемых в технике, обертывающая кривая, соответствующая пределу пропорциональности, может быть заменена отрезком прямой, параллельной оси абсцисс. Прочность таких материалов будет определяться наибольшими касательными напряжениями, что вполне подтверждается вышеприведенными работами Дж. Геста.

Что касается чугуна, цемента и других хрупких материалов, для которых допускаемое напряжение назначается в зависимости

¹⁾ B a c h C. Elastizität und Festigkeit. Die für die Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmässige Grundlage. 5 vermehrte Auflage. Berlin, J. Springer, 1905, 668 S. См. S. 160.

²⁾ V o i g t W. Zur Festigkeitslehre. Annalen der Physik. Vierte Folge. 1901, Bd. 4, № 3, SS. 567—591.

от временного сопротивления, то в этой области пока имеется очень мало опытных данных. Работы К. Баха над сопротивлением чугуна и А. Фёплля над сопротивлением цементных кубиков раздавливанию совершенно согласуются с теорией О. Мора.

В силу всего сказанного является совершенно непонятным, почему в формулах сложного сопротивления до сих пор придерживаются или первой гипотезы (гипотезы максимального напряжения) или второй (гипотезы максимальной деформации) и совершенно игнорируют наиболее обоснованную третью гипотезу (гипотезу максимального касательного напряжения) и дальнейшее ее развитие — теорию О. Мора.

В дальнейшем мы остановимся на некоторых формулах сложного сопротивления и рассмотрим, как они должны быть изменены, если в основание будет положена теория О. Мора.

§ 8. Формулы сложного сопротивления

Будем рассматривать железо, сталь и другие ковкие материалы.

Чистый сдвиг. В этом случае главные напряжения будут разных знаков и по величине равны наибольшим касательным напряжениям.

1) На основании первой гипотезы на сдвиг нужно было бы допускать такие же напряжения, как для растяжения и сжатия.

2) Если в основание положить гипотезу наибольших растяжений, то тогда допускаемое напряжение на сдвиг должно быть меньше, нежели по первой гипотезе. Уменьшение будет зависеть от коэффициента поперечного сжатия k . Если через R_1 назовем допускаемое напряжение при простом растяжении, а через R_3 напряжение при чистом сдвиге, то, очевидно, $R_3 : R_1 = 1 : (1+k)$. Полагая $k=1/4$, будем иметь $R_3=0,8R_1$.

3) По третьей гипотезе, с которой в случае железа и стали совпадает и теория О. Мора, мы будем иметь $R_3=0,5R_1$.

При расчете различных инженерных сооружений, например стропил, мостов и т. п., у нас обыкновенно полагают

$$R_3=0,75 \div 0,8R_1,$$

т. е. расчет ведут, положив в основание вторую гипотезу, тогда как третья более вероятная гипотеза допускает в случае чистого сдвига гораздо меньшие напряжения, и, следовательно, расчет должен производиться именно по ней.

Возьмем, например, цилиндрический вал кругового сечения. Пусть M — скручивающий момент и d — диаметр вала. Максимальное сдвигающее напряжение будет

$$\tau_{\max} = \frac{M \cdot 16}{\pi d^3}.$$

Если R_1 — допускаемое напряжение при простом растяжении, то на основании первой гипотезы

$$\frac{M \cdot 16}{\pi d^3} = R_1, \quad d^3 = \frac{M \cdot 16}{\pi R_1},$$

по второй гипотезе

$$\frac{M \cdot 16}{\pi d^3} = 0,8 R_1, \quad d^3 = \frac{M \cdot 16}{\pi \cdot 0,8 R_1},$$

по третьей гипотезе

$$\frac{M \cdot 16}{\pi d^3} = 0,5 R_1, \quad d^3 = \frac{M \cdot 16}{\pi \cdot 0,5 R_1}.$$

Из этого примера видно, что для d вторая гипотеза дает величину на 8%, а третья на 25% большую, нежели первая гипотеза.

Случай изгиба. Определив на основании известных формул строительной механики простое нормальное напряжение σ' и простое касательное напряжение τ' , мы для определения главных напряжений будем иметь

$$\sigma = \frac{1}{2} [\sigma' \pm \sqrt{(\sigma')^2 + (4\tau')^2}].$$

Наибольшее касательное напряжение будет

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma')^2 + 4(\tau')^2}.$$

1) Полагая в основание первую гипотезу, мы получим такое условие прочности:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{1}{2} [\sigma' + \sqrt{(\sigma')^2 + 4(\tau')^2}] \leq R_1 \text{ (допускаемое напряжение на растяжение),} \\ \sigma_{\min} &= \frac{1}{2} [\sigma' - \sqrt{(\sigma')^2 + 4(\tau')^2}] \geq -R_2 \text{ (допускаемое напряжение на сжатие).} \end{aligned} \right\} (1)$$

2) Вторая гипотеза в этом случае нам даст

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} + k\sigma_{\min} &\leq R_1, \\ \sigma_{\min} - k\sigma_{\max} &\geq -R_2. \end{aligned}$$

Полагая по-прежнему $k=1/4$, будем иметь следующее условие прочности:

$$\left. \begin{aligned} 0,375\sigma' + 0,625\sqrt{(\sigma')^2 + 4(\tau')^2} &\leq R_1, \\ 0,375\sigma' - 0,625\sqrt{(\sigma')^2 + 4(\tau')^2} &\geq -R_2. \end{aligned} \right\} (2)$$

3) Если исходить из теории наибольших касательных напряжений, то для условия прочности будем иметь

$$\left. \begin{aligned} +\sqrt{(\sigma')^2 + 4(\tau')^2} &\leq R, \\ -\sqrt{(\sigma')^2 + 4(\tau')^2} &\geq -R_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что формулы (3) допускают меньшие напряжения и вычисленные по ним размеры частей сооружений соответствуют большему запасу прочности.

У нас в России при расчете мостов ограничиваются проверкой на косые нормальные и косые касательные напряжения, т. е. придерживаются формул (1).

Чтобы яснее было видно, как велика может быть разница в расчетных напряжениях в зависимости от того, какой из трех гипотез мы пользуемся, возьмем численный пример из книги Е. О. Патона ¹⁾, на стр. 91 которой приведен расчет поперечной балки моста.

Допускаемое нормальное напряжение взято равным 650 кг/см^2 . Допускаемое касательное напряжение взято $0,75 \cdot 650 = 487 \text{ кг/см}^2$.

Опасное волокно соответствует продольной оси поясных заклепок.

Простое нормальное напряжение для него

$$n = 574 \text{ кг/см}^2.$$

Простое касательное напряжение для того же волокна

$$u = 221 \text{ кг/см}^2.$$

Наибольшее косое нормальное напряжение

$$\tau' = \frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \tau^2} = 649 \text{ кг/см}^2 < 650 \text{ кг/см}^2.$$

Следовательно, если в основание принята первая гипотеза, то подобранные размеры балки удовлетворяют условиям прочности.

По второй гипотезе приведенные напряжения должны быть не более 650 кг/см^2 , т. е.

$$0,375n + 0,625\sqrt{n^2 + 4\tau^2} = 664 \text{ кг/см}^2 > 650 \text{ кг/см}^2.$$

Третья гипотеза:

$$\sqrt{n^2 + 4\tau^2} = 724 \text{ кг/см}^2 > 650 \text{ кг/см}^2.$$

Следовательно, и по второй, и по третьей гипотезе выбранные размеры поперечной балки недостаточны. Их придется увеличить

¹⁾ [П а т о н Е. О.] Образцы расчета железных мостов со сквозными фермами. Пособие для проектирования железных мостов под редакцией проф. Е. О. Патона. М., типолитография Рихтера, 1904, 171 стр.

с таким расчетом, чтобы удовлетворялись условия прочности (3). Если же мы оставили подобранные размеры, то тогда нужно считать, что предел допускаемого напряжения 650 кг/см^2 может быть повышен до 724 кг/см^2 .

Случай изгиба и кручения. Рассмотрим случай цилиндрического вала кругового сечения.

Положим, что изгибающий момент M действует в плоскости, проходящей через ось вала. Скручивающий момент M_1 действует в плоскости, перпендикулярной оси; d — диаметр вала.

Наибольшее нормальное напряжение от изгиба будет

$$\sigma = \frac{M \cdot 32}{\pi d^3} \approx \frac{10M}{d^3}.$$

Наибольшее касательное напряжение в плоскости поперечного сечения от кручения будет

$$\tau = \frac{M_1 \cdot 32}{2\pi d^3} \approx \frac{10M_1}{2d^3}.$$

Главные напряжения будут

$$\sigma'_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{\pi d^3} (M + \sqrt{M^2 + M_1^2}),$$

$$\sigma'_{\min} = \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{\pi d^3} (M - \sqrt{M^2 + M_1^2}),$$

их разность равна

$$\sigma'_{\max} - \sigma'_{\min} = \frac{32}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + M_1^2}.$$

Если через R_1 назовем допускаемое напряжение в случае простого растяжения, то условие прочности будет

1) На основании первой гипотезы

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{32}{\pi d^3} (M + \sqrt{M^2 + M_1^2}) \leq R_1.$$

Для определения диаметра вала будем иметь

$$d^3 = \frac{10}{R_1} \left[\frac{1}{2} M + \frac{1}{2} \sqrt{M^2 + M_1^2} \right]. \quad (1)$$

2) По второй гипотезе приведенное напряжение не должно превосходить предела R_1 , установленного для линейного напряженного состояния,

$$\left. \begin{aligned} \frac{32}{\pi d^3} (0,375 + 0,625 \sqrt{M^2 + M_1^2}) &= R_1, \\ d^3 &= \frac{10}{R_1} [0,375M + 0,625 \sqrt{M^2 + M_1^2}]. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что диаметр вала по второй формуле выйдет больше, нежели по первой.

3) Третья гипотеза дает нам в этом случае такое условие прочности:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} - \sigma_{\min} &= + \sqrt{M^2 + M_1^2} \cdot \frac{32}{\pi d^3} \leq R_1, \\ d^3 &= \frac{10}{R_1} \sqrt{M^2 + M_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Размеры диаметра, вычисляемые по различным формулам, будут одинаковы только в том случае, если $M_1=0$, т. е. когда нет скручивающего момента.

Чем больше значение M_1 , тем бóльшая разность будет между результатами различных формул.

Если сравнить формулы (2) и (3), то оказывается, что при $M_1=M$ диаметр вала по формуле (3) получается на 3,7% больше, нежели по (2). При $M_1=2M$ разность между результатами этих формул достигает 7,4%.

Нетрудно видеть, что при любом соотношении между изгибающим и скручивающим моментами прочные размеры, определяемые по третьей формуле, будут всегда наибольшие. Уже одно это обстоятельство, независимо от большей достоверности третьей теории, требует, чтобы расчеты велись именно по третьей формуле.

Расчет стенки цилиндрического котла. Если толщина стенки невелика по сравнению с диаметром цилиндра, то напряжение можно с большой точностью считать постоянным для всех точек стенки. Так как внутреннее давление обыкновенно невелико по сравнению с допускаемыми напряжениями, то мы можем главное напряжение, направленное по радиусу, считать равным нулю; два других напряжения, одно действующее по направлению образующих цилиндра p_1 и другое тангенциальное p_2 , будут растягивающие, причем

$$p_2 = 2p_1.$$

Окончательно будем иметь

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = p_1, \quad \sigma_z = 2p_1 = p_2.$$

На основании первой гипотезы условие прочности напишется так:

$$\sigma_z \leq R_1, \quad 2p_1 \leq R_1 \text{ (допускаемое напряжение на растяжение)}. \quad (1)$$

По второй гипотезе

$$\sigma_z - k\sigma_y \leq R_1$$

или, полагая $k=1/4$, будем иметь

$$2p_1 - \frac{1}{4} p_1 \leq R_1. \quad (2)$$

Вторая формула, очевидно, даст для толщины стенки величину на 7% меньшую, нежели первая формула.

Третья гипотеза даст такое условие прочности:

$$\sigma_z - \sigma_x \leq R_1. \quad (3)$$

В нашем случае это условие эквивалентно условию (1):

$$2p_1 \leq R_1.$$

Случай толстостенной трубы. Пусть r_0 и r_1 — наружный и внутренний радиусы трубы, p_0 — величина внутреннего давления.

Рассмотрим случай, когда деформация по направлению оси трубы равна нулю. Тогда тангенциальное и радиальное главные напряжения в какой-либо точке будут

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{p_0 r_1^2 (r^2 + r_0^2)}{(r_0^2 - r_1^2) r^2} = \sigma_z, \\ R &= \frac{p_0 r_1^2 (r^2 - r_0^2)}{r^2 (r_0^2 - r_1^2)} = \sigma_x. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Через r мы обозначаем переменное расстояние рассматриваемой точки до оси трубы. Третье главное напряжение параллельно оси трубы, по величине занимает среднее значение между τ и R и потому в условия прочности не войдет.

Наиболее напряжен материал стенки по внутренней поверхности трубы, т. е. при $r=r_1$. Формулы (1) в этом случае нам дают

$$\tau = \frac{p_0 (r_1^2 + r_0^2)}{r_0^2 - r_1^2}, \quad R = -p_0.$$

Если вести расчет трубы на основании первой гипотезы, то условие прочности будет

$$\frac{p_0 (r_1^2 + r_0^2)}{r_0^2 - r_1^2} \leq R. \quad (1')$$

При заданном внутреннем радиусе r_1 и заданном давлении p_0 наружный радиус трубы и толщина стенки δ определятся по формулам

$$r_0 = r_1 \sqrt{\frac{R_1 + p_0}{R_1 - p_0}}, \quad \delta = r_1 \left(\sqrt{\frac{R_1 + p_0}{R_1 - p_0}} - 1 \right). \quad (2)$$

Когда внутреннее давление достигает величины допустимого напряжения, выполнение трубы становится невозможным, так как наружный радиус, определяемый на основании формулы (2), получает значение, равное бесконечности.

Положив в основание расчета вторую гипотезу, мы при коэффициенте поперечного сжатия $k=1/4$ будем иметь условие прочности ¹⁾

$$\frac{5}{8} \frac{r_1^2 + 2r_0^2}{r_0^2 - r_1^2} p_0 \leq R_1. \quad (3)$$

Для определения наружного радиуса трубы и толщины стенки получим формулы

$$r_0 = r_1 \sqrt{\frac{8R_1 + 5p_0}{8R_1 - 10p_0}}, \quad \delta = p_1 \left(\sqrt{\frac{8R_1 + 5p_0}{8R_1 - 10p_0}} - 1 \right). \quad (4)$$

Предельное давление, при котором исполнение трубы становится невозможным, будет

$$p_0 = 0,8R_1,$$

т. е. на 20% меньше, нежели в случае расчетов на основании формулы (2).

По третьей гипотезе разность между наибольшим и наименьшим напряжениями не должна превосходить определенной величины. Условие прочности в этом случае будет

$$\sigma_z - \sigma_x \leq R_1$$

или

$$\frac{2p_0 r_0^2}{r_0^2 - r_1^2} \leq R_1. \quad (5)$$

Наружный радиус и толщина стенки будут

$$r_0 = r_1 \frac{R_1}{R_1 - 2p_0}, \quad \delta = r_1 \left(\frac{R_1}{R_1 - 2p_0} - 1 \right). \quad (6)$$

Предельное давление в этом случае будет, очевидно,

$$p_0 = \frac{R_1}{2}.$$

Нетрудно видеть, что толщина стенки, определяемая на основании формулы (6), будет всегда больше, нежели в обоих предыдущих случаях. Когда $p_0 = 0,2x_1$, то формулы (2) и (4) дают для толщины стенки одну и ту же величину:

$$\delta = r_1 (\sqrt{1,5} - 1) = 0,22r_1.$$

Формула (6) в данном случае нам дает величину

$$\delta = r_1 \left(\frac{5}{3} - 1 \right) = 0,29r_1,$$

т. е. величину на 30% большую, нежели формулы (2) и (4).

¹⁾ Love A. E. H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambridge, University Press, vol. 1, 1892, 354 p. См. p. 226.

Случай быстровращающегося диска. Если деформации по направлению оси диска равны нулю, то главные напряжения будут ¹⁾

$$\begin{aligned} \text{радиальное} & \quad \frac{\omega^2 \rho (2\lambda + 3\mu)}{4(\lambda + 2\mu)} (a^2 - r^2), \\ \text{тангенциальное} & \quad \frac{\omega^2 \rho}{4(\lambda + 2\mu)} [(2\lambda + 3\mu) a^2 - (2\lambda + \mu) r^2], \\ \text{осевое} & \quad \frac{\omega^2 \rho \lambda}{4(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{2\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} a^2 - 2r^2 \right). \end{aligned}$$

В этих формулах a обозначает радиус диска; ω — угловую скорость вращения диска, ρ — массу единицы объема диска.

Наибольшей величины достигают напряжения при $r=0$, т. е. на оси диска. В этом случае мы будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\omega^2 \rho (2\lambda + 3\mu) a^2}{4(\lambda + 2\mu)}, \\ \sigma_y &= \frac{\omega^2 \rho (2\lambda + 3\mu) a^2}{4(\lambda + 2\mu)}, \\ \sigma_x &= \frac{\omega^2 \rho \lambda (2\lambda + 3\mu) a^2}{4(\lambda + 2\mu) (\lambda + \mu)}. \end{aligned}$$

На основании первой гипотезы условие прочности будет

$$\frac{\omega^2 \rho (2\lambda + 3\mu) a^2}{4(\lambda + 2\mu)} \leq R_1. \quad (1)$$

Положим коэффициент поперечного сжатия равным $k=1/4$, тогда, как известно, $\lambda=\mu$ и условие прочности (1) переписется так:

$$\frac{5}{12} \omega^2 \rho a^2 \leq R_1. \quad (1')$$

Отсюда для заданного материала и при заданном радиусе диска можем определить предельную безопасную угловую скорость.

Вторая гипотеза нам дает ²⁾

$$\frac{\omega^2 \rho a^2 \mu (3\lambda + 2\mu) (2\lambda + 3\mu)}{8(\lambda + \mu)^2 (\lambda + 2\mu)} \leq R_1 \quad (2)$$

или, полагая коэффициент поперечного сжатия

$$k = \frac{1}{4}, \quad \lambda = \mu,$$

будем иметь

$$\frac{25}{96} \omega^2 \rho a^2 \leq R_1. \quad (2')$$

¹⁾ Love A. E. H. См. стр. 224 и 225 его книги, упомянутой в сноске на стр. 92.

²⁾ Love A. E. H. См. стр. 225 его книги, упомянутой в сноске на стр. 92.

На основании третьей гипотезы будем иметь

$$\frac{\omega^2 \rho a^2 \mu (2\lambda + 3\mu)}{4(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)} \leq R_1 \quad (3)$$

или, полагая

$$k = \frac{1}{4}, \quad \lambda = \mu,$$

получим

$$\frac{5}{24} \omega^2 \rho a^3 \leq R_1. \quad (3')$$

Таким образом, предельная допускаемая угловая скорость получится наибольшей при расчете по формуле (3'). Называя через ω_1 , ω_2 и ω_3 предельные угловые скорости, определяемые по формулам (1'), (2') и (3'), будем иметь следующее между ними соотношение:

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 1 : \frac{8}{5} : \sqrt{2}.$$

§ 9. Формулы сложного сопротивления для чугуна¹⁾

Для чугуна, цемента и других материалов, не имеющих предела упругости, допускаемые напряжения назначаются в зависимости от временного сопротивления. Так как временное сопротивление сжатию обыкновенно больше, нежели растяжению, то предельная прямая AB (см. рис. 7) наклонна к оси абсцисс и угол φ — острый.

Уравнение прямой AB , как мы видели, будет

$$\tau = \frac{1}{2} \sqrt{x_1 x_2} \left[1 - \sigma \frac{x_2 - x_1}{x_2 x_1} \right]. \quad (1)$$

Для более удобного пользования предельной прямой мы напишем ее уравнение в нормальном виде. Для этого введем новые переменные

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \sqrt{x_1 x_2}$$

и угол φ . Тогда уравнение прямой (1) переписется так:

$$\sigma \cos \varphi + \tau \sin \varphi - \tau_0 \sin \varphi = 0. \quad (2)$$

Если в уравнение (2) вместо σ и τ подставить координаты какой-либо точки, то левая часть (2), как известно, представит собой тогда расстояние от этой точки до прямой. Всякий главный круг, определяющий одно из предельных напряженных состояний, должен касаться прямой (2); центр его имеет координаты

$$\sigma' = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} \quad \text{и} \quad \tau' = 0.$$

¹⁾ R o t h P. См. его работу, указанную в сноске ³⁾ на стр. 79.

Вставляя эти величины в уравнение (2), найдем радиус любого предельного главного круга

$$\rho = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2}.$$

В случае чугуна можно положить

$$x_2 = 4x_1.$$

Следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} = 0,6.$$

Из рис. 7 нетрудно видеть, что

$$\tau_0 \sin \varphi = OC = \frac{x_1}{2} (1 + \cos \varphi) = 0,8x_1.$$

В силу этого, уравнение предельной прямой для чугуна напишется так:

$$\sigma \cos \varphi + \tau \sin \varphi - 0,8x_1 = 0. \quad (3)$$

Применим все сказанное к некоторым случаям сложного сопротивления.

Чистый сдвиг. Определим величину напряжений, соответствующих разрушению при чистом сдвиге. Для этого нужно построить соответствующий предельный круг. Так как в случае чистого сдвига $\sigma_z = -\sigma_x$, то, очевидно, центр предельного круга совпадет с началом координат O (см. рис. 7).

Радиус OC этого круга, очевидно, и даст искомое предельное напряжение. Называя предельное напряжение при сдвиге через x_3 , мы на основании предыдущего можем написать

$$x_3 = 0,8x_1.$$

Допускаемое напряжение при сдвиге, очевидно, будет

$$R_3 = 0,8R_1.$$

В случае расчета вала кругового сечения, к которому приложен скручивающий момент M , будем иметь

$$\sigma_z = -\sigma_x = \frac{16M}{\pi d^3} \approx \frac{5M}{d^3}.$$

Для определения диаметра получим уравнение

$$\frac{5M}{d^3} = R_3 = 0,8R_1,$$

откуда

$$d^3 = \frac{5M}{R_1} \cdot 1,25.$$

Эта формула совпадает с тем, что дает теория наибольших растяжений, тогда коэффициент поперечного сжатия $k=1/4$.

Расчет толстостенной трубы. Сохраняя обозначения § 8, будем иметь

$$\sigma_z = p_0 \frac{r_1^2 + r_0^2}{r_0^2 - r_1^2}, \quad \sigma_x = -p_0.$$

Диаметр предельного круга, очевидно, будет

$$\sigma_z - \sigma_x = p_0 \frac{2r_0^2}{r_0^2 - r_1^2}. \quad (4)$$

Координаты центра предельного круга будут

$$\sigma' = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} = \frac{p_0 r_1^2}{r_0^2 - r_1^2}, \quad \tau' = 0.$$

Подставляя эти величины в уравнение (3) предельной прямой, будем иметь для определения размеров трубы уравнение

$$\frac{p_0 r_1^2}{r_0^2 - r_1^2} \cos \varphi - 0,8x_1 = -\frac{p_0 r_0^2}{r_0^2 - r_1^2}. \quad (5)$$

При полученных из уравнения (5) размерах труба будет в предельном напряженном состоянии, если внутреннее давление делается равным p_0 . Так как допускаемые напряжения гораздо ниже предельных, то для практических расчетов в уравнение (5) придется вместо величины x_1 — предельного напряжения при растяжении — поставить величину R_1 . Тогда наружный радиус трубы и толщина стенки определятся из формул

$$r_0 = r_1 \frac{R_1 + 0,75p_0}{R_1 - 1,25p_0} \quad \text{и} \quad \delta = r_1 \left(\frac{R_1 + 0,75p_0}{R_1 - 1,25p_0} - 1 \right).$$

Случай изгиба и кручения. Сохраняя обозначения § 8, будем иметь для определения главных напряжений выражения

$$\sigma_z = \frac{5}{d^3} (M + \sqrt{M^2 + M_1^2}), \quad \sigma_x = \frac{5}{d^3} (M - \sqrt{M^2 + M_1^2}).$$

Диаметр предельного круга для этого случая напряженного состояния будет

$$\sigma_z - \sigma_x = \frac{10}{d^3} \sqrt{M^2 + M_1^2}.$$

Координаты центра предельного круга:

$$\sigma' = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} = \frac{5M}{d^3}, \quad \tau' = 0.$$

Подставляя эти величины в уравнение предельной прямой, будем иметь

$$\frac{5M}{d^3} \cos \varphi - 0,8x_1 = -\frac{5}{d^3} \sqrt{M^2 + M_1^2}.$$

Для определения прочных размеров вала вместо x_1 подставляем прочное сопротивление растяжению R_1 :

$$\frac{R_1 d^3}{10} = 0,375M + 0,625 \sqrt{M^2 + M_1^2}.$$

Эта формула совершенно совпадает с тем, что дает гипотеза наибольших растяжений при $k=1/4$.

К ВОПРОСУ О ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ ЖЕСТКОСТЬЮ УЗЛОВ

Известия С.-Петербургского политехнического института, том 7, отдел техники, естествознания и математики, выпуск 1, стр. 135—144.

§ 1. Постановка задачи

Обычная метода определения дополнительных напряжений основана на следующих двух допущениях:

а) перемещения в ферме с жесткими узлами под действием заданной нагрузки такие же, как и перемещения в соответствующей ферме с идеальными шарнирами под действием той же самой нагрузки. Это допущение равносильно предположению, что изгиб отдельных стержней фермы при деформации не оказывает влияния на величины продольных напряжений стержней, получаемые в предположении шарнирных соединений. Напряжения эти называют «основными напряжениями»;

б) благодаря жесткости узлов отдельные стержни фермы при деформации изгибаются; изгибающий момент есть линейная функция расстояния рассматриваемого поперечного сечения стержня от одного из концов. На основании этого допущения получается известная формула, дающая выражения для изгибающих моментов у концов стержня через углы наклона касательных к изогнутой срединной линии стержня, проведенных в узлах, к хорде, соединяющей эти узлы.

Пусть $1-2$ (рис. 1) — первоначальное положение стержня $1-2$ фермы, а $1'-2'$ — положение того же стержня после деформации. Обозначим через M_1 и M_2 моменты, действующие на стержень $1-2$ в узлах, тогда для определения их имеем

$$M_1 = -\frac{2EJ}{l}(2T_1 + T_2), \quad M_2 = -\frac{2EJ}{l}(T_1 + 2T_2). \quad (1)$$

Здесь

$$T_1 = +\left|\frac{dy}{dx}\right|_1 \quad \text{и} \quad T_2 = +\left|\frac{dy}{dx}\right|_2.$$

Если мы через φ_1 и φ_2 обозначим углы поворота узлов 1 и 2 , а через ω_{12} угол между $1-2$ и $1'-2'$, то формулы (1) можно переписать в таком виде:

$$M_1 = \frac{2EJ}{l}(2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\omega_{12}), \quad M_2 = \frac{2EJ}{l}(\varphi_1 + 2\varphi_2 - 3\omega_{12}). \quad (1)$$

Таким образом, задача об определении дополнительных напряжений в стержне $i - k$ сводится к определению углов ω_{ik} , φ_i , φ_k .

Углы ω_{ik} определяются одним из обычных методов, применяемых к определению перемещений шарнирной фермы. Углы же φ_i ,

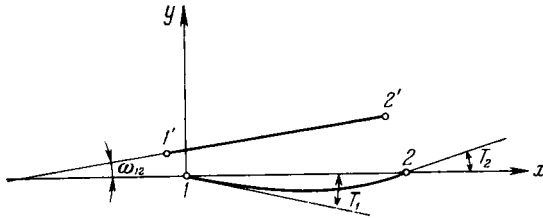


Рис. 1.

φ_k определяются из условий равновесия отдельных узлов. Условия эти приводят нас к системе линейных уравнений вида

$$2\varphi_i \sum \frac{EJ_{ik}}{l_{ik}} + \sum \varphi_k \frac{EJ_{ik}}{l_{ik}} - 3 \sum \omega_{ik} \frac{EJ_{ik}}{l_{ik}} = 0, \quad (2)$$

здесь суммирование распространено на все стержни, сходящиеся в узле i .

Раз углы φ определены, вычисление изгибающих моментов по формулам (1) и соответствующих им дополнительных напряжений не представляет никаких затруднений.

§ 2. Уравнения и их решение

Что касается первого из допущений, на которых построена приближенная метода определения дополнительных напряжений, то оно подробно рассмотрено в известной работе Е. Ю. Пистолькорса ¹⁾, там же дана общая метода для определения дополнительных напряжений и численный пример, относящийся к пространственному покрытию системы Фёппля.

Несколько численных примеров на основании той же методы сделано в статье Г. П. Передерия ²⁾.

На основании этих исследований возможно установить те пределы, в которых пользование первым основным допущением дает для дополнительных напряжений результаты, довольно близкие к действительности. Мы переходим ко второму допущению и по-

¹⁾ Пистолькорс Е. Ю. Расчет ферм с жесткими узлами на основании принципа работы связей. С.-Петербург, Институт инженеров путей сообщения, 1903, отдельный оттиск, стр. 38.

²⁾ Передерий Г. П. Влияние жесткости узлов на усилия и напряжения в частях ферм. Москва, Университетская тип., 1904, стр. 100.

смотрим, в каких случаях оно выражает истинную картину распределения изгибающего момента.

Второе допущение равносильно тому, что прогибы стержня оказывают ничтожно малое влияние на величину изгибающего момента. Чтобы отдать себе отчет о влиянии прогиба на величину момента, представим себе стержень, подверженный действию двух взаимно противоположных сил, эксцентрично приложенных к концам стержня, как показано на рис. 2.

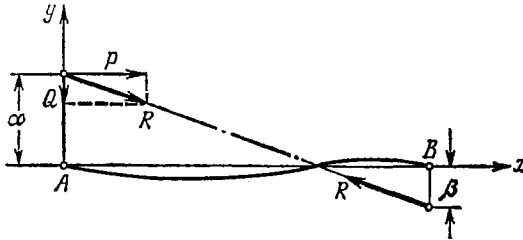


Рис. 2.

Линия действия этих сил в общем случае составляет некоторый угол с хордой AB , соединяющей концы изогнувшегося стержня. Выбирая направление координатных осей, как показано на рис. 2, и разлагая действующие силы на составляющие P и Q , параллельные координатным осям, получим для упругой линии следующее дифференциальное уравнение:

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = P(\alpha - y) - Qx, \quad (3)$$

где через α обозначено расстояние точки приложения силы от центра тяжести левого концевое поперечного сечения.

Если в уравнении (3) вместо Q вставить его выражение через значения M_1 и M_2 изгибающего момента на концах стержня, то мы получим

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \frac{1}{EJ} \left(M_1 - \frac{M_1 + M_2}{l} x \right), \quad (4)$$

где для сокращения введено обозначение:

$$\frac{P}{EJ} = a^2. \quad (5)$$

Принимая во внимание условия на концах стержня, нетрудно из уравнения (4) получить выражение для ординат изогнутой оси стержня в таком виде:

$$y = \frac{1}{P} \left\{ [M_1 \operatorname{ctg} al + M_2 \operatorname{csc} al] \sin ax - M_1 \cos ax - \frac{M_1 + M_2}{l} x + M_1 \right\}. \quad (6)$$

Отсюда дифференцированием получаем выражения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{P} \left\{ a [M_1 \operatorname{ctg} al + M_2 \operatorname{csc} al] \cos ax + M_1 a \sin ax - \frac{M_1 + M_2}{l} \right\}, \quad (7)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{P} \left\{ -a^2 [M_1 \operatorname{ctg} al + M_2 \operatorname{csc} al] \sin ax + M_1 a^2 \cos ax \right\}. \quad (8)$$

Выражение (7) дает возможность определить угол наклона касательной к упругой линии в любом сечении изогнувшегося стержня. Из (8) определяется кривизна упругой линии, а следовательно, и изгибающий момент.

Из выражений (7) и (8) мы видим, что величины углов наклона касательной и упругой линии к хорде и величины моментов зависят не только от величины моментов на концах M_1 и M_2 , но также и от величины al .

Из условия (5) видим, что

$$P = \frac{EJ (al)^2}{l^3}. \quad (9)$$

Сравнивая это с формулой Эйлера для продольного изгиба

$$P' = \frac{EJ \pi^2}{l^2},$$

мы видим, что $(al)^2 = \theta^2$ пропорционально отношению продольной сжимающей силы P к критической силе P' .

Когда сила P мала по сравнению с P' , величина al также мала, тогда выражения можно преобразовать, разлагая $\operatorname{ctg} al$ и $\operatorname{csc} al$ в ряде и сохраняя члены не выше второго порядка:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} al &= \frac{1}{al} \left[1 - \frac{(al)^2}{3} - \dots \right], \\ \operatorname{csc} al &= \frac{1}{al} \left[1 + \frac{(al)^2}{6} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Подставляя это в выражения (7) и (8), получим для углов наклона касательной T_1 и T_2 :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} &= T_1 = -\frac{l}{6EJ} (2M_1 - M_2), \\ \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} &= T_2 = -\frac{l}{6EJ} (2M_2 - M_1). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Из формул (10) получаются выражения для M_1 и M_2 , тождественные с выражением (1).

Следовательно, предположение о линейном законе распределения изгибающего момента будет соответствовать действительности в том случае, когда al — величина малая, т. е. когда продольная сжимающая сила мала по сравнению с эйлеровой критической нагрузкой.

Когда al нельзя считать малым, формулы (1) дают неверные значения для M_1 и M_2 , и для получения моментов на концах необходимо исходить из общей формулы для кривизны (8). Из нее мы получаем зависимость для момента в любом сечении

$$M = -[M_1 \operatorname{ctg} al + M_2 \operatorname{csc} al] \sin ax + M_1 \cos ax. \quad (11)$$

Мы видим, что изменение изгибающего момента по длине стержня не подчиняется линейному закону. Ниже мы подробнее остановимся на исследовании выражения (11), теперь же рассмотрим, как выражаются изгибающие моменты M_1 и M_2 через углы T_1 и T_2 при некоторых частных численных значениях al .

Из (7) имеем

$$T_1 = \frac{a}{P} [M_1 \operatorname{ctg} al + M_2 \operatorname{csc} al] - \frac{M_1 + M_2}{lP},$$

$$T_2 = \frac{a}{P} [M_1 \operatorname{ctg} al + M_2 \operatorname{csc} al] \cos al + \frac{M_1 a}{P} \sin al - \frac{M_1 + M_2}{lP}.$$

Из таблицы 1 мы видим, что чем ближе продольная сжимающая сила к критической эйлеровой нагрузке, тем больше отклоняются

Таблица 1

$a^2 l^2$	$\frac{\pi^2}{10}$	$\frac{\pi^2}{5}$
T_1	$\frac{l}{6EJ} (-2,15 M_1 + 1,13 M_2)$	$\frac{l}{6EJ} (-2,33 M_1 + 1,29 M_2)$
T_2	$\frac{l}{6EJ} (-2,15 M_2 + 1,13 M_1)$	$\frac{l}{6EJ} (-2,33 M_2 + 1,29 M_1)$
M_1	$-\frac{2EJ}{l} (1,93 T_1 + 1,02 T_2)$	$-\frac{2EJ}{l} (1,85 T_1 + 1,03 T_2)$
M_2	$-\frac{2EJ}{l} (1,93 T_2 + 1,02 T_1)$	$-\frac{2EJ}{l} (1,85 T_2 + 1,03 T_1)$
$a^2 l^2$	$\frac{\pi^2}{3}$	$\frac{\pi^2}{2}$
T_1	$\frac{l}{6EJ} (-2,64 M_1 + 1,58 M_2)$	$\frac{l}{6EJ} (-3,28 M_1 + 2,18 M_2)$
T_2	$\frac{l}{6EJ} (-2,64 M_2 + 1,58 M_1)$	$\frac{l}{6EJ} (-3,28 M_2 + 2,18 M_1)$
M_1	$-\frac{2EJ}{l} (1,77 T_1 + 1,06 T_2)$	$-\frac{2EJ}{l} (1,64 T_1 + 1,09 T_2)$
M_2	$-\frac{2EJ}{l} (1,77 T_2 + 1,06 T_1)$	$-\frac{2EJ}{l} (1,64 T_2 + 1,09 T_1)$

истинные значения моментов M_1 и M_2 от тех величин, которые получаются из формул (1).

Так как гибкие стержни оказывают небольшое влияние на углы поворота φ отдельных узлов фермы, то при составлении уравнений (2) пользование формулами (1) не дает особых погрешностей.

Рассмотрим теперь подробнее изменения изгибающего момента по длине стержня.

При малых значениях величины al , т.е. в тех случаях, когда сжимающая продольная сила P мала по сравнению с критической нагрузкой, закон изменения изгибающего момента должен быть близок к линейному. В этом нетрудно убедиться, если в общей формуле (11) разложить $\operatorname{ctg} al$, $\operatorname{csc} al$, $\sin ax$ и $\cos ax$ в ряды и отбросить члены высших порядков.

Тогда будем иметь

$$M = -\frac{(M_1 + M_2)x}{l} + M_1,$$

т.е. линейный закон изменения изгибающего момента. В этом случае наибольшее значение изгибающего момента совпадает с одним из конечных значений и наибольшее дополнительное напряжение будет

$$\sigma = \frac{|M_1|k}{J} \quad \text{или} \quad \frac{|M_2|k}{J}. \quad (12)$$

Полное напряжение получается простым суммированием основного и дополнительного напряжения по формулам

$$S = \sigma_0 + \frac{|M_1|k}{J}, \quad S = \sigma_0 + \frac{|M_2|k}{J}.$$

Когда величина al не мала, закон распределения изгибающего момента может значительно уклоняться от линейного и формулы (12) не дадут нам наибольшего значения дополнительных напряжений.

Рассмотрим, при каких условиях наибольшее значение изгибающего момента не совпадает с одним из конечных значений.

Из (11) имеем

$$\frac{dM}{dx} = -a[M_1 \operatorname{ctg} al + M_2 \operatorname{csc} al] \cos ax - M_1 a \sin ax.$$

Отсюда определяется то значение x , при котором наступает максимум изгибающего момента. Имеем уравнение

$$\operatorname{tg} ax = -\frac{M_2 \operatorname{ctg} al + M_2 \operatorname{csc} al}{M_1}. \quad (13)$$

В том случае, когда $M_2 = -M_1$, т.е. когда стержень подвержен эксцентричному сжатию силой параллельной оси, как показано на

рис. 3, формула (13) дает нам

$$\operatorname{tg} \alpha x = \operatorname{tg} \frac{al}{2},$$

т. е., как и следовало ожидать, максимум изгибающего момента будет в среднем сечении стержня $x=l/2$.

Величина этого максимума определится из формулы (11)

$$M_{\max} = -[M_1 \operatorname{ctg} al - M_1 \operatorname{csc} al] \sin \frac{al}{2} + M_1 \cos \frac{al}{2} = M_1 \operatorname{sc} \left(\frac{al}{2} \right). \quad (14)$$

Это совпадает с формулой в известной работе проф. А. Фан-дер-Флита ¹⁾. Чем большее значение имеет величина al , т. е. чем ближе сжимающая сила P к эйлеровой критической нагрузке, тем больше M_{\max} по сравнению с M_1 , и при $al/2 = \pi/2$, т. е. при $P = EJ\pi^2/l^2$, $M_{\max} = \infty$. В таблице 2 приведены значения M_{\max} для некоторых значений al .

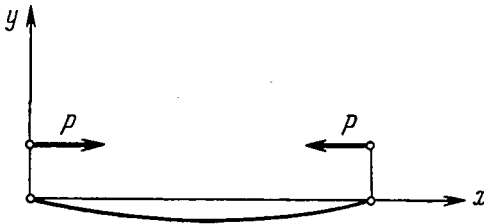


Рис. 3.

Так как на практике коэффициент безопасности сжатых стержней берется не менее четырех, то, следовательно, $a^2 l^2 < \pi^2/4$, $al < \pi/2$. Левая часть выражения (13) будет для всякого поперечного сечения рассматриваемого стержня величиной положительной. Отсюда следует, что максимум изгибающего момента будет в одном из промежуточных сечений стержня только в том случае, если

$$\operatorname{ctg} al + \frac{M_2}{M_1} \operatorname{csc} al < 0, \quad (15)$$

так как $\operatorname{ctg} al$ и $\operatorname{csc} al$ при взятом нами запасе прочности величины положительные, то, значит, M_2 и M_1 должны быть противоположных знаков, т. е. линия действия сил, сжимающих стержень, не должна пересекать стержня между узловыми точками.

Для каждого частного значения al можно установить, пользуясь формулой (15), то максимальное значение M_2 , при котором изгибающий момент имеет максимум в одном из промежуточных сечений стержня. Так, например, при коэффициенте безопасности $n=10$ имеем $a^2 l^2 = \pi^2/10$, $M_2 < -0,546 M_1$, при коэффициенте безопасности

¹⁾ Фан-дер-Флит А. Изгиб сжатых и вытянутых балок с заделанными концами. Известия С.-Петербургского политехнического института, 1904, том 1, вып. 1—2, стр. 3—76; вып. 3—4, стр. 257—279.

$n=5$ получим $a^2 l^2 = \pi^2/5$, $M_2 < -0,165 M_1$. Здесь M_1 считается положительным.

Т а б л и ц а 2

$a^2 l^2$	$\pi^2/10$	$\pi^2/5$	$\pi^2/3$	$\pi^2/2$
Коэффициент безопасности	10	5	3	2
M_{\max}/M_1	1,137	1,310	1,622	2,254

Если абсолютная величина M_2 меньше, нежели то следует из неравенства (15), то тогда изгибающий момент не имеет на протяжении пролета стержня максимума и расчет дополнительных напряжений должен вестись по обычным формулам (12); в противном же случае необходимо вычислить значение этого максимума и уже по нему определять наибольшие значения дополнительных напряжений.

До сих пор мы предполагали, что действующие на стержень силы сжимают его. В случае растягивающих сил пришлось бы повторить прежний вывод. При al малом закон изменения изгибающего момента близок к линейному; когда al не мало, закон изменения момента изобразится формулой, аналогичной формуле (11), только вместо тригонометрических функций получим функции гиперболические. Наибольшее значение изгибающего момента, очевидно, совпадет в этом случае с одним из концевых значений момента, и расчет дополнительных напряжений придется вести по формулам (12).

На этом мы закончим рассмотрение второго допущения, на котором построена обычная метода определения дополнительных напряжений. Мы видим, что только в случае гибких сжатых стержней обычные формулы (12) могут давать для дополнительных напряжений значения, значительно меньшие действительных.

О ВЛИЯНИИ КРУГЛЫХ ОТВЕРСТИЙ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИНКАХ

Известия Киевского политехнического института, 1907, год 7, книга 3, стр. 95—113. Отдельный оттиск, Киев, 1907, 21 стр.

§ 1. Введение

Пластинка, толщина которой δ мала по сравнению с остальными размерами, подвергается действию приложенных по контуру сил, лежащих в срединной плоскости пластинки. Положим, что нам известен закон распределения напряжений. Задача заключается в том, чтобы найти, как изменятся напряжения, если в какой-либо точке пластинки, удаленной от контура, сделать круглое отверстие малого диаметра. Частный случай поставленной задачи решен Г. Киршем ¹⁾, им разобран случай растяжения пластинки. Свое решение Г. Кирш получил путем подбора. Процесса этого подбора решения он не приводит, а дает окончательные значения перемещений и деформаций и показывает, что они удовлетворяют основным уравнениям теории упругости. Недавно вышла по этому же вопросу новая работа П. А. Велихова ²⁾. Хотя автор в начале своей работы и указывает, что ему при отыскании решения много помогла гидродинамическая аналогия, но в действительности опять все сведено к постепенному подбору решения. В заключение этой работы автор приходит к результатам Г. Кирша. Ниже мы подробно остановимся на работе П. А. Велихова, здесь же предлагаем решение задачи прямым путем, а не путем подбора. Такое решение вполне возможно, если рассматривать задачу как плоскую и воспользоваться общим решением ее в случае кругового кольца ³⁾.

§ 2. Плоская задача

В том случае, когда толщина пластинки мала, задачу нахождения напряжений можно значительно упростить, если вместо действительных значений напряжений брать их средние значения по тол-

¹⁾ K i r s c h [G.]. Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1898, Bd. 42, № 29, SS. 797—807.

²⁾ В е л и х о в П. А. Влияние отверстий на распределение напряжений в растянутой полосе. Известия Императорского московского инженерного училища. Часть II. Научные труды, 1907, сентябрь, вып. 1, стр. 11—91.

³⁾ T i m p e A. Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen, einfach gelöst mit Hilfe der Airy'schen Funktion. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1905, Bd. 52, Heft 4, SS. 348—383. См. S. 370.

щине пластинки. Тогда мы приходим к так называемой обобщенной плоской задаче ¹⁾.

Возьмем срединную плоскость за плоскость xy , ось z направим перпендикулярно плоскости пластинки. Так как пластинка подвергается действию сил по контуру и поверхности пластинки свободны от усилий, то при малой толщине можно положить Z_0 ²⁾ $= 0$ по всей пластинке. Если еще принять во внимание, что Z_x и Z_y — нули на поверхностях пластинки, то тогда средние значения напряжений по толщине пластинки должны удовлетворять таким дифференциальным уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Уравнениям этим можно удовлетворить, положив

$$X_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (2)$$

Таким образом, напряженное состояние будет вполне определено, раз мы найдем функцию F . Так как напряжения X_x, Y_y, X_y не независимы, а выражаются через средние значения перемещений u, v , то для того, чтобы напряжения (2) были возможны в упругом теле, необходимо, чтобы неизвестная пока функция F удовлетворяла некоторому уравнению. Уравнение это в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (3)$$

Таким образом, в случае обобщенной плоской задачи все сводится к решению дифференциального уравнения (3). Решение должно быть подобрано таким образом, чтобы были удовлетворены условия на контуре.

Для нашей задачи удобнее ввести полярные координаты r и θ . Обозначая нормальные напряжения в направлении радиуса через \widehat{rr} и в направлении касательной через $\widehat{\theta\theta}$ и сдвигающие напряжения по соответствующим площадкам через $\widehat{r\theta}$, будем иметь ³⁾

$$\widehat{rr} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \widehat{\theta\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad r\widehat{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} \right). \quad (4)$$

Здесь F есть функция от r и θ .

¹⁾ Love A. E. H. Lehrbuch der Elastizität. Autorisierte deutsche Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von Alloys Timpe. Leipzig — Berlin, B. G. Teubner, 1907, 664 S. См. § 94 (SS. 161—163), § 146 (SS. 246—247).

²⁾ Везде пользуемся обозначениями книги A. E. H. Love, указанной в предыдущей сноске).

³⁾ См. стр. 107 книги A. E. H. Love, указанной в сноске ¹⁾.

Дифференциальное уравнение (3) в новых переменных r и θ получает вид ¹⁾

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right] = 0. \quad (5)$$

Воспользуемся общим решением этого дифференциального уравнения для кругового кольца ²⁾

$$\begin{aligned} F = & a_0 \ln r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \ln r + d_0 \theta + \frac{a_1}{2} r \theta \sin \theta + \\ & + (b_1 r^3 + \alpha_1 r^{-1} + \beta_1 r \ln r) \cos \theta - \frac{c_1}{2} r \theta \cos \theta + (d_1 r^3 + \gamma_1 r^{-1} + \\ & + \delta_1 r \ln r) \sin \theta + \sum_{m=2}^{\infty} (a_m r^m + b_m r^{m+2} + a_m r^{-m} + \beta_m r^{-m+2}) \cos m\theta + \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} (c_m r^m + d_m r^{m+2} + \gamma_m r^{-m} + \delta_m r^{-m+2}) \sin m\theta. \quad (6) \end{aligned}$$

Соответствующие напряжения определяются по формулам (4) и будут выражаться таким образом:

$$\begin{aligned} \widehat{r r} = & \frac{a_0}{r^2} + 2b_0 + c_0 (2 \ln r + 1) + \left(\frac{a_1 + \beta_1}{r} + 2b_1 r - \frac{2\alpha_1}{r^3} \right) \cos \theta + \\ & + \left(\frac{c_1 + \delta_1}{r} + 2d_1 r - \frac{2\gamma_1}{r^3} \right) \sin \theta + \sum_{m=2}^{\infty} [m(1-m)a_m r^{m-2} + (m+2-m^2) \times \\ & \times b_m r^m - m(1+m)a_m r^{-m-2} - (m-2+m^2)\beta_m r^{-m}] \cos m\theta + \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} [m(1-m)c_m r^{m-2} + (m+2-m^2)d_m r^m - \\ & - m(1+m)\gamma_m r^{-m-2} - (m-2+m^2)\delta_m r^m] \sin m\theta, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\theta \theta} = & -\frac{a_0}{r^2} + 2b_0 + c_0 (2 \ln r + 3) + \left(6b_1 r + \frac{2d_1}{r^3} + \frac{\beta_1}{r} \right) \cos \theta + \\ & + \left(6d_1 + \frac{2\gamma_1}{r^3} + \frac{\delta_1}{r} \right) \sin \theta + \sum_{m=2}^{\infty} [(m-1)ma_m r^{m-2} + (m+1)(m+2) \times \\ & \times b_m r^m + m(m+1)\alpha_m r^{-m-2} + (m-2)(m-1)\beta_m r^{-m}] \cos m\theta + \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} [(m-1)mc_m r^{m-2} + (m+1)(m+2)d_m r^m + \\ & + m(m+1)\gamma_m r^{-m-2} + (m-2)(m-1)\delta_m r^{-m}] \sin m\theta, \quad (8) \end{aligned}$$

¹⁾ См. стр. 255 книги А. Е. Н. Л о в е, упомянутой в сноске ¹⁾ на стр. 107.

²⁾ См. упомянутую в сноске ²⁾ на стр. 106 работу А. Timpe.

$$\begin{aligned} \widehat{r\theta} = & \frac{\alpha_0}{r^2} + \left(2b_1 r - \frac{2\alpha_1}{r^3} + \frac{\beta_1}{r} \right) \sin \theta - \left(2d_1 r - \frac{2\gamma_1}{r^3} + \frac{\delta_1}{r} \right) \cos \theta + \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} [(m-1) m a_m r^{m-2} + m(m+1) b_m r^m - m(m+1) \alpha_m r^{-m-2} - \\ & - m(m-1) \beta_m r^{-m}] \sin m\theta - \sum_{m=2}^{\infty} [(m-1) m c_m r^{m-2} + \\ & + m(m+1) d_m r^m - m(m+1) \gamma_m r^{-m-2} - (m-1) m \delta_m r^{-m}] \cos m\theta. \quad (9) \end{aligned}$$

Переходим теперь к поставленной общей задаче о влиянии круглых отверстий на распределение напряжений.

§ 3. Граничные условия

За начало координат примем центр кругового отверстия и угол θ будем отсчитывать от горизонтальной оси x (рис. 1).

Сделаем вполне естественное допущение, что влияние отверстия на распределение напряжений сказывается главным образом вблизи отверстия и в точках, достаточно удаленных от отверстия, можно считать напряжение таким же, как если бы отверстия вовсе не было. Сделаем такое допущение, мы сейчас же задачу о влиянии отверстий на распределение напряжения приводим к задаче о круговом кольце, подверженном действию сил, приложенных по его внешнему контуру.

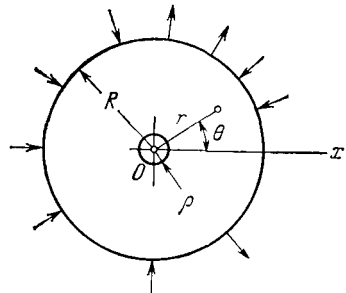


Рис. 1.

Пусть ρ — радиус отверстия, опишем из центра отверстия круг большего радиуса R и, согласно вышесказанному допущению, будем считать, что напряжения по окружности большого круга такие же, как если бы отверстия не существовало.

Если для каждой точки этого круга известны величины напряжения \widehat{rr} и $\widehat{r\theta}$, то мы, разрезая пластинку по кругу и рассматривая напряжения \widehat{rr} и $\widehat{r\theta}$ как внешние силы для кольца с наружным радиусом R и внутренним ρ , можем пользоваться общим решением (6), (7), (8), (9). Напряжения по наружному контуру кольца в самом общем виде представляются так:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{rr} &= A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin m\theta, \\ \widehat{r\theta} &= C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} D_m \sin m\theta. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

По внутреннему же контуру нет никаких усилий, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \widehat{r r} &= 0, \\ \widehat{r \theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{при } r = \rho. \quad (11)$$

Подставляя в выражения (7) и (9) вместо r величины R и ρ и сравнивая полученные результаты с выражениями (10) и (11), найдем ряд уравнений для определения произвольных постоянных a_m , b_m , c_m , d_m , α_m , β_m , γ_m , δ_m . Присоединяя сюда еще условия однозначности перемещений, мы получим число уравнений, достаточное для определения всех произвольных постоянных. Приложим эту общую методу к частным случаям.

§ 4. Пластика подвергается одноосному равномерному растяжению или сжатию

Пусть p — величина этого растягивающего или сжимающего напряжения. Если нет отверстия, то это напряжение постоянно для всех точек пластинки. Вырезав в пластинке отверстие, мы изменим распределение напряжений, так как по контуру отверстия эти напряжения уже не будут равны p , а должны обращаться в нуль. Это измененное напряженное состояние, очевидно, будет симметрично относительно центра отверстия, и напряжение в каждой точке пластинки будет зависеть только от r . Функция F не будет зависеть от θ и должна иметь вид

$$F = a_0 \ln r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \ln r, \quad (12)$$

а соответствующие напряжения

$$\widehat{r r} = 2b_0 + c_0 (1 + 2 \ln r) + \frac{a_0}{r^2},$$

$$\widehat{\theta \theta} = 2b_0 + c_0 (3 + 2 \ln r) - \frac{a_0}{r^2},$$

$$\widehat{r \theta} = 0.$$

Если вырезать из пластинки кольцо с большим наружным радиусом R , то можно считать, что по наружному контуру будет действовать прежнее сжимающее или растягивающее напряжение p . Задача о кольце, подверженном наружному всестороннему сжатию или растяжению, решена. На тот случай, когда наружный радиус очень велик по сравнению с внутренним, напряжения выразятся таким образом:

$$\widehat{r r} = p - \frac{\rho^2}{r^2} p, \quad \widehat{\theta \theta} = p + \frac{\rho^2}{r^2} p. \quad (13)$$

При $\rho = r$, т. е. по контуру отверстия, будем иметь

$$\widehat{r r} = 0, \quad \widehat{\theta \theta} = 2p,$$

т. е. наибольшие напряжения при наличии отверстия в два раза превосходят первоначально равномерно распределенное растягивающее или сжимающее напряжение p . Как видно из формул (13), значительные изменения в напряжениях имеют место только вблизи отверстия. С увеличением r напряжения \widehat{rr} и $\widehat{\theta\theta}$ быстро приближаются к значению p . При $r=10p$

$$\widehat{rr} = 0,99p, \quad \widehat{\theta\theta} = 1,01p,$$

следовательно, наше допущение, что при большом R напряжение можно считать равным p , вполне допустимо.

§ 5. Пластинка подвергается равномерному растяжению или сжатию по двум взаимно перпендикулярным направлениям (рис. 2)

Обозначим через q растягивающее напряжение в направлении оси x , через p — в направлении оси y . Вырежем из нашей пластины кольцо с большим наружным радиусом R , внутренний радиус, равный радиусу отверстия, обозначим через ρ .

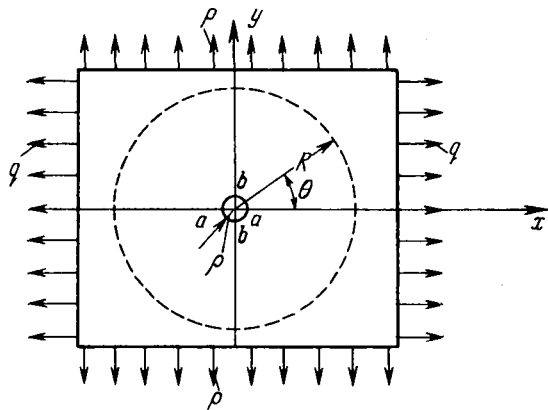


Рис. 2.

Напряжения на наружном контуре кольца будут

$$\widehat{rr} = p \sin^2 \theta + q \cos^2 \theta, \quad \widehat{r\theta} = \frac{p-q}{2} \sin 2\theta.$$

Полагая $\frac{p+q}{2} = n$, $\frac{p-q}{2} = \delta$ и вводя синус и косинус двойного угла, получим

$$\widehat{rr} = n - \delta \cos 2\theta, \quad \widehat{r\theta} = \delta \sin 2\theta. \quad (14)$$

На внутреннем контуре

$$\widehat{r r} = \widehat{r \theta} = 0. \quad (14')$$

Кольцо подвергается равномерно распределенному по наружному контуру растягивающему усилию n , и, кроме того, сжимающему и тангенциальному усилию, распределенным по закону

$$\widehat{r r} = -\delta \cos 2\theta, \quad \widehat{r \theta} = \delta \sin 2\theta. \quad (15)$$

Мы знаем, какие напряжения получатся от равномерного растяжения n , остается определить напряжения, вызываемые усилиями (15). Возьмем функцию F — функцию напряжений в таком виде (см. § 3):

$$F = (ar^2 + br^4 + ar^{-2} + \beta) \cos 2\theta.$$

Соответствующие напряжения будут

$$\left. \begin{aligned} \widehat{r r} &= (-2a - 6\alpha r^{-4} - 4\beta r^{-2}) \cos 2\theta, \\ \widehat{\theta \theta} &= (2a + 12br^2 + 6\alpha r^{-4}) \cos 2\theta, \\ \widehat{r \theta} &= (2a + 6br^2 - 6\alpha r^{-4} - 2\beta r^{-2}) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Произвольные постоянные a , b , α и β должны быть подобраны таким образом, чтобы при $r = \rho$ были выполнены условия (14'), а при $r = R$, где R велико, должны быть выполнены условия (15). Получаем четыре уравнения:

$$\begin{aligned} -2a - 6\alpha R^{-4} - 4\beta R^{-2} &= -\delta, \\ -2a - 6\alpha \rho^{-4} - 4\beta \rho^{-2} &= 0, \\ 2a + 6bR^2 - 6\alpha R^{-4} &= 2\beta R^{-2} = \delta, \\ 2a + 6b\rho^2 - 6\alpha \rho^{-4} - 2\beta \rho^2 &= 0. \end{aligned}$$

Решая их относительно произвольных постоянных и считая R очень большим, найдем

$$a = \frac{\delta}{2}, \quad b = 0, \quad \alpha = \frac{\delta \rho^4}{2}, \quad \beta = -\delta \rho^2;$$

подставляя эти величины в выражения для напряжений (16), получим

$$\begin{aligned} \widehat{r r} &= \left(-\delta - 3\delta \frac{\rho^4}{r^4} + 4\delta \frac{\rho^2}{r^2} \right) \cos 2\theta, \\ \widehat{\theta \theta} &= \left(\delta + 3\delta \frac{\rho^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \widehat{r \theta} &= \left(\delta - 3\delta \frac{\rho^4}{r^4} + 2\delta \frac{\rho^2}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Складывая эти напряжения с напряжениями, обусловленными растягивающими усилиями n , найдем решение поставленной нами

задачи:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{r r} &= n - \frac{\rho^2}{r^2} n - \delta \left(1 - 4 \frac{\rho^2}{r^2} + 3 \frac{\rho^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \widehat{\theta \theta} &= n + \frac{\rho^2}{r^2} n + \delta \left(1 + 3 \frac{\rho^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \widehat{r \theta} &= \delta \left(1 - 3 \frac{\rho^4}{r^4} + 2 \frac{\rho^2}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Из этих формул, как частный случай, получится решение Г. Кирша и П. А. Велихова, относящееся к растянутой по одному направлению пластинки.

Положим $q=0$, тогда $n=p/2$, $\delta=p/2$ и

$$\left. \begin{aligned} \widehat{r r} &= \frac{p}{2} \left\{ 1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \left(1 - 4 \frac{\rho^2}{r^2} + 3 \frac{\rho^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right\}, \\ \widehat{\theta \theta} &= \frac{p}{2} \left\{ 1 + \frac{\rho^2}{r^2} + \left(1 + 3 \frac{\rho^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right\}, \\ \widehat{r \theta} &= \frac{p}{2} \left\{ 1 + 2 \frac{\rho^2}{r^2} - 3 \frac{\rho^4}{r^4} \right\} \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Наибольшие растягивающие напряжения получатся на контуре отверстия в точках a, a (см. рис. 2), т. е. на концах диаметра отверстия, перпендикулярного направлению растягивающей силы. Для этих точек

$$\widehat{\theta \theta} = 3p.$$

В точках b, b , т. е. на концах диаметра, параллельного направлению действующей силы,

$$\widehat{\theta \theta} = -p.$$

Из формул (17) легко получить и другой интересный частный случай, именно: случай чистого сдвига. Для этого положим

$$q = -p,$$

т. е. растяжение по оси y сопровождается равным ему сжатием по оси x . В таком случае $b=0$, $\delta=p$,

$$\left. \begin{aligned} \widehat{r r} &= -p \left(1 - 4 \frac{\rho^2}{r^2} + 3 \frac{\rho^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \widehat{\theta \theta} &= p \left(1 + 3 \frac{\rho^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \widehat{r \theta} &= p \left(1 - 3 \frac{\rho^4}{r^4} + 2 \frac{\rho^2}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Как видно из этих формул, наибольшее растяжение будет в точках a, a (см. рис. 2), где

$$\widehat{\theta \theta} = 4p,$$

в точках b, b будем иметь наибольшее сжатие

$$\widehat{\theta\theta} = -4\rho.$$

Если мы будем скручивать тонкую цилиндрическую трубку, то стенка трубки будет примерно находиться в таких же условиях, как и только что рассмотренная пластинка. Если в стенке сделать круглое отверстие, диаметр которого мал по сравнению с диаметром трубки, то в точках a, a (рис. 3) получим сжимающие напряжения, превосходящие в четыре раза тангенциальные напряжения от кручения. В точках b, b получим растягивающие напряжения.

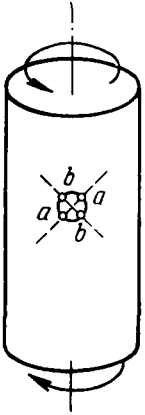


Рис. 3.

§ 6. Случай, когда напряжения меняются по линейному закону

Пусть пластинка подвергается действию растягивающих или сжимающих усилий, причем величина этих усилий пропорциональна расстоянию от некоторой оси mn . Под этот тип напряженного состояния подойдет внецентренное растяжение и сжатие, а также случай чистого изгиба. Задав себе таким образом закон распределения напряжений, посмотрим, как напряжение изменится, если мы сделаем круглое отверстие малого радиуса ρ в точке, удаленной от контура пластинки.

Положим, что в точке, соответствующей центру отверстия, в первоначально цельной пластинке было растягивающее напряжение ρ , расстояние центра отверстия от оси mn (ось нулевого растяжения) обозначим через h (рис. 4). Если из центра отверстия опишем круг большим радиусом R , то получим кольцо, внутренним контуром его будет контур отверстия, наружным — круг большого радиуса R . Если пренебречь влиянием отверстия на величины напряжений в точках, удаленных от отверстия, то легко получить те напряжения, которые действуют по наружному контуру кольца. Напряжения эти будут

$$\widehat{r\bar{r}} = \rho \left(1 - \frac{R \cos \theta}{h} \right) \sin^2 \theta,$$

$$\widehat{r\bar{\theta}} = \frac{\rho}{2} \left(1 - \frac{R \cos \theta}{h} \right) \sin 2\theta.$$

Выражения эти преобразовываем, вводя \sin и \cos кратных дуг, тогда

$$\left. \begin{aligned} \widehat{r\bar{r}} &= \frac{\rho}{2}(1 - \cos 2\theta) + \frac{\rho}{4} \frac{R}{h} (-\cos \theta + \cos 3\theta), \\ \widehat{r\bar{\theta}} &= \frac{\rho}{2} \sin 2\alpha - \frac{\rho}{4} \frac{R}{h} (\sin \theta + \sin 3\theta). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Первые члены в правых частях написанных выражений представляют собой не что иное, как те усилия, которые мы имели бы по наружному контуру кольца, если бы пластинка была равномерно растянута. Вызываемые этими усилиями напряжения у отверстия определяются по формулам (18). Нам остается изучить влияние вторых

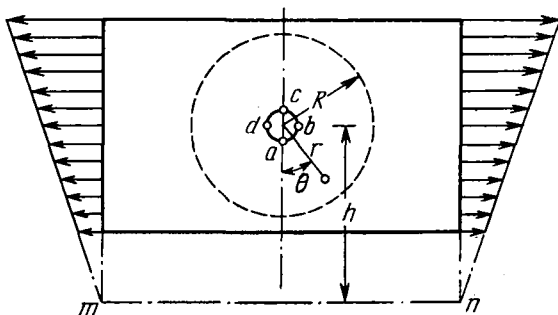


Рис. 4.

членов в выражениях (20) — следовательно, определить напряжения, соответствующие таким усилиям на наружном контуре:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{r\bar{r}} &= \frac{p}{4} \frac{R}{h} (-\cos \theta + \cos 3\theta), \\ \widehat{r\bar{\theta}} &= -\frac{p}{4} \frac{R}{h} (\sin \theta + \sin 3\theta). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Функция напряжений F должна иметь в данном случае форму

$$F = \frac{a_1}{2} r\theta \sin \theta + (b_1 r^3 + \alpha_1 r^{-1} + \beta_1 r \ln r) \cos \theta + \\ + (a_3 r^3 + b_3 r^5 + \alpha_3 r^{-3} + \beta_3 r^{-1}) \cos 3\theta.$$

Соответствующие напряжения будут

$$\left. \begin{aligned} \widehat{r\bar{r}} &= \left(\frac{a_1 + \beta_1}{r} + 2b_1 r - \frac{2\alpha_1}{r^3} \right) \cos \theta + \\ &+ (-6a_3 r - 4b_3 r^3 - 12\alpha_3 r^{-5} - 10\beta_3 r^{-3}) \cos 3\theta, \\ \widehat{\theta\bar{\theta}} &= \left(6b_1 r + \frac{2\alpha_1}{r^3} + \frac{\beta_1}{r} \right) \cos \theta + \\ &+ (6a_3 r + 20b_3 r^3 + 12\alpha_3 r^{-5} + 2\beta_3 r^{-3}) \cos 3\theta, \\ \widehat{r\bar{\theta}} &= \left(2b_1 r - \frac{2\alpha_1}{r^3} + \frac{\beta_1}{r} \right) \sin \theta + \\ &+ (6a_3 r + 12b_3 r^3 - 12\alpha_3 r^{-5} - 6\beta_3 r^{-3}) \sin 3\theta. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Произвольные постоянные должны быть подобраны таким образом, чтобы при $r=R$ были выполнены условия (21). При $r=\rho$ должны иметь

$$\widehat{r r} = 0 \quad \text{и} \quad r\widehat{\theta} = 0.$$

Сравнивая коэффициенты при $\cos \theta$ и $\sin \theta$, получим для определения постоянных $a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1$ систему уравнений:

$$\frac{a_1 + \beta_1}{R} + 2b_1R - \frac{2\alpha_1}{R^3} = -\frac{p}{4} \cdot \frac{R}{h},$$

$$\frac{a_1 + \beta_1}{\rho} + 2b_1\rho - \frac{2\alpha_1}{\rho^3} = 0,$$

$$2b_1R - \frac{2\alpha_1}{R^3} + \frac{\beta_1}{R} = -\frac{p}{4} \cdot \frac{R}{h},$$

$$2b_1\rho - \frac{2\alpha_1}{\rho^3} + \frac{\beta_1}{\rho} = 0.$$

Сразу видно, что $a_1=0$, тогда четыре уравнения приводятся к двум. Чтобы определить из них три постоянные b_1, α_1 и β_1 , нужно воспользоваться условием однозначности перемещений. В данном случае это условие будет ¹⁾

$$\beta_1 = -\frac{\mu}{2(\lambda + \mu)} a_1 = 0,$$

тогда при большом R

$$b_1 = -\frac{p}{8h}, \quad \alpha_1 = -\frac{p \cdot \rho^4}{8h}.$$

Сравнивая коэффициенты при $\cos 3\theta$ и $\sin 3\theta$, найдем четыре уравнения для определения постоянных $a_3, b_3, \alpha_3, \beta_3$:

$$-6a_3R - 4b_3R^3 - 12\alpha_3R^{-5} - 10\beta_3R^{-3} = \frac{p}{4} \cdot \frac{R}{h},$$

$$-6a_3\rho - 4b_3\rho^3 - 12\alpha_3\rho^{-5} - 10\beta_3\rho^{-3} = 0,$$

$$6a_3R + 12b_3R^3 - 12\alpha_3R^{-5} - 6\beta_3R^{-3} = -\frac{p}{4} \cdot \frac{R}{h},$$

$$6a_3\rho + 12b_3\rho^3 - 12\alpha_3\rho^{-5} - 6\beta_3\rho^{-3} = 0.$$

При R большом находим

$$b_3 = 0, \quad a_3 = -\frac{p}{24h}, \quad \beta_3 = \frac{p\rho^4}{8h}, \quad \alpha_3 = -\frac{p\rho^6}{12h}.$$

¹⁾ См. стр. 374 работы А. Тимпе, приведенной в сноске ³⁾ на стр. 106.

Подставляя полученные значения произвольных постоянных в выражения для напряжений (22), получим

$$\begin{aligned} \widehat{r r} &= \frac{\rho}{4} \left\{ \left(-\frac{r}{h} + \frac{\rho^4}{hr^3} \right) \cos \theta + \left(\frac{r}{h} + \frac{4\rho^6}{hr^5} - \frac{5\rho^4}{hr^3} \right) \cos 3\theta \right\}, \\ \widehat{\theta \theta} &= \frac{\rho}{4} \left\{ \left(-3\frac{r}{h} - \frac{\rho^4}{hr^3} \right) \cos \theta + \left(-\frac{r}{h} - \frac{4\rho^6}{hr^5} + \frac{\rho^4}{hr^3} \right) \cos 3\theta \right\}, \\ \widehat{r \theta} &= \frac{\rho}{4} \left\{ \left(-\frac{r}{h} + \frac{\rho^4}{hr^3} \right) \sin \theta + \left(-\frac{r}{h} + \frac{4\rho^6}{hr^5} - \frac{3\rho^4}{hr^3} \right) \sin 3\theta \right\}. \end{aligned}$$

При $r=\rho$, т. е. на контуре отверстия,

$$\widehat{r r} = \widehat{r \theta} = 0, \quad \widehat{\theta \theta} = \frac{\rho}{4} \left\{ -4\frac{\rho}{h} \cos \theta - \frac{4\rho}{h} \cos 3\theta \right\},$$

при $\theta=0$ в точке a (см. рис. 4)

$$\widehat{\theta \theta} = -2\rho \frac{\rho}{h},$$

при $\theta=90^\circ$ или $\theta=270^\circ$ в точках b и d

$$\widehat{\theta \theta} = 0,$$

при $\theta=180^\circ$ в точке c

$$\widehat{\theta \theta} = +2\rho \frac{\rho}{h}.$$

Налагая полученные величины напряжений на те, что найдутся для простого растяжения по формулам (18), получим решение для задачи о распределении напряжений в случае внецентренного растяжения, внецентренного сжатия и чистого изгиба.

Пользуясь общими формулами § 3, можно задачу решить и в самом общем случае, если бы для того представилась необходимость. Заметим, что указанная метода может быть распространена и на случай задачи в трех измерениях, так как задача о деформации тела, ограниченного двумя концентрическими сферами, решена в самом общем виде. Считая, что по поверхности внутренней сферы никаких усилий нет, а по наружной поверхности усилия такие же, как и в том случае, когда нет внутри малой сферической пустоты, можно задачу решить в самом общем виде.

§ 7. Перемещения в случае простого растяжения

Рассматривая задачу о влиянии круглых отверстий на распределение напряжений в пластинке как обобщенную плоскую задачу, мы пришли к дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$\Delta^2 \Delta^2 F = 0.$$

К такому же уравнению пришли бы мы и в том случае, если бы считали деформацию плоской. Поэтому полученный нами закон распределения напряжений при простом растяжении совершенно совпадает с результатами Г. Кирша. Если от напряжений перейти к определению перемещений, то тут такого совпадения уже не получится.

Пусть u и v — перемещения по направлениям x (направление растяжения) и y , λ и μ — коэффициенты Ламэ, тогда полученные Г. Киршем перемещения представятся в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\rho}{\mu} \left\{ \frac{\lambda + \mu}{3\lambda + 2\mu} x + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \frac{\rho^2 x}{r^2} + \frac{(r^2 - \rho^2)(x^2 - 3y^2)\rho^2 x}{4r^6} \right\}, \\ v &= \frac{\rho}{\mu} \left\{ -\frac{\lambda}{2(3\lambda + 2\mu)} y - \frac{\mu}{2(\lambda + \mu)} \frac{\rho^2 y}{r^2} + \frac{(r^2 - \rho^2)(3x^2 - y^2)\rho^2 y}{4r^6} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Эти перемещения получены Г. Киршем в предположении, что по поверхностям пластинки распределены нормальные напряжения Z_0 по такому закону, что по оси z пластинка испытывает во всех точках одно и то же относительное сжатие

$$\frac{\rho\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}. \quad (2)$$

Следовательно, для перехода от перемещений (1) к случаю плоской деформации нужно на деформации, приведенные у Г. Кирша, наложить растяжение в направлении оси z , равное по величине сжатию (2). Тогда перемещения будут следующие:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\rho}{\mu} \left\{ \frac{\lambda + 2\mu}{4(\lambda + \mu)} x + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \frac{\rho^2 x}{r^2} + \frac{(r^2 - \rho^2)(x^2 - 3y^2)\rho^2 x}{4r^6} \right\}, \\ v &= \frac{\rho}{\mu} \left\{ -\frac{\lambda}{4(\lambda + \mu)} y - \frac{\mu}{2(\lambda + \mu)} \frac{\rho^2 y}{r^2} + \frac{(r^2 - \rho^2)(3x^2 - y^2)\rho^2 y}{4r^6} \right\}. \end{aligned} \right\}$$

Чтобы от перемещений в случае плоской деформации перейти к перемещениям в случае обобщенной плоской задачи, нужно вместо λ поставить величину

$$\frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Тогда перемещения будут

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\rho}{\mu} \left\{ \frac{\lambda + \mu}{3\lambda + 2\mu} x + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\rho^2 x}{r^2} + \frac{(r^2 - \rho^2)(x^2 - 3y^2)\rho^2 x}{4r^6} \right\}, \\ v &= \frac{\rho}{\mu} \left\{ -\frac{\lambda}{2(3\lambda + 2\mu)} y - \frac{\mu(\lambda + 2\mu)}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{\rho^2 y}{r^2} + \frac{(r^2 - \rho^2)(3x^2 - y^2)\rho^2 y}{4r^6} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Следовательно, для удаленных точек, т. е. при r большом, перемещения (3), как и нужно было ожидать, одинаковы с перемещениями (1), полученными Г. Киршем. Вблизи отверстия перемещения (1) и (3) различны.

При $\rho=r$, т. е. на контуре отверстия,

$$u = \frac{\rho^3 (\lambda + \mu) x}{\mu (3\lambda + 2\mu)} = \frac{3\rho x}{E},$$

$$v = -\frac{\rho (\lambda + \mu) y}{\mu (3\lambda + 2\mu)} = -\frac{\rho y}{E}.$$

Круговой контур отверстия обращается в эллиптический.

§ 8. Растяжение пластинки конечной ширины

В наших выводах мы везде предполагали, что диаметр круглого отверстия весьма мал по сравнению с размерами пластинки. На практике приходится встречаться с такими случаями, где поставленное в основание выводов предположение не имеет места — в таком случае полученные результаты не могут быть прилагаемы непосредственно — нужны дополнительные исследования.

Возьмем особенно часто встречающийся случай растяжения пластинки конечной ширины $2b$ и постараемся оценить, как велики будут отклонения действительных напряжений от тех, что мы получили в параграфе пятом (формулы (18)) для пластинки безграничных размеров. Если мы пересечем пластинку по оси y (рис. 5), то, прилагая формулы (18), найдем, что сумма всех растягивающих усилий по плоскости сечения будет

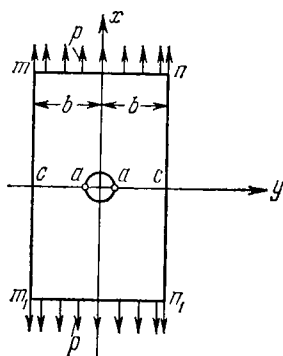


Рис. 5.

$$2 \int_{r=\rho}^{r=b} \frac{\rho}{2} \left\{ 1 + \frac{\rho^2}{r^2} + 1 + \frac{3\rho^4}{r^4} \right\} dr = 2pb \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho^2}{b^2} + \frac{\rho^4}{b^4} \right) \right]. \quad (1)$$

Из полученной формулы видно, что при отношении $\rho/b < 1/7$ разность между суммой усилий, вычисленной по формуле (18) для пластинки бесконечной ширины, и действительной силой, растягивающей пластинку ширины $2b$, не превосходит 1%; следовательно, формулы (18) в данном случае вполне применимы. На практике часто отношение ρ/b достигает значения $1/4$ (такое соотношение встречается в случае заклепочных отверстий). В этом случае разность между суммой растягивающих усилий, вычисленной по формуле (1), и действительной растягивающей силой несколько больше 3%. Если через ρ обозначим величину растягивающих напряжений по концам пластинки, то нужно ожидать, что в точках a, a (см. рис. 5) растягивающие напряжения больше 3ρ , т. е. больше того напряжения, которое получилось бы в точках a, a при бесконечной ширине. Чтобы оценить величину необходимой поправки, допустим, что взятая нами

пластинка составляет часть растянутой пластинки бесконечной ширины, тогда по боковым сторонам пластинки mm_1 и nn_1 будут действовать как нормальные усилия Y_y , так и тангенциальные усилия X_y .

Выражения для них могут быть получены из формул (18):

$$\left. \begin{aligned} Y_y &= \frac{\rho^2 p}{2} \left\{ -\frac{x^2 - b^2}{(b^2 + x^2)^2} + \frac{(2b^2 + 2x^2 - 3\rho^2) [(b^2 + x^2)^2 - 8b^2 x^2]}{(b^2 + x^2)^4} \right\}, \\ X_y &= -\rho^2 p \left\{ \frac{bx}{(x^2 + b^2)^2} + \frac{2bx(2b^2 + 2x^2 - 3\rho^2)(x^2 - b^2)}{(b^2 + x^2)^4} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

При $x=0$, т. е. в точках c , c при $\rho/b=1/4$,

$$Y_y = 0,0878 p. \quad (3)$$

С возрастанием x напряжения Y_y быстро убывают, при $x=b/2$ они близки к нулю, далее становятся отрицательными.

При $x=0$ напряжения $X_y=0$.

Если мы теперь из пластинки бесконечной ширины вырезаем пластинку шириной $2b$, то для того чтобы напряжения у отверстия остались прежними, необходимо по сторонам mm_1 и nn_1 приложить усилия, равные Y_y и X_y , заменяющие действие отброшенной части пластинки на вырезанную полоску шириной $2b$.

В действительности этих усилий по боковым сторонам пластинки нет, и потому распределение напряжений будет несколько иным, чем то следует из формул (18). Отбрасывание растягивающих усилий Y_y , очевидно, увеличит растягивающие напряжения в точках a , a . Если бы Y_y везде имели свое максимальное значение $0,0878 p$ (см. формулу (3)), то тогда их отбрасывание вызвало бы увеличение растягивающих усилий в точках a , a примерно на ту же величину, т. е. на $0,0878 p$. Так как Y_y быстро убывает с возрастанием x , то нужно полагать, что отбрасывание этих усилий вызовет еще меньшие изменения напряжений в точках a , a . Рассмотрим теперь, как скажется на величине напряжений в точках a , a отбрасывание усилий X_y . Если мы составим сумму этих усилий по сторонам mm_1 и nn_1 , меняя x от нуля до ∞ , то получим

$$2 \int_0^{\infty} X_y dx = 2pb \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\rho^2}{b^2} + \frac{\rho^4}{b^4} \right) \right\}. \quad (4)$$

Сравнивая этот результат с формулой (1), видим, что усилия X_y по боковым сторонам пластинки вместе с растягивающими усилиями по сечению cc уравнивают растягивающую силу $2pb$, приложенную по концам. Отбрасывание усилий X_y , очевидно, вызовет увеличение растягивающих напряжений по сечению cc . Если допустить, что это увеличение распределяется по закону, определяемому формулами (18), то растягивающие усилия в точках a , a возрастут при $\rho/b=1/4$ примерно на $0,09 p$. Приняв во внимание

влияние отбрасывания усилий Y_u , мы можем утверждать, что в случае растяжения пластинки конечной ширины $2b$ при отношении $\delta/b=1/4$ растягивающие усилия в точках a , a не больше $3,18\rho$. То есть возрастание напряжений в опасных точках для данного случая не превосходит 6%. При меньшем отношении ρ/b влияние конечности ширины пластинки будет еще меньшим.

§ 9. Работа П. А. Велихова

Статья П. А. Велихова нас заинтересовала потому, что мы ожидали в ней найти прямое решение задачи, поставленной и путем подбора решенной Г. Киршем. Первую часть своей статьи автор посвятил изложению начал гидродинамики и описанию некоторых гидродинамических аналогий. Аналогии эти весьма важны в теории упругости, они придают большую наглядность задачам о кручении призм, они же помогли А. Фёплю решить поставленную им задачу о скручивании валов переменного диаметра ¹⁾. Мысль о применении гидродинамической аналогии к решению задачи о распределении напряжений в пластинках не представляется новой. В 1898 году проф. Х. Хелл-Шоу ²⁾ пользовался прибором, в котором для иллюстрации распределения напряжений в пластинке жидкость пропускалась тонким слоем между двумя параллельными стеклянными пластинками. Этим прибором пользовался Джон Смит ³⁾ для изучения распределения напряжений в некоторых частях обшивки судов. Гидродинамическая аналогия в таком виде, как она представлена у П. А. Велихова, дает только указания на характер распределения напряжений, но не дает никаких численных результатов, как то имеет место в случае кручения. В конце концов автору все же пришлось определять коэффициенты, идя медленным и утомительным путем последовательного подбора. Цель этого подбора для нас тем более не ясна, что заранее известен тот результат, к которому придем — решение Г. Кирша.

Для получения экспериментальным путем закона распределения напряжений интересно было бы в этом случае воспользоваться другой аналогией, именно аналогией между распределением напряжений в случае плоской задачи и изменением кривизны изогнутой пластинки, подчиненной некоторым определенным условиям на

¹⁾ F ö p l A. Über die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser. Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Akademie der Wissenschaften zu München, 1906, Jahrgang 1905, Bd. 35, 3 Juni, SS. 249—262.

²⁾ [H e l e - S h a w H. S. A new instrument for drawing envelopes, and its application to the teeth of wheels and for other purposes. Report of the sixty-eighth meeting of the British Association for the advancement of science. Held at Bristol in september 1898. London, J. Murray, 1899, 1096 p.+112 p. См. pp. 619—627.]

³⁾ S m i t h J. An application of stream-line apparatus to determine the direction and approximate magnitudes of the principal stresses in certain parts of ships. Engineering, 1906, vol. 82, September 28, pp. 436—439.

контуре ¹⁾. В обоих случаях задача приводится к решению одного и того же уравнения

$$\Delta^2 \Delta^2 F = 0.$$

Хотя при составлении первой части своей работы автор пользовался таким классическим сочинением, как курс гидродинамики Г. Лэмба ²⁾, но изложение не везде достаточно ясно, есть и ошибки. Например, на стр. 17 говорится: « ω_1 , ω_2 и ω_3 представляют собой угловые скорости вращения всего тела, как целого, вокруг мгновенных осей». На самом деле это ведь не так, величины ω_1 , ω_2 и ω_3 — функции координат и при переходе от одного элемента тела к другому меняют свою величину.

Вторая часть работы П. А. Велихова посвящена подбору выражений для напряжений. В самом начале автором не установлено, что он будет трактовать задачу как случаи плоской деформации, и потому в дальнейшем изложении ему приходится делать ряд оговорок, например, на стр. 41 при определении напряжений Y_z , Z_x , на стр. 46 относительно напряжения Z_z — это делает само изложение запутанным. При составлении выражений для перемещений на стр. 48 автор почему-то пропускает произвольные функции, которые войдут при интегрировании, они должны быть так определены, чтобы исключить перемещения пластинки, как целого. При определении коэффициентов, на стр. 50, автор пользуется положением, что распределение напряжений не зависит от упругих свойств материала. В случае плоской задачи это всегда верно только для односвязных контуров, для сложных контуров необходимо еще выполнение дополнительных условий ³⁾. (В случае, разобранным у П. А. Велихова, эти условия соблюдены.)

При исследовании пластинки конечной ширины автор подбирает коэффициенты таким образом, чтобы сумма растягивающих усилий по поперечному сечению, проходящему через центр отверстия, равнялась силе, растягивающей пластинку; при этом автор почему-то пропускает напряжения X_y , которые, при выбранных величинах коэффициентов, будут действовать по продольным сторонам пластинки. Результаты, полученные автором для отношения $a/b=1/4$, кажутся нам несколько преувеличенными. Вычисленные автором величины наибольших деформаций также отличаются от

¹⁾ W i e g h a r d t [К.]. Über ein Verfahren, verwickelte theoretische Spannungsverteilungen auf experimentellem Wege zu finden. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1905, Bd. 49, № 38, SS. 1568—1569.

²⁾ L a m b Н. Hydrodynamics. Cambridge, University Press, 1895, 604 p. [Перевод на русский язык с шестого английского издания: Л а м б Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947, 928 стр.]

³⁾ M i c h e l l J. H. On the direct determination of stress in an elastic solid, with application to the theory of plates. Proceedings of the London Mathematical Society [1899], 1900, vol. 31, № 686, pp. 100—124. См. p. 112.

полученных нами, так как они определялись при условии существования напряжений Z_z .

Третья часть работы П. А. Велихова посвящена опытам и практическим выводам. Важно отметить, что автор стоит на точке зрения «теории максимальных касательных напряжений» и, следовательно, теория эта у нас в России уже находит практическое применение, чего нельзя не приветствовать. Нужно пожалеть, что при изучении влияния четырех отверстий на распределение напряжений автор не применил световой методы, которая могла бы дать достаточно точные числовые результаты.

Полученные автором теоретические выводы вполне применимы к случаю отверстий, не заполненных заклепками. При наличии заклепки задача становится гораздо сложнее — здесь пока теория ничего не дает, и выводы, сделанные автором относительно диаметра заклепочной головки, относительно влияния направления зигзага и расстояния между осями заклепок, можно принять только в том случае, если они не уклоняются от выработанных практикой норм.

12 октября 1907 года

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ В КРУГОВОМ КОЛЬЦЕ, СЖАТОМ ДВУМЯ ВЗАИМНО ПРОТИВПОЛОЖНЫМИ СИЛАМИ

Известия Киевского политехнического института, 1909, год 9, книга 1, стр. 21—37. Сокращенный вариант: On the distribution of stresses in a circular ring compressed by two forces acting along a diameter. Philosophical Magazine and Journal of Sciences, 1922, series 6, vol. 44, № 263, pp. 1014—1019. Его перепечатка: Timoshenko S. P., The collected papers. McGraw-Hill book company Ltd, New York—London—Toronto, 1953, pp. 334—337.

§ 1. Введение

При расчете сжатого кольца (рис. 1) исходят или из гипотезы линейного закона распределения напряжений по плоскости поперечного сечения кольца, или из гипотезы плоских сечений, приводящей к гиперболическому закону распределения напряжений.

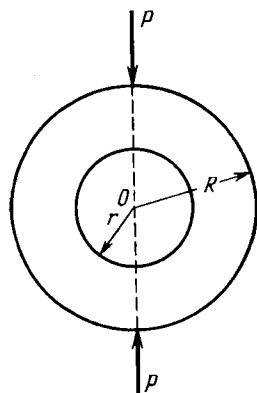


Рис. 1.

В случае кольца прямоугольного поперечного сечения малой толщины (толщину мерим в направлении, перпендикулярном плоскости кольца) или в случае длинного пустотелого цилиндра с наружным радиусом R и внутренним r (подобный случай встречается при расчете полых мостовых катков) задача об определении напряжений приводится к плоской задаче теории упругости и может быть для заданного отношения R/r решена с любой степенью точности.

В настоящей статье приводим подробный расчет для того случая, когда $R/r=2$.

Для сравнения даны также те результаты, к которым приводят две вышеупомянутые гипотезы.

§ 2. Сжатие кругового диска

Если через l обозначим толщину диска (длину катка), то функция напряжений ¹⁾ для какой-либо точки A (рис. 2) будет

$$F = \frac{P}{l\pi} \left(\frac{r^2}{2R} - r_1\varphi_1 \sin \varphi_1 - r_2\varphi_2 \sin \varphi_2 \right). \quad (1)$$

¹⁾ Love A. E. H. Lehrbuch der Elastizität. Autorisierte Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von Aloys Timpe. Leipzig — Berlin, B. G. Teubner, 1907, 664 S. См. S. 256.

Напряжение, соответствующее функции (1), составит из трех элементов:

1) из равномерного растяжения в плоскости кольца

$$\sigma_1 = \frac{P}{l\pi R},$$

2) из сжатия по направлению r_1 :

$$\sigma_{r_1} = -\frac{2P \cos \varphi_1}{l\pi r_1},$$

3) из сжатия по направлению r_2 :

$$\sigma_{r_2} = -\frac{2P \cos \varphi_2}{l\pi r_2}.$$

Рассмотрим закон распределения напряжений по горизонтальному диаметральному сечению ab диска (рис. 3).

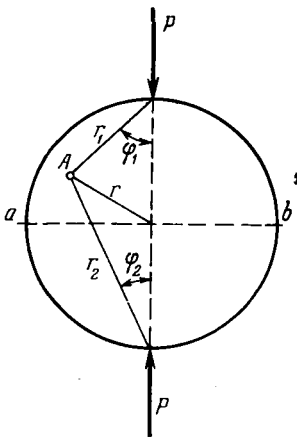


Рис. 2.

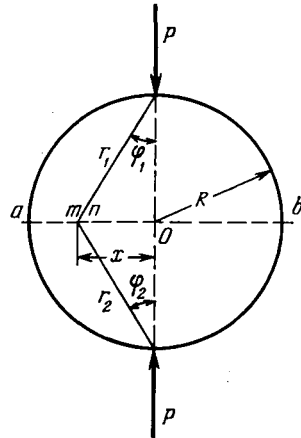


Рис. 3.

Для любой элементарной площадке этого сечения, находящейся на расстоянии x от центра O ,

$$r_1 = r_2 = \sqrt{R^2 + x^2}$$

и

$$\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}.$$

Радиальные напряжения σ_{r_1} и σ_{r_2} в сумме дадут напряжение, нормальное к площадке mn и равное

$$-2 \frac{2P \cos \varphi_1}{l\pi r_1} \cos^2 \varphi_1 = -\frac{4P}{l\pi} \frac{R^3}{(R^2 + x^2)^2}.$$

Если мы примем во внимание равномерное растяжение σ_1 , то окончательно нормальное напряжение по площадке mn будет

$$\sigma = \frac{P}{\pi R} \left[1 - \frac{4R^4}{(R^2 + x^2)^2} \right]. \quad (2)$$

Тангенциальное напряжение по той же площадке, очевидно, будет равно нулю. На рис. 4 закон изменения напряжения σ представлен

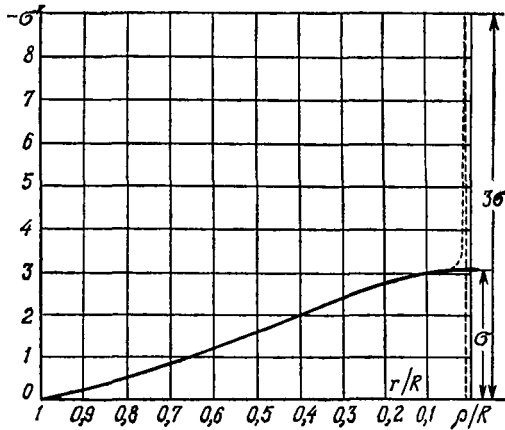


Рис. 4.

графически. Наибольшее напряжение соответствует центру диска и равно $3P/\pi R$.

Ряд значений заключенного в скобки множителя формулы (2) приведен в таблице А.

Таблица А

x	0	0,1	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
$\sigma/\pi R/P$	-3	-2,92	-2,70	-1,96	-1,56	-1,16	-0,49	0

Если в центре диска сделать отверстие, то произойдет перераспределение напряжений, и если диаметр отверстия мал по сравнению с диаметром диска, то значительные изменения в величине напряжений произойдут лишь вблизи отверстия. Изменения напряжений по горизонтальному диаметральному сечению с достаточной точностью

можно определить, пользуясь формулой¹⁾

$$\sigma' = \sigma \left(2 + \frac{\rho^2}{x^2} + 3 \frac{\rho^4}{x^4} \right). \quad (3)$$

Здесь через x обозначено расстояние по горизонтальному диаметру от центра диска и через ρ — радиус отверстия. Мы видим, что при расстоянии $x=10\rho$ влияние отверстия несколько больше $1/2\%$, при дальнейшем увеличении x влияние отверстия быстро уменьшается. На рис. 4 пунктиром показано изменение напряжений в том случае, когда $\rho=0,01R$.

Если отверстие не очень мало, формула (3) не даст нам точных результатов, и для определения напряжений придется идти иным путем.

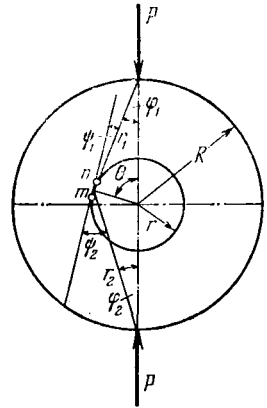


Рис. 5.

§ 3. Распределение напряжений по окружности, концентрической с наружным контуром кольца

Определим напряжение по любому элементу mn поверхности цилиндра радиуса r (рис. 5).

Нормальное напряжение определится из следующей формулы

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_{r_1} \sin^2 \psi_1 + \sigma_{r_2} \sin^2 \psi_2 = \frac{2P}{\pi} \left(\frac{1}{2R} - \frac{\cos \varphi_1}{r_1} \sin^2 \psi_1 - \frac{\cos \varphi_2}{r_2} \sin^2 \psi_2 \right). \quad (4)$$

Выразим это напряжение в зависимости от радиуса r и центрального угла θ . Из рис. 5 имеем

$$\begin{aligned} r_1^2 &= r^2 \sin^2 \theta + (R - r \cos \theta)^2, \\ r_2^2 &= r^2 \sin^2 \theta + (R + r \cos \theta)^2, \\ \cos \varphi_1 &= \frac{R - r \cos \theta}{r_1}, \quad \cos \varphi_2 = \frac{R + r \cos \theta}{r_2}, \\ \sin \psi_1 &= \cos (\theta + \varphi_1), \quad \sin \psi_2 = \cos (\theta - \varphi_2). \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в формулу (4), получим

$$\sigma = \frac{2P}{\pi R} \left[\frac{1}{2} - \frac{\left(1 - \frac{r}{R} \cos \theta\right) \left(\frac{r}{R} - \cos \theta\right)^2 \left(1 + \frac{r}{R} \cos \theta\right) \left(\frac{r}{R} + \cos \theta\right)^2}{\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 1 - 2 \frac{r}{R} \cos \theta\right]^2 \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 1 + 2 \frac{r}{R} \cos \theta\right]^2} \right]. \quad (5)$$

¹⁾ См. стр. 102 нашей работы «О влиянии круглых отверстий на распределение напряжений в пластинках». Известия Киевского политехнического института, 1907, год 7, книга 3, стр. 95—113.

Касательное напряжение τ по тому же элементу mn найдется из формулы

$$\tau = + \frac{2P}{l\pi} \left[\frac{\cos \varphi_1}{r_1} \cdot \frac{\sin 2\psi_1}{2} + \frac{\cos \varphi_2}{r_2} \cdot \frac{\sin 2\psi_2}{2} \right].$$

Выражая входящие в эту формулу величины через r и θ , получим

$$\tau = + \frac{2P}{l\pi R} \sin \theta \times \left[\frac{\left(1 - \frac{r}{R} \cos \theta\right) \left(\cos \theta - \frac{r}{R}\right)}{\left[\frac{r^2}{R^2} \sin^2 \theta + \left(1 - \frac{r}{R} \cos \theta\right)^2\right]^2} + \frac{\left(1 + \frac{r}{R} \cos \theta\right) \left(\cos \theta + \frac{r}{R}\right)}{\left[\frac{r^2}{R^2} \sin^2 \theta + \left(1 + \frac{r}{R} \cos \theta\right)^2\right]^2} \right]. \quad (6)$$

§ 4. Распределение напряжений в кольце

Чтобы от сплошного диска перейти к кольцу, мы воспользуемся формулами (5) и (6). Допустим, что по цилиндрическому сечению радиуса r приложены усилия, равные и противоположные имеющимся напряжениям σ и τ , вычисленным по формулам (5) и (6). Тогда сечение это будет свободно от всяких усилий и его можно рассматривать как внутренний контур кольца. Чтобы определить напряжения в получившемся таким образом кольце, придется к напряжениям, вычисленным для сплошного диска, присоединить напряжения от усилий σ и τ , приложенных по внутреннему контуру. Эту последнюю задачу можно для всякого соотношения r/R решить с любой точностью, пользуясь общим решением для случая кругового кольца ¹⁾.

Произведем подробные расчеты для того случая, когда внутренний радиус равен половине наружного, т. е. $R/r=2$. Введем обозначение $P/l=P'$ для сжимающей силы, приходящейся на единицу длины, считая по образующей цилиндра.

Формулу (5) можно переписать в таком виде:

$$\sigma = - \frac{2P'}{\pi R} \cdot k + \frac{P'}{\pi R}. \quad (7)$$

Здесь коэффициент k зависит от угла θ . Ряд значений для k вычислен и приведен в таблице В.

Т а б л и ц а В

θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
k	2,667	2,356	1,699	1,113	0,7320	0,5275	0,4081	0,3525	0,3271	0,3200

¹⁾ T i m p e A. Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen, einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Function. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1:05, Bd. 52, Heft 4, SS. 348—383. См. S. 370.

Таблица С

θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
k'	0	0,685	0,979	0,922	0,727	0,524	0,353	0,216	0,102	0

Закон изменения k в функции от θ представлен на рис. 6. Формулу (6) для касательных усилий можно представить в таком виде:

$$\tau = \pm \frac{2P'}{\pi R} k'. \quad (8)$$

Ряд значений коэффициента k' приведен в таблице С.

Кроме того, изменение k' в зависимости от угла θ графически представлено на рис. 7.

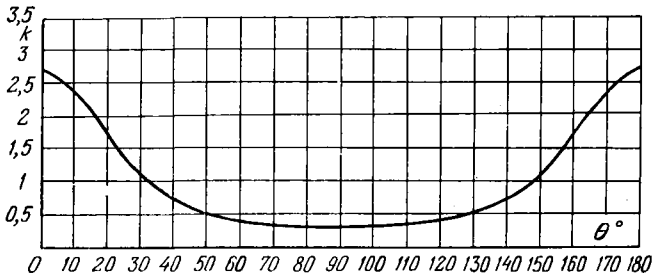


Рис. 6.

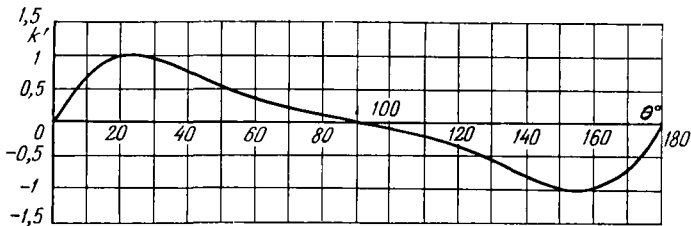


Рис. 7.

Чтобы воспользоваться общим решением для случая кругового кольца, представим σ и τ в виде тригонометрического ряда. Имея

ряд значений для k и k' , разложение легко выполнить, пользуясь схемой проф. К. Рунге ¹⁾.

Результат этого разложения таков:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= -\frac{2P'}{\pi R} [0,506 + 1,008 \cos 2\theta + 0,443 \cos 4\theta + 0,158 \cos 6\theta + \\ &\quad + 0,0467 \cos 8\theta + 0,0083 \cos 10\theta], \\ \tau &= +\frac{2P'}{\pi R} [0,749 \sin 2\theta + 0,374 \sin 4\theta + 0,141 \sin 6\theta + \\ &\quad + 0,0460 \sin 8\theta + 0,0133 \sin 10\theta]. \end{aligned} \right\} (9)$$

Приложим теперь по внутреннему контуру кольца усилия σ и τ . Напряжения, соответствующие первому члену в разложении

для n , т. е. члену $0,506 \frac{2P'}{\pi R}$, определятся по формулам Ламэ

$$\left. \begin{aligned} \widehat{r r} &= 0,506 \frac{2P'}{\pi R} \frac{r^2 R^2 - \rho^2}{\rho^2 R^2 - r^2}, \\ \widehat{\theta \theta} &= -0,506 \frac{2P'}{\pi R} \frac{r^2 R^2 + \rho^2}{\rho^2 R^2 + r^2}. \end{aligned} \right\} (10)$$

Здесь через ρ обозначено расстояние рассматриваемой точки от центра диска (рис. 8).

Напряжения, соответствующие любой паре

$$+A_m \cos m\theta; \quad -B_m \sin m\theta$$

тригонометрических членов в разложениях (9), определятся по формулам

$$\begin{aligned} \widehat{\theta \theta} &= [(m-1) a_m \rho^{m-2} + (m+1)(m+2) b_m \rho^m + m(m+1) \alpha_m \rho^{-m-2} + \\ &\quad + (m-2)(m-1) \beta_m \rho^{-m}] \cos m\theta, \\ \widehat{r \theta} &= [(m-1) a_m \rho^{m-2} + m(m+1) b_m \rho^m - m(m+1) \alpha_m \rho^{-m-2} - \\ &\quad - m(m-1) \beta_m \rho^{-m}] \sin m\theta, \\ \widehat{r r} &= [m(1-m) \alpha_m \rho^{m-2} + (m+2-m^2) b_m \rho^m - m(m+1) \alpha_m \rho^{-m-2} - \\ &\quad - (m-2+m^2) \beta_m \rho^{-m}] \cos m\theta. \end{aligned}$$

Произвольные постоянные a_m, \dots, β_m определятся из условий на наружном и внутреннем контуре кольца, т. е. при $\rho=R$ и $\rho=r$.

¹⁾ R u n g e C. Theorie und Praxis der Reihen. Leipzig, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, 1904, 266 S. См. S. 153.

Получим четыре уравнения такого вида:

$$\left. \begin{aligned} m(1-m)a_m R^{m-2} + (m+2-m^2)b_m R^m - m(m+1)\alpha_m R^{-m-2} - \\ - (m-2+m^2)\beta_m R^{-m} = 0, \\ m(1-m)a_m r^{m-2} + (m+2-m^2)b_m r^m - m(m+1)\alpha_m r^{-m-2} - \\ - (m-2+m^2)\beta_m r^{-m} = A_m, \\ m(m-1)a_m R^{m-2} + m(m+1)b_m R^m - m(m+1)\alpha_m R^{-m-2} - \\ - m(m-1)\beta_m R^{-m} = 0, \\ m(m-1)a_m r^{m-2} + (m+1)mb_m r^m - m(m+1)\alpha_m r^{-m-2} - \\ - m(m-1)\beta_m r^{-m} = -B_m. \end{aligned} \right\} (11)$$

Подставляя для A_m и B_m , соответствующие значения из разложений (9) и разрешая систему уравнений (11), получим соответствующие каждой паре членов четыре произвольные постоянные. В нашем случае пришлось решить пять систем по четыре уравнения.

Окончательно для напряжений $\widehat{\theta\theta}$ получено выражение

$$\begin{aligned} \widehat{\theta\theta} = \frac{2P'}{\pi R} \left[-0,506 \frac{r^2}{\rho^2} \cdot \frac{R^2+r^2}{R^2-r^2} + \left(2,268 - 6,324 \frac{\rho^2}{R^2} + 0,4832 \right) \cos 2\theta + \right. \\ \left. + \left(0,3691 \frac{\rho^2}{R^2} - 0,6783 \frac{\rho^4}{R^4} + 0,0368 \frac{R^6}{\rho^6} - 0,0599 \frac{R^4}{\rho^4} \right) \cos 4\theta + \right. \\ \left. + \left(0,06504 \frac{\rho^4}{R^4} - 0,10026 \frac{\rho^6}{R^6} + 0,0041319 \frac{R^8}{\rho^8} - 0,00952 \frac{R^6}{\rho^6} \right) \cos 6\theta + \right. \\ \left. + \left(0,008758 \frac{\rho^6}{R^6} - 0,01225 \frac{\rho^8}{R^8} + 0,00040795 \frac{R^{10}}{\rho^{10}} - 0,0010888 \frac{R^8}{\rho^8} \right) \times \right. \\ \left. \times \cos 8\theta + \left(0,0007880 \frac{\rho^8}{R^8} - 0,001037 \frac{\rho^{10}}{R^{10}} + 0,00002960 \frac{R^{12}}{\rho^{12}} - \right. \right. \\ \left. \left. - 0,00008475 \frac{R^{10}}{\rho^{10}} \right) \cos 10\theta \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

Напряжения $\widehat{r\bar{r}}$ выразятся формулой

$$\begin{aligned} \widehat{r\bar{r}} = \frac{2P'}{\pi R} \left[0,506 \frac{r^2}{\rho^2} \frac{R^2-\rho^2}{R^2-r^2} + \left(-2,268 - 0,4832 \frac{R^4}{r^4} + 2,752 \frac{R^2}{r^2} \right) \cos 2\theta + \right. \\ \left. + \left(-0,3691 \frac{\rho^2}{R^2} + 0,2261 \frac{\rho^4}{R^4} - 0,0368 \frac{R^6}{\rho^6} + 0,1798 \frac{R^4}{\rho^4} \right) \cos 4\theta + \right. \\ \left. + \left(-0,06504 \frac{\rho^4}{R^4} + 0,05013 \frac{\rho^6}{R^6} - 0,0041319 \frac{R^8}{\rho^8} + 0,01904 \frac{R^6}{\rho^6} \right) \cos 6\theta + \right. \\ \left. + \left(0,008758 \frac{\rho^6}{R^6} - 0,007352 \frac{\rho^8}{R^8} + 0,00040795 \frac{R^{10}}{\rho^{10}} - 0,0018146 \frac{R^8}{\rho^8} \right) \times \right. \\ \left. \times \cos 8\theta + \left(-0,0007880 \frac{\rho^8}{R^8} + 0,0006911 \frac{\rho^{10}}{R^{10}} - 0,00002960 \frac{R^{12}}{\rho^{12}} + \right. \right. \\ \left. \left. + 0,0001265 \frac{R^{10}}{\rho^{10}} \right) \cos 10\theta \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

Напряжения $r\hat{\theta}$ выразятся формулой

$$\begin{aligned} r\hat{\theta} = \frac{2P'}{\pi R} & \left[\left(2,268 - 3,162 \frac{\rho^2}{R^2} - 0,4832 \frac{R'}{\rho^4} + 1,376 \frac{R^2}{\rho^2} \right) \sin 2\theta + \right. \\ & + \left(0,3691 \frac{\rho^2}{R^2} - 0,4522 \frac{\rho^4}{R^4} - 0,03680 \frac{R^6}{\rho^6} + 0,1198 \frac{R^4}{\rho^4} \right) \sin 4\theta + \\ & + \left(0,06504 \frac{\rho^4}{R^4} - 0,07520 \frac{\rho^6}{R^6} - 0,0041319 \frac{R^8}{\rho^8} + 0,01428 \frac{R^6}{\rho^6} \right) \sin 6\theta + \\ & + \left(0,008758 \frac{\rho^6}{R^6} - 0,009802 \frac{\rho^8}{R^8} - 0,00040795 \frac{R^{10}}{\rho^{10}} + 0,0014517 \frac{R^8}{\rho^8} \right) \times \\ & \times \sin 8\theta + \left(0,0007880 \frac{\rho^8}{R^8} - 0,0008638 \frac{\rho^{10}}{R^{10}} - 0,00002960 \frac{R^{12}}{\rho^{12}} + \right. \\ & \left. + 0,0001054 \frac{R^{10}}{\rho^{10}} \right) \sin 10\theta \Big]. \quad (14) \end{aligned}$$

Чтобы получить полное напряжение в какой-либо точке кольца, нужно к напряжениям, определяемым формулами (12), (13), (14), присоединить напряжения, соответствующие сплошному диску и определяемые функцией (1).

Проверить полученные нами результаты можно таким образом. Положим в формуле (12) $\theta = 90^\circ$, т. е. возьмем сечение кольца диаметральной плоскостью, перпендикулярной линии действия сжимающей силы P . Напряжение $\hat{\theta}\theta$ по этому сечению определится формулой

$$\begin{aligned} \hat{\theta}\theta = \frac{2P'}{\pi R} & \left\{ 0,5 - \frac{2R^4}{(R^2 + \rho^2)^2} - 0,506 \frac{(R^2 + \rho^2)r^2}{\rho^2(R^2 - r^2)} - 2,268 + 6,693 \frac{\rho^2}{R^2} - \right. \\ & - 0,7433 \frac{\rho^4}{R^4} + 0,1090 \frac{\rho^6}{R^6} - 0,01304 \frac{\rho^8}{R^8} + 0,001037 \frac{\rho^{10}}{R^{10}} - 0,5431 \frac{R^4}{\rho^4} + \\ & \left. + 0,04632 \frac{R^6}{\rho^6} - 0,005221 \frac{R^8}{\rho^8} + 0,0004927 \frac{R^{10}}{\rho^{10}} - 0,00002960 \frac{R^{12}}{\rho^{12}} \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

Первые два члена выражения, заключенного в скобках, взяты из формулы (2) и представляют собой напряжения, соответствующие сплошному диску. Если мы теперь составим интеграл $\int_r^R \hat{\theta}\theta d\rho$, то он, очевидно, должен дать нам в результате величину $-P'/2$, т. е. половину сжимающей силы P' . Мы выполнили это интегрирование и получили

$$\int_r^R \hat{\theta}\theta d\rho = -0,5022P'.$$

Результат этот характеризует отчасти точность произведенных нами вычислений.

Таблица D

ρ/R	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
n	2,610	1,477	-0,113	-2,012	-4,610	-8,942

Величина напряжений $\widehat{\theta\theta}$ в любой точке по горизонтальному сечению $\theta=90^\circ$ представляется формулой

$$\widehat{\theta\theta} = \frac{2P'}{\pi R} n,$$

где n — коэффициент, зависящий от расстояния ρ выбранного элемента от центра кольца. Ряд значений коэффициента n мы вычислили и приводим в таблице D.

Закон распределения напряжений $\widehat{\theta\theta}$ по сечению графически представлен на рис. 9 сплошной линией T.

Для проверки нами разобрано также диаметрально сечение кольца, проходящее через направление сжимающих сил P.

Для этого сечения, очевидно, $\theta=0$ и напряжение $\widehat{\theta\theta}$ представится следующей формулой

$$\begin{aligned} \widehat{\theta\theta} = \frac{2P'}{\pi R} & \left[0,5 - 0,506 \frac{(R^2 + \rho^2) r^2}{\rho^2 (R^2 - r^2)} + 2,268 - 5,955 \frac{\rho^2}{R^2} - 0,6133 \frac{\rho^4}{R^4} - \right. \\ & - 0,0915 \frac{\rho^6}{R^6} - 0,01146 \frac{\rho^8}{R^8} - 0,00104 \frac{\rho^{10}}{R^{10}} + 0,4233 \frac{R^4}{\rho^4} + \\ & \left. + 0,02728 \frac{R^6}{\rho^6} + 0,003043 \frac{R^8}{\rho^8} + 0,0003232 \frac{R^{10}}{\rho^{10}} + 0,0000296 \frac{R^{12}}{\rho^{12}} \right] \frac{2P'}{\pi R} n'. \end{aligned}$$

Ряд значений этого напряжения вычислен, величина коэффициента n' приведена в таблице E.

Таблица E

ρ/R	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,55	0,5
n'	-3,788	-2,185	-0,594	+1,240	+4,002	+6,326	+10,147

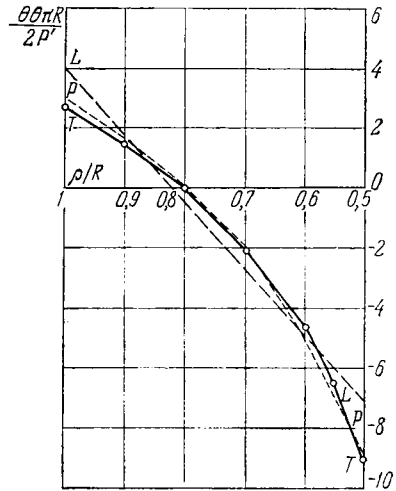


Рис. 9.

На рис. 10 изменение того же напряжения представлено графически сплошной линией T .

Если возьмем сумму всех напряжений $\widehat{\theta\theta}$ по сечению $\theta=0$, то получим

$$\int_r^R \widehat{\theta\theta} d\rho = \frac{P'}{\pi} 0,996, \quad (16)$$

т. е. величину, отличную от нуля. Такой результат легко объяснить, если принять во внимание местные усилия в точке приложения силы P . Выделим у точки приложения силы P элемент поверхности цилиндра малого радиуса r_1 (рис. 11). По поверхности этой будут действовать растягивающие напряжения $P'/\pi R$ и радиальные

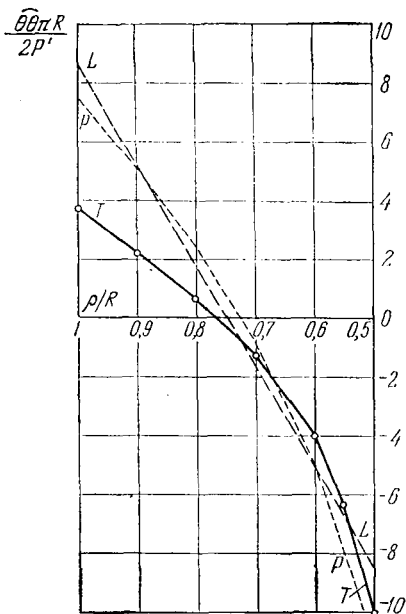


Рис. 10.

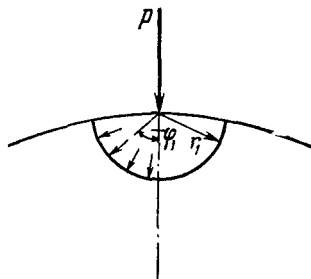


Рис. 11.

сжатия $-\frac{2P'}{\pi} \frac{\cos \varphi_1}{r_1}$, $-\frac{2P'}{\pi} \frac{\cos \varphi_2}{r_2}$. При беспредельном уменьшении радиуса r_1 напряжения $-\frac{2P'}{\pi} \cdot \frac{\cos \varphi_1}{r_1}$ беспредельно возрастают, и мы можем не принимать во внимание других элементов напряжения, сохраняющих конечную величину. Будем менять φ_1 от нуля до 90° и подсчитаем горизонтальную и вертикальную составляющие равнодействующей всех усилий по соответствующей части цилиндрической поверхности.

Усилие, соответствующее элементу с углом $d\varphi_1$, будет

$$-\frac{2P'}{\pi} \frac{\cos \varphi_1}{r_1} r_1 d\varphi_1 = -\frac{2P'}{\pi} \cos \varphi_1 d\varphi_1,$$

его горизонтальная проекция будет

$$-\frac{2P'}{\pi} \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 d\varphi_1,$$

сумма всех этих горизонтальных усилий найдется интегрированием:

$$\int_0^{\pi/2} -\frac{2P'}{\pi} \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 d\varphi_1 = -\frac{P'}{\pi}. \quad (17)$$

Если полученный результат сравнить с тем, что нам дала формула (16), то увидим, что сумма всех усилий, нормальных к сечению $\theta=0$, будет равна нулю. Некоторое несовпадение объясняется тем, что найденные нами напряжения $\widehat{\theta\theta}$ получены лишь приближенно, и о степени точности можно судить, сравнивая формулы (16) и (17). Действие силы P' будет эквивалентно действию системы, представленной на рис. 12.

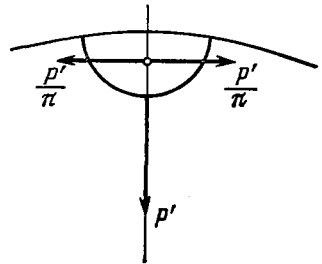


Рис. 12.

§ 5. Сравнение полученных результатов с результатами, основанными на общепринятых гипотезах

а) *Гипотеза линейного распределения напряжений.* Если мы выделим элемент кольца, соответствующий углу $d\theta$ (рис. 13), то изменение этого угла при деформации определится формулой

$$\Delta d\theta = \frac{N d\theta}{EF} + \frac{M \frac{R+r}{2} d\theta}{EJ}. \quad (18)$$

Здесь F — площадь поперечного сечения кольца, J — момент инерции этого сечения, N — продольная сила. Для какого-либо угла θ она определится формулой

$$N = -\frac{P'}{2} \sin \theta;$$

M — изгибающий момент в рассматриваемом сечении. Для угла θ

момент определится формулой

$$M = M_0 + \frac{P'}{2} \frac{R+r}{2} (1 - \sin \theta).$$

Через M_0 обозначен изгибающий момент в горизонтальном сечении ab кольца. Величина момента M_0 определится из условия

$$\int_0^{\pi/2} \Delta d\theta = 0.$$

Подставляя сюда значение $\Delta d\theta$ и выполняя интегрирование, получим

$$M_0 = -0,1451 P'R.$$

Величины наибольшего и наименьшего напряжений по сечению ab будут

$$-\frac{2P'}{\pi R} \cdot 7,04 \quad \text{и} \quad +\frac{2P'}{\pi R} \cdot 3,90.$$

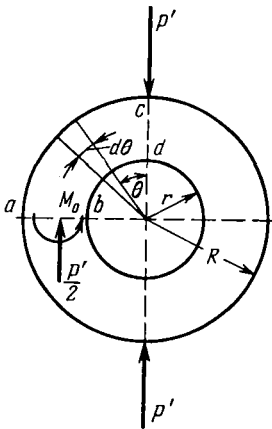


Рис. 13.

Распределение напряжений по сечению представлено на рис. 9 прямой линией L . Изгибающий момент в вертикальном сечении кольца cd будет

$$M_1 = \frac{P'}{2} \frac{3R}{4} + M_0 = 0,230P'R.$$

Для наибольшего и наименьшего напряжений получим величины $\mp \frac{2P'}{\pi R} \cdot 8,67$.

Закон изменения напряжений по сечению cd представлен на рис. 10 прямой линией L .

б) *Гипотеза плоских сечений*. Изменение элементарного угла $d\theta$ в этом случае выразится такой формулой:

$$\Delta d\theta = \frac{N d\theta}{EF} + \frac{M\rho d\theta}{EJ'}.$$

Здесь ρ — расстояние от центра кольца до нейтральной линии; J' — величина интеграла

$$\rho \int_F \frac{y^2 dF}{\rho + y},$$

распространенного по всей площади поперечного сечения, y — расстояние элемента площади от нейтральной линии сечения. Тогда

$$M = M_0 + \frac{P'}{2} \cdot \frac{R+r}{2} (1 - \sin \theta).$$

Величина M_0 определится из условия

$$\int_0^{\pi/2} \Delta d\theta = 0. \quad (19)$$

При нашем соотношении между наружным и внутренним радиусами кольца

$$\rho = \frac{R-r}{\ln \frac{R}{r}} = 0,7214R, \quad J' = 0,0103R^4.$$

Подставляя эти значения в условие (19) и выполняя интегрирование, найдем

$$M_0 = -0,1454P'R.$$

Распределение напряжений по горизонтальному сечению кольца определяется формулой

$$\widehat{\theta\theta} = \frac{\rho y}{\rho + y} \cdot \frac{M_0}{J'} = \frac{2P'}{\pi R} k.$$

Ряд значений коэффициента k приводим в таблице *F*.

Присоединяя к напряжениям от изгиба напряжения $-\frac{2P'}{\pi R} \cdot 1,57$

от продольной сжимающей силы, получим полные напряжения $\widehat{\theta\theta}$ по сечению *ab*. Графически распределение этих напряжений представлено пунктиром (кривая *P*) на рис. 9.

Т а б л и ц а F

$(\rho+y)/R$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
y/R	0,2786	0,1786	0,0786	-0,0214	-0,1214	-0,2214
k	4,456	3,173	1,572	-0,489	-3,235	-7,082

Для вертикального сечения *cd* изгибающий момент будет

$$M = \frac{P'R}{2} \cdot \frac{3}{4} - 0,1454P'R = 0,230P'R.$$

Напряжения $\widehat{\theta\theta}$ определяются из формулы

$$\widehat{\theta\theta} = \frac{\rho y}{\rho + y} \frac{M}{J'} = \frac{2P'}{\pi R} k'.$$

Ряд значений k' приводим в таблице *K*.

Графически закон распределения напряжений $\widehat{\theta\theta}$ по сечению *cd* представлен штриховой линией *P* на рисунке 10.

Таблица К

$(\rho + y)/R$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
k'	-7,036	-5,010	-2,482	+0,772	+5,108	+11,18

Сравним теперь результаты, полученные нами на основании обеих гипотез, с результатами § 4. Для горизонтального сечения ab кольца гипотеза плоских сечений даст результаты, очень близкие к тому, что дает решение плоской задачи теории упругости. Для наибольших сжимающих напряжений разность около 3% (гипотеза плоских сечений дает напряжения, меньшие полученного в § 4). Для наибольших растягивающих напряжений разность составляет 10% (гипотеза плоских сечений дает большие растягивающие напряжения).

Что касается результатов, полученных на основании гипотезы линейного распределения напряжений, то они значительно отличаются от результатов решения § 4. Для наибольших сжимающих напряжений разность составляет 21%, а для наибольших растягивающих разность достигает 50%.

Для вертикального сечения кольца, проходящего через точку приложения сжимающей силы P , отклонения результатов, полученных на основании общепринятых гипотез, от результатов решения плоской задачи гораздо более значительны. Мы не будем говорить о наибольших сжимающих напряжениях. В точке приложения силы P' , очевидно, будут иметь место весьма большие местные напряжения. Величина наибольших растягивающих напряжений, получаемая на основании гипотезы плоских сечений, отличается от результатов § 4 на 10% (гипотеза плоских сечений дает большие напряжения).

Гипотеза линейного распределения напряжений даст для наибольших растягивающих напряжений величину, на 15% меньшую результата § 4.

Сопоставляя все результаты, приходим к заключению, что для разобранного случая гипотеза плоских сечений дает более удовлетворительные результаты, чем гипотеза линейного распределения напряжений.

Пользуясь изложенным в § 4 способом, можно решить задачу и в том случае, когда силы P не сжимающие, а растягивающие.

Киев, 27 августа 1909 года

О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ. ПРИЛОЖЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ КОЛЕБАНИЙ МОСТОВ

Известия Киевского политехнического института, 1909, год 9, книга 4, стр. 201—252. Отдельный оттиск, Киев, 1909, 50 стр. Перевод на немецкий язык: *Ergzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe. Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1911, Bd. 59, Heft 2, SS. 163—203. Перепечатка: Timoshenko S. P. *The collected papers*. McGraw-Hill Book Company Ltd, New York, London, Toronto, 1953, pp. 51—91.

Задачи о вынужденных колебаниях призматических стержней имеют не только теоретическое, но и большое практическое значение. С ними приходится встречаться в различных отделах машиностроения, в мостовом деле, в кораблестроении и т. д. Несмотря на это, общие методы исследования малых колебаний, разработанные главным образом в акустике, находят малое применение в технике. Объясняется это отчасти тем, что в книгах по теории звука главное внимание обращено на свободные колебания, вынужденным колебаниям отводится мало места: ограничиваются обыкновенно лишь изложением общего метода.

В настоящей статье мы рассмотрим вопрос о вынужденных колебаниях призматических стержней, пользуясь общей методой¹⁾, основанной на применении второй формы лагранжевых уравнений к системам с бесконечным числом степеней свободы.

Статья распадается на такие разделы.

I. Изложение общего метода.

II. Продольные колебания призматических стержней (в качестве примера мы рассмотрим колебания индикатора²⁾).

III. Колебания кручения призматических стержней. (Здесь общий метод применен к исследованию колебаний вала с двумя шкивами, насаженными по концам.)

IV. Поперечные колебания призматических стержней.

V. Колебания мостов под действием подвижной нагрузки.

¹⁾ См. Strutt J. W. (Rayleigh). *The theory of sound*. 2nd edition, London and New York, MacMillan and Co., vol. 1, 1894, XIV+470 p.; см. § 101, pp. 134—136. [Перевод на русский язык с третьего английского издания: Стрэтт Дж. В. (лорд Рэлеи). *Теория звука*. М.—Л., Гостехиздат, том I, 1940, § 101, стр. 151—153.]

²⁾ Задача эта решена А. Н. Крыловым. (См. его работу «Некоторые замечания о крещерах и индикаторах», *Известия Академии наук, С.-Петербург*, 6 серия, 1909, том 3, № 15, 9 мая, стр. 623—654. [Перепечатка: Крылов А. Н. *Собрание трудов*. Том IV. Баллистика. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1937, стр. 373—412.]) Прием, примененный А. Н. Крыловым, отличен от принятого в настоящей статье.

I. ИЗЛОЖЕНИЕ ОБЩЕГО МЕТОДА

§ 1. Кинетическая и потенциальная энергии

При исследовании колебаний будем определять положение системы ее нормальными координатами. Если $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ — нормальные координаты, то из самого их определения уже следует, что кинетическая энергия системы и ее потенциальная энергия представляются функциями второй степени, заключающими лишь квадраты величин $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dots, \varphi_1, \varphi_2, \dots$. Можем написать

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (a_1 \dot{\varphi}_1^2 + a_2 \dot{\varphi}_2^2 + a_3 \dot{\varphi}_3^2 + \dots), \\ V &= \frac{1}{2} (c_1 \varphi_1^2 + c_2 \varphi_2^2 + c_3 \varphi_3^2 + \dots). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь $a_1, a_2, \dots, c_1, c_2, \dots$ суть постоянные величины, зависящие от конфигурации системы и ее упругих свойств. Самый общий вид колебания системы можно получить наложением ряда главных простых колебаний, соответствующих нормальным координатам $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Чтобы найти колебания, соответствующие какой-либо координате φ_i , нужно только, пользуясь выражениями (1) для живой силы и потенциальной энергии системы, составить соответствующее уравнение Лагранжа, так как выражения (1) заключают лишь квадраты величин $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, то уравнения Лагранжа получают весьма простой вид:

$$\ddot{\varphi}_i + n_i^2 \varphi_i = \frac{1}{a_i} \overline{\Phi}_i, \quad (2)$$

где

$$n_i^2 = \frac{c_i}{a_i}.$$

Большой буквой $\overline{\Phi}_i$ мы будем обозначать обобщенную силу, соответствующую координате φ_i . При заданных внешних силах $\overline{\Phi}_i$ может быть определена из того условия, что $\overline{\Phi}_i \delta \varphi_i$ представляет собой работу внешних сил на перемещениях, соответствующих приращению $\delta \varphi_i$ координаты φ_i .

Если через $(\varphi_i)_0$ и $(\dot{\varphi}_i)_0$ обозначим начальное значение координаты и соответствующую ей начальную скорость, то общий интеграл уравнения (2) представится в такой форме:

$$\varphi_i = (\varphi_i)_0 \cos n_i t + \frac{1}{n_i} (\dot{\varphi}_i)_0 \sin n_i t + \frac{1}{n_i} \int_0^t \overline{\Phi}_i \sin n_i (t - t_1) dt_1, \quad (3)$$

первые два члена интеграла зависят лишь от начальных обстоятельств.

Если в начальный момент $(\varphi_i)_0=0$ и $(\dot{\varphi}_i)_0=0$, то движение определяется третьим членом интеграла (3)¹⁾. В дальнейшем мы будем главным образом заниматься этим третьим членом. Он определяет колебания, зависящие от действия внешних сил за время от 0 до t , и потому представляет наибольший практический интерес.

§ 2. Перемещения

Колебание стержня будет вполне определено, если известны перемещения каждого элемента стержня. Элементы будем выделять сечениями, нормальными к оси стержня. Начальное положение любого элемента определяется одной координатой (расстоянием x от какого-либо конца стержня). Вес призматического стержня, отнесенный к единице длины, будем обозначать через q .

Перемещение любого элемента обозначим через y (при продольных и поперечных колебаниях y обозначает линейное перемещение элемента, при колебаниях кручения — угловое перемещение). В самом общем виде перемещение может быть представлено в виде ряда

$$y = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3 + \dots, \quad (4)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ — нормальные координаты системы, функции только времени t ; u_1, u_2, u_3, \dots — соответствующие координатам $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ «нормальные функции», зависящие от положения рассматриваемого элемента (функции от координаты x). Они, очевидно, должны быть подобраны таким образом, чтобы в любой момент t были выполнены заданные условия на концах стержня.

Кинетическая энергия системы при продольных и поперечных колебаниях представится в такой форме:

$$T = \frac{q}{2g} \int_0^l (\dot{y})^2 dx = \frac{q}{2g} \left\{ \dot{\varphi}_1^2 \int_0^l u_1^2 dx + \dot{\varphi}_2^2 \int_0^l u_2^2 dx + \dots \right\}. \quad (5)$$

Здесь через l обозначена длина стержня; g — ускорение силы тяжести. Множитель q вынесен из-под знака интегрирования, так как предполагается, что q постоянно по длине стержня.

В выражении (5) члены вида

$$2\dot{\varphi}_s \dot{\varphi}_t \int_0^l q u_s u_t dx$$

¹⁾ Колебания, определяемые этим членом, А. Н. Крылов называет «вынужденными колебаниями системы». Это определение отличается от общепринятого. Обычно вынужденными колебаниями называют те, период которых совпадает с периодом вынуждающей колебания силы. В третьем члене интеграла (3) будут заключаться и вынужденные и свободные колебания системы.

обращаются в нуль. Координаты $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ предполагаются нормальными, и потому в выражение живой силы должны входить лишь квадраты этих величин. Отсюда приходим к такому положению. Чтобы координаты $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ были нормальными, должно быть выполнено условие

$$\int_0^l q u_s u_t dx = 0. \quad (6)$$

Подобно живой силе потенциальная энергия стержня также может быть представлена функцией, заключающей лишь квадраты величин $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. После этого определение нормальных колебаний может быть выполнено путем, намеченным в предыдущем параграфе. Вставляя найденные таким образом значения $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ в общее выражение (4) для перемещений, получаем полное решение задачи. Применим теперь этот общий метод к решению частных задач.

II. ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

§ 3. Колебания стержня, один конец которого заделан, другой свободен

Помещая начало координат в центре тяжести заделанного сечения и направляя ось x по оси стержня, будем иметь на концах стержня условия

$$(y)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=l} = 0. \quad (1)$$

Общее выражение для перемещений в нормальных координатах может быть в данном случае написано сразу:

$$y = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varphi_n \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi x}{l}. \quad (2)$$

Легко видеть, что общее выражение (2) удовлетворяет условиям на концах. Остается показать, что величины $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ будут нормальными координатами. Составим для этого выражения потенциальной энергии и живой силы системы. Обозначим через E модуль упругости при растяжении и через F площадь поперечного сечения стержня, получаем

$$V = \frac{1}{2} EF \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Вставляя вместо y его общее выражение (2) и принимая во внимание, что

$$\int_0^l \cos \frac{2n+1}{2} \frac{\pi x}{l} \cos \frac{2m+1}{2} \frac{\pi x}{l} dx = 0 \quad \text{при } m \neq n,$$

получим

$$V = \frac{EF\pi^2}{16l} \sum_{n=0}^{n=\infty} \varphi_n^2 (2n+1)^2. \quad (3)$$

Кинетическая энергия стержня будет

$$T = \frac{1}{2} \frac{q}{g} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \frac{ql}{g} \sum \dot{\varphi}_n^2. \quad (4)$$

Выражения (3) и (4) заключают лишь квадраты величин $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ и квадраты их первых производных, следовательно, $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ являются нормальными координатами системы. Для нахождения нормального колебания, соответствующего какой-либо координате φ_n , составляем при помощи (3) и (4) соответствующее уравнение Лагранжа

$$\frac{ql}{2g} \ddot{\varphi}_n + \frac{EF\pi^2}{8l} (2n+1)^2 \varphi_n = \overline{\Phi}_n.$$

Вводя для сокращения обозначение $EFg/q = b^2$, получим (см. (3) § 1)

$$\begin{aligned} \varphi_n = & (\varphi_n)_0 \cos \frac{b\pi}{l} \frac{(2n+1)}{2} t + (\dot{\varphi}_n)_0 \frac{2l}{b\pi(2n+1)} \sin \frac{b\pi}{l} \frac{2n+1}{2} t + \\ & + \frac{4g}{\pi(2n+1)bq} \int_0^t \sin \left[\frac{2n+1}{2} \frac{b\pi}{l} (t-t_1) \right] \overline{\Phi}_n dt. \quad (5) \end{aligned}$$

Положим, что начальные значения координаты φ_n и соответствующей ей скорости равны нулю, тогда значение координаты φ_n в любой момент t определится третьим членом решения (5).

Вставляя это в общее выражение (2) для перемещений, получим

$$y = \frac{4g}{b\pi q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^t \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi x}{l} \sin \left[\frac{2n+1}{2} \frac{b\pi}{l} (t-t_1) \right] \overline{\Phi} dt. \quad (6)$$

Чтобы получить перемещения свободного конца стержня, нужно только в полученном решении положить $x=l$ и поставить вместо $\overline{\Phi}_n$ величину, соответствующую заданным внешним силам. В качестве примера рассмотрим случай, когда вынуждающая колебания сила приложена к концу стержня и пусть $Ff(t)$ — величина этой

силы. Для нахождения обобщенной силы $\overline{\Phi}_n$ заметим, что приращению координаты $\delta\varphi_n$ соответствует перемещение конца стержня, равное

$$\delta\varphi_n \sin \frac{2n+1}{2} \pi.$$

тогда по определению обобщенная сила найдется из уравнения

$$Ff(t) \delta\varphi_n \sin \frac{2n+1}{2} \pi = \delta\varphi_n \overline{\Phi}_n.$$

Вставляя получаемое таким образом значение $\overline{\varphi}_n$ в общее выражение (6) и полагая в нем $x=l$, получим для перемещения конца стержня такое общее выражение¹⁾:

$$(y)_{x=l} = \frac{4gF}{b\pi q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^t \sin \left[\frac{2n+1}{2} \frac{b\pi}{l} (t-t_1) \right] f(t_1) dt_1. \quad (7)$$

В частном случае, когда приложенная сила постоянна, положим

$$f(t) = p,$$

формула (7) дает для перемещений величину

$$(y)_{x=l} = \frac{4Fgp}{b\pi q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{2l}{(2n+1)b\pi} \left[1 - \cos \frac{(2n+1)b\pi t}{2l} \right].$$

Полагая $t=2l/b$, т. е. беря промежуток времени, равный полупериоду основного тона, получим наибольшее удлинение стержня

$$(y_l)_{\max} = \frac{16Flpg}{b^2\pi^2q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{16Flpg}{b^2\pi^2q} \frac{\pi^2}{8} = \frac{2lp}{E}.$$

Таким образом, находим, что внезапно приложенная сила Fp вызывает в стержне удлинения вдвое большие тех, которые соответствуют положению равновесия при действии растягивающей силы Fp .

В качестве второго примера рассмотрим перемещения конца стержня в том случае, если вынуждающая колебания растягивающая сила постоянна по величине (равна Fp), но точка приложения силы перемещается по оси стержня с постоянной скоростью a . В начальный момент пусть точка приложения силы совпадает с центром тяжести заделанного сечения стержня. В какой-либо момент t координата x точки приложения силы равна at . Перемещение этой точки,

¹⁾ Полученный результат совпадает с решением А. Н. Крылова (см. формулу (53) работы, цитированной в сноске ²⁾ на стр. 139).

соответствующее приращению $\delta\varphi_n$ координаты φ_n , будет

$$\delta\varphi_n \sin \frac{2n+1}{2} \pi \frac{at}{l}.$$

На основании этого обобщенная сила в этом случае найдется из уравнения

$$\bar{\Phi}_n \delta\varphi_n = Fp \delta\varphi_n \sin \frac{2n+1}{2} \pi \frac{at}{l}.$$

Вставляя полученное таким образом значение φ_n в общее решение (6) и полагая в нем $x=l$, найдем

$$\begin{aligned} (y)_t &= \frac{4Fpg}{b\pi q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^t \sin \left[\frac{2n+1}{2} \frac{b\pi}{l} (t-t_1) \right] \sin \left[\frac{2n+1}{2} \frac{\pi at_1}{l} \right] dt_1 = \\ &= \frac{4Fpg}{b\pi q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n 2l}{\pi (2n+1)^2} \left[\frac{a}{a^2-b^2} \sin \frac{(2n+1) \pi bt}{2l} - \frac{b}{a^2-b^2} \sin \frac{(2n+1) \pi at}{2l} \right]. \end{aligned}$$

Если $a=b$, т. е. когда скорость перемещения точки приложения растягивающей силы равна скорости распространения звука по стержню, то выражение для $(y)_t$ принимает форму 0/0.

Раскрывая неопределенность, найдем

$$y_t = \frac{4Fpg}{b^2\pi q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n l}{\pi (2n+1)^2} \left[\sin \frac{2n+1}{2l} \pi at - \frac{at(2n+1)\pi}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \right].$$

При $t=l/a$, т. е. когда точка приложения силы достигнет свободного конца, растяжение стержня будет

$$(y)_t=l/a = \frac{4Fpgl}{b^2\pi^2 q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{pl}{2E}.$$

Следовательно, удлинение стержня в этот момент равно половине статического растяжения.

§ 4. Колебания стержня, к свободному концу которого подвешен груз P

На практике с подобной задачей приходится встречаться при исследовании колебаний индикаторной пружины с подвешенным к ней поршнем. Свободные колебания этой системы исследованы еще Пуассоном, и этим решением можно было бы воспользоваться при составлении выражения для перемещений y в нормальных координатах. Мы для большей ясности сделаем все выкладки, относящиеся к определению нормальных координат. Как известно, вопрос о про-

дольных колебаниях призматических стержней сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$b^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (8)$$

(здесь b^2 и y имеют прежние значения).

Условия на концах будут следующие:

а) $y=0$ при $x=0$;

б) $EF \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\rho}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ при $x=l$.

Пусть стержень совершает нормальное колебание частоты ω , тогда перемещение любой точки на оси стержня может быть представлено в такой форме:

$$y = X \cos \omega t,$$

где X — функция одного x .

Вставляя это в уравнение (8), находим для X общее выражение

$$X = A \sin \frac{\omega x}{b} + B \cos \frac{\omega x}{b}.$$

Чтобы удовлетворить условию а) для закрепленного конца стержня, нужно положить $B=0$. Условие б) приводит нас к такому трансцендентному уравнению:

$$EF = \omega b \frac{\rho}{g} \operatorname{tg} \frac{\omega l}{b}.$$

Вводя обозначения $\omega l/b = \mu$, $ql = Q$ и принимая во внимание $EFg/q = b^2$, представим полученное трансцендентное уравнение в таком виде:

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \frac{Q}{P}. \quad (9)$$

Каждому корню этого уравнения соответствует свой тип колебаний.

Пусть μ_1, μ_2 будут последовательные корни уравнения (9), тогда общее выражение для перемещений y напишется так:

$$y = \varphi_1 \sin \frac{\mu_1 x}{l} + \varphi_2 \sin \frac{\mu_2 x}{l} + \dots \quad (10)$$

Легко проверить, что величины $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ являются в данном случае нормальными координатами системы. Для этого составим

выражение потенциальной энергии и живой силы системы:

$$V = \frac{EF}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{EF}{2l^2} \int_0^l \sum \left(\mu_n \varphi_n \cos \frac{\mu_n x}{l} \right)^2 dx =$$

$$= \frac{EF}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \varphi_n^2 \left(1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n} \right). \quad (11)$$

Полученное выражение для V не включает членов с произведением координат, так как интегралы вида

$$\int_0^l \cos \frac{\mu_n x}{l} \cos \frac{\mu_m x}{l} dx$$

обращаются в нуль в силу уравнения (9).

Живая сила системы составит из живой силы стержня и живой силы подвешенного к нему груза:

$$T = \frac{1}{2} \frac{q}{g} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{P}{2g} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x=l}^2.$$

Вставляя вместо y его общее значение (10) и принимая во внимание, что вследствие уравнения (9)

$$q \int_0^l \sin \frac{\mu_n x}{l} \sin \frac{\mu_m x}{l} dx = -P \sin \mu_n \sin \mu_m,$$

получим для живой силы выражение

$$T = \frac{Q}{4g} \sum \dot{\varphi}_n^2 \left(1 - \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n} \right) + \frac{P}{2g} \sum \dot{\varphi}_n^2 \sin^2 \mu_n.$$

Вставляя вместо P его выражение через Q , из уравнения (9) получим

$$T = \frac{Q}{4g} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\varphi}_n^2 \left(1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n} \right). \quad (12)$$

В выражения для живой силы входят члены, заключающие лишь квадраты величин $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dots$, следовательно $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dots$ — нормальные координаты системы. Для определения колебания, соответствующего какой-либо координате φ_n , составляем соответствующее уравнение Лагранжа

$$\frac{Q}{2g} \left(1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n} \right) \ddot{\varphi}_n + \frac{EF}{2l} \mu_n^2 \left(1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n} \right) \varphi_n = -\bar{P}_n.$$

Общее решение этого уравнения (см. (3) § 1) будет

$$\varphi_n = (\varphi_n)_0 \cos \frac{b\mu_n t}{l} + \frac{l}{b\mu_n} (\dot{\varphi}_n)_0 \sin \frac{b\mu_n t}{l} + \\ + \frac{l}{b\mu_n} \frac{2g}{Q} \frac{2\mu_n}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^t \bar{\Phi}_n \sin \frac{b\mu_n (t-t_1)}{l} dt_1.$$

Если в начальный момент стержень находился в покое и положение его соответствовало положению равновесия, то $(\varphi_n)_0 = 0$, $(\dot{\varphi}_n)_0 = 0$ и колебание, соответствующее координате φ_n , определится третьим членом общего решения. Вставляя это в общее выражение для y (10), получим

$$y = \frac{4g}{bq} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{\mu_n x}{l}}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \cdot \int_0^t \bar{\Phi}_n \sin \frac{b\mu_n}{l} (t-t_1) dt_1. \quad (13)$$

Для получения перемещений конца стержня нужно в этом общем решении положить $x=l$ и вместо $\bar{\Phi}_n$ вставить значение, соответствующее заданным внешним силам.

В качестве примера возьмем случай, когда в начальный момент $t=0$ к концу стержня приложена постоянная растягивающая сила Fp . Для нахождения колебаний, возникающих при внезапном приложении силы, нужно только в общем решении (13) положить

$$\bar{\Phi}_n = Fp \sin \mu_n.$$

Перемещение конца стержня будет

$$y_l = \frac{4gFpl}{b^2q} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n} \frac{\left(1 - \cos \frac{b\mu_n t}{l}\right)}{(2\mu_n + \sin 2\mu_n)}. \quad (14)$$

Если груз P беспрельдно уменьшать, отношение Q/P стремится к бесконечности, а значение n -го корня трансцендентного уравнения (9) стремится к величине

$$\mu_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}.$$

Вставляя это в выражение (14), получим результат, совпадающий с решением предыдущего параграфа. Наибольшее удлинение при внезапном приложении силы равно двойному статическому растяжению. Рассмотрим теперь второй крайний случай, когда отношение Q/P стремится к нулю, а значение n -го корня уравнения (9) стремится к величине

$$\mu_n = (n-1)\pi.$$

Первый корень μ_1 в этом случае беспредельно приближается к нулю, к нулю стремятся также величины всех членов, кроме первого, в сумме (14). В пределе мы приходим к системе с одной степенью свободы, к колебанию груза, подвешенного на невесомом упругом стержне.

Движение определится первым членом решения (14). Для перемещения подвешенного груза получим формулу

$$y_t = \frac{4gF\rho l}{b^2q} \cdot \frac{1 - \cos \frac{b\mu_1 t}{l}}{4}.$$

Наибольшее растяжение стержня будет

$$(y_t)_{\max} = \frac{2gF\rho l}{b^2q} = \frac{2\rho l}{E},$$

следовательно, и во втором предельном случае справедливо то положение, что внезапно приложенная сила вызывает удлинение, равное двойному статическому удлинению. Положение это, как частный случай теоремы Клапейрона, приводится обыкновенно в элементарных учебниках сопротивления материалов. Вывод строится на предположении, что в известный момент вся кинетическая энергия системы обращается в потенциальную. Как видно из общего решения (14), предположение это справедливо лишь для предельных случаев $Q/P = \infty$ и $Q/P = 0$, во всех остальных случаях корни μ_1, μ_2, \dots трансцендентного уравнения (9) будут несоизмеримы, никогда вся кинетическая энергия не обратится в потенциальную и, следовательно, удлинение, вызываемое внезапно приложенной силой, будет меньше двойного статического удлинения.

Если к концу стержня приложена переменная вынуждающая колебания сила $Ff(t)$, то соответствующее значение обобщенной силы $\bar{\Phi}_n$ найдется из уравнения

$$\bar{\Phi}_n \delta\varphi_n = \sin \mu_n \omega f(t) \delta\varphi_n.$$

Вставляя $\bar{\Phi}_n$ в общее решение (13) и полагая $x=l$, найдем для перемещения конца стержня выражение

$$(y)_t = \frac{4gF}{bq} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^t f(t_1) \sin \frac{b\mu_n(t-t_1)}{l} dt_1. \quad (15)$$

Если вес стержня Q весьма мал по сравнению с весом груза P , первый корень уравнения (9) будет малой величиной. Частота основного типа колебаний будет мала по сравнению с частотой следующего по порядку типа. В общем решении (15) преобладающее значение будет иметь первый член суммы. Для определения периода основного колебания мы в данном случае можем заменить уравнение

(9) таким:

$$\mu^2 \left(1 + \frac{\mu^2}{3}\right) = \frac{Q}{P}. \quad (16)$$

В качестве первого приближения можно положить

$$\mu = \sqrt{\frac{Q}{P}},$$

тогда период основного типа колебаний будет

$$T = \frac{2\pi l}{\mu b} = 2\pi \sqrt{\frac{Pl}{EF} \cdot \frac{1}{g}},$$

т. е. период колебаний такой же, как и маятника, длина которого равна статическому удлинению стержня при действии груза P .

К тому же результату можно прийти и элементарным путем, считая стержень невесомым. Чтобы оценить влияние массы стержня на период основного тона, найдем второе приближение для корня уравнения (16). Подставляя в правую часть уравнения

$$\mu^2 = \frac{Q}{P} \frac{1}{1 + \frac{\mu^2}{3}}$$

вместо μ^2 его первое приближение, получим

$$\mu = \sqrt{\frac{Q}{P} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{Q}{P}\right)},$$

вставляя это в выражение для периода колебаний, найдем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \cdot \frac{P + \frac{1}{3}Q}{EF}}.$$

Чтобы оценить влияние массы стержня, нужно предположить одну треть этой массы сосредоточенной на конце и потом применить формулу, выведенную для периода колебаний в случае невесомого стержня.

§ 5. Колебания с ненулевой начальной скоростью и перемещением

До сих пор предполагалось, что в начальный момент $t=0$ система находится в покое и начальные координаты равны нулю. Получаемые при таких условиях колебания обусловлены действием внешних сил за промежуток времени от 0 до t .

Рассмотрим теперь колебания, обусловленные начальными обстоятельствами движения, т. е. начальными значениями координат

$(\varphi_1)_0, (\varphi_2)_0, \dots$ и начальными значениями соответствующих им скоростей $(\dot{\varphi}_1)_0, (\dot{\varphi}_2)_0, \dots$. Колебания эти будем называть «свободными колебаниями» системы. Значение какой-либо координаты φ_i на основании общего решения (см. (3) § 1) в случае свободных колебаний будет

$$\varphi_i = (\varphi_i)_0 \cos n_i t + \frac{1}{n_i} (\dot{\varphi}_i)_0 \sin n_i t.$$

Общее выражение для перемещений (см. (4) § 1) представится в таком виде:

$$y = \sum u_i \left[(\varphi_i)_0 \cos n_i t + \frac{1}{n_i} (\dot{\varphi}_i)_0 \sin n_i t \right]. \quad (17)$$

Величины $(\varphi_i)_0$ и $(\dot{\varphi}_i)_0$ могут быть найдены из начальных обстоятельств движения. Для начального момента нам должно быть дано перемещение каждого элемента стержня и его скорость. Величины эти будут функциями положения элемента, т. е. функциями от x . Пусть

$$(y)_0 = \varphi(x), \quad \left(\frac{dy}{dt} \right)_0 = \psi(x);$$

тогда на основании (17) получим

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= \sum u_i (\varphi_i)_0, \\ \psi(x) &= \sum u_i (\dot{\varphi}_i)_0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Для определения величин $(\varphi_i)_0, \dots$ и $(\dot{\varphi}_i)_0, \dots$ пользуемся основным свойством нормальных функций (см. (6) § 1).

Умножая выражения (18) на $u_i q dx$ и интегрируя в пределах от 0 до l , получим

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_i)_0 &= \frac{\int_0^l \varphi(x) u_i q dx}{\int_0^l u_i^2 q dx}, \\ (\dot{\varphi}_i)_0 &= \frac{\int_0^l \psi(x) u_i q dx}{\int_0^l u_i^2 q dx}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Применим это к разобранным выше случаю колебания стержня с подвешенным к нему грузом. Вставляя вместо u_i его значение в выражения (19) и рассматривая подвешенный к стержню груз P как

утолщение стержня, распределенное на бесконечно малом протяжении у конца стержня, получим

$$(\varphi_i)_0 = \frac{\int_0^l \varphi(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} q dx + \varphi(l) P \sin \mu_n}{\int_0^l \sin^2 \frac{\mu_n x}{l} q dx + P \sin^2 \mu_n},$$

$$(\dot{\varphi}_i)_0 = \frac{\int_0^l \psi(x) \sin \frac{\mu_n x}{l} q dx + \psi(l) P \sin \mu_n}{\int_0^l \sin^2 \frac{\mu_n x}{l} q dx + P \sin^2 \mu_n}.$$

Полученные выражения могут быть значительно упрощены. Для этого в числителе производим интегрирование по частям

$$\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\mu_n x}{l} q dx =$$

$$= -\frac{lq}{\mu} \left[\varphi(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} \right]_0^l + \frac{lq}{\mu_n} \int_0^l \varphi'(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} dx =$$

$$= -\frac{Q}{\mu_n} \varphi(l) \cos \mu_n + \frac{Q}{\mu_n} \int_0^l \varphi'(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} dx$$

и заметим, что на основании уравнения (9)

$$-\frac{Q}{\mu_n} \varphi(l) \cos \mu_n + P \varphi(l) \sin \mu_n = 0.$$

Выполняя интегрирование в знаменателе и производя некоторые сокращения на основании уравнения (9), мы в заключение получаем

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_i)_0 &= \frac{4}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^l \varphi'(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} dx, \\ (\dot{\varphi}_i)_0 &= \frac{4}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^l \psi'(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} dx. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

К этому результату можно прийти и несколько иным путем. Составим от выражений (18) производную по x , тогда, вставляя

вместо μ_i, \dots его значение, получим

$$\left. \begin{aligned} \varphi'(x) &= \sum (\varphi_i)_0 \frac{\mu_i}{l} \cos \frac{\mu_i x}{l}, \\ \psi'(x) &= \sum (\dot{\varphi}_i)_0 \frac{\mu_i}{l} \cos \frac{\mu_i x}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Если принять во внимание, что ¹⁾

$$\int_0^l \cos \frac{\mu_i x}{l} \cos \frac{\mu_s x}{l} dx = 0,$$

то, умножая выражения (21) на $\cos \frac{\mu_i x}{l}$ и выполняя интегрирование в пределах от 0 до l , получим

$$(\varphi_i)_0 = \frac{l \int_0^l \varphi'(x) \cos \frac{\mu_i x}{l} dx}{\mu_i \int_0^l \cos^2 \frac{\mu_i x}{l} dx} = \frac{4}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^l \varphi'(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} dx,$$

$$(\dot{\varphi}_i)_0 = \frac{l \int_0^l \psi'(x) \cos \frac{\mu_i x}{l} dx}{\mu_i \int_0^l \cos^2 \frac{\mu_i x}{l} dx} = \frac{4}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^l \psi'(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} dx.$$

Полученные выражения совершенно совпадают с выражениями (20).

III. КОЛЕБАНИЯ КРУЧЕНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

§ 6. Общая теория

С этой задачей технику приходится встречаться главным образом при расчете валов, и потому мы в дальнейшем будем предполагать поперечное сечение стержня круговым ²⁾.

Обозначая расстояние какого-либо сечения от конца стержня через x , угол поворота сечения через θ , модуль сдвига через G и массу единицы объема через ρ , придем к известному дифференциальному

¹⁾ Это может быть доказано, если выполнить интегрирование и принять во внимание уравнение (9). Можно построить доказательство также на том, что потенциальная энергия системы, выраженная в нормальных координатах, не должна заключать членов с произведением координат.

²⁾ Все выводы приложимы и к другим формам сечения, нужно лишь вместо GJ_p вставить соответствующее значение жесткости при кручении.

уравнению

$$\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Начнем с простого случая, когда концы вала свободны. Для угла поворота θ можем сразу написать выражение в нормальных координатах¹⁾

$$\theta = \varphi_1 \cos \frac{\pi x}{l} + \varphi_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + \dots \quad (2)$$

При этом, очевидно, удовлетворяются условия на концах:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=l} = 0.$$

Потенциальная энергия системы будет

$$V = \frac{1}{2} G J_p \int_0^l \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{\pi^2 G J_p}{4} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 \varphi_n^2. \quad (3)$$

Для живой силы получим выражение

$$T = \frac{1}{2} \rho J_p \int_0^l \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{\rho J_p l}{4} \sum_{n=1}^{n=\infty} (\dot{\varphi}_n)^2. \quad (4)$$

В выражения (3) и (4) входят лишь квадраты величин $\varphi_1, \varphi_2, \dots$; $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, следовательно, $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ — нормальные координаты системы. Уравнение Лагранжа, соответствующее какой-либо координате φ_n , будет

$$\rho \frac{J_p l}{2} \ddot{\varphi}_n + \frac{\pi^2 G J_p n^2}{2} \varphi_n = \bar{\Phi}_n.$$

Вводя для краткости обозначения

$$\frac{G}{\rho} = b^2, \quad (5)$$

можем представить интеграл написанного уравнения в таком виде:

$$\begin{aligned} \varphi_n = (\varphi_n)_0 \cos \frac{nb\pi t}{l} + \frac{l}{nb\pi} (\dot{\varphi}_n)_0 \sin \frac{nb\pi t}{l} + \\ + \frac{2}{nb\pi \rho J_p} \int_0^t \bar{\Phi}_n \sin \frac{nb\pi(t-t_1)}{l} dt_1. \end{aligned} \quad (6)$$

¹⁾ К написанному выражению можно еще присоединить поворот вала как твердого тела.

Вставляя найденные таким образом значения координат $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ в выражение (2) для θ , получим общее решение задачи. Пусть $(\varphi_n)_0 = (\dot{\varphi}_n)_0 = 0$, и предположим, что колебания вала вызываются двумя равными и взаимно противоположными парами сил $M = f(t)$, приложенными по концам вала. Обобщенная сила $\bar{\Phi}_n$ найдется из уравнения

$$\bar{\Phi}_n \delta \varphi_n = f(t) \delta \varphi_n (\cos \theta - \cos n\pi),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_n &= 2f(t) && \text{для } n \text{ нечетного,} \\ \bar{\Phi}_n &= 0 && \text{для } n \text{ четного.} \end{aligned}$$

Для координаты φ_n получим выражение

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \frac{4}{nb\pi\rho J_p} \int_0^t f(t) \sin \frac{nb\pi(t-t_1)}{l} dt_1 && \text{при } n \text{ нечетном,} \\ \varphi_n &= 0 && \text{при } n \text{ четном.} \end{aligned}$$

Угол поворота θ какого-либо сечения выразится формулой

$$\theta = \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{4 \cos \frac{n\pi x}{l}}{nb\pi\rho J_p} \int_0^t f(t) \sin \frac{nb\pi(t-t_1)}{l} dt_1. \quad (7)$$

В качестве примера рассмотрим те колебания, которые возникнут, если к концам вала в начальный момент приложить постоянные пары сил M_0 и $-M_0$. Вставляя M_0 вместо $f(t)$ в формулу (7) и выполняя интегрирование, получим

$$\theta = \frac{4M_0 l}{b^2 \pi^2 \rho J_p} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{l} \left(1 - \cos \frac{nb\pi t}{l} \right).$$

Полагая $t=l/b$, найдем для угла закручивания значение

$$\varphi = (\theta)_{x=0} - (\theta)_{x=l} = \frac{16M_0 l}{b^2 \pi^2 \rho J_p} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{n^2} = \frac{2M_0 l}{GJ_p}.$$

Угол закручивания вдвое больше того, который соответствует положению равновесия при действии пар M_0 и $-M_0$.

§ 7. Колебания вала, по концам которого насажены шкивы

Основное уравнение (1) остается в силе и для этого случая, нужно лишь изменить условия на концах. Если J_1 и J_2 — моменты инерции шкивов относительно оси вала, то условия эти напишутся

так:

$$а) \quad J_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = GJ_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{при } x=0;$$

$$б) \quad J_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -GJ_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{при } x=l.$$

Для нахождения нормальных функций поступаем так. Пусть вал совершает нормальные колебания какого-либо типа и ω — частота этих колебаний. Тогда угол поворота любого сечения вала представится так: $\theta = X \cos \omega t$, здесь X — функция одного x .

Вставляя это в основное уравнение (1), найдем для X такое общее выражение:

$$X = A \cos \frac{\omega x}{b} + B \sin \frac{\omega x}{b}.$$

Для определения произвольных постоянных пользуемся условиями на концах вала. Вставляя в а) и б) значение θ , получим

$$а') \quad -AJ_1 \omega^2 = B \frac{\rho}{b} GJ_p;$$

$$б') \quad \omega^2 \left(A \cos \frac{\omega l}{b} + B \sin \frac{\omega l}{b} \right) J_2 = \frac{\omega}{b} GJ_p \left(B \cos \frac{\omega l}{b} - A \sin \frac{\omega l}{b} \right).$$

Отсюда для определения частоты колебаний ω получим трансцендентное уравнение

$$\omega^2 \left(\cos \frac{\omega l}{b} - \frac{\omega J_1 b}{GJ_p} \sin \frac{\omega l}{b} \right) J_2 = - \frac{\omega}{b} GJ_p \left(\sin \frac{\omega l}{b} + \frac{\omega J_1 b}{GJ_p} \cos \frac{\omega l}{b} \right).$$

Вводя обозначения

$$\frac{\omega l}{b} = \mu, \quad \rho l J_p = J_0$$

(J_0 , очевидно, представляет собой момент инерции вала относительно его оси), можем переписать полученное выше трансцендентное уравнение в такой форме:

$$\mu \frac{J_2}{J_0} \left(1 - \mu \frac{J_1}{J_0} \operatorname{tg} \mu \right) = - \left(\operatorname{tg} \mu + \mu \frac{J_1}{J_0} \right). \quad (8)$$

Обозначая через μ_1, μ_2, \dots последовательные корни этого уравнения, получим для θ такое выражение в нормальных координатах:

$$\theta = \varphi_1 \left(\cos \frac{\mu_1 x}{l} - \mu_1 \frac{J_1}{J_0} \sin \frac{\mu_1 x}{l} \right) + \varphi_2 \left(\cos \frac{\mu_2 x}{l} - \mu_2 \frac{J_1}{J_0} \sin \frac{\mu_2 x}{l} \right) + \dots$$

Потенциальная энергия системы будет

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} GJ_p \int_0^l \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx = \\
 &= \frac{1}{2} GJ_p \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mu_n^2}{l^2} \int_0^l \varphi_n^2 \left(\sin \frac{\mu_n x}{l} + \mu_n \frac{J_1}{J_0} \cos \frac{\mu_n x}{l} \right)^2 dx = \\
 &= \frac{GJ_p}{8l} \sum_{n=1}^{n=\infty} \mu_n \varphi_n^2 \left[2\mu_n \left(1 + \mu_n^2 \frac{J_1^2}{J_0^2} \right) - \sin 2\mu_n + \mu_n^2 \frac{J_1^2}{J_0^2} \sin 2\mu_n + \right. \\
 &\quad \left. + 2\mu_n \frac{J_1}{J_0} (1 - \cos 2\mu_n) \right] = \frac{GJ_p}{8l} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \mu_n \varphi_n^2. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Члены, содержащие произведения координат, пропадут, так как

$$\begin{aligned}
 &\int_0^l \left(\sin \frac{\mu_m x}{l} + \mu_m \frac{J_1}{J_0} \cos \frac{\mu_m x}{l} \right) \left(\sin \frac{\mu_n x}{l} + \mu_n \frac{J_1}{J_0} \cos \frac{\mu_n x}{l} \right) dx = \\
 &= \frac{l \cos \mu_n \cos \mu_m}{\mu_n^2 - \mu_m^2} \left\{ \operatorname{tg} \mu_n \left(\mu_m + \mu_m \mu_n^2 \frac{J_1^2}{J_0^2} \right) - \operatorname{tg} \mu_m \left(\mu_n + \mu_n \mu_m^2 \frac{J_1^2}{J_0^2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{J_1}{J_0} \operatorname{tg} \mu_n \operatorname{tg} \mu_m (\mu_n^2 - \mu_m^2) \right\}.
 \end{aligned}$$

Выражение, заключенное в скобки, обращается в нуль. В этом легко убедиться, если принять во внимание следствие уравнения (8)

$$\frac{\operatorname{tg} \mu_n + \mu_n \frac{J_1}{J_0}}{\mu_n \left(1 - \mu_n \frac{J_1}{J_0} \operatorname{tg} \mu_n \right)} = \frac{\operatorname{tg} \mu_m + \mu_m \frac{J_1}{J_0}}{\mu_m \left(1 - \mu_m \frac{J_1}{J_0} \operatorname{tg} \mu_m \right)}.$$

Кинетическая энергия системы составит из живой силы вала и живой силы насаженных по концам шкивов:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{\rho J_p}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{J_1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_{x=0}^2 + \frac{J_2}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_{x=l}^2 = \\
 &= \frac{J_0}{8} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\mu_n} (\dot{\varphi})_n^2 \left\{ 2\mu_n + \sin 2\mu_n + \mu_n^2 \left(\frac{J_1}{J_0} \right)^2 (2\mu_n - \sin 2\mu_n) - \right. \\
 &\quad \left. - 2\mu_n \frac{J_1}{J_0} (1 - \cos 2\mu_n) + \frac{4\mu_n J_1}{J_0} + \frac{4\mu_n J_2}{J_0} \left(\cos \mu_n - \mu_n \frac{J_1}{J_0} \sin \mu_n \right)^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Вставляя вместо J_2/J_0 его значение из уравнения (8), докажем, что заключенный в скобки множитель равен A_n . Выражение для

живой силы перепишется так:

$$T = \frac{J_0}{8} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \frac{1}{\mu_n} (\dot{\Phi})_n^2. \quad (10)$$

Уравнение Лагранжа, соответствующее координате Φ_n , будет

$$\frac{J_0}{8} \frac{2}{\mu_n} A_n \ddot{\Phi}_n + A_n \frac{GJ_p}{8l} 2\mu_n \dot{\Phi}_n = \bar{\Phi}_n.$$

Полагая $(\Phi_n)_0 = (\dot{\Phi}_n)_0 = 0$, получим для Φ_n такое выражение:

$$\Phi_n = \frac{4}{\rho J_p A_n b} \int_0^t \bar{\Phi}_n \sin \frac{b\mu_n}{l} (t-t_1) dt_1.$$

Угол поворота θ представится такой формулой:

$$\theta = \frac{4}{\rho J_p b} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{A_n} \left(\cos \frac{\mu_n x}{l} - \mu_n \frac{J_1}{J_0} \sin \frac{\mu_n x}{l} \right) \int_0^t \bar{\Phi}_n \sin \frac{b\mu_n}{l} (t-t_1) dt_1. \quad (11)$$

Определение вынужденных колебаний для какого-либо частного случая не представляет теперь никаких принципиальных затруднений, нужно только в общее решение (11) вставить соответствующее значение $\bar{\Phi}$. Если моменты инерции шкивов J_1 и J_2 беспречно уменьшать, то корни уравнения (8) стремятся к значениям $\pi, 2\pi, \dots$

В пределе получим для θ выражение

$$\theta = \frac{2}{\rho J_p b \pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi x}{l} \int_0^t \bar{\Phi}_n \sin \frac{n\pi x}{l} (t-t_1) dt_1.$$

Это совпадает с результатом, полученным для вала со свободными концами.

Рассмотрим подробнее случай, когда момент инерции вала J_0 мал по сравнению с величинами J_1 и J_2 . Вводя обозначения $J_0/J_1 = K_1$, $J_0/J_2 = K_2$, можем уравнение (8) представить в таком виде:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\mu (K_1 + K_2)}{\mu^2 - K_1 K_2}. \quad (12)$$

Если K_1 и K_2 — малые величины, мы, пренебрегая малыми высших порядков, можем уравнение (12) представить так:

$$\mu \operatorname{tg} \mu = K_1 + K_2. \quad (12')$$

Для первого корня получаем такое приближенное значение:

$$\mu_1 = \sqrt{K_1 + K_2}.$$

Следующий корень будет мало отличаться от π . Полагая $\mu_2 = \pi + \alpha$ и вставляя это в уравнение (12'), получим

$$\alpha = \frac{K_1 + K_2}{\pi}, \quad \mu_2 = \pi + \frac{K_1 + K_2}{\pi}.$$

Подобными же рассуждениями найдем

$$\mu_3 = 2\pi + \frac{K_1 + K_2}{2\pi}$$

и т. д.

Таким образом, при малых значениях K_1 и K_2 первый корень будет малой величиной по сравнению со следующим по порядку корнем. Период колебания, соответствующий основному тону, будет велик по сравнению с периодом следующего по порядку тона.

Первое приближение для частоты основного тона получим, полагая

$$\mu_1 = \sqrt{K_1 + K_2},$$

откуда

$$\omega_1 = \frac{b}{l} \sqrt{K_1 + K_2} = \sqrt{\frac{GJ_p (J_1 + J_2)}{lJ_1J_2}}.$$

Этот результат совпадает с тем, что получается элементарным путем, если пренебречь массой вала и вычислить частоту колебаний получающейся таким образом системы с одной степенью свободы. Чтобы оценить влияние массы вала на частоту колебаний основного тона, найдем более точное выражение для μ_1 . Для этого в уравнение (12) вместо $\operatorname{tg} \mu$ вставим $\mu + \mu^3/3$. Отбрасывая малые величины высших порядков, получим

$$\mu_1^2 = K_1 + K_2 - \frac{1}{3} (K_1^2 + K_2^2 - K_1K_2).$$

Соответствующая частота колебаний будет

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{b^2}{l^2} \left\{ K_1 + K_2 - \frac{1}{3} (K_1^2 + K_2^2 - K_1K_2) \right\}}.$$

Если вместо K_1 и K_2 вставить их значения и принять во внимание, что они представляют собой малые величины, то выражение для ω может быть написано в таком виде:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{GJ_p}{l} \frac{\left[\left(J_1 + \frac{1}{3} J_0 \frac{J_2}{J_1 + J_2} \right) + \left(J_2 + \frac{1}{3} J_0 \frac{J_1}{J_1 + J_2} \right) \right]}{\left(J_1 + \frac{1}{3} J_0 \frac{J_2}{J_1 + J_2} \right) \left(J_2 + \frac{1}{3} J_0 \frac{J_1}{J_1 + J_2} \right)}}.$$

Формула эта была получена нами раньше при помощи приближенного метода Рэлея¹⁾.

¹⁾ См. Тимошенко С. П. К вопросу о явлениях резонанса в валах. Известия С.-Петербургского политехнического института, 1905, том 3, вып. 1—2, стр. 55—106. См. стр. 89.

IV. ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

§ 8. Основные соотношения

Мы будем рассматривать колебания в плоскости главной жесткости стержня. Начало координат поместим в центре тяжести левого концевого сечения стержня, ось x направим по оси стержня. Определение «свободных» колебаний стержня, как известно, сводится к интегрированию такого дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \quad (1)$$

Здесь приняты такие обозначения:

$$b^2 = \frac{EJg}{q}, \quad (2)$$

EJ — жесткость стержня при изгибе в плоскости xy ; q/g — масса, приходящаяся на единицу длины стержня. Общее выражение для прогиба в нормальных координатах представится в таком виде:

$$y = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3 + \dots, \quad (3)$$

где u_1, u_2, \dots — нормальные функции. Вид этих функций зависит от способа закрепления концов ¹⁾.

Живая сила системы, если пренебречь вращением поперечных сечений при изгибе, будет

$$T = \frac{q}{2g} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{q}{2g} \sum_{n=1}^{n=\infty} (\dot{\varphi}_n)^2 \int_0^l u_n^2 dx. \quad (4)$$

Члены вида

$$2\dot{\varphi}_n \dot{\varphi}_m \int_0^l u_m u_n dx$$

обращаются в нуль, так как координаты $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ нормальные.

Потенциальная энергия системы является энергией изгиба и может быть представлена в таком виде:

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{BJ}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \varphi_n^2 \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (5)$$

¹⁾ Выражения для «нормальных функций» в различных частных случаях можно найти в цитированной в сноске ¹⁾ на стр. 139 книге Рэля, там же приведены значения интегралов

$$\int_0^l u_n^2 dx.$$

Уравнение Лагранжа, соответствующее какой-либо координате φ_i , будет

$$\left(\frac{q}{g} \int_0^l u_i^2 dx \right) \ddot{\varphi}_i + \left[EJ \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 dx \right] \varphi_i = \overline{\Phi}_i. \quad (6)$$

Вводя обозначение

$$\frac{EJ \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 dx}{q \int_0^l u_i^2 dx} = n_i^2,$$

можем на основании (3) и (6) представить прогиб балки при колебаниях в такой форме:

$$y = \sum_{i=1}^{i=\infty} u_i \left\{ (\varphi_i)_0 \cos n_i t + \frac{1}{n_i} (\dot{\varphi}_i)_0 \sin n_i t + \frac{q}{q \int_0^l u_i^2 dx} \frac{1}{n_i} \int_0^l \overline{\Phi}_i \sin n_i (t - t_1) dt_1 \right\}. \quad (7)$$

Постоянные $(\varphi_i)_0$ и $(\dot{\varphi}_i)_0$ могут быть найдены из начальных обстоятельств движения. Положим в начальный момент $t=0$

$$(y)_0 = \varphi(x), \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_0 = \psi(x).$$

Тогда на основании (7) получаем

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} (\varphi_i)_0 u_i, \quad \psi(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} (\dot{\varphi}_i)_0 u_i.$$

Пользуясь основным свойством нормальных функций, найдем

$$(\varphi_i)_0 = \frac{\int_0^l \varphi(x) u_i dx}{\int_0^l u_i^2 dx}, \quad (\dot{\varphi}_i)_0 = \frac{\int_0^l \psi(x) u_i dx}{\int_0^l u_i^2 dx}.$$

Для определения колебаний остается лишь в каждом частном случае найти соответствующее значение обобщенной силы $\overline{\Phi}_i$.

§ 9. Колебания стержней, опертых по концам

С этим способом закрепления приходится особенно часто встречаться при практических приложениях теории колебаний. Условия на концах напишутся в данном случае так:

$$y = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad \text{при} \quad x = l.$$

Общее выражение для прогиба в нормальных координатах будет

$$y = \sum_{i=1}^{i=\infty} \varphi_i \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad (8)$$

Следовательно,

$$u_i = \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad \int_0^l u_i^2 dx = \frac{l}{2}, \quad \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{i^4 \pi^4}{l^4} \frac{l}{2}.$$

Выражения (4) и (5) для живой силы и потенциальной энергии перепишутся так:

$$T = \frac{ql}{4g} \sum_{i=1}^{i=\infty} (\dot{\varphi}_i)^2, \quad V = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_{i=1}^{i=\infty} i^4 \varphi_i^2.$$

Уравнение Лагранжа для координаты φ_i будет

$$\ddot{\varphi}_i + \frac{b^2 i^4 \pi^4}{l^4} \varphi_i = \frac{2g}{ql} \bar{\Phi}_i.$$

Если положить, что в начальный момент $(\varphi_i)_0 = (\dot{\varphi}_i)_0 = 0$, то для прогиба балки получим такое общее выражение:

$$y = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} \frac{l^2}{b\pi^2 i^2} \frac{2g}{ql} \int_0^t \bar{\Phi}_i \sin \frac{b i^2 \pi^2}{l^2} (t - t_1) dt_1. \quad (9)$$

§ 10. Влияние периодической поперечной силы на прогиб

В качестве примера рассмотрим раскачивание балки периодической силой $P = P_0 \sin \omega t$, приложенной в сечении $x = c$. Для определения обобщенной силы $\bar{\Phi}_i$ дадим соответствующей координате приращение $\delta\varphi_i$. Этому приращению будет соответствовать прогиб

$$\delta y = \delta\varphi_i \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Сосредоточенная сила P при этом прогибе, очевидно, совершит

работу

$$P \delta\varphi_i \sin \frac{i\pi c}{l} = P_0 \delta\varphi_i \sin \omega t \sin \frac{i\pi c}{l}.$$

Приравнивая это работе $\bar{\Phi}_i \delta\varphi_i$ обобщенной силы, найдем

$$\bar{\Phi}_i = P_0 \sin \omega t \sin \frac{i\pi c}{l}.$$

Вставляя найденное значение обобщенной силы в общее решение (9) и выполняя интегрирование, получим

$$y = \frac{2gP_0 l^3}{q} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \cdot \sin \frac{i\pi x}{l}}{b^2 i^4 \pi^4 - \omega^2 l^4} \sin \omega t - \frac{2P_0 l^6 g \omega}{g b \pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^2 (b^2 i^4 \pi^4 - \omega^2 l^4)} \sin \frac{b i^2 \pi^2 t}{l^2}. \quad (10)$$

Колебания, определяемые первой суммой, имеют тот же период, что и вынуждающая колебания сила. Вторая сумма представляет собой «свободные» колебания системы. При наличии внешних сопротивлений колебания эти постепенно затухают и практически придется иметь дело лишь с «вынужденными» колебаниями системы.

Заметим, что в том случае, когда точка приложения силы совпадает с одной из узловых точек i -го типа колебаний, $\sin(i\pi c/l) = 0$ и соответствующие члены в решении (10) обращаются в нуль — сила не вызывает, следовательно, колебаний i -го типа.

Если сила медленно меняет свою величину, то ω мало. В общем решении (10) можно отбросить второй член, имеющий ω множителем; кроме того, в членах первой суммы можно пренебречь величиной $\omega^2 l^4$ по сравнению с $b^2 i^4 \pi^4$. Окончательно для прогиба получаем выражение

$$y = \frac{2gP_0 l^3 \sin \omega t}{q b^2 \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^4} = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^4}. \quad (11)$$

Полученный результат представляет собой прогиб балки при статическом действии силы P в сечении c ¹⁾.

Отметим здесь тот частный случай, когда период внешней силы равен периоду какого-либо типа собственных колебаний системы (явление резонанса).

Пусть

$$b^2 i^4 \pi^4 = \omega^2 l^4.$$

В таком случае знаменатели соответствующей пары членов в общем решении (10) обращаются в нуль. Вынося эти члены из-под

¹⁾ См. нашу работу «Применение нормальных координат к исследованию изгиба стержней и пластинок», Известия Киевского политехнического института, 1910, отдел вжж.-механический, год 10, книга 1, стр. 1—49. См. стр. 5.

знака $\sum\sum$ и раскрывая неопределенность, придем к такому результату:

$$-\frac{P_0 g}{q \omega l} t \cos \omega t \sin \frac{i \pi c}{l} \sin \frac{i \pi x}{l} + \frac{P_0 g}{q \omega^2 l} \sin \omega t \sin \frac{i \pi c}{l} \sin \frac{i \pi x}{l}.$$

Получаем член, имеющий множителем t . Амплитуда колебаний имеет тенденцию беспрестанно возрастать. Подобный результат получился вследствие того, что мы не приняли во внимание сопротивлений. Чем сопротивления меньше, тем больших размеров может достигнуть амплитуда колебаний. Малая сила может вызывать большие прогибы, а, следовательно, и большие напряжения в балке. С этим явлением приходится считаться при технических расчетах; обыкновенно изменением поперечных размеров балки стараются избежать явления резонанса.

Если частота ω вынуждающей колебания силы меньше частоты $b\pi^2/l^2$ основного типа колебаний балки, т. е. $\omega^2 l^2 / b\pi^2 = \alpha < 1$, то можно для вычисления динамического прогиба пользоваться приближенной формулой. Составим выражение для прогиба посредине пролета. Для этого в общем решении (10) полагаем $x = l/2$:

$$(y)_{x=l/2} = \frac{2gP_0 l^3}{qb^2 \pi^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin \frac{(2k+1)\pi c}{l}}{(2k+1)^4 - \alpha^2} \sin \omega t - \\ - \frac{2gP_0 l^4 \omega}{qb\pi^2 b^2 \pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin \frac{(2k+1)\pi c}{l}}{(2k+1)^2 [(2k+1)^4 - \alpha^2]} \sin \frac{(2\omega+1)^2 b\pi^2 t}{l^2}. \quad (12)$$

Если принять во внимание выражение для прогиба при статическом действии силы P_0 , см. (11), обозначить через $f_{ст}$ статический прогиб посредине, то с достаточной точностью динамический прогиб посредине представится в таком виде:

$$f_d = f_{ст} \left(\frac{1}{1-\alpha^2} \sin \omega t - \alpha \sin \frac{b\pi^2 t}{l^2} \right).$$

В самом невыгодном случае наибольший прогиб посредине будет

$$(f_g)_{max} = f_{ст} \left(\frac{1}{1-\alpha^2} + \alpha \right). \quad (13)$$

§ 11. Продолжение. Случай сплошной поперечной нагрузки

Имея решение (10), легко найти колебания балки в случае действия сплошной периодически меняющей свою величину нагрузки. Пусть $p \sin \omega t dc$ — нагрузка, приходящаяся на элемент длины dc (p — некоторая функция от c). Вставляя pdc вместо P_0 в решении (10) и выполняя интегрирование по c в пределах от 0 до l , получим

искомое решение. Положим, например, $p = \text{const}$, т. е. балка подвергается действию сплошной равномерно распределенной нагрузки переменной интенсивности. (Приблизительно в таких условиях находится паровозный спарник.) Выполняя вышеуказанное интегрирование, найдем

$$y = \frac{4gp l^4}{q\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi x}{l} \sin \omega t}{(2k+1) [(2k+1)^4 b^2 \pi^4 - \omega^2 l^2]} - \frac{4gp l^6 \omega}{qb\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi x}{l} \sin \frac{b(2k+1)^2 \pi^2 t}{l^2}}{(2k+1)^3 [(2k+1)^4 b^2 \pi^4 - \omega^2 l^2]}. \quad (14)$$

При весьма медленном изменении интенсивности нагрузки ω — малая величина, для y получим значение

$$y = \frac{4pl^4}{EJ\pi^5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)^5}.$$

Это совпадает с выражением для статического прогиба балки ¹⁾.

Если ω меньше частоты колебаний, соответствующей основному тону, то для вычисления наибольшего динамического прогиба можно пользоваться ранее выведенной формулой (13).

§ 12. Колебания при движении постоянной поперечной силы по балке

Рассмотрим теперь колебания балки, возникающие при действии постоянной силы P , если точка приложения силы перемещается по оси x с постоянной скоростью a . В начальный момент сила расположена над левой опорой. Найдем выражение для обобщенной силы Φ_i , для этого в момент t дадим координате φ_i бесконечно малое приращение $\delta\varphi_i$. Этому приращению будет соответствовать прогиб

$$\delta y = \delta\varphi_i \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Внешняя сила P , находящаяся в рассматриваемый момент на расстоянии at от левого конца, совершит при этом изгибе работу

$$P\delta\varphi_i \sin \frac{i\pi at}{l},$$

¹⁾ См. стр. 6 нашей работы, указанной в сноске ¹⁾ на стр. 163.

приравнивая это работе $\bar{\Phi}_i \delta\varphi_i$ обобщенной силы, найдем

$$\bar{\Phi}_i = P \sin \frac{i\pi a t}{l}.$$

Вставляя это в общее решение (9) и выполняя интегрирование, найдем

$$y = \frac{2Pl^3 g}{q\pi^2} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i\pi a t}{l}}{i^2 (i^2 \pi^2 b^2 - a^2 l^2)} - \frac{2Pl^4 g a}{qb\pi^3} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{bi^2 \pi^2 t}{l^2}}{i^3 (b^2 i^2 \pi^2 - a^2 l^2)}. \quad (15)$$

Первая сумма полученного решения дает колебания, зависящие от скорости a . Это будут «вынужденные колебания» системы, вторая сумма представляет собой «свободные колебания».

Если уменьшать скорость a перемещения силы P по балке, то мы в пределе должны прийти к статическому изгибу балки. В самом деле, полагая в решении (15) $a=0$, $at=\xi$, найдем

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i\pi \xi}{l}}{i^4},$$

что совпадает с ранее полученным выражением для статического прогиба (см. (11)).

Полагая $x=l/2$ и $\xi=l/2$, придем к известному результату:

$$(y)_{x=l/2} = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \frac{\pi^4}{96} = \frac{Pl^3}{48EJ}.$$

Рассмотрим теперь подробнее тот частный случай, когда $a^2 l^2 = i^2 \pi^2 b^2$. Знаменатели двух членов в решении (15) при этом обращаются в нуль. Вынося эти члены из-под знаков \sum и раскрывая неопределенность, получим

$$-\frac{Pg}{q\pi a} t \cos \frac{i\pi a t}{l} \sin \frac{i\pi x}{l} + \frac{Pgl}{qi^2 \pi^2 a^2} \sin \frac{i\pi a t}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad (16)$$

Первый член имеет множитель t , следовательно, амплитуда колебаний i -го типа будет беспредельно возрастать.

Опять мы приходим к явлению «резонанса». Особенный практический интерес имеет тот случай, когда резонанс соответствует основному типу колебаний, т. е. когда

$$b^2 \pi^2 = a^2 l^2. \quad (17)$$

Период колебаний T для основного тона будет $T=2\pi l^2/b\pi^2=2l^2/b\pi$, или на основании (17) $T=2l/a$.

Следовательно, T вдвое больше того промежутка времени, который необходим для пробега точкой приложения силы P всего пролета балки.

Полагая в решении (15) $x=l/2$ и преобразовывая члены, соответствующие $i=1$, при помощи формулы (16) получим для прогиба балки посредине выражение

$$(y)_{x=l/2} = -\frac{Pg}{q\pi a} t \cos \frac{\pi at}{l} + \frac{Pgl}{q\pi^2 a^2} \sin \frac{\pi at}{l} + \\ + \frac{2Plg}{q\pi^2 a^2} \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi at}{l}}{(2k+1)^2 [(2k+1)^2 - 1]} - \\ - \frac{2Plg}{q\pi^2 a^2} \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k \frac{\sin \frac{(2k+1)^2 \pi at}{l}}{(2k+1)^3 [(2k+1)^2 - 1]}. \quad (18)$$

Входящие в это выражение суммы оказывают лишь небольшое влияние на величину наибольшего прогиба. Ограничиваясь первыми двумя членами выражения (18), найдем, что наибольший прогиб соответствует моменту $t=l/a$, когда сила P достигнет правой опоры балки. Величина наибольшего прогиба будет $y_{\max} = Pl^3/\pi^3 EJ$. Сравнивая это с наибольшим статическим прогибом $f_{\text{ст}} = Pl^3/48EJ$, найдем

$$\frac{(f_{\text{д}})_{\max}}{f_{\text{ст}}} = \frac{48}{\pi^3} \approx 1,55.$$

На практике обыкновенно период T основного типа колебаний во много раз меньше промежутка времени $2l/a$, и потому al мало по сравнению с величиной $b\pi$. Вводя обозначение $al : b\pi = \alpha$, можем решение (15) представить в таком виде:

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i\pi at}{l}}{i^2 (i^2 - \alpha^2)} - \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \alpha \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{bi\pi^2 t}{l^2}}{i^3 (i^2 - \alpha^2)}. \quad (19)$$

Для нахождения прогиба посредине балки в тот момент, когда сила P находится на расстоянии c от левого конца, нужно в решении (19) положить $x=l/2$, $at=c$. Тогда

$$(y)_{x=l/2} = f_{\text{д}} = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k \sin \frac{(2k+1)\pi c}{l}}{(2k+1)^3 [(2k+1)^2 - \alpha^2]} - \\ - \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \alpha \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k \sin \frac{(2k+1)^2 b\pi^2 t}{l^2}}{(2k+1)^3 [(2k+1)^2 - \alpha^2]}.$$

Если через $f_{ст}$ обозначим статический прогиб посредине, когда сила P приложена на расстоянии c от левого конца, и через $F_{ст}$ статический прогиб посредине, когда P приложена в середине пролета, то динамический прогиб посредине может быть с достаточной точностью представлен формулой

$$f_d = \frac{f_{ст}}{1-\alpha^2} - \alpha F_{ст} \sin \frac{b\pi^2 t}{l^2}. \quad (20)$$

В самом невыгодном случае:

$$(f_d)_{\max} = \frac{F_{ст}}{1-\alpha^2} + \alpha F_{ст}. \quad (21)$$

Заметим, что первый член в выражении (20) для динамического прогиба можно рассматривать как статический прогиб балки при одновременном действии поперечной силы P в сечении $x=c$ и продольной сжимающей силы Q , равной $\alpha EJ\pi^2/l^2$. Для получения f_d приходится на статический прогиб наложить гармонические колебания, имеющие амплитуду $\alpha F_{ст}$, и период, равный периоду основного типа колебаний рассматриваемой балки.

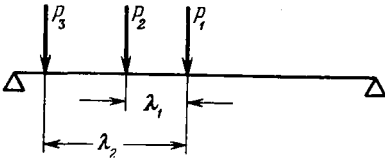


Рис. 1.

Если по балке с одной и той же скоростью a перемещается несколько сосредоточенных сил P_1, P_2, \dots , то для определения прогиба придется сложить действия отдельных сил. Пусть P_1, P_2, \dots обозначают силы в том порядке, в каком они при перемещении вступают на балку (рис. 1); $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — расстояния сил P_2, P_3, \dots от силы P_1 , тогда, применяя к каждой из сил формулу (20), получим динамический прогиб посредине в таком виде:

$$f_d = \frac{f'_{ст} + f''_{ст} + f'''_{ст} + \dots}{1-\alpha^2} - \alpha F'_{ст} \sin \frac{b\pi^2 t}{l^2} - \alpha F''_{ст} \sin \frac{b\pi^2}{l^2} \left(t - \frac{\lambda_1}{a} \right) - \alpha F'''_{ст} \sin \frac{b\pi^2}{l^2} \left(t - \frac{\lambda_2}{a} \right) - \dots \quad (22)$$

Самые невыгодные условия будем иметь, когда амплитуды колебаний, вызываемых отдельными силами, складываются, т. е. когда промежутки времени $\lambda_1/a, \lambda_2/a, \dots$ кратны T — периоду основного типа колебаний балки. В этом случае

$$f_d = \frac{1}{1-\alpha^2} (f'_{ст} + f''_{ст} + f'''_{ст} + \dots) - \alpha (F'_{ст} + F''_{ст} + F'''_{ст} + \dots) \sin \frac{b\pi^2 t}{l^2}.$$

¹⁾ См. стр. 10 нашей работы, указанной в сноске ¹⁾ на стр. 163.

§ 13. Колебания при движущейся по балке равномерной поперечной нагрузке

В качестве последнего примера рассмотрим колебания балки под действием равномерно распределенных усилий, надвигающихся на балку с постоянной скоростью a (рис. 2, а). Обозначим через p силу, приходящуюся на единицу длины балки, тогда $padt_1$

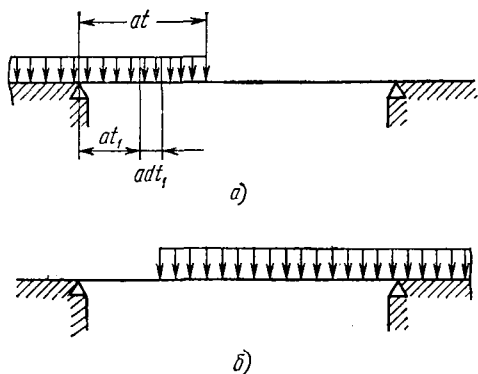


Рис. 2.

будет усилие, приходящееся на элемент балки adt_1 , выделенный на расстоянии at_1 от левого конца.

Прогибы δy , вызываемые выделенным элементарным усилием $padt_1$, определяются на основании решения (15) предыдущего параграфа:

$$\delta y = \frac{2pl^3ga}{q\pi^3} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i\pi at_1}{l} dt_1}{i^2 (i^2\pi^2b^2 - a^2l^2)} - \frac{2pl^4ga^2}{qb\pi^3} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{bi^2\pi^2t_1}{l^2}}{i^3 (b^2i^2\pi^2 - a^2l^2)} dt_1.$$

Интегрируя это выражение по t_1 в пределах от 0 до t , получим прогиб от усилий, распределенных по всей длине at :

$$y = \frac{2pl^4g}{qb^2\pi^5} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l}}{i^5} + \frac{2pl^3ga^2}{qb^2\pi^5} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \cos \frac{bi^2\pi^2t}{l^2}}{i^5 (b^2i^2\pi^2 - a^2l^2)} - \frac{2pl^4g}{q\pi^3} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \cos \frac{i\pi at}{l}}{i^3 (i^2\pi^2b^2 - a^2l^2)}. \quad (23)$$

К тому же результату можно прийти, определяя для данного случая значения Φ_i и вставляя его в общее решение (9) § 9. Для

нахождения φ_i , очевидно, будет служить уравнение

$$\bar{\Phi}_i \delta \varphi_i = p \delta \varphi_i \int_0^{at} \sin \frac{i\pi x}{l} dx.$$

Решение (23) применимо, пока $at < l$. С момента $at = l$ на балку действуют равномерно распределенные постоянные усилия; балка совершает «свободные колебания», определяемые величинами y и dy/dt в момент $t = l/a$.

Когда усилия p начнут сходиться с пролета балки (рис. 2, б), снова появляются вынужденные колебания. Выражение для y может быть получено тем же способом, что и в предыдущем случае. Конечно, придется принять во внимание значения y и dy/dt в момент начала схода нагрузки с пролета балки.

Если в решении (23) положить скорость a равной нулю, то мы от задачи динамики перейдем к задаче статики; для прогиба по середине пролета получится выражение

$$(y)_{x=l/2} = \frac{2pl^4g}{q\pi^5b^2} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^5} - \frac{2pl^4g}{q\pi^5b^2} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k \cos \frac{(2k+1)\pi at}{l}}{(2k+1)^5}.$$

Полагая $at = l$, т. е. выбирая тот момент, когда усилия p занимают весь пролет балки, найдем

$$(y)_{x=l/2} = \frac{4pl^4g}{q\pi^5b^2} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^5} = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EJ},$$

что совпадает с известной формулой для изгиба балки равномерно распределенной нагрузкой.

§ 14. Динамические напряжения

Во всех рассмотренных нами частных случаях мы ограничивались отысканием выражения для динамических прогибов балки.

Для определения напряжений необходимо найти динамическое значение кривизны балки в различных сечениях, т. е. составить общее выражение для $\partial^2 y / \partial x^2$. Возьмем случай изгиба балки силой, перемещающейся вдоль оси x с постоянной скоростью a . На основании решения (15) получаем

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{2Pl^3g}{q} \sum_{t=1}^{t=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i\pi at}{l}}{i^2\pi^2b^2 - a^2l^2} + \frac{2Pl^2ga}{qb\pi} \sum_{t=1}^{t=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{bi^2\pi^2t}{l^2}}{i(b^2i^2\pi^2 - a^2l^2)}.$$

Полагая в этом выражении $x=l/a$ и вводя обозначение $at=\xi$, $\alpha^2 l^2/b^2 \pi^2 = \alpha^2$, получим для кривизны балки посредине пролета такую формулу:

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=l/2} = -\frac{2Pl}{EJ\pi^2} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k \sin \frac{(2k+1)\pi\xi}{l}}{(2k+1)^2 - \alpha^2} + \frac{2Pl}{EJ\pi^2} \alpha \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k \sin \frac{b\pi^2(2k+1)^2 t}{l^2}}{(2k+1)[(2k+1)^2 - \alpha^2]}. \quad (24)$$

Если скорость перемещения силы P весьма мала, то кривизна посредине имеет значение

$$-\frac{2Pl}{EJ\pi^2} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k \sin \frac{(2k+1)\pi\xi}{l}}{(2k+1)^2}.$$

В момент совпадения силы P с серединой пролета это выражение получает максимальное значение

$$-\frac{2Pl}{EJ\pi^2} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = -\frac{Pl}{4EJ},$$

что совпадает с известной формулой сопротивления материалов.

Возвращаясь к выражению (24), заметим, что первый член с достаточной точностью можно принять равным статическому значению кривизны, деленному на $1-\alpha^2$. К этому нужно присоединить колебания, определяемые вторым членом выражения (24). Принимая во внимание лишь колебания основного тона, можем формулу для нахождения наибольшей кривизны балки представить в виде:

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_d = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{ст} \left(\frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{8}{\pi^2} \alpha\right), \quad \alpha \text{ — малая величина.}$$

Заметим, что для приблизительного вычисления кривизны, как и прогиба, см. формулу (21), нужно знать лишь величину α , т. е. уметь находить период основного тона колебаний балки. Этим обстоятельством можно воспользоваться для определения динамического прогиба непрямоугольных стержней. Вычисление периода основного тона колебаний таких стержней может быть приблизительно выполнено методом Рэлея. Заранее задаемся подходящей формой изгиба, т. е. обращаем нашу балку в систему с одной степенью свободы. Для этой системы составляем выражение потенциальной энергии и живой силы. После этого вычисление частоты и периода колебаний может быть выполнено без затруднений. Найденный этим приближенным способом период колебаний всегда будет несколько меньше истинной величины периода основного тона колебаний балки.

V. КОЛЕБАНИЯ МОСТОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

§ 15. Невесомый мост

Некоторые результаты предыдущей главы могут служить для определений колебаний, возникающих в мостах под действием подвижной нагрузки. При расчете мостов обыкновенно предполагается, что подвижная нагрузка из одного положения в другое переходит с бесконечно малой скоростью, и потому давление каждого из подвижных грузов в любой момент равно весу этого груза. При конечных скоростях это предположение не вполне точно. Благодаря прогибу моста катящиеся по нему грузы совершают некоторые перемещения по вертикальному направлению. Силы инерции, соответствующие этому перемещению, очевидно, должны быть присоединены к весу грузов при вычислении давлений, оказываемых грузами на мост. Кроме того, должно принять во внимание силы инерции элементов самого моста, совершающих перемещения при проходе подвижной нагрузки. Во всей полноте задача о динамическом прогибе мостов является до сих пор не решенной, исследованы лишь предельные случаи.

1) Когда вес моста мал по сравнению с весом катящегося по нему груза и, следовательно, можно с достаточной точностью ограничиться лишь влиянием сил инерции груза.

2) Когда вес подвижной нагрузки мал по сравнению с весом моста.

Первая попытка определить влияние силы инерции подвижного груза на прогиб моста (пренебрегая массой самого моста) принадлежит профессору Кембриджского университета Р. Виллису¹⁾. Приняв, что траектория перемещающего груза P определяется уравнением

$$y = \frac{P(lx - x^2)^2}{3lEJ} \quad (1)$$

(уравнение это получим, вычисляя для каждого положения груза статический прогиб под грузом; получаемая таким образом кривая дает траекторию для случая, когда груз перемещается по мосту с бесконечно малой скоростью), Р. Виллис нашел для силы инерции

¹⁾ Willis Robert. См. «Report of the Commissioners appointed to inquire into the application of Iron to Railway Structures». London, Printed by William Clowes and sons, 1849, 435 p. Appendix B. «Experiments for determining the effects produced by causing weights to travel over Bars with different velocities, made in Portsmouth Dockyard and at Cambridge by the Rev.» Robert Willis, F. R. S., Jacksonian Professor, etc.; Captain Henry James, R. E., F. R. S. and Lieutenant Douglas Galton R. E., pp. 181—263.

груза значение

$$-\frac{P}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{P}{g} \frac{a^2 \partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{Pa^2}{g} \frac{2P}{3lEJ} (l^2 - 6lx + 6x^2).$$

Здесь через a обозначена скорость перемещения груза по мосту. Наибольшее значение силы инерции получают при $x=l/2$. Давление, оказываемое в этот момент грузом, будет

$$P \left(1 + \frac{a^2 Q l}{g 3EJ} \right) = P \left(1 + \frac{16a^2 f_{ст}}{g l^2} \right) = P \left(1 + \frac{1}{\beta} \right). \quad (2)$$

Здесь

$$f_{ст} = \frac{Pl^3}{48EJ}, \quad \beta = \frac{gl^2}{16a^2 f_{ст}}.$$

Точное решение задачи об изгибе невесомого стержня под действием катящегося груза принадлежит английскому ученому Джорджу Габриелю Стоксу ¹⁾.

Оказывается, что при допускаемых скоростях движения и при допускаемых в мостах значениях $f_{ст}$ величина $1/\beta$ мала и результат P . Виллиса (2) с достаточной точностью оценивает влияние инерции груза. В качестве второго приближения можно для давления груза посредине принять формулу ²⁾

$$P \left(1 + \frac{1}{\beta - 3} \right). \quad (3)$$

Если мы хотим при помощи формулы (3) найти давление оси паровоза или вагона, то вместо P нужно подставить вес одного лишь колесного ската; влияние масс остальных частей паровоза или вагона будет ослаблено благодаря наличию рессор, и потому вес этих частей придется умножить на коэффициент, весьма близкий к единице. По подсчетам Г. Циммермана возрастание давления от сил инерции составляет в самом невыгодном случае 14% от статического давления (подобное повышение давления может получиться при скорости движения 100 км/час для балок высотой 30 см).

Принимая за уравнение траектории груза уравнение (1), можно приблизительно оценить также влияние сил инерции самой балки на величину прогиба и на величину наибольшего изгибающего

¹⁾ Stokes G. G. Mathematical and physical papers. Vol. 2. Cambridge University Press, 1883, 366 p. См. Discussion of a differential equation relating to the breaking of railway bridges, pp. 178—220.

²⁾ Аналогичная формула приведена на стр. 39 работы Г. Циммермана: Z i m m e r m a n n H. Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last. Berlin, W. Ernst und Sohn, 1896, 54 S. Заметим, что эта часто цитируемая работа, появившаяся через полстолетия после работы Дж. Стокса, не включает каких-либо новых результатов. В ней почему-то отсутствуют ссылки на работы Дж. Стокса, изложенные в столь распространенной книге, как «Теория упругости» А. Клебша, переведенной Сен-Венаном (C l e b s c h A. Théorie de l'élasticité des corps solides. Traduite par Saint-Venant et Flamant, Paris, Dunod, 1883, 900 p. См. Note finale du § 61, pp. 597—615.)

момента. Если через Q обозначить вес балки, то для наибольшего изгибающего момента, принимая во внимание силы инерции груза P и балки, можно написать такую формулу¹⁾:

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{Ql}{8} \left(1 + \frac{5}{4} \frac{1}{\beta}\right). \quad (4)$$

§ 16. Учет веса моста

Формулы (2) и (3) предыдущего параграфа, выведенные в предположении невесомого стержня, очевидно, могут дать удовлетворительные результаты лишь в том случае, если вес балки мал по сравнению с весом катящегося по ней груза. С возрастанием пролета моста его вес имеет преобладающее значение при оценке влияния на прогиб подвижной нагрузки. Уже Дж. Стокс заметил, что движение груза должно вызвать в балке колебания. Для определения этих колебаний им был употреблен приближенный прием, изложенный в дополнении к цитированной выше работе. Прием основан на том предположении, что вес подвижного груза мал по сравнению с весом моста. Полученный Дж. Стоксом для колебания балки результат весьма близок к тому, что дает второй член приближенной формулы (20) § 12.

Точное решение задачи о колебаниях балки в том случае, когда массой передвигающегося груза можно пренебречь, дал А. Н. Крылов²⁾. Решение его, основанное на интегрировании дифференциального уравнения для поперечных колебаний призматического стержня, совпадает с приведенным выше решением (см. (15) § 12), построенным на пользовании нормальными координатами. Дополнительный прогиб, обусловленный колебаниями балки, определяется, как мы видели, величиной $\alpha = al/b\lambda$. Значения α и соответствующие им периоды T основных колебаний для мостов различных пролетов приведены в следующей таблице:

$l, м$	10	20	40	60	80	100
$T, сек$	0,046	0,079	0,129	0,181	0,226	0,270
α при $\begin{cases} a=10 м/сек \\ a=30 м/сек \end{cases}$	$\begin{matrix} 0,023 \\ 0,069 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,020 \\ 0,060 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,016 \\ 0,048 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,015 \\ 0,045 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,014 \\ 0,042 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,0135 \\ 0,040 \end{matrix}$

¹⁾ См. стр. 607 книги А. Clebsch, указанной в сноске ²⁾ на стр. 173 (Note finale du § 61).

²⁾ Kriloff A. Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben. Mathematische Annalen, 1905, Bd. 61, SS. 211—234. [Перепечатка: Крылов А. Н. Собрание трудов. Том 5, математика и механика. М.—Л., издание АН СССР, 1937, стр. 513—537.]

При вычислениях предполагалось, что мост представляет собой балку постоянного сечения. Вес определялся по таблицам для собственного веса железнодорожных мостов¹⁾. Высота моста принята равной 0,1 пролета, допускаемые напряжения 800 кг/см².

Из таблицы видно, что влияние колебаний балки на величину наибольшего прогиба невелико и тем меньше, чем больше пролет моста. Пользуясь общим решением (15), § 12, можно приблизительно оценить влияние массы передвигающегося груза на прогиб в том случае, если вес этого груза мал по сравнению с весом моста. Давление P' , которое производит катящийся груз P на мост, определяется формулой

$$P' = P \left(1 - \frac{1}{g} \frac{d^2y}{dt^2} \right).$$

Первое приближение мы получим, если в это выражение вместо y подставим его значение (15), § 12, полученное в предположении перемещения по балке постоянной силы P . Беря из сумм, входящих в решение (15), лишь по одному первому члену, т. е. рассматривая балку как систему с одной степенью свободы и полагая $x=at$, найдем для прогиба под грузом выражение

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sin \frac{\pi at}{l} \left(\sin \frac{\pi at}{l} - \alpha \sin \frac{b\pi^2 t}{l^2} \right).$$

Составляя d^2y/dt^2 и отбрасывая члены, имеющие множителем α^2 , получим такое значение для сил инерции катящегося груза:

$$-\frac{P}{g} \frac{d^2y}{dt^2} = -P \frac{2P}{Q} \alpha \sin \frac{\pi at}{l} \sin \frac{b\pi^2 t}{l^2}. \quad (5)$$

Найдем колебания, обусловленные этими силами.

Применяя общий метод, получим для обобщенной силы $\bar{\Phi}$ значение

$$\bar{\Phi} = -P \frac{2P}{Q} \alpha \sin^2 \frac{\pi at}{l} \sin \frac{b\pi^2 t}{l^2}.$$

Вставляя это в общее решение (9), найдем

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \frac{2P}{Q} \alpha \sin \frac{b\pi^2 t}{l^2} \sin^2 \frac{\pi at}{l}.$$

Амплитуда этих колебаний будет мала по сравнению с амплитудой колебаний α , соответствующей первому приближению лишь в том случае, если $2P/Q$ — малая величина. Только при этом условии мы путем последовательных приближений можем оценить влияние сил инерции катящегося груза.

¹⁾ Handbuch der Ingenieurwissenschaften. II Band: «Der Brückenbau». Zweite Abtheilung. Eiserne Brücken. Bewegliche und Aquaduckt — Brücken. Leipzig, Verlag von W. Engelmann, 1882, XVI+873 S. См. S. 6.

Заметим, что при оценке влияния инерции движущихся по мосту паровоза и вагонов нужно принимать во внимание лишь массу колесных скатов. Массы остальных частей, благодаря действию рессор, принимают в колебании моста малое участие, так как частота собственных колебаний моста (если пролет не очень велик) в несколько раз превосходит частоту собственных колебаний паровоза и вагонов¹⁾.

Рассмотрение обоих предельных случаев действия подвижной нагрузки на мосты дает основание полагать, что вообще увеличение прогиба и наибольшего изгибающего момента, обусловленное тем обстоятельством, что груз надвигается на балку с некоторой конечной скоростью, невелико и тем меньше, чем больше пролет моста.

Кроме рассмотренной выше причины увеличение прогиба может быть вызвано ударами на рельсовых стыках, ударами от износившихся бандажей и действием противовесов. Удары на стыках могут вызвать особенно большие дополнительные напряжения в случае мостов малых пролетов, и потому устройство стыков на таких мостах не должно быть допускаемо.

§ 17. Колебания, вызываемые действием противовесов

Из таблицы предыдущего параграфа видно, что периоды колебаний мостов с пролетами 60—100 м колеблются в пределах от 1/6 до 1/4 секунды. При значительных скоростях примерно за такой же промежуток времени колеса, снабженные противовесами, могут совершать полный оборот. Вследствие совпадения частоты свободных колебаний моста с угловой скоростью колес, имеющих противовесы, получится явление резонанса. Амплитуда колебаний, вызываемых силами инерции противовесов, может при таких условиях достигнуть весьма значительной величины. Для исследования этих колебаний применим общий прием.

Пусть Q — вес противовеса; ρ — расстояние центра тяжести противовеса от оси колеса; a — поступательная скорость паровоза; r — радиус колеса; тогда центробежная сила, соответствующая противовесу, будет

$$F = Qa^2\rho/gr^2.$$

При существующих размерах противовесов и при обычных скоростях движения сила F может достигать 5000 кг для паровозов скорых поездов и 3500 кг для товарных паровозов. Силой, вынуждающей колебания моста, явится вертикальная составляющая силы F . Если для простоты положим, что в момент входа колеса на мост противовес занимает низшее свое положение, и обозначим через ω угловую скорость вращения колеса, то интересующая нас вертикальная

¹⁾ См. цитированную в сноске ²⁾ на стр. 174 работу А. Н. Крылова.

составляющая силы F будет

$$F \cos \omega t. \quad (6)$$

Обобщенная сила $\bar{\Phi}_n$, соответствующая координате φ_n , представится формулой

$$\bar{\Phi}_n = F \cos \omega t \sin \frac{n\pi a t}{l}. \quad (7)$$

Для получения колебаний остается только это значение обобщенной силы подставить в общее решение (9), § 9. Выполняя указанные там интегрирования и вводя для сокращения письма обозначения $al/b\pi = \alpha$, $\omega l^2/b\pi^2 = \beta$, получим для прогиба y такое общее выражение:

$$y = \frac{Fl^3}{EJ\pi^4} \sum_{i=1}^{i=\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} \left\{ \frac{\left(\sin \frac{i\pi a}{l} + \omega \right) t}{i^4 - (\beta + i\alpha)^2} + \frac{\sin \left(\frac{i\pi a}{l} - \omega \right) t}{i^4 - (\beta - i\alpha)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{i} \left[\frac{\sin \frac{i^2 b \pi^2}{l^2} t}{(i\alpha)^2 - (i^2 - \beta)^2} + \frac{\sin \frac{i^2 b \pi^2}{l^2} t}{(i\alpha)^2 - (i^2 + \beta)^2} \right] \right\}. \quad (8)$$

Если в этом решении положить $\omega = \beta = 0$, то придем к выражению для колебаний в случае перемещения по балке с постоянной скоростью постоянной силы F , решение (8) совпадет с решением (15), § 12.

Полагая $\alpha = 0$ и считая β малым, получим

$$y = \frac{2Fl^3}{EJ\pi^4} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i\pi a t}{l}}{i^4},$$

т. е. статический прогиб при перемещении силы $F \cos \omega t$. Формулу эту можно применять в случае мостов малых пролетов.

Выше было уже упомянуто, что при больших скоростях паровоза угловая скорость ω может быть примерно той же величины, что и частота основных колебаний моста $b\pi^2/l^2$, а величина β , следовательно, близка к единице. Исследуем для этого случая сумму членов решения (8), соответствующих $i=1$, так как при β , близком к единице, именно эти члены имеют преобладающее значение. После некоторых преобразований сумма этих членов может быть представлена в таком виде:

$$\frac{Fl^3}{2EJ\pi^4} \sin \frac{\pi x}{l} \left\{ \sin \left(\frac{\pi a}{l} + \omega \right) t \left(\frac{1}{1 + \alpha + \beta} + \frac{1}{1 - \alpha - \beta} \right) + \right. \\ \left. + \sin \left(\frac{\pi a}{l} - \omega \right) t \left(\frac{1}{1 + \alpha - \beta} + \frac{1}{1 - \alpha + \beta} \right) + \right. \\ \left. + \sin \frac{b\pi^2 t}{l^2} \left(\frac{1}{1 + \alpha - \beta} + \frac{1}{-1 + \alpha + \beta} + \frac{1}{1 + \alpha + \beta} + \frac{1}{-1 + \alpha - \beta} \right) \right\}.$$

Когда β приближается к единице, преобладающее значение имеет сумма таких членов:

$$\frac{Fl^3}{2EJ\pi^4} \sin \frac{\pi x}{l} \left\{ \frac{\sin \left(\frac{\pi a}{l} + \omega \right) t}{1 - \alpha - \beta} + \frac{\sin \left(\frac{\pi a}{l} - \omega \right) t}{1 + \alpha - \beta} - \frac{\sin \frac{b\pi^2 t}{l^2}}{1 - \alpha - \beta} + \frac{\sin \frac{b\pi^2 t}{l^2}}{1 + \alpha - \beta} \right\}. \quad (9)$$

Положим $\beta = 1 - \alpha$, т. е. $\omega = \frac{b\pi^2}{l^2} - \frac{\pi a}{l}$.

Сумма членов (9) может быть представлена в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{Fl^3}{2EJ\pi^4} \sin \frac{\pi x}{l} \left\{ \frac{\sin \left(\frac{\pi a}{l} + \omega \right) t - \sin \frac{b\pi^2 t}{l^2}}{1 - \alpha - \beta} + \frac{\sin \left(\frac{\pi a}{l} - \omega \right) t + \sin \frac{b\pi^2 t}{l^2}}{1 + \alpha - \beta} \right\} = \\ = \frac{Fl^3}{2EJ\pi^4} \sin \frac{\pi x}{l} \left\{ -t \frac{b\pi^2}{l^2} \cos \frac{b\pi^2 t}{l^2} + \frac{1}{\alpha} \sin \frac{\pi a t}{l} \cos \omega t \right\}. \end{aligned}$$

Соответствующий этим членам прогиб посередине y_1 получим, полагая $x = l/2$:

$$y_1 = \frac{2Fl^3}{EJ\pi^4} \frac{1}{4\alpha} \left\{ -t \frac{a\pi}{l} \cos \frac{b\pi^2 t}{l^2} + \sin \frac{\pi a t}{l} \cos \omega t \right\}.$$

При $t = l/2a$, т. е. когда колеса с противовесами достигнут середины пролета, найдем

$$\begin{aligned} (y_1)_{t=l/2a} &= \frac{2Fl^3}{EJ\pi^4} \cdot \frac{1}{4\alpha} \left\{ -\frac{\pi}{2} \cos \frac{b\pi^2 t}{l^2} + \cos \omega t \right\} = \\ &= \frac{2Fl^3}{EJ\pi^4} \cdot \frac{1}{4\alpha} \left\{ -\frac{\pi}{2} \cos \frac{b\pi^2 t}{l^2} + \cos \left(\frac{b\pi^2}{l^2} - \frac{\pi a}{l} \right) t \right\} = \\ &= \frac{2Fl^3}{EJ\pi^4} \cdot \frac{1}{4\alpha} \left\{ -\frac{\pi}{2} \cos \frac{b\pi^2 t}{l^2} + \cos \left(\frac{b\pi^2}{l^2} - 90^\circ \right) \right\}. \end{aligned}$$

В самом невыгодном случае амплитуда колебаний в рассматриваемый момент будет

$$\frac{2Fl^3}{EJ\pi^4} \cdot \frac{\pi}{8\alpha}. \quad (10)$$

При $t = l/a$ для амплитуды колебаний найдем такое значение:

$$\frac{2Fl^3}{EJ\pi^4} \cdot \frac{\pi}{4\alpha}. \quad (11)$$

Найденная амплитуда вдвое меньше той, что получается при действии силы $F \cos \frac{b\pi^2 t}{l^2}$, приложенной посередине пролета, за промежуток времени l/a (см. § 10).

Как видно из таблицы § 16, величины α , при которых можно ожидать резонанса для паровозов скорых поездов, колеблются в пре-

делах $1/20—1/35$ (при окружности ведущих колес 6 м), для товарных паровозов соответствующее α имеет вдвое меньшую величину (при окружности ведущих колес 3 м). Принимая во внимание эти величины α , мы на основании формулы (11) заключаем, что для скорых паровозов наибольший прогиб, вызываемый противовесами, может в $15 \div 25$ раз превосходить статический прогиб от силы F (до 5 тонн), помещенной посредине пролета. Подобный результат мы получили, пренебрегая сопротивлениями среды. Благодаря сопротивлениям амплитуда колебаний будет меньше, но все же при наличии резонанса влияние противовесов на прогиб весьма значительно, и при мостах больших пролетов именно эта причина может вызвать сильные колебания.

§ 18. Одновременное действие нагрузки и веса моста

В заключение отметим одну задачу, допускающую элементарное решение. Положим, имеется установившееся движение со скоростью a сплошной нагрузки p кг/м по балке постоянного сечения, q — вес балки на погонную единицу. Колебаний в таком случае не будет и балка будет изогнута собственным весом, весом подвижной нагрузки и соответствующими этим нагрузкам силами инерции. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки будет

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = p + q - \frac{\rho a^2}{g} \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Интегрируя это уравнение и принимая во внимание условия на концах

$$y = \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad \text{при } x=0 \quad \text{и при } x=l,$$

получим

$$y = \frac{g}{\rho a^2} (p + q) \left\{ -\frac{lx}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha x) + \frac{1}{\alpha^2} \frac{1 - \cos \alpha l}{\sin \alpha l} \sin \alpha x \right\},$$

где $\alpha^2 = \rho a^2 / gEJ$. Прогиб посредине равен

$$f = \frac{g}{\rho a^2} (p + q) \left\{ \frac{1}{\alpha^2} \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} \sin \frac{\alpha l}{2} - \frac{2}{\alpha^2} \sin^2 \frac{\alpha l}{4} - \frac{l^2}{8} \right\}.$$

Приведенных примеров достаточно, чтобы показать применимость общего метода, основанного на пользовании нормальными координатами, к решению целого ряда важных технических задач. В случае действия сосредоточенных сил эта метода проще, чем способ, основанный на интегрировании соответствующих дифференциальных уравнений.

В дальнейшем мы надеемся применить эту методу к исследованию колебаний, возникающих при ударе.

ПРИМЕНЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ КООРДИНАТ К ИССЛЕДОВАНИЮ ИЗГИБА СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИНОК

Известия Киевского политехнического института, 1910, год 10, отдел инженерной механики, книга 1, стр. 1—49. Отдельный оттиск, Киев, 1910, 50 стр.

§ 1. Нормальные координаты

Нормальные координаты, имеющие столь важное значение в акустике, могут быть применены с большой выгодой в различных задачах строительной механики. Ими, например, пользуются при нахождении лишних неизвестных в системах с лишними закреплениями или лишними стержнями ¹⁾. Применяя нормальные координаты при исследовании изгиба стержней и пластинок, можно получить общие выражения для изогнутой оси стержня и для изогнутой поверхности пластинки. Эти общие выражения особенно удобны для вычисления прогибов в тех случаях, когда кроме поперечных нагрузок имеются силы, действующие по оси стержня или в плоскости пластинки. Исходя из общего выражения для изогнутой оси стержня, можно дать приближенные формулы для вычисления прогибов сжатых и растянутых стержней, лежащих на упругом основании. Некоторые частные задачи этого рода подробно рассмотрены в статьях А. Ван-дер-Флита ²⁾ и Ф. Форшхеймера ³⁾.

Если прогиб стержня или пластинки выражен в нормальных координатах, то потенциальная энергия V представится однородной функцией второй степени, заключающей лишь квадраты координат. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ обозначают нормальные координаты. При заданных внешних силах величины $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ могут быть найдены из того условия, что производная от потенциальной энергии по какой-либо координате φ_n дает значение соответствующей обобщенной силы $\bar{\Phi}_n$. Таким образом, получаем систему уравнений вида

$$\frac{dV}{d\varphi_n} = \bar{\Phi}_n. \quad (1)$$

¹⁾ См. Кирпичев В. Л. Лишние неизвестные в строительной механике. Расчет статически-неопределимых систем. Киев, тип. Кульженко, 1903, 182 стр. [То же. Издание второе, посмертное. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1934, 140 стр.]

²⁾ Ван-дер-Флит А. Расчет опорной рамы с абсолютно жесткой распоркой в мостах с ездой по низу. Известия собрания инженеров путей сообщения, С.-Петербург, 1902, год издания 19, № 6, стр. 121—126. Изгиб сжатых и вытянутых балок с заделанными концами. Известия С.-Петербургского политехнического института, 1904, том 1, вып. 1—2, стр. 3—76; вып. 3—4, стр. 257—279.

³⁾ For sch he i m e r Ph. Die Verjüngung der Rohrweite bei Hochdruckleitungen. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1906, Bd. 50, № 48, SS. 1954—1955.

Каждое из этих уравнений включает лишь одну неизвестную координату и потому разрешается без всяких затруднений. Обобщенная сила $\bar{\Phi}_n$ в каждом частном случае определяется из того условия, что произведение $\bar{\Phi}_n \delta \varphi_n$ равняется работе внешних сил при деформации, соответствующей приращению координаты $\delta \varphi_n$.

1. ИЗГИБ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С ОПЕРТЫМИ КОНЦАМИ

§ 2. Поперечная нагрузка

В этом случае прогиб y в каком-либо поперечном сечении стержня на расстоянии x от левого конца (см. рис. 1) может быть представлен в таком виде:

$$y = \varphi_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \varphi_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \varphi_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (2)$$

Если действуют только поперечные силы, то потенциальная энергия системы определится формулой

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^4 \varphi_n^2. \quad (3)$$

(Здесь EJ — жесткость стержня при изгибе.)

Подставляя это выражение потенциальной энергии в уравнения (1), найдем

$$\varphi_n = \frac{2l^3}{JE\pi^4 n^4} \bar{\Phi}_n.$$

Выражение (2) для изогнутой оси может быть теперь представлено в таком виде:

$$y = \frac{2l^3}{EJ\pi^4} \left(\frac{\bar{\Phi}_1}{1^4} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{\bar{\Phi}_2}{2^4} \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{\bar{\Phi}_3}{3^4} \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \right). \quad (4)$$

Применим это общее выражение к различным частным случаям нагрузки.

Положим, стержень AB изгибается сосредоточенной силой P , приложенной на расстоянии c от левого конца (рис. 1). Для определения обобщенной силы $\bar{\Phi}_n$, соответствующей этому случаю нагрузки, заметим, что произведение $\bar{\Phi}_n \cdot \delta \varphi_n$ должно давать работу внешних сил, в нашем случае силы P на перемещениях, соответствующих приращению $\delta \varphi_n$ координаты φ_n . На основании общего выражения (2) прогиб балки, соответствующий приращению $\delta \varphi_n$, равен

$$\delta y = \delta \varphi_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Работа силы P , соответствующая этому прогибу, будет

$$P \delta \varphi_n \sin \frac{n\pi c}{l}.$$

Обобщенная сила $\bar{\Phi}_n$ найдется из равенства

$$P \delta \varphi_n \sin \frac{n\pi c}{l} = \bar{\Phi}_n \delta \varphi_n. \quad (5)$$

Вставляя полученные таким образом значения $\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2$ в выражение (4), найдем

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \left(\frac{\sin \frac{\pi c}{l} \sin \frac{\pi x}{l}}{1^4} + \frac{\sin \frac{2\pi c}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}}{2^4} + \frac{\sin \frac{3\pi c}{l} \sin \frac{3\pi x}{l}}{3^4} + \dots \right). \quad (6)$$

Возьмем, например, случай изгиба силой P , приложенной посередине пролета. Прогиб посередине получим, полагая в общем выражении (6) $c = x = l/2$:

$$(y)_{x=l/2} = f_0 = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right) = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \cdot \frac{\pi^4}{96} = \frac{Pl^3}{48EJ}.$$

Таким образом, приходим к известной формуле сопротивления материалов.

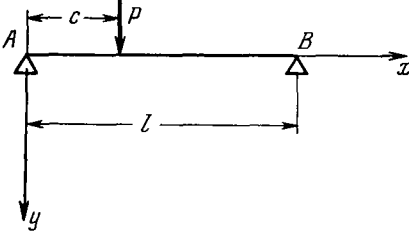


Рис. 1.

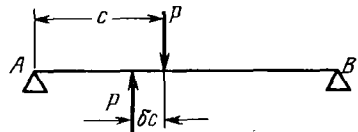


Рис. 2.

От изгиба сосредоточенной силой легко перейти к изгибу парой сил.

Если к стержню AB приложить две взаимно противоположные силы P (рис. 2), то прогиб в любой точке на основании выражения (6) представится так:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \left\{ \left[\sin \frac{\pi c}{l} - \sin \frac{\pi(c-\delta c)}{l} \right] \sin \frac{\pi x}{l} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^4} \left[\sin \frac{2\pi c}{l} - \sin \frac{2\pi(c-\delta c)}{l} \right] \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right\} = \\ &= \frac{2Pl^3\delta c}{EJ\pi^3} \left[\cos \frac{\pi c}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2^3} \cos \frac{2\pi c}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3^3} \cos \frac{3\pi c}{l} \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Полагая $P\delta c = M$, найдем

$$y = \frac{2Ml^2}{EJ\pi^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^3}. \quad (7)$$

Найдем, для примера, прогиб балки посередине в том случае, когда пара сил приложена к левому концу. Для этого в общем выражении (7) нужно положить $c=0$, $x=l/2$:

$$y = \frac{2Ml^2}{EJ\pi^3} \left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots \right) = \frac{2Ml^2 \pi^3}{EJ\pi^3 32} = \frac{Ml^2}{16EJ}.$$

Легко видеть, что выражение (7) для случая изгиба парой сил получается из выражения (6) путем дифференцирования по c .

Путем интегрирования можно из выражения (6) получить выражение для изогнутой оси в случае действия сплошной нагрузки.

Пусть q — интенсивность сплошной нагрузки (в общем случае q — функция от c). Вставляя в выражение (6) вместо P величину qdc и интегрируя в пределах от 0 до l , получим выражение для изогнутой оси при действии сплошной нагрузки. Если q постоянно по длине пролета, то нагрузка распределена равномерно. Легко получить

$$y = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \left(\sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^5} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^5} \sin \frac{5\pi x}{l} + \dots \right).$$

Пользуясь формулами (6) и (7), можно найти выражения для изогнутой оси при любом распределении поперечных нагрузок.

§ 3. Совместное действие поперечных и продольных сил

Перейдем теперь к случаю, когда кроме поперечных нагрузок имеется продольная сила (рис. 3). Пусть стержень AB растянут двумя взаимно противоположными силами T . При изгибе стержня придется принять во внимание не только энергию изгиба (3), но и работу растягивающих сил T . В случае малых прогибов сближение концов A и B при изгибе стержня определится формулой

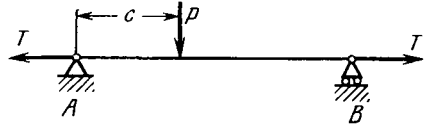


Рис. 3.

$$\delta l = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx.$$

Вставляя вместо y его общее выражение (2), находим, что работа продольной силы при изгибе равна

$$-T\delta l = -\frac{T\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 \Phi_n^2.$$

Потенциальная энергия системы при наличии продольной растягивающей силы будет

$$V = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^4 \Phi_n^2 + \frac{T\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 \Phi_n^2. \quad (8)$$

Уравнения (1) дают в этом случае такие выражения для обобщенных координат:

$$\Phi_n = \frac{\bar{\Phi}_n}{\frac{EJ\pi^4}{2l^3} n^4 + \frac{T\pi^2}{2l} n^2} = \frac{2l^3}{EJ\pi^4} \frac{\bar{\Phi}_n}{n^2(n^2 + \alpha^2)}, \quad (9)$$

где $\alpha^2 = Tl^2/EJ\pi^2 = T/T_k$, T_k — эйлерова нагрузка. Вставляя значения обобщенных координат (9) в выражение для y (2), найдем

$$y = \frac{2l^3}{EJ\pi^4} \left(\frac{\bar{\Phi}_1 \sin \frac{\pi x}{l}}{1(1 + \alpha^2)} + \frac{\bar{\Phi}_2 \sin \frac{2\pi x}{l}}{2^2(2^2 + \alpha^2)} + \frac{\bar{\Phi}_3 \sin \frac{3\pi x}{l}}{3^2(3^2 + \alpha^2)} + \dots \right). \quad (10)$$

Это и будет общим выражением для изогнутой оси стержня в случае действия продольной растягивающей силы T . Для получения уравнения изогнутой оси при действии сжимающей силы нужно только переменить знак α^2 , тогда получим

$$y = \frac{2l^3}{EJ\pi^4} \left[\frac{\bar{\Phi}_1 \sin \frac{\pi x}{l}}{1(1 - \alpha^2)} + \frac{\bar{\Phi}_2 \sin \frac{2\pi x}{l}}{2^2(2^2 - \alpha^2)} + \frac{\bar{\Phi}_3 \sin \frac{3\pi x}{l}}{3^2(3^2 - \alpha^2)} + \dots \right]. \quad (11)$$

Если $\alpha^2 = 1$, $T = T_k$, знаменатель первого члена бесконечного ряда (11) обращается в нуль. Ничтожная причина может вызвать значительный прогиб — прямолинейная форма сжатого стержня перестает быть устойчивой.

Таким образом, мы приходим к формуле Эйлера для критической сжимающей силы. Применим общие выражения (10) и (11) к частным случаям.

Если растянутый или сжатый стержень изгибается сосредоточенной силой P , приложенной на расстоянии s от левого конца, то обобщенная сила $\bar{\Phi}_n$, как мы видели, определяется формулой

$$\bar{\Phi}_n = P \sin \frac{n\pi s}{l}.$$

Вставляя значения обобщенных сил в общие выражения (10) и (11) и соединяя их в одно, получим

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \left[\frac{\sin \frac{\pi c}{l} \sin \frac{\pi x}{l}}{1 \pm \alpha^2} + \frac{\sin \frac{2\pi c}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}}{2^2 (2^2 \pm \alpha^2)} + \frac{\sin \frac{3\pi c}{l} \sin \frac{3\pi x}{l}}{3^2 (3^2 \pm \alpha^2)} + \dots \right]. \quad (12)$$

В частном случае, когда изгибающая сила P приложена посредине, выражение для изогнутой оси представится так:

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \left[\frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1 \pm \alpha^2} - \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^2 (3^2 \pm \alpha^2)} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{l}}{5^2 (5^2 \pm \alpha^2)} - \dots \right].$$

Наибольший прогиб в этом случае, очевидно, будет посредине, мы его найдем, полагая $x=l/2$,

$$(y)_{x=l/2} = f = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \left[\frac{1}{1 \pm \alpha^2} + \frac{1}{3^2 (3^2 \pm \alpha^2)} + \frac{1}{5^2 (5^2 \pm \alpha^2)} + \dots \right]. \quad (13)$$

Величина прогиба f может быть в этом случае легко найдена интегрированием уравнения $EJ \frac{d^2y}{dx^2} = M$. Если выполнить интегрирование, то получим выражение для стрелки прогиба в таком виде ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{Pl^3}{48EJ} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\alpha\pi}{2}}{\frac{1}{3} \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^3} = f_0 \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\alpha\pi}{2}}{\frac{1}{3} \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^3} \\ &\quad \text{для случая сжатия,} \\ f &= \frac{Pl^3}{48FJ} \cdot \frac{\operatorname{th} \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\alpha\pi}{2}}{-\frac{1}{3} \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^3} = f_0 \cdot \frac{\operatorname{th} \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\alpha\pi}{2}}{-\frac{1}{3} \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^3} \\ &\quad \text{для случая растяжения.} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Здесь через f_0 обозначен прогиб, вызываемый поперечной силой при отсутствии продольной силы T . Сравнивая формулы (14) с полученным выше результатом (13), найдем для $\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2}$, $\operatorname{th} \frac{\alpha\pi}{2}$ разложения в ряд. Если имеется ряд сосредоточенных нагрузок P_1, P_2, P_3, \dots , приложенных на различных расстояниях c_1, c_2, c_3, \dots от левого конца, то на основании (12) общее выражение для изогнутой оси будет

$$y = \frac{2l^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\left(P_1 \sin \frac{n\pi c_1}{l} + P_2 \sin \frac{n\pi c_2}{l} + \dots \right) \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^2 (n^2 \pm \alpha^2)}. \quad (15)$$

¹⁾ См. упомянутую в сноске ²⁾ на стр. 180 работу А. Фан-дер-Флита.

От сосредоточенных сил путем интегрирования легко перейти к сплошной нагрузке. Пусть q — интенсивность нагрузки. Очевидно, q в общем случае будет некоторая функция c — расстояния от левого конца. Величина qdc будет нагрузка, приходящаяся на элемент dc изгибаемого стержня. Вставляя в общее выражение (12) вместо P величину qdc и интегрируя по c в пределах от 0 до l , можем получить выражение для изогнутой оси стержня при любом законе распределения сплошной нагрузки. Если нагрузка распределена равномерно по длине, то q — величина постоянная и вышеуказанное интегрирование дает нам

$$y = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \left[\frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1^3 (1 \pm \alpha^2)} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^3 (3^2 \pm \alpha^2)} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{l}}{5^3 (5^2 \pm \alpha^2)} + \dots \right].$$

Наибольший прогиб, очевидно, будет посредине. Мы его получим, полагая $x=l/2$, тогда

$$(y)_{x=l/2} = f = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \left[\frac{1}{1 \pm \alpha^2} - \frac{1}{3^3 (3^2 \pm \alpha^2)} + \frac{1}{5^3 (5^2 \pm \alpha^2)} + \dots \right]. \quad (16)$$

Рассмотрим еще параболический закон распределения сплошной нагрузки. Наибольшую интенсивность нагрузки посредине пролета обозначим через q_0 . Тогда вся нагрузка, приходящаяся на стержень, будет $\frac{2}{3} q_0 l$, интенсивность нагрузки на расстоянии c от левого конца будет

$$q = q_0 \frac{4c(l-c)}{l^2}.$$

Вставляя соответствующее значение qdc вместо P в выражение (12) и выполняя интегрирование, найдем

$$y = \frac{32q_0 l^4}{EJ\pi^7} \left[\frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1 \pm \alpha^2} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^5 (3^2 \pm \alpha^2)} + \dots \right],$$

и соответствующий наибольший прогиб будет:

$$(y)_{x=l/2} = f = \frac{32q_0 l^4}{EJ\pi^7} \left[\frac{1}{1 \pm \alpha^2} - \frac{1}{3^5 (3^2 \pm \alpha^2)} + \frac{1}{5^5 (5^2 \pm \alpha^2)} - \dots \right]. \quad (17)$$

Во всех рассмотренных случаях мы получаем выражение для прогиба в виде бесконечного ряда. Ряды — быстро сходящиеся, и потому вычисление прогиба с нужной для практики точностью может быть выполнено без всяких затруднений. Можно воспользоваться быстрой сходимостью рядов и составить формулы, удобные для практических приложений. Если принять во внимание, что множитель перед скобками в выражениях (13), (16), (17) мало отличается от f_0 (f_0 в каждом случае обозначает прогиб при действии только поперечной нагрузки), то легко видеть, что для вычисления проги-

бов при наличии продольной сжимающей силы можно пользоваться формулой

$$f = f_0 \frac{1}{1 - \alpha^2} \quad (18)$$

Формула эта совершенно точна для $\alpha^2=0$, с возрастанием α^2 возрастает и погрешность. В случае сосредоточенной силы посредине погрешность ни в коем случае не превосходит 1,5 %, для малых же значений α^2 она весьма мала. Например, при $\alpha^2=0,2$ погрешность не превосходит 0,3 %.

В случае равномерно распределенной нагрузки погрешность при вычислении прогиба по приближенной формуле (18) не превосходит в худшем случае $\frac{1}{2}$ %. В случае параболического закона распределения сплошной нагрузки точность приближенной формулы еще ббльшая.

Если нагрузка, изгибающая балку, расположена несимметрично относительно середины пролета, то место наибольшего прогиба не совпадает с серединой и определяется из условия $dy/dx=0$. Имея общее выражение для изогнутой оси, можно, конечно, найти и место наибольшего прогиба и величину его. При практических расчетах можно воспользоваться тем обстоятельством, что при действии сил одного направления прогиб посредине мало отличается от наибольшего прогиба (легко показать, что в наиболее невыгодном случае, при изгибе парой сил, место наибольшего прогиба отстоит от середины на 0,078 l и величина прогиба посредине меньше наибольшего прогиба лишь на 2,5 %. С приближением сосредоточенной нагрузки к середине разность между наибольшим прогибом и прогибом посредине уменьшается).

В случае действия сосредоточенной силы P на расстоянии c от левого конца прогиб посредине на основании общего выражения (12) будет

$$(y)_{x=l/2} = f = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \left[\frac{\sin \frac{\pi c}{l}}{1 \pm \alpha^2} - \frac{\sin \frac{3\pi c}{l}}{3^2 (3^2 \pm \alpha^2)} + \dots \right].$$

Если мы в этом случае воспользуемся приближенной формулой (18), то погрешность будет различна в зависимости от величины c и α^2 . Для $c=l/2$ погрешность не превосходит 1/5 %. С убыванием c погрешность возрастает, и когда $c=0$, т. е. при изгибе парой сил, погрешность в худшем случае ($\alpha^2=1$) около 3 % (погрешность эта противоположна по знаку той, которую мы делаем, заменяя наибольший прогиб прогибом посредине). Из всего вышеизложенного следует, что на практике при определении прогиба от поперечных нагрузок и от продольной силы всегда можно пользоваться приближенной формулой (18). Зная наибольший прогиб, легко найти

наибольшее значение изгибающего момента, обусловленного продольной сжимающей силой. При пользовании приближенной формулой (18) легко составить выражение для полного изгибающего момента. Например, в случае сосредоточенной силы посередине момент посередине будет

$$M = \frac{Pl}{4} + Tf = \frac{Pl}{4} + \frac{Tf_0}{1-\alpha^2} = \frac{Pl}{4} \left(1 + \frac{0,823\alpha^2}{1-\alpha^2} \right).$$

Приходится момент от поперечной нагрузки множить на величину, большую единицы и зависящую от α^2 . При действии сплошной равномерно распределенной нагрузки

$$M = \frac{ql^2}{8} + Tf = \frac{ql^2}{8} \left(1 + \frac{1,028\alpha^2}{1-\alpha^2} \right).$$

Подобные формулы для наибольшего изгибающего момента легко составить и для других видов нагрузки.

Перейдем теперь к случаю растягивающей силы. В этом случае также в довольно широких пределах для вычисления наибольшего прогиба можно пользоваться приближенной формулой

$$\dot{f} = f_0 \frac{1}{1+\alpha^2}. \quad (19)$$

Точность этой формулы зависит от величины α^2 . (В случае растягивающих сил величина эта может быть значительно больше 1. На практике α^2 обыкновенно не превосходит десяти.) В случае сосредоточенной силы посередине погрешность при вычислении прогиба по формуле (19) будет около 1,2% для $\alpha^2=1$ и около 2,2% для $\alpha^2=2$. С возрастанием α^2 погрешность возрастает и формула (19) дает лишь грубое приближение. При удалении изгибающей силы от середины точность формулы (19) изменяется и в крайнем случае, при изгибе парой сил, приложенной на конце, погрешность достигнет 2,5% для $\alpha^2=1$ и 4,3% для $\alpha^2=2$. Заметим, что большие значения α^2 получаются лишь в случае весьма гибких стержней. К таким стержням обыкновенно не прилагают сосредоточенных нагрузок. При действии равномерно распределенной нагрузки точность приближенной формулы (19) значительно большая. При $\alpha^2=1$ погрешность около 0,3%, при $\alpha^2=2$ погрешность 0,7% и при $\alpha^2=10$ погрешность приблизительно 1,7%. В случае параболического распределения сплошной нагрузки точность формулы (19) еще большая.

Таким образом, на практике почти всегда можно пользоваться приближенной формулой (19). В тех случаях, где точность ее почему-либо является недостаточной, прогиб может быть вычислен на основании общего выражения (10) для упругой линии. Как и в случае продольной сжимающей силы, можно при помощи приближенной формулы (19) составить выражения для величины наибольшего

изгибающего момента. Например, при действии силы посредине будем иметь

$$M = \frac{Pl}{4} \left(1 - \frac{0,823\alpha^2}{1 + \alpha^2} \right).$$

§ 4. Случай, когда продольная сила неизвестна

До сих пор мы предполагали, что продольная сила T задана. Часто приходится ее определять из того условия, что концы стержня при изгибе не могут сближаться или что сближение пропорционально продольной силе. Если концы стержня вовсе не сближаются, то, очевидно, удлинение оси стержня, обусловленное продольной растягивающей силой, как раз равно тому сближению концов, которое получается от изгиба. Для нахождения продольной силы получаем уравнение

$$\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{Tl}{EF}, \quad (20)$$

где F — площадь поперечного сечения.

Аналогичное уравнение получим, если сближение концов пропорционально продольной силе.

Вставляя в уравнение (20) вместо y его общее выражение, получим уравнение, заключающее одно неизвестное T (α^2 может быть выражено через T). На практике для разрешения уравнения (20) следовало бы для наиболее часто встречающихся типов нагрузки составить таблицы значений левой части уравнения (20) при различных T . Имея такие таблицы, можно без особого затруднения решать уравнение (20) в каждом частном случае. Задачу можно значительно упростить, если воспользоваться приближенной формулой (19) и принять, что стержень изгибается по синусоиде. (Второе предположение весьма близко к истине в случае равномерной нагрузки и нагрузки по закону параболы. Погрешность несколько больше в случае сосредоточенных сил.) В таком случае левая часть уравнения (20) может быть представлена в таком виде:

$$\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{4} \frac{f^2}{l} = \frac{\pi^2}{4} \frac{f_0^2}{l} \frac{1}{(1 + \alpha^2)^2}.$$

Принимая во внимание, что $T = \alpha^2 EJ \pi^2 / l^2$, можем представить уравнение (20) так:

$$f_0^2 \frac{1}{(1 + \alpha^2)^2} = 4i^2 c^2; \quad (21)$$

здесь через i обозначен соответствующий радиус инерции.

Решение уравнения (21) в каждом частном случае не представляет никаких затруднений. Для упрощения можно составить таблицу корней уравнения (21) для ряда значений величины $f_0^2/4i^2$. Зависимость между α^2 и $f_0^2/4i^2$ можно представить графически. Полученная таким образом кривая дает возможность легко находить α^2 , а следовательно, и величину продольной силы в каждом частном случае.

В качестве приложения приближенного уравнения (21) рассмотрим такой числовой пример. Стержень длиной 122 см имеет жесткость $B=0,185 \cdot 10^8 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$ и изгибается равномерно распределенной нагрузкой $q \text{ кг} \cdot \text{см}$. Найти величину наибольшего прогиба f и величину продольного растягивающего напряжения t при различных значениях q , если при изгибе концевые сечения стержня могут свободно поворачиваться, но совершенно не могут сближаться. Взятые здесь числа соответствуют примеру, разобранным в статье И. Г. Бубнова ¹⁾. Значения f_0 вычисляем по формуле $5 q l^4 / 384 B$. Пользуясь ими, находим из уравнения (21) ряд соответствующих значений α^2 . Продольная растягивающая сила получается умножением эйлеровой нагрузки на α^2 . Для получения наибольшего прогиба f нужно значения f_0 делить на соответствующие значения $1 + \alpha^2$. Результаты вычислений приведены в таблице А. Последние два столбца таблицы

Таблица А

$q, \text{ кг/см}$	$f_0, \text{ см}$	α^2	$f, \text{ см}$	$t, \text{ кг/см}^2$	$f', \text{ см}$	$t', \text{ кг/см}^2$
0,03125	0,485	0,397	0,348	50,3	0,355	49,6
0,125	1,94	1,70	0,719	218	0,736	207
0,25	3,88	3,04	0,962	392	0,990	373
0,50	7,77	5,19	1,25	669	1,29	638
0,75	11,6	7,00	1,45	903	1,47	863
1,00	15,5	8,61	1,61	1110	1,62	1060

заключают значения прогиба f' и значения продольного растягивающего напряжения t' , полученные в вышеупомянутой статье И. Г. Бубнова на основании точных расчетов. Из сравнения заключаем, что приближенные формулы дают вполне удовлетворительные результаты как для величины прогиба, так и для величины напряжений.

¹⁾ Б у б н о в И. Г. Напряжения в обшивке судов от давления воды. С.-Петербург, типолитография А. Э. Винке, 1904, 93 стр. См. стр. 20. [Перепечатка: Б у б н о в И. Г. Труды по теории пластин. Москва, Гостехиздат, 1953, стр. 11—100. См. стр. 29.]

§ 5. Стержень на сплошном упругом основании

Пользуясь нормальными координатами, мы без особых затруднений можем получить уравнение изогнутой оси в том случае, когда опертый по концам стержень по всей длине своей лежит на упругом основании. К подобной задаче приходим мы, когда приходится рассчитывать балку, лежащую на ряде равноудаленных поперечных балок. Обозначим через β коэффициент, характеризующий жесткость основания, тогда $\beta y \cdot dx$ будет реакция упругого основания, приходящаяся на элемент dx балки. Оставляя для большей общности продольную силу $\pm T$, получим для потенциальной энергии системы такое выражение:

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_0^l y^2 dx \pm \frac{T}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx.$$

Вместо y вставляем его общее выражение (2) для случая опертых концов, тогда

$$V = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum m^4 \Phi_m^2 + \frac{\beta l}{4} \sum \Phi_m^2 \pm \frac{T\pi^2}{4l} \sum \Phi_m^2 m^2.$$

На основании уравнения (1) получим для координаты Φ_m значение

$$\Phi_m = \frac{\bar{\Phi}_m}{\frac{EJ\pi^4 m^4}{2l^3} + \frac{\beta l}{2} \pm \frac{T\pi^2 m^2}{2l}} = \frac{2l^3}{EJ\pi^4} \frac{\bar{\Phi}_m}{m^2 \left(m^2 \pm \alpha^2 + \frac{\beta l^4}{EJ\pi^4 m^2} \right)}.$$

Уравнение изогнутой оси в общем виде напишется так:

$$y = \frac{2l^3}{EJ\pi^4} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{l} \cdot \bar{\Phi}_m}{m^2 \left(m^2 \pm \alpha^2 + \frac{\beta l^4}{EJ\pi^4 m^2} \right)}. \quad (22)$$

В частном случае сосредоточенной силы, приложенной на расстоянии c от левого конца,

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\sin \frac{m\pi c}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}}{m^2 \left(m^2 \pm \alpha^2 + \frac{\beta l^4}{EJ\pi^4 m^2} \right)}.$$

Возьмем, например, случай, когда $c=l/2$ и нет продольной силы, тогда прогиб посредине будет

$$(y)_{x=l/2} = f = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \left[\frac{1}{1 + \frac{\beta l^4}{EJ\pi^4}} + \frac{1}{3^3 \left(3^2 + \frac{\beta l^4}{EJ\pi^4 3^2} \right)} + \dots \right].$$

Ряд сходящийся; число членов, которое нужно взять для определения прогиба с заданной точностью, будет зависеть от величины коэффициента β . При малом β можно пользоваться приближенной формулой, аналогичной формуле (29).

От случая сосредоточенной силы легко перейти к равномерно распределенной нагрузке и к другим типам нагрузок приемом, указанным в §§ 2, 3. При равномерно распределенной нагрузке будем иметь

$$y = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \sum \frac{\sin \frac{m\pi x}{l}}{m^3 \left(m^2 \pm \alpha^2 + \frac{\beta l^4}{EJ\pi^4} \right)}. \quad (22')$$

В качестве примера рассмотрим изгиб перекрестной балки AB , поддерживающей систему равноудаленных балочек одинаковой жесткости (рис. 4).

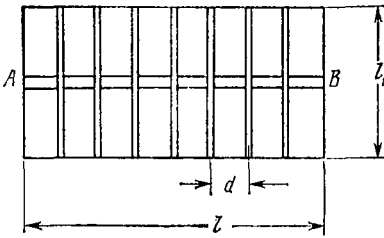


Рис. 4.

Через посредство обшивки на систему балочек передается равномерно распределенная нагрузка. Пусть Q — нагрузка, приходящаяся на одну балочку. Если бы балка AB была абсолютно жесткой и пересекала вертикальные балки посредине пролета, то давление от каждой из балочек, передаваемое перекрестной балке AB , равнялось бы $\frac{5}{8}Q$. Вследствие прогиба перекрестной балки давление на нее от вертикальных балочек уменьшится. Пусть y — прогиб балки AB под одной из вертикальных балочек, тогда давление этой балочки на AB будет

$$R = \frac{5}{8}Q - y \frac{48E_1J_1}{l_1^3}, \quad (a)$$

где E_1J_1 — жесткость вертикальных балочек.

Сосредоточенное давление R заменим сплошной нагрузкой, распределенной равномерно на протяжении d , равном расстоянию между вертикальными балочками. При значительном числе вертикальных балочек такая замена не произведет значительного влияния на прогиб балки AB , и мы можем с достаточной точностью считать, что на перекрестную балку AB передается сплошная нагрузка, распределенная по закону

$$\frac{R}{d} = \frac{5}{8} \frac{Q}{d} - \frac{y}{d} \frac{48E_1J_1}{l_1^3} = q - \beta y,$$

где $\beta = 48 E_1J_1/dl_1^3$.

Для определения прогибов можем пользоваться ранее выведенной общей формулой (22').

Вводя обозначение

$$\frac{\beta l^4}{EJ\pi^4} = \frac{48}{\pi^4} \frac{E_1 J_1}{EJ} \cdot \frac{l}{d} \left(\frac{l}{l_1} \right)^3 = K$$

и принимая во внимание, что на практике обыкновенно K — небольшое число, можем ограничиться лишь первым членом в общем выражении для прогиба. Прогиб балки AB посредине определится в таком случае формулой

$$f = \frac{4ql^4}{EJ\pi^6} \frac{1}{1+K} = \frac{5}{8} \frac{Q}{d} \frac{4l^4}{EJ\pi^6} \frac{1}{1+K}.$$

Соответствующее давление средней вертикальной балочки на основании формулы (а) будет

$$R = \frac{5}{8} Q \left(1 - \frac{4}{\pi} \frac{K}{1+K} \right).$$

Увеличивая жесткость перекрестной балки, мы тем самым уменьшаем величину K и, следовательно, увеличиваем давление R ; в пределе при $K=0$ $R = \frac{5}{8} Q$. Если жесткость перекрестной балки уменьшать, то вместе с тем увеличивается K , уменьшается давление R . При $4K/\pi(1+K)=1$, т. е. при $K = \pi/(4-\pi) \approx 3,6$, давление R обращается в нуль, перекрестная балка становится бесполезной. При дальнейшем уменьшении жесткости балки AB давление R становится отрицательным. Перекрестная балка увеличивает прогиб средней вертикальной балочки. Увеличение это, как видно из полученной выше формулы, может достигать 30%.

Из общего выражения (22) легко получить значение критической сжимающей силы для стержня в упругой среде. Критическая сила в этом случае, очевидно, определится наименьшим значением α^2 , при котором знаменатель

$$m^2 - \alpha^2 + \frac{\beta l^4}{EJ\pi^4 m^2}$$

обращается в нуль. Нужно, следовательно, найти минимум выражения

$$\alpha^2 = m^2 + \frac{\beta l^4}{EJ\pi^4 m^2}. \quad (23)$$

В случае длинных стержней m велико и для нахождения наименьшего значения для α^2 можно производную по m^2 правой части выражения (23) приравнять нулю. Получим

$$\frac{l}{m} = \delta = \sqrt[4]{\frac{EJ\pi^4}{\beta}}, \quad (24)$$

т. е. длина δ полуволн, на которые стержень подразделяется при выпучивании, зависит лишь от жесткости стержня и коэффициента β , характеризующего упругие свойства среды. Вставляя найденное значение l/m в выражение (23) для α^2 , получим

$$\alpha^2 = 2m^2.$$

Следовательно, критическое значение сжимающей силы вдвое больше эйлеровой нагрузки для стержня длиной $l/m = \delta$.

Общим выражением (22) можно воспользоваться также для определения критической угловой скорости быстровращающегося вала постоянного кругового сечения. Если какая-либо причина вызовет изгиб вращающегося вала, то на каждый элемент вала длиной dx будет действовать центробежная сила $\mu\omega^2 y dx$. Здесь через μ обозначена масса единицы длины вала, ω — угловая скорость. Для определения изгиба быстровращающегося вала можно воспользоваться выражением (22), полагая в нем $\beta = -\mu\omega^2$. Критические значения скорости ω получим, приравнявая нулю знаменатель какого-либо члена ряда (22). Наименьшее значение для ω_k получаем, полагая $m=1$:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{EJ\pi^4}{\mu l^4} (1 \pm \alpha^2)}. \quad (25)$$

Полагая $\alpha^2 = 0$, придем к известной формуле для критической угловой скорости гибкого вала.

II. ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ С ЗАДЕЛАННЫМИ КОНЦАМИ

§ 6. Прогобы

В этом случае прогиб стержня в каком-либо сечении можно представить так:

$$y = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3 + \dots \quad (26)$$

Здесь u_1, u_2, \dots — нормальные функции для случая стержня с заделанными концами. Значения этих функций мы получим из выражения ¹⁾

$$u = (\sin m - \operatorname{sh} m) \left(\cos \frac{mx}{l} - \operatorname{ch} \frac{mx}{l} \right) - \\ - (\cos m - \operatorname{ch} m) \left(\sin \frac{mx}{l} - \operatorname{sh} \frac{mx}{l} \right),$$

¹⁾ Определение нормальных функций и исследование их свойств можно найти в книге: Strutt J. W. (Lord Rayleigh). The theory of sound. 2nd edition, London and New York, MacMillan and Co., vol. 1, 1894, 480 p.; vol. 2, 1896, 504 p. [Перевод на русский язык: Стрэтт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука М.—Л., Гостехиздат, том 1, 1940, 499 стр.; том 2, 1944, 476 стр.]

вставляя в него вместо m корни трансцендентного уравнения $\cos m \operatorname{ch} m = 1$.

Потенциальная энергия системы при изгибе поперечными силами будет

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{EJ}{2} \sum_{k=1}^{k=\infty} \varphi_k^2 \int_0^l \left(\frac{d^2 u_k}{dx^2} \right)^2 dx,$$

или, воспользовавшись свойством нормальных функций, в силу которого при заделанных концах

$$\int_0^l \left(\frac{d^2 u_k}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{m_k^4}{l^4} \frac{l}{4} (u_k^{\prime\prime})_l^2$$

(через $u_k^{\prime\prime}$ обозначена вторая производная от u_k , взятая по $m_k x/l$; значение этой производной при $x=l$ обозначено через $(u_k^{\prime\prime})_l$), получим для V выражение

$$V = \frac{EJ}{2 \cdot 4l^3} \sum_{k=1}^{k=\infty} m_k^4 (u_k^{\prime\prime})_l^2 \varphi_k;$$

на основании уравнения (1) получим для какой-либо координаты выражение

$$\varphi_k = \frac{4l^3}{EJ} \frac{\bar{\Phi}_k}{m_k^4 (u_k^{\prime\prime})_l^2}.$$

Вставляя это в выражение для y (26), получим общее выражение для изогнутой оси стержня в случае заделанных концов:

$$y = \frac{4l^3}{EJ} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{u_k \bar{\Phi}_k}{m_k^4 (u_k^{\prime\prime})_l^2}. \quad (27)$$

Если на стержень действует сосредоточенная сила P на расстоянии c от левого конца, то обобщенная сила

$$\bar{\Phi}_k = (u_k^{\prime\prime})_{x=l} P.$$

Прогиб посередине на основании общего выражения (27) будет

$$(y)_{x=l/2} = f = \frac{4Pl^3}{EJ} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(u_k)_{l/2} (u_k)_c}{m_k^4 (u_k^{\prime\prime})_l}. \quad (28)$$

Вычисление прогибов в данном случае гораздо сложнее, чем при опертых концах. Возьмем для примера случай действия изгибающей силы посередине пролета. Пользуясь таблицей значений m_k ,

приведенной в вышеупомянутой книжке Дж. Рэлея, стр. 278, найдем $(u_1)_{l/2}^2 = 2,566$, $(u_3)_{l/2}^2 = 1,977$. Величины $(u_5)_{l/2}^2$, $(u_7)_{l/2}^2$, ... можно положить равными 2. Нормальные функции четного порядка при $x=l/2$ в случае симметричной нагрузки обращаются в нуль. Далее находим $(u_1)_{l/2}^2 = 4,071$. Величины $(u_3)_{l/2}^2$, $(u_5)_{l/2}^2$ можно положить равными 4. Тогда прогиб посередине будет

$$(y)_{x=l/2} = f = \frac{4Pl^3}{EJ} \left\{ \frac{2,566}{4,071 m_1^4} + \frac{1,977}{4 m_3^4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_5^4} + \frac{1}{m_7^4} + \dots \right) \right\}.$$

Для корней m_k , начиная с m_3 , можно с достаточной точностью брать значения

$$m_k = \frac{1}{2} (2k + 1) \pi.$$

Чтобы перейти от сосредоточенной силы к сплошной нагрузке, нужно в общем выражение (28) вместо P подставить величину qdc и произвести интегрирование по c в пределах от 0 до l . В частном случае равномерно распределенной нагрузки интенсивности q получим

$$(y)_{x=l/2} = f = \frac{4ql^4}{EJ} \left[\frac{1,602 \cdot 3,964}{m_1^5 \cdot 4,071} - \frac{1,406}{m_3^5} + \sqrt{2} \left(\frac{1}{m_5^5} - \frac{1}{m_7^5} + \dots \right) \right].$$

Уже из этих простейших примеров видно, что пользование нормальными координатами в случае заделанных концов не представляет никаких выгод. Еще сложнее становятся выкладки и окончательные формулы при действии продольной силы. В результате оказывается, что влияние продольной силы на величину прогиба и наибольшего изгибающего момента в этом случае несравненно меньше, чем при опертых концах. Прогиб посередине с достаточной для практики точностью можно вычислять по приближенной формуле

$$f = f_0 \frac{1}{1 \pm \frac{1}{4} \alpha^2}, \quad (29)$$

где f_0 , как и прежде, обозначает прогиб посередине при действии только поперечных сил.

К этой приближенной формуле можно прийти скорее, рассматривая стержень как систему с одной степенью свободы и принимая такое уравнение изогнутой оси:

$$y = \varphi \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right).$$

Уравнение это, как легко видеть, удовлетворяет условиям на концах.

Потенциальная энергия системы при действии продольной силы T и при выбранной форме изгиба будет

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx \pm \frac{T}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{4EJ\pi^4}{l^3} \cdot \varphi^2 \pm \frac{\pi^2}{l} T\varphi^2.$$

Величина координаты φ на основании уравнения (1) будет

$$\varphi = \frac{\bar{\Phi} l^3}{8EJ\pi^4 \left(1 \pm \frac{1}{4} \alpha^2 \right)}.$$

Уравнение изогнутой оси пишется так:

$$y = \frac{\bar{\Phi} l^3}{8EJ\pi^4 \left(1 \pm \frac{1}{4} \alpha^2 \right)} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) = y_0 \frac{1}{1 \pm \frac{1}{4} \alpha^2}. \quad (30)$$

Через y_0 мы обозначили прогиб при отсутствии продольной силы. Таким образом, мы приходим к ранее приведенной приближенной формуле (29). Примененный нами здесь прием сходен с тем, которым пользуется Дж. Рэлей для нахождения частоты основных колебаний системы. Для суждения о степени точности вычислим прогиб стержня при отсутствии продольной силы и при сосредоточенной нагрузке P посередине пролета. Обобщенная сила $\bar{\Phi}$ в данном случае будет

$$\bar{\Phi} = P \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right)_{x=l/2} = 2P.$$

Вставляя это в общее выражение (30) и полагая в нем $\alpha^2 = 0$, $x = l/2$, получим

$$(y)_{x=l/2} = f = \frac{Pl^3}{2EJ\pi^4}.$$

Полученный таким образом прогиб отличается от истинного $Pl^3/192EJ$ приблизительно на 1,5%.

Для определения продольной силы в том случае, когда концы не могут сближаться, можно пользоваться уравнением

$$f_0^2 \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha^2}{4} \right)^2} = 4i^2 \alpha^2,$$

аналогичным уравнению (21). В качестве числового примера возьмем стержень прежних размеров (см. § 4). Значения α^2 , соответствующие различным значениям нагрузки q , а также значения наибольшего прогиба f и продольных растягивающих напряжений t

Таблица В

q , кг/см	f_0 , см	f , см	f' , см	α^2	t , кг/см ²	t' , кг/см ²
0,03125	0,0965	0,0939	0,101	0,0307	3,87	3,10
0,125	0,388	0,350	0,355	0,410	53,0	48,0
0,25	0,777	0,599	0,609	1,18	152	141
0,375	1,16	0,779	0,787	1,99	254	240

приведены в таблице В. Для сравнения приведены значения прогибов f' и значения продольных напряжений t' , полученных И. Г. Бубновым ¹⁾.

§ 7. Опорные моменты

Все обстоятельства изгиба стержней с заделанными концами можно получить, пользуясь решениями для стержней с опертыми концами, если иметь формулы для углов поворота концов и для прогиба при действии на сжатый или растянутый стержень изгибающей пары сил, приложенной на конце.

Дифференцируя по s выражение (12) для изогнутой оси стержня при действии сосредоточенной силы в сечении s и полагая $Pdc=M$, придем к общему выражению изогнутой оси при действии пары сил M в сечении s :

$$y = \frac{2Ml^2}{EJ\pi^3} \left[\frac{\cos \frac{\pi c}{l} \sin \frac{\pi x}{l}}{1 \pm \alpha^2} + \frac{\cos \frac{2\pi c}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}}{2(2^2 \pm \alpha^2)} + \dots \right].$$

Полагая в этом выражении $c=0$, придем к изгибу парой M , приложенной к левому концу стержня:

$$y = \frac{2Ml^2}{EJ\pi^3} \left[\frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1 \pm \alpha^2} + \frac{\sin \frac{2\pi x}{l}}{2(2^2 \pm \alpha^2)} + \dots \right]. \quad (31)$$

Для прогиба посредине получаем

$$(y)_{x=l/2} = f = \frac{2Ml^2}{EJ\pi^3} \left[\frac{1}{1 \pm \alpha^2} - \frac{1}{3(3^2 \pm \alpha^2)} + \frac{1}{5(5^2 \pm \alpha^2)} - \dots \right]. \quad (32)$$

Уравнение изогнутой оси в рассматриваемом случае легко может быть найдено в замкнутой форме интегрированием дифференциального уравнения изогнутой оси $EJ \frac{d^2y}{dx^2} = M$. Мы получим при

¹⁾ См. стр. 28 упомянутой в сноске на стр. 190 статьи И. Г. Бубнова.

действию продольной сжимающей силы

$$y = \frac{Ml^2}{EJ\pi^2\alpha^2} \left[\frac{\sin \alpha\pi(l-x)}{\sin \alpha\pi} - \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right]. \quad (33)$$

Прогиб посредине будет

$$(y)_{x=l/2} = \bar{f} = f_0 \frac{\sec \frac{\alpha\pi}{2} - 1}{\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^2},$$

где $f_0 = Ml^2/16EJ$ — прогиб при $\alpha^2 = 0$.

Углы поворота концов стержня легко находятся дифференцированием выражения (33):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} &= -\frac{Ml}{EJ} \frac{1}{\alpha\pi} \left(\operatorname{ctg} \alpha\pi - \frac{1}{\alpha\pi} \right), \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} &= -\frac{Ml}{EJ} \frac{1}{\alpha\pi} \left(\operatorname{cosec} \alpha\pi - \frac{1}{\alpha\pi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

При действии по концам стержня двух равных и прямо противоположных пар сил углы поворота концов будут равны по величине и на основании (34) представятся такой формулой:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{Ml}{EJ} \frac{1}{\alpha\pi} (\operatorname{cosec} \alpha\pi - \operatorname{ctg} \alpha\pi) = \frac{Ml}{EJ} \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2}}{\alpha\pi}. \quad (35)$$

Заменяя круговые функции соответствующими гиперболическими, получим формулы для случая растянутого стержня. Пользуясь формулами (34) и (35), легко можно определить опорные моменты при любой нагрузке стержня с заделанными концами. Возьмем для примера случай действия сосредоточенной силы P на расстоянии c от левого конца. При опертых концах углы поворота концевых сечений будут

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} &= \frac{2Pl^2}{EJ\pi^3} \left[\frac{\sin \frac{\pi c}{l}}{1-\alpha^2} + \frac{\sin \frac{2\pi c}{l}}{2(2^2-\alpha^2)} + \frac{\sin \frac{3\pi c}{l}}{3(3^2-\alpha^2)} + \dots \right], \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} &= -\frac{2Pl^2}{EJ\pi^3} \left[\frac{\sin \frac{\pi c}{l}}{1-\alpha^2} - \frac{\sin \frac{2\pi c}{l}}{2(2^2-\alpha^2)} + \frac{\sin \frac{3\pi c}{l}}{3(3^2-\alpha^2)} - \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Опорные моменты M_1 и M_2 нужно подобрать таким образом, чтобы вызываемые ими углы поворота концов были равны по величине и противоположны по знаку углам (36). На основании формул

(34) получаем два уравнения:

$$\begin{aligned}
 -\frac{M_1 l}{EJ} \frac{1}{\alpha \pi} \left(\operatorname{ctg} \alpha \pi - \frac{1}{\alpha \pi} \right) + \frac{M_2 l}{EJ} \cdot \frac{1}{\alpha \pi} \left(\frac{1}{\sin \alpha \pi} - \frac{1}{\alpha \pi} \right) = \\
 = \frac{2Pl^2}{EJ\pi^3} \left[\frac{\sin \frac{\pi c}{l}}{1-\alpha^2} + \frac{\sin \frac{2\pi c}{l}}{2(2^2-\alpha^2)} + \dots \right], \\
 -\frac{M_2 l}{EJ} \frac{1}{\alpha \pi} \left(\operatorname{ctg} \alpha \pi - \frac{1}{\alpha \pi} \right) + \frac{M_1 l}{EJ} \cdot \frac{1}{\alpha \pi} \left(\frac{1}{\sin \alpha \pi} - \frac{1}{\alpha \pi} \right) = \\
 = \frac{2Pl^2}{EJ\pi^3} \left[\frac{\sin \frac{\pi c}{l}}{1-\alpha^2} - \frac{\sin \frac{2\pi c}{l}}{2(2^2-\alpha^2)} + \dots \right].
 \end{aligned}$$

В частном случае, когда сила приложена посредине пролета, $M_1 = M_2 = M$ и величина M найдется из уравнения

$$\begin{aligned}
 \frac{Ml}{EJ} \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha \pi}{2}}{\alpha \pi} = \frac{2Pl^2}{EJ\pi^3} \left[\frac{1}{1-\alpha^2} - \frac{1}{3(3^2-\alpha^2)} + \frac{1}{5(5^2-\alpha^2)} - \dots \right] = \\
 = \frac{2Pl^2}{EJ\pi^3} \frac{\pi}{4\alpha^2} \left(\sec \frac{\alpha \pi}{2} - 1 \right),
 \end{aligned}$$

откуда

$$M = \frac{Pl}{8} \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha \pi}{4}}{\frac{\alpha \pi}{4}} = M_0 \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha \pi}{4}}{\frac{\alpha \pi}{4}}. \quad (37)$$

Через M_0 обозначено значение опорного момента при отсутствии продольной силы.

Подобным способом можно найти опорные моменты при любой нагрузке.

III. ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ, ОПЕРТОЙ ПО КОНТУРУ

§ 8. Поперечная нагрузка

Начнем с рассмотрения изгиба пластинки силами, перпендикулярными плоскости пластинки. Располагая координатные оси согласно рис. 5 и обозначая через w прогиб пластинки, можем представить этот прогиб в нашем случае так:

$$w = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \Phi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (38)$$

Очевидно, что при этом условия на контуре будут выполнены, так как w , $\frac{d^2 w}{dx^2}$, $\frac{d^2 w}{dy^2}$ обращаются в нуль при $x=0$, $x=a$ и $y=0$,

$y=b$. Легко показать, что величины φ_{mn} , определяющие форму изогнутой пластинки, — нормальные координаты системы, т. е. что выражение для потенциальной энергии включает лишь квадраты этих величин. В самом деле, потенциальная энергия изогнутой пластинки, приходящаяся на единицу площади, будет

$$\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{1-\sigma^2} \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2 - 2(1-\sigma) \frac{1}{R_1 R_2} \right].$$

Здесь через h обозначена половина толщины пластинки, σ — пуассоново отношение; R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны. При малых прогибах можно положить

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2},$$

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 w}{dy^2} - \left(\frac{d^2 w}{dx dy} \right)^2.$$

Если это вставить в написанное выше выражение для потенциальной энергии, принять во внимание значение w согласно формуле (38) и выполнить интегрирование в пределах $x=0, x=a$ и $y=0, y=b$, то получим для энергии изгиба пластинки выражение

$$V = \frac{abc}{8} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \varphi_{mn}^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2. \quad (39)$$

Здесь через c обозначена величина $\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\sigma^2}$ — цилиндрическая жесткость пластинки.

На основании общего уравнения

$$\frac{dV}{d\varphi_{mn}} = \bar{\Phi}_{mn}$$

получаем для какой-либо координаты φ_{mn} такое выражение через соответствующую ей обобщенную силу $\bar{\Phi}_{mn}$:

$$\varphi_{mn} = \frac{4\bar{\Phi}_{mn}}{abc \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2}.$$

Вставляя его в общее выражение для прогиба (38), получим

$$w = \frac{4}{abc} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\bar{\Phi}_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2}. \quad (40)$$

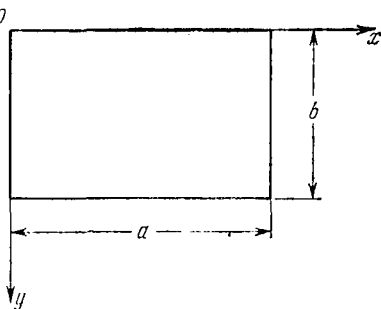


Рис. 5.

Для получения прогибов в отдельных частных случаях нужно только в общее выражение (40) вместо $\bar{\Phi}_{mn}$ вставлять значения, соответствующие заданной нагрузке. Возьмем для примера случай сосредоточенной силы P , приложенной в точке $x=c$, $y=d$. Обобщенная сила $\bar{\Phi}_{mn}$ определится из уравнения

$$\bar{\Phi}_{mn} \delta\varphi_{mn} = P\delta\varphi_{mn} \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b}.$$

Вставляя это значение в общее выражение (40), получим

$$\omega = \frac{4P}{abc} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)^2}. \quad (41)$$

В частном случае, когда сила приложена в центре пластинки $c=a/2$, $d=b/2$, наибольший прогиб получается в точке приложения:

$$\begin{aligned} \omega_{\max} &= \frac{4P}{\pi^4 abc} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{\left[\frac{(2m+1)^2}{a^2} + \frac{(2n+1)^2}{b^2}\right]^2} = \\ &= \frac{4Pb^3}{\pi^4 ac} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{[\mu^2(2m+1)^2 + (2n+1)^2]^2}. \end{aligned}$$

Здесь для краткости через μ обозначено отношение b/a .

Если принять во внимание формулу

$$z^3 \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{[(2m+1)^2 + z^2]^2} = \frac{\pi}{8} \left(\operatorname{th} \frac{\pi z}{2} - \frac{\frac{\pi z}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi z}{2}} \right),$$

то наибольший прогиб может быть представлен в такой форме:

$$\begin{aligned} \omega_{\max} &= \frac{4Pb^3}{\pi^4 ac} \left\{ \frac{\pi}{8\mu^3} \left[\frac{1}{1^3} \operatorname{th} \frac{\mu\pi}{2} + \frac{1}{3^3} \operatorname{th} \frac{3\mu\pi}{2} + \frac{1}{5^3} \operatorname{th} \frac{5\mu\pi}{2} + \dots \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi^3}{16\mu^2} \left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\mu\pi}{2}} + \frac{1}{3^2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{3\mu\pi}{2}} + \dots \right] \right\}. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что нагрузка равномерно распределена по срединной линии пластинки $y=b/2$, и обозначим через q нагрузку, приходящуюся на единицу длины этой линии. Для получения прогибов в этом случае вставим в общее выражение (41) вместо P величину qdc и проинтегрируем в пределах от 0 до a , тогда прогиб на

В случае бесконечно длинной пластинки $\mu=0$. Если принять во внимание, что

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4},$$

то прогиб по линии $x=a/2$ представится так:

$$\omega = \frac{4qb^4}{\pi^6 c} \left\{ \frac{1}{1^6} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{3^6} \sin \frac{3\pi y}{b} + \frac{1}{5^6} \sin \frac{5\pi y}{b} + \dots \right\},$$

что совершенно совпадает с полученным нами выше (см. § 2) выражением для изогнутой оси равномерно нагруженного стержня.

Для получения наибольшего прогиба нужно в выражении (43) положить $y=b/2$. Сумма S получающегося при этом двойного ряда может быть для каждого μ вычислена с любой степенью точности. Ряд значений S и соответствующие значения ω_{\max} приведены в таблице С¹⁾.

Т а б л и ц а С

μ	S	$\omega_{\max} c / qb^4$
0	$\frac{5\pi^6}{6144} = 0,783$	$\frac{5}{384} = 0,01302$
$\frac{1}{3}$	0,733	0,01219
$\frac{1}{2}$	0,608	0,01010
1	0,244	0,00406

§ 9. Совместное действие поперечных нагрузок и растягивающих контурных сил, расположенных в срединной плоскости

Перейдем теперь к случаям, когда изгибаемая поперечными нагрузками пластинка сжимается или растягивается силами, приложенными по контуру и действующими в срединной плоскости пластинки. Положим, что по сторонам пластинки $x=0$ и $x=a$ действуют равномерно распределенные растягивающие усилия. Пусть T_1 — равнодействующая этих усилий, приходящихся на единицу длины контура пластинки. Через T_2 обозначим величину равнодействующей растягивающих усилий, приходящихся на единицу длины сторон $y=0$ и $y=b$. При изгибе пластинки точки ее контура несколь-

¹⁾ Числа взяты из статьи И. Г. Бубнова, упомянутой в сноске на стр. 190.

ко перемещаются в срединной плоскости пластинки и усилия T_1 и T_2 совершают некоторую работу. Работа эта в нашем случае легко может быть выражена в нормальных координатах. Рассмотрим сначала работу усилий T_1 . Так как сближение двух точек, лежащих по краям пластинки $x=0$, $x=a$ и имеющих одну и ту же координату y , может быть выражено при малых прогибах формулой

$$\frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx,$$

то усилия T_1 при изгибе пластинки совершат работу

$$-\frac{1}{2} T_1 \int_0^b dy \int_0^a \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx.$$

Вставляя сюда вместо w его общее выражение (38), получим для работы усилий T_1 такое значение:

$$-\frac{1}{2} T_1 \frac{\pi^2 ab}{a^2} \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} m^2 \Phi_{mn}^2.$$

Подобным же образом для работы усилий T_2 найдем выражение

$$-\frac{1}{2} T_2 \frac{\pi^2 ab}{b^2} \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 \Phi_{mn}^2.$$

При вычислении прогиба пластинки при наличии усилий T_1 и T_2 придется к потенциальной энергии изгиба (39) присоединить величину, равную, но противоположную по знаку, работе усилий T_1 и T_2 , тогда получим

$$V = \frac{abc}{8} \sum \sum \Phi_{mn}^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 + \frac{1}{2} T_1 \frac{\pi^2 ab}{a^2} \frac{1}{4} \sum \sum m^2 \Phi_{mn}^2 + \frac{1}{2} T_2 \frac{\pi^2 ab}{b^2} \frac{1}{4} \sum \sum n^2 \Phi_{mn}^2.$$

Для какой-либо координаты Φ_{mn} получим выражение

$$\Phi_{mn} = \frac{\bar{\Phi}_{mn}}{\frac{abc}{4} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 + T_1 \frac{\pi^2 ab}{a^2} \frac{1}{4} m^2 + T_2 \frac{\pi^2 ab}{b^2} \frac{1}{4} n^2}.$$

Вставляя это в общее решение (38), получим для прогиба такое выражение:

$$w = \frac{4}{\pi^4 abc} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\bar{\Phi}_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{T_1 m^2}{a^2 \pi^2 c} + \frac{T_2 n^2}{b^2 \pi^2 c}}. \quad (44)$$

В случае действия сосредоточенной силы P в точке $x=c, y=d$ будем иметь прогиб

$$\omega = \frac{4P}{\pi^4 abc} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) + \frac{T_1 m^2}{a^2 \pi^2 c} + \frac{T_2 n^2}{b^2 \pi^2 c}}.$$

При действии равномерно распределенной нагрузки q получим

$$\omega = \frac{16q}{\pi^6 c} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\sin \frac{(2m+1)\pi x}{a} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{b} \right] : \\ : \left[(2m+1)(2n+1) \left\{ \left[\frac{(2m+1)^2}{a^2} + \frac{(2n+1)^2}{b^2} \right]^2 + \frac{T_1 (2m+1)^2}{a^2 \pi^2 c} + \frac{T_2 (2n+1)^2}{b^2 \pi^2 c} \right\} \right]^{-1}. \quad (45)$$

Рассмотрим и в этом случае прогиб по линии $x=a/2$. Вводя для сокращения письма обозначения $T_2 b^2 / \pi^2 = \alpha^2$, $T_1 / T_2 = \beta$, можем интересующие нас прогибы представить в таком виде:

$$\omega = \frac{16qb^4}{\pi^6 c} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{1^6} \left[\frac{1}{1 \left[(1+\mu^2)^2 + \alpha^2 (1+\mu^2\beta) \right]} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{3 \left[(1+3^2\mu^2)^2 + \alpha^2 (1+3^2\beta\mu^2) \right]} + \dots \right] + \\ & + \frac{\sin \frac{3\pi y}{b}}{3^6} \left[\frac{1}{1 \left[\left(1 + \frac{1}{3^2} \mu^2\right)^2 + \frac{\alpha^2}{3^2} \left(1 + \frac{\mu^2\beta}{3^2}\right) \right]} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{3 \left[\left(1 + \frac{3^2}{3^2} \mu^2\right)^2 + \frac{\alpha^2}{3^2} \left(1 + \frac{3^2}{3^2} \beta \mu^2\right) \right]} + \dots \right] + \\ & + \frac{\sin \frac{5\pi y}{b}}{5^6} \left[\frac{1}{1 \left[\left(1 + \frac{1}{5^2} \mu^2\right)^2 + \frac{\alpha^2}{5^2} \left(1 + \frac{\beta \mu^2}{5^2}\right) \right]} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{3 \left[\left(1 + \frac{3^2}{5^2} \mu^2\right)^2 + \frac{\alpha^2}{5^2} \left(1 + \frac{3^2}{5^2} \mu^2 \beta\right) \right]} + \dots \right] + \\ & + \dots \end{aligned} \right. \quad (46)$$

В случае бесконечно длинной пластинки $\mu=0$. Выражение (46) может быть представлено в таком виде:

$$\omega = \frac{16qb^4}{\pi^6 c} \frac{\pi}{4} \left[\frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{1+\alpha^2} + \frac{\sin \frac{3\pi y}{b}}{3^3(3^2+\alpha^2)} + \frac{\sin \frac{5\pi y}{b}}{5^3(5^2+\alpha^2)} + \dots \right].$$

Полученный результат совершенно совпадает с выражением (16) для изогнутой оси стержня, изгибаемого равномерно распределенной нагрузкой. Этого и нужно было ожидать, так как при большой длине можно положить, что пластинка в сечении $x=a/2$ изгибается по цилиндрической поверхности. Элементарная полоска (шириной единица), выделенная по линии $x=a/2$, будет в таких же условиях, как стержень жесткости c и пролета b , нагруженный равномерной нагрузкой q . Для определения наибольшего прогиба можно пользоваться приближенной формулой

$$\omega_{\max} = \frac{5}{384} q \frac{b^4}{c} \frac{1}{1+\alpha^2}. \quad (47)$$

Для определения наибольшего прогиба в случае пластинки конечной длины придется пользоваться общим выражением (46), полагая в нем $y=b/2$ и вставляя соответствующие значения μ и β . Заметим, что в тех случаях, когда μ и β близки к единице, первый член двойного ряда с достаточной точностью представляет сумму ряда, и погому можно положить, что влияние продольных растягивающих сил на прогиб таково, как и их влияние на величину первого члена двойного ряда. В таком случае для вычисления наибольшего прогиба можно пользоваться приближенной формулой

$$\omega_{\max} = \omega_0 \frac{(1+\mu^2)^2}{(1+\mu^2)^2 + \alpha^2 (1+\beta\mu^2)}. \quad (48)$$

Здесь ω_0 — наибольший прогиб при $T_2 = T_1 = 0$.

При $\mu=0$ формула эта совпадает с формулой (47).

При $\alpha^2=0$ формула дает $\omega_{\max} = \omega_0$.

Применяя формулу (48) к квадратной пластинке и полагая $\beta=1$, получим

$$\omega_{\max} = \omega_0 \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{2}}.$$

Если приближенную формулу (48) применить к пластинке, у которой $\mu=1/2$ и $\beta=\mu^2=1/4$, то получим

$$\omega_{\max} = \omega_0 \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{1,47}}.$$

Пользуясь этими приближенными формулами, можно составить уравнение, аналогичное уравнению (21), для определения наибольшего значения растягивающих усилий T_1 , T_2 в том случае, если края пластинки могут свободно поворачиваться, но не могут сближаться при изгибе. Усилия T_1 и T_2 распределяются по краям пластинки в этом случае, конечно, неравномерно. Наибольшие значения этих усилий будут соответствовать концам линий $x=a/2$ и $y=b/2$,

причем с достаточной точностью можно полагать для этих точек: $\beta = T_1/T_2 = b^2/a^2 = \mu^2$.

К приближенной формуле (48) можно прийти иным путем, рассматривая пластинку как систему с одной степенью свободы. Для прогиба возьмем выражение

$$\omega = \varphi \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (49)$$

удовлетворяющее условиям на контуре. Потенциальная энергия в таком случае представится формулой

$$V = \frac{abc}{8} \varphi^2 \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2.$$

Выражая координату φ через соответствующую обобщенную силу, получим прогиб пластинки в такой форме:

$$\omega = \frac{4}{abc\pi^4} \frac{\bar{\Phi} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}.$$

Вставляя значение обобщенной силы $\bar{\Phi}$ для случая равномерно распределенной нагрузки q , получим

$$\omega = \frac{16qb^4}{\pi^6 c} \frac{\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}}{(1 + \mu^2)^2}.$$

Для определения наибольшего прогиба полагаем $x = a/2$, $y = b/2$:

$$\omega_{\max} = \frac{16qb^4}{\pi^6 c} \frac{1}{(1 + \mu^2)^2}. \quad (50)$$

Эта приближенная формула дает вполне удовлетворительные результаты для прямоугольных контуров, близких к квадрату. Для квадрата погрешность, как показывает сравнение с числами таблицы С, не превосходит 2,5%. В случае $b/a = 1/2$ погрешность около 5%. С дальнейшим возрастанием длины пластинки погрешность возрастает, так как действительная поверхность изгиба пластинки все больше отклоняется от принятой при расчете формы изгиба. Мы воспользуемся тем обстоятельством, что приближенная формула дает удовлетворительные результаты для контуров, близких к квадрату, и определим для таких контуров влияние растягивающих усилий T_1 и T_2 на прогиб.

При наличии усилий T_1 и T_2 выражение для потенциальной энергии напишется в такой форме:

$$V = \frac{abc}{8} \varphi^2 \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 + \frac{1}{2} T_1 \frac{\pi^2}{a^2} \frac{ab}{4} \varphi^2 + \frac{1}{2} T_2 \frac{\pi^2}{b^2} \frac{ab}{4} \varphi^2.$$

Пользуясь этим, выражаем координату через соответствующую ей обобщенную силу, тогда на основании общего выражения (44) получим

$$w = \frac{4}{\pi^4 abc} \frac{\bar{\Phi} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 + \frac{T_1}{a^2 \pi^2 c} + \frac{T_2}{b^2 \pi^2 c}}.$$

Если вместо $\bar{\Phi}$ вставить его значение для случая равномерно распределенной нагрузки и принять во внимание ранее введенные обозначения $T_2 b^2 / c \pi^2 = \alpha^2$ и $T_1 / T_2 = \beta$, то мы получим формулу (48).

Только что изложенным приемом можно воспользоваться для определения влияния растягивающих усилий T_1 и T_2 в случае пластинки с заделанными краями. В основание расчетов положим такую форму изгиба:

$$w = \varphi \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right). \quad (51)$$

При этом будут удовлетворены условия на контуре: $w = dw/dn = 0$.

Потенциальная энергия изгиба на основании общей формулы (§ 8) будет

$$V = 2abc\pi^4 \varphi^2 \left(\frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2}\right).$$

Для координаты φ получаем выражение

$$\varphi = \frac{\bar{\Phi}}{4abc\pi^4 \left(\frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2}\right)}.$$

Вставляя это в выражение для прогиба (51), получим

$$w = \frac{\bar{\Phi} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right)}{4abc\pi^4 \left(\frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2}\right)}.$$

Обобщенная сила $\bar{\Phi}$ при действии равномерно распределенной нагрузки q определится из уравнения

$$\bar{\Phi} \delta\varphi = \delta\varphi \int_0^a \int_0^b q \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) dx dy = qab \delta\varphi.$$

На основании этого получим для прогиба выражение

$$\omega = \frac{q \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right)}{4\pi^4 c \left(\frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} \right)}.$$

Наибольший прогиб получим, полагая $x=a/2$ и $y=b/2$:

$$\omega_{\max} = \frac{qb^4}{\pi^4 c} \frac{1}{(3+3\mu^4+2\mu^2)}. \quad (52)$$

Для квадратной пластинки эта приближенная формула дает прогиб

$$\omega_{\max} = 0,125 \frac{qb^4}{\pi^4 c}.$$

Для прямоугольника с отношением сторон $b/a=\mu=0,5$

$$\omega_{\max} = 0,271 \frac{qb^4}{\pi^4 c}.$$

Значения этих же прогибов на основании решения Б. М. Кояловича ¹⁾ будет ²⁾

$$\text{для } \mu = 1 \quad \omega_{\max} = 0,123 \frac{qb^4}{\pi^4 c},$$

$$\text{для } \mu = 0,5 \quad \omega_{\max} = 0,248 \frac{qb^4}{\pi^4 c}.$$

Таким образом, принятая нами форма изгиба (51) дает довольно точные значения для прогиба пластинки в случае контуров, близких к квадратным. Этим обстоятельством воспользуемся для оценки влияния растягивающих усилий T_1 и T_2 . Для этого нужно вычислить работу усилий T_1 , T_2 для взятой нами формы изгиба. Вставляя в общее выражение для работы усилий T_1

$$-\frac{1}{2} T_1 \int_0^b dy \int_0^a \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 dx$$

значение ω и выполняя интегрирование, получим

$$-\frac{3}{2} ab \frac{\pi^2}{a^2} T_1 \Phi^2.$$

¹⁾ К о я л о в и ч Б. М. Об одном уравнении с частными производными четвертого порядка. С.-Петербург, тип. Императорской Академии наук, 1902, 125 стр.

²⁾ Числа взяты из цитированной в сноске на стр. 190 статьи И. Г. Бубнова.

Подобным же образом для усилий T_2 найдем работу

$$-\frac{3}{2} ab \frac{\pi^2}{b^2} T_2 \varphi^2.$$

Потенциальная энергия системы будет

$$V = 2ab\pi^4 c \varphi^2 \left(\frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} \right) + \frac{3}{2} ab \frac{\pi^2}{a^2} T_1 \varphi^2 + \frac{3}{2} ab \frac{\pi^2}{b^2} T_2 \varphi^2.$$

Выражая φ через соответствующую обобщенную силу и вставляя в формулу (51), найдем

$$w = \frac{\bar{\Phi} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right)}{4ab\pi^4 c \left(\frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} \right) + 3ab \frac{\pi^2}{a^2} T_1 + 3ab \frac{\pi^2}{b^2} T_2}.$$

В случае равномерно распределенной нагрузки получим для наибольшего прогиба формулу

$$w_{\max} = \frac{qb^4}{\pi^4 c} \frac{1}{(3 + 3\mu^4 + 2\mu^2) + \frac{3\alpha^2}{4} (1 + \mu^2\beta)}. \quad (53)$$

Сравнивая это с формулой (52), находим, что прогиб w_{\max} при наличии усилий T_1 и T_2 получается умножением прогиба w_0 от равномерной нагрузки (при $T_1 = T_2 = 0$) на величину

$$\frac{3 + 3\mu^4 + 2\mu^2}{3 + 3\mu^4 + 2\mu^2 + \frac{3\alpha^2}{4} (1 + \mu^2\beta)}. \quad (54)$$

Для бесконечно длинной пластинки ($\mu = 0$) множитель (54) имеет значение

$$\frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{4}},$$

что соответствует формуле (29) для изгиба стержня с заделанными концами. Для квадратной пластинки множитель (54) получает значение (при $\beta = 1$)

$$\frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{5,33}}.$$

С возрастанием длины пластинки значение множителя (54) быстро приближается к значению, соответствующему бесконечно длинному прямоугольнику, что подтверждает положения, высказанные в упомянутой в сноске на стр. 190 работе И. Г. Бубнова (стр. 69 его работы).

§ 10. Действие сжимающих контурных сил, расположенных в срединной плоскости

До сих пор мы предполагали усилия T_1 и T_2 растягивающими. Меняя знак на противоположный, приходим к случаю сжимающих усилий. Как предельный случай можно получить формулу Дж. Брайана¹⁾ для критического значения сжимающих усилий, при котором происходит выпучивание пластинки.

Возьмем для этого формулу (44) и переменим знаки у T_1 и T_2 , критическими значениями усилий T_1 и T_2 будут те, при которых знаменатель одного из членов двойного ряда обращается в нуль, т. е. когда

$$\frac{m^2 T_1 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 T_2 \pi^2}{b^2} = c \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2.$$

В частном случае, когда $T_2 = 0$, получаем

$$T_1 = \frac{c \pi^2 a^2}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2.$$

Наименьшее значение для T_1 получим, положив $n=1$. Что касается числа m , то при большой длине пластинки можно воспользоваться обычным приемом для нахождения минимума T_1 . Оказывается, что m должно равняться a/b , т. е. пластинка при выпучивании подразделяется на квадраты. Вставляя это значение m в выражение для T_1 , получим $(T_1)_{\text{кр}} = 4c\pi^2/b^2$.

IV. ИЗГИБ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБКИ КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

§ 11. Малые перемещения

В качестве последнего примера, где применение нормальных координат значительно упрощает решение задачи, рассмотрим изгиб цилиндрической трубки. Положим, что распределение внешних сил не меняется по длине трубки, в таком случае можно ограничиться исследованием изгиба элементарного кольца шириной, равной единице, по образующей цилиндра. Обозначим через w радиальное и через v касательное перемещения точек кольца при изгибе. Перемещения эти будем считать малыми по сравнению с радиусом кольца a . Составим выражение для удлинений элементов кольца через перемещения w и v . Из рис. 6 видно, что координаты какой-либо точки кольца после деформации выразятся через начальные

¹⁾ [B r a n G. H. On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane, with applications to the «buckling» of the sides of a ship. Proceedings of the London Mathematical Society, Series I, 1891 [December 11, 1890], vol. 22, № 403, pp. 54—67.]

координаты a , θ так:

$$y' = (a - w) \cos \theta - v \sin \theta, \quad z' = (a - w) \sin \theta + v \cos \theta.$$

Элемент кольца $ad\theta$ после деформации будет иметь длину

$$[(dy')^2 + (dz')^2]^{1/2} = \left\{ \left[-\left(\frac{dw}{d\theta} + v\right) \cos \theta - \left(a - w + \frac{dv}{d\theta}\right) \sin \theta \right]^2 + \left[\left(a - w + \frac{dv}{d\theta}\right) \cos \theta - \left(\frac{dw}{d\theta} + v\right) \sin \theta \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Обозначая через e относительное удлинение элемента, после некоторых преобразований найдем

$$\left(a - w + \frac{dv}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dw}{d\theta} + v\right)^2 = a^2 (1 + 2e),$$

откуда

$$e = \frac{1}{2a^2} \left\{ -2a \left(w - \frac{dv}{d\theta}\right) + \left(-w + \frac{dv}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dw}{d\theta} + v\right)^2 \right\}. \quad (55)$$

Если перемещения w и v удовлетворяют условию

$$w = \frac{dv}{d\theta}, \quad (56)$$

то, как видно из полученного выражения для удлинения (55), деформация с точностью до малых первого порядка относительно w и v не сопровождается растяжением.

Потенциальная энергия деформации состоит существенным образом из энергии изгиба. При решении большинства практических задач можно с достаточной точностью полагать, что изгиб тонких цилиндрических трубок не сопровождается растяжением и, следовательно, соблюдено условие (56). В таком случае перемещения w и v могут быть найдены в общем виде, если только имеется общее выражение для потенциальной энергии изгиба элементарного кольца. Составлением

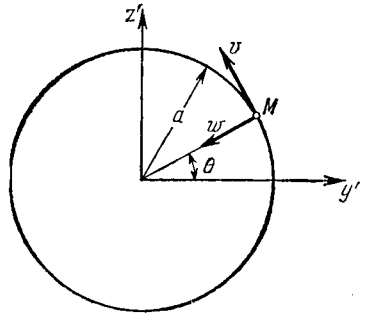


Рис. 6.

этого общего выражения для энергии мы теперь и займемся.

В самом общем случае радикальное перемещение может быть представлено в виде ряда

$$w = \varphi_1 \cos \theta + \varphi_2 \cos 2\theta + \dots + \varphi'_1 \sin \theta + \varphi'_2 \sin 2\theta + \dots \quad (57)$$

В силу условия (56) для тангенциальных перемещений получим выражение

$$v = \varphi_1 \sin \theta + \frac{1}{2} \varphi_2 \sin 2\theta + \dots - \varphi'_1 \cos \theta - \frac{1}{2} \varphi'_2 \cos 2\theta - \dots \quad (58)$$

Для изменения кривизны элементарного кольца можем в случае малых перемещений взять выражение

$$\delta \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{a^2} \left(\frac{d^2 \omega}{d\theta^2} + \omega \right).$$

Сохраняя для цилиндрической жесткости прежнее обозначение c , найдем для потенциальной энергии изгиба такое выражение:

$$V = \frac{ac}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{d^2 \omega}{d\theta^2} + \omega \right) \right]^2 d\theta = \frac{c\pi}{2a^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} (n^2 - 1)^2 (\varphi_n^2 + \varphi_n'^2). \quad (59)$$

Заметим, что в выражение (59) не входит член, соответствующий $n=1$, — он равен нулю, так как соответствующее ему перемещение таково, как перемещение твердого тела, и, следовательно, не сопровождается деформацией кольца. Величины φ_n , φ_n' являются нормальными координатами системы и при заданных внешних силах их легко выразить через соответствующие обобщенные силы $\bar{\Phi}_n$ и $\bar{\Phi}_n'$. На основании (59) получим

$$\varphi_n = \frac{\bar{\Phi}_n a^3}{c\pi (n^2 - 1)^2}, \quad \varphi_n' = \frac{\bar{\Phi}_n' a^3}{c\pi (n^2 - 1)^2}.$$

Вставляя это в общие выражения для перемещений, получим

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{a^3}{c\pi} \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{(n^2 - 1)^2} (\bar{\Phi}_n \cos n\theta + \bar{\Phi}_n' \sin n\theta), \\ v &= \frac{a^3}{c\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n(n^2 - 1)^2} (\bar{\Phi}_n \sin n\theta - \bar{\Phi}_n' \cos n\theta). \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Применим эти общие выражения к частному случаю, когда кольцо изгибается двумя взаимопротивоположными силами P , приложенными в точках $\theta=0^\circ$ и $\theta=\pi$. Для нахождения обобщенной силы $\bar{\Phi}_n$ дадим соответствующей координате приращение $\delta\varphi_n$. Перемещения точек приложения сил P , соответствующие приращению $\delta\varphi_n$, будут $\delta\varphi_n \cos 0^\circ$ и $\delta\varphi_n \cos \pi$. Приравнявая работу внешних сил на этих перемещениях величине $\bar{\Phi}_n \delta\varphi_n$, получим

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_n &= 2P \quad \text{при } n \text{ четном,} \\ \bar{\Phi}_n &= 0 \quad \text{при } n \text{ нечетном.} \end{aligned}$$

Подобным же образом найдем $\bar{\Phi}_n' = 0$ для всех значений n .

На основании этого для радиального перемещения ω получим выражение

$$\omega = \frac{2a^3 P}{c\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos 2n\theta}{(4n^2 - 1)^2}.$$

Сближение точек приложения сжимающих сил будет

$$\delta = (w)_{\theta=0} + (w)_{\theta=\pi} = \frac{4a^3P}{c\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{a^3P}{4\pi c} \frac{1}{(\pi^2-8)}.$$

В качестве второго примера рассмотрим изгиб цилиндрической трубки под действием внешнего гидростатического давления.

Обозначим через p_0 давление на глубине h , соответствующей центру элементарного кольца (рис. 7), тогда давление в какой-либо точке M будет

$$p_0 + a\Delta \cos \theta,$$

Δ — вес единицы объема жидкости.

Давления, приходящиеся на элементарное кольцо, уравновешиваются силой

$$P = \pi a^2 \Delta.$$

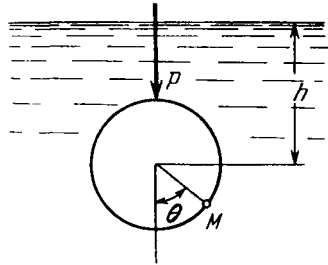


Рис. 7.

Значения обобщенных сил $\bar{\Phi}_n$, $\bar{\Phi}'_n$ найдутся из уравнений

$$\bar{\Phi}_n \delta \varphi_n = \delta \varphi_n \left[\int_0^{2\pi} \cos n\theta (p_0 + \Delta a \cos \theta) a d\theta + \cos n\pi P \right],$$

$$\bar{\Phi}'_n \delta \varphi'_n = \delta \varphi'_n \left[\int_0^{2\pi} \sin n\theta (p_0 + \Delta a \cos \theta) a d\theta + \sin n\pi P \right].$$

Следовательно, $\bar{\Phi}_n = (-1)^n P$, $\bar{\Phi}'_n = 0$.

Для радиального перемещения получим выражение

$$w = \frac{Pa^3}{c\pi} \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \cos n\theta}{(n^2-1)^2}.$$

Укорочение вертикального диаметра будет

$$\delta = (w)_{\theta=0} + (w)_{\theta=\pi} = \frac{2Pa^3}{c\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{Pa^3}{8\pi c} \frac{1}{(\pi^2-8)}.$$

Найденное значение δ вдвое меньше того, что мы получили в предыдущей задаче. Имея выражение для перемещения w , можно, пользуясь приведенным выше выражением для изменения кривизны

$\delta \left(\frac{1}{\rho} \right)$, вычислить наибольшие нормальные напряжения от изгиба

по формуле

$$\rho = \frac{Eh}{1-\sigma^2} \delta \left(\frac{1}{\rho} \right).$$

Здесь h обозначает половину толщины стенки цилиндра; σ — коэффициент Пуассона.

§ 12. Нелинейные перемещения

Перейдем теперь к рассмотрению тех задач, где для определения перемещений нужно принять во внимание члены второй степени относительно w и v , входящие в выражение для удлинений (55).

Подходящим примером может служить приведенная выше задача об изгибе трубки под действием внешнего гидростатического давления. Полученные нами выражения для перемещений совершенно не зависят от давления p_0 , следовательно, при равномерном всестороннем давлении трубка не испытывает изгиба. Это заключение правильно, пока p_0 не превосходит некоторого предельного значения. За этими пределами неизогнутая форма равновесия сжатой трубки перестает быть устойчивой, малейшая причина может вызвать большие перемещения; трубка под действием равномерного всестороннего давления может сплющиться. Решение, полученное нами в предыдущем параграфе для трубки, испытывающей гидростатическое давление, может дать результаты, близкие к действительности, лишь в том случае, если давление p_0 мало по сравнению с тем критическим значением равномерного всестороннего давления, при котором трубка может сплющиться. С возрастанием равномерного всестороннего давления влияние его на перемещения, вызываемые какими-либо внешними силами, все возрастает.

Для определения этого влияния нужно рассмотреть:

- 1) удлинения, зависящие от членов второй степени относительно v , w , и
- 2) работу всестороннего равномерного давления p_0 при выбранных нами перемещениях (57) и (58).

Равномерное всестороннее давление p_0 вызывает в каждом элементе кольца продольное сжимающее усилие

$$T = ap_0.$$

При выбранных нами перемещениях удлинение какого-либо элемента кольца на основании формулы (55) будет равно

$$\frac{1}{2a^2} \left(\frac{dw}{d\theta} + v \right)^2 a d\theta.$$

Это удлинение сопровождается уменьшением энергии сжатия, соответствующей давлению p_0 . Полное изменение энергии сжатия

будет

$$\begin{aligned} \frac{T}{2a} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dw}{d\theta} + v \right)^2 d\theta &= \\ &= \frac{T}{2a} \int_0^{2\pi} \left[\sum \left(-n + \frac{1}{n} \right) \sin n\theta\varphi_n + \sum \left(n - \frac{1}{n} \right) \cos n\theta\varphi_n' \right]^2 d\theta = \\ &= \frac{T\pi}{2a} \sum_{n=2}^{\infty} \left(n - \frac{1}{n} \right)^2 (\varphi_n^2 + \varphi_n'^2). \quad (61) \end{aligned}$$

При значительных величинах T найденное нами уменьшение энергии сжатия будет величиной того же порядка, что и энергия изгиба (59).

Найдем теперь ту работу, которую совершат давления p_0 при изгибе трубки.

Величина эта проще всего найдется умножением давления p_0 на уменьшение площади, ограниченной элементарным кольцом. Пусть кривая MN (рис. 8) представляет собой форму кольца после изгиба. Для определения разности между площадью круга радиуса a и площадью, ограниченной кривой MN , составим выражение для элемента площади $d\omega$ у точки P' , ограниченного дугой круга, кривой MN и двумя последовательными радиусами, проведенными под углами θ и $\theta + d\theta$ к оси y' .

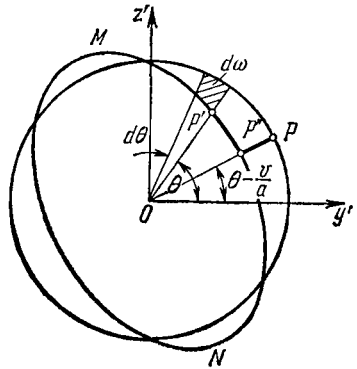


Рис. 8.

Принимая элемент за трапецию, найдем

$$d\omega = (a - OP') \left(a - \frac{w}{2} \right) d\theta.$$

Чтобы в выражении для изменения площади принять во внимание члены второго порядка относительно перемещений w и v , рассмотрим перемещения точки P , с которой совпадала точка P' до деформации. Радиус OP наклонен к оси y' под углом $\theta - \frac{v}{a}$, поэтому радиальное перемещение точки P будет

$$PP'' = w - \frac{dw}{d\theta} \frac{v}{a}.$$

Величину OP' найдем из прямоугольного треугольника $OP'P$:

$$OP' = \frac{OP''}{\cos P'OP''} = \left(a - \omega + \frac{d\omega}{d\theta} \frac{v}{a} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{a^2} \right).$$

Вставляя это в выражение для $d\omega$ и сохраняя члены второй степени относительно ω и v , найдем

$$d\omega = \left(a\omega - \frac{\omega^2}{2} - v \frac{d\omega}{d\theta} - \frac{v^2}{2} \right) d\theta.$$

Полное изменение площади, ограниченной кольцом, будет

$$\int_0^{2\pi} \left(a\omega - \frac{\omega^2}{2} - v \frac{d\omega}{d\theta} - \frac{v^2}{2a} \right) d\theta = \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2} (\varphi_n^2 + \varphi_n'^2).$$

Работа всестороннего давления p_0 определится формулой

$$\frac{T\pi}{2a} \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2} (\varphi_n^2 + \varphi_n'^2). \quad (62)$$

Для вычисления перемещений при изгибе трубки, испытывающей равномерное гидростатическое давление, придется принять во внимание не только энергию изгиба (59), но также изменение энергии сжатия (61) и работу давлений p_0 (62). Полное изменение потенциальной энергии системы будет

$$\frac{c\pi}{2a^3} \sum_{n=2}^{n=\infty} (n^2 - 1)^2 (\varphi_n^2 + \varphi_n'^2) - \frac{p_0\pi}{2} \sum (n^2 - 1) (\varphi_n^2 + \varphi_n'^2). \quad (63)$$

Какая-либо координата φ_n через соответствующую ей обобщенную силу $\bar{\Phi}_n$ выразится формулой

$$\varphi_n = \frac{\bar{\Phi}_n}{\frac{c\pi}{a^3} (n^2 - 1)^2 - p_0\pi (n^2 - 1)}.$$

Для радиального и касательного перемещений получаем такие общие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{a^3}{c\pi} \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{(n^2 - 1)^2 - \frac{p_0 a^3}{c} (n^2 - 1)} (\bar{\Phi}_n \cos n\theta + \bar{\Phi}_n' \sin n\theta), \\ v &= \frac{a^3}{c\pi} \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{n \left[(n^2 - 1)^2 - \frac{p_0 a^3}{c} (n^2 - 1) \right]} (\bar{\Phi}_n \sin n\theta - \bar{\Phi}_n' \cos n\theta). \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Этим вполне решается вопрос об изгибе трубки, подверженной равномерному всестороннему давлению p_0 . Легко видеть, что благодаря давлению p_0 перемещения получаются большими, чем то следует из формул (60).

Для получения критического значения давления p_0 нужно только приравнять нулю знаменатель 1-го члена ($n=2$) выражений (64). Получаем известную формулу ¹⁾

$$(p_0)_{кр} = \frac{3c}{a^3}. \quad (65)$$

Применим формулы (64) к случаю кольца, испытывающего давления p_0 и изгибаемого двумя взаимно противоположными силами P , приложенными в точке $\theta=0$ и $\theta=\pi$.

Для сближения точки приложения сил найдем выражение

$$\delta' = \frac{4a^3 P}{c\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2 - \frac{p_0 a^3}{c} (4n^2 - 1)}.$$

Общие формулы (64) легко применить к различным частным случаям нагрузки. От случая внешнего гидростатического давления, вызывающего в стенках сжимающие усилия T , легко перейти к задачам об изгибе трубок, подвергающихся внутреннему гидростатическому давлению, для этого в общих формулах (64) нужно лишь изменить знак у p_0 . Конечно, внутреннее давление будет увеличивать сопротивление трубки изгибу, трубка становится более жесткой.

Этим мы закончим рассмотрение частных задач, где применение нормальных координат упрощает решение вопроса. Приведенных примеров достаточно, чтобы показать, насколько выгодно пользоваться нормальными координатами при составлении общих выражений для перемещений и как, имея общие выражения для перемещений, можно составить приближенные формулы, удобные для практических приложений. Тот прием, когда для вычисления прогиба пластинки в основание кладется некоторая подходящая форма изгиба, удовлетворяющая условиям на контуре, также, как нам кажется, может иметь практическое значение.

¹⁾ L é v y M. Sur un nouveau cas intégrable du problème de l'élasticité et l'une de ses applications. Comptes Rendus des séances de l'Académie des sciences, 1883, vol. 97, 2 Semestre, № 13, pp. 694—697. См. p. 696.

К ВОПРОСУ О ДЕЙСТВИИ УДАРА НА БАЛКУ

Известия С.-Петербургского политехнического института, 1912, отдел техники, естествознания и математики, том 17, вып. 2, стр. 407—425. Отдельный оттиск, СПб., 1912, 19 стр. Перевод на немецкий язык: Zur Frage nach der Wirkung eines Stosses auf einen Balken. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1913, Bd. 62, Heft 2, SS. 198—209. Его перепечатка: Timoshenko S. P. The collected papers. McGraw-Hill publishing company Ltd. New York—London—Toronto, 1953, pp. 225—236.

§ 1. Приближенные формулы

При расчете инженерных сооружений и машинных конструкций приходится иногда определять прочные размеры стержней, подвергающихся действию ударов. На практике задачу эту решают приближенно на основании самых элементарных соображений. Обычно пренебрегают массой системы, испытывающей действие удара, и допускают, что между силой, возникающей в месте удара, и перемещениями, вызываемыми этой силой, существует такая же зависимость, как и при статической нагрузке. В пределах упругости возрастание усилия в месте удара будет сопровождаться пропорциональным ему возрастанием перемещения, и нарастание деформации длится до тех пор, пока вся живая сила ударяющего тела не обратится в потенциальную энергию деформации.

Если через λ обозначим перемещение точки, на которую непосредственно действует ударяющее тело, то на основании сделанных выше допущений получим для потенциальной энергии деформации значение $\frac{\alpha\lambda^2}{2}$. Здесь α — коэффициент, зависящий от упругих свойств и размеров системы, подвергающейся действию удара. Очевидно, коэффициент этот представляет собой силу, которую нужно приложить, чтобы получить перемещение $\lambda=1$. Для определения максимального перемещения λ_g при ударе нужно выражение для потенциальной энергии приравнять живой силе ударяющего тела; получим ¹⁾

$$\frac{\alpha\lambda_g^2}{2} = \frac{mv^2}{2}. \quad (1)$$

Это элементарное решение (в дальнейшем мы условимся называть его первым приближением), принадлежащее Томасу Юнгу ²⁾,

¹⁾ Для упрощения мы в дальнейшем будем предполагать скорость v горизонтальной, таким образом исключается работа силы тяжести на перемещениях λ .

²⁾ Young Th. A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts. London, printed for J. Johnson, 1807, vol. 1, XXIV+796 p. См. p. 144.

совершенно не учитывает влияния инерции ударяемой системы и потому дает для λ преувеличенное значение. В действительности часть живой силы при ударе теряется и изменение формы ударяемой системы отличается от того, что мы имеем при статической нагрузке. Позднее И. Ходкинсон ¹⁾ при обработке своих опытов, произведенных над балками с опертыми концами, предложил при определении потерянной живой силы исходить из предположения, что ударяющий груз встречает в месте удара (посредине пролета) массу, равную половине массы балки. Теоретическое обоснование такого приема расчета было дано Х. Коксом ²⁾. Задачу о разыскании динамического прогиба балки Х. Кокс разбивает на две части: 1) находит изменение скорости ударяющего тела непосредственно после удара и потом 2) определяет динамический прогиб балки, приравнивая кинетическую энергию системы непосредственно после удара потенциальной энергии изгиба. Для решения первой части задачи Х. Кокс делает предположение, что при ударе ось балки гнется по такой же кривой, как и в случае статической нагрузки, приложенной в месте удара. Тогда скорость ударяющего тела v_1 непосредственно после удара выразится формулой

$$v_1 = \frac{m}{m + kM} v,$$

где kM — приведенная масса балки. Множитель k зависит от способа закрепления концов балки и от положения места удара. В частном случае балки с опертыми концами и удара посредине пролета $k = 17/35$. Величина эта весьма близка к тому, что принимал при своих вычислениях И. Ходкинсон. Определив таким образом изменение скорости ударяющего тела, найдем для кинетической энергии системы непосредственно после удара следующее выражение:

$$\frac{(m + kM) v_1^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{m}{m + kM}.$$

Приравнивая это потенциальной энергии деформации, получим для определения λ_g уравнение

$$\frac{\alpha \lambda_g^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{m}{m + kM}, \quad (2)$$

которое представляет второе приближение в решении задачи об

¹⁾ H o d k i n s o n E a t o n. [Experimental researches on the strength of iron.] Report of the commissioners appointed to inquire into the application of iron to railway structures, Appendix A, London, 1849, pp. 1—114. См. p. 4.

²⁾ C o x H o m e r s h a m. On impact on elastic beams. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 1851 [Read December 10, 1849], vol. 9, Part I, pp. 73—78. Содержание этой статьи изложено в работе T o d h u n t e r I., P e a r s o n K. A history of the theory of elasticity and of the strength of materials. Vol. 1. Cambridge, University Press, 1886, 924+12 p. См. pp. 771—772.

ударе. Оно тем больше отличается от (1), чем больше масса балки по сравнению с массой ударяющего тела.

Приближенные решения (1) и (2) основаны на том предположении, что при ударе перемещения отдельных точек ударяемой системы такие же, как и при статической нагрузке. В действительности удар всегда сопровождается колебаниями, которые сильно влияют на перемещения точек ударяемой системы и при некоторых условиях поглощают значительную часть кинетической энергии. Поэтому естественно, что дальнейшие исследования по удару были направлены главным образом на изучение возникающих при ударе колебаний.

Вопрос о продольных колебаниях, появляющихся при ударе в призматических брусках, был разрешен еще Луи Мари Навье ¹⁾. Колебания брусков при поперечном ударе подробно были рассмотрены Барре Сен-Венаном ²⁾. Оба эти исследователя исходили из предположения, что в момент соприкосновения ударяющее тело сообщает свою скорость лишь тому сечению бруска, где происходит удар, и так как действие удара в первый момент распространяется лишь на небольшую массу, то заметного изменения скорости не происходит, она начинает убывать лишь по мере распространения действия удара. Допустив, кроме того, что ударяющий груз находится в соприкосновении с балкой по крайней мере в продолжение половины периода основных колебаний ³⁾, Сен-Венан привел задачу о действии удара на балку к вопросу о поперечных колебаниях призматического стержня с прикрепленным к нему грузом. Решение для этого случая получается в виде бесконечных рядов, но если ограничиться лишь первыми членами этих рядов, то мы приходим к ранее полученному элементарным путем второму приближению (2). Многочисленные опыты, произведенные над продольным ударом призматических стержней, не подтвердили результатов Сен-Венана, и более подробное исследование деформации у места удара ⁴⁾ показало, что местные деформации имеют весьма существенное влияние на продолжительность удара.

¹⁾ Navier [L]. Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. Première partie, Troisième édition, Paris, Dunod, Tome 1, Fascicule II, 1864, 853 p. См. Appendice IV, pp. 639—640.

²⁾ Clebsch A. Théorie de l'élasticité des corps solides. Traduite par Saint-Venant et Flamant, Paris, Dunod, 1883, 900 p. См. Note finale du § 61, pp. 490—627.

³⁾ См. указанную выше в сноске ¹⁾ работу Навье, Historique, p. CCXXXII.

⁴⁾ Sears J. E. On the longitudinal impact of metal rods with rounded ends. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 1908, vol. 14, Part 3, pp. 257—286; Transactions of the Cambridge Philosophical Society 1908, vol. 21, № 2, pp. 49—105; Ramauer C. Experimentelle und theoretische Grundlagen des elastischen und mechanischen Stosses. Annalen der Physik, Vierte Folge, 1909, Bd. 30, № 13, Heft 3, SS. 417—494.

§ 2. Более подробное исследование поперечного удара

Вопрос о действии поперечного удара на призматический стержень, несмотря на его большую практическую важность, не был подвергнут более подробному исследованию, и мы в дальнейшем приводим попытку приближенного решения этой задачи в связи с рассмотрением влияния местных деформаций. Решение это основано на соображении, высказанном еще Г. Герцем¹⁾ при исследовании удара шаров. Г. Герц полагал, что «комбинируя статическое сжатие в частях тел, лежащих непосредственно у места соприкосновения, с общими уравнениями движения для остальных частей тел, мы, вероятно, могли бы получить закон для удара тел любой формы».

Применим эти общие соображения к исследованию действия удара на балку с опертими концами. Чтобы иметь возможность находить местные деформации, необходимо предварительно задаться видом поверхностей ударяющего тела и балки у места соприкосновения. Будем предполагать, что ударяющий груз ограничен шаровой поверхностью, а балка плоскостью, перпендикулярной направлению скорости груза. Тогда на основании формулы Г. Герца сближение α ударяющихся тел, вследствие местных деформаций, равно

$$\alpha = kP^{1/3}. \quad (3)$$

Здесь

$$k = \left(\frac{9}{16} \frac{1}{\mu r^{1/3}} \right)^{2/3};$$

μ — модуль упругости при сдвиге; r — радиус поверхности ударяющего тела и P — давление, возникающее в месте соприкосновения. Вибрациями, возникающими при ударе в падающем грузе, мы будем пренебрегать²⁾; что же касается балки, то вынужденные колебания, которые она совершает благодаря переменному давлению P , могут быть учтены на основании имеющихся решений для вынужденных колебаний призматических стержней. Если предположить для упрощения, что удар происходит посредине пролета балки,

¹⁾ Hertz H. R. Die Prinzipien der Mechanik. Leipzig, J. A. Barth, 1894, 312 S. См. Abschnitt 6, SS. 286—306.

²⁾ Эти вибрации, как показали вычисления (Strutt J. W. (Lord Rayleigh). On the interference-rings, described by Haidinger, observable by means of plates whose surfaces are absolutely parallel. Philosophical Magazine and Journal of Science, 1906, vol. 12, 6 serie, № 71, November, pp. 489—493 [Перепечатка: Strutt J. W. (Lord Rayleigh). Scientific papers. Vol. 5. Cambridge, University Press, 1912, pp. 341—346.] не оказывают заметного влияния на продолжительность удара и на величину возникающих при ударе напряжений.

то прогиб в месте удара может быть представлен такой формулой ¹⁾:

$$y = \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{i^2} \frac{l^2}{b\pi^2} \frac{2g}{ql} \int_0^t P \sin \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} (t-t_1) dt_1. \quad (4)$$

Здесь через l обозначен пролет балки; q — вес единицы длины балки; величина $b\pi^2/l^2$ представляет собой частоту собственных колебаний балки, соответствующих основному тону; P — переменное давление в месте удара, являющееся функцией от t_1 .

Для определения давления P и прогиба балки y необходимо колебания балки рассматривать совместно с движением ударяющего тела. Первоначальная скорость его v благодаря противодействию P будет постепенно убывать, и путь, пройденный телом с момента соприкосновения, можно представить так:

$$y_1 = vt - \frac{1}{m} \int_0^t dt \int_0^t P dt. \quad (5)$$

С другой стороны, тот же путь равняется, очевидно, $\alpha + y$. Мы получаем для определения P такое уравнение:

$$\begin{aligned} vt - \frac{1}{m} \int_0^t dt \int_0^t P dt &= \\ &= k |P^*/\alpha|_t + \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{i^2} \frac{l^2}{b\pi^2} \frac{2g}{ql} \int_0^t P \sin \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} (t-t_1) dt_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Для приближенного решения этого уравнения разделим промежуток времени от 0 до t на равные интервалы продолжительности $\tau = t/n$ и предположим, что на протяжении каждого интервала давление P не меняется, а сохраняет некоторое постоянное среднее для данного интервала значение. Пусть P_1, P_2, P_3, \dots — последовательные значения P , тогда

$$\begin{aligned} \int_0^t P \sin \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} (t-t_1) dt_1 &= \\ &= \frac{l^2}{b\pi^2 i^2} \left\{ P_1 \left[\cos \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} (t-\tau) - \cos \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} t \right] + \right. \\ &\quad \left. + P_2 \left[\cos \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} (t-2\tau) - \cos \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} (t-\tau) \right] + \dots \right\}. \end{aligned}$$

¹⁾ Timoshenko S. Erwungene Schwingungen prismatischer Stäbe. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1911, Bd 59, Heft 2, SS. 163—203. [Перепечатка: Timoshenko S. P. The collected papers. New York — London — Toronto, McGraw-Hill Publishing Company. Ltd., 1953, pp. 51—91.]

Вставляя это в выражение для прогиба (4), получим

$$y = \frac{l^4}{b^2\pi^4} \frac{2g}{ql} \left\{ P_1 \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{\cos \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} (t-\tau) - \cos \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} t}{i^4} + \right. \\ \left. + P_2 \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{\cos \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} (t-2\tau) - \cos \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} (t-\tau)}{i^4} + \dots \right. \\ \left. \dots + P_n \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{1 - \cos \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} \tau}{i^4} \right\} \cdot \quad (7)$$

Чтобы облегчить вычисление прогибов, мы предварительно составили таблицу А, где помещены значения

$$\sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{\cos \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} n\tau}{i^4}$$

при различных n и их последовательные разности, вычисленные в предположении, что

$$\tau = \frac{T}{360} = \frac{\pi l^2}{180 b\pi^2},$$

т. е. в предположении, что продолжительность одного интервала составляет 1/360 периода основных колебаний балки.

Такое число делений, как показали дальнейшие вычисления, достаточно для исследования действия удара на жесткие балки ($T < 0,01$ секунды).

Заметим здесь, что последовательные значения разностей Δ , приведенных в таблице А, пропорциональны прогибам балки в соответствующие моменты времени от давления P_1 , действовавшего в продолжение первого интервала. Изменение этих прогибов на протяжении четверти периода основных колебаний балки представлено на рис. 1.

Определение последовательных значений давления P производится следующим образом. Пренебрегая изменением скорости ударяющего тела на протяжении первого интервала, мы в качестве первого приближения получим для сближения ударяющихся тел значение $\alpha = v\tau$ и легко вычислим при помощи формулы (3) соответствующее давление P . Далее, для получения более точного значения предполагаем, что на протяжении первого интервала давление в

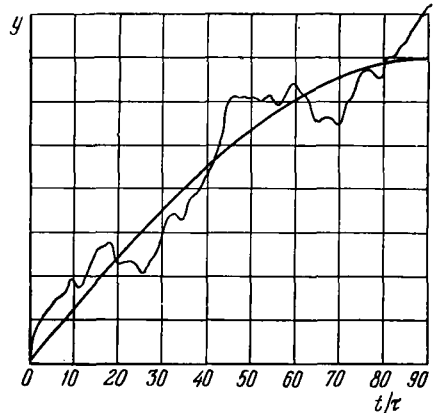


Рис. 1.

Таблица А

$$\text{Значения } \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{i^4} \cos \frac{ni^2\pi}{180}$$

n	Σ	$\Delta \cdot 10^4$	n	Σ	$\Delta \cdot 10^4$	n	Σ	$\Delta \cdot 10^4$
0	1,01465	91						
1	1,01374	182	23	0,90853	587	45	0,71742	1514
2	1,01192	223	24	0,90266	573	46	0,70228	1527
3	1,00969	274	25	0,89693	516	47	0,68701	1518
4	1,00695	305	26	0,89177	522	48	0,67183	1527
5	1,00390	337	27	0,88655	586	49	0,65656	1519
6	1,00053	376	28	0,88069	616	50	0,64137	1524
7	0,99677	382	29	0,87453	668	51	0,62613	1526
8	0,99295	417	30	0,86785	766	52	0,61087	1507
9	0,98878	483	31	0,86019	826	53	0,59580	1538
10	0,98395	470	32	0,85193	857	54	0,58042	1549
11	0,97925	432	33	0,84336	853	55	0,56493	1489
12	0,97493	471	34	0,83483	824	56	0,55004	1473
13	0,97022	518	35	0,82659	866	57	0,53531	1514
14	0,96504	594	36	0,81793	946	58	0,52017	1559
15	0,95910	659	37	0,80847	970	59	0,50458	1604
16	0,95251	664	38	0,79877	992	60	0,48854	1600
17	0,94587	673	39	0,78885	1048	61	0,47254	1556
18	0,93914	691	40	0,77837	1088	62	0,45698	1538
19	0,93223	635	41	0,76749	1140	63	0,44160	1501
20	0,92588	573	42	0,75609	1203	64	0,42659	1413
21	0,92015	577	43	0,74406	1267	65	0,41246	1384
22	0,91438	585	44	0,73139	1397	66	0,39862	

Продолжение табл. А

n	Σ	$\Delta \cdot 10^5$	n	Σ	$\Delta \cdot 10^5$	n	Σ	$\Delta \cdot 10^5$
67	0,38458	1404	76	0,25145	1675	84	0,11507	1780
68	0,37050	1408	77	0,23460	1685	85	0,09687	1820
69	0,35640	1410	78	0,21780	1680	86	0,07846	1841
70	0,34257	1383	79	0,20137	1643	87	0,05956	1890
71	0,32893	1364	80	0,18502	1635	88	0,04034	1922
72	0,31463	1430	81	0,16793	1709	89	0,02058	1976
73	0,29960	1503	82	0,15037	1756	90	0	2058
74	0,28426	1534	83	0,13287	1750	91	-0,02058	2058
75	0,26820	1606						

месте соприкосания имеет постоянное значение P_1 , равное $\frac{0+P}{2}$, и при помощи формул (5) и (7) находим более точное значение для сближения $\alpha = y_1 - y$, а следовательно, и для давления P в конце первого интервала. Для определения давления P в конце второго интервала допустим предварительно, что на протяжении первых двух интервалов давление постоянно и имеет значение, вычисленное раньше для конца первого интервала; тогда для перемещения тела y_1 и для прогиба балки y находим соответствующие значения и легко определяем величины α и P . Более точное значение для P получим, допустив, что на протяжении первого интервала действует давление, равное половине усилия, соответствующего концу первого интервала, а на протяжении второго интервала — давление, равное полусумме давлений в конце первого и второго интервалов. Получив при помощи формул (5) и (7) второе приближение для давления P в конце второго интервала, мы переходим к следующему интервалу и повторяем вычисления в прежнем порядке. Предварительно считаем, что на протяжении второго и третьего интервалов действует постоянное давление, равное вычисленному выше давлению в конце второго интервала, и находим для давления P в конце третьего интервала приближенное значение. Для получения второго приближения исходим из предположения, что на протяжении третьего интервала действует постоянное давление, равное полусумме давлений в конце 2-го и в конце 3-го интервалов и т. д.

§ 3. Примеры

В качестве примера приводим вычисления для балочки, период основных колебаний которой равен $1 \cdot 10^{-3}$ секунды. Осуществить брусок с таким периодом собственных колебаний возможно при различных значениях длины l , нужно только соответственным образом менять размер поперечного сечения. Если мы возьмем стальной брусок (положим для стали $E=2,2 \cdot 10^6$ кг/см² и удельный вес $7,96$ т/м³) квадратного поперечного сечения 1×1 см², то соответствующая длина найдется из формулы для периода основных колебаний:

$$T = \frac{2l^2}{\pi} \sqrt{\frac{q}{EJg}}. \quad (8)$$

Подставляя указанные выше численные значения входящих в формулу (8) величин, найдем для пролета балочки значение $l = 15,35$ см, и соответствующая масса балочки будет равна

$$M = \frac{15,35 \cdot 0,00796}{981}.$$

Предположим, что эту балочку ударяет в середине пролета стальной шарик радиуса $r=1$ см и массы

$$m = \frac{4}{3} \pi \frac{0,00796}{981},$$

движущийся со скоростью $v=1$ см/сек. Первое приближение (1) дает в этом случае для динамического прогиба f_d^* значение $1,18 \cdot 10^{-4}$ см. Второе приближение дает нам

$$f_d^* = 0,702 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$$

Разделим время удара на интервалы продолжительности $\tau = T/180 = 0,05556 \cdot 10^{-4}$ сек, тогда формула (7) напишется так:

$$y = 0,405 \cdot 10^{-3} \left\{ P_1 \sum \frac{\cos \frac{(n-1) i^2 \pi}{90} - \cos \frac{n i^2 \pi}{90}}{i^4} + \right. \\ \left. + P_2 \sum \frac{\cos \frac{(n-2) i^2 \pi}{90} - \cos \frac{(n-1) i^2 \pi}{90}}{i^4} + \dots + P_n \sum \frac{1 - \cos \frac{i^2 \pi}{90}}{i^4} \right\} \text{ см. (a)}$$

Кроме того, задаваясь для стали значением

$$\mu = 9 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2,$$

перепишем (3) в таком виде:

$$P = \frac{16}{9} \mu r^{1/2} \alpha^{3/2} = 16 \cdot 10^5 \alpha^{3/2} \text{ кг.} \quad (\text{в})$$

Уменьшение скорости шарика на протяжении n -го интервала будет определяться из формулы

$$y_n - y_{n-1} = -\frac{P_n \tau}{m} = -P_n \cdot 0,1634 \text{ см/сек.} \quad (\text{с})$$

Пользуясь формулами (а), (б), (с) и переходя последовательно от одного интервала к следующему, мы получим для величин, характеризующих явление удара, значения, приведенные в нижеследующей таблице В.

Таблица В

t/τ	$y_1, \text{ см/сек}$	$10^4 y_1, \text{ см}$	$10^4 y, \text{ см}$	$10^4 \alpha, \text{ см}$	$P, \text{ кг}$	$P_n, \text{ кг}$
0	0	0	0	0	0	0
1	0,9983	0,0555	0,00012	0,0554	0,0209	0,0105
2	0,9918	0,1107	0,00079	0,1099	0,0582	0,0396
3	0,9784	0,1654	0,00197	0,1634	0,1055	0,0818
4	0,9568	0,2192	0,00445	0,2147	0,1590	0,1322
5	0,9262	0,2715	0,00844	0,2631	0,216	0,1875
6	0,8867	0,3218	0,01765	0,3041	0,268	0,242
7	0,8380	0,3697	0,0219	0,3478	0,328	0,298
8	0,7803	0,4146	0,0318	0,3828	0,379	0,353
9	0,7149	0,4561	0,0442	0,4119	0,423	0,401
10	0,6430	0,4938	0,0591	0,4347	0,458	0,440
11	0,5660	0,5273	0,0763	0,4510	0,484	0,471
12	0,4856	0,5565	0,0956	0,4609	0,501	0,492
13	0,4032	0,5812	0,1166	0,4648	0,507	0,504
14	0,3207	0,6013	0,1385	0,4628	0,504	0,505
15	0,2393	0,6169	0,1613	0,4555	0,492	0,498
16	0,1607	0,6273	0,1847	0,4426	0,471	0,482
17	0,0860	0,6341	0,2087	0,4254	0,444	0,457
18	0,0161	0,6369	0,2327	0,4041	0,411	0,428
19	-0,0480	0,6360	0,2576	0,3784	0,372	0,392
20	-0,1055	0,6317	0,2822	0,3493	0,330	0,351
21	-0,1558	0,6244	0,3076	0,3168	0,285	0,308
22	-0,1986	0,6146	0,3332	0,2814	0,239	0,262
23	-0,2341	0,6026	0,3573	0,2453	0,195	0,217
24	-0,2619	0,5888	0,3872	0,2016	0,145	0,170
25	-0,2820	0,5737	0,4160	0,1577	0,100	0,123
26	-0,2951	0,5577	0,4461	0,1114	0,060	0,080
27	-0,3020	0,5411	0,4780	0,0631	0,025	0,042
28	-0,3043	0,5243	0,5107	0,0137	0,003	0,014

На протяжении 29-го интервала прекращается соприкосновение шарика с бруском. Шарик отскакивает со скоростью 0,305 см/сек, прогиб балочки y продолжает возрастать. Для определения макси-

мального прогиба вычислены при помощи формулы (а) еще следующие значения y (таблица С):

Таблица С

t/τ	$10^4 \cdot y, \text{ см}$	T/τ	$10^4 \cdot y, \text{ см}$	t/τ	$10^4 \cdot y, \text{ см}$	T/τ	$10^4 \cdot y, \text{ см}$
36	0,788	56	1,115	54	1,096	58	1,124
45	0,973	57	1,121	55	1,107	59	1,123

Результаты вычислений показаны графически на рис. 2¹⁾. Кривая I дает нам закон нарастания давлений P . Для сравнения на рисунке пунктиром представлена та же кривая для случая удара шара о неподвижную плоскость. Мы видим, что благодаря изгибу

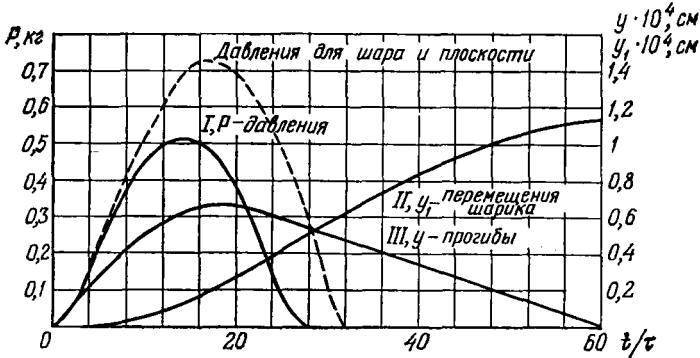


Рис. 2.

балочки давления P уменьшаются и кривая изменения этих давлений делается несимметричной относительно средней ординаты. Продолжительность удара в данном случае также уменьшается и равна примерно $0,155 T$. Кривая II представляет изменения y_1 и, наконец, кривая III дает нам изменения прогиба балки. Максимального значения прогиб достигает при $t=58\tau$, когда $y=1,124 \cdot 10^{-4} \text{ см}$. Сравнение этого результата с ранее приведенными приближенными значениями f'_d и f''_d показывает, что действительный прогиб лишь на 5% меньше того, что дает первое приближение. Второе приближение дает в данном случае менее удовлетворительные результаты. Если принять во внимание живую силу отскочившего шарика — она составляет примерно 9,2% от первоначальной живой силы шарика, — то можно делать заключение, что почти вся оставшаяся кинетическая энергия обратилась в потенциальную энергию изгиба балоч-

¹⁾ На рисунке масштаб искажен.

ки. На долю вибраций, возникающих в балочке, приходится в момент наибольшего прогиба лишь ничтожное количество энергии.

Вычисления для той же балочки и для прежней массы ударяющего груза при условии $r=9$ см, показали, что уменьшение кривизны в месте соприкосновения не влияет заметным образом на величину наибольшего прогиба, но значительно увеличивает давления P и уменьшает продолжительность удара.

В качестве второго примера нами была рассмотрена более гибкая балочка с периодом основных колебаний $T=4 \cdot 10^{-3}$ секунды, для чего был взят стальной брусок прежнего поперечного сечения,

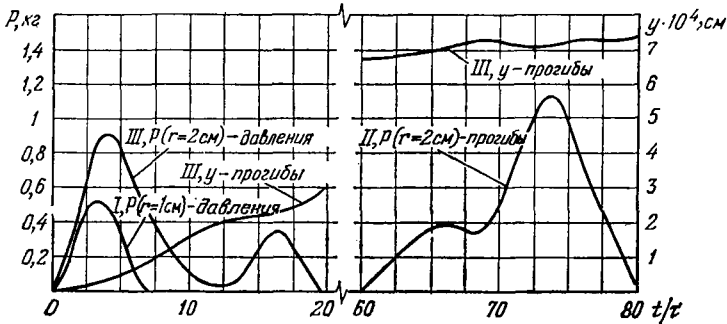


Рис. 3.

но вдвое большей длины. Здесь были произведены вычисления для шариков с радиусами $r_1=1$ см и $r_2=2$ см при $v=1$ см/сек. Оказалось, что явление удара протекает различно в зависимости от соотношения между массой шарика и бруска. В случае меньшего шарика $t : M \approx 0,136$. Нарастание давления происходит совершенно так же, как и в ранее рассмотренном первом примере. На рис. 3 характер изменения P представлен кривой I. Для шарика большего радиуса $t : M = 1,091$ и закон изменения давлений более сложный. На рис. 3 изменение P для этого случая представлено кривой II. Оказывается, что при таком отношении между массами t и M явление распадается на два повторных удара. Как видно из рис. 3, шарик находится в соприкосновении с балкой при изменении t от нуля до 19,5 τ ($\tau = T/180 = (2/9) \cdot 10^{-4}$ сек) и при изменении t от 60 τ до 80 τ . За время первого удара шарик теряет приблизительно 0,8 своей живой силы и после прекращения удара продолжает двигаться за балкой со скоростью, приблизительно равной 0,45 см/сек. После того как балка, достигнув максимального прогиба (около $8 \cdot 10^{-4}$ см), начинает совершать обратное движение, происходит повторный удар, во время которого скорости шарика и среднего сечения балки меняют свои знаки, шарик отскакивает, а прогиб балки в продолжение некоторого времени снова возрастает. Изменение прогиба в момент соприкосновения шарика с балкой представлено на рис. 3 кривой III.

Мы ограничиваемся пока приведенными числовыми примерами. Сделанных вычислений, конечно, недостаточно, чтобы установить какие-либо формулы для расчета балок на удар, но все же они несколько выясняют физическую сторону явления удара и дают возможность сделать некоторые общие заключения.

Приняв во внимание местные деформации при соприкосании ударяющего груза и балки, можно при помощи указанного выше приближенного способа: 1) установить в отдельных частных случаях закон возрастания прогибов балки и закон изменения давлений P ; 2) вычислить время, в продолжение которого груз будет находиться в соприкосновении с балкой; время это будет зависеть от поверхностей соприкосания ударяющихся тел и от соотношения между массами их; в тех случаях, когда масса ударяющего тела не мала по сравнению с массой балки, мы будем иметь явление повторного удара; 3) если удар сопровождается местными остаточными деформациями, то все величины, характеризующие явление удара, могут быть определены тем же приближенным способом, нужно только предварительным статическим сжатием установить зависимость между α и P за пределами упругости.

Что касается точности результатов, получаемых приближенным способом, то она будет зависеть от числа интервалов, на которые мы подразделим время удара, и от точности, с которой будут выполнены промежуточные вычисления. Для первого из приведенных нами примеров повторные вычисления с меньшим числом интервалов ($\tau = (1/12) \cdot 10^{-4}$ сек) дали для давлений P отклонения, не превосходящие 1%. Вообще в тех случаях, когда не приходится иметь дело с повторными ударами, сравнительно небольшое число интервалов дает достаточную для практики точность и вычисление наибольшего прогиба не представляет никаких затруднений. При повторных ударах приходится рассматривать большое число интервалов, сильно возрастает количество вычислений и точность результатов понижается. Некоторые указания на необходимое число интервалов можно получить, применяя приближенный способ вычислений к рассмотрению явления удара шара и плоскости. Случай этот допускает точное решение и позволяет оценить погрешности приближенного способа.

Приводим здесь результаты вычислений для стального шарика радиуса $r=1$ см и плоскости. На основании формулы Г. Герца имеем для продолжительности удара в данном случае значение $T = 1,73 \cdot 10^{-4}$ с; при $v=1$ см/сек, $T = 1,73 \cdot 10^{-4}$ сек.

Дифференциальное уравнение для сближения α напишется так:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -n\alpha^{3/2}, \quad (a)$$

где n для данного частного случая равно $470 \cdot 10^3$.

Вводя новую переменную $z = t \sqrt{n} = 21,68 \cdot 10^4 t$, получим

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2} = -\alpha^{3/2}. \quad (a')$$

Кроме того, в начальный момент (для $z=0$)

$$\alpha = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\alpha}{dz} = \frac{10^{-4}}{21,68}.$$

Заменяя z единицей и пользуясь начальным значением $d\alpha/dz$ и уравнением (а), мы находим α , а следовательно, и $d^2\alpha/dz^2$, для $z=1$.

Таблица D

z	$21,68 \cdot 10^4 \alpha$	$10^8 \alpha^{3/2}$	$10^8 \frac{d^2\alpha}{dz^2}$	$\frac{d\alpha}{dz}$	$P, \text{ кг}$
0	0	0	0	$\alpha_0 = \frac{10^{-4}}{21,68}$	—
1	1	$\frac{1}{100,9}$	$-\frac{1}{100,9}$	—	0,016
2	—	—	—	$0,996\alpha_0$	—
3	2,992	$\frac{1}{19,48}$	$-\frac{1}{19,48}$	—	0,082
4	—	—	—	$0,974\alpha_0$	—
5	4,94	$\frac{1}{9,16}$	$-\frac{1}{9,16}$	—	0,174
6	—	—	—	$0,927\alpha_0$	—
7	6,794	$\frac{1}{5,71}$	$-\frac{1}{5,71}$	—	0,280
8	—	—	—	$0,851\alpha_0$	—
9	8,496	$\frac{1}{4,07}$	$-\frac{1}{4,07}$	—	0,392
10	—	—	—	$0,744\alpha_0$	—
11	9,984	$\frac{1}{3,22}$	$-\frac{1}{3,22}$	—	0,499
12	—	—	—	$0,609\alpha_0$	—
13	11,20	$\frac{1}{2,69}$	$-\frac{1}{2,69}$	—	0,595
14	—	—	—	$0,448\alpha_0$	—
15	12,10	$\frac{1}{2,40}$	$-\frac{1}{2,40}$	—	0,667
16	—	—	—	$0,267\alpha_0$	—
17	12,63	$\frac{1}{2,25}$	$-\frac{1}{2,25}$	—	0,709
18	—	—	—	$0,074\alpha_0$	—
19	12,78	$\frac{1}{2,21}$	$-\frac{1}{2,21}$	—	0,725
20	—	—	—	$-0,122\alpha_0$	—

После этого определяется значение $d\alpha/dz$ для $z=2$ и т. д. Порядок вычислений ясно виден из прилагаемой таблицы С.

Путем линейного интерполирования находим, что $d\alpha/dz$ обращается в нуль для $z=18,76$. Это соответствует продолжительности удара

$$T = \frac{2 \cdot 18,76}{21,68} \cdot 10^{-4} = 1,73 \cdot 10^{-4} \text{ сек.}$$

Результат совпадает с тем, что выше было найдено при помощи формулы Г. Герца. Производя вычисления приближенным способом (табл. D), мы получаем не только продолжительность удара, но также и изменение величин α , $d\alpha/dz$ и P , характеризующих удар, в зависимости от z , а следовательно, и от t .

ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ В ПАРОВЫХ ТУРБИНАХ ¹⁾

Вестник общества технологов, 1912, том 19, № 7, стр. 266—279. Отдельный оттиск, С.-Петербург, «Строитель», 1912, 46 стр.

В современной технике и, в частности, в современном машиностроении особенно характерным является все возрастающее значение научного исследования при решении различного рода технических вопросов. Путь чистого эмпиризма, когда типы машин, формы и размеры конструкций менялись на основании данных практики, постепенно уступает место научным методам; роль предварительных теоретических расчетов и научно поставленных лабораторных исследований все возрастает.

Область паровых турбин представляет, пожалуй, наиболее блестящий пример того, каких успехов может достигнуть техника, если она выходит за пределы грубого эмпиризма и строит свои расчеты на научных основах.

За небольшой сравнительно промежуток времени было создано в этой области большое разнообразие типов турбин, причем указаний практики обыкновенно бывало недостаточно для оценки форм и размеров элементов турбины, нужно было заранее предвидеть условия работы проектируемых частей, нужно было назначить размеры на основании теоретических расчетов.

Конечно, для паровых турбин наиболее существенную роль играют расчеты термодинамические, но при некоторых условиях, в особенности для турбин с большими скоростями, вопросы прочности могут иметь первостепенное значение и прочность применяемых материалов может установить известные предельные размеры и предельные значения скоростей.

Пожалуй, ни в одной области машиностроения мы не встретили большего разнообразия задач сопротивления материалов, как в паровых турбинах. Здесь имеются примеры весьма интересных и до сих пор мало разработанных задач статики, например, все вопросы о прочности пластинок и оболочек, подвергающихся действию статически приложенного давления пара.

Большой интерес представляют также вопросы, связанные с температурными напряжениями. Благодаря неравномерному нагреванию эти напряжения могут достигать большой величины и приобретают практическое значение, с ними приходится считаться при выработке форм турбинных конструкций.

¹⁾ Лекции, читанные в Собрании общества технологов.

Но наиболее интересными и своеобразными задачами при расчете на прочность турбинных конструкций являются задачи динамики. Благодаря большим скоростям, с которыми здесь приходится иметь дело, силы инерции движущихся частей приобретают огромное значение, и вибрации, которые при некоторых условиях возникают, могут совершенно нарушить условия правильной работы машины.

Задачи динамики, которым и будет главным образом посвящен наш доклад, мы разделим на два класса. В первой категории задач при определении динамических напряжений приходится принимать во внимание лишь силы инерции движущихся частей и можно оставлять без рассмотрения те деформации, которые эти силы вызывают. Это так называемые *задачи кинестатические*. Сюда относятся вопросы о прочности быстро вращающегося кольца или барабана, а также расчет лопаток и быстро вращающихся турбинных дисков.

Ко второму классу задач отнесем те вопросы, где существенную роль играют деформации движущихся частей. Наибольшее практическое значение имеет здесь задача о поперечных колебаниях вала и связанный с ней вопрос о критической угловой скорости.

В дальнейшем изложении будем предполагать, что материалы, из которых изготовляют турбинные части, идеально упруги, изотропны и следуют в точности закону Гука, т. е. в пределах упругости деформации и перемещения пропорциональны усилиям. Эти общие предположения с большой точностью приложимы к таким совершенным материалам, как сталь, употребляемая для изготовления наиболее ответственных частей турбины.

§ 1. Расчет быстро вращающегося кольца

Если кольцо быстро вращается относительно оси O (рис. 1), перпендикулярной плоскости рисунка, то силы инерции вызовут в нем значительные растягивающие усилия. Чтобы судить о том, какой величины достигают силы инерции при больших скоростях, приведем такой пример.

Пример. Груз весом $0,1$ кг прикреплен на расстоянии 38 см от оси вращения и движется со скоростью 420 м/сек. (О таких скоростях приходится думать в турбинах Лаваля). Появляющаяся

при этом центробежная сила будет равна $Q = \frac{0,1 \cdot 420^2}{9,81 \cdot 0,38} \approx 5$ т и, следовательно, в $50\,000$ раз превосходит силу тяжести движущегося груза. Возвращаясь к расчету вращающегося кольца, определим прежде всего величину усилия T растягивающегося кольца, для чего напишем уравнение равновесия для верхней половины кольца. Проектируя все силы, приложенные к этой части, на вертикальную

ось, найдем

$$\frac{q}{g} \frac{v^2}{r} 2r = 2T, \quad \text{откуда} \quad T = \frac{qv^2}{g}.$$

Здесь через q обозначен вес единицы длины обода кольца, через r — радиус кольца и через v — его окружная скорость.

Обозначая через γ вес единицы объема материала, из которого изготовлено кольцо, и разделяя растягивающее усилие T на площадь поперечного сечения кольца, найдем величину соответствующего растягивающего напряжения:

$$p = \frac{T}{F} = \frac{\gamma v^2}{g}. \quad (1)$$

Таким образом, напряжения вполне определяются величиной окружной скорости и удельным весом материала. Величины напряжений

в случае стального кольца приведены в нижеследующей таблице:

v , м/сек	25	50	100	150	200	400
p , кг/см ²	50	200	800	1800	3200	12 800

Из таблицы мы видим, что при скоростях, больших 100 м/сек, напряжение уже больше того, что обычно допускается для железа, и при повышении скорости приходится применять более прочные материалы, например никелевую сталь.

Формула, выведенная нами для расчета кольца, может быть применена и к расчету турбинных барабанов. Вырезая двумя сечениями, перпендикулярными оси барабана, элементарное кольцо, шириной (в направлении оси барабана) 1 см, можем применить к нему все предыдущие выводы. Если через δ обозначим толщину барабана и через q_1 — вес лопаток, приходящийся на 1 см² поверхности барабана, то формула (1) для расчета растягивающего напряжения барабана представится в таком виде:

$$p = \frac{v^2}{g} \left(\gamma + \frac{q_1}{\delta} \frac{r_1}{r} \right). \quad (1')$$

Здесь через r_1 обозначен радиус, соответствующий центру тяжести лопатки. Задаваясь величиной допускаемого напряжения, мы из (1') можем найти необходимую величину δ .

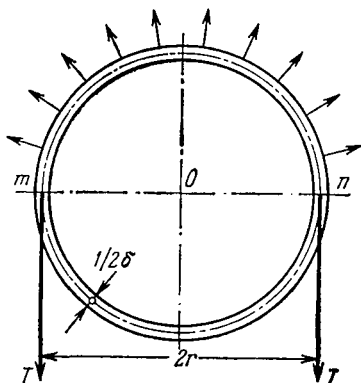


Рис. 1.

§ 2. Расчет лопаток

При расчете лопаток, как и в случае вращающегося кольца, приходится принимать во внимание лишь силы инерции, вызывающие главным образом продольные растягивающие усилия. Наибольшая растягивающая сила будет соответствовать месту закрепления лопатки, и величина этой силы определится, как легко доказать, такой формулой:

$$T = \frac{\gamma F l \omega^2 r_1^3}{g r_1}.$$

Здесь F — площадь поперечного сечения лопатки; l — ее длина; ω — угловая скорость вращения и r_1 — радиус, соответствующий центру тяжести лопатки. Разделяя растягивающую силу на площадь поперечного сечения и вводя для окружной скорости на поверхности барабана или диска прежнее обозначение $v = \omega r$, получим для наибольших растягивающих напряжений в лопатке выражение

$$p = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{l}{r} \frac{r_1}{r}. \quad (2)$$

Так как длина l обычно составляет лишь небольшую часть r , то напряжения в лопатке, определяемые по формуле (2), значительно меньше того, что получается для стенки барабана.

При расчете лопаток по формуле (2) и при оценке их прочности нужно иметь в виду, что мы предположили при наших выводах лопатку призматической. При отклонениях от этой формы силы инерции будут вызывать не только растяжение, но и изгиб лопатки. Кроме того, отклонения от призматической

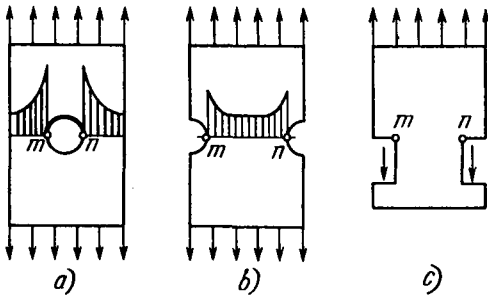


Рис. 2.

ской формы влекут за собой неравномерное распределение растягивающих напряжений по плоскости поперечного сечения лопатки. Чтобы судить о тех отклонениях от равномерного распределения напряжений, которые возникают при растяжении брусков переменного сечения, приведем два примера, представленных на рис. 2, а и рис. 2, б.

В случае круглого отверстия посередине растягиваемой полосы (рис. 2, а) распределение напряжений по сечению, проходящему через центр отверстия, может быть представлено заштрихованной площадью. Наибольшие напряжения соответствуют точкам m и n —

концам горизонтального диаметра отверстия. При малом диаметре отверстия напряжения в этих точках в три раза превосходят среднее значение напряжений, которые мы получили бы, предположив равномерное распределение растягивающих усилий. При ослаблении растягиваемого бруска выкружками у краев (рис. 2, *b*), наиболее напряженными будут точки *m* и *n*, здесь напряжения в два раза превосходят среднее значение растягивающих напряжений. В случае резкого изменения сечения (рис. 2, *c*), имеющего место при укреплении турбинной лопатки, распределение напряжений еще больше отклоняется от равномерного. В точках *m* и *n*, соответствующих вершинам входящих углов, мы получим при теоретических расчетах бесконечные напряжения.

Это указывает на то, что в точках *m* и *n* материал должен выйти за пределы упругости и получить некоторые остаточные деформации. В случае пластических материалов, способных получать до разрушения значительные удлинения, остаточные деформации в перенапряженных местах не представляют опасности, они повлекут за собой более равномерное распределение напряжений по сечению *mn*. Это свойство пластических материалов — выравнять распределение напряжений в случае резких изменений в поперечных размерах брусков — особенно ценно, и при проектировании таких конструкций, как турбинные лопатки, нужно обращать особое внимание на то, чтобы применяемый материал был способен получать значительные деформации и чтобы его пластические свойства не исчезали при тех температурах, которые мы имеем в паровых турбинах.

§ 3. Расчет турбинных дисков

Более сложную задачу мы будем иметь при определении напряжений в быстро вращающемся диске. Если из такого диска двумя цилиндрическими поверхностями радиусов ρ и $\rho + d\rho$ (рис. 3) выделить элементарное кольцо, то напряжения, возникающие в нем при вращении, обусловлены не только силами инерции, действующими на массу кольца, но также и усилиями, возникающими по поверхностям соприкосновения выделенного кольца с соседними частями диска. Если взять элемент кольца, заштрихованный на рисунке, то на него будут действовать не только растягивающие напряжения p_t , стремящиеся разорвать кольцо, но также и напряжения p_r , имеющие радиальное направление.

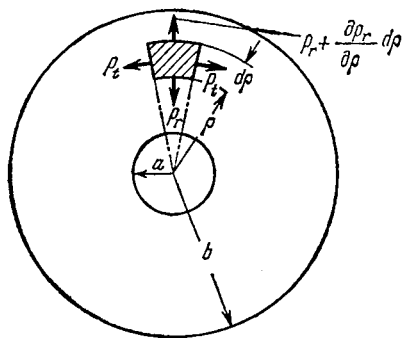


Рис. 3.

Точно вопрос о распределении напряжений во вращающихся дисках разрешен лишь для случая дисков, имеющих форму эллипсоида вращения и для дисков весьма малой постоянной толщины. Но мы можем получить приближенные решения также и для дисков

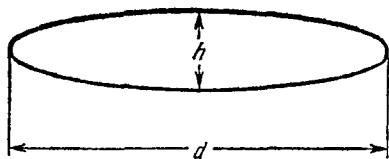


Рис. 4.

других форм, если сделаем некоторые допущения. О степени точности таких приближенных решений можно будет судить на основе сравнений с точными решениями. В основу приближенных решений кладется предположение, что растягивающие напряжения p_r и p_t равномерно распределяются по толщине диска и, следовательно, зависят только от расстояния ρ до центра диска. Это допущение тем ближе к действительности, чем меньше толщина диска по сравнению с его радиусом. Так, например, для диска, имеющего форму эллипсоида вращения (рис. 4), напряжения в точках, лежащих на оси вращения, неодинаковы, и отношение наибольшего из этих напряжений к наименьшему значению напряжений по толщине диска так изменяется с изменением отношения h/d :

$\frac{h}{d}$	0	1/8	1/4	1/2
максимальное напряжение минимальное напряжение	1	1,05	1,15	1,83

Следовательно, при толщине диска, меньшей $1/8 d$, мы с большой точностью можем полагать, что напряжения в диске распределяются равномерно по толщине и даже для сравнительно толстых дисков, у которых $h/d \leq 1/4$, отклонение наибольшего и наименьшего напряжений от среднего значения напряжений по толщине диска не превосходит 7,5%. Исследования проф. А. Стодолы показали ¹⁾, что и для других форм дисков приближенное решение, основанное на высказанных выше допущениях, дает вполне удовлетворительные результаты.

Найдем теперь выражения для напряжений p_r и p_t в некоторых частных случаях. Пусть $ABCD$ (рис. 5) представляет в увеличенном масштабе элемент диска, заштрихованный на рис. 3.

¹⁾ Stodola A. Die Nebenspannungen in rasch umlaufenden Scheibenrädern. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1907, Bd 51, № 32, SS. 1269--1274.

Если через y обозначим переменную толщину диска, то объем элемента будет

$$dv = \rho y d\varphi dr,$$

и действующая на него центробежная сила равна

$$\frac{\gamma}{g} \rho^2 d\varphi dr y \omega^2.$$

Кроме центробежной силы на элемент $ABCD$ будут действовать усилия, распределенные по поверхности. По граням AD и BC будут действовать в радиальном направлении усилия

$$p_r \rho d\varphi y,$$

$$p_{r,\rho} d\varphi y + \frac{\partial (p_r \rho y)}{\partial \rho} dr d\varphi.$$

По граням AB и CD действуют усилия

$$p_t dr y.$$

Проектируя все силы, приложенные к элементу, на направление радиуса, получим

$$\frac{d(p_t \rho y)}{d\rho} dr d\varphi - p_t y dr d\varphi + \frac{\gamma}{g} \rho^2 d\varphi dr \omega^2 = 0,$$

или

$$\frac{d(p_t \rho y)}{d\rho} - p_t y + \frac{\gamma}{g} \omega^2 \rho^2 y = 0. \quad (3)$$

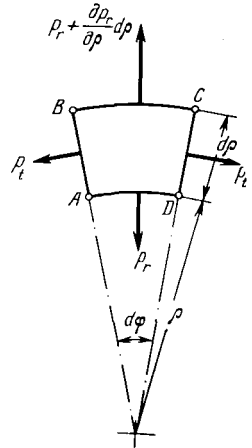


Рис. 5.

В полученное уравнение входят две неизвестные величины p_r и p_t , но эти величины не независимы. В самом деле, деформация диска, а следовательно, и его напряженное состояние будут вполне определены, если мы будем знать радиальное перемещение ξ каждой точки диска. При сделанных ранее предположениях ξ , очевидно, будет функцией только ρ . Для выделенного элемента (рис. 5) удлинение в радиальном направлении, очевидно, будет равно $e_r = d\xi/d\rho$; по направлению касательной удлинение представится формулой $e_t = \xi/\rho$, и напряжения p_r и p_t мы выразим через одну переменную ξ , пользуясь известными соотношениями между деформациями и напряжениями [σ —коэффициент Пуассона]

$$e_r = \frac{p_r}{E} - \sigma \frac{p_t}{E},$$

$$e_t = \frac{p_t}{E} - \sigma \frac{p_r}{E}.$$

Вставляя значения p_r и p_t в уравнение (3), получим

$$\frac{d^2\xi}{d\rho^2} + \left(\frac{d \ln y}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \right) \frac{d\xi}{d\rho} + \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{d \ln y}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) \xi + A\rho = 0, \quad (4)$$

где

$$A = \frac{(1 - \sigma^2) \gamma \omega^2}{Eg}.$$

Таким образом, вопрос о расчете турбинных дисков сводится к интегрированию дифференциального уравнения (4).

Найдя из него ξ , мы определим величину напряжений, пользуясь известными соотношениями

$$p_r = \frac{E}{1 - \sigma^2} (e_r + \sigma e_t) = \frac{E}{1 - \sigma^2} \left(\frac{d\xi}{d\rho} + \sigma \frac{\xi}{\rho} \right),$$

$$p_t = \frac{E}{1 - \sigma^2} (e_t + \sigma e_r) = \frac{E}{1 - \sigma^2} \left(\frac{\xi}{\rho} + \sigma \frac{d\xi}{d\rho} \right).$$

§ 4. Диск постоянной толщины

Особенно просто решается уравнение (4) в случае диска постоянной толщины. Полагая $y = \text{const}$, получим

$$\frac{d^2\xi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\xi}{d\rho} - \frac{\xi}{\rho^2} + A\rho = 0. \quad (5)$$

Общий интеграл этого уравнения будет

$$\xi = -\frac{A\rho^3}{8} + \frac{C_1\rho}{2} + \frac{C_2}{\rho}, \quad (6)$$

и напряжения p_r и p_t представятся в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \frac{E}{1 - \sigma^2} \left[-\frac{(3 + \sigma) A\rho^2}{8} + \frac{(1 + \sigma) C_1}{2} - \frac{(1 - \sigma) C_2}{\rho^2} \right], \\ p_t &= \frac{E}{1 - \sigma^2} \left[-\frac{(1 + 3\sigma) A\rho^2}{8} + \frac{(1 + \sigma) C_1}{2} + \frac{(1 - \sigma) C_2}{\rho^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 должны быть определены из условий на контуре диска. В случае сплошного диска перемещение ξ в центре $\rho = 0$ должно обращаться в нуль, следовательно, на основании (6), $C_2 = 0$. Величина C_1 определится из условия на наружном контуре $\rho = b$. Если по наружному контуру диска не приложено никаких усилий, то

$$p_r = 0 \quad \text{при} \quad \rho = b.$$

Пользуясь первым из выражений (7), найдем

$$C_1 = \frac{3 + \sigma}{1 + \sigma} \frac{A b^2}{4},$$

и выражения для напряжений окончательно представятся в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\sigma}{8} \left(1 - \frac{\rho^2}{b^2} \right), \\ p_t &= \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\sigma}{8} \left(1 - \frac{1+3\sigma}{3+\sigma} \frac{\rho^2}{b^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Здесь через v обозначена скорость на окружности диска. Наибольшие напряжения имеют место в центре диска, где

$$p_r = p_t = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\sigma}{8}.$$

Сравнивая этот результат с формулой (1), заключаем, что максимальные напряжения в случае сплошного диска составляют примерно 0,4 от того, что мы имели бы для кольца, вращающегося с той же окружной скоростью, что и диск.

В случае диска с отверстием в центре произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из условий на внутреннем и наружном контурах. Если эти контуры свободны от усилий, то $p_r=0$ при $\rho=a$ и $\rho=b$, где a и b — внутренний и наружный радиусы диска. Пользуясь первым из выражений (7), найдем в данном случае

$$C_1 = \frac{(3+\sigma)(a^2+b^2)}{4(1+\sigma)} A, \quad C_2 = \frac{(3+\sigma)a^2b^2}{8(1-\sigma)} A.$$

Подставляя значения произвольных постоянных в выражения (7) и вводя для сокращения обозначения $\frac{a}{b} = \alpha$, $\frac{\rho}{b} = \varphi$, получим

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\sigma}{8} \left(1 + \alpha - \varphi^2 - \frac{\alpha^2}{\varphi^2} \right), \\ p_t &= \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\sigma}{8} \left(1 + \alpha^3 - \frac{1+3\sigma}{3+\sigma} \varphi^2 + \frac{\alpha^2}{\varphi^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Следовательно, для дисков с отверстием внутри $p_t > p_r$ и наибольшее напряжение имеет место по внутреннему контуру, где

$$p_t = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\sigma}{4} \left(1 + \frac{1-\sigma}{3+\sigma} \alpha^2 \right). \quad (10)$$

Полагая $\sigma=0,3$, найдем, что при изменении α величина $p_{t\max}$ колеблется в пределах от 0,825 ($\gamma v^2/g$) до $\gamma v^2/g$.

Самое незначительное отверстие в центре диска обуславливает появление по краям отверстия напряжений, вдвое больших тех, которые были получены для сплошного диска. Мы здесь встречаемся опять с таким же явлением местного перенапряжения материала, как и в ранее рассмотренном случае растяжения полосы, ослабленной отверстием.

В качестве примера на рис. 6 представлено распределение напряжений для диска диаметром 0,914 м при 3000 оборотах в минуту. Полагая $\gamma = 0,0078 \text{ кг/см}^3$, найдем $\gamma v^2/g \approx 1650 \text{ кг/см}^2$.

Откладывая по оси x величину напряжений и по оси ρ расстояния рассматриваемой точки от центра диска, получим для диска без отверстия линии, указанные на рисунке сплошной чертой, представляющие изменение p_r и p_t в зависимости от ρ . Пунктирные линии дают представление о распределении напряжений в случае диска с

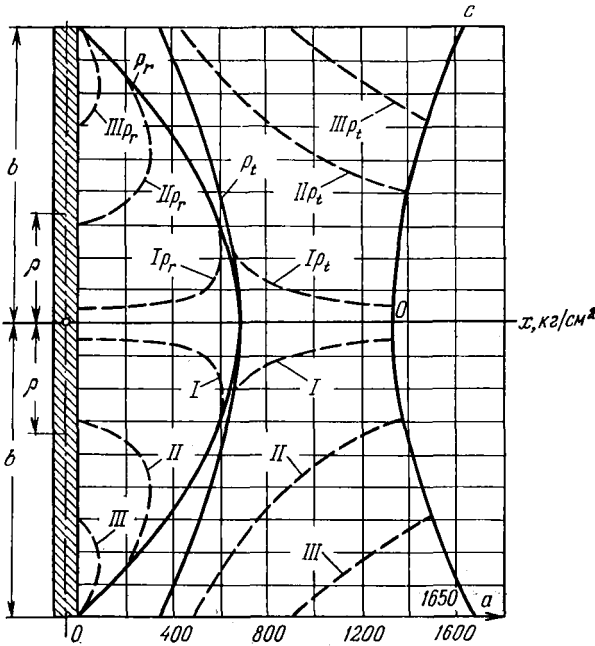


Рис. 6.

отверстием. При этом линии с номерами I, II и III относятся соответственно к дискам, у которых диаметр внутреннего отверстия составляет $1/18$, $1/3$ и $2/3$ от наружного диаметра. В первом случае ясно видно резкое возрастание напряжений у краев отверстия.

При определении произвольных постоянных C_1 и C_2 мы исходили из предположения, что наружный и внутренний контуры свободны от усилий. В действительности к наружному контуру приложены усилия от центробежной силы, действующей на лопатки, по внутреннему контуру действуют напряжения, соответствующие месту сопряжения диска и втулки, и полные напряжения в диске составятся из трех элементов: 1) из напряжений, вычисленных по формулам (9); 2) из напряжений, соответствующих усилиям по наружному

контур, и 3) из напряжений, обусловленных усилиями по внутреннему контуру. Последние два элемента определяются по известным формулам Габриэля Ламэ ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} p_t &= \frac{-a^2 p_B + b^2 p_H}{b^2 - a^2} + \frac{(-p_B + p_H) a^2 b^2}{\rho^2 (b^2 - a^2)}, \\ p_r &= \frac{-a^2 p_B + b^2 p_H}{b^2 - a^2} - \frac{(-p_B + p_H) a^2 b^2}{\rho^2 (b^2 - a^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Здесь через p_B и p_H обозначены напряжения, действующие по внутреннему и наружному контурам диска.

§ 5. Диск равного сопротивления

В только что рассмотренном примере диска постоянной толщины напряжения p_r и p_t распределяются по диску далеко не равномерно — наиболее напряженной является внутренняя часть диска. Часть диска у наружного контура менее напряжена, и здесь без ущерба для прочности толщина диска может быть уменьшена. Задача о том, по какому закону нужно менять толщину диска, чтобы получить равномерное распределение напряжений и осуществить таким образом форму равного сопротивления, легко решается при помощи основного уравнения (3). Полагая, что напряжения p_r и p_t по всему диску равны между собой и равны допускаемому напряжению R , получим из уравнения (3)

$$Ry + R\rho \frac{dy}{d\rho} - Ry + \frac{\gamma\omega^2}{g} \rho^2 y = 0,$$

откуда

$$y = y_0 e^{-\frac{\gamma\omega^2}{gR} \frac{\rho^2}{2b^2}}. \quad (12)$$

Здесь через y_0 обозначена толщина диска в центре. При проектировании обыкновенно задаются толщиной диска у наружного контура на основании конструктивных соображений, тогда формула (12) дает возможность вычислить толщину диска для любого ρ . Толщина будет получаться тем большей, чем меньше допускаемое напряжение R положено в основание расчета.

Чтобы в диске равного сопротивления везде получались напряжения, равные R , необходимо и по наружному контуру приложить такие же напряжения. На практике этого достигают следующим образом; среднюю часть диска, имеющую форму равного сопротивления, окружают более широким ободом (рис. 7), на котором прикрепляют лопадки турбины. Поперечные размеры обода подбирают так, чтобы увеличение диаметра внутренней части диска, имеющей

¹⁾ [L a m é G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris, Bachelier, 1852, 335 p. См. p. 216.]

форму равного сопротивления, как раз равнялось расширению обода при условии, что по поверхности соприкосновения этих частей действуют напряжения R . Так как напряжения во всех точках диска равного сопротивления одинаковы, то будут одинаковы и относительные удлинения. Величина их определится формулой

$$e_r = e_t = \frac{(1-\sigma)R}{E}.$$

Увеличение наружного радиуса диска равного сопротивления будет равно

$$\Delta b = \frac{(1-\sigma)R}{E} b. \quad (13)$$

При вычислении расширения обода примем во внимание, что на каждую единицу длины обода приходится радиальное усилие, равное

$$q = \frac{ay_2\gamma}{g} \omega^2 b_1 - Ry_1 \frac{b}{b_1}.$$

Увеличение внутреннего радиуса обода определится, как для кольца, по формуле

$$\Delta b = \frac{qb_1}{ay_2} \frac{b}{E}.$$

Приравняв это выражению (13), получим уравнение, в которое будут входить поперечные размеры обода a и y_2 , а также величина y_1 . Задавая двумя из этих

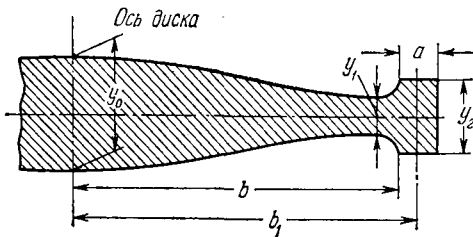


Рис. 7.

величин на основании конструктивных соображений, мы получим для третьей величины вполне определенное значение. Этого значения и нужно будет придерживаться при проектировании, если желательно, чтобы внутренняя часть диска находилась в условиях диска равного сопротивления.

В качестве численного примера рассмотрим такой случай. Требуется рассчитать диск равного сопротивления из никелевой стали для турбины, делающей 3000 оборотов в минуту. Радиус $b=1$ м. Толщину диска y_1 у наружного края примем равной 1,5 см и допустим напряжение $R=2000$ кг/см², тогда толщина в центре определится

по формуле (12)

$$y_0 : y_1 = 1 : e^{-\frac{\gamma v^2}{2gR}} = 7,11,$$

следовательно, $y_0 = 1,5 \cdot 7,11 \approx 10,7$ см.

Ширину обода примем равной 8 см и допустим, что от лопаток на 1 см² поверхности по наружной окружности обода приходится усилие 78,5 кг, тогда толщина обода найдется ранее указанным способом и будет равна $a = 4,6$ см.

§ 6. Приближенные методы расчета дисков

Интегрирование уравнения (4) в замкнутой форме удается лишь в некоторых частных случаях. Кроме дисков постоянной толщины и дисков равного сопротивления, рассмотренных выше, без затруднений могут быть рассчитаны еще диски гиперболического профиля¹⁾, когда

$$y = cx^{-\alpha}.$$

Меняя в этом выражении величину α , можно получить ряд профилей, имеющих практическое значение. В общем случае при решении уравнения (4) приходится пользоваться приближенными графическим или вычислительным методами. Графический метод, предложенный профессором А. Стодола²⁾, заключается в том, что заранее графически задаются величиной ξ в виде функции от ρ . При этом функцию эту выбирают так, чтобы были выполнены условия на внутреннем и наружном контурах [см. формулы (А), § 3]. После этого уравнение (4), которое может быть представлено в таком виде:

$$\left(\xi'' + \frac{\xi'}{\rho} - \frac{\xi}{\rho^2} + A\rho \right) + \frac{y'}{y} \left(\xi' + \sigma \frac{\xi}{\rho} \right) = 0, \quad (14)$$

дает возможность вычислить y , т. е. подобрать ту форму диска, которой соответствует принятый заранее вид деформации. Повторными расчетами можно для ξ подобрать такое выражение, чтобы форма диска по возможности ближе подходила к форме диска равного сопротивления. Такой способ расчета не дает возможности определить напряжения в случае диска, форма которого задана наперед.

Для решения задач этого рода можно воспользоваться вычислительным методом, для чего придется от дифференциального уравнения (4) перейти к уравнению в конечных разностях. Предпо-

¹⁾ См. S t o d o l a А. Die Dampfturbinen. Mit einem Anhang über die Aussichten der Wärmekraftmaschinen und über die Gasturbine. 4 Auflage, Berlin, J. Springer, 1910, 708 S. См. S. 254.

²⁾ S t o d o l a А. См. стр. 255 его книги, упомянутой выше.

жим сначала, что нам заданы значения $\xi = \xi_a$ и $\xi' = \xi'_a$ на одном из контуров диска, например, на внутреннем контуре, тогда, подставляя эти значения в уравнение (4), мы сможем найти ξ''_a . Имея эти величины, легко найти значения ξ_1 и ξ'_1 для точки, отстоящей от контура на малую величину $\Delta\rho$, при помощи формул

$$\begin{aligned} \Delta\xi'_a &= \xi''_a \Delta\rho, & \Delta\xi_a &= \xi''_a \Delta\rho, \\ \xi'_1 &= \xi'_a + \Delta\xi'_a & \text{и} & & \xi_1 &= \xi_a + \Delta\xi_a. \end{aligned}$$

Определив ξ_1 и ξ'_1 , мы путем подстановки этих величин в уравнение (4) найдем ξ''_1 и дальше, повторяя вычисления в прежнем порядке, сможем найти приращения $\Delta\xi_1$ и $\Delta\xi'_1$ для следующего интервала. Вместе с этим находятся величины

$$\xi'_2 = \xi'_1 + \Delta\xi'_1 \quad \text{и} \quad \xi_2 = \xi_1 + \Delta\xi_1,$$

а, следовательно, при помощи (4) и величина ξ''_2 . Повторяя эти вычисления для каждого последующего интервала, мы в заключение достигнем наружного контура диска и получим все промежуточные значения для ξ и ξ' . Имея эти величины, легко вычислить соответствующие значения напряжений. Чтобы судить о степени точности подобного расчета, мы приводим результаты, полученные нами для диска постоянной толщины, внутренний радиус которого $a=5$ см и наружный $b=30$ см.

Разделив соответствующее уравнение (5) на A и задавшись, например, величинами $\xi_a/A=1000$ и $\xi'_a/A=100$, мы находим

$$\frac{\xi''_a}{A} = 15.$$

Переходя теперь от $\rho=5$ см к $\rho=5,5$ см, найдем

$$\frac{\xi'_1}{A} = \frac{\xi'_a}{A} + 0,5 \frac{\xi''_a}{A} = 107,5, \quad \frac{\xi_1}{A} = \frac{\xi_a}{A} + 0,5 \frac{\xi''_a}{A} = 1050.$$

Подставляя это в уравнение (5), найдем

$$\xi''_1/A = 9,66.$$

Ввиду быстрого изменения величины ξ''/A мы, для повышения точности дальнейших вычислений, повторяем расчет по такой схеме:

$$\begin{aligned} \frac{\xi'_1}{A} &= 100 + 0,5 \frac{15 + 9,66}{2} = 106,2, \\ \frac{\xi_1}{A} &= 1000 + 0,5 \frac{100 + 106,2}{2} = 1053, \end{aligned}$$

тогда получим $\xi''_1/A = 10$.

Установив, таким образом, значения ξ/A , ξ'/A и ξ''/A для $\rho=5$ см и $\rho=5,5$ см, мы определяем эти величины для $\rho=6$ см, при-

чем пользуемся в дальнейшем такой схемой вычислений:

$$\frac{\xi'_2}{A} = \frac{\xi'_a}{A} + 1 \frac{\xi''_1}{A} = 100 + 10 = 110,$$

$$\frac{\xi_2}{A} = \frac{\xi_a}{A} + 1 \frac{\xi'_1}{A} = 1000 + 106,2 = 1106,2.$$

Числа, полученные по этой схеме для дальнейших интервалов, приведены в нижеследующей таблице А.

Таблица А

$\rho, \text{ см}$	ξ/A	ξ'/A	ξ''/A	$\rho, \text{ см}$	ξ/A	ξ'/A	ξ''/A
5	1000	100,0	15,0	16	2061	55,5	-11,42
5,5	1053	106,2	10,0	17	2112	43,5	-12,25
6	1106	110,0	6,39	18	2148	31,0	-13,09
6,5	1163	112,6	3,71	19	2174	17,3	-13,89
7	1219	113,7	1,64	20	2183	3,2	-14,70
7,5	1277	114,2	-0,03	21	2180	-12,1	-15,48
8	1333	113,7	-1,38	22	2159	-27,8	-16,28
8,5	1391	112,8	-2,52	23	2124	-44,6	-17,04
9	1446	111,2	-3,51	24	2070	-61,9	-17,83
9,5	1502	109,3	-4,36	25	2000	-80,3	-18,59
10	1555	106,8	-5,13	26	1909	-99,1	-19,37
11	1660	100,9	-6,45	27	1802	-119,0	-20,12
12	1757	93,9	-7,63	28	1671	-139,3	-20,29
13	1848	85,6	-8,66	29	1523	-160,8	-21,65
14	1928	76,6	-9,63	30	1349	-182,6	
15	2001	66,3	-50,53				

Для сравнения приводим значения величин ξ/A и ξ'/A для нескольких точек диска, вычисленные при помощи общего интеграла (6). Для принятых нами начальных значений ξ_a/A и ξ'_a/A найдем $C_1/A=312,5$ и $C_2/A=1171,9$, следовательно, можно составить таблицу В.

Таблица В

$\rho, \text{ см}$	5	6	7	10	15	20	25	30
$\frac{\xi}{A} = -\frac{\rho^3}{8} + 312,5 \frac{\rho}{2} + \frac{1171,9}{\rho}$	1000	1106	1218	1555	2000	2184	2000	1252
$\frac{\xi'}{A} = -\frac{3}{8}\rho^2 + \frac{312,5}{2} - \frac{1171,9}{\rho^2}$	100	110,2	114	107	66,7	3,32	-79,9	-182,6

Сравнивая это с числами предыдущей страницы, заключаем, что точность результатов, полученных вычислительным методом, вполне достаточна для практических приложений.

При вычислении мы исходили из предположения, что на внутреннем контуре нам известны значения ξ_a и ξ'_a . Обычно приходится иметь дело с более сложным случаем, именно, рассчитывать диск в предположении заданного значения напряжений p_r по внутреннему и наружному контурам. В таком случае нам будет известна только величина

$$\frac{d\xi}{d\rho} + \sigma \frac{\xi}{\rho}$$

при $\rho = a$ и $\rho = b$, и мы не сможем вести вычисления по прежней схеме.

Необходимо предварительно определить величины ξ_a и ξ'_a , что может быть выполнено на основании следующих соображений. Представим общий интеграл уравнения (4) в таком виде:

$$\xi = \xi_a \varphi(\rho) + \xi'_a \psi(\rho) + \theta(\rho),$$

где φ , ψ и θ — неизвестные нам функции от ρ . Тогда

$$\xi' = \xi_a \varphi'(\rho) + \xi'_a \psi'(\rho) + \theta'(\rho).$$

Взяв для ξ_a и ξ'_a произвольные значения m и n , мы найдем величины ξ и ξ' для любой точки диска ранее указанным способом.

Пусть p и q — значения этих величин для наружного контура диска, тогда будем иметь

$$\left. \begin{aligned} m\varphi(b) + n\psi(b) + \theta(b) &= p, \\ m\varphi'(b) + n\psi'(b) + \theta'(b) &= q. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Получаем два уравнения, в которые входят шесть неизвестных величин: $\varphi(b)$, $\psi(b)$, . . . , $\theta'(b)$. Изменяя значения m и n и повторяя вычисления три раза, мы сможем получить число уравнений, достаточное для определения величин $\varphi(b)$, $\psi(b)$, . . . , $\theta'(b)$.

Пусть a , b , c , a' , b' и c' — соответствующие значения этих величин, тогда действительные значения ξ_b и ξ'_b представляются так:

$$\left. \begin{aligned} \xi_b &= \xi_a a + \xi'_a b + c, \\ \xi'_b &= \xi_a a' + \xi'_a b' + c'. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Если к этим уравнениям присоединить соотношения между ξ_a и ξ'_a на внутреннем контуре и между ξ_b и ξ'_b на наружном контуре, то мы будем иметь достаточно уравнений для определения ξ_a и ξ'_a и дальше сможем найти распределение напряжений в диске ранее указанным способом.

Применим эти общие соображения к рассмотренному выше численному примеру. Найдем напряжения, которые возникнут при

вращении в диске постоянной толщины, если внутренний и наружный контуры свободны от усилий. В таком случае имеем два уравнения

$$\left(\frac{d\xi}{d\rho} + \sigma \frac{\xi}{\rho} \right)_{\rho=a} = 0, \quad \left(\frac{d\xi}{d\rho} + \sigma \frac{\xi}{\rho} \right)_{\rho=b} = 0. \quad (17)$$

Составим теперь уравнения вида (15) для трех частных предположений относительно величин ξ_a/A и ξ'_a/A . Выше было нами найдено, что при $\xi_a/A=1000$ и $\xi'_a/A=100$, $\xi_b/A=1349$ и $\xi'_b/A=-182,6$.

Повторяем вычисления по прежней схеме при следующих частных предположениях: 1) $\xi_a/A=0$ и $\xi'_a/A=0$, тогда $\xi_b/A=-3190$ и $\xi'_b/A=-331,2$; 2) $\xi_a/A=1000$ и $\xi'_a/A=0$, тогда $\xi_b/A=-106,8$ и $\xi'_b/A=-233,9$.

Этим частным значениям ξ_a/A и ξ'_a/A будут соответствовать следующие численные уравнения вида (15):

$1000\varphi(b) + 100\psi(b) + \frac{\theta(b)}{A} = 1349$ $+ \frac{\theta(b)}{A} = -3190$ $1000\varphi(b) + \frac{\theta(b)}{A} = -106,8$	$1000\varphi'(b) + 100\psi'(b) + \frac{\theta'(b)}{A} = -182,6$ $+ \frac{\theta'(b)}{A} = -331,2$ $1000\varphi'(b) + \frac{\theta'(b)}{A} = -233,9$
--	---

Из этих уравнений легко находим

$$\varphi(b)=3,083 \quad \psi(b)=14,76 \quad \varphi'(b)=0,0973 \quad \psi'(b)=0,513;$$

уравнения (16) представятся в таком виде:

$$\frac{\xi_b}{A} = \frac{\xi_0}{A} 3,083 + \frac{\xi'_0}{A} 14,76 - 3190,$$

$$\frac{\xi'_b}{A} = \frac{\xi_0}{A} 0,0973 + \frac{\xi'_0}{A} 0,513 - 331,2.$$

Присоединяя к этому уравнения (17) и полагая в них $\sigma=0,3$, получим $\xi_a/A=4103$, $\xi'_a/A=-246,2$.

Тот же результат мы получили бы, если бы воспользовались общим интегралом (6) и соответствующими значениями для произвольных постоянных C_1 и C_2 . Имея значения ξ_a и ξ'_a для внутреннего контура, мы можем получить деформации и напряжения в любой точке диска при помощи ранее указанной схемы вычислений.

Прием этот, конечно, может быть применен к дискам любой формы и при любых линейных зависимостях между ξ и ξ' на внутреннем и наружном контурах. Нужно только составить предварительно таблицу значений коэффициентов уравнения (4) из различных ρ .

§ 7. О напряжениях в геометрически подобных дисках

В рассмотренных выше случаях (см. формулы (8) и (9)) мы нашли, что для дисков определенной формы напряжения зависят лишь от квадрата скорости на окружности диска. Это заключение легко обобщить и показать, что в геометрически подобных дисках напряжения в сходственно расположенных точках будут одинаковы, если одинаковы окружные скорости дисков. Положим, имеется два геометрически подобных диска I и II с отношением сходственных размеров $1:k$. Выделим в них два сходственно расположенных подобных элемента. Если напряжения в сходственных точках дисков одинаковы, то усилия, действующие по поверхности элементов, будут, очевидно, относиться как квадраты сходственных размеров. Усилия эти должны уравнивать объемные силы, приложенные к элементам, в данном случае силы инерции. При каком же соотношении между скоростями дисков эти силы будут относиться между собой, как квадраты сходственных размеров? Соотношение между центробежными силами, соответствующими выделенным элементам, напишется так:

$$m_1 \omega_1^2 \rho_1 \cdot m_2 \omega_2^2 \rho_2.$$

Принимая во внимание, что массы выделенных элементов относятся как кубы сходственных размеров и радиусы ρ пропорциональны сходственным размерам, найдем, что соотношение между силами инерции равно $\omega_1^3 / \omega_2^3 k^4$.

Чтобы это соотношение равнялось $1:k^2$, надо положить $\omega_1 : \omega_2 = k$, т. е. $\omega_1 \rho_1 = \omega_2 \rho_2$. Получаем, что для равенства напряжений в сходственных точках необходимо равенство скоростей этих точек, а следовательно, и равенство окружных скоростей.

На основании общего уравнения (4) возможно сделать еще одно заключение, имеющее практическое значение. Легко видеть, что уравнение это несколько не изменится, если мы y помножим на какое-либо постоянное число. Следовательно, напряжения в дисках будут сохранять свою величину, если все размеры в направлении оси вращения диска пропорционально изменять. Мы можем, сохраняя постоянную окружную скорость, все размеры диска изменить в известном отношении, а потом независимо от этого изменить размеры диска в направлении оси вращения. Так можно получить диск, у которого будут изменены в известном отношении лишь размеры в радиальном направлении. Закон распределения напряжений останется прежний, если сохранена прежняя окружная скорость.

§ 8. Материалы и допускаемые напряжения

Для турбинных барабанов и дисков употребляют прокованную мягкую сталь и никелевую сталь с небольшим содержанием никеля (3%). Для кованой стали, применяемой в турбинах, можно считать,

что пределы упругости не ниже 3200 кг/см^2 и временное сопротивление колеблется в пределах $6500 \div 7500 \text{ кг/см}^2$. Что касается никелевой стали, то для нее предел упругости выше 4000 кг/см^2 и временное сопротивление колеблется обычно в пределах $7000 \div 9000 \text{ кг/см}^2$, хотя имеются и более прочные сорта стали с гораздо большим временным сопротивлением ¹⁾. При назначении допускаемых напряжений весьма существенно оценить надлежащим образом необходимый коэффициент безопасности. В случае турбинных дисков и барабанов мы имеем дело со спокойной постоянной нагрузкой (центробежные силы), величина которой при нормальной работе может быть вычислена с большой точностью. Формулы, которыми пользуются при расчетах, также можно считать достаточно точными, и вычисляемые по ним напряжения близки к действительности, если только мы имеем дело с точками, удаленными от резких изменений толщины диска или барабана. В местах резких переходов мы будем, конечно, иметь дело со значительными перенапряжениями. Но если материал достаточно пластичен (для применяемой в дисках стали можно считать относительное удлинение $20\% \div 25\%$, а для никелевой стали в среднем 20%), то местные напряжения при отсутствии колебаний в величине нагрузок не представляют непосредственной опасности. В перенапряженных местах появятся остаточные деформации и напряжения несколько выровняются.

Принимая во внимание все эти обстоятельства, заключаем, что коэффициент безопасности следует наметать лишь в зависимости от возможных повышений угловой скорости вращения турбины. Применяемые на практике регулировочные приспособления в худшем случае не допускают повышения скорости больше чем на 25% , при этом напряжения, зависящие от квадрата скорости, могут повыситься примерно на 60% и, следовательно, коэффициент безопасности при расчете дисков и барабанов можно принять равным $1,6$.

В таком случае допускаемое напряжение для мягкой прокованной стали не должно превосходить $3200/1,6 = 2000 \text{ кг/см}^2$. Для никелевой стали допускаемые напряжения могут быть равны $4000/1,6 = 2500 \text{ кг/см}^2$.

На практике обыкновенно допускают меньшие напряжения, и только в турбинах Лаваля эти напряжения достигают указанного выше предела, так как в дисках равного сопротивления при меньших допускаемых напряжениях получается весьма значительная толщина. Например, при напряжении 1500 кг/см^2 и при окружной скорости 400 м/сек отношение толщины диска равного сопротивления в центре к толщине на окружности получается равным 70 .

¹⁾ Некоторые указания относительно материалов и допускаемых напряжений приведены в докладе Mc Kenzie J. N. High-speed steam-turbine rotor design and construction. Engineering, 1910, vol. 90, July 8, pp. 64—70; July 15, pp. 101—106. (См. также стр. 275 книги A. Stodola, упомянутой в сноске ²⁾ на стр. 247.)

Повысив напряжение до 2500 кг/см^2 , мы найдем для того же соотношения значение 13.

Для турбинных лопаток в реактивных турбинах употребляют бронзу и медь. Последнюю в тех случаях, когда приходится иметь дело с высокими температурами, при которых бронза теряет свои пластические свойства. Для лопаток активных дисков применяют никелевую сталь с большим содержанием никеля (25%).

§ 9. Расчет турбинных валов

При расчете валов приходится иметь в виду как величину наибольших напряжений, так и прогибы вала. Напряжения в валу возникают как от действия скручивающего момента, так и от изгиба, и при составлении расчетной формулы придется решать вопрос, какой из существующих теорий¹⁾ прочности отдать предпочтение. Если исходить из предположения, что причиной появления остаточных деформаций является переход удлинений за некоторые пределы, то при расчетах придется исходить из так называемых приведенных напряжений и размеры вала нужно подбирать так, чтобы

$$\frac{1}{2W} (M_{\text{изг}} + \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2}) \leq R. \quad (18)$$

Здесь R — допускаемое напряжение; W — момент сопротивления поперечного сечения вала; $M_{\text{изг}}$ и $M_{\text{кр}}$ — значения изгибающего и скручивающего момента в рассматриваемом сечении вала.

На основании более новых опытных исследований приходится отдавать предпочтение той теории прочности, которая в основании расчетов кладет величину наибольших касательных напряжений. На основании этой теории расчетная формула напишется так:

$$\frac{1}{W} \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2} \leq R. \quad (19)$$

Формулы (18) и (19) совпадают при $M_{\text{кр}}=0$, при наличии же скручивающего момента диаметр вала, определяемый по формулам (19), получается большим, нежели из формулы (18). При $M_{\text{кр}}=M_{\text{изг}}$ разность составляет примерно 3,7%; при $M_{\text{кр}}=2 M_{\text{изг}}$ разность эта равна 7,4%.

Отметим здесь еще одно обстоятельство, играющее весьма существенную роль при назначении допускаемых напряжений, именно: явление перенапряжения материала в местах резкого изменения сечения вала. Если в круглом валу сделать полукруглую выточку небольших размеров (рис. 8, а), то в наиболее глубоких точках этих

¹⁾ Изложение различных теорий прочности можно найти в нашем «Курсе сопротивления материалов», Киев, Л. Идзиковский, 1911, 518+V стр. См. § 36, стр. 79—82.

выточек появятся при скручивании вала напряжения, вдвое превосходящие напряжения, получаемые по формулам для кругового вала постоянного поперечного сечения. В местах соединения двух участков вала различных диаметров (рис. 8, *b*) возникают перенапряжения, зависящие от кривизны сопрягающей кривой. При обычных размерах выкружки можно считать, что максимальные напряжения в переходном сечении равняются примерно $1,75 p_t$, где p_t представляет собой наибольшие касательные напряжения, вычисленные по обычным формулам для участка вала меньшего диаметра¹⁾.

Тот же вопрос о перенапряжениях возникает при наличии на поверхности углублений, параллельных оси вала. Если эти углубления имеют полукруглое поперечное сечение, то напряжения по дну углубления равны $2 p_t$. В случае углубления прямоугольного поперечного сечения, как это имеет место при соединениях с помощью шпонок, напряжения у входящих углов поперечного сечения вала обращаются теоретически в бесконечность. Это указывает на то, что здесь уже при небольших значениях скручивающего момента должны появиться остаточные деформации. Деформации эти при пластических материалах не представляли бы никакой опасности, если бы мы имели дело с постоянными нагрузками, но в валах условия работы материала хуже. Кроме скручивания имеется еще изгиб, и величина напряжений меняется при каждом обороте вала. Колебания напряжений влекут за собой явление усталости материала в перенапряженных местах и могут послужить причиной образования трещин и излома вала. Эти обстоятельства заставляют держаться при расчете валов весьма низких норм допускаемых напряжений, и даже при материалах высокого качества, применяемых в паровых турбинах, величина R , входящая в формулу (19), обычно не выходит из пределов $300-350 \text{ кг/см}^2$.

Низкие нормы допускаемых напряжений в турбинных валах приходится принимать и по другим соображениям. Обыкновенно размеры вала подбирают таким образом, чтобы нормальная угловая скорость, при которой вал работает, была значительно ниже так называемой «критической» скорости. Для повышения критической скорости приходится вал делать по возможности более жестким²⁾,

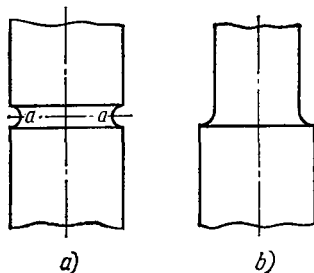


Рис. 8.

¹⁾ Подробно вопрос о перенапряжениях в валах разобран в статье: W i l e r s F. A. Die Torsion eines Rotationskörpers um seine Achse. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1907, Bd 55, Heft 3, SS. 225—263.

²⁾ Есть и другие причины, заставляющие проектировать жесткие валы.

для чего приходится увеличивать поперечное сечение вала, уменьшать расстояние между подшипниками и закреплять концы вала в длинных подшипниках. Прогибы дисковых роторов обычно колеблются в пределах от 0,150 мм до 0,750 мм и редко достигают 1,00 мм. В случае прикрепления лопаток на барабане прогибы колеблются между 0,025 мм и 0,150 мм¹⁾. Столь незначительные прогибы возможны лишь при низких нормах допускаемых напряжений. Заметим здесь, что для определения изогнутой оси вала при действии статических нагрузок наиболее удобно пользоваться графическим методом.

§ 10. Критическая угловая скорость вала

При самом тщательном изготовлении турбинных дисков все же не удается достигнуть полного совпадения центра тяжести дисков с геометрической осью вращения. Благодаря некоторому первоначальному эксцентриситету появляется центробежная сила, изгибающая вал. При некоторых значениях угловой скорости эта сила вызывает весьма значительные поперечные колебания вала. Определим величину этой «критической» угловой скорости на простейшем примере. Предположим, что диск, массу которого сосредоточим в центре тяжести O (рис. 9, а, б), закреплен на валу с эксцентриситетом e , тогда при вращении вала появится центробежная сила, которая будет изгибать вал. Изгиб будет продолжаться до тех пор, пока не наступит равновесие между изгибающей центробежной силой и упругим противодействием вала. Если через y обозначим прогиб вала в месте закрепления диска, то при расположении, указанном на рис. 9, а, центробежная сила будет равняться

$$\frac{Q}{g} \omega^2 (y + e),$$

где Q/g — масса диска и ω — угловая скорость вращения.

Упругая реакция вала будет пропорциональна прогибу y и может быть представлена формулой $P = \alpha y$, где α — коэффициент, зависящий от жесткости вала и способа закрепления концов. Очевидно, α представляет собой ту силу, которую к валу нужно приложить, чтобы вызвать прогиб, равный единице. Для вала с опертыми

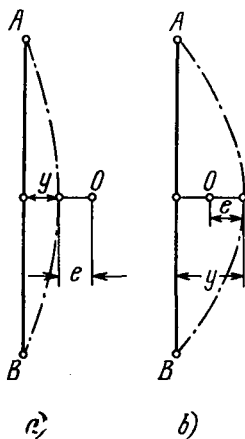


Рис. 9.

¹⁾ См. цитированную в сноске ¹⁾ на стр. 253 работу J. McKenzie.

концами при закреплении диска посередине пролета коэффициент этот, как известно, равняется $48EJ/l^3$.

Приравняв центробежную силу реакции вала, получим для определения прогиба y уравнение

$$\frac{Q}{g} \omega^2 (y + e) = \alpha y,$$

откуда

$$y = \frac{\frac{Q}{g} \omega^2 e}{a - \frac{Q}{g} \omega^2}. \quad (20)$$

При малых угловых скоростях и малом e прогиб y незначителен, но с увеличением ω y возрастает, и в пределе, при $\alpha = Q\omega^2/g$, формула (20) дает для прогиба $y = \infty$. Соответствующее значение угловой скорости

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{\alpha g}{Q}} \quad (21)$$

и представляет собой критическую скорость.

Заметим, что при скоростях, бóльших критической, становится устойчивой другая форма равновесия, представленная на рис. 9, *b*. В этом случае условие равновесия между центробежной силой и силами упругости напишется так:

$$\frac{Q}{g} \omega^2 (y - e) = \alpha y,$$

откуда

$$y = \frac{\frac{Q}{g} \omega^2 e}{\frac{Q}{g} \omega^2 - \alpha} = \frac{\omega^2 e}{\omega^2 - \omega_{кр}^2}. \quad (22)$$

Следовательно, с возрастанием угловой скорости прогиб убывает и в пределе y стремится сделаться равным эксцентриситету e . При этом центр тяжести будет оставаться в покое, а ось изогнувшегося вала будет описывать около геометрической оси вращения некоторую поверхность вращения.

Для получения величины критической угловой скорости мы исходили из предположения существования некоторого эксцентриситета e . К тому же результату можно прийти и иным путем, не делая этого допущения. Допустим, что на вертикальном невысоком валу AB (рис. 10) закреплена посередине пролета масса $m = Q/g$, центр тяжести которой совпадает с геометрической осью вращения. Предположим сначала, что вал не вращается. Тогда при отклонении точки O от оси AB появляется реакция вала, равная αy .

Если мы предоставим отклоненный от положения равновесия груз Q самому себе, то он будет совершать гармонические колебания, частота которых, очевидно, будет равна

$$k = \sqrt{\frac{a}{m}} = \sqrt{\frac{ag}{Q}}.$$

Сравнивая этот результат с формулой (21), найдем, что

$$\omega_{кр} = k,$$

и можем сделать такое заключение: критическое значение угловой скорости — это то ее значение, при котором время одного оборота вала равно как раз времени одного поперечного колебания вала.

Предположим теперь, что вал AB вращается относительно своей оси с угловой скоростью ω . Если теперь изогнуть ось вала и допустить, что плоскость изгиба вращается около AB с той же угловой скоростью, как и вал ¹⁾, то на массу Q/g будет действовать сила

$$p = \alpha y - \frac{Q}{g} \omega^2 y,$$

стремящаяся возвратить точку O в ее первоначальное положение. Сила эта будет тем меньше, чем больше угловая скорость ω . При опытах такое уменьшение восстанавливающей силы P скажется в том, что период поперечных колебаний вала будет возрастать с возрастанием ω . Когда с увеличением угловой скорости мы достигнем предела, при котором $\alpha = Q\omega^2/g$, восстанавливающая сила обращается в нуль, груз Q окажется в состоянии безразличного равновесия. При любом отклонении будет иметь место равенство между центробежной силой и силами упругости вала. Если центробежную силу рассматривать как фактически приложенную силу, то вследствие высказанного равенства сил мы найдем, что работа центробежной силы должна равняться потенциальной энергии изгиба

$$\frac{\alpha y^2}{2} = \frac{Q}{g} \omega^2 \frac{y^2}{2}; \quad (23)$$

из этого равенства получим прежнее значение для критической угловой скорости. Тем соображением, что для момента, соответствующего критической угловой скорости, мы имеем дело с состоянием без-

¹⁾ Угловая скорость вращения плоскости изгиба вала может и отличаться от скорости вращения вала ω . Легко, например, представить себе такой случай, когда плоскость изгиба не вращается вовсе, вал же вращается со скоростью ω , причем продольные волокна вала работают то на растяжение, то на сжатие. Это соображение нужно иметь в виду, чтобы ясно представить себе возможность перехода от формы движения рис. 9, а к форме рис. 9, б.

различного равновесия, воспользуемся для разыскания $\omega_{кр}$ в более сложных случаях. Оценим прежде всего влияние массы вала на величину критической угловой скорости. Пока мы этой массой пренебрегали, изгиб вала вполне определялся величиной прогиба y посередине пролета, приходилось иметь дело с системой с одной степенью свободы. Принимая во внимание массу вала, мы переходили к системе с бесконечным числом степеней свободы, и точное решение задачи о колебании этой системы и определение соответствующей критической скорости привело бы нас к уравнениям в частных производных. Мы сможем упростить задачу и получить приближенное значение $\omega_{кр}$ с достаточной для практики точностью, если воспользуемся приближенной методой Рэлея, которая дает прекрасные результаты при решении различного рода задач акустики.

Будем заранее задаваться видом той кривой, по которой гнется вал, если массе Q/g сообщить перемещение y . Таким путем мы нашу сложную систему обратим в систему с одной степенью свободы, и для определения критической скорости сможем написать уравнение, аналогичное уравнению (23). Обозначим через η прогиб в каком-либо сечении вала; через q — вес единицы длины вала; EJ — жесткость вала при изгибе. Тогда при наличии одного диска получим уравнение

$$\frac{Q}{g} \omega^2 \frac{y^2}{2} + \omega^2 \int_0^l \frac{q}{2g} \eta^2 dx = \int_0^l \frac{EJ}{2} \left(\frac{d^2 \eta}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (24)$$

Второй член в левой части полученного уравнения представляет собой работу центробежной силы, приложенной к валу. В правой части уравнения имеем потенциальную энергию, соответствующую изгибу вала. При наличии нескольких дисков уравнение (24) можно представить в таком виде:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{Q_i}{g} \omega^2 \frac{y_i^2}{2} + \omega^2 \int_0^l \frac{q}{2g} \eta^2 dx = \int_0^l \frac{EJ}{2} \left(\frac{d^2 \eta}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (24')$$

При составлении уравнений (24) и (24') мы не принимали во внимание того обстоятельства, что искривление вала сопровождается наклоном плоскостей дисков к геометрической оси вращения. Наклон этот обуславливает появление моментов сил инерции, противодействующих изгибу. Это обстоятельство повышает жесткость вала и увеличивает значение $\omega_{кр}$. Учесть его можно следующим образом. На рис. 11 представлен в двух проекциях диск, плоскость которого наклонилась к оси x благодаря изгибу вала.

Рассмотрим четыре элемента диска, расположенных симметрично относительно осей y и z . Горизонтальные составляющие соответствующих центробежных сил взаимно уравновешиваются, что же касается вертикальных составляющих, то они приведутся к силе и к

паре сил в плоскости xy . Величина этой пары, очевидно, равна

$$m\omega^2 (\rho \sin \alpha)^2 \frac{dy}{dx}.$$

Суммируя все такие элементарные пары, найдем, что они приводятся к паре сил $\theta dy/dx$, где θ — момент инерции диска относительно

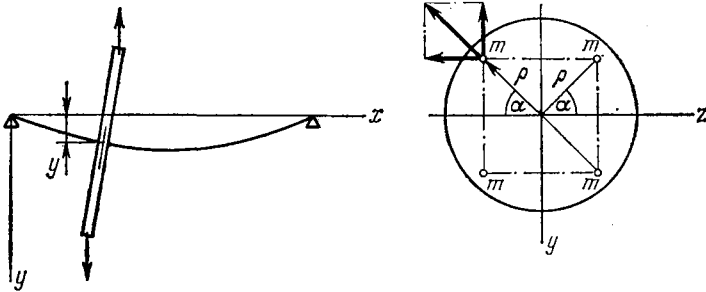


Рис. 11.

оси z . Направление вращения пары таково, что она противодействует изгибу вала и, следовательно, производит при искривлении вала отрицательную работу, равную $-\frac{1}{2}\theta \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

Принимая во внимание этот результат, можем уравнение для определения критической угловой скорости представить в таком виде:

$$\omega^2 \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} \frac{Q_i}{g} y_i^2 + \int_0^l \frac{q}{g} \eta^2 dx - \sum_{i=1}^{i=n} \theta_i \left(\frac{dy_i}{dx}\right)^2 \right\} = \int_0^l EJ \left(\frac{d^2\eta}{dx^2}\right)^2 dx,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EJ \left(\frac{d^2\eta}{dx^2}\right)^2 dx}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{Q_i}{g} y_i^2 + \int_0^l \frac{q}{g} \eta^2 dx - \sum_{i=1}^{i=n} \theta_i \left(\frac{dy_i}{dx}\right)^2}. \quad (25)$$

Этот результат и представляет собой общее решение задачи о разыскании критической угловой скорости. Применяя методу Рэля, мы заранее задаемся формой изгиба и, следовательно, имеем η в виде некоторой функции от x , имеем также величины y_i и dy_i/dx . Вставляя их в формулу (23), мы сможем вычислить $\omega_{кр}$. Получаемое таким путем значение критической скорости будет больше действительного, потому что, задаваясь формой изгиба вала и обращая систему с бесконечным числом степеней свободы в систему с одной

степенью свободы, мы, вообще говоря, увеличиваем жесткость системы и вместе с тем увеличиваем, конечно, и величину $\omega_{кр}$.

При расчетах удобнее всего исходить из кривой статического прогиба вала. Рассматривая вал как балку с соответствующим закреплением концов и принимая во внимание действие весов Q_i и собственного веса, мы можем без затруднения построить кривую изогнутой оси и, следовательно, найти значение η для любого сечения вала. После этого знаменатель в формуле (25) легко вычисляется. Для вычисления величины числителя примем во внимание, что потенциальная энергия изгиба равна работе изгибающих сил, следовательно,

$$\int_0^l EJ \left(\frac{d^2\eta}{dx^2} \right)^2 dx = \sum \frac{Q_i y_i}{2} + \int_0^l \frac{q\eta}{2} dx.$$

Первая часть полученного равенства легко вычисляется на основании построенной кривой изгиба.

Общая формула (25) дает возможность получать и дальнейшие приближения для величины $\omega_{кр}$. В самом деле, исходя из определенной формы изгиба, мы получаем для критической скорости величину, большую действительной. Для получения точного значения $\omega_{кр}$ нужно из всех возможных форм изгиба выбрать ту, которой соответствует минимум выражения (25). Общее решение этого вопроса представляет задачу вариационного исчисления. Мы можем как угодно близко подойти к этому решению и подобрать кривую изгиба, сколь угодно близкую к действительной, или следующим путем: задаемся формой кривой изгиба и представляем прогиб η в виде ряда

$$\eta = A_1 \varphi(x) + A_2 \psi(x) + A_3 \theta(x) + \dots \quad (26)$$

У нас $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\theta(x)$, ... представляют собой функции, удовлетворяющие на концах условиям закрепления. Вставляя выражение (26) в формулу (25) и выполняя интегрирование, мы получим выражение для $\omega_{кр}$ в виде функции от неопределенных пока коэффициентов A_1, A_2, \dots . Ограничиваясь несколькими членами ряда (26), можем значения коэффициентов A_1, A_2, \dots подобрать так, чтобы выражение (25) получило минимальное значение. Чем больше коэффициентов мы возьмем в выражении (26), тем, конечно, с большей точностью можно будет найти $\omega_{кр}$. В частном случае вала с опертыми концами выражение (26) выгодно выбрать таким образом:

$$\eta = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + A_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots$$

Применение этого выражения к решению некоторых вопросов устойчивости показывает, что обыкновенно двух членов ряда достаточно для получения нужной степени точности.

ЛИТЕРАТУРА ПРЕДМЕТА

I. Сочинения и статьи, относящиеся к расчету вращающихся дисков

Stodola A. Die Dampfturbinen. Mit einem Anhang über die Aussichten der Wärmekraftmaschinen und über die Gasturbine. 4 umgearbeitete und erweiterte Auflage, Berlin, J. Springer, 1910, 708 S. См. SS. 312—340 (§§ 74—82).

Stodola A. Die Nebenspannungen in rasch umlaufenden Scheibenrädern. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1907, Bd 51, № 32, SS. 1269—1274.

Grübler M. Der Spannungszustand in Schleifsteinen und Schmirgelscheiben. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1897, Bd 41, № 30, SS. 860—864.

Grübler M. Versuche über die Festigkeit von Schleifsteinen. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1899, Bd 43, № 42, SS. 1294—1300.

Grübler M. Versuche über die Festigkeit rotierender Scheiben. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1906, Bd 50, № 8, SS. 294—298.

Vasch A., Leon A. Über rotierende Scheiben gleichen Fliehkraftwiderstandes. Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch—naturwissenschaftliche Klasse. 1907, Abt. 2a, Bd 116, Heft 10, SS. 1353—1389.

Morley A. Strength of materials. New impression, London—New York..., Longmans, Green and Co., 1920, IX+555 p. См. pp. 359—363. [Это издание полностью повторяет четвертое издание этой книги: Morley A. Strength of materials. Fourth edition, London—New York—Bombay—Calcutta—Madras, Longmans, Green and Co., 1916, Chapter XI, § 126, pp. 359—363 (вращающийся диск); § 127, pp. 364—372 (вращающийся цилиндр); § 128, pp. 372—375 (вращающийся диск переменной толщины).]

Тимошенко С. П. Сопроотивление материалов. Киев, Л. Идзиковский, 1911, 518+V стр. [См. стр. 425—430 (§§ 155—157).]

McKenzie J. N. High-speed steam-turbine rotor design and construction. Engineering, 1910, vol. 90, July 8, pp. 64—70; July 15, pp. 101—106.

Более точные исследования по вопросу о напряжениях в быстро вращающихся дисках имеются в работах:

Purser F. On the application of Bessel's functions to the elastic equilibrium of a homogeneous isotropic cylinder. Transactions of the Royal Irish Academy, 1902, vol. 32, Section A, Part III, pp. 31—60.

Chree C. On thin rotating isotropic disks. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1891, vol. 7, Part 4, May 4, pp. 201—215.

Chree C. Long rotating circular cylinders. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1892, vol. 7. Part 6, February 8, pp. 283—305.

Love A. E. H. Lehrbuch der Elastizität. Autorisierte deutsche Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von A. Timpe, Leipzig-Berlin, B. G. Teubner, 1907, 664 S. [См. SS. 172—175 (§ 102).]

II. Статьи, относящиеся к вопросу: «Различные теории прочности»

Guest J. J. On the strength of ductile materials under combined stress. Philosophical Magazine and Journal of Science, 5th Serie, 1900, vol. 50, № 302, July, pp. 69—132.

Mohr O. Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materiales? Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1900, Bd 44, № 45, SS. 1524—1530. [Перевод на русский язык: Мор О. Чем обусловлены предел упругости и временное сопротивление материала? «Новые идеи в технике», Сборник, № 1, Теории прочности. Изд-во «Образование», Петроград, 1915, стр. 1—50.]

Roth P. Die Festigkeitstheorien und die von ihnen abhängigen Formeln des Maschinenbaues. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1902, Bd 48, Heft 2, SS. 285—316. [Перевод на русский язык двух последних глав этой работы (SS. SS. 301—316): Рот П. Теории прочности и построенные на них формулы маши-

ностроения. «Новые идеи в технике», Сборник, № 1, Теории прочности, Изд-во «Образование», Петроград, 1915, стр. 103—121.]

K á r m á n T. h. Über die Formänderung dünnwandiger Rohre, insbesondere federnder Ausgleichrohre. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1911, Bd 55, № 45, SS. 1889—1895. [Перепечатка: K á r m á n Th. Collected works. Vol. 1, London, Butterworths scientific publications, 1956, pp. 304—320.]

Т н м о ш е н к о С. П. Формулы сложного сопротивления с точки зрения различных теорий о прочности. Известия С.-Петербургского политехнического института. 1905, том 3, вып. 3—4, стр. 415—455.

Т н м о ш е н к о С. П. Сопротивление материалов. Киев, Л. Издиковский, 1911, Отдел 1, Гл. IV, § 36 (Различные теории прочности), стр. 79—82.

III. Вопросы о местных напряжениях разбираются в работах:

K i r s c h [G.]. Theorie der Federn. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1898, Bd 42, № 16, SS. 429—436.

L e o n A. Über die Spannungsverteilung in der Umgebung einer halbkreisförmigen Kerbe und einer viertelkreisförmigen Hohlkehle. Wien, Lehmann und Wentzel, 1908, 12 SS. (Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der technischen Hochschule in Wien, № 1, 1908.)

L e o n A. Kerbgrösse und Kerbwirkung. Mitteilungen aus dem mechanischen Laboratorium der technischen Hochschule in Wien, № 10, 1910, Wien: Lehmann und Wentzel, 56 S.

Т н м о ш е н к о С. П. О влиянии круглых отверстий на распределение напряжений в пластинках. Известия Киевского политехнического института, 1907, год 7, книга 3, стр. 95—113.

F ö r p l A. Die Beanspruchung auf Verdrehen an einer Übergangsstelle mit scharfer Abrundung. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1906, Bd 50, № 26, SS. 1032—1035.

W i l l e r s F. A. Die Torsion eines Rotationskörpers um seine Achse. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1907, Bd 55, Heft 3, SS. 225—263.

IV. Вопросы критической скорости для быстро вращающихся валов рассматриваются в работах:

S t o d o l a A. Die Dampfturbinen. Mit einem Anhang über die Aussichten der Wärmekraftmaschinen und über die Gasturbine. 4 umgearbeitete und erweiterte Auflage, Berlin, J. Springer, 1910, 708 S. См. SS. 358—372 (§§ 88—90).

D u n k e r l e y S. On the whirling and vibration of shafts. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 1894, vol. 185, Part 1, pp. 279—360.

C h r e e C. The whirling and transverse vibrations of rotating shafts. Philosophical Magazine and Journal of Science, Series 6, 1904, vol. 7, № 41, May, pp. 504—542.

K l e i n F., S o m m e r f e l d A. Über die Theorie des Kreisels. Leipzig, B. G. Teubner, 1910, Heft 4; Die technischen Anwendungen der Kreiselschwingung, 966 S. См. SS. 761—966.

M o r l e y A. The calculation of vibration and whirling speeds. Engineering, 1909, vol. 88, July 30, pp. 135—137; August 13, pp. 205—207.

F ö r p l A. Vorlesungen über technische Mechanik. Bd 4: Dynamik, 3 Auflage, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1909, VIII+422 S. См. § 43 (SS. 283—302).

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Сборник института инженеров путей сообщения, С.-Петербург, 1913, вып. 82
стр. 1—21. Отдельный оттиск, С.-Петербург, 1913, 22 стр.

Вопрос о кручении и изгибе призматических брусков силами, приложенными по концам, приводится, как показал Барре Сен-Венан¹⁾, к интегрированию дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

при заданном значении производной по нормали $\partial\Phi/\partial\nu$ на контуре поперечного сечения стержня.

При изложении этой задачи обыкновенно исходят из рассмотрения деформаций и решения для различных частных случаев получают, пользуясь свойствами функций комплексного переменного.

В настоящей заметке принят иной метод изложения задачи Сен-Венана. На частных примерах мы показываем, что выводы получаются проще, если определять напряжения непосредственно, не переходя к перемещениям. При этом оказывается, что напряжения могут быть выражены через производные одной функции ψ , функции напряжений, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = q.$$

В случае кручения величина q постоянна и нахождение функции ψ может быть сведено к определению провисания равномерно растянутой мембраны под действием равномерно распределенной нагрузки²⁾. При изгибе задача приводится к определению провисания мембраны под действием сплошной переменной нагрузки.

¹⁾ S a i n t - V e n a n t B. Memoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut impérial de France, 1856, tome Quatorzième, savants étrangers-XIV, pp. 233—560. См. p. 332. [Перевод на русский язык: Сен-Венан Б. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. Физматгиз, М., 1961. Мемуар о кручении призм, стр. 15—378. См. уравнение (109) на стр. 123.]

²⁾ P r a n d t l L. Zur Torsion von prismatischen Stäben. Physikalische Zeitschrift, 1903, Jahrgang 4, № 26b, SS. 758—759. [Перепечатка: P r a n d t l L. Gesammelte Abhandlungen zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik. Teil I, Berlin (Göttingen) — Heidelberg, Springer — Verlag, 1961, SS. 79—80.]

Аналогия с мембраной не только дает возможность установить наглядное представление о распределении напряжений, но ею можно воспользоваться и для определения функции ψ . В настоящей статье на частных примерах показано, как можно найти ψ , пользуясь методом Рэлея — Ритца ¹⁾.

КРУЧЕНИЕ

§ 1. Функция напряжений при кручении

Предположим, что призматический стержень скручивается силами, распределенными по концевым поперечным сечениям. Боковая поверхность стержня свободна и объемных сил нет. В таком случае мы удовлетворим дифференциальным уравнениям равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

положив

$$X_x = Y_y = Z_z = X_y = 0, \quad X_z = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad Y_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2)$$

где ψ — функция только x и y .

Кроме уравнений равновесия (1) напряжения должны удовлетворять дифференциальным зависимостям

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 X_x + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= 0, & \Delta^2 X_y + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \Delta^2 Y_y + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} &= 0, & \Delta^2 X_z + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z} &= 0, \\ \Delta^2 Z_z + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= 0, & \Delta^2 Y_z + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $\theta = X_x + Y_y + Z_z$, λ и μ — коэффициенты Ламэ.

Принимая во внимание значения напряжений, найдем, что первые четыре уравнения системы (3) удовлетворяются тождественно, а два последних дают для функции ψ условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

¹⁾ R i t z W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1909, Bd 135, Heft 1, SS. 1—61. [Перепечатка: R i t z W. Gesammelte Werke. Oeuvres publiées la Société Suisse de physique. Paris, Gauthier — Villars, 1911, pp. 192—250.]

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \text{const.} \quad (4)$$

Значение ψ на контуре поперечного сечения найдется из таких соображений. Для всякой точки A контура (рис. 1) касательное напряжение имеет направление касательной к контуру, следовательно,

$$X_z \cos(x, v) + Y_z \cos(y, v) = 0,$$

или

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} = 0,$$

где s — дуга контура, отсчитываемая в направлении, указанном стрелкой. Таким образом, ψ на контуре постоянно, и мы в дальнейшем для односвязных контуров будем полагать эту постоянную равной нулю.

Легко показать, что напряженное состояние, определяемое функцией ψ , действительно соответствует кручению стержня. В самом деле,

$$\iint X_z dx dy = \iint \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy = 0,$$

$$\iint Y_z dx dy = - \iint \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy = 0,$$

и, следовательно, касательные напряжения, приложенные по концам стержня, приводятся к паре сил. Момент этой пары равен

$$M = \iint Y_z x dx dy - \iint X_z y dx dy.$$

Подставляя вместо напряжений их выражения через ψ , легко показать, что для односвязных контуров

$$M = 2 \iint \psi dx dy.$$

Значение постоянной в правой части уравнения (4) найдем, если перейдем от напряжений к перемещениям. В самом деле, левая часть уравнения (4) может быть переписана так:

$$\frac{\partial X_z}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial e_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right);$$

множитель, заключенный в скобках, представляет собой удвоенный угол поворота поперечного сечения стержня, взятый с обрат-

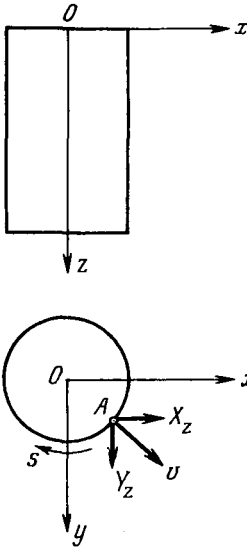


Рис. 1.

ным знаком, следовательно, постоянная в уравнении (4) равна $-2\mu\tau$, где τ — угол закручивания, приходящийся на единицу длины стержня.

Таким образом, задача о кручении стержней сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2\mu\tau = 0, \quad (4')$$

причем на контуре $\psi = \text{const}$.

В случае односвязного контура положим $\psi = 0$, тогда задача сведется, как заметил Л. Прандтль, к определению провисания натянутой мембраны, имеющей такой же контур, как и поперечное сечение скручиваемого стержня, и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой. Если растягивающее усилие, приходящееся на единицу длины контура мембраны, принять равным единице силы, то нагрузка на единицу поверхности мембраны должна быть $2\mu\tau$, тогда провисания мембраны будут иметь те же значения, что и ψ в уравнении (4'). Л. Прандтль воспользовался этим обстоятельством для экспериментального изучения распределения напряжений при кручении. Здесь будет показано применение аналогии Л. Прандтля к вычислению напряжений.

§ 2. Общий метод определения функции напряжений

Задача об определении функции ψ приводится, как мы видели, к разысканию провисания равномерно нагруженной мембраны, удерживаемой на контуре равномерно распределенными растягивающими усилиями. При разыскании формы равновесия мембраны удобно воспользоваться самым общим началом статики, началом возможных перемещений. Истинная форма равновесия мембраны будет характеризоваться тем, что на всяком возможном отклонении от этой формы работа всех приложенных к мембране сил равна нулю.

Если считать мембрану нерастяжимой, то при провисании края ее несколько сместятся и растягивающие мембрану усилия совершат при этом отрицательную работу, величину которой получим, умножая усилие, приходящееся на единицу контура мембраны, на разность между площадью мембраны до провисания и проекцией площади мембраны на плоскость контура после провисания.

При малых провисаниях величина искомой работы напишется так:

$$-\frac{1}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Здесь интегрирование должно быть распространено на всю площадь мембраны.

При всяком отклонении мембраны от положения равновесия изменение найденной сейчас работы растягивающих сил должно быть равно по величине и противоположно по знаку приращению работы сплошной нагрузки, лежащей на мембране.

Следовательно,

$$\frac{1}{2} \delta \iint \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \iint 2\mu\tau \delta\psi dx dy$$

или

$$\delta \iint \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2\mu\tau\psi \right\} dx dy = 0.$$

Задача сводится, таким образом, к разысканию минимума интеграла

$$I = \iint \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2\mu\tau\psi \right\} dx dy. \quad (5)$$

Тот же результат мы можем получить и иным путем, не пользуясь аналогией Л. Прандтля.

Предположим, что мы, удерживая постоянным значение функции ψ на контуре, дадим ей весьма малые приращения в других точках поперечного сечения. Такому изменению функции напряжений будут соответствовать приращения напряжений δX_z и δY_z . Так как всякая система напряжений, определяемая на основании условий (2), удовлетворяет уравнениям равновесия (1), то и приращения δX_z и δY_z будут удовлетворять этим уравнениям. В таком случае работа этих усилий на всяком возможном перемещении должна равняться приращению потенциальной энергии системы.

Применим это заключение к действительным перемещениям. Приращение потенциальной энергии, приходящееся на единицу длины стержня, может быть написано так:

$$\frac{1}{2\mu} \delta \iint \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Работа усилий, соответствующих приращениям напряжений, будет

$$\iint (\delta X_z u + \delta Y_z v) dx dy = \iint \left(-u \frac{\partial \delta \psi}{\partial y} + v \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right) dx dy.$$

Выполняя интегрирование по частям и принимая во внимание, что на контуре $\delta\psi=0$, найдем для искомой работы, отнесенной к единице длины стержня, выражение

$$2\tau \iint \delta\psi dx dy,$$

приравнивая это найденному выше приращению потенциальной энергии, сводим задачу к нахождению минимума интеграла (5).

Если удастся найти выражение для ψ , соответствующее этому минимуму, мы получаем точное решение задачи о кручении. В тех же случаях, когда разыскание точного решения сопряжено с большими трудностями или такого решения получить нельзя, мы можем, пользуясь выражением (5), получить приближенное решение, заменяя задачу вариационного исчисления о разыскании минимума интеграла I элементарной задачей о нахождении максимума или минимума некоторой функции. Для этого мы берем приближенное выражение функции напряжений в виде ряда

$$\psi_n = \varphi_0 + a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \dots + a_n\varphi_n. \quad (6)$$

При этом функции $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ выбираем так, чтобы на контуре каждая из них обращалась в нуль и чтобы выражение (6) при надлежащем выборе коэффициентов a_1, \dots, a_n по возможности ближе подходило к точному выражению ψ .

В каждом частном случае такие функции можно подобрать, потому что приблизительный вид той поверхности, по которой провисает нагруженная мембрана, нам известен. Для определения же коэффициентов a_1, \dots, a_n мы вставляем выражение ψ_n вместо ψ под знак интеграла (5) и определяем соответствующее значение интеграла I_n . Далее подбираем коэффициенты так, чтобы этот интеграл имел минимальное или максимальное значение, т. е. чтобы были удовлетворены уравнения

$$\frac{\partial I_n}{\partial a_1} = 0, \dots, \frac{\partial I_n}{\partial a_n} = 0.$$

Отсюда мы получаем те значения коэффициентов a_1, \dots, a_n , при которых выражение для ψ_n дает наилучшее приближение к точному решению.

Особенно просто разыскание функций $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ в тех случаях, когда уравнение контура сечения может быть представлено в таком виде:

$$F(x, y) = 0$$

и F внутри контура в нуль не обращается. Тогда выражение (6) может быть заменено таким:

$$\psi_{mn} = F(x, y) \sum_{m=0, n=0}^{m, n} a_{mn} x^m y^n. \quad (7)$$

Для прямоугольника, например,

$$\psi_{mn} = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \sum_{m=0, n=0}^{m, n} a_{mn} x^m y^n. \quad (7')$$

Здесь $x = \pm a$ и $y = \pm b$ — уравнения сторон прямоугольника.

Для всякого выпуклого многоугольника

$$\Psi_{mn} = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2)(a_3x + b_3y + c_3) \dots$$

$$\dots \sum_{m=0, n=0}^{m, n} a_{mn}x^m y^n. \quad (7'')$$

В тех случаях, когда для мембраны, соответствующей контуру поперечного сечения скручиваемого стержня, известны типы нормальных колебаний, мы можем воспользоваться соответствующими нормальными функциями и вставить их вместо $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ в выражение (6). Таким путем мы можем получить решения для прямоугольника, равностороннего треугольника, сектора и для сечения, ограниченного дугами двух концентрических кругов и двумя радиусами ¹⁾.

§ 3. Частные случаи

Круг. В случае круглого стержня радиуса r имеем для контура уравнение

$$F(x, y) = r^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

Легко видеть, что первый член выражения (7) представляет точное решение уравнения (4'), нужно только положить

$$a_{00} = \frac{\mu\tau}{2}.$$

В таком случае

$$\psi = \frac{\mu\tau}{2} (r^2 - x^2 - y^2).$$

Эллипс. Для эллиптического контура имеем

$$F(x, y) = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0.$$

Опять легко проверить, что первый член выражения (7) удовлетворит уравнению (4'), если только положить

$$a_{00} = -\frac{\mu\tau a^2 b^2}{a^2 + b^2},$$

¹⁾ Такого рода решения недавно опубликованы А. Н. Динником. См. Динник А. Н. Аналогия Прандтля в теории кручения. Влияние радиальной трещины на жесткость сплошного и трубчатого валов. Известия Донского политехнического института в Новочеркасске, 1912, том 1, отдел 2, стр. 309—336. [Перепечатка: Динник А. Н. Избранные труды. Том 3. Киев, Изд-во АН Укр. ССР, 1956, стр. 238—254. Динник А. Н. К аналогии Прандтля в теории кручения. Журнал Русского физико-химического общества, 1912, том 44, физический отдел, вып. 5, стр. 257—260.]

тогда для функции напряжений получим

$$\psi = -\frac{\mu\tau a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right).$$

Эта функция представит распределение напряжений также для случая трубчатого стержня, контур поперечного сечения которого образован двумя подобными эллипсами, главные оси которых совпадают.

Для мембраны с прямоугольным контуром нормальные функции известны и провисание мембраны для нашего случая может быть представлено в виде двойного ряда Фурье (рис. 2):

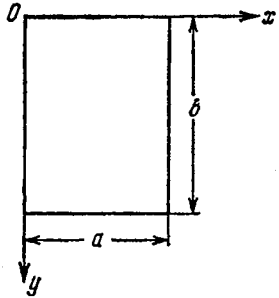


Рис. 2.

$$\psi = \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Работа растягивающих сил при провисании мембраны будет

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \\ = -\frac{1}{2} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} a_{mn}^2 \frac{\pi^2 ab}{4} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right). \end{aligned}$$

Приравнявая приращение этой работы, соответствующее изменению какого-либо коэффициента a_{mn} , работе сплошной нагрузки, взятой с обратным знаком, получим для определения a_{mn} уравнение

$$a_{mn} \delta a_{mn} \frac{\pi^2 ab}{4} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) = \delta a_{mn} \int_0^b \int_0^a 2\mu\tau \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy,$$

откуда

$$a_{mn} = \frac{32\mu\tau b^2}{\pi^4 mn (m^2\alpha^2 + n^2)}.$$

Здесь через α обозначено отношение $b:a$. Таким образом, для функции напряжений получаем выражение

$$\psi = \frac{32\mu\tau b^2}{\pi^4} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn (m^2\alpha^2 + n^2)}.$$

Связь между скручивающим моментом и кручением τ найдем из уравнения

$$M = 2 \iint \psi dx dy = \frac{32\mu\tau}{\pi^4} \frac{8ab^3}{\pi^2} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{m^2 n^2 (m^2\alpha^2 + n^2)}.$$

Результат этот может быть представлен в более удобной для вычислений форме, если принять во внимание, что ¹⁾

$$\frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2 (m^2 \alpha^2 + n^2)} = \frac{\pi^4}{96 m^2} \frac{\operatorname{th} \frac{m \alpha \pi}{2} - \frac{m \alpha \pi}{2}}{-\frac{1}{3} \left(\frac{m \alpha \pi}{2} \right)^3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} M &= \frac{32 \mu \tau}{\pi^4} \cdot \frac{8 a b^3}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^4}{96} \cdot \frac{3}{\alpha^3} \cdot \frac{8}{\pi^3} \left\{ \frac{\alpha \pi}{2} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{m^4} - \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \frac{\operatorname{th} \frac{m \alpha \pi}{2}}{m^6} \right\} = \\ &= \mu \tau \left\{ \frac{1}{3} \frac{a b^3}{\alpha^2} - \frac{64 a b^3}{\pi^6 \alpha^3} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \frac{\operatorname{th} \frac{m \alpha \pi}{2}}{m^6} \right\}. \end{aligned}$$

Для квадрата эта формула дает

$$M = 0,1406 \mu \tau a^4. \quad (8)$$

В таком виде полученный результат совпадает с тем, который был найден Сен-Венаном ²⁾.

Для напряжений по линии $x=a/2$ получим выражение

$$X_z = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{32 \mu \tau b}{\pi^3} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \sum_{n=1, 3, 5} \frac{(-1)^{(m-1)/2} \cos \frac{n \pi y}{b}}{m (m^2 \alpha^2 + n^2)}.$$

При $y=0$ находим

$$(X_z)_{x=\frac{a}{2}, y=0} = \frac{32 \mu \tau b}{\pi^3} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m (m^2 \alpha^2 + n^2)},$$

или, принимая во внимание, что

$$\sum_{m=1, 3, 5, \dots} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m (m^2 \alpha^2 + n^2)} = \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^2} \cdot \frac{\pi}{4 \alpha} \operatorname{th} \frac{m \alpha \pi}{2},$$

получим

$$(X_z)_{x=\frac{a}{2}, y=0} = \frac{8 \mu \tau b}{\pi^2 \alpha} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^2} \operatorname{th} \frac{m \alpha \pi}{2}.$$

Для прямоугольного контура мы можем получить приближенное решение в виде целого полинома, пользуясь для ψ приближенным выражением (7'). Чтобы показать, насколько удовлетворительные

¹⁾ См. стр. 8 нашей работы «Применение нормальных координат к исследованию изгиба стержней и пластинок». Известия Киевского политехнического института, 1910, отдел инж.-механический, год 10, книга 1, стр. 1—49.

²⁾ См. стр. 177 русского перевода из ссылки ²⁾, приведенной на стр. 264.

результаты дает приближенная метода, приводим здесь вычисления для квадратного сечения со стороной $2a$.

Ограничиваясь первым членом в выражении (7'), мы в качестве первого приближения положим

$$\psi_0 = a_{00}(x^2 - a^2)(y^2 - a^2).$$

Вставляя это в выражение (5), найдем из уравнения

$$\frac{\partial I_0}{\partial a_{00}} = 0, \quad a_{00} = -\frac{5}{8} \frac{\tau \mu}{a^2}.$$

Величина скручивающего момента равна

$$M = 2 \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \psi \, dx \, dy = \frac{20}{9} \mu \tau a^4 = 0,1388 \mu \tau (2a)^4.$$

Сравнение с результатом (8) показывает, что первое приближение дает величину M с точностью до $1\frac{1}{3}\%$.

Принимая во внимание условия симметрии, мы в качестве второго приближения можем положить

$$\psi_2 = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2)[a_{00} + a_{02}(x^2 + y^2)].$$

Вставляя это в выражение (5) и определяя a_{00} и a_{02} из уравнений

$$\frac{\partial I_2}{\partial a_{00}} = 0, \quad \frac{\partial I_2}{\partial a_{02}} = 0,$$

получим

$$a_{00} = -\frac{5}{8} \cdot \frac{259}{277} \cdot \frac{\mu \tau}{a^2}, \quad a_{02} = -\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{35}{277} \cdot \frac{\mu \tau}{a^4}$$

и

$$M = \frac{20}{9} \mu \tau a^4 \left[\frac{259}{277} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{35}{277} \right] = 0,1404 \mu \tau (2a)^4.$$

Второе приближение дает при определении скручивающего момента погрешность, меньшую $\frac{1}{6}\%$.

В величине напряжений наше приближенное решение, как и следовало ожидать, дает значительно меньшую точность. Например, погрешность в величине наибольших напряжений для полученного выше второго приближения достигает 4% .

Равносторонний треугольник. Воспользуемся для ψ общим выражением (7"). Уравнение контура в рассматриваемом случае будет (рис. 3)

$$\left(y + \frac{a}{2\sqrt{3}} \right) (3x + y\sqrt{3} - a) (-3x + y\sqrt{3} - a) = 0,$$

и легко видеть, что, сохраняя лишь первый член ряда (7'') и полагая $a_{00} = \mu\tau/3\sqrt{3}a$, мы удовлетворим дифференциальному уравнению (4') и, следовательно, получим точное решение задачи.

Для неравностороннего треугольника и всякого другого выпуклого многоугольника мы могли бы тем же путем получить приближенное решение, точность которого можно увеличивать, увеличивая число членов ряда (7''). Задача сводится, как мы видели в случае прямоугольника, к вычислению весьма простых квадратур.

Тем же приемом возможно найти приближенное выражение ψ в случае контуров, составленных из участков кривых и прямых линий, например для сектора, для поперечного сечения круглой трубки, разрезанной по образующей, и т. д.

В случае контуров, имеющих входящий угол, например для сечений уголка, тавра и других, применение общей метoды встречает затруднения и здесь лучше воспользоваться вычислительной метoдой К. Рунге ¹⁾.

ИЗГИБ

§ 4. Функция напряжений при изгибе

Призматический стержень, закрепленный в точке O , центре тяжести поперечного сечения, изгибается вертикальной силой W , направленной по одной из главных осей инерции поперечного сечения

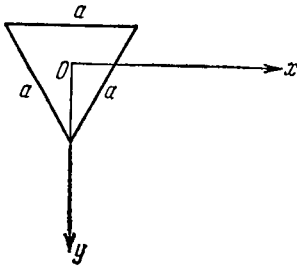


Рис. 3.

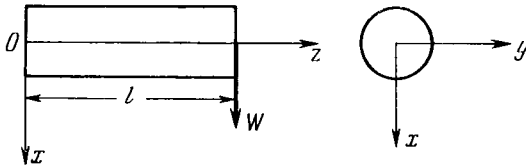


Рис. 4.

стержня (рис. 4). Мы удовлетворим дифференциальным уравнениям равновесия (1), положив

$$\left. \begin{aligned} X_x = Y_y = X_y = 0, & \quad Z_z = -\frac{W(l-z)x}{J}, \\ X_z = \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{Wx^2}{2J} + f(y), & \quad Y_z = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

¹⁾ R u n g e С. Über eine Methode die partielle Differentialgleichung Δu -Constants numerisch zu integrieren. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1908, Bd 56, Heft 3, SS. 225—232.

Здесь ψ — функция от x и y и f — неопределенная пока функция одного y .

Чтобы взятые нами выражения (9) представляли систему напряжений, возможных в упругом теле, необходимо удовлетворить дифференциальным зависимостям (3). Последние два из уравнений (3) дают для определения ψ такие условия:

$$-\frac{W}{J} + f''(y) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = -\frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{W}{J} = -\frac{1}{1 + \sigma} \frac{W}{J},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Отсюда получаем для ψ уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\sigma}{1 + \sigma} \frac{W}{J} y - f'(y) + \text{const.} \quad (10)$$

Касательные напряжения в точках контура имеют направления касательной к контуру, следовательно,

$$-X_z \frac{\partial y}{\partial s} + Y_z \frac{\partial x}{\partial s} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{d\psi}{ds} = \left[\frac{Wx^2}{2J} - f(y) \right] \frac{\partial y}{\partial s}. \quad (11)$$

Если контур поперечного сечения таков, что правую часть уравнения удастся надлежащим выбором функции $f(y)$ обратить в нуль, то задача об определении касательных напряжений при изгибе сведется к нахождению провисания мембраны, натянутой на плоский контур и нагруженной сплошной нагрузкой, определяемой правой частью уравнения (10).

Легко показать, что получаемое при этом решение соответствует условию задачи. Касательные напряжения по плоскости поперечного сечения приводятся к одной вертикальной силе W . В самом деле,

$$\iint Y_z dx dy = - \iint \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy = 0,$$

$$\iint X_z dx dy = \iint \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{Wx^2}{2J} + f(y) \right] dx dy = -\frac{W}{2} + \frac{3W}{2} = W,$$

так как на контуре ψ в рассматриваемом случае постоянно и

$$|f(y)| = \left[\frac{Wx^2}{2J} \right].$$

Чтобы сила W проходила через центр тяжести сечения, момент касательных усилий относительно оси z должен обратиться в нуль:

$$M_z = \iint (X_z y - Y_z x) dx dy = 0.$$

Этого мы можем достигнуть надлежащим выбором постоянного члена в правой части уравнения (10).

Заметим, что напряжения, соответствующие этому члену, суть те напряжения, с которыми мы имели дело при рассмотрении кручения призм. В сечениях, симметричных относительно оси x , этих напряжений при изгибе не должно быть, и потому постоянную уравнения (10) придется приравнять нулю.

В тех случаях, когда правая часть уравнения (11) не обращается в нуль и функция ψ на контуре не постоянна, мы все же можем привести задачу к нахождению провисания мембраны, натянутой на плоский контур, если только граничные значения ψ можно предположить себе как значения некоторой функции $\varphi(x, y)$, обладающей тем свойством, что как функция $\varphi(x, y)$, так и ее первые производные конечны и непрерывны по всему сечению, и величина $\Delta^2\varphi$ остается конечной в той же области.

Тогда вместо функции ψ мы будем искать функцию

$$\theta = \psi - \varphi.$$

Эта новая функция будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = \frac{\sigma}{1+\sigma} \frac{W}{J} y - f'(y) - \Delta^2\varphi + \text{const},$$

и на контуре она будет обращаться в нуль.

Если $\varphi(x, y)$ найдено, задача, как мы видим, приводится к разысканию провисания натянутой мембраны под действием сплошной нагрузки.

Вместо выражений (9) для напряжений X_z и Y_z можно взять более общие выражения

$$X_z = \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{Wx^2}{2J} + f(y), \quad Y_z = -\frac{\partial\psi}{\partial x} + \varphi(x),$$

или

$$X_z = \frac{\partial\psi}{\partial y} + \theta(y), \quad Y_z = -\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{Wxy}{J} + \Phi(x).$$

Для первого случая условие на контуре будет

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = \left[\frac{Wx^2}{2J} - f(y) \right] \frac{\partial y}{\partial s} - \varphi(x) \frac{\partial x}{\partial s}. \quad (12)$$

Во втором случае получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = \left[-\frac{Wxy}{J} + \Phi(x) \right] \frac{\partial x}{\partial s} - \theta(y) \frac{\partial y}{\partial s}. \quad (12')$$

Если функции $f(y), \dots, \theta(y)$ удастся подобрать так, что $\partial\psi/\partial s = 0$, то задача приводится к мембране, натянутой на плоский контур.

§ 5. Частные случаи

Круг. Уравнение контура в этом случае будет

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

и мы обратим правую часть уравнения (11) в нуль, если положим

$$f(y) = \frac{W}{2I} (r^2 - y^2).$$

Вставляя это в уравнение (10) и полагая в нем $\text{const} = 0$, получим для определения ψ уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1 + 2\sigma}{1 + \sigma} \frac{W}{J} y, \quad (13)$$

и на контуре $\psi = 0$.

Задача сводится к определению провисания мембраны под действием сплошной нагрузки, меняющейся по закону плоскости. Очевидно, ψ должно быть нечетной функцией относительно y , и мы, ограничиваясь лишь одним членом общего решения (7), должны положить

$$\psi_{01} = a_{01}(x^2 + y^2 - r^2)y.$$

Полагая

$$a_{01} = \frac{1}{8} \frac{1 + 2\sigma}{1 + \sigma} \frac{W}{J},$$

найдем, что взятое нами выражение ψ_{01} удовлетворяет дифференциальному уравнению (12) и представляет, следовательно, точное решение задачи.

Для напряжений получаем значения

$$X_z = \frac{W}{2J} \frac{3 + 2\sigma}{4(1 + \sigma)} \left[r^2 - x^2 + \frac{2\sigma - 1}{3 + 2\sigma} y^2 \right],$$

$$Y_z = -\frac{1}{4} \frac{1 + 2\sigma}{1 + \sigma} \frac{W}{J} xy.$$

Тот же результат можно получить и иным путем.

Положим

$$X_z = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad Y_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{W}{J} xy.$$

Тогда на основании (12') условие на контуре будет

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = -\frac{W}{J} \frac{xy}{\partial s}.$$

Или в полярных координатах

$$\frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = \frac{W}{J} r^2 \sin \theta \cos^2 \theta,$$

откуда получаем на контуре

$$\psi = \frac{WJ^3}{3J} \cos^3 \theta = \frac{Wy^3}{3J}.$$

Вместо ψ будем искать другую функцию

$$\theta = \psi - \frac{Wy^3}{3J}.$$

Эта функция на контуре обращается в нуль, и мы ее найдем тем же приемом, как и в предыдущем случае.

От полученного решения для круглого стержня легко перейти к стержню, сечение которого имеет форму полукруга. В самом деле, в точках вертикального диаметра кругового поперечного сечения напряжения Y_z обращаются в нуль, следовательно, по вертикальной плоскости XZ , разделяющей круглый стержень пополам, никаких напряжений нет, каждая половина стержня работает самостоятельно, и касательные напряжения, приходящиеся на поперечное сечение одной половины, приводятся к силе $W/2$, но сила эта, как легко показать, не будет проходить через центр тяжести полукруглого поперечного сечения.

Следовательно, каждая половина стержня испытывает кроме изгиба еще и кручение, причем величина скручивающего момента такова, что он удерживает от поворачивания вертикальный диаметр полукруглого поперечного сечения. Имея выражения для касательных напряжений в случае изгиба круглого стержня и в случае кручения стержня полукруглого сечения, получаем вычитанием распределение касательных напряжений при изгибе стержня полукруглого сечения, у которого диаметр полукруга параллелен направлению силы.

Эллиптическое сечение. Уравнение контура в данном случае будет

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Напряжения выражаем через ψ и $f(y)$ согласно формулам (9). Чтобы обратить в нуль правую часть уравнения (11), положим

$$f(y) = \frac{W}{2J} \left(a^2 - \frac{a^2 y^2}{b^2} \right).$$

Разыскание ψ сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{Wy}{J} \left(\frac{\sigma}{1+\sigma} + \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (14)$$

при том условии, что $\psi=0$ на контуре сечения. Как и в случае круга, мы здесь сразу получаем точное решение, полагая

$$\psi = a_{01} \left(x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 - a^2 \right) y.$$

Подстановкой в уравнение (14) находим

$$a_{01} = \frac{a^2 + \frac{\sigma}{1+\sigma} b^2}{2(3a^2 + b^2)}.$$

При $a=b$ этот результат совпадает с тем, что мы имели для круга.

Имея ψ , легко написать выражения для касательных напряжений X_z и Y_z .

Прямоугольное сечение. Уравнение контура в данном случае будет (рис. 5)

$$(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0.$$

Напряжения выражаем через ψ и $f(y)$ при помощи формул (9).

Правая часть уравнения (11) обратится в нуль, если положить

$$f(y) = \frac{W a^2}{2J},$$

тогда для определения ψ получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\sigma}{1+\sigma} \frac{W}{J} y. \quad (15)$$

На контуре $\psi=0$.

Задача сводится к разысканию провисания мембраны, натянутой на прямоугольный контур и изгибаемой сплошной нагрузкой, меняющейся по закону плоскости. Функция ψ будет нечетной функцией относительно y , и ее можно представить двойным рядом

$$\psi = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_{2m+1, n} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

В таком случае

$$\frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \frac{\pi^2 ab}{2} \left[\frac{(2m+1)^2}{4a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right] a_{2m+1, n}^2,$$

и значения отдельных коэффициентов определяются из уравнений

$$\begin{aligned} a_{2m+1, n} \delta a_{2m+1, n} \pi^2 ab \left[\frac{(2m+1)^2}{4a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right] = \\ = \frac{\sigma}{1+\sigma} \frac{W}{J} \delta a_{2m+1, n} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{b} y dx dy, \end{aligned}$$

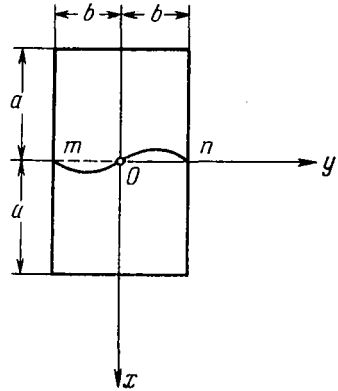


Рис. 5.

откуда

$$a_{2m+1, n} = \frac{\sigma}{1+\sigma} \frac{W}{J} \frac{8b (-1)^{m+n-1}}{\pi^4 (2m+1) n \left[\frac{(2m+1)^2}{4a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]}.$$

Следовательно,

$$\psi = \frac{\sigma}{1+\sigma} \frac{W}{J} \frac{8b^3}{\pi^4} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n-1}}{(2m+1) n \left[\frac{(2m+1)^2}{4} \alpha^2 + n^2 \right]} \times \\ \times \cos \frac{(2m+1) \pi x}{2a} \sin \frac{nxy}{b}.$$

Здесь через α обозначено отношение $b : a$.

Перейдем теперь к напряжениям

$$X_z = \frac{W}{2J} (a^2 - x^2) + \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$Y_z = - \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Заметим прежде всего, что первый член в выражении для X_z представляет собой не что иное, как ту величину касательных напряжений, которую мы получаем в элементарной теории изгиба на основании известных допущений. Функция ψ дает возможность вычислить поправки к касательным напряжениям, определенным элементарным путем.

Наибольшие касательные напряжения элементарная теория дает для точек линии $x=0$. Поправки, которые должны быть присоединены к этим напряжениям, легко выяснить, если представить себе форму провисания мембраны под действием сплошной нагрузки, меняющейся по закону

$$q = \frac{\sigma}{1+\sigma} \frac{W}{J} y.$$

На рис. 5 линия mOn представляет характер линии пересечения выпучившейся мембраны плоскостью xz . Наибольшее положительное значение $\partial \psi / \partial y$ соответствует точке O .

Наибольшие отрицательные значения той же производной будем иметь в точках m и n ; что касается производной $\partial \psi / \partial x$, то она, очевидно, обращается в нуль при $x=0$.

Следовательно, по линии $x=0$ будут лишь касательные напряжения X_z , они распределяются неравномерно, как то дает элементарная теория, и наибольшие напряжения соответствуют точке O . Величину поправки для этой точки получим, составляя производную $\partial \psi / \partial y$ и полагая в ней $x=y=0$:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{x=y=0} = \frac{8\sigma}{1+\sigma} \frac{3W}{4\pi^3} \frac{b}{a^3} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n-1}}{(2m+1) \left[\frac{(2m+1)^2}{4} \alpha^2 + n^2 \right]}.$$

Принимая во внимание, что ¹⁾

$$\sum \frac{(-1)^m}{(2m+1)[(2m+1)^2+k^2]} = \frac{\pi^3}{32} \frac{\operatorname{sch} \frac{k\pi}{2} - 1}{\frac{1}{2} \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2},$$

получим

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{x=y=0} = -\frac{\sigma}{1+\sigma} \frac{3W}{8ba} \frac{b^2}{a^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \right],$$

что совершенно совпадает с результатом, полученным Сен-Венаном ²⁾.

Без особых затруднений можно было бы, конечно, получить приближенное выражение для ψ в форме целого полинома. Если ограничиться лишь одним членом разложения (7'), то следует положить

$$\psi = a_{01}(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)y.$$

Пользуясь принципом сложения сил, легко получить распределение касательных напряжений в том случае, когда направление силы не совпадает с направлением одной из осей симметрии прямоугольного поперечного сечения. Как частный случай можно рассмотреть распределение касательных напряжений в стержне квадратного поперечного сечения в том случае, когда направление силы W совпадает с направлением вертикальной диагонали (рис. 6).

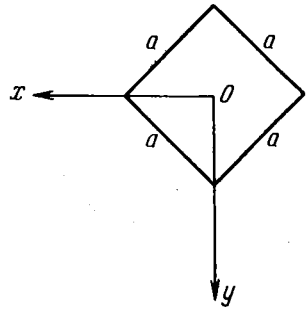


Рис. 6.

По плоскости xz , разделяющей пополам изгибаемый стержень, нет никаких напряжений, следовательно, каждая половина стержня деформируется независимо под действием силы $W/2$, причем эта сила не проходит через центр тяжести соответствующего треугольного поперечного сечения. Каждая половина балки кроме изгиба испытывает кручение. Величины крутящего момента определяются тем условием, что сторона треугольника, соответствующая

¹⁾ См. стр. 22 нашей работы, указанной в сноске ¹⁾ на стр. 272.

²⁾ Saint-Venant B. Mémoire sur la flexion des prismes, sur les glissements transversaux et longitudinaux qui l'accompagnent lorsqu'elle ne s'opère pas uniformément ou en arc de cercle, et sur la forme courbe affectée alors par leurs sections transversales primitivement planes. Journal de mathématiques pures et appliquées (J. Liouville), 2 série, 1856, tome 1, pp. 89—189. См. § 25. [Перевод на русский язык: Сен-Венан Б. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. Физматгиз, М., 1961, 518 стр. Мемуар об изгибе призм, стр. 381—494.]

вертикальной диагонали квадрата, сохраняет при деформации вертикальное направление. Мы можем, пользуясь общим выражением (7ⁿ), получить приближенное выражение для касательных напряжений в случае скручивания стержня треугольного сечения. Комбинируя эти напряжения с напряжениями изгиба для квадратного сечения, получим распределения касательных напряжений для стержня, сечение которого — равнобедренный прямоугольный треугольник с вертикальной гипотенузой.

Задача может быть также приближенно решена и в том случае, когда равнобедренный треугольник не прямоугольный и сила W направлена параллельно основанию.

В случае сечения, ограниченного двумя дугами круга и двумя вертикальными прямыми (рис. 7), также легко задачу привести к

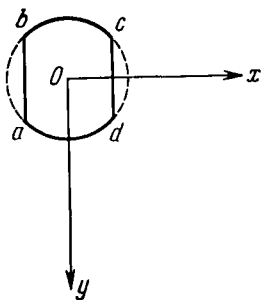


Рис. 7.

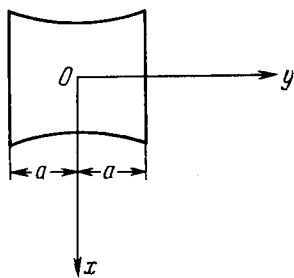


Рис. 8.

разыскиванию провисания мембраны, натянутой на плоский контур, и вычислить напряжения, пользуясь приближенной методой Рэлея — Ритца.

Особенно просто решается задача о распределении касательных напряжений в случае сечения, рассмотренного Ф. Грасгофом ¹⁾ (рис. 8).

Сечение образовано двумя дугами гиперболы

$$x^2(1+\sigma) - y^2\sigma = a^2$$

и двумя прямыми $y = \pm a$.

Берем для напряжений формулы (9). Правую часть уравнения (11) обратим в нуль, положив

$$f(y) = \frac{W}{2J} \left(\frac{\sigma}{1+\sigma} n^2 + \frac{a^2}{1+\sigma} \right).$$

¹⁾ G r a s h o f F. Theorie der Elastizität und Festigkeit mit Bezug auf ihre Anwendungen in der Technik. Berlin, Verlag von Rudolph Gärtner, Zweite Auflage, 1878, 408 SS. См. S. 246. [Первое издание: G r a s h o f F. Die Festigkeitslehre mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse des Maschinenbaues. Berlin, Verlag von R. Gärtner, 1866, XIV+294 S.]

Функция ψ определится из уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

причем на контуре $\psi=0$.

В таком случае $\psi=0$ по всему сечению и касательные напряжения будут

$$X_z = -\frac{Wx^2}{2J} + \frac{W}{2J} \left(\frac{\sigma}{1+\sigma} y^2 + \frac{a^2}{1+\sigma} \right), \\ Y_z = 0.$$

Легко решаются задачи также в том случае, когда уравнение контура имеет вид

$$y = \pm b \left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^\sigma \right].$$

Мы ограничимся приведенными примерами; из них видно, что введение функции напряжений ψ может упростить решение задачи о кручении и изгибе призматических стержней. В некоторых случаях этим путем можно получать приближенные решения, применяя методу Рэлея — Ритца.

ОБ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЕЙ, ИМЕЮЩИХ НЕЗНАЧИТЕЛЬНУЮ ПЕРВОНАЧАЛЬНУЮ КРИВИЗНУ

Вестник общества технологов, 1913, том 20, № 13, стр. 411—414.

§ 1. Продольные силы заданы

На практике нередко приходится иметь дело с изгибом слегка искривленных стержней. Иногда начальный изгиб является результатом неизбежной неточности изготовления, и тогда форма кривой для нас неизвестна, мы можем иметь лишь некоторые данные относительно величины наибольших начальных прогибов, иногда же начальное искривление задается и имеет вполне определенную форму. Если начальное искривление оси стержня выполнено по дуге круга радиуса r , то, обозначая радиальные перемещения точек оси бруска при изгибе через u , получим в случае малых значений u уравнение

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{u}{r^2} = -\frac{M}{EJ}. \quad (1)$$

В тех случаях, когда изменения кривизны оси бруска при изгибе того же порядка, как и начальная кривизна $1/r$, второй член в левой части уравнения (1) мал по сравнению с первым и им можно пренебречь. Мы приходим, таким образом, к известному дифференциальному уравнению для изогнутой оси прямого стержня и можем прогибы слегка искривленного стержня вычислять по формулам, выведенным для прямых стержней. Заключение это справедливо лишь до тех пор, пока изгиб бруска происходит под действием только поперечных нагрузок. Влияние продольной силы в случае прямого и в случае слегка искривленного стержня будет различно, и это влияние мы постараемся оценить, пользуясь выражением для искривлений в форме тригонометрического ряда. Этот прием в применении к прямым стержням оказывается весьма удобным¹⁾, он дает возможность установить весьма простые формулы для оценки влияния продольной силы на прогиб и на величину наибольшего момента. Возьмем стержень с опертymi концами и расположим ко-

¹⁾ См. нашу работу «Применение нормальных координат к исследованию изгиба стержней и пластинок». Известия Киевского политехнического института, 1910, год 10, книга 1, стр. 1—49. См. также стр. 326 нашего «Курса сопротивления материалов», Киев, Л. Идзиковский, 1911, 518+V стр.

ординатные оси, как указано на рис. 1. Плоскость начальной кривизны совпадает с одной из главных плоскостей бруска и с плоскостью xy , в которой лежат действующие силы. Обозначим через y_1 величину прогиба в каком-либо поперечном сечении, соответствующую начальному искривлению стержня. Через y_2 обозначим прогиб от действия приложенных к стержню сил. Следовательно, ордината какой-либо точки оси стержня после изгиба будет $y = y_1 + y_2$. Пусть начальное искривление стержня представлено в форме ряда

$$y_1 = b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots, \quad (2)$$

а прогибы от действия нагрузок в виде ряда

$$y_2 = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}. \quad (3)$$

Тогда потенциальная энергия изгиба для стержня представится в таком виде:

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y_2}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^4 a_n^2. \quad (4)$$

Коэффициенты a_n , определяющие изгиб стержня, можем легко получить, пользуясь началом возможных перемещений. Форма равновесия, которую принимает стержень под действием внешних сил, характеризуется тем, что изменение потенциальной энергии изогнутого стержня на всяком возможном отклонении от положения равновесия равно приращению работы T внешних сил на том же перемещении. Давая какому-либо коэффициенту a_n приращение δa_n и определяя соответствующие приращения потенциальной энергии изогнутого стержня и работы внешних сил, получим для определения коэффициента a_n уравнение вида

$$\delta V = \delta T. \quad (5)$$

На основании выражения (4) будем иметь

$$\delta V = \frac{EJ\pi^4}{2l^3} n^4 a_n \delta a_n.$$

Что касается значения δT , то оно составит из двух выражений: из выражения для работы поперечных нагрузок на перемещениях, соответствующих взятому приращению коэффициента a_n , и из

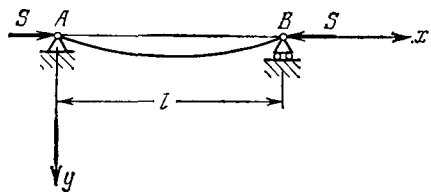


Рис. 1.

работы продольных сил S , соответствующей тем же перемещениям. Если через q обозначим интенсивность сплошной поперечной нагрузки (q — в общем случае некоторая функция от x), то первое выражение будет

$$\delta a_n \int_0^l q \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Оно получается путем суммирования работ элементов нагрузки $q dx$ на перемещениях, соответствующих приращениям прогиба

$$\delta y_2 = \delta a_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Для составления второго выражения нам нужно найти сближение концов стержня A и B при изгибе. В случае малых начальных искривлений и малых прогибов мы можем принять косинус угла между касательной к оси стержня и осью x , равным $1 - \frac{1}{2} (dy/dx)^2$.

Тогда разность между длиной оси стержня и расстоянием между опорными точками A и B до изгиба будет равна

$$\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_1}{dx} \right)^2 dx.$$

После изгиба концы несколько сблизятся, и та же разность будет равна

$$\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \right)^2 dx.$$

Сближение концов при изгибе представится формулой

$$\begin{aligned} \delta l &= \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_1}{dx} \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_2}{dx} \right)^2 dx + \int_0^l \frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{dy_2}{dx} dx. \end{aligned}$$

Вставляя вместо y_1 и y_2 их выражения из (2) и (3), найдем

$$\delta l = \frac{\pi^2}{4l} \sum_{n=1, 2, 3, \dots} a_n^2 n^2 + \frac{\pi^2}{2l} \sum_{n=1, 2, 3, \dots} a_n b_n n^2. \quad (6)$$

Если коэффициенту a_n дадим приращение δa_n , то найденное значение сближения концов δl получит приращение

$$\frac{\pi^2}{2l} n^2 a_n \delta a_n + \frac{\pi^2}{2l} n^2 b_n \delta a_n$$

и продольные силы S произведут при этом работу

$$\frac{\pi^2}{2l} n^2 \delta a_n S (a_n + b_n).$$

После этих предварительных замечаний можем представить уравнение (5) в таком виде:

$$\frac{EJ\pi^4}{2l^3} n^4 a_n \delta a_n = \delta a_n \int_0^l q \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{\pi^2}{2l} n^2 \delta a_n S (a_n + b_n), \quad (6')$$

откуда найдем

$$a_n = \frac{\int_0^l q \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{\pi^2}{2l} n^2 S b_n}{EJ \frac{\pi^4}{2l^3} n^4 - \frac{\pi^2}{2l} n^2 S} = \frac{2l^3 \int_0^l q \sin \frac{n\pi x}{l} dx}{EJ\pi^4 (n^4 - \alpha^2 n^2)} + \frac{\alpha^2 b_n}{n^2 - \alpha^2}.$$

Здесь для упрощения введено обозначение

$$S: \frac{EJ\pi^2}{l^2} = \alpha^2,$$

α^2 представляет отношение продольной силы к эйлеровой нагрузке для прямого стержня, имеющего такую же длину и жесткость, как и рассматриваемый брусок. Определив, таким образом, значения коэффициентов, входящих в выражение (3), получим прогиб стержня в таком виде:

$$y_2 = \frac{2l^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1, 2, 3, \dots} \frac{\int_0^l q \sin \frac{n\pi x}{l} dx}{n^4 - \alpha^2 n^2} \sin \frac{n\pi x}{l} + \alpha^2 \sum_{n=1, 2, 3, \dots} \frac{b_n}{n^2 - \alpha^2} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (7)$$

Первая сумма в этом выражении дает прогиб стержня с прямой осью, второй суммой оценивается влияние первоначальной кривизны.

Если вместо сжимающих мы будем иметь растягивающие продольные силы, то для получения прогиба y_2 нужно в выражении (7) изменить знак у α^2 .

Применим общую формулу (7) к численному примеру. Железный стержень, имеющий длину $l=150$ см и квадратное поперечное сечение 1×1 см², изгибается собственным весом и растягивается силами $S=100$ кг. Нужно найти выражение для прогиба y_2 , если начальное искривление определяется формулой.

$$y_1 = \left(-0,8 \sin \frac{\pi x}{l} \quad 0,3 \sin \frac{2\pi x}{l} \right) \text{ см.}$$

Полагая $E=2,2 \cdot 10^6$ кг/см² и $ql=1,2$ кг, найдем для данного случая

$$\alpha^2 = 1,25 \quad \text{и} \quad 4ql^4/EJ\pi^5 = 0,289 \text{ см.}$$

Первая сумма в выражении (7) при q постоянном представится так:

$$\frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \left[\frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1+\alpha^2} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^3(3^2+\alpha^2)} + \dots \right] = 0,129 \sin \frac{\pi x}{l} + 0,001 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots$$

Члены убывают так быстро, что мы можем ограничиться первыми двумя членами суммы.

Что касается прогиба, зависящего от первоначальной кривизны, то для него получим выражение

$$-\frac{\alpha^2 b_1}{1+\alpha^2} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{\alpha^2 b_2}{2^2+\alpha^2} \sin \frac{2\pi x}{l} = 0,444 \sin \frac{\pi x}{l} + 0,071 \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

С возрастанием продольной силы значение первой суммы будет убывать, а прогиб, обусловленный первоначальным искривлением, возрастает. Продольная растягивающая сила стремится уничтожить начальные прогибы. Если взять для нашего примера продольную силу равной 1000 кг, то первая сумма в выражении (7) приобретает значение

$$0,021 \sin \frac{\pi x}{l} + 0,0005 \sin \frac{3\pi x}{l}.$$

Для второй суммы получим

$$0,740 \sin \frac{\pi x}{l} + 0,227 \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

Почти весь начальный прогиб уничтожен продольной растягивающей силой.

В качестве второго примера рассмотрим влияние начальной погиб стержня на изгиб при действии продольных сжимающих сил. Если начальное искривление определяется выражением (2) и поперечных нагрузок нет, то прогиб от продольной сжимающей силы, на основании (7) представляется так:

$$y_2 = \alpha^2 \sum_{n=1, 2, 3, \dots} \frac{b_n \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^2 - \alpha^2}.$$

Максимальное напряжение в каком-либо поперечном сечении может быть вычислено по формуле

$$\rho = \frac{S}{F} + \frac{M}{W} = \frac{S}{F} + \frac{S(y_1 + y_2)}{W} = \frac{S}{F} \left[1 + \frac{h(y_1 + y_2)}{i^2} \right],$$

где F — площадь поперечного сечения; h — расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленного сжатого волокна; i — соответствующий радиус инерции поперечного сечения стержня.

Если принять начальное искривление по синусоиде

$$y_1 = b_1 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \text{то} \quad y_2 = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} b_1 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Введя обозначения $h : i = k$ и $b_1 : i = k_1$, напомним формулу для максимальных сжимающих напряжений так:

$$\rho = \frac{S}{F} \left(1 + \frac{k k_1}{1 - \alpha^2} \right).$$

На практике k не более трех, и если положить $b_1 = 0,001l$, то при отношении $l/i = 100$ найдем

$$\rho \leq \frac{S}{F} \left(1 + \frac{0,3}{1 - \alpha^2} \right).$$

На основании этой формулы легко показать, что при прогибах, не превосходящих $0,001l$, расчет стержня на продольный изгиб всегда обеспечивает достаточный запас прочности. Вопрос этот был подробно разобран Ф. С. Ясинским¹⁾ в предположении начального искривления по дуге круга.

§ 2. Продольные силы неизвестны

Рассмотрим теперь тот случай изгиба слегка искривленного стержня, когда продольные силы не заданы, а являются следствием того обстоятельства, что при изгибе концы стержня не могут свободно сближаться. В зависимости от начальных искривлений продольные силы могут быть растягивающими или сжимающими, влияние их на изгиб может быть значительно большим, чем в случае стержней с прямой осью. В качестве примера рассмотрим изгиб стержня с опертыми несближающимися концами под действием равномерно распределенной нагрузки q .

Начальное искривление возьмем по синусоиде

$$y_1 = b_1 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

На основании формулы (7) прогиб стержня представится так:

$$y_2 = \frac{4ql^4}{EJ\pi^2} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n^3(n^2 + \alpha^2)} - \frac{\alpha^2 b_1}{1 + \alpha^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

¹⁾ Я с и н с к и й Ф. С. Собрание сочинений. Том 1. Сборник института инженеров путей сообщения, вып. 56, С.-Петербург, тип. Ю. Н. Эрлих, 1902, 320 стр. См. стр. 241.

Мы ограничимся первым членом ряда и напишем формулу для прогиба в таком виде:

$$y_2 = \frac{4ql^4}{EJ\pi^2} \frac{1}{1+\alpha^2} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{\alpha^2 b_1}{1+\alpha^2} \sin \frac{\pi x}{l} \approx \frac{f_0 - \alpha^2 b_1}{1+\alpha^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Здесь через f_0 обозначен прогиб при наличии только поперечных нагрузок (при отсутствии продольных сил).

Величина α^2 пока нам неизвестна, и мы ее найдем из следующих соображений. Концы стержня не перемещаются, следовательно, сближение концов, которое является следствием изгиба, равно по величине удлинению стержня от действия продольной силы. На основании формулы (6) найдем

$$\delta l = \frac{\pi^2}{4l} \left(\frac{f_0 - \alpha^2 b_1}{1 + \alpha^2} \right)^2 + \frac{\pi^2}{2l} \frac{f_0 - \alpha^2 b_1}{1 + \alpha^2} b_1.$$

Удлинение оси стержня от продольной растягивающей силы равно $S l / EF = \alpha^2 i^2 \pi^2 / l$.

Приравнявая это найденному выше сближению концов, получим для определения α^2 уравнение

$$\frac{(f_0 - \alpha^2 b_1)^2}{(1 + \alpha^2)^2} \left[1 + \frac{2b_1(1 + \alpha^2)}{f_0 - \alpha^2 b_1} \right] = 4\alpha^2 i^2. \quad (8)$$

Разыскание корней этого уравнения для заданных значений f_0 и b_1 не представляет никаких затруднений. В нижеследующей таблице ¹⁾ мы приводим значения прогибов посредине f , продольной

Т а б л и ц а

q , кг/см	$b_1=0$			$b_1=1$ см			$b_1=2$ см			$b_1=3$ см		
	f , см	S , кг	$\frac{S}{F} + \frac{M}{W}$, кг/см ²	f , см	S , кг	$\frac{S}{F} + \frac{M}{W}$, кг/см ²	f , см	S , кг	$\frac{S}{F} + \frac{M}{W}$	f , см	S , кг	$\frac{S}{F} + \frac{M}{W}$, кг/см ²
0,1	0,445	107	570	0,10	101	191	0,03	60	78	0,01	43	43
0,2	0,639	221	873	0,18	191	347	0,06	119	149	0,03	83	83
0,3	0,769	320	1094	0,25	272	482	0,09	176	218	0,04	124	124
0,4	0,870	410	1273	0,31	350	608	0,11	229	331	0,06	164	164
0,5	0,953	493	1426	0,37	421	727	0,14	288	342	0,07	205	205
0,6	1,025	570	1566	0,42	490	832	0,16	342	402	0,09	243	243
0,8	1,148	713	1801	0,51	620	1004	0,22	443	540	0,11	323	323
1,0	1,251	845	2003	0,59	739	1188	0,26	547	625	0,13	402	402
1,5	1,453	1143	2427	0,76	1030	1480	—	—	—	—	—	—
2,0	1,614	1409	2765	0,89	1270	1870	—	—	—	—	—	—

¹⁾ Вычисление таблицы выполнено инж. К. А. Чалышевым.

силы S и максимальных напряжений для железного стержня длиной $l=100$ см, квадратного поперечного сечения 1×1 см².

Вычисления произведены для прямого стержня и для стержней, изогнутых по синусоиде с начальным прогибом b_1 , равным 1, 2 и 3 см.

Нагрузка q на погонный сантиметр менялась в пределах от 0,1 кг до 2 кг, $E=2 \cdot 10^6$ кг/см² и $b=0,3$.

Из этой таблицы ясно видно, как начальное искривление влияет на обстоятельства изгиба. Благодаря этому искривлению убывают и величина продольной силы и величина напряжений от изгиба. При начальном прогибе $b_1=3$ см роль изгиба ничтожна, и мы можем найти продольную силу, рассчитывая стержень как гибкую нить.

Приведенных примеров достаточно, чтобы показать, насколько просто решается вопрос об изгибе слегка искривленного стержня при помощи общего решения (7).

В тех случаях, когда все нагрузки, действующие на стержень, имеют одно и то же направление и начальная искривленная ось не имеет точек перегиба, формула (8) может служить для приближенного определения продольной силы, возникающей при изгибе в том случае, когда концы изгибаемого стержня не могут сближаться.

К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Вестник общества технологов, 1913, том 20, № 17, стр. 549—557. Отдельный оттиск, С.-Петербург, 1914, 25 стр.

§ 1. Постановка задачи

Задача о расчете тонких оболочек, срединная поверхность которых представляет собой часть сферы, встречается при решении целого ряда практически важных вопросов. С ней мы имеем дело при расчете днищ котлов и различного рода резервуаров, при расчете непроницаемых переборок в паровых турбинах, при расчете купольных сводов и т. д. Несмотря на всю практическую важность этой задачи, полного решения до сих пор не существует. Имеются работы, относящиеся главным образом к двум крайним сравнительно просто решаемым случаям, а именно:

1) Исследован вопрос о напряжениях в том случае, когда напряжениями от изгиба оболочки можно пренебречь по сравнению с напряжениями от растяжения и сжатия срединной поверхности. Этим решением пользуются обычно при расчете тонких днищ резервуаров.

2) Второй крайний случай получается, когда преобладающую роль играют напряжения изгиба и по сравнению с ними можно пренебречь напряжениями, соответствующими растяжению и сжатию срединной поверхности. С подобными задачами мы встречаемся главным образом в акустике при исследовании вибраций тонких сферических оболочек.

В строительной механике большой интерес представляет первый предельный случай. Более подробные исследования ¹⁾ показывают, что в случае тонких сферических оболочек, подвижно опирающихся²⁾ на круговой контур и нагруженных сплошной нагрузкой, симметрично распределенной относительно диаметра сферы, перпендикулярного плоскости опорного контура, напряжения от изгиба незначительны и могут быть определены с любой степенью точности путем последовательных приближений. Если край оболочки по кон-

¹⁾ Reissner H. Spannungen in Kugelschalen (Kuppeln). Festschrift Heinrich Müller—Breslau gewidmet nach Vollendung seines sechzigsten Lebensjahres, Leipzig, A. Gröner, 1912, SS. 181—193.

²⁾ Мы предполагаем, что при таком способе закрепления опертый край может свободно поворачиваться относительно касательных к опорному контуру и свободно перемещаться в направлении, нормальном к срединной поверхности оболочки.

туру заделан, то при деформации у контура возникают значительные напряжения от изгиба. Напряжения эти, как показал О. Блюменталь¹⁾, могут быть определены при помощи асимптотического интегрирования.

В настоящей статье мы: 1) приводим решение задачи для того случая, когда изгибом можно пренебречь; 2) даем элементарный вывод основного дифференциального уравнения, к которому сводится задача при определении напряжений от изгиба у опорного контура, и 3) при помощи асимптотического решения определяем эти напряжения изгиба. Оказывается, что при сравнительно тонких оболочках асимптотическое решение без всяких затруднений может быть применено к расчетам. Для сделанного численного примера напряжения изгиба превосходят напряжения, соответствующие растяжению срединной поверхности. Напряжения изгиба быстро падают по мере удаления от закрепленного контура.

§ 2. О напряжениях в симметрично нагруженной сферической оболочке, не сопротивляющейся изгибу

Пусть рис. 1 представляет меридиональное сечение рассчитываемой сферической оболочки постоянной толщины. Двумя коническими поверхностями, соответствующими углам θ и $\theta + d\theta$, и двумя меридиональными сечениями, наклоненными под углом $d\varphi$ друг к другу, выделяем заштрихованный на рисунке элемент оболочки. В случае нагрузки, симметричной относительно вертикального диаметра OO , по боковым граням выделенного элемента будут действовать лишь нормальные напряжения. Обозначим через T_2 растягивающее усилие в оболочке, отнесенное к единице длины меридионального сечения срединной поверхности (усилие это стремится разорвать оболочку по меридиональному сечению), через T_1 обозначим отнесенное к единице длины растягивающее усилие, стремящееся разорвать оболочку по параллельному кругу. По верхней и нижней поверхности выделенного элемента могут действовать приложенные к оболочке силы.

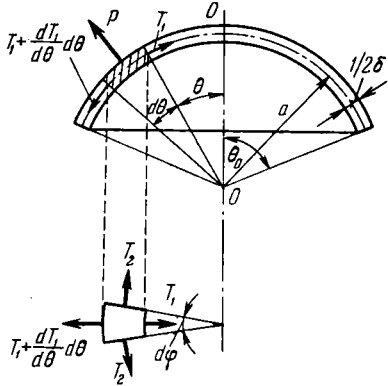


Рис. 1.

¹⁾ Blumenthal O. Über asymptotische Integration von Differentialgleichungen mit Anwendung auf die Berechnung von Spannungen in Kugelschalen. Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians, Cambridge, 22—28 August 1912, Cambridge, University press, 1913, vol. II, pp. 319—327.

Силы эти разложим на две составляющие в направлении радиальном и в направлении касательной к меридиану. Обозначим через P и Q величины этих составляющих, отнесенные к единице поверхности оболочки. В случае симметричной нагрузки T_1 , T_2 , P и Q будут функциями только угла θ .

Для определения неизвестных функций T_1 и T_2 составим два уравнения статики, проектируя все приложенные к выделенному элементу силы на направление радиуса и касательной к меридиану. Если через a обозначим радиус сферы и через δ — толщину оболочки, то уравнения равновесия напишутся так:

$$\begin{aligned} Pa^3 \sin \theta d\theta d\varphi - T_1 a \sin \theta d\varphi d\theta - T_2 a d\theta \sin \theta d\varphi &= 0, \\ Qa^3 \sin \theta d\theta d\varphi + \frac{d}{d\theta}(T_1 a \sin \theta d\varphi) d\theta - T_2 a \cos \theta d\theta d\varphi &= 0. \end{aligned}$$

После сокращений получим

$$\left. \begin{aligned} -(T_1 + T_2) + Pa &= 0, \\ Qa + \frac{dT_1}{d\theta} + (T_1 - T_2) \operatorname{ctg} \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Исключая из этих уравнений T_2 , получим для T_1 уравнение

$$\frac{dT_1}{d\theta} + 2T_1 \operatorname{ctg} \theta = a(P \operatorname{ctg} \theta - Q).$$

Общий интеграл этого уравнения первого порядка получим способом изменения произвольной постоянной в таком виде:

$$T_1 = \frac{a}{\sin^2 \theta} \left[C + \int P \sin \theta \cos \theta d\theta - \int Q \sin^3 \theta d\theta \right]. \quad (2)$$

В качестве частного примера рассмотрим случай действия на сферическую оболочку собственного веса. Если через γ обозначим вес единицы объема оболочки, то

$$P = -\gamma\delta \cos \theta \quad \text{и} \quad Q = \gamma\delta \sin \theta.$$

Вставляя это в общий интеграл (2), найдем

$$T_1 = \frac{a}{\sin^2 \theta} [C + \gamma\delta \cos \theta].$$

Произвольную постоянную C нужно подобрать таким образом, чтобы T_1 оставалось конечным при $\theta=0$.

Этому условию мы удовлетворим, полагая $C = -\gamma\delta$, тогда

$$T_1 = -a\gamma\delta \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right), \quad T_2 = Pa - T_1 = -a\gamma\delta \left(\cos \theta - \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right). \quad (3)$$

В нижеследующей таблице приведены значения скобок, входящих в выражения для T_1 и T_2 , при различных значениях угла θ .

Т а б л и ц а

θ	$\frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta}$	$\cos \theta - \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta}$	θ	$\frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta}$	$\cos \theta - \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta}$
0°	0,500	0,500	50°	0,608	0,035
10°	0,505	0,480	60°	0,666	-0,16
20°	0,515	0,425	70°	0,744	-0,402
30°	0,536	0,330	80°	0,852	-0,678
40°	0,568	0,198	90°	1,000	-1,000

В вершине оболочки усилия T_1, T_2 — сжимающие и равны по величине $-\alpha\gamma\delta/2$ (см. § 3). С возрастанием θ усилие T_1 возрастает, а усилие T_2 сначала убывает по абсолютному значению, дальше переходит через нулевое значение и обращается в растягивающее усилие.

§ 3. Напряжения от изгиба в сферической оболочке, подвижно опирающейся на круговой контур

Примем теперь во внимание и изгиб сферической оболочки. В таком случае к прежним силам, действующим на выделенный элемент (рис. 1), придется присоединить перерезывающую силу N и изгибающие моменты G_1 и G_2 (рис. 2). Силы и моменты отнесены к единице длины соответствующего сечения срединной поверхности.

Для определения сил T_1, T_2, N и моментов G_1, G_2 мы можем составить три уравнения равновесия выделенного элемента. Проектируя все силы на направление радиуса и касательной к меридиану и приравнявая нулю момент всех приложенных к элементу сил, мы получим три таких уравнения:

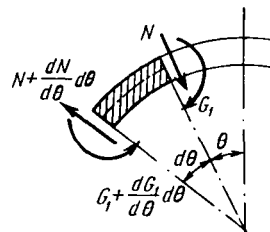
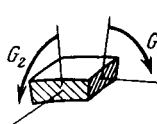


Рис. 2.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{d\theta} + N \operatorname{ctg} \theta - (T_1 + T_2) + Pa &= 0, \\ \frac{dT_1}{d\theta} + (T_1 - T_2) \operatorname{ctg} \theta + N + Qa &= 0, \\ \frac{dG_1}{d\theta} + (G_1 - G_2) \operatorname{ctg} \theta - Na &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Этих уравнений недостаточно для определения неизвестных величин T_1, \dots, G_2 , и мы должны к уравнениям статики присоединить

уравнения, устанавливаемые на основании зависимости между усилиями и перемещениями точек сферической оболочки при деформации.

Обозначим через w перемещения точек оболочки по радиусу, в направлении увеличения радиуса, и через u перемещения по касательной к меридиану, в направлении увеличения угла θ .

Через эти перемещения легко выразить относительное удлинение e_1 дуги меридиана и удлинение e_2 дуги параллельного круга срединной поверхности оболочки. Начнем с определения e_2 .

Благодаря перемещениям w и u радиус параллельного круга, соответствующий углу θ , возрастет на величину $u \cos \theta + w \sin \theta$, и так как первоначальное значение этого радиуса равно $a \sin \theta$, то относительное удлинение радиуса, а следовательно, и дуги параллельного круга равно

$$e_2 = \frac{u \cos \theta + w \sin \theta}{a \sin \theta} = \frac{w}{a} + \frac{u}{a} \operatorname{ctg} \theta. \quad (5)$$

Что касается удлинения e_1 , то оно обусловлено двумя причинами: радиальным перемещением w и перемещениями u . Относительное удлинение, соответствующее радиальному перемещению, равно w/a , так как в этом именно отношении возрастает радиус дуги меридионального сечения. Выясним теперь величину относительного удлинения, обусловленного касательными перемещениями. Если u — перемещение, соответствующее углу θ , то для угла $\theta + d\theta$ будем иметь перемещение $u + \frac{du}{d\theta} d\theta$. Разность этих перемещений представит собой приращение длины элемента в направлении касательной к меридиану, и соответствующее относительное удлинение будет равно

$$\frac{\frac{du}{d\theta} d\theta}{a d\theta} = \frac{1}{a} \frac{du}{d\theta},$$

окончательно

$$e_1 = \frac{w}{a} + \frac{1}{a} \frac{du}{d\theta}. \quad (6)$$

В дальнейшем нам придется кроме сил определять еще и изгибающие моменты, величины которых зависят от изменений кривизны деформируемой оболочки. Выразим эти изменения кривизны через перемещения u и w . До деформации кривизна всякого нормального сечения срединной поверхности оболочки равнялась $1/a$. После деформации срединная поверхность обратится в некоторую поверхность вращения. Одна из главных кривизн этой поверхности будет соответствовать кривизне меридионального сечения, представ-

ленного на рис. 3 сплошной линией, другая соответствует нормальному сечению, перпендикулярному плоскости рисунка.

Возьмем элемент оболочки mn (рис. 3). После деформации он займет новое положение m_1n_1 . Найдем соответствующее изменение кривизны в плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка.

До деформации радиус кривизны в этой плоскости равнялся $OA=a$. После деформации радиус кривизны представится отрезком O_1A_1 , нормальным к элементу m_1n_1 . Изменение радиуса обусловлено радиальным перемещением w и поворотом элемента mn в плоскости меридиана на угол, равный, очевидно, $dw/ad\theta$. Перемещение u до поверхности сферы никаких изменений в радиусе кривизны не вызывает. Из геометрических соображений легко написать выражение для искомого приращения радиуса кривизны $\delta a = -AA_1 + O_1B$:

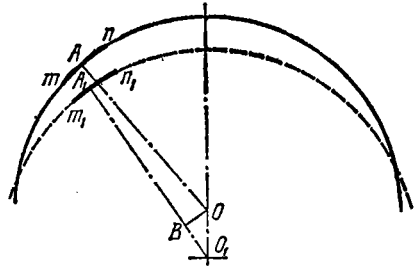


Рис. 3.

$$\delta a = w + \frac{dw}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta.$$

Соответствующее увеличение кривизны будет равно

$$k_2 = \frac{1}{a + \delta a} - \frac{1}{a} = -\frac{\delta a}{a^2} = -\frac{1}{a^2} \left(w + \frac{dw}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta \right). \quad (7)$$

Для определения изменения кривизны, соответствующей меридиональному сечению, мы воспользуемся формулой, которую применяют при исследовании изгиба кривого стержня с круговой осью ¹⁾. Формула эта для приращения кривизны меридионального сечения дает выражение

$$k_1 = -\frac{1}{a^2} \left(\frac{d^2w}{d\theta^2} + w \right). \quad (8)$$

Имея выражения для относительных удлинений e_1 и e_2 срединной поверхности и для изменений k_1, k_2 главных кривизн, легко получим относительные удлинения в направлении меридиана и в направлении параллельного круга для волокна, лежащего на расстоянии z от срединной поверхности. Найдем сначала относительное удлинение $(e_1)_z$ в направлении меридиана для волокна mn (рис. 4), выделенного из элемента aba_1b_1 .

¹⁾ Вывод этой формулы можно найти на стр. 372 нашего «Курса сопротивления материалов», Киев, Л. Идзиковский, 1911, 518+V стр.

При деформации оболочки грань элемента a_1b_1 перемещается относительно ab и занимает некоторое новое положение $a'b'$. Это перемещение грани a_1b_1 можно представить себе состоящим из двух частей: 1) из перемещения a_1b_1 , параллельного самому себе до положения, соответствующего удлинению e_1 срединной поверхности; при этом приращения длины всех волокон будут одинаковы и относительное удлинение волокна mn будет равно $e_1 a / (a+z)$, и 2) из поворота грани a_1b_1 на некоторый угол $\delta d\theta$. При этом вращении волокно mn получит относительное удлинение $\frac{z}{a+z} \cdot \frac{\delta d\theta}{d\theta}$.

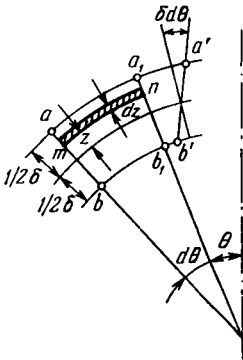


Рис. 4.

Полное удлинение волокна mn представится формулой

$$(e_1)_z = \frac{e_1 a}{a+z} + \frac{z}{a+z} \cdot \frac{\delta d\theta}{d\theta}.$$

Для получения окончательной формулы нужно только отношение $\delta d\theta/d\theta$ выразить через перемещения u и w . Заметим, что изменение кривизны в меридиональном сечении можно представить так:

$$k_1 = \frac{d\theta + \delta d\theta}{ds + \delta ds} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{ds} \left[\frac{1 + \frac{\delta d\theta}{d\theta}}{1 + \frac{\delta ds}{ds}} - 1 \right] = \frac{1}{a} \left(\frac{\delta d\theta}{d\theta} - e_1 \right).$$

Следовательно, на основании формул (8) и (6)

$$\frac{\delta d\theta}{d\theta} = e_1 - \frac{1}{a} \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \right) = \frac{1}{a} \left(\frac{du}{d\theta} - \frac{d^2 w}{d\theta^2} \right).$$

Вставляя это в полученное выше выражение для удлинения волокна mn , найдем

$$(e_1)_z = \frac{e_1 a}{a+z} + \frac{z}{a(a+z)} \left(\frac{du}{d\theta} - \frac{d^2 w}{d\theta^2} \right).$$

Путем таких же точно рассуждений получим выражение для удлинений в направлении параллельного круга:

$$(e_2)_z = \frac{e_2 a}{a+z} + \frac{z}{a(a+z)} \left(u \operatorname{ctg} \theta - \frac{dw}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta \right).$$

Соответствующие этим удлинениям растягивающие напряжения могут быть вычислены по известным формулам

$$(p_1)_z = \frac{E}{1-\sigma^2} [(e_1)_z + \sigma (e_2)_z],$$

$$(p_2)_z = \frac{E}{1-\sigma^2} [(e_2)_z + \sigma (e_1)_z],$$

и, следовательно, растягивающие усилия T_1 , T_2 представятся такими формулами:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} (p_1)_z \frac{a+z}{a} dz = \frac{E\delta}{1-\sigma^2} (e_1 + \sigma e_2), \\ T_2 &= \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} (p_2)_z \frac{a+z}{a} dz = \frac{E\delta}{1-\sigma^2} (e_2 + \sigma e_1). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Для изгибающих моментов G_1 , G_2 получим выражения

$$G_1 = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} (p_1)_z \frac{(a+z)}{a} z dz,$$

$$G_2 = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} (p_2)_z \frac{(a+z)}{a} z dz.$$

Вставляя в эти формулы выражения для напряжений через перемещения и выполняя интегрирование в указанных пределах, получим

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \frac{C}{a^2} \left[\frac{du}{d\theta} - \frac{d^2w}{d\theta^2} + \sigma \operatorname{ctg} \theta \left(u - \frac{dw}{d\theta} \right) \right], \\ G_2 &= \frac{C}{a^2} \left[\operatorname{ctg} \theta \left(u - \frac{dw}{d\theta} \right) + \sigma \left(\frac{du}{d\theta} - \frac{d^2w}{d\theta^2} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где $C = \frac{E}{1-\sigma^2} \frac{\delta^3}{12}$ — постоянная величина, характеризующая жесткость оболочки при изгибе.

Имея выражения (9) и (10), мы можем определить напряжения изгиба в случае подвижно опертой оболочки путем последовательных приближений ¹⁾. Сначала предполагаем, что в оболочке нет напряжений изгиба, а имеются лишь усилия T_1 и T_2 . Определив их при помощи (1) и (2), как это было показано (см. § 2), находим из уравнений (9) соответствующие перемещения u и w . После этого по формулам (10) могут быть вычислены изгибающие моменты G_1 ,

¹⁾ См. цитированную в сноске ¹⁾ на стр. 292 работу Н. Reissner.

и G_2 . Для получения следующего приближения поступаем так: найденные значения моментов G_1 и G_2 вставляем в третье уравнение системы (4) и из него находим N . Подставив полученное таким образом значение N в первые два уравнения той же системы, найдем более точные выражения для T_1 и T_2 , при помощи которых можно получать дальнейшие приближения, повторяя расчеты в прежнем порядке.

В случае действия собственного веса усилия T_1 и T_2 определяются формулами (3), и уравнения (9) напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} -\alpha\gamma\delta \frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta} &= \frac{E\delta}{1-\sigma^2} (e_1 + \sigma e_2), \\ -\alpha\gamma\delta \left(\cos\theta - \frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta} \right) &= \frac{E\delta}{1-\sigma^2} (e_2 + \sigma e_1). \end{aligned} \right\} \quad (9')$$

Отсюда находим значения e_1 и e_2 . Для определения перемещений пользуемся формулами (5) и (6). Вычитая (5) из (6), найдем

$$\frac{du}{d\theta} - u \operatorname{ctg}\theta = a(e_1 - e_2).$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\begin{aligned} u &= a \sin\theta \left(\int \frac{e_1 - e_2}{\sin\theta} d\theta + C \right), \\ w &= a \left[e_2 - \cos\theta \left(\int \frac{e_1 - e_2}{\sin\theta} d\theta + C \right) \right], \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} u - \frac{dw}{d\theta} &= a \left[-\frac{de_2}{d\theta} + (e_1 - e_2) \operatorname{ctg}\theta \right] \\ \text{и} \\ \frac{du}{d\theta} - \frac{d^2w}{d\theta^2} &= a \left[-\frac{d^2e_2}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta \frac{d(e_1 - e_2)}{d\theta} - \frac{e_1 - e_2}{\sin^2\theta} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Вставляя это в формулы для моментов (10) и принимая во внимание значения e_1 , e_2 , найденные из (9'), получим

$$G_1 = G_2 = -\frac{\gamma\delta^3}{12} \frac{(1+\sigma)(2+\sigma)}{1-\sigma^2} \cos\theta.$$

Максимальные напряжения от изгиба можно вычислить по приближенной формуле

$$\frac{G_1}{\delta^2} = -\frac{\gamma\delta}{2} \cdot \frac{(1+\sigma)(2+\sigma)}{1-\sigma^2} \cos\theta.$$

Сжимающие напряжения, соответствующие усилиям T_1 , равны

$$\frac{T_1}{\delta} = -\alpha\gamma \frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

Отношение максимальных напряжений от изгиба к напряжениям от сжатия равно

$$\frac{\gamma \delta}{2} \frac{(1+\sigma)(2+\sigma)}{1-\sigma^2} \cos \theta : a \gamma \frac{1-\cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\delta}{2a} \cdot \frac{(1+\sigma)(2+\sigma)}{1-\sigma^2} \cos \theta \cdot 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

Наибольшее значение это отношение получает в вершине оболочки при $\theta=0$. Здесь оно равно (при $\sigma=0,3$)

$$\frac{\delta}{a} \frac{(1+\sigma)(2+\sigma)}{1-\sigma^2} \approx 3,28 \frac{\delta}{a}.$$

При малых толщинах напряжения изгиба малы по сравнению с напряжениями сжатия и растяжения. Ими можно пренебрегать или ограничиваться при их вычислении первым приближением.

Если бы мы для рассматриваемого случая пожелали найти дальнейшие приближения и вставили найденные значения G_1 , G_2 в уравнения (4); то для T_1 , T_2 получились бы величины, отличающиеся от ранее найденных (3) членами порядка δ^2/a^2 .

Практический вывод получается такой. В случае подвижно опертой сферической оболочки, находящейся под действием собственного веса, можно с достаточной точностью определить напряжения, пренебрегая изгибом оболочки и вычисляя лишь напряжения от усилий T_1 , T_2 .

§ 4. О напряжениях, возникающих в сферической оболочке при действии усилий, приложенных по круговому опорному контуру

На практике обыкновенно мы имеем случай, когда край оболочки не может перемещаться в направлении, перпендикулярном опорному контуру, и не может поворачиваться относительно касательных к этому контуру. И в куполах, и в днищах резервуаров мы имеем дело с заделанным краем.

Для решения вопроса о напряжениях при таком закреплении по опорному контуру поступим следующим образом. Отбросим предварительно закрепления, стесняющие свободу заделанного края, и приведем таким образом задачу к рассмотренному выше случаю подвижно опертой оболочки. Для этого случая найдем напряжения и перемещения по опорному контуру.

Когда эта часть задачи будет выполнена, нам нужно будет решить такой вопрос: какие усилия N , T_1 и моменты G_1 должны быть приложены по контуру, чтобы сместившийся опорный край оболочки поставить в условия заделки.

Вопрос о напряжениях и деформациях, возникающих в сферической оболочке при действии усилий, приложенных по опорному

контур, может быть разрешен путем асимптотического интегрирования ¹⁾.

Упростим прежде всего систему уравнений (4). Если силы, деформирующие оболочку, приложены лишь к опорному контуру и поверхность оболочки свободна от усилий, то для всякого сечения оболочки нормальным конусом с углом θ (рис. 1 и 2) имеет место уравнение

$$N \cos \theta - T_1 \sin \theta = 0, \quad (12)$$

которое мы получим, проектируя все усилия, действующие по произведенному сечению, на вертикальное направление. На основании этого первое из уравнений (4) представится так:

$$\frac{dN}{d\theta} - T_2 = 0. \quad (13)$$

Присоединяя к уравнениям (12) и (13) последнее из уравнений (4)

$$\frac{dG_1}{d\theta} + (G_1 - G_2) \operatorname{ctg} \theta - Na = 0, \quad (14)$$

получим систему трех уравнений (12), (13) и (14), в которые входят пять неизвестных функций N , T_1 , T_2 , G_1 и G_2 . Последние четыре из этих функций, как мы видели, могут быть выражены через перемещения u , w , и мы окончательно получим три уравнения с тремя неизвестными N , u , w . Исключая из этих уравнений u и w , получим дифференциальное уравнение четвертого порядка для определения N .

Исключение это проще всего проделать следующим образом. Введем обозначения:

$$\frac{\operatorname{ctg} \theta}{a^2} \left(u - \frac{dw}{d\theta} \right) = m, \quad \frac{1}{a^2} \left(\frac{du}{d\theta} - \frac{d^2w}{d\theta^2} \right) = \frac{d}{d\theta} (m \operatorname{tg} \theta).$$

Тогда формулы (10) дают нам

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= C \left[\frac{d}{d\theta} (m \operatorname{tg} \theta) + \sigma m \right], \\ G_2 &= C \left[m + \sigma \frac{d}{d\theta} (m \operatorname{tg} \theta) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10')$$

Вставляя это в уравнение (14), мы получим для N выражение

$$Na = C \left\{ \frac{d^2}{d\theta^2} (m \operatorname{tg} \theta) + \sigma \frac{dm}{d\theta} + (1 - \sigma) \frac{d}{d\theta} (m \operatorname{tg} \theta) \cdot \operatorname{ctg} \theta - (1 - \sigma) m \operatorname{ctg} \theta \right\}. \quad (15)$$

¹⁾ См. цитированную в сноске на стр. 293 работу О. Blumenthal.

Если теперь мы на основании уравнений (12) и (13) выразим m через N и вставим это выражение в (15), то и получим искомое уравнение, заключающее лишь одну неизвестную N .

На основании первой из формул (11) получаем

$$am = \operatorname{ctg} \theta \left[-\frac{de_2}{d\theta} + (e_1 - e_2) \operatorname{ctg} \theta \right]. \quad (16)$$

Удлинения e_1 и e_2 легко могут быть выражены через T_1 и T_2 . В самом деле, формулы (9) дают нам

$$e_1 = \frac{1}{E\delta} (T_1 - \sigma T_2) \quad \text{и} \quad e_2 = \frac{1}{E\delta} (T_2 - \sigma T_1),$$

или, принимая во внимание (12) и (13),

$$e_1 - e_2 = \frac{(1 + \sigma)}{E\delta} (T_1 - T_2) = \frac{1 + \sigma}{E\delta} \left(N \operatorname{ctg} \theta - \frac{dN}{d\theta} \right),$$

$$e_2 = \frac{1}{E\delta} \left(\frac{dN}{d\theta} - \sigma N \operatorname{ctg} \theta \right).$$

Выражение (16) переписется так:

$$am \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{E\delta} \left[-\frac{d^2 N}{d\theta^2} + \sigma \frac{d}{d\theta} (N \operatorname{ctg} \theta) - \right. \\ \left. - (1 + \sigma) \frac{dN}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta + (1 + \sigma) \operatorname{ctg}^3 \theta N \right]. \quad (16')$$

Теперь остается полученное для m выражение вставить в уравнение (15), и мы приходим к уравнению четвертого порядка

$$\sin^4 \theta \frac{d^4 N}{d\theta^4} + 2 \sin^3 \theta \cos \theta \frac{d^3 N}{d\theta^3} - \sin^2 \theta (3 - \sin^2 \theta) \frac{d^2 N}{d\theta^2} + \\ + \sin \theta (3 \cos \theta + 2 \cos \theta \sin^2 \theta) \frac{dN}{d\theta} - \\ - N \left[3 - (1 - \sigma^2) \sin^4 \theta \left(1 + \frac{12a^2}{\delta^2} \right) \right] = 0, \quad (17)$$

закрывающему одну неизвестную N . Если N будет найдено, то остальные величины, представляющие интерес при расчете оболочек, легко могут быть получены на основании ранее найденных формул. В самом деле на основании (12) и (13)

$$T_1 = N \operatorname{ctg} \theta, \quad T_2 = \frac{dN}{d\theta}.$$

На основании (10') и (16')

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= -\frac{\delta^2}{12a(1-\sigma)} \left[\frac{1}{1+\sigma} \frac{d^2 N}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{d^2 N}{d\theta^2} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2-\sigma}{1+\sigma} \operatorname{ctg}^2 \theta + \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \right) \frac{dN}{d\theta} + \left(\sigma + \frac{2-\sigma}{1+\sigma} \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \operatorname{ctg} \theta N \right], \\ G_2 &= -\frac{\delta^2}{12a(1-\sigma)} \left\{ \frac{\sigma}{1+\sigma} \frac{d^2 N}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{d^2 N}{d\theta^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1-2\sigma}{1+\sigma} \operatorname{ctg}^2 \theta - \frac{\sigma(1-\sigma)}{1+\sigma} \right] \frac{dN}{d\theta} + \left(1 - \frac{1-2\sigma}{1+\sigma} \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \operatorname{ctg} \theta N \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Найденные раньше формулы для перемещений напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} u &= a \sin \theta \left(\int \frac{e_1 - e_2}{\sin \theta} d\theta + C \right) = \\ &= \frac{\nu(1+\sigma) \sin \theta}{E\delta} \left[\int \frac{1}{\sin \theta} \left(N \operatorname{ctg} \theta - \frac{dN}{d\theta} \right) d\theta + C_1 \right], \\ w &= a \left[e_2 - \cos \theta \left(\int \frac{e_1 - e_2}{\sin \theta} d\theta + C \right) \right] = \\ &= \frac{a}{E\delta} \left\{ \frac{dN}{d\theta} - \sigma \operatorname{ctg} \theta N - (1+\sigma) \cos \theta \left[\int \frac{1}{\sin \theta} \left(N \operatorname{ctg} \theta - \frac{dN}{d\theta} \right) d\theta + C_1 \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Таким образом, весь расчет сферической оболочки сводится к интегрированию уравнения (17). Уравнение это, как показал проф. О. Блюменталь, приводится подстановкой $N = M/\sqrt{\sin \theta}$ к более простому виду

$$M^{IV} + a_2 M'' + a_1 M' + (b^4 + a_0) M = 0, \quad (20)$$

где

$$a_2 = -\frac{3}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{5}{2},$$

$$a_1 = \frac{3 \cos \theta}{\sin^3 \theta},$$

$$a_0 = -\frac{63}{16} \cdot \frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{9}{16},$$

$$b^4 = (1 - \sigma^2) \left(1 + \frac{12a^2}{\delta^2} \right).$$

Приближенное интегрирование уравнения (20) основано на том, что для малых толщин сферической оболочки величина b^4 представляет собой весьма большое число и, следовательно, при конечных не очень малых значениях θ коэффициенты a_0 , a_1 , a_2 малы по сравнению с b^4 .

Нас в дальнейшем будут интересовать величины напряжений и перемещений y опорного контура оболочки, где θ получает свое наибольшее значение θ_0 . Первое приближение для M мы получим,

взяв вместо уравнения (20) более простое уравнение

$$M^{IV} + b^4 M = 0. \quad (21)$$

Относительная погрешность, которую мы при этом допускаем по отношению к величине N и ее производным, будет порядка $1/b^4$. Частные интегралы уравнения (21) приведут нас к таким значениям N :

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} e^{\frac{b\theta}{\sqrt{2}}} \cos \frac{b\theta}{\sqrt{2}}, \\ N_2 &= \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} e^{\frac{b\theta}{\sqrt{2}}} \sin \frac{b\theta}{\sqrt{2}}, \\ N_3 &= \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} e^{-\frac{b\theta}{\sqrt{2}}} \cos \frac{b\theta}{\sqrt{2}}, \\ N_4 &= \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} e^{-\frac{b\theta}{\sqrt{2}}} \sin \frac{b\theta}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Теперь нам нужно из этих частных интегралов составить общее решение, которое удовлетворяло бы условиям по опорному контуру оболочки и, кроме того, условиям конечности значений усилий и перемещений в центре оболочки (при $\theta=0$). Последнему условию мы удовлетворим, если возьмем лишь частные решения N_1 и N_2 (только эти частные решения представляют собой колебания, постепенно затухающие с убыванием θ) и представим общий интеграл в таком виде:

$$N = A_1 N_1 + A_2 N_2. \quad (23)$$

Постоянные A_1 и A_2 найдутся из условия по опорному контуру.

Если нам заданы усилия, приложенные по контуру, то, следовательно, известны величины N и G_1 при $\theta=\theta_0$, и мы имеем два уравнения для определения двух постоянных A_1 и A_2 . На практике обыкновенно приходится встречаться с тем случаем, когда известны перемещения. Произвольные постоянные определяются тогда на основании уравнения (19).

В эти уравнения кроме произвольных постоянных A_1 , A_2 войдет еще величина C_1 . Для определения этих трех величин мы будем иметь и три условия, так как кроме u и w должна быть задана величина $(dw/d\theta)_{\theta=\theta_0}$, определяющая собой поворачивание закрепленного края сферической оболочки.

¹⁾ Вопрос этот выяснен в цитированной в сноске на стр. 293 работе О. Влентналя. В той же работе намечен путь получения дальнейших приближений.

§ 5. Численный пример

Применим результаты предыдущего параграфа к рассмотрению следующего частного случая. Предположим, что сферическая оболочка ABC (рис. 5) подвергается действию равномерно распределенного внутреннего давления q кг/см². Требуется найти величину наибольших напряжений при условии абсолютной заделки оболочки по опорному контуру.

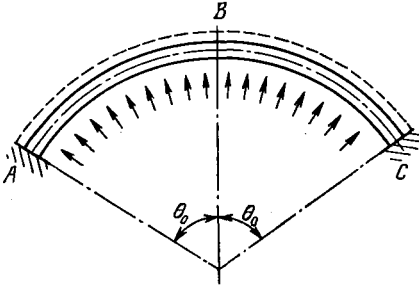


Рис. 5.

Отбросим дополнительные закрепления и будем считать, что оболочка подвижно оперта. Края оболочки могут свободно перемещаться в радиальном направлении. В таком случае напряжения в оболочке будут обусловлены почти исключительно

растяжением срединной поверхности. Величина этих напряжений найдется по формуле, применяемой при расчете тонкостенных сферических сосудов:

$$p = \frac{qa}{2\delta}. \quad (24)$$

Вследствие растяжения края подвижно опертой оболочки переместятся, и она займет некоторое новое положение, указанное на рис. 5 пунктиром. При этом точки опорного контура совершат лишь радиальное перемещение, определяемое формулой

$$(w)_{\theta=\theta_0} = \frac{p}{E} (1-\sigma) a = \frac{qa^2}{2\delta E} (1-\sigma). \quad (25)$$

Приложим теперь по контуру оболочки усилия N и моменты G_1 , причем подберем величину их так, чтобы они вернули сместившийся край оболочки в первоначальное положение (по условию край оболочки абсолютно заделан). Для этого нужно, чтобы перемещения, вызываемые усилиями N , G_1 , удовлетворяли на опорном контуре следующим условиям:

$$(u)_{\theta=\theta_0} = 0, \quad (w)_{\theta=\theta_0} = -\frac{qa^2}{2\delta E} (1-\sigma), \quad \left(\frac{dw}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0} = 0.$$

Принимая во внимание выражения для перемещений (19), перепишем условия по контуру в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{a}{E\delta} \left(\frac{dN}{d\theta} - \sigma \operatorname{ctg} \theta N \right)_{\theta=\theta_0} = -\frac{qa^2}{2\delta E} (1-\sigma), \\ \frac{dw}{d\theta} &= -\frac{a}{E\delta} \left[-\frac{\sigma}{\sin^2 \theta} N + \sigma \operatorname{ctg} \theta \frac{dN}{d\theta} - \frac{d^2 N}{d\theta^2} + \right. \\ &\quad \left. + (1+\sigma) \operatorname{ctg} \theta \left(N \operatorname{ctg} \theta - \frac{dN}{d\theta} \right) \right]_{\theta=\theta_0} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Из этих двух условий найдутся произвольные постоянные A_1 и A_2 общего интеграла (23).

Возьмем для рассчитываемой оболочки такие размеры: $a=4,8$ м, $\theta_0=18^\circ 13'$, $\delta=1,2$ см; кроме того, положим $\sigma=0,3$, $E=2 \cdot 10^6$ кг/см², $q=9$ кг/см², тогда $b \approx 36,4$. Значения N и его производных на контуре представляются такими формулами:

$$N = e^{\frac{b\theta_0}{V^2}} (-0,573A_1 + 1,695A_2),$$

$$\frac{dN}{d\theta} = e^{\frac{b\theta_0}{V^2}} (-57,5A_1 + 26,3A_2),$$

$$\frac{d^2N}{d\theta^2} = e^{\frac{b\theta_0}{V^2}} (-2070A_1 - 832A_2).$$

Вставляя это в уравнения (26), получим

$$A_1 = 0,00327, \quad A_2 = -0,00954.$$

Момент G_1 определится по формуле (18). На контуре он будет равен

$$(G_1)_{\theta=\theta_0} \approx \frac{b\theta_0}{12a(1-\sigma)} \delta^2 e^{\frac{b\theta_0}{V^2}} \cdot 49\,000 A_2.$$

Соответствующие этому изгибающему моменту максимальные напряжения равны

$$(\rho_1)_{\max} = \frac{6\sigma_1}{\delta^2} \approx 2500 \text{ кг/см}^2.$$

Напряжения эти должны быть присоединены к напряжениям растяжения, определяемым по формуле (24) и равным в нашем случае 1800 кг/см². Полученные таким образом значения наибольших напряжений превосходят предел упругости железа и обыкновенной стали. Следовательно, по закрепленному контуру оболочки должны получиться остающиеся деформации, и действительное распределение напряжений будет отличаться от найденного нами в предположении абсолютно заданного контура.

Напряжения, обусловленные усилиями N и моментами G_1 , приложенными по контуру оболочки, имеют характер местных напряжений. Из общего решения (23) для N видно, что эти усилия изменяются по закону быстро затухающих колебаний, полный период которых соответствует углу $2\pi\sqrt{2}/b$. Чем меньше толщина оболочки по сравнению с радиусом и чем больше угол θ_0 , тем быстрее затухают колебания, тем на меньшей части оболочки сказывается влияние усилий, действующих по закрепленному контуру, — результат, аналогичный тому, который получается при рассмотрении изгиба

цилиндрической оболочки силами и парами сил, равномерно распределенными по круговому поперечному сечению¹⁾.

При увеличении толщины оболочки величина b убывает и может оказаться, что первое приближение, которым мы ограничивались в предыдущем примере, будет недостаточно точным. Тогда следующее приближение мы можем получить таким путем. Вместо частного интеграла уравнения (21) $M = e^{\lambda_i \theta}$ (где λ_i — корень соответствующего характеристического уравнения $\lambda^4 + b^4 = 0$) возьмем в качестве второго приближения для интеграла уравнения (20) выражение

$$M = e^{\lambda_i \theta} \left[1 + \frac{1}{b} f(\theta) \right]. \quad (27)$$

Здесь $f(\theta)$ — неизвестная пока функция, которую мы определим таким путем. Вставим выражение (27) в уравнение (20), тогда члены, включающие множители b^4 и b^3 , взаимно сокращаются. Множителем у b^2 будет выражение $\frac{4\lambda_i}{b} f'(\theta) + a_2$. Подберем $f(\theta)$ так, чтобы это выражение обращалось в нуль, тогда

$$f(\theta) = -\frac{b}{4\lambda_i} \int a_2 d\theta = -\frac{b}{4\lambda_i} \left(\frac{3}{2} \operatorname{ctg} \theta + \frac{5}{2} \theta \right)$$

и

$$M = e^{\lambda_i \theta} \left[1 - \frac{1}{4\lambda_i} \left(\frac{3}{2} \operatorname{ctg} \theta + \frac{5}{2} \theta \right) \right].$$

Комбинируя полученные таким путем частные интегралы, найдем для N второе приближение в такой форме:

$$\begin{aligned} N = A_1 \frac{e^{\frac{b\theta}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{\sin \theta}} & \left[\cos \frac{b\theta}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{8b} \cos \frac{b\theta}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2} \operatorname{ctg} \theta + \frac{5}{2} \theta \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{2}}{8b} \sin \frac{b\theta}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2} \operatorname{ctg} \theta + \frac{5}{2} \theta \right) \right] + \\ & + A_2 \frac{e^{\frac{b\theta}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{\sin \theta}} \left[\sin \frac{b\theta}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{8b} \sin \frac{b\theta}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2} \operatorname{ctg} \theta + \frac{5}{2} \theta \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{2}}{8b} \cos \frac{b\theta}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2} \operatorname{ctg} \theta + \frac{5}{2} \theta \right) \right]. \end{aligned}$$

¹⁾ Задача эта имеет большое практическое значение в связи с расчетом цилиндрических резервуаров. Изящное решение этой задачи при помощи метода Ритца имеется в интересной работе: P ö s c h l Th. Über die Berechnung der Spannungsverteilung in zylindrischen Behälterwänden mit veränderlichen Querschnitt. Armierter Beton, 1912, Bd. 5, Heft 5, SS. 169—175; Heft 6, SS. 210—217. См. также P ö s c h l Th., T e r z a g i K. Berechnung von Behältern nach neueren analytischen und graphischen Methoden. Berlin, J. Springer, 1913, 80 S. См. SS. 6—7.

Значение произвольных постоянных определится на основании прежних условий на контуре, но решение уравнений (26) становится более сложным и требует большого количества арифметических вычислений.

В тех случаях, когда толщина оболочки значительна и намеченный выше способ решения потребовал бы разыскания дальнейших приближений, что сопряжено с большим количеством арифметических вычислений, можно для решения задачи воспользоваться вычислительной методой, применяемой при расчете турбинных дисков¹⁾.

Если в рассмотренном нами численном примере изменить направление давлений q на противоположное, то изменится и знак напряжений. В случае такой оболочки, работающей на сжатие, особое практическое значение имеет вопрос устойчивости. Опыты²⁾ показывают, что при переходе давлений за известный предел сферическая форма оболочки перестает быть устойчивой — появляются на оболочке впадины, которые быстро возрастают с возрастанием давления. Теоретического решения задачи об устойчивости сжатой сферической оболочки до сих пор не имеется.

¹⁾ См. нашу статью «Вопросы прочности в паровых турбинах», Вестник общества технологов, 1912, том 19, № 7, стр. 266—279. Примененные вычислительной методы к некоторым численным примерам имеются в работе Г. Келлера: Keller H. Berechnung gewölbter Platten. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1912, Heft 124, SS. 33—82. В самое последнее время появилась работа: Meissner E. Das Elastizitätsproblem für dünne Schalen von Ringflächen-, Kugel- oder Kegelform. Physikalische Zeitschrift, 1913, Jahrgang 14, № 8, SS. 343—349. Автору этой работы удалось привести решение задачи к двум дифференциальным уравнениям второго порядка, интегрирующимся при помощи гипергеометрических рядов.

²⁾ Bach C. Die Widerstandsfähigkeit kugelförmiger Wandungen gegenüber äusserem Überdruck. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1902, Bd. 46, № 10, SS. 333—341.

О ВЛИЯНИИ ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ НА ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С ОПЕРТЫМИ КРАЯМИ, ПОДВЕРГАЮЩЕЙСЯ ДЕЙСТВИЮ РАСТЯЖЕНИЯ ИЛИ СЖАТИЯ

Сборник Института инженеров путей сообщения, Петроград, 1915, вып. 89, стр. 1—4. Отдельный оттиск, Петроград, 1914, 4 стр.

Предположим, что начальное искривление прямоугольной пластинки (рис. 1) задано выражением

$$\omega_0 = \sum \sum A_{mn}^0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Под действием равномерно распределенных усилий интенсивности P_1 и P_2 пластинка получит дополнительный прогиб, который мы в дальнейшем будем обозначать через ω_1 . Полный прогиб, равный $\omega_0 + \omega_1$, обозначим через ω . В таком случае дифференциальное уравнение для определения ω_1 напишется так:

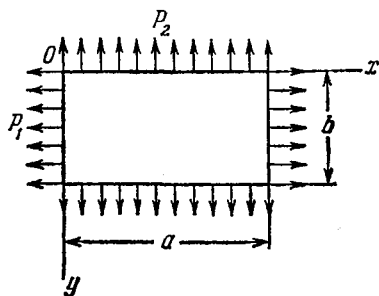


Рис. 1.

$$C \left(\frac{\partial^4 \omega_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega_1}{\partial y^4} \right) = P_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + P_2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}. \quad (1)$$

Представим интеграл этого уравнения в виде такого ряда:

$$\omega_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A'_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (2)$$

Вставляя это в уравнение (1), получим для каждого из коэффициентов A'_{mn} уравнение

$$C A'_{mn} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 = -P_1 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} (A_{mn}^0 + A'_{mn}) - P_2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} (A_{mn}^0 + A'_{mn}),$$

откуда

$$A'_{mn} = - \frac{\left(P_1 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + P_2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) A_{mn}^0}{C \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 + P_1 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + P_2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2}}. \quad (3)$$

Таким образом, по известным значениям A_{mn}^0 , P_1 и P_2 могут

быть вычислены коэффициенты в ряде (2), представляющем прогиб пластинки, обусловленный начальным искривлением.

Предположим, например, что начальный прогиб задан так:

$$w_0 = A_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

В таком случае в интеграле (2) отличным от нуля будет лишь первый коэффициент, и мы для прогиба, обусловленного растяжением, получим такое выражение:

$$w_1 = -A_0 \frac{P_1 \frac{\pi^2}{a^2} + P_2 \frac{\pi^2}{b^2}}{\left(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right)^2 + P_1 \frac{\pi^2}{a^2} + P_2 \frac{\pi^2}{b^2}} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (4)$$

Заметив, что выражения

$$C \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right) : \frac{\pi^2}{a^2}$$

и

$$C \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right) : \frac{\pi^2}{b^2}$$

представляют собой критические значения сжимающих напряжений при сжатии пластинки силами, параллельными оси x и оси y ¹⁾, и вводя обозначения

$$\frac{P_1 \frac{\pi^2}{a^2}}{C \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2} = k_1, \quad \frac{P_2 \frac{\pi^2}{b^2}}{C \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2} = k_2,$$

перепишем выражение (4) в более простом виде:

$$w_1 = -\frac{A_0 (k_1 + k_2)}{1 + k_1 + k_2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (4')$$

Если имеются лишь растягивающие усилия P_1 , то формула для прогиба напишется так:

$$w_1 = -\frac{A_0 k_1}{1 + k_1} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (5)$$

С возрастанием растягивающих усилий k_1 возрастает, и прогиб w_1 стремится к пределу

$$-A_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

в таком случае полный прогиб w , равный $w_0 + w_1$, стремится к нулю.

¹⁾ Конечно, при условии выпучивания пластинки по одной полуовале.

Если вместо растягивающих будем иметь сжимающие усилия, то для получения прогиба нужно будет в выражении (4') изменить знаки k_1 и k_2 .

В случае наличия сжатия только вдоль оси x мы получим для прогибов такое выражение:

$$w_1 = \frac{A_0 k_1}{1 - k_1} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (6)$$

Мы видим, что в рассматриваемом случае прогибы пропорциональны A_0 , т. е. величине начального искривления. Прогибы растут с возрастанием k_1 , и выражение (6) обращается в бесконечность, когда $k_1 = 1$, т. е. когда сжимающие напряжения достигнут критического значения.

Рассмотрим теперь смещения точек контура пластинки в плоскости контура при действии равномерно распределенных усилий P_1 . Предполагая сечение пластинки плоскостью $x = a/2$ неподвижным, найдем, что в случае неискривленной пластинки все точки края пластинки, соответствующего $x = a$, переместятся на одну и ту же величину, равную $P_1 a / 2hE$.

Если растягиваемая пластинка имеет первоначальное искривление, определяемое формулой

$$w = A_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

то к найденному выше общему перемещению точек контура пластинки нужно будет присоединить дополнительные перемещения, обусловленные изменениями кривизны пластинки. Это дополнительное перемещение для различных точек стороны $x = a$ будет различно и представится таким интегралом:

$$\frac{1}{2} \int_{a/2}^a \left[\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = - \frac{1}{2} \int_{a/2}^a \left[2 \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right] dx.$$

Вставляя вместо w_0 и w_1 их значения, получим для дополнительных перемещений выражение

$$\frac{a}{2} \frac{A_0^2}{a^2} \frac{\pi^2}{4} \frac{2k_1 + k_1^2}{(1 + k_1)^2} \sin^2 \frac{\pi y}{b}.$$

Наибольшее значение их соответствует $y = b/2$ и равняется

$$\frac{a}{2} \frac{A_0^2}{a^2} \frac{\pi^2}{4} \frac{2k_1 + k_1^2}{(1 + k_1)^2}.$$

Это перемещение будет мало по сравнению с ранее найденным общим перемещением для точек стороны $x = a$ лишь в том случае, если $k_1 \rho_{кр} / E$ велико по сравнению с $\frac{A_0^2}{a^2} \frac{\pi^2}{4} \frac{2k_1 + k_1^2}{(1 + k_1)^2}$.

На основании этих соображений можно сделать заключение, что в тех случаях, когда предварительно искривленная пластинка растягивается так, что всем точкам каждой из поперечных сторон ($x=0$ и $x=a$) дается одно и то же перемещение, то растягивающие напряжения по ширине пластинки распределяются неравномерно. При принятом выше начальном искривлении напряжения в точках, соответствующих серединам поперечных сторон, будут меньшими, нежели у краев. Это обстоятельство следует иметь в виду в тех случаях, когда приходится рассчитывать на растяжение настилы, составленные из листов, имеющих некоторое начальное искривление. С подобного рода задачами мы встречаемся, например, при расчете обшивки судов.

О БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК

Сборник Института инженеров путей сообщения, Петроград, 1915, вып. 89, стр. 1—10. Отдельный оттиск, Петроград, 1915, 10 стр.

§ 1. Введение

В элементарной теории изгиба пластинок исходят из предположения, что срединная плоскость при изгибе не испытывает растяжений и что линейные элементы, перпендикулярные срединной плоскости, сохраняют после изгиба свою прямолинейную форму и устанавливаются нормально к искривленной срединной поверхности. Точная теория пластинок, разработанная трудами английских ученых, дает основание заключить, что дифференциальное уравнение равновесия изогнутой пластинки

$$C \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q, \quad (a)$$

получаемое элементарным путем, с большой точностью представляет явление изгиба пластинок, и им можно пользоваться как для вычисления прогибов, так и для определения напряжений. Однако все эти заключения справедливы лишь до тех пор, пока соблюдено основное положение точной теории, пока прогиб пластинки можно считать малым по сравнению с толщиной пластинки. На практике приходится встречаться часто с такими случаями, когда прогиб является величиной того же порядка, что и толщина пластинки. Спрашивается, насколько допустимо в подобных случаях пользоваться уравнением (а)? Опыты показывают ¹⁾, что при больших искривлениях пластинок нарушается линейная зависимость между нагрузками и вызываемыми ими прогибами. Прогибы растут медленнее нагрузок. Пластинка оказывается более жесткой, чем то следует из теоретических формул. Причину этого расхождения теории и опыта следует искать в появлении значительных растяжений срединной поверхности при больших прогибах пластинки. Эти растяжения появляются независимо от того, как закреплена пластинка по контуру, и при известных условиях достигают значительной величины даже

¹⁾ См. Т и м о ш е н к о С. П. Курс сопротивления материалов, 2-е издание. Киев, Л. Издиковский, 1913, 473+V стр. См. стр. 377.

в том случае, когда края пластинки при изгибе могут свободно смещаться в плоскости контура. Что это действительно должно быть так, проще всего видно на изгибе круглой пластинки по шаровой поверхности. Предположим: AOB (рис. 1) представляет меридиональное сечение срединной поверхности изогнутой пластинки, r — радиус пластинки, f — наибольший прогиб, $2h$ — толщина ее и ρ — радиус той шаровой поверхности, по которой произведен изгиб. Элементарная теория говорит, что такой изгиб может быть осуществлен равномерным распределением изгибающих моментов по контуру пластинки. При этом срединная поверхность не претерпевает никаких растяжений.

На самом деле из рис. 1 видно, что если только дуга AOB при изгибе не испытала растяжений, то непременно деформация пластинки должна сопровождаться сжатиями в направлении касательных к параллельным кругам получившейся шаровой поверхности. В частности, наружный контур получает относительное сжатие, равное

$$\frac{\rho\theta - \rho \sin \theta}{\rho\theta} = \frac{\theta^2}{6} = \frac{f}{3\rho}, \quad (b)$$

по сравнению с максимальными растяжениями от изгиба, равными h/ρ , полученное сжатие (b) срединной поверхности будет пренебре-

жимо мало лишь при том условии, что f мало по сравнению с h . В настоящей заметке мы показываем, как могут быть определены с достаточной для практики точностью все величины, характеризующие изгиб, в том случае, если f не мало по сравнению с h . Как и нужно было ожидать, задача в этом случае сводится к интегрированию системы нелинейных дифференциальных уравнений. Для решения этих уравнений можно воспользоваться приближенным вычислительным методом. Применение этого метода приводит к большому количеству арифметической работы, но только таким путем на основании отдельных численных результатов можно сделать некоторые общие заключения. На основании наших вычислений, проведенных для одного частного случая, следует заключить, что при прогибе круглой пластинки, равном примерно 0,6 толщины, отклонения в прогибах по сравнению с результатами уравнения (a) могут достигать 12%. Напряжения в срединной поверхности, которыми элементарная теория пренебрегает, могут составлять 18% от напряжений, учитываемых элементарным путем. Ясно также, что с увеличением прогибов разность между результатами точной и приближенной теории возрастает.

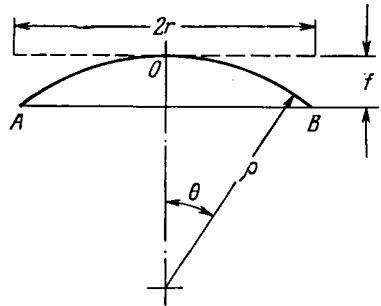


Рис. 1.

§ 2. Дифференциальные уравнения равновесия для круглой пластинки в случае больших прогибов

Пусть A (рис. 2) представляет элемент искривленной пластинки, ограниченный до деформации двумя меридиональными плоскостями и двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами r и $r+dr$. На рисунке указаны положительные направления усилий T_1 , T_2 и N_1 , а также положительные направления моментов G_1 и G_2 .

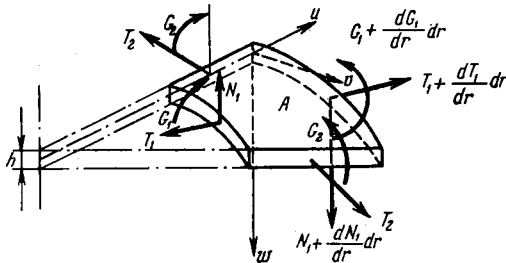


Рис. 2.

Мы будем рассматривать лишь деформации, симметричные относительно центра пластинки. Поэтому по граням элемента, соответствующим меридиональным сечениям, не будет никаких касательных усилий. Обозначая через u , v и w составляющие перемещения какой-либо точки A в указанных на рисунке направлениях, проектируя усилия, приложенные к выделенному элементу, на направления u и w и составляя момент тех же усилий относительно оси v , придем к таким трем дифференциальным уравнениям равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(T_1 r)}{dr} - T_2 - N_1 \frac{d^2 w}{dr^2} &= 0, \\ \frac{d(N_1 r)}{dr} + r \frac{d^2 w}{dr^2} T_1 + \frac{dw}{dr} T_2 + r Z &= 0, \\ \frac{d(G_1 r)}{dr} - G_2 - N_1 r &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь через Z обозначена интенсивность сплошной нагрузки, изгибающей пластинку. Мы в дальнейшем займемся случаем изгиба пластинки моментами G_1 , равномерно распределенными по контуру. Тогда $Z=0$, и второе уравнение системы (1) может быть заменено таким более простым уравнением:

$$N_1 + T_1 \frac{dw}{dr} = 0.$$

К нему мы легко придем, если спроектируем на направление, перпендикулярное пластинке, все усилия, действующие по сечению

пластинки цилиндрической поверхностью радиуса r . Исключая из уравнений (1) перерезывающую силу N_1 , получим, отбрасывая малые величины высших порядков,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT_1}{dr} + \frac{T_1 - T_2}{r} &= 0, \\ \frac{d(G_1 r)}{dr} - G_2 + T_1 r \frac{dw}{dr} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Входящие в эти уравнения четыре неизвестные T_1 , T_2 , G_1 и G_2 могут быть выражены через перемещения u и w при посредстве зависимости между деформациями и перемещениями, с одной стороны, и деформациями и напряжениями, с другой. На основании самых элементарных геометрических соображений ¹⁾ можем написать такие выражения для относительных удлинений срединной поверхности пластинки в радиальном направлении и в направлении, ему перпендикулярном:

$$\left. \begin{aligned} e_r &= \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2, \\ e_\theta &= \frac{u}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Точно так же для главных кривизн получим выражения

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{d^2 w}{dr^2}, \\ k_2 &= \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В таком случае

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{2Eh}{1-\sigma^2} \left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \sigma \frac{u}{r} \right], \\ T_2 &= \frac{2Eh}{1-\sigma^2} \left[\frac{u}{r} + \sigma \frac{du}{dr} + \frac{\sigma}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right], \\ G_1 &= -C \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ G_2 &= -C \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \sigma \frac{d^2 w}{dr^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Здесь

$$C = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\sigma^2}.$$

¹⁾ К тем же результатам мы придем, если воспользуемся общими формулами теории упругости. См. Love A. E. H. Lehrbuch der Elastizität. Auforisierte deutsche Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von Aloys Timpe, Leipzig—Berlin, B. G. Teubner, 1907, 664 S. См. S. 594.

Вставляя (4) и (5) в уравнения (2), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dr^2} &= -\frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \frac{u}{r^2} - \frac{1-\sigma}{2r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 - \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2}, \\ \frac{d^3 w}{dr^3} &= -\frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} + \frac{3}{h^2} \frac{dw}{dr} \left[\frac{du}{dr} + \sigma \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} (6)$$

Отбрасывая во втором из уравнений (6) члены, имеющие множителем $3/h^2$, приходим к результату, получаемому в элементарной теории изгиба пластинок.

§ 3. Приближенное интегрирование

Перемещения u и w , входящие в уравнения (6), представляются функциями только r , и мы можем получить их значения вычислительным путем. Расположим начало координат в центре искривленной пластинки, тогда при условии симметричной деформации будем иметь при $r=0$: $u = 0$, $w = 0$ и $dw/dr=0$.

Если мы зададимся теперь величинами

$$(du/dr)_{r=0} \quad \text{и} \quad (d^2 w/dr^2)_{r=0},$$

то тогда при помощи уравнений (6) могут быть последовательно вычислены все дальнейшие значения функций u и w и их производных с любой степенью точности. Мы делим радиус пластинки на большое число равных участков. Пусть δ — длина каждого такого участка. (В приведенном ниже численном примере принято $\delta=h$, т. е. длина участка равна половине толщины пластинки.) Выделяем центральную часть пластинки цилиндрической поверхностью радиуса δ . Для получившейся таким путем круглой пластинки весьма малого радиуса можем пренебречь влиянием прогиба на растяжение срединной поверхности и положить, что на этом участке имеются равномерное растяжение и чистый изгиб по шаровой поверхности.

В таком случае для начала координат будем иметь

$$\frac{du}{dr} = \frac{u}{r}, \quad \frac{d^2 u}{dr^2} = 0, \quad \frac{d^3 w}{dr^3} = 0.$$

Таким путем мы можем теперь заполнить первую строчку таблицы А. Через a здесь обозначено начальное значение производной du/dr и через b — начальное значение $d^2 w/dr^2$. Задаваясь различными a и b , будем получать численные решения для различных частных соотношений между толщиной пластинки и ее радиусом при различных значениях изгибающего момента. От центра пластинки переходим к точкам, соответствующим радиусу δ , при помощи формул

$$f(\delta) = f(0) + \delta f'(0)$$

или

$$f(\delta) = f_0 + \frac{\delta}{2} [f'(\delta) + f'(0)].$$

Таким путем находим величины

$$(du/dr)_{r=\delta}, (u)_{r=\delta}, (d^2w/dr^2)_{r=\delta}, (dw/dr)_{r=\delta}, (w)_{r=\delta}.$$

Вставляя эти величины в уравнения (6) и полагая в них $r=\delta$, получим значения $(d^2u/dr^2)_{r=\delta}=c$ и $(d^3w/dr^3)_{r=\delta}=d$.

Таблица А

r	u	$\frac{du}{dr}$	$\frac{d^2u}{dr^2}$	w	$\frac{dw}{dr}$	$\frac{d^2w}{dr^2}$	$\frac{d^3w}{dr^3}$
0	0	a	0	0	0	b	0
δ	$a\delta$	a	c	$\frac{b\delta^2}{2}$	b	b	d
δ	$a\delta + \frac{c\delta^2}{2}$	$a + \frac{c\delta}{2}$	—	$\frac{b\delta^2}{2} + \frac{d\delta^3}{8}$	$b\delta + \frac{\delta^2 d}{4}$	$b + \frac{\delta d}{2}$	—

Этим способом заполняется вторая строчка таблицы. Теперь мы можем получить значения $(u)_{r=\delta}$, $(w)_{r=\delta}$ и их производных с большей точностью, если при повторном расчете будем пользоваться лишь формулой

$$f(\delta) = f(0) + \frac{\delta}{2} [f'(0) + f'(\delta)].$$

Полученные результаты выписаны в третьей строчке таблицы. Вставляя числа третьей строчки в уравнения (6), получим более точные значения $(d^2u/dr^2)_{r=\delta}$ и $(d^3w/dr^3)_{r=\delta}$. Заполнив таким образом третью строчку таблицы, мы можем перейти к определению $(u)_{r=2\delta}$, $(du/dr)_{r=2\delta}$, ..., производя все вычисления в прежнем порядке. Двойное определение всех величин для каждого значения r устраняет возможность грубых ошибок в вычислениях и дает некоторые указания относительно степени точности вычислений при выбранном значении интервала δ . Все вычисления нужно продолжать до тех пор, пока мы не придем к такому значению $r=R$, при котором

$$\left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \sigma \frac{u}{r} \right]_{r=R} = 0.$$

Таким путем определяется радиус той пластинки, которой соответствуют выбранные нами значения a и b для производных $(du/dr)_{r=0}$

и $(d^2w/dr^2)_{r=0}$. Мы произвели подробные вычисления, исходя из таких значений:

$$a = 1 \cdot 10^{-4}, \quad b = 10^{-3}/h.$$

Этому, как оказалось, соответствует изгиб пластинки радиуса $R=46,3 h$ моментами $G_1 = -C \cdot 1,467 \cdot 10^{-3}$.

Значения всех величин, характеризующих изгиб, вычисленные вышеуказанным способом, приведены в таблице В.

Таблица В

r/h	$10^3 G_1 h/C$	$10^3 G_2 h/C$	$10^4 T_1 (1-\sigma^2)/2Eh$	$10^4 T_2 (1-\sigma^2)/2Eh$	$10^3 w/h$	$10^3 w_0/h$
0	-1,300	-1,300	1,300	1,300	0	0
2	-1,301	-1,300	1,295	1,291	2,000	—
4	-1,303	-1,302	1,288	1,270	8,005	9,027
6	-1,306	-1,303	1,277	—	—	—
8	-1,310	-1,306	1,260	1,187	32,05	36,11
10	-1,316	-1,309	1,239	—	—	—
12	-1,322	-1,313	1,214	1,047	72,25	81,25
14	-1,330	-1,318	1,183	—	—	—
16	-1,339	-1,323	1,148	0,8513	128,8	144,4
18	-1,348	-1,328	1,108	—	—	—
20	-1,359	-1,334	1,064	0,5964	201,9	225,7
22	-1,370	-1,341	1,015	—	—	—
24	-1,381	-1,348	0,9601	0,2805	291,8	325,0
26	-1,392	-1,355	0,9006	—	—	—
28	-1,404	-1,362	0,8362	-0,0990	398,9	442,3
30	-1,415	-1,370	0,7665	—	—	—
32	-1,426	-1,377	0,6916	-0,5446	523,5	577,7
34	-1,437	-1,384	0,6114	—	—	—
36	-1,446	-1,391	0,5258	-1,059	666,0	731,2
38	-1,454	-1,397	0,4348	—	—	—
40	-1,461	-1,403	0,3384	-1,644	826,5	902,7
42	-1,466	-1,408	0,2361	—	—	—
44	-1,467	-1,412	0,1284	-2,300	1005	1092
46	-1,467	-1,415	0,0150	-2,656	1104	1194

В последней графе приведены для сравнения прогибы w_0 , вычисленные на основании элементарной теории изгиба пластинок в том предположении, что по контуру пластинки действуют равномерно распределенные моменты

$$G_1 = -\frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)} 1,467 \cdot 10^{-3}.$$

Для большей наглядности на рис. 3 представлено графически изменение всех величин в зависимости от r .

Мы видим, что усилия T_1 убывают по направлению от центра к краям и обращаются в нуль на контуре. Усилия T_2 , равные T_1 в центре, убывают по мере удаления от центра, меняют знак и дости-

гают наибольшего отрицательного значения на контуре пластинки. При больших прогибах эти именно усилия вызывают коробление у

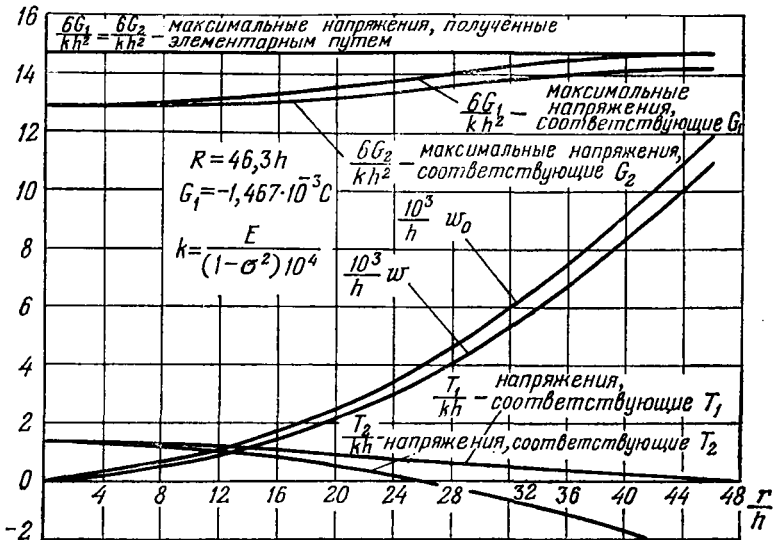


Рис. 3.

краев пластинки. Что касается моментов G_1 и G_2 , то они возрастают с удалением от центра пластинки.

На том же рисунке представлено прямой, параллельной оси абсцисс, изменение максимальных напряжений изгиба, полученное на основании элементарной формулы изгиба. Двумя кривыми представлены изменения максимальных напряжений, соответствующих моментам G_1 и G_2 , взятым из таблицы В.

К ВОПРОСУ О ПРОЧНОСТИ РЕЛЬС

Издание Института инженеров путей сообщения,
Петроград, тип. А. Э. Коллинса, 1915, 42 стр.

При решении вопроса о напряжениях, возникающих в рельсах под действием катящихся колес, будем исходить из обычного предположения, что поперечины в местах прикрепления рельсов упруго оседают от приходящихся на них нагрузок и что эти осадки пропорциональны давлениям. В таком случае расчет рельса сводится к исследованию изгиба многопролетной балки, расположенной на упругих опорах. В настоящей статье мы показываем, что без ущерба для надежности получаемых результатов можно исследование изгиба многопролетной балки заменить рассмотрением изгиба стержня, непрерывно опирающегося на упругое основание. Такая замена в значительной степени упрощает статические расчеты рельса в особенности в тех случаях, когда желательно оценить влияние на изгиб рельса не одиночного груза, а целой системы грузов.

Еще большие упрощения указанная замена нам дает в том случае, когда мы переходим к оценке динамических напряжений. Рассматривая рельс как стержень, лежащий на упругом основании, мы приводим вопрос о влиянии противовесов, давления пара и различных неправильностей в колесе и рельсе на возникающие в рельсах напряжения к исследованию колебаний системы с одной степенью свободы. Такая задача, конечно, может быть разрешена самыми элементарными приемами.

Чтобы оценить влияние массы стержня на динамические прогибы, мы исследуем вопрос о собственных колебаниях стержня, лежащего на упругом основании, и показываем, что период этих колебаний в целом ряде случаев мал по сравнению с периодом вынуждающих колебания сил, и в таком случае собственные колебания рельса не имеют практического значения.

В заключение мы намечаем несколько опытов, которые, как нам кажется, могли бы способствовать выяснению действительных напряжений, возникающих в рельсах под влиянием давлений колес.

§ 1. Расчет рельса как балки на упругих опорах

Допустив, что шпалы под рельсами оседают упруго и что осадки пропорциональны давлениям, мы сводим расчет рельса к расчету многопролетной балки на упругих опорах. Теория изгиба такой балки подробно разработана и потому каких-либо принципиальных

затруднений при определении напряжений, возникающих в рельсе под действием статической нагрузки, не встречается. Вопрос усложняется лишь большим количеством вычислений, которые необходимо произвести в том случае, когда желательнее учесть влияние на изгиб рельса целой системы грузов. Мы здесь ограничимся лишь приведением нескольких известных формул, которыми и воспользуемся для оценки степени надежности результатов, получаемых при замене упругих опор соответствующим упругим основанием.

В дальнейшем условимся пользоваться такими обозначениями: EJ — жесткость при изгибе рельса в вертикальной плоскости; l — расстояние между осями шпал, которое в дальнейшем везде принимается постоянным; D — значение тех двух вертикальных сил, которые должны быть приложены к шпале в местах прикрепления рельса для того, чтобы вызвать осадку шпалы, равную 1 см.

Кроме того, для краткости введем обозначение $\gamma = 6EJ/l^3D$.

Величина γ представляет собой численный коэффициент, которым вполне характеризуется относительная жесткость рельса и основания.

Если допустить, что D меняется в пределах от 8000 кг/см до 15 000 кг/см, l меняется в пределах от 66,6 см до 82,6 см и J — в пределах от 1480 см⁴ до 751 см⁴, то при $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см² найдем, что γ меняется в пределах от 1,1 до 7,5. Эти пределы примерно соответствуют нашим русским условиям.

Расчет обыкновенно ведется в предположении действия на рельс одного сосредоточенного груза P . В таком случае наибольшее значение изгибающего момента мы получим, располагая груз посредине пролета между шпалами. Если допустить, что рельс прочно скреплен с опорами и предположить наличие четырех опор, то для величины наибольшего изгибающего момента получим формулу

$$M = \frac{Pl}{4} \frac{8\gamma + 7}{4\gamma + 10}.$$

При шести опорах соответствующая формула имеет вид

$$M = \frac{Pl}{4} \frac{9\gamma^2 + 45\gamma + 13}{3\gamma^2 + 44\gamma + 19}.$$

Увеличивая число опор до 8, мы получим для наибольшего момента выражение

$$M = \frac{Pl}{8} \frac{32\gamma^3 + 524\gamma^2 + 568\gamma + 97}{4\gamma^3 + 194\gamma^2 + 330\gamma + 71}.$$

Как изменяется величина M_{\max} в зависимости от γ и от числа опор, видно из нижеследующей таблицы I.

Дальнейшее увеличение числа опор, очевидно, не окажет практически заметного влияния на величину наибольшего изгибающего

Таблица I

Значения максимального изгибающего момента M_{\max}/Pl в балке

γ	1	2	3	5	7
$n=4$	0,268	0,319	0,352	0,392	0,414
$n=6$	0,254	0,292	0,322	0,369	0,405
$n=8$	0,255	0,291	0,317	0,354	0,384

момента. Если при изгибе рельс свободно может приподниматься над опорами, то при взятых пределах для γ и при расположении груза посередине пролета мы всегда будем иметь передачу давления на четыре опоры и, следовательно, для вычисления изгибающих моментов придется пользоваться первой строчкой вышеприведенной таблицы.

При определении наибольшего давления на шпалу груз P располагают непосредственно над средней шпалой. В таком случае при распределении давления на 3, 5 или 7 опор и при условии прочного скрепления рельса с опорами, получим для средней опорной реакции R формулы

$$n=3, \quad R = \frac{\gamma+2}{3\gamma+2},$$

$$n=5, \quad R = \frac{\gamma^2+18\gamma+7}{5\gamma^2+34\gamma+7},$$

$$n=7, \quad R = \frac{\gamma^3+72\gamma^2+131\gamma+26}{7\gamma^3+196\gamma^2+193\gamma+26}.$$

Изменение этой реакции в зависимости от γ и n видно из нижеприведенной таблицы II.

Таблица II

Значения опорной реакции балки R/P

γ	1	3	5	7
$n=3$	0,600	0,455	0,412	0,391
$n=5$	0,566	0,455	0,404	0,372
$n=7$	0,545	0,427	0,385	0,360

Дальнейшее увеличение опор может оказать на величину средней опорной реакции лишь ничтожное влияние, которым практически можно пренебречь.

Если рельс при изгибе может на опорах свободно приподниматься, то число опор, на которые передается давление при расположении груза над средней опорой, будет зависеть от величины γ . При $\gamma \leq 3$ давление передается лишь на три опоры. С увеличением γ ¹⁾ давление передается на пять шпал, и мы для вычисления наибольшей реакции должны пользоваться такими числами:

γ	1	3	5	7
<hr/>				
R/P	0,600	0,455	0,404	0,372

Приведем теперь несколько чисел, которые характеризуют изменение прогиба рельса в зависимости от расположения груза P . При неограниченном числе опор наименьший прогиб, очевидно, будем иметь в том случае, когда груз располагается непосредственно над шпалой. Для получения приближенного значения этого прогиба нужно только значение средней опорной реакции, приведенное в последней строке таблицы II, разделить на величину D , характеризующую жесткость опоры. Действительное значение искомого прогиба будет в случае бесконечно длинного рельса несколько меньше, но этой разностью, как мы уже указывали, можно пренебречь. Таким образом, получаем

γ	1	3	5	7
<hr/>				
fD/P	0,545	0,427	0,385	0,360

Для разыскания наибольшего прогиба рельса неограниченной длины воспользуемся числами для балки, расположенной на шести упругих опорах. Располагая груз P посередине пролета балки, мы при помощи известных формул для опорных реакций находим для прогиба под грузом такие значения:

γ	1	3	5	7
<hr/>				
$f_1 D/P$	0,574	0,446	0,400	0,371

При увеличении числа опор прогиб f_1 несколько уменьшится, но это изменение должно быть весьма малым, и потому мы, на основании приведенных значений для f и f_1 , можем заключить, что при весьма медленном передвижении колеса, оказывающего давление на рельс, траектория точки касания колеса с рельсом будет весьма мало отклоняться от прямой линии.

Если рельс при изгибе может свободно приподниматься над опорами, то, при наших пределах для γ и при расположении груза над шпалой, давление передается на 3 или на 5 шпал.

¹⁾ Предполагается, что мы остаемся в пределах $3 \leq \gamma \leq 7$.

При расположении груза посредине пролета работают четыре опоры. Для прогибов f и f_1 мы получаем такие значения:

γ	1	3	5	7
fD/P	0,600	0,455	0,404	0,372
f_1D/P	0,620	0,465	0,404	0,371

Следовательно, и в этом случае траектория точки касания движущегося колеса будет весьма мало отличаться от прямой линии. Это обстоятельство даст нам возможность в дальнейшем, при исследовании динамических напряжений, значительно упростить решение задачи.

§ 2. Изгиб стержня, лежащего на сплошном упругом основании

Мы видели, что давление P колеса на рельс распределяется на целый ряд опор. Чем больше жесткость рельса и чем податливее опоры, тем на большее число опор передается давление. Если сосредото-

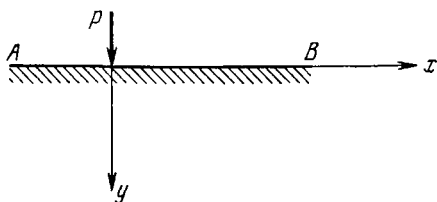


Рис. 1.

ченные опорные реакции заменить сплошными реактивными усилиями, то мы перейдем от балки, лежащей на упругих опорах, к балке, лежащей на сплошном упругом основании. Такая замена повлечет за собой тем меньшие погрешности в величине изгибающих моментов и опорных давлений, чем на

большее число шпал распределяется давление от груза P . Чтобы оценить эти погрешности, напомним здесь некоторые формулы, относящиеся к задаче об изгибе стержня на сплошном упругом основании.

Пусть стержень неограниченной длины, лежащий на сплошном упругом основании, изгибается сосредоточенной силой P (рис. 1). Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня напишется так:

$$EJ \frac{d^4y}{dx^4} = -ky. \quad (1)$$

Здесь через k обозначена величина, характеризующая жесткость упругого основания, ky — усилие, приходящееся на единицу длины стержня в том месте, где прогиб равен y . Если ввести для

сокращения письма обозначения

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}, \quad \varphi = \alpha x, \quad (2)$$

то интеграл уравнения (1) в рассматриваемом случае представится так:

$$y = \frac{P\alpha}{2k} e^{-\varphi} (\cos \varphi + \sin \varphi) = \frac{P\alpha}{2k} \eta. \quad (3)$$

Наибольший прогиб получится, очевидно, под грузом; он будет равен

$$f = \frac{P\alpha}{2k}. \quad (4)$$

С возрастанiem x , т. е. с удалением от места приложения силы, прогиб, как видно из общего выражения (3), быстро убывает и обращается в нуль при $\varphi=3\pi/4$. Далее прогиб становится отрицательным, потом, переходя через нуль при $\varphi=7\pi/4$, снова приобретает положительное значение и т. д.

Вид получающейся при этом волнообразной кривой, представлен на рис. 2. Для получения подобного искривления нужно себе представить, что скрепления стержня с упругим основанием не допускают свободного вертикального перемещения стержня при изгибе.

Имея кривую изгиба бесконечно длинного стержня под действием силы P , приложенной в начале координат, легко найти прогиб точки, соответствующей началу координат, при действии любой системы сосредоточенных сил. На основании теоремы о взаимности перемещений заключаем, что кривая, представленная на рис. 2, есть линия влияния для прогиба стержня в начале координат. Следовательно, прогиб при действии системы сосредоточенных сил представится формулой

$$f = \sum P_n \eta_n. \quad (5)$$

Для удобства пользования формулой (5) мы приводим в таблице III ¹⁾ ряд значений функции η .

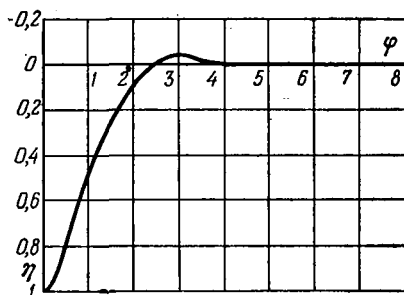


Рис. 2.

¹⁾ Таблицу эту заимствуем из книги: Z i m m e r m a n n Н. Die Berechnung des Eisenbahn Oberbaues. Berlin, Verlag von Ernst und Korn, 1888, 308 S. См. SS. 284—285.

Таблица III

φ	η	η_1	η_2	φ	η	η_1	η_2
0,0	1,0000	1,0000	-1,0000	3,6	-0,03659	-0,01241	0,02450
0,1	0,9907	0,8100	-0,9003	3,7	-0,03407	-0,00787	0,02097
0,2	0,9651	0,6398	-0,8024	3,8	-0,03138	-0,00401	0,01770
0,3	0,9267	0,4888	-0,7077	3,9	-0,02862	-0,00077	0,01469
0,4	0,8784	0,3564	-0,6174	$\frac{5}{4}\pi$	-0,02786	0,00000	0,01393
0,5	0,8231	0,2415	-0,5323	4,0	-0,02583	0,00189	0,01197
0,6	0,7628	0,1431	-0,4530	4,1	-0,02309	0,00403	0,00953
0,7	0,6997	0,0599	-0,03798	4,2	-0,02042	0,00572	0,00735
$\frac{1}{4}\pi$	0,6448	0,0000	-0,3224	4,3	-0,01787	0,00699	0,00544
0,8	0,6354	-0,0093	-0,3131	4,4	-0,01546	0,00791	0,00377
0,9	0,5712	-0,0657	-0,2527	4,5	-0,01320	0,00852	0,00234
1,0	0,5083	-0,1108	-0,1988	4,6	-0,01112	0,00786	0,00113
1,1	0,4476	-0,1457	-0,1510	4,7	-0,00921	0,00898	0,00011
1,2	0,3899	-0,1716	-0,1091	$\frac{6}{4}\pi$	-0,00898	0,00898	0,00000
1,3	0,3355	-0,1897	-0,0729	4,8	-0,00748	0,00892	-0,00072
1,4	0,2849	-0,2011	-0,0419	4,9	-0,00593	0,00870	-0,00139
1,5	0,2384	-0,2068	-0,0158	5,0	-0,00455	0,00837	-0,00191
$\frac{1}{2}\pi$	0,2079	-0,2079	0,0000	5,1	-0,00334	0,00795	-0,00230
1,6	0,1959	-0,2077	0,0059	5,2	-0,00229	0,00746	-0,00259
1,7	0,1576	-0,2047	0,0235	5,3	-0,00139	0,00692	-0,00277
1,8	0,1234	-0,1985	0,0376	5,4	-0,00063	0,00636	-0,00287
1,9	0,0932	-0,1899	0,0484	$\frac{7}{4}\pi$	0,00000	0,00579	-0,00290
2,0	0,0667	-0,1794	0,0563	5,5	0,00001	0,00578	-0,00290
2,1	0,0439	-0,1675	0,0618	5,6	0,00053	0,00520	-0,00287
2,2	0,0244	-0,1548	0,0652	5,7	0,00095	0,00464	-0,00279
2,3	0,0080	-1,1416	0,0668	5,8	0,00127	0,00409	-0,00268
$\frac{3}{4}\pi$	0,0000	-0,1340	0,0670	5,9	0,00152	0,00356	-0,00254
2,4	-0,0056	-0,1282	0,0669	6,0	0,00169	0,00307	-0,00238
2,5	-0,0166	-0,1149	0,0658	6,1	0,00180	0,00261	-0,00221
2,6	-0,0254	-0,1019	0,0636	6,2	0,00185	0,00219	-0,00202
2,7	-0,0320	-0,0895	0,0608	$\frac{9}{4}\pi$	0,00187	0,00187	-0,00187
2,8	-0,0369	-0,0777	0,0573	6,3	0,00187	0,00181	-0,00184
2,9	-0,0403	-0,0666	0,0534	6,4	0,00184	0,00146	-0,00165
3,0	-0,0423	-0,0563	0,0493	6,5	0,00179	0,00115	-0,00147
3,0	-0,04226	-0,05632	0,04929	6,6	0,00172	0,00087	-0,00129
3,1	-0,04314	-0,04688	0,04501	6,7	0,00162	0,00063	-0,00113
π	-0,04321	-0,04321	0,04321	6,8	0,00152	0,00042	-0,00097
3,2	-0,04307	-0,03831	0,04069	6,9	0,00141	0,00024	-0,00082
3,3	-0,04224	-0,03060	0,03642	7,0	0,00129	0,00009	-0,00069
3,4	-0,04079	-0,02374	0,03227	$\frac{9}{4}\pi$	0,00129	0,00000	-0,00060
3,5	-0,03887	-0,01769	0,02828				

Составляя последовательные производные от выражения (3) по x , легко найдем общие выражения для изгибающего момента и перерезывающей силы в любом сечении стержня, изгибаемого сосредоточенной силой P . Выражения эти имеют вид

$$M = - EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{P}{4\alpha} e^{-\varphi} (\sin \varphi - \cos \varphi) = \frac{P}{4\alpha} \eta_1, \quad (6)$$

$$Q = - EJ \frac{d^3 y}{dx^3} = - \frac{P}{2} e^{-\varphi} \cos \varphi = - \frac{P}{2} \eta_2. \quad (7)$$

Путем сложения действия сил легко, конечно, составить выражения для изгибающего момента и перерезывающей силы при действии системы сосредоточенных сил. Нужные для соответствующих вычислений значения функций η_1 и η_2 приведены в таблице III.

Если стержень не скреплен с упругим основанием, то при действии силы P мы будем иметь реактивные усилия основания, отличные от нуля лишь на протяжении $\pi/2\alpha$ в обе стороны от места приложения силы. Дальше прогиб становится отрицательным, и так как мы собственным весом стержня пренебрегаем, то работать на изгиб за пределами указанного выше участка он не будет.

Величины наибольшего прогиба и наибольшего изгибающего момента соответствуют месту приложения груза. Значения их для данного случая могут быть вычислены по формулам

$$M_{\max} = 1,09 \frac{P}{4\alpha}, \quad f = 1,09 \frac{P\alpha}{2k}. \quad (8)$$

§ 3. Приложения к расчету рельс

Воспользуемся результатами предыдущего параграфа для расчета рельс. Мы видели, что все обстоятельства изгиба стержня, лежащего на сплошном упругом основании, определяются величинами k и α . Выразим эти величины в зависимости от жесткости рельса и шпалы. Если через l назовем, как и прежде, расстояние между шпалами, то при переходе от упругих опор к упругому основанию за k придется принять величину, определяемую такой формулой:

$$k = \frac{D}{l} k_2 / \text{см}^2. \quad (9)$$

Следовательно,

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{D}{4lEJ}} = \frac{1}{l} \sqrt[4]{\frac{3}{2\gamma}}. \quad (10)$$

Если считать рельс скрепленным с опорами, то на основании (6) получим для наибольшего изгибающего момента при действии одного сосредоточенного груза P такое выражение:

$$M = \frac{Pl}{4} \sqrt[4]{\frac{2}{3} \gamma}. \quad (11)$$

Наибольшее давление на шпалу, очевидно, будет равняться

$$R = fkl = \frac{Pal}{2} = \frac{P}{2} \sqrt[4]{\frac{3}{2\gamma}}. \quad (12)$$

Результаты, полученные для M и R при различных γ , приведены в нижеследующей таблице IV. Там же приведены соответствующие

Таблица IV

γ		1	3	5	7
Упругое основание	M/Pl	0,226	0,300	0,337	0,367
	R/P	0,553	0,420	0,370	0,340
Упругие опоры	M/Pl	0,255	0,317	0,354	0,384
	R/P	0,545	0,427	0,385	0,360

значения этих величин в случае передачи давления на упругие опоры. Значения эти взяты из последних строчек таблиц I и II.

Если рельс при изгибе может свободно приподниматься над опорами, то для вычисления момента и давления на шпалу следует воспользоваться формулами (8). Полученные на основании этих формул результаты и соответствующие им величины для рельса, лежащего на упругих опорах, приведены в таблице V.

Таблица V

γ		1	3	5	7
Упругое основание	M/Pl	0,246	0,327	0,368	0,400
	R/P	0,603	0,458	0,403	0,371
Упругие опоры	M/Pl	0,268	0,352	0,392	0,414
	R/P	0,600	0,455	0,404	0,372

Сравнивая приведенные в этих таблицах результаты, видим, что формулы, выведенные в предположении наличия сплошного упругого основания, дают для изгибающего момента и давления на шпалу вполне удовлетворительные значения.

Наибольшая разность в моментах получается в случае гибкого рельса, скрепленного с опорами. Погрешность здесь достигает 11%. Во всех других случаях погрешности значительно меньше. Еще меньше погрешности в определении давления на шпалу R . В случае свободно приподнимающихся концов (табл. V) давления на шпалу, вычисленные разными способами, почти совпадают по своей величине.

Если принять во внимание степень достоверности, с которой нам известен коэффициент балласта (т. е. величина D), а также возможные отклонения в однообразии подбивки шпал и возможные оседания шпал, то следует заключить, что разности в определении M и R при двух рассмотренных выше способах расчета, наверное, не выходят из пределов той точности, с которой мы вообще можем определять величины M и R . В таком случае из двух приемов расчета следует выбрать более простой, т. е. надлежит рассчитывать рельс как балку, лежащую на сплошном упругом основании. Особенности преимущества представляет этот прием в том случае, если мы желаем оценить влияние на величины M и R системы грузов. Пользуясь числами таблицы III, мы решаем эту задачу без всяких затруднений, тогда как при рассмотрении рельса как балки на упругих опорах задача обыкновенно сводится к решению системы большого числа уравнений, что требует большого труда и не дает более надежных результатов.

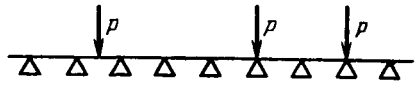


Рис. 3.

Мы видели, что в случае действия одного груза и при отсутствии скрепления стержня с упругим основанием давление распространяется в обе стороны от места приложения груза на длину

$$\frac{\pi}{2\alpha} = \frac{\pi l}{2} \sqrt[4]{\frac{2\gamma}{3}}. \quad (13)$$

Поэтому в тех случаях, когда расстояние между грузами равно или больше двойной величины (13) или когда мы оцениваем влияние крайних грузов системы, следует пользоваться формулами (8). В других же случаях формулы (11), (12) и таблица III дают возможность легко определить интересующие нас величины. Ход расчета поясним на частных примерах ¹⁾.

Пример I. Рельс, представляющий собой балку на девяти упругих опорах, изгибается тремя равными силами (рис. 3).

Требуется найти величину наибольшего изгибающего момента, если $l=85$ см и $\gamma=2$. Наибольшее значение M получим под левым грузом. На основании формул (8) и (10) найдем от действия одного левого груза

$$M = 1,09 \frac{Pl}{4} \sqrt[4]{\frac{2}{3}} \gamma = 0,293Pl.$$

Два других груза P окажут некоторое влияние на разыскиваемый момент. Это влияние, очевидно, будет тем меньшим, чем дальше груз

¹⁾ Примеры взяты из статьи: Петров Н. П. К вопросу о прочности рельс. С.-Петербург, тип. Ломковского, 1912, 65 стр. Численные результаты получены А. А. Холодецким.

от рассматриваемого сечения. Оценим влияние среднего груза на изгибающий момент под левым грузом. В этом случае будем иметь

$$\varphi = \alpha 3,5l = 3,5 \sqrt[4]{\frac{3}{2\gamma}} = 3,26.$$

Из таблицы III находим соответствующее значение для η_1 (см. формулу (6)): $\eta_1 = -0,034$. Следовательно, уменьшение момента под левым грузом будет равно

$$0,034 \frac{Pl}{4} \sqrt[4]{\frac{2}{3}\gamma} = 0,009Pl.$$

Влияние правого груза еще меньше. Для него $\varphi = 5,12$; $\eta_1 = 0,008$. Следовательно, правый груз увеличит момент под левым грузом на величину

$$0,008 \frac{Pl}{4} \sqrt[4]{\frac{2\gamma}{3}} = 0,002 Pl.$$

Окончательное значение для момента под левым грузом будет такое:

$$M = (0,293 - 0,009 + 0,002) Pl = 0,286 Pl.$$

Решение той же задачи в предположении отдельных упругих опор дает $M = 0,298 Pl$. Разность между этими результатами составляет приблизительно 4% от определяемой величины.

Пример II. Сохраняя все условия примера I, произведем вычисления для $\gamma = 6$.

В этом случае момент под левым грузом будет равен

$$M = \frac{Pl}{4} \sqrt[4]{\frac{2\gamma}{3}} (1,09 + \sum \eta_1) = 0,353Pl (1,09 - 0,12) = 0,343Pl.$$

Решение той же задачи при условии наличия упругих опор дает ¹⁾ $M = 0,345 Pl$, т. е. в данном случае мы имеем почти полное совпадение результатов.

Пример III. Найти величину наибольшего изгибающего момента для рельса, расположенного на шести опорах (рис. 4), если $l = 85$ см, $\gamma = 2$. Применяя формулы для балки на сплошном упругом основании, найдем для изгибающего момента под левым грузом выражение

$$M = \frac{Pl}{4} \sqrt[4]{\frac{2\gamma}{3}} \left[\frac{7}{4} 1,09 + (\eta_1)_{\varphi=2l\alpha} + \frac{1}{4} (\eta_1)_{\varphi=4l\alpha} \right] = \\ = 0,269 [1,91 - 0,19] Pl = 0,463Pl.$$

¹⁾ См. стр. 38 цитированной в сноске на стр. 331 работы Н. П. Петрова.

Соответствующее решение для балки на упругих опорах даст нам $M=0,478 Pl$.

Разность между результатами несколько больше 3%.

Пример IV. Найти величину наибольшего изгибающего момента для рельса, расположенного на восьми опорах (рис. 5), если $l=85$ см, $\gamma=2$.

Поступая так же, как и в предыдущих случаях, найдем

$$M = \frac{Pl}{4} \sqrt[3]{\frac{2\gamma}{3}} (1,09 - \sum \eta_i) = \\ = 0,269 Pl (1,09 - 0,20 - 0,08) = 0,218 Pl.$$

Соответствующее значение момента для рельса, лежащего на упругих опорах, равно $M=0,195 Pl$.

Для этого случая, когда грузы весьма сближены, разность достигает 11%, но если бы мы произвели при этих условиях расчет по обычно применяемой формуле Г. Циммермана, то получили бы погрешность 62%.

Из приведенных примеров видно, что предлагаемый нами способ расчета дает результаты, мало отличающиеся от тех, которые мы получаем, рассчитывая рельс как балку на упругих опорах. Погрешности значительно меньшие, чем в том случае, когда для упрощения расчетов пользуются формулой Г. Циммермана.

Заметим здесь, что таким же образом, как мы сейчас учли влияние системы грузов на величину изгибающего момента, можно решить вопрос о давлении, передаваемом от системы грузов на какую-либо шпалу.

Остановимся теперь несколько подробнее на основных формулах (11) и (12) и постараемся оценить, как влияют изменения входящих в эти формулы величин на значения напряжений в рельсах и давлений на балласт. Вставляя вместо γ его значение, получаем

$$M = \frac{P}{4} \sqrt[3]{\frac{4lEJ}{D}}, \quad R = \frac{P}{2} \sqrt[3]{\frac{Dl^3}{4EJ}}. \quad (14)$$

Для определения наибольших напряжений от изгиба рельса приходится величину наибольшего изгибающего момента делить на момент сопротивления поперечного сечения рельса.

Для дальнейших заключений удобно момент сопротивления W выразить через момент инерции J . Если бы при изменении размеров рельсов поперечные сечения их оставались геометрически подобными, то между W и J была бы такая зависимость: $aW=J^{1/4}$, где a — постоянный коэффициент. Подсчеты, произведенные для существующих типов рельс, показали, что действительно a меняется очень

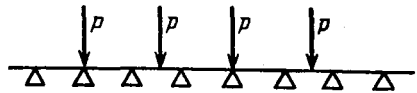


Рис. 5.

мало, так, например, для наших типов рельс Ia, IIa, IIIa и IVa соответственно получим $a=1,12$; $a=1,14$; $a=1,11$; $a=1,13$.

Полагая на основании этих соображений $1,12 W = J^{3/4}$, найдем для величины наибольших напряжений при изгибе такое выражение:

$$\frac{M}{W} = 0,28P \sqrt[4]{\frac{4IE}{DJ^2}}. \quad (14')$$

Из этой формулы заключаем, что на величину максимальных напряжений, вызываемых в рельсе статической нагрузкой, оказывает наибольшее влияние изменение момента инерции поперечного сечения. Изменение расстояния между шпалами или изменение жесткости D влияет на напряжения в рельсе в значительно меньшей степени. Увеличение момента инерции вдвое позволяет при прежних напряжениях увеличить статическую нагрузку P на 41%. Уменьшение расстояния между шпалами с 80 см до 50 см позволяет увеличить статическую нагрузку лишь на 11%.

К иным заключениям мы придем, если нас будет интересовать давление на шпалу, а следовательно, и давление на балласт. Вторая из формул (14) показывает, что изменение момента инерции сечения рельса оказывает на величину давления R значительно меньшее влияние, чем изменение расстояния между шпалами. Если нужно уменьшить давление на балласт, то самым подходящим средством является сближение шпал. Уменьшая расстояние между шпалами с 80 см до 50 см, мы тем самым уменьшим давление примерно на 30%.

§ 4. О динамических действиях катящегося колеса на рельс

Наблюдатели, изучавшие вопрос о деформациях рельс под действием катящихся колес, отмечают, что при больших скоростях движения прогибы рельс под колесами получаются часто значительно большими, чем соответствующие прогибы при статическом действии тех же колес. Такое увеличение прогибов нужно приписать действию целого ряда причин динамического характера, которые мы здесь и перечислим.

1) Представим себе идеально правильное колесо, катящееся по гладкому невесомому рельсу, опирающемуся на упругие опоры. Вследствие неодинаковости статического прогиба рельса при расположении колеса над опорой и расположении его по середине пролета между опорами траектория точки касания колеса с рельсом представится волнообразной линией. В таком случае движение колеса будет сопровождаться вертикальными перемещениями его центра тяжести и давление колеса на рельс будет зависеть не только от статической нагрузки, но также и от вертикальной силы инерции.

Прогиб рельса в силу указанной причины будет иным, чем в случае статического действия нагрузки.

2) Второй причиной, видоизменяющей прогибы рельса, являются колебания рельса и связанных с ним шпал и основания.

3) Наконец, третьей категорией причин, играющей самую существенную роль, являются различного рода неправильности в очертании колеса и рельса, неправильности в положении центра тяжести колеса и изменения сил, действующих на колесо, например изменение давления рессоры, изменение сил инерции, соответствующих противовесам и т. д.

Влияние кривизны траектории точки касания катящегося колеса изучено в настоящее время с достаточной полнотой. Первая попытка решения такого рода задачи принадлежит Р. Виллису¹⁾. Полное решение задачи для случая стержня, лежащего на двух абсолютно жестких опорах, принадлежит Дж. Стоксу²⁾. Дальнейшее развитие того же вопроса принадлежит Н. П. Петрову. Ему пришла счастливая мысль заменить дифференциальное уравнение уравнением в конечных разностях³⁾ и воспользоваться приближенным решением. Таким путем удалось получить решения для балки, расположенной на двух, четырех и шести упругих опорах. Эти решения с полной ясностью показали, что при совершенно правильных колесах и рельсах кривизна траектории точки касания колеса и рельса не имеет никакого практического значения⁴⁾. Следовательно, при определении динамических напряжений мы не внесем существенных погрешностей, если от рельса на упругих опорах перейдем к рельсу, при-

¹⁾ Изложение его решения см. на стр. 597 книги: C l e b s c h A. Théorie de l'élasticité des corps solides. Traduite par Saint-Venant et Flamant. Paris, Dunod, 1883, p. 900. См. также W i l l i s R o b e r t. Report of the Commissioners appointed to inquire into the application of Iron to Railway Structures. London, 1849, 435 p. Appendix B. «Experiments for determining the effects produced by causing weights to travel over Bars with different velocities, made in Portsmouth Dockyard and at Cambridge by the Rev.», Robert Willis, F. R. S., Jacksonian Professor, etc.; Captain Henry James, R. E., F. R. S. and Lieutenant Douglas Galton, R. E., pp. 181—263.

²⁾ S t o k e s G. G. Mathematical and physical papers. Vol. 2. Cambridge, University press, 1883, 366 p.; Discussion of a differential equation relating to the breaking of railway bridges, pp. 178—220. Иногда результаты Дж. Стокса ошибочно приписывают Г. Циммерману. Здесь уместно еще раз повторить, что Г. Циммерман в этой области никаких новых результатов не получил и вообще ничего не сделал для выяснения вопроса о динамических напряжениях в рельсах.

³⁾ П е т р о в Н. П. Влияние поступательной скорости колеса на напряжения в рельсе. Записки русского технического общества, 1903, год издания 37, № 2, стр. 27—115.

⁴⁾ П е т р о в Н. П. Влияние поступательной скорости колеса на напряжения в рельсе при отступлениях колеса от круглой формы и рельса, лежащего на шести опорах, от прямолинейного вида. Записки русского технического общества, 1905, год издания 39, № 1, стр. 1—50, см. стр. 2. См. также Петров Н. П. Напряжения в рельсах от вертикальных давлений катящихся колес. Влияние скорости и неправильного вида колес. С.-Петербург, тип. министерства путей сообщения (Кушнарев И. Н. и К^о), 1907, 120 стр. См. стр. 39.

крепленному к сплошному упругому основанию. При такой замене траектория точки касания правильного колеса при постоянном давлении представится прямой линией.

Вопрос о колебаниях балки, возникающих под действием катящегося колеса, давно интересовал инженеров. Приближенную формулу для учета влияния собственного веса балки мы находим у Б. Сен-Венана ¹⁾. Подобный приближенный прием был применен Н. П. Петровым для оценки влияния массы рельса и шпалы на величину динамического прогиба. Дальнейшее исследование колебаний балки под действием катящегося груза принадлежит А. Н. Крылову ²⁾. Вопрос о колебаниях, возникающих в рельсах, рассматривает А. Фламах ³⁾. Он исследует колебания участка рельса между двумя колесами. Принимая этот участок за балку с заделанными концами, А. Фламах показывает, что основной тон для колебаний этой балки имеет весьма малый период, но не останавливается на выяснении влияния этих колебаний на величину напряжений. Ниже мы исследуем вопрос о колебаниях рельса как стержня, лежащего на сплошном упругом основании. Сравнение периода основного тона собственных колебаний рельса с периодом вынуждающих колебания сил позволяет заключить, что вибрации рельса не влияют существенным образом на величину динамических напряжений, вызываемых избыточными противовесами.

Важное влияние неправильностей колеса и рельса, а также влияние противовесов на величину динамических напряжений выяснил в целом ряде работ Н. П. Петров. Пользуясь своим методом, Н. П. Петров изучал влияние различного рода впадин на колесе и рельсе при различных скоростях. Результаты при этом представляются в форме числовых таблиц, что отчасти затрудняет получение общих выводов относительно влияния формы впадины и величины скорости движения на динамические напряжения. Переходя к рельсу, лежащему на сплошном упругом основании, мы приводим задачу к исследованию колебаний системы с одной степенью свободы. Возникающие в такой системе вынужденные колебания могут быть представлены в простой форме, удобной для практических приложений.

¹⁾ См. стр. 609 книги A. C l e b s c h, указанной в сноске ¹⁾ на стр. 335.

²⁾ K r i l o f f A. Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben. *Mathematische Annalen*, 1905, Bd. 61, SS. 211—234. [Перепечатка: К р ы л о в А. Н. Собрание трудов. Том 5, математика и механика. Изд-во АН СССР, 1937, стр. 513—537.] См. также нашу работу «О вынужденных колебаниях призматических стержней (Приложение к исследованию колебаний мостов)». Известия Киевского политехнического института, 1909, год 9, книга 4, стр. 201—252.

³⁾ F l a m a c ' h e A. Recherches sur la flexion des rails. *Bulletin de la Commission Internationale du Congrès des Chemins de fer*, 1903, tome 17, № 10, pp. 905—945. См. p. 933.

§ 5. О колебаниях, возникающих при движении колеса по рельсу

Предположим, что колесо совершенно правильной формы катится по рельсу с постоянной скоростью v (рис. 6). На колесо действует какая-либо переменная сила Q . Благодаря наличию переменной силы прогиб рельса под колесом будет меняться, и движение колеса будет сопровождаться вертикальными перемещениями его центра тяжести. Напишем дифференциальное уравнение для этих перемещений. Рассматривая рельс как невесомую балку, лежащую на сплошном упругом основании, мы найдем, что вертикальная реакция R в месте соприкосновения колеса с рельсом представится так (см. формулы (4), (9) и (10)):

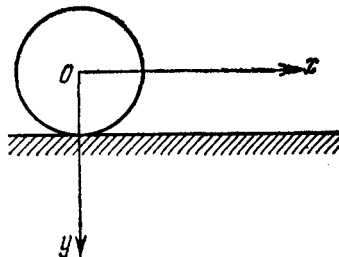


Рис. 6.

$$R = \frac{2ky}{\alpha} = 2D \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma y$$

и нужное нам дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$\frac{q}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} = Q - \frac{2k}{\alpha} y. \quad (15)$$

Рассмотрим предварительно соответствующее дифференциальное уравнение без Q :

$$\frac{q}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2k}{\alpha} y = 0.$$

Этим уравнением определяются *свободные колебания* колеса, опирающегося на рельс. Вводя обозначение $\alpha q / 2k = \lambda$, где λ , очевидно, представляет собой статический прогиб рельса под действием веса колеса, получим для свободных колебаний колеса выражение

$$y = y_0 \cos \sqrt{\frac{g}{\lambda}} t + y'_0 \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{\lambda}} t. \quad (16)$$

Здесь y_0 — начальное вертикальное перемещение колеса, отсчитываемое от положения равновесия; y'_0 — начальная вертикальная скорость колеса. Период колебаний не зависит от начальных обстоятельств и определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}}. \quad (17)$$

Величина его будет такая же, как у математического маятника, длина которого равна статическому прогибу рельса под действием

собственного веса колеса. Ниже мы приводим несколько значений T , вычисленных при $D=10\ 000\ \text{кг}^2$):

γ	1	3	5	7
$T, \text{сек}$	0,053	0,046	0,043	0,041

т. е. колесо совершает в одну секунду 20—25 колебаний.

Обратимся теперь к уравнению (15).

Общий интеграл этого уравнения мы получим, если к *свободным колебаниям* системы присоединим *вынужденные колебания*, вызываемые силой Q . Сила Q составляется из ряда элементов; сюда войдут собственный вес колеса, давление рессоры, кроме того, могут войти силы инерции избыточных противовесов, силы инерции, возникающие вследствие несовпадения центра тяжести колеса с осью вращения, силы инерции части шатуна и движущихся взад и вперед частей машины, а также силы, обусловленные давлением пара.

Мы можем отдельно изучить влияние каждой из этих сил и потом суммированием действий этих сил найти интересующий нас окончательный результат. Выделим сначала из силы Q постоянную часть. Эта постоянная часть составит из собственного веса колеса и неизменно с ним связанных частей, сюда же присоединим и давление, передаваемое колесу рессорой. При движении поезда сжатие рессор не остается постоянным, оно может колебаться в весьма значительных пределах. Колебания эти обычно совершаются значительно медленнее тех колебаний колеса на рельсе, которыми мы будем дальше заниматься, поэтому при вычислении наибольших давлений на рельс можно считать усилие в рессоре постоянным, соответствующим тому максимальному сжатию, которое удастся отметить при опытах. Обозначим через q вес колеса, через m — отношение нормального давления рессоры к весу колеса и через β — коэффициент, характеризующий возможную перегрузку рессоры; тогда та часть силы Q , которую мы условились считать постоянной, представится выражением

$$q(1 + \beta m).$$

Вставляя это вместо Q в уравнение (15), получим общий интеграл этого уравнения в таком виде:

$$y = \frac{\alpha}{2k} q(1 + \beta m) + A \cos \sqrt{\frac{g}{\lambda}} t + B \sin \sqrt{\frac{g}{\lambda}} t. \quad (18)$$

Первый член этого выражения представляет собой не что иное, как статический прогиб рельса под действием постоянного давления колеса. Два других члена дают нам свободные колебания колеса,

¹⁾ Колебания этого рода видны ясно из числовых таблиц, составленных для некоторых случаев Н. П. Петровым. См. его работу, указанную в сноске ⁴⁾ на стр. 335, где на стр. 22, между прочим, указан период колебаний для $\gamma=3$.

налагающиеся на статическое перемещение. Произвольные постоянные A и B , определяющие амплитуду и фазу свободных колебаний, должны быть найдены из начальных обстоятельств движения. Практически со свободными колебаниями обычно не придется иметь дела, так как они благодаря наличию сопротивлений постепенно *затухают*¹⁾.

Рассмотрим теперь те колебания, которые могут быть вызваны избыточными противовесами или обусловлены несовпадением центра тяжести колеса с осью вращения. Пусть q_0 — величина центробежной силы, соответствующей рассматриваемой скорости движения, ω — угловая скорость вращения колеса. Если мы условимся отсчитывать время от того момента, когда центробежная сила направлена вертикально вниз, то колебательное движение, вызываемое этой силой, определится уравнением

$$\frac{q}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2k}{\alpha} y = q_0 \cos \omega t.$$

Соответствующий интеграл напишется так:

$$y = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{g} \omega^2} \frac{\lambda q_0}{q} \cos \omega t + A \cos \sqrt{\frac{g}{\lambda}} t + B \sin \sqrt{\frac{g}{\lambda}} t. \quad (19)$$

Первый член этого решения представляет собой вынужденные колебания, а второй и третий члены — свободные колебания системы.

Произвольные постоянные должны быть выбраны таким образом, чтобы были удовлетворены начальные условия. Если, например, в начальный момент прогиб рельса равен статическому прогибу под действием силы $q(1 + \beta m)$ и начальная вертикальная скорость равна нулю, то при действии постоянной силы и силы q_0 получим

$$y = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{g} \omega^2} \frac{\lambda q_0}{q} \left(\cos \omega t - \cos \sqrt{\frac{g}{\lambda}} t \right) + \lambda (1 + \beta m). \quad (19')$$

¹⁾ Если бы мы положили сопротивления пропорциональными скорости, то уравнение движения в рассматриваемом случае представилось бы в таком виде:

$$y'' + 2ny' + \frac{g}{\lambda} y = g(1 + \beta m)$$

и общий интеграл его написался бы так:

$$y = \lambda(1 + \beta m) + e^{-nt} \left[A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{\lambda} - n^2} t \right) + B \sin \left(\sqrt{\frac{g}{\lambda} - n^2} t \right) \right].$$

С возрастанием t второй член полученного решения постепенно приближается к нулю, затухание идет тем интенсивнее, чем больше n .

Если бы мы отсчитывали время от того момента, когда центробежная сила имеет горизонтальное направление оси x , то получили бы уравнение

$$\frac{q}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2k}{\alpha} y = q_0 \sin \omega t.$$

Величина прогиба при вышеуказанных начальных условиях напишется так:

$$y = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{g} \omega^2} \frac{\lambda q_0}{q} \left(\sin \omega t - \omega \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{\lambda}} t \right) + \lambda (1 + \beta m). \quad (19'')$$

Если бы начальные условия были такими, как мы предполагали в двух рассмотренных частных случаях, то для вычисления наибольшего прогиба рельса, а следовательно, и наибольшего давления нужно было бы пользоваться выражениями (19') или (19''). В действительности скорость движения поезда нарастает постепенно, и к тому времени, когда угловая скорость достигнет значения ω и центробежная сила значения q_0 , роль собственных колебаний будет ничтожна и нам придется принять в расчет лишь вынужденные колебания

$$\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{g} \omega^2} \frac{\lambda q_0}{q} \cos \omega t.$$

Амплитуда этих колебаний отличается от статического прогиба $\lambda q_0/q$, вызываемого центробежной силой, лишь множителем

$$\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{g} \omega^2}.$$

Этот множитель, практически всегда больший единицы, является *динамическим коэффициентом* для центробежной силы. Величина его зависит лишь от частоты собственных колебаний системы и угловой скорости вращения колеса. Вводя значения периода собственных колебаний (формула (17)) и время T_1 полного оборота колеса, найдем для динамического коэффициента такое выражение:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{T}{T_1} \right)^2}.$$

Мы видели, что период собственных колебаний при обычно у нас встречающихся жесткостях пути колеблется в пределах $1/20 \div \div 1/25$ сек. Если мы примем, что время T_1 одного оборота колеса в четыре раза больше T , то для динамического коэффициента получим значение

$$\frac{1}{1 - (0,25)^2} \approx 1,07.$$

С возрастанием скорости движения центробежная сила избыточных противовесов растет как квадрат скорости, но если мы примем во внимание возрастание и динамического коэффициента, то придем к заключению, что напряжения, вызываемые в рельсе рассматриваемой динамической причиной, растут быстрее квадрата скорости. Приняв, например, в рассмотренном выше случае вдвое большую скорость, мы получили бы для динамического коэффициента вместо 1,07 величину 1,33. Соответствующие динамические напряжения возрастут в отношении $4 \cdot 1,33/1,07 = 4,97$. Особое значение приобретает динамический эффект в том случае, когда период вынуждающих колебания сил приближается к периоду собственных колебаний колеса на рельсе. Конечно, пока мы будем рассматривать лишь силы, период которых совпадает с временем оборота колеса, то упомянутого выше сближения периодов при встречающихся скоростях движения ожидать нельзя, но есть силы с более короткими периодами. Например, ведущей оси паровоза передаются силы инерции от движущихся взад и вперед частей. Для этих сил можно принять выражение $q_1 \cos 2\omega t$ и соответствующий динамический коэффициент представится так:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{2T}{T_1}\right)^2}.$$

Этот коэффициент может получить значительные размеры и при скоростях, встречающихся на практике.

Пользуясь предыдущими результатами, мы можем перейти теперь к общему выражению для вынуждающей колебания силы Q , входящей в уравнение (15). В самом общем случае мы можем представить эту силу в виде тригонометрического ряда ¹⁾

$$Q = a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + b_1 \sin \omega t + \dots + b_2 \sin 2\omega t + \dots + q(1 + \beta m).$$

Вставляя это в уравнение (15), получим общее решение его в таком виде:

$$y = A \cos \sqrt{\frac{g}{\lambda}} t + B \sin \sqrt{\frac{g}{\lambda}} t + \lambda(1 + \beta m) + \frac{\lambda a_1/q}{1 - \lambda\omega^2/g} \cos \omega t + \dots + \frac{\lambda a_2/q}{1 - 4\lambda\omega^2/g} \cos 2\omega t + \dots + \frac{\lambda b_1/q}{1 - \lambda\omega^2/g} \sin \omega t + \frac{\lambda b_2/q}{1 - 4\lambda\omega^2/g} \sin 2\omega t + \dots$$

Откуда динамический коэффициент для любого члена силы Q может быть без затруднения вычислен.

¹⁾ Если изменение Q за оборот колеса представлено кривой, то разложение в тригонометрический ряд проще всего может быть выполнено анализатором или по ординатам способом К. Рунге. См. R u n g e C. Theorie und Praxis der Reihen. Leipzig, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, 1904, 266 S. См. так же v o n S a n d e n K. Praktische Analysis. Leipzig — Berlin, V. G. Teubner, 1914, 185 S. Последняя книга представляет прекрасное краткое изложение приближенных методов вычисления.

§ 6. Влияние неправильностей колеса и рельса на напряжения в рельсах

При совершенно правильной форме колеса и рельса, пренебрегая местными вдавливаниями в точках касания колеса и некоторой общей деформацией колеса, мы могли считать вертикальные перемещения центра тяжести колеса равными соответствующему прогибу рельса. Если на колесе или рельсе имеются какие-либо неправильности, то указанного равенства существовать не будет и нам придется несколько видоизменить уравнение (15). Обозначим через η глубину впадины на рельсе или на колесе, отсчитывая ее от уровня правильного рельса или окружности правильного колеса. В таком случае вертикальному прогибу рельса y будет соответствовать опускание колеса, равное $y + \eta$, где η — ордината впадины рельса или колеса, соответствующая точке касания. Если вид впадины нам известен, то при заданной скорости движения η представится вполне определенной функцией от времени t . Дифференциальное уравнение для вертикальных перемещений колеса напишется так:

$$\frac{q}{g} \frac{d^2(y + \eta)}{dt^2} = Q - \frac{2k}{\alpha} y,$$

или

$$\frac{q}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2k}{\alpha} y = Q - \frac{q}{g} \frac{d^2 \eta}{dt^2}. \quad (20)$$

Следовательно, наличие на колесе впадины, определяемой функцией η , равносильно приложению к колесу добавочной переменной силы, равной

$$-\frac{q}{g} \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \varphi(t). \quad (21)$$

Для выяснения влияния силы $\varphi(t)$ на напряжения приведем здесь выражение вызываемого этой силой перемещения за промежуток времени от 0 до какого-либо момента t .

Если действие непрерывной силы $\varphi(t)$ представить себе как ряд последовательных толчков, то интересующее нас перемещение легко может быть представлено в виде некоторого определенного интеграла. Возьмем в пределах рассматриваемого промежутка времени какой-либо момент t_1 . Ему соответствует сила $\varphi(t_1)$. За промежуток времени dt_1 эта сила сообщит массе колеса q/g скорость, равную $q\varphi(t_1)dt_1/q$. Скорости этой, сообщенной в момент t_1 , будет соответствовать в момент t , т. е. через промежуток времени $t - t_1$, перемещение

$$\sqrt{\frac{\lambda}{g} \frac{g}{q}} \varphi(t_1) \sin \left[\sqrt{\frac{g}{\lambda}} (t - t_1) \right] dt_1.$$

Этот результат может быть сразу написан, если воспользоваться формулой второго члена в выражении (16). Зная, как сказывается на величине перемещения в момент t действие силы $\varphi(t_1)$ за промежуток времени dt_1 , находим полное вертикальное перемещение колеса за промежуток времени t в виде такого интеграла:

$$\sqrt{\frac{\lambda}{g}} \frac{g}{q} \int_0^t \varphi(t_1) \sin \left[\sqrt{\frac{g}{\lambda}} (t-t_1) \right] dt_1. \quad (22)$$

Это перемещение представляет собой тот дополнительный прогиб рельса, который обусловлен впадиной на колесе или рельсе. Выясним значение этого прогиба в нескольких частных случаях.

В качестве первого примера рассмотрим впадину такого очертания, когда поверхность впадины на концах является касательной к правильной поверхности рельса. При таком плавном сопряжении очертания

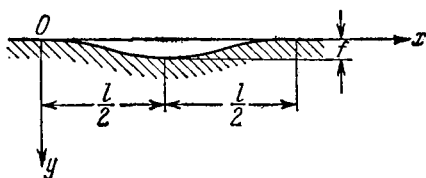


Рис. 7.

впадины с соседними правильными участками колеса или рельса вступление колеса на впадину не будет сопровождаться резким изменением прогиба рельса y и его производной по времени. Этому условию будет, например, удовлетворять такое выражение для глубины впадины (рис. 7):

$$\eta = \frac{f}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right).$$

Здесь через f обозначена наибольшая глубина впадины, l — длина впадины. Начало координат совпадает с началом впадины. Отсчитывая t от начала впадины, представим для данного случая уравнение (20) в таком виде:

$$\frac{q}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2k}{\alpha} y = Q - \frac{q}{g} \frac{f}{2} \frac{4\pi^2 v^2}{l^2} \cos \frac{2\pi vt}{l}.$$

При этом

$$\varphi(t) = - \frac{q}{g} \frac{f}{2} \frac{4\pi^2 v^2}{l^2} \cos \frac{2\pi vt}{l}.$$

Вставляя значение $\varphi(t)$ в выражение (22), найдем для прогиба рельса, вызванного наличием впадины, такое выражение:

$$y = \frac{2\pi^2 v^2 f}{l^2} \cdot \frac{1}{4\pi^2 v^2 / l^2 - g/\lambda} \left(\cos \frac{2\pi vt}{l} - \cos \sqrt{\frac{g}{\lambda}} t \right).$$

Этот результат можно несколько упростить, если воспользоваться обозначениями $T = 2\pi \sqrt{\lambda/g}$, $T_1 = l/v$.

Величина T представляет собой период колебаний колеса на рельсах, T_1 — время пробега колесом впадины.

Для дополнительного прогиба получаем выражение

$$y = \frac{f}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{T^2}{T_1^2}} \left(\cos \frac{2\pi t}{T_1} - \cos \frac{2\pi t}{T} \right), \quad (23)$$

при помощи которого может быть учтено влияние впадины на прогиб при любом значении t , лежащем в пределах

$$0 < t < T_1.$$

После пробега впадины мы будем иметь лишь свободные колебания, амплитуда которых легко может быть определена по значению y и y' в момент $t = T_1$.

Если длина впадины известна, то по заданной скорости движения вычисляем период T_1 и после этого из выражения (23) без труда находим наибольшее положительное и наибольшее отрицательное значение y за время пробега впадины. Как только колесо вступает на впадину, сейчас же уменьшается давление на рельс, рельс несколько приподнимается, уменьшается прогиб, вызванный статическим действием колеса. Колесо при этом начинает опускаться вниз и приобретает вертикально вниз направленную скорость. Благодаря этой скорости за вторую часть времени пробега колесом впадины давление на рельс возрастает и может достигнуть весьма значительной величины. Поясним это численными примерами. Положим $T_1 = T/2$, т. е. время пробега впадины колеблется в пределах примерно от 1/40 сек до 1/50 сек.

Составляя производную по t от выражения (23) и приравнявая ее нулю, получим уравнение

$$\sin \frac{2\pi t}{T_1} = \frac{T_1}{T} \sin \frac{2\pi t}{T}, \quad (24)$$

из которого могут быть найдены значения времени t , соответствующие y_{\max} и y_{\min} . При $T_1 = T/2$ первый корень дает нам $t = 0,42T_1$.

Этому моменту соответствует наименьшее значение y , равное

$$y_{\min} = -\frac{f}{2} \frac{1}{1 - 1/4} (0,875 + 0,250) = -0,75f.$$

Следующий корень уравнения (24) будет больше T_1 . Поэтому для получения y_{\max} за время пробега впадины полагаем в решении (23) $t = T_1$. Таким образом, получаем $y_{\max} = 1,33f$. Если $T_1 = 2T/3$, то первый корень уравнения (24) будет $t = 0,385T_1$. Этому корню соответствует наименьшее значение

$$y_{\min} = -0,64f.$$

Второй корень имеет значение $t=0,92T_1$. Ему соответствует $y_{\max}=1,47f$.

На конце впадины, при $t=T_1$, будем иметь $y=1,35f$.

Подобным образом может быть выяснен вопрос о дополнительных прогибах, обусловленных впадинами; при любом значении отношения $T_1 : T$ можно, наконец, выбрать такое T_1 , которому соответствует наибольшее значение y_{\max} . Остановимся здесь на том случае, когда $T_1=T$, т. е. когда время пробега впадины равно периоду собственных колебаний колеса. Выражение (23) можно представить в таком виде:

$$y = - \frac{f}{1 - \frac{1}{T_1^2}} \sin \left(\frac{\pi t}{T_1} + \frac{\pi t}{T} \right) \sin \left(\frac{\pi t}{T_1} - \frac{\pi t}{T} \right),$$

откуда при $T=T_1$ получаем $y = -\frac{f}{2} \sin \frac{2\pi t}{T} \cdot \frac{\pi t}{T}$, т. е. амплитуда колебаний растет пропорционально времени, и если бы впадины рассматриваемой формы располагались одна за другой, то мы имели бы явление резонанса: при малых сопротивлениях можно было бы в рассматриваемом случае ожидать сильного возрастания амплитуды колебаний.

Во всех рассматриваемых случаях мы предполагаем постоянное соприкосновение колеса и рельса. Если благодаря колебаниям, вызванным впадиной, y становится отрицательным, то мы полагаем, что отрицательное значение меньше того начального прогиба рельса, который вызван статическим давлением колеса. Когда отрицательный прогиб превзойдет статический прогиб рельса, произойдет отделение колеса от рельса.

Вычислив направленную вверх скорость колеса при отделении от рельса, мы легко можем найти высоту подъема колеса и те напряжения, которые возникнут при обратном падении колеса на рельс. Так как мы пренебрегаем массой рельса, то динамический прогиб λ_d при падении колеса с высоты h найдется по формуле

$$\lambda_d = \lambda_{ст} + \sqrt{\lambda_{ст}^2 + 2h\lambda_{ст}}.$$

На основании вида формулы (23) можно сделать два замечания, имеющих важное практическое значение. Во-первых, можно заключить, что при заданной жесткости пути и заданном значении f напряжения, вызываемые впадиной рассмотренной формы, зависят лишь от T_1 . Меняя длину впадины l пропорционально v , мы всегда будем получать один и тот же динамический эффект. Следовательно, при условии разных значений l рассматриваемые динамические напряжения не будут зависеть от скорости движения колеса по рельсу¹⁾.

¹⁾ Конечно, пока мы пренебрегаем влиянием массы рельса.

Во-вторых, по формуле (23) можно для заданной формы впадины найти наибольшее значение прогиба, выраженное через f , но при переходе от прогиба к усилиям приходится принимать во внимание жесткость пути. Одному и тому же прогибу будет соответствовать

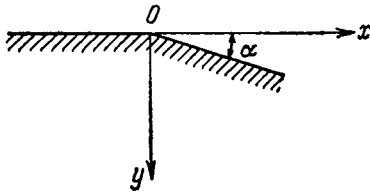


Рис. 8.

тем большее значение усилия, чем жесткость пути больше, т. е. одна и та же впадина на колесе или рельсе будет вызывать в случае жесткого пути большие дополнительные напряжения, чем в случае пути гибкого, т. е. с малыми значениями J и D .

В качестве второго примера рассмотрим колебания, возникающие при переходе колеса с горизонтального пути на уклон (рис. 8). В этом случае имеем

$$\eta = ax = avt,$$

где a — величина уклона.

Вертикальные перемещения колеса будут определяться уравнением

$$\frac{q}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2k}{\alpha} y = Q,$$

т. е. таким же уравнением, как и при отсутствии неровностей.

Влияние уклона скажется лишь в момент прохождения колесом точки O . Если правильное колесо, находящееся под действием постоянных сил, катится по горизонтальному правильному рельсу, то вертикальная скорость его равна нулю, и мы при изучении влияния уклона должны положить для начального момента (время считываем от точки O)

$$\frac{d(y + \eta)}{dt} = 0.$$

Так как при заданной форме неровности

$$\frac{d\eta}{dt} = av,$$

то, следовательно, в начальный момент

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)_{t=0} = -av.$$

В момент перехода колеса на уклон возникают свободные колебания, соответствующие найденной начальной скорости. Дополнительные прогибы, вызываемые переходом колеса на уклон,

представятся в таком случае формулой

$$-av \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{\lambda}} t. \quad (25)$$

При $a=0,002, v=22,2$ м/сек и $\lambda=0,072$ см¹) найдем, что амплитуда вынужденных колебаний равна 0,0382 см.

Если вес колеса составляет 0,125 от полного статического давления на рельс, то динамические напряжения, соответствующие найденным колебаниям, составят приблизительно 6,6% от статических напряжений.

При скорости $v=29,6$ м/сек и $\lambda=0,0574$ см²) амплитуда вынужденных колебаний будет равна 0,0453 см и соответствующие динамические напряжения составят примерно 10% от статических напряжений. Вообще динамические прогибы в этом случае будут пропорциональны av и пропорциональны $\sqrt{\lambda}$, а напряжения пропорциональны av и обратно пропорциональны $\sqrt{\lambda}$.

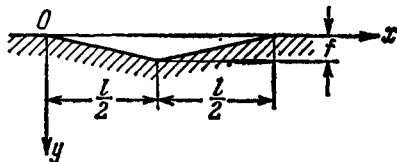


Рис. 9.

Имея выражение для колебаний, возникающих при изменении уклона, легко исследовать вопрос о влиянии впадин, очерченных по какой-либо ломаной линии. Возьмем в качестве примера впадину (рис. 9), глубина которой сначала увеличивается по линейному закону, а потом по тому же закону убывает³).

При глубине впадины f и длине ее l уклон, на который колесо вступает в точке O , равен $2f/l$ и возникающие в этот момент колебания определяются формулой

$$-\frac{2fv}{l} \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{\lambda}} t. \quad (26)$$

Выражение это остается в силе, пока колесо находится на уклоне, т. е. в пределах $0 \leq t \leq T_1/2$. В середине впадины происходит изменение уклона, возникнут новые колебания, которые сложатся с только что найденными. Если принять во внимание, что здесь изменение уклона равно $4f/l$ и направлено в сторону, обратную тому, что мы имели в точке O , то легко написать для колебаний на второй

¹) См. Петров Н. П. Напряжения в рельсах от вертикальных давлений катящихся колес. Влияние скорости и неправильного вида колес. С.-Петербург, тип. министерства путей сообщения (Кушнарев И. Н. и К^о), 1907, 120 стр. См. стр. 77.

²) Там же, стр. 87.

³) Целый ряд численных примеров этого рода рассмотрен в цитированных на стр. 331 и 335 трудах Н. П. Петрова.

половине впадины такое выражение:

$$-\frac{2fv}{l} \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{\lambda}} t + \frac{4fv}{l} \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{\lambda}} \left(t - \frac{T_1}{2}\right), \quad (27)$$

справедливое в пределах $T_1/2 \leq t \leq T_1$.

Наконец, в конце впадины произойдет еще одно изменение уклона, и мы получим новое колебательное движение. Суммируя все эти колебания и пользуясь выражениями для T и T_1 , получим для вертикальных перемещений колеса после прохождения впадины такое значение:

$$\frac{fT}{\pi T_1} \left[-\sin \frac{2\pi t}{T} + 2 \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi T_1}{T} \right) - \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi T_1}{T} \right) \right]. \quad (28)$$

Прогиб, вызванный впадиной, и в этом случае зависит лишь от глубины впадины и времени пробега впадины T_1 .

Так как можно себе представить, что длина впадины меняется пропорционально скорости, то заключаем, что вызванные впадиной колебания не зависят от скорости движения. Задаваясь величинами f и T_1 , мы при заданной жесткости пути легко находим при помощи формул (26), (27) и (28) вертикальные прогибы в любой момент времени (см. таблицу).

Т а б л и ц а

Прогибы вычислены через каждые 7 см

n	$-0,259 \sin \frac{2\pi t}{T}$, см	$+0,518 \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{T_1}{2}\right)$, см	$-0,259 \sin \frac{2\pi}{T} (t - T_1)$, см	Сумма, см	Пол- ный про- гиб, см
0	—0	—	—	0	0,459
1	—0,079	—	—	—0,079	0,380
2	—0,150	—	—	—0,150	0,309
3	—0,207	—	—	—0,207	0,252
4	—0,244	—	—	—0,244	0,215
5	—0,259	0	—	—0,259	0,200
6	—0,249	+0,157	—	—0,092	0,367
7	—0,216	+0,300	—	+0,084	0,543
8	—0,162	+0,414	—	+0,252	0,711
9	—0,093	+0,488	—	+0,395	0,854
10	—0,015	+0,518	0	+0,503	0,962
11	+0,064	+0,498	—0,079	+0,483	0,942
12	+0,137	+0,432	—0,150	+0,419	0,878
13	+0,198	+0,324	—0,207	+0,315	0,774
14	+0,239	+0,185	—0,244	+0,180	0,639
15	+0,258	+0,030	—0,259	+0,029	0,488

В качестве примера используем в таблице тот случай, когда $f=0,4$ см, $l=70$ см, $v=2960$ см/сек, статический прогиб от давле-

ния в 10 000 кг равен 0,459 см и значение $\lambda = 0,125 \cdot 0,459 = 0,0547$ см¹).

Суммируя прогибы от колебаний со статическим прогибом, найдем, что для рассмотренного промежутка времени наибольший прогиб, равный 0,962 см, соответствует моменту оставления колесом впадины. Этот максимальный прогиб равен 2,1 от статического прогиба.

Наибольшее отрицательное значение прогиба на протяжении первой половины впадины определится из выражения (26).

Оно получается при T_1 весьма малом, т. е. при весьма короткой впадине, и равняется $-f$. Наибольшее положительное значение прогиба на протяжении второй половины впадины найдется из выражения (27).

Считая T_1 заданным и приравнивая нулю производную от (27) по t , получаем уравнение

$$\cos \frac{2\pi t}{T} = 2 \cos \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi T_1}{T} \right).$$

При изменении t в пределах от $T_1/2$ до T_1 левая часть уравнения будет изменяться в пределах от $\cos(\pi T_1/T)$ до $\cos(2\pi T_1/T)$, а правая часть в пределах от $2 \cos 0$ до $2 \cos(\pi T_1/T)$. Первый корень уравнения даст нам

$$\pi T_1/T = 1,946,$$

откуда

$$T_1 = 0,620T.$$

Пока $T_1 \leq 0,620 T$, наибольшее значение прогиба для второй половины впадины получается у конца впадины, т. е. для $t = T_1$. Например, для $T_1 = 0,5T$ получим $y_{\max} = 4f/\pi = 1,27f$. Для $T_1 = 0,620T$ получаем $y_{\max} = 1,31f$.

Если впадина имеет параболическое очертание, определяемое уравнением

$$\eta = \frac{4f}{l^2} (lx - x^2),$$

то будем иметь, отсчитывая время от начала впадины,

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{4fv}{l^2} (l - 2vt), \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{8fv^2}{l^2}.$$

Движение колеса по этой впадине вызывает такие же изменения прогиба рельса, как и приложение постоянной силы

$$\varphi(t) = \frac{q}{g} \frac{8fv^2}{l^2}.$$

¹) Числа соответствуют примеру Н. П. Петрова. См. стр. 86 работы, упомянутой в сноске ²) на стр. 335.

Вставляя это в общее решение (22), найдем для соответствующих вертикальных перемещений выражение

$$\frac{8f}{4\pi^3} \frac{T^2}{T_1^3} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{T}\right).$$

На эти перемещения наложатся еще колебания, обусловленные вступлением колеса на впадину. Полное выражение для дополнительного прогиба при движении колеса по впадине будет такое:

$$-\frac{2f}{\pi} \frac{T}{T_1} \sin \frac{2\pi t}{T} + \frac{8f}{4\pi^3} \frac{T^2}{T_1^3} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{T}\right). \quad (29)$$

Опять мы получили выражение, в которое кроме величины T , зависящей от жесткости пути, входят лишь величины f и T_1 . В случае впадины постоянной глубины (рис. 10) вступление колеса на впадину сопровождается подъемом рельса на величину f .

Благодаря такому начальному смещению возникнут колебания, определяемые выражением $f \cos(2\pi t/T)$.

У конца впадины рельс должен будет опуститься на величину f и вследствие этого возникнут новые колебания, определяемые формулой $f \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - T_1\right)$.

В самом невыгодном случае амплитуда колебаний, после прохождения колесом впадины рассматриваемого очертания, будет равна $2f$.

На основании всего сказанного заключаем, что величина наибольшего прогиба, вызванного прохождением колеса по впадине одного из рассмотренных видов, не будет зависеть от скорости движения колеса и может быть представлена формулой $y_{\max} = \beta f$, где β — коэффициент, зависящий от очертания впадины.

Соответствующее этому прогибу усилие будет равно

$$\beta f \frac{2k}{\alpha} = 2\beta f \sqrt{\frac{4EJD^3}{l^3}}. \quad (30)$$

Для изгибающего момента получим выражение

$$M = \frac{1}{4\alpha} 2\beta f \sqrt{\frac{4EJD^3}{l^3}} = \beta f \sqrt{\frac{EJD}{l}}. \quad (31)$$

Величина наибольших напряжений, обусловленных дополнительным прогибом, будет равна

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{1,12M}{J^{3/4}} = 1,12\beta f \sqrt{\frac{E^2 D^3}{l^2 J}}. \quad (32)$$

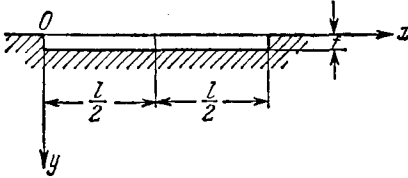


Рис. 10.

Сравнивая этот результат с выражением (14') для напряжений при статической нагрузке, заключаем, что лишь увеличение момента инерции поперечного сечения рельса уменьшает в обоих случаях величину максимальных напряжений в рельсах. Увеличение же жесткости основания, характеризуемой отношением D/l , сопровождается уменьшением напряжений от статических нагрузок, но зато увеличивает напряжения, возникающие от неровностей пути и колес.

Рассмотрим теперь, как меняется благодаря наличию впадин давление на шпалу. Пользуясь выражением (31), найдем для давления на шпалу такое значение:

$$R = \frac{\alpha l}{2} 2\beta f \sqrt[4]{\frac{4EJD^3}{l^3}} = \beta f D, \quad (33)$$

т. е. дополнительное давление на шпалу будет пропорционально глубине впадин и пропорционально величине D . От скорости движения это давление не зависит.

Формулы (32) и (33) совместно с формулами для определения статических напряжений дают ясное представление относительно того, как влияют различные элементы, определяющие верхнее строение, на напряжения, возникающие в рельсе и балласте. Если мы имеем, например, для какого-либо рельса напряжения от статической нагрузки, равные 1000 кг/см^2 , и напряжения, вызванные прохождением колеса на впадине, равные также 1000 кг/см^2 , то при увеличении момента инерции рельса вдвое и при уменьшении расстояния между шпалами в отношении 5 : 8 статические напряжения в рельсе уменьшатся на 37%, а динамические увеличатся примерно на 7%.

§ 7. Действие на рельс системы подвижных грузов

При изучении динамических напряжений в рельсах мы пока рассматривали движение одного колеса. Полагая, что рельс опирается на сплошное упругое основание, можно без особых затруднений распространить выводы и на случай действия системы грузов. Общий ход исследования покажем на случае действия на рельс системы, состоящей из двух грузов. Если на балку, лежащую на сплошном упругом основании, действуют две силы P_1 и P_2 , причем расстояние между этими силами равно a , то прогибы y_1 и y_2 в точках приложения этих сил определяются формулами (см. § 2)

$$y_1 = P_1 \frac{\alpha}{2k} + \eta P_2 \frac{\alpha}{2k}, \quad y_2 = P_2 \frac{\alpha}{2k} + \eta P_1 \frac{\alpha}{2k},$$

где

$$\eta = e^{-\alpha a} (\cos \alpha a + \sin \alpha a).$$

Значение η может быть определено в каждом частном случае из таблицы III.

Из написанных выражений для прогибов легко находим

$$P_1 = \frac{2k}{\alpha(1-\eta^2)}(y_1 - \eta y_2),$$

$$P_2 = \frac{2k}{\alpha(1-\eta^2)}(y_2 - \eta y_1).$$

Пользуясь этими формулами, мы сможем по прогибам рельса под каждым из двух грузов найти соответствующие давления на рельс и равные им реакции, оказываемые рельсом на колеса.

Обозначим через q_1 и q_2 веса колес и через Q_1 и Q_2 — суммы всех других вертикальных сил, приложенных к колесам, например давления рессор, вертикальные составляющие центробежных сил от избыточных противовесов и т. д.

Дифференциальные уравнения для вертикальных перемещений колес напишутся таким образом:

$$\frac{q_1}{g} \frac{d^2 y_1}{dt^2} = Q_1 - \frac{2k}{\alpha(1-\eta^2)}(y_1 - \eta y_2),$$

$$\frac{q_2}{g} \frac{d^2 y_2}{dt^2} = Q_2 - \frac{2k}{\alpha(1-\eta^2)}(y_2 - \eta y_1).$$

Задача сводится к исследованию колебаний системы с двумя степенями свободы. Рассмотрим предварительно свободные колебания этой системы. Полагая $Q_1 = Q_2 = 0$ и пользуясь для прогибов, вызываемых действием веса каждого колеса в отдельности, обозначениями $\lambda_1 = \alpha q_1 / 2k$, $\lambda_2 = \alpha q_2 / 2k$, представим систему полученных выше дифференциальных уравнений в таком виде:

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\frac{g}{\lambda_1} \frac{1}{1-\eta^2} (y_1 - \eta y_2),$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\frac{g}{\lambda_2} \frac{1}{1-\eta^2} (y_2 - \eta y_1).$$

Определяя из первого уравнения y_2 и вставляя его в уравнение второе, придем к такому дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$\frac{d^4 y_1}{dt^4} + \frac{g}{1-\eta^2} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{g^2}{1-\eta^2} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} y_1 = 0. \quad (34)$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$r^4 + \frac{g}{1-\eta^2} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) r^2 + \frac{g^2}{1-\eta^2} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} = 0$$

дает для r^2 два таких отрицательных значения:

$$r^2 = -\frac{g}{2(1-\eta^2)} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \pm \sqrt{\frac{g^2}{4(1-\eta^2)^2} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right)^2 - \frac{g^2}{1-\eta^2} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}}.$$

Общий интеграл уравнения (34) напишется так:

$$y = C_1 \cos r_1 t + C_2 \sin r_1 t + C_3 \cos r_2 t + C_4 \sin r_2 t.$$

Периоды соответствующих типов собственных колебаний системы будут иметь значения $\tau_1 = 2\pi/r_1$ и $\tau_2 = 2\pi/r_2$.

В том случае, когда вес колес одинаков, имеем $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, следовательно,

$$\tau_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda(1-\eta)}{g}}, \quad \tau_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda(1+\eta)}{g}}. \quad (35)$$

Один из полученных периодов меньше, а другой больше, чем период колебаний одиночного колеса на рельсе. Разность между периодами возрастает с возрастанием η . При $\eta = 0$ оба периода одинаковы и равны тому, что мы получили для одиночного колеса.

Обратимся теперь к вынужденным колебаниям системы. Предположим, что к первому колесу приложена переменная сила Q_1 . Повторяя прежние выкладки, мы найдем для определения прогиба y_1 такое дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^4 y_1}{dt^4} + \frac{g}{1-\eta^2} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{g^2}{1-\eta^2} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} y_1 = \frac{g^2 Q_1}{\lambda_2 q_1 (1-\eta^2)} + \frac{g}{g_1} \frac{d^2 Q_1}{dt^2}. \quad (36)$$

Присоединяя к частному решению этого уравнения общий интеграл уравнения (34), получим общее выражение для y_1 . Произвольные постоянные в этом решении должны быть найдены из начальных условий.

Рассмотрим в качестве примера колебания, вызываемые избыточными противовесами. Положим $Q_1 = Q_0 \cos \omega t$.

Частное решение уравнения (36), представляющее собой *вынужденные колебания* системы, напишется в этом случае так:

$$y_1 = Q_0 \cos \omega t \cdot \frac{g^2 - g\omega^2 \lambda_2 (1-\eta^2)}{q_1 \lambda_2 (1-\eta^2) \left[\omega^4 - \frac{g\omega^2}{1-\eta^2} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) + \frac{g^2}{\lambda_1 \lambda_2 (1-\eta^2)} \right]}.$$

В частном случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, найдем

$$y_1 = \frac{\lambda Q_0 \cos \omega t}{q_1} \cdot \frac{1 - \frac{\omega^2 \lambda}{g} (1-\eta^2)}{1 - \frac{\omega^2 \lambda}{g} + \frac{\omega^4 \lambda^2}{g^2} (1-\eta^2)}.$$

Первый множитель в полученном решении есть не что иное, как статический прогиб, вызываемый силой Q_1 . Второй множитель представляет собой *динамический коэффициент* для рассматриваемого случая. Пользуясь обозначениями $T = 2\pi \sqrt{\lambda/g}$, $T_1 = 2\pi/\omega$,

представим динамический коэффициент в таком виде:

$$\frac{1 - (1 - \eta^2) \frac{T^2}{T_1^2}}{1 - 2 \frac{T^2}{T_1^2} + \frac{T^4}{T_1^4} (1 - \eta^2)} \quad (37)$$

При $T < T_1$ этот коэффициент больше единицы и больше того коэффициента, который мы имели при действии одиночного колеса. Если угловая скорость вращения колеса такова, что

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\lambda(1 - \eta)/g} \quad \text{или} \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\lambda(1 + \eta)/g},$$

т. е. когда период полного оборота колеса совпадает с одним из периодов собственных колебаний системы, знаменатель в выражении для динамического коэффициента обращается в нуль, и мы можем ожидать сильного возрастания амплитуды вынужденных колебаний системы.

При обычных условиях величины η^2 и T^2/T_1^2 представляют собой малые дроби, и мы, пренебрегая малыми высших порядков, можем положить в этом случае динамический коэффициент равным $1/[1 - (1 + \eta^2)T^2/T_1^2]$.

Результат этот мало отличается от того, что мы имели для случая одиночного колеса, поэтому при указанных условиях можно определять динамическое давление каждого колеса как одиночного и потом действия этих давлений суммировать так же, как и в случае системы статически приложенных грузов. Если период вынуждающей колебания силы вдвое меньше T_1 , отношение T^2/T_1^2 должно быть заменено отношением $4T^2/T_1^2$. Эта величина может быть уже близкой к единице, и потому при определении динамического коэффициента нужно пользоваться общим выражением (37).

Таким же образом мы можем исследовать колебания любой системы колес, но так как на движение одного колеса существенное влияние оказывают лишь ближайšie колеса системы, то практически можно при исследовании ограничиваться системой, состоящей из двух или из трех колес.

§ 8. О вибрациях рельса

При определении динамических напряжений мы пренебрегали массой рельса, а следовательно, и теми вибрациями, которые в рельсе возникают при действии переменных изгибающих сил. Мы предполагали, что в случае переменных давлений колеса на рельс зависимость между прогибами и действующими силами будет такая же, как и при статической нагрузке. Погрешности, обусловленные этими допущениями, будут тем меньшими, чем медленнее меняются силы, чем больше их период по сравнению с периодом собственных

колебаний рельса. Поэтому для оценки погрешности, обусловленной сделанным выше допущением, весьма важно исследовать колебания рельса, особенно существенно найти период основных колебаний, т. е. тех, которым соответствует наибольший период. При изучении колебаний рельса мы будем предполагать, что он имеет весьма большую длину и непрерывно опирается на сплошное упругое основание. Особенно простое выражение для колебаний мы получаем в том случае, когда концы стержня, лежащего на упругом основании, опираются на совершенно жесткие опоры, и так как отсюда легко перейти к основному тону для собственных колебаний рельса бесконечно большой длины, то мы пока и ограничимся этой простейшей задачей. Если через l обозначим длину рельса и расположим начало координат у левой опоры, то искривленная ось рельса в самом общем случае может быть представлена рядом

$$y = f_1 \sin \frac{\pi x}{l} + f_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + f_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (38)$$

При вибрациях рельса коэффициенты f_1, f_2, \dots представляются некоторыми функциями от времени. Функции эти найдутся из соответствующих уравнений движения, и мы их скорее всего получим, рассматривая рельс на упругом основании как систему с бесконечным числом степеней свободы. В таком случае величины f_1, f_2, \dots будут играть роль координат системы. Выразим потенциальную и кинетическую энергию системы через эти координаты.

Потенциальная энергия системы составится из двух частей: энергии, соответствующей изгибу рельса, и энергии деформации упругого основания. Для первой части мы можем воспользоваться известным выражением энергии изогнутого призматического стержня, тогда получим на основании (38)

$$V_1 = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum n^4 f_n^2.$$

Вычислим теперь энергию деформации основания. Сохраняя для жесткости основания прежнее обозначение k , мы найдем, что на каждую единицу длины изогнувшегося рельса приходится реакция основания, равная ky . Потенциальная энергия, накапливающаяся в упругом основании при деформации, может быть представлена так:

$$V_2 = \int_0^l \frac{ky^2}{2} dx = \frac{kl}{4} \sum f_n^2.$$

При составлении кинетической энергии системы обозначим через p вес, приходящийся на единицу длины рельса, тогда живая сила,

отнесенная к единице длины, представится так:

$$\frac{1}{2} \frac{p}{g} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2,$$

и полное выражение для кинетической энергии системы будет такое:

$$\frac{1}{2} \int_0^l \frac{p}{g} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{p}{2g} \frac{l}{2} \sum \left(\frac{df_n}{dt} \right)^2.$$

Дифференциальное уравнение, определяющее какую-либо координату f_n , напишется так:

$$\frac{d^2 f_n}{dt^2} + \frac{EJ\pi^4}{I^4} \frac{g}{p} n^4 f_n + \frac{kg}{p} f_n = 0,$$

откуда

$$f_n = A \cos rt + B \sin rt,$$

где

$$r^2 = \left(\frac{EJ\pi^4}{I^4} n^4 + k \right) \frac{g}{p}.$$

Получив общее выражение для f_n , мы без всяких затруднений могли бы исследовать вопрос о свободных и вынужденных колебаниях стержня, лежащего на сплошном упругом основании.

Полагая $k=0$, получим колебания свободного стержня с опертми концами. Наличие упругого основания повышает основной тон колебаний, и мы для соответствующего периода получим выражение

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{EJ\pi^4}{I^4} + k \right) \frac{g}{p}}}.$$

Наконец, считая длину стержня весьма большой, получим для основного тона такой период:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{p}{kg}}. \quad (39)$$

Этому периоду соответствует тот тип колебаний, когда рельс, не изгибаясь, совершает вертикальные поступательные перемещения. К тому же результату мы пришли бы, если бы рассматривали рельс как стержень со свободными концами. Если мы возьмем наиболее тяжелый тип рельса и прибавим к нему вес шпалы, то можно положить $p=100 \text{ кг/м}$. Принимая для k значение 100 кг/см^2 , найдем из формулы (39), что период основного тона будет примерно равен 1/50 секунды. При такой частоте основного тона деформации, вызываемые периодическими силами с периодом, большим 1/6 секунды, будут весьма близки к статическим деформациям, и потому мы, пренебрегая массой рельса, с достаточной точностью учитываем динамические напряжения, вызываемые избыточными противове-

сами и силами инерции, обусловленными несовпадением центра тяжести колеса с осью вращения. Значительно меньшей степенью достоверности обладают результаты, относящиеся к исследованию влияния различного рода впадин на колесе и рельсе. Если края впадин имеют плавное сопряжение с правильной поверхностью колеса и рельса и длина впадин такова, что время пробега T_1 велико по сравнению с периодом основных колебаний рельса, то и в этом случае влияние массы рельса незначительно. Но при коротких впадинах с неплавными сопряжениями колебания, возникающие в рельсе при прохождении колесом впадины, могут иметь весьма существенное значение. Здесь движение будет сопровождаться ударами, которые вызовут весьма значительные местные напряжения в точках касания колеса и рельса.

Выяснение величины этих напряжений потребует не только дальнейшей теоретической разработки вопроса, но также и целого ряда экспериментальных исследований. Ниже мы намечаем несколько вопросов, которые следовало бы подвергнуть экспериментальному изучению. Здесь же перечислим главнейшие полученные нами результаты, которые могут иметь практическое значение.

1. Рассматривая рельс как балку, лежащую на сплошном упругом основании, мы можем значительно упростить определение напряжений, вызываемых статической нагрузкой. Особенно существенные упрощения получаются в тех случаях, когда приходится иметь дело с системой грузов.

2. Пренебрегая массой рельса, мы приводим задачу об определении динамических напряжений, вызываемых катящимся колесом, к исследованию колебаний системы с одной степенью свободы. Приходится различать два рода динамических напряжений: а) напряжения, вызываемые неровностями по окружности колеса или поверхности рельса, и б) напряжения, вызываемые избыточными противовесами и несовпадением центра тяжести колеса с осью вращения. Динамические напряжения первого рода зависят от глубины впадин и их формы, но не зависят от скорости движения (конечно, пока мы пренебрегаем массой рельса), так как в окончательные формулы войдет лишь время, потребное для пробега впадины. Меняя длину впадины пропорционально скорости движения, мы можем получить один и тот же динамический эффект при различных скоростях. Динамические напряжения, вызываемые избыточными противовесами, возрастают с увеличением скорости движения, и это возрастание идет быстрее квадрата скорости. Особенно большое значение *динамический коэффициент* может получить для сил инерции движущихся взад и вперед частей, так как период этих сил вдвое меньше времени полного оборота колеса. При выяснении вопроса о возможности увеличения скорости движения в связи с прочностью пути приходится иметь в виду главным образом динамические напряжения второго рода.

Мы не делаем здесь никаких заключений относительно допускаемых напряжений в рельсах, так как для вывода таких заключений вопрос должен быть рассмотрен более детально. Например, при оценке влияния впадин следовало бы подробно изучить наиболее часто встречающиеся формы впадин и точно выяснить их глубину. Нужно было бы также подробнее выяснить вопрос о тех ударах, которые обычно должны иметь место при входе колеса на впадину. В вопросе о напряжениях, вызываемых избыточными противovesами, мы ограничиваемся лишь указанием метода расчета и показываем, как этот прием может быть распространен на случай системы движущихся колес. Величина напряжений, вызываемых избыточными противovesами, в большой степени будет зависеть от конструкции паровоза, и потому оценить эти напряжения каким-либо общим динамическим коэффициентом представляется совершенно невозможным — необходимо детальное изучение каждого нового типа паровозов.

Для дальнейшего исследования вопроса о прочности рельсов представляет большой интерес экспериментальное изучение некоторых явлений. Мы полагаем, что экспериментальное исследование не должно ограничиваться наблюдениями над деформациями пути при прохождении поездов. Эти деформации представляют собой явление весьма сложное, а условия их наблюдения в пути далеко не благоприятны для обеспечения надлежащей точности работы. Нам кажется, что с пользой для дела некоторые элементарные явления могли бы быть подвергнуты экспериментальному исследованию в лабораторной обстановке, более благоприятной для точных наблюдений. Так мог бы быть изучен вопрос об общей деформации колесных скатов под действием приходящихся на них усилий. Большой интерес представляет вопрос о вдавливании колеса в рельс и связанных с этим явлением *местных* напряжениях. Эти напряжения могут оказывать влияние на износ рельса. Статические деформации рельса и упругие свойства различных балластов также могут быть изучены в лабораторной обстановке. При изучении динамических напряжений особенно существенно записать вертикальные перемещения колеса. Для этой цели можно было бы воспользоваться прибором типа *паллографа*, служащего для записывания вибраций в корпусе судов.

Гельсингфорс
12 января 1915 года

К ВОПРОСУ О ВИБРАЦИЯХ РЕЛЬС

Известия Электротехнического института, том 13, 1916, стр. 1—17

В нашей предыдущей статье, посвященной вопросу о прочности рельс ¹⁾, мы рассмотрели ряд обстоятельств, обуславливающих появление дополнительных, динамических напряжений в рельсах. При оценке этих напряжений мы пренебрегали массой рельса, а следовательно, и его вибрациями; мы ограничились лишь указанием, что основной тон для колебаний рельса как балки на сплошном упругом основании имеет частоту, которую можно считать большой по сравнению с угловой скоростью вращения колес паровоза, и потому при оценке влияния противовесов можно вибрациями рельса пренебрегать.

В настоящей заметке мы подробнее выясняем вопрос о вибрациях рельса, исследуем вынужденные колебания, возникающие в рельсе при действии переменной силы, приложенной в какой-либо точке рельса, и показываем, что амплитуда этих колебаний может значительно отличаться от статических прогибов рельса лишь в том случае, если частота переменной силы приближается к частоте собственных колебаний рельса. Далее мы выясняем, какое влияние может иметь поступательная скорость движения колеса на прогиб рельса и показываем, что при практически достижимых скоростях это влияние невелико. В заключение мы рассматриваем колебания, возникающие в рельсе при движении по рельсу переменной силы с постоянной скоростью.

§ 1. Метод исследования

При исследовании вынужденных колебаний воспользуемся уравнениями Лагранжа, которые в нашем случае напишутся так:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_n} \right) + \frac{\partial V}{\partial \varphi_n} = \Phi_n. \quad (1)$$

Здесь T — живая сила системы; V — ее потенциальная энергия; $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots$ — координаты, определяющие положение

¹⁾ Тимошенко С. П. О динамических напряжениях в рельсах. Вестник инженеров, 1915, том I, № 4, стр. 143—152. См. также Тимошенко С. П. К вопросу о прочности рельс. Издание Института инженеров путей сообщения. Петроград, тип. А. Э. Коллинса, 1915, 42 стр.

системы и отсчитываемые от состояния равновесия. Координаты эти, очевидно, будут функциями времени. Наконец, через Φ_n мы обозначили *обобщенную силу*, соответствующую координате φ_n . Она в каждом частном случае определяется из того условия, что произведение $\Phi_n \cdot \delta\varphi_n$ должно представлять собой работу внешних сил на перемещениях, соответствующих приращению $\delta\varphi_n$ координаты φ_n .

Предполагая концы стержня длины l опертыми, мы можем представить изогнутую ось стержня в таком виде:

$$y = \varphi_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \varphi_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \quad (2)$$

Коэффициенты ряда (2) будут играть в рассматриваемом случае роль координат. Выражения для кинетической и потенциальной энергии напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\rho}{g} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{\rho l}{4g} \sum_{n=1}^{n=\infty} (\dot{\varphi}_n)^2, \\ V &= V_1 + V_2 = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^l y^2 dx = \\ &= \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^4 \varphi_n^2 + \frac{kl}{4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \varphi_n^2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь через ρ обозначен вес рельса, приходящийся на единицу длины, EJ — жесткость рельса при изгибе в вертикальной плоскости, k — коэффициент, характеризующий жесткость основания, он колеблется в пределах $100 \div 220 \text{ кг/см}^2$.

Вставляя значения V и T в уравнение (1), получим для определения координаты φ_n уравнение

$$\frac{d^2 \varphi_n}{dt^2} + \frac{2g}{\rho l} \left(\frac{EJ\pi^4 n^4}{2l^3} + \frac{kl}{2} \right) \varphi_n = \frac{2g}{\rho l} \Phi_n. \quad (4)$$

Обозначая коэффициент при φ_n в этом уравнении через β_n^2 , можем написать полный интеграл уравнения в таком виде:

$$\varphi_n = A \cos \beta_n t + B \sin \beta_n t + \frac{2g}{\rho l} \cdot \frac{1}{\beta_n} \int_0^t \Phi_n \sin \beta_n (t-t_1) dt_1. \quad (5)$$

Первые два члена этого интеграла представляют рассмотренные нами раньше *свободные колебания* стержня, соответствующие заданным *начальным условиям*; третий член дает колебания, вызванные действием силы Φ_n . В случае периодически меняющейся силы мы будем выделять из третьего члена решения (5) колебания, имеющие такой же период, как и период переменной силы. Эти колебания на-

зовем *вынужденными колебаниями*. Остальная часть третьего члена нашего общего интеграла представит собой *свободные колебания* стержня, возникающие при приложении силы Φ_n .

Если при колебаниях стержень встречает сопротивление, пропорциональные первой степени скорости, то в уравнении (4) прибавится член, пропорциональный скорости $\dot{\varphi}_n$, и в общем решении члены, представляющие *свободные колебания* стержня, будут заключать множитель, убывающий со временем. *Свободные колебания* постепенно затухают, и практически придется иметь дело лишь с *вынужденными колебаниями*, амплитуда которых поддерживается переменной действующей силой.

Заметим здесь, что в тех случаях, когда легко находится частное решение уравнения (4), нет надобности пользоваться общим интегралом (5), так как это частное решение и представит нужные нам *вынужденные колебания* системы.

§ 2. Прогобы рельса от переменной во времени поперечной силы

Рассмотрим случай, когда стержень, лежащий на сплошном упругом основании и опирающийся по концам (рис. 1), изгибается переменной силой P , приложенной на расстоянии c от левого конца.

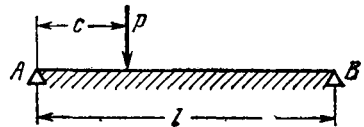


Рис. 1.

Пусть $P = P_0 \sin \omega t$. Вертикальное перемещение точки приложения силы, соответствующее приращению $\delta\varphi_n$ координаты φ_n , будет, на основании общего выражения (2) для прогиба, представляться так: $\delta\varphi_n \cdot \sin(n\pi c/l)$. Соответствующая работа внешних сил равна $\delta\varphi_n \sin(n\pi c/l) \cdot P_0 \sin \omega t$. Следовательно, в рассматриваемом случае $\Phi_n = P_0 \sin(n\pi c/l) \sin \omega t$.

Вставляя это выражение для обобщенной силы в уравнение (4), легко находим его частное решение в таком виде:

$$\varphi_n = \frac{2P_0 l^3 \sin \omega t}{EJ\pi^4} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{n^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} - \frac{\omega^2 l^4 p}{EJ\pi^4 g}}$$

Выражение (2) для прогиба стержня напишется так:

$$y = \frac{2P_0 l^3 \sin \omega t}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} - \frac{\omega^2 l^4 p}{EJ\pi^4 g}} \quad (6)$$

Это выражение представляет собой *вынужденные колебания* стержня в рассматриваемом случае.

От задачи динамики мы сейчас можем перейти к задаче статике, для этого нужно только в уравнении (4) положить первый член равным нулю. В таком случае

$$\Phi_n = \frac{\Phi_n}{\frac{EJ\pi^4 n^4}{2l^3} + \frac{kl}{2}},$$

и общее выражение для прогиба стержня с опертыми концами, лежащего на сплошном упругом основании, представится так:

$$y = \frac{2l^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\Phi_n \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4}}.$$

При действии сосредоточенной силы P , приложенной на расстоянии c от левого конца, получим для статического прогиба выражение

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4}}.$$

Сравнивая этот результат с динамическим прогибом стержня (6), находим, что формы изгиба в этих двух случаях отличаются лишь тем, что вместо коэффициента жесткости k , который мы берем при вычислении статического прогиба, нужно брать при подсчете динамических прогибов величину

$$k_1 = k - \frac{\omega^2 p}{g}. \quad (7)$$

Динамический эффект сказывается как бы в уменьшении коэффициента жесткости упругого основания, и так как задача статики для стержня, лежащего на сплошном упругом основании, решается без всяких затруднений, то и форма изгиба для вынужденных колебаний, представленных бесконечным рядом (6), легко может быть дана в замкнутой форме. Все сказанное относится, конечно, и к тому случаю, когда длина стержня обратится в бесконечность. При этом статический прогиб стержня выражается так:

$$y = \frac{P\alpha}{2k} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x). \quad (8)$$

Здесь x отсчитывается от точки приложения силы и

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}.$$

Вставляя в выражение прогиба (8) вместо k и α величины $k_1 = k - \omega^2 p/g$ и $\alpha_1 = \sqrt[4]{k_1/4EJ}$, мы получим динамический прогиб бесконечно длинного стержня, лежащего на сплошном упругом основании, под действием переменной силы $P = P_0 \sin \omega t$.

Если для ω взять величину такого порядка, как угловая скорость вращения паровозного колеса, то динамический эффект не имеет практического значения. Положим, например, $\omega = 12 \pi$, $p = 0,5 \text{ кг/см}$, тогда $\omega^2 p/g = 0,72 \text{ кг/см}$. Эта величина соответствует изменению в жесткости k , меньшему 1%.

С увеличением ω динамический эффект возрастает и, например, при $k_1 = 0,5$ будем иметь $\alpha_1 = 0,84 \alpha$, $f_d = 1,68 f_{ст}$, т. е. динамический прогиб на 68% больше статического и форма кривой значительно

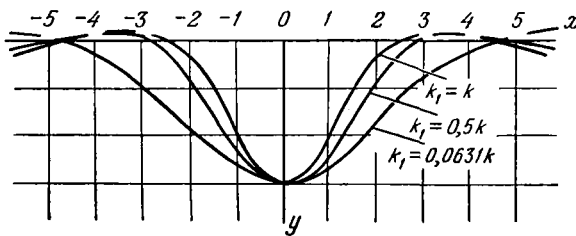


Рис. 2.

изменена, так как изменилось α . На рис. 2 представлены формы кривых изгиба при различных значениях k_1 , вычерченные в том предположении, что максимальные прогибы одинаковы (т. е. силы, вызывающие прогиб, взяты равными).

Когда

$$\omega = \sqrt{\frac{kg}{p}}, \quad (9)$$

мы будем иметь явление *резонанса*. Период раскачивающей силы совпадает с периодом собственных колебаний бесконечно длинного стержня, лежащего на сплошном упругом основании.

Для стержня конечной длины мы будем иметь явление резонанса всякий раз, когда будет выполнено условие

$$\omega = \sqrt{\frac{n^4 \cdot EJ \pi^4 g}{\rho l^4} + \frac{kg}{p}}. \quad (a)$$

Третий член общего интеграла (5) дает в этом случае такой результат:

$$\frac{2P_0 l^3 \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \omega t}{EJ\pi^4 \left(n^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} - \frac{\omega^2 l^4 p}{EJ\pi^4 g} \right)}$$

$$= \frac{2P_0 l^3}{EJ\pi^4} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{\frac{n^4 EJ\pi^4 g}{\rho l^4} + \frac{kg}{\rho}}} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi c}{l} \cdot \sin \sqrt{\frac{n^4 EJ\pi^4 g}{\rho l^4} + \frac{kg}{\rho}} t}{n^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} - \frac{\omega^2 l^4 p}{EJ\pi^4 g}}.$$

Если соединим эти два члена и раскроем неопределенность, получающуюся при условии (а), то получим

$$\frac{P_0 g}{\rho l \omega^2} \sin \frac{n\pi c}{l} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t).$$

Будем иметь колебания, амплитуда которых растет пропорционально времени.

Заметим здесь, что наше заключение относительно вынужденных колебаний бесконечно длинного стержня на упругом основании может быть получено и из основного уравнения для поперечных колебаний призматических стержней. Уравнение это при наличии упругого основания напишется так:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{p}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + ky = 0. \quad (10)$$

Вынужденные колебания при действии силы $P_0 \sin \omega t$ представятся таким образом: $y = X \sin \omega t$, где X — функция только от x . Вставляя выражение для вынужденных колебаний в уравнение (10), получим для функции X такое уравнение:

$$EJX^{IV} + \left(k - \frac{p\omega^2}{g} \right) X = 0,$$

т. е. уравнение для изогнутой оси стержня, лежащего на сплошном упругом основании, жесткость которого характеризуется коэффициентом $k_1 = k - p\omega^2/g$.

Результат этот совершенно совпадает с тем, что мы нашли выше, пользуясь бесконечными рядами.

§ 3. Вынужденные колебания рельса при постоянной поперечной силе

Рассмотрим теперь вопрос о вынужденных колебаниях, возникающих в стержне под действием постоянной силы P , перемещающейся по рельсу с постоянной скоростью v . Будем отсчитывать время с момента вступления силы на стержень; тогда расстояние точки при-

ложения силы от опоры в момент t будет равняться vt . Работа этой силы на перемещении, соответствующем приращению $\delta\varphi_n$ координаты φ_n , будет равна $P \sin(n\pi vt/l) \delta\varphi_n$.

Обобщенная сила, соответствующая координате φ_n , напишется так: $\Phi_n = P \sin(n\pi vt/l)$.

Вставляя это выражение в основное уравнение (4), получаем частное решение этого уравнения в таком виде:

$$\varphi_n = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \frac{\sin \frac{n\pi vt}{l}}{n^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} - n^2 \frac{v^2 p}{g} \frac{l^2}{EJ\pi^2}}.$$

После подстановки этого результата в общее выражение (2) для прогиба получим для вынужденных колебаний в рассматриваемом случае такой бесконечный ряд:

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} - n^2 \frac{v^2 p}{g} \cdot \frac{l^2}{EJ\pi^2}}. \quad (11)$$

Как и в предыдущем случае, мы можем легко перейти от задачи динамики к соответствующей задаче статики, нужно только первый член в уравнении (4) положить равным нулю или, что все равно, положить в вышеполученном решении (11) $v=0$, $vt=c$.

Таким путем получаем известное уже выражение для статического прогиба

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4}}.$$

Динамический прогиб отличается от статического тем, что в знаменатель каждого члена ряда входит добавочное слагаемое $-n^2 v^2 p l^2 / g EJ \pi^2$. Благодаря этому динамический прогиб получается большим, нежели прогиб статический. Чтобы иметь возможность в каждом частном случае оценивать разность между динамическим и статическим прогибами, выгодно представить решение (11) в замкнутой форме. Оказывается, в этом случае динамическому прогибу можно подыскать соответствующую *статическую модель*, в которой *динамический эффект* движущейся силы заменяется *статическим эффектом* некоторых добавочных сил, надлежащим образом подобранных.

Для получения такой статической модели решим предварительно вопрос о прогибе стержня с опертыми концами, лежащего на сплошном упругом основании и сжимаемого двумя силами S (рис. 3). Мы уже указывали, что для решения вопросов статики можно пользоваться уравнениями динамики, нужно только в них ускорения сде-

вать равными нулю. Воспользуемся этим приемом в рассматриваемом случае.

В отличие от предыдущей задачи, мы здесь имеем продольные сжимающие силы S . Предположим, что концы сжатого стержня при искривлении не сближаются. В

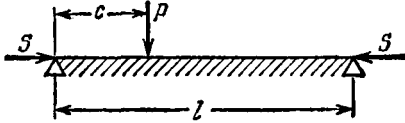


Рис. 3.

таком случае изгиб стержня непременно будет сопровождаться уменьшением энергии сжатия. Это изменение, очевидно, будет равняться произведению силы S на удлинение оси стержня

при искривлении. Таким образом получаем

$$V_3 = -\frac{S}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx = -\frac{S\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 \varphi_n^2.$$

Присоединяя это к энергии изгиба и энергии упругого основания (3), придем к такому выражению для полной энергии деформации:

$$V = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^4 \varphi_n^2 + \frac{kl}{4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \varphi_n^2 - \frac{S\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 \varphi_n^2.$$

Вставляя это в уравнение статики

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_n} = \Phi_n = P \sin \frac{n\pi c}{l},$$

получим для координаты φ_n такое выражение:

$$\varphi_n = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{n^4 + \frac{kl}{EJ\pi^4} - n^2 \frac{Sl^2}{EJ\pi^2}}.$$

Статический прогиб стержня представится в рассматриваемом случае бесконечным рядом:

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4 + \frac{kl}{EJ\pi^4} - n^2 \frac{Sl^2}{EJ\pi^2}}. \quad (12)$$

Сравнивая этот результат с полученным выше динамическим прогибом (11), заключаем, что два эти изгиба можно привести к совпадению надлежащим выбором продольной силы. Для этого нужно положить

$$S = \frac{v^2 p}{g}. \quad (13)$$

Следовательно, динамический эффект движущейся силы эквивалентен действию продольной сжимающей силы, определяемой равенством (13). Это заключение, конечно, будет сохранять свою силу и в том случае, если мы будем беспредельно увеличивать длину нашего стержня. Динамический прогиб (11) для этого стержня бесконечной длины будет такой же, как для балки на сплошном упругом основании, сжимаемой силами S и изгибаемой силой P . Уравнение изогнутой оси в этом случае легко представить в замкнутой форме. В самом деле, соответствующее дифференциальное уравнение равновесия напишется так:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - ky,$$

или, принимая во внимание (13),

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{v^2 \rho}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - ky. \quad (14)$$

Решение этих уравнений не представляет, конечно, никаких затруднений. Для более наглядного представления получаемого при этом результата введем здесь понятие о *критической скорости*, которая будет играть такую же роль в задаче динамики, как *критическая сжимающая сила* в соответствующей задаче статики. Критической сжимающей силой мы называем ту наименьшую силу, при которой прямая форма сжатого стержня перестает быть устойчивой. Прямой стержень, лежащий на упругом основании и сжимаемый силами S , может при некоторых определенных значениях S иметь не только прямую, но также и весьма близкую к ней искривленную форму равновесия. Полагая равным нулю знаменатель одного из членов ряда (12), мы получаем условие для определения нужных нам значений S в таком виде:

$$S = \frac{kl^2}{\pi^2 n^2} + \frac{EJ \pi^2 n^2}{l^2}. \quad (15)$$

Здесь n — число полуволн, на которые стержень подразделяется при выпучивании и, следовательно, $l : n = \lambda$ — длина одной полуволны. Из выражения (15) заключаем, что наименьшее значение сжимающей силы, при котором становится возможной искривленная форма равновесия, получается в том случае, когда

$$\lambda^2 = \pi^2 \sqrt{EJ/k}.$$

Таким образом для *критической сжимающей силы* получаем выражение $S_{кр} = 2EJ \pi^2 / \lambda^2 = 2 \sqrt{kEJ}$. Соответственно этому *критическая скорость* на основании (13) представится так:

$$v_{кр} = \sqrt[4]{\frac{4kEJg^2}{\rho^2}}. \quad (16)$$

Заметим, что величина $v_{кр}$ получается для рельс весьма большой по сравнению с достигаемыми на практике скоростями поступательного движения поезда. В самом деле, полагая, например, $k = 200 \text{ кг/см}^2$, $EJ = 3 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$ и $p = 0,5 \text{ кг/см}$, найдем $v_{кр} \approx 550 \text{ м/сек}$. При $k = 100 \text{ кг/см}^2$ и прежних размерах рельса мы получили бы $v_{кр} \approx 460 \text{ м/сек}$.

Интересно здесь же установить связь между критической скоростью и длиной $2L$ тех волн, которые получаются при изгибе сосредоточенной силой бесконечно длинного стержня, лежащего на сплошном упругом основании. Из соответствующего уравнения (8) изогнутой оси находим $2L = 2\pi/\alpha = 2\pi\sqrt{4EJ/k}$, следовательно,

$$\frac{2L}{v_{кр}} = 2\pi \sqrt{\frac{p}{kg}}. \quad (17)$$

Таким образом, приходим к заключению, что *критическая скорость* — это та скорость, при которой длина волны $2L$ пробегается действующей силой за время, равное периоду собственных колебаний рельса.

Возвратимся теперь к нашему уравнению (14). Обозначая через ϵ отношение критической скорости к скорости перемещения силы по стержню и полагая для краткости письма

$$v \sqrt{\frac{\epsilon^2 - 1}{4} \frac{p}{EJg}} = \gamma \quad \text{и} \quad v \sqrt{\frac{\epsilon^2 + 1}{4} \frac{p}{EJg}} = \delta, \quad (18)$$

мы представим интеграл уравнения (14) в такой форме:

$$y = e^{\gamma x} (A_1 \cos \delta x + A_2 \sin \delta x) + e^{-\gamma x} (A_3 \cos \delta x + A_4 \sin \delta x).$$

Принимая во внимание, что на бесконечности y и его производные должны обращаться в нуль, и располагая координаты, как указано на рис. 4, найдем для правой половины балки уравнение

$$y_1 = e^{-\gamma x} (A_3 \cos \delta x + A_4 \sin \delta x).$$

Для левой половины балки соответствующее уравнение напишется так:

$$y_2 = e^{\gamma x} (A_1 \cos \delta x + A_2 \sin \delta x).$$

В месте приложения силы, т. е. при $x=0$, должны быть выполнены такие условия: $y_1 = y_2$, $y'_1 = y'_2$, $y''_1 = y''_2$, $y'''_1 - y'''_2 = P/EJ$. Из этих условий находим

$$A_3 = A_1, \quad A_2 = -A_4 = -\frac{\gamma}{\delta} A_1, \quad A_1 = \frac{P}{4EJ\gamma(\gamma^2 + \delta^2)}.$$

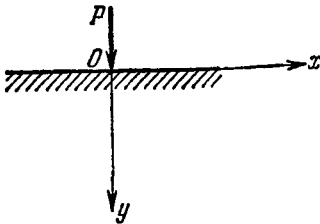


Рис. 4.

Получаем таким образом кривую изгиба, симметричную относительно места приложения силы, причем

$$y_1 = \frac{P}{4EJ\gamma(\gamma^2 + \delta^2)} \cdot e^{-\gamma x} \left(\cos \delta x + \frac{\gamma}{\delta} \sin \delta x \right). \quad (19)$$

Оценим теперь влияние скорости v перемещения силы на величину наибольшего прогиба, равного $f_g = P/4EJ\gamma(\gamma^2 + \delta^2)$. На основании принятых обозначений имеем

$$\begin{aligned} \gamma^2 + \delta^2 &= \frac{v^2 \beta^2}{2} \cdot \frac{p}{EJg} = \frac{v_{кр}^2 p}{2EJg}, \\ \gamma(\gamma^2 + \delta^2) &= \frac{v_{кр}^3}{4} \left(\frac{p}{EJg} \right)^{1/2} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}}. \end{aligned}$$

Откуда, на основании (16), получаем

$$\gamma(\gamma^2 + \delta^2) = 2 \sqrt{\left(\frac{k}{4EJ} \right)^3} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}} = 2\alpha^3 \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}},$$

следовательно,

$$f_g = \frac{f_{ст}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}}}. \quad (20)$$

Так как ε^2 при практически встречающихся скоростях представляет собой большое число, то мы можем сделать такое заключение: при движении идеально правильного колеса по гладкому бесконечно длинному рельсу, лежащему на сплошном упругом основании, величина поступательной скорости не оказывает заметного влияния на величину прогиба. Под движущимся колесом рельс изгибается примерно так же, как и под колесом, остающимся в покое. Это заключение можно, конечно, перенести и на систему связанных между собой грузов.

§ 4. Действие на рельс переменной во времени силы, движущейся с постоянной скоростью

Выясним теперь вопрос о колебаниях, возникающих в стержне под действием переменной силы $P_0 \cos \omega t$, движущейся с постоянной скоростью v вдоль оси стержня. Если время отсчитывается от того момента, когда сила вступает на стержень, то обобщенная сила Φ_n будет равна $P_0 \cos \omega t \sin (n\pi vt/l)$. Вставляя это в дифференциальное уравнение (4), получим частное решение этого уравнения в такой

форме:

$$\varphi_n = \frac{P_0 l^3}{EJ\pi^4} \left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi v}{l} + \omega\right) t}{n^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} - \left(\frac{nv l}{\pi} + \frac{\omega^2 l^2}{\pi^2}\right)^2 \frac{\rho}{EJg}} + \frac{\sin\left(\frac{n\pi v}{l} - \omega\right) t}{n^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} - \left(\frac{nv l}{\pi} - \frac{\omega^2 l^2}{\pi^2}\right)^2 \frac{\rho}{EJg}} \right].$$

Вынужденные колебания стержня представляются в этом случае следующим рядом:

$$y = \frac{P_0 l^3}{EJ\pi^4} \left[\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi v}{l} + \omega\right) t \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} - \left(\frac{nv l}{\pi} + \frac{\omega^2 l^2}{\pi^2}\right)^2 \frac{\rho}{EJg}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi v}{l} - \omega\right) t \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} - \left(\frac{nv l}{\pi} - \frac{\omega^2 l^2}{\pi^2}\right)^2 \frac{\rho}{EJg}} \right]. \quad (21)$$

Полагая в этом решении $\omega=0$, мы приходим к результату (11) предыдущей задачи, т. е. к колебаниям, вызываемым постоянной движущейся силой. Если же мы положим $v=0$ и $vt=c$, то получим колебания, вызываемые переменной силой $P_0 \cos \omega t$, приложенной на расстоянии c от опоры балки.

Увеличивая длину l , мы можем получить прогибы для весьма длинной балки. К сожалению, для этого случая нам не удалось подыскать какой-либо статической модели, которая позволила бы упростить результат, полученный в виде бесконечного ряда (21). То обстоятельство, что угловая скорость вращения колес мала по сравнению с частотой основного тона собственных колебаний рельса, а поступательная скорость движения поезда мала по сравнению с *критической скоростью*, дает основание заключить, что динамические прогибы рельса, вызванные центробежной силой противовесов, несовпадениями центров тяжести колес с осями вращения, давлением пара, а также поступательным движением колес, весьма мало отличаются от статических прогибов, вызванных теми же причинами, и потому при определении этих прогибов можно пренебрегать вибрациями рельса.

Получено редакцией 23 апреля 1915 года.

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ОСАДКИ ШПАЛЫ НА УСЛОВИЯ ИЗГИБА РЕЛЬС

Издание Института инженеров путей сообщения, Петроград, типография
А. Э. Коллинса, 1916, 14 стр.

§ 1. Постановка задачи

При расчете рельс выгодно пользоваться приближенными формулами, которые получаются, если рассматривать рельс как балку бесконечной длины, лежащую на сплошном упругом основании. При этом предположении изогнутая ось рельса представится уравнением

$$y = \frac{Q\alpha}{2k} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) = \frac{Q\alpha}{2k} \eta. \quad (1)$$

Ось x совпадает с осью рельса до деформации, ось y направлена вертикально вниз и совпадает с линией действия силы Q , представляющей статическое давление колеса на рельс. В выражении (1) приняты для упрощения такие обозначения: величина k характеризует жесткость упругого основания и получается из формулы

$$k = \frac{D}{l}, \quad (2)$$

где l — расстояние между осями шпал и D — величина тех сил, которые должны быть приложены к шпале в местах прикрепления рельс, чтобы получить осадку, равную 1 см. Величина α определяется формулой

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}. \quad (3)$$

Если перейти к часто встречающемуся обозначению $\gamma = 6EJ/l^3D$, то формулу (3) можно переписать в таком виде:

$$\alpha = \frac{1}{l} \sqrt[4]{\frac{3}{2\gamma}}. \quad (3')$$

Путем дифференцирования выражения (1) легко получаем значение кривизны изогнутой оси рельса. Соответствующая формула для изгибающего момента напишется так:

$$M = -EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{Q}{4\alpha} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x) = \frac{Q}{4\alpha} \eta_1. \quad (4)$$

Для функций η и η_1 , входящих в формулы (1) и (4), имеются готовые таблицы, при помощи которых расчет рельса на прочность сильно упрощается.

Формулами (1) и (4) воспользуемся для приближенного решения вопроса о том, какое влияние на напряжения в рельсе окажет некоторая начальная осадка одной из шпал.

§ 2. Статическое нагружение

Решим сначала соответствующую задачу статики, для чего предположим, что действующий на рельс груз переходит из одного положения в другое с бесконечно малой скоростью. Давление R , передающееся на какую-либо шпалу, отстоящую от начала координат на x , легко получить при помощи формулы (1). Нужно только соответствующий этой шпале прогиб помножить на величину D , характеризующую жесткость шпалы. Таким путем находим

$$R = D \frac{Q\alpha}{2k} \eta. \quad (5)$$

Предположим теперь, что рассматриваемая шпала имеет некоторую начальную осадку, и пусть эта осадка настолько значительна, что шпала вовсе не поддерживает рельса.

Устранение шпалы, очевидно, окажет на изгиб рельса такое же влияние, как и приложение к рельсу в сечении x системы сил, уравновешивающих реакцию R . Приложим в сечении x направленную вертикально вниз силу P . Сила эта при правильной подбивке всех шпал вызовет со стороны находящейся под ней шпалы реакцию $D \cdot P\alpha/2k$.

Подберем P таким образом, чтобы

$$P \left(1 - \frac{\alpha D}{2k} \right) = D \frac{Q\alpha}{2k} \eta.$$

В таком случае сила P и соответствующая ей реакция уравновешивают реакцию R , вызываемую в рассматриваемой шпале подвижной нагрузкой Q , и условия изгиба нашего рельса, расположенного на правильно подбитых шпалах, будут такие же, как и рельса с осевшей шпалой, нагруженного только силой Q . Влияние на изгиб рельса осадки шпалы эквивалентно влиянию силы P , определяемой формулой

$$P = Q\eta \frac{\frac{D\alpha}{2k}}{1 - \frac{D\alpha}{2k}} = Q\eta m \quad (6)$$

и приложенной в сечении x , соответствующем неправильно подбитой шпале.

Дополнительный прогиб под грузом Q , обусловленный наличием в сечении x осевой шпалы, равняется прогибу точки касания колеса под действием фиктивной силы P , приложенной в сечении x .

Полный прогиб под грузом Q представится так:

$$f = \frac{Q\alpha}{2k} + \frac{P\alpha}{2k} \eta = \frac{Q\alpha}{2k} (1 + m\eta^2). \quad (7)$$

Так как функция η представляется волнообразной линией, отклонения которой от оси x быстро затухают с возрастанием x , то влияние начальной осадки шпалы на прогиб под грузом сказывается лишь с приближением груза к месту осевой шпалы. Для пояснения на рис. 1 графически представлено изменение прогибов f

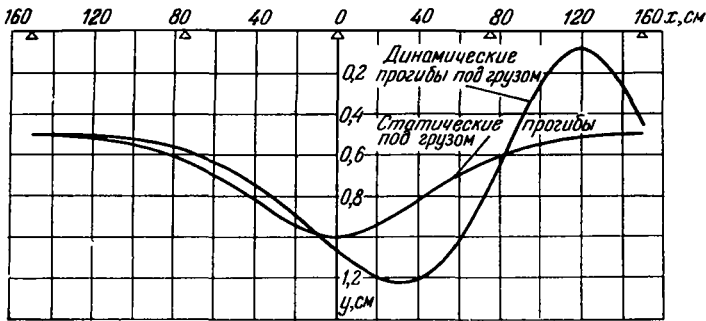


Рис. 1.

при прохождении грузом Q части рельса у места осевой шпалы. При вычислениях мы выбрали участок, простирающийся на 150 см в обе стороны от осевой шпалы и положили: $Q=10$ т, $D=10$ т/см, $\alpha/2k=0,5 \cdot 10^{-4}$ см/кг, $l=75$ см.

В таком случае $\alpha=1/75$ см⁻¹, $\alpha D/2k=0,5$, $m=1$ и выражение для статического прогиба (7) переписывается так:

$$f = \frac{Q\alpha}{2k} (1 + \eta^2).$$

Полученные отсюда прогибы отложены по ординатам на рис. 1. При выбранных соотношениях величина наибольшего прогиба в два раза превосходит ту осадку рельса под колесом, которая получается при правильной подбивке шпал.

Для оценки влияния осадки шпалы на величину наибольшего изгибающего момента в рельсе воспользуемся формулой (4).

Так как $(\eta_1)_{x=0}=1$, то изгибающий момент под грузом от давления Q будет равен $Q/4\alpha$.

Дополнительный изгибающий момент от фиктивной силы P , компенсирующей осадку опоры, будет равен $P\eta_1/4\alpha$. Вставляя

вместо P его значение (6), получим для искомого изгибающего момента под колесом выражение

$$M = \frac{Q}{4\alpha} (1 + m\eta_1\eta). \quad (8)$$

Пользуясь готовыми таблицами для η и η_1 , мы легко можем построить кривую изменения M при движении груза над осевшей шпалой. На рис. 2 представлена такая кривая, построенная при взятых нами выше численных данных, характеризующих верхнее строение.

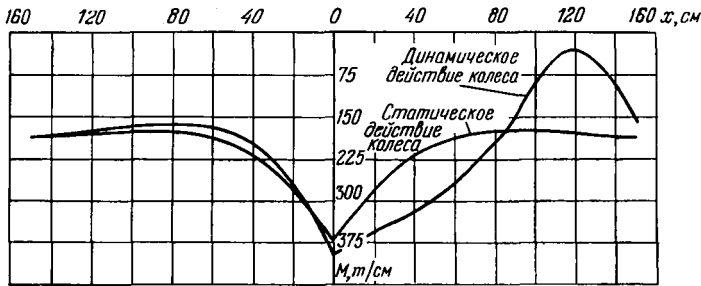


Рис. 2.

M_{\max} получается при этих данных вдвое большим, чем в случае правильно подбитых шпал.

Рассмотрим теперь, как изменятся формулы (7) и (8), если начальная осадка шпалы настолько мала, что, начиная с некоторого момента, шпала уже начинает поддерживать прогибающийся рельс. Обозначим через δ величину начальной осадки. Пока прогиб рельса над осевшей шпалой меньше δ , мы будем иметь те же условия изгиба, что и в предыдущем случае. Когда расстояние осевшей шпалы от точки касания колеса делается таким, что

$$\frac{Q\alpha}{2k} (1 + \eta^2) \geq \delta, \quad (9)$$

осевшая шпала начнет поддерживать прогибающийся рельс, но реакция ее все время будет оставаться меньше величины R , определяемой формулой (5). Уменьшение реакции, очевидно, будет равняться той силе, которую нужно приложить к правильно подбитой шпале, чтобы получить осадку δ^1 , т. е. величине δD . Следовательно, при движении груза в пределах, определяемых неравенством (9), влияние осадки шпалы на изгиб рельса такое же, как и влияние

¹ Мы полагаем, что так называемый коэффициент постели для осевшей шпалы имеет такое же значение, как и для шпалы нормально расположенной.

дополнительной силы P , определяемой равенством

$$P \left(1 - \frac{D\alpha}{2k} \right) = \delta D.$$

В таком случае формула (7) для прогиба под грузом напишется так:

$$f = \frac{Q\alpha}{2k} \left(1 + \eta \frac{\frac{D\delta}{Q}}{1 - \frac{D\alpha}{2k}} \right). \quad (7')$$

Соответственно этому для изгибающего момента под грузом получим выражение

$$M = \frac{Q}{4\alpha} \left(1 + \eta_1 \frac{\frac{D\delta}{Q}}{1 - \frac{D\alpha}{2k}} \right). \quad (8')$$

Формулами (7') и (8') нужно пользоваться лишь тогда, когда расстояние точки касания колеса от осевой шпалы удовлетворяет условию (9).

§ 3. Динамическое нагружение

Обратимся теперь к задаче динамики и выясним, как изменятся обстоятельства изгиба рельса, если принять в расчет конечную скорость движения колеса по рельсу. Для приближенного решения этого вопроса воспользуемся обычными упрощениями: будем считать рельс невесомым и давление, передаваемое колесному скату через рессоры, постоянным. В таком случае при определении динамического прогиба придется принять в расчет лишь силы инерции, соответствующие вертикальным перемещениям колесного ската. Если через q обозначим вес колеса и неизменно с ним связанных частей и через Q — статическое давление колеса на рельс, то прогиб f под колесом должен удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{q}{g} \frac{d^2 f}{dt^2} = Q - \beta f, \quad (10)$$

где последний член в правой части представляет собой реакцию рельса, пропорциональную прогибу f . При расположении рельса на однообразном упругом основании коэффициент β остается постоянным, и колесо будет совершать в вертикальном направлении простое гармоническое колебание, определяемое начальными значениями величин f и df/dt .

Если начальное значение f равно $Q\alpha/2k$ и начальная скорость df/dt равна нулю, траектория точки касания колеса с рельсом представит собой прямую линию.

Иные условия мы будем иметь при наличии осевшей шпалы. Предположим, что одна из шпал не поддерживает рельса. В таком случае зависимость между давлением на рельс и соответствующим прогибом определяется формулой (7), и дифференциальное уравнение (10) переписывается так:

$$\frac{q}{g} \frac{d^2 f}{dt^2} = Q - \frac{2kf}{\alpha} \frac{1}{1+m\eta^2}. \quad (10')$$

Обозначая через v поступательную скорость колеса и принимая во внимание, что

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 f}{dx^2},$$

представим уравнение (10') в таком виде:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{Q}{q} \frac{g}{v^2} - \frac{2k}{\alpha q} \frac{fg}{v^2} \frac{1}{1+m\eta^2}. \quad (11)$$

Решение этого уравнения и даст нам закон изменения прогибов f при прохождении колеса над осевшей шпалой. Если положить в уравнении $v=0$, то мы придем к прежней формуле (7) для статического прогиба. При малых скоростях мы для оценки динамического эффекта можем применить тот же способ, которым пользовался Р. Виллис¹⁾ при изучении действия катящегося груза на прогиб балки с опертыми концами. Для этого положим в левой части уравнения (11) f равными статическому прогибу, определяемому из формулы (7), тогда для динамического прогиба получим выражение

$$f = \frac{\alpha Q}{2k} (1 + \eta^2 m) \left[1 - \frac{2mq\alpha}{2k} \frac{v^2}{g} (\eta'^2 + \eta\eta'') \right]. \quad (12)$$

Наибольший прогиб при таком способе расчета получится в момент нахождения колеса над осевшей шпалой, т. е. при $x=0$, когда

$$\eta' = 0, \quad \eta'' = -2\alpha^3 \quad \text{и} \quad \eta = 1.$$

Вставляя это в уравнение (12), найдем

$$f_{\max} = \frac{\alpha Q}{2k} (1 + m) \left(1 + 2m \frac{q\alpha^3}{k} \frac{v^2}{g} \right).$$

¹⁾ Willis Robert. Report of the Commissioners appointed to inquire into the application of Iron to Railway Structures, London, 1849, 435 p. Appendix B: «Experiments for determining the effect produced by causing weights to travel over bars with different velocities, made in Portsmouth Dockyard and at Cambridge by the Rev. Robert Willis, F. R. S., Jacksonian Professor, etc.; Captain Henry James, R. E., F. R. S., and Lieutenant Douglas Galton R. E.» pp. 181—263,

Для рассмотренного выше численного примера, полагая $q=0,1 Q$, найдем

$$f_{\max} = (1 + 3,62v^2 10^{-8}) \text{ см.}$$

При скорости $v=10^3 \text{ см/сек}$ динамический прогиб будет отличаться от статического на 3,62%.

С возрастанием поступательной скорости v разность между динамическим и статическим прогибами увеличивается, вместе с тем падает точность приближенного решения Р. Виллиса и для составления картины явления необходимо обратиться к интегрированию уравнения (11). Только таким путем можно показать, что кривая динамических прогибов несимметрична относительно сечения, соответствующего осевшей шпале. На рис. 1 представлена кривая динамических прогибов для рассмотренного выше численного примера. При расчетах принято $v^2/g=9000 \text{ см}$.

Мы видим, что при приближении колеса к месту осевшей шпалы сначала получают прогибы, меньшие статических. При значительной скорости v рельс не поспевает получить полный прогиб.

Дальше динамические прогибы становятся больше статических. При нахождении колеса над осевшей шпалой динамический прогиб больше статического примерно на 6,5%. Дальнейшее движение колеса сопровождается увеличением прогибов. Максимальный прогиб для нашего численного примера получился при удалении точки касания колеса от места осевшей шпалы на расстоянии около 30 см. При этом f_{\max} примерно на 22,5% больше статического максимального прогиба.

Результаты, представленные на рис. 1, получены путем интегрирования уравнения (11) вычислительным способом. Мы воспользовались тем обстоятельством, что функция η при больших значениях αx весьма мало отклоняется от нуля и ограничились рассмотрением изгиба в части рельса, ближайшей к месту осевшей шпалы. Расстояние точки касания колеса от места осевшей шпалы у нас изменялось в пределах

$$\frac{3}{4} \frac{\pi}{\alpha} \geq x \geq 0.$$

При выбранных нами численных данных рассмотренный участок рельса простирался на 176,5 см в обе стороны от осевшей шпалы. Весь этот участок был разделен при интегрировании на малые промежутки ¹⁾ и потом значения f и его производных df/dx , d^2f/dx^2 были последовательно вычислены для каждого промежутка. В начальный момент $x=3\pi/4\alpha=176,5 \text{ см}$, и мы имеем $\eta=0$. Для начального прогиба мы взяли значение $f_0=Q\alpha/2k$, т. е. величину

¹⁾ Для первой половины участка взяты были промежутки в 15 см. Во второй половине промежутки были взяты вдвое меньшими.

статического прогиба, тогда из уравнения (11) найдем для начального момента $f''_0=0$. Величину первой производной f'_0 мы приняли для начального момента также равной нулю. Возьмем теперь положение колеса, соответствующее перемещению точки касания на величину одного промежутка Δx , и для нового положения вычислим значения величин $f_{\Delta x}$, $f'_{\Delta x}$ и $f''_{\Delta x}$. Так как мы приняли для начального момента $f'_0=0$, то в качестве первого приближения можно положить $f_{\Delta x}=f_0$.

Вставляя это значение $f_{\Delta x}$ в уравнение (11), мы найдем первое приближение для $f''_{\Delta x}$. Пользуясь им, можно получить более точные значения нужных нам величин по формулам

$$f'_{\Delta x} = \frac{1}{2} (0 + f''_{\Delta x}) \Delta x; \quad f_{\Delta x} = \frac{1}{2} (0 + f'_{\Delta x}) \Delta x + f_0.$$

Вставляя полученное значение $f_{\Delta x}$ в уравнение (11), найдем второе приближение для $f''_{\Delta x}$. Теперь мы можем перейти к вычислению величин $f_{2\Delta x}$, $f'_{2\Delta x}$ и $f''_{2\Delta x}$. Первое приближение для $f'_{2\Delta x}$ получим из формулы

$$f'_{2\Delta x} = 0 + f''_{\Delta x} \cdot 2\Delta x,$$

тогда первое приближение для $f_{2\Delta x}$ напишется так:

$$f_{2\Delta x} = f_{\Delta x} + \frac{1}{2} (f'_{2\Delta x} + f'_{\Delta x}) \Delta x.$$

Вычислив первое приближение для $f_{2\Delta x}$ и вставив его в уравнение (11), найдем первое приближение для $f''_{2\Delta x}$. Для получения второго приближения воспользуемся формулами

$$f'_{2\Delta x} = f'_{\Delta x} + \frac{1}{2} (f''_{\Delta x} + f''_{2\Delta x}) \Delta x; \quad f_{2\Delta x} = f_{\Delta x} + \frac{1}{2} (f'_{\Delta x} + f'_{2\Delta x}) \Delta x.$$

Вставляя новое значение для $f_{2\Delta x}$ в уравнение (11), получим второе приближение для $f''_{2\Delta x}$. Теперь мы можем, пользуясь прежним путем, вычислить величины $f_{3\Delta x}$, $f'_{3\Delta x}$, $f''_{3\Delta x}$ и т. д.

Мы здесь не задавались подробным выяснением степени точности полученных результатов при выбранных нами длинах промежутков, но повторные вычисления с вдвое более длинными промежутками дают основание полагать, что погрешность в величине вычисленных прогибов вряд ли может превосходить 2%.

При таком способе вычислений мы получаем, кроме прогибов, таблицу значений f'' , при помощи которой легко определяются силы инерции колесного ската и динамического давления Q_d колеса на рельс, которое вычисляется по такой формуле:

$$Q_d = Q - \frac{q}{g} \frac{d^2 f}{dt^2} = Q \left(1 - \frac{q}{Q} \frac{v^2}{g} \frac{d^2 f}{dx^2} \right).$$

В нашем численном примере $qv^2/Qg=900$ и соответствующая кривая динамических давлений представлена на рис. 3. Наибольшее давление получается уже после прохождения колесом осевшей шпалы.

Это наибольшее давление, как видно из рисунка, в полтора раза больше статического давления Q . Дальше начинается быстрое убывание давления и при $x=1,2$ м оно составляет лишь 17% от статического давления. При дальнейшем движении опять начинается нарастание давлений. Колесо, благодаря пробегу над осевшей шпалой,

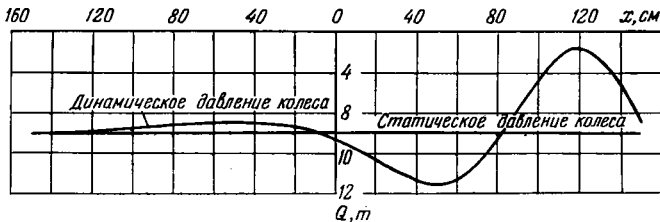


Рис. 3.

получает колебательное движение в вертикальном направлении. Период этих колебаний будет при наших числовых данных равен $T = 2\pi \sqrt{0,05/981} = 0,045$ сек.

Этому промежутку времени при взятой нами скорости будет соответствовать перемещение точки касания колеса на 133 см.

Для получения динамических напряжений, возникающих в рельсе, нужно составить выражение изгибающего момента под грузом. Очевидно, мы получим нужное нам выражение, если в формуле (8) вместо Q поставим величину Q_d , тогда

$$M_x = \frac{Q_d}{4\alpha} (1 + \eta\eta_1 m).$$

Закон изменения M_d для нашего численного примера представлен графически на рис. 2.

Таким образом, все нужные для динамического расчета рельса элементы могут быть получены путем интегрирования уравнения (11), составленного в том предположении, что осевшая шпала вовсе не поддерживает рельса.

Без особых затруднений может быть исследован также тот случай, когда осадка шпалы невелика и шпала, начиная с некоторого определенного положения колеса, уже поддерживает рельс. Пока шпала не работает, т. е. пока динамический прогиб над шпалой меньше начальной осадки δ , нужно пользоваться уравнением (11). При дальнейшем движении зависимость между давлением колеса и прогибом рельса будет определяться формулой (7'). Прогиб

представится двумя слагаемыми. Первое слагаемое пропорционально давлению, а второе является известной функцией от x .

Следовательно, явление здесь будет происходить так же, как при пробеге колесом впадины определенного очертания. Подобную задачу мы подробно разобрали в нашей заметке ¹⁾. Когда при дальнейшем движении колеса прогиб рельса над осевшей шпалой станет меньшим, чем δ и шпала перестанет поддерживать рельс, мы вновь должны будем обратиться к интегрированию уравнения (11).

Из всего сказанного ясно, что тот прием расчета, когда рельс рассматривают как балку, лежащую на сплошном упругом основании, можно применять для изучения влияния начальной осадки шпалы на величину статических и динамических прогибов рельса.

Если произвести вычисления для нескольких значений начальной осадки δ и для различных скоростей v , то из этих расчетов можно будет получить некоторые заключения относительно дополнительных напряжений, обусловленных начальной осадкой шпалы.

¹⁾ Т и м о ш е н к о С. П. К вопросу о прочности рельс. Издание Института инженеров путей сообщения, Петроград, 1915, тип. А. Э. Коллинса, 1915, 42 стр.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ СПОСОБ РАСЧЕТА ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК¹⁾

Без указания места публикации, 1916, 8 стр.

Предположим, что требуется рассчитать плоское перекрытие (рис. 1) с прямоугольным контуром, состоящее из тонкой пластины и подкрепляющих балок. Нагрузка, воспринимаемая пластиной, передается системе равноудаленных вертикальных балок, которые в дальнейшем будем называть балками главного направления. Эти балки поддерживаются несколькими горизонтально расположенными перекрестными балками. Расчет такой системы балок представляет задачу статически неопределимую с большим числом лишних неизвестных.

Хотя при решении этой задачи и не встречается каких-либо принципиальных затруднений, но все же требуется довольно большое количество вычислительной работы, быстро увеличивающейся с возрастанием числа пересечений балок. Для упрощения дела приходится прибегать к приближенным способам решения задачи. Профессор И. Г. Бубнов²⁾ показал, что в случае большого числа одинаковых равноудаленных и одинаково загруженных балок главного направления, поддерживаемых одной перекрестной балкой, задача может быть сведена к расчету балки, лежащей на сплошном упругом основании, и прогиб перекрестной балки определится из дифференциального уравнения

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = q - kw, \quad (1)$$

где EJ — жесткость перекрестной балки, q и k — постоянные величины, зависящие от размеров и числа балок и от действующей нагрузки. Все элементы, характеризующие изгиб балки, могут быть

¹⁾ Доклад читан 3 мая 1916 г.

²⁾ Бубнов И. Г. Строительная механика корабля. Часть II. С.-Петербург, тип. Морского министерства, 1914, 640+VII стр. См. стр. 368.

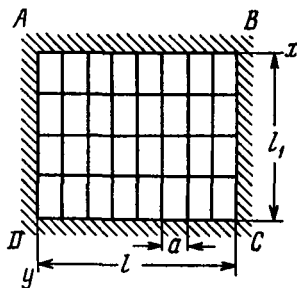


Рис. 1.

представлены функциями ¹⁾ от аргумента

$$u = \frac{kl}{2}. \quad (2)$$

Когда вместо одной имеется несколько перекрестных балок, задача сводится к системе совокупных дифференциальных уравнений вида (1) и для решения ее требуется довольно много вычислительной работы.

Ниже мы приводим приближенное решение той же задачи, основанное на применении тригонометрических рядов к исследованию изгиба балок главного направления и перекрестных балок. Уравнение поверхности, по которой расположатся узловые точки нашей системы (рис. 1) после искривления, может быть представлено так:

$$w = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{l_1}. \quad (3)$$

Чтобы из этого выражения получить уравнение изогнутой оси i -й балки главного направления, нужно только вместо x поставить соответствующее значение x_i . Точно так же для получения уравнения изогнутой оси j -й перекрестной балки нужно вместо y поставить соответствующее значение y_j .

Если p обозначает число балок главного направления, r — число перекрестных балок, EJ_1^i — жесткость i -й балки главного направления и EJ^j — жесткость j -й перекрестной балки, то потенциальная энергия изгиба нашей системы балок представится выражением:

$$V = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{EJ_1^i \pi^4}{4l_1^3} \left[\left(\sum_{m=1}^{m=\infty} a_{m_i} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \right)^2 + 2^4 \left(\sum_{m=1}^{m=\infty} a_{m_i} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \right)^2 + \right. \\ \left. + 3^4 \left(\sum_{m=1}^{m=\infty} a_{m_i} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \right)^2 + \dots \right] + \sum_{j=1}^{j=r} \frac{EJ^j \pi^4}{4l_1^3} \left[\left(\sum_{n=1}^{n=\infty} a_{1n} \sin \frac{n\pi y_j}{l_1} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2^4 \left(\sum_{n=1}^{n=\infty} a_{2n} \sin \frac{n\pi y_j}{l_1} \right)^2 + 3^4 \left(\sum_{n=1}^{n=\infty} a_{3n} \sin \frac{n\pi y_j}{l_1} \right)^2 + \dots \right]. \quad (4)$$

Работа сплошной нагрузки при изгибе балок будет равна

$$\frac{1}{2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_1} q w \, dx \, dy. \quad (a)$$

¹⁾ Таблицы для этих функций составлены И. Г. Бубновым. См. стр. 393 работы, упомянутой в сноске ²⁾ на стр. 381. См. также стр. 12 нашего «Курса теории упругости». Часть II. Стержни и пластинки. Петроград, тип. А. Э. Коллинса, 1916, 416 стр. [С. П. Тимошенко. Курс теории упругости. Киев, изд-во «Наукова думка», 1972, 508 стр. См. стр. 196.]

Коэффициенты a_{mn} определяются из условия ¹⁾

$$\delta \left(V - \iint q w \, dx \, dy \right) = 0. \quad (b)$$

Рассмотрим подробнее случай, когда балки главного направления равноудалены и имеют одинаковое поперечное сечение. Те же предположения сделаем относительно перекрестных балок и допустим, что система балок изгибается равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q . Из условий симметрии можем заключить, что в общее выражение (3) для прогиба войдут лишь члены с нечетными значками m и n , и уравнения для определения коэффициентов a_{mn} , получаемые из общего выражения (b), будут иметь такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{EJ_1 \pi^4}{2l_1^3} n_1^4 \sum_{i=1}^{i=p} \sin \frac{m_1 \pi x_i}{l} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} a_{m n_1} \sin \frac{m \pi x_i}{l} + \\ + \frac{EJ_1 \pi^4}{2l_1^3} m_1^4 \sum_{j=1}^{j=r} \sin \frac{n_1 \pi y_j}{l_1} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} a_{m_1 n} \sin \frac{n \pi y_j}{l_1} = \frac{4q l_1}{m_1 n_1 \pi^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения эти сильно упрощаются, если принять во внимание такие равенства:

$$\sum_{i=1}^{i=p} \sin \frac{m \pi i}{p+1} \sin \frac{n \pi i}{p+1} = 0,$$

если $m \neq n$ и если числа $m+n$ и $m-n$ не делятся на $2(p+1)$;

$$\sum_{i=1}^{i=p} \sin \frac{m \pi i}{p+1} \sin \frac{n \pi i}{p+1} = -\frac{p+1}{2}, \quad \text{если } m+n \text{ делится на } 2(p+1);$$

$$\sum_{i=1}^{i=p} \sin \frac{m \pi i}{p+1} \sin \frac{n \pi i}{p+1} = +\frac{p+1}{2}, \quad \text{если } m-n \text{ делится на } 2(p+1);$$

$$\sum_{i=1}^{i=p} \sin^2 \frac{m \pi i}{p+1} = \frac{p+1}{2}, \quad \text{если } m \text{ не делится на } p+1;$$

$$\sum_{i=1}^{i=p} \sin^2 \frac{m \pi i}{p+1} = 0, \quad \text{если } m \text{ делится на } p+1^2).$$

¹⁾ Мы предполагаем концы балок свободно поворачивающимися, поэтому работа сплошной нагрузки представит собой всю работу внешних сил, и уравнение (b) является следствием начала возможных перемещений.

²⁾ Все эти равенства получаются на основании формулы

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha + 2\beta) + \dots + \cos (\alpha + n\beta) = \\ = \frac{\cos \left(\alpha + \frac{n\beta}{2} \right) \sin \frac{(n-1)\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}, \end{aligned}$$

Практически приходится ограничиваться лишь несколькими первыми членами в общем выражении (3) для прогиба и потому при достаточно большом числе балок $2(r+1) > m+n$, $2(p+1) > m+n$ каждое из уравнений (5) будет заключать лишь один неизвестный коэффициент. Коэффициенты легко вычисляются по такой формуле:

$$a_{m_1 n_1} = \frac{4ql_1}{m_1 n_1 \pi^3} \cdot \frac{4l^3}{EJ\pi^4} \cdot \frac{1}{m_1^4(r+1) + n_1^4(p+1)} \frac{J_1 l^3}{J_1^3} \quad (6)$$

Имея выражение для коэффициентов, легко найти прогиб любой перекрестной балки. Предположим, например, что у нас число перекрестных балок нечетное, и напишем уравнение изогнутой оси для средней балки, которой соответствует $y_{\frac{r+1}{2}} = l_1/2$. Вставляя это

значение y в выражение (3), получим

$$\begin{aligned} w = \sin \frac{\pi x}{l} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} a_{1n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} + \\ + \sin \frac{3\pi x}{l} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} a_{3n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} + \dots, \end{aligned}$$

или, пользуясь выражением (6) для коэффициентов a_{mn} , получим

$$\begin{aligned} w = \frac{4ql_1 \cdot 4l^3}{EJ\pi^6 (r+1)} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \frac{\sin \frac{m\pi x}{l}}{m \left(m^4 + \frac{J_1 l^3}{J_1^3} \frac{p+1}{r+1} \right)} - \\ - \frac{4ql_1 \cdot 4l^3}{3EJ\pi^6 (r+1)} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \frac{\sin \frac{m\pi x}{l}}{m \left(m^4 + 3^4 \cdot \frac{J_1 l^3}{J_1^3} \frac{p+1}{r+1} \right)} + \dots \end{aligned}$$

Наибольшую роль играет первый член этого выражения и обыкновенно в качестве первого приближения им можно ограничиться. Тогда можно сказать, что прогиб рассматриваемой перекрестной балки такой же, как у балки с опертыми концами, лежащей на сплош-

из нее следует

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=p} \sin \frac{m\pi i}{p+1} \sin \frac{n\pi i}{p+1} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=p} \left(\cos \frac{(m+n)\pi i}{p+1} - \cos \frac{(m-n)\pi i}{p+1} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin \left[(m+n)\pi - \frac{(m+n)\pi}{2(p+1)} \right]}{\sin \frac{(m+n)\pi}{2(p+1)}} - \frac{\sin \left[(m-n)\pi - \frac{(m-n)\pi}{2(p+1)} \right]}{\sin \frac{(m-n)\pi}{2(p+1)}} \right\}. \end{aligned}$$

ном упругом основании ¹⁾ и изгибаемой равномерно распределенной нагрузкой интенсивности

$$q_1 = \frac{4ql_1}{\pi(r+1)}.$$

Жесткость основания характеризуется величинами

$$k = \frac{EJ_1}{l_1^3} \frac{\pi^4(p+1)}{r+1}, \quad u = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{\pi^4 p+J}{64 r+J} \frac{l_1 l^3}{l_1^3}}.$$

Для вычисления прогибов в таком случае проще всего воспользоваться известной формулой для балки с опертыми концами и лежащей на сплошном упругом основании ²⁾. Тогда для прогиба посредине получим выражение

$$w_{x=l/2, y=h/2} = \frac{q_1 l^4}{64EJ} \cdot \frac{1}{u^4} [1 - \Phi_0(u)] = \frac{4}{\pi^5} \frac{Q l_1^3}{EJ_1} [1 - \Phi_0(u)].$$

Здесь через Q обозначена величина $q_1 l / (p+1)$, представляющая собой нагрузку, приходящуюся на одну балку главного направления. Множитель, стоящий перед скобками в полученном выражении для прогиба перекрестной балки, с достаточной точностью может быть принят равным прогибу балки главного направления при отсутствии перекрестных балок. Множителем $1 - \Phi_0(u)$ оценивается влияние перекрестных балок. На основании таблицы значений функции $\Phi_0(u)$ заключаем, что при $\pi/2 < u < 3\pi/2$ перекрестные балки будут вредны. Они не только не поддерживают средней балки главного направления, но, наоборот, увеличивают ее прогиб. Когда прогибы перекрестных балок определены намеченным здесь способом, легко может быть рассчитана средняя балка главного направления. Для этого проще всего воспользоваться формулами для неразрезной балки с опорами, расположенными на различных высотах.

Мы до сих пор предполагали, что все перекрестные балки имеют одинаковую жесткость, такое же допущение мы делали и относительно балок главного направления, но тот же прием может быть с выгодой применен и в тех случаях, когда одной или несколькими балкам придано иное сечение. Ход решения задачи поясним на таком примере. Предположим, что плоское покрытие, несущее равномерную нагрузку, поддерживается одиннадцатью равноудаленными балками главного направления и пятью перекрестными балками. Концы всех балок предполагаются свободно поворачивающимися. Поперечные сечения всех балок главного направления одинаковы.

¹⁾ См. стр. 69 указанного в сноске на стр. 382 нашего курса теории упругости [стр. 235 второго издания, приведенного там же].

²⁾ См. стр. 11 указанного в сноске на стр. 382 нашего курса теории упругости [стр. 195 второго издания, указанного там же].

Что касается перекрестных балок, то средняя из них имеет вдвое большую жесткость, чем другие. Для потенциальной энергии изгиба нашей системы балок мы напишем такое же выражение, как и в случае перекрестных балок постоянной жесткости EJ , и потом к нему присоединим выражение

$$\frac{EJ\pi^4}{4l^3} [(a_{11} - a_{13} + a_{15} - \dots)^2 + 3^4 (a_{31} - a_{33} + a_{35} - \dots)^2 + \dots],$$

представляющее собой ту прибавку к потенциальной энергии, которая соответствует удвоению жесткости средней перекрестной балки.

Уравнения для определения коэффициентов $a_{m,n}$, получают при этом такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{EJ_1\pi^4}{2l_1^3} n_1^4 \sum_{i=1}^{i=11} \sin \frac{m_1\pi x_i}{l} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} a_{m,n} \sin \frac{m\pi x_i}{l} + \\ + \frac{EJ\pi^4}{2l^3} m_1^4 \sum_{j=1}^{j=5} \sin \frac{n_1\pi y_j}{l_1} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} a_{m,n} \sin \frac{n\pi y_j}{l_1} + \\ + \frac{EJ\pi^4}{2l^3} m_1^4 (a_{m,1} - a_{m,3} + a_{m,5} - \dots) (-1)^{\frac{n_1-1}{2}} = \frac{4ql_1}{m_1 n_1 \pi^2} = \frac{48Q}{m_1 n_1 \pi^2}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание значение сумм

$$\sum_{i=1}^{i=p} \sin \frac{m\pi i}{p+1} \sin \frac{n\pi i}{p+1}$$

при различных m и n и ограничиваясь лишь первыми членами в общем выражении (3) [$m+n < 12$], мы найдем, что система уравнений для определения коэффициентов $a_{m,n}$ распадается на группы, причем в каждую группу войдут лишь коэффициенты с одинаковыми значками m_1 . Решение этих уравнений крайне просто, так как значения величин $a_{m,n}$ быстро убывают с увеличением n . Если в нашем примере мы возьмем девять членов в общем выражении (3) и введем для сокращения обозначения $\alpha = J_1 l^3 / I l^3$, $A = Q l^3 / EJ \pi^6$, то первая группа уравнений ($m_1=1$) напишется так:

$$\begin{aligned} 6\alpha a_{11} + 3a_{11} + (a_{11} - a_{13} + a_{15}) &= 96A, \\ 3^4 \cdot 6\alpha a_{13} + 3a_{13} - (a_{11} - a_{13} + a_{15}) &= 32A, \\ 5^4 \cdot 6\alpha a_{15} + 3a_{15} + (a_{11} - a_{13} + a_{15}) &= \frac{96}{5} A. \end{aligned}$$

Произведем вычисления для того случая, когда $\alpha=0,438$. Решение уравнений дает нам:

$$a_{11} = 14,49A; \quad a_{13} = 0,214A; \quad a_{15} = 0,003A.$$

Подобным же образом из второй и третьей групп уравнений ($m_1=3$) и ($m_1=5$) найдем:

$$\begin{aligned} a_{31} &= 0,107A; & a_{33} &= 0,036A; & a_{35} &= 0,0004A; \\ a_{51} &= 0,0086A; & a_{53} &= 0,0044A; & a_{55} &= 0,0003A. \end{aligned}$$

Имея значения коэффициентов a_{mn} , легко написать выражение для изогнутой оси каждой перекрестной балки.

Так, например, для средней перекрестной балки ($y=l_1/2$) получим

$$\begin{aligned} w_{j=3} &= \sin \frac{\pi x}{l} (a_{11} - a_{13} + a_{15}) + \sin \frac{3\pi x}{l} (a_{31} - a_{33} + a_{35}) + \\ &+ \sin \frac{5\pi x}{l} (a_{51} - a_{53} + a_{55}). \end{aligned}$$

Вставляя сюда значения коэффициентов и полагая $x=l/2$, получим

$$w_{x=l/2, y=l_1/2} = 14,21 \frac{Ql^3}{EJ\pi^6}.$$

Подобным же образом для следующих двух перекрестных балок, полагая

$$y = \frac{l_1}{3} \quad \text{и} \quad y = \frac{l_1}{6},$$

получим

$$w_{x=l/2, y=l_1/3} = 12,46 \frac{Ql^3}{EJ\pi^6}, \quad w_{x=l/2, y=l_1/6} = 7,38 \frac{Ql^3}{EJ\pi^6}.$$

Величину изгибающего момента для каждой перекрестной балки найдем из формулы ¹⁾

$$|M| = EJ \frac{d^2w}{dx^2}.$$

Вставляя вместо w соответствующие выражения для прогибов, найдем для средин перекрестных балок такие значения моментов:

$$\begin{aligned} M_{x=l/2, y=l_1/2} &= 0,282Ql, & M_{x=l/2, y=l_1/3} &= 0,122Ql, \\ M_{x=l/2, y=l_1/6} &= 0,071Ql. \end{aligned}$$

Теперь остается рассчитать балки главного направления. Крайние из этих балок можно рассматривать как неразрезные балки на семи абсолютно жестких опорах. Опорные моменты для них будут иметь значения:

$$\begin{aligned} (M)_{y=l_1/6} &= -0,00294Ql_1, & (M)_{y=l_1/3} &= -0,00214Ql_1, \\ (M)_{y=l_1/2} &= -0,00241Ql_1. \end{aligned}$$

¹⁾ Для средней балки вместо EJ нужно, конечно, взять $2EJ$.

Что касается средней балки главного направления, то для нее придется к вычисленным выше опорным моментам присоединить моменты, обусловленные осадкой опор. Обозначая их соответственно через M_1 , M_2 и M_3 , получим, на основании найденных выше прогибов, такую систему уравнений:

$$\begin{aligned} 4M_1 + M_2 &= \frac{6,36 \cdot EJ_1}{l_1^2} \cdot \frac{Ql^3}{EJ\pi^6} (7,38 - 5,08), \\ M_1 + 4M_2 + M_3 &= \frac{6,36 \cdot EJ_1}{l_1^2} \cdot \frac{Ql^3}{EJ\pi^6} (5,08 - 1,75), \\ 2M_2 + 4M_3 &= \frac{6,36 \cdot EJ_1}{l_1^2} \cdot \frac{Ql^3}{EJ\pi^6} (1,75 + 1,75), \end{aligned}$$

откуда находим

$$M_1 = 0,0425Ql_1, \quad M_2 = 0,0572Ql_1, \quad M_3 = 0,0572Ql_1.$$

Присоединяя сюда найденные выше опорные моменты от нагрузки, получаем окончательно для изгибающих моментов в узлах средней балки главного направления значения:

$$M'_1 = 0,0396Ql_1, \quad M'_2 = 0,0551Ql_1, \quad M'_3 = 0,0548Ql_1.$$

Заметим, что при взятom нами числе знаков в выражениях для прогибов перекрестных балок третий знак в числах, полученных для моментов, является сомнительным. Конечно, можно было бы получить и более точные выражения для моментов, но такой расчет не имел бы практического значения, так как все решение задачи является по существу лишь приближенным. Мы, например, совершенно не принимали во внимание закона распределения давлений, получаемых балками главного направления от пластины плоского перекрытия, и приняли эти давления равномерно распределенными по плоскости покрытия. На самом деле этого нет, и получаемые вследствие этого погрешности будут в рассмотренном численном примере, вероятно, не меньше тех погрешностей, которые являются следствием неточного определения прогибов перекрестных балок. Выясненный на численном примере способ расчета перекрестных балок легко может быть распространен на тот случай, когда нагрузка неравномерная, а, например, меняется вдоль оси y по линейному закону. Если по концам перекрестных балок приложены моменты, то можно пользоваться тем же приемом расчета; нужно только к работе нагрузки присоединить работу опорных пар.

К ВОПРОСУ О ДОПУСКАЕМЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ В МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МОСТАХ

Известия собрания инженеров путей сообщения, 1917, № 7, §§ 1—5, стр. 140—146;
№ 8, §§ 6—10, стр. 173—179

Непрерывное увеличение веса подвижного состава и скорости движения, крупные успехи, достигнутые металлургией в отношении получения мостовой стали высокого качества, а также непрерывное развитие методов расчета металлических конструкций и приемов экспериментального изучения прочности конструкций привели в последнее время к необходимости пересмотра норм допускаемых напряжений в мостах, и мы видим, что за последние десять — пятнадцать лет большинство стран подвергли эти нормы полной переработке. Пруссия ввела новые нормы в 1903 г., Бавария — в 1908 г. В Австрии новые нормы для железнодорожных мостов были пересмотрены в 1904 г. В Швейцарии старые нормы 1892 года заменены новыми в 1913 г. Наконец, во Франции новые нормы введены в 1915 г. ¹⁾ В Соединенных Штатах, где нет каких-либо общих норм, некоторые крупные железнодорожные компании пересмотрели свои нормы ²⁾ и в связи с этим организовали экспериментальные исследования напряжений, возникающих в мостах под действием подвижной нагрузки.

Вполне естественно, что и у нас в России вопрос о полном пересмотре норм допускаемых напряжений в металлических мостах поставлен на очередь и должен быть разрешен в ближайшее время. Особый практический интерес этот вопрос получит в связи с предполагаемым расширением железнодорожного строительства в России и с изменениями осевых нагрузок подвижного состава.

Вопрос о нормах допускаемых напряжений стоит в самой тесной связи с расчетными нагрузками, с качествами строительных материалов и с принятыми приемами расчета напряжений. Чем с большим

¹⁾ См. *Annales des ponts et chaussées. Partie Administrative. Janvier — Février 1915, année 85, 9 série, tome V.* См. *Pontsraills supportant des voies ferrées étroites à la largeur d'un mètre*, pp. 98—100. См. также *G o u p i l A. Calcul et épreuves des ponts métalliques. Le nouveau Règlement du Ministère des Travaux publics du 8 janvier 1915. Le Genie Civil, 1915, tome 67, № 17 (1732), pp. 258—263.* См. p. 259.

²⁾ Отмечу следующее: *New York Central Lines specifications 1910. Union Pacific railroad company Educational bureau of information Instruction papers. Omaha. 1. Railroad, 2. Union Pacific railroad. 1909; Pennsylvania. Railroad commission. Report, Harrisburg, 1906; American railway engineering association. General specification for steel railway bridges. 1910. Chicago, 30 p. (1. Bridges, Iron and steel, 2. Bridges, railroad, 3. Bridges, Specification.)*

запасом назначены расчетные нагрузки, чем однороднее по своим упругим свойствам применяемый материал и чем совершеннее приемы определения напряжений, тем выше могут быть нормы допускаемых напряжений, тем меньшим может быть выбран коэффициент безопасности, коэффициент незнания, как его называют англичане.

Поэтому полные нормы для расчета металлических железнодорожных мостов должны заключать в себе:

- 1) данные относительно расчетных нагрузок;
- 2) указания относительно прочности и упругих свойств материала, а также технические условия приемки его;
- 3) указания на положенные в основание приемы расчета;
- 4) нормы допускаемых напряжений;
- 5) указания относительно условий приемки готового сооружения, относительно тех измерений, которые должны быть производимы при приемках, и тех измерений деформации, которые должны периодически повторяться для проверки удовлетворительности работы сооружения.

§ 1. Принятая в настоящее время формула для определения допускаемых напряжений при действии вертикальных нагрузок

Интересуясь в первую очередь выбором формулы для определения основного допускаемого напряжения, мы в дальнейшем будем исходить из предположения, что для нагрузок и материала сохраняются в силе нормы, принятые в настоящее время Министерством путей сообщения для расчета железнодорожных металлических мостов. Относительно приемов расчета предполагаем, что все вычисления произведем, исходя из статического действия принятых нагрузок. Усилия в элементах сквозных ферм определяются в предположении наличия в узлах идеальных шарниров.

Основное допускаемое напряжение назначается в настоящее время одинаковым для всего сооружения и в зависимости от пролета моста l , заданного в метрах, определяется по формуле

$$R = (7,5 + 0,02l) \text{ кг/мм}^2, \quad (1)$$

причем R не должно превосходить $10,5 \text{ кг/мм}^2$ ¹⁾.

В основание формулы (1) положена совершенно правильная мысль: предполагается, что напряжения, вызываемые постоянной нагрузкой, менее опасны и поддаются более точному учету, нежели напряжения от подвижной нагрузки. Поэтому вполне естественно с увеличением пролета, а следовательно, и веса сооружения увеличивать основное допускаемое напряжение. Хотя формула (1) и удов-

¹⁾ Для проезжей части со свободными поперечными балками допускается увеличение допускаемого напряжения на $0,5 \text{ кг/мм}^2$ против того, что дает формула (1).

летворяет этому общему требованию, она имеет ряд недостатков, на которые нередко делались указания специалистами мостового дела. Указывалось на то, что, пользуясь формулой (1), мы устанавливаем общее основное напряжение для всех частей сооружения, независимо от условий работы этих частей, а между тем для некоторых частей,

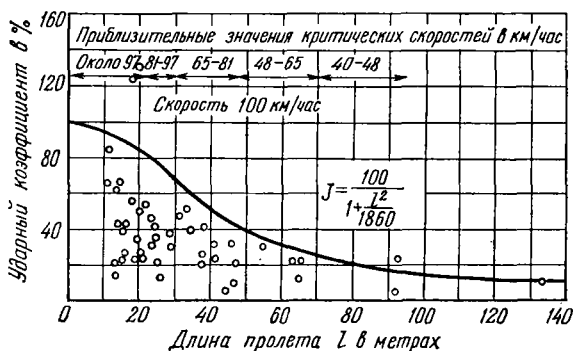


Рис. 1.

например подвесок, дополнительных стоек и др., условия работы от пролета моста не зависят вовсе. Отмечалась неясность, что брать за длину пролета l , когда мы переходим от простых балочных мостов к консольно-балочным, к консольно-арочным и т. д. Чтобы устранить эту неясность, иногда делались специальные постановления для определенного типа сооружения. Постановления эти, лишённые логического обоснования, решая вопрос для какого-либо частного случая, не могли, конечно, устранить общего недостатка формулы (1). Отметим еще, что благодаря линейности формулы (1) основные напряжения, определяемые по ней, при малых и средних пролетах получаются малыми. Из рис. 1—3 мы видим, что наши допускаемые напряжения не только ниже того, что дают новые швейцарские нормы, но также ниже напряжений, определяемых по более старым прусским и австрийским нормам. Подобные низкие нормы оправдать нельзя,

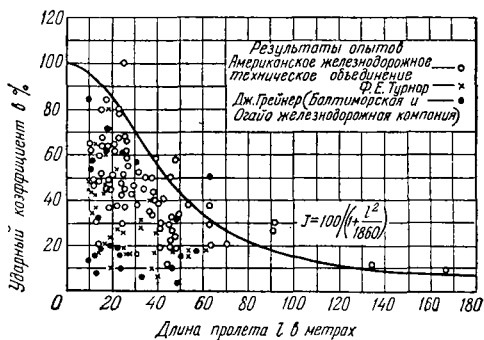


Рис. 2.

в особенности если принять во внимание, что требования наши относительно прочности и качеств мостового железа не ниже западно-

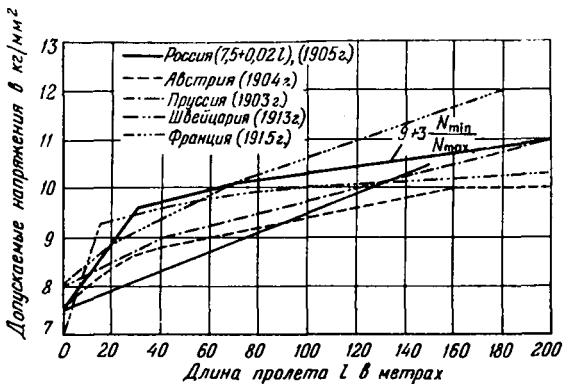


Рис. 3.

европейских, расчетные нагрузки весьма велики, а интенсивность движения и его скорость обыкновенно ниже, чем на Западе.

§ 2. Другие виды формул для определения допускаемых напряжений

Чтобы устранить основные недостатки формулы (1), специалисты мостового дела предложили в Мостовой комиссии ¹⁾ целый ряд формул, большую часть которых можно привести к таким двум типам:

$$R = a + b \frac{N_{\min}}{N_{\max}}, \quad (2)$$

$$R = \frac{R_0}{1 + \alpha \left(1 - \frac{N_{\min}}{N_{\max}}\right)}. \quad (3)$$

Здесь a и b обозначают постоянные числа, различно выбираемые у разных авторов; N_{\min}/N_{\max} — отношение наименьшего и наибольшего усилий рассчитываемой части. Так, например, для поясов балочных мостов с параллельными поясами

$$\frac{N_{\min}}{N_{\max}} = \frac{p}{p+q},$$

¹⁾ Я имею в виду труды Мостовой комиссии при Инженерном Совете за 1896—1898 гг. [Эти труды не издавались. См. Краткий исторический очерк деятельности Инженерного Совета за 25 лет, с 1892 по 1917 гг. Составлен управлением делами Инженерного Совета под редакцией засл. проф. С. К. Куницкого. Петроград. Тип. Министерства путей сообщения, 1917, 127 стр. Гл. 1, § 2, Мостовая комиссия, стр. 95—99.]

где p — интенсивность постоянной нагрузки и q — интенсивность эквивалентной подвижной нагрузки, покрывающей весь пролет. Величина R_0 , входящая в формулу (3), представляет собой некоторое постоянное основное напряжение. Величина $1 + \alpha$, так называемый *ударный коэффициент*, является переменной, выбираемой у разных авторов различно.

Формулы (2) и (3) дают для каждой части моста свое допускаемое напряжение в зависимости от условий работы рассматриваемой части, и потому эти формулы одинаково применимы к мостам всяких систем и всяких пролетов. Надлежащим выбором постоянных, входящих в эти формулы, всегда можно достигнуть того, чтобы по ним получались подходящие значения для допускаемых напряжений.

Допускаемые напряжения получаются по обеим формулам тем большими, чем больше значение отношения N_{\min}/N_{\max} . Таким образом, обе формулы учитывают неблагоприятное действие подвижной нагрузки, но основания для этого учета в этих формулах различные. Формула (2) считается с тем фактом, что при переменных усилиях, в особенности если число перемен можно считать весьма большим, прочность материала значительно понижается и для разрушения требуются гораздо меньшие напряжения, чем временное сопротивление материала, определяемое обычным способом на разрывной машине.

Это явление «усталости железа», изученное впервые А. Вёлером¹⁾, всесторонне исследовано в последнее время английскими экспериментаторами²⁾, подтвердившими в общем заключения А. Вёлера.

Действительно, прочность железа при повторных нагрузках понижается, и это понижение зависит от отношения N_{\min}/N_{\max} .

С явлением «усталости железа» особенно приходится считаться в тех случаях, когда благодаря резким изменениям сечения или благодаря ослаблениям сечения отверстиями можно ожидать возникновения значительных «местных» напряжений. Вредное влияние оказывают переменные усилия также и на заклепочные соединения.

¹⁾ [Wöhler A. Bericht über die Versuche, welche auf der König!. Nieder-schlesisch-Märkischen Eisenbahn mit Apparaten zum Messen der Biegung und Verdrehung von Eisenbahnwagen—Achsen während der Fahrt, angestellt werden. Zeitschrift für Bauwesen, 1858, Jahrgang 8, SS. 641—652.]

²⁾ См. опыты: Stanton T. E., Baird L., On the resistance of iron and steel to reversals of direct stress. Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 1906, vol. 166, Paper № 3630, pp. 78—110; discussion: p. 111—124; correspondence: pp. 124—134. Reynolds O., Smith J. H., On a throw-testing machine for reversals of mean stress. Philosophical Transactions Royal Society, 1902, Series A, vol. 199, November, pp. 265—297. Hopkins B. The effects of momentary stresses in Metals. Proceedings of the Royal Society, 1905, vol. 74, № 505, pp. 498—506.

В литературе имеются указания на расстройство заклепочных соединений в сжато-вытянутых частях ¹⁾.

Авторы формулы (3) оставляют вопрос «усталости железа» в стороне и исходят из соображений относительно степени достоверности в определении усилий, вызываемых подвижной нагрузкой. Основываясь на совершенно правильном положении, что напряжения, вызываемые подвижной нагрузкой, известны нам с гораздо меньшей достоверностью, чем напряжения от постоянных сил, и что они наверное больше напряжений, которые та же нагрузка вызвала бы при статическом действии, авторы формулы (3) предлагают при определении сечений стержней множить усилия, вызываемые подвижной нагрузкой, на некоторый коэффициент приведения (ударный коэффициент) $1 + \alpha$, большой единицы. Сравнивая действие подвижной нагрузки с действием внезапно приложенной силы, заключают, что величина коэффициента α должна зависеть от продолжительности того промежутка времени, за который происходит в рассчитываемом стержне изменение усилия от N_{\min} к N_{\max} . Чем этот промежуток времени короче, тем ближе по своему действию подвижная нагрузка к внезапно приложенной силе, тем больше коэффициент $1 + \alpha$ должен приближаться к значению 2. Таким путем приходят к заключению, что величина α должна быть назначаемая в зависимости от длины того участка по пролету моста, который должен быть загружен подвижной нагрузкой для получения N_{\max} в рассчитываемом стержне. Чем эта длина меньше, тем большим должен быть выбран ударный коэффициент $1 + \alpha$. Авторами формул вида (3) ²⁾ предложен целый ряд значений постоянного напряжения R_0 и ряд формул для определения коэффициента α в зависимости от длины загружаемого участка. При этом значения величины α и R_0 определялись иногда не столько на основании оценки действия динамической нагрузки на мосты, сколько путем подбора таких значений, при которых формула (3) давала бы для наиболее распространенных типов мостов допускаемые напряжения, не выходящие из пределов того, что можно считать достаточно установленным прежней практикой.

При выборе формулы для основных допускаемых напряжений приходится, как мы видим, принимать в расчет два фактора: явление *усталости металла* и *ударное действие* подвижной нагрузки.

¹⁾ См. замечания: Mr. Sales на стр. 266 корреспонденции по работе: A n d e r s o n C. W. On impact coefficients for railway bridges. Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 1915, vol. 200, Paper № 4106, pp. 178—223; discussion: pp. 224—242; correspondence: pp. 243—286. См. также T h o r p e W. H., там же р. 232.

²⁾ В Мостовой комиссии формулы вида (3) предлагались Г. О. Соловьевым, Л. Ф. Николаи, С. К. Куницким, Г. Г. Кривошеиным. [В работе Л. Ф. Николаи, указанной в сноске ²⁾ на стр. 406, приводится также формула Г. Н. Соловьева. См. также сноски ³⁾—⁴⁾ на стр. 405 и сноску ¹⁾ на стр. 406.]

Эти факторы выгодно, конечно, рассмотреть в отдельности и потом уж при составлении основной формулы произвести относительную их оценку. Вопросу этому посвящена обширная литература, им занимались главным образом английские и американские инженеры¹⁾. Одним из первых ввел различие между двумя вышеупомянутыми факторами Х. Симен²⁾. Он предложил для оценки ударного действия подвижной нагрузки пользоваться следующей таблицей ударных коэффициентов:

$l, м$	0	6,10	12,2	18,3	24,4	30,5
$I, \%$	50	20	10	4	1	0

В первой строчке приведены пролеты моста в метрах, во второй строчке прибавки в процентах к подвижной нагрузке. Таким образом, ударное действие подвижной нагрузки Х. Симен принимает в расчет лишь в случае сравнительно малых пролетов. При значительных пролетах Х. Симен считается лишь с явлением усталости и предлагает для подвижной нагрузки брать напряжения вдвое меньшие тех, которые принимаются при постоянной нагрузке. Позднее³⁾ Х. Симен изменил основания для построения основной формулы и предложил оценивать ударное действие подвижной нагрузки путем присоединения к ней особой прибавки S , определенной (в процентах от подвижной нагрузки) по следующей формуле:

$$S = \left(125 - \frac{1}{8} \sqrt{2000l - l^2} \right), \quad (a)$$

где $l < 1000$ ($s=0$ при $l > 1000$).

Здесь через l обозначен пролет моста в футах. При весьма малых пролетах $S=125\%$. При $l=350$ футов (107 м) $S \approx 30\%$. Для оценки явления усталости материала им было предложено при расчете сжато-вытянутых частей усилие каждого знака увеличивать на 50% меньшего по величине усилия. Учет усталости материала в тех частях, где усилия сохраняют знак, очевидно, заключается в предложенной автором формуле для ударного действия подвижной

¹⁾ Интерес представляют не столько перечисленные ниже доклады, сколько прения, следовавшие после доклада. Эти прения дают возможность установить взгляд наиболее выдающихся авторов на интересующий нас вопрос.

²⁾ Seaman H. B. The Launhardt formula, and railroad bridge specifications. Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1899, vol. 41, June, № 845, p. 140—153; Appendix A. Specifications for steel railroad bridges, pp. 154—165; discussion: pp. 166—186; correspondence: pp. 187—256. Appendix B. Specifications for steel railroad bridges (revised), pp. 257—268.

³⁾ Seaman H. B. Specifications for the design of bridges and subways. Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1912, vol. 75, Paper № 1223, December, pp. 313—352; discussion: pp. 353—392.

нагрузки. Дальнейшее развитие вопрос об ударном действии подвижной нагрузки и об учете усталости материала получил в исследовании Е. Стоуна ¹⁾. Он предложил умножать подвижную нагрузку на коэффициент, большой единицы, причем величину этого ударного коэффициента поставил в связи с отношением усилия от постоянной нагрузки к усилию от подвижной нагрузки. На основании многочисленных опытов, произведенных на мостах индийских железных дорог, Е. Стоун предложил такую таблицу ударных коэффициентов:

Усилие от подвижной нагрузки, %	97,5	95	90	85	80	70	50	30	0
Усилие от постоянной нагрузки, %	2,5	5	10	15	20	30	50	70	100
Ударный коэффициент	1,47	1,34	1,23	1,17	1,13	1,08	1,04	1,02	1,00

Таким образом, для самых коротких пролетов прибавки к подвижной нагрузке достигают примерно 50%. Этими прибавками оценивается ударное действие нагрузки. Явление усталости оценивается при помощи формулы В. Лаунхарда ²⁾, построенной на основании опытов А. Вёлера ³⁾. Ряд инженеров, участвовавших в прениях по докладу Е. Стоуна, отметили выгодность отдельной оценки ударного действия нагрузки и явления усталости, но при этом выяснилось, что в предложении Е. Стоуна явлению усталости приписано несколько преувеличенное значение ⁴⁾, тогда как ударное действие нагрузки оценено сравнительно низко.

Особенно широко распространена в настоящее время в американских нормах такая формула для ударного коэффициента ⁵⁾:

$$1 + \alpha = \frac{300}{l + 300}, \quad (b)$$

где l представляет длину загружаемой части пролета в футах.

¹⁾ Stone E. H. The determination of the safe working stress for railway bridges of wrought iron and steel. Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1899, vol. 41, № 850, June, pp. 467—502, correspondence: pp. 503—553; см. также Anderson C. W. On impact coefficients for railway girders. Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 1915, vol. 200, paper № 4106, pp. 178—223; discussion: pp. 224—242; correspondence: pp. 243—286.

²⁾ Launhard [W.] Über die zweckmäßige Höhe des Personen-Fahrgeldes auf den Eisenbahnen. Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1891, Bd. 37, Heft 2, SS. 113—122.

³⁾ Wöhler A. Über die Festigkeits-Versuche mit Eisen und Stahl. Zeitschrift für Bauwesen, 1870, Jahrgang 20, Heft 1 bis 3, SS. 73—106.

⁴⁾ См. обсуждение на стр. 505, 518, 529 указанной в сноске ¹⁾ работы Е. Н. Стоуна.

⁵⁾ Формула эта впервые введена в 1894 г. в нормах для южной железнодорожной компании (Southern Railway Company). Впоследствии (1895 г.) она была при-

Нужно думать, что эта формула, давая высокие значения ударного коэффициента даже в случае мостов больших пролетов, несколько преувеличивает роль динамического действия подвижной нагрузки и таким образом покрывает недостаточность оценки влияния усталости металла. Дополнительная проверка на усталость делается лишь для сжато-вытянутых стержней в том случае, когда перемена знака напряжений часто повторяется. Для таких стержней производится проверка на усилие каждого знака, причем к этим усилиям каждый раз прибавляется половина меньшего по величине усилия.

Чтобы несколько понизить ударные коэффициенты, было предложено взамен только что приведенной формулы несколько новых формул для определения ударного коэффициента. Отметим здесь формулу

$$1 + \alpha = \frac{50}{50 + l}, \quad (c)$$

где пролет l опять-таки берется в фунтах. Формула эта применяется на индийских железных дорогах ¹⁾. Она дает для ударного коэффициента значения, быстро убывающие с пролетом. Поэтому при пользовании ею следовало бы отдельно считаться с явлением усталости ²⁾ металла. Чтобы дать какие-либо основания для выбора ударных коэффициентов и для оценки явления усталости металла, обратимся к имеющимся по этим вопросам теоретическим исследованиям и опытным данным.

§ 3. Действие подвижной нагрузки на мосты

Задача эта является весьма сложной и до сих пор она не имеет полного решения, но некоторые частные случаи изучены с достаточной полнотой и дают возможность сделать несколько заключений, имеющих практическое значение.

При малом пролете весом балки можно пренебречь по сравнению с весом подвижной нагрузки и рассматривать случай изгиба невесомой балки под действием катящегося груза ³⁾. Оказывается, что

нята Американской мостовой компанией (American Bridge Company). См. также «American railway engineering association. General Specifications for steel railway bridges», 1910, Chicago, 30 p.

¹⁾ С. W. Anderson, см. его работу, указанную в сноске ¹⁾ на стр. 396.

²⁾ На индийских железных дорогах явление усталости учитывается лишь в случае сжато-вытянутых частей.

³⁾ Задача эта для случая балки на двух абсолютно жестких опорах разрешена английским ученым Дж. Стоксом (Stokes G. G., Mathematical and physical papers. Vol. 2. Cambridge, University Press, 1883, 366 p. См. pp. 178—220). Случай неразрезной балки и балки, лежащей на упругих опорах, изучены Н. П. Петровым в работе: Определение геометрического места точек прикосновения спокойно действующей нагрузки с рельсом, лежащим на шести упругих опорах. Записки императорского русского технического общества, 1904, год 38, № 6, июнь, стр. 351—363.

максимальное динамическое давление для этого случая может быть определено по такой приближенной формуле ¹⁾:

$$P_d = P_{ст} \left(1 + \frac{1}{\beta - 3} \right), \quad \text{где} \quad \frac{1}{\beta} = \frac{16V^2}{l^2} \cdot \frac{f_{ст}}{g}.$$

Здесь V — скорость движения груза [м/сек], $f_{ст}$ — статический прогиб балки под действием $P_{ст}$, приложенного посередине пролета; l — пролет и g — ускорение силы тяжести. Полагая $f_{ст}/l=0,001$, $V^2=1000 \text{ м}^2/\text{сек}^2$, $l=10 \text{ м}$, найдем $P_d \approx 1,3 P_{ст}$.

Если предположить, что вес колесного ската составляет 1/5 усилия, передающегося через рессоры, то можно заключить, что полезное давление колеса на балку в данном случае возрастает примерно на 5%. В самых невыгодных случаях повышение давления по вычислениям Г. Циммермана не должно превосходить 14%. Это показывает, что повышение давлений вследствие движения колеса по изогнутой, а не по прямой балке, сравнительно невелико и практически при обычных запасах прочности с ним можно не считаться.

Если теперь обратиться к другому крайнему случаю, когда вес катящегося груза можно считать малым по сравнению с весом балки, то здесь главную роль играют колебания, возникающие при движении груза ²⁾. Амплитуда этих колебаний определяется величиной отношения $n=T : (2l/r)$, где T — период собственных колебаний моста и l/r — время, нужное для пробега грузом пролета моста. Подсчеты показывают, что n — малое число, убывающее с увеличением пролета. (Для $l=10 \text{ м}$ и $V=30 \text{ м/сек}$ можно считать $n=0,07$; при $l=100 \text{ м}$ и $V=30 \text{ м/сек}$ $n=0,04$.) Динамический прогиб можно приближенно определить по формуле $f_d = f_{ст}(1+n)$.

Таким образом, и в этом случае динамические напряжения должны мало отличаться от напряжений статических. Более серьезное практическое значение могут иметь периодически меняющиеся силы, как, например, силы инерции избыточных противовесов, переменные давления колес, обусловленные неправильностью бандажа и т. д. При этом действия этих сил на мосты больших пролетов и на малые мосты приходится оценивать различно. Когда мы имеем дело с мостами больших пролетов, то главную роль играют колебания, возникающие от периодически меняющихся сил. Колебания эти в случае «резонанса» могут вызвать весьма значительные дополнительные напряжения в фермах моста. Так, например, амплитуда вынужденных колебаний, вызываемых избыточными противовесами, может при неблагоприятных условиях в 20—25 раз превзойти про-

¹⁾ Формула, конечно, применима лишь при достаточно больших β . В противном случае нужно обратиться к полному решению.

²⁾ См. стр. 214 моего «Курса теории упругости». Часть II. Стержни и пластинки. Петроград, тип. А. Э. Коллинса, 1916, 416 стр. [Тимошенко С. П., Курс теории упругости. 1972, Киев, изд-во «Наукова думка», 508 стр. См. стр. 343.]

гиб, вызываемый статически приложенной посредине моста силой, равной центрбежной силе избыточных противовесов ¹⁾). Наиболее неблагоприятные условия мы будем иметь в случае «резонанса», т. е. когда период собственных колебаний моста равен времени полного оборота колеса. Вероятность такого явления возрастает с увеличением пролета моста, так как при этом период собственных колебаний увеличивается и приближается ко времени оборота колеса при практически встречающихся скоростях движения. (Например, для пролета в 80 м период собственных колебаний около 1/4 секунды и при четырех оборотах колеса в одну секунду мы будем иметь явление резонанса.) Отметим здесь еще боковые колебания мостов вследствие периодически меняющихся горизонтальных усилий, получающихся от паровоза. При больших пролетах жесткость моста в горизонтальной плоскости значительно меньше, нежели в вертикальной, и потому горизонтальные колебания могут получить особенно большую амплитуду ²⁾). При малых пролетах колебания, вызываемые периодически изменяющимися силами, не играют особой роли; здесь при малом периоде собственных колебаний нельзя ожидать явления «резонанса». Главное значение в этом случае имеет повышение давлений отдельных катящихся грузов. Здесь приходится иметь в виду как повышение давлений колес с избыточными противовесами, так и резкие увеличения давлений, обусловленные неправильностями бандажа ³⁾ и неровностями пути. Хотя совпадение повышенных давлений для нескольких колес является маловероятным, эта вероятность увеличивается с уменьшением пролета, и при малых пролетах, когда на балке помещается 1—2 груза, повышение давлений хотя бы одного из них приводит к весьма большим повышениям напряжений в балке. Это обстоятельство заставляет особенно осторожно относиться к повышению норм допускаемых напряжений в балках проезжей части и в мостах малых пролетов. Для этих частей не следовало бы допускать высоких напряжений.

§ 4. Опытное определение ударного действия подвижной нагрузки на мосты

Все согласны с тем, что подвижная нагрузка вызывает в частях моста большие усилия, чем такая же по величине нагрузка при статическом действии, но теоретических данных для надлежащей оценки

¹⁾ См. стр. 219 моего курса, указанного в сноске ¹⁾ на стр. 398.

²⁾ Мы здесь не говорим о больших усилиях, возникающих при ударе на стыках. Действие этих ударов столь вредно должно отразиться на частях, подвергающихся непосредственному действию катящихся грузов, что обычное соединение рельсов на стыках следует признать недопустимым в мостах.

³⁾ M o l e s w o r t h G. Discussion on «Note on the floor system of girder bridges» by Findlay C. F. Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 1900, vol. 141, Paper № 3183, pp. 17—20; appendix: pp. 21—22; discussion: pp. 23—91; correspondence: pp. 91—106. См. pp. 61—64.

динамического действия нагрузки весьма недостаточно, и потому приходится при выборе ударных коэффициентов обращаться к данным опыта. Ниже мы приводим результаты некоторых исследований, произведенных главным образом американскими инженерами. Один из первых опытов по исследованию динамических прогибов мостов принадлежит проф. В. Френкелю¹⁾. При этих опытах для записывания прогибов моста при прохождении поезда был впервые применен особый регистрирующий прибор, применяемый и доныне для исследования прогибов мостов. Испытания, произведенные В. Френкелем над четырьмя мостами малых пролетов, показали, что динамические прогибы при больших скоростях могут превосходить статические прогибы почти на 50%. Для моста пролетом в 36 м В. Френкель не заметил увеличения напряжений в поясах при увеличении скорости движения.

Опыты С. Робинзона²⁾ дали для мостов с пролетами 43,0—47,6 м увеличение прогибов по сравнению со статическими на 19—28,6%. Ряд испытаний мостов, произведенных во Франции приборами Мане — Рабу³⁾, позволил заключить, что для мостов больших пролетов превышение динамических прогибов над статическим малое. Остановимся теперь более подробно на результатах опытов, произведенных проф. Ф. Турнором⁴⁾ над мостами различных пролетов и при различных скоростях движения. Измерения прогибов и коле-

¹⁾ F r ä n k e l W. Der Dehnungszeichner. Der Civilingenieur, 1881, Jahrgang 1881 (Der neuen Folge), Bd. 27, Heft 4, SS. 250—267; 1882, Jahrgang 1882 (Der neuen Folge), Bd. 28, Heft 3, SS. 191—206; Über einige Versuche mit dem «Dehnungszeichner». Der Civilingenieur, 1883, Jahrgang 1883 (Der neuen Folge), Bd. 29, Heft 6, SS. 383—400. Der Durchbiegungszeichner und seine Anwendung allein und in Verbindung mit dem Dehnungszeichner. Der Civilingenieur, 1884, Jahrgang 1884 (Der neuen Folge), Bd. 30, Heft 7, SS. 465—488. F r ä n k e l W., K r ü g e r M. Spannungs- und Formänderungs-Messungen an dem eisernen Pendelpfeiler-Viaducte über das Oschützthal bei Weida. Der Civilingenieur, 1887, Jahrgang 1887 (Der neuen Folge), Bd. 33, Heft 6, SS. 439—496.

²⁾ R o b i n s o n S. W. Vibration of bridges. Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1887, vol. 16, № 351, February, pp. 42—65.

³⁾ [C u ë n o t M. Note sur les épreuves d'un pont métallique de 35 mètres sur la Charente établi dans le système Neville (Warren) pour voie de chemin de fer de 1 mètre de largeur. Annales des Ponts et Chaussées, 7 série, 1891, 2 semestre, tome 2, № 31, pp. 5—36. См. также R a b u t [C h a r l e s]. Recherches expérimentales sur la déformation des ponts métalliques. Le Genie Civil, 1892, Troisième année, tome 22, № 6, 10 Décembre, pp. 88—89. R a b u t. Renseignements pratiques pour l'étude expérimentale des ponts métalliques. Annales des ponts et chaussées, 1896, 7 series, tome XII, 2 semestre, pp. 374—380. R a b u t. Conférence sur l'expérimentation des ponts. Annales des ponts et chaussées. I partie: Mémoires et documents, 1901, 71 année. 8 série, 3 trimestre, № 36, pp. 123—175. См. pp. 132—136. Описание прибора Мане — Рабу — механического регистратора для определения деформаций с базой 20, 50, 100 см дано, например, на стр. 63 книги: К а ч у р и н В. К., К р ы ж а н о в с к и й В. И. Обследование мостов. Гострансиздат, 1932.]

⁴⁾ T u r n o r F. E. Some experiments on bridges under moving train loads. Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1899, vol. 41, June, № 849, pp. 410—452; discussion: pp. 453—464; correspondence: pp. 465—466.

бания напряжений регистрировали приборами В. Френкеля, усовершенствованными О. Лёнером¹⁾). Результаты, получавшиеся для напряжений в поясах, сверялись с показаниями для прогиба и таким образом по возможности исключались опыты, где вследствие собственных колебаний прибора результаты являлись сомнительными. В первую очередь был важным вопрос о влиянии только скорости движения нагрузки на величину прогибов моста. Все формулы, заключающие в себе ударные коэффициенты, строятся на том предположении, что нагрузка, надвигающаяся на пролет моста со значительной скоростью, уже благодаря одной только этой скорости (независимо от возникающих колебаний) должна вызывать значительно большие прогибы, чем при статическом действии. Здесь обыкновенно проводится сравнение с действием внезапно приложенного груза, когда деформации получаются двойными по сравнению со статическими деформациями. Исключая колебания и рассматривая лишь те динамические прогибы, которые получились бы в мосте при условии идеально гладкого рельсового пути, при совершенно правильных колесах и при полном уравнивании движущихся частей паровоза, Ф. Турнор получил возможность оценить влияние только скорости надвижения нагрузки. Полученные им результаты показали, что для мостов с пролетом, большим 12,2 м, влияние скорости движения (скорости менялись в пределах от 16,1 до 96,5 км/час) ничтожно. Этим подтверждается отчасти правильность теоретических заключений, построенных на решениях Дж. Стокса.

Обращаясь теперь к тем дополнительным прогибам, которые обусловлены колебаниями моста, рассмотрим отдельно опытные данные для мостов со сплошной стенкой и для сквозных ферм. В первом случае мы имеем сравнительно малый период собственных колебаний. Время одного оборота колес паровоза даже при больших скоростях оказывается значительно превосходящим период соб-

¹⁾ L e u n e r Oscar (Dresden). [На стр. 412—413 работы T u r n e a u r e F. E. Some experiments on bridges under moving train-loads. Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1899, vol. 41, № 849, pp. 410—466 приводится описание тензомера Френкеля, который усовершенствовал О. Лёнер, и отмечается, что О. Лёнер является конструктором всех приборов В. Френкеля. В книге К а ч у р и н а В. К., К р ы ж а н о в с к о г о В. И. Обследование мостов. ОГИЗ, Гострансиздат, Л.—М., 1932, 170 стр. дается описание прогибомера Френкеля — Лёнера (стр. 56—58), тензомера Френкеля — Лёнера (стр. 75—76), маятника Лёнера (стр. 86—87). См. работу П а т о н а Е. О. Приборы для испытания мостов. Бюро мостовых исследований и мостовой подсекции научно-технического комитета. Сборник трудов № 3: «Вопросы исследования металлических мостов». 1923, Петроград, Издание редакционно-издательского отдела НКПС, 221 стр., в которой имеется описание прогибомера (стр. 161—166) и тензомера (стр. 181—186). Наконец, см. работу Е в г р а ф о в а Г. Т. Описание правил работы с прогибомерами системы Френкеля — Лёнера. Труды Научно-технического комитета НКПС, Москва, Транспечать, вып. 66, 1927, стр. 184—190. См. также Lexikon der gesamten Technik. Herausgegeben von Otto Leuner. Bd. 3, Stuttgart und Leipzig, Deutsche Verlags, Anstalt, 1909, S. 159 (Durchbiegungsmesser und Zeichner).]

ственных колебаний системы, и потому в этом случае не приходится говорить о *явлении резонанса*. В более длинных мостах со сквозными фермами период собственных колебаний системы может совпадать с временем одного оборота колеса и *явление резонанса* приобретает преобладающее значение. На основании испытаний целого ряда мостов со сплошной стенкой Ф. Турнор пришел к таким выводам:

1) возрастание прогибов и напряжений, обусловленное колебаниями, получается примерно одинаковым для пролетов от 7,62 до 16,8 м. Максимальное значение этого возрастания, получающееся при скоростях от 64,4 до 80,4 км/час, можно оценить примерно в 50% от соответствующих статических значений прогиба и напряжений в поясах. Для пролетов в 18,3, 21,3 и 25,9 м соответствующее возрастание прогибов и напряжений можно оценить в 22%, 28% и 17%;

2) скорости, большие 32,2 км/час в случае мостов малых пролетов и большие 56,3 км/час для мостов значительных пролетов, вызывают обычно значительные колебания;

3) опытами отмечены также и другие причины, обуславливающие колебания, например неровности пути, плоские места на колесах, определенная длина панели, при которой получают периодические изменения давлений, обусловленные прогибами продольных балок, причем период этих изменений соответствует периоду собственных колебаний моста;

4) с возрастанием скорости движения возрастает (в случае мостов малых пролетов) также и амплитуда колебаний, но не в такой степени, как растет центробежная сила, соответствующая избыточным противовесам паровоза.

Здесь мы приводим для полноты веса паровозов и максимальные значения центробежных сил избыточных противовесов (приведено максимальное значение суммарной вертикальной составляющей) для паровозов, обращающихся на линии железной дороги Чикаго — Милуоки и Сент — Пол, где производились опыты Ф. Турнора.

№ п/п	Вес паровозов, т	Диаметр ведущих колес, см	Центробежная сила избыточных противовесов при скорости, т	
			64,5 км/час	80,5 км/час
1	64	178	2,95	4,60
2	70	160	3,18	4,95
3	66	160	4,00	6,25
4	81	175	3,50	5,45
5	86	160	6,13	9,57
6	77	145	6,62	10,30

Из этой таблицы мы видим, что для коротких пролетов, на которых располагаются лишь спаренные оси паровозов, дополнительные прогибы, обусловленные центробежной силой избыточных противовесов, могут достигать 20—30% от статических изгибов. Для пролетов, на которых помещается весь паровоз, возрастание прогибов при скоростях 80,5 км/час достигает 15%. При испытании мостов со сквозными фермами (пролеты от 30,5 до 61 м) выяснилось, что главную роль играют колебания, вызываемые избыточными противовесами при условии явления резонанса. Это явление замечалось при изменении скорости движения в довольно значительных пределах, что объясняется изменением периода собственных колебаний системы при изменении подвижной нагрузки. По мере движения нагрузки период колебаний становится все более длинным. Таким образом мы получим довольно широкую область скоростей, для которых становится возможным значительное нарастание колебаний. Опытами отмечено также явление нарастания амплитуды колебаний при прохождении по мосту длинных однообразно загруженных товарных поездов.

На основании испытаний мостов со сквозными фермами Ф. Турнор делает такие заключения:

1) при скоростях, меньших 40,2 км/час, не получается заметных колебаний;

2) колебания, соответствующие явлению резонанса для пролетов от 22,9 до 45,7 м, увеличивают в худшем случае статические прогибы на 20—25%;

3) дополнительные напряжения в поясах ферм выражаются примерно такими же пролетными прибавками, как и дополнительные прогибы от колебаний.

Дальнейшие исследования колебания мостов под действием подвижной нагрузки производились Дж. Грейнером¹⁾ и, наконец, наиболее обширные испытания произведены американским железнодорожным техническим объединением эксплуатации дорог²⁾ (American railway engineering and maintenance of way association.)

¹⁾ Greiner J. E. См. Proceedings of the sixth annual convention of the American Railway Engineering and Maintenance of Way Association. Held at the Auditorium hotel, Chicago, Illinois. March 21—23, 1905, vol. 6. Published under Direction of the Committee on Publications, Press of the Blakely Printing Company, Chicago, 1905, 874 pp. [См. Baltimore and Ohio Railroad company. General specification for bridges. Baltimore, printed by Williams and Wilkins Co. 1911.] Результаты этих опытов см. Seaman H. B., Specifications for the design of bridges and subways. Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1912, vol. 75, Paper № 1223, December, pp. 313—352; discussion: pp. 353—392. См. p. 341.

²⁾ См. Report of Committee XV-on iron and steel construction. Proceedings of the eleventh annual convention of the American Railway Engineering and Maintenance of Way Association. Held at the Congress hotel, Chicago, Illinois. March 15—17, 1910, vol. 11, 1910, Chicago, published under Direction of the Committee on Pub-

Опыты эти были произведены над двадцатью одним мостом со сплошной стенкой с пролетами от 7,62 до 30,5 м и над двадцатью пятью мостами со сквозными фермами и с пролетами от 18,3 до 152 м.

При опытах пользовались специальным поездом обычно с тяжелым паровозом и с достаточным числом груженых товарных вагонов. Кроме обычного двухцилиндрового паровоза, в некоторых случаях пользовались уравновешенным четырехцилиндровым паровозом и в одном случае тяжелым электровозом Нью-Йоркской центральной железной дороги (New York central railway). Запись велась при помощи двенадцати экстензометров и одного прибора для записывания прогибов. Скорости движения опытного поезда менялись от 12,9—16,1 км/час до 96,5 и 113 км/час. Таким образом, влияние скорости было оценено путем сравнения результатов, полученных при медленном движении, с результатами при больших скоростях. Опыты в общем подтвердили результаты Ф. Турнора. Наиболее важные факторы, определяющие ударное действие подвижной нагрузки, суть следующие: 1) избыточные противовесы паровоза; 2) неровности железнодорожного пути; 3) выбоины на бандажах; 4) эксцентриситет колесных скатов; 5) скорость приложения нагрузки и 6) прогиб балок проезжей части, производящий изменения в вертикальных давлениях катящихся грузов. Из всех перечисленных причин наибольшее значение имеют избыточные противовесы. По крайней мере 80% динамического эффекта подвижной нагрузки обусловлено именно этой причиной. В тех случаях, где применялся уравновешенный четырехцилиндровый паровоз или электровоз, динамический эффект подвижной нагрузки был весьма мал. Опытным путем было установлено для пролетов, превышающих 22,9 м, существование критической скорости, соответствующей явлению резонанса. При пролетах от 76,2 до 91,5 м максимальные колебания получались при скоростях 40,2—48,3 км/час. Скорости 80,4—96,5 км/час сопровождалась значительно меньшими колебаниями. Для коротких пролетов частота собственных колебаний столь высока, что явление резонанса не могло быть получено даже при самых больших скоростях движения.

На рис. 1 и 2 представлены результаты опытов, относящихся к прогибам и к напряжениям. На последнем рисунке приведены также результаты опытов Ф. Турнора и Дж. Грейнера, упоминавшихся выше.

lications, Part 1, 733 p.; Part 2, 1379 pp., 1910. См. Bulletin № 125 (pp. 1—287). Результаты этих испытаний я заимствую из прений по докладу Андерсона: см. Anderson C. W. On impact coefficients for railway girders. Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 1915, vol. 200, Paper № 4106, pp. 178—223, discussion: pp. 224—242; correspondence: pp. 243—286. См. p. 270.

Сплошной линией на этих рисунках представлена формула ¹⁾

$$J = \frac{100}{1 + \frac{l^2}{20\,000}},$$

по которой, на основании произведенных опытов, предлагается оценивать в процентах от статического действия динамический эффект подвижной нагрузки. При пролете 61 м ударное действие подвижной нагрузки оценивается таким образом в 33%. Отметим здесь, что теми же опытами выяснено серьезное значение дополнительных напряжений, обусловленных жесткостью узлов. Некоторые американские инженеры склонны объяснять расстройство заклепочных соединений именно этими напряжениями, и потому этому вопросу уделяется теперь в американской практике серьезное внимание ²⁾.

§ 5. Выбор ударного коэффициента

Мы остановились несколько на теоретическом и опытном исследовании вопроса о действии подвижной нагрузки на балку, чтобы выяснить вопрос о надлежащем выборе ударного коэффициента в формулах вида (3). На основании сказанного выше можно заключить, что лишь при малых пролетах неблагоприятное действие подвижной нагрузки убывает с возрастанием пролета. Что касается мостов значительных пролетов, то здесь неблагоприятное влияние подвижной нагрузки на усилия в частях обусловлено главным образом явлением «резонанса», а вероятность этого явления не понижается с возрастанием пролета моста. Поэтому, желая при помощи формулы (3) учесть неблагоприятное действие подвижной нагрузки, нужно для величины α брать значения, быстро убывающие с возрастанием пролета. Такого рода выражение для α предложено было проф. С. К. Куницким ³⁾ и позже Г. Г. Кривошеиным ⁴⁾. Учитывая таким путем повышение усилий вследствие динамичности нагрузки, эти авторы

¹⁾ [Здесь длина l выражается в футах.] При пролетах l в метрах, как показано на рис. 1 и 2, формула имеет вид

$$J = \frac{100}{1 + \frac{l^2}{1860}}.$$

³⁾ Report of Committee XV-on iron and steel structures. Proceedings of the fifteenth annual convention of the American Railway Engineering Association. Held at the Congress Hotel, Chicago, Illinois. March 17—19, 1914, vol. 15, 1914. Chicago, published by the American Railway Engineering Association, Part 1, 1170 pp. Part 2, 393 pp. См. раздел «The theory of secondary stress calculation» (pp. 448—484). Bulletin № 163, March, p. 457.

⁴⁾ [Куницкий С. К. По вопросу о вычислении вертикальных сил и моментов от неизменно связанных грузов, движущихся по разрезной балке. Сборник Института инженеров путей сообщения. СПб., Ю. Н. Эрлих, 1888, вып. 13, 102 стр.]

⁴⁾ [Кривошейн Г. Г. Данные для расчета мостов и стропил. СПб., К. Риккер, 1910, 131 стр.]

должны были независимо от того принять во внимание и другое неблагоприятное влияние подвижной нагрузки, — возможность явления усталости железа вследствие колебания усилий. Это обстоятельство ими учитывалось путем уменьшения допускаемых напряжений для сжато-вытянутых частей. Другая группа авторов, предлагавших формулы вида (3), желая ограничиться лишь одной этой формулой, должна была так распорядиться коэффициентом α , чтобы одновременно учесть оба неблагоприятных обстоятельства и динамичность нагрузки и усталость железа. При этом α получается или медленно меняющимся, как у профессора Г. Н. Соловьева¹⁾, или даже постоянным, как в обычной формуле у Л. Ф. Николаи²⁾, и формулой (3) учитывается главным образом усталость железа, а не динамичность подвижной нагрузки.

§ 6. Предлагаемая формула для определения допускаемых напряжений

Итак, при рационально построенной формуле (3) придется отдельно считаться с усталостью железа и вводить дополнительное уменьшение напряжений для сжато-вытянутых частей³⁾.

Чтобы устранить это повторное понижение допускаемых напряжений, затрудняющее логическое обоснование входящих в формулы постоянных, и в то же время не пользоваться формулой (3) с малоизменяющимся коэффициентом α , так как при этом $1 + \alpha$ перестает играть роль ударного коэффициента, и формула (3) теряет свое обоснование, мы предлагаем поступить так: выделим пока мосты самых малых пролетов и части, подвергающиеся непосредственному действию подвижных грузов. Тогда при расчете прочих частей нам придется считаться главным образом с явлением усталости железа⁴⁾, и наиболее подходящей формулой для допускаемых напряжений будет формула (2)⁵⁾.

¹⁾ [Соловьев Г. Н. О динамическом действии подвижного груза на упругие конструкции. Сборник Института инженеров путей сообщения, СПб, Ю. Н. Эрлих, 1900, вып. 53, 48 стр.]

²⁾ Николаи Л. [Ф.] Об определении величины допускаемого напряжения для различных элементов мостовой фермы в зависимости от величины пролета и системы фермы. Журнал министерства путей сообщения, 1903, книга 7, стр. 3—20.

³⁾ В частях, которые испытывают переменные усилия одного знака, уменьшения напряжений обыкновенно не предлагалось, хотя опыты с повторными нагрузками ясно показывают, что даже при постоянном знаке повторные усилия вызывают явление усталости металла. То же замечание можно отнести к формуле (b) § 2.

⁴⁾ Динамическое действие подвижной нагрузки в этом случае выразится в колебаниях, вызываемых, главным образом, избыточными противовесами. Эти колебания достигают значительной величины в случае «резонанса». Соответствующие этим колебаниям напряжения мы будем относить к «случайным» напряжениям, которые покрываются общим запасом прочности.

⁵⁾ Такого вида формула принята во французских нормах 1891 г. [Circulaires ministérielles, № 231. 29 août 1891. Revision de la circulaire ministérielle du 9 juil-

Для надлежащего выбора постоянных a и b нужно обратиться к опытным данным, устанавливающим зависимость понижения прочности железа при повторных нагрузках от отношения N_{\min}/N_{\max} . Хотя зависимость эта и не установлена во всей полноте и вряд ли она остается неизменной для различных сортов железа, но все же можно считать, что в общем новейшие исследования по усталости железа подтверждают основные заключения А. Вёлера, и мы можем положить, что максимальное напряжение R' , которое требуется для разрушения при повторных нагрузках, связано с временным сопротивлением материала R'_0 примерно такой формулой:

$$R' = \frac{2}{3} R'_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{N_{\min}}{N_{\max}} \right). \quad (4)$$

Так как в частях мостовых ферм, благодаря местным ослаблениям и резким изменениям сечения, возможно появление значительных местных напряжений, то, чтобы избежать появления трещин в перенапряженных местах, необходимо, конечно, понижать напряжения в частях, подвергающихся переменным усилиям. При этом вполне естественно между допускаемым напряжением R при переменном усилии и напряжением R' , которое мы считаем допустимым при постоянной нагрузке, установить такую же зависимость, как между разрушающими напряжениями R' и R'_0 . Таким образом, мы переходим к известной формуле Я. Вейрауха¹⁾

$$R = \frac{2}{3} R_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{N_{\min}}{N_{\max}} \right), \quad (5)$$

let 1877 — Nouveau règlement relatif aux épreuves des ponts métalliques.— Instructions pour l'application de ce règlement. Annales des ponts et chaussées. Partie administrative Lois, décrets, arrêtés, etc. 7 Serie, 1891, tome 1, pp. 868—888. См. перевод с примечаниями Н. А. Белелюбского: Французский циркуляр о проектировании и содержании металлических мостов от 29 августа 1891 г. Журнал министерства путей сообщения, неофициальная часть, 1892, стр. 159—180; циркуляр — стр. 161—180. См. также Règlement du Ministère des travaux publics pour le calcul et les épreuves des ponts métalliques. Annales des ponts et chaussées. Partie administrative. 1915, I, Janvier — Febrier. 2 Partie, 85 Année, 9 Série, tome 5, № 30, 8 Janvier, pp. 65—117.] и в новых швейцарских нормах 1913 года [см. Постановление 1913 года о расчете и испытании металлических мостов и гражданских сооружений в Швейцарии. Журнал министерства путей сообщения, 1914, книга 10, стр. 80—97]. Соответствующая последним нормам кривая представлена на рис. 3.

¹⁾ [L a u n h a r d. Die Inanspruchnahme des Eisens. Zeitschrift des Architekten und Ingenieur — Vereins zu Hannover, 1873, Bd. 19, Heft 1, SS. 139—144. См. S. 140. W e u r a u c h J. J. Zur Vereinfachung der Berechnung durchgehender Träger. Там же, 1890, Bd. 36, Heft 2, SS. 201—206. См. стр. 7 работы W e u r a u c h J. J. Festigkeit und Dimensionberechnung der Eisen- und Stahlkonstruktionen mit Rücksicht auf die neuen Versuche. Leipzig, B. G. Teubner, 1876, 116 S. См. также стр. 43—48 этой книги, на которых представлены формулы для различных материалов. См. также реферат И. Р о з о в а «Предельные допускаемые напряжения в мостовых сооружениях». Инженер, 1904, год 23, том 28, № 8—9, стр. 304—313 статьи «The limits of working stress in bridges». The Engineer, 1903, November 20, pp. 493—494; November 27, pp. 518, 520; December 4, p. 548; December 18, pp. 588—589.]

которая отличается от общей формулы (2) лишь тем, что коэффициент b выбран равным $a/2$. (Повторим здесь, что формула (4) не представляет собой выражения какого-либо строгого закона и у разных экспериментаторов она несколько меняется в ту или иную сторону: так, например, Т. Стентон¹⁾ получил для бессемеровой стали ($R_0 = 74,7 \text{ кг/мм}^2$ и $i = 12,9\%$) выражение, совпадающее с формулой (5), а для двух сортов литого железа ($R_0 = 44,4 \text{ кг/мм}^2$ и $R_0 = 34,3 \text{ кг/мм}^2$, $i = 24,6\%$ и $i = 28,0\%$), вместо формулы (5) получил зависимость, где коэффициент $1/2$ при отношении N_{\min}/N_{\max} заменяется величиной 0,37 и соответственно множитель $2/3$ — величиной 0,73. Таким образом, получается примерно такая зависимость:

$$R = 0,73R_0 \left(1 + 0,37 \frac{N_{\min}}{N_{\max}} \right). \quad (5')$$

Если остановиться на формуле (5), то для получения окончательного значения допускаемых напряжений нужно лишь условиться относительно величины R_0 , т. е. того напряжения, которое мы считали бы допустимым при наличии лишь постоянных усилий. Величина эта, конечно, должна быть ниже предела упругости материала, ее приходится выбирать на основании примерной оценки точности расчетов. Мы полагаем, что при той точности, с которой производятся расчеты мостов и при условии принятия во внимание действия наиболее невыгодной комбинации внешних сил (как вертикальных нагрузок, так и действия ветра) эту величину можно принять равной 14 кг/мм^2 . При условии же принятия в расчет только действия вертикальной нагрузки эта величина должна быть понижена, например, до 12 кг/мм^2 ²⁾. В таком случае допускаемое напряжение для каждого стержня определится по формуле (5') с округлением постоянных так:

$$R = 9 + 3 \frac{N_{\min}}{N_{\max}}. \quad (6)$$

Обратимся теперь к мостам малых пролетов и балкам проезжей части, подвергающимся непосредственному действию подвижной нагрузки. Эти элементы мы пока выделяли для упрощения общих рассуждений при составлении формулы (6). Выбирая допускаемые напряжения для этих частей, приходится руководствоваться прежними общими соображениями и согласовывать значение этих напряжений со степенью надежности принятых методов расчета и с достоверностью тех внешних сил, которые положены в основание расчета. Что

¹⁾ [Stanton T. H. E. An alternating stress testing-machine for experiment on reversals of stress. National physical laboratory. Collected research, vol. 3, 1908, London, p. 1—12. Stanton T. H. E., Fairstow L. On the resistance of iron and steel reversals of direct stress. Там же, pp. 13—45.]

²⁾ Это соответствует примерно 60% от предела упругости для применяемого у нас теперь мостового железа.

касается расчета, то, принимая во внимание простоту задачи, степень надежности его следует считать более высокой, чем в случае элементов сквозных ферм, но зато в отношении определения внешних сил мы здесь находимся в значительно менее выгодных условиях. Мы отмечали уже ранее, что благодаря динамичности нагрузки давления колес могут значительно отличаться от статических, и это превышение давлений особенно существенно в случае весьма коротких балок, когда при расчете приходится иметь дело с одним или двумя грузами. Это заключение вполне подтверждается также и приведенными выше опытными данными. Соответствующее повышение напряжений в балке учитывается отчасти применяемым на практике методом расчета. При определении напряжений обыкновенно предполагают, что давления передаются непосредственно на балки. В действительности же, благодаря наличию рельсов и поперечин, давления эти распределяются по длине балки, что, конечно, в случае коротких балок значительно уменьшает величину изгибающего момента.

Принимая во внимание, что весьма значительные повышения напряжений могут происходить вследствие таких совершенно неучитываемых случайных причин, как неправильности бандажей, износ рельсов, удары на стыках, и имея в виду приведенные выше результаты опытов, следует быть особенно осторожным при назначении допускаемых напряжений в балках, подвергающихся непосредственному действию подвижной нагрузки. Казалось бы, что здесь не следует увлекаться экономией в материале и, может быть, нужно больше внимания уделять расчету. Например, желательно оценивать дополнительные напряжения, возникающие в местах жесткого прикрепления балок проезжей части. Эти дополнительные напряжения, вероятно, и приводят к расстройству заклепочные соединения.

При выборе напряжений для проезжей части вполне уместно обратиться к опыту, который дает нам в этом отношении практика. По нашим нормам в балках проезжей части допускается напряжение $7,5 \text{ кг/мм}^2$. Напряжение это может быть повышено до 8 кг/мм^2 в случае свободных поперечных балок. По прусским нормам (1903 г.) допускаемое напряжение в балках малых пролетов принимается равным 8 кг/мм^2 . Американская практика держится значительно более низких норм допускаемых напряжений в элементах проезжей части.

Мы полагаем, что следует остановиться на напряжении $7,5 \text{ кг/мм}^2$, которое допускается у нас в настоящее время. Тогда для балок проезжей части и для мостов малых пролетов, например до 1—30 м, можно пользоваться формулой

$$R = 7,5 + 0,05l + 3 \frac{N_{\min}}{N_{\max}} . \quad (7)$$

Здесь мы пользуемся линейной зависимостью для сопряжения формулы (6) с допускаемым напряжением $7,5 \text{ кг/мм}^2$, принимаемым

для весьма коротких балочек. Можно, конечно, воспользоваться и другой какой-либо зависимостью, например такой, чтобы было обеспечено плавное сопряжение линий диаграммы, соответствующих двум различным формулам. Применяя формулу (7) к расчету поперечных балок, придется, конечно, вместо l брать двойную длину панели. Для подвесок и дополнительных стоек, подвергающихся непосредственному действию подвижной нагрузки, допускаемые напряжения также определяются по формуле (7), за l при этом принимается длина соответствующего загружаемого участка. Заметим еще, что с явлением усталости металла нужно считаться при большом числе перемен усилия в рассчитываемой части, например в тех случаях, когда принятое при расчете колебание усилия может повторяться при прохождении каждого поезда. Если же предельные значения усилий N_{\min} и N_{\max} получаются лишь при сравнительно редко повторяющихся комбинациях нагрузок, что может, например, встретиться при расчете двупутных мостов или мостов, служащих одновременно и для железной и для шоссейной дорог, то в этом случае следует считаться лишь с ударным действием нагрузки.

Как выбранное нами значение основного допускаемого напряжения 12 кг/мм^2 , так и вид формулы (6), не могут считаться вполне обоснованными. В таком сложном и мало разработанном вопросе, как выбор допускаемых напряжений, конечно, нельзя говорить о точном решении задачи. Поэтому, предлагая какое-либо основание для выбора допускаемых напряжений, интересно сравнить получающиеся при этом результаты с существующей практикой в других странах, а также с результатами, получающимися по другим формулам. Для наглядности такого сравнения построены диаграммы рис. 3, 4 и 5, где даны значения допускаемых напряжений для поясов простых балочных мостов различных пролетов. При определении отношения $N_{\min}/N_{\max} = p/(p+q)$ я пользовался следующей таблицей, что соответствует нормам нагрузок 1907 г.

l	10	20	30	40	50	60	78	80
N_{\min}/N_{\max}	0,101	0,164	0,225	0,259	0,299	0,340	0,370	0,393
l	90	100	110	120	130	140	150	
N_{\min}/N_{\max}	0,417	0,435	0,446	0,472	0,489	0,525	0,558	

На рис. 3 дано сравнение предлагаемой формулы с формулами главнейших государств Европы и с нашей старой формулой.

В Пруссии (1903 г.) к мостовому железу применяются такие же требования, как и у нас. Основные напряжения определяются в

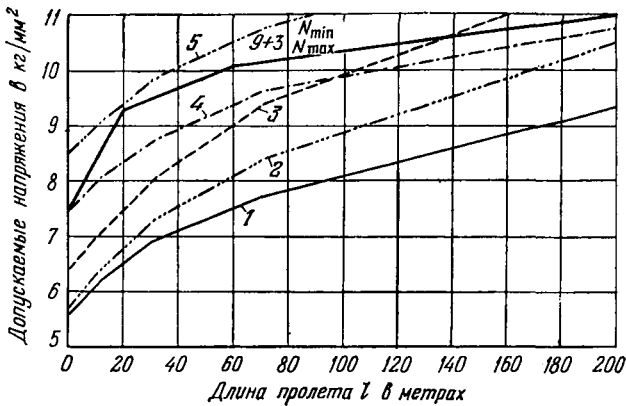


Рис. 4.

зависимости от пролета (в метрах) по следующим формулам:

$$\begin{aligned} 8 + 0,025l & \text{ при } 20 < l < 40 \text{ м,} \\ 8,5 + 0,0125l & \text{ при } 40 < l < 200 \text{ м,} \\ 11 \text{ кг/мм}^2 & \text{ при } l > 200 \text{ м.} \end{aligned}$$

В Австрии основные допускаемые напряжения определяются такими формулами:

$$\begin{aligned} 7,5 + 0,05l & \text{ при } l < 10 \text{ м,} \\ 7,6 + 0,04l & \text{ при } 10 < l < 20 \text{ м,} \\ 8 + 0,02l & \text{ при } 20 < l < 40 \text{ м,} \\ 8,4 + 0,01l & \text{ при } 40 < l < 160 \text{ м,} \\ 10 \text{ кг/мм}^2 & \text{ при } l \geq 160 \text{ м.} \end{aligned}$$

Новые швейцарские нормы (1913 г.) берут в основание формулу вида (2) и вычисляют допускаемые напряжения так:

$$R = 9 + 2 \frac{N_{\min}}{N_{\max}}.$$

Чтобы учесть влияние динамической нагрузки в случае малых пролетов и при расчете балок проезжей части, повышают усилия от подвижной нагрузки для мостов с пролетом, меньшим 15 м, на $2 \cdot (15 - l)\%$. Мостовое железо по новым нормам должно иметь временное сопротивление от 36 до 47 кг/мм². Таким образом,

допускаемое напряжение, как видно из рис. 3, получается несколько более низким, чем по предлагаемой формуле.

Новые французские нормы (1915 г.)¹⁾, наоборот, допускают более высокие напряжения, чем то следует из предлагаемой нами формулы. Обозначая через C напряжения от статической нагрузки и через

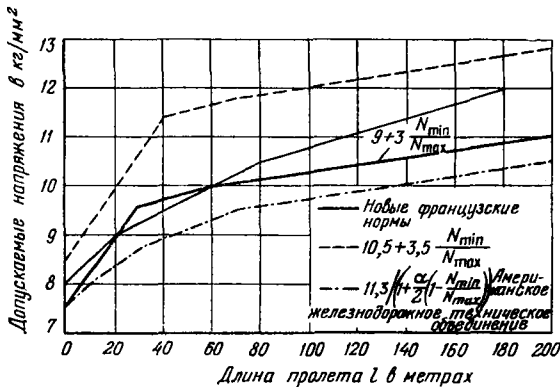


Рис. 5.

d — напряжения, вызываемые подвижной нагрузкой, определяем, согласно французским нормам, допускаемое напряжение из условия

$$C + (1 + \alpha) d \leq R_0,$$

причем

$$R_0 = 13 \text{ кг/мм}^2.$$

Ударный коэффициент $1 + \alpha$ поставлен в связь с отношением c/d и определяется по формуле

$$1 + \alpha = 1,625 - 0,35 \frac{c}{d},$$

которой пользуются, пока $c < 0,625$, $d < 0,35$.

Допускаемое напряжение не должно превосходить (при действии вертикальных нагрузок) 12 кг/мм^2 .

Легко показать, что допускаемое напряжение, соответствующее французским нормам, может быть представлено в таком виде:

$$R = \frac{8}{1 - 0,6 \frac{c}{c+d}}$$

и меняется в пределах от 8 кг/мм^2 до 12 кг/мм^2 .

¹⁾ См. ссылку, указанную в сноске ¹⁾ на стр. 389.

Из диаграммы видно, что эти напряжения превосходят те, которые нам дает формула (6) ¹⁾.

На рис. 4 представлено сравнение предлагаемой формулы с формулами главнейших американских железнодорожных линий. При этом ударный коэффициент определялся по приведенной ранее формуле

$$1 + \alpha = 1 + \frac{91,5}{l + 91,5},$$

где l — пролет в метрах. Коэффициент $\alpha/2$ вставлен в формулы, относящиеся к линиям второстепенного значения.

В отношении допускаемых напряжений в поясах формула (6) весьма близка к тому, что получается по нормам Американского железнодорожного технического объединения (American Railway Engineering Association) для железных дорог второстепенного значения. В решетке напряжения, определяемые по формуле (6), вообще будут получаться ниже, чем по американским нормам, не считаясь с явлением усталости материала.

На рис. 5 напряжения, определяемые по формуле (6), и напряжения, соответствующие только что упомянутой американской формуле, сравниваются с напряжениями, которые можно было бы допустить для материала повышенного качества, если принять допускаемое напряжение при действии только вертикальной нагрузки равным 14 кг/мм^2 . Тогда для пролетов, меньших 40 м , будем иметь

$$R = 8,5 + 0,05l + 3,5 \frac{N_{\min}}{N_{\max}}.$$

Для больших пролетов

$$R = 10,5 + 3,5 \frac{N_{\min}}{N_{\max}} \text{ кг/мм}^2.$$

Чтобы покончить с допускаемыми напряжениями, нужно условиться относительно касательных напряжений R_t . В настоящее время принято допускаемые касательные напряжения определять по формуле

$$R_t = 0,75 R. \quad (8)$$

Это соотношение между R_t и R соответствует примерно соотношению между временными сопротивлениями при срезе и при разрыве ²⁾. Применение соотношения (8) мы считали бы вполне уместным

¹⁾ Интересно отметить, что во время пересмотра норм предлагалась также и линейная формула вида $R = (8 + l/30) \text{ кг/мм}^2$, но после подробного рассмотрения эта формула была отвергнута.

²⁾ Если осуществить срез в чистом виде, например, получить разрушение от срезающих напряжений круглой трубки, подвергающейся скручиванию, то для такого материала как железо, получим разрушающее напряжение при срезе равным примерно половине временного сопротивления при растяжении.

лишь в том случае, если бы разрушение балок в действительности происходило или от срезания по площадкам с наибольшими касательными напряжениями, или от разрыва по площадкам с наибольшими растягивающими напряжениями. Опыты, однако, показывают, что даже в лабораторной обстановке нельзя получить разрушений балки от среза или разрыва по площадкам наибольших напряжений. При статическом испытании разрушение балки является обыкновенно следствием недостатка устойчивости стенки или сжатого пояса балки. При повторных нагрузках причиной разрушения явится усталость металла, с которой нужно считаться в точках с большими «местными напряжениями». Устойчивость конструкции и возможность явления усталости металла нужно рассмотреть в первую очередь при оценке прочности балки.

Формулы для проверки элементов балки на устойчивость будут приведены ниже, что же касается явлений усталости, то в случае сдвигающих напряжений его нужно связывать с величиной предела упругости при сдвиге, а не временного сопротивления при срезе. Предел упругости при сдвиге составляет примерно половину от предела упругости при разрыве. Поэтому, имея в виду возможность явления усталости, следует допускаяемые напряжения R_t брать близкими к $0,5 R$. Таким образом, прежняя практика расчета, когда бралось соотношение

$$R_t = 0,6 R, \quad (9)$$

кажется нам более обоснованной. Считаясь с этим и с устойчивостью вертикальной стенки балки, мы полагаем, что касательное напряжение в стенке не следует брать бóльшим 5 кг/мм^2 .

§ 7. О допускаемых напряжениях при совместном действии вертикальных нагрузок и ветра

Исходя из того соображения, что совпадение максимальной вертикальной нагрузки с максимальным давлением ветра представляет собой редкий случай, обыкновенно допускают при совместном действии вертикальной нагрузки и ветра повышенные напряжения. По нашим нормам напряжения эти определяются формулой

$$R_1 = (7,5 + 0,04l) \text{ кг/мм}^2, \quad (10)$$

но во всяком случае R_1 не должно превосходить $12,5 \text{ кг/мм}^2$.

Сравнивая формулы (1) и (10), находим, что разность $R_1 - R$, равная нулю при $l=0$, постепенно возрастает с увеличением пролета и достигает максимальной величины $2,5 \text{ кг/мм}^2$, составляющей 25% от R_1 при $l=125 \text{ м}$. Дальше, благодаря установлению высшего предела для R_1 , начинается убывание $R_1 - R$ и при $l=150 \text{ м}$ эта разность получает значение 2 кг/мм^2 , т. е. около 20% от R . Значение это при дальнейшем увеличении пролета остается неизменным.

Если бы ветровые связи работали лишь при действии ветра, то за допускаемое напряжение следовало бы выбрать постоянную величину 14 кг/мм^2 , на которой мы остановились при составлении основной формулы (6). В действительности в связях возникают усилия от целого ряда других причин: от вертикальных сил, от ударов подвижной нагрузки в горизонтальном направлении (эти удары должны иметь особенно существенное значение в мостах малых пролетов), от колебаний моста в горизонтальной плоскости. Колебания эти могут быть особенно опасными в случае мостов больших пролетов, когда ширина моста мала по сравнению с пролетом и жесткость моста в боковом направлении мала по сравнению с жесткостью в вертикальной плоскости. Исходя из этих соображений, приходится от постоянных значений для R_1 отказаться и перейти к переменным значениям, меняющимся в зависимости от пролета и условий работы частей. Для получения R_1 иногда прибавляют к величине основного напряжения R некоторую постоянную величину (например, в швейцарских нормах принимается $R_1 = (R + 1) \text{ кг/мм}^2$, в прусских нормах $R_1 = (R + 1,5) \text{ кг/мм}^2$). Мы полагаем более правильным для получения R_1 увеличить напряжение R , найденное по формуле (6), в определенном процентном отношении. Основываясь на существующих нормах, считаем возможным допустить в поясах ферм при совместном действии вертикальной нагрузки и ветра напряжения R_1 , превосходящие напряжения R на 25% ¹⁾. Наибольшее значение R_1 , получаемое таким образом для элементов поясов, принимаем за допускаемое напряжение и для ветровых связей. Отметим здесь желательность учета работы связей от вертикальных нагрузок, так как есть основание думать, что в мостах больших пролетов сравнительно малой ширины, благодаря боковым колебаниям, ветровые связи испытывают весьма большие динамические напряжения.

§ 8. Проверка элементов мостовых ферм на устойчивость

Для обеспечения прочности рассчитываемого элемента мостовой фермы недостаточно выбрать для него такое допускаемое напряжение, чтобы не получалось остаточных деформаций или явления усталости, нужны еще дополнительные исследования относительно устойчивости той формы равновесия, которая положена в основание расчета рассматриваемого элемента; только при достаточном запасе в отношении устойчивости этот элемент будет представлять прочную составную часть всего сооружения.

В настоящее время проверка отдельных элементов на устойчивость сводится обыкновенно к применению формул продольного из-

¹⁾ Такое повышение напряжений на 25% практикуется американскими инженерами. См. American Railway Engineering Association. General specifications for steel railway bridges. Chicago, 1910, 30 p.

гиба, полученных для случая сжатия цельных стержней. В действительности мы встречаемся с целым рядом более сложных вопросов устойчивости. В случае продольного изгиба часто приходится иметь дело с составными клепаными стержнями и нужно решать вопрос о степени надежности соединительных решеток или планок. Нередко встречаются случаи продольного изгиба многопролетных стержней и стержней, лежащих на упругих опорах. Кроме устойчивости сжатых стержней, приходится иногда выяснять устойчивость листов, испытывающих значительные сжимающие или сдвигающие напряжения. В таких условиях находятся, например, листы сжатых коробчатых, трубчатых и тавровых мостовых поясов, листы вертикальной стенки двутавровых балок и т. д. Устойчивость этих листов обеспечивается при помощи уголков жесткости или путем устройства диафрагм, причем эти подкрепления располагаются обыкновенно без всякого расчета или же на основании каких-либо эмпирических формул. Некоторые из перечисленных задач имеют в настоящее время теоретическое решение, и мы считаем своевременным внести эти решения в практику технических расчетов. Повышая таким образом степень надежности наших расчетов, мы сможем в дальнейшем перейти в некоторых случаях к более высоким нормам допускаемых напряжений. Так, например, при условии подробного выяснения устойчивости отдельных частей сжатого составного стержня можно при расчете всего стержня на продольный изгиб несколько понизить коэффициент безопасности.

§ 9. Проверка сжатых стержней на продольный изгиб

При проверке стержней на продольный изгиб мы будем пользоваться таблицей ломающих напряжений, составленной по опытам Л. Тетмайера. Полагая, что критические напряжения при сжатии соответствуют временному сопротивлению материала при простом растяжении, мы выберем допускаемое напряжение при сжатии во столько раз меньшим критического напряжения, во сколько раз допускаемое напряжение при растяжении меньше временного сопротивления разрыву. При выводе основной формулы (6) предположено, что при действии постоянных усилий допускаемое напряжение может быть принято равным 12 кг/мм^2 . Временное сопротивление мостового железа по принятым нормам колеблется от 37 до 42 кг/мм^2 , следовательно, запас прочности при постоянном растягивающем усилии меняется от 3,08 до 3,50. Если мы остановимся на наибольшем коэффициенте безопасности 3,5 и примем его в основание расчета стержней на продольный изгиб, то тогда допускаемое напряжение R_l при сжатии получится делением критического напряжения $R_{кр}$ на 3,5 и мы будем иметь

$$R_l = \frac{R_{кр}}{3,5}. \quad (11)$$

Для сравнения в нижеследующей таблице приводим несколько значений R_l , вычисленных: 1) по формуле (11); 2) по новым швейцарским нормам; 3) при помощи коэффициента уменьшения ϕ , определяемого по формуле Шварца — Ренкина; 4) при помощи коэффициента ϕ , определяемого по формуле $\phi = R_{кр}/37$. Для последних двух случаев основное напряжение принято равным $10,5 \text{ кг/мм}^2$.

Т а б л и ц а

		l/i	40	70	100	120
$R_l, \text{ кг/мм}^2$	По формуле (11)		7,97	6,71	5,52	4,23
	По швейцарским нормам 1913 г.		8,00	6,50	5,50	3,82
	$R_l = 10,5 \frac{1}{1 + 0,00008 \left(\frac{l}{i}\right)^2}$		9,30	7,55	5,83	4,88
	$R_l = 10,5 \frac{R_{кр}}{37}$		7,95	6,67	5,40	4,20
	Американская формула ¹					
$R_l = 1130 - 4,93 \frac{l}{i}$		9,33	7,86	6,37	—	

¹ См. American Railway Engineering Association. General specifications for steel railway bridges. Chicago, 1910, 30 p. Иногда в Америке применяют формулу Шварца — Ренкина в таком виде (см. Se e m a n H. B. Specifications for the design of bridges and subways. Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1912, vol. 75, December, Paper № 1223, pp. 313—352. См. на стр. 338 таблицу 1X): $R_l = \frac{R_0}{1 + \frac{1}{8000} \left(\frac{l}{i}\right)^2}$. [См.

также R a n k i n e W. J. M. A manual of civil engineering. 3 edition. London, C. Griffin and Co., 1864, 783 p. Перевод на русский язык: Ренкин У. Д. М. Руководство для инженеров-строителей. СПб, тип. Готенфельдена и комп., 1870, 855 стр. S c h w a r z F. Beitrag zur Theorie der Blech- und Gitterbalken. Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur Vereins für das königreich Hannover, 1858, Bd. 4, Heft 1, S.S. 61—97.]

Напряжения R_l , приведенные в 1-й и 4-й строчках таблицы, почти совпадают. Напряжения R_l , вычисляемые по формуле Шварца — Ренкина, несколько больше того, что дает формула (11). Напряжения, приведенные в последней строчке, соответствуют примерно тому, что дает формула Тетмайера — Ясинского при коэффициенте безопасности, равном 3. И, наконец, швейцарские нормы при больших значениях отношения l/i дают для R_l значения, меньшие того, что получается по формуле (11).

При расчетах радиус инерции сечения i определяется по формуле

$$i = \sqrt{J_{брутто}/F_{брутто}} \tag{12}$$

l — теоретическая длина рассчитываемого элемента (неподвижность концов элемента в рассматриваемой плоскости изгиба должна быть обеспечена устройством системы). В тех случаях, когда жесткость закрепления концов стержня надлежащим образом учтена, допускается соответствующее уменьшение расчетной длины l .

Теоретические исследования показывают, что местные ослабления стержня заклепочными отверстиями оказывают ничтожное влияние на величину критических напряжений, поэтому расчетная формула при проверке стержня на продольный изгиб напишется так:

$$R_l \geq \frac{S}{F_{\text{брутто}}} \cdot \quad (13)$$

Все предыдущие расчеты относятся к случаю целого стержня, но ими можно пользоваться и при составных стержнях, части которых связаны соединительными решетками в неизменяемую систему¹⁾.

В случае стержней, соединенных только планками, напряжение R_l , определяемое по формуле (11), должно быть уменьшено умножением его на коэффициент²⁾

$$\varphi = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 J_0 ab}{12 J_2 l^2} + \frac{\pi^2 J_0 a^2}{24 J_1 l^2}} \cdot \quad (14)$$

Здесь a — расстояние между планками; l — длина планок; J_0 — момент инерции всего поперечного сечения стержня; J_1 — момент инерции одного из поясов составного стержня; J_2 — момент инерции поперечного сечения соединительной планки.

В случае многопролетных стержней приведенная длина должна быть найдена предварительным расчетом³⁾.

При проверке на устойчивость сжатых поясов открытых мостов упругие стойки могут быть заменены эквивалентной упругой средой. Приведенная длина вычисляется при этом по исправленной таблице Ф. С. Ясинского⁴⁾.

¹⁾ Данные относительно выбора надлежащих размеров решетки имеются в статье: В и н о г р а д о в Н. П. О расчете сжатых решетчатых стержней. Вестник общества технологов, 1914, т. 21, № 8, 15 апреля, стр. 301—310; № 10, 15 мая, стр. 407—414; № 23, 1 декабря, стр. 857—865; № 24, 15 декабря, стр. 888—893.

²⁾ См. стр. 457 нашего «Курса сопротивления материалов». 2 изд. Киев, Л. Идзиковский, 1913, стр. 474.

³⁾ Общий ход расчета см. на стр. 114 моего курса теории упругости, указанно в сноске²⁾ на стр. 398.

⁴⁾ См. стр. 142 моего курса, указанного в сноске²⁾ на стр. 398. Таблица для случая пояса, жесткость которого меняется по параболическому закону, составлена инженером В. Вержбицким.

§ 10. Проверка на устойчивость пластинок

Железные листы, находящиеся под действием сил, лежащих в плоскости листа, могут оказаться при известном критическом значении этих сил в таком же неустойчивом состоянии, как и сжатый стержень. С этим явлением нередко приходится считаться на практике; из соображений устойчивости часто увеличивают, например, толщину стенок двутавровых балок и подкрепляют эти стенки уголками жесткости. При выборе толщин листов и при распределении подкреплений полезно руководствоваться теоретическими решениями, полученными для нескольких частных случаев.

а) *Длинная прямоугольная пластинка с опертыми краями, сжатая в направлении длины*, перестает быть устойчивой и выпучивается, когда сжимающие напряжения достигают предела:

$$R_{кр} = 8 \cdot 10^4 \left(\frac{\delta}{h} \right)^2 \text{ кг/мм}^2. \quad (15)$$

Числовой множитель в этой формуле выбран для случая железных листов, через δ обозначена толщина листа и через h — его ширина. Следовательно, при отношении $\delta : h = 0,01$ критическое напряжение равно 8 кг/мм^2 . Если сжатый лист составляет лишь одну из составных частей сжатого элемента, то при переходе сжимающихся напряжений за критическое значение еще не получится разрушения всего элемента, как это бывает при продольном изгибе стержней. Потерявший устойчивость сжатый лист выпучивается, перестает принимать на себя дальнейшую нагрузку и потом повышение сжимающих усилий будет восприниматься лишь более жесткими частями сжатого элемента. В подобных случаях нет надобности при назначении толщины листа брать такой же запас прочности, как в случае продольного изгиба. Приравнивая в этом случае критическое напряжение пределу текучести при простом растяжении железа, мы могли бы здесь ограничиться лишь двойным запасом прочности. На основании формулы (15) можно заключить в таком случае, что сжатые листы с опертыми краями следует проверять лишь тогда, когда $h : \delta > 60$.

При меньшем значении того отношения критические напряжения получаются по формуле (15) большими предела текучести железа¹⁾.

б) *Одна из продольных сторон сжатой прямоугольной пластинки свободна и остальные стороны оперты; критические напряжения получаются гораздо меньшими, чем в предыдущем случае, их можно*

¹⁾ Когда длину пластинки нельзя считать большой по сравнению с шириной, критические напряжения определяются по формуле, аналогичной формуле (15), но числовой множитель этой формулы меняется в зависимости от соотношения между сторонами пластинки. См. стр. 323 моего курса, указанного в сноске²⁾ на стр. 398.

вычислить по формуле

$$R_{кр} = 10^4 \left(\frac{\delta}{h} \right)^2 \text{ кг/мм}^2. \quad (16)$$

В подобных условиях, например, будет находиться сжатый вертикальный лист таврового мостового пояса, если нижний край этого листа не подкреплен уголком жесткости, или неподкрепленные полки горизонтальных листов. Формула (16) позволяет заключить, что с устойчивостью листов в данном случае можно не считаться, если $h : \delta < 22$, так как при этом критические напряжения превышают предел текучести материала.

с) *Продольная сторона листа, которую мы предполагали опертой, в действительности заделана* и соответствующий край листа не может поворачиваться при выпучивании, что увеличивает устойчивость листа, и мы получим для критических напряжений значение

$$R_{кр} = 2,5 \cdot 10^4 \left(\frac{\delta}{h} \right)^2 \text{ кг/мм}^2. \quad (17)$$

При таком условии с устойчивостью листа можно не считаться, если только $h : \delta < 35$. При больших значениях отношения h/δ нужно пользоваться формулой (17), при этом можно в силу высказанных выше соображений ограничиваться двойным запасом прочности.

д) *Для длинной прямоугольной пластинки с опертыми краями, подвергающейся действию сдвигающих напряжений*, величина критических напряжений определится формулой

$$R_{кр} = 12 \cdot 10^4 \left(\frac{\delta}{h} \right)^2 \text{ кг/мм}^2. \quad (18)$$

Полагая, что предел текучести железа при сдвиге равен примерно половине текучести при растяжении, заключаем на основании (18), что $R_{кр}$ превосходит предел текучести при $h : \delta < 100$.

Этим заключением можно воспользоваться при выяснении вопроса о расположении уголков жесткости, подкрепляющих вертикальную стенку высоких двутавровых балок. Предполагая расстояние между уголками жесткости меньшим высоты стенки и применяя формулу (18), заключаем, что с вопросом устойчивости стенки можно не считаться, если расстояние между уголками жесткости не превосходит 100δ . В противном случае достаточный запас устойчивости должен быть оправдан при помощи формулы (18) ¹⁾.

е) *Прямоугольная пластинка с опертыми краями, испытывающая чистый изгиб в своей плоскости*, теряет свою устойчивость, когда максимальные напряжения от изгиба превосходят критическое

¹⁾ Подробная таблица для расчета пластинок на устойчивость при сдвигающих напряжениях приведена на стр. 339 моего курса, указанного в сноске ²⁾ на стр. 398. [С. П. Тимошенко. Курс теории упругости. Киев. Изд-во «Наукова думка», 1972, 508 стр. См. стр. 441.]

значение, определяемое формулой

$$R_{кр} = 48 \cdot 10^4 \left(\frac{\delta}{h} \right)^2 \text{ кг/мм}^2. \quad (19)$$

Это напряжение получается большим предела текучести железа при h : $\delta < 140$.

На основании этого можно заключить, что устойчивость стенки двутавровой балки в месте наибольшего изгибающего момента будет наверное обеспечена, если толщина стенки не меньше 1/140 высоты стенки. При меньших значениях толщины надлежащий запас устойчивости должен быть оправдан расчетом.

г) *Устойчивость сжатого пояса двутавровой балки и общая устойчивость двутавровых балок при выбранной системе связей должна быть проверена при помощи таблиц¹⁾, составленных для оценки устойчивости плоской формы изгиба двутавровых балок.*

Заключение

Заканчивая этим нашу заметку относительно допускаемых напряжений, отметим здесь, что рациональное развитие норм допускаемых напряжений станет возможным лишь в том случае, если, кроме теоретических расчетных формул, будет иметься еще достаточное количество экспериментального материала. В настоящее время при выработке норм теоретические соображения обыкновенно преобладают вследствие недостаточности опытного материала. Для дальнейшего развития мостового дела необходима самая широкая постановка опытных исследований, и эти исследования должны вестись в двух направлениях: нужны работы лабораторного характера, а также наблюдения и опыты над готовыми сооружениями.

Лаборатории должны заняться не только исследованием прочности материалов, но и вопросами прочности конструкций, моделей сооружений и т. д. В первую очередь мы считаем крайне необходимым поставить такие исследования:

- 1) изучение усталости железа в связи с местными напряжениями, обусловленными резкими изменениями поперечных сечений;
- 2) изучение явлений продольного изгиба в случае составных стержней и в случае стержней из материалов повышенного качества;
- 3) изучение устойчивости двутавровых балок и выбор надлежащих размеров для уголков жесткости;
- 4) исследование прочности заклепочных соединений;
- 5) исследование жесткости закрепления концов двутавровых балок в различных частных случаях.

¹⁾ См. § 29 (стр. 152—162) указанного в сноске²⁾ на стр. 398 курса [С. П. Тимошенко. Курс теории упругости. Киев. Изд-во «Наукова думка», 1972, 508 стр. См. стр. 297—304.]

С увеличением пролетов мостов выступит на очередь вопрос огромной практической важности о повышении прочности материалов, применяемых в мостах, и о соответствующем повышении норм допускаемых напряжений. Надлежащий ответ в данном случае может быть получен лишь на основании опытного изучения вопроса, и такие опыты уже ведутся в некоторых странах ¹⁾. Изучение прочности материала в данном случае еще недостаточно, нужно изучить прочность заклепочных соединений из материала повышенного качества, прочность материала при повторных нагрузках в особенности при наличии местных ослаблений и прочность материала в отношении продольного изгиба. Нужно ожидать, что повышение прочности материала увеличит область применения тонких стержней и листов, а вместе с тем приобретут большое практическое значение вопросы устойчивости металлических конструкций.

Кроме лабораторных исследований, желательно производить измерения деформаций и напряжений на существующих мостах: только этим путем можно установить, насколько наши расчетные напряжения соответствуют действительности, и таким путем выяснить степень надежности наших расчетов. Опытным путем следует изучить также вопрос о колебаниях мостов под действием подвижной нагрузки. Особый интерес здесь представляют боковые колебания. Так как при этом придется иметь дело с большими перемещениями, то записывание колебаний, определение их амплитуды и периода не представит особых затруднений. Без особых затруднений могут быть исследованы также деформации балок проезжей части под действием подвижной нагрузки.

¹⁾ [Mayer R., Die Knickfestigkeit. Berlin, Verlag Julius Springer, 1921, 500 S., См. SS. 407—497 (§§ 62—64). См. также следующие публикации: Nickel-steel eye-bars. Engineering Record, 1909, vol. 59, № 23, June 5, pp. 701—702. Test on nickel steel compression models for the new Quebec bridge; Engineering Record, 1910, vol. 62, № 20, November 19, p. 561; Tests of nickel-steel models of compression members in the official design of new Quebec bridge. Engineering Record, 1910, vol. 62, № 20, November 19, pp. 564—568. The St. Louis Municipal bridge superstructure. Engineering Record, 1910, vol. 62, № 23, December 3, pp. 641—643. Skinner F. W., The reconstruction of the Quebec bridge. Engineering, 1911, vol. 91, March 24, pp. 369—374; Test of model chords made for the Quebec bridge. Engineer, 1911, March 24, pp. 291—292. Tests of nickelsteel details for the board of engineers Quebec bridge. Engineering News, 1911, vol. 65, № 18, May 4, pp. 526—531; В о h н y F., Versuche mit Druckstäben aus Nickelstahl. Stahl und Eisen, 1911, Jahrgang 31, II Halbjahr, Heft 32. August 10, SS. 1287—1292; Knickversuche mit gegliederten Druckstäben aus Nickelstahl. Der Eisenbau, 1911, Jahrgang 2, № 8, August, SS. 309—313; Wk. Vorläufer neuzeitlicher Betontechnik. Zentralblatt der Bauverwaltung, 1911, Jahrgang 31, № 5, SS. 30—31; Schaller L. Die Tetmajer — Krohnschen Knickformeln und Knickformeln für Nickelstahl — Stäbe. Der Eisenbau, 1912, Jahrgang 3, № 5, May, SS. 172—181; Test of model bridge members. Engineering Record, vol. 69, № 12, 1914, March 21, p. 322; Ultimate strength of carbon and nickel-steel models of Quebec Bridge members. Engineering Record, 1914, vol. 69, No. 12, March 21, pp. 335—336; vol. 70, № 20; November 14, pp. 541—543.]

Отметим также, что случаи повреждений и крушения мостов должны подвергаться подробнейшему изучению, так как выяснение ближайших причин разрушения может быть весьма полезно при дальнейшей разработке норм допускаемых напряжений и при выработке условий на приемку материалов.

В настоящее время в связи с предположениями относительно расширения нашей железнодорожной сети казалось бы своевременным объединить все производящиеся испытания мостов в одном центре, создать организацию, которая имела бы достаточное число опытных экспериментаторов и располагала бы достаточными средствами для широкой постановки опытов по исследованию мостов и для организации лабораторного изучения прочности различных мостовых конструкций. Только таким путем можно накопить нужный материал для решения разнообразных вопросов прочности и устойчивости инженерных сооружений и создать прочные основания для выработки норм допускаемых напряжений для различных типов инженерных сооружений.

РАСЧЕТ УПРУГИХ АРОК

Calcul des arcs élastiques. Librairie Polytechnique. Ch. Béranger, Editeur. Paris, 1922, 71 pp. Перевод на русский язык А. П. Даниловского: С. П. Тимошенко. Расчет упругих арок. Л.— М., Гостройиздат, 1933, 124 стр.

Предисловие

Чтобы судить о степени приближения различных упрощенных формул и обычно применяемых методов расчета арок, мы выполнили расчеты для многих частных случаев арок, положив в основу гипотезу плоских сечений Бернулли.

В первой главе на основании этой гипотезы выведены формулы, определяющие напряжения и деформации кривого бруса. Эти формулы приведены в полном виде для того, чтобы можно было определить погрешности, получаемые при их применении в упрощенной форме.

Во второй главе рассматривается случай двухшарнирной арки. С помощью общих формул, определяющих деформации в частных случаях круговых и параболических арок, устанавливается зависимость между распором, с одной стороны, и нормальной силой, поперечной силой и совокупностью дополнительных членов, зависящих от кривизны продольной оси арки, с другой. Таким образом, выясняется, что наиболее важные поправки зависят от нормальной силы, в особенности же для очень пологих арок значительной толщины. Полученные численные результаты позволяют до известной степени оценить влияние на величину усилий изменения температуры и укорочения продольной оси арки.

Следующие главы посвящены аркам с заделанными пятнами. Детальное изучение многих частных случаев дает возможность определить влияние различных упрощений, применяемых в расчетах, на величину искомых неизвестных. Таким образом, мы устанавливаем, что влияние поправочных членов особенно важно для арок очень пологих значительной толщины и тех арок, продольная ось которых близко совпадает с веревочной кривой от данной нагрузки. Те же примеры служат нам для выяснения зависимости между изменением температуры и вызываемыми ими усилиями. Эти усилия в значительной степени зависят от соотношения между толщиной арки и ее пролетом. Так как очень пологие арки большой толщины подвергаются при изменениях температуры значительным

дополнительным напряжениям, то их заменяют трехшарнирными арками.

Вопрос о наиболее выгодной форме арок решается при детальном изучении случаев работы арок, у которых продольная ось арки совпадает с веревочной кривой для действующей на нее нагрузки. Оказывается, что смещения кривой давления в ключе и пятах подобной арки зависят прежде всего от соотношения, существующего между толщиной арки и ее пролетом. Эти смещения достигают максимальной величины в пятах, и здесь-то и нужно в момент раскружаливания опасаться перенапряжений.

Полученные нами числовые результаты позволяют приблизительно определить усилия, вызванные в подобных арках постоянной нагрузкой. В дальнейшем, рассматривая арки, ось которых немного отклоняется от веревочной кривой, мы устанавливаем следующее: когда продольная ось арки выходит за веревочную кривую по направлению к внешней стороне арки, то появляется возможность уменьшить изгибающий момент у пят за счет увеличения момента в ключе.

В этом заключается намеченный нами путь определения рациональной формы арок.

В предпоследней главе мы применяем приближенный расчет по формуле Симпсона и на примерах показываем, до какого числа десятичных знаков следует вести расчет и на сколько клиньев надо расчленять арку для того, чтобы иметь приближение, достаточное для практических целей. В заключение мы приводим несколько практических выводов из выполненных расчетов.

ГЛАВА I

НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ КРИВЫХ БРУСЬЕВ

§ 1. Общие положения

Задачу об изгибе кривых брусьев мы ограничим лишь тем случаем, когда ось бруса представляет собой плоскую кривую, в плоскости которой находится одна из главных осей инерции поперечного сечения. Если все внешние силы, действующие на брус, расположены в той же плоскости, продольная ось бруса после деформации останется плоской кривой.

На рис. 1 представлен кривой брус $ABCD$, находящийся под действием сил P_1, P_2, \dots, P_n , расположенных в плоскости продольной оси бруса.

Произвольным поперечным сечением mn мысленно рас截ем брус на две части и рассмотрим левую отсеченную часть бруса $ABmn$. Действие на нее правой отсеченной части может быть заменено моментом M , представляющим изгибающий момент в рас-

смаатриваемом сечении, нормальной силой N и поперечной силой Q . Относительно знаков для M , N и Q мы примем следующее условие: изгибающий момент будем считать положительным, если он стремится уменьшить первоначальную кривизну бруса. Положи-

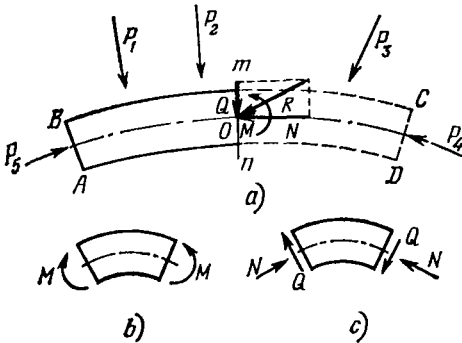


Рис. 1.

Материал бруса будем предполагать однородным, упругим и подчиняющимся закону Гука.

§ 2. Определение напряжений

При определении напряжений, возникающих при деформации кривого бруса, мы рассмотрим отдельно напряжения, возникающие в сечении под действием изгибающего момента, нормальной и поперечной сил. Полные напряжения мы получим затем, суммируя напряжения, вызываемые этими отдельными факторами.

При определении напряжений, вызываемых действием изгибающего момента, будем исходить из гипотезы плоских сечений Бернулли. На рис. 2 представлен элемент бруса, выделенный двумя бесконечно близкими друг от друга поперечными сечениями, с бесконечно малым углом между ними $d\varphi$. Под действием моментов M сечение cd повернется относительно сечения ab на угол $\delta d\varphi$. Продольное волокно pq , расположенное на расстоянии z от нейтрального слоя mn , укоротится на величину

$$qq_1 = z\delta d\varphi.$$

Первоначальная длина волокна pq равна $(r+z)d\varphi$. Относительное сжатие волокна pq выразится следующей формулой:

$$\epsilon = \frac{qq_1}{pq} = \frac{z\delta d\varphi}{(r+z)d\varphi}.$$

Соответствующее ему нормальное напряжение, согласно закону Гука, будет ¹⁾

$$\sigma = E \frac{z \delta d\varphi}{(r+z) d\varphi}. \quad (a)$$

Для определения двух неизвестных r и $\frac{\delta d\varphi}{d\varphi}$ мы можем составить два уравнения статики. Так как все усилия, распределенные по сечению, уравниваются моментом M , то сумма их должна равняться нулю, а момент их относительно нейтральной оси равняется M . Следовательно,

$$\int_F \sigma dF = E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \int_F \frac{z}{r+z} dF = 0, \quad (b)$$

$$\int_F \sigma z dF = E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \int_F \frac{z^2}{r+z} dF = M. \quad (c)$$

Заметим, что

$$\int_F \frac{z^2 dF}{r+z} = \int_F z dF - r \int_F \frac{z}{r+z} dF,$$

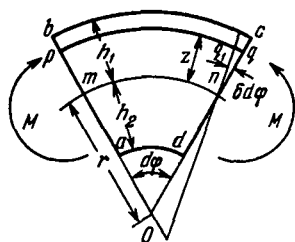


Рис. 2.

второй интеграл равен нулю на основании уравнения (b), и мы поэтому можем положить

$$\int_F \frac{z^2 dF}{r+z} = \int_F z dF = S = F\gamma, \quad (d)$$

где S — статический момент поперечного сечения относительно нейтральной оси. Эта величина может быть получена как произведение площади поперечного сечения F бруса на расстояние γ центра тяжести сечения от нейтральной оси. Подставляя полученный результат в формулу (c), получим

$$E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{S}, \quad (1)$$

и формула (a) нормальных напряжений переписется так:

$$\sigma = \frac{M}{S} \frac{z}{r+z}. \quad (2)$$

¹⁾ При расчете арок условимся сжимающие усилия считать положительными, а растягивающие — отрицательными.

Для максимальных сжимающих и растягивающих напряжений мы будем иметь формулы

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M}{S} \frac{h_1}{r+h_1}, \\ \sigma_{\min} &= -\frac{M}{S} \frac{h_2}{r-h_2}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где h_1 и h_2 означают расстояния от нейтрального слоя до наиболее сжатых и растянутых волокон. Из выведенных формул видно, что закон распределения нормальных напряжений тем менее уклоняется от линейного закона, чем высота h сечения будет меньше по сравнению с радиусом r . При достаточно малом h возможно пренебречь z в знаменателях формулы (d), (2) и полагать

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{r} \int_F z^2 dF = \frac{I}{r}, \\ \sigma &= \frac{Mz}{Sr} = \frac{Mz}{I}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где I — момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси. Таким образом, мы приходим к известному выражению распределения нормальных напряжений при изгибе прямого бруса.

Для нахождения неизвестных $S = \gamma F$ и r в формулах (3) обратимся к условию (b)

$$\int_F \frac{z dF}{r+z} = 0. \quad (e)$$

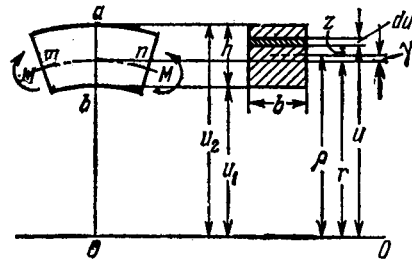


Рис. 3.

Для прямоугольных поперечных сечений, с которыми и приходится вообще иметь дело

при расчетах сводов, они находятся чрезвычайно просто. В этих случаях уравнение (e) переписывается так (рис. 3):

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{(u-r) b du}{u} = 0,$$

откуда

$$r = \frac{h}{\ln \frac{u_2}{u_1}}.$$

При малом h это выражение удобно разложить в ряд

$$\ln \frac{u_2}{u_1} = \ln \frac{\rho + \frac{h}{2}}{\rho - \frac{h}{2}} = \frac{h}{\rho} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^4 + \dots \right],$$

или

$$r = \frac{\rho}{\left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^4 \dots \right]},$$

тогда

$$\gamma = \rho - r = \rho \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^4 + \dots} \right].$$

Как первое приближение будем иметь

$$\gamma_1 = \rho \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^2} \right] \approx \frac{h^2}{12\rho} \quad \text{и} \quad S_1 = \gamma_1 F = \gamma_1 b h = \frac{l}{\rho}. \quad (5)$$

Второе приближение мы получим, пренебрегая членами ряда, начиная с четвертого, тогда

$$\gamma_2 = \rho \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^4} \right] \approx \frac{h^2}{12\rho} \left[1 + \frac{4}{15} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^2 \right]$$

и

$$S_2 = \frac{l}{\rho} \left[1 + \frac{4}{15} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

Эти результаты дают нам возможность решить при помощи формулы (3) задачу определения максимальных напряжений, вызываемых изгибающим моментом. Для того чтобы найти нормальные напряжения, вызванные продольной силой, достаточно распределить эту силу по площади поперечного сечения. Таким образом, полное нормальное напряжение в точке, удаленной от нейтральной оси на расстояние z , выразится так:

$$\sigma = \frac{M}{S} \frac{z}{r+z} + \frac{N}{F}. \quad (7)$$

Касательные напряжения при изгибе кривых брусков не играют сколько-нибудь значительной роли, и мы в последующем изложении для прямоугольного сечения примем для них тот же параболический закон распределения напряжений по высоте сечения, что и в прямом брусе, согласно формуле

$$\tau = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{Q}{I}. \quad (8)$$

§ 3. Деформация элемента кривого бруса

Деформация выделенного элемента кривого бруса $abcd$ (рис. 2) определяется:

1) углом $\delta d\varphi$, на который повернется сечение cd относительно сечения ab ; 2) изменением δds — расстояния между сечениями, считая по оси бруса, и, наконец, 3) сдвигом одного из этих сечений по отношению к другому. Полное изменение угла $\delta d\varphi$ является функцией изгибающего момента M и продольной силы N . Для определения влияния изгибающего момента воспользуемся формулой (1), которая дает нам соответствующее изменение угла:

$$\delta' d\varphi = \frac{M d\varphi}{ES} = \frac{M ds}{ES\rho}.$$

Оценивая изменение $\delta'' d\varphi$ угла от продольной оси, пренебрежем поперечным расширением от продольного сжатия. Тогда относительное сжатие продольных волокон, равное N/EF , будет равно относительному уменьшению угла $d\varphi$, и мы будем иметь для абсолютно го изменения угла

$$\delta'' d\varphi = \frac{N}{EF} d\varphi = \frac{N ds}{EF\rho}.$$

Полное изменение угла выразится формулой

$$\delta d\varphi = \delta' d\varphi + \delta'' d\varphi = \left(\frac{M}{ES\rho} + \frac{N}{EF\rho} \right) ds. \quad (9)$$

Обыкновенно пренебрегают высотой h сравнительно с r , тогда, пользуясь для S его значением в первом приближении (5), получим

$$\delta d\varphi = \left(\frac{M}{EJ} + \frac{N}{EF\rho} \right) ds. \quad (10)$$

При более точном решении, пользуясь для S вторым приближением (6), получим

$$\delta d\varphi = \left\{ \frac{M}{EJ} \left[1 + \frac{4}{15} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^2 \right] + \frac{N}{EF\rho} \right\} ds. \quad (11)$$

Укорочение δds элемента оси ds также составит из двух членов, из которых первый $N ds/EF$ представляет укорочение, вызываемое продольной силой, другой же — изгибающим моментом.

Под влиянием момента M одно сечение поворачивается относительно другого на угол $M ds/ES\rho$, и вращение его происходит вокруг нейтральной линии на расстоянии γ от центра тяжести.

Следовательно, относительное вращение будет сопровождаться укорочением оси ds на величину $\gamma M ds/ES\rho$.

Полное укорочение элемента оси ds представится в следующем виде:

$$\delta ds = \left(\frac{N}{EF} + \gamma \frac{M}{ES\rho} \right) ds = \left(\frac{N}{EF} + \frac{M}{EF\rho} \right) ds. \quad (12)$$

Вторым членом выражения, находящегося в скобках, обыкновенно пренебрегают и пользуются упрощенной формулой

$$\delta ds = \frac{N ds}{EF}. \quad (13)$$

Как было отмечено, при определении напряжений сдвига мы будем пользоваться той же формулой, что и для прямых брусьев (8), поэтому происходящее от сдвига смещение центра тяжести сечения cd по отношению к бесконечно близкому сечению ab представится в следующем виде:

$$\beta = \frac{k'Q ds}{GF} = \frac{kQ ds}{EF}, \quad (14)$$

где k' — коэффициент, зависящий от формы сечения.

Для прямоугольника, т. е. для случая, в котором максимальные касательные напряжения в полтора раза превышают среднее их значение, мы имеем

$$k' = 1,5; \quad k = 2k' (1 + \mu) = 3 (1 + \mu),$$

где μ — коэффициент Пуассона.

§ 4. Перемещения и углы поворота

Изучив деформации элемента кривого бруса, мы легко найдем перемещение любой точки оси бруса, так же как и угол, на который повернется любое сечение. При выводе формул лучше всего начать с исследования частных случаев. Положим, что требуется найти линейное перемещение и поворот точки C кривого бруса AB относительно сечения B (рис. 4).

Располагая координатные оси, как показано на рисунке, мы будем искать, каково будет перемещение точки C , вызванное деформацией отдельного элемента кривого бруса между двумя бесконечно близкими сечениями в точках C и K . Нужно рассмотреть отдельно:

- 1) перемещение точки C , вызванное сжатием δds осевого элемента ds ;
- 2) перемещение, вызванное изменением δds угла между проведенными сечениями;
- 3) перемещение, вызванное сдвигом.

Вследствие сжатия часть бруса, расположенная выше точки K , получит перемещение, параллельное касательной к оси бруса в точке K . Соответственные перемещения δu , δv точки C в проекциях на координатные оси выразятся так:

$$\left. \begin{aligned} \delta u_1 &= \delta ds \cos \varphi, \\ \delta v_1 &= \delta ds \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Вследствие уменьшения угла между рассматриваемыми сечениями на величину $\delta d\varphi$ точка C очертит дугу CC_1 , равную $\delta d\varphi KC$.

Из подобия треугольников CC_1C_0 и CKD следует, что горизонтальная и вертикальная составляющие перемещения имеют

вид

$$\delta u_2 = CC_0 = CC_1 \frac{CD}{KC},$$

$$\delta v_2 = -C_1C_0 = -CC_1 \frac{KD}{KC}.$$

Подставляя вместо CC_1 его значение, найденное выше, и принимая во внимание, что $CD = y - y_0$, $KD = x - x_0$, мы найдем для составляющих перемещения CC_1 следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \delta u_2 &= \delta d\varphi (y - y_0), \\ \delta v_2 &= -\delta d\varphi (x - x_0). \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

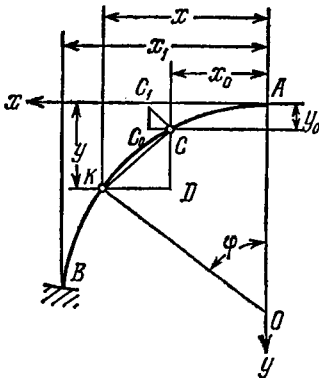


Рис. 4.

Сдвиг элемента определит перемещение β всей верхней части бруса относительно нижней части; перемещение это произойдет по направлению радиуса KO .

Согласно принятым обозначениям (§ 1) положительной перерезывающей силе соответствует перемещение в направлении от K к O . Проектируя его на координатные оси, получаем

$$\delta u_3 = -\beta \sin \varphi, \quad \delta v_3 = \beta \cos \varphi.$$

Таким образом, перемещения точки C относительно точки K по координатным осям, полученные из рассмотрения элемента свода, будут:

$$\delta u = \delta ds \cos \varphi + \delta d\varphi (y - y_0) - \beta \sin \varphi,$$

$$\delta v = \delta ds \sin \varphi - \delta d\varphi (x - x_0) + \beta \cos \varphi.$$

Чтобы получить полное перемещение точки C , следует взять сумму всех перемещений элементов свода в промежутке между B и C . Обозначив через s_0 длину дуги AC и через s_1 длину дуги AB

и воспользовавшись формулами (9), (12) и (14), мы получаем

$$u = \int_{s_0}^{s_1} \delta u = \int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{N}{EF} + \frac{M}{EF\rho} \right) \cos \varphi ds + \int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{M}{ES\rho} + \frac{N}{EF\rho} \right) (y - y_0) ds - \int_{s_0}^{s_1} \frac{kQ}{EF} \sin \varphi ds, \quad (15)$$

$$v = \int_{s_0}^{s_1} \delta v = \int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{N}{EF} + \frac{M}{EF\rho} \right) \sin \varphi ds - \int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{M}{ES\rho} + \frac{N}{EF\rho} \right) (x - x_0) ds + \int_{s_0}^{s_1} \frac{kQ}{EF} \cos \varphi ds. \quad (16)$$

Поворот τ ¹⁾ сечения получается от сложения изменений углов $\delta d\varphi$ для всех элементарных частей свода, заключающихся между

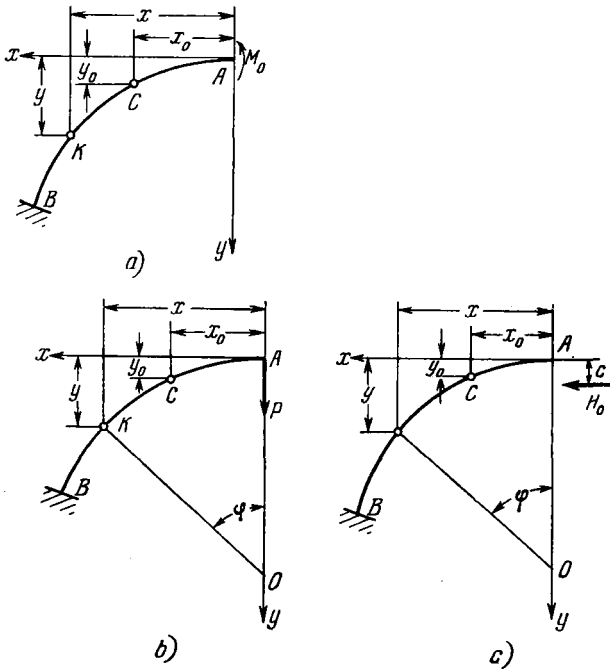


Рис. 5.

¹⁾ Этот поворот считается положительным, когда он соответствует уменьшению угла между рассматриваемым сечением и сечением заделки.

точками B и C :

$$\tau = \int_{s_0}^{s_1} \delta d\varphi = \int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{M}{ES\rho} + \frac{N}{EF\rho} \right) ds. \quad (17)$$

Чтобы получить, пользуясь формулами (15)—(17), перемещения, нужно только подставить в каждом частном случае вместо M , N , Q их значения. Например, в случае, представленном на рис. 5, a , имеем $M=M_0$, $N=Q=0$, и формулы приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} u &= \int_{s_0}^{s_1} \frac{M_0}{EF\rho} \cos \varphi ds + \int_{s_0}^{s_1} \frac{M_0}{ES\rho} (y-y_0) ds, \\ v &= \int_{s_0}^{s_1} \frac{M_0}{EF\rho} \sin \varphi ds - \int_{s_0}^{s_1} \frac{M_0}{ES\rho} (x-x_0) ds, \\ \tau &= \int_{s_0}^{s_1} \frac{M_0 ds}{ES\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

В случае, представленном на рис. 5, b , мы имеем

$$\begin{aligned} M &= -Px, \\ N &= P \sin \varphi, \\ Q &= P \cos \varphi. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} u &= \int_{s_0}^{s_1} P \left(\frac{\sin \varphi}{EF} - \frac{x}{EF\rho} \right) \cos \varphi ds + \\ &+ \int_{s_0}^{s_1} P \left(\frac{\sin \varphi}{EF\rho} - \frac{x}{ES\rho} \right) (y-y_0) ds - \int_{s_0}^{s_1} \frac{kP}{EF} \cos \varphi \sin \varphi ds, \\ v &= \int_{s_0}^{s_1} P \left(\frac{\sin \varphi}{EF} - \frac{x}{EF\rho} \right) \sin \varphi ds - \\ &- \int_{s_0}^{s_1} P \left(\frac{\sin \varphi}{EF\rho} - \frac{x}{ES\rho} \right) (x-x_0) ds + \int_{s_0}^{s_1} \frac{kP}{EF} \cos^2 \varphi ds, \\ \tau &= \int_{s_0}^{s_1} P \left(\frac{\sin \varphi}{EF\rho} - \frac{x}{ES\rho} \right) ds. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

В случае изгиба, представленного на рис. 5, *c*, мы имеем

$$M = H_0(y - c), \quad N = H_0 \cos \varphi, \quad Q = -H_0 \sin \varphi,$$

и формулы, определяющие перемещения, принимают вид

$$\left. \begin{aligned} u &= \int_{s_0}^{s_1} H_0 \left(\frac{\cos \varphi}{EF} + \frac{y-c}{EF\rho} \right) \cos \varphi ds + \\ &\quad + \int_{s_0}^{s_1} H_0 \left(\frac{\cos \varphi}{EF\rho} + \frac{y-c}{ES\rho} \right) (y - y_0) ds + \int_{s_0}^{s_1} \frac{kH_0}{EF} \sin^2 \varphi ds, \\ v &= \int_{s_0}^{s_1} H_0 \left(\frac{\cos \varphi}{EF} + \frac{y-c}{EF\rho} \right) \sin \varphi ds - \\ &\quad - \int_{s_0}^{s_1} H_0 \left(\frac{\cos \varphi}{EF\rho} + \frac{y-c}{ES\rho} \right) (x - x_0) ds - \int_{s_0}^{s_1} \frac{kH_0}{EF} \cos \varphi \sin \varphi ds, \\ \tau &= \int_{s_0}^{s_1} H_0 \left(\frac{\cos \varphi}{EF\rho} + \frac{y-c}{ES\rho} \right) ds. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Если симметричная арка подвергается действию двух горизонтальных прямо противоположных сил *H*, приложенных к ее пятам (рис. 6), можно допустить, что сечение в ключе *D* остается неподвижным.

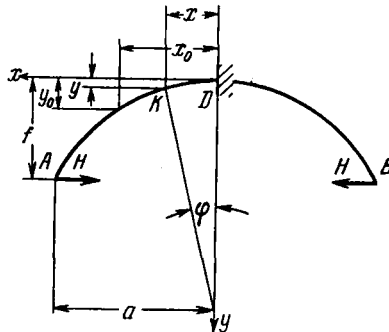


Рис. 6.

Тогда перемещения точки *C*(*x*₀, *y*₀) будут определяться деформациями, претерпеваемыми частью *CD* кривого бруса. Так как в этом случае

$$M = -H(f - y), \quad N = H \cos \varphi, \quad Q = -H \sin \varphi,$$

то для перемещений мы находим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 u &= \int_0^{s_0} \left(\frac{M}{ES\rho} + \frac{N}{EF\rho} \right) (y_0 - y) ds - \int_0^{s_0} \left(\frac{N}{EF} + \frac{M}{EF\rho} \right) \cos \varphi ds + \\
 &+ \int_0^{s_0} \frac{kQ}{EF} \sin \varphi ds = H \int_0^{s_0} \left(-\frac{f-y}{ES\rho} + \frac{\cos \varphi}{EF\rho} \right) (y_0 - y) ds - \\
 &\quad - H \int_0^{s_0} \left(\frac{\cos \varphi}{EF} - \frac{f-y}{EF\rho} \right) \cos \varphi ds - H \int_0^{s_0} \frac{k}{EF} \sin^2 \varphi ds, \\
 v &= - \int_0^{s_0} \left(\frac{M}{ES\rho} + \frac{N}{EF\rho} \right) (x_0 - x) ds - \int_0^{s_0} \left(\frac{N}{EF} + \frac{M}{EF\rho} \right) \sin \varphi ds - \\
 &\quad - \int_0^{s_0} \frac{kQ}{EF} \cos \varphi ds = H \int_0^{s_0} \left(\frac{f-y}{ES\rho} - \frac{\cos \varphi}{EF\rho} \right) (x_0 - x) ds - \\
 &\quad - H \int_0^{s_0} \left(\frac{\cos \varphi}{EF} - \frac{f-y}{EF\rho} \right) \sin \varphi ds + H \int_0^{s_0} \frac{k}{EF} \cos \varphi \sin \varphi ds, \\
 \tau &= \int_0^{s_0} \left(\frac{M}{ES\rho} + \frac{N}{EF\rho} \right) ds = H \int_0^{s_0} \left(-\frac{f-y}{ES\rho} + \frac{\cos \varphi}{EF\rho} \right) ds = 0.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Кроме перемещений, вызываемых внешними силами, в некоторых случаях нужно учесть и перемещения, вызываемые изменением температуры. Если кривой брус подвергается равномерному нагреванию на t° , то все его линейные размеры получают относительные расширения ϵt , где ϵ — коэффициент линейного температурного расширения. Изменений углов при этом не произойдет и нагретый брус, увеличившись в размерах, сохранит свою форму, геометрически подобную начальной. Например, равномерно нагревая брус, изображенный на рис. 6, получим для точки A следующие перемещения:

$$u = \alpha \epsilon t, \quad v = f \epsilon t.$$

В большинстве случаев технических расчетов можно пользоваться упрощенными формулами, так как высота поперечного сечения обычно мала в сравнении с радиусом кривизны, и принимать (формулы (9), (12) и (14)):

$$\delta d\varphi = \frac{M ds}{EJ}, \quad \delta ds = \frac{N ds}{EF}, \quad \beta = \frac{kQ ds}{EF}. \tag{с}$$

Тогда перемещения бруса, изображенного на рис. 4, представятся в виде

$$\left. \begin{aligned} u &= \int_{s_0}^{s_1} \frac{N \cos \varphi}{EF} ds + \int_{s_0}^{s_1} \frac{M}{EJ} (y - y_0) ds - \int_{s_0}^{s_1} \frac{kQ}{EF} \sin \varphi ds, \\ v &= \int_{s_0}^{s_1} \frac{N \sin \varphi}{EF} ds - \int_{s_0}^{s_1} \frac{M}{EJ} (x - x_0) ds + \int_{s_0}^{s_1} \frac{kQ}{EF} \cos \varphi ds, \\ \tau &= \int_{s_0}^{s_1} \frac{M ds}{EJ}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ГЛАВА II

УПРУГИЕ ДВУХШАРНИРНЫЕ АРКИ

§ 5. Определение опорных реакций

Рассмотрим симметричную арку при симметричном ее нагружении (рис. 7).

Отбросим мысленно опоры, препятствующие изменению расстояния AB между опорными шарнирами (рис. 7, b), и будем считать

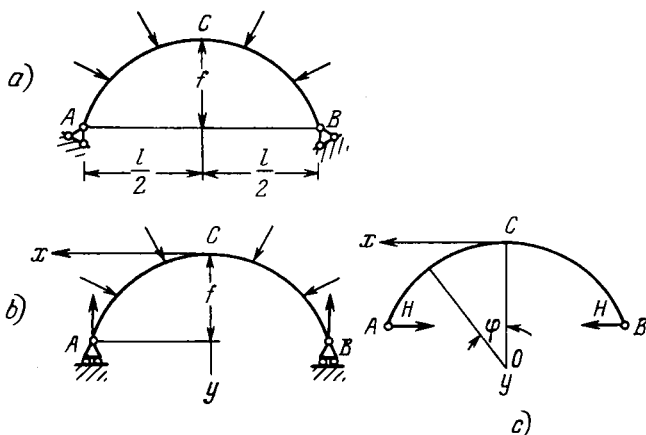


Рис. 7.

поперечное сечение в ключе C неподвижным, как расположенное в плоскости симметрии. При помощи первой формулы (21) найдем

перемещение u_a точки A при заданном нагружении

$$u_a = \int_0^s \left(\frac{M_0}{ES\rho} + \frac{N_0}{EF\rho} \right) (f-y) ds - \int_0^s \left(\frac{N_0}{EF} + \frac{M_0}{EF\rho} \right) \cos \varphi ds + \\ + \int_0^s \frac{kQ_0}{EF} \sin \varphi ds. \quad (23)$$

Здесь M_0 , N_0 и Q_0 обозначают соответственно величины изгибающего момента, нормальной и поперечной силы в произвольном сечении системы, представленной на рис. 7, *b*. Интегрирование, конечно, распространяется на всю длину полуарки s .

Определим теперь распор H из того соображения, чтобы силы H (рис. 7, *c*) уничтожили найденные перемещения u_a . Так как сечение C , расположенное в плоскости симметрии, остается неподвижным, то горизонтальное перемещение точки A под действием силы H мы получим из формулы (23), сделав в ней следующие подстановки:

$$M_0 = -H(f-y), \quad N_0 = H \cos \varphi, \quad Q_0 = -H \sin \varphi, \quad (a)$$

что даст нам зависимость

$$H \left\{ \int_0^s \left(-\frac{f-y}{ES\rho} + \frac{\cos \varphi}{EF\rho} \right) (f-y) ds - \int_0^s \left[\frac{\cos \varphi}{EF} - \frac{f-y}{EF\rho} \right] \cos \varphi ds - \right. \\ \left. - \int_0^s \frac{k \sin^2 \varphi ds}{EF} \right\} = Hu'_a,$$

где

$$u'_a = \int_0^s \left(-\frac{f-y}{ES\rho} + \frac{\cos \varphi}{EF\rho} \right) (f-y) ds - \\ - \int_0^s \left(\frac{\cos \varphi}{EF} - \frac{f-y}{EF\rho} \right) \cos \varphi ds - \int_0^s \frac{k \sin^2 \varphi ds}{EF} \quad (24)$$

представляет перемещение точки A для случая, когда $H=1$.

Так как, согласно предположению, шарниры неподвижны, то имеем

$$Hu'_a = -u_a,$$

что дает нам на основании равенств (23) и (24):

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{u_a}{-u'_a} = \\
 &= \left[\int_0^s \left(\frac{M_0}{ES\rho} + \frac{N_0}{EF\rho} \right) (f-y) ds - \int_0^s \left(\frac{N_0}{EF} + \frac{M_0}{EF\rho} \right) \cos \varphi ds + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^s \frac{kQ_0}{EF} \sin \varphi ds \right] : \left[\int_0^s \left(\frac{f-y}{ES\rho} - \frac{\cos \varphi}{EF\rho} \right) (f-y) ds + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^s \left(\frac{\cos \varphi}{EF} - \frac{f-y}{EF\rho} \right) \cos \varphi ds + \int_0^s \frac{k \sin^2 \varphi ds}{EF} \right]. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Чтобы определить H , достаточно в каждом частном случае проинтегрировать указанные выражения.

В дальнейшем мы увидим, что при расчете перемещений возможно применить упрощенные формулы, полученные при допущении, что поперечные размеры сечения малы по сравнению с радиусом кривизны ρ , т. е. формулы (с) (§ 4) заменяют формулы (9) и (12) § 3. Тогда мы определим распор H по более простой формуле:

$$\begin{aligned}
 H &= \left[\int_0^s \frac{M_0}{EJ} (f-y) ds - \int_0^s \frac{N_0}{EF} \cos \varphi ds + \int_0^s \frac{kQ_0}{EF} \sin \varphi ds \right] : \left[\int_0^s \frac{(f-y)^2 ds}{EJ} + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EF} + \int_0^s \frac{k \sin^2 \varphi ds}{EF} \right]. \quad (25')
 \end{aligned}$$

Иногда идут еще дальше и пренебрегают влиянием поперечной силы, отбрасывая у числителя и знаменателя формулы (25') последние члены.

В заключение выясним, какое влияние на распор H оказывает изменение температуры и смещения опор. Для определения этих изменений H применяют метод, указанный выше: предполагают неподвижность сечения в ключе C в горизонтальном направлении и свободу перемещения опор A и B по линии AB (рис. 7, б). Тогда горизонтальное перемещение точки A под действием заданных нагрузок и возрастания температуры получается от прибавления к правой части уравнения (23) выражения $\frac{1}{2} \epsilon t$ (т. е. увеличения длины полупролета вследствие изменения температуры на t°), где ϵ есть коэффициент линейного температурного расширения для материала арки. Затем определяют величину распора (рис. 7, в).

Если опорные шарниры совершенно неподвижны, то величину распора определяют из того условия, что перемещение, соответствующее $H u'_a$, должно быть равно по величине и противоположно по

знаку перемещению $u_a + \frac{1}{2} l \epsilon t$, указанному выше. Наоборот, если опоры смещаются под влиянием действующих на них нагрузок и расстояние между ними увеличивается на длину δ , то перемещение $H u'_a$, вызванное распором, будет отличаться от величины $u_a + \frac{1}{2} l \epsilon t$ на $\frac{1}{2} \delta$, и для определения H получим уравнение

$$u_a + \frac{1}{2} l \epsilon t = -H u'_a + \frac{1}{2} \delta, \quad (26)$$

откуда

$$H = \frac{u_a + \frac{1}{2} l \epsilon t - \frac{1}{2} \delta}{-u'_a},$$

а при отсутствии нагрузок

$$H = \frac{\frac{1}{2} l \epsilon t - \frac{1}{2} \delta}{-u'_a} = (l \epsilon t - \delta) : \\ : 2 \left[\int_0^s \left(\frac{f-y}{ES\rho} - \frac{\cos \varphi}{EF\rho} \right) (f-y) ds + \int_0^s \left(\frac{\cos \varphi}{EF} - \frac{f-y}{EF\rho} \right) \cos \varphi ds + \right. \\ \left. + \int_0^s \frac{k \sin^2 \varphi}{EF} ds \right]$$

или, применяя упрощенные формулы,

$$H = \frac{l \epsilon t - \delta}{2 \left(\int_0^s \frac{(f-y)^2 ds}{EJ} + \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EF} + \int_0^s \frac{k \sin^2 \varphi ds}{EF} \right)}. \quad (26')$$

Знаменатели полученных формул зависят только от очертания и размеров арки и от упругих свойств материалов, из которых арка выполнена.

Раз подсчитанные, они могут служить для расчета всех представляющихся нам частных задач при различных способах распределения нагрузок. Возможные упрощения и происходящие от этого погрешности мы изучим на разных примерах.

Укажем другой способ расчета упругой двухшарнирной арки. При первом способе расчета мы удаляли опоры, препятствующие изменению расстояния между ними. Таким образом, мы пришли к статически определимой системе, опорные реакции которой определяются на основании уравнений статики, как для балки на двух опорах. К статически определимой системе можно прийти и иначе: можно сохранить неподвижность опорных шарниров и добавить промежуточный шарнир. Такое допущение приведет нас к случаю трехшарнирной арки, опорные реакции которой также легко определить. Найдя эти опорные реакции, определим, как они изменятся

в силу того, что в действительности арка не имеет третьего промежуточного шарнира.

Выбор трехшарнирной арки как основной системы особенно выгоден в том случае, когда ось арки совпадает или незначительно отличается от веревочной кривой¹⁾, построенной для действующей на арку нагрузки. Рассмотрим пример симметричной арки при действии на нее равномерно распределенной вертикальной нагрузки (рис. 8, а). В предположении промежуточного шарнира в ключе С легко находим вертикальные реакции и распор H_0 . Если, кроме того, ось арки совпадает с веревочной кривой, то все силы упругости сводятся к нормальному усилию

$$N = H_0 / \cos \varphi \quad (b)$$

в любом поперечном сечении.

Перейдем теперь к двухшарнирной арке. От удаления среднего шарнира вертикальные реакции не изменяются. Чтобы определить изменение распора, предположим, что сечение в ключе неподвижно, а концы А и В, к которым приложены опорные реакции трехшарнирной арки, могут перемещаться. Тогда горизонтальное перемещение точки А, вызванное продольными сжимающими силами, получится от подстановки в формулу (23) следующих значений: $M=0, Q=0, N=H_0/\cos \varphi$. Таким образом имеем

$$u_a = \int_0^s \frac{H_0 (f-y)}{EF\rho \cos \varphi} ds - \int_0^s \frac{H_0}{EF} ds. \quad (c)$$

Далее отыщем перемещения от двух равных и прямо противоположных сил H' (рис. 8, б).

Мы найдем их, принимая во внимание направление этих сил, по формуле (24), которая дает для перемещения точки А следующее выражение:

$$H' \left\{ \int_0^s \left(\frac{f-y}{ES\rho} - \frac{\cos \varphi}{EF\rho} \right) (f-y) ds + \int_0^s \left(\frac{\cos \varphi}{EF} - \frac{f-y}{EE\rho} \right) \cos \varphi ds + \int_0^s \frac{k \sin^2 \varphi ds}{EF} \right\} = -H' u'_a. \quad (d)$$

¹⁾ Здесь мы будем допускать, что веревочная кривая совпадает с кривой давления.

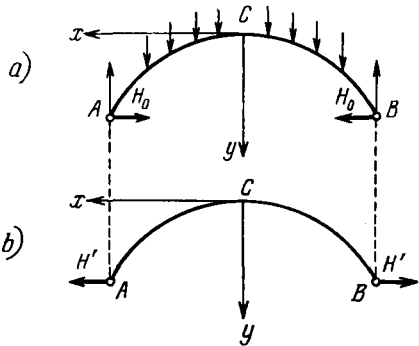


Рис. 8.

Так как опорные шарниры данной арки в действительности неподвижны, то надо найти для H' (рис. 8, б) значение, которое удовлетворяло бы условию

$$-H' u'_a = -u_a, \quad (e)$$

т. е. чтобы горизонтальные перемещения опорных шарниров, вызванных одновременным действием сил, найденных для той же арки с третьим шарниром, и сил H' , были равны нулю. Из этого условия получаем

$$H' = \left[\int_0^s \frac{H_0 ds}{EF} - \int_0^s \frac{H_0 (f-y)}{EF \rho \cos \varphi} ds \right] : \left[\int_0^s \left(\frac{f-y}{ES\rho} - \frac{\cos \varphi}{EF\rho} \right) (f-y) ds + \int_0^s \left(\frac{\cos \varphi}{EF} - \frac{f-y}{EF\rho} \right) \cos \varphi ds + \int_0^s \frac{k \sin^2 \varphi ds}{EF} \right]. \quad (27)$$

Таким образом, получаем величину, на которую уменьшится, вследствие удаления третьего шарнира, распор H_0 . Действительный распор двухшарнирной арки: $H = H_0 - H'$.

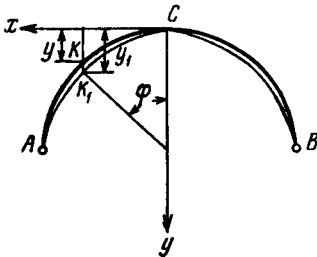


Рис. 9.

Такой же способ может быть применен и в случае, когда ось арки незначительно отличается от веревочной кривой. Пусть ACB будет осью двухшарнирной арки, подверженной действию вертикальной равномерно распределенной нагрузки. Обозначим через y переменную ординату оси арки, через y_1 — ординату веревочной кривой (рис. 9).

Тогда в предположении наличия третьего шарнира все силы упругости, действующие в поперечном сечении, проходящем через точку K , сведутся к одной силе, приложенной в точке K_1 веревочной кривой. Эта сила направлена по касательной к веревочной кривой; ее величина в случае вертикальной нагрузки равна $H_0/\cos \varphi$. Так как расстояние между осями арки и веревочной кривой незначительно, то можно допустить параллельность касательных в K и K_1 и положить $Q=0$, $N=H_0/\cos \varphi$. Изгибающий момент в рассматриваемом сечении равен $M=H_0(y-y_1)$.

Подставляя значения M , N и Q в формулу (23), пренебрегая сжатием оси от изгибающего момента M и полагая $ES\rho=EI$, мы на

основании уравнения (е) получаем

$$H' = \left[\int_0^s \frac{H_0 ds}{EF} - \int_0^s \frac{H_0 (f-y)}{EF\rho \cos \varphi} ds - \int_0^s \frac{H (y-y_1)}{EJ} (f-y) ds \right] : \left[\int_0^s \left(\frac{f-y}{ES\rho} - \frac{\cos \varphi}{EF\rho} \right) (f-y) ds + \int_0^s \left(\frac{\cos \varphi}{EF} - \frac{f-y}{EF\rho} \right) \cos \varphi ds + \int_0^s \frac{k \sin^2 \varphi}{EF} ds \right]. \quad (28)$$

Таким образом, нами определено уменьшение распора, происходящее от удаления среднего шарнира. Последний интеграл числителя зависит от степени различия между осью арки и веревочной кривой.

§ 6. Случай сосредоточенной силы

Определим теперь при помощи формулы (25) распор для случая загрузки арки вертикальной сосредоточенной силой P (рис. 10).

Чтобы привести задачу к случаю симметричной нагрузки, для которой и выведена эта формула, к заданной силе P добавим силу P , расположенную симметрично и показанную на рис. 10 пунктиром. Очевидно, что распор в этом случае симметричной нагрузки будет равен $2H$. Величины M_0 , N_0 и Q_0 в формуле (25) выражают изгибающий момент, нормальную и поперечную силы для случая, когда опорные шарниры могут свободно перемещаться (рис. 7, *b*). В случае двух равных сил P , симметрично расположенных относительно середины арки, мы будем иметь для участка арки CK , т. е. в пределах от 0 до s_0 ,

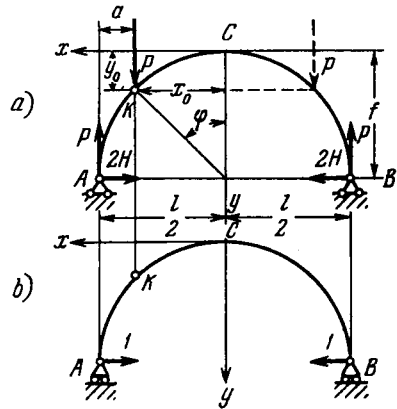


Рис. 10.

$$M_0 = P \left(\frac{l}{2} - x_0 \right), \quad Q_0 = 0, \quad N_0 = 0$$

и по длине участка арки KA , т. е. в пределах от s_0 до s ,

$$M_0 = P \left(\frac{l}{2} - x \right), \quad Q_0 = P \cos \varphi, \quad N_0 = P \sin \varphi.$$

Подставляя эти величины в формулу (25), получим следующее выражение для ее числителя:

$$\int_0^{s_0} P \left(\frac{l}{2} - x_0 \right) \frac{(f-y)}{ES\rho} ds - \int_0^{s_0} P \left(\frac{l}{2} - x_0 \right) \frac{\cos \varphi}{EF\rho} ds + \\ + \int_{s_0}^s \left[\frac{P \left(\frac{l}{2} - x \right)}{ES\rho} + \frac{P \sin \varphi}{EF\rho} \right] (f-y) ds - \\ - \int_{s_0}^s \left[\frac{P \sin \varphi}{EF} + \frac{P \left(\frac{l}{2} - x \right)}{EF\rho} \right] \cos \varphi ds + \int_{s_0}^s \frac{k}{EF} P \cos \varphi \sin \varphi ds,$$

что можно представить в виде

$$P \int_0^s \left(\frac{f-y}{ES\rho} - \frac{\cos \varphi}{EF\rho} \right) \left(\frac{l}{2} - x \right) ds + P \int_0^s \left(\frac{f-y}{EF\rho} - \frac{\cos \varphi}{EF} \right) \sin \varphi ds + \\ + P \int_0^s \frac{k}{EF} \sin \varphi \cos \varphi ds - P \int_0^{s_0} \left(\frac{f-y}{ES\rho} - \frac{\cos \varphi}{EF\rho} \right) (x_0 - x) ds - \\ - P \int_0^{s_0} \left(\frac{f-y}{EF\rho} - \frac{\cos \varphi}{EF} \right) \sin \varphi ds - P \int_0^{s_0} \frac{k}{EF} \sin \varphi \cos \varphi ds. \quad (a)$$

Это выражение имеет простое значение. Опираясь на формулу (21) § 4, мы заключаем, что оно представляет Pv_k , где v_k означает вертикальное перемещение точки K для случая, изображенного на рис. 10, b ¹⁾.

Что касается знаменателя формулы (25), то он, согласно формуле (24), представляет собой $-u'_a$. Таким образом, для распора, вызываемого одной сосредоточенной силой P , получаем выражение

$$H = P \cdot \frac{v_k}{2u'_a}. \quad (29)$$

Решение это можно было бы получить сразу, пользуясь сравнением фактического состояния арки (рис. 10, a) с фиктивным (рис. 10, b) и применив теорему о взаимности перемещений Максвелла.

Та же теорема послужит нам при определении горизонтальной реакции H в случае арки, подверженной действию сосредоточенной горизонтальной силы P (рис. 11, a).

¹⁾ В случае, изображенном на рис. 10, b , опорные шарниры скользят по горизонтальной прямой, точка K перемещается кверху, т. е. в сторону отрицательных y . Поэтому v_k отрицательно и Pv_k положительно.

Сравнивая фактическое состояние арки с фиктивным (рис. 11, б) и применяя теорему Максвелла, мы получаем уравнение

$$-Pu_k - (H - P)u'_a - Hu'_a = 0, \quad (b)$$

где u'_a и u_k означают горизонтальные перемещения точек А и К относительно неподвижного сечения ключа С. Эти перемещения определяются при помощи формулы (21):

$$u'_a = \int_0^s \left(-\frac{f-y}{ES\rho} + \frac{\cos \varphi}{EF\rho} \right) (f-y) ds - \int_0^s \left(\frac{\cos \varphi}{EF} - \frac{f-y}{EF\rho} \right) \cos \varphi ds - \int_0^s \frac{k}{EF} \sin^2 \varphi ds,$$

$$u_k = \int_0^{s_0} \left(-\frac{f-y}{ES\rho} + \frac{\cos \varphi}{EF\rho} \right) (y_0 - y) ds - \int_0^{s_0} \left(\frac{\cos \varphi}{EF} - \frac{f-y}{EF\rho} \right) \cos \varphi ds - \int_0^{s_0} \frac{k}{EF} \sin^2 \varphi ds.$$

Решая уравнение (b), получим для H выражение

$$H = P \frac{u'_a - u_k}{2u'_a}. \quad (30)$$

Пользуясь формулами, дающими величину распора, производимого вертикальной и горизонтальной силами, легко найти распор от силы какого угодно направления.

Для этого достаточно разложить эту силу на ее вертикальную и горизонтальную составляющие и последовательно определить распор от той и другой.

§ 7. Симметричная параболическая арка

Применим выведенные для распора формулы к случаю симметричной параболической арки. Этот элементарный случай легко исследовать, анализируя значения различных членов общих формул и вычисляя погрешности, сделанные при расчете распора по упрощенным формулам.

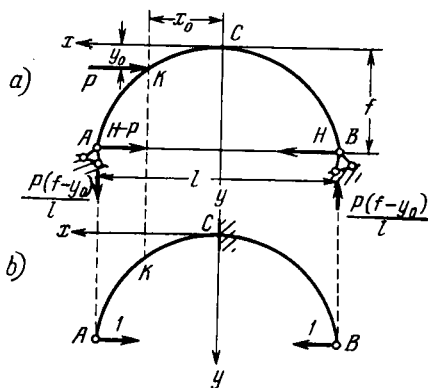


Рис. 11.

Пусть ACB — ось параболической арки (рис. 10, а). Ее уравнение в принятой системе координатных осей:

$$2\rho y = x^2,$$

где

$$\rho = \frac{l^2}{8f}. \quad (a)$$

Из этого уравнения получаем

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\rho}, & \cos \varphi &= \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + x^2}}, \\ \sin \varphi &= \frac{x}{\sqrt{\rho^2 + x^2}}, & \frac{1}{\rho} &= \frac{\cos^3 \varphi}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Чтобы упростить последующие расчеты, допустим, что поперечные размеры арки меняются по ее длине, следуя равенствам

$$ES\rho = \frac{EI_0}{\cos \varphi} \quad \text{и} \quad F = \frac{F_0}{\cos \varphi}, \quad (c)$$

где F_0 и I_0 означают площадь и момент инерции сечения в ключе.

Начнем наши расчеты с определения распора, вызванного повышением температуры на t° и изменением δ -расстояния между опорными шарнирами. Для этого воспользуемся формулой (26).

Главное значение в знаменателе этой формулы имеет член

$$\int_0^s \frac{(f-y)^2}{ES\rho} ds,$$

учитывающий влияние изгибающего момента на деформацию оси.

Подставляя вместо y и $ES\rho$ их значения согласно формулам (a) и (c), мы получаем

$$\int_0^s \frac{(f-y)^2}{ES\rho} ds = \frac{f^2}{EJ_0} \int_0^{l/2} \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right)^2 dx = \frac{4}{15} \frac{f^2 l}{EJ_0}. \quad (d)$$

Влияние нормального усилия на сжатие оси арки учитывается членом

$$\int_0^s \frac{\cos^3 \varphi ds}{EF} = \frac{1}{EF_0} \int_0^{l/2} \cos^3 \varphi dx = \frac{\rho^2}{EF_0} \int_0^{l/2} \frac{dx}{\rho^2 + x^2} = \frac{\rho}{EF_0} \operatorname{arctg} \frac{l}{2\rho}. \quad (e)$$

Далее следуют члены, определяющие влияние нормальной силы на изменение углов и изгибающего момента на сжатие оси арки. Их

совокупность дает

$$-2 \int_0^s \frac{\cos \varphi (f-y) ds}{EF\rho} = -\frac{2f\rho^3}{EF_0} \int_0^{l/2} \frac{(1-\frac{4x^2}{l^2}) dx}{(\rho^2+x^2)^2} =$$

$$= -\frac{2}{EF_0} \left[\left(\frac{f}{2} - \frac{\rho}{4} \right) \operatorname{arctg} \frac{l}{2\rho} + \frac{l}{8} \right]. \quad (f)$$

Наконец, влияние поперечной силы учитывается членом

$$\int_0^s \frac{k \sin^2 \varphi}{EF} ds = \int_0^{l/2} \frac{kx^2 dx}{EF_0(\rho^2+x^2)} = \frac{k}{EF_0} \left(\frac{l}{2} - \rho \cdot \operatorname{arctg} \frac{l}{2\rho} \right). \quad (g)$$

Подставляя выражения (d), (e), (f), (g) в формулу распора (25'), получаем

$$H = \frac{15}{8} \frac{\left(\frac{et - \delta}{l} \right) EI_0}{f^3} \cdot \frac{1}{1+\beta}, \quad (31)$$

где

$$\beta = \frac{15}{4} \frac{i^2}{f^2} \left\{ \frac{\rho}{l} \operatorname{arctg} \frac{l}{2\rho} - \left[\left(\frac{f}{l} - \frac{\rho}{2l} \right) \operatorname{arctg} \frac{l}{2\rho} + \frac{1}{4} \right] + \right.$$

$$\left. + k \left(\frac{1}{2} - \frac{\rho}{l} \operatorname{arctg} \frac{l}{2\rho} \right) \right\} = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \quad (32)$$

где i — радиус инерции поперечного сечения в ключе.

Величина коэффициента β учитывает влияние сжатия, вызванного нормальной силой, влияние кривизны арки¹⁾ и влияние перегибающей силы. Приводимая таблица I показывает, как изменяется величина этих членов в зависимости от стрелы арки f и ее толщины h . Первый столбец дает разные отношения стрелы арки к ее пролету. Три следующих столбца дают члены, из которых составляется коэффициент β ²⁾. Четыре последних дают величины β , вычисленные для разных отношений между толщиной арки в ключе h и ее пролетом l для прямоугольного сечения. Мы видим, что β тем больше, чем меньше кривизна арки и чем больше ее толщина. Для арок очень пологих, для которых коэффициент β имеет большое значение, его величина может быть получена с достаточным приближе-

¹⁾ Мы называем так для краткости влияние нормальной силы на изменение угла и изгибающего момента на сжатие продольной оси.

²⁾ При вычислении влияния, производимого поперечной силой, полагаем $k=3$.

Таблица I

$\frac{f}{l}$	Влияние N : $\beta_1 4f^2/15l^3$	Влияние кривизны: $\beta_2 4f^2/15l^3$	Влияние Q : $\beta_3 4f^2/15l^3$	Значение β			
				$\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$	$\frac{h}{l} = \frac{1}{20}$	$\frac{h}{l} = \frac{1}{30}$	$\frac{h}{l} = \frac{1}{40}$
$\frac{1}{12}$	0,4825	-0,0355	0,0525	0,2247	0,05618	0,02497	0,01044
$\frac{1}{8}$	0,4636	-0,0761	0,1092	0,09934	0,02484	0,01104	0,00621
$\frac{1}{4}$	0,3927	-0,2500	0,3219	0,02323	0,00581	0,00258	0,00145
$\frac{1}{2}$	0,2768	-0,6652	0,6696	0,00352	0,00088	0,00039	0,00022

нием, если пренебречь влиянием Q и кривизны арки, которые дают члены, незначительные по абсолютной величине и противоположные по знакам.

Когда распор найден, то легко можно определить напряжения, возникающие в арке при повышении температуры и изменении расстояния между опорными шарнирами. Предельные напряжения в ключе определяются формулой

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{H}{F_0} \pm \frac{6Hf}{F_0 h} = \frac{6Hf}{F_0 h} \left(\frac{h}{6f} \pm 1 \right),$$

или, если заменить H его величиной согласно формуле (31), формулой

$$\sigma_{\min}^{\max} = \left(\epsilon t - \frac{\delta}{l} \right) E \frac{1}{1+\beta} \frac{15}{16} \frac{h}{f} \left(\frac{7h}{6f} \pm 1 \right). \quad (33)$$

Из этого следует, что влияние температуры увеличивается вместе с увеличением толщины арки и с уменьшением ее стрелы подъема. Увеличение расстояния между опорными шарнирами оказывает то же влияние, что и понижение температуры.

Определим теперь распор, вызванный вертикальной сосредоточенной силой P (рис. 10, а). Для этого воспользуемся формулой (29), знаменатель которой для параболической арки, согласно формулам (d), (e), (f) и (g), имеет значение

$$2u'_a = -\frac{8}{15} \frac{f^2 l}{EJ_0} (1 + \beta). \quad (h)$$

Чтобы определить v_h , обратимся к формуле (а) предыдущего параграфа. Главные члены этой формулы

$$P \int_0^s \frac{(f-y) \left(\frac{l}{2} - x \right) ds}{ES\rho} - P \int_0^{x_0} \frac{(f-y) (x_0 - x) ds}{ES\rho} \quad (k)$$

учитывают влияние изгибающего момента на деформацию продольной оси.

Согласно формулам (а), (b), (с) имеем равенство:

$$\int_0^{x_0} \frac{(f-y) (x_0 - x) ds}{ES\rho} = \frac{f}{EJ_0} \int_0^{x_0} \left(1 - \frac{4x^2}{l^2} \right) (x_0 - x) dx = \frac{fx_0^3}{EJ_0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{x_0^2}{l^2} \right),$$

а заменяя x_0 длиной полупролета $l/2$, имеем:

$$\int_0^s \frac{(f-y) \left(\frac{l}{2} - x \right) ds}{ES\rho} = \frac{5}{48} f \frac{l^2}{EJ_0}.$$

Следовательно, главные члены (k) имеют значение:

$$\frac{P}{EJ_0} \left(\frac{5}{48} fl^3 - \frac{fx_0^3}{2} + \frac{fx_0^4}{3l^2} \right). \quad (l)$$

Если при определении v_h ограничиться только этими членами, то мы получим для распора, согласно формулам (29), (h) и (l), приближенную величину:

$$H = \frac{15}{8} P \frac{\frac{5}{48} fl - \frac{x_0^3}{2lf} + \frac{x_0^4}{3l^2f}}{1 + \beta}. \quad (m)$$

Чтобы получить полное выражение v_h в числителе формулы (29), нужно прибавить к главным членам (k) дополнительные члены, учитывающие влияние нормальной силы, кривизны и поперечной силы.

Как следует из формулы (а) предыдущего параграфа, нормальная сила учитывается следующими членами уравнения:

$$- P \left[\int_0^s \frac{\cos \varphi \sin \varphi ds}{EF} - \int_0^{x_0} \frac{\cos \varphi \sin \varphi ds}{EF} \right] \quad (n)$$

или, согласно формулам (b) и (с), для параболической арки:

$$\int_0^{x_0} \frac{\cos \varphi \sin \varphi ds}{EF} = \frac{p}{EF_0} \int_0^{x_0} \frac{x dx}{p^2 + x^2} = \frac{p}{2EF_0} \ln \frac{p^2 + x_0^2}{p^2}.$$

Тогда формулу (п) можно представить в виде:

$$P \frac{\rho}{2EF_0} \left(\ln \frac{\rho^2 + x_0^2}{\rho^2} - \ln \frac{\rho^2 + \frac{l^2}{4}}{\rho^2} \right) = P \frac{\rho}{2EF_0} \ln \frac{\rho^2 + x_0^2}{\rho^2 + \frac{l^2}{4}}. \quad (o)$$

Влияние поперечной силы учитывается членами:

$$P \left[\int_0^s \frac{k}{EF} \sin \varphi \cos \varphi ds - \int_0^{s_0} \frac{k}{EF} \sin \varphi \cos \varphi ds \right] = P \frac{k\rho}{2EF_0} \ln \frac{\rho^2 + \frac{l^2}{4}}{\rho^2 + x_0^2}. \quad (p)$$

Влияние кривизны учитывается членами:

$$-P \left[\int_0^s \frac{\cos \varphi \left(\frac{l}{2} - x \right)}{EF\rho} ds - \int_0^s \frac{(f-y) \sin \varphi ds}{EF\rho} - \int_0^{s_0} \frac{\cos \varphi (x_0 - x) ds}{EF\rho} + \int_0^{s_0} \frac{(f-y) \sin \varphi ds}{EF\rho} \right]. \quad (q)$$

Так как в случае параболической арки мы имеем:

$$\int_0^{s_0} \frac{\cos \varphi (x_0 - x) ds}{EF\rho} = \frac{\rho^3}{EF_0} \int_0^{x_0} \frac{(x_0 - x) dx}{(\rho^2 + x^2)^2} = \frac{x_0}{2EF_0} \operatorname{arctg} \frac{x_0}{\rho};$$

$$\begin{aligned} \int_0^{s_0} \frac{(f-y) \sin \varphi ds}{EF\rho} &= \frac{f\rho^2}{EF_0} \int_0^{x_0} \frac{\left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right) x dx}{(\rho^2 + x^2)^2} = \\ &= \frac{1}{EF_0} \left[\frac{x_0^2}{\rho^2 + x_0^2} \left(\frac{f}{2} + \frac{\rho}{4} \right) - \frac{\rho}{4} \ln \frac{\rho^2 + x_0^2}{\rho^2} \right], \end{aligned}$$

формула (q) преобразуется в

$$\begin{aligned} P \frac{1}{EF_0} \left\{ -\frac{l}{4} \operatorname{arctg} \frac{l}{2\rho} + \frac{x_0}{2} \operatorname{arctg} \frac{x_0}{\rho} + \frac{\rho}{4} \ln \frac{\rho^2 + x_0^2}{\rho^2 + \frac{l^2}{4}} + \right. \\ \left. + \left(\frac{f}{2} + \frac{\rho}{4} \right) \left[\frac{l^2}{4(\rho^2 + \frac{l^2}{4})} - \frac{x_0^2}{\rho^2 + x_0^2} \right] \right\} = \\ = \frac{P}{EF_0} \left[-\frac{l}{4} \operatorname{arctg} \frac{l}{2\rho} + \frac{x_0}{2} \operatorname{arctg} \frac{x_0}{\rho} + \frac{\rho}{4} \ln \frac{\rho^2 + x_0^2}{\rho^2 + \frac{l^2}{4}} + \frac{f}{2} - \right. \\ \left. - \left(\frac{f}{2} + \frac{\rho}{4} \right) \frac{x_0^2}{\rho^2 + x_0^2} \right]. \quad (r) \end{aligned}$$

Если члены o , p , $г$ прибавить к главному члену (1), то получим полное выражение v_h . Подставляя его в формулу (29) и воспользовавшись формулой (h), получим для распора H следующее выражение при замене x_0 через $l/2 - a$ согласно рис. 10, а:

$$H = \frac{5}{8} P \frac{\frac{l}{f} \frac{a}{l} \left(1 - \frac{2a^2}{l^2} + \frac{a^3}{l^3} \right) + \gamma}{1 + \beta} \quad (34)$$

со следующим значением γ :

$$\gamma = \frac{3l^2}{f^2} \left[\left(\frac{3}{4} - \frac{k}{2} \right) \frac{p}{l} \ln \frac{p^2 + x_0^2}{p^2 + \frac{a^2}{4}} - \left(\frac{f}{2l} + \frac{p}{4l} \right) \frac{x_0^2}{p^2 + x_0^2} + \frac{f}{2l} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{l}{2p} + \frac{x_0}{2l} \operatorname{arctg} \frac{x_0}{p} \right]. \quad (35)$$

Это представляет собой совокупность дополнительных членов уравнения, полученных от учета влияния на величину распора нормальной силы, кривизны арки и поперечной силы. Численные значения γ при $h/l=1/10$ ¹⁾ и $k=3$ для прямоугольного поперечного сечения арки приведены в таблице II, в которой для возможности

Таблица II

f/l	$1/12$				$1/8$			
	$1/8$	$1/4$	$3/8$	$1/2$	$1/8$	$1/4$	$3/8$	$1/2$
Главный член	1,456	2,672	3,472	3,750	0,9709	1,781	2,315	2,500
γ	0,0118	0,0210	0,0267	0,0288	0,0070	0,0130	0,0168	0,0182
Поправка в %	0,81	0,79	0,77	0,77	0,72	0,73	0,73	0,73
f/l	$1/4$				$1/2$			
	$1/8$	$1/4$	$3/8$	$1/2$	$1/8$	$1/4$	$3/8$	$1/2$
Главный член	0,4854	0,8907	1,157	1,250	0,2427	0,4453	0,5787	0,6250
γ	0,0021	0,0045	0,0067	0,0075	0,0002	0,0008	0,0019	0,0027
Поправка в %	0,43	0,50	0,58	0,60	0,08	0,18	0,33	0,43

сравнения приведены также численные значения главного члена числителя формулы (34).

Последняя строка содержит значения γ , выраженные в процентах от значения главного члена числителя. Из таблицы мы видим, что поправки, вносимые в числитель, даже для арок значительной пологости и большой толщины остаются менее 1%, и что для расчета распора в большинстве случаев можно применять приближенную

¹⁾ Для других значений этого отношения числа, приведенные в таблице, нужно умножить на $100 h^2/l^2$.

формулу (m). Отметим, что на величину γ влияют главным образом члены, являющиеся функциями перерезывающей силы. Если пренебречь ¹⁾ только ими, то получим погрешности противоположного знака, и конечный результат вычисления распора будет менее точен, чем результат, полученный при применении приближенной формулы (m). Найдя распор для случая действия на арку одной вертикальной сосредоточенной силы, можно по принципу независимости действия сил получить распор и от нескольких вертикальных сил или от распределенной вертикальной нагрузки.

Рассмотрим случай, когда вертикальная нагрузка равномерно распределена по пролету арки. В этом случае веревочная кривая может быть приведена к совмещению с продольной осью арки, и тогда для определения распора будет допустимо применение формулы (27). Ее знаменатель нам уже известен. Он равен

$$\frac{4}{15} \frac{f^2 l}{E J_0} (1 + \beta),$$

где β имеет значение согласно формуле (32).

Числитель формулы (27) в рассматриваемом случае имеет значение:

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{H_0 ds}{EF} - \int_0^s \frac{H_0 (f-y) ds}{EF \rho \cos \varphi} &= \frac{H_0}{EF_0} \left(\int_0^{l/2} dx - \rho f \int_0^{l/2} \frac{\left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right) dx}{\rho^2 + x^2} \right) = \\ &= \frac{H_0 l}{EF_0} \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{f}{l} + \frac{\rho}{2l} \right) \operatorname{arctg} \frac{l}{2\rho} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$H' = H_0 \frac{15}{4} \frac{i^2}{f^2} \frac{\left[\frac{3}{4} - \left(\frac{f}{l} + \frac{\rho}{2l} \right) \operatorname{arctg} \frac{l}{2\rho} \right]}{(1 + \beta)}.$$

Так как H_0 означает распор трехшарнирной арки, подобной рассматриваемой, не снабженной промежуточным шарниром в ключе, то его величина равна $H_0 = ql^2/8f$, где q есть интенсивность равномерно распределенной нагрузки; H' представляет величину, на которую нужно уменьшить H_0 для того, чтобы получить распор двухшарнирной арки. В таблице III приведены численные значения отношения

$$\frac{H'}{H_0} = \frac{15}{4} \frac{i^2}{f^2} \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{f}{l} + \frac{\rho}{2l} \right) \operatorname{arctg} \frac{l}{2\rho} \right] : (1 + \beta) \quad (36)$$

в зависимости от стрелы f и толщины h арки.

¹⁾ Подобные расчеты приведены, например, в книге W e u g a u c h J. J. *Elastische Bogenträger einschliesslich der Gewölbe, Eisenbetonbogen und Bogenfachwerke*. 3 Auflage, Stuttgart, K. Wittwer, 1911, 540 S. См. S. 313. См. также H o w e M. A. *A treatise on arches*. New York, J. Wiley and Sons; London, Chapman and Hall, Limited. 1897, 351 p. См. Appendix C (pp. 272—283).

Таблица III

f/l	1/12			1/8		
h/l	1/10	1/20	1/30	1/10	1/20	1/30
H'/H_0	0,1771	0,05132	0,02351	0,08372	0,02245	0,01012
δ/h	0,1793	0,09017	0,06018	0,1142	0,05742	0,03832
f/l	1/4			1/2		
h/l	1/10	1/20	1/30	1/10	1/20	1/30
H'/H_0	0,01746	0,00444	0,00193	0,00072	0,00018	0,00008
δ/h	0,04442	0,2230	0,01489	0,00362	0,00181	0,00121

Мы видим, что существенное уменьшение распора двухшарнирной арки H по сравнению с распором трехшарнирной H_0 имеет место лишь для очень пологих арок значительной толщины. Уменьшению распора соответствует перемещение кривой давления над продольной осью арки. Пусть δ будет расстоянием между ними по вертикали, проходящей через ключевое сечение. Составив сумму моментов всех сил, приложенных к половине арки, относительно точки пересечения вертикали, проходящей через ключевое сечение, с кривой давления, получим равенство

$$\frac{ql^2}{8} - (H_0 - H')(\delta + f) = 0,$$

откуда

$$\delta = \frac{H'f}{H_0 - H'}. \quad (37)$$

Подставляя в найденное для δ выражение полученные ранее значения H_0 и H' , получим величину смещения кривой давления над продольной осью арки. В последней строке таблицы III помещены отношения этого смещения к толщине арки h . Мы видим, что кривая давления может выйти из средней трети толщины арки, следовательно, под действием равномерно распределенной нагрузки могут появиться растягивающие напряжения только в очень пологих арках значительной толщины.

§ 8. Симметричная круговая арка

Пусть ACB — круговая ось симметричной арки радиуса ρ с центральным углом 2α (рис. 12), тогда

$$y = \rho(1 - \cos \varphi), \quad f = \rho(1 - \cos \alpha), \quad l = 2\rho \sin \alpha.$$

Предположив, что сечение арки остается постоянным, имеем $F = F_0$ $ES\rho \approx EJ_0$ ¹⁾.

При помощи общей формулы (26) определим распор, вызванный повышением температуры и изменением расстояния между опорными шарнирами. Основной член знаменателя этой формулы

$$\int_0^s \frac{(f-y)^2 ds}{ES\rho} = \frac{\rho^3}{EJ_0} \int_0^\alpha (\cos \varphi - \cos \alpha)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{\rho^3}{2EJ_0} (\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha), \quad (a)$$

учитывает влияние изгибающего момента на кривизну продольной

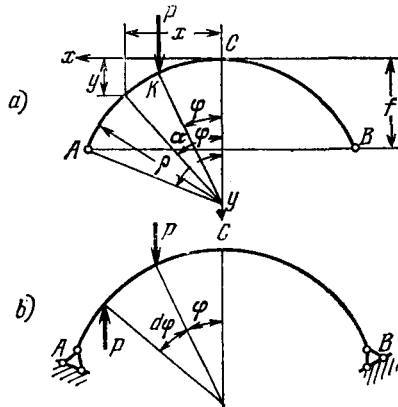


Рис. 12.

оси арки. Влияние продольной силы учитывается членом

$$\int_0^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EF} = \frac{\rho}{EF_0} \int_0^\alpha \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\rho}{2EF_0} (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha); \quad (b)$$

влияние кривизны оси арки учитывается членом

$$-2 \int_0^s \frac{\cos \varphi (f-y) ds}{EF\rho} = -\frac{2\rho}{EF_0} \int_0^\alpha (\cos \varphi - \cos \alpha) \cos \varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{\rho}{EF_0} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha). \quad (c)$$

¹⁾ Можно было бы без особых трудностей применять точную формулу (6) и положить $ES\rho = EJ_0 \left[1 + \frac{4}{15} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^2 \right]$; однако, как видно из дальнейшего расчета, вводимая таким образом поправка слишком мала, чтобы иметь практическое значение.

Наконец, влияние поперечной силы учитывается членом

$$\int_0^{\alpha} \frac{k \sin^2 \varphi ds}{EF} = \frac{k\rho}{EF_0} \int_0^{\alpha} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{k\rho}{2EF_0} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha). \quad (d)$$

Подставив значения интегралов в формулу (26), определяющую распор, мы получим для него следующее выражение:

$$H = \frac{(l\epsilon t - \delta) EJ_0}{\rho^3 (\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha)} \frac{1}{1 + \beta}, \quad (38)$$

где

$$\beta = \frac{1}{\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha} \frac{i^2}{\rho^2} [\alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) + k(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)] \quad (39)$$

учитывает суммарную поправку на влияние продольной силы, кривизны оси и поперечной силы.

Теперь рассмотрим действие вертикальной сосредоточенной силы по формуле (29). Ее знаменатель, согласно приведенным выше подсчетам, равен: $2u'_a = -\frac{\rho^3}{EJ_0} (\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha) (1 + \beta)$.

Чтобы определить значение числителя v_h , обратимся к формуле (а) § 6. Учитывая исключительно главные члены

$$\begin{aligned} P \int_0^s \frac{f-y}{ES\rho} \left(\frac{l}{2} - x \right) ds - P \int_0^{s_0} \frac{f-y}{ES\rho} (x_0 - x) ds = \\ = \frac{P\rho^3}{EJ_0} \int_{\alpha}^{\pi} (\cos \varphi - \cos \alpha) (\sin \alpha - \sin \varphi) d\varphi = \\ = \frac{P\rho^3}{EJ_0} \left[\frac{1}{2} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi_0) - \cos \alpha (\alpha \sin \alpha - \varphi_0 \sin \varphi_0) - \right. \\ \left. - \cos \alpha (\cos \alpha - \cos \varphi_0) \right], \quad (e) \end{aligned}$$

получаем для распора выражение:

$$H = P \frac{\frac{1}{2} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi_0) - \cos \alpha (\alpha \sin \alpha - \varphi_0 \sin \varphi_0) - \cos \alpha (\cos \alpha - \cos \varphi_0)}{\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha} \times \frac{1}{1 + \beta}. \quad (40)$$

Чтобы получить более точное выражение для распора, надо, кроме того, учесть дополнительные члены уравнения (а) § 6. Член, учитывающий влияние продольной силы, равен:

$$-P \int_0^s \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{EF} ds + P \int_0^{s_0} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{EF} ds = \frac{P\rho}{2EF_0} (\sin^2 \varphi_0 - \sin^2 \alpha). \quad (f)$$

Член, зависящий от кривизны оси арки:

$$P \left[- \int_0^s \frac{\cos \varphi}{EF\rho} \left(\frac{l}{2} - x \right) ds + \int_0^{s_0} \frac{\cos \varphi}{EF\rho} (x_0 - x) dx + \int_0^s \frac{f-y}{EF\rho} \sin \varphi ds - \right. \\ \left. - \int_0^{s_0} \frac{f-y}{EF\rho} \sin \varphi ds \right] = - \frac{P\rho}{EF_0} \cos \alpha (\cos \varphi_0 - \cos \alpha) \quad (g)$$

и, наконец, член, учитывающий влияние поперечной силы:

$$P \left[\int_0^s \frac{k \sin \varphi \cos \varphi}{EF} ds - \int_0^{s_0} \frac{k \sin \varphi \cos \varphi}{EF} ds \right] = \frac{Pk\rho}{2EF_0} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi_0).$$

Включив эти члены в числитель формулы (40), получим следующее его значение:

$$\frac{1}{2} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi_0) - \cos \alpha (\alpha \sin \alpha - \varphi_0 \sin \varphi_0) - \\ - \cos \alpha (\cos \alpha - \cos \varphi_0) - \frac{i^2}{2\rho^2} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi_0) + \\ + \frac{i^2}{\rho^2} \cos \alpha (\cos \alpha - \cos \varphi_0) + \frac{ki^2}{2\rho^2} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi_0) \quad (41)$$

и для распора, приняв $k=3$,

$$H = P \frac{\frac{1}{2} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi_0) - \cos \alpha (\alpha \sin \alpha - \varphi_0 \sin \varphi_0)}{(\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha) (1 + \beta)} - \\ - \frac{\cos \alpha (\cos \alpha - \cos \varphi_0) + \frac{i^2}{\rho^2} \cos \varphi_0 (\cos \varphi_0 - \cos \alpha)}{(\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha) (1 + \beta)}. \quad (42)$$

Произведя численные подсчеты, получим, что изменения числа теля от введения дополнительных членов являются величинами того же порядка, что и в арках с параболической осью (таблица II).

Если определен распор для случая загрузки одной вертикальной сосредоточенной силой, нетрудно перейти от него к случаям загрузки арки несколькими сосредоточенными силами, парой сил и распределенной нагрузкой. В случае загрузки распределенной нагрузкой интенсивности q мы найдем распор, заменив P через $\rho q \cos \varphi_0 d\varphi_0$ в формулах, относящихся к случаю загрузки одной силой, и удвоив полученный таким образом результат интегрирования ¹⁾ в пределах от $\varphi_0=0$ до $\varphi_0=\alpha$. Если нагрузка

¹⁾ Предполагается симметричное расположение нагрузки.

равномерная, т. е. $q = \text{const}$, получаем, согласно формуле (41),

$$H = 2\rho q \frac{\frac{1}{3} \sin^3 \alpha + \frac{1}{4} \cos \alpha (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha - 2\alpha \sin^2 \alpha)}{(\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha) (1 + \beta)} + \frac{\frac{i^2}{\rho^2} \left[-\frac{1}{3} \sin^3 \alpha + \frac{k}{3} \sin \alpha + \frac{1}{2} (\cos^2 \alpha \sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \right]}{(\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha) (1 + \beta)}. \quad (43)$$

Подсчеты показывают, что дополнительные члены незначительно влияют на величину числителя. Например, при $\alpha = 28^\circ$ для распора H получим значения

$$H = 2q\rho \frac{0,003312}{0,007101} = 0,9328\rho q = 0,9934ql, \quad (k)$$

или

$$H = 2q\rho \frac{0,003312 + 0,00266 \frac{h^2}{l^2}}{0,007101 \left(1 + 10,11 \frac{h^2}{l^2} \right)}, \quad (l)$$

смотря по тому, пренебрегают ли всеми дополнительными членами или же учитывают их. Как видно, поправки имеют второстепенное значение для числителя.

Чтобы определить распор в случае загрузки парой сил, достаточно дифференцировать формулу, полученную для случая загрузки одной сосредоточенной силой. Действительно, $-\frac{dH}{d\varphi} d\varphi$ представляет собой распор, вызванный системой сил, согласно рис. 12, *b*. Эта система представляет собой пару сил с моментом $P\rho \cos \varphi d\varphi$.

Распор, вызванный парой сил с моментом, равным единице, представится так:

$$H' = -\frac{1}{P} \frac{dH}{d\varphi} \frac{1}{\rho \cos \varphi}. \quad (44)$$

Полагая $k=3$, на основании формулы (42) получаем:

$$H' = \frac{1}{\rho} \frac{\sin \varphi - \varphi \cos \alpha + \frac{i^2}{\rho^2} (2 \sin \varphi - \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi)}{(\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha) (1 + \beta)}. \quad (44')$$

Приравняв угол φ углу α , получаем распор, вызванный моментом, приложенным к арке у левого шарнира.

В заключение рассмотрим случай круговой арки под действием распределенной нагрузки, интенсивность которой изменяется согласно закону $q = q_0 / \cos^3 \varphi$.

Веревоочная кривая для этой нагрузки есть окружность, которая при надлежащем выборе H_0 может быть приведена к совпадению с осью арки ¹⁾.

В этом случае удобно пользоваться формулой (27). Ее знаменатель, равный u'_a , нами уже определен; см. формулы (а), (b), (с), (d). Ее числитель, в случае если поперечное сечение постоянно по длине и равно F_0 , представится так:

$$\int_0^s \frac{H_0 ds}{EF} = \int_0^s \frac{H_0}{EF\rho} \frac{l-y}{\cos \varphi} ds = \frac{H_0 \rho}{EF_0} \left[\int_0^\alpha d\varphi - \int_0^\alpha \frac{\cos \varphi - \cos \alpha}{\cos \varphi} d\varphi \right] =$$

$$= \frac{H_0 \rho \cos \alpha}{EF_0} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{H_0 \rho}{EF_0} \cos \alpha \ln (\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha).$$

Следовательно,

$$H' = H_0 \frac{2i^2}{\rho^2} \frac{\cos \alpha \ln (\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha)}{(\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha) (1 + \beta)} =$$

$$= H_0 \frac{8i^2}{l^2} \frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha \ln (\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha)}{(\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha) (1 + \beta)}. \quad (45)$$

Смещение кривой давления в ключе легко определить по формуле (37). Для очень пологих арок это смещение мало разнится от того, которое мы нашли для параболической арки.

Например, для $\alpha = 28^\circ$ имеем $H' : H_0 \approx 8,47h^2/l^2$. Этот результат близок к числовым значениям таблицы III для отношения $f/l = 1/8$.

§ 9. Симметричная арка произвольного очертания

Распор арки, вызываемый произвольной симметричной нагрузкой, можно определить при помощи формулы (25). Точные значения входящих в нее интегралов могут быть, однако, найдены только для некоторых случаев; в общем же приходится удовлетвориться приближенным решением при помощи формулы Симпсона, применяя ее для двух полуарок, разбитых на равное число клиньев.

Чтобы дать себе отчет о степени приближения наших расчетов в случае разложения арки на различное число отдельных клиньев, применим этот метод к случаю, когда интегрирование членов формулы не представляет особых затруднений. Пусть, например, необходимо найти распор в круговой арке постоянного сечения при центральном угле $\alpha = 28^\circ$ под действием вертикальной нагрузки, равномерно распределенной по пролету. Точное решение задачи получается при помощи формулы (43). Чтобы рассчитать распор с помощью формулы Симпсона, применим равенство (25), если

¹⁾ Следовательно, здесь H_0 представляет распор, определяемый в предположении трехшарнирной арки.

знаменатель может быть выражен следующим образом:

$$\frac{1}{EJ_0} \left[\int_0^s (f-y)^2 ds + i^2 \int_0^s \cos^2 \varphi ds - \frac{2i^3}{\rho} \int_0^s (f-y) \cos \varphi ds + ki^2 \int_0^s \sin^2 \varphi ds \right]. \quad (a)$$

Начнем наши расчеты с вычисления первого интеграла, так как он является основным членом знаменателя. Для этой цели разобьем полуарку на восемь равных частей. Соответствующие значения подынтегральных функций приведены в третьем столбце таблицы IV.

Таблица IV

φ°	$\frac{(1/\rho)(f-y)}{(\cos\varphi - \cos\alpha)}$	$(f-y)^2/\rho^3$	$\cos^2 \varphi$	$\frac{[(f-y) \cos \varphi/\rho]}{=\cos\varphi(\cos\varphi - \cos\alpha)}$	$\frac{(\sin^2\alpha - \sin^2\varphi) \times}{\times(\cos\varphi - \cos\alpha)}$	$\sin^2\varphi \cos\varphi$
0	0,1171	0,01371	1,0000	0,1171	0,02581	0
3,5	0,1152	0,01327			0,02496	
7,0	0,1096	0,01201	0,9851	0,1088	0,02252	0,01474
10,5	0,1004	0,01008			0,01879	
14	0,0874	0,00764	0,9415	0,0848	0,01415	0,05679
17,5	0,0708	0,00501			0,00920	
21	0,0507	0,00257	0,8716	0,0473	0,00466	0,1199
24,5	0,0271	0,00073			0,00131	
28	0,0000	0,00000	0,7796	0,0000	0,00000	0,1946

Так как длина дуги арки, соответствующая одному клину с центральным углом в $3,5^\circ$, равна $0,06109 \rho$, то для рассматриваемого интеграла по формуле Симпсона получим следующую величину:

$$\begin{aligned} \int_0^s (f-y)^2 ds &= \frac{\rho^3 \cdot 0,06109}{3} [0,01371 + 4(0,01327 + 0,01008 + \\ &+ 0,00501 + 0,00073) + 2(0,01201 + 0,00764 + 0,00257) + 0] = \\ &= \rho^3 \frac{0,06109}{3} 0,1745 = 0,003553\rho^3. \end{aligned}$$

Если бы полуарку разбить на четыре клина вместо восьми, то результат оказался бы равным

$$\begin{aligned} \int_0^s (f-y)^2 ds &= \\ &= \frac{\rho^3 \cdot 0,1222}{3} [0,01371 + 4(0,01201 + 0,00257) + 2 \cdot 0,00764 + 0] = \\ &= \rho^3 \frac{0,1222}{3} 0,08731 = 0,003556\rho^3. \end{aligned}$$

Точная же величина рассматриваемого интеграла равна, согласно формуле (а) § 8,

$$\int_0^s (f-y)^2 ds = \frac{\rho^3}{2} (\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha) = 0,0035506\rho^3.$$

Как видно, ограничиваясь даже четырьмя элементарными клиньями, мы получаем приближение, вполне достаточное для практических целей.

На основании этого заключения, при определении значений остальных интегралов в выражении (а), играющих роль незначительных поправок, мы разобьем полуарку лишь на четыре элементарных клина.

Пользуясь численными значениями, приведенными в четвертом и пятом столбцах таблицы IV, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^s \cos^2 \varphi ds &= \\ &= \frac{\rho 0,1222}{3} [1 + 4(0,9851 + 0,8716) + 2 \cdot 0,9415 + 0,7796] = \\ &= \rho \frac{0,1222}{3} 11,089 = 0,4517\rho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^s (f-y) \cos \varphi ds &= \\ &= \frac{\rho^2}{3} 0,1222 [0,1171 + 4(0,1088 + 0,0473) + 2 \cdot 0,0848 + 0] = \\ &= \frac{\rho^2}{3} 0,1222 \cdot 0,9111 = 0,03711\rho^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^s \sin^2 \varphi ds &= \rho \int_0^\alpha (1 - \cos^2 \varphi) d\varphi = \rho \left(\alpha - \int_0^\alpha \cos^2 \varphi d\varphi \right) = \\ &= \rho (0,4887 - 0,4517) = 0,0370\rho. \end{aligned}$$

Полученными значениями определяются все интегралы знаменателя выражения (а).

Теперь определим числитель дроби формулы (25).

В случае равномерно распределенной по пролету нагрузки мы имеем:

$$M_0 = \frac{q\rho^2}{2} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi), \quad N_0 = q\rho \sin^2 \varphi, \quad Q_0 = q\rho \sin \varphi \cos \varphi. \quad (b)$$

По выполнении соответственных подстановок числитель получит следующее выражение:

$$\frac{1}{EJ} \left[\int_0^{\alpha} \frac{q\rho^4}{2} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi) (\cos \varphi - \cos \alpha) d\varphi - i^2 q\rho^3 \int_0^{\alpha} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi + \right. \\ \left. + i^2 q\rho^3 \int_0^{\alpha} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \varphi \cos \varphi - \cos \alpha \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \cos \varphi \right) d\varphi + \right. \\ \left. + ki^2 q\rho^3 \int_0^{\alpha} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi \right]. \quad (c)$$

Для вычисления первого интеграла формулы (с) разобьем полуарку на восемь клиньев. Соответственные величины подынтегральных функций приведены в шестом столбце таблицы IV. Применяя формулу Симпсона, получим

$$\frac{q\rho^4}{2} \int_0^{\alpha} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi) (\cos \varphi - \cos \alpha) d\varphi = \\ = \frac{q\rho^4 \cdot 0,06109}{2 \cdot 3} [0,02581 + 4(0,02496 + 0,01879 + 0,00920 + 0,00131) + \\ + 2(0,02252 + 0,01415 + 0,00466) + 0] = \\ = \frac{q\rho^4}{2} \cdot \frac{0,06109}{3} \cdot 0,3255 = 0,003314q\rho^4.$$

Чтобы вычислить другие интегралы выражения (с), разобьем полуарку на четыре клина. Тогда для этих интегралов получаем следующие приближенные значения:

$$\int_0^{\alpha} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \\ = \frac{0,1222}{3} [0 + 4(0,01474 + 0,1199) + 2 \cdot 0,05679 + 0,1946] = \\ = \frac{0,1222}{3} 0,8466 = 0,03448,$$

$$\int_0^{\alpha} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \varphi \cos \varphi - \cos \alpha \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \cos \varphi \right) d\varphi = \\ = \frac{3}{2} \int_0^{\alpha} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi - \cos \alpha \int_0^{\alpha} \sin^2 \varphi d\varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \int_0^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = \\ = \frac{3}{2} 0,03448 - \cos \alpha \cdot 0,0370 - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha = -0,03267.$$

Подставив в формулу (25) все полученные нами численные значения, найдем

$$H = q\rho \frac{0,003314 + \frac{i^2}{\rho^2} [(k-1) 0,03448 - 0,03267]}{0,003556 + \frac{i^2}{\rho^2} (0,4517 + k \cdot 0,0370 - 2 \cdot 0,03711)}.$$

Допустив, что поперечное сечение арки имеет прямоугольную форму, и положив

$$k = 3, \quad \frac{i^2}{\rho^2} = \frac{h^2 \sin^2 \alpha}{3l^2} = 0,07347 \frac{h^2}{l^2},$$

мы приходим окончательно к следующему равенству:

$$H = 2q\rho \frac{0,003314 + 0,002666 \frac{h^2}{l^2}}{0,007112 \left(1 + 10,09 \frac{h^2}{l^2} \right)}.$$

Сравнение полученного результата с формулой (1) предыдущего параграфа приводит нас к заключению, что принятый нами способ расчета и выбранное число элементарных клиньев, на которые мы разбиваем полуарку, вполне гарантирует нам достаточное приближение при определении величины H . Также легко находится распор, вызываемый в арке произвольного очертания какими угодно нагрузками.

Если нагрузка состоит из одной сосредоточенной силы, то задача приводится к случаю, который был уже нами рассмотрен, путем добавления второй силы, расположенной симметрично относительно первой.

Для упрощения расчетов возможно ограничиться лишь основным членом числителя формулы (25), а в знаменателе оставить только поправочный член, учитывающий влияние продольной силы. Тогда распор H определится по упрощенной формуле

$$H = \frac{\int_0^s \frac{M}{EJ} (f-y) ds}{\int_0^s \frac{(f-y)^2}{EJ} ds + \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EF}}. \quad (46)$$

Расчеты, выполненные для арок параболической и круговой формы, в отдельных случаях позволяют определить погрешности, допущенные при определении распора при помощи формулы (46).

§ 10. Случай, когда продольная ось арки близка к веревочной кривой, построенной для нагрузки на арке

В этом случае удобнее всего применить приближенную формулу (28). Чтобы судить о степени приближения, которую она дает, применим ее к случаю, для которого нам известна точная величина распора. Возьмем для примера круговую арку постоянного сечения, несущую вертикальную равномерно распределенную по всему пролету нагрузку. Точное значение распора дано формулой (43); что же касается приближенной формулы (28), то ее знаменатель нами был уже определен. Для круговой арки (§ 8) он имеет такое значение:

$$\frac{\rho^3}{2EJ_0} (\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha) (1 + \beta). \quad (a)$$

где β определяется формулой (39).

Числитель формулы (28) равен ¹⁾:

$$\begin{aligned} & \int_0^s \frac{H_0 ds}{EF} - \int_0^s \frac{H_0 (f-y)}{EF\rho \cos \varphi} ds - \int_0^s \frac{H_0 (y-y_1)}{EJ} (f-y) ds = \\ & = \frac{H_0 \rho}{EF} \left[\int_0^\alpha d\varphi - \int_0^\alpha \frac{\cos \varphi - \cos \alpha}{\cos \varphi} d\varphi \right] - \frac{H_0 \rho^3}{EJ} \int_0^\alpha \frac{(\cos \varphi - \cos \alpha) (y - y_1) d\varphi}{\rho} = \\ & = \frac{H_0 \rho \cos \alpha}{EF} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - \frac{H_0 \rho^3}{EJ} \int_0^\alpha (\cos \varphi - \cos \alpha) \times \\ & \times \left(1 - \cos \varphi - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \sin^2 \varphi \right) d\varphi = \frac{H_0 \rho \cos \alpha}{EF} \ln (\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha) - \\ & - \frac{H_0 \rho^3}{EJ} \left[\sin \alpha - \frac{1}{2} (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) - \frac{1}{3} \sin \alpha (1 - \cos \alpha) - \alpha \cos \alpha + \right. \\ & \left. + \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{2} \frac{(1 - \cos \alpha) \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \right]. \quad (b) \end{aligned}$$

Определим распор для угла $\alpha = 28^\circ$. Для знаменателя (a) найдем значение

$$\frac{\rho^3}{EJ} 0,003551 \left(1 + 10,11 \frac{h^2}{l^2} \right).$$

¹⁾ Здесь y — ордината оси круговой арки, y_1 — ордината параболической веревочной кривой. Следовательно,

$$y = \rho (1 - \cos \varphi), \quad y_1 = \frac{4f}{l^2} \rho^2 \sin^2 \varphi = \frac{\rho (1 - \cos \alpha) \sin^2 \varphi}{\sin^2 \alpha}.$$

Числитель для принятого угла равен:

$$\frac{H_0 \rho}{EF} 0,450 + \frac{H_0 \rho^3}{EJ} 0,000032.$$

Подставляя эти величины в формулу (28), получим:

$$H' = H_0 \frac{0,000032 + 0,450 \frac{i^2}{\rho^2}}{0,003551 \left(1 + 10,11 \frac{h^2}{l^2} \right)}. \quad (c)$$

Здесь H_0 означает распор трехшарнирной арки, а H' представляет величину, на которую уменьшается этот распор для двухшарнирной арки. Искомый распор двухшарнирной арки равен:

$$H = H_0 - H' = H_0 \left[1 - \frac{0,000032 + 0,450 \frac{i^2}{\rho^2}}{0,003551 \left(1 + 10,11 \frac{h^2}{l^2} \right)} \right],$$

и так как

$$H_0 = \frac{ql^2}{8f} = 0,9412q\rho, \quad \frac{i^2}{\rho^2} = \frac{h^2}{l^2} \frac{\sin^2 \alpha}{3} = 0,0735 \frac{h^2}{l^2},$$

то получаем:

$$H = H_0 - H' = q\rho \frac{0,003312 + 0,00267 \frac{h^2}{l^2}}{0,003551 \left(1 + 10,11 \frac{h^2}{l^2} \right)}. \quad (d)$$

Таким образом, мы имеем в пределах приближений, допущенных в наших расчетах, полное совпадение результатов, полученных, с одной стороны, на основании приближенной формулы (28), а с другой — на основании точной формулы (43), (§ 8, формула (I)). Это совпадение объясняется тем, что ординаты круговой оси и параболы в пологих арках мало отличаются друг от друга.

Например, для очень пологой арки и при угле в 53° формула (28) дает:

$$H' = H_0 \frac{0,0361 + 8,599 \frac{i^2}{\rho^2}}{1 + 2,568 \frac{h^2}{l^2}}. \quad (e)$$

Соответствующий распор равен

$$H = H_0 - H' = q\rho \frac{0,772 + 0,593 \frac{h^2}{l^2}}{1 + 2,568 \frac{h^2}{l^2}}, \quad (f)$$

тогда как точная формула (43) дает для того же самого распора величину

$$H = q\rho \frac{0,771 + 0,571 \frac{h^2}{l^2}}{1 + 2,568 \frac{h^2}{l^2}}.$$

Мы видим, что величина поправочного члена в числителе иная, но так как его влияние незначительно, то значение (f), полученное для распора, может считаться достаточно точным. Указанный здесь способ расчета распора дает нам возможность сделать несколько заключений, относящихся к положению кривой давления. Как мы видели из формулы (37), смещение этой кривой в ключе вполне определяется величиной H' . Если продольная ось арки совпадает с веревочной кривой, проходящей через центр сечения в ключе и через опорные шарниры, то H' определится по формуле (27). Отдаляя несколько одну из этих кривых от другой, надо для определения H' перейти от формулы (27) к (28). Это вызовет незначительное изменение в знаменателе, а в числителе появится третий член, представляющий влияние изгибающего момента. При $y > y_1$, т. е. когда ось арки проходит ниже веревочной кривой, этот дополнительный член будет отрицательным. Он вызывает уменьшение H' и, следовательно, смещение кривой давления в ключе. В противоположном случае H' увеличивается, и смещение кривой давления в ключе более существенно, чем при совпадении этих двух кривых. Подобный случай находится среди численных примеров, исследованных выше.

Если для продольной арки мы выберем окружность, а веревочная кривая будет параболой, то получится увеличение H' . Формулы (с) и (е), кроме того, показывают, что влияние дополнительного члена в числителе тем существеннее, чем большую пологость имеет арка и чем меньше ее толщина. При соответствующем выборе очертания продольной оси возможно в формуле (28) числитель сделать равным нулю и, следовательно, провести кривую давлений через центр сечения в ключе. Однако выбор такой оси не представляет выгоды, так как уменьшение смещения кривой давления в ключе сопровождается увеличением изгибающих моментов в других сечениях арки. Пусть $AmCnB$ представляет собой веревочную кривую для вертикальной нагрузки арки. Если ось арки совпадает с этой кривой, а кривая давлений пройдет над осью и расположится по линии AC_1B (рис. 13), то ординаты заштрихованной площадки, заключенные между кривыми AC_1B и $AmCnB$, пропорциональны изгибающим моментам, полученным от смещения кривой давлений. Эти моменты при неподвижности сечения в ключе C и при свободных концах арки произведут горизонтальные перемещения точек A и B ,

определяемые интегралом

$$\int_0^s \frac{M ds}{EJ} (f - y). \quad (g)$$

Эти перемещения равны по абсолютной величине и противоположны по знакам перемещениям, вызываемым продольной силой.

Если $I = I_0 / \cos \varphi$, то величина, представленная интегралом (g), становится пропорциональной статическому моменту заштрихованной площади относительно оси AB , проходящей через центры опорных шарниров.

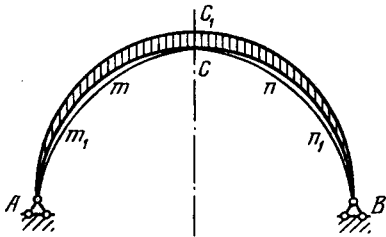


Рис. 13.

Предположим теперь, что мы выбрали для продольной оси такую кривую Am_1Cn_1B , что кривая давлений в ключе совсем не смещается. Тогда веревочная кривая $AmCnB$ будет одновременно и кривой давлений, а ординаты, заключенные между этой кривой и новой осью Am_1Cn_1B , будут пропорциональными изгибающим моментам в арке этой новой формы. Так как действие продольных сил в двух близких по форме арках почти одно и то же, то и перемещения, производимые моментами и представленные интегралом (g), также будут почти равны. Следовательно, при $I = I_0 / \cos \varphi$ статические моменты площадей, из которых одна заштрихована на рисунке, а другая находится между $AmCnB$ и Am_1Cn_1B , относительно оси AB должны мало разниться между собой. Из этого заключаем, что изгибающие моменты при новом выборе оси более значительны, чем когда продольная ось совпадает с веревочной кривой, проходящей через опорные шарниры и центр сечения в ключе.

§ 11. Погрешности, вводимые при расчете двухшарнирных арок

Займемся вопросом о выяснении степени приближения, допущенной в наших расчетах.

Если применять полную форму (25), то погрешности, допущенные при вычислении величины распора H , будут зависеть только от неточности наших основных гипотез, которые не вполне соответствуют действительности. В самом деле, мы основываем наши выводы на гипотезе плоских сечений, на строгом применении к материалам, из которых выполнены арки, закона Гука и на предположении, что действующие на арку силы приложены к продольной оси арки. Гипотеза плоских сечений дает результаты достаточно точные для арок незначительной толщины, что соответствует наиболее часто

встречающимся на практике случаям сооружения арок. Закон Гука имеет наиболее точное применение для таких материалов, как железо и сталь. Его применение к каменным и бетонным аркам приводит к значительным погрешностям. Однако, хотя исследования в этой области еще недостаточны, но все же можно утверждать, что допущение в этих случаях закона Гука дает удовлетворительные для практического применения результаты.

Перейдем к вопросу переноса сил на ось. Вертикальную силу P (рис. 14), приложенную к точке K на внешней поверхности свода, мы переносим в точку K_1 , находящуюся на пересечении оси свода с продолжением направления силы P .

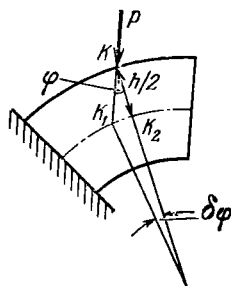


Рис. 14.

Иногда точку приложения силы переносят в плоскость соответствующего поперечного сечения. Тогда имеется вертикальная сила, приложенная в точке K_2 , и пара сил. В этих двух случаях переходим от заданной системы к системе статически определимой, и на основании принципа Сен-Венана можно утверждать, что подобная замена существенно не влияет на напряженное состояние тех элементов арки, расстояния которых от точки K значительны по сравнению с KK_1 и KK_2 . Следовательно, изменение распора, происшедшее от переноса сил, будет тем меньше, чем меньше отношение поперечных размеров арки к ее пролету.

Найдем различие между величинами распора, полученными в результате этих двух различных способов переноса сил.

Обозначим через H распор, вызванный силой P , приложенной в точке K_2 , и H' — распор, вызванный соответственным моментом, равным единице, приложенным в сечении KK_2 (формула (44)):

$$H' = -\frac{1}{P} \frac{dH}{d\varphi} \frac{1}{\rho \cos \varphi} \quad (a)$$

Тогда, перенося силу P из точки K в точку K_2 , получаем следующую величину распора:

$$H - H' P \rho \cos \varphi \delta\varphi = H + \frac{dH}{d\varphi} \delta\varphi. \quad (b)$$

Переносим же силу P из точки K в точку K_1 , получаем следующую величину распора, который является функцией φ :

$$H + \delta\varphi \frac{dH}{d\varphi} + \frac{(\delta\varphi)^2}{1.2} \frac{d^2H}{d\varphi^2} + \dots \quad (c)$$

Ограничиваясь в полученном выражении лишь бесконечно малыми первого порядка малости, мы устанавливаем, что выражения (b) и (c) тождественны.

Чтобы оценить порядок величины разности между (b) и (c), заметим, что

$$(\delta\varphi)^2 = \left(\frac{h}{2\rho} \operatorname{tg} \varphi \right)^2. \quad (d)$$

Как видно, разности изменяются прямо пропорционально отношению h/ρ — высоты поперечного сечения арки к ее радиусу кривизны.

К такому же выводу мы приходим и в случае постоянной нагрузки. Возьмем, например, круговую арку постоянного поперечного сечения, несущую на своей внешней поверхности постоянную нагрузку, равномерно распределенную по пролету. Каждый элемент внешней поверхности арки воспринимает нагрузку

$$q \left(\rho + \frac{h}{2} \right) \delta\varphi \cos \varphi. \quad (e)$$

Перенеся ее по направлению радиуса на ось, мы находим для интенсивности перенесенной нагрузки следующую величину:

$$q_1 = q \frac{\rho + \frac{h}{2}}{\rho} = q \left(1 + \frac{h}{2\rho} \right). \quad (f)$$

Кроме того, это перенесение вводит пары сил, приложенные к каждому элементарному клину арки, величина момента которых

$$q_1 \rho \frac{h}{2} \cos \varphi \sin \varphi \delta\varphi. \quad (g)$$

Распор H_1 , вызванный нагрузкой (f), получается по формуле (43), которая может быть представлена в виде

$$H_1 = 2q_1 \rho t,$$

где t обозначает объединение входящих в нее тригонометрических величин. Распор H_2 , полученный от пар сил (g), может быть представлен в виде

$$H_2 = -2 \int_0^{\alpha} H' q_1 \rho \frac{h}{2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = -q_1 h t,$$

если применить формулу (44').

Полный распор

$$H = H_1 + H_2 = 2q_1 \rho t \left(1 - \frac{h}{2\rho} \right) = 2q \rho t \left(1 - \frac{h^2}{4\rho^2} \right). \quad (h)$$

Если бы мы перенесли распределенную нагрузку, приложенную к внешней поверхности свода пролета AB , на продольную ось по направлению вертикали, мы получили бы для распора следующее

выражение:

$$2q\rho t. \quad (k)$$

Таким образом, разница между величинами распоров, полученная от применения двух различных способов приложения действующих на данную систему сил, равна

$$2q\rho t \frac{h^2}{4\rho^2}. \quad (l)$$

Заметим, что второй способ переноса сил совершенно не принимает во внимание части нагрузки, расположенной по пролету AB на расстояниях, равных $\frac{h}{2} \sin \alpha$, от центра каждого из опорных сечений.

Действие, вызванное этой нагрузкой, может быть легко вычислено при замене ее двумя парами сил разных знаков, приложенными к опорам и имеющими общую величину $\frac{1}{2} q \left(\frac{h}{2} \sin \alpha \right)^2$.

Они вызовут распор, равный, согласно выражению (44'),

$$-\frac{qh^2}{4\rho} \sin^2 \alpha \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha + \frac{i^2}{\rho^2} \sin \alpha}{(\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha) (1 + \beta)}.$$

Прибавив это выражение к формуле (k), мы получаем более близкое совпадение величин распоров, полученных от различных способов приложений заданных сил.

Из всех высказанных выше соображений следует, что распор в тонких арках, построенных из материалов, следующих закону Гука, получается с приближением вполне удовлетворительным.

Можно предполагать, что для многих построенных арок допущенные способы расчета дают величину распора с точностью до 1%.

Допустив это приближение для величины распора, посмотрим, каковы будут ошибки в величине моментов, вызванных подвижными сосредоточенными силами и распределенной нагрузкой.

Изгибающий момент, вызванный в произвольном поперечном сечении арки K (рис. 15, *a*) вертикальной сосредоточенной силой, определяется разностью между соответственными ординатами ломаной линии akb и линии $H - acb$ (рис. 15, *b*).

Поэтому для точек приложения сосредоточенной силы, для которых эта разность мала, т. е. значения искомого момента невелики, приближение в вычислении изгибающего момента не будет большим, даже если бы H было вычислено с минимальной ошибкой. С точки зрения практики вычисление вводимых в наших расчетах ошибок становится интересным тогда, когда мы переходим к самым невыгодным положениям подвижного груза. Предположим, например,

что груз расположен над рассматриваемым сечением K ; тогда изгибающий момент получится умножением груза на длину n и величину отрезка ke , определенного в отвлеченных единицах (рис. 15, б). При заданной погрешности в определении величины H ошибка в

определении величины изгибающего момента зависит от отношения отрезков ke и eg .

Это отношение изменяется вместе с пологостью арки и с положением груза.

В таблице V приведены некоторые числа, характеризующие это отношение для параболических арок различной пологости.

Первая строка этой таблицы содержит отношения стрелы арки

к ее пролету. Вторая строка дает отношение расстояний подвижного груза от середины арки к пролету. Третья строка дает отношение момента M_0 , вызванного грузом в прямом бруске, к пролету арки. В четвертой строке приведены значения распора H , высчитанные при помощи таблиц I и II для отношения $h/l=0,1$. В пятой строке помещены отношения момента распора H относительно точки K к пролету арки. Наконец, шестая строка дает отношения изгибающего момента в сечении K арки к пролету.

Численные значения последних двух строк, очевидно, пропорциональны отрезкам eg и ke (рис. 15, б), и отношения между этими числами дают возможность судить о степени приближения, достигнутого при вычислении величин изгибающего момента.

При равной ошибке, сделанной при определении величин распора, величина изгибающего момента будет тем точнее, чем отношение между числами шестой строки и соответствующими числами пятой строки будет больше. Из этого видно, что точность в определении изгибающего момента растет при перемещении нагрузки от середины пролета к опорам. При заданной погрешности в определении распора H максимальная ошибка, сделанная в изгибающем моменте, относится к положению нагрузки посередине пролета. Она растет вместе с пологостью арки. Для $f/l=1/2$ относительная ошибка в 1% в $Hn/l=0,196$ влечет за собой ошибку, почти равную 4% в $(M_0-Hn)/l=0,054$, между тем как для $f/l=1/12$ та же относительная ошибка от $Hn/l=0,160$ сопровождается ошибкой $< 2\%$ в $(M_0-Hn)/l=0,090$.

Эти числа характеризуют ошибки в величинах моментов, когда грузы расположены над рассматриваемым сечением; для других положений грузов эти ошибки более значительны. Поэтому, когда мы будем искать величину наибольшего положительного изгибающего момента в сечении K и когда мы расположим систему грузов

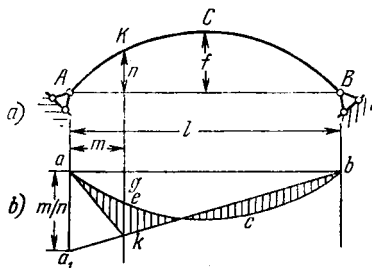


Рис. 15.

над положительной частью площади влияния, то погрешность, полученная в величине момента, будет больше, чем погрешность, полученная при определении изгибающего момента, вызванного одним грузом, расположенным в сечении K .

Таблица V

$\frac{f}{l}$	$\frac{1}{12}$				$\frac{1}{8}$			
$\frac{x_0}{l}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
$\frac{M_0}{l}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{64}$
H	1,92	1,78	1,37	0,747	1,43	1,33	1,02	0,556
$\frac{Hn}{l}$	0,160	0,139	0,086	0,027	0,179	0,156	0,096	0,030
$\frac{M_0 - Hn}{l}$	0,090	0,095	0,102	0,082	0,071	0,078	0,092	0,079
$\frac{f}{l}$	$\frac{1}{4}$				$\frac{1}{2}$			
$\frac{x_0}{l}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
$\frac{M_0}{l}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{64}$
H	0,767	0,711	0,546	0,298	0,391	0,362	0,278	0,152
$\frac{Hn}{l}$	0,192	0,167	0,102	0,033	0,196	0,170	0,104	0,033
$\frac{M_0 - Hn}{l}$	0,058	0,067	0,086	0,076	0,054	0,064	0,084	0,076

Мы получим еще более значительные погрешности, если расположим нагрузки как над положительной частью, так и над отрицательной частью площади влияния. Тогда изгибающий момент получается в виде разницы между моментами, вызванными двумя группами грузов. Относительная погрешность будет тем больше, чем меньше эта разница. Возьмем, например, круговую арку, внешняя поверхность которой параллельна оси, несущую нагрузку, равномерно распределенную по пролету. Ее распор может быть определен по формуле (43). Применив эту формулу в случае, когда $\alpha = 28^\circ$

($f=0,1247l$), мы получим (см. формулу (1) § 8)

$$H = 2qr \frac{0,003312 + 0,00266 \frac{h^2}{l^2}}{0,007101 \left(1 + 10,11 \frac{h^2}{l^2}\right)};$$

для $\frac{h^2}{l^2} = 0,01$ будем иметь $H = 0,9084 ql$.

Момент посередине пролета

$$\begin{aligned} M &= M_0 - Hf = 0,1250ql^2 - 0,9084 \cdot 0,1247ql^2 = \\ &= (0,1250 - 0,1133) ql^2 = 0,0117ql^2. \end{aligned}$$

Мы видим, что относительная ошибка в 1% в величине распора дает в значении момента ошибку уже в 10%.

Для $\alpha = 90^\circ$ имеем

$$M = M_0 - Hf = (0,1250 - 0,1060) ql^2 = 0,0190ql^2,$$

и следовательно, относительная ошибка в величине распора в 1% дает для момента ошибку приблизительно 6%.

В то время как распор может быть определен с большим приближением, степень приближения в определении изгибающих моментов и соответствующих усилий стоит значительно ниже.

§ 12. Деформации двухшарнирной арки

Если распор арки найден, то задача о деформации ее оси без затруднения решается при помощи общих формул, определяющих деформацию кривого бруса (§§ 3 и 4). В наиболее встречающихся на практике случаях симметричной арки обыкновенно определяют перемещение ключевого сечения. На основании теоремы о взаимности перемещений вместо искомого перемещения можно определить вертикальное перемещение любой точки оси арки под действием вертикальной силы P , приложенной посередине ее пролета. Рассматривая только половину симметричной арки, мы приходим к определению вертикального

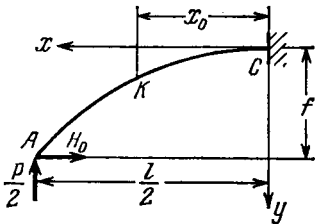


Рис. 16.

перемещения для случая, представленного на рис. 16. Общая формула, определяющая вертикальные перемещения произвольной точки K , выражается следующим образом (формулы (21)):

$$\begin{aligned} v_k &= - \int_0^{s_0} \left(\frac{M}{ES\rho} + \frac{N}{EF\rho} \right) (x_0 - x) ds - \\ &- \int_0^{s_0} \left(\frac{N}{EF} + \frac{M}{EF\rho} \right) \sin \varphi ds - k \int_0^{s_0} \frac{Q \cos \varphi}{EF} ds. \quad (a) \end{aligned}$$

Величина перемещения зависит, как мы видим, от модуля упругости E , который известен нам только приближенно. Поэтому полное выражение (а) обычно не применяется, а перемещение определяют приближенно с помощью выражения (а), ограничиваясь лишь основным его членом.

Таким образом, получаем

$$v_k \approx - \int_0^{x_0} \frac{M}{EJ} (x_0 - x) ds = - \int_0^{x_0} \frac{M}{EJ \cos \varphi} (x_0 - x) dx. \quad (b)$$

Этот результат вполне соответствует тому, который получился бы для изгиба призматического бруса жесткости $EI \cos \varphi$, горизонтально заделанного в сечении C . Поэтому искомые перемещения могли бы быть получены графически при помощи построения соответствующей веревочной кривой.

Положив в формуле (b) $x_0 = l/2$, мы находим перемещение v_A точки A . Искомое вертикальное перемещение оси арки в точке K под действием силы P , приложенной в сечении ключа, очевидно, равно

$$\delta_k = - (v_A - v_k). \quad (c)$$

Применим полученные нами формулы к элементарному случаю параболической арки, сечение которой изменяется по закону $I \cos \varphi = I_0$. Для случая, изображенного на рис. 16, момент M выражается следующим образом:

$$M = \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right) - H_0 (f - y).$$

Внося это выражение в формулу (b), получим

$$v_k = - \frac{P}{2EJ_0} \int_0^{x_0} \left(\frac{l}{2} - x \right) (x_0 - x) dx + \frac{H_0}{EJ} \int_0^{x_0} (f - y) (x_0 - x) dx.$$

Искомое вертикальное перемещение, согласно формуле (c), равно

$$\delta_k = \frac{P}{2EJ_0} \left(\frac{l^3}{24} - \frac{l x_0^2}{4} + \frac{x_0^3}{6} \right) - \frac{H_0}{EJ_0} \left(\frac{5}{48} f l^2 - \frac{f x_0^2}{2} + \frac{f x_0^4}{3l^2} \right). \quad (d)$$

Для определения распора при произвольном положении груза P мы имеем приближенную формулу (m) § 7

$$H = \frac{15}{8} P \frac{\frac{5}{48} \frac{l}{f} - \frac{x_0^2}{2lf} + \frac{x_0^4}{3l^2 f}}{1 + \beta}. \quad (e)$$

Полагая в ней $x_0=0$, получим

$$H_0 = \frac{25}{128} \frac{Pl}{f} \frac{1}{1+\beta}. \quad (f)$$

Эти две формулы позволяют нам переписать формулу (d) в следующем виде:

$$\delta_k = \frac{P}{48EJ_0} (l^3 - 6lx_0^2 + 4x_0^3) - \frac{5}{48} \frac{fl^2}{EJ_0} H. \quad (47)$$

Подставив в эту формулу величину x , которая определяет положение рассматриваемой точки K , и величину H , полученную по формуле (e), мы найдем вертикальное перемещение точки K под действием груза P , расположенного в ключе. Теорема о взаимности перемещений позволяет определить вертикальное перемещение ключевого сечения под действием груза P , расположенного в точке K .

Перемещение ключа под действием силы P , приложенной в самом ключе, получается при подстановке в формулу (47) значений $x_0=0$, $H=H_0$. Тогда

$$\delta_c = \frac{Pl^3}{48 \cdot 128 \cdot EJ_0} \cdot \frac{3 + 128\beta}{\beta} = \frac{Pl^3}{48EJ_0} m. \quad (48)$$

С помощью формулы (47) можно определить вертикальное перемещение ключевого сечения под действием системы вертикальных сил и распределенной нагрузки.

Отметим, что определенные таким образом перемещения представляют собой только грубые приближения. В действительности искомое перемещение получается в виде разницы двух выражений, согласно формуле (47), и влияние непринятых во внимание членов может быть значительно.

В тех случаях, когда требуется более точное значение для перемещения и когда модуль упругости E известен с большой точностью, следует применять полную формулу (a).

Примем ее для определения перемещения параболической арки, удовлетворяющей условиям $I \cos \varphi = I_0$; $F \cos \varphi = F_0$.

Положив в выражении (a)

$$N = \frac{P}{2} \sin \varphi + H_0 \cos \varphi,$$

$$Q = \frac{P}{2} \cos \varphi - H_0 \sin \varphi$$

и произведя интегрирование, мы получим для вертикального

перемещения точки K (рис. 16) следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 v_k = & \frac{P}{2EJ_0} \left(-\frac{l x_0^2}{4} + \frac{x_0^3}{6} \right) - \frac{H_0}{EJ_0} \left(-\frac{f x_0^2}{2} + \frac{f x_0^4}{3l^2} \right) + \\
 & + \frac{P}{2EF_0} \left(-x_0 + p \operatorname{arctg} \frac{x_0}{p} \right) - \frac{H_0}{2EF} p \ln \frac{p^2 + x_0^2}{p^2} - \frac{kPp}{2EF_0} \operatorname{arctg} \frac{x_0}{p} + \\
 & + \frac{kH_0p}{2EF_0} \ln \frac{p^2 + x_0^2}{p^2} - \frac{P}{EF_0} \left[\frac{x_0^2}{4(p^2 + x_0^2)} \left(x_0 + \frac{l}{2} \right) - \frac{p}{2} \frac{x_0}{p} \operatorname{arctg} \frac{x_0}{p} + \right. \\
 & \left. + \frac{p^2}{2} \frac{x_0}{p^2 + x_0^2} \right] - \frac{H_0 x_0}{2EF_0} \operatorname{arctg} \frac{x_0}{p} + \frac{H_0}{2EF_0} \left(f + \frac{p}{2} \right) \frac{x_0^2}{p^2 + x_0^2} - \\
 & - \frac{H_0 p}{4EF_0} \ln \frac{p^2 + x_0^2}{p^2}.
 \end{aligned}$$

Применив его к определению перемещения ключевого сечения, когда груз P расположен в самом ключе, мы приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned}
 \delta_c = & \frac{Pl^3}{48EJ_0} \left\{ 1 + \frac{24i^2}{l^2} \left[1 + (k-2) \frac{p}{l} \operatorname{arctg} \frac{l}{2p} \right] \right\} - \\
 & - \frac{5}{48} \frac{H_0}{EJ_0} fl^2 \left\{ 1 - \frac{24i^2}{5l^2} \left[-\frac{3}{2} \frac{p}{f} \ln \left(1 + \frac{l^2}{4p^2} \right) + \frac{l}{2f} \operatorname{arctg} \frac{l}{2p} - 1 \right] \right\} = \\
 & = \frac{Pl^3}{48EJ_0} n. \quad (49)
 \end{aligned}$$

Этим выражением следует пользоваться в тех случаях, когда необходимо иметь более точное, чем определяемое формулой (48), выражение для перемещения. Чтобы судить о погрешностях, допускаемых при применении формулы (48), в таблице VI приведено

Таблица VI

$\frac{f}{l}$	$\frac{h}{l}$	m	n	Погрешность в %
$\frac{1}{8} \left\{ \right.$	0,10	0,1117	0,1180	5,62
	0,05	0,04710	0,04844	2,85
$\frac{1}{4} \left\{ \right.$	0,10	0,04559	0,05192	13,9
	0,05	0,02909	0,03063	5,30
$\frac{1}{2} \left\{ \right.$	0,10	0,02685	0,03389	26,2
	0,05	0,02430	0,02607	7,30

несколько численных величин коэффициентов m и n для случая, когда $k=3$ и отношение между толщиной в ключе h и пролетом l равно 0,1 или же 0,05. Чтобы пользоваться формулой (49), следует

применять полную формулу для вычисления распора и числа таблиц I и II.

Из таблицы видно, что погрешности при применении приближенной формулы увеличиваются по мере того, как уменьшается пологость и увеличивается толщина h арки.

ГЛАВА III

АРКИ С ЗАДЕЛАННЫМИ ПЯТАМИ

§ 13. Выбор лишних неизвестных в случае симметричной арки

Для выбора лишних неизвестных в случае симметричной арки рассечем ее мысленно в сечении ключа C (рис. 17) и приложим к левой половине систему сил, заменяющую действие на нее правой части

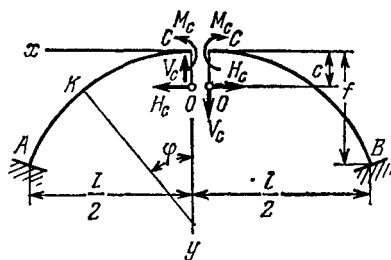


Рис. 17.

и состоящую из момента M_c и двух сил H_c и V_c , приложенных к точке O , расположенной на расстоянии c от центра сечения C . Эта точка предполагается связанной с левой частью арки посредством абсолютно жесткого стержня OC . Также поступим и с правой полуаркой, прилагая к ней систему сил, заменяющую действие на нее левой отсеченной полуарки. Таким образом, силы, действующие между

двумя полуарками, приводятся к двум противоположным парам сил M_c , двум горизонтальным противоположно направленным силам H_c и двум вертикальным противоположно направленным силам V_c . Выберем эти три группы сил за три лишних неизвестных. Перемещение, вызываемое двумя парами M_c , будет состоять в относительном повороте сечений C , ограничивающих полуарки. Перемещение, вызываемое горизонтальными силами H_c , представляет горизонтальное расхождение между точками O и, наконец, перемещение, вызываемое вертикальными силами V_c , — вертикальное расхождение между теми же точками O . Вследствие симметрии мы можем заключить, что вертикальные силы V_c не могут произвести перемещений, соответствующих обобщенным силам M_c и H_c . Сила V_c может быть, таким образом, определена независимо от двух других неизвестных. Чтобы силы H_c и M_c получились также независимыми одна от другой, надо соответственно выбрать расстояние c . Его, несомненно, нужно выбрать таким образом, чтобы действие момента M_c не вызывало горизонтального расхождения между точками O . Тогда силы H_c не вызовут относительного поворота сечений C . Первая и третья формулы (18) дадут следующее выражение горизонталь-

ного перемещения точки O при действии пары сил M_c на левую полуарку:

$$\int_0^s \frac{M_c}{EF\rho} \cos \varphi ds + \int_0^s \frac{M_c y}{ES\rho} ds - c \int_0^s \frac{M_c ds}{ES\rho}. \quad (a)$$

Приравнявая это выражение нулю, получаем следующее выражение для расстояния c :

$$c = \frac{\int_0^s \frac{\cos \varphi ds}{EF\rho} + \int_0^s \frac{y ds}{ES\rho}}{\int_0^s \frac{ds}{ES\rho}}. \quad (50)$$

Если пренебречь влиянием изгибающего момента на сжатие оси арки и положить $ES\rho \approx EJ$, то мы получим для c следующее приближенное значение:

$$c = \int_0^s \frac{y ds}{EJ} \Big/ \int_0^s \frac{ds}{EJ}. \quad (51)$$

Иногда выгодно перенести начало координат из точки C и O . Новые ординаты y_1 будут связаны со старыми равенствами $y = y_1 + c$. Выполним этот перенос и составим условие, по которому горизонтальное перемещение (а) будет равно нулю в новой системе координатных осей. Тогда получим

$$\int_0^s \frac{\cos \varphi ds}{EF\rho} + \int_0^s \frac{y_1 ds}{ES\rho} = 0. \quad (52)$$

Установив выбор лишних неизвестных, попробуем найти их для некоторых частных случаев.

§ 14. Симметрично нагруженные арки

В случае симметричной нагрузки вертикальные силы V_c , очевидно, равны нулю. Чтобы определить силы H_c и M_c , рассмотрим деформацию левой полуарки. Величину H_c мы найдем из того условия, что точка O не будет иметь горизонтального перемещения. Если момент M_c не дает точке O горизонтального перемещения, то можно составить уравнение, введя в него лишь нагрузки, расположенные на левой полуарке, и силу H_c .

Пусть M_0 , N_0 и Q_0 будут соответственно изгибающим моментом, нормальной силой и поперечной силой, вызванными в каком-либо произвольном сечении нагрузками, расположенными на левой

полуарке. Соответственное горизонтальное перемещение точки O на основании формулы (15) получит следующее выражение:

$$u_o = \int_0^s \left(\frac{M_o}{ES\rho} + \frac{N_o}{EF\rho} \right) y ds + \int_0^s \left(\frac{N_o}{EF} + \frac{M_o}{EF\rho} \right) \cos \varphi ds - \\ - \int_0^s \frac{kQ_o}{EF} \sin \varphi ds - c \int_0^s \left(\frac{M_o}{ES\rho} + \frac{N_o}{EF\rho} \right) ds. \quad (53)$$

Чтобы определить горизонтальное перемещение точки O , вызываемое силой H_c , заметим, что (вследствие соответственного выбора точки O) сила H_c не вызовет поворота сечения C . Поэтому перемещение точки O будет равно перемещению точки C . Обозначим через u'_c горизонтальное перемещение точки C от силы $H_o=1$. В этом случае

$$M = 1(y-c), \quad N = 1 \cdot \cos \varphi, \quad Q = -1 \cdot \sin \varphi$$

и при помощи формулы (15) найдем

$$u'_c = \int_0^s \left(\frac{y-c}{ES\rho} + \frac{\cos \varphi}{EF\rho} \right) y ds + \\ + \int_0^s \left(\frac{\cos \varphi}{EF} + \frac{y-c}{EF\rho} \right) \cos \varphi ds + k \int_0^s \frac{\sin^2 \varphi ds}{EF}. \quad (54)$$

Так как при одновременном действии нагрузок, приложенных к левой полуарке, и силы H_c точка O не претерпевает горизонтальных перемещений, то соответствующее этому условию уравнение получит следующий вид: $u_o + H_c u'_c = 0$, откуда

$$H_c = - \frac{u_o}{u'_c}. \quad (55)$$

Величины H_c для каждого частного случая получаются путем замены u_o и u'_c их значениями, определяемыми при помощи формул (53) и (54).

Если начало координат перенесено в точку O , то выражение для u_o получает вид

$$u_o = \int_0^s \left(\frac{M_o}{ES\rho} + \frac{N_o}{EF\rho} \right) y_1 ds + \int_0^s \left(\frac{N_o}{EF} + \frac{M_o}{EF\rho} \right) \cos \varphi ds - \\ - \int_0^s \frac{kQ_o}{EF} \sin \varphi ds. \quad (53')$$

Выражение для u'_c с учетом условия (52) получает вид

$$u'_c = \int_0^s \frac{y_1^2 ds}{ES\rho} + \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EF} + k \int_0^s \frac{\sin^2 \varphi ds}{EF} + 2 \int_0^s \frac{y_1 \cos \varphi}{EF\rho} ds. \quad (54')$$

Для определения распора арки необходимо полученные нами преобразованные выражения для u_0 и u'_0 подставить в общую формулу (55).

Чтобы составить уравнение, определяющее M_c , рассмотрим вновь левую полуарку и воспользуемся тем обстоятельством, что в случае симметричной нагрузки сечение C не поворачивается, а так как поворот сечения C не зависит от силы H_c , то достаточно учесть лишь нагрузку, расположенную на левой полуарке, и пару сил M_c .

Формула (17) дает выражение для поворота сечения под влиянием нагрузок на полуарке:

$$\tau_c = \int_0^s \left(\frac{M_0}{ES\rho} + \frac{N_0}{EF\rho} \right) ds. \quad (56)$$

Поворот этого же сечения под влиянием пары сил $M_c=1$ имеет следующее выражение:

$$\tau'_c = \int_0^s \frac{ds}{ES\rho}. \quad (57)$$

Искомый момент мы получим из уравнения

$$\tau_c + \tau'_c M_c = 0,$$

откуда

$$M_c = - \frac{\tau_c}{\tau'_c}. \quad (58)$$

Заметим, что формулы (55) и (58) пригодны также и в том случае, когда нагрузка несимметрична по отношению к середине арки. Действительно, в симметричной арке распор или момент в ключе, вызванные любой нагрузкой, расположенной на левой полуарке, будут такими же, как и для симметричного расположения той же нагрузки на правой полуарке, и, следовательно, их величина будет равна половине той величины, которую мы получим при симметричном загрузении всей арки.

§ 15. Влияние изменений температуры и смещения опор

Чтобы определить усилия, вызванные равномерным нагреванием арки на t_0 , мысленно сечением в ключе рассечем ее на две части и рассмотрим левую полуарку (рис. 17). При равномерном нагревании не будет угловых перемещений. Если опора A остается совер-

шенно неподвижной, то сечение C будет перемещаться параллельно самому себе, и горизонтальная составляющая этого перемещения будет равна

$$u_c = -\frac{\varepsilon t l}{2}. \quad (a)$$

Так как на самом деле сечение C не перемещается в горизонтальном направлении, то можно прийти к заключению, что вызванный изменением температуры распор H_t действует на арку таким образом, что перемещение (а) уравновешивается соответственными деформациями, вызываемыми этим распором. Из этих соображений мы можем написать следующее уравнение:

$$-\frac{\varepsilon t l}{2} + H_t u'_c = 0, \quad \text{откуда} \quad H_t = \frac{\varepsilon t l}{2u'_c}. \quad (59)$$

Найденный таким образом распор уничтожает перемещение (а), не вызывая какого-либо вращения сечения C .

Следовательно, совокупность усилий, вызванных в ключе повышением температуры, сводится к нормальной силе $N = H_t$ и к изгибающему моменту $M = -H_t c$.

Таким же образом определяют усилия, возникающие в том случае, когда под действием воспринимаемых давлений опоры арки подвергаются перемещению, отдаляющему их друг от друга. Назвав перемещение опор через δ , получим для величины соответствующего распора следующее выражение, выведенное из формулы (59):

$$H = -\frac{\delta}{2u'_c}. \quad (60)$$

Наконец, если под действием приложенных усилий опорные сечения поворачиваются на один и тот же угол $\tau_a = \tau_b = \theta$, то мы найдем соответственный дополнительный распор

$$H = \frac{\theta f}{u'_c} \quad (61)$$

и дополнительный момент в ключе

$$M_c = -\frac{\theta}{\tau_a}. \quad (62)$$

Выражения (59)—(62) дают полное решение задачи по определению усилий, вызванных в симметричных арках изменением температуры и перемещением опор.

§ 16. Случай симметричной арки, нагруженной одной сосредоточенной силой

Пусть арка ACB (рис. 17) находится под действием одной вертикальной сосредоточенной силы P , приложенной в произвольной точке K . Соответственные значения неизвестных H_c , V_c и M_c легко получим, применяя теорему о взаимности перемещений. Путем сравнения двух состояний арки: ее действительного состояния и того состояния, при котором нет нагрузок и силы в ключе имеют значения

$$V_c = M_c = 0, \quad H_c = 1$$

(рис. 18, *a*), мы приходим к уравнению

$$Pv'_k + 2H_c u'_c = 0, \quad (a)$$

откуда получаем

$$H_c = -P \frac{v'_k}{2u'_c}. \quad (63)$$

Входящее в формулу (63) перемещение u'_c определяется формулой (54). Что касается вертикального перемещения v'_k точки K , то оно вычисляется по второй из формул (20), если в ней положить $H_0 = 1$:

$$v'_k = - \int_{s_0}^s \left(\frac{y-c}{ES\rho} + \frac{\cos \varphi}{EF\rho} \right) (x-x_0) ds + \int_{s_0}^s \left(\frac{\cos \varphi}{EF} + \frac{y-c}{EF\rho} \right) \sin \varphi ds - \int_{s_0}^s \frac{k \cos \varphi \sin \varphi}{EF} ds. \quad (64)$$

Внеся выражения (54) и (64) в общую формулу (63), вычислив входящие в них интегралы для заданного очертания арки, получим распор при произвольном положении вертикальной силы P .

Для определения перерезывающей силы в ключе сравним действительное состояние арки с представленным на рис. 18, *b*.

Теорема о взаимности перемещений дает нам право составить следующее уравнение:

$$Pv'_k - 2V_c v'_c = 0. \quad (b)$$

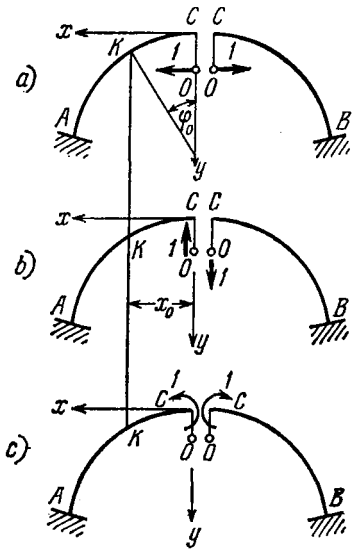


Рис. 18.

Обозначения v_k'' и v_c'' представляют вертикальные перемещения точек K и C левой полуарки для случая, изображенного на рис. 18, *b*.

Внося во вторую из формул (19) значения $P = -1$, мы получим

$$\left. \begin{aligned} v_k'' &= - \int_{s_0}^s \left(\frac{x}{ES\rho} - \frac{\sin \varphi}{EF\rho} \right) (x - x_0) ds + \\ &\quad + \int_{s_0}^s \left(- \frac{\sin \varphi}{EF} + \frac{x}{EF\rho} \right) \sin \varphi ds - k \int_{s_0}^s \frac{\cos^2 \varphi}{EF} ds, \\ \text{а также} \\ v_c'' &= - \int_0^s \left(\frac{x}{ES\rho} - \frac{\sin \varphi}{EF\rho} \right) x ds + \\ &\quad + \int_0^s \left(- \frac{\sin \varphi}{EF} + \frac{x}{EF\rho} \right) \sin \varphi ds - k \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi}{EF} ds. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Искомое значение V_c получается на основании уравнения (b) в следующем виде:

$$V_c = P \frac{v_k''}{2v_c''}. \quad (66)$$

Наконец, чтобы определить момент в ключе M_c , сравним действительное состояние арки с состоянием, представленным на рис. 18, *c*. Применив здесь еще раз теорему о взаимности перемещений, мы получим следующее уравнение:

$$Pv_k''' + 2M_c\tau_c''' = 0, \quad (c)$$

в котором v_k''' означает вертикальное перемещение точки K , а τ_c''' — угловое перемещение сечения C для случая, представленного на рис. 18, *c*. С помощью этого уравнения мы можем написать

$$M_c = - P \frac{v_k'''}{2\tau_c'''} \quad (67)$$

Величины перемещений v_k''' и τ_c''' мы получим на основании формулы (18) подстановкой $M_0 = 1$:

$$v_k''' = - \int_{s_0}^s \frac{1 \cdot (x - x_0) ds}{ES\rho} + \int_{s_0}^s \frac{1 \cdot \sin \varphi ds}{EF\rho}; \quad \tau_c''' = \int_{s_0}^s \frac{1 \cdot ds}{ES\rho}. \quad (68)$$

Внося эти выражения в формулу (67) и интегрируя их, при заданном очертании арки получим величину момента в ключе для произвольного положения груза P . Таким же способом находятся значения H_c , V_c и M_c для случая, когда в точке K приложена горизонтальная сила. В формулах (63), (66) и (67) надо было бы заменить

вертикальные перемещения точки K горизонтальными перемещениями, относящимися к случаям, изображенным на рис. 18. Эти перемещения без затруднений получаются с помощью формул (18), (19) и (20).

Вместо полных формул, выведенных выше, на практике пользуются приближенными формулами. В дальнейшем изложении на нескольких частных примерах мы покажем, какая степень приближения достигается при таком способе расчета.

§ 17. Случай, когда продольная ось арки совпадает с веревочной кривой для действующих вертикальных нагрузок

Вычисление неизвестных H_c , V_c и M_c значительно упрощается, когда ось симметричной арки совпадает с веревочной кривой, построенной для вертикальной нагрузки, действующей на арку. Положим H_0 есть распор от заданной нагрузки для трехшарнирной арки.

Усилия в произвольном сечении трехшарнирной арки приводятся только к нормальной силе, и для сечения под углом φ (рис. 19, а) мы имеем

$$M = 0, \quad N = \frac{H_0}{\cos \varphi}, \quad Q = 0. \quad (a)$$

Представим себе левую полуарку отделенной сечением C от правой полуарки. Тогда, вследствие деформаций полуарки под действием усилий (а), сечение C получит следующие перемещения (на основании формул (15) и (17)):

$$u_c = \int_0^s \frac{N \cos \varphi}{EF} ds + \int_0^s \frac{Ny}{EF\rho} ds = H_0 \left(\int_0^s \frac{ds}{EF} + \int_0^s \frac{y ds}{EF\rho \cos \varphi} \right), \quad (b)$$

$$\tau_c = \int_0^s \frac{N ds}{EF\rho} = H_0 \int_0^s \frac{ds}{EF\rho \cos \varphi}. \quad (c)$$

Чтобы перейти к расчету арки с заделанными пятнами, необходимо уничтожить перемещения (b) и (c) сечения C посредством обратного распора H' и момента M' (рис. 19, б).

Момент M' произведет поворот $M'\tau_c''^1$ сечения C , и так как точка O остается неподвижной, то центр сечения C переместится в

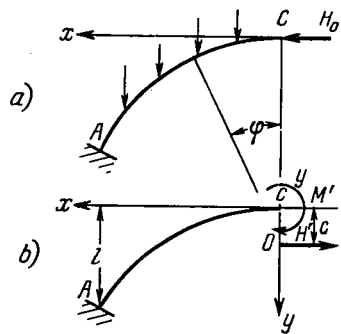


Рис. 19.

¹⁾ См. формулы (68).

направлении отрицательных x на величину $cM'\tau_c''''$. Обратный распор H' , который не производит вращения сечения, вызывает перемещение в направлении отрицательных x величиною $H'u_c'$ ¹⁾. Суммируя перемещения, произведенные силой H' и моментом M' , с перемещениями, найденными выше (b) и (c), и принимая во внимание, что сечение C в силу симметрии не может ни вращаться, ни подвергаться горизонтальным перемещениям, мы приходим к следующим уравнениям:

$$H_0 \left(\int_0^s \frac{ds}{EF} + \int_0^s \frac{y ds}{EF\rho \cos \varphi} \right) - H'u_c' - cM'\tau_c'''' = 0,$$

$$H_0 \int_0^s \frac{ds}{EF\rho \cos \varphi} - M'\tau_c'''' = 0,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} M' &= \frac{H_0 \int_0^s \frac{ds}{EF\rho \cos \varphi}}{\tau_c''''} = H_0 \frac{\int_0^s \frac{ds}{EF\rho \cos \varphi}}{\int_0^s \frac{ds}{ES\rho}}, \\ H' &= H_0 \frac{\int_0^s \frac{ds}{EF} + \int_0^s \frac{y ds}{EF\rho \cos \varphi} - c \int_0^s \frac{ds}{EF\rho \cos \varphi}}{u_c'}. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Когда M' и H' определены, то все усилия, действующие в сечении C , можно привести к одной силе, равной $H_0 - H'$, приложенной в центре сечения C , и к паре сил с моментом $H'c - M'$. Эта система может быть заменена одной силой $H_0 - H'$, приложенной в точке, расположенной выше центра сечения C на расстоянии

$$\delta = \frac{H'c - M'}{H_0 - H'}. \quad (70)$$

Величина δ определяет смещение кривой давлений по отношению к продольной оси арки в сечении ключа.

Совокупность усилий, действующих в сечении пят, приводится к нормальной силе $\frac{H_0}{\cos \alpha} - H' \cos \alpha$, к поперечной силе $H' \sin \alpha$ и к паре сил с моментом $-H'(f-c) - M'$. Нормальная сила и пара сил могут быть заменены силой $\frac{H_0}{\cos \alpha} - H' \cos \alpha$, нормальной к сечению,

¹⁾ u_c' определяется формулой (54).

приложенной с эксцентриситетом

$$\delta_1 = \frac{H'(f-c) + M'}{\frac{H_0}{\cos \alpha} - H' \cos \alpha} \quad (71)$$

в направлении от центра сечения к центру кривизны продольной оси. Величина δ_1 представляет собой смещение кривой давлений в плоскости пяты арки. Если бы мы в наших выводах пренебрегли влиянием нормальной силы на кривизну оси, то получили бы следующие выражения:

$$M' = 0, \quad H' = H_0 \frac{\int_0^s \frac{ds}{EF}}{u'_c}, \quad (69')$$

$$\delta = \frac{H' \cdot c}{H_0 - H'}, \quad (70')$$

$$\delta_1 = \frac{H'(f-c) \cos \alpha}{H_0 - H' \cos^2 \alpha}. \quad (71')$$

Указанный здесь способ расчета арок с заделанными пятами может быть иногда с выгодой применен и в случае, когда ось арки мало отличается от веревочной кривой. Обозначим через y ординаты точек оси арки и через y_1 ординаты точек веревочной кривой. Тогда формулы (а) усилий примут следующий вид ¹⁾:

$$M = H_0 (y - y_1), \quad N = \frac{H_0}{\cos \varphi}, \quad Q = 0.$$

К выражениям перемещений (b) и (c) надо будет добавить члены, которые выразят влияние изгибающего момента.

Соответственно этому мы получим для M' и H' вместо формул (69) следующие выражения:

$$M' = \frac{H_0}{u'_c} \left[\int_0^s \frac{ds}{EF \rho \cos \varphi} + \int_0^s \frac{(y - y_1) ds}{ES \rho} \right], \quad (72)$$

$$H' = \frac{H_0}{u'_c} \left[\int_0^s \frac{ds}{EF} + \int_0^s \frac{y ds}{EF \rho \cos \varphi} + \int_0^s \frac{(y - y_1) y ds}{ES \rho} - \right. \\ \left. - c \int_0^s \frac{ds}{EF \rho \cos \varphi} - c \int_0^s \frac{(y - y_1) ds}{ES \rho} \right]. \quad (73)$$

¹⁾ Здесь мы отбрасываем влияние поперечной силы, а продольную силу полагаем равной силе, получаемой в случае совпадения оси арки с веревочной кривой.

ГЛАВА IV

КРУГОВАЯ АРКА С ЗАДЕЛАННЫМИ ПЯТАМИ

§ 18. Выбор лишних неизвестных

За лишние неизвестные примем силы H_c и V_c , приложенные в точке O (рис. 17), и момент M_c . Для определения точки O применим формулу (50).

Предположим, что внешний контур арки параллелен ее оси, т. е. что арка имеет постоянное поперечное сечение. Тогда, полагая в формуле (50): $y = \rho (1 - \cos \varphi)$ и обозначая через α величину угла φ у пят арки, будем иметь

$$\frac{c}{\rho} = \frac{\alpha - \sin \alpha + \frac{\gamma}{\rho} \sin \alpha}{\alpha}, \quad (a)$$

где отношение $\frac{\gamma}{\rho} = \frac{S}{F\rho} \approx \frac{i^2}{\rho^2}$ дает поправку, учитывающую сжатие продольной оси арки под влиянием изгибающего момента. Пренебрегая ею, мы получим

$$\frac{c}{\rho} \approx \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha}. \quad (b)$$

Для очень пологих арок можно положить ¹⁾: $c/\rho \approx \alpha^2/6$, откуда ²⁾ $c \approx 1/3f$, т. е. точка O расположена на расстоянии одной трети стрелы f , считая от центра сечения C . Это заключение можно распространить и на подъемные арки, как это видно из чисел, приведенных на второй и третьей строках таблицы VII.

Числа, помещенные в трех последних строках этой таблицы, показывают, что приближенные значения c мало отличаются от точных значений, вычисленных по формуле (a).

Рассмотрим еще для примера круговую арку прямоугольного переменного сечения, определяемую следующими равенствами: $h \cos \varphi = h_0$; $F \cos \varphi = F_0$; $I \cos^3 \varphi = I_0$.

Положив приближенно (см. формулу (b))

$$ES\rho = EJ \left(1 + \frac{1}{15} \frac{h^2}{\rho^2} \right) \quad (c)$$

¹⁾ [Разлагаем в ряд $\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots$ и сохраняем только первые два члена ряда.

²⁾ Так как $f = \rho (1 - \cos \alpha) = \rho \left(\frac{\alpha^2}{2!} - \frac{\alpha^4}{4!} + \frac{\alpha^6}{6!} - \dots \right) \approx \rho \frac{\alpha^2}{2}$ и $\frac{c}{\rho} = \frac{c(1 - \cos \alpha)}{f} \approx \frac{c}{f} \cdot \frac{\alpha^2}{2}$, откуда $\frac{c}{f} \approx \frac{1}{3}$.]

Таблица VII

α°	18	27	36	54	90	
$\frac{c}{\rho} \approx \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha}$	0,01609	0,03660	0,06451	0,1416	0,3634	
$\frac{c}{f} \approx \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha (1 - \cos \alpha)}$	0,3287	0,3358	0,3378	0,3435	0,3634	
Точные значения $\frac{c}{\rho}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h}{\rho} = \frac{1}{10} \\ \frac{h}{\rho} = \frac{1}{20} \\ \frac{h}{\rho} = \frac{1}{30} \end{array} \right.$	0,01690	0,03740	0,06529	0,1423	0,3639
		0,01629	0,03680	0,06470	0,1418	0,3635
		0,01617	0,03669	0,06460	0,1417	0,3634

и пренебрегая по малости величинами второго порядка, получим, согласно формуле (50),

$$\frac{c}{\rho} = \frac{\frac{1}{3} \sin \alpha (2 + \cos^2 \alpha) - \frac{1}{4} \sin \alpha \cos^3 \alpha - \frac{3}{8} (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha)}{\frac{1}{3} \sin \alpha (2 + \cos^2 \alpha) - 0,8 \frac{i_0^2}{\rho^2} \sin \alpha} + \frac{\frac{i_0^2}{\rho} [0,9 (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 0,8 \sin \alpha)]}{\frac{1}{3} \sin \alpha (2 + \cos^2 \alpha) - 0,8 \frac{i_0^2}{\rho^2} \sin \alpha} \quad (d)$$

Последние члены числителя и знаменателя формулы (d) представляют собой поправочные члены, зависящие от сжатия арки

Таблица VIII

α°	18	27	36	54	90	
Приближенные значения $\frac{c}{\rho}$	0,01572	0,03338	0,05449	0,09437	0,1164	
Точные значения $\frac{c}{\rho}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h}{\rho} = \frac{1}{10} \\ \frac{h}{\rho} = \frac{1}{20} \\ \frac{h}{\rho} = \frac{1}{30} \end{array} \right.$	0,016570	0,0342379	0,0553720	0,0952780	0,117312
		0,015935	0,0335912	0,0547118	0,0945956	0,116648
		0,015817	0,0334716	0,0545899	0,0944693	0,116525

изгибающим моментом и изменения расстояний γ по длине арки вследствие изменения высоты h поперечных сечений. Пренебрегая этими поправочными членами, мы получаем для c/ρ величины, помещенные на второй строке таблицы VIII. Более точные значения c/ρ , вычисленные с помощью формулы (d) при различных значениях h/ρ , помещены на трех последних строках той же таблицы.

Сравнивая числа таблиц VII и VIII, приходим к заключению, что изменение поперечного сечения мало влияет на положение точки O , пока мы имеем дело с очень пологими арками; но как только пологость арки уменьшается, положение точки O поднимается, и она помещается выше того положения, какое она занимает в случае арок с постоянным поперечным сечением.

§ 19. Усилия, вызываемые изменением температуры

Чтобы определить распор, появляющийся в арке под влиянием равномерного изменения температуры, применяется общая формула (59). Входящая в нее величина u'_c определяется при помощи формулы (54). Так как эта величина будет иметь большое значение в наших дальнейших вычислениях, то мы постараемся ее определить точнее. Мы выясним затем значение поправок, вызванных влиянием на изгиб нормальной силы и поперечной силы, влиянием изгибающего момента на сжатие оси арки и т. д. Для этого воспользуемся элементарным примером круговой арки.

Начнем с самого простого случая — постоянного поперечного сечения. Ограничившись первым членом выражения (54) и полагая, кроме того, $ES\rho \approx EJ$, мы получаем первое приближение u'_c :

$$[u'_c]_1 = \int_0^s \frac{(y-c)y ds}{EJ}.$$

Так как для круга мы имеем уравнение: $y = \rho(1 - \cos \varphi)$, то, согласно равенствам (51) и (b) § 18, можем написать:

$$[u'_c]_1 = -\rho \int_0^s \frac{(y-c) \cos \varphi ds}{EJ} = \frac{\rho^3}{EJ} \cdot \frac{\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha}{2\alpha}. \quad (a)$$

Соответствующий распор (формула (59)) от изменения температуры представится следующей приближенной формулой:

$$[H_t]_1 = \frac{EJ \cdot et}{\rho^2} \cdot \frac{2\alpha \sin \alpha}{\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha} = \frac{EJ et}{\rho^2} m_1. \quad (b)$$

Несколько значений тригонометрических множителей m_1 , m_2 и m_3 помещены в таблице IX. Заметим, что вычисление знаменателя для пологих арок представляет некоторые трудности. Чтобы обеспечить достаточное приближение, необходимо или вычислять числа

Таблица IX

α°	$\frac{f}{l}$	$\frac{h}{p}$	$\frac{h}{l}$	m_1	m_2	m	Δm_1	Δm_2	n	n_1	r	r_1
18	0,0793	$\frac{1}{10}$	0,1618	4600	965	895	414%	7,82%	1,501	0,010	2,142	0,724
		$\frac{1}{20}$	0,0809		2370	2260	103%	4,87%	1,390	0,449	2,291	1,396
		$\frac{1}{30}$	0,0539		3240	3150	46,1%	2,83%	1,141	0,557	1,997	1,443
		$\frac{1}{40}$	0,0405		3720	3650	26,0%	1,92%	0,927	0,547	1,679	1,317
27	0,1200	$\frac{1}{10}$	0,1101	912,3	526,3	480,7	89,8%	9,48%	1,300	0,438	2,078	1,364
		$\frac{1}{20}$	0,0551		770,9	745,0	22,4%	3,48%	0,841	0,530	1,483	1,206
		$\frac{1}{30}$	0,0367		843,5	823,5	9,98%	1,69%	0,584	0,430	1,068	0,931
		$\frac{1}{40}$	0,0275		872,3	863,8	5,61%	0,98%	0,441	0,351	0,871	0,741
36	0,1625	$\frac{1}{10}$	0,0851	285,8	233,6	217,5	31,3%	7,40%	0,891	0,529	1,513	1,220
		$\frac{1}{20}$	0,0425		270,6	264,9	7,89%	2,15%	0,484	0,373	0,881	0,792
		$\frac{1}{30}$	0,0284		278,9	276,2	3,47%	0,98%	0,323	0,272	0,602	0,561
		$\frac{1}{40}$	0,0213		281,9	280,3	1,96%	0,57%	0,241	0,212	0,455	0,431
54	0,2548	$\frac{1}{10}$	0,0618	55,61	53,44	51,57	7,83%	3,36%	0,410	0,324	0,721	0,670
		$\frac{1}{20}$	0,0309		55,05	54,54	1,96%	0,94%	0,205	0,182	0,375	0,362
		$\frac{1}{30}$	0,0206		55,36	55,12	0,89%	0,44%	0,135	0,125	0,252	0,246
90	0,5000	$\frac{1}{10}$	0,0500	6,721	6,692	6,619	1,54%	1,10%	0,126	0,115	0,211	0,211
		$\frac{1}{20}$	0,0250		6,714	6,695	0,39%	0,28%	0,063	0,060	0,107	0,107
		$\frac{1}{30}$	0,0167		6,718	6,707	0,21%	0,16%	0,041	0,040	0,071	0,071

с большим количеством десятичных знаков или раскладывать тригонометрические функции в ряды.

Второе приближение мы получаем, учитывая влияние нормальной силы на сжатие продольной оси. Из формулы (54) имеем

$$\begin{aligned}
 [u'_c]_2 &= \int_0^s \frac{(y-c)}{EJ} y ds + \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EJ} = \\
 &= -\rho \int_0^s \frac{(y-c) \cos \varphi ds}{EJ} + \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EF} = \\
 &= \frac{\rho^3}{EJ} \frac{\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha + \frac{\gamma}{\rho} (\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha)}{2\alpha} \quad (c)
 \end{aligned}$$

и соответственно распор от изменения температуры во втором приближении получит следующее значение ¹⁾:

$$\begin{aligned}
 [H_t]_2 &= \\
 &= \frac{EJ\epsilon t}{\alpha^2} \cdot \frac{2\alpha \sin \alpha}{\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha + \frac{\gamma}{\rho} (\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha)} = \frac{EJ\epsilon t}{\rho^2} m_2. \quad (d)
 \end{aligned}$$

Ряд численных значений m_2 помещен в таблице IX.

Вернемся к рассмотрению общего выражения (54). Согласно формуле (50) оно может быть переписано так:

$$\begin{aligned}
 u'_c &= -\rho \int_0^s \frac{(y-c) \cos \varphi ds}{ES\rho} + \int_0^s \frac{(y-c) \cos \varphi ds}{EF\rho} + k \int_0^s \frac{\sin^2 \varphi ds}{EF} = \\
 &= \frac{\rho^3}{ES} \left\{ \left(1 - \frac{\gamma}{\rho}\right) \left[\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \left(1 - \frac{\gamma}{\rho}\right) \sin^2 \alpha \right] + k \frac{\gamma}{\rho} (\alpha^2 - \alpha \sin \alpha \cos \alpha) \right\}. \quad (e)
 \end{aligned}$$

Положив для прямоугольного сечения

$$k = 3, \quad \frac{\gamma}{\rho} = \frac{h^2}{12\rho^2}, \quad ES\rho \approx EJ \left(1 + \frac{1}{15} \frac{h^2}{\rho^2}\right)$$

и пренебрегая членом, содержащим множитель γ^2/ρ^2 , мы получим

¹⁾ Аналогичное выражение дано М. Пижо: P i g e a u d M. Note sur le calcul des arcs encastres. Annales des ponts et chaussées, 1re Partie, Mémoires et documents, 8 serie, 1905, 75e annee, tome 18, 2 trimestre, № 28, pp. 201—231. См. p. 211. См. также стр. 108 книги М. А. Н о w e, указанной в ссылке на стр. 452.

выражение для распора от температуры в виде

$$H_t = \frac{E J \epsilon t}{\rho^2} \frac{2\alpha \sin \alpha \left(1 + \frac{1}{15} \frac{h^2}{\rho^2}\right)}{\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha + \frac{2\gamma}{\rho} (\alpha^2 - 2\alpha \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin^2 \alpha)} = \frac{E J \epsilon t}{\rho^2} m. \quad (f)$$

Сравнивая величины m_1 , m_2 , m , помещенные в таблице IX, мы видим, что первое приближение дает удовлетворительные результаты только для тонких мало пологих арок. Погрешности при вычислении увеличиваются по мере того, как увеличиваются толщина и пологость арки. Для очень пологих арок эта приближенная формула дает совершенно неудовлетворительные результаты. Учитывая нормальную силу и переходя ко второму приближению, мы получаем более удовлетворительные результаты. Эта формула дает заметные отступления только для очень пологих и толстых арок.

Помещенные в таблице величины погрешностей Δm_1 и Δm_2 показывают, что второе приближение не дает серьезной выгоды по сравнению с первым в тех случаях, когда дело идет о мало пологих арках, для которых поправки, внесенные продольной силой, не имеют такого преобладающего значения, как в случае пологих арок.

Перейдем теперь к вычислению усилий. Усилия в сечении ключа приводятся к одной силе H_t , приложенной на расстоянии c от центра сечения. Поэтому, когда температура поднимается, наибольшие сжимающие напряжения выражаются следующей формулой:

$$\sigma_{\max} = \frac{H_t}{F} + \frac{H_t \cdot c}{W} = \frac{H_t}{F} \left(1 + \frac{6c}{h}\right) = E \epsilon t \frac{i^2}{\rho^2} m \left(1 + \frac{6c}{h}\right) = E \epsilon t n.$$

В таблице IX помещен ряд численных значений множителя n .

Наименьшие напряжения в ключевом сечении определяются формулой

$$\sigma_{\min} = E \epsilon t \frac{i^2}{\rho^2} m \left(1 - \frac{6c}{h}\right) = -E \epsilon t n_1.$$

Численные значения множителя n_1 также помещены в таблице IX.

Для определения максимальных напряжений, вызываемых в пятах повышением температуры, мы имеем следующие выражения:

$$\sigma_{\max} = \frac{H_t \cos \alpha}{F} + \frac{H_t (f-c)}{W} = E \epsilon t \frac{i^2}{\rho^2} m \left[\cos \alpha + \frac{6(f-c)}{h} \right] = E \epsilon t r.$$

Наименьшие напряжения равны

$$\sigma_{\min} = E \epsilon t \frac{i^2}{\rho^2} m \left[\cos \alpha - \frac{6(f-c)}{h} \right] = -E \epsilon t r_1.$$

Численные значения множителей r и r_1 помещены в двух последних столбцах таблицы IX.

Для частного случая бетонных арок, положив $E=2 \cdot 10^5$ кг/см² и $\varepsilon=0,00001$, мы получим напряжения, соответствующие повышению температуры от 1°, умножая коэффициенты n , n_1 , r , r_1 на 2.

Когда, наоборот, температура понижается, то найденные напряжения меняют знак. Числа таблицы показывают величину напряжений, вызываемых изменением температуры, как это имеет место в действительности. Эти напряжения тем значительнее, чем положе и толще арка.

Усадка бетона оказывает такое же влияние, как и понижение температуры. При расчетах это влияние приравнивают иногда понижению температуры на 20°C¹⁾. При рациональных способах производства работ это влияние может быть значительно уменьшено.

В качестве второго примера рассмотрим круговую арку, сечение которой меняется согласно следующему закону:

$$F = \frac{F_0}{\cos \varphi}, \quad J = \frac{J_0}{\cos^3 \varphi}.$$

При этом мы детально рассмотрим вопрос о различных поправках, влияющих на величину u'_c . Как первое приближение возьмем выражение (54), ограничившись его первым членом.

Подставив в него $ES\rho \approx EI$, будем иметь

$$\begin{aligned} [u'_c]_1 &= \int_0^{\alpha} \frac{(y-c)}{EJ} y ds = \frac{\rho^3}{EJ_0} \int_0^{\alpha} \left(1 - \cos \varphi - \frac{c}{\rho}\right) (1 - \cos \varphi) \cos^3 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{\rho^3}{EJ_0} \left\{ \frac{1}{3} \left(1 - \frac{c}{\rho}\right) \sin \alpha (2 + \cos^2 \alpha) + \frac{1}{5} \sin \alpha \cos^4 \alpha + \right. \\ &\left. + \frac{4}{15} \sin \alpha (2 + \cos^2 \alpha) - \left(2 - \frac{c}{\rho}\right) \left[\frac{3}{8} (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) + \frac{1}{4} \sin \alpha \cos^3 \alpha \right] \right\}. \end{aligned}$$

Соответствующее значение распора, вызванного повышением температуры, будет

$$[H_t]_1 = \frac{etl}{2(u'_c)_1} = \frac{EJ_0 et}{\rho^2} m_1.$$

Численные значения коэффициентов m_1 — m_4 приведены в таблице X.

¹⁾ См. *Vorschriften über Bauten in armiertem Beton* aufgestellt von der Schweizerischen Kommission des armierten Beton nebst Erläuterung von F. Schüle. Juni 1909, Verlag der eidgenössische Materialprüfungsanstalt am Schweizerische Politechnikum in Zürich, 39 S.

Таблица X

α°	$\frac{h}{\rho}$	m_1	m_2	m_3	m_4	m	Δm_1	Δm_2	n	n_1	r	r_1
18	$\frac{1}{10}$		992	992	922	922	440%	7,58%	1,53	0,0046	2,04	0,654
	$\frac{1}{20}$	4970	2480	2490	2380	2380	109%	4,20%	1,44	0,451	2,22	1,33
	$\frac{1}{30}$		3440	3430	3330	3330	49,2%	3,34%	1,19	0,570	1,94	1,38
27	$\frac{1}{10}$		589	590	536	536	102%	9,90%	1,36	0,470	1,94	1,24
	$\frac{1}{20}$	1090	897	899	865	865	25,6%	3,70%	0,906	0,546	1,44	1,15
	$\frac{1}{30}$		993	993	974	974	11,5%	1,95%	0,632	0,472	1,04	0,90
36	$\frac{1}{10}$		307,1	306,8	281,9	282,0	40,8%	8,90%	1,015	0,545	1,40	1,10
	$\frac{1}{20}$	396,9	369,9	369,6	360,1	360,4	10,1%	2,67%	0,568	0,417	0,855	0,753
	$\frac{1}{30}$		384,4	384,4	379,7	379,7	4,53%	1,24%	0,382	0,311	0,589	0,542
54	$\frac{1}{10}$		114,2	114,0	107,3	107,4	14,9%	6,32%	0,602	0,423	0,619	0,557
	$\frac{1}{20}$	123,4	121,0	120,0	119,0	119,0	3,69%	1,68%	0,306	0,257	0,335	0,318
	$\frac{1}{30}$		212,3	222,2	121,4	121,4	1,65%	0,74%	0,202	0,179	0,225	0,217
90	$\frac{1}{10}$		74,51	74,27	69,95	70,13	10,8%	6,27%	0,469	0,352	—	—
	$\frac{1}{20}$	77,73	76,90	76,83	75,63	75,69	2,70%	1,60%	0,237	0,206	—	—
	$\frac{1}{30}$		77,36	77,33	76,77	76,80	1,21%	0,73%	0,156	0,142	—	—

Второе приближение мы получим, принимая во внимание также и нормальную силу. Тогда

$$\begin{aligned}
 [u'_c]_2 &= \int_0^s \frac{(y-c)}{EJ} y ds + \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EF} = [u'_c]_1 + \frac{\rho}{EF_0} \int_0^s \cos^3 \varphi d\varphi = \\
 &= [u'_c]_1 + \frac{\rho^3}{EJ_0} \frac{\gamma}{\rho} \cdot \frac{1}{3} \sin \alpha (2 + \cos^3 \alpha)
 \end{aligned}$$

и соответственное значение распора будет

$$[H_t]_2 = \frac{\varepsilon t l}{2[u'_c]_2} = \frac{E J_0 \varepsilon t}{\rho^2} m_2.$$

Численные значения коэффициента m_2 относящиеся к различным толщинам и пологостям арок, помещены в четвертом столбце таблицы X¹⁾.

Чтобы получить третье приближение, надо учесть влияние нормальной силы на изгиб оси и изгибающего момента на сжатие оси арки. Тогда

$$\begin{aligned} [u'_c]_3 &= [u'_c]_2 + \int_0^s \frac{\cos \varphi}{EF\rho} y ds + \int_0^s \frac{y-c}{EF\rho} \cos \varphi ds = \\ &= [u'_c]_2 + \frac{\rho}{EF_0} \left[\frac{1}{2} \left(2 - \frac{c}{\rho} \right) (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) - \frac{2}{3} \sin \alpha (2 + \cos^2 \alpha) \right]^2. \end{aligned}$$

Третье приближение дает для определения величины распора следующее выражение:

$$[H_t]_3 = \frac{\varepsilon t l}{2[u'_c]_3} = \frac{E J_0 \varepsilon t}{\rho^2} m_3.$$

Численные значения m_3 помещены в пятом столбце таблицы X. Учет поперечной силы приводит к четвертому приближению:

$$[u'_c]_4 = [u'_c]_3 + k \int_0^s \frac{\sin^2 \varphi}{EF} ds = [u'_c]_3 + \frac{\rho}{EF_0} \cdot \frac{1}{3} k \sin^3 \alpha,$$

$$[H_t]_4 = \frac{\varepsilon t l}{2[u'_c]_4} = \frac{E J_0 \varepsilon t}{\rho^2} m_4.$$

Численные значения коэффициента m_4 помещены в шестом столбце таблицы X.

Полные выражения величин u'_c и H_t мы получим, принимая во внимание смещение нейтральной линии и заменяя EI выражением

$$ES\rho \approx EI \left(1 + \frac{1}{15} \frac{h^2}{\rho^2} \right).$$

Введение этого исправления дает нам следующие значения:

$$\begin{aligned} u'_c &= [u'_c]_4 - \frac{0,8\gamma}{\rho} \frac{\rho^3}{EJ_0} \left[\left(1 - \frac{c}{\rho} \right) \sin \alpha + \frac{1}{3} \sin \alpha (2 + \cos^2 \alpha) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{c}{\rho} \right) (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) \right] \end{aligned}$$

¹⁾ Заметим, что выражение u'_c плохо поддается вычислению для весьма пологих арок. Для $\alpha = 18^\circ$ и $\alpha = 27^\circ$ третий знак численной величины m и m_1 уже сомнителен. Эти коэффициенты вычислены с четырьмя знаками для крутых подъемов.

²⁾ При пользовании этой формулой надо вместо c подставлять ее полную величину (см. формулу (d) § 18).

и

$$H_t = \frac{etl}{2\mu_c} = \frac{EJ_0et}{\rho^2} m.$$

Численные значения коэффициента m помещены в седьмом столбце таблицы X.

Мы стремились к более точному определению значения u'_c для того, чтобы оценить соответственные значения различных поправок. Рассмотрение таблицы X показывает, что главную роль играет поправка, вызванная нормальной силой, особенно для очень пологих арок, для которых первое приближение дает совершенно неудовлетворительные результаты. Следующей по важности поправкой является поправка, вызванная касательными усилиями. Ее отношение к первой поправке увеличивается вместе с подъемом арки. Для достаточного подъема обе поправки являются величинами одного и того же порядка.

Что же касается следующих поправочных членов, то их значение минимально. Для наших пологих арок при $\alpha=18^\circ$ и $\alpha=27^\circ$ эти поправки не выходят за пределы приближений, допускаемых вычислениями. Для других изучаемых здесь арок они оказывают влияние только на четвертый знак ¹⁾.

Все изложенное позволяет нам сделать заключение, что для того, чтобы определить u'_c с приближением, достаточным для применения на практике, следует учесть лишь поправки, зависящие от продольной и поперечной сил. Определив распор H_t легко определить и максимальные напряжения, вызываемые в ключе повышением температуры:

$$\sigma_{\max} = \frac{H_t}{F_0} \left(1 + \frac{6c}{h_0} \right) = Eetn,$$

$$\sigma_{\min} = \frac{H_t}{F_0} \left(1 - \frac{6c}{h_0} \right) = -Eetn_1.$$

Когда температура понижается, то напряжения меняют свой знак. Численные значения коэффициентов n и n_1 помещены в таблице X. Сравнивая их с теми величинами, которые мы получили для арок с внешним очертанием, параллельным оси (таблица IX), мы приходим к заключению, что увеличение толщины арки к опорам вызывает увеличение температурных напряжений в ключе. Это увеличение растет вместе с уменьшением пологости арки.

¹⁾ Исключая, однако, полукруговую арку большой толщины, так как толщина увеличивается к пятам.

Напряжения в сечениях пята определяются следующими формулами:

$$\sigma_{\max} = \frac{H_t}{F_0} \left[\cos^3 \alpha + \frac{6\rho}{h_0} \left(1 - \cos \alpha - \frac{c}{\rho} \right) \cos^3 \alpha \right] = E \epsilon r;$$

$$\sigma_{\min} = \frac{H_t}{F_0} \left[\cos^3 \alpha - \frac{6\rho}{h_0} \left(1 - \cos \alpha - \frac{c}{\rho} \right) \cos^3 \alpha \right] = E \epsilon r_1.$$

Численные значения r и r_1 помещены в двух последних столбцах таблицы X. Мы видим, что, несмотря на увеличение сечения к пятам, напряжения в пятах больше, чем в ключе, однако они меньше соответственных напряжений в арке с постоянным сечением. Умножая величины r и r_1 на два, получим максимальные напряжения сжатия и растяжения при повышении температуры бетонной арки на 1° . Таким образом, изменения температуры, происходящие в действительности, могут вызывать очень большие температурные напряжения. Для их уменьшения необходимо перейти к аркам со значительным подъемом и по возможности малой толщины. В случае очень пологих арок тот же результат получается от применения трехшарнирных арок.

§ 20. Распределенная вертикальная нагрузка, меняющаяся по закону $q = q_0 / \cos^3 \varphi$

Веревочная кривая для подобной нагрузки есть окружность. При соответственном выборе распора H_0 ¹⁾ ее можно привести к совпадению с круговой осью арки и пользоваться при вычислениях общими формулами (69). Полагая F , S и ρ величинами постоянными, мы получим на основании первой формулы

$$M' = H_0 \gamma \frac{\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos \varphi}}{\int_0^\alpha d\varphi} = H_0 \frac{\gamma}{\alpha} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right). \quad (a)$$

Вторая из формул (69) дает нам

$$H' = \frac{H_0}{EF} \frac{(\rho - c) \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)}{u'_c}. \quad (b)$$

¹⁾ Величина H_0 получается из уравнения: $H_0 = \rho q_0$.

Сохраняя обозначения предыдущего параграфа, положим

$$u'_c = \frac{1}{m} \frac{\rho^2 l}{2EJ}, \quad (c)$$

что при подстановке в (b) дает

$$\frac{H'}{H_0} = 2 \frac{i^2}{\rho^2} \frac{(\rho - c)}{l} m \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{i^2}{\rho^2} \frac{m}{\alpha} \left(1 - \frac{\gamma}{\rho} \right) \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right). \quad (d)$$

Таблица XI содержит численные значения отношений H'/H_0 для некоторых круговых арок. Мы видим, что величина распора H' быстро уменьшается с уменьшением толщины арки и ее пологости.

Таблица XI

α°	$\frac{h}{l}$	Арка постоянного сечения			Арка переменного сечения		
		$\frac{H'}{H_0}$	$\frac{\delta}{h}$	$\frac{\delta_1}{h}$	$\frac{H'}{H_0}$	$\frac{\delta}{h_0}$	$\frac{\delta_1}{h_0} \cos \alpha$
18	0,1618	0,758	0,494	0,761	0,769	0,514	0,767
	0,0809	0,479	0,291	0,532	0,496	0,304	0,554
	0,0539	0,297	0,201	0,384	0,304	0,203	0,376
27	0,1101	0,416	0,252	0,408	0,448	0,261	0,422
	0,0551	0,161	0,136	0,242	0,181	0,143	0,258
	0,0367	0,0798	0,092	0,167	0,0904	0,097	0,177
36	0,0851	0,194	0,146	0,234	0,237	0,158	0,258
	0,0425	0,0592	0,076	0,129	0,0758	0,084	0,146
	0,0284	0,0274	0,052	0,088	0,0354	0,056	0,100
54	0,0018	0,0512	0,066	0,089	0,0941	0,085	0,111
	0,0309	0,0135	0,034	0,046	0,0262	0,044	0,060
	0,0206	0,0061	0,023	0,031	0,0119	0,030	0,041

Определим величины δ и δ_1 смещения кривой давления в ключе и пятах, характеризующие напряжения, вызванные данной нагрузкой.

Внося в формулу (70) значения, найденные для H' и M' , получим

$$\delta = \frac{H'}{H_0} \frac{\rho}{h} \frac{\frac{c}{\rho} - \frac{1}{m \left(1 - \frac{i^2}{\rho^2} \right)}}{1 - \frac{H'}{H_0}} h. \quad (e)$$

Ряд численных значений отношения δ/h помещен в таблице XI.

Смещение в пятах определяется при помощи формулы (71). Для рассматриваемого случая оно имеет следующий вид:

$$\delta_1 = \cos \alpha \frac{H'}{H_0} \frac{\rho}{h} \frac{\frac{f-c}{\rho} + \frac{1}{m \left(1 - \frac{i^2}{\rho^2}\right)}}{1 - \frac{H'}{H_0} \cos^3 \alpha} h. \quad (f)$$

Результаты вычислений, произведенных при применении этой формулы, приведены также в таблице XI.

Мы видим, что смещение кривой давления находится в прямой зависимости от толщины арки и ее пологости. Смещение в пятах превосходит смещение в ключе. Для арок малой пологости величина смещений существенно зависит от толщины h . Когда смещение превышает $1/6h$, то в соответствующем сечении оно сопровождается растягивающими напряжениями. Полученные данные приводят к тому заключению, что для пологих арок даже при сравнительно незначительной толщине их раскружаливание будет сопровождаться появлением растягивающих напряжений в крайних точках сечений пят.

Рассмотрим еще случай, когда сечение арки изменяется согласно закону: $F = F_0 / \cos \varphi$; $J = J_0 / \cos^3 \varphi$.

Положив в первой из формул (69)

$$ES\rho = EJ \left(1 + \frac{1}{15} \frac{h^2}{\rho^2}\right) = \frac{EJ_0}{\cos^3 \varphi \left(1 - 0,8 \frac{i^2}{\rho^2}\right)},$$

получим

$$M' = H_0 \frac{i^2}{\rho^2} \alpha \rho \frac{1}{\frac{1}{3} \sin \alpha (2 + \cos^3 \alpha) - 0,8 \frac{i^2}{\rho^2} \sin \alpha}. \quad (g)$$

Вторая из формул (69) дает нам

$$H' = H_0 \frac{\alpha (\rho - c)}{EF_0 \mu_c} = m H_0 \frac{i^2}{\rho^2} \left(1 - \frac{c}{\rho}\right) \frac{\alpha}{\sin \alpha}. \quad (h)$$

Значения отношения H'/H_0 , вычисленные с помощью этой формулы, помещены в таблице XI. Там же приведены значения δ/h_0 и $\delta_1 \cos \alpha_1/h_0$, служащие для определения отношений между смещениями кривой давлений в ключе и пятах и между толщиной арки в тех же сечениях. Эти значения мало отличаются от соответствующих значений, полученных для арок, внешнее очертание которых параллельно оси. Мы можем заключить, что в пологих арках значительной толщины, следующих очертанию веревочной кривой, построенной для заданной нагрузки, при раскружаливании появляются растягивающие напряжения, величина которых достигает максимума в крайних точках сечений пят.

§ 21. Действие вертикальной сосредоточенной силы

Для расчета арки в этом случае применим общие формулы § 16. Положим, что внешнее очертание арки параллельно оси и что вертикальная сила P приложена в точке K (рис. 18). Вызванный этой силой распор определяется формулой (63). Ее знаменатель нам уже известен для случая круговой арки, внешнее очертание которой параллельно оси (формула (е) § 19). Остается составить формулу для вертикальных перемещений v'_k , вызванных действием сил, указанных на рис. 18, а. Сохраняя только первый член соответственной формулы (64) и положив

$$x - x_0 = \rho (\sin \varphi - \sin \varphi_0); \quad y - c = \rho (1 - \cos \varphi) - c,$$

получаем в первом приближении

$$\begin{aligned} [v'_k]_1 &= -\frac{1}{ES\rho} \int_{\varphi_0}^{\alpha} [\rho (1 - \cos \varphi) - c] (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \rho^2 d\varphi = \\ &= -\frac{\rho}{ES} \left[(\rho - c) (\cos \varphi_0 - \cos \alpha) - \frac{\rho}{2} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi_0) - \right. \\ &\quad \left. - \sin \varphi_0 (\rho - c) (\alpha - \varphi_0) + \rho \sin \varphi_0 (\sin \alpha - \sin \varphi_0) \right]. \quad (73) \end{aligned}$$

Полагая еще в первом приближении

$$ES\rho = EJ; \quad c = \frac{\rho (\alpha - \sin \alpha)}{\alpha};$$

$$[u'_c]_1 = \frac{\rho^3}{EJ} \frac{\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha}{2\alpha},$$

мы получаем для распора на основании формулы (63) следующее значение:

$$[H]_1 = \frac{P}{2} \frac{2 \sin \alpha (\cos \varphi_0 + \varphi_0 \sin \varphi_0) - \sin \alpha (\alpha \sin \alpha + 2 \cos \alpha) - \alpha \sin^2 \varphi_0}{\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha}. \quad (74)$$

Во втором приближении при вычислении v'_k мы учтем нормальную силу и заменим u'_c его значением во втором приближении.

Тогда

$$\begin{aligned} [v'_k]_2 &= [v'_k]_1 + \int_{s_0}^s \frac{\cos \varphi \sin \varphi ds}{EF} = [v'_k]_1 + \frac{\rho}{2EF} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi_0), \\ [H]_2 &= \frac{P}{2} \cdot \left[2 \sin \alpha (\cos \varphi_0 + \varphi_0 \sin \varphi_0) - \sin \alpha (\alpha \sin \alpha + 2 \cos \alpha) - \right. \\ &\quad \left. - \alpha \sin^2 \varphi_0 - \frac{i^2}{\rho^2} \alpha (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi_0) \right] : \\ &\quad : \left[\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha + \frac{i^2}{\rho^2} (\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha) \right]. \quad (75) \end{aligned}$$

Полное значение распора мы получим, воспользовавшись точным значением u'_c (формула (e) § 19) и полной формулой (64) для v'_k . Тогда, полагая $k=3$, получим

$$\begin{aligned}
 H = \frac{P}{2} \left\{ 2 \sin \alpha (\cos \varphi_0 + \varphi_0 \sin \varphi_0) - \sin \alpha (\alpha \sin \alpha + 2 \cos \alpha) - \right. \\
 \left. - \alpha \sin^2 \varphi_0 - \frac{i^2}{\rho^2} [4 \sin \alpha (\cos \varphi_0 - \cos \alpha) - 2\alpha (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi_0) - \right. \\
 \left. - 2 \sin \alpha (\alpha \sin \alpha - \varphi_0 \sin \varphi_0)] \right\} : \\
 : \left\{ \alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha + \frac{i^2}{\rho^2} [2\alpha^2 + 4 \sin \alpha (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)] \right\}.
 \end{aligned} \tag{76}$$

Если груз находится посередине пролета, то $\varphi_0=0$, и мы получаем

$$H = \frac{P}{2} \frac{2 \sin \alpha - \sin \alpha (\alpha \sin \alpha + 2 \cos \alpha) - \frac{i^2}{\rho^2} [4 \sin \alpha (1 - \cos \alpha) - 4 \alpha \sin^2 \alpha]}{\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha + \frac{i^2}{\rho^2} [2\alpha^2 + 4 \sin \alpha (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)]}. \tag{77}$$

Чтобы иметь представление о степени приближения выведенных приближенных формул, мы вычислили распор для нескольких арок, предполагая груз расположенным посередине пролета. Полученные результаты приведены в таблице XII. Мы видим, что первая приближенная формула дает для очень пологих арок значительной толщине совершенно неудовлетворительные результаты. Вторая пригодна уже для практического применения, исключая случаи арок чрезвычайной толщины и очень сильной пологости, для которых получаются значительные погрешности. В этой же таблице XII помещены значения H_0 , вычисленные для трехшарнирной арки, что позволяет провести сравнение соответствующих величин.

Пользуясь формулами (74), (75) и (76), мы можем вычислить распор для любого положения груза и построить таким образом линии влияния для распора. Таблица XIII дает значения распора, вычисленные при различных положениях груза на арке с углом $\alpha=36^\circ$. Заметим, что степень приближения неполных формул вообще уменьшается по мере удаления груза от середины пролета; однако вторая приближенная формула в большинстве случаев может быть применена в практических расчетах.

Займемся вычислением момента в ключе рассматриваемой арки, для чего воспользуемся формулой (67). Согласно формуле (68) мы

Таблица XII

α°	$\frac{f}{l}$	$\frac{h}{p}$	$\frac{h}{l}$	$\frac{H_0}{P}$	$\frac{[H]_1}{P}$	$\frac{[H]_2}{P}$	$\frac{H}{P}$
18	0,0793	$\frac{1}{10}$	0,1618	3,157	2,953	0,523	0,6874
		$\frac{1}{20}$	0,0809			1,480	1,521
		$\frac{1}{30}$	0,0539			2,055	2,070
27	1,1200	$\frac{1}{10}$	0,1101	2,083	1,961	1,082	1,122
		$\frac{1}{20}$	0,0551			1,639	1,636
		$\frac{1}{30}$	0,0367			1,805	1,799
36	0,1625	$\frac{1}{10}$	0,0851	1,539	1,438	1,147	1,145
		$\frac{1}{20}$	0,0425			1,354	1,349
		$\frac{1}{30}$	0,0284			1,399	1,397
54	0,2548	$\frac{1}{10}$	0,0618	0,9813	0,9138	0,8685	0,8628
		$\frac{1}{20}$	0,0309			0,9023	0,9003
		$\frac{1}{30}$	0,0206			0,9087	0,9078
90	0,5000	$\frac{1}{10}$	0,0500	0,5000	0,4591	0,4557	0,4740
		$\frac{1}{20}$	0,0250			0,4583	0,4578
		$\frac{1}{30}$	0,0167			0,4588	0,4585

Таблица XIII

Φ_0°	$[H]_1:P$	$[H]_2:P$			$H:P$		
		$\frac{h}{p} = \frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$
0	1,438	1,147	1,354	1,399	1,145	1,349	1,397
9	1,253	0,9971	1,1785	1,2186	1,000	1,175	1,217
18	0,7788	0,6157	0,7314	0,7570	0,6290	0,7331	0,7575
27	0,2523	0,1946	0,2356	0,2447	0,2122	0,2399	0,2465

имеем

$$v_k''' = -\frac{\rho^3}{ES\rho} \int_{\varphi_0}^{\alpha} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) d\varphi + \frac{1}{EF} \int_{\varphi_0}^{\alpha} \sin \varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{\rho}{ES} \left\{ \cos \varphi_0 - \cos \alpha - \sin \varphi_0 (\alpha - \varphi_0) - \frac{i^2}{\rho^2} (\cos \varphi_0 - \cos \alpha) \right\},$$

$$\tau_k''' = \frac{\rho}{ES\rho} \int_0^{\alpha} d\varphi = \frac{\alpha}{ES}.$$

Следовательно,

$$M_c = \frac{P\rho}{2\alpha} \left[\cos \varphi_0 - \cos \alpha - \sin \varphi_0 (\alpha - \varphi_0) - \frac{i^2}{\rho^2} (\cos \varphi_0 - \cos \alpha) \right]. \quad (78)$$

Изгибающий момент в ключе имеет величину

$$M = M_c - Hc = \frac{P\rho}{2\alpha} \left[\left(1 - \frac{i^2}{\rho^2} \right) (\cos \varphi_0 - \cos \alpha) - \sin \varphi_0 (\alpha - \varphi_0) \right] -$$

$$- \frac{H\rho}{\alpha} \left(\alpha - \sin \alpha + \frac{i^2}{\rho^2} \sin \alpha \right). \quad (79)$$

Эта формула позволяет построить линию влияния для изгибающего момента в ключе. Таблица XIV дает значения момента в ключе при различных положениях нагрузки, расположенной на арке с

Таблица XIV

φ_0°	$[M]_1: P\rho$	$[M]_2: P\rho$			$M: P\rho$		
		$\frac{h}{\rho} = \frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$
0	0,05922	0,07799	0,06463	0,06174	0,07709	0,06467	0,06171
9	0,00269	0,01919	0,00750	0,00487	0,01811	0,00747	0,00489
18	-0,01445	-0,00393	-0,01139	-0,01305	-0,00539	-0,01158	-0,01316
27	-0,00778	-0,00406	-0,00670	-0,00729	-0,00540	-0,00704	-0,00742

углом $\alpha = 36^\circ$. Мы видим, что в первом приближении величина момента дает значительные погрешности, которые увеличиваются с толщиной арки. Вполне удовлетворительные результаты для рассматриваемого случая получаются во втором приближении, т. е. при учете влияния нормальной силы. Заметим здесь, что для положительных ординат применение этой приближенной формулы приводит к преувеличенным значениям, для отрицательных ординат — к преуменьшенным. Из этого следует, что суммарная погрешность может быть довольно велика, если нагрузки расположены по всему пролету и если момент получается как разность между влиянием

нагрузок, расположенных над положительной частью линии влияния и нагрузок, расположенных над отрицательной частью линии влияния. Мы вернемся к этому вопросу при расчете арки под действием распределенной нагрузки.

Для определения поперечной силы в ключе применим формулу (66). Первая из формул (65) дает

$$\begin{aligned} v_k^* &= -\frac{\rho^2}{ES} \int_{\varphi_0}^{\alpha} \sin \varphi (\sin \varphi - \sin \varphi_0) d\varphi + \\ &\quad + \frac{\rho}{EF} \int_{\varphi_0}^{\alpha} \sin \varphi (\sin \varphi - \sin \varphi_0) d\varphi - \frac{k\rho}{EF} \int_{\varphi_0}^{\alpha} \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= -\frac{\rho^2}{ES} \left\{ \left(1 - \frac{i^2}{\rho^2} \right) \left[\frac{1}{2} (\alpha - \varphi_0) - \frac{1}{2} (\sin \alpha \cos \alpha - \sin \varphi_0 \cos \varphi_0) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin \varphi_0 (\cos \varphi_0 - \cos \alpha) \right] + \right. \\ &\quad \left. + k \frac{i^2}{\rho^2} \left[\frac{1}{2} (\alpha - \varphi_0) + \frac{1}{2} (\sin \alpha \cos \alpha - \sin \varphi_0 \cos \varphi_0) \right] \right\}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} V_c &= \frac{P}{2} \left[(\alpha - \varphi_0) - (\sin \alpha \cos \alpha - \sin \varphi_0 \cos \varphi_0) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sin \varphi_0 (\cos \varphi_0 - \cos \alpha) + (k-1) \frac{i^2}{\rho^2} (\alpha - \varphi_0) + \right. \\ &\quad \left. + (k+1) \frac{i^2}{\rho^2} (\sin \alpha \cos \alpha - \sin \varphi_0 \cos \varphi_0) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{i^2}{\rho^2} \sin \varphi_0 (\cos \varphi_0 - \cos \alpha) \right] : \\ &\quad : \left[\alpha - \sin \alpha \cos \alpha + (k-1) \frac{i^2}{\rho^2} \alpha + (k+1) \frac{i^2}{\rho^2} \sin \alpha \cos \alpha \right]. \end{aligned}$$

Эта формула дает возможность построить линию влияния для поперечной силы в ключе.

Для $k=3$ она принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} V_c &= \frac{P}{2} \left\{ \alpha - \varphi_0 - \sin \alpha \cos \alpha - \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + 2 \sin \varphi_0 \cos \alpha + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{i^2}{\rho^2} [\alpha - \varphi_0 + 2 \sin \alpha \cos \alpha - \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \alpha] \right\} : \\ &\quad : \left[\alpha - \sin \alpha \cos \alpha + 2 \frac{i^2}{\rho^2} (\alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha) \right]. \quad (80) \end{aligned}$$

Найдя решение для одной сосредоточенной силы мы легко перейдем к формулам, дающим распор, момент и поперечную силу в арке, подверженной действию пары сил. Как мы видели в § 8, с этой задачей приходится иметь дело при изучении влияния переноса на

ось арки точки приложения силы, действующей на поверхности арки. Формула (44) дает следующее значение распора H' , вызываемого в арке парю сил

$$H' = -\frac{1}{P} \frac{dH}{d\varphi_0} \frac{1}{\rho \cos \varphi_0}.$$

Подставив вместо H приведенное выше значение его согласно формуле (76) и взяв от него производную, мы получим

$$H' = \frac{1}{P} \cdot \frac{\alpha \sin \varphi_0 - \varphi_0 \sin \alpha + \frac{i^2}{\rho^2} (-\sin \alpha \operatorname{tg} \varphi_0 + 2\alpha \sin \varphi_0 + \varphi_0 \sin \alpha)}{\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha + \frac{i^2}{\rho^2} [2\alpha^2 + 4 \sin \alpha (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)]}. \quad (81)$$

Точно так же определяется и неизвестный момент M_c ; согласно формуле (78) имеем

$$M'_c = -\frac{1}{P} \frac{dM_c}{d\varphi_0} \frac{1}{\rho \cos \varphi_0} = \frac{1}{2\alpha} \left(\alpha - \varphi_0 - \frac{i^2}{\rho^2} \operatorname{tg} \varphi_0 \right). \quad (82)$$

При $\varphi_0 = \alpha$ главные члены числителей формул (81) и (82) сокращаются. Это означает, что нагрузки, расположенные на внешней поверхности арки, по вертикалям, проходящим через центры плоскостей пят, не будут иметь тех же значений, как в арке с двумя шарнирами. При расчетах их можно совсем отбрасывать.

Неизвестное V_c , под влиянием пары силы, на основании формулы (80) представится в следующем виде:

$$\begin{aligned} V_c &= -\frac{1}{P} \frac{dV_c}{d\varphi_0} \frac{1}{\rho \cos \varphi_0} = \\ &= -\frac{1}{2\rho \cos \varphi_0} \left[-1 - \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 + 2 \cos \varphi_0 \cos \alpha + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{i^2}{\rho^2} (-1 - \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 - \cos \varphi_0 \cos \alpha) \right] : \\ &\quad : \left[\alpha - \sin \alpha \cos \alpha + 2 \frac{i^2}{\rho^2} (\alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha) \right]. \quad (83) \end{aligned}$$

§ 22. Круговая арка, нагруженная вертикальной равномерно распределенной нагрузкой

Имея в своем распоряжении формулы для определения лишних неизвестных для случая вертикальной сосредоточенной силы (§21), можем их распространить и на случаи распределенной нагрузки. Для этого в формулах (76), (78) и (80) заменим P через $q\rho \cos \varphi_0 d\varphi_0$, где q означает интенсивность распределенной нагрузки. Интегрируя затем полученное выражение в пределах от $\varphi_0 = 0$ до $\varphi_0 = \alpha$, мы учтем нагрузку, действующую на левую половину арки.

Поступая таким же образом относительно правой части арки, мы учтем действующую на нее нагрузку.

Попробуем, например, определить распор, вызываемый нагрузкой, равномерно распределенной по всему пролету круговой арки, внешняя поверхность которой параллельна оси. В этом случае интенсивность нагрузки q постоянна. Из формулы (76) путем интегрирования мы получим следующее выражение искомого распора:

$$H = \frac{q\rho}{6} \left[\sin \alpha (3\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha - 2\alpha \sin^2 \alpha) + \right. \\ \left. + \frac{i^2}{\rho^2} \sin \alpha (14\alpha \sin^2 \alpha + 9 \sin \alpha \cos \alpha - 9\alpha) \right] : \left\{ \alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - \right. \\ \left. - 2 \sin^2 \alpha + \frac{i^2}{\rho^2} [2\alpha^2 + 4 \sin \alpha (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)] \right\}. \quad (84)$$

Если вместо полной формулы (76) мы воспользуемся приближенными формулами (74) и (75), то получим приближенные значения распора

$$[H]_1 = \frac{q\rho}{6} \frac{\sin \alpha (3\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha - 2\alpha \sin^2 \alpha)}{\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha}, \quad (85)$$

$$[H]_2 = \frac{q\rho}{6} \frac{\sin \alpha (3\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha - 2\alpha \sin^2 \alpha) - 4 \frac{i^2}{\rho^2} \alpha \sin^2 \alpha}{\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha + \frac{i^2}{\rho^2} (\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha)}. \quad (86)$$

Для определения погрешностей, получающихся от применения этих приближенных формул, мы выполнили подсчеты распоров для различных арок разной толщины и пологости. Результаты этих подсчетов приведены в таблице XV.

Мы видим, что величины погрешностей при вычислении распора достигают почти тех же размеров, что и при действии на арку сосредоточенной силы. Для второго приближения они имеют значение только для очень пологих арок большой толщины.

Вычислим изгибающий момент в ключе от равномерно распределенной нагрузки. На основании формулы (79) будем иметь

$$M = \frac{q\rho^2}{\alpha} \int_0^\alpha \left[\left(1 - \frac{i^2}{\rho^2} \right) (\cos \varphi - \cos \alpha) - \sin \varphi (\alpha - \varphi) \right] \cos \varphi d\varphi - Hc,$$

где H означает распор от равномерно распределенной нагрузки. Интегрируя выражение для M , получаем

$$M = \frac{q\rho^2}{\alpha} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{i^2}{\rho^2} \right) (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) - Hc = \\ = \frac{q l^2}{4\alpha \sin^2 \alpha} \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{i^2}{\rho^2} \right) (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) - \right. \\ \left. - \frac{2 \sin \alpha \left(\alpha - \sin \alpha + \frac{i^2}{\rho^2} \sin \alpha \right) H}{q l} \right]. \quad (87)$$

Таблица XV

α°	$\frac{h}{\rho}$	$\frac{[H]_1}{ql}$	$\frac{[H]_2}{ql}$	$\frac{H}{ql}$	$\Delta[H]_1\%$	$\Delta[H]_2\%$	
27	$\frac{1}{10}$	1,0555	0,5758	0,6149	71,7	6,8	
	$\frac{1}{20}$		0,8798	0,8847	19,3	0,55	
	$\frac{1}{30}$		0,9701	0,9710	8,7	0,09	
36	$\frac{1}{10}$	0,7808	0,6190	0,6278	24,4	1,42	
	$\frac{1}{20}$		0,7339	0,7342	6,3	—	
	$\frac{1}{30}$		0,7593	0,7592	2,8	—	
54	$\frac{1}{10}$	0,5079	0,4821	0,4811	5,57	0,23	
	$\frac{1}{20}$		0,5012	0,5008	1,42	—	
	$\frac{1}{30}$		0,5048	0,5047	0,63	—	
90	$\frac{1}{10}$	0,2801	0,2779	0,2768	1,19	—	
	$\frac{1}{20}$		0,2795	0,2792	0,32	—	
	$\frac{1}{30}$		0,2798	0,2797	0,14	—	
α°	$\frac{h}{\rho}$	$\frac{[M]_1}{ql^2}$	$\frac{[M]_2}{ql^2}$	$\frac{M}{ql^2}$	$\Delta[M]_1\%$	$\Delta[M]_2\%$	$\frac{H_0}{ql}$
27	$\frac{1}{10}$	0,000335	0,01973	0,01754	98	12,5	1,042
	$\frac{1}{20}$		0,007476	0,007066	94	5,8	
	$\frac{1}{30}$		0,003838	0,003699	89	3,8	
36	$\frac{1}{10}$	0,001144	0,01002	0,009051	87	10,7	0,769
	$\frac{1}{20}$		0,003719	0,003564	68	4,3	
	$\frac{1}{30}$		0,002325	0,002266	49	2,6	
54	$\frac{1}{10}$	0,002862	0,005122	0,004916	42	4,2	0,490
	$\frac{1}{20}$		0,003445	0,003408	16	1,1	
	$\frac{1}{30}$		0,003132	0,003107	7,9	0,8	
90	$\frac{1}{10}$	0,01162	0,01201	0,01203	3,4	0,2	0,250
	$\frac{1}{20}$		0,01172	0,01172	0,9	—	
	$\frac{1}{30}$		0,01166	0,01166	0,3	—	

Ограничиваясь первым приближением, имеем

$$[M]_1 = \frac{ql^2}{4\alpha \sin^2 \alpha} \left[\frac{1}{4} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) - \frac{2 \sin \alpha (\alpha - \sin \alpha)}{ql} \cdot [H]_1 \right]. \quad (88)$$

Принимая во внимание сжатие продольной оси под действием нормальной силы, получаем второе приближение

$$[M]_2 = \frac{ql^2}{4\alpha \sin^2 \alpha} \left[\frac{1}{4} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) - \frac{2 \sin \alpha (\alpha - \sin \alpha)}{ql} \cdot [H]_2 \right]. \quad (89)$$

В таблице XV приведена сводка результатов расчетов нескольких арок, полученных на основании применения точных и приближенных формул. Из нее видно, что величины, подсчитанные при первом приближении, дают неудовлетворительные результаты даже для арок средней пологости. Вторые приближения, как и надо было ожидать, дают погрешности большие тех, которые получаются при определении H_2 , но все же они применимы для практических расчетов.

ГЛАВА V

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ АРКИ С ЗАДЕЛАННЫМИ ПЯТАМИ

§ 23. Выбор лишних неизвестных

Выбор лишних неизвестных для симметричных параболических арок производится согласно рис. 17. Расстояние s , характеризующее точку O , определяется по формуле (50). На примере круговой арки мы определили, что погрешности, являющиеся результатом подстановки вместо ESp ее приближенной величины EJ , очень малы. Это позволяет нам в дальнейшем заменять величину ESp величиной EJ .

Предположим, что сечение арки изменяется таким образом, что будут иметь место следующие равенства:

$$F = \frac{F_0}{\cos \varphi}, \quad J = \frac{J_0}{\cos \varphi}. \quad (a)$$

Формула (50) представится тогда в следующем виде:

$$c = \frac{\int_0^{l/2} y dx + i_0^2 \int_0^{l/2} \frac{\cos \varphi}{\rho} dx}{\int_0^{l/2} dx}.$$

При выбранной нами (рис. 17) системе координатных осей имеем для параболы

$$x^2 = 2py, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^3 \varphi}{p} = \frac{p^2}{(p^2 + x^2)^{3/2}}, \quad p = \frac{l^2}{8f}, \quad (b)$$

что дает

$$c = \frac{l^2}{24p} + \frac{i_0^2}{l} \left(\operatorname{arctg} \frac{l}{2p} + \frac{p \cdot \frac{l}{2}}{p^2 + \frac{l^2}{4}} \right). \quad (90)$$

Пренебрегая влиянием нормальной силы на кривизну бруса, мы получим: $c \approx l^2/24p = f/3$.

Как второй пример рассмотрим случай, в котором

$$F = \frac{F_0}{\cos \varphi}; \quad J = \frac{J_0}{\cos^3 \varphi}. \quad (c)$$

Тогда формула (50) преобразуется в следующую:

$$c = \frac{\int_0^{l/2} y \cos^3 \varphi dx + i_0^2 \int_0^{l/2} \frac{\cos \varphi dx}{\rho}}{\int_0^{l/2} \cos^3 \varphi dx} =$$

$$= \frac{\frac{p}{2} \left(\frac{l}{2} - p \operatorname{arctg} \frac{l}{2p} \right) + \frac{i_0^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{l}{2p} + \frac{p \frac{l}{2}}{p^2 + \frac{l^2}{4}}}{p \operatorname{arctg} \frac{l}{2p}}. \quad (91)$$

Пренебрегая также влиянием продольной силы на кривизну, получим для c следующую приближенную величину:

$$c \approx \frac{l - 2p \operatorname{arctg} \frac{l}{2p}}{4 \operatorname{arctg} \frac{l}{2p}}, \quad (92)$$

и, полагая для крутых арок

$$\operatorname{arctg} \frac{l}{2p} = \frac{l}{2p} - \frac{1}{3} \left(\frac{l}{2p} \right)^3,$$

получим $c \approx f/3$.

§ 24. Влияние изменений температуры

Распор, возникающий при повышении температуры, определяется формулой (59). Встречающаяся в этой формуле величина u'_c определяется при помощи формулы (54), полагая в ней $ES\rho = EJ$. Рассмотрим элементарный случай, когда

$$F = \frac{F_0}{\cos \varphi}, \quad J = \frac{J_0}{\cos \varphi}. \quad (a)$$

Для первого приближения получаем

$$[u'_c]_1 = \int_0^s \frac{(y-c)y ds}{EJ} = \frac{1}{EJ_0} \left(\frac{l^3}{640\rho^2} - \frac{cl^3}{48\rho} \right).$$

Подставляя приближенное значение для $c = f/3$, имеем

$$[u'_c]_1 \approx \frac{2}{45} \frac{f^3 l}{EJ_0}. \quad (b)$$

Температурный распор, соответствующий первому приближению, выражается следующим образом:

$$[H_t]_1 = \frac{45 EJ_0 \epsilon t}{4 f^3}. \quad (93)$$

Применяя эту формулу к расчету напряжений в сечении ключа арки, которое мы предполагаем прямоугольным, получаем для температурных напряжений следующую формулу:

$$\delta_{\max}^{\min} = \frac{H_t}{F_0} \left(1 \pm \frac{6c}{h} \right) = \frac{45}{4} E \epsilon t \frac{i_0^2}{f^3} \left(1 \pm \frac{2f}{h} \right) = \frac{15}{16} E \epsilon t \frac{h^2}{f^3} \left(1 \pm \frac{2f}{h} \right). \quad (94)$$

Из этого выражения видно, что для арок малой пологости и толщины, когда первое приближение распора мало отличается от его точного значения, температурные напряжения увеличиваются прямо пропорционально отношению h/f .

К тому же выводу для круговых арок приводят данные, приведенные в таблицах IX и X.

Теперь примем во внимание влияние нормального усилия на сжатие оси; мы будем иметь

$$[u'_c]_2 = \int_0^s \frac{(y-c)y ds}{EJ} + \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EJ} = \frac{2}{45} \frac{f^3 l}{EJ_0} + \frac{\rho}{EF_0} \operatorname{arctg} \frac{l}{2\rho}.$$

Соответствующая величина температурного распора будет

$$[H_t]_2 = \frac{45 EJ_0 \epsilon t}{4 f^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{45 i_0^2}{16 f^2} \frac{l}{f} \operatorname{arctg} \frac{4f}{l}}. \quad (95)$$

Для того чтобы получить третье приближение, примем во внимание поперечную силу. Тогда

$$\begin{aligned} [u'_c]_3 &= \int_0^s \frac{(y-c)y ds}{EJ} + \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EJ} + k \int_0^s \frac{\sin^2 \varphi ds}{EF} = \\ &= [u'_c]_2 + \frac{k}{EF_0} \left(\frac{l}{2} - p \operatorname{arctg} \frac{l}{2p} \right), \end{aligned}$$

что даст

$$[H_t]_3 = \frac{45 EJ_0 \epsilon t}{4 f^2} \frac{1}{1 + \frac{45 i_0^2}{16 f^2} \frac{l}{f} (1-k) \operatorname{arctg} \frac{4f}{l} + k \frac{45 i_0^2}{4 f^2}}. \quad (96)$$

Наконец, введя влияние нормальной силы на кривизну арки и изгибающего момента на сжатие оси арки, будем иметь для u'_c следующее значение:

$$\begin{aligned} u'_c &= \int_0^s \frac{(y-c)y ds}{EJ} + \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EF} + k \int_0^s \frac{\sin^2 \varphi ds}{EF} + \\ &+ \int_0^s \frac{\cos \varphi y ds}{EF\rho} + \int_0^s \frac{(y-c) \cos \varphi ds}{EF\rho} \end{aligned}$$

Пользуясь для s его точным выражением по формуле (90), произведем интегрирование и после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} u'_c &= \frac{1}{EJ_0} \left\{ \frac{2}{45} f^2 l + \right. \\ &\left. + i_0^2 \left[\left(\frac{3}{2} p - kp - \frac{f}{3} \right) \operatorname{arctg} \frac{4f}{l} + \frac{kl}{2} - \left(\frac{p}{2} + \frac{f}{3} \right) \frac{\frac{pl}{2}}{\rho^2 + \frac{l^2}{4}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Соответствующее значение распора будет

$$H_t = \frac{45 EJ_0 \epsilon t}{4 f^2} \frac{1}{1 + 6\alpha_1 + 10\alpha_2}, \quad (97)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{15 i_0^2}{4 f^2} \left[\left(\frac{3}{2} p - kp - f \right) \operatorname{arctg} \frac{4f}{l} + \frac{kl}{2} - \frac{l}{4} \right]$$

и

$$\alpha_2 = \frac{3}{2} \frac{i_0^2}{lf^2} \left(f \operatorname{arctg} \frac{4f}{l} + \frac{\frac{l}{4}}{1 + \frac{l^2}{16f^2}} \right).$$

Рассмотрим еще случай, когда

$$F = \frac{F_0}{\cos \varphi}, \quad J = \frac{J_0}{\cos^3 \varphi}.$$

Эта задача часто встречается при расчете параболических арок. Распор, возникающий при равномерном нагревании арки на t_0 , всегда определяется по формулам (54) и (59). Первое приближение даст для u'_c

$$\begin{aligned} [u'_c]_1 &= \int_0^s \frac{(y-c)y ds}{EJ} = \frac{1}{EJ_0} \int_0^{l/2} (y-c)y \cos^3 \varphi dx = \\ &= \frac{1}{EJ_0} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{l^3}{24} - \frac{p^2 l}{2} + p^3 \operatorname{arctg} \frac{l}{2p} \right) - \frac{cp}{2} \left(\frac{l}{2} - p \operatorname{arctg} \frac{l}{2p} \right) \right]. \end{aligned}$$

Введя первое приближение для c по формуле (92), получим

$$[u'_c]_1 = \frac{l^3}{32EJ_0} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4f} \left(\frac{l}{4f} - \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{4f}{l}} \right) \right].$$

Соответствующее приближенное значение распора:

$$[H_t]_1 = \frac{16EJ_0 \epsilon t}{l^2} \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{l}{4f} \left(\frac{l}{4f} - \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{4f}{l}} \right)} = \frac{EJ_0 \epsilon t}{l^2} m_1. \quad (98)$$

Таблица XVI содержит ряд численных значений коэффициентов m_1 , m_2 и m_3 .

Второе приближение получим, приняв во внимание продольную силу:

$$\begin{aligned} [u'_c]_2 &= [u'_c]_1 + \frac{1}{EF_0} \int_0^{l/2} \cos^3 \varphi dx = [u'_c]_1 + \frac{1}{EF_0} p \operatorname{arctg} \frac{l}{2p} = \\ &= \frac{l^3}{32EJ_0} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{l}{4f} \left(\frac{l}{4f} - \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{4f}{l}} \right) + \frac{4i_0^2}{fl} \operatorname{arctg} \frac{4f}{l} \right\}, \\ [H_t]_2 &= \frac{16EJ_0 \epsilon t}{l^2} \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{l}{4f} \left(\frac{l}{4f} - \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{4f}{l}} \right) + \frac{4i_0^2}{fl} \operatorname{arctg} \frac{4f}{l}} = \frac{EJ_0 \epsilon t}{l^2} m_2. \quad (99) \end{aligned}$$

Таблица XVI

$\frac{f}{l}$	$\frac{h}{l}$	m_1	m_2	m_3	m	$\Delta m_1\%$	$\Delta m_2\%$	$\Delta m_3\%$	$\frac{H'}{H_0}$	$\frac{\delta}{h_0}$	$\frac{\delta_1 \cos \alpha}{h_0}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	1716	355,0	326,9	327,2	425	8,5	0,09	0,7567	0,4940	0,729
	$\frac{1}{12}$		876,1	832,1	832,5	106	5,2	0,05	0,4817	0,2963	0,521
	$\frac{1}{18}$		1203	1166	1166	47,2	3,2	—	0,3000	0,2051	0,378
	$\frac{1}{24}$		1384	1356	1356	26,5	2,1	—	0,1962	0,1559	0,292
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	1212	484,5	443,6	444,1	173	9,2	0,11	0,5778	0,3413	0,546
	$\frac{1}{16}$		881,2	845,8	846,1	43,2	4,1	0,04	0,2753	0,1903	0,342
	$\frac{1}{24}$		1039	1016	1016	19,3	2,3	—	0,1470	0,1235	0,239
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	811,5	457,4	414,8	415,6	95,3	10,1	0,19	0,4272	0,2535	0,408
	$\frac{1}{18}$		679,9	655,0	655,4	23,8	3,7	0,06	0,1686	0,1385	0,244
	$\frac{1}{27}$		747,3	733,7	733,6	10,6	1,9	—	0,0839	0,0938	0,169
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	495,2	395,2	365,7	366,4	35,2	7,9	0,19	0,2118	0,1524	0,246
	$\frac{1}{24}$		465,8	454,9	455,2	8,8	2,3	0,07	0,0659	0,0803	0,137
	$\frac{1}{36}$		481,6	476,4	476,6	3,9	1,0	0,04	0,0307	0,0540	0,0932
	$\frac{1}{16}$		249,3	236,9	237,5	12,1	5,0	0,25	0,0773	0,0809	0,122
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$	266,3	261,8	258,3	258,4	3,1	1,3	—	0,0210	0,0418	0,0643
	$\frac{1}{48}$		264,2	262,6	262,7	1,4	0,6	—	0,0095	0,0280	0,0433
	$\frac{1}{20}$		119,8	115,9	116,3	4,5	3,0	0,35	0,0242	0,0333	0,0421
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{40}$	121,5	121,0	120,0	120,1	1,2	0,7	—	0,00626	0,0171	0,0216
	$\frac{1}{60}$		121,3	120,8	120,9	0,5	0,3	—	0,0028	0,0114	0,0145

Численные значения коэффициента m_2 помещены в той же таблице XVI.

Третье приближение для распора мы получим, учитывая пере-
резающую силу. Тогда, принимая $k=3$, получим

$$\begin{aligned}
 [u'_c]_3 &= [u'_c]_2 + k \int_0^s \frac{\sin^2 \varphi ds}{EF} = [u'_c]_2 + \frac{k}{EF_0} \left(\frac{l}{2} - p \operatorname{arctg} \frac{l}{2p} \right) = \\
 &= \frac{l^3}{32EJ_0} \left[\frac{1}{3} + \frac{l}{4f} \left(\frac{l}{4f} - \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{4f}{l}} \right) + \frac{4i_0^2}{lf} \left(\frac{12f}{l} - 2 \operatorname{arctg} \frac{4f}{l} \right) \right], \\
 [H_t]_3 &= \frac{16EJ_0 \epsilon t}{l^2} \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{l}{4f} \left(\frac{l}{4f} - \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{4f}{l}} \right) + \frac{4i_0^2}{lf} \left(\frac{12f}{l} - 2 \operatorname{arctg} \frac{4f}{l} \right)} = \\
 &= \frac{EJ_0 \epsilon t}{l^2} m_2. \quad (100)
 \end{aligned}$$

Численные значения коэффициента m_3 помещены в таблице XVI.

Наконец, учтем влияние продольной силы и изгибающего момента на кривизну и на сжатие продольной оси. Для s мы примем его полное выражение по формуле (91) и определим u'_c по полной формуле (54). Тогда распор получит следующее значение:

$$\begin{aligned}
 H_t &= \frac{16EJ_0 \epsilon t}{l^2} \times \\
 &\times \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{l}{4f} \left(\frac{l}{4f} - \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{4f}{l}} \right) + \frac{4i_0^2}{l^2} \left(10 - \frac{l}{f} \operatorname{arctg} \frac{4f}{l} \right) - \frac{2}{\operatorname{arctg} \frac{4f}{l}} \frac{1}{\left(\frac{l}{4f} + \frac{4f}{l} \right)}} = \\
 &= \frac{16EJ_0 \epsilon t}{l^2} m_1. \quad (101)
 \end{aligned}$$

Значения коэффициента m_1 помещены также в таблице XVI.

Рассмотрение таблицы XVI показывает, что первое приближение для H_t для очень пологих арок дает совершенно неудовлетворительные результаты. Второе приближение дает значительные погрешности только для арок сравнительно большой толщины. Влияние нормальной силы и момента на кривизну и на сжатие продольной оси весьма мало и может не приниматься во внимание при расчетах. Также незначительно влияние смещения нейтральной оси при замене ES_p на EJ .

Определив H_t , можно легко составить таблицу максимальных напряжений в ключе и пятах, возникающих от повышения температуры. Для очень пологих арок они будут величинами того же порядка, что для круговой арки (см. таблицу X).

§ 25. Действие вертикальной равномерно распределенной нагрузки

В случае загрузки арки вертикальной равномерно распределенной по всему пролету нагрузкой параболическая продольная ось совпадает с веревочной кривой, и арка может быть рассчитана при помощи общих формул (69).

Рассмотрим арку, удовлетворяющую равенствам:

$$F = \frac{F_0}{\cos \varphi}; \quad J = \frac{J_0}{\cos^3 \varphi}.$$

В этом случае первая из формул (69) дает нам

$$M' = H_0 \frac{\int_0^s \frac{ds}{EF\rho \cos \varphi}}{\int_0^s \frac{ds}{EJ}} = H_0 \frac{i_0^2 \alpha}{\int_0^{l/2} \cos^3 \varphi dx},$$

или, принимая во внимание, что для параболы

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{l}{2\rho}, \quad \int_0^{l/2} \cos^3 \varphi dx = \rho \operatorname{arctg} \frac{l}{2\rho},$$

получим:

$$M' = H_0 \frac{i_0^2}{\rho}. \quad (102)$$

Вторая из формул (69) дает нам следующее:

$$H' = \frac{H_0}{EF_0 u'_c} \left[\frac{l}{2} - \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2} - \rho \operatorname{arctg} \frac{l}{2\rho} \right) \right].$$

Заменяя s его приближенной величиной (92), а u'_c — величиной, установленной предыдущим параграфом,

$$u'_c = \frac{l^3}{2EJ_0 m},$$

получим:

$$H' = H_0 m \frac{i_0^2}{l^3}. \quad (103)$$

Эта приближенная формула дает для обратного распора величины, очень близкие к точным. Чтобы иметь полное выражение для H' , нужно взять для s полную формулу (91). Тогда будем иметь:

$$H' = H_0 m \frac{i_0^2}{l^3} \left[1 - \frac{i_0^2}{l^2} \frac{8f}{l} \left(\operatorname{arctg} \frac{l}{2\rho} + \frac{1}{\frac{l}{4f} + \frac{4f}{l}} \right) \right]. \quad (104)$$

Результаты, полученные при применении этой формулы, помещены в таблице XVI, которая содержит ряд численных значений отношения H'/H_0 . Сравнивая их с соответствующими числами таблицы XI, можно прийти к заключению, что отношение H'/H_0 выражается числами, близкими для круговых и параболических арок в том случае, когда арки достаточно пологи. Чтобы определить положение кривой давления, определим величины δ и δ_1 , представляющие ее смещение в ключе и пятах. На основании формулы (70) мы можем написать:

$$\delta = \frac{\frac{H'}{H_0}c - \frac{M'}{H_0}}{1 - \frac{H'}{H_0}}.$$

Подставляя вместо H'/H_0 найденные выше значения, вместо c и M' — величины, полученные по формулам (91) и (102), найдем для δ ряд численных значений, помещенных в предпоследнем столбце таблицы XVI. Как видно, они того же порядка, что и для соответствующих круговых арок (таблица XI). Смещение в пятах вычисляется при помощи формулы (71). Результаты этих вычислений помещены в последнем столбце таблицы XVI. Мы видим, что очень пологие арки почти всегда испытывают растягивающие напряжения, которые появляются во время раскруживания в верхних точках сечений пят.

§ 26. Линии влияния для параболической арки

Рассмотрим простейший случай, определяемый условиями:

$$F = \frac{F_0}{\cos \varphi}, \quad J = \frac{J_0}{\cos \varphi}.$$

Линия влияния для распора определяется формулой (63). Входящая в нее величина u'_c и ее последующие приближения уже были определены в § 24. Величина v'_k определяется формулой (64). Для упрощения мы положим в ней $ES\rho$ равным EJ и отбросим члены, учитывающие влияние продольной силы и изгибающего момента на кривизну и на сжатие оси. Как уже было показано для случая круговой арки (§ 21), эти члены играют чрезвычайно незначительную роль в определении распора. Таким образом, мы приходим к следующему выражению (рис. 18):

$$v'_k = - \int_{s_0}^s \frac{(y-c)(x-x_0) ds}{EJ} + \int_{s_0}^s \frac{\sin \varphi \cos \varphi ds}{EF} - k \int_{s_0}^s \frac{\sin \varphi \cos \varphi ds}{EF}. \quad (a)$$

Второй член этого выражения учитывает влияние продольной силы на сжатие оси, а третий — влияние поперечной силы. Ограничиваясь одним только первым членом формулы (a), мы получаем

первое приближенное значение:

$$[v'_k]_1 = -\frac{1}{EJ_0} \int_{x_0}^{l/2} (y-c)(x-x_0) dx = -\frac{1}{EJ_0} \frac{f}{3l^2} \left[\frac{l^2}{2} - x_0^2 \right]^2.$$

Полагая

$$\frac{\frac{l}{2} - x_0}{l} = n, \quad (b)$$

мы можем переписать его в следующем виде:

$$[v'_k]_1 = -\frac{1}{EJ_0} \frac{fl^2}{3} n^2 (1-n)^2.$$

Соответствующее приближенное значение распора, вызванного грузом, равным единице, будет

$$[H]_1 = -1 \cdot \frac{[v'_k]_1}{2[u'_c]_1} = \frac{15}{4} \frac{l}{f} n^2 (1-n)^2. \quad (105)$$

Учитывая продольную и поперечную силы, получим:

$$[v'_k]_s = [v'_k]_1 - (k-1) \int_{s_0}^s \frac{\sin \varphi \cos \varphi ds}{EF} = [v'_k]_1 - (k-1) \frac{p}{2EF_0} \ln \frac{p^2 + \frac{l^2}{4}}{p^2 + x_0^2}$$

и для распора

$$[H]_s = \frac{15}{4} \frac{l}{f} n^2 (1-n)^2 \frac{1 + \frac{3}{16} (k-1) \frac{i_0^2}{f^2} \frac{1}{n^2 (1-n)^2} \cdot \ln \frac{p^2 + \frac{l^2}{4}}{p^2 + x_0^2}}{1 + \frac{45}{16} \frac{i_0^2}{f^2} \frac{l}{f} (1-k) \operatorname{arctg} \frac{4f}{l} + k \frac{45}{4} \frac{i_0^2}{f^2}} = [H]_1 m. \quad (106)$$

Некоторые численные значения множителя m , вычисленные для случая $k=3$, приведены в таблице XVII. Эта таблица показывает нам, что величина m мало зависит от положения груза на арке и, напротив, находится в сильной зависимости от пологости и толщины арки. По мере того как эти два фактора уменьшаются, m приближается к единице и приближенная формула (105) дает результаты, все более близкие к точному значению H . Заметим, что величины, полученные для распора с помощью формулы (106), относящейся к параболическим аркам, мало отличаются от соответствующих величин, полученных с помощью формулы (76), выведенной для круговых арок, когда эти две арки одинаково пологи и имеют одинаковую толщину в ключе. Это позволяет применить иногда формулу

Таблица XVII

$\frac{h_0}{l}$	$\frac{f}{l} = \frac{1}{12}$			$\frac{f}{l} = \frac{1}{8}$			$\frac{f}{l} = \frac{1}{4}$			$\frac{f}{l} = \frac{1}{2}$		
	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$
$\frac{1}{2}$	0,440	0,749	0,869	0,635	0,868	0,937	0,869	0,962	0,982	0,964	0,990	0,996
$\frac{3}{8}$	0,442	0,749	0,869	0,638	0,869	0,937	0,871	0,962	0,982	0,964	0,990	0,996
$\frac{1}{4}$	0,450	0,753	0,872	0,648	0,873	0,939	0,879	0,965	0,984	0,965	0,990	0,996
$\frac{1}{8}$	0,478	0,766	0,878	0,684	0,886	0,945	0,909	0,973	0,988	0,976	0,993	0,997

(106) при предварительных расчетах, когда продольная ось арки отличается от параболы.

Вычислим теперь изгибающий момент в ключе. Величина M_c находится по формуле (67), содержащей члены

$$\begin{aligned}
 v_k'' &= -\frac{1}{EJ_0} \int_{x_0}^{l/2} (x-x_0)^2 dx + \frac{1}{EF_0} \int_{\varphi_0}^{\alpha} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \\
 &= -\frac{1}{2EJ_0} \left(\frac{l}{2} - x_0 \right)^3 + \frac{1}{2EF_0} \left(\frac{l^2}{4} - \frac{x_0^2}{\rho^2 + x_0^2} \right), \\
 v_c''' &= \int_0^s \frac{ds}{EJ} = \frac{1}{EJ_0} \frac{l}{2}.
 \end{aligned}$$

Величина M_c в первом приближении представится так:

$$[M_c]_1 = \frac{1}{2l} \left(\frac{l}{2} - x_0 \right)^3 = \frac{l}{2} n^3. \tag{107}$$

Лучшее приближение мы получим, приняв для v_k''' значение, учитывающее влияние изгибающего момента на сжатие оси:

$$M_c = \frac{l}{n} n^3 \left[1 - \frac{i_0^2}{l^2 n^2} \left(\frac{l^2}{4} - \frac{x_0^2}{\rho^2 + x_0^2} \right) \right]. \tag{108}$$

Таблица XVIII

n	l/l				n	l/l			
	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0,9997	0,9993	0,9983	0,9973	$\frac{1}{4}$	0,9990	0,9981	0,9960	0,9960
$\frac{3}{8}$	0,9994	0,9989	0,9974	0,9964	$\frac{1}{8}$	0,9980	0,9959	0,9925	0,9943

Численные значения стоящего в скобках выражения, представляющего множитель, на который умножают $[M_c]_1$ для того, чтобы получить M_c , вычислены для $h/l=0,1$ и приведены в таблице XVIII. Они мало отличаются от единицы, что позволяет в практических расчетах удовлетворяться приближенной формулой (107). На основании вышеизложенного изгибающий момент в ключе имеет следующую величину ($c=f/3$):

$$M = M_c - H_c = \frac{l}{2} n^2 - \frac{5}{4} \ln^2 (1 - n^2) \quad m = \frac{l}{2} n^2 \left[1 - \frac{5}{2} m (1 - n^2) \right]. \quad (109)$$

Пользуясь значениями, приведенными в таблице XVII, легко построить линию влияния для изгибающего момента в ключе.

Чтобы построить линию влияния поперечной силы в ключе, нужно обратиться к формуле (66). Ограничиваясь лишь учетом влияния изгибающего момента на кривизну оси, мы получаем

$$[v_k]_1 = - \int_{s_0}^s \frac{x}{EJ} (x - x_0) ds = - \frac{1}{EJ_0} \left(\frac{l^3}{24} + \frac{x_0^3}{6} - \frac{l^2 x_0}{8} \right),$$

и соответственно

$$[V_c]_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4x_0^3}{l^3} - \frac{3x_0}{l} \right). \quad (110)$$

Чтобы получить более точное значение поперечной силы, учтем влияние нормальной и поперечной сил. Тогда на основании формулы (65) будем иметь

$$v_k^r = - \int_{s_0}^s \frac{x(x-x_0)}{EJ} ds - \int_{s_0}^s \frac{\sin^2 \varphi ds}{EF} - k \int_{s_0}^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EF} - \frac{1}{EJ_0} \left\{ \frac{l^3}{24} + \frac{x_0^3}{6} - \frac{l^2 x_0}{8} + i_0^2 \left[\frac{l}{2} - x_0 + (k-1) p \left(\arctg \frac{l}{2p} - \arctg \frac{x_0}{p} \right) \right] \right\},$$

$$v_c^r = - \frac{1}{EJ_0} \left\{ \frac{l^3}{24} + i_0^2 \left[\frac{l}{2} + (k-1) p \arctg \frac{l}{2p} \right] \right\}.$$

и соответственно

$$[V_c]_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{l^3}{24} + \frac{x_0^3}{6} - \frac{l^2 x_0}{8} + i_0^2 \left[\frac{l}{2} - x_0 + (k-1) \rho \left(\operatorname{arctg} \frac{l}{2\rho} - \operatorname{arctg} \frac{x_0}{\rho} \right) \right]}{\frac{l^3}{24} + i_0^2 \left[\frac{l}{2} + (k-1) \rho \cdot \operatorname{arctg} \frac{l}{2\rho} \right]} \quad (111)$$

Рассмотрим теперь параболическую арку, поперечное сечение которой изменяется согласно равенствам

$$F = F_0 / \cos \varphi; \quad J = J_0 / \cos^3 \varphi.$$

Чтобы построить линию влияния для распора, применим формулу (63). Приближенные значения u'_c , соответствующие этой формуле, уже были вычислены в § 24; v'_k определится формулой (64). Первое приближение дает

$$[v'_k]_1 = - \int_{s_0}^s \frac{(y-c)(x-x_0) ds}{EJ} = - \frac{\rho}{2EJ_0} \left[\frac{l^2 + 4x_0^2}{8} - \frac{l x_0}{2} - \ln \frac{\rho^2 + \frac{l^2}{4}}{\rho^2 + x_0^2} \left(c\rho + \frac{\rho^2}{2} \right) + \left(\operatorname{arctg} \frac{l}{2\rho} - \operatorname{arctg} \frac{x_0}{\rho} \right) (\rho x_0 + 2c x_0) \right],$$

что после замены c , согласно формуле (92), и простых преобразований, дает для распора следующее выражение:

$$[H]_1 = \frac{l}{f} \left[\frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - n \right) \left(1 - \frac{\operatorname{arctg} \frac{x_0}{\rho}}{\operatorname{arctg} \frac{l}{2\rho}} \right) - \frac{l}{32f \operatorname{arctg} \frac{l}{2\rho}} \ln \frac{\rho^2 + \frac{l^2}{4}}{\rho^2 + x_0^2} \right] : \left[\frac{1}{3} + \frac{l}{4f} \left(\frac{l}{4f} - \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{4f}{l}} \right) \right]. \quad (112)$$

Мы пользуемся здесь вышеуказанной заменой (b). Приближенные значения распора, вызванного в параболической арке грузом, равным единице, при $f/l = 1/6$ получаются следующие:

n	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
H	1,44	1,26	0,787	0,256

Сделав вычисления по формуле (105), мы получили бы для распора

H	1,41	1,24	0,790	0,268
-----	------	------	-------	-------

В обоих случаях результаты почти одинаковы. Разница, которая имеет место между результатами, полученными при помощи формул (112) и (105), становится еще меньше в случае более пологих арок. Поэтому первое приближенное значение для пологих арок возможно вычислить с помощью более простой формулы (105).

Если желательно вычислить величину H с большей точностью, то нужно ввести влияние нормальной и поперечной силы. Произведя вычисления, мы приходим к формуле:

$$\begin{aligned}
 [H]_s = \frac{l}{f} & \left[\frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - n \right) \left(1 - \frac{\arctg \frac{x_0}{p}}{\arctg \frac{l}{2p}} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{l}{32f \arctg \frac{l}{2p}} \ln \frac{p^2 + \frac{l^2}{4}}{p^2 + x_0^2} + \frac{(k-1) i_0^2}{l^2} \ln \frac{p^2 + \frac{l^2}{4}}{p^2 + x_0^2} \right] : \\
 & \left[\frac{1}{3} + \frac{l}{4f} \left(\frac{l}{4f} - \frac{1}{\arctg \frac{4f}{l}} \right) + \frac{4i_0^2}{lf} \left(\frac{12f}{l} - 2 \arctg \frac{4f}{l} \right) \right]. \quad (113)
 \end{aligned}$$

Для $f/l=1/6$ мы получаем по этой формуле:

n	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
H	1,03	0,902	0,576	0,199

Введение поправочных членов изменяет результат в том же отношении, что и для арки, удовлетворяющей условию $J = \frac{J_0}{\cos \varphi}$. Поэтому при производстве приближенных расчетов очень пологих арок можно применять более простые формулы (105) и (106).

Определим теперь изгибающий момент в ключе. Величина M_c получится по формуле (67). Отбросив влияние продольной силы и изгибающего момента на кривизну и на сжатие продольной оси, получаем следующие выражения для величин, входящих в эту формулу:

$$\begin{aligned}
 v_k'' &= - \int_{s_0}^s \frac{1(x-x_0)}{EJ} ds = \\
 &= - \frac{1}{EJ_0} \left[\frac{p^2}{2} \ln \frac{p^2 + \frac{l^2}{4}}{p^2 + x_0^2} - x_0 p \left(\arctg \frac{l}{2p} - \arctg \frac{x_0}{p} \right) \right], \\
 \tau_c''' &= \int_0^s \frac{1 \cdot ds}{EJ} = \frac{1}{EJ_0} p \cdot \arctg \frac{l}{2p},
 \end{aligned}$$

момент определится следующим равенством:

$$M_c = \frac{p}{4 \operatorname{arctg} \frac{l}{2p}} \ln \frac{p^2 + \frac{l^2}{4}}{p^2 + x_0^2} - \frac{x_0}{2} \left(1 - \frac{\operatorname{arctg} \frac{x_0}{p}}{\operatorname{arctg} \frac{l}{2p}} \right). \quad (114)$$

Изгибающий момент в ключе получим из уравнения:

$$M = M_c - Hc.$$

В заключение вычислим поперечную силу. Она определяется формулой (66). Как первое приближение мы находим для входящих в нее величин значение

$$\begin{aligned} [v_k'']_1 &= - \int_{s_0}^s \frac{x(x-x_0) ds}{EJ} = \\ &= - \frac{p^2}{EJ_0} \left[\frac{l}{2} - x_0 - p \left(\operatorname{arctg} \frac{l}{2p} - \operatorname{arctg} \frac{x_0}{p} \right) - \frac{x_0}{2} \ln \frac{p^2 + \frac{l^2}{4}}{p^2 + x_0^2} \right], \\ [v_c'']_1 &= - \frac{p^2}{EJ_0} \left[\frac{l}{2} - p \operatorname{arctg} \frac{l}{2p} \right], \end{aligned}$$

откуда

$$[V_c]_1 = \frac{\frac{l}{2} - x_0 - p \left(\operatorname{arctg} \frac{l}{2p} - \operatorname{arctg} \frac{x_0}{p} \right) - \frac{x_0}{2} \ln \frac{p^2 + \frac{l^2}{4}}{p^2 + x_0^2}}{l - 2p \operatorname{arctg} \frac{l}{2p}}. \quad (115)$$

Более точное значение получается при учете влияния продольной и поперечной сил. Тогда

$$\begin{aligned} [v_k'']_3 &= [v_k'']_1 - \int_{s_0}^s \frac{\sin^2 \varphi ds}{EF} - \int_{s_0}^s \frac{k \cos^2 \varphi ds}{EF} = \\ &= \frac{p^2}{EJ_0} \left[\frac{l}{2} - x_0 - p \left(\operatorname{arctg} \frac{l}{2p} - \operatorname{arctg} \frac{x_0}{p} \right) - \frac{x_0}{2} \ln \frac{p^2 + \frac{l^2}{4}}{p^2 + x_0^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i_0^2}{p^2} \left[\frac{l}{2} - x_0 + (k-1)p \left(\operatorname{arctg} \frac{l}{2p} - \operatorname{arctg} \frac{x_0}{p} \right) \right] \right], \\ [v_c'']_3 &= - \frac{p^2}{EJ_0} \left\{ \frac{l}{2} - p \operatorname{arctg} \frac{l}{2p} + \frac{i_0^2}{p^2} \left[\frac{l}{2} + (k-1)p \operatorname{arctg} \frac{l}{2p} \right] \right\}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$[V_c]_3 = \left\{ \frac{l}{2} - x_0 - p \left(\operatorname{arctg} \frac{l}{2p} - \operatorname{arctg} \frac{x_0}{p} \right) - \right. \\ \left. - \frac{x_0}{2} \ln \frac{p^2 + \frac{l^2}{4}}{p^2 + x_0^2} + \frac{i_0^2}{p^2} \left[\frac{l}{2} - x_0 + (k-1)p \left(\operatorname{arctg} \frac{l}{2p} - \operatorname{arctg} \frac{x_0}{p} \right) \right] \right\} : \\ : \left\{ l - 2p \operatorname{arctg} \frac{l}{2p} + \frac{i_0^2}{p^2} \left[l + 2(k-1)p \operatorname{arctg} \frac{l}{2p} \right] \right\}. \quad (116)$$

Полученные формулы дают данные для построения линий влияния для искомых лишних неизвестных. Для пологих арок эти линии мало изменяются при различных очертаниях продольной оси арки и различных законах изменения поперечных сечений по ее длине, поэтому в предварительных расчетах допустимо пользоваться формулами (105), (109) и (111), выведенными для простейшего случая параболической арки.

Г Л А В А VI

АРКИ РАЗЛИЧНЫХ ОЧЕРТАНИЙ С ЗАДЕЛАННЫМИ ПЯТАМИ

§ 27. Случай, когда продольная ось арки имеет очертание катеноида

Положим, что ACB (рис. 20) представляет собой продольную ось арки, соответствующую катеноиду. Ее уравнение в принятой системе координатных осей (рис. 20, a) имеет вид

$$y_1 = a \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\gamma}{H_c}} x_1^1. \quad (a)$$

¹⁾ В статье М. Лёге (L e g e у М. Mémoire sur le tracé et le calcul des voutes en maçonnerie. Annales des ponts et chaussées. Partie 1.7 série, 1900, 10 année. 4^{me} trimestre, № 42, pp. 141—233. См. p. 158.) имеются данные о значениях a с учетом собственного веса арки. [В этом уравнении a — высота приведенной нагрузки в замке свода, γ — вес единицы объема, H_0 — распор свода в замке. Уравнение (а) представляет кривую, весьма близкую к цепной линии, уравнение которой $y_1 = a \operatorname{ch}(x_1/a)$; название катеноида дано М. Лёге. Когда $a = \sqrt{H_0/\gamma}$, катеноид обращается в цепную линию; при этом (рис. 20, a) $\frac{b}{a} = \operatorname{ch}(l/2a)$. Если известны a , l и b ,

то из уравнения (а) подстановкой значений $x_1 = l/2$, $y_1 = b$ находим $\sqrt{\frac{\gamma}{H_0}} = \frac{2 \operatorname{arch}(b/a)}{l}$; определив затем при помощи таблиц гиперболических функций значение $\sqrt{\gamma/H_0}$, можно по уравнению (а) найти ординаты катеноида.]

Допустим также, что поперечное сечение арки удовлетворяет следующим условиям:

$$F = \frac{F_0}{\cos^3 \varphi}, \quad J = \frac{J_0}{\cos^3 \varphi}. \quad (b)$$

Определим усилия, вызываемые в этой арке изменениями температуры и вертикальной распределенной нагрузкой, для которой веревочная кривая имеет также форму катеноида. Выберем лишние неизвестные на основании тех же соображений, какими мы руководствовались в предыдущих задачах. При вычислении C , остановившись на первом приближении, получим:

$$c = \frac{\int_0^s y \frac{ds}{EJ}}{\int_0^s \frac{ds}{EJ}} = \frac{\int_0^s y \cos^3 \varphi ds}{\int_0^s \cos^3 \varphi ds} = \frac{\int_0^s (y_1 - a) \cos^3 \varphi ds}{\int_0^s \cos^3 \varphi ds} = \frac{A_1 - aA_0}{A_0}, \quad (c)$$

где для упрощения формулы введены следующие обозначения:

$$A_0 = \int_0^s \cos^3 \varphi ds,$$

$$A_1 = \int_0^s y_1 \cos^3 \varphi ds.$$

Распор, вызванный равномерным нагреванием арки, определяется при помощи формулы (59).

Входящая в нее величина u'_c определяется по формуле (54). Ограничиваясь главным членом этого выражения, получаем первое приближенное значение:

$$[u'_c]_1 = \int_0^s \frac{(y-c) y ds}{EJ},$$

или же, переходя к системе осей, согласно рис. 20, а,

$$[u'_c]_1 = \int_0^s \frac{(y_1 - a - c)(y_1 - a) ds}{EJ} = \frac{1}{EJ_0} [A_2 - (2a + c) A_1 + a(a + c) A_0], \quad (e)$$

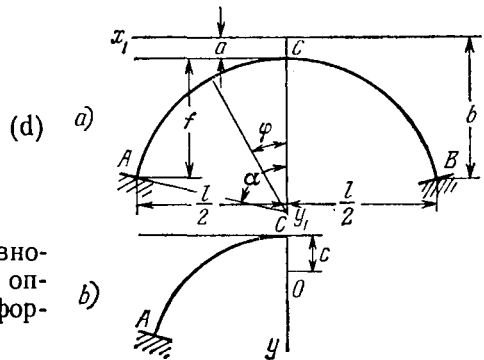


Рис. 20.

где

$$A_2 = \int_0^s y_1^2 \cos^3 \varphi ds. \quad (f)$$

Таким образом, задача сводится к определению интегралов A_0 , A_1 , A_2 . Уравнение катеноида дает следующие соотношения:

$$dx_1 = \frac{dy_1 \sqrt{\frac{H_0}{\gamma}}}{\sqrt{y_1^2 - a^2}}, \quad ds = \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2} = \frac{dy_1 \sqrt{y_1^2 - a^2 + \frac{H_0}{\gamma}}}{\sqrt{y_1^2 - a^2}},$$

$$a + f = a \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\gamma}{H_0}} \frac{l}{2}, \quad \sqrt{\frac{\gamma}{H_0}} = \frac{2}{l} \operatorname{arch} \frac{a+f}{a}. \quad (g)$$

Введя эти соотношения, получаем:

$$A_0 = \int_0^s \cos^3 \varphi ds = \int_0^s \frac{(dx)^3}{(dx)^2} = \left(\frac{H_0}{\gamma}\right)^{\frac{3}{2}} \int_a^{a+f} \frac{dy_1}{\sqrt{y_1^2 - a^2} \left(y_1^2 - a^2 + \frac{H_0}{\gamma}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{H_0}{\gamma}}{\sqrt{\frac{H_0}{\gamma} - a^2}} \operatorname{arch} \frac{\sqrt{f^2 + 2af} \sqrt{\frac{H_0}{\gamma} - a^2}}{(a+f) \sqrt{\frac{H_0}{\gamma}}}, \quad (h)$$

$$A_1 = \int_0^s y_1 \cos^3 \varphi ds = \left(\frac{H_0}{\gamma}\right)^{\frac{3}{2}} \int_a^{a+f} \frac{y_1 dy_1}{\sqrt{y_1^2 - a^2} \left(y_1^2 - a^2 + \frac{H_0}{\gamma}\right)} =$$

$$= \frac{H_0}{\gamma} \operatorname{arch} \frac{\sqrt{f^2 + af}}{\sqrt{\frac{H_0}{\gamma}}} = \frac{H_0}{\gamma} \operatorname{arch} \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)_{x_1=l/2} = \frac{H_0}{\gamma} a, \quad (k)$$

$$A_2 = \int_0^s y_1^2 \cos^3 \varphi ds = \left(\frac{H_0}{\gamma}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^s \frac{y_1^2 dy_1}{\sqrt{y_1^2 - a^2} \left(y_1^2 - a^2 + \frac{H_0}{\gamma}\right)} =$$

$$= \frac{H_0}{\gamma} \cdot \frac{l}{2} - \left(\frac{H_0}{\gamma} - a^2\right) A_0. \quad (l)$$

Численные значения этих интегралов, вычисленные для арок с различными стрелками, при допущении $a=1/12$, приведены в таблице XIX. Подставив их в формулу (e), вычисляем $[u'_c]_1$ и первое, соответствующее ей, приближение для распора, вызванного равномерным нагреванием:

$$[H'_t]_1 = \frac{etl}{2 [u'_c]_1} = \frac{EJ_0 et}{l^2} m_1. \quad (117)$$

Несколько численных значений коэффициента m_1 приведено в таблице XIX. В случае пологих арок эти значения близки к тем, которые мы нашли для соответственных параболических арок (таблица XVI).

Более точная величина для распора получится, если мы примем во внимание нормальную и поперечную силу. Тогда будем иметь:

$$[u'_c]_3 = [u'_c]_1 + \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EF} + k \int_0^s \frac{\sin^2 \varphi ds}{EF} = [u'_c]_1 + \frac{i_0^2}{EI_0} \left[k \frac{l}{2} - (k-1) A_0 \right],$$

и, следовательно,

$$[H_t]_s = \frac{EJ_0 e t}{l^2} m_3. \quad (118)$$

В таблице XIX приведено несколько численных значений m_3 , вычисленных в предположении $k=3$. Определим теперь положение кривой давления, соответствующей постоянной нагрузке, для которой веревочная кривая является катеноидом. Вследствие сжатия оси распор H_0 , вычисленный при помощи формулы (g) и представляющий распор трехшарнирной арки, уменьшается на некоторую величину H' . Кроме того, в ключе появится изгибающий момент

$$M = H'c - M'. \quad (m)$$

Значения H' и M' могут быть вычислены при помощи формул (69), первая из которых дает

$$M' = \frac{\int_0^s \frac{H_0 ds}{EF\rho}}{\int_0^s \frac{ds}{EJ}} = \frac{H_0 i_0^2 \alpha}{A_0}. \quad (119)$$

Чтобы вычислить распор H' , нужно применить вторую из формул (69), что дает

$$H' u'_c = \frac{H_0}{EJ_0} \left[\frac{l}{2} - c\alpha + \int_0^s y d\varphi \right].$$

Так как, с другой стороны, мы имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^s y d\varphi &= \int_0^s (y_1 - a) d\varphi = \int_0^s y_1 d\varphi - a\alpha = \\ &= \int_0^s y_1 d \left[\arctg \left(\frac{dy_1}{dx_1} \right) \right] - a\alpha = \frac{\gamma}{H_0} A_2 - a\alpha. \end{aligned}$$

Таблица XIX

f/l	c/l	A_0/l	A_1/l^2	A_2/l^3	A_3/l^4	m_1	h_0/l	m_2	H/H_0	δ/h_0	$\delta \cos \alpha/h_0$					
$\frac{1}{12}$	{	0,025354	0,48177	0,052362	0,005971	1790	$\frac{1}{6}$	329	0,763	0,4465	0,723					
												$\frac{1}{12}$	846	0,492	0,2838	0,531
$\frac{1}{8}$	{	0,035558	0,46186	0,054911	0,007089	891	$\frac{1}{9}$	433	0,451	0,2429	0,412					
												$\frac{1}{18}$	705	0,183	0,1371	0,256
$\frac{1}{6}$	{	0,043815	0,43875	0,055786	0,007975	567	$\frac{1}{12}$	403	0,238	0,1499	0,249					
												$\frac{1}{24}$	514	0,0761	0,0806	0,142
$\frac{1}{4}$	{	0,055157	0,39295	0,054420	0,009015	338,0	$\frac{1}{16}$	292,2	0,0999	0,0843	0,121					
												$\frac{1}{32}$	325,3	0,0278	0,0442	0,654
$\frac{1}{2}$	{	0,067355	0,29968	0,045158	0,009300	200,4	$\frac{1}{20}$	186,3	0,0442	0,0442	0,0392					
												$\frac{1}{40}$	196,7	0,0117	0,0230	0,0206

то из этого следует:

$$\frac{H'}{H_0} = \frac{1}{u'_c E F_0} \left[\frac{\gamma}{H_0} A_2 - (a+c) \alpha + \frac{l}{2} \right].$$

Таблица XIX содержит численные значения этого отношения для ряда арок различной толщины и пологости. Полученные величины мало отличаются от величин, относящихся к соответственным круговым и параболическим аркам значительной пологости. Поэтому в приближенных расчетах возможно выбирать эти величины независимо от контура, по которому очерчена продольная ось арки. Смещение кривой давлений в ключе определяется формулой (70)

$$\delta = \frac{\frac{H'}{H_0} c - \frac{M'}{H_0}}{1 - \frac{H'}{H_0}}.$$

Подставляя в нее значения, найденные для H'/H_0 , и значение M' , полученное при помощи формулы (119), мы находим для δ величины, приведенные в таблице XIX.

Заметим, что когда продольная ось совпадает с веревочной кривой, относящейся к данной нагрузке, то раскружаливание арки может вызвать в ключе растягивающие напряжения. Смещение кривой давлений в пятах определяется формулой (71):

$$\delta_1 = \frac{\left[\frac{H'}{H_0} (f-c) + \frac{M'}{H_0} \right] \cos \alpha}{1 - \frac{H'}{H_0} \cos^2 \alpha}.$$

Последний столбец таблицы XIX содержит величины отношения между найденными перемещениями δ_1 и толщиной арки в пятах. Как и в предыдущих примерах, смещения в пятах более значительны и опасность появления растягивающих напряжений в момент раскружаливания возрастает.

§ 28. Симметричная арка произвольного очертания

Мы рассмотрели элементарные случаи арок, для которых интегралы, определяющие неизвестные, дают решения в явном виде. Во многих случаях, когда их трудно определить в явном виде, они вычисляются приближенно при помощи формулы Симпсона. Мы покажем общий путь, по которому нужно идти в этих вычислениях. Чтобы иметь возможность судить о степени приближенности результатов, мы разберем такие примеры, для которых мы имеем и точные решения.

Общее выражение распора, вызванного симметричной нагрузкой и равномерным нагреванием арки на t° , выводится из формул §§ 14

и 15. Он представится в следующем виде:

$$H_c = -\frac{u_0 - \frac{1}{2} \varepsilon t l}{u'_c}. \quad (120)$$

Величины u_0 и u'_c определяются формулами (53') и (54') при условии расположения начала координат в точке O .

Изгибающий момент в ключе вычисляется по формуле

$$M = M_c - H_c c = -\frac{\tau_c}{\tau'_c} - H_c c, \quad (121)$$

где τ_c и τ'_c даются формулами (56) и (57).

Начнем с определения температурных напряжений как задачи наиболее простой. Напряженное состояние на самом деле вполне определяется величиной распора, и задача заключается в вычислении перемещения u'_c .

Таблица XX

φ	Приближенное значение			
	y_1/ρ	y_1^2/ρ^2	$\sin^2 \varphi$	
0	-0,06451	0,004162	0	
4,5	-0,06143	0,003774	0,00616	
9,0	-0,05220	0,002725	0,02447	
13,5	-0,03688	0,001360	0,05449	
18,0	-0,01557	0,000242	0,09549	
22,5	+0,01161	0,000135	0,14645	
27,0	+0,04448	0,001978	0,20611	
31,5	+0,08285	0,006864	0,27300	
36,0	+0,12647	0,015995	0,34549	
φ	Точное значение			
	y_1/ρ	y_1^2/ρ^2	$y_1 \cos \varphi/\rho$	$\cos \varphi$
0	-0,06529	0,004263	-0,06529	1
4,5	-0,06221	0,003870	-0,06202	0,9969
9,0	-0,05298	0,002807	-0,05233	0,9877
13,5	-0,03766	0,001418	-0,03662	0,9724
18,0	-0,01635	0,000267	-0,01555	0,9511
22,5	+0,01083	0,000117	+0,01000	0,9239
27,0	+0,04370	0,001910	+0,03893	0,8910
31,5	+0,08207	0,006735	+0,06997	0,8526
36,0	+0,12569	0,015798	+0,10168	0,8090

Рассмотрим последовательные приближения этой величины и вычислим соответственные величины распора для круговой арки с внешним очертанием, параллельным ее оси, для которой угол $\alpha = 36^\circ$ и $h/\rho = 1/10$. Первое приближение мы получим, если примем во внимание только влияние изгибающего момента на кривизну оси. Тогда

$$[u_c] = \int_0^s \frac{y_1^2 ds}{EJ} = \frac{\rho}{EJ} \int_0^\alpha y_1^2 d\varphi. \quad (a)$$

Здесь

$$y_1 = \rho(1 - \cos \varphi) - c.$$

Если не вводить влияния продольной силы и изгибающего момента на изгиб оси и на ее сжатие, то нужно брать для c его приближенную величину (§ 18, формула (b)). Тогда

$$c = \rho \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha} = 0,06451\rho.$$

Разделим полуарку на восемь равных частей и составим таблицу значений φ , y_1 и y_1^2 , соответствующих полученным клиньям (таблица XX).

Тогда при угле $4^\circ 30' = 0,07854$ формула Симпсона приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha y_1^2 d\varphi &= \frac{0,07854}{3} [0,004162 + \\ &+ 4(0,003774 + 0,001360 + 0,000135 + 0,006864) + \\ &+ 2(0,002725 + 0,000242 + 0,001978) + 0,015995] \rho^2 = 0,002057\rho^2, \end{aligned}$$

что дает

$$\begin{aligned} [u'_c]_1 &= 0,002057 \frac{\rho^3}{EJ}; \\ [H_t]_1 &= \frac{EJ\epsilon t}{\rho^2} \cdot \frac{l}{2\rho \cdot 0,002057} = \frac{EJ\epsilon t}{\rho^2} \cdot 285,8. \end{aligned}$$

Результат, полученный для распора, вполне согласуется с результатом, относящимся к соответственной арке, помещенным в таблице IX.

Чтобы получить третье приближение u'_c , учтем влияние продольной силы и перерезывающей. Тогда для $k=3$ получим:

$$\begin{aligned} [u'_c]_3 &= [u'_c]_1 + \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi}{EF} ds + k \int_0^s \frac{\sin^2 \varphi}{EF} ds = \\ &= [u'_c]_1 + \frac{\rho}{EF} \left(\int_0^\alpha \cos^2 \varphi d\varphi + k \int_0^\alpha \sin^2 \varphi d\varphi \right) = \\ &= [u'_c]_1 + \frac{\rho}{EF} \left(\alpha + 2 \int_0^\alpha \sin^2 \varphi d\varphi \right). \end{aligned}$$

Пользуясь числами таблицы XX, мы найдем при применении формулы Симпсона следующее значение:

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \sin^2 \varphi d\varphi &= \frac{0,07854}{3} [0 + 4(0,00616 + 0,05449 + 0,14645 + 0,27300) + \\ &+ 2(0,02447 + 0,09549 + 0,20611) + 0,34549] = 0,07639. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} [u'_c]_3 &= 0,002057 \frac{\rho^3}{EJ} + \frac{\rho}{EF} (0,6283 + 2 \cdot 0,07639) = \\ &= \frac{\rho^3}{EJ} \left[0,002057 + \frac{i_0^2}{\rho^2} \cdot 0,7811 \right]. \end{aligned}$$

Положив $\frac{h}{\rho} = 0,1$, мы получим:

$$[u'_c]_3 = \frac{\rho^3}{EJ} [0,002057 + 0,000651] = \frac{\rho^3}{EJ} \cdot 0,002708;$$

$$[H_t]_3 = \frac{EJ\epsilon t}{\rho^2} \cdot 217,1.$$

Чтобы получить еще более точное значение распора, учтем влияние продольной силы на кривизну оси и момента на ее сжатие. Тогда

$$u'_c = \int_0^s \frac{y_1^2 ds}{EJ} + \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EF} + k \int_0^s \frac{\sin^2 \varphi ds}{EF} + 2 \int_0^s \frac{y_1 \cos \varphi ds}{EF\rho}. \quad (b)$$

Для производства вычислений по этой формуле надо для c взять точную величину

$$c = \frac{\rho}{\alpha} (\alpha - \sin \alpha + \frac{\gamma}{\rho} \sin \alpha) = \rho (0,06451 + 0,00078) = 0,06529\rho.$$

Соответствующие значения подынтегральных функций приведены в таблице XX, на правой ее стороне. Пользуясь ими, мы находим

$$\int_0^s \frac{y_1^2 ds}{EJ} = 0,002057 \cdot \frac{\rho^3}{EJ},$$

$$2 \int_0^s \frac{y_1 \cos \varphi ds}{EF\rho} = -\frac{\rho}{EF} \cdot 0,00504 = -\frac{\rho^3}{EJ} \cdot 0,000004.$$

Заметим, что первый из интегралов имеет ту же величину, которая получилась при подстановке приближенного значения s . Это объясняется нашим выбором расстояния s (формула (50)) по отношению к расположению координатных осей, дающим минимум интеграла $\int_0^s y_1^2 ds$. При значениях, близких к минимуму, функция мало изменяется, и небольшие допущенные для s ошибки существенно не влияют на величину интеграла.

Полученные результаты дают нам возможность написать

$$u'_c = \frac{\rho^3}{EJ} [0,002057 + 0,000651 - 0,000004] = 0,002704 \frac{\rho^3}{EJ}.$$

Если, кроме того, учесть смещение нейтрального волокна и положить:

$$S\rho = J \left(1 + \frac{1}{15} \frac{h^2}{\rho^2} \right) = J \frac{1501}{1500},$$

то получим

$$u'_c = 0,002703 \frac{\rho^3}{EJ}, \quad H_t = \frac{EJ\epsilon t}{\rho^3} \cdot 217,5.$$

Полученное для распора значение согласуется с величиной таблицы IX с точностью до 0,0001. Таким образом, разложив полуарку на восемь клиньев и применяя формулу Симпсона, мы получаем при вычислении u'_c точность, достаточную для практических применений. Чтобы получить окончательный результат с точностью до 0,0001, достаточно выполнить вычисления известных величин также с точностью до 0,0001, в то время как способ, примененный при составлении таблицы IX, требовал вычислений до семи знаков.

В качестве второго примера рассмотрим параболическую арку, определяемую следующими условиями:

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{8}, \quad F = \frac{F_0}{\cos \varphi}, \quad J = \frac{J_0}{\cos^3 \varphi}, \quad \frac{h_0}{l} = \frac{1}{9}. \quad (c)$$

Возьмем для u'_c его третье приближенное значение, т. е. учтем, кроме действия изгибающего момента, и влияние нормальной и

поперечной сил. Эта величина будет равна

$$[u_c]_s = \int_0^s \frac{y_1^2 ds}{EJ} + \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EF} + k \int_0^s \frac{\sin^2 \varphi ds}{EF}. \quad (d)$$

Для c придется взять его приближенную величину, согласно формуле (92),

$$c = \frac{l}{4 \operatorname{arctg} \frac{l}{2p}} - \frac{p}{2} = \frac{l}{2} (1,07840 - 1) = l \cdot 0,03920.$$

Разделим полупролет на восемь равных частей и выпишем в таблице XXI величины, необходимые для дальнейших вычислений.

Т а б л и ц а XXI

x/l	y_1/l	y_1^2/l^2	$\cos^2 \varphi$	$y_1^2 \cos^2 \varphi / l^2$	$\sin^2 \varphi$
0	-0,03920	0,001537	1	0,001537	0
$\frac{1}{16}$	-0,03725	0,001388	$\frac{256}{257}$	0,001383	0,00389
$\frac{1}{8}$	-0,03138	0,000984	$\frac{64}{65}$	0,000969	0,01538
$\frac{3}{16}$	-0,02162	0,000467	$\frac{256}{265}$	0,000452	0,0339
$\frac{1}{4}$	-0,00795	0,000063	$\frac{16}{17}$	0,000059	0,0588
$\frac{5}{16}$	+0,00963	0,000093	$\frac{256}{281}$	0,000085	0,0889
$\frac{3}{8}$	+0,03111	0,000968	$\frac{64}{73}$	0,000849	0,1232
$\frac{7}{16}$	+0,05650	0,003192	$\frac{256}{305}$	0,002679	0,1605
$\frac{1}{2}$	+0,08530	0,007362	$\frac{4}{5}$	0,005890	0,2000

Координатные оси расположим так же, как и в предыдущем примере; таким образом, получим

$$y_1 = \frac{x^2}{2p} - c = \frac{x^2}{2l} - 0,03920l, \quad \cos^2 \varphi = \frac{p^2}{p^2 + x^2} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{l^2}}.$$

Интегралы уравнения (d), согласно формуле Симпсона, получают следующие значения:

$$\int_0^s \frac{y_1^2 ds}{EJ} = \frac{1}{EJ_0} \int_0^{l/2} y_1^2 \cos^2 \varphi dx = \frac{1}{EJ_0} \cdot \frac{l^3}{16} \cdot \frac{1}{3} \times$$

$$\times [0,001537 + 4(0,001383 + 0,000452 + 0,000085 + 0,002679) +$$

$$+ 2(0,000969 + 0,000059 + 0,000849) + 0,005890] = 0,004929 \frac{l^3}{8EJ_0};$$

$$\int_0^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EF} + k \int_0^s \frac{\sin^2 \varphi ds}{EF} = \frac{1}{EF_0} \left[\int_0^{l/2} \cos^2 \varphi dx + k \int_0^{l/2} \sin^2 \varphi dx \right] =$$

$$= \frac{1}{EF_0} \left[\frac{l}{2} + 2 \int_0^{l/2} \sin^2 \varphi dx \right] = \frac{l}{2EF_0} [1 + 0,1453] =$$

$$= \frac{l^3}{8EJ_0} \cdot \frac{h_0^2}{3l^2} \cdot 1,1453.$$

Таким образом, получаем

$$[u_c]_s = \frac{l^3}{8EJ_0} \left[0,004929 + \frac{h_0^2}{3l^2} \cdot 1,1453 \right] = \frac{l^3}{8EJ_0} \cdot 0,009642$$

и

$$[H_t]_s = 414,8 \frac{EI_0 e t}{l^2}.$$

Это вполне согласуется с результатами для соответствующей арки, помещенными в таблице XXI. Из этого мы заключаем, что выбранное нами число делений арки на отдельные элементы вполне обеспечивает достаточную степень приближения расчетов, требуемую для практических применений. Если бы мы исходили из деления арки на четыре элемента, то получили бы

$$\int_0^s \frac{y_1^2 ds}{EJ} = \frac{1}{EJ_0} \int_0^{l/2} y_1^2 \cos^2 \varphi dx =$$

$$= \frac{l^3}{8 \cdot 3 \cdot EJ_0} [0,001537 + 4(0,000969 + 0,000849) +$$

$$+ 2 \cdot 0,000059 + 0,005890] = \frac{l^3}{8EJ} \cdot 0,004939$$

— результат, мало отличающийся от предыдущего. Поэтому возможно ограничиться небольшим числом клиньев, на которые разбивается полуарка, когда речь идет о приближенных расчетах.

Применим такой же метод вычислений для круговой арки, внешнее очертание которой параллельно оси, и нагруженной вертикальной нагрузкой, равномерно распределенной по пролету. Распор H_c получим по общей формуле (120). Последовательные приближения

его знаменателя уже были вычислены при определении H_t . Величина u_0 определяется формулой (53'). Ограниченная одним первым членом, эта формула дает первое приближенное значение

$$[u_0]_1 = \int_0^s \frac{M_0 y_1 ds}{EJ} = -\frac{q\rho^3}{2EJ} \int_0^\alpha \sin^3 \varphi y_1 d\varphi.$$

Рассмотрим случай, когда $\alpha = 36^\circ$. Таблица XXII содержит соответственные значения подынтегральных функций.

Таблица XXII

φ°	Значение приближенное		Значение точное		
	y_1/ρ	$y_1 \sin^3 \varphi/\rho$	y_1/ρ	$y_1 \sin^3 \varphi/\rho$	$\sin^3 \varphi \cos \varphi$
0	-0,06451	0	-0,06529	0	0
4,5	-0,06143	-0,000378	-0,006221	-0,000383	0,00614
9,0	-0,05220	-0,001277	-0,05298	-0,001296	0,02417
13,5	-0,03688	-0,002010	-0,03766	-0,002052	0,05299
18,0	-0,01557	-0,001487	-0,01635	-0,001561	0,09082
22,5	+0,01161	+0,001700	+0,01083	+0,001586	0,1353
27,0	+0,04448	+0,009167	+0,04370	+0,009007	0,1836
31,5	+0,08285	+0,02262	+0,08207	+0,02241	0,2348
36,0	+0,12647	+0,04369	+0,12569	+0,04342	0,2795

Применяя формулу Симпсона, получим

$$\int_0^\alpha \sin^3 \varphi y_1 d\varphi = \frac{0,07854}{3} \cdot 0,1442\rho = 0,003776\rho$$

и соответственно

$$[u_0]_1 = -\frac{q\rho^4}{2EJ} \cdot 0,003776,$$

$$[H_c]_1 = -\frac{[u_0]_1}{[u_c]_1} = \frac{0,003776}{2 \cdot 0,002057} \cdot q\rho = 0,9192q\rho = 0,7807ql.$$

Третье приближение получим при учете нормальной и поперечной сил. Тогда

$$\begin{aligned} [u_0]_3 &= [u_0]_1 + \int_0^s \frac{N_0 \cos \varphi ds}{EF} - k \int_0^s \frac{Q_0 \sin \varphi ds}{EF} = \\ &= [u_0]_1 - 2 \frac{q\rho^3}{EF} \int_0^\alpha \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Применение чисел таблицы XXII дает следующий результат:

$$\int_0^{\alpha} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{0,07854}{3} \cdot 2,586 = 0,06769$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} [u_0]_s &= -\frac{q\rho^4}{2EJ} \cdot 0,003776 - 2 \cdot 0,06769 \frac{q\rho^2}{EF} = \\ &= -\frac{q\rho^4}{2EJ} \left(0,003776 + 4 \frac{i^2}{\rho^2} \cdot 0,06769 \right). \end{aligned}$$

Для $h = \frac{1}{10}\rho$ мы получим

$$[u_0]_s = -\frac{0,002001q\rho}{EJ}$$

и соответственно величину распора

$$[H_c]_s = -\frac{[u_0]_s}{[u'_c]_s} = 0,7389q\rho = 0,6285ql.$$

Чтобы достичь еще большей точности в результатах, надо учесть влияние нормальной силы и изгибающего момента на кривизну оси и на ее сжатие. Также и для c — величины, определяющей начало координат, надо взять более точную величину. Соответственные значения y_1 и $y_1 \sin^2 \varphi$ приведены в четвертом и пятом столбцах таблицы XXII. Введенные в формулу Симпсона, они дают следующий результат:

$$\int_0^{\alpha} y_1 \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{0,07854}{3} \cdot 0,14196\rho = 0,003718\rho.$$

Дополнительные члены, согласно общей формуле (53'),

$$\int_0^s \frac{N_0 y_1 ds}{EF\rho} + \int_0^s \frac{M_0 \cos \varphi ds}{EF\rho} = \frac{q\rho}{EF} \int_0^{\alpha} y_1 \sin^2 \varphi d\varphi - \frac{q\rho^2}{2EF} \int_0^{\alpha} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi$$

при подстановке ранее найденных значений интегралов дают:

$$\begin{aligned} u_0 &= -\frac{q\rho^4}{2EJ} (0,003718 + 0,000226 + 0,000050) = -0,001997 \frac{q\rho^4}{EJ}, \\ H_c &= 0,7385q\rho = 0,6282ql. \end{aligned}$$

Если учесть еще смещение нейтральной линии и в выражении для u_c заменить J через

$$S\rho \approx J \left(1 + \frac{1}{15} \frac{h^2}{\rho^2} \right),$$

то получим

$$u_0 = -0,001996 \frac{q\rho^4}{EJ},$$

$$H_c = \frac{0,001996}{0,002703} q\rho = 0,7384 q\rho = 0,6280 ql.$$

Как мы видим, эти результаты мало отличаются от результатов, относящихся к соответственным аркам, помещенным в таблице XV. Определим теперь изгибающий момент в ключе согласно формуле (121).

Первое приближение дает

$$M_c = \left[\frac{-\tau_c}{\tau'_c} \right]_1 = - \frac{\int_0^s M_0 ds}{\int_0^s ds} = \frac{q\rho^2}{2\alpha} \int_0^\alpha \sin^2 \varphi d\varphi = 0,04389 ql^2$$

и

$$[H_c]_1 = 0,7807 ql \cdot 0,06451\rho = 0,04284 ql^2.$$

Первое приближенное значение момента в ключе составит

$$[M]_1 = 0,04398 ql^2 - 0,04284 ql^2 = 0,00114 ql^2.$$

Результат вполне согласуется с приведенным в таблице XV.

Посмотрим теперь, какие результаты дают точные формулы. С одной стороны, мы имеем

$$\frac{-\tau_c}{\tau'_c} = - \frac{\int_0^s \left(\frac{M_0}{ES\rho} + \frac{N_0}{EF\rho} \right) ds}{\int_0^s \frac{ds}{ES\rho}} = \frac{q\rho^2}{2\alpha} \left(1 - \frac{i^2}{\rho^2} \right) \cdot \int_0^\alpha \sin^2 \varphi d\varphi = 0,04394 ql^2,$$

с другой стороны,

$$H_c = 0,6280 ql \cdot 0,06529\rho = 0,03487 ql^2.$$

Соответствующее значение искомого момента будет

$$M = 0,04394 ql^2 - 0,03487 ql^2 = 0,00907 ql^2.$$

Этот результат отличается от результатов таблицы XV на две единицы в последнем десятичном знаке.

Как видно, применение формулы Симпсона к определению момента в ключе при принятом числе элементарных клиньев свода позволяет достичь совершенно достаточной степени точности. Так как момент получается как разность двух величин одного порядка, то

степень точности вообще получается меньше той, которая достигается для H_c . Производя в рассматриваемом примере действия над числами с четырьмя знаками, мы получаем величину момента только с тремя знаками.

Применим приближенное вычисление интегралов к построению линий влияния. Чтобы построить линию влияния для распора H_c , воспользуемся формулой (63). Приближенные величины, зависящие от знаменателя, были вычислены в предыдущих примерах. Общее выражение числителя дается формулой (64). Она может быть упрощена, если пренебречь влиянием нормальной силы и изгибающего момента на кривизну оси и на ее сжатие. При начале координат в точке O (рис. 17) значение распора, вызванного вертикальным сосредоточенным грузом, приложенным на расстоянии x_c от оси симметрии арки, представится в следующем виде:

$$H_c = \frac{\int_{s_0}^s \frac{y_1(x-x_0)}{EJ} ds + (k-1) \int_{s_0}^s \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{EF} ds}{2u'_c}. \quad (122)$$

Для примера возьмем круговую арку постоянного поперечного сечения, для которой $\alpha=36^\circ$, $h=0,1\rho$ и $k=3$. Для того чтобы получить первое приближенное значение, ограничимся первым членом. В рассматриваемом случае

$$\int_{s_0}^s \frac{y_1(x_1-x_0)}{EJ} ds = \frac{\rho}{EJ} \left[\int_{\varphi_0}^{\alpha} y_1 x_1 d\varphi - \rho \sin \varphi_0 \int_0^{\alpha} y_1 d\varphi \right].$$

Применяя формулу Симпсона и пользуясь числами таблицы XXIII, получаем для искомых интегралов значения, помещенные в пятом и шестом столбцах таблицы. Соответствующие приближенные значения распора приведены в седьмом столбце таблицы. Полученные результаты отличаются от данных таблицы XIII четвертыми десятичными знаками. Для того чтобы получить более точную величину распора, примем во внимание влияние нормальной и поперечной сил. При помощи формулы Симпсона, введя в нее числа восьмого столбца, вычислим второй член числителя формулы (122). Эти величины, помноженные на EF , приведены в десятом столбце. Десятый столбец содержит значения H_c , вычисленные для $h=0,1\rho$. Они отличаются от точных величин, помещенных в таблице XIII, менее чем на 0,001. Таким образом, метод, предложенный для построения линий влияния распора, дает совершенно удовлетворительные результаты.

Перейдем к построению линий влияния для изгибающего момента в ключе. Его величина получается по формуле

$$M = M_c - H_c c.$$

Таблица XXIII

φ°	y_1/ρ	x_1/ρ	y_1x_1/ρ^2	$1/\rho^2 \int_{\varphi}^{\alpha} x_1y_1d\varphi$
0	-0,06451	0	0	0,005917
4,5	-0,06143	0,0785	-0,004822	
9	-0,05220	0,1564	-0,008164	0,006635
13,5	-0,03688	0,2334	-0,008606	
18	-0,01557	0,3090	-0,004811	0,007876
22,5	+0,01161	0,3827	+0,004443	
27	+0,04448	0,4540	+0,020190	0,007008
31,5	+0,08285	0,5225	+0,043290	
36	+0,12647	0,5878	+0,074340	0

φ°	$x_0 \int_{\varphi}^{\alpha} y_1d\varphi/\rho^2$	$[H_0]_1$	$\sin 2\varphi$	$\int_{\varphi}^{\alpha} \sin 2\varphi d\varphi$	$[H_0]_2$
0	0	1,438	0	0,3455	1,146
4,5			0,1564		
9	0,001484	1,252	0,3090	0,3210	1,001
13,5			0,4540		
18	0,004674	0,7783	0,5878	0,2500	1,6296
22,5			0,7071		
27	0,005972	0,2521	0,8090	0,1394	0,2129
31,5			0,8910		
36	0	0	0,9511	0	0

Первое приближение получим, применив формулы (67) и (68)

$$[M_1] = \frac{\int_{s_0}^s \frac{(x_1 - x_0) ds}{EJ}}{2 \int_0^s \frac{ds}{EJ}} - [H_c]_1 c. \quad (123)$$

Для рассматриваемой круговой арки имеем

$$[M]_1 = \frac{\int_{\varphi_0}^{\alpha} (x_1 - x_0) d\varphi}{2\alpha} - [H_c]_1 c.$$

Интеграл $\int_{\varphi_0}^{\alpha} x_1 d\varphi$ легко определяется по формуле Симпсона вводом

в нее значения x_1 таблицы XXIII. Другие величины формулы для M уже определены. Таким образом, получаем числа второго столбца таблицы XXIV. Для того чтобы учесть влияние нормальной и поперечной силы, нужно в формулу (123) подставить вместо распора H_c его приближенную величину $[H_c]_s$. Соответственные величины $[M_s]$ находятся в третьем столбце таблицы XXIV. Наконец, влияние нормальной силы на кривизну оси и момента на ее сжатие вводятся посредством применения следующей формулы:

$$M = \frac{\int_{s_0}^s \frac{(x_1 - x_0) ds}{EJ} - \int_{s_0}^s \frac{\sin \varphi ds}{EF\rho}}{2 \int_0^s \frac{ds}{EJ}} - H_c c, \quad (124)$$

где c нужно заменить его точной величиной $0,06529 \rho$ и H_c — его точным значением по таблице XIII. Таким образом, мы получаем величины момента, помещенные в последнем столбце таблицы XXIV.

Таблица XXIV

φ°	$[M]_s/\rho$	$[M]_s/\rho$	M/ρ
0	0,0592	0,0781	0,0771
9	+0,0028	+0,0190	+0,0182
18	-0,0144	-0,0048	-0,0054
27	-0,0078	-0,00524	-0,0054
36	0	0	0

Так как эти величины являются результатами вычитаний, то степень их точности для некоторых положений нагрузки значительно понижается. Однако, примененный при этих вычислениях метод обычно приводит к удовлетворительным результатам, как это мы видим при сравнении их с числами таблицы XIV.

Построенную таким образом линию влияния мы можем использовать для вычисления моментов, вызванных сосредоточенными грузами, занимающими самое невыгодное положение. Этот метод не дает пригодных результатов, когда под нагрузкой находится весь пролет. В этом случае, чтобы получить достаточное приближение, надо следовать методу, указанному для случая арки, нагруженной распределенной нагрузкой. Линия влияния поперечной силы получается при помощи формулы (66).

Первое приближение дает:

$$[Q_c]_1 = - [V_c]_1 = - \frac{\int_{s_0}^s \frac{x_1(x_1-x_0) ds}{EJ}}{2 \int_0^s \frac{x_1^2 ds}{EJ}}. \quad (125)$$

Для круговой арки с постоянным сечением

$$[Q_c]_1 = \frac{\int_{\varphi_0}^{\alpha} x_1(x_1-x_0) d\varphi}{2 \int_0^{\alpha} x_1^2 d\varphi} = - \frac{\int_{\varphi_0}^{\alpha} \sin^2 \varphi d\varphi - \sin \varphi_0 \int_{\varphi_0}^{\alpha} \sin \varphi d\varphi}{2 \int_0^{\alpha} \sin^2 \varphi d\varphi}.$$

Значения входящих в это выражение интегралов были нами уже определены; после подсчетов мы легко получаем значения поперечной силы, помещенные во втором столбце таблицы XXV.

Таблица XXV

φ°	$[Q_c]_1$	Q_0
0	-0,5000	-0,5000
9	-0,3087	-0,3097
18	-0,1465	-0,1481
27	-0,0385	-0,0394
36	0	0

Более точная величина поперечной силы получается при учете влияния продольной и поперечной сил. Тогда, согласно формулам (65), получаем:

$$[Q_c]_3 = - \frac{\int_{s_0}^s \frac{x_1(x_1-x_0) ds}{EJ} + \int_{s_0}^s \frac{\sin^2 \varphi ds}{EF} + k \int_{s_0}^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EF}}{2 \left[\int_0^s \frac{x_1^2 ds}{EJ} + \int_0^s \frac{\sin^2 \varphi ds}{EF} + k \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EF} \right]}. \quad (126)$$

Упрощая эту формулу для рассматриваемого случая и произведя вычисления, мы получаем числа третьего столбца. Мы видим, что в этом частном случае первое приближение дает вполне удовлетворительные результаты для практических применений, что и позволяет принимать их для вычисления поперечной силы.

§ 29. Арка, продольная ось которой близка к веревочной кривой, построенной для действующих на арку вертикальных нагрузок

В этом случае общий метод предыдущего параграфа с успехом может быть заменен другим, вытекающим из формул (72) и (73). Как мы увидим в дальнейшем, он дает некоторые указания на наиболее выгодный выбор очертания, которое следует дать продольной оси арки. Путь, по которому нужно следовать в вычислениях, будет рассмотрен на элементарном примере круговой арки радиуса ρ . Расположив начало координат в вершине, мы имеем (рис. 21) $y = \rho(1 - \cos \varphi)$. Формулы (72) и (73) получают тогда следующий вид ¹⁾:

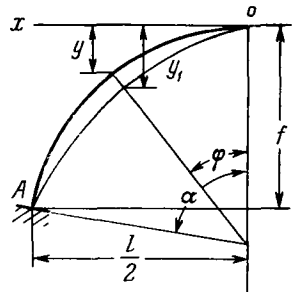
$$\left. \begin{aligned} M' &= \frac{H_0}{\tau_c'''} \left[\int_0^s \frac{ds}{EF\rho \cos \varphi} + \int_0^s \frac{(y-y_1) ds}{EJ} \right], \\ H' &= \frac{H_0}{uc'} \left[(\rho-c) \int_0^s \frac{ds}{EF\rho \cos \varphi} + \int_0^s \frac{(y-y_1)(y-c) ds}{EJ} \right], \end{aligned} \right\} (a)$$


Рис. 21.

где y_1 — ордината веревочной кривой, построенной для действующей вертикальной нагрузки.

Предположим, что в рассматриваемом случае сечение арки постоянно, и нагрузка равномерно распределена по пролету. Тогда соответствующая веревочная кривая есть парабола

$$y_1 = \frac{4fx^2}{l^2} = \rho \frac{\sin^2 \varphi (1 - \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha}. \quad (b)$$

Ее положение относительно продольной оси показано на рис. 21. Для нашего случая формулы (а) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} M' &= \frac{H_0}{\tau_0'''} \left[\frac{1}{EF} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos \varphi} + \frac{\rho}{EJ} \int_0^\alpha (y-y_1) d\varphi \right], \\ H' &= \frac{H_0}{u'} \left[\frac{\rho-c}{EF} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos \varphi} + \frac{\rho}{EJ} \int_0^\alpha (y-y_1)(y-c) d\varphi \right]. \end{aligned} \right\} (c)$$

¹⁾ В дальнейшем мы всюду предполагаем справедливость равенства $ES\rho \approx EJ$.

Первые члены этих формул представляют величины, которые мы имели для случая, в котором веревочная кривая совпадала с продольной осью арки (§ 20). Вторые члены дают оценку влиянию изгибающего момента, происходящего от несовпадения в рассматриваемом случае двух кривых. Формулы (с) дают возможность вычислить M' и H' для любого угла α , принимая во внимание равенства

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = \ln (\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha),$$

$$\int_0^{\alpha} (y - y_1) d\varphi = \rho \int_0^{\alpha} \left(1 - \cos \varphi - \sin^2 \varphi \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) d\varphi =$$

$$= \rho \left[\alpha - \sin \alpha - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) \right],$$

$$\int_0^{\alpha} (y - y_1) y d\varphi =$$

$$= \rho^2 \int_0^{\alpha} \left(1 - \cos \varphi - \sin^2 \varphi \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) (1 - \cos \varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{\rho^2}{2 \sin^2 \alpha} \left(2\alpha - 3\alpha \cos^2 \alpha - \sin \alpha - \frac{7}{3} \sin^3 \alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} \sin^3 \alpha \cos \alpha + \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \right),$$

$$\tau_c''' = \int_0^s \frac{ds}{EJ} = \frac{\rho \cdot \alpha}{EJ}.$$

Теперь легко определяется (рис. 19) и величина распора в ключе $H = H_0 - H'$ и величина изгибающего момента в ключе $M = H'c - M'$.

Для сравнения соответственных численных значений двух членов формул (с) приведем несколько чисел, вычисленных для случаев, когда $\alpha = 36^\circ$ и $\alpha = 54^\circ$.

Пусть $\alpha = 36^\circ$ и $\frac{h}{\rho} = \frac{1}{10}$, вторая из формул (с) дает нам:

$$\frac{H'}{H_c} = 0,1942 - 0,0106 = 0,1836.$$

Это означает, что относительное уменьшение распора сравнительно с распором H_0 трехшарнирной арки мало отличается от уменьшения распора, которое получается в случае полного совпадения веревочной кривой с продольной осью арки.

Так как для равномерно распределенной нагрузки

$$H_0 = \frac{ql^2}{8f} = 0,7692ql, \quad H' = 0,1412ql,$$

то величина распора в ключе получается равной

$$H = H_0 - H' = 0,6280 ql.$$

Этот результат на 0,0002 отличается от того, который приведен для соответствующей арки в таблице XV.

Пусть далее $h/\rho = 1/20$; вторая из формул (с) дает нам:

$$\frac{H'}{H_0} = 0,0592 - 0,0133 = 0,0459,$$

тогда

$$H = H_0 - H' = 0,7338 ql.$$

Из этого видно, что влияние изгибающего момента растет по мере того, как уменьшается толщина арки.

Когда веревочная кривая проходит ниже продольной оси арки, как было в только что рассмотренном нами примере, горизонтальные перемещения точки С, вызванные изгибом, противоположны тем, которые вызываются сжатием оси. Этому явлению соответствует уменьшение распора. Из этого следует, что уменьшением влияния изгиба или уменьшением толщины арки, или увеличением расстояния $y - y_1$ между веревочной кривой и продольной осью арки можно достигнуть такого очертания арки, при котором распор H' станет отрицательным и распор H превзойдет распор, который мы получили бы для подобной же трехшарнирной арки. Проследим это на примере круговой арки с углом $\alpha = 54^\circ$. Очевидно, что для такого большого угла расстояния $y - y_1$ между параболой и круговой осью арки получаются более значительными, чем в более пологой арке, которую мы только что изучили. Можно наперед сказать, что влияние изгибающего момента будет более значительно. Полагая $h/\rho = 1/10$ и подставляя вместо H_0 его значение 0,4907 ql , получим в этом случае

$$\frac{H'}{H_0} = 0,0512 - 0,0328 = 0,0184, \quad H = H_0 - H' = 0,4817ql.$$

Хотя влияние изгиба более значительно, чем в предыдущем случае, однако распор еще положителен, следовательно, распор в арке с заделанными пятнами не достигает величины распора подобной трехшарнирной арки.

Положим затем $\frac{h}{\rho} = \frac{1}{20}$. Тогда

$$\frac{H'}{H_0} = 0,0135 - 0,0343 = -0,0208, \quad H = H_0 - H' = 0,5009ql.$$

Значение изгиба достигает такой величины, что распор получается больше того, который наблюдается в трехшарнирной арке (см. величины H и H_0 таблицы XV).

Определим теперь изгибающий момент в ключе. Первая из формул (с) дает нам

$$M' = \frac{H_0 \rho}{\alpha} \left\{ \frac{i^2}{\rho^2} \ln(\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha) + \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} (2\alpha \sin^2 \alpha - 2 \sin^3 \alpha - \alpha + \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos^2 \alpha) \right\}.$$

Входящий в это выражение член $\frac{i^2}{\rho^2} \ln(\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha)$ встречался в примере, когда веревочная кривая совпадала с продольной осью арки. Следующий член учитывает влияние изгиба. Чтобы иметь представление об их относительной величине, приведем несколько числовых результатов. Положим $\alpha = 36^\circ$ и $h/\rho = 1/10$, тогда формула (d) дает нам:

$$M' = \frac{H_0 \rho}{0,6283} (0,000562 - 0,001696) = -0,001805 H_0 \rho.$$

Мы видим, что под действием изгибающего момента величина M' меняет знак, который она имела в случае совпадения веревочной кривой с продольной осью арки.

Изгибающий момент в ключе определяется следующей формулой:

$$M = H'c - M' = 0,1836 H_0 c + 0,001805 H_0 \rho = 0,01380 H_0 \rho = 0,009029 q l^2,$$

дающей, как видно, результат, близкий к результату таблицы XV.

Для $h/\rho = 1/20$ мы имеем:

$$M' = \frac{H_0 \rho}{0,6283} (0,0001405 - 0,001696) = -H_0 \rho \cdot 0,002475$$

и для момента в ключе:

$$M = H'c - M' = H_0 \rho (0,00297 + 0,00248) = 0,003557 q l^2.$$

Влияние изгиба проявляется в том, что изгибающий момент в ключе превосходит изгибающий момент, получаемый при совпадении веревочной кривой с продольной осью арки, а также в том, что кривая давлений перемещается, приближаясь к верхней части сечения в ключе.

Для $\alpha = 54^\circ$ мы получим тот же результат, но в более резкой форме, так как здесь значение изгиба более сильно.

Положим $h/\rho = 1/10$. Тогда

$$M' = \frac{H_0 \rho}{0,9425} (0,000937 - 0,01358) = -0,01341 H_0 \rho.$$

Момент в ключе:

$$M = H'c - M' = H_0\rho (0,00262 + 0,1341) = 0,00486ql^2.$$

Для $h/\rho = 1/20$ получим:

$$M' = \frac{H_0\rho}{0,9425} (0,000234 - 0,01358) = -0,01416H_0\rho,$$

$$M = H'c - M' = H_0\rho (-0,00295 + 0,01416) = 0,01121H_0\rho = \\ = 0,00340ql^2.$$

Полученные величины близки к величинам таблицы XV, что подтверждает правильность практического применения формул (72) и (73).

Чтобы иметь представление об отношении, существующем между положением, занимаемым кривой давления в ключе, и расстоянием между веревочной кривой и продольной осью арки, рассмотрим таблицу XV. Смещение δ кривой давления относительно центра сечения ключа смещается от деления момента в ключе M на распор H . Величины этого смещения приведены в таблице XXVI. Сравнивая

Таблица XXVI

α°	f/l	h/ρ	δ/h	M_1/ql^2	N_1/ql	δ_1/h
27	1,200	$\frac{1}{10}$	0,259	-0,0337	0,775	-0,395
		$\frac{1}{20}$	0,145	-0,0117	1,016	-0,209
		$\frac{1}{30}$	0,104	-0,0048	1,092	-0,119
36	0,1625	$\frac{1}{10}$	0,169	-0,0139	0,802	-0,203
		$\frac{1}{20}$	0,114	-0,0021	0,888	-0,056
		$\frac{1}{30}$	0,105	+0,0007	0,908	+0,028
54	0,2548	$\frac{1}{10}$	0,165	+0,0025	0,688	+0,058
		$\frac{1}{20}$	0,220	+0,0060	0,699	+0,278
		$\frac{1}{30}$	0,299	+0,0067	0,702	+0,461

их со смещениями, относящимися к круговой арке с постоянным сечением, в таблице XI, мы видим, что смещение веревочной кривой книзу от продольной оси вызывает перемещение кривой давления кверху.

Как и можно было предвидеть, эти смещения тем больше, чем тоньше арка и чем значительнее величина расстояния $y-y_1$.

Чтобы вычислить усилия, появляющиеся от действия собственного веса в момент раскружаливания, особенно интересно знать перемещения кривой давления в пятах, так как именно здесь эти усилия могут достичь максимальных значений. Для этого мы определим изгибающий момент M_1 по формуле $M_1 = M + fH - \frac{ql^2}{8}$ и соответственное нормальное усилие по формуле

$$N_1 = H \cos \alpha + \frac{ql}{2} \sin \alpha.$$

Полученные таким образом численные значения приведены в таблице XXVI. Они послужат нам для определения величины смещения δ_1 , которые имеет кривая давлений в пятах. Они приведены в той же таблице и имеют знак минус, когда смещение происходит от центра сечения к центру кривизны, и знак плюс в обратном случае.

Сравнение этих результатов с соответственными числами таблицы XIX показывает нам, что обстоятельства, обуславливающие смещение кривой давления кверху, смещают ее в пятах таким образом, что удаляют ее от центра кривизны и уменьшают величину отрицательного изгибающего момента, который имеет место при совпадении продольной оси арки с веревочной кривой.

В арках малой пологости, для которых расстояния между параболической кривой и круговым очертанием арки значительно, момент в пятах становится положительным, и продольная ось дважды пересекает кривую давления в каждом полупролете ¹⁾. Эти условия получены для самой тонкой арки при угле $\alpha = 36^\circ$ и для арок при угле $\alpha = 54^\circ$.

Полученные таким образом результаты дают некоторые указания для выбора рационального очертания продольной оси арки. Отодвигая ее кверху от веревочной кривой, мы можем получить значительные уменьшения изгибающего момента в пятах за счет увеличения, менее значительного, момента в ключе. Выбор подходящих отклонений может быть сделан повторным применением формул (72) и (73).

¹⁾ Эти пересечения необходимы, так как в противном случае изгибающий момент сохранил бы один и тот же знак на всем полупролете, что противоречит основному условию, заключающемуся в том, что сечение ключа не может проворачиваться.

Для примера изучим арку переменного сечения, удовлетворяющего условиям

$$F = \frac{F_0}{\cos \varphi} \quad \text{и} \quad J = \frac{J_0}{\cos^3 \varphi}.$$

Для случая круговой оси арки формулы (а) дают нам

$$\left. \begin{aligned} M' &= \frac{H_0}{\tau_c} \left[\frac{\alpha}{EF_0} + \frac{\rho}{EJ_0} \int_0^{\alpha} (y-y_1) \cos^3 \varphi d\varphi \right], \\ H' &= \frac{H_0}{u_c} \left[\frac{(\rho-c)\alpha}{EF_0} + \frac{\rho}{EJ_0} \int_0^{\alpha} (y-y_1)(y-c) \cos^3 \varphi d\varphi \right]. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Входящие в эти выражения интегралы проще всего вычислить по формуле Симпсона. Численные значения подынтегральных функций для угла $\alpha=36^\circ$ при разложении полуарки на шесть клиньев приведены в таблице XXVII.

Таблица XXVII

φ°	$-(y-y_1) \cos^3 \varphi / \rho$	$-(y-y_1) y \cos^3 \varphi / \rho^3$
0	0	0
6	0,000553	0,0000030
12	0,001912	0,0000418
18	0,003307	0,0001618
24	0,003809	0,0003293
30	0,002742	0,0003674
36	0	0

На основании таблиц имеем:

$$-\int_0^{\alpha} (y-y_1) y \cos^3 \varphi d\varphi = 0,002871 \cdot \frac{0,1047}{3} \rho^3,$$

$$-\int_0^{\alpha} (y-y_1) \cos^3 \varphi d\varphi = 0,03785 \cdot \frac{0,1047}{3} \rho.$$

С другой стороны, из таблиц VIII и X мы находим:

$$c = 0,05537 \quad \text{для} \quad \frac{h_0}{\rho} = \frac{1}{10},$$

$$c = 0,05471 \quad \text{для} \quad \frac{h_0}{\rho} = \frac{1}{20},$$

$$u'_c = \frac{\rho^3}{EJ_0} \cdot \frac{\sin \alpha}{m} = \frac{\rho^3}{EJ_0} \cdot \frac{\sin \alpha}{282,0} \quad \text{для} \quad \frac{h_0}{\rho} = \frac{1}{10},$$

$$u'_c = \frac{\rho^3}{EJ_0} \cdot \frac{\sin \alpha}{360,4} \quad \text{для} \quad \frac{h_0}{\rho} = \frac{1}{20}.$$

Внося эти величины во вторую из формул (d), получим:

$$H' = \frac{H_0 282,0}{0,5878} (0,0004946 - 0,0000271) = 0,2242 H_0 \quad \text{для} \quad \frac{h_0}{\rho} = \frac{1}{10},$$

$$H' = \frac{H_0 360,4}{0,5878} (0,0001237 - 0,0000279) = 0,0587 H_0 \quad \text{для} \quad \frac{h_0}{\rho} = \frac{1}{20}.$$

Как можно было предвидеть, величина распора H' получается немного больше, чем для арки постоянного сечения той же толщины в ключе.

Вычислим изгибающий момент в ключе. Имея равенство

$$\tau_c''' = \int_0^{\alpha} \frac{ds}{EJ} = \frac{\rho}{EJ_0} \int_0^{\alpha} \cos^3 \varphi \, d\varphi = \frac{\rho}{EI_0} \left(\sin \alpha - \frac{\sin^3 \alpha}{3} \right) = 0,5201 \frac{\rho}{EI_0},$$

на основании формулы (d) получаем:

$$M' = \frac{H_0 \rho}{0,5201} \left(\frac{0,6283}{1200} - 0,001321 \right) = -0,001532 H_0 \rho \quad \text{для} \quad \frac{h_0}{\rho} = \frac{1}{10},$$

$$M' = \frac{H_0 \rho}{0,5201} \left(\frac{0,6283}{4800} - 0,001321 \right) = -0,002288 H_0 \rho \quad \text{для} \quad \frac{h_0}{\rho} = \frac{1}{20}.$$

Момент в ключе и смещение δ кривой давления получаются из следующих отношений соответственно для каждого из рассматриваемых случаев

для $h_0/\rho = 1/10$

$$M = H'c - M' = 0,2242 \cdot 0,05537 H_0 \rho + 0,001532 H_0 \rho = 0,01394 H_0 \rho,$$

$$\delta = \frac{0,01394 H_0 \rho}{H_0 - H'} = 0,01797 \rho = 0,1797 h_0,$$

для $h_0/\rho = 1/20$,

$$M = 0,0587 \cdot 0,05471 H_0 \rho + 0,002288 H_0 \rho = 0,005499 H_0 \rho;$$

$$\delta = \frac{0,005499 H_0 \rho}{H_0 - H'} = 0,00584 \rho = 0,117 h_0.$$

Мы видим и здесь, что влияние изгибающего момента, вызванного удалением веревочной кривой от оси арки тем больше, чем тоньше арка. Имея M и H , легко найти величины момента M_1 и перемещения δ_1 в пятах. Изменяя расстояние оси от веревочной кривой, можно подбором найти наивыгоднейшее очертание для рассчитываемой арки.

ГЛАВА VII

ПРАКТИЧЕСКИЕ ВЫВОДЫ

§ 30. Выбор очертания продольной оси арки

В зависимости от местных условий обычно задается основное отношение стрелки свода f к пролету арки l . Это отношение выгоднее задавать возможно большим, насколько, конечно, это позволяют данные общего задания, так как увеличение стрелки арки находится в связи с уменьшением распора и тех напряжений, которые вызываются изменениями температуры.

Когда величина этого соотношения f/l твердо установлена, намечают очертание продольной оси арки. При этом, пользуясь последовательными приближениями, стремятся построить очертание арки таким образом, чтобы ее продольная ось совпала с веревочной кривой, построенной для постоянной нагрузки. Выбор подходящего очертания арки значительно упрощает расчет ее от собственного веса. Легко найти, что под влиянием сжатия нормальной силой кривая давлений проходит в сечении ключа над его центром и в сечениях опор смещается от центров сечений к центрам кривизны. Эти смещения определяют усилия, вызываемые изгибом в сечениях ключа и пят. Расчеты, исполненные для арок разных очертаний, показывают, что при условии совпадения продольной оси арки с веревочной кривой смещения кривой давления относительно продольной оси арки почти не зависят от ее очертания. Поэтому для практических применений приближенные формулы, определяющие эти величины, представляют некоторый интерес, давая возможность вычислить смещения кривой давления для некоторых случаев, встречающихся на практике. Особенно легко их получить для параболической арки, характеризуемой следующими уравнениями:

$$F = \frac{F_0}{\cos \varphi}, \quad J = \frac{J_0}{\cos \varphi}, \quad u'_c = \frac{2}{45} \cdot \frac{f^2 l}{E J_0} (1 - \beta),$$

где β — коэффициент, учитывающий влияние продольной силы, поперечной силы и кривизны ¹⁾.

Пренебрегая поправочными членами, кроме тех, которые выражают действие продольной силы, будем иметь (см. § 24):

$$\beta = \frac{15}{64} \cdot \frac{h_0^2}{l^2} \cdot \frac{l^3}{f^3} \operatorname{arctg} \frac{4f}{l}.$$

¹⁾ То есть этот коэффициент учитывает влияние нормальной силы на изгиб изгибающего момента, на сжатие оси и влияние перемещения нейтрального слоя

Чтобы вычислить H' , δ , δ_1 , применим приближенные формулы (69'), (70') и (71'), которые дадут нам следующие зависимости:

$$\frac{H'}{H_0} = \frac{15}{16} \cdot \frac{h_0^2}{f^2} \cdot \frac{1}{1+\beta}, \quad \delta = \frac{5}{16} h_0 \cdot \frac{h_0}{f} \cdot \frac{1}{1+\beta - \frac{15}{16} \cdot \frac{h_0^2}{f^2}},$$

$$\delta_1 = \frac{5}{8} \frac{h_0}{\cos \alpha} \cdot \frac{h_0}{f} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{1+\beta - \frac{15}{16} \cdot \frac{h_0^2}{f^2}}.$$

Значения $1 + \beta - \frac{15}{16} \cdot \frac{h_0^2}{f^2}$ изменяются сравнительно мало, поэтому можно заключить, что отношения δ/h_0 и $\delta_1 \cos \alpha/h_0$ пропорциональны h_0/f .

Это заключение позволяет путем интерполирования дополнять таблицы XI, XVI и XIX, а также находить численные значения смещений кривой давления, относящихся к промежуточным значениям отношений h/l и f/l . Эти числа могут быть применены также для арок, продольная ось которых имеет форму, отличную от форм, которые мы только что рассматривали.

Указанный метод выбора оси позволяет приближенно вычислить усилия, вызываемые в арках их собственным весом. Смещения кривой давлений в ключе и пятах тем больше, чем толще арка и меньше стрела подъема. Раскружаливание очень пологих и толстых арок обычно сопровождается появлением растягивающих напряжений в пятах, а иногда и в ключе. Чтобы их избежать, что особенно важно для каменных и бетонных арок, можно прибегнуть к различным способам. Так, например, пологие арки снабжаются тремя шарнирами. В этих арках можно добиться совпадения кривой давлений от постоянной нагрузки с продольной осью, что дает для каждого сечения лишь осевое сжатие. Температурные изменения и усадка бетона не вызовут дополнительных усилий, так как подобная арка представляет статически определимую систему.

Иногда делают временные шарниры, которые заливают раствором после раскружаливания арки. Усилия, вызванные в подобной арке собственным весом, не отличаются от усилий в арке с тремя шарнирами. К ним нужно будет прибавить усилия, вызванные подвижной нагрузкой и изменениями температуры, определяемыми тем же методом, что и в случае арки с заделанными пятами.

Прежде всего надо отметить усилия, вызванные понижением температуры и усадкой бетона. Они вызывают поднятие кривой давления в ключе и понижение в пятах. Поэтому рекомендуется располагать временные шарниры не в центрах соответственных сечений, а перемещать их несколько к внутренней поверхности в ключе и на внешней поверхности в пятах.

Второй метод борьбы с этими двумя причинами заключается в создании в арке, свободной от нагрузки и до снятия с нее кружал —

начальных напряжений; этого достигают специальными способами производства работ: трамбуя бетон так, чтобы сделать его разнородным, мы получаем арку, подверженную отрицательному изгибающему моменту в ключе и положительным моментом в пятах. Очевидно, что эти моменты вызывают усилия обратных знаков, чем усилия, вызываемые понижением температуры. Когда произойдет понижение температуры, то действительное распределение усилий будет более выгодно. Недостаток этого метода заключается в том, что мы не имеем возможности вычислить эти начальные усилия. Мы не имеем возможности определить, в какой мере эти начальные усилия позволяют компенсировать вредные напряжения, вызванные усадкой бетона и понижением температуры.

Наконец, некоторые смещения кривой давления могут быть получены, как было показано в § 29, при соответствующем выборе очертания продольной оси арки. Мы видели, что сечения в пятах подвергаются наибольшей опасности появления в них растягивающих напряжений. Если продольная ось арки выбрана таким образом, что она проходит несколько выше соответственной веревочной кривой, то возможно уменьшить изгибающие моменты в пятах за счет незначительного увеличения момента в ключе. Наиболее выгодное очертание получается после нескольких проб. Заметим, что этот вопрос теряет всякий интерес, если не располагают точными данными о величине и распределении внешних нагрузок. Признанное самым выгодным для данной нагрузки очертание может оказаться очень чувствительным ко всякому изменению внешних сил, вследствие чего размеры арки придется устанавливать с большим запасом прочности. В таких случаях особенно рекомендуется употребление железобетона, так как он представляет значительное противодействие растягивающим усилиям, что позволяет уменьшать поперечные размеры арки. Благодаря этому получают более гибкие конструкции, менее подверженные вредным напряжениям от усадки бетона и понижения температуры, чем массивные арки из бетона и камня. Также следует пользоваться железобетоном, когда нет уверенности в абсолютной неподвижности опор. Вследствие относительной гибкости железобетонные арки занимают промежуточное место между массивными арками из бетона и арками с тремя шарнирами.

§ 31. Влияние изменения температуры

Задача определения усилий, появляющихся в арках при изменениях температуры, очень сложна, так как в каждом частном случае она требует знания состояния температуры в каждой точке арки. Такими данными мы не располагаем, вследствие чего задачу обыкновенно упрощают допущением, что арка нагревается или охлаждается равномерно. Мы определили усилия, появляющиеся от

изменений температуры в арках круговой и параболической, и в арке, продольная ось которой очерчена по катеноиду. Результаты наших подсчетов показывают, что температурные усилия в значительной степени зависят от отношений f/l и h_0/l . Очертание продольной оси в этом случае имеет второстепенное значение. На этом основании формулы, определяющие температурные усилия, относящиеся к рассматриваемой арке, возможно применить и к аркам иного очертания, чем рассматриваемые.

В частности, полученные результаты очень просты для случая параболической арки, характеризуемой равенствами

$$F = \frac{F_0}{\cos \varphi}, \quad J = \frac{J_0}{\cos \varphi}.$$

Ограничиваясь вторым приближением, мы имеем для распора, появляющегося в результате увеличения температуры, следующее выражение (формула (95)):

$$H_t = \frac{45 EJ_0 \varepsilon t}{4 f^2} \frac{1}{1 + \beta}.$$

Значение коэффициента β , зависящего от продольной силы, объяснено в предыдущем параграфе. Наибольшие напряжения в ключе определяются на основании предыдущего следующими равенствами:

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{45}{4} E \cdot \frac{i_0^2}{f^2} \varepsilon t \left(1 \pm \frac{6c}{h_0} \right) \frac{1}{1 + \beta}.$$

Принимая во внимание только напряжения от изгиба и полагая $c \approx f/3$, получим:

$$\sigma'_{\min}^{\max} = \frac{15}{8} \frac{h_0}{f} \frac{E \varepsilon t}{1 + \beta}.$$

Также на опорах:

$$\sigma'_{\min}^{\max} = \frac{15}{4} \frac{h_0}{f} \frac{E \varepsilon t}{1 + \beta} \cos^2 \alpha.$$

В тонких арках коэффициентом β можно пренебрегать. Можно допустить пропорциональность между σ'_{\min}^{\max} и h_0/f . Из этого следует,

что увеличение толщины арки ухудшает условия работы арки в отношении появляющихся в ней температурных напряжений. Железобетонные арки вследствие их меньшей толщины находятся в лучших условиях, чем простые бетонные. Иногда бывает выгодно увеличивать постоянную нагрузку толстых арок, в особенности имеющих назначение выдерживать постоянную нагрузку, для того, чтобы таким образом уравновесить растягивающие усилия, возни-

кающие при понижении температуры. Заметим еще, что температурные напряжения пропорциональны модулю E и коэффициенту ϵ . Их значения меньше для тех материалов, для которых модуль упругости и коэффициент линейного расширения также менее значительны. Например, температурные напряжения, возникающие в каменных арках, в десять раз меньше усилий, имеющих место при бетонных арках.

В заключение напомним, что, не зная точных значений модуля упругости E и коэффициента ϵ , а также распределения температуры по толщине арки, мы вычисляем напряжения, возникшие от изменения температуры с грубым приближением. Проще всего использовать данные таблиц IX и X. Для рассчитываемой арки следует сначала установить величины f/l и h_0/l , а затем определить приближенные значения напряжений, вызванных изменением температуры, интерполируя данные, помещенные в этих таблицах.

§ 32. Степень приближения расчетов арок

Все расчеты, относящиеся к аркам, должны подчиняться общему правилу, заключающемуся в том, что степень приближения применяемых формул должна быть в полном соответствии со степенью приближения необходимых для расчета данных. Располагая точными данными относительно величины нагрузок и их распределения, а также относительно упругих свойств материала проектируемой конструкции, можно, применяя достаточно приближенные вычисления, в результате достичь высокой степени точности. Наоборот, оперируя данными, являющимися только грубым приближением точных величин, невыгодно применять более точные формулы, так как нет никакой гарантии достичь в этом случае результатов, заслуживающих доверия.

В подобных случаях рекомендуется упрощать формулы в той же степени, как и входящие в них данные. Введем, например, упрощающие допущения относительно сил, действующих на арку, и предположим, что нагрузки, в действительности приложенные к внешней поверхности арки, перенесены на ее продольную ось. В случае вертикальных нагрузок, численно равных собственному весу арок и весу заполнений, можно использовать вертикальное членение их для упрощения построения веревочных кривых. При построении линий влияния будем допускать, что вертикальный сосредоточенный груз перемещается прямо по продольной оси. На примере круговой двухшарнирной арки с продольной осью, параллельной ее внешнему очертанию, мы показали, в какой мере это допущение влияет на величины искомых неизвестных. Что касается материалов, то мы предположим их однородными, совершенно упругими и следующими закону Гука.

Чтобы судить о степени приближения, достигнутой в расчете при использовании упрощенными формулами, мы выполнили расчеты для нескольких частных случаев. За точку отправления мы брали общие формулы, выведенные из гипотезы плоских сечений. Мы рассматривали влияние каждого из членов этих формул на конечный результат. Соответственные численные результаты, относящиеся к круговой и параболической арке, приведены в таблицах IX, X, XII, XV и XVI.

Эти вычисления позволяют сделать заключение, что для получения удовлетворительных результатов необходимо учитывать как изгибающий момент, так и продольную силу, влияние которой особенно велико в случае пологих арок большой толщины. Поправочные члены, учитывающие поперечную силу и влияние изгибающего момента на сжатие продольной оси арки, сравнительно мало изменяют величину конечного результата. Их необходимо учитывать только в том случае, когда известны с достаточной точностью как распределение нагрузок, так и упругие свойства материалов рассматриваемой нами конструкции.

В случаях, где продольная ось арки мало отличается от веревочной кривой, построенной для действующих на арку вертикальных сил, удобно применять приближенный метод вычислений, указанный в § 29. Он не только дает нам возможность с достаточной степенью точности найти искомые величины, которые нельзя было бы определить уравнениями статики, но, кроме того, показывает нам наиболее выгодное очертание продольной оси арки. Формулы, определяющие эти величины, как это мы видели на рассмотренных примерах, с трудом поддаются вычислениям; даже если все входящие в них интегралы могут быть выражены в явной форме. Они особенно затруднительны в случаях очень пологих круговых арок, так как, чтобы обеспечить в них приближение до 1%, необходимо производить вспомогательные вычисления над числами с семью десятичными знаками. Подобные формулы могут представлять некоторый интерес с точки зрения общих заключений, но для частных случаев выгоднее производить приближенные вычисления с помощью формул Симпсона. В § 28 мы видели, что для получения практически удовлетворительных результатов нет необходимости разлагать арку на большое число клиньев. В случае симметричной арки для вычисления распора с четырьмя десятичными знаками достаточно разделить полуарку на восемь клиньев. Изгибающий момент в ключе получится с более значительной, но практически допустимой ошибкой. Все вычисления должны быть произведены над числами, в которых сохранились бы четыре знака. На изученных нами примерах мы видели, что необходимо делать детальные расчеты, в особенности тогда, когда дело идет о вычислении влияния собственного веса и постоянной нагрузки. Для подобных нагрузок веревочная кривая близка к кривой продольной оси арки и поправочные члены,

как, например, член, выражающий влияние продольной силы на изгиб, приобретают большее значение. Если, наоборот, задача состоит в построении линий влияния, то можно удовлетвориться более грубыми расчетами и в качестве приближения получить линии влияния, относящиеся к параболе (§ 26). Понятно, что эти линии влияния не могут служить для определения изгибающих моментов, вызванных постоянной нагрузкой, распределенной по всему пролету, так как разница между площадями влияния противоположных знаков дает ошибку, превосходящую таковую в найденной величине ординат линии влияния.

В заключение укажем, что численные результаты, приведенные в таблицах, дают возможность, во-первых, приближенно определить усилия, вызываемые постоянной нагрузкой и изменениями температуры, во-вторых, построить линии влияния. В этом заключаются полезные указания для выбора очертания арки и определения ее основных размеров.

ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ В МАШИНОСТРОЕНИИ

Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, Band IV, Lieferung 1, Leipzig, Verlag von Johann Ambrosius Barth, 1929, SS. 146—198. Перевод А. П. Даниловского на русский язык: Т и м о ш е н - к о С. П. Вопросы прочности в машиностроении. Л., Изд-во Кубуч, 1934, 93 стр.

§ 1. Введение

С увеличением размеров и скоростей в современном машиностроении все большее значение приобретает вопрос о расчетах прочности машинных частей. С одной стороны, в связи с увеличением размеров и скоростей увеличиваются и допускаемые напряжения, с другой стороны, к машинам значительных размеров предъявляются более высокие требования прочности, нежели к малым¹⁾. Необходимая прочность машин может быть обеспечена только на основе точного исследования распределения напряжений в их частях и изучения механических свойств применяемых материалов. При разрешении вопросов прочности в машиностроении необходимо пользоваться и тем и другим путем. Полное теоретическое решение, которое может быть непосредственно применено к анализу распределения напряжений, можно получить только для простейших случаев, как, например, при деформациях тонких призматических стержней и тонких пластинок. В большинстве критических случаев картина очень сложна, и решение задачи, основанное на упрощающих допущениях, может быть принято для определения напряжений только как первое приближение. Для расширения наших знаний в вопросах о распределении напряжений следует, с одной стороны, развивать методы, которые позволяли бы разрешать задачи теории упругости в сложных случаях, встречающихся на практике, с другой стороны, производить испытания моделей, а также производить измерения напряжений на самих машинах, внимательно изучая при этом всякие неправильности в их работе²⁾.

За последние 30 лет были разработаны различные методы измерения напряжений, практическое применение которых оказалось

¹⁾ В а у м а н н С. Some recent developments on large steam turbine practice. The Journal of the Institution of Electrical Engineers, 1920/1921, vol. 59, № 302, June, pp. 565—663. См. p. 568.

²⁾ Для установления удовлетворительных методов назначения правильных размеров машинных частей очень важно выяснение причин, нарушающих правильность работы машины. По этому вопросу имеются данные в British Engine, Boiler and Electrical Insurance Co. Ltd., Technical Report. [1922—1938; New series, vol. 1, 1952.]

весьма полезным. Проще всего необходимые данные получаются непосредственным измерением деформаций машинных частей. Если приходится иметь дело с машинами больших размеров, то при помощи такого простого прибора, как измеритель напряжений ¹⁾, можно получить весьма ценные результаты. При помощи такого прибора производились измерения напряжений в стальных вагонных колесах ²⁾, в кривых стержнях ³⁾. Для более точных измерений деформаций, в особенности на небольших длинах, весьма пригоден очень точный измеритель Окюйзена ⁴⁾ и тензомер Гугенбергера ⁵⁾. Так, тензомер применялся для изучения распределения напряжений в днищах паровых котлов ⁶⁾, в напорных баках ⁷⁾, в кривых трубах ⁸⁾ и пр. Для исследования распределения напряжений вблизи отверстий и в местах резкого изменения сечения Е. Прейсс ⁹⁾ скон-

¹⁾ Slater W. A., Moore H. F. Use of the strain gage in the testing of materials. American Society for Testing Materials, Proceedings of the 16th annual meeting, Atlantic City, New Jersey, June 24—28 1913, Philadelphia, published by the society, 1913, vol. 13, pp. 1019—1038; discussion: pp. 1039—1044.

²⁾ Snodgrass J. M., Guldner F. H. An investigation of the properties of chilled iron car wheels. Part I: Wheel fit and static load strains. University of Illinois Bulletin, Engineering Experiment Station, 1922, Bulletin № 129, 103 p.; Guldner F. H. An investigation of the properties of chilled iron car wheels. Part III: Strains due to brake application coefficient of friction and brake-shoe wear. University of Illinois Bulletin, Engineering Experiment Station, 1923, Bulletin № 135, 97 p.

³⁾ Winslow A. M., Edmunds R. H. G. Tests and theory of curved beams. Bulletin of the University of Washington, Engineering Experiment Station, 1927, August 15, Bulletin № 42, 27 p. См. также Frame W. M. Stresses occurring in the walls of an elliptical tank subjected to low internal pressures. Mechanical Engineering, 1927, vol. 49, June, № 6, pp. 619—624.

⁴⁾ W y s s T h. Experimentelle Spannungsuntersuchungen an einem hakenförmigen Körper. Proceedings of the First International Congress for Applied Mechanics, Delft, 1924. Delft, Technische Boekhandel en Drukkerij J. Waltman, 1925, pp. 354—358. См. также его диссертацию: W y s s T h. Beitrag zur Spannungsuntersuchungen an Knotenblechen eiserner Fachwerke. Dissertation, Eidgenössische technische Hochschule, ETH, Zürich, 1922/23. Berlin, VDI — Verlag, 1923, 102 S.

⁵⁾ W i e d e r k e h r R. Ein Feinmeßgerät für Spannungsmessungen. Schweizerische technische Zeitschrift, 1927, 17 Februar, № 7, SS. 97—102.

⁶⁾ K ö r b e r F., S i e b e l E. Modellversuche an Kesselböden mit Bohrungen und Mannlöchern. Mitteilungen aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Eisenforschung zu Düsseldorf, 1927, Bd. 9, Lieferung 2, Abhandlung 73, SS. 13—32.

⁷⁾ H u g e n b e r g e r A. Die Festigkeit der Preßstahlverbindung mit zylindrischer Sitzfläche. (Winterthur: Schweizerische Lokomotiv- und Maschinenfabrik). Technische Blätter d. Schweizer Lokomotiv- und Maschinenfabrik. Winterthur, 1926, Sondernummer, 36 S.

⁸⁾ W a h l A. M. Stresses and reactions in expansion pipe bends. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1927—28, vol. 49—50, part 1, № FSP-50-49, pp. 241—255; discussion: pp. 255—262.

⁹⁾ P r e u s s E. Versuche über die Spannungsverminderung durch die Ausrundung scharfer Ecker. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1912, Heft 126, SS. 1—24. То же см. в Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1912, Bd. 56, № 34, SS. 1349—1354; P r e u s s E. Versuche über die Spannungsverteilung in Kranhaken. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf

струировал особый оптический экстензометр с большим увеличением, пригодный для измерения весьма малых удлинений. Этим прибором было произведено исследование влияния отверстий и выкружек на распределение напряжений. Для записи и измерения напряжений, возникающих при вибрациях или при внезапных приложениях нагрузок, вполне удовлетворительными оказались прибор «Кембридж»¹⁾ и различные виды электрических измерителей напряжений²⁾. Для мгновенного измерения больших напряжений с успехом применяется пьезоэлектрический метод³⁾. Полную картину плоского распределения напряжений можно получить оптическим методом с помощью поляризованного света при исследовании моделей из прозрачного материала, например из стекла или целлулоида. Этот очень важный для решения практических задач метод разработан А. Менаже⁴⁾ и Э. Кокером⁵⁾, и им теперь постоянно пользуются при разрешении самых сложных задач теории упругости.

dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1912, Heft 126, SS. 25—46. То же см. в Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1911, Bd. 55, № 52, SS. 2173—2176; P r e u s s E. Versuche über die Spannungsverteilung in gekerbten Zugstäben. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1913, Heft 134, SS. 47—62. То же см. в Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1913, Bd. 57, № 17, SS. 664—667.

1) Some new recording instruments. Engineering, 1924, vol. 118, № 3057, August 29, p. 287.

2) M c C o l l u m B., P e t e r s O. S. A new electrical telemeter. Technologic Papers of the Bureau of Standards, 1924, January 4, № 247, pp. 737—777. См. также S i e m a n n, Ferndehnungsmessungen am Schiffskörper. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1926, Bd. 70, № 16, SS. 539—542. № 19, SS. 635—640. Описание прибора E. B. Moullin'a см. в работе: W h i p p l e R. S. Some new recording instruments. Journal of the Optical Society of America and Review of Scientific Instruments, 1925, vol. 10, № 4, pp. 455—473, см. pp. 467—473; E l s ä s s e r R. Messen von Schwingungen und Drehmomenten mittels des Oszillographen. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1924, Bd. 68, № 20, SS. 485—491.

3) K a r c h e r J. C. A piezoelectric method for the instantaneous measurement of high pressures. Journal of the Franklin Institute, 1922, vol. 194, № 6, pp. 815—816. См. также K e y s D. A. A piezoelectric method of measuring explosion pressures. Philosophical Magazine and Journal of Science, 6 series, 1921, vol. 42, № 250, pp. 473—488.

4) M e s n a g e r A. M. Sur le calcul des pièces rectangulaires fléchies au moyen de la théorie de l'élasticité. Annales des ponts et chaussées, Mémoires et Documents, 8 série, 1901, 71 année, 2^e trimestre, № 19, pp. 161—171; M e s n a g e r A. M. Détermination complète sur un modèle réduit des tensions qui se produiront dans un ouvrage. Utilisation de la double réfraction accidentelle du verre à l'étude des efforts intérieurs dans les solides. Annales des ponts et chaussées, 1^{re} partie. Mémoires et Documents, 9 série, 1913, 83 année, tome 16, № 40, pp. 133—186.

5) Полное описание метода Э. Кокера изучения напряжений при помощи поляризованного света можно найти в его работе: C o k e r E. G. Photo-elasticity. Journal of the Franklin Institute, 1925, vol. 199, № 3, pp. 289—332. См. также C o k e r E. G. Photo-elasticity for engineers. Part I—V. General Electric Review, 1920, Part I, vol. 23, № 11, pp. 870—877; Part II, № 12, pp. 966—973; 1921, Part III, vol. 24, № 1, pp. 82—88; Part IV, № 3, pp. 222—226; Part V, № 5, pp. 455—466.

Наблюдения за появлением и распределением линий текучести ¹⁾ на поверхности полированных стальных образцов, подвергающихся действию внешних нагрузок, могут дать ценные указания о распределении напряжений и, кроме того, сделать доступным для наблюдения момент превышения некоторого максимального напряжения в опасной точке упруго напряженного тела ²⁾. Чтобы получить линии текучести на грубой, неотшлифованной поверхности исследуемого образца, можно покрыть ее слоем цементного раствора ³⁾. Текучесть металлов внутри испытываемых моделей можно выявить и изучить по предложенному А. Фраем способом ⁴⁾ для образцов мягкой стали. При помощи своего метода А. Фрай пришел к очень интересным выводам в области пластических деформаций и определил точки максимальных напряжений при опытах с телами различной формы.

Другой экспериментальный метод для изучения распределения напряжений состоит в применении к решению задач теории упругости различных аналогий. Так, например, пользуясь известной мембранной аналогией Л. Прандтля ⁵⁾, исследуют и с большой точностью измеряют напряжения в нецилиндрических валах ⁶⁾ и концентрацию напряжений в выкружках. Аналогия с *распределением*

¹⁾ Линии текучести мягкого железа были впервые описаны В. Людерсом: L ü d e r s W. Über die Aeusserung der Elasticität an stahlartigen Eisenstäben und Stahlstäben, und über eine beim Biëgen solcher Stäbe beobachtete Molekularbewegung. Dingers polytechnisches Journal, 1860, Bd. 155, Heft 1, SS. 18—22, Polytechnisches Zentralblatt, 1860, 15 Juli, Lieferung 14, SS. 950—954; см. также H a r t m a n n L. Distribution des déformation dans les métaux soumis à des efforts. Paris — Nancy, Berger — Levrault et Cie, Libraires-éditeurs, 1896, 201 p.

²⁾ T i m o s h e n k o S. Stress concentration produced by fillets and holes. Verhandlungen des zweiten Internationalen Kongresses für technische Mechanik. Zürich, 12—17 September 1926. Zürich und Leipzig, O. Füssli, 1927, SS. 419—426.

³⁾ J o h n s t o n R. S. Strain detection in mild steel by wash coating. Journal of the Iron and Steel Institute, 1925, vol. 112, № 2, pp. 341—343. См. также K ö r b e r F., S i e b e l E. Modellversuche an Kesselböden mit Bohrungen und Mannlöchern. Mitteilungen aus dem Kaiser-Wilhelm-Institute für Eisenforschung zu Düsseldorf, 1927, Bd. 9, Lieferung 2, Abhandlung 73, SS. 13—32.

⁴⁾ F r y A. Kraftwirkungsfiguren in Flusseben, dargestellt durch ein neues Ätzverfahren. Kruppsche Monatshefte, 1921, Jahrgang 2, Juli, SS. 119—136; см. также H e y n E. Neuere Forschungen über Kerbwirkung, insbesondere auf optischem Wege, Stahl und Eisen, 1921, Jahrgang 41, № 16, SS. 541—546 и № 18, SS. 611—617.

⁵⁾ P r a n d t l L. Zur Torsion von prismatischen Stäben. Physikalische Zeitschrift, 1903, Jahrgang 4, № 26b, SS. 758—759. [Перепечатка: P r a n d t l L. Gesammelte Abhandlungen zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik. Erster Teil. Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer-Verlag, 1961, 574 S. См. SS. 79—80.]

⁶⁾ A n t h e s H. Versuchsmethode zur Ermittlung der Spannungsverteilung bei Torsion prismatischer Stäbe. Dingers polytechnisches Journal, 1906, Jahrgang 87, Bd. 321, Heft 22, SS. 342—345; Heft 23, SS. 356—359; Heft 25, SS. 388—392; Heft 28, SS. 441—444; Heft 29, SS. 455—459; Heft 30, SS. 471—475 и G r i f f i t h A. A., T a y l o r G. J. The use of soap films in solving torsion problems. The Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1917, December, pp. 755—809.

*электрического тока*¹⁾ дает возможность легко исследовать распределение напряжений в местах изменений поперечных сечений валов. Аналогия Клейна — Вигхарда позволяет исследовать плоское распределение напряжений по опытам на изгиб тонкой пластинки соответствующей формы²⁾, удовлетворяющей определенным граничным условиям.

Результаты экспериментальных исследований совместно с известными решениями теории упругости дают возможность разработать некоторые *приближенные способы*, которые играют большую роль при решении практических задач по расчету на прочность элементов машин.

В настоящей статье будут рассмотрены важнейшие из этих приближенных теорий, применяемых на практике.

§ 2. Растяжение и сжатие прямых стержней переменного поперечного сечения

Случай продольного нагружения призматического стержня был ранее обсужден вполне исчерпывающе³⁾; если P обозначает продольную силу, приложенную центрально, и F — площадь поперечного сечения, то напряжение по поперечному сечению, расположенному в достаточном удалении от концов стержня, определяется формулой

$$\sigma = P/F. \quad (1)$$

В случае стержня переменного поперечного сечения распределение напряжения по площади сечения не будет уже равномерным. Так, например, в симметричном клине (рис. 1) напряжение в точке A , отстоящей на расстоянии r от вершины O ⁴⁾, которая принимается нами за начало координат, является *радиальным напряжением* и

¹⁾ J a c o b s o n C. A. Discussion to paper «The Zoelly turbine-driven locomotive by H. Zoelly». Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1924, vol. 46, № 1947, pp. 1234—1235.

²⁾ W i e g h a r d t K. Über ein neues Verfahren, verwickelte Spannungsverteilungen in elastischen Körpern auf experimentellem Wege zu finden. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1908, Heft 49, SS. 15—30.

³⁾ См. A u e r b a c h F. Zug und Druck. Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, Bd. 3. Erster Teil: Statik und Dynamik elastischer Körper. Leipzig, J. Barth, 1927, SS. 53—129.

⁴⁾ Эта задача была рассмотрена M e s n a g e r A. Contribution a l'étude de la déformation élastique des solides. Annales des ponts et chaussées, 1^{re} Partie, Mémoires et documents, 8 série, 1901, 71 année, 4^e trimestre, pp. 129—190. См. также M i c h e l l J. H., Some elementary distributions of stress in three dimensions. Proceedings of the London Mathematical Society, 1901 [1900, February 8], vol. 32, № 712, pp. 23—35. M i c h e l l J. H. Elementary distributions of plane stress. Там же, [1900, January 11], № 713, pp. 35—61. M i c h e l l J. H. The inversion of plane stress. Proceedings of the London Mathematical Society, 1902 [1901, November 14], vol. 34, № 772, pp. 134—142.

равно $\sigma_r = \frac{n \cos \theta}{hr}$, где

$$n = \frac{P}{\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha}, \quad (2)$$

а h — толщина клина.

Нормальное напряжение в какой-нибудь точке поперечного сечения mn , отстоящего на расстоянии a от точки приложения силы, равно

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta = \frac{n}{ah(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^2}. \quad (3)$$

Отношение между наименьшим ($\theta = \alpha$) и наибольшим ($\theta = 0$) значениями нормального напряжения в любом поперечном сечении mn равно $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2$. Отсюда видно, что распределение напряжений при уменьшении угла α становится все равномернее. Мы приходим к аналогичному заключению при рассмотрении распределения напряжений в коническом стержне, к вершине которого приложена сила, направленная по оси ¹⁾. Эти выводы оправдывают применение формулы (1) для стержней с не резко меняющимися поперечными сечениями. При резких изменениях поперечного сечения распределение напряжений далеко не равномерно, и поэтому в этих случаях формула (1) не может больше применяться.

Например, с помощью метода фотоупругости можно показать ²⁾, что распределение напряжений по поперечному сечению mn образца представляется заштрихованной площадью рис. 2. Максимальные напряжения в сечении в точках m и n в 1,75 раза больше среднего напряжения, определяемого формулой (1).

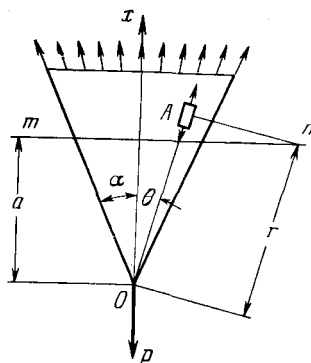


Рис. 1. Напряжение в симметричном клине.

¹⁾ M i c h e l l J. H. Some elementary distributions of stress in three dimensions. Proceedings of the London Mathematical Society, 1901 {1900, February 8}, vol. 82. № 712, pp. 23—35; M i c h e l l J. H. Elementary distributions of plane stress. Там же [1900, January 11], № 713, pp. 35—61. См. также L o v e A. E. H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. 4th edition, Cambridge, University Press, 1927, 642 p. См. p. 203.

²⁾ C o k e r E. G. The distribution of stress at the minimum section of a cement briquette. Proceedings of the International Association for Testing Materials Meeting held in Vienna, Sixth Congress, 1912. New York, The association, 1913, vol. 2, Part XXVIII, № 4, pp. 1—7.

В полосе с изменяющейся шириной (рис. 3) максимальные напряжения имеют место в сечении закругления и могут быть вычислены по формуле

$$\sigma_{\max} = k \frac{P}{F}, \quad (4)$$

где P/F — среднее напряжение в поперечном сечении mn , а k — коэффициент концентрации напряжений, величина которого зависит от отношения r/a и b/a .

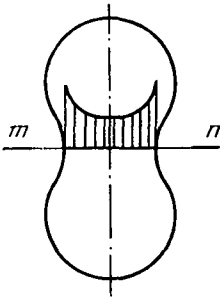


Рис. 2. Распределение напряжений в образце для испытаний цемента.

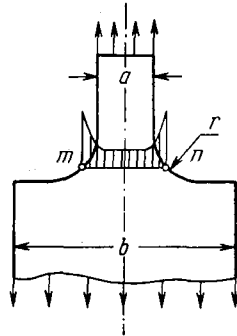


Рис. 3. Распределение напряжений в пластинке переменной ширины.

Некоторые значения этого коэффициента k , полученные из опытов с помощью метода фотоупругости¹⁾, приведены в таблице 1.

Т а б л и ц а 1

r/a \ b/a	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
6	2,7	2,3	2,0	1,8	1,6
3	2,7	2,3	2,0	1,8	1,6
2,5	2,6	2,2	1,9	1,7	1,5
2	2,3	2,0	1,7	1,5	1,4
1,5	2,0	1,8	1,6	1,4	1,3

На рис. 4 показано распределение напряжений в соединении в форме ласточкина хвоста, в котором растягивающая сила направлена по оси симметрии x ; распределение напряжений получено при

¹⁾ Timoshenko S., Dietz W. Stress concentration produced by holes and fillets. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1926, vol. 47, № 1958, pp. 199—220; discussion: pp. 220—237.

помощи метода фотоупругости ¹⁾. На рис. 4, *a* показаны кривые главных напряжений σ_x и σ_y вдоль оси симметрии x . Кривые линии на рис. 4, *b* показывают распределение главных напряжений σ_x и σ_y в поперечном сечении mn . Можно видеть, что максимальные напряжения в точках *m* и *n* приблизительно втрое больше напряжений посредине сечения. Случай полукруглых вырезов в пластине, подверженной растяжению, исследован Е. Прейссом ²⁾ и А. Леоном ³⁾.

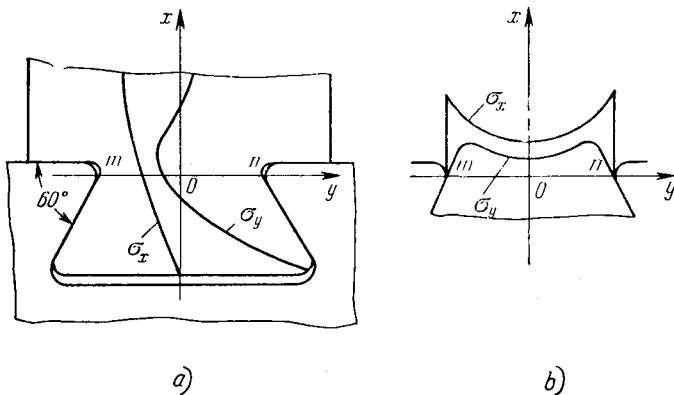


Рис. 4. Распределение напряжений в соединении типа ласточкина хвоста.

Если радиус вырезов мал (по сравнению с шириной пластины), то максимальное напряжение в точках *m* и *n* (рис. 5, *a*) приблизительно вдвое больше среднего напряжения по тому же сечению.

Аналогичное явление концентрации напряжений имеет место при растяжении пластины с отверстием в центре. В случае круглого отверстия (рис. 5, *b*), диаметр которого мал по сравнению с шириной пластины ($a/d \geq 5$), максимальные растягивающие напряжения в точках *m* и *n* по краям отверстия в три раза больше напряжения,

¹⁾ Coker E. G. Photo-elasticity. Journal of the Franklin Institute, 1925 vol. 199, № 3, pp. 289—332.

²⁾ Preuss E. Versuche über die Spannungsverminderung durch die Abrundung scharfer Ecken. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1912, Heft 126, SS. 1—24; то же см. в Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1912, Bd. 56, № 34, SS. 1349—1354. Preuss E. Versuche über die Spannungsverteilung in gekerbten Zugstäben. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1913, Heft 134, SS. 47—62, то же см. в Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1913, Bd. 57, № 17, SS. 664—667.

³⁾ Leon A., Zidlicky R. Die Ausnutzungskoeffizienten für symmetrisch angeordnete halbkreisförmige Kerben. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1914, Bd. 58, № 16, SS. 626—627; см. также Leon A. Über die Spannungsverteilung in der Umgebung einer halbkreisförmigen Kerbe und einer viertelkreisförmigen Hohlkehle. Wien, Lehmann und Wentzel, 1908, 12 S. (Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der technischen Hochschule in Wien, № 1, 1908.)

действующего по краям сечения σ_x ¹⁾. При небольших эллиптических отверстиях (рис. 5, *с*) коэффициент концентрации напряжений зависит от отношения b/c полуосей, а наибольшие напряжения по концам большой оси определяются формулой

$$\sigma_{\max} = \left(1 + 2 \frac{b}{c}\right) \sigma_x.$$

Отсюда видно, что очень узкое эллиптическое отверстие (трещина или щель²⁾), перпендикулярное растягивающим силам, вызывает

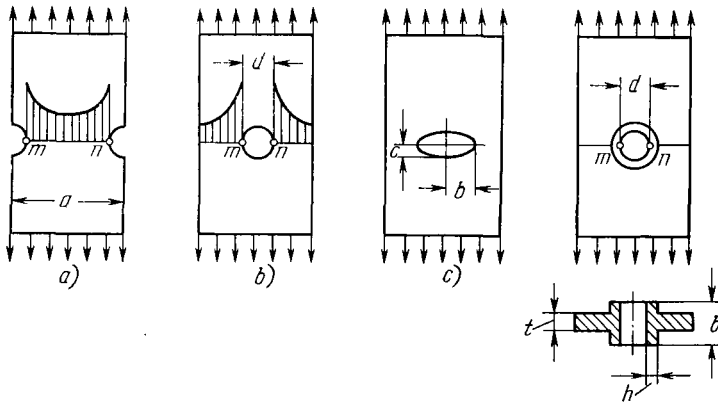


Рис. 5. Концентрация напряжений у выкружек и отверстий.

весьма заметную концентрацию напряжений на концах оси, перпендикулярной направлению растяжения.

В случае круглого отверстия, усиленного жестким кольцом, наибольшие растягивающие напряжения появляются также на краях

¹⁾ Kirsch [G.] Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1898, Bd. 42, № 29, SS. 797—807. Исследование напряженного состояния стального листа, подвергающегося растяжению или сжатию и имеющего два кругообразных отверстия, было произведено К. Вебером: Weber C. Spannungsverteilung in Blechen mit mehreren kreisrunden Löchern. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1922, Bd. 2, Heft 4, SS. 267—273.

²⁾ Колосов Г. В. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости. Юрьев, тип. К. Матисена, 1909, XVI+169 стр. См. также Inglis C. E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. Transactions of the Institution of Naval Architects, 1913, vol. 55, Part 1, pp. 219—230; discussion: pp. 231—241; Pöschl Th. Über eine partikuläre Lösung des biharmonischen Problems für den Aussenraum der Ellipse. Mathematische Zeitschrift, 1921, Bd. 11, SS. 89—96; Wolf K. Beiträge zur ebenen Elastizitätstheorie. Zeitschrift für technische Physik, 1921, Jahrgang 2, № 8, SS. 209—216.

отверстия в точках m и n и могут быть определены по формуле

$$\sigma_{\max} = k\sigma_x,$$

где коэффициент концентрации k зависит от отношения $(b-t)h/td$. Приводим некоторые значения ¹⁾ коэффициента k (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

$\frac{(b-t)h}{td}$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
k	2,53	2,17	1,90	1,69	1,53

Все сделанные выше заключения о распределении напряжений предполагают, что максимальные напряжения не превосходят *предела упругости* материала. За пределом упругости распределение напряжений зависит от *пластичности* материала. Пластичные материалы, как, например, мягкую сталь, можно подвергать значительному растяжению за пределом текучести без большого увеличения напряжений. Вследствие этого распределение напряжений за пределом текучести с увеличением растяжения становится все более равномерным. Этим объясняется то обстоятельство, что для пластичных материалов отверстия и выточки не уменьшают прочности на разрыв при условии статического нагружения образцов ²⁾. Напротив, для хрупких материалов, как, например, стекло, высокая концентрация напряжений не уменьшается до самого разрыва. Это приводит к резкому ослабляющему действию, которое выражается в пониженной прочности на разрыв стержня из хрупкого материала при наличии в нем вырезов ³⁾. Из этого видно, что требуется большая осторожность при проектировании вырезов или отверстий в машинных частях. В случае мягкой стали ⁴⁾ их можно делать без

¹⁾ T i m o s h e n k o S. P. On stresses in a plate with a circular hole. Journal of the Franklin Institute, 1924, vol. 197, № 4, pp. 505—516. [Перепечатка: T i m o s h e n k o S. P. The collected papers. New York — London — Toronto, McGraw-Hill Publishing Company, Ltd., 1953, pp. 385—392.]

²⁾ В случае более глубокого выреза может оказаться, что сопротивление у края значительно возрастает, так как концентрация у краев в наиболее слабом поперечном сечении будет предотвращена.

³⁾ L e o n A. Kerbgröße und Kerbwirkung. Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der Technischen Hochschule in Wien, № 10, Wien, Lehmann und Wentzel, 1910, 56 S.

⁴⁾ Опыты с мягкой сталью, применяемой для котлов, показывают, что небольшая коррозия материала наблюдается в местах, которые при изготовлении были напряжены выше предела текучести. См. K ö r b e r F., P o m p A. Rißbildungen und Aufreißen an Dampfkessелеlementen. Mitteilungen aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Eisenforschung zu Düsseldorf, 1926, Bd. 8, Lieferung 9, Abhandlung 68, SS. 135—147.

вреда, но для более твердых материалов приведенные выше соображения приобретают очень важное значение.

Влияние концентрации напряжений приобретает особо важное значение в тех случаях, когда элементы машин подвергаются знакопеременным напряжениям. При колебательном характере и их высокой концентрации легко образуются трещины, которые могут распространиться по всему поперечному сечению. Этим объясняется тот факт, что отверстия, вырезы и резкие изменения поперечных сечений часто являются причиной поломки частей машин, испытывающих колебания ¹⁾ или находящихся под действием знакопеременных напряжений.

Если вырезы очень малы, то даже для такого хрупкого материала, как стекло, они не влияют на прочность стержней при их испытании на растяжение. Это явление исследовал А. Гриффитс ²⁾.

В. Томас ³⁾ исследовал влияние поверхностных трещин и желобков на сопротивление частей машин колебаниям при знакопеременных напряжениях.

Задача о распределении напряжений вблизи нагруженных концов призматических стержней очень сложна и была теоретически исследована только в некоторых простейших случаях. Л. Файлон ⁴⁾, Р. Гиртлер ⁵⁾ и Е. Мисц ⁶⁾ рассмотрели случай кругового цилиндра, сжимаемого двумя плоскостями, плотно соприкасающимися с его основаниями. Случай призматических стержней, подвергаемых

¹⁾ Опытные данные о влиянии вырезов и резких изменений поперечных сечений на сопротивление знакопеременным напряжениям можно найти: Moore H. F., Kommers J. B. An investigation of the fatigue of metals. University of Illinois Bulletin, Engineering Experiment Station, 1921, vol. 19, № 8, Bulletin № 124, 185 p.; Wilson J. S., Haigh B. P. Stresses in bridges. Engineering 1923, vol. 116, October 5, № 3014, pp. 446—448; Timoshenko S. Stress concentration produced by fillets and holes. Verhandlungen des zweiten Internationalen Kongresses für technische Mechanik. Zürich, 12—17 September 1926. Zürich und Leipzig, O. Füssli, 1927, SS. 419—426. [Перепечатка: Timoshenko S. P. The collected papers. New York — London — Toronto, McGraw-Hill Publishing Company Ltd., 1953, pp. 436—447.] Föppl A. Dauerversuche mit eingekerbten Stäben. SS. 1—42; Weitere Erfahrungszahlen für die Festigkeit von Beton, SS. 43—51. Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der Kaiserlichen technischen Hochschule, Neue Folge, 1909, Heft 31.

²⁾ Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 1920, vol. 221, № A587, pp. 163—198.

³⁾ Thomas W. N. The effect of scratches and of various workshop finishes upon the fatigue strength of steel. Engineering, 1923, vol. 116, № 3016, October 19, pp. 483—485.

⁴⁾ Filon L. N. G. On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 1902, vol. 198, № 303, pp. 147—233.

⁵⁾ Girtler R. Über ein Problem der Elastizitätstheorie. Physikalische Zeitschrift, 1907, Jahrgang 8, № 15, August, SS. 507—509.

⁶⁾ Mysc E. Beitrag zur Theorie des Druckversuches. Dissertation, Darmstadt, Technische Hochschule, 1909, 54 S.

сжатию двумя абсолютно жесткими плитами, был исследован С. П. Тимошенко ¹⁾, Р. Мишем ²⁾, М. Кнайном ³⁾ и В. Риделем ⁴⁾. При этом выяснилось, что если боковому расширению концов препятствуют силы трения, то распределение сжимающих напряжений по поперечному сечению стержня не будет больше равномерным; сжимающие напряжения значительно повышаются по краям сечения.

Неравномерность в распределении напряжений является чисто местной и быстро уменьшается с удалением поперечного сечения от концов стержня ⁵⁾.

§ 3. Кручение прямых призматических стержней

Общая теория кручения и различные решения в отдельных частных случаях изложены в статье Ф. Ауэрбаха ⁶⁾. При решении сложных задач кручения очень полезным методом является аналогия с мембраной, так называемая аналогия Л. Прандтля ⁷⁾. Если ввести

¹⁾ T i m o s h e n k o S. The approximate solution of two-dimensional problems in elasticity. *Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1924, Series 6, vol. 47, № 282, June, pp. 1095—1104. [Перепечатка: T i m o s h e n k o S. P., The collected papers. New York — London — Toronto, McGraw-Hill book Publishing Company, Ltd., 1953, pp. 393—400.]

²⁾ M i c h e R. Le calcul pratique de problèmes élastique à deux dimensions par la méthode des équations intégrales. *Verhandlungen des zweiten Internationalen Kongresses für technische Mechanik, Zürich*, 12—17 September 1926. Zürich und Leipzig, O. Füssli, 1927, SS. 126—130.

³⁾ K n e i n M. Zur Theorie des Druckversuches. Der Spannungszustand bei ebener Formänderung und vollkommen vehinderter Querdehnung. *Abhandlung aus dem Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule in Aachen*, 1926, Heft 7, Berlin, Springer-Verlag, 22 S. Dissertation T. H. Aachen.

См. также K n e i n M. K. Zur Theorie des Druckversuchs. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 1926, Bd. 6, Heft 5, SS. 414—416.

⁴⁾ R i e d e l W. Beiträge zur Lösung des ebenen Problems eines elastischen Körpers mittels der Airyschen Spannungsfunktion. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 1927, Bd. 7, Heft 3, SS. 169—188.

⁵⁾ B l e i c h F. Der gerade Stab mit Rechteckquerschnitt als ebenes Problem. *Der Bauingenieur*, 1923, Jahrgang 4, Heft 9, SS. 255—259; Heft 10, SS. 304—307; Heft 11, SS. 327—331.

⁶⁾ A u e r b a c h F. Scherung und Drillung. *Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik*, Bd. III, Erster Teil, Statik und Dynamik elastischer Körper, Nebst Anwendungsgebieten. Leipzig, J. A. Barth, 1927, SS. 199—238. См. также W e b e r C. Die Lehre der Drehungsfestigkeit. *Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, 1921, Heft 249, 70 S.

⁷⁾ P r a n d t l L. Zur Torsion von prismatischen Stäben. *Physikalische Zeitschrift*, 1903, Jahrgang 4, № 26b, SS. 758—759. [Перепечатка: P r a n d t l L. Gessammelte Abhandlungen zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik, Erster Teil. Berlin (Göttingen) — Heidelberg, Springer-Verlag, 1961, 574 S. См. SS. 79—80.] P r a n d t l L. Eine neue Darstellung der Torsionsspannungen bei prismatischen Stäben von beliebigem Querschnitt. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1904, Bd. 13, Heft 2, SS. 31—36. [Перепечатка; P r a n d t l L. Gessammelte Abhandlungen. Erster Teil, SS. 81—86.]

функцию напряжения ¹⁾, то для компонентов напряжения будем иметь

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5)$$

Условие совместности компонентов деформации дает следующее уравнение для ψ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2\theta G = 0, \quad (6)$$

где θ — угол закручивания на единицу длины, G — модуль сдвига. Это уравнение эквивалентно дифференциальному уравнению упругой поверхности однородной мембраны, испытывающей равномерное растягивающее усилие T , отнесенное к единице длины ее контура, и подвергающейся равномерному давлению p на единицу поверхности. Уравнение поверхности прогибов мембраны есть функция ψ в предположении, что контур мембраны такой же, как и контур поперечного сечения скручиваемого стержня, и что $p/T = 2G\theta$. Наклон поверхности мембраны в какой-либо точке по отношению к плоскости ее контура дает величину касательного напряжения в соответствующей точке сечения скручиваемого стержня. Удвоенный объем, заключенный между поверхностью мембраны и плоскостью ее контура, равен величине крутящего момента, приложенного к стержню. Эта аналогия дает возможность определять экспериментальным путем напряжения в скручиваемых стержнях. Такие опыты были произведены Г. Антесом ²⁾, А. Гриффитсом ³⁾ и Г. Тейлором и оказались очень ценными для изучения распределения напряжений в сложных случаях.

Решение уравнения (6) эквивалентно отысканию минимума интеграла

$$S = \iint \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2G\theta\psi \right\} dx dy, \quad (7)$$

в котором ψ на контуре сечения должно иметь постоянное значение.

¹⁾ [Представление компонентов напряжения в плоской задаче теории упругости через производные от одной и той же функции $\psi(x, y)$ было впервые введено A i r y G. B. On the strains in the interior of beams. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1863, vol. 153, Part 1, pp. 49—79.]

²⁾ A n t h e s H. Versuchsmethode zur Ermittlung der Spannungsverteilung bei Torsion prismatischer Stäbe. Dingers polytechnisches Journal 1906, Jahrgang 87, Bd. 321, Heft 22, SS. 342—345; Heft 23, SS. 356—359; Heft 25, SS. 388—392; Heft 28, SS. 441—444; Heft 29, SS. 455—459; Heft 30, SS. 471—475.

³⁾ G r i f f i t h A. A., T a y l o r G. I. The use of soap films in solving torsion problems. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1917, December, pp. 755—809. [Перепечатка: The scientific papers of sir Geoffrey Ingram Taylor. Vol. 1. Mechanics of Solids. Cambridge, University Press, edited G. K. Batchelor, 1958. 593 p. См. pp. 1—23.]

С помощью метода Ритца эта задача с достаточной точностью может быть решена для любого выпуклого многоугольника. Если, например, мы имеем очень узкий прямоугольник со сторонами $x = \pm a$, $y = \pm b$, причем a предполагается значительно большей b , то изогнутая поверхность мембраны может быть выражена в следующем виде ¹⁾ (для $x > 0$):

$$\psi = G\theta (b^2 - y^2) [1 - e^{-k(a-x)}],$$

откуда

$$\tau_{zx} = -2G\theta y [1 - e^{-k(a-x)}], \quad \tau_{zy} = G\theta k [b^2 - y^2] e^{-k(a-x)}.$$

Если подобрать k так, чтобы интеграл (7) имел значение минимума, то получим $k = 1/b \sqrt{5/2}$, и крутящий момент выразится так:

$$M_z = 4 \int_0^a \int_0^b \psi dx dy = \frac{16}{3} G\theta ab^3 \left(1 - 0,63 \frac{b}{a}\right). \quad (8)$$

Этой формулой можно пользоваться при поперечных сечениях, изображенных на рис. 6. Напряжения при кручении таких стержней можно определить приближенно, разбивая их поперечные сечения на узкие прямоугольники, как показано на рисунке, и применяя для каждого прямоугольника формулу (8). Жесткость всего

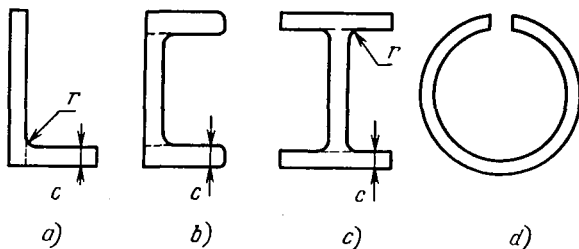


Рис. 6. Сопротивление кручению прокатного железа.

поперечного сечения скручиваемого стержня определится как сумма жесткостей отдельных элементарных прямоугольников ²⁾; наибольшее напряжение в таких случаях имеет место в точках у входя-

¹⁾ T i m o s h e n k o S. P. On the torsion of a prism, one of the cross-sections of which remains plane. Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2, 1922 [1921, February 10.] vol. 20, pp. 389—397. [Перепечатка: T i m o s h e n k o S. P. The collected papers. New York—London—Toronto, McGraw-Hill Publishing Company, Ltd., 1953, pp. 314—320.]

²⁾ F ö p p l A. Versuche über die Verdrehungssteifigkeit der Walzeisenenträger. Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München, 1922, Jahrgang 1921, Heft 2, SS. 295—313; K i e h n e S. Zur Frage der Gebäudesicherung im Bergbaulungsgebiete. Der Bauingenieur, 1922, Jahrgang 3, Heft 2, 31 Januar, SS. 42—44.

щих углов. Это напряжение приблизительно определяется формулой ¹⁾

$$\tau_{\max} = 1,74 \sqrt{\frac{c}{r}} c G \theta, \quad (9)$$

где c/r — отношение толщины сечения к радиусу закругления.

Для тонких трубообразных сечений ²⁾ можно полагать, что касательные напряжения распределяются равномерно по толщине трубы. Направление касательных напряжений совпадает с направлением касательной и кривой контура поперечного сечения, а величина напряжения обратно пропорциональна толщине стенки трубы в этой точке. Крутящий момент определяется из следующего уравнения:

$$M_z = 2\tau hF, \quad (10)$$

где τ — касательное напряжение, h — толщина стенки трубки (эти величины изменяются вдоль осевой линии кольцевого поперечного сечения трубки), F — площадь, ограниченная этой осевой линией. Для вычисления угла закручивания θ нужно только приравнять работу крутящего момента потенциальной энергии кручения, тогда получим:

$$\theta = \frac{M_z}{4GF^2} \int_0^s \frac{ds}{h}. \quad (11)$$

Применим формулу (10) к случаю, изображенному на рис. 7, тогда получим

$$\tau_1 = \frac{M_z}{2a_1 a_2 h_1}, \quad \tau_2 = \frac{M_z}{2a_1 a_2 h_2}, \quad \theta = \frac{M_z}{2Ga_1^2 a_2^2} \left(\frac{a_1}{h_1} + \frac{a_2}{h_2} \right).$$

Кручение труб, имеющих сечения сложной формы, исследовали Г. Лоренц ³⁾, Дж. Прескотт ⁴⁾, А. Фёппль и Л. Фёппль ⁵⁾. Местные

¹⁾ T r e f f t z E. Über die Wirkung einer Abrundung auf die Torsionsspannungen in der inneren Ecke eines Winkelleisens. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1922, Bd. 2, Heft 4, SS. 263—267.

²⁾ B r e d t R. Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizität. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1896, Bd. 40, № 29, SS. 813—817. См. S. 815.

³⁾ L o r e n z H. Lehrbuch der technischen Physik, Bd. 4, Technische Elastizitätslehre. München und Berlin, R. Oldenbourg, 1913, 692 S. См. S. 98.

⁴⁾ P r e s c o t t J. The torsion of closed and open tubes. Philosophical Magazine and Journal of Science, serie 6, 1920, vol. 40, № 239, pp. 521—541.

⁵⁾ F ö p p l A., F ö p p l L. Drang und Zwang. Eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure Zweite Auflage. Bd. 2, München und Berlin, R. Oldenbourg, 1928,

напряжения в шпоночных пазах были исследованы опытным путем с помощью аналогии с мембраной ¹⁾).

Местные напряжения, вызываемые отверстиями и желобками, исследованы Дж. Лармором ²⁾). Он показал, что просверленное в валу круглое отверстие малого диаметра, параллельное оси вала, удваивает максимальное напряжение в той части вала, где просверлено отверстие. Влияние *полукруглых выточек* на поверхности круглого вала, параллельных его оси, проявляется в том, что наибольшее касательное напряжение у основания выточки приблизительно вдвое больше, чем касательное напряжение, вычисленное для поверхности вала в том предположении, что выточки нет. Коэффициент концентрации напряжения в случае отверстия или выточки эллиптической формы равен $(1+a/b)$, где a и b — полуоси эллипса соответственно в радиальном и перпендикулярном к нему направлениях.

Гидродинамическую аналогию развили Кельвин и П. Тэт ³⁾), а также Ж. Буссинеск ⁴⁾ и А. Гринхил ⁵⁾). С помощью этой аналогии можно показать, что у вершин исходящих углов контура поперечного сечения вала напряжения соответственно равны нулю и бесконечности. Некоторые применения гидродинамической аналогии дал М. Пашу ⁶⁾).

390 S. См. § 72, S. 84—88. [Перевод на русский язык: Фёплъ А., Фёплъ Л. Сила и деформация. Прикладная теория упругости. Том 2, М.—Л., ОНТИ НКТП СССР, 1936, 408 стр. См. § 72 (стр. 91—95).]

¹⁾ The mechanical properties of fluids. A collective work by Drysdale C. V., Ferguson A., Geddes A. E. M., Gibson A. H., Hunt F. R. W., Lamb H., Michell A. G. M., Taylor G. J., Goodwin G., London, Glasgow and Bombay, Blackie and Son Limited, 1925, 362 p. См. p. 245.

²⁾ L a r m o u r J. The influence of flaws and air-cavities on the strength of materials. Philosophical Magazine and Journal of Science, series 5, 1892, vol. 33, № 200, January, pp. 70—78. См. p. 76.

³⁾ Kelvin W. T., Tait P. G. Treatise on natural philosophy. Part II. Cambridge, University Press, 1895, 528 p. См. p. 242.

⁴⁾ B o u s s i n e s g J. Etude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres. Journal de Mathématiques pures et appliquées (Liouville), serie 2, 1871, tome 16, pp. 125—274.

⁵⁾ [G r e e n h i l l A. G. Он показал, что при кручении функция напряжения математически тождественна функции тока движения идеальной жидкости, циркулирующей с постоянной угловой скоростью в неподвижной трубе того же поперечного сечения, что и закручиваемый стержень. См. G r e e n h i l l A. G. Hydro-mechanics. Encyclopaedia Britannica. A dictionary of arts, sciences and general literature, 9 edition, vol. 12, Edinburgh. Adam and Charles Black, 1881, pp. 435—535, 11th edition. A dictionary of arts, sciences, literature and general information. New Work, The Encyclopaedia Britannica Company, 1910, vol. 14, pp. 115—135.]

⁶⁾ B o u s s i n e s g J. Sur le calcul de plus en plus approché des vitesses bien continues de régime uniforme par des polynomes, dans un tube prismatique à section carrée. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1914, tome 158, № 24, 1^{er} Semestre, pp. 1743—1749. P a s c h o u d M. Sur le problème du régime uniforme dans un tube cylindrique fin a section en triangle rectangle isocèle. Comptes rendus de l'Académie

Начало явления текучести в скручиваемом стержне обсуждали А. Надаи ¹⁾ и Э. Треффц ²⁾.

Кручение призматических стержней, у которых поперечное сечение сохраняет при деформации свою плоскую форму, исследовали С. П. Тимошенко ³⁾, А. Фёппль ⁴⁾, Ф. Губер ⁵⁾ и К. Вебер ⁶⁾.

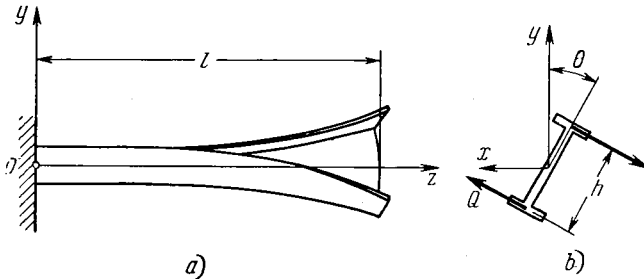


Рис. 8. Кручение двутавровой балки.

Эта задача имеет важное практическое значение при поперечных сечениях с двумя полками, как, например, двутавровое поперечное сечение, если высота балки и ширина полок не малы по отношению к длине балки. Рассмотрим случай, представленный на рис. 8. Здесь

des Sciences, 1924, tome 179, № 7, 2 Semestre, pp. 379—381. P a s c h o u d M. Calcul des vitesses de régime uniforme, par des polynomes, dans les tubes cylindriques à sections polygonales régulières. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1924, tome 179, № 9, 2 Semestre, pp. 451—454.

¹⁾ N a d a i A. Der Beginn des Fließvorganges in einem tordierten Stab. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1923, Bd. 3, Heft 6, SS. 442—454; B a d e r W., N á d a i A. Die Vorgänge nach der Überschreitung der Fließgrenze in verdrehten Eisenstäben. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1927, Bd. 71, № 10, SS. 317—323.

²⁾ T r e f f t z E. Über die Spannungsverteilung in tordierten Stäben bei teilweiser Überschreitung der Fließgrenze. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1925, Bd. 5, Heft 1, SS. 64—73.

³⁾ T i m o s c h e n k o S. Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1910, Bd. 58, Heft 4, SS. 337—385. См. 361. [Перевод на русский язык: «Некоторые теоретические проблемы упругой устойчивости» в книге: Т и м о ш е н к о С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Изд-во «Наука», М., 1971, стр. 384—433. См. стр. 409.] T i m o s h e n k o S. On the torsion of a prism, one of the cross-sections of which remains plane. Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2, 1922 [February 10, 1921], vol. 20, pp. 389—397.

⁴⁾ F ö p p l A. Die Beanspruchung eines Stabes von elliptischem Querschnitt auf Drillen beim behinderter Querschnittswölbung. Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München, 1920, Jahrgang 1920, Heft 2, SS. 261—273.

⁵⁾ H ü b e r F. Erschütterungen schwerer Fahrzeugmotoren. Dissertation: München Technische Hochschule. München, Oldenburg, 1919, 86 S.

⁶⁾ W e b e r C. Übertragung des Drehmomentes in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1926, Bd. 6, Heft 2, SS. 85—97.

крутящий момент M_z частично передает чистое кручение, эта часть равна $C d\theta/dz$, где C — жесткость балки при кручении. Другая часть вызывает изгиб полки; эта часть равна $\theta h = (-Dh^2/2) \cdot (d^3\theta/dz^3)$, где D означает жесткость на изгиб одной полки, а h — высоту сечения балки. Угол закручивания найдется из следующего дифференциального уравнения:

$$M_z = C \frac{d\theta}{dz} - \frac{Dh^2}{2} \frac{d^3\theta}{dz^3}. \quad (12)$$

У закрепленного конца имеем $d\theta/dz=0$, и крутящий момент передается только поперечными силами полки. Влияние изгиба полки носит местный характер, и момент Qh постепенно уменьшается от величины M_z у закрепленного конца до нуля у свободного конца. Для длинных балок влияние на угол закручивания закрепления концевого поперечного сечения равносильно сокращению длины балок на величину $a = \sqrt{Dh^2/2C}$.

§ 4. Кручение стержней переменного поперечного сечения

Если поперечное сечение стержня изменяется по его длине постепенно, то можно получить удовлетворительные приближенные решения для распределения напряжений, пользуясь формулами для призматических стержней.

При резких изменениях поперечного сечения обычно имеет место значительная концентрация напряжений, и потому практически необходимо особое исследование местных напряжений. Особенно большое значение имеет случай кручения вала переменного кругового поперечного сечения. Общая теория кручения такого вала разработана Дж. Мичеллом¹⁾. Она была вновь развита А. Фёпплем²⁾, применившим теорию к осесимметричному конусу и цилиндрическим валам переменного сечения с круговыми выточками. Последняя задача для практики особо важна; дальнейшая ее разработка дана Ф. Виллерсом³⁾. С помощью графического интегрирования ему удалось определить численные значения коэффициента концентрации напряжения при различных соотношениях радиуса выточки ρ

¹⁾ M i c h e l l J. H. The uniform torsion and flexure of incomplete tores, with application to helical springs. Proceedings of the London Mathematical Society, Series 1, 1899. [April 13, 1900, vol. 31, pp. 130—146. См. p. 140.]

²⁾ F ö p p l A. Über die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser. Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München, 1906, Jahrgang 1905, Bd. 35, Heft 2, 3 Juni, SS. 249—262, F o p p l A. Berichtigung zu meiner Abhandlung über die Torsion von runden Stäben. Там же, Heft 5, S. 504.

³⁾ W i l l e r s F. A. Die Torsion eines Rotationskörpers um seine Achse. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1907, Bd. 55, Heft 3, SS. 225—263.

и радиуса вала r . Л. Джекобсен ¹⁾ сделал дальнейший шаг в решении этой задачи; он доказал, что в этом случае дифференциальное уравнение кручения тождественно с уравнением распределения электрического тока в пластинке, ширина которой изменяется так же, как и диаметр вала, а толщина изменяется пропорционально третьей степени расстояния от продольной оси. Линии одинаковых углов закручивания, примененные Ф. Виллерсом в его графическом решении, в задаче распределения электрического тока представляются линиями равного потенциала; эти линии могут быть определены из эксперимента. Если с помощью эксперимента при исследовании электрического тока установлены расстояния между этими

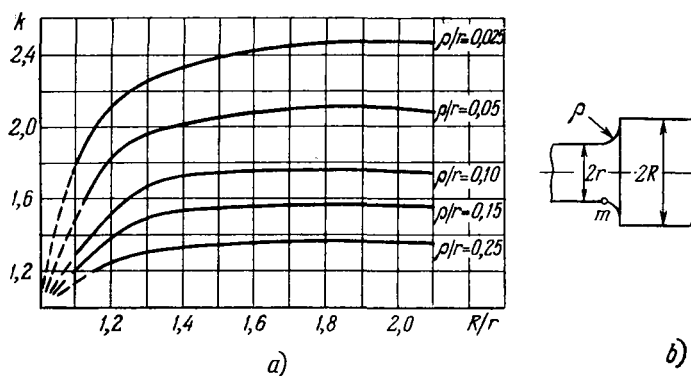


Рис. 9. Значения коэффициентов концентрации напряжений в валах с круговыми выточками.

линиями, то распределение напряжений можно получить легко. Некоторые из результатов исследований Л. Джекобсена представлены на рис. 9, где ρ — радиус выточки, а r и R — радиусы двух частей вала.

По оси абсцисс отложены отношения R/r , ординаты дают значения k — коэффициента концентрации напряжения. Для того чтобы получить наибольшее касательное напряжение у выточек (в точке m на рис. 9, b), нужно касательное напряжение у поверхности вала радиуса r , равное $2 M_z / \pi r^3$, умножить на коэффициент концентрации. Как видно из рис. 9, например, для $\rho/r = 0,1$; $R/r = 1,5$ коэффициент концентрации напряжения равен приблизительно 1,7. Этот коэффициент увеличивается вместе с ростом отношения R/r и с уменьшением ρ/r . Этим высоким местным напряжением при пере-

¹⁾ J a c o b s e n L. S. Torsional-stress concentrations in shafts of circular cross-section and variable diameter. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1926, vol. 47, № 1974, pp. 619—641.

менном крутящем моменте можно приписать многие случаи поломок валов во время работы.

Случай цилиндрического вала с круглыми выточками исследован Ф. Виллерсом¹⁾ и Л. Фёпплем²⁾. Кручение эллипсоида вращения и параболоида вращения изучено Е. Меланом³⁾. В. Арндт⁴⁾ исследовал кручение валов с симметричными относительно оси продольными отверстиями и пустотами. А. Вышомирский⁵⁾ экспериментально определил распределение напряжений в валах с переменным поперечным сечением, используя предложенный Х. Хелл-Шоу⁶⁾ аппарат линий тока.

К. Вольф⁷⁾ обсудил распределение напряжений на концах скрученного вала круглого поперечного сечения.

§ 5. Изгиб прямых призматических стержней

Общую теорию изгиба призматических стержней можно найти в статье И. Геккелера⁸⁾. Из этой теории следует, что в поперечных сечениях, достаточно далеко расположенных от концов стержня и от точек приложения нагрузок, известная приближенная теория Якоба Бернулли дает точные значения для *нормальных напряжений* и для *кривизны упругой линии*. Как известно, *теория Бернулли исходит из предположения, что поперечные сечения при изгибе стержня остаются плоскими и нормальными к центральной линии стержня*. Распределение касательных напряжений по поперечному

¹⁾ Willers F. A. Die Torsion eines Rotationskörpers um seine Achse. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1907, Bd. 55, Heft 3, SS. 225—263.

²⁾ Föppel A. Versuche über die Verdrehungssteifigkeit der Walzeisenträger? Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München, 1922, Jahrgang 1921, Heft 2, SS. 295—313.

³⁾ Melan E. Ein Beitrag zur Torsion von Rotationskörpern. Technische Blätter, Prag, 1920, Jahrgang 52, № 48, SS. 417—419, № 49—50, SS. 427—429; Pöschl Th. Bisherige Lösungen des Torsionsproblems für Drehkörper. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1922, Bd. 2, Heft 2, SS. 137—147.

⁴⁾ Arndt W. F. C. Die Torsion von Wellen mit achsensymmetrischen Bohrungen und Hohlräumen. Dissertation. Georg — August Universität zu Göttingen, Philosophische Fakultät Göttingen, Dietrich, 1916, 74 S.

⁵⁾ Wyszomirski A. Stromlinien und Spannungslinien. Ein Versuch Probleme der Elastizitätslehre mit Hilfe hydraulischer Analogien experimentell zu lösen. Dissertation, Dresden Technische Hochschule. Borna — Leipzig, Noske, 1914, 53 S.

⁶⁾ Hell-Shaw H. S. A new instrument for drawing envelopes, and its application to the teeth of wheels and for other purposes. Report of the sixteenth meeting of the British Association for the advancement of science. Held at Bristol in september 1898. London, J. Jurray, 1899, 1096 p. + 112 p. См. pp. 619—627.]

⁷⁾ Wolf K. Über den Einfluß der Einspannung auf die Torsionsbeanspruchung eines Kreiszyinders. Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Abteilung 2a: Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik, 1916, Bd. 125, Heft 9, SS. 1149—1166.

⁸⁾ Geckeler J. W. Biegung, Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, Bd. 3, Leipzig, J. A. Barnh, 1927, SS. 130—191. См. S. 130.

сечению зависит от его формы и может значительно отклоняться от распределения, получаемого согласно приближенной теории Д. И. Журавского¹⁾. Для вычисления этих напряжений в некоторых случаях оказывается очень полезной мембранная аналогия²⁾.

Эта аналогия, например, показывает, что в случае прямоугольного поперечного сечения точные значения наибольших касательных напряжений в центре поперечного сечения и посередине больших сторон можно получить, если умножить на некоторый, зависящий от отношения h/b (высоты к ширине сечения балки) коэффициент значения касательных напряжений, вычисленных на основе приближенной теории; некоторые значения этого коэффициента даны в таблице 3³⁾.

Т а б л и ц а 3

$\frac{h}{b}$	2	1	1/2	1/4
Центр поперечного сечения	0,983	0,940	0,856	0,805
Середина стороны h	1,033	1,126	1,396	1,988

Видно, что для отношений $h/b > 1$ достаточно точные результаты дает обычная формула для определения касательных напряжений. Если ширина поперечного сечения велика по отношению к высоте, то отклонения от результатов приближенной теории становятся значительными; но в этом случае абсолютные значения касательных напряжений обычно невелики и не имеют большого практического значения.

¹⁾ J o u r a v s'k i D. Remarques sur la résistance d'un corps prismatique et d'une piece composée en bois ou en tôle de fer a une force perpendiculaire a leur longueur. Annales des ponts et chaussées, Memoires et documents, 1856, tome 12, serie 3, 2 semestre, № 150, pp. 328—351; Ж у р а в с к и й Д. И. О мостах раскосной системы Гау. С.-Петербург, тип. Д. Кесневля, часть I, 1855, 114 стр.; часть II, 1856, 161 стр. См. стр. 139.

²⁾ Т и м о ш е н к о С. П. Курс теории упругости. Часть 1, С.-Петербург, Издание Института инженеров путей сообщения, 1914, 239 стр. См. стр. 178; D i x o n A. C. The theory of a thin elastic plate, bounded by two circular arcs and clamped. Proceedings of the London Mathematical Society, series 2, 1921, vol. 19 [1921, January 13.] pp. 373—386. См. также N e m e n y i P. Über die Berechnung der Schubspannungen im gebogenen Balken. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1921, Bd. 1, Heft 2, SS. 89—96; W e b e r C. Biegung und Schub in geraden Balken. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1924, Bd. 4, Heft 4, SS. 334—348.

³⁾ Вычисления производились для коэффициента Пуассона, равного 0,25. Значения несколько отличаются от данных в таблице. St. Venant. См. G e s k e l e r J. W. Biegung. Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik. Bd. 3. Leipzig, J. A. Barth, 1927, SS. 130—191. См. S. 140.

Теория Якоба Бернулли не дает точных значений для нормальных напряжений и для кривизны упругой линии для частей балок, находящихся под непрерывно распределенной нагрузкой. В этом случае нормальные напряжения не распределяются больше по поперечному сечению по линейному закону, нейтральная ось больше не проходит через центр тяжести поперечного сечения, и кривизна упругой линии уже не пропорциональна величине изгибающего момента. Все эти отклонения от результатов приближенной теории, однако, малы, и ими обычно без существенного риска можно пренебречь.

Более точное уравнение изгиба оси можно получить, если принять во внимание так называемую поправку на касательные напряжения.

Т. Карман ¹⁾ исследовал эту поправку. Эти исследования привели к следующему выражению для кривизны упругой линии:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EJ} - \frac{d^2M}{dz^2} \frac{1}{FG} \left(\frac{3}{4} + \frac{9}{20} \frac{1}{1+\mu} \right). \quad (13)$$

Здесь F означает площадь поперечного сечения, μ — коэффициент Пуассона, ось z совпадает с осью балки. Одним из обычных способов из уравнения (13) получается уравнение прогибов. Если применять графический метод, то к фиктивной нагрузке M/EJ надо прибавлять еще нагрузку, определяемую вторым членом правой части уравнения (13). Этим уравнением нельзя пользоваться в случаях, когда M изменяется очень быстро и когда dM/dz и d^2M/dz^2 имеют разрыв непрерывности, как это случается у мест приложения сосредоточенных нагрузок и опорных реакций.

Л. Файлон ²⁾ и С. П. Тимошенко ³⁾ исследовали поправку на касательные напряжения для случая сосредоточенной нагрузки, приложенной посередине балки прямоугольного сечения. В этом случае прогиб по середине определяется следующим выражением:

$$f = \frac{Pl^3}{48EJ} \left(1 + 2,95 \frac{h^2}{l^2} - 0,02 \frac{h}{l} \right), \quad (14)$$

где l — длина балки, а h — высота ее поперечного сечения.

¹⁾ K á r m á n T h. Über die Grundlagen der Balkentheorie. Scripta Universitatis atque Bibliothecae Hierosolimitanarum, 1923, SS. 1—11. [Перепечатка: Kármán Th. Collected works. London, Butterworths Scientific Publications, 1956, vol. 2, pp. 153—163.]

²⁾ F i l o n L. N. G. On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load; with special reference to points of concentrated or discontinuous loading. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 1903, vol. 201, № 334, pp. 63—155.

³⁾ T i m o s h e n k o S. The approximate solution of two-dimensional problem, in elasticity, Philosophical Magazine and Journal of Science, 1924, vol. 47, Series A, № 282, June, pp. 1095—1104.

Для исследования распределения напряжений вблизи точек приложения сосредоточенных нагрузок в случае балки с узким прямоугольным поперечным сечением можно воспользоваться известным решением задачи относительно действия сосредоточенной силы, приложенной нормально к краю полуплоскости ¹⁾. Опыты показывают ²⁾, что в точке *A*, противоположной точке приложения силы *P* (рис. 10), напряжение будет меньше того, которое получается на основании элементарной теории изгиба. Это объясняется следующим образом: если в точке *B* допустить чисто радиальное распределение напряжений, то действие силы *P* можно заменить вертикальной

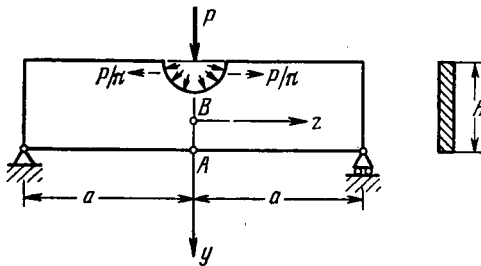


Рис. 10. Сосредоточенная нагрузка в середине балки.

силой *P*, направленной вниз, и двумя равными, противоположно направленными горизонтальными силами *P/π*. Эти последние силы вызывают внецентренное растяжение, и в сечении *AB* мы имеем дело с растягивающими силами *P/π* и изгибающим моментом $\frac{P}{2}(a - h/\pi)$. Соответствующие напряжения равны

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi h b} + \frac{6Py}{bh^2} \left(\frac{a}{h} - \frac{1}{\pi} \right). \quad (15)$$

Этот результат хорошо соответствует вышеуказанным опытам ³⁾.

Л. Файлон ⁴⁾ и В. Ридель ⁵⁾ рассмотрели распределение напряжений в балке с узким прямоугольным поперечным сечением на основе уравнений плоской задачи теории упругости.

¹⁾ F l a m a n t M. Sur la répartition des pressions dans un solide rectangulaire chargé transversalement. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1892, tome 114, 1 Semestre, № 25, pp. 1465—1468.

²⁾ C a r u s W i l s o n C. A. The influence of surface-loading of the flexure of beams (Plate II). Philosophical Magazine and Journal of Science, Series 5, 1891, vol. 32, № 199, December, pp. 481—503.

³⁾ Д ж. С т о к с дает другое объяснение этого результата: S t o k e s G. G. Mathematical and Physical Papers, vol. 5. Cambridge, University Press, 1905, 370 p. См. p. 238.

⁴⁾ F i l o n L. N. G. On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load; with special reference to points of concentrated or discontinuous loading. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 1903, vol. 201. № 334, pp. 63—155.

⁵⁾ R i e d e l W. Beiträge zur Lösung des ebenen Problems eines elastisch en Körpers mittels der Airyschen Spannungsfunktion. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1927, Bd. 7, Heft 3, SS. 169—188.

§ 6. Изгиб стержней переменного поперечного сечения

Основные уравнения, выведенные для определения напряжений в призматических стержнях, часто применяются и для расчета стержней переменного сечения. Чтобы дать представление о точности, которой можно достичь при таком способе расчета, рассмотрим в качестве примера случай изгиба клина, жестко заделанного одним концом и нагруженного на другом силой P (рис. 11). Точное решение, данное Джоном Мичелом ¹⁾, показывает, что в некоторой точке A имеет место радиальное [по линии OA] напряжение

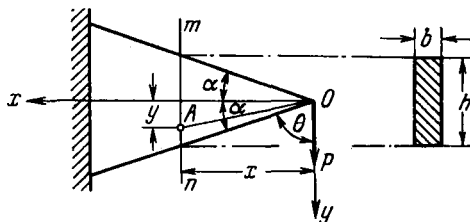


Рис. 11. Изгиб жесткоконсольного клина.

$$\sigma_r = k \frac{P \cos \theta}{rb},$$

где r равно расстоянию AO ; b — толщина клина; θ — угол между линией AO и направлением силы; k — коэффициент, величина которого определяется из уравнения равновесия

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} b\sigma_r r \cos \theta d\theta + P = 0,$$

откуда

$$k = -\frac{2}{2\alpha - \sin 2\alpha}.$$

Распределение нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении клина определяются следующими выражениями:

$$\sigma_x = -\frac{M_y}{J} \frac{4}{3} \frac{\operatorname{tg}^3 \alpha \sin^4 \theta}{2\alpha - \sin 2\alpha}, \quad \tau = \frac{P}{F} \frac{16y^2 \operatorname{tg}^3 \alpha \sin^4 \theta}{h^2 (2\alpha - \sin 2\alpha)},$$

где

$$J = \frac{bh^3}{12}, \quad F = bh \quad \text{и} \quad M = Px.$$

Максимальные нормальные и касательные напряжения будут при

¹⁾ Mitchell J. H. Elementary distributions of plane stress in three dimensions. Proceedings of the London Mathematical Society, 1901 [1900, January 11], vol. 32, № 713, pp. 35—61.

$\theta = (\pi/2) \pm \alpha$ и определяются формулами

$$\sigma_{x \max \min} = \pm \beta \frac{Mh}{2J}, \quad \tau_{\max} = \gamma \frac{P}{F}. \quad (16)$$

Некоторые значения β и γ приведены в таблице 4.

Таблица 4

α	5°	10°	15°	20°
β	1,00	0,97	0,947	0,906
γ	3,00	2,91	2,84	2,72

Отсюда видно, что максимальные нормальные напряжения при малых α не очень отличаются от напряжений, вычисленных по формулам для призматических стержней. Наибольшие касательные напряжения почти вдвое больше, чем в случае призматического стержня. Они возникают в наиболее отдаленных от нейтральной оси точках. Имея в виду, что во многих случаях касательные напряжения по сравнению с нормальными пренебрежимо малы, можно сказать, что для случаев плавно изменяющихся поперечных сечений могут применяться формулы нормальных напряжений для призматических стержней.

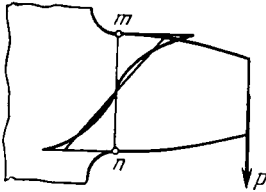


Рис. 12. Изгиб зуба зубчатого колеса.

Если же поперечное сечение резко меняется на небольшом участке стержня, то обыкновенно при этом имеет место значительная концентрация напряжений. Для примера рассмотрим зуб зубчатого колеса, к которому приложена сила P (рис. 12). Оказывается, что распределение напряжений в поперечном сечении mn в корне зуба не следует линейному закону. Из опытов мы узнаем ¹⁾, что в точках m и n начала закругления наблюдается сильная концентрация напряжения. В таблице 1 (стр. 563) указаны коэффициенты концентрации напряжения, на которые следует умножать значения напряжений, определенных по обычным формулам, чтобы получить наибольшие значения напряжений в точках m и n .

Если на стержне имеется ряд глубоких желобков, близко расположенных один к другому, или дисков, прочно насаженных на вал (рис. 13), то материал между желобками передает только незначи-

¹⁾ Timoshenko S., Baud R. V. The strength of gear teeth. Mechanical Engineering, 1926, vol. 48, № 11, November, pp. 1105—1109.

тельную часть изгибающего момента, и влияние этого материала на сопротивление изгибу может во многих случаях не учитываться.

Если мы хотим принять во внимание повышение жесткости, то нужно только по длине участков b , представляющих собой толщину дисков, заменить жесткость вала EJ большей жесткостью EJ/κ . Постоянная величина κ зависит от отношения b/d . Некоторые значения κ , полученные на основании опытов¹⁾, приведены в таблице 5.

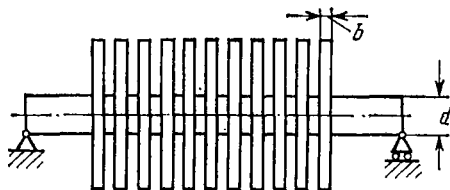


Рис. 13. Изгиб вала с насаженными дисками.

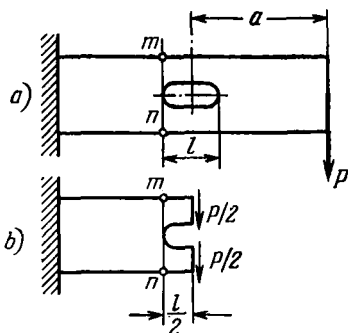


Рис. 14. Продолговатое отверстие у нейтральной поверхности.

Для определения концентрации напряжения, получающегося у отверстий и желобов, можно пользоваться теми же формулами и коэффициентами концентрации, что и при растяжении (§ 2).

Таблица 5

b/d	0,10	0,20	0,31	0,40	0,50	0,63
κ	0,945	0,785	0,620	0,505	0,435	0,366

Если отверстие имеет продолговатую форму и расположено у нейтральной поверхности (рис. 14), то нужно принять во внимание дополнительный изгиб²⁾. Максимальное напряжение определится формулой

$$\sigma = \frac{Pa}{W} + \frac{Pl}{4W_1},$$

¹⁾ Е с к В. Versteifender Einfluss der Turbinenscheiben auf die Durchbiegung des Läufers. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1928, Bd. 72, № 2, SS. 51—56.

²⁾ P f l e i d e r e r С. Die Berechnung der Scheibenkolben. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1911, Heft 97, SS. 1—36; P f l e i d e r e r С. Der Einfluss von Löchern oder Schlitzen in der neutralen Schicht gebogener Balken auf ihre Tragfähigkeit. Там же, SS. 37—49.

где W — момент сопротивления всего поперечного сечения; W_1 — момент сопротивления части поперечного сечения, лежащей выше или ниже отверстия.

Из теории сопротивления материалов следует, что напряжения от изгиба пропорциональны расстояниям нейтральной оси и распределяются равномерно по ширине поперечного сечения. Этому закону не следуют тавровые и двутавровые сечения, имеющие широкие полки. Напряжения в полках у вертикальной стенки будут больше, чем по краям. Распределение напряжений в полках было обсуждено Р. Бортием ¹⁾, Т. Карманом ²⁾ и В. Метцером ³⁾. Для вычисления максимального напряжения при изгибе балки таврового сечения с полкой постоянной толщины и бесконечно большой ширины хорошее простое приближенное решение получается следующим образом: пусть $2l$ — длина пролета, и изгибающий момент изменяется по гармоническому закону $M = M_1 \cos(\pi x/l)$, тогда приведенная ширина полки в обе стороны от стенки, воспринимающей напряжения, составляет примерно 9% от длины пролета, или, иначе, 18% от расстояния между нулевыми точками эпюры изгибающих моментов.

§ 7. Изгиб за пределом упругости

При изгибе балок за пределом пропорциональности или в случаях, когда их материал не следует закону Гука при упругих деформациях, напряжения в продольных волокнах не будут более пропорциональны продольным деформациям, и распределение напряжений не будет теперь следовать линейному закону. Допущение Якоба Бернулли ⁴⁾ о том, что при изгибе поперечные сечения оста-

¹⁾ B o r t s c h R. Die mitwirkende Plattenbreite. Der Bauingenieur, 1921, Jahrgang 2, Heft 23, SS. 662—667.

²⁾ K á r m á n T h. Die mittragende Breite. Beitrage zur technischen Mechanik und technischen Physik. August Foppl zum 70 Geburtstag am 25 Januar 1924. Berlin, J. Springer, 1924, SS. 114—127. [Перепечатка: K á r m á n T h. Collected works, vol. 2, London, Butterworths Scientific Publications, 1956, pp. 176—188.] [Обстоятельное обсуждение теории эквивалентного стержня дано П. Ф. Папковичем во вводной статье к работе П. А. Соколова «О напряжениях в сжатых пластинах после потери устойчивости». Труды Научно-исследовательского института судостроения и судовых стандартов Союзверфи, вып. 7, М.—Л., Гос. научно-техн. изд-во строит. индустрии и судостроения, 1932, 69 стр. Эта статья называется так: «Краткий очерк развития проблемы внутренних сил в учении об общей крепости корабля», стр. 3—15. Она перепечатана в сборнике: П а п к о в и ч П. Ф. Труды по прочности корабля. Л., Судпромгиз, 1956, стр. 37—55.]

³⁾ M e t z e r W. Die mittragende Breite. München, 1929, Oldenbourg, 21 S. Dissertation. Aachen, Technische Hochschule, 1929.

⁴⁾ B e r n o u l l i J. Véritable hypothèse de la résistance des solides, avec la démonstration de la courbure des corps qui font ressort. В кн.: «Jacobi Bernoulli». Busileensis, Opera. Tomus 2. Genevae, sumptibus haeredum Cramer et Fratrum Philibert, 1744, № С11, pp. 976—986. См. также T o d h u n t e r I., a n d P e a r-

ются плоскими, остается, однако, в силе и для материалов, не следующих закону Гука; это подтверждается опытами. Поэтому деформации продольных волокон пропорциональны расстояниям их от нейтральной оси, а напряжения при изгибе изменяются от нейтральной оси до наиболее отдаленных от него волокон в соответствии с диаграммой зависимости напряжений от деформаций, которая получается непосредственно из опытов на растяжение и сжатие образца. Если зависимость между напряжениями и деформациями можно выразить аналитически, то легко можно определить положение нейтральной оси и выражение для кривизны оси через изгибающий момент, пользуясь следующими уравнениями:

$$\int_F \sigma_z dF = 0, \quad \int_F \sigma_z y dF = 0. \quad (17)$$

Пользуясь степенным законом, предложенным К. Бахом ¹⁾ для чугуна

$$\sigma_z = \alpha \varepsilon^m, \quad (18)$$

Р. Латовский ²⁾, Л. Гейзен ³⁾ и В. Шюле ⁴⁾ нашли распределения напряжений при различных формах поперечных сечений и различных значениях коэффициентов α и m . В случае заданного эмпирического выражения деформационного закона уравнения (17) можно решать графически или численно. Эти методы развиты А. Консидером ⁵⁾, Ф. Энгессером ⁶⁾ и Е. Мейером ⁷⁾.

с о н К. A history of the theory of elasticity and of the strength of materials. Vol. 1, Cambridge, University Press, 1886, pp. 10—13.

¹⁾ B a c h C. Die Biegungslehre und das Gubeisen. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1888, Bd. 32, № 9, SS. 193—199; № 10, SS. 221—226; B a c h C. Zur Biegungsfestigkeit des Gusseisens. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1888, Bd. 32, № 48, SS. 1089—1094.

²⁾ L a t o w s k y R. Die Biegungselastizität bei Körpern von ungleicher Festigkeit. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1897, Bd. 41, № 33, SS. 941—943.

³⁾ G e u s s e n L. Studie über das Bachsche Gesetz $\varepsilon = \alpha \sigma^m$. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1898, Bd. 42, № 17, SS. 463—466.

⁴⁾ S c h u e l e W. Die Biegungslehre gerader Stäbe mit veränderlichem Dehnungskoeffizienten. Dinglers polytechnisches Journal, 1902, Jahrgang 83, Bd. 317, Heft 10, SS. 149—154.

⁵⁾ C o n s i d e r e [A.] Mémoire sur l'emploi du fer et de l'acier dans les constructions. Annales des ponts et chaussées. Mémoires et documents, série 6, 1885, année 5, tome 9, Cahier 4, pp. 574—775; 1886, Série 6, année 6, tome 11, Cahier 1, pp. 5—149.

⁶⁾ E n g e s s e r F. Widerstandsmomente und Kernfiguren bei beliebigem Formänderungsgesetz (Spannungsgesetz). Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1898, Bd. 42, № 33, SS. 903—907; № 34, SS. 927—931; F ö p p l A. Die Zugfestigkeit steinartiger Massen. Zentralblatt der Bauverwaltung, 1898, Jahrgang 18, № 23, SS. 268—270; № 23a, SS. 274—275.

⁷⁾ M e y e r E. Die Berechnung der Durchbiegung von Stäben, deren Material dem Hookeschen Gesetze nicht folgt. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1908, Bd. 52, № 5, SS. 167—173. Пепенечарка: Physikalische Zeitschrift, 1907, Jahrgang 8, № 22, 1 November, SS. 827—831.

В. Пинегин ¹⁾, Г. Герберт ²⁾ и И. Петерман ³⁾ применяли эти методы при исследовании изгиба чугунных стержней. Эти же методы можно применять к балкам, составленным из двух или большего числа разнородных материалов, как, например, к железобетонным балкам.

§ 8. Изгиб с растяжением или сжатием

Пока продольная растягивающая или сжимающая сила мала по сравнению с критической нагрузкой ⁴⁾, напряжения от растяжения или сжатия можно суммировать с напряжениями от изгиба (рис. 15). Если же продольная сила не мала по сравнению с

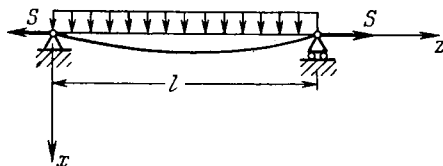


Рис. 15. Совместный изгиб и растяжение стержня.

критической нагрузкой, то необходимо принимать во внимание влияние этой силы на изгибающий момент. В таком случае совместного действия изгиба и растяжения дифференциальное уравнение упругой линии стержня принимает следующий вид:

$$EJ \frac{d^2x}{dz^2} - Sx = -M, \quad (19)$$

где S — продольная растягивающая сила, а M — изгибающий момент от поперечной нагрузки. Эта задача для различных типов нагрузки и опорных закреплений была исследована И. Перри ⁵⁾,

¹⁾ P i n e g i n W. Versuche über den Zusammenhang von Biegezugfestigkeit und Zugfestigkeit bei Gubeisen. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1906, Bd. 50, № 50, SS. 2029—2030. Перепечатка: Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1907, Heft 48, SS. 43—68.

²⁾ H e r b e r t H. Über den Zusammenhang der Biegezugelastizität des Gubeisens mit seiner Zug- und Druckelastizität. Georg-August Universität zu Göttingen, Philosophische Fakultät. Göttingen, Berlin, A. W. Schade, 1909, 47 S.

³⁾ P e t e r m a n n J. Über die Spannungen und Formänderungen von Körpern, für die das Hockesche Gesetz nicht gilt. Dissertation. Berlin, 1914, 16 S.

⁴⁾ T i m o s h e n k o S. Stabilitätsprobleme der Elastizität. Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, Bd. 4, Lieferung 1. Leipzig, J. A. Barth, 1929, SS. 81—145. [Перевод на русский язык: Тимошенко С. П. Вопросы устойчивости упругих систем. Л., Кубуч, 1935, 117 стр.]

⁵⁾ P e r r y J. Struts and tie-roads with lateral loads. Philosophical Magazine and Journal and Science, series 5, 1892, vol. 33, № 202, March, pp. 269—284.

М. Толле ¹⁾, А. Фан-дер-Флитом ²⁾ и И. Г. Бубновым ³⁾. Для равномерно распределенной нагрузки q при свободно опертых концах прогиб балки посредине пролета, согласно уравнению (19), равен

$$f = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EJ} \Phi_1(u), \quad (20)$$

где

$$u^2 = \frac{Sl^2}{4EJ}, \quad \Phi_1(u) = \frac{2 - (2 - u^2) \operatorname{ch} u}{\frac{5}{12} u^4 \operatorname{ch} u}. \quad (21)$$

Изгибающий момент посредине пролета равен

$$M_{\max} = \frac{q l^2}{8} \Psi_1(u),$$

где

$$\Psi_1(u) = \frac{2(\operatorname{ch} u - 1)}{u^2 \operatorname{ch} u}. \quad (22)$$

В случае заделанных концов прогиб посредине будет

$$f = \frac{q l^4}{384 E J} \Phi_2(u),$$

где

$$\Phi_2(u) = \frac{24}{u^4} \left[\frac{u(1 - \operatorname{ch} u)}{\operatorname{sh} u} + \frac{u^2}{2} \right]. \quad (23)$$

Изгибающие моменты на концах равны

$$M_1 = - \frac{q l^2}{12} \Psi_2(u),$$

где

$$\Psi_2(u) = \frac{3}{u^2} \frac{u - \operatorname{th} u}{\operatorname{th} u}. \quad (24)$$

Изгибающий момент посредине равен

$$M_2 = \frac{q l^2}{24} \Psi_3(u),$$

¹⁾ Tolle M. Die steife Kettenlinie. Ein wichtiger Fall der zusammengesetzten Biegungs- und Zugfestigkeit. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1897, Bd. 41, № 30, SS. 855—860.

²⁾ Фан-дер-Флит А. Изгиб сжатых и вытянутых балок с заделанными концами. Известия С.-Петербургского политехнического института, 1904, том 1, вып. 1—2, стр. 3—76; вып. 3—4, стр. 257—279.

³⁾ Boff I. G. On the stresses in a ship's bottom plating due to water pressure. Transactions of the Institution of Naval Architects, 1902, vol. 44, March, pp. 15—46; discussion: pp. 47—52. См. также: Бубнов И. Г. Строительная механика корабля. Часть II. С.-Петербург, тип. Морского министерства при Главном Адмиралтействе, 1914, стр. 545.

где

$$\psi_3(u) = \frac{6}{u^2} \left(1 - \frac{u}{\operatorname{sh} u} \right). \quad (25)$$

Некоторые значения функций φ_1 , φ_2 , ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 приведены в таблице 6.

Если на балку действует одна поперечная нагрузка, то $u=0$ и все функции равны единице. При возрастании продольной растягивающей силы значения функций убывают, т. е. продольные растягивающие силы уменьшают величину прогиба и наибольшего изгибающего момента в стержнях, подверженных поперечной нагрузке.

Таблица 6

u	φ_1	φ_2	ψ_1	ψ_2	ψ_3	u	φ_1	φ_2	ψ_1	ψ_2	ψ_3
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	6,5	0,054	0,197	0,047	0,391	0,139
0,5	0,908	0,976	0,905	0,984	0,972	7,0	0,047	0,175	0,041	0,367	0,121
1,0	0,711	0,909	0,704	0,939	0,894	7,5	0,041	0,156	0,036	0,347	0,106
1,5	0,532	0,817	0,511	0,876	0,788	8,0	0,036	0,141	0,031	0,328	0,093
2,0	0,380	0,715	0,367	0,806	0,673	8,5	0,032	0,127	0,028	0,311	0,083
2,5	0,281	0,617	0,268	0,736	0,563	9,0	0,029	0,115	0,025	0,296	0,074
3,0	0,213	0,529	0,200	0,672	0,467	9,5	0,026	0,105	0,022	0,283	0,066
3,5	0,166	0,453	0,153	0,614	0,386	10,0	0,024	0,096	0,020	0,270	0,060
4,0	0,132	0,388	0,120	0,563	0,320	10,5	0,021	0,088	0,018	0,259	0,054
4,5	0,107	0,335	0,097	0,519	0,267	11,0	0,020	0,081	0,017	0,248	0,050
5,0	0,088	0,291	0,079	0,480	0,224	11,5	0,018	0,075	0,015	0,238	0,045
5,5	0,074	0,254	0,066	0,446	0,189	12,0	0,016	0,069	0,014	0,229	0,042
6,0	0,063	0,223	0,055	0,417	0,162						

При действии на стержень сжимающей силы входящее в формулу (19) значение продольной силы S следует брать со знаком минус. Используя выражение (21) для обозначения u и в случае стержня со свободно опертыми концами, нагруженного сосредоточенным грузом P , приложенным посредине стержня, получим следующие результаты.

Прогиб посредине равен

$$f = \frac{Pl^3}{48EJ} \frac{\operatorname{tg} u - u}{\frac{1}{3} u^3}. \quad (26)$$

Изгибающий момент посредине будет

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} \frac{\operatorname{tg} u}{u}. \quad (26')$$

Для равномерно распределенной нагрузки q прогиб посередине равен

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} \frac{2 - (2 + u^2) \cos u}{\frac{5}{12} u^4 \cos u}, \quad (27)$$

а изгибающий момент посередине стержня равен

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u}. \quad (28)$$

Для равномерно нагруженной балки с заделанными концами прогиб посередине равен

$$f = \frac{ql^4}{384EJ} \frac{24}{u^4} \left[\frac{u(1 - \cos u)}{\sin u} - \frac{u^2}{2} \right]. \quad (29)$$

Изгибающие моменты по концам и в середине равны соответственно

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{ql^2}{12} \frac{\operatorname{tg} u - u}{\frac{1}{3} u^2 \operatorname{tg} u}, \\ M_2 &= +\frac{ql^2}{24} \frac{6 \left(\frac{1}{\sin u} - 1 \right)}{u^2}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Во всех рассмотренных выше случаях балки, находящейся под одновременным действием поперечных и сжимающей осевой сил, тригонометрические множители, учитывающие влияние осевой силы, приближаются к единице, если u приближается к нулю, и к бесконечности, если u стремится к величине $\pi/2$ (при свободно опертых концах) или к π (при заделанных концах). Из формулы (21) следует, что в этом случае величина сжимающей силы приближается к эйлеровой нагрузке для стержня с шарнирно закрепленными или жестко заделанными концами, причем прямолинейная форма сжатого стержня становится неустойчивой. Если через α обозначим отношение продольной силы S к эйлеровой нагрузке $EJ\pi^2/l^2$ (для опертых концов) или соответственно $4EJ\pi^2/l^2$ (для заделанных концов), то получим следующее приближенное выражение для прогиба посередине стержня с шарнирно закрепленными или жестко заделанными концами:

$$f = \frac{f_0}{1 \pm \alpha}, \quad (31)$$

где f_0 — прогиб стержня, обусловленный только поперечной

нагрузкой. Знак минус относится к случаю сжатия, плюс — к растяжению. Формула (31) служит также и для других типов нагрузки, если только все нагрузки действуют в одном направлении.

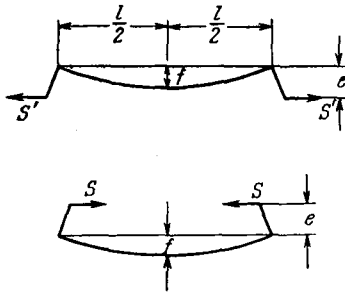


Рис. 16. Стержень под действием эксцентрично приложенной силы.

В случае эксцентрично приложенной осевой силы (рис. 16), сохраняя обозначения формулы (21), будем иметь:

для эксцентричного растяжения

$$f = e \left(f - \frac{1}{\operatorname{ch} u} \right), \quad M_{\min} = \frac{Se}{\operatorname{ch} u}, \quad (32)$$

для эксцентричного сжатия

$$f = e \left(\frac{1}{\operatorname{ch} u} - 1 \right), \quad M_{\max} = \frac{Se}{\operatorname{ch} u}. \quad (33)$$

При больших прогибах, имеющих место при изгибе тонких стержней, необходимо в уравнение (19) вместо d^2x/dz^2 подставлять точное выражение для радиуса кривизны. Аналитическое исследование этой задачи приводит нас к эллиптическим интегралам. Несколько примеров этого рода исследовал Л. Заальшютц¹⁾, Г. Рейсснер²⁾ развил графический метод, достаточно точный для практических целей.

§ 9. Изгиб и кручение призматических стержней

При малых деформациях можно суммировать напряжения от изгиба и кручения. Положим, поперечное сечение находится под действием изгибающего момента M_b и крутящего момента M_t . Тогда для круглого поперечного сечения точки наибольших нормальных напряжений $\sigma = M_b/W$ и наибольших касательных напряжений $\tau = M_t/2W$ совпадают. Соответствующие главные напряжения равны

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \\ \sigma_{\min} &= \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

¹⁾ Saalschütz L. Der belastete Stab unter Einwirkung einer seitlichen Kraft. Leipzig, B. G. Teubner, 1880, 247 S.

²⁾ Reissner H. Die Biegelinie des vollkommen elastischen Stabes infolge Längskraft und Querbelaugung in der Nähe der Knicklast. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1918, Jahrgang 9, Heft 19—20, SS. 125—131.

Наибольшие касательные напряжения будут

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{1}{2W} \sqrt{M_b^2 + M_t^2}. \quad (35)$$

Если исходить из теории прочности наибольших касательных напряжений (см. формулу (35)), то диаметр d вала определится из уравнения

$$\tau_{\text{доп}} = \frac{1}{2W} \sqrt{M_b^2 + M_t^2}, \quad (36)$$

где $\tau_{\text{доп}}$ — допускаемое касательное напряжение, причем для круглого поперечного сечения имеем

$$W = \frac{\pi d^3}{32}, \quad (37)$$

а для кольцевого

$$W = \frac{\pi D^3}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right], \quad (38)$$

где D — наружный диаметр, d — внутренний.

В случае прямоугольного поперечного сечения (рис. 17) изгибающий момент M_b разлагается на два момента M_1 и M_2 , которые действуют в плоскостях $I-I$ и $II-II$. Соответственные нормальные напряжения в точках a и b равны $\frac{6M_1}{bh^2}$ и $\frac{6M_2}{b^2h}$.

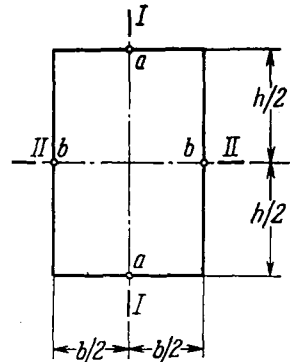


Рис. 17. Прямоугольное поперечное сечение.

Таблица 7

$\frac{h}{b}$	1	1,5	2	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
α_1	1,000	0,858	0,796	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743	0,743

Если $h > b$, то наибольшие касательные напряжения при кручении имеют место в точках b . Их величина определяется формулой

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha b^2 h}.$$

В точках a касательные напряжения при кручении равны: $\tau = \alpha_1 \tau_{\max}$. Значения коэффициентов α и α_1 для различных отношений h/b даны в табл. 7.

Пользуясь этой таблицей и формулами (34) и (35), можно вычислить главные напряжения в точках a и b , а также и максимальные касательные напряжения.

§ 10. Совместный изгиб и кручение стержней переменного сечения

При резких изменениях поперечного сечения, что часто встречается в валах круговых сечений, у выкружек имеет место значительная концентрация напряжений, которую нужно принимать во внимание. Если предположить, что точки максимальной концентрации напряжения для кручения и изгиба совпадают, то главные напряжения, соответствующие совместному действию кручения и изгиба, могут быть определены при помощи таблиц. При небольших радиусах выкружек коэффициенты концентрации имеют большие численные значения. При увеличении радиусов закруглений в точках максимальной концентрации напряжения уменьшается опасность образования трещин под влиянием знакопеременных напряжений, и тем самым повышается прочность вала.

Коленчатые валы. Рассматривая одноколенчатый вал (рис. 18) как систему жестко связанных между собой стержней m и n

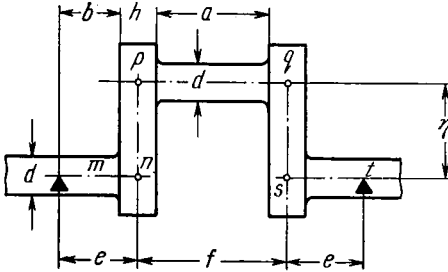


Рис. 18. Коленчатый вал.

$p q s t$, свободно опертых в точках m и t , можно на основании уравнений статики определить изгибающий и крутящий моменты в любом поперечном сечении; тогда соответствующие главные напряжения определятся, как было выше указано. Задача становится сложнее для многоколенчатых валов. Главное затруднение заключается в неопределенности опорных условий. Зазоры в подшипниках дают некоторую возможность коленчатому валу поворачиваться на опорах, и от этих отклонений зависит само положение опорных точек. Если предположить, что коленчатый вал оперт по середине подшипников и может свободно поворачиваться на опорах, то задача значительно упрощается, и тогда для определения опорных моментов и реакций опор можно составить уравнения, аналогичные уравнениям для неразрезной балки. Такие исследования

были выполнены А. Гесснером ¹⁾, С. П. Тимошенко ²⁾ и К. Бицено ³⁾.

И. Гейгер ⁴⁾ и Х. Хольцер ⁵⁾ исследовали эту же задачу в связи с крутильными колебаниями коленчатых валов. Е. Мейер ⁶⁾ и Зеельман ⁷⁾ произвели ряд опытов над кручением коленчатых валов. Большая часть поломок коленчатых валов должна быть приписана развитию трещин, появляющихся обыкновенно в точках более высокой концентрации напряжения у выкружек и отверстий. Влияние, обусловленное изменением радиуса выкружки на сопротивление усталости коленчатых валов, было исследовано Т. Стентоном и Дж. Бетсоном ⁸⁾. Эти опыты показывают, что влияние ослабления концентрации напряжения увеличивается с понижением пластичности материала.

§ 11. Балки на податливом основании

С общей теорией балок на *податливом основании* можно ознакомиться в статье И. Геккелера ⁹⁾. Если предположить, что упругое оседание *и* какой-либо точки основания пропорционально давлению

¹⁾ G e s s n e r A. Mehrfach gelagerte abgesetzte und gekröpfte Kurbelwellen. Anleitung für die statische Berechnung mit durchgeführten Beispielen aus der Praxis. Berlin, J. Springer, 1926, 95 S.

²⁾ T i m o s h e n k o S. Torsion of crankshafts. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1923, vol. 44, № 1864, pp. 653—667; [Перепечатка: T i m o s h e n k o S. P. The collected papers. New York—London—Toronto, McGraw-Hill Publishing Company Ltd., 1953, pp. 291—303.] T i m o s h e n k o S. The bending and torsion of multithrow crankshafts on many supports. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1924, vol. 45, № 1907, pp. 449—469. [Перепечатка: T i m o s h e n k o S. P. The collected papers. New York—London—Toronto, McGraw-Hill Publishing Company Ltd., 1953, pp. 344—362.]

³⁾ B i e z e n o C. B. Berekening van meervoudig statisch onbepaalde mechanissen. De Ingenieur's-Gravenhage, 1927, Jahrgang 42, 15 October, № 42, pp. 921—928.

⁴⁾ G e i g e r J. Über Verdrehungsschwingungen von Wellen, insbesondere von mehrkurbligen Schiffsmaschinenwellen. Augsburg, 1914, Walch, 80 S. Dissertation. Berlin, Technische Hochschule, 1915.

⁵⁾ H o l z e r H. Die Berechnung der Drehschwingungen und ihre Anwendung im Maschinenbau. Berlin, J. Springer, 1921, 199 S.

⁶⁾ M e y e r E. Über den Einfluß der Kröpfungsecken auf die Formänderung von gekröpften Kurbelwellen. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1909, Bd. 53, № 8, SS. 295—298.

⁷⁾ S e e l m a n n. Die Reduktion der Kurbelkröpfung. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1925, Bd. 69, № 18, SS. 601—603. См. также S a s s F r. Messung der reduzierten Länge der Kurbelwelle einer 1650 Psi-Schiffsölmachine. Maschinenbau, 1925, Jahrgang 4, Heft 25, SS. 1223—1228.

⁸⁾ B a t s o n G. G., S t a n t o n T. E. The effect on the resistance of fatigue of crankshaft of a variation on the radius of curvature of fillets. British Advisory Committee for Aeronautics. Internal Combustion Engine Sub-Committee Report, № 15, October 1917, 6 p.

⁹⁾ G e c k e l e r J. W. Biegung. Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, Bd. 3, Leipzig, J. A. Barth, 1927, SS. 130—191. См. S. 146.

p в этой точке, то $p = \beta u$, где β есть так называемый *модуль основания*. Для балки бесконечной длины ось прогибов под действием сосредоточенной силы P (рис. 19) имеет вид

$$u = \frac{P}{8\alpha^3 EJ} e^{-\alpha z} (\cos \alpha z + \sin \alpha z), \quad (39)$$

где

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{\beta}{4EJ}}, \quad (40)$$

EJ — жесткость стержня при изгибе, а ось z направлена по оси

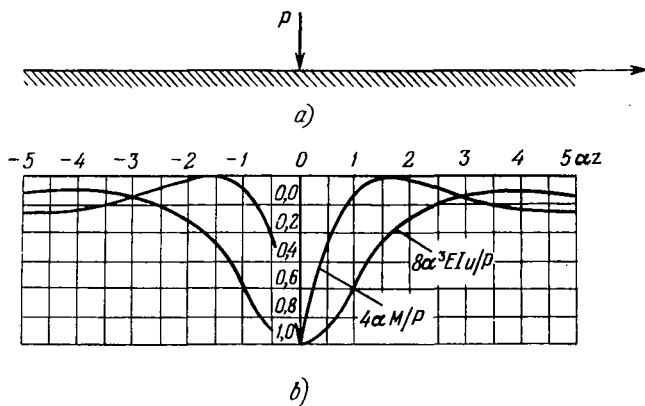


Рис. 19. Балка на податливом основании.

балки. Изгибающий момент M и поперечная сила Q в этом случае равны

$$M = -EJ \frac{d^2 u}{dz^2} = -\frac{P}{4\alpha} e^{-\alpha z} (\sin \alpha z - \cos \alpha z), \quad (41)$$

$$Q = -EJ \frac{d^3 u}{dz^3} = -\frac{P}{2} e^{-\alpha z} \cos \alpha z. \quad (42)$$

Кривые функций z , входящих в выражения (39) и (41), представлены на рис. 19. Таблицы этих функций составлены Г. Циммерманом¹⁾. Выражения (39) и (41) оказались очень полезными для вычисления напряжений в железнодорожных рельсах²⁾.

¹⁾ Z i m m e r m a n n H. Die Berechnung des Eisenbahn-oberbaues. Berlin, Ernst und Korn, 1888, 308 S. См. таблицы IIa (SS. 284—285); IIb (SS. 286—287).

²⁾ Т и м о ш е н к о С. П. К вопросу о прочности рельс. Петроград, издание Института инженеров путей сообщения, тип. А. Э. Коллинса, 1915, 42 стр.; T i m o s h e n k o S. Method of analysis of statical and dynamical stresses in rail. Verhandlungen des zweiten Internationalen Kongresses für technische Mechanik. Zürich, 12—17 September 1926. Zürich und Leipzig, O. Füssli, 1927, SS. 407—418.

Если в зависимости (39) и (41) положить $z=0$, то получим прогиб рельса балки под грузом P в следующем виде:

$$f = \frac{P}{8\alpha^3 EJ} = \frac{P\alpha}{2\beta}. \quad (43)$$

Максимальное напряжение при изгибе равно

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{P}{4\alpha M}. \quad (44)$$

Максимальное давление на шпалу будет

$$R_{\max} = a f \beta = \frac{P\alpha a}{2}, \quad (45)$$

где a — расстояние между осями шпал. Если на балку действует несколько нагрузок, то для вычисления σ_{\max} и R_{\max} можно применить принцип наложения сил.

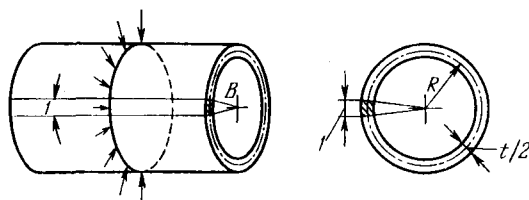


Рис. 20. Цилиндрическая труба, нагруженная равномерно распределенными радиальными сжимающими силами.

Другим примером применения этой теории служит определение напряжений в длинной трубе круглого поперечного сечения, сжимаемой равномерно распределенными радиальными силами (рис. 20).

Каждую элементарную полосу шириной, равной единице, выделенную двумя радиальными сечениями из трубы, можно рассматривать как стержень на упругом основании. Жесткость полосы на изгиб равна $Et^3/12(1-\mu^2)$, модуль основания будет Et/R^2 , где t — толщина трубы, R — ее средний радиус. Тогда из выражения (40) имеем

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 t^2}}. \quad (46)$$

Если это значение подставить в формулы (43) и (44), то получим

$$f = \frac{PR^2}{2Et} \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2t^2}},$$

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{2} \frac{P}{t^2} \sqrt[4]{\frac{R^2t^2}{3(1-\mu^2)}}, \quad (47)$$

где P — нагрузка на единицу длины окружности радиуса R . Эти результаты могут быть применены в том случае, когда на трубу насажено кольцо¹⁾.

Мы приходим к решению аналогичной задачи при определении напряжений, возникающих в стенках поперечно подкрепленных полых цилиндров, находящихся под действием равномерно распределенного давления, как, например, в подводных лодках. Этот случай исследовали К. Занден и К. Гюнтер²⁾. Теорией балки на упругом основании пользовались при решении многих других задач, как, например, вопросов о деформациях симметричных относительно оси труб, полых цилиндров и резервуаров для воды. М. Вестфаль³⁾ исследовал влияние фланцев на напряжения в трубах. Р. Лоренц⁴⁾ исследовал вопросы об усилении цилиндров ребрами и о напряжениях, вызываемых в полых цилиндрах неравномерным нагреванием⁵⁾.

Г. Мюллер-Бреслау⁶⁾ и К. Рунге⁷⁾ исследовали деформацию вертикального резервуара под влиянием гидростатического давления.

Г. Рейсснер⁸⁾, Т. Пёшль и К. Терцаги⁹⁾ изучили деформации резервуаров, толщина стенок которых непрерывно меняется.

¹⁾ C o o k G. The stresses in pipes reinforced by steel rings. Engineering, 1923, vol. 116, № 3015, October 12, pp. 477—478.

²⁾ S a n d e n K. V., G ü n t e r K. Über das Festigkeitsproblem querversteifter Hohlzylinder unter allseitig gleichmäßigem Außendruck. Werft-Reederei—Hafen (Werft und Reederei), 1920, Jahrgang I, Heft 9, SS. 189—198.

³⁾ W e s t p h a l M. Berechnung der Festigkeit loser und fester Flansche. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1897, Bd. 41, № 36, SS. 1036—1042.

⁴⁾ L o r e n z R. Achsensymmetrische Verzerrungen in dünnwandigen Hohlzylindern. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1908, Bd. 52, № 43, SS. 1706—1713.

⁵⁾ L o r e n z R. Temperaturspannungen in Hohlzylindern. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1907, Bd. 51, № 19, SS. 743—747.

⁶⁾ M ü l l e r - B r e s l a u H. F. B. Die grafische Statik der Baukonstruktionen. 2 vollständig bearbeitete Auflage, Bd. 2, Abteilung 2, Leipzig, Alfred Kröner Verlag, 1908, §§ 77—78, SS. 252—268, S. 260. [Перевод на русский язык: Мюллер-Бреслау Г. Графическая статика сооружений. Перевод с 1-го издания, том 2, часть II, С.-Петербург, изд. К. Л. Риккера, 1913, § 16, стр. 244—260.]

⁷⁾ R u n g e C. Über die Formänderung eines zylindrischen Wasserbehälters durch den Wasserdruck. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1904, Bd. 51, Heft 3, SS. 254—264.

⁸⁾ R e i s s n e r H. Über die Spannungsverteilung in zylindrischen Behälterwänden. Beton und Eisen, 1908, Jahrgang 7, Heft 6, SS. 150—155.

⁹⁾ P ö s c h l T., T e r z a g h i K. Berechnung von Behältern nach neueren analytischen und graphischen Methoden. Berlin, J. Springer, 1913, 80 S. См. SS. 7—10.

Эта теория может быть применена и к балкам на упругих опорах, расположенных на разных расстояниях, и к балкам, несущим систему поперечных стержней, лежащих на равных друг от друга расстояниях (рис. 21). Положим, имеем систему вертикальных одинаково нагруженных балок, отстоящих на равных друг от друга расстояниях. Длина балок l_1 , жесткость их на изгиб EJ_1 . Все эти балки поддерживаются поперечным стержнем AB длиной l и жесткостью на

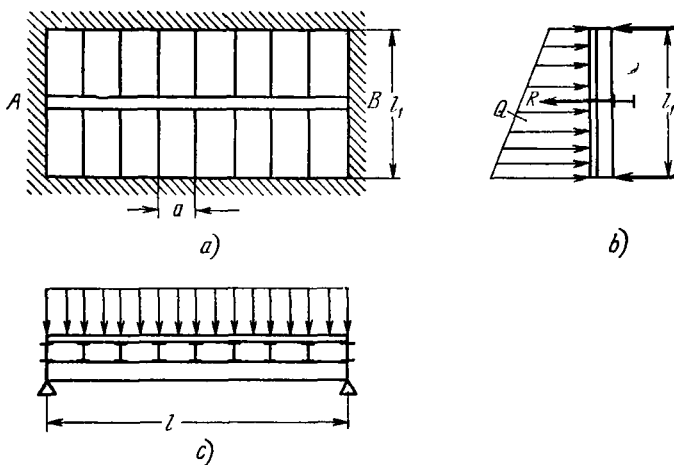


Рис. 21. Вертикальные балки, поддерживаемые одной поперечной балкой.

изгиб EJ . Пусть Q — нагрузка на вертикальные балки, а R — реакция поперечной балки, тогда прогиб обеих балок в точках их соприкосновения равен

$$u = mQ - nR, \tag{a}$$

где m и n — постоянные величины, зависящие от размеров балок, от положения поперечной балки и от способа распределения нагрузки. Если, например, вертикальные балки поддерживаются поперечным стержнем посередине их длины и нагрузка Q распределяется по закону трапеции (рис. 21, *b*), то имеем

$$m = \frac{5}{384} \frac{l_1^3}{EJ_1}, \quad n = \frac{l_1^3}{48EJ_1}.$$

Нагрузку поперечной балки силами R найдем из уравнения (а)

$$R = \frac{mQ}{n} - \frac{u}{n}.$$

Если расстояние a между вертикальными балками мало, то без значительной погрешности сосредоточенные нагрузки R можно

заменить равномерно распределенной нагрузкой q , которую определим из уравнения

$$q = \frac{R}{a} = \frac{mQ}{na} - \frac{u}{na}.$$

Отсюда видно, что поперечный стержень AB находится в таких же условиях, как и в случае, когда он загружен равномерно распределенной нагрузкой $q_0 = mQ/na$ и лежит на упругом основании, модуль которого равен $\beta = 1/na$. Прогиб оси стержня определится в этом случае из общего уравнения для балок, расположенных на упругом основании, находящихся под действием равномерно распределенной нагрузки

$$EJ \frac{d^4 u}{dz^4} = q_0 - \beta u. \quad (48)$$

Из этого уравнения получается следующее выражение для прогиба и изгибающего момента посредине стержня ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{q_0 l^4}{64EJk^4} \left(1 - \frac{2 \cos k \operatorname{ch} k}{\cos 2k + \operatorname{ch} 2k} \right), \\ M &= \frac{q_0 l^2}{8} \frac{2 \sin k \operatorname{sh} k}{k^2 (\cos 2k + \operatorname{ch} 2k)}, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

где $k = \beta l/2$.

§ 12. Применение тригонометрических рядов

Уравнение упругой линии изогнутого стержня с шарнирно закрепленными концами, находящегося под действием поперечных и продольных сил (рис. 22), может быть представлено следующим рядом ²⁾:

$$x = a_1 \sin \frac{\pi z}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi z}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi z}{l} + \dots \quad (50)$$

Потенциальная энергия изгиба и сближение концов стержня

¹⁾ Бубнов И. Г. Строительная механика корабля. Часть II. С.-Петербург, тип. Морского министерства при Главном Адмиралтействе, 1914, стр. 368.

²⁾ Тимошенко С. П. К вопросу о продольном изгибе. Известия Киевского политехнического института, 1908, год 8, книга 2, отдел инж.-мех., стр. 181—212. [Перепечатка: Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек, «Наука», 1971, стр. 166—190.] Тимошенко С. Etude de la flexion des barres au moyen d'une méthode approximative. Annales des travaux publics de Belgique, 1914, 2 serie, tome 19, 2 Fascicule-Avril, pp. 263—296. [Перепечатка: Тимошенко С. P. The collected papers. New York—London—Toronto, McGraw-Hill publishing company Ltd., 1953, pp. 237—263.] См. также Westergaard H. M. Buckling of elastic structures. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 1921, vol. 47, № 9, pp. 453—533.

при изгибе определяются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2x}{dz^2} \right)^2 dz = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^4 a_n^2, \\ \Lambda &= \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 dz = \frac{\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 a_n^2. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Пользуясь принципом *возможных перемещений*, можно найти значение коэффициентов a_1, a_2, a_3, \dots для любого рода поперечной

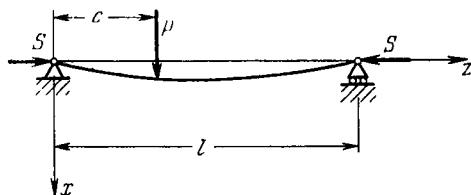


Рис. 22. Стержень, нагруженный поперечными и продольными силами.

нагрузки. Например, в случае одного сосредоточенного груза P коэффициент a_n определяется из уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial a_n} da_n = P da_n \sin \frac{n\pi c}{l} + S \frac{\partial \Lambda}{\partial a_n} da_n,$$

откуда имеем

$$a_n = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{n^2 (n^2 - \alpha)},$$

где

$$\alpha = \frac{Sl^2}{EJ\pi^2}.$$

Подставляя полученные значения в уравнение (50), получим уравнение упругой линии

$$x = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi z}{l}}{n^3 (n^2 - \alpha)}. \quad (52)$$

Если нагрузка приложена посредине, то вызываемый ею прогиб равен

$$f = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \left[\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{9(9-\alpha)} + \frac{1}{25(25-\alpha)} + \dots \right].$$

Если ограничиться только первым членом этого выражения, то уже получим вполне достаточную точность.

Подставив в уравнение (52) вместо P значение $q dz$ и проинтегрировав его в пределах от $c=0$ до $c=l$, получим выражение для упругой линии для равномерно нагруженного стержня

$$x = \frac{4ql^4}{EJ\pi^3} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi z}{l}}{n^3(n^2-\alpha)}. \quad (53)$$

Тогда прогиб посредине стержня равен

$$f = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{n=\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3(n^2-\alpha)}.$$

Этот же ряд (50) можно применить к балкам на упругом основании с шарнирно закрепленными концами. При определении коэффициентов следует в этом случае к потенциальной энергии изгиба стержня прибавить еще потенциальную энергию деформации основания. Тогда получим

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2x}{dz^2} \right)^2 dz + \frac{\beta}{2} \int_0^l x^2 dz.$$

Для равномерно распределенной нагрузки уравнение упругой линии получит следующий вид:

$$x = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi z}{l}}{n^5 - n^3\alpha \frac{\pi\beta l^4}{EJ\pi^4}}. \quad (54)$$

Если вместо сжатия имеет место растяжение, то в приведенных выше выражениях для упругой линии надо вместо α подставить $-\alpha$. Если все нагрузки имеют одно направление, то первый член ряда (50) всегда определяет максимальный прогиб с достаточной точностью. Этим оправдывается применение уравнения (31) в § 8.

Тригонометрический ряд может также применяться и в том случае, когда стержень имеет небольшую начальную кривизну. Пусть уравнение

$$x_0 = b_1 \sin \frac{\pi z}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi z}{l} + b_3 \sin \frac{3\pi z}{l} + \dots \quad (55)$$

определяет начальную кривизну, а уравнение (50) определяет дополнительный прогиб, вызываемый нагрузкой. Для определения потенциальной энергии изгиба воспользуемся уравнением (51). При этом

$$\Lambda = \int_0^l \left[\frac{d}{dz} (x_0 + x) \right]^2 dz - \int_0^l \left(\frac{dx_0}{dz} \right)^2 dz = \frac{\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 a_n^2 + \frac{\pi^2}{2l} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 a^n b_n.$$

Указанный выше метод дает для одного сосредоточенного груза P следующее уравнение упругой линии:

$$x = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi z}{l}}{n^2 (n^2 - \alpha)} + \alpha \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_n \sin \frac{n\pi z}{l}}{n^2 - \alpha}. \quad (56)$$

Первый ряд уравнения (56) тождествен с уравнением (52), а второй представляет влияние начальной кривизны на форму упругой линии.

При отсутствии поперечных сил уравнение упругой линии для случая чистого продольного сжатия будет иметь следующий вид:

$$x = \alpha \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b \sin \frac{n\pi z}{l}}{n^2 - \alpha}. \quad (57)$$

При продольном растяжении в уравнении (57) вместо α нужно подставить $-\alpha$.

§ 13. Стержни малой плоской кривизны

Ниже будем предполагать, что одна из главных осей инерции поперечного сечения и внешние силы лежат в плоскости кривизны стержня, а размеры поперечного сечения малы по сравнению с длиной стержня и с радиусом его кривизны. В этом случае без значительной погрешности можно допустить, что распределение напряжений от изгиба в кривом стержне будет таким же, как и в прямом стержне, а изменение угла между двумя смежными поперечными сечениями, находящимися на расстоянии ds , будет $M ds/EJ$. Если не учитывать влияния сдвигающих сил, то для определения перемещения любой точки A кривого стержня (рис. 23) будут служить следующие уравнения:

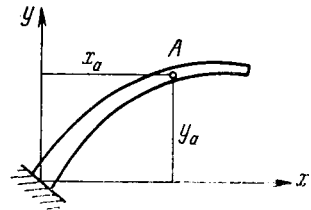


Рис. 23. Изгиб кривого стержня.

$$\delta x = \int_0^s \frac{M (y_a - y)}{EJ} ds; \quad \delta y = \int_0^s \frac{M (x - x_0)}{EJ} ds. \quad (58)$$

Угол поворота поперечного сечения в сечении A равен

$$\delta \varphi = \int_0^s \frac{M ds}{EJ}. \quad (59)$$

Эту теорию изгиба криволинейных стержней разработали Л. Навье ¹⁾, Б. Сен-Венан ²⁾ и Ж. Бресс ³⁾.

При рассмотрении кольца эллиптического очертания, подверженного внутреннему равномерно распределенному давлению p , находим ⁴⁾ для изгибающего момента в каком-либо поперечном сечении следующее выражение (рис. 24):

$$M = M_0 + pa(a-x) - \frac{py^2}{2} - p \frac{(a-x)^2}{2} = \\ = M_0 + \frac{p}{a}(a^2 - x^2 - y^2),$$

где M_0 и pa — изгибающий момент и продольная сила в поперечном сечении B . Пользуясь уравнением (59) и имея в виду, что угол между поперечными сечениями B и C при деформации не изменяется, получаем

$$M_0 = -\frac{pa^2}{2} + \frac{p}{2l}(J_x + J_y), \quad (60)$$

Рис. 24. Изгиб эллиптического кольца.

где l — длина одной четверти периметра кольца, J_x и J_y — моменты инерции дуги BAC относительно осей x и y ⁵⁾. Уравнение (60) можно

¹⁾ Navier L. Note sur la flexion d'une pièce courbe dont la figure naturelle est circulaire. Annales des ponts et chaussées, série I, Mémoires et documents, 1831, pp. 428—436; см. также Navier L. Résumé des leçons données à l'école royale des ponts et chaussées. Sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. Première partie. Paris, F. Didot, 1826, 428 p. См. p. 243.

²⁾ Saint Venant B. Leçons de mécanique appliquées faites par intérim. Paris, cours lithographie, 1837—1838. Ecole des ponts et chaussées, 48 p.+24 p.+4 p. Извлечения из этого важного сочинения см. Todhunter I., Pearson K. A history of the theory of elasticity and of the strength of materials, vol. 1, Cambridge, University Press, 1886, pp. 833—841.

³⁾ Bresse J. A. Ch. Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes. Paris, Mellet — Bachelier, Garilhon — Gœuryet Dalmont, 1854, 269 p. См. pp. 60—67 (Chapitre II, §§ 1—2).

⁴⁾ Bresse J. A. Ch. Cours de mécanique appliquée professé à l'Ecole des ponts et chaussées Ouvrage auquel l'Académie des sciences a décerné le prix Poncelet (1874), 3 édition. Paris, Gauthier-Villars, 1880, p. 493.

⁵⁾ В дальнейшем изгибом кольца занимались: Résal H. Développements sur la question de mouvement d'un point matériel sur une surface (Liouville). Journal des mathématiques pures et appliquées, série 3, 1877, tome 3, pp. 79—98; Marbec M. Théorie de l'équilibre d'une lame élastique soumise à une pression uniforme. Bulletin de l'Association technique maritime, 1908, № 19, pp. 181—209; Goupil A. Sur le renforcement d'ouvrages en de pièces en fonte au moyen du ciment armé. Annales des ponts et chaussées, I Partie: Mémoires et documents, série 9, 1912, année 82, tome 2, № 20, Mars — Avril, pp. 395—398; Mayer-Mita R. Die Berechnung dünnwandiger ovaler (im besonderen elliptischen) Röhren gegen gleichförmigen Normaldruck. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1914, Bd. 58, № 17, SS. 649—654.

применять всегда, когда кольцо имеет две оси симметрии. Его можно использовать также и при наружном давлении, в этом случае нужно только переменить знак у момента M_0 . Рассматривая этот случай, Ж. Бресс показал, что при незначительном эксцентриситете эллипса необходимо принять во внимание влияние эксцентриситета на деформацию. Таким способом Ж. Бресс ¹⁾ определил величину предельного давления p_h , при котором сплющивается круговое кольцо под влиянием равномерного внешнего сжатия ²⁾.

При деформации арок продольные и касательные силы оказывают большое влияние на деформацию. В таких случаях в выражении (58) и (59) нужно вводить соответствующие члены ³⁾.

При изучении прочности маховиков и влияния на них спиц Е. Винклер ⁴⁾ и Ф. Грасгоф ⁵⁾ пользовались теорией стержней малой кривизны. Р. Бредт ⁶⁾, Г. Бауэр ⁷⁾, Дж. Лонгботтом ⁸⁾ и К. Рейнгардт ⁹⁾ вели дальнейшую разработку этого вопроса.

В своих исследованиях Г. Бауэр допускал, что длина спицы равна радиусу R центральной оси обода. Он нашел следующее выражение для растягивающей силы S в спицах у обода и для изгибающего

¹⁾ B r e s s e J. A. C h. Course de mécanique appliquée professé à l'Ecole impériale des ponts et chaussées, par M. Breese. Première partie. Résistance des matériaux et stabilité des constructions. Paris, Mallet — Bachelier, Imprimeur-Libraire, 1859, 471 pp. См. pp. 306—309. То же Troisième édition. Paris. Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire, 1880, 680 pp. См. pp. 490—493.

²⁾ T i m o s c h e n k o S. Stabilitätsprobleme der Elastizität. Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, Bd. 4, Lieferung 1, Leipzig, J. A. Barth, 1929, SS. 81—145. См. S. 119. [Перевод на русский язык «Проблемы упругой устойчивости» в сборнике: Т и м о ш е н к о С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Изд-во «Наука», М., 1971, стр. 553—643. См. стр. 606.]

³⁾ Этот вопрос разрабатывался разными авторами. См.: W i n k l e r E. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik. I Theil. Prag, Verlag von H. Dominicus, 1867, 388 S. См. S. 293; W e y r a u c h J. J. Elastische Bogenträger einschließlich der Gewölbe. Eisenbetonbogen und Bogenfachwerke. 3. Auflage. Stuttgart, K. Wittwer, 1911, 529 S.; M o r s c h E. Berechnung von eingespannten Gewölben. Schweizerische Bauzeitung, 1906, Bd. 47, № 7, SS. 83—85, 89—91; T i m o s h e n k o S. Calcul des arcs élastiques. Paris, Librairie polytechnique, Ch. Béranger, Editeur, 1922, 71 p. [Русский перевод: Расчет упругих арок. Л.— М., Госстройиздат, 1933, 124 стр.]

⁴⁾ W i n k l e r E. Festigkeit der Röhren, Dampfkessel und Schwungringe. Der Civilingenieur, 1960, Neue Folge, Bd. 6, SS. 325—362, 427—462.

⁵⁾ G r a s h o f F. Theorie der Elastizität und Festigkeit mit Bezug auf ihre Anwendungen in der Technik. 2. Auflage, Berlin, K. Gaertner, 1898, 408 S. См. S. 278.

⁶⁾ B r e d t R. Festigkeit der Schwungräder. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1901, Bd. 45, № 8, SS. 267—273.

⁷⁾ B a u e r J. H. Die Festigkeitsberechnung der Schwungräder. Dinglers polytechnisches Journal, 1908, Bd. 323, Jahrgang 89, Heft 23, SS. 353—355; Heft 24, SS. 377—380; Heft 25, SS. 390—393; Heft 26, SS. 403—404.

⁸⁾ L o n g b o t t o m J. G. Communication to article by Sutton Puppard A. J.: («The stresses in a uniformly rotating fly-wheel». Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1924, № 1, pp. 25—42), там же pp. 43—51.

⁹⁾ R e i n h a r d t K. Festigkeitsberechnung der Schwungräder mit rechteckigem Kranzquerschnitten auf Beanspruchung durch die Fliehkräfte. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1920, Heft 226, 109 S.

момента M_0 в сечении обода посередине между двумя спицами:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{2}{3} \frac{\omega^2 q R^2}{g} \frac{1}{\frac{FR^2}{J} f_2(\alpha) + f_1(\alpha) + \frac{F}{F_1}}; \\ M_0 &= \frac{SR}{2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right), \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

где 2α — угол между двумя спицами; F, F_1 — площади поперечных сечений обода и спицы; J — момент инерции поперечного сечения обода; g — вес единицы длины обода; ω — угловая скорость вращения обода:

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= \frac{1}{\alpha \sin^2 \alpha} \left(\frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right), \\ f_2(\alpha) &= \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} \left(\frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{1}{2\alpha}. \end{aligned}$$

С. Барраклаф¹⁾ экспериментально исследовал деформацию, а Р. Поссельт²⁾ — распределение напряжений во вращающихся колесах.

Г. Резаль³⁾ исследовал вопрос о напряженном состоянии в ободе и бандажах, натягиваемых на колеса в горячем состоянии.

Т. Вейтбрехт⁴⁾ исследовал прочность обода с очень большим числом спиц. М. Стоун⁵⁾ определил возникающие от постоянной нагрузки напряжения и деформации в больших рамах динамомашин. Г. Линзенман⁶⁾ исследовал напряжения, возникающие в таких рамах под влиянием магнитных сил.

В качестве дальнейшего примера применения теории стержней малой кривизны укажем на теорию *самопружинящихся поршневых колец*⁷⁾. Для кривых стержней с круговой осевой линией дифферен-

¹⁾ Barraclough S. H. An optical method of determining the deformations of a rotating fly-wheel. Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 1902, vol. 150, Paper № 3329, sect. 2, pp. 398—408.

²⁾ Posselt R. Versuche über den Spannungsverlauf in Rädern, welche durch eine Umfangskraft beansprucht sind. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1925, Bd. 5, Heft 2, SS. 89—101.

³⁾ Résal H. Recherches sur les tensions élastiques développées par le serrage des bandages des roues du matériel des chemins de fer. Annales des mines, 1859, tome 16, 5 serie, pp. 271—286.

⁴⁾ Weitbrecht Th. Über die elastische Deformation eines kreisförmigen Rings. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1905, Bd. 52, Heft 4, SS. 383—401.

⁵⁾ Stone M. Stresses and deflections in large dynamo frames due to dead load. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1927, vol. 48, № 2021, pp. 679—697 (discussion: pp. 698—703).

⁶⁾ Linzenmann H. Die elastische Linie der Gehäuse von Drehstrommaschinen mit grossen Durchmessern. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1906, Bd. 53, Heft 3, SS. 245—274.

⁷⁾ Résal H. Du profil rationnel des segments des pistons. Annales des mines, 1874, 7 serie, tome 5, SS. 38—50; Résal H. Du profil rationnel des segments d'un

циальное уравнение ¹⁾ для радиального перемещения имеет вид

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{Mr^2}{EJ}, \quad (62)$$

где θ — центральный угол; r — радиус осевой линии; M — изгибающий момент. Общее решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$u = \left(c_1 - \int \frac{Mr^2}{EJ} \sin \theta d\theta \right) \cos \theta + \left(c_2 + \int \frac{Mr^2}{EJ} \cos \theta d\theta \right) \sin \theta. \quad (63)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 и статически неопределимые величины получим из условий закрепления концов стержня ²⁾ и из условия нерастяжимости оси кольца

$$d\omega/d\theta = u,$$

где ω — касательное перемещение.

Очень удобным оказывается ³⁾ применение тригонометрических рядов в случае замкнутого кругового кольца. В самом общем случае радиальные перемещения выражаются в виде следующего ряда:

$$u = a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \dots + b_1 \sin \theta + b_2 \sin 2\theta + \dots,$$

а касательные перемещения получаются из условия нерастяжимости

$$\omega = a_1 \sin \theta + \frac{1}{2} a_2 \sin 2\theta + \dots - b_1 \cos \theta - \frac{1}{2} b_2 \cos 2\theta - \dots$$

piston de machine à vapeur. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1871, tome 73, № 9, 2 Semestre, pp. 542—543. См. также R e i n h a r d t K. Selbstspannende Kolbenringe. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1901, Bd. 45, № 7, SS. 232—237; № 11, SS. 373—379; F r i e d m a n n H. Selbstspannende Kolbenringe. Zeitschrift des Osterreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines, 1908, Jahrgang 60, № 39, SS. 632—635; P o l l e r t O. Einneues Verfahren zur Berechnung und Anfertigung selbstspannender Kolbenringe. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1924, Bd. 68, № 11, SS. 253—254.

¹⁾ Это уравнение было выведено Ж. Буссине: B o u s s i n e s q J. Résistance d'un anneau à la flexion, quand sa surface extérieure supporte une pression normale, constante par unité de longueur de sa fibre moyenne. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1883, 2 Semestre, tome 97, № 16, pp. 843—848.

²⁾ Различные задачи этого рода были рассмотрены: S a i n t V e n a n t B. Mémoire sur le calcul de la résistance et de la flexion des pièces solides à simple ou à double courbure, en prenant simultanément en considération les divers efforts auxquels elles peuvent être soumises dans tous les sens. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1843, tome 17, № 18, pp. 942—954; № 19, pp. 1020—1031; L a m b H. On the flexure and the vibrations of a curved bar. Proceedings of the London Mathematical Society, series 1, 1889 [May 10, 1888], vol. 19, № 328, pp. 365—376; M a y e r R. Über Elastizität und Stabilität des geschlossenen und offenen Kreisbogens. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1913, Bd. 61, Heft 3, SS. 246—230.

³⁾ Strutt John William (L o r d R a y l e i g h). The theory of sound. 2nd edition. London and New York, MacMillan and Co., vol. I, 1894, chapter X, pp. 352—394. [Русский перевод: Стрэтт Дж. В. (Лорд Рэлей). Теория звука. Том I, М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1940, глава X, стр. 406—444.]

Потенциальная энергия изгиба равна

$$V = \frac{EJ}{2r^3} \int_0^{2\pi} \left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2} \right)^2 d\theta = \frac{EJ\pi}{2r^3} \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1)^2 (a_n^2 + b_n^2). \quad (64)$$

Коэффициенты $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ в каждом отдельном случае могут быть определены согласно началу возможных перемещений. Например, в случае кругового кольца, сжимаемого двумя равными силами P , приложенными в двух противоположных точках $\theta=0$ и $\theta=\pi$, находим коэффициенты a_n для четных n из уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial a_n} \delta a_n = 2P\delta a_n,$$

откуда

$$a_n = \frac{2Pr^3}{EJ\pi(n^2 - 1)^2}.$$

Коэффициент a_n для нечетных n и все коэффициенты b_n будут в этом случае нулевыми, поэтому будем иметь

$$u = \frac{2Pr^3}{EJ\pi} \sum_{n=2, 4, 6, \dots} \frac{\cos n\theta}{(n^2 - 1)^2}. \quad (65)$$

Если, кроме двух сосредоточенных сил, действует еще равномерно распределенное внешнее давление p , которое вызывает в кольце сжимающую силу $S = pr$, то радиальное перемещение мы найдем из уравнения

$$u = \frac{2Pr^3}{EJ\pi} \sum_{n=2, 4, 6, \dots} \frac{\cos n\theta}{(n^2 - 1)^2 - \frac{Sr^2}{EJ}(n^2 - 1)}. \quad (66)$$

Мы видим, что если сила S приближается к критической величине $S_{кр} = 3EJ/r^2$, то перемещения u возрастают очень быстро.

§ 14. Приближенные теории стержней большой кривизны

Если размеры поперечного сечения кривого стержня не малы по сравнению с радиусом кривизны центральной оси, то допущение о линейном законе распределения напряжений по поперечному сечению не дает больше достаточной точности, и потому является необходимым принимать во внимание изменение длины волокон в зависимости от расстояния их до центра кривизны. Е. Винклер ¹⁾ и Г. Ре-

¹⁾ W i n k l e r E. Formänderung und Festigkeit gekrümmter Körper, insbesondere der Ringe. Der Civilingenieur, 1858, Neue Folge, Bd. 4, SS. 232—246; см. также W i n k l e r E. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik. Theil I. Prag, Verlag von H. Dominicus, 1867, 388 S. См. гл. XV, SS. 130—143.

заль ¹⁾ положили начало развитию теории изгиба стержней большой кривизны, а Ф. Грасгоф ²⁾, К. Пирсон ³⁾ и Р. Бредт ⁴⁾ разработали приближенную теорию изгиба таких стержней. Эта теория исходит из предположения, что поперечные сечения при изгибе остаются плоскими и нормальными к изогнутой оси стержня.

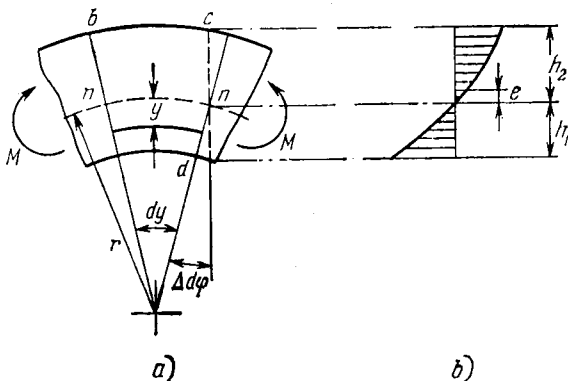


Рис. 25. Чистый изгиб стержня большой кривизны.

Рассмотрим (рис. 25) случай чистого изгиба в плоскости кривизны центральной линии в предположении, что одна из главных осей поперечного сечения лежит в этой же плоскости. Пусть $d\varphi$ — угол между двумя смежными поперечными сечениями ab и cd ; а $\Delta d\varphi$ — угол поворота сечения cd относительно ab и r — радиус кривизны нейтрального слоя. Тогда относительное удлинение какого-либо волокна, лежащего на расстоянии y от нейтрального слоя, равно $\varepsilon = y\Delta d\varphi / (r - y) d\varphi$.

Пренебрегая нормальным давлением между волокнами, получим

$$\sigma = \frac{Ey\Delta d\varphi}{(r - y) d\varphi}. \quad (67)$$

Распределение напряжений по высоте поперечного сечения подчиняется гиперболическому закону (рис. 25), а нейтральный слой смещается от центра тяжести поперечного сечения по направлению к центру кривизны. Для определения $\Delta d\varphi$ и r применим следующие

¹⁾ R é s a l H. Formules pour le calcul de la résistance des chaînes à maillons plats. Annales des mines, Mémoires, sixième série, pp. 617—630.

²⁾ G r a s h o f f F. Theorie der Elastizität und Festigkeit mit Bezug auf ihre Anwendungen in der Technik. 2. Auflage. Berlin. K. Gärtner, 1878, S. 251.

³⁾ T o d h u n t e r I., P e a r s o n K. A history of the theory of elasticity and of the strength of materials, vol. 2, part 1, Cambridge, University Press, 1893, p. 422.

⁴⁾ B r e d t R. Elastizität und Festigkeit krummer Stäbe. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1895, Bd. 39, № 35, SS. 1054—1059; № 36, SS. 1074—1078.

уравнения статики:

$$\left. \begin{aligned} \int_F \sigma dF &= \frac{E\Delta}{d\varphi} \int_F \frac{y dF}{r-y} = 0, \\ \int_F \sigma y dF &= \frac{E\Delta}{d\varphi} \int_F \frac{y^2 dF}{r-y} = M, \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

откуда

$$\int_F \frac{y dF}{r-y} = 0, \quad \int_F \frac{y^2 dF}{r-y} = Fe, \quad (69)$$

где F — площадь поперечного сечения; e — расстояние нейтральной оси от центра тяжести поперечного сечения. Из второго уравнения (68) и уравнения (69) получим

$$\frac{\Delta}{d\varphi} = \frac{M}{EF e}. \quad (70)$$

Уравнение (67) принимает следующий вид:

$$\sigma = \frac{My}{(r-y) Fe}. \quad (71)$$

Если определить r из первого уравнения (69), то можно найти напряжение по формуле (71). Решение уравнения (69) не представляет затруднений. Для таких поперечных сечений, как прямоугольник, треугольник, трапеция, круг, получаем простые формулы. Для решения задач в более сложных случаях разработаны аналитические и графические приемы¹⁾.

Для прямоугольного поперечного сечения значение r получится из уравнения (69): $r = \frac{h}{\ln r_1/r_0}$, где r_1 и r_0 — радиусы кривизны внешнего и внутреннего контуров стержня. Для определения смещения нейтральной оси относительно центра поперечного сечения можно воспользоваться следующим приближенным выражением:

$$e = R - r = \frac{h^2}{12R} \left[1 + \frac{4}{15} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 \right],$$

где $R = (r_1 + r_0)/r$ — радиус центральной оси стержня.

¹⁾ B a n t l i n A. Beitrag zur Bestimmung der Biegungsspannung in gekrümmten stabförmigen Körpern. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1901, Bd. 45, № 5, SS. 164—168; T o l l e M. Zur Ermittlung der Spannungen krummer Stäbe. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1903, Bd. 47, № 25, SS. 884—890; W e s t p h a l M. Festigkeit von ovalen Röhren gegen inneren oder äußeren Flüssigkeitsdruck. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1908, Bd. 52, № 52, SS. 2076—2077; 1909, Bd. 53, № 10, SS. 383—386.

Как можно заключить из гиперболического закона распределения напряжений (рис. 25) для прямоугольного поперечного сечения, — напряжения на вогнутой стороне больше, нежели на выпуклой. Кроме того, напряжение на вогнутой стороне больше напряжений, которые получаются, исходя из формул изгиба прямого стержня.

Таблица 8

$\frac{R}{h}$	Гиперболический закон для напряжений	Линейный закон для напряжений	$\frac{R}{h}$	Гиперболический закон для напряжений	Линейный закон для напряжений
1	$\sigma_{\max} = 9,2 \frac{M}{FR}$ $\sigma_{\min} = -4,2 \frac{M}{FR}$	$6 \frac{M}{FR}$ $-6 \frac{M}{FR}$	4	$\sigma_{\max} = 26,2 \frac{M}{FR}$ $\sigma_{\min} = -22,2 \frac{M}{FR}$	$24 \frac{M}{FR}$ $-24 \frac{M}{FR}$
2	$\sigma_{\max} = 14,4 \frac{M}{FR}$ $\sigma_{\min} = -10,25 \frac{M}{FR}$	$12 \frac{M}{FR}$ $-12 \frac{M}{FR}$	5	$\sigma_{\max} = 62 \frac{M}{FR}$ $\sigma_{\min} = -58 \frac{M}{FR}$	$60 \frac{M}{FR}$ $-60 \frac{M}{FR}$
3	$\sigma_{\max} = 20,2 \frac{M}{FR}$ $\sigma_{\min} = -16,1 \frac{M}{FR}$	$18 \frac{M}{FR}$ $-18 \frac{M}{FR}$			

В табл. 8 приведены некоторые численные значения напряжений, соответствующие различным отношениям радиуса центральной оси R стержня к высоте его поперечного сечения h . Из этой таблицы следует, что разница между максимальными напряжениями, подсчитанными по гиперболическому закону (Е. Винклер и Г. Резаль), и напряжениями, подсчитанными по линейному закону (Л. Навье), уменьшается с увеличением R/h . Для $R/h \geq 10$ эта разница меньше 3%. Эти данные оправдывают применение линейного закона для расчета напряжений в таких стержнях, как арки. Для того чтобы сделать численные значения σ_{\max} и σ_{\min} между собой равными, нужно применять трапецеидальные или тавровые поперечные сечения, у которых центр тяжести смещен от середины высоты по направлению к центру кривизны.

В общем случае изгиба изменение угла между двумя смежными поперечными сечениями зависит не только от изгибающего момента, но также и от нормальной силы N ¹⁾. Тогда вместо уравнения (70)

¹⁾ Сжимающая сила считается положительной.

получим

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{EF_e} + \frac{N}{EF}. \quad (72)$$

Рассматривая случай кругового кольца, сжимаемого двумя равными силами P , приложенными по концам вертикального диаметра (рис. 26), будем иметь

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{M}{EF_e} + \frac{N}{EF} \right) d\varphi = 0, \quad (73)$$

откуда получим величину изгибающего момента в поперечном сечении m_1n_1 :

$$M_0 = -\frac{PR}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \frac{e}{R} \right). \quad (74)$$

Третий член выражения, заключенного в скобки, представляет влияние продольной силы на величину момента M_0 . Для поперечного сечения m_1n_1 получим

$$M_1 = \frac{PR}{2} + M_0 = \frac{PR}{\pi} \left(1 - \frac{e}{R} \right). \quad (75)$$

Рис. 26. Сжатие кругового кольца.

Е. Винклер ¹⁾ исследовал прочность эллиптических звеньев цепей и колец, состоящих из двух прямых и двух полукруговых частей. А. Ватцингер ²⁾ разработал применение этой приближенной теории к определению напряжений в замкнутых головках шатунов. К. Бах ³⁾, Е. Андрес ⁴⁾ и П. Филлунгер ⁵⁾ исследовали распределение напряжений в крюках.

¹⁾ W i n k l e r E. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik. Theil I. Prag, Verlag von H. Dominicus, 1877, 388 S. См. S. 174. См. также S u t t o n P i p p a r d A. J., M i l l e r C. V. The stresses in links and their alteration in length under load. The Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1923, № 6, pp. 1153—1167.

²⁾ W a t z i n g e r A. Die Spannungsverteilung in geschlossenen Schubstangenköpfen. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1909, Bd. 53, № 26, SS. 1033—1036.

³⁾ B a c h C. Elastizität und Festigkeit. Die für die Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmässige Grundlage. 6 Auflage. Berlin, J. Springer, 1911, 642 S. См. § 55, SS. 482—486.

⁴⁾ A n d r e w s E. S. On a theory of the stresses in crane and coupling hooks with experimental comparison, with existing theory (with some assistance from Karl Pearson). Drapers company research memoirs. Technical series 1. London, Dujau and Co., 1904, 27 p.

⁵⁾ F i l l u n g e r P. Ein Beitrag zur Lösung der Hakenproblems. Auf Grund einer Bemerkung von K. Wieghardt. Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Abteilung IIa; Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik, 1915, Bd. 124, Heft 1, SS. 91—100.

Многие авторы пытались уточнить вышеприведенную теорию кривых стержней. Среди них нужно назвать И. А. Евневича ¹⁾, Г. Мюллер-Бреслау ²⁾ и Е. Андреса. Они принимали во внимание поперечное растяжение, но считали нормальные напряжения между продольными волокнами равными нулю, из-за чего уравнения равновесия не удовлетворялись. К. Пфлейдерер ³⁾ учитывал радиальное сжатие между продольными волокнами, но пренебрегал радиальным перемещением.

Сравнение всех этих результатов с точной теорией показывает, что эти позднейшие решения не дают большей точности, чем простая теория Е. Винклера и Г. Резаля.

§ 15. Точные решения задачи изгиба стержней большой кривизны

Х. С. Головин ⁴⁾ дал точное решение задачи об изгибе кривого стержня с очень узким прямоугольным поперечным сечением, рассмотрев случаи чистого изгиба и изгиба сосредоточенной силой, приложенной на конце стержня. Для чистого изгиба составляющие

¹⁾ Евневич И. А. Руководство к изучению законов сопротивлений строительных материалов с присоединением общих начал теории упругости твердых тел. С.-Петербург, тип. А. Якобсона, 1868, 236 стр. См. стр. 131.

²⁾ Müller-Breslau H. Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, ausgehend von dem Gesetze der virtuellen Verschiebungen und den Lehrsätzen über die Formänderungsarbeit. 3 vermehrte und verbesserte Auflage. Leipzig, Baumgärtner, 1904, 342 S. См. S. 209. [Перевод на русский язык: Мюллер-Бреслау Г. Новые методы строительной механики, основанные на принципе виртуальных перемещений и теоремах о работе деформаций. Перевод со 2-го немецкого издания инж. Н. Митинского. С.-Петербург, Ф. В. Щепанский, 1898, 287 стр. См. § 21. Эти результаты приведены также в монографии Мюллер-Бреслау Г. Графическая статика сооружений. Том 2, часть 2, С.-Петербург, изд. К. Л. Риккера, 1913, § 29, стр. 488—498.]

³⁾ Pflieger C. Die Beanspruchung stabförmiger Träger mit gekrümmter Mittellinie. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1907, Bd. 51, № 6, SS. 209—213.

⁴⁾ Головин Х. Одна из задач статики упругого тела. Известия С.-Петербургского технологического института, 1882, том 3, стр. 373—410. Эта работа, изданная на русском языке, неизвестна в других странах. Такие же решения нашли: во Франции: Ribière M. Sur l'équilibre d'élasticité des voûtes en arc de cercle. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1889, tome 108, Mars, № 11, pp. 561—563; Ribière M. Sur les voûtes en arc de cercle encastrées aux naissances. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1901, tome 132, Février, № 6, pp. 315—317; в Германии — Prandtl L. (см. стр. 72 книги: Börsi A. Vorlesungen über technische Mechanik. 3 Auflage. Bd. 5. Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie. Leipzig, Teubner B. G., 1907, 391 S.). Timpe A. Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen, einfach gelöst mit Hilfe der Airy'schen Funktion. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1905, Bd. 52, Heft 4, SS. 348—383.

напряжения определяются следующими формулами:

$$\sigma_r = \frac{4M}{C} \left(r_1^2 \ln \frac{r_1}{r} + r_0^2 \ln \frac{r}{r_0} - \frac{r_1^2 r_0^2}{r^2} \ln \frac{r_1}{r_0} \right),$$

$$\sigma_t = \frac{4M}{C} \left(r_0^2 - r_1^2 + r_0^2 \ln \frac{r}{r_0} + r_1^2 \ln \frac{r_1}{r} + \frac{r_1^2 r_0^2}{r^2} \ln \frac{r_1}{r_0} \right),$$

где

$$C = (r_1^2 - r_0^2)^2 - 4r_1^2 r_0^2 \left(\ln \frac{r_1}{r_0} \right)^2.$$

Толщина стержня принята равной единице. Сравнение с приближенными решениями Л. Навье и Е. Винклера — Г. Резаля показывает, что решением Л. Навье можно пользоваться только для стержней с незначительной высотой. Теория Е. Винклера — Г. Резаля дает удовлетворительные результаты и для кривых стержней значительной высоты. В табл. 9 даны для сравнения некоторые числовые результаты, полученные для случая $r_1 = 3r_0$ ¹⁾. Мы видим, что

Таблица 9

	Л. Навье	Е. Винклер — Г. Резаль	Точные решения Х. С. Головина
$(\sigma_t)_{r=r_1}$	-0,302 N	-0,224 N	-0,219 N
$(\sigma_t)_{r=r_0}$	0,302 N	0,463 N	0,435 N

теория Е. Винклера — Г. Резаля дает удовлетворительные результаты и для стержней значительной высоты. При этом, однако, предполагается, что рассматриваемое поперечное сечение находится настолько далеко от концов, что местные деформации от действия внешних сил не влияют на точность решения.

¹⁾ A u e J. Zur Berechnung der Spannungen in gekrümmten Stäben (unter Anwendung der optischen Methode). Dresden, Adolph, 1910, 70 S. Dissertation. Grossherzog und Herzogl. Sächsischen Gesamt-Universität zu Jena, Philosophische Fakultät, Jena, 1910.

²⁾ Тимошенко С. П. Применение нормальных координат к исследованию изгиба стержней и пластинок. Известия Киевского политехнического института, отдел инж.-мех., 1910, год издания 10, книга 1, стр. 1—49. См. также Тимошенко С. On the distribution of stresses in a circular ring compressed by two forces acting along a diameter. Philosophical Magazine and Journal of Science, Series 6, 1922, vol. 44, № 263, November, pp. 1014—1019. [Перепечатка: Тимошенко С. P. The collected papers. New York—London—Toronto, McGraw-Hill publishing company Ltd, 1953, pp. 334—337.] Вейгарт К. Über einige wirklich durchführbare Ansätze zur Berechnung von Spannungszuständen des elastischen Wissenschaften Kreisringes. Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, 1915, Bd. 124, Abteilung 11a, Heft 10, SS. 1119—1142.

Таблица 10

r/r_1	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
Точное решение $\begin{cases} mn \\ m_1 n_1 \end{cases}$	2,610 -3,788	1,477 -2,185	-0,113 -0,594	-2,012 1,240	-4,610 4,002	-8,942 10,147
Е. Винклер — Г. Резаль $\begin{cases} mn \\ m_1 n_1 \end{cases}$	2,885 -7,036	1,602 -5,010	0,001 -2,482	-2,060 +0,772	-4,806 5,108	-8,653 11,18
Л. Навье $\begin{cases} mn \\ m_1 n_1 \end{cases}$	3,90 -8,67	1,71 -5,20	-0,48 -1,73	-2,67 +1,73	-4,86 5,20	-7,04 8,67

С. П. Тимошенко ²⁾ обсудил особенности в распределении напряжений вблизи точек приложения сосредоточенных сил (табл. 10).

Рассматривая круговое кольцо, находящееся под действием двух равных сжимающих его сил (рис. 26), можно найти точное решение задачи, комбинируя решение для кругового диска, находящегося под действием двух сжимающих сил, с решением для кругового кольца, к внутреннему контуру которого приложены нормальные и касательные силы. Результаты расчетов кольцевых напряжений, исполненных для случая $r_1 = 2 r_0$ в поперечных сечениях mn и $m_1 n_1$, получаются в виде следующей формулы:

$$\sigma_t = n \frac{2P}{\pi r_1}.$$

Численные значения коэффициентов n для шести равноотстоящих друг от друга точек даны в табл. 10.

Для сравнения в табл. 10 даны также результаты, полученные на основании формул (74) и (75) и теории Л. Навье. Мы видим, что для поперечного сечения mn , находящегося на значительном расстоянии от точки приложения силы, теория Е. Винклера — Г. Резаля дает вполне удовлетворительные результаты. Разница между точными и приближенными значениями наибольшего напряжения составляет только 3%. Для поперечного сечения $m_1 n_1$ соответствие между точными и приближенными значениями не так близко, разница между максимальными напряжениями по точной и приближенной теориям уже до 10%; однако, согласно приближенной теории, получаются завышенные результаты ¹⁾. Интересно заметить,

¹⁾ К. Вигхардт в цитированной в сноске ²⁾ на стр. 610 работе приходит к другому выводу. Но он сравнивает точные величины напряжений с величинами, выведенными из формулы Л. Навье. Эту формулу не следовало бы применять в рассмотренном здесь случае. К. Вигхардт сравнивает изгибающие моменты в поперечном сечении $m_1 n_1$, какими они получаются по точной и приближенной теории, но

что сумма напряжений σ_t , распределенных по поперечному сечению $m_1 n_1$, не обращается в нуль, а имеет величину R/π . Этот результат становится ясным, если учесть, что влияние сосредоточенной силы, приложенной к какой-либо точке, эквивалентно вертикальной силе P и двум равным противоположным горизонтальным силам P/π . Необходимо упомянуть еще о случае изгиба кольцеобразных тел, исследованном Джоном Мичеллом ¹⁾.

Все эти точные решения показывают, что приближенная теория Е. Винклера — Г. Резаля дает удовлетворительные результаты для всех поперечных сечений, далеко расположенных от концов и точек приложения сил. Затруднения в исследовании напряжений в стержнях большой кривизны происходят от двух причин: во-первых, длина центральной кривой линии стержня обычно бывает величиной того же порядка, что и размеры поперечного сечения стержня, поэтому распределение напряжений в каждом поперечном сечении бруса зависит от деформаций, имеющих место около точек приложения сил; во-вторых, потому, что распределение приложенных сил нам с достаточной точностью неизвестно и иногда зависит от деформаций, как, например, в звеньях цепей, проушинах и головках шатунов.

§ 16. Опыты со стержнями большой кривизны

Для выяснения возможности применения приближенной теории определения напряжений в кривых стержнях было произведено немало опытов. Прежде всего следует упомянуть о работах К. Баха ²⁾, который применил на практике теорию Е. Винклера — Г. Резаля. Далее Г. Гудноф и Л. Мур ³⁾ провели целый ряд испытаний над кольцеобразными телами. При этих опытах, равно как и при опытах Р. Майера ⁴⁾, были произведены непосредственные измерения

для этого поперечного сечения величина изгибающего момента не характерна для принятого распределения напряжений, и необходим более подробный анализ распределения напряжений.

¹⁾ M i c h e l l J. H. The uniform torsion and flexure of incomplete tores, with application to helical springs. Proceedings of the London Mathematical Society, 1900 [1899, April 13], vol. 31, pp. 130—146.

²⁾ B a c h C. Elastizität und Festigkeit. Die für die Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmässige Grundlage. 3 Auflage. Berlin, J. Springer, 1898, 570 S. См. SS. 221—225. [Перевод на русский язык: Б а х К. Упругость и крепость материалов. Перевод с немецкого просмотрен проф. Императорского техникума П. К. Худяковым, в 2-х частях. Москва, изд. Н. Г. Звержановского, 1894, 260 стр. См. стр. 204—229.] То же. 8. Auflage, Berlin, J. Springer, 1920, 698 S. См. SS. 558—568.

³⁾ G o o d e n o u g h G. A., M o o r e L. E. The strength of chain links. Urbana, University of Illinois Bulletin, Engineering Experiment Station, 1907, Bulletin № 18, 73 p.

⁴⁾ M a y e r R. Versuche über die ebene Biegung gekrümmter Stäbe. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1926, Bd. 6, Heft 3, SS. 216—224.

упругих деформаций для того, чтобы определить величину сил, при которых достигается предел пропорциональности. Зная предел текучести материала, можно определить максимальное напряжение в самой опасной точке поперечного сечения, что позволяет оценить точность, даваемую различными приближенными теориями. Хотя эти опыты хорошо согласуются с приближенной теорией Е. Винклера — Г. Резаля, однако нужно иметь в виду, что подобные испытания не могут еще доказать с достаточной определенностью справедливость этой теории. Возможно, что различные формы распределения напряжений могут привести к одинаковым деформациям. С другой стороны, максимальные напряжения в стержнях большой кривизны ограничены очень маленьким участком, а текучесть материала в перенапряженном участке оказывает только незначительное влияние на получающуюся деформацию. На этом основании из опытов важно точно определить силу, для которой пропорциональность больше не существует. Более достоверные результаты получил М. Воропаев ¹⁾, который для определения начала явления текучести при испытании колец применил метод исследования линий Людерса ²⁾. При помощи этого метода он сумел показать, что в случаях, изображенных на рис. 27, где втулка плотно прилегает к стенкам отверстия, начало текучести можно предсказать с достаточной точностью, если для расчета в поперечном сечении mn максимальных напряжений применить известную формулу Ламэ для расчета напряжений в толстых круговых цилиндрах от равномерного радиального давления.

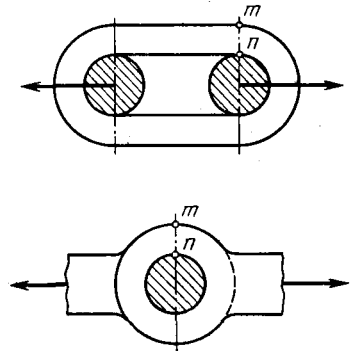


Рис. 27. Усилия, действующие на звено цепи и головку шатуна.

Для определения распределения напряжений в поперечном сечении кривых стержней Е. Прейсс ³⁾ и А. Уинслоу ⁴⁾ произвели непосредственные измерения удлинений в окружном и радиальном

¹⁾ Воропаев М. К вопросу об определении напряжений и деформаций в «брусках большой кривизны». Известия Киевского политехнического института, отдел инж.-мех., 1910, год 10, книга 1, стр. 51—127.

²⁾ Lüders W. Über die Auberung der Elastizität stahlartigen Eisenstäben und Stahlstäben, und über eine beim Biegen Solcher Stäbe beobachtete Molekularbewegung. Dingers polytechnisches Journal, 1860, Bd. 155, Heft 1, SS. 18—22.

³⁾ Preuss E. Versuche über die Spannungsverteilung in Kranhaken. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1911, Bd. 55, № 52, SS. 2173—2176.

⁴⁾ Winslow A. M., Edmonds R. H. G. Tests and theory of curved beams. Bulletin University of Washington, Engineering Experiment Station, 1927, August 15, Bulletin № 42, 27 p.

направлениях. Более полная проверка теории была произведена при помощи оптического метода. С помощью этого способа О. Гёнигсбергер ¹⁾ показал, что нейтральная ось смещается по направлению к центру кривизны. И. Ауэ ²⁾ исследовал распределение напряжения по поперечному сечению кривого стержня и нашел близкое соответствие результатов опыта с точной теорией. Э. Кокер ³⁾ произвел много исследований распределения напряжений в кривых стержнях, важных для практического применения. А. Фёппль ⁴⁾ и Американское бюро стандартов ⁵⁾ произвели опыты над крюками. Все эти опыты показывают, что приближенная теория Е. Винклера — Г. Резаля определяет напряжения в кривых стержнях с достаточной для практики точностью.

§ 17. Изгиб кривых труб

Опыты с упругими трубчатыми компенсаторами ⁶⁾ показали, что кривые части труб гораздо менее жестки, чем это следует из уравнений (59) или (70). Т. Карман ⁷⁾ дал объяснение этому явлению. Он заметил, что при изгибе кривые трубы круглого поперечного сечения, кроме того, еще и сплющиваются. Для того чтобы оценить влияние этого сплющивания, необходимо жесткость изгиба EJ заменить меньшей величиной kEJ , где k — коэффициент, меньший единицы, зависящий от толщины трубы t , от радиуса центральной оси трубы R и радиуса поперечного сечения трубы r . Приближенная формула

¹⁾ H ö n i n g s b e r g e r O. Einrichtung für Versuche an beanspruchten durchsichtigen Körpern in polarisiertem Licht. Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines, 1906, Jahrgang 58, № 35, SS. 489—495.

²⁾ A u e J. См. его работы, упомянутую в сноске ¹⁾ на стр. 610.

³⁾ C o k e r E. G. Photo-elasticity for engineers. General Electric Review, Part I—V, 1920, vol. 23, № 11, pp. 870—877; № 12, pp. 966—973, 1921, vol. 24; № 1, pp. 82—88; № 3, pp. 222—226; № 5, pp. 455—466; Photo-elasticity. Journal of the Franklin Institute, 1925, vol. 199, № 3, pp. 289—332.

⁴⁾ F ö p p l A. Festigkeit und Abnützbarkeit von Harbsteinen, SS. 3—19, II, Festigkeitsversuche mit Eisenbahnwagen-Kuppelungen, SS. 20—36, III. Über die Biegefestigkeit gekrümmter Stäbe, SS. 36—43. Mitteilungen aus dem Mechanisch-technischen Laboratorium der Technischen Hochschule München, 1898, Heft 26.

⁵⁾ W h i t t m o r e H. L., S t a n g A. H. Test of some girder hooks, Technological papers of the Bureau of standards, 1924, vol. 18. № 260, pp. 305—325; см. также R u n d s c h a u. Koch Zugversuche an Zughaken. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1927, Bd. 71, № 11, SS. 368—369.

⁶⁾ B a n t l i n A. Formänderung und Beanspruchung federnder Ausgleichrohre. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1910, Bd. 54, № 2, SS. 43—49. [Перепечатка: Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1910, Heft 96, 84 S.]

⁷⁾ K á r m á n Th. Über die Formänderung dünnwandiger Rohre, insbesondere federnder Ausgleichrohre. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1911, Bd. 55, № 45, SS. 1889—1895. [Перепечатка: K á r m á n Th. Collected works. Vol. 1. London, Butterworths Scientific Publications, 1956, pp. 304—320.]

для вычисления коэффициента k имеет следующий вид:

$$k = 1 - \frac{9}{10 + 12 \left(\frac{tR}{r^2} \right)^2}. \quad (76)$$

При уменьшении tR/r^2 уменьшается и величина коэффициента k . Сплющивание поперечного сечения трубы влияет и на распределение напряжений. Для их вычисления мы имеем следующую приближенную формулу:

$$\sigma_t = \frac{M_y}{kJ} \left(1 - \beta \frac{y^2}{r^2} \right), \quad (77)$$

где y — расстояние волокна от диаметра поперечного сечения, перпендикулярного к центральной оси; β — новая постоянная, которую можно определить приближенно из следующего уравнения:

$$\beta = \frac{6}{5 + 6 \left(\frac{tR}{r^2} \right)^2}.$$

Из уравнения (77) следует, что наибольшие напряжения имеют место не в самом отдаленном волокне, а в том, расстояние которого от нейтральной оси равно $r/\sqrt{3\beta}$. Величина наибольшего напряжения составляет

$$\sigma_{t_{\max}} = \gamma \frac{Md}{2J},$$

где d — внешний диаметр трубы, а

$$\gamma = \frac{2}{3k\sqrt{3\beta}}.$$

Мы видим, что для небольших значений tR/r^2 действительное наибольшее напряжение значительно более рассчитанного по обычной теории, в которой влияние сплющивания не учитывается. Аналогичную теорию можно развить и для прямоугольного поперечного сечения¹⁾. Для тонких труб с квадратным поперечным сечением коэффициент k , учитывающий уменьшение жесткости изгиба, определяется следующим выражением:

$$k = \frac{49,2 + 1,33 \frac{b^4}{R^2 t^2}}{49,2 + 3,23 \frac{b^4}{R^2 t^2}}, \quad (78)$$

¹⁾ Timoshenko S. Bending stresses in curved tubes of rectangular cross-section. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1923, vol. 45, № 1893, pp. 135—140. [Печатка: Timoshenko S. P. The collected papers. New York—London—Toronto, McGraw-Hill Publishing Company Ltd., 1953, pp. 338—343.]

где t — толщина стенок трубы; R — радиус центральной оси; b — длина стороны поперечного сечения. Например, для $b/R=0,1$ и $b/t=50$ имеем $k=0,51$, т. е. наибольшее напряжение и наибольший прогиб будут примерно вдвое больше, чем определенные по обычной теории кривых стержней. Приведенная выше теория с достаточной точностью подтверждается опытами А. Бантлина¹⁾, В. Ховгарда²⁾ и А. Уола³⁾.

§ 18. Изгиб кругового кольца из его плоскости

Общая теория малых деформаций стержней с начальной кривизной разработана Б. Сен-Венаном⁴⁾, Дж. Мичеллом⁵⁾ и А. Лявом⁶⁾. Ф. Энгессер⁷⁾, Г. Маркус⁸⁾ и Ф. Шлейхер⁹⁾ разработали численные методы определения деформаций. Здесь мы рассмотрим простейший случай стержня с плоской центральной линией, у которого главная ось поперечного сечения лежит в плоскости кривизны стержня. Рассмотрим какое-либо поперечное сечение стержня. Выберем координатные оси x , y и z таким образом, чтобы ось z была касательна к центральной линии, а оси x и y совпадали с главными осями инерции поперечного сечения. Тогда плоскость xz совпадает с плоскостью центральной линии бруса; положительное направление оси

¹⁾ B a n t l i n A. См. стр. 180 его работы, упомянутой в сноске⁶⁾ на стр. 614.

²⁾ H o v g a a r d W. The elastic deformation of pipe bends. Journal of Mathematics and Physics, 1926—1927, vol. 6, pp. 69—118.

³⁾ W a h l A. M. Stresses and reactions in expansion pipe bends. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1927—1928, vol. 49—50, part 1, № ESP-50-49, pp. 241—255, discussion: pp. 255—262.

⁴⁾ S a i n t V e n a n t B. Mémoire sur le calcul de la résistance et de la flexion des pièces solides à simple ou à double courbure, en prenant simul tanément en considération les divers efforts auxquels elles peuvent être soumises dans tous les sens. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1843, tome 17, 2 semestre, № 18, 30 Octobre, pp. 942—954; № 19, 6 Novembre, pp. 1020—1031.

⁵⁾ M i c h e l l J. H. The small deformation of curves and surfaces with application to the vibrations of a helix and a circular ring. The Messenger of Mathematics, 1890, vol. 19, pp. 68—82.

⁶⁾ L o v e A. E. H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. 4 ed. Cambridge, University Press, 1927, 642 p. См. p. 444. [Перевод на русский язык: Л я в А. Математическая теория упругости М.—Л., ОНТИ НКТП СССР, 1935, 674 p. См. стр. 463.]

⁷⁾ E n g e s s e r F. Der elastische stabförmige Träger von beliebiger Gestalt. Zeitschrift für Bauwesen, 1940, Jahrgang 70, Heft 1 bis 3, SS. 186—195. См. p. 192.

⁸⁾ M a r c u s H. Die elastische Linie des doppelt gekrümmten Trägers. Zeitschrift für Bauwesen, 1919, Jahrgang 69, Heft 1—3, SS. 163—180; M a r c u s H. Abriss einer allgemeinen Theorie des eingespannten Trägers mit räumlich gewundener Mittellinie. Zeitschrift für Bauwesen, 1914, Jahrgang 64, Heft 1—3, SS. 198—224.

⁹⁾ S c h l e i c h e r F. Die elastischen Verschiebungen gekrümmter Stäbe als Drehungen bzw. Schraubungen um Achsen von Momentenflächen. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1924, Bd. 4, Heft 6, SS. 475—485. См. также M i s e c R. Bemerkung zu dem Aufsatz von her Schleicher über elastische formänderung Krümmter Stäbe. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1924, Bd. 4, Heft 6, SS. 486—487.

z соответствует увеличению дуги центральной линии, считая от заданного конца; положительное направление оси x имеет направление к центру кривизны стержня. Малые деформации при изгибе стержня вполне определяются составляющими u, v, w перемещений по осям x, y и z и углом поворота β рассматриваемого поперечного сечения вокруг оси z . Пусть $1/\rho_0$ — начальная кривизна центральной линии; $1/\rho_1$ и $1/\rho_2$ — составляющие кривизны центральной оси в плоскостях xz и yz после деформации, φ — кривизна кручения. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} &= \frac{1}{\rho_0} + \frac{d w}{ds} \frac{1}{\rho_0} + \frac{d^2 u}{ds^2}, \\ \frac{1}{\rho_2} &= \frac{\beta}{\rho_0} - \frac{d^2 v}{ds^2}, \\ \varphi &= \frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{\rho_0} \frac{dv}{ds}. \end{aligned}$$

Изгибающие моменты M_x и M_y и крутящий момент M_z получим из следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= B_1 \left(\frac{\beta}{\rho_0} - \frac{d^2 v}{ds^2} \right), \\ M_y &= B_2 \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{d w}{ds} \frac{1}{\rho_0} + \frac{d^2 u}{ds^2} \right), \\ M_z &= C \left(\frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{\rho_0} \frac{dv}{ds} \right), \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

где B_1 и B_2 — жесткости стержня при изгибе, C — жесткость стержня при кручении. Для примера рассмотрим стержень с круговой центральной осью, заделанной в точке B . В точке A этого стержня приложена сила P , нормальная к оси стержня ¹⁾ (рис. 28). Для любого поперечного сечения D будем иметь

$$\begin{aligned} M_x &= -P\rho_0 \sin(\alpha - \theta), \\ M_y &= 0, \\ M_z &= P\rho_0 [1 - \cos(\alpha - \theta)]. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (79), получим

$$\frac{d^2 v}{ds^2} + v = \sin(\alpha - \theta) P\rho_0^3 \left(\frac{1}{B_1} + \frac{1}{C} \right) + \frac{P\rho_0^3}{C} \theta - \frac{P\rho_0^3}{C} \sin \alpha.$$

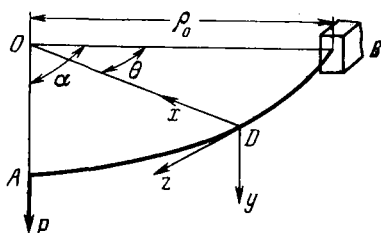


Рис. 28. Изгиб кругового кольца из его плоскости.

¹⁾ Эта задача была решена Saint Venant В. Mémoire sur la torsion des prismes à base rectangle et à base losange, et sur une petite correction numérique à faire subir, en général, aux moments de torsion. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1843, tome 17, 2 Semestre, № 21, 20 Novembre, pp. 1180—1190.

Из этого уравнения, а также из условия закрепления конца стержня при $\theta=0$ найдем

$$v = \frac{P\rho_0^3}{c} [\theta - \sin \theta - \sin \alpha (1 - \cos \theta)] + \frac{P\rho_0^3}{2} \left(\frac{1}{B_1} + \frac{1}{c} \right) [\theta \cos (\theta - \alpha) - \sin \theta \cos \alpha].$$

В случае нагрузки, распределенной по оси стержня, перпендикулярной к его плоскости, будем иметь следующее дифференциальное уравнение для v ¹⁾:

$$\frac{d^6 v}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\theta^4} + \frac{d^2 v}{d\theta^2} = \rho_0^4 \left(\frac{1}{B_1} \frac{d^2 q}{d\theta^2} - \frac{1}{c} q \right), \quad (80)$$

где q — интенсивность распределенной нагрузки. Для полукруговой балочной балки с заделанными концами, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, из уравнений (79) и (80) получим следующие выражения для моментов:

$$M_x = -q\rho_0^3 \left(1 - \frac{4}{\pi} \cos \theta \right),$$

$$M_z = -q\rho_0^3 \left(\theta - \frac{4}{\pi} \sin \theta \right).$$

Различные задачи этого рода были рассмотрены И. Штутцем²⁾ Г. Мюллер-Бреслау³⁾ и Б. Каненбергом⁴⁾.

Ф. Дюстербен⁵⁾ исследовал случай полукругового стержня, подпертого в 3—5 точках, и кольца, опертого в 3—6 точках. Г. Унольд⁶⁾ исследовал кольцо двутаврового поперечного сечения, у которого сопротивление скручиванию зависит не только от его жесткости кручения, но и от жесткости изгиба его полков.

¹⁾ Federhofer K. Berechnung des senkrecht zu seiner Ebene belasteten Bogenträgers. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1914, Bd. 62, Heft 1, SS. 40—63.

²⁾ Stutz J. Zur Theorie der halbringförmigen Balkenträger. Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines, 1904, Jahrgang 56, № 49, SS. 682—689.

³⁾ Müller-Breslau H. Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen. 2 Auflage, Leipzig, Baumgärtner's Buchhandlung, 1893, VI+342 S. См. S. 258, 4. vermehrte und verbesserte Auflage. Leipzig, Alfred Kröner, 1913, VIII+470 S. См. S. 265.

⁴⁾ Kanenberg B. G. Zur Theorie torsionfester Ringe. Der Eisenbau, 1913, Jahrgang 4, № 9, SS. 329—334.

⁵⁾ Düsterbehn F. Ringförmige Träger. Der Eisenbau, 1920, Jahrgang 11, № 3, SS. 73—80.

⁶⁾ Unold G. Der Kreisträger. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1922, Heft 255, 79 S.

§ 19. Пружины

Пружины применяются в машинах для ослабления действия ударов. Поэтому при проектировании пружин необходимо исходить из условий не только их прочности, но и из условия их работоспособности, т. е. учитывать то количество работы, которое пружина может принять без перенапряжения материала¹⁾. Наипростейший случай пружины — призматический стержень, находящийся под действием растягивающих или сжимающих сил. Его работоспособность на единицу объема равна $\sigma_{\text{доп}}^2/2E$. Для случая сдвига (скручивание тонкой трубы) удельная работоспособность равна $\tau_{\text{доп}}^2/2g$. Практически работоспособность пружин можно выразить одним из следующих выражений:

$$A = \eta V \frac{\sigma_{\text{доп}}^2}{2E} \quad \text{или} \quad A_1 = \eta_1 V \frac{\tau_{\text{доп}}^2}{2G}. \quad (81)$$

Здесь V — объем материала пружины; η, η_1 — коэффициенты, зависящие только от формы пружины и характеризующие степень использования материала пружины. Для чистого изгиба призматического стержня прямоугольного поперечного сечения, например, $\eta = 1/3$. Для стержня постоянного прямоугольного поперечного сечения с одним заделанным концом, нагруженным силой, приложенной на свободном конце, $\eta = 1/9$. Для цилиндрического вала кругового поперечного сечения $\eta_1 = 1/2$.

§ 20. Листовые пружины

Теорию таких пружин разработал Е. Филлипс²⁾. Он показал, что сложенные из отдельных полос пружины можно изготовлять из треугольного листа, как то представлено на рис. 29. Пусть l — половина длины пружины, q — ширина полосы, h — толщина отдельной полосы, n — количество полос. Прогиб пружины равен

$$f = \frac{6Pl^3}{Enbh^3} = \frac{\sigma_{\text{доп}} l^2}{Eh}. \quad (82)$$

Предельная допускаемая нагрузка определяется из выражения

$$P = \frac{nbh^2 \sigma_{\text{доп}}}{6l}. \quad (83)$$

¹⁾ Подробные указания о пружинах можно найти в «Bibliography on mechanical springs». New York, American Society of Mechanical Engineers, 1927, 71 p.

²⁾ P h i l l i p s E. Mémoire sur les ressorts en acier employés dans le matériel des chemins de fer. Annales des mines, 1852, tome 1, pp. 195—336; см. также T o d h u n t e r I., P e a r s o n K. A history of the theory of elasticity and of the strength of materials. Vol. 2, part 1, Cambridge, University Press, 1893, 762 p. См. p. 330.

Вводя постоянную пружины

$$c = \frac{f}{P} = \frac{\sigma_{доп} l^2}{E h P}, \quad (84)$$

Е. Филлипс, используя выражение (83), дал следующие формулы для объема V материала пружины и ее высоты nh :

$$V = n l b h = \frac{6cEP^2}{\sigma_{доп}^2}; \quad nh = \frac{6cEP^2}{\sigma_{доп}^2 b l}. \quad (85)$$

В этом случае коэффициент $\eta = 1/3$. В своей работе Е. Филлипс рассматривал также пружины с начальной кривизной и привел результаты опытов над действительными пружинами.

Влияние трения на прогиб листовых пружин исследовал Г. Мари¹⁾. К. Витциг²⁾ исследовал пружины, имеющие сверху две или три полосы одинаковой длины и теряющие поэтому свойство бруса равного сопротивления. И. Танака³⁾ исследовал случай приложения

невертикальной нагрузки. Д. Ландау и П. Парр⁴⁾ произвели исследование распределения нагрузки между отдельными листами пружины и влияния на это распределение обточки листов.

§ 21. Спиральные пружины

Теория спиральных пружин разработана Е. Филлипсом⁵⁾ и Г. Резалем⁶⁾. Различные случаи применения этой теории на

¹⁾ Marie G. M. Les dénivellations de la voie et les oscillations du matériel des chemins de fer. Annales des mines, Série 10, partie 1, 1905, tome 7, pp. 491—526; partie 2, 1905, tome 8, pp. 113—147; partie 3, 1906, tome 9, pp. 448—514.

²⁾ Wittig K. Zur Berechnung von Tragfedern für Eisenbahn-Fahrzeuge. Schweizerische Bauzeitung, 1918, Bd. 72, № 26, SS. 249—250.

³⁾ Tanaka Y. Allgemeine Theorie der Blattfedern. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1922, Bd. 2, Heft 1, SS. 26—34; см. также Sanders Th. H. Laminated springs. London, The Locomotive Publishing Co., Ltd. New York, Spon and Chamberlain, 1923, 519 p.

⁴⁾ Landau D., Parr P. H. A new theory of plates springs. Journal of the Franklin Institute, 1918, vol. 185, № 4, pp. 481—507; vol. 186, № 6, pp. 699—721, 1919; vol. 187, № 2, pp. 199—213.

⁵⁾ Phillips E. Mémoire sur le spiral réglant des chronometres et des montres. Annales des mines, 1861, série 5, tome 20, pp. 1—107.

⁶⁾ Resal H. Des applications de la mécanique à l'horlogerie. Annales des mines, série 6, 1866, tome 10, pp. 423—457; 1867, tome 11, pp. 207—246 and Formu

практике, особенно в часовых механизмах, исследовал Г. Буассе¹⁾. Если к закрепленной в центре спиральной пружины приложить пару сил M (рис. 30, *a*), то изгибающий момент по длине пружины постоянен, а угол поворота определяется формулой

$$\varphi = \frac{Ml}{EJ}, \quad (86)$$

где l — длина пружины, а EJ — жесткость пружины на изгиб. Если растягивающую силу P приложить к концу пружины (рис. 30, *b*), то изгибающий момент будет величиной переменной, и опасное поперечное сечение пружины будет лежать во внешнем витке со стороны, противоположной точке приложения силы P . Если витки расположены часто, то максимальный изгибающий момент можно принять равным $2Pr$. Для вычисления угла поворота можно применить выражение (86), в котором вместо изгибающего момента M нужно подставить среднее его значение Pr .

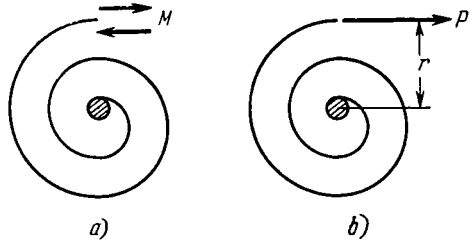


Рис. 30. Спиральные пружины.

§ 22. Пружины Бельвилля

Эти пружины состоят из полых тонкостенных усеченных конусов, опирающихся друг на друга своими основаниями. Для определения упругих деформаций и наибольших напряжений можно получить удовлетворительные приближенные формулы в предположении, что меридиональные сечения, как показано на рис. 31, при действии сил P не изменяют своей формы, а только поворачиваются на некоторый угол φ .

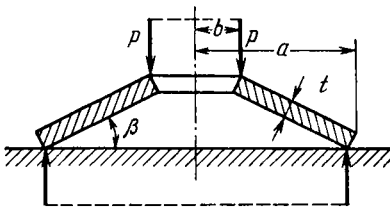


Рис. 31. Элемент пружины Бельвилля. Обозначив через P полную нагрузку на пружину, через β — угол конусности и приняв остальные размеры согласно рис. 31,

¹⁾ les simplifiées relatives à la détente des ressorts moteurs des chronometres et résultats d'observations sur la courbure moyenne des lames résultant de l'estrapade. Annales des mines, série 6, 1868, tome 13, pp. 301—317.

²⁾ В о u а с с е Н. Pendule, spiral, diapason. Tome I, 475 p.; tome 2, 518 p., Paris, Librairie Delagrave, 1920.

получим

$$P = 6,91Et\psi \left[\left(\beta - \frac{\psi}{2} \right) (\beta - \psi) \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{\ln \frac{a}{b}} \right) + \frac{t^2 \ln \frac{a}{b}}{12(a-b)} \right], \quad (87)$$

$$(\sigma_t)_{\max} = 1,1E\psi \left[\left(\beta - \frac{\psi}{2} \right) \frac{a-b-b \ln \frac{a}{b}}{b \ln \frac{a}{b}} + \frac{t}{2b} \right]. \quad (88)$$

Аналогичные выражения получим и при переменной толщине стенок конуса.

§ 23. Винтовые пружины

Теория цилиндрических винтовых пружин была разработана И. Гилио ¹⁾ и Б. Сен-Венаном ²⁾. Кельвин и П. Тэт ³⁾, а также И. Перри ⁴⁾ и Г. Ширер ⁵⁾ рассмотрели некоторые особые случаи таких пружин. Опыты Дж. Миллера ⁶⁾ и Л. Захариаса ⁷⁾ подтвердили созданную теорию. Для простейшего случая, когда цилиндрическая винтовая пружина находится под действием осевой силы, изгибающий и крутящий моменты равны

$$M_b = Pr \sin \alpha,$$

$$M_t = Pr \cos \alpha,$$

¹⁾ Guilio J. Sur la torsion des fils métalliques et sur l'élasticité des ressorts en hélices. *Memorie delle reale Accademia delle Scienze di Torino*, serie 11, 1842, tome 4, pp. 329—383.

²⁾ Saint Venant B. Mémoire sur le calcul de la résistance et de la flexion des pièces solides à simple ou à double courbure, en prenant simultanément en considération les divers efforts auxquels elles peuvent être soumises dans tous les sens. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, Paris, 1843, tome 17, 2 semestre, № 18, 30 Octobre, pp. 942—954; № 19, 6 Novembre, pp. 1020—1031.

³⁾ Kelvin (William Thompson), Tait P. G., *Treatise on natural philosophy*. New edition, Part II. Cambridge, University Press, 1895, XXVI+527 p. См. p. 139.

⁴⁾ Perry I. *Applied mechanics, a treatise for the use of students who have time to work experimental, numerical and graphical exercise*. New York, D. Van-Nostrand, 1901, 2 vol., 678 p. См. p. 613. [См. также *Applied Mechanics*, London, Cassel and Co., 1907, 2 vol., 688 p.]

⁵⁾ Shearer G. W., Watson C. Some notes on springs, principally with reference to those for railway rolling-stock. *Engineering*, 1912 [February 16], vol. 93, № 2401, pp. 206—210.

⁶⁾ Miller J. W. The elastic properties of helical springs. *The Physical Review (A Journal of Experimental and Theoretical Physics)*, 1902, vol. 14, № 3, pp. 129—148.

⁷⁾ Zacharias L. Untersuchungen an zylindrischen Schraubenfedern mit kreisförmigen Querschnitt. *Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, 1911, Heft 106, SS. 1—26.

где α — угол наклона винтовой линии к плоскости, нормальной к оси пружины; r — радиус цилиндра (рис. 32). Осевое упругое удлинение δ и угол поворота ψ концов пружины определяются следующими формулами:

$$\delta = Plr^2 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{B} + \frac{\cos^2 \alpha}{C} \right), \quad (89)$$

$$\psi = Plr \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (90)$$

где l — длина центральной оси, B — жесткость пружины на изгиб, C — жесткость на кручение. Для винтовой пружины с круглым поперечным сечением диаметра d имеем

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{32}{\pi d^4} Plr^2 \left(\frac{2 \sin^2 \alpha}{E} + \frac{\cos^2 \alpha}{G} \right), \\ \psi &= \frac{\mu}{E} \frac{32}{\pi d^4} Plr \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

И. Диксгорн ¹⁾ составил таблицы, упрощающие расчет винтовых пружин круглого поперечного сечения.

Для определения напряжений обыкновенно пользуются формулой кручения для стержней круглого поперечного сечения. Если диаметр d проволоки не мал по сравнению с радиусом цилиндра винтовой линии пружины, то необходимо принимать во внимание изменение длины волокна в связи с изменением радиального расстояния его от оси цилиндра. По расчетам А. Рёвера ²⁾ и А. Уола ³⁾ максимальное напряжение появляется в ближайших к оси цилиндра волокнах. Величину напряжения можно определить по

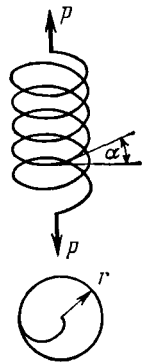


Рис. 32. Винтовая пружина.

¹⁾ D i j x h o o r n J. C. Tragfähigkeit und Durchbiegung von zylindrischen Schraubenfedern aus Stahldraht. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1891, Bd. 35, № 50, SS. 1397—1399; см. также: F i s c h e r V. Logarithmisch-zeichnerische Tafel zur Federberechnung. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1909, Bd. 53, № 27, SS. 1075—1077 and R ö v e r A. Zeichnerische Ermittlung der Durchbiegungs- und Spannungsverhältnisse einer unter Fliehkraftwirkung stehenden Schraubenfeder mit radialer Achse. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1909, Bd. 53, № 32, SS. 1272—1273.

²⁾ R ö v e r A. Beanspruchung zylindrischer Schraubenfedern mit Kreisquerschnitt. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1913, Bd. 57, № 48, SS. 1906—1911.

³⁾ W a h l A. M. Stresses and reactions in expansion pipe bends. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1927—1928, vol. 49—50, part 1, № FSP-50-49, pp. 241—255; discussion: pp. 255—262.

следующей приближенной формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{16Pr}{\pi d^3} \left(\frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0,615}{m} \right), \quad (92)$$

где $m=2r/d$. Заключенный в скобки поправочный коэффициент увеличивается при уменьшении m . Например, для $m=4$ он приблизительно равен 1,40. Уравнение (92) было подтверждено прямыми измерениями удлинений тензосметром А. Гугенбергера ¹⁾. При этих опытах тензосметр устанавливался на внутренних и наружных волокнах витков винтовой пружины. Эта теория осветила вопрос, почему в мощных винтовых пружинах железнодорожных вагонов трещины обыкновенно начинают появляться на внутренней стороне витков.

При выборе для расчета пружин допускаемых напряжений большое значение имеет вопрос о сопротивлении их колебаниям. Ф. Ли ²⁾ приводит некоторые опытные данные относительно усталости винтовых пружин.

Если винтовая пружина находится под действием крутящего момента M относительно оси цилиндра, то упругое удлинение δ и угол поворота концов пружины ψ найдутся из следующих выражений:

$$\delta = Mlr \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (93)$$

$$\psi = M \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\beta} + \frac{\sin^2 \alpha}{C} \right) l. \quad (94)$$

Если длинная винтовая пружина кругового поперечного сечения подвергается чистому изгибу под влиянием пары сил M , приложенных к концам и действующих в плоскости, проходящей через ось цилиндра, то кривизна этой оси определится формулой

$$\frac{1}{\rho} = \frac{16M}{\pi d^4 \sin \alpha} \left[\frac{2(1 + \sin^2 \alpha)}{E} + \frac{\cos^2 \alpha}{G} \right]. \quad (95)$$

Этим уравнением можно пользоваться при нахождении бокового перемещения винтовой пружины и при исследовании устойчивости пружины при осевом сжатии ³⁾. Поперечные колебания винтовых

¹⁾ См. упомянутую на стр. 557 работу А. Гугенбергера.

²⁾ Lee F. G., Heywood F. The failure of some steel wires under repeated torsional stresses at various mean stresses determined from experiments on helical springs. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1927, vol. 1, April 8, pp. 403—443, discussion: pp. 443—463.

³⁾ Timoshenko S. Stabilitätsprobleme der Elastizität. Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik. Bd. 4, Lieferung 1, Leipzig, J. A. Barth, 1929, SS. 81—145. См. S. 117. [Перевод на русский язык: «Проблемы упругой устойчивости» в сборнике: Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М., изд-во «Наука», 1970, 808 стр. Стр. 553—643. См. стр. 602.]

пружин были обсуждены В. Бирнбаумом ¹⁾. А. Кастилиано ²⁾ и Г. Резаль ³⁾ разработали теорию конических спиральных пружин.

Ф. Мейер ⁴⁾ исследовал несколько специальных случаев этой теории.

§ 24. Кольцевые пружины

К. Ветцель ⁵⁾ воспользовался представленной на рис. 33 системой для того, чтобы повысить удельную работоспособность пружины. При осевой нагрузке наружные кольца пружины находятся под действием растягивающих сил, внутреннее — под действием сжимающих сил.

§ 25. Изгиб прямоугольной пластинки по цилиндрической поверхности ⁶⁾

Если длина прямоугольной пластинки велика по сравнению с ее шириной и нагрузка постоянна по всей длине, то поверхность изгиба в точках, достаточно далеко расположенных от коротких сторон пластинки, можно рассматривать как цилиндрическую. В этом случае для вычисления прогиба и изгибных напряжений достаточно рассмотреть изгиб полосы AB (рис. 34) шириной, равной единице. Если толщину пластинки обозначить через $2h$, а прогиб ее — через w , то уравнение упругой полосы AB будет

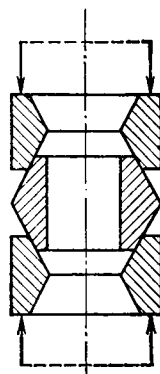


Рис. 33. Кольцевая пружина.

$$B \frac{d^2w}{dx^2} = -M, \quad (96)$$

¹⁾ B i r n b a u m W. Untersuchung der Biegungsschwingungen von Schraubenfedern. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1925, Jahrgang 16, Heft 3, SS. 74—78.

²⁾ C a s t i g l i a n o A. Theorie der Biegungs- und Torsionsfedern. Aus dem italienischen Übersetzt von Richart Totz. Wien, C. Gerold's Sohn, 1888, 100 S. См. S. 66.

³⁾ R é s a l H. Sur les propriétés de la loxodromie d'un cône de revolution et leur application au ressort conique. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1892, I Semestre, tome 114, № 4, pp. 147—152.

⁴⁾ M e y e r V. Die Berechnung der Evolutfeder (Bufferspirale). Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1900, Bd. 44, № 52, SS. 1791—1793.

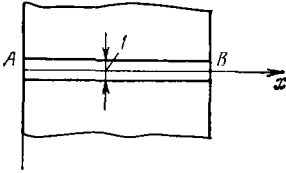
⁵⁾ W e t z e l C. Eine neue Bauart für Reibungspuffer. Schweizerische Bauzeitung, 1924. Bd. 83, № 11, März 15, SS. 128—129. См. также W i k a n d e r O. Characteristics of the ring spring. American Machinist, 1924, vol. 60, № 7, pp. 253—254.

⁶⁾ Об общей теории пластинок и решениях различных задач этой теории см. статью G e c k e l e r J. W. Biegung. Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, Bd. 3, Leipzig, J. A. Barth, 1927, SS. 130—191.

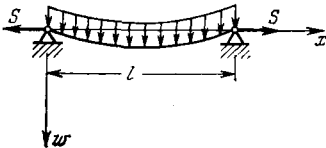
где

$$B = \frac{2Eh^3}{3(1-\mu^2)}$$

представляет жесткость пластинки на изгиб. Рассмотрим равномерно нагруженную пластинку со свободно опертыми краями, допустив, что при изгибе ее края не могут перемещаться в направлении оси x . Тогда изгиб элементарной полосы AB будет связан с ее растяжением в направлении оси x . Величину растягивающей силы S мы определим из того условия, что удлинение полосы должно быть равно разности между длиной линии прогиба и хорды AB . Положив



$$w = f \sin \frac{\pi x}{l},$$



получим хорошее приближение для S . Удлинение центральной оси полосы в этом случае составит

Рис. 34. Изгиб прямоугольной полосы по цилиндрической поверхности.

$$\Lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \frac{\pi^2 f^2}{4l}. \quad (97)$$

Приняв для величины прогиба приближенное выражение (см. § 8)

$$f = \frac{f_0}{1 + \alpha},$$

где

$$f_0 = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{B},$$

и

$$\alpha = \frac{Sl^2}{B\pi^2}.$$

и допустив, что Λ равно удлинению центральной оси

$$\frac{Sl(1-\mu^2)}{2Eh},$$

получим для определения α следующее уравнение:

$$\alpha(1 + \alpha)^2 = \frac{3f_0}{4h^2}. \quad (98)$$

Зная же α и воспользовавшись табл. 6 (стр. 586), найдем прогиб пластинки и величину соответствующего изгибающего момента.

Для случая *заделанной* по краям прямоугольной пластинки можно применить тот же приближенный метод решения и определить растягивающую силу S . Примем уравнение линии прогибов в виде

$$w = \frac{f}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right),$$

тогда для определения α получим следующее уравнение ¹⁾:

$$\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{4} \right)^2 = \frac{3f_0^2}{4h^2}. \quad (99)$$

Если полоса AB имеет первоначальную кривизну, определяемую уравнением

$$w_0 = b \sin \frac{\pi x}{l},$$

то приближенное выражение кривой изгиба (см. § 7) имеет вид

$$w = \frac{f_0}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{b\alpha}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l},$$

и α определяется из следующего уравнения:

$$\frac{(f_0 - b\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} + \frac{2b(f_0 - b\alpha)}{1+\alpha} = \frac{4\alpha h^2}{3}. \quad (100)$$

Следует заметить, что изгибные напряжения могут быть значительно уменьшены, если применять пластинки с первоначальной кривизной.

§ 26. Жесткие прямоугольные пластинки

Для равномерно нагруженной прямоугольной пластинки со свободно опертыми краями прогиб посередине равен

$$w = \beta \frac{qa^4}{E(2h)^3}, \quad (101)$$

¹⁾ Численные таблицы для расчета прогиба и напряжений в равномерно нагруженных прямоугольных пластинках составлены И. Бубновым: см. В о о б н о в И. Г. On the stresses in a ship's bottom plating due to water pressure. Transactions of the Institution of Naval Architects, 1902, vol. 44, March, pp. 15—46; см. также Б у б н о в И. Г. Строительная механика корабля, часть II. С.-Петербург, типография Морского министерства при Главном Адмиралтействе, 1914, стр. 455, 465, 490. [См. также Б у б н о в И. Г. Напряжения в обшивке судов от давления воды. С.-Петербург, типолитография А. Э. Винеке, 1904, 93 стр. и перепечатку этой работы в сборнике: Б у б н о в И. Г. Труды по теории пластин. М., Гостехиздат, 1953, стр. 11—100.]

где a — длина меньшей стороны пластинки, $2h$ — толщина пластинки, β — коэффициент, зависящий от отношения b/a размеров сторон пластинки. Если M_1 и M_2 — изгибающие моменты ¹⁾, отнесенные к единице длины размера, параллельного сторонам a и b , то

$$\begin{aligned} (M_1)_{\max} &= \beta_1 qa^2, \\ (M_2)_{\max} &= \beta_2 qa^2. \end{aligned} \quad (102)$$

Численные значения коэффициентов β , β_1 и β_2 приведены также в табл. 11 ($\mu=0,3$).

Таблица 11

b/a	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	
β	0,0443	0,0530	0,0616	0,0697	0,0770	0,0843	0,0906	
β_1	0,0479	0,0553	0,0626	0,0693	0,0753	0,0812	0,0862	
β_2	0,0479	0,0494	0,0501	0,0504	0,0506	0,0500	0,0493	
b/a	1,7	1,8	1,9	2,0	3,0	4,0	5,0	∞
β	0,0964	0,1017	0,1064	0,1106	0,1336	0,1400	0,1416	0,1422
β_1	0,0908	0,0948	0,0985	0,1017	0,1189	0,1235	0,1246	0,1250
β_2	0,0486	0,0479	0,0471	0,0464	0,0404	0,0384	0,0375	0,0375

Для случая *прямоугольной пластинки с заделанными краями* значения β и β_1 приведены в табл. 12.

Таблица 12

b/a	1,00	1,25	1,50	1,75	2,0	∞
β	0,0138	0,0199	0,0240	0,0264	0,0277	0,0284
β_1	0,0513	0,0665	0,0757	0,0817	0,0829	0,0833

Мы видим, что значения максимального прогиба и максимального изгибающего момента при $b/a=2$ уже достаточно близки соот-

¹⁾ Б у б н о в И. Строительная механика корабля, часть II. С.-Петербург, типография Морского министерства при Главном Адмиралтействе, 1914, стр. 445. Н е п с к у Н. Über den Spannungszustand in rechteckigen ebenen Platten bei gleichmäßig verteilter und bei konzentrierten Belastung. München, Oldenburg Verlag, 1913, 94 S. Dissertation. Darmstadt Technische Hochschule, 1913.

ветственным значениям для очень длинных пластинок. Из этого следует, что для пластинок конечных размеров (при $b/a \geq 2$) можно пользоваться как приближением зависимостями (98)—(100), выведенными для бесконечно длинных пластин.

§ 27. Растягивающие и сжимающие температурные напряжения в стержнях

При проектировании машин часто приходится иметь дело с напряжениями, возникающими от неравномерного нагрева или от того, что свободному расширению тела препятствуют закрепления. Такие напряжения могут достигать значительной величины и поэтому должны учитываться при расчетах. Если при нагревании призматический стержень не имеет возможности расширяться, то в нем появляются продольные сжимающие напряжения, равные

$$\sigma = \alpha E (t - t_0), \quad (103)$$

где α — коэффициент линейного температурного расширения материала; $t - t_0$ — разность температур, E — модуль упругости, который при нагревании мы считаем неизменным. С аналогичными задачами приходится встречаться и в частях машин, изготовленных из разных материалов. Вследствие разницы коэффициентов линейного температурного расширения в них могут появляться значительные напряжения при нагревании. На рис. 35, *a* изображена медная трубка *B*, сжатая стальным болтом *A*. Увеличение сжимающей силы *P* в трубке *B* при равномерном нагревании всей конструкции равно

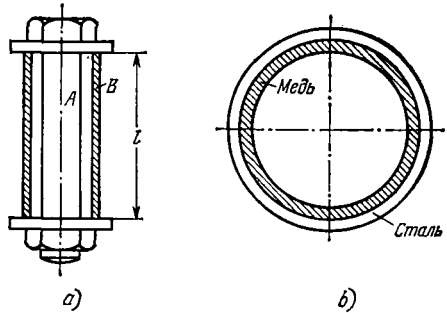


Рис. 35. К задаче о температурных напряжениях в болтах и кольцах.

$$P = \frac{(\alpha_m - \alpha_c)(t - t_0) E_c F_c}{1 + \frac{E_c F_c}{E_m F_m}}, \quad (104)$$

где α_m — коэффициент линейного температурного расширения меди; E_m — модуль упругости меди; F_m — площадь поперечного сечения медной трубки; α_c , E_c , F_c — те же величины для стали. Это же уравнение может быть применено и для случая, изображенного на рис. 35, *b*, в котором стальная трубка насажена на медную.

§ 28. Изгиб стержня вследствие температурных напряжений

Если призматический стержень со свободными концами нагревать таким образом, чтобы по высоте поперечного сечения температура менялась по линейному закону, то ось стержня изогнется, и кривизна ее определится уравнением

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h}, \quad (105)$$

где $t_1 - t_2$ — разница температур наиболее удаленных друг от друга волокон, h — высота поперечного сечения. Если поворот концов стержня запрещен и высота его совпадает с одной из главных осей инерции поперечного сечения, то по концам возникает момент, препятствующий изгибу, равный $M = EJ\alpha(t_1 - t_2)/h$. Если центр

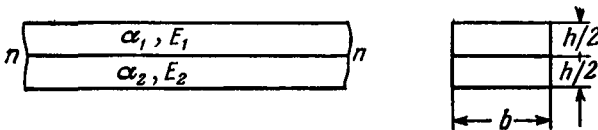


Рис. 36. Стержень из двух материалов.

тяжести поперечного сечения находится на половине высоты сечения, то соответствующие температурные напряжения равны

$$\sigma = \frac{E\alpha(t_1 - t_2)}{2}. \quad (106)$$

Если стержень составлен из двух различных материалов с различными коэффициентами линейного температурного расширения, то изгиб получится и при равномерном нагреве (рис. 36). Этим явлением пользуются в различных приборах, таких, как термометры, термостаты. Если коэффициент линейного температурного расширения нижней половины бруса α_2 больше коэффициента α_1 линейного температурного расширения верхней половины стержня, то изгиб при нагревании будет обращен выпуклостью книзу. Помимо изгиба, верхняя часть стержня будет растянута, а нижняя — сжата. Если через P мы обозначим продольные силы, то радиус кривизны r стержня при изгибе под влиянием нагревания может быть определен из того условия, что на границе nn удлинения обоих материалов долж-

ны быть равны, поэтому $\alpha_1 t + \frac{2P}{E_1 b h} + \frac{h}{4r} = \alpha_2 t - \frac{2P}{E_2 b h} - \frac{h}{4r}$.

На основании этого уравнения и уравнения равновесия

$$\frac{Ph}{2} = \frac{E_1 J_1}{r} + \frac{E_2 J_2}{r}$$

получим для определения r следующее уравнение:

$$\frac{4}{bh^2r} (E_1 J_1 + E_2 J_2) \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) = (\alpha_2 - \alpha_1) t - \frac{h}{2r}.$$

Зная r , легко вычислить напряжения от изгиба и растяжения или сжатия.

§ 29. Изгиб пластинок вследствие температурных напряжений

Будем нагревать пластинку одинаковой толщины со свободными краями так, чтобы в плоскостях, параллельных срединной плоскости пластинки, температура оставалась постоянной, а по толщине пластинки она менялась по линейному закону. Тогда пластинка изогнется по шаровой поверхности радиуса r , который определим из уравнения (105). Если же края пластинки не поворачиваются, то пластинка при нагревании останется плоской, но одновременно появятся равномерно распределенные изгибающие моменты, величина которых, отнесенная к единице длины контура пластинки, равна

$$M = B \frac{\alpha (t_1 - t_2) (1 + \mu)}{h}.$$

Наибольшие температурные напряжения равны

$$\sigma = \frac{E}{1 - \mu} \frac{\alpha (t_1 - t_2)}{2}. \quad (107)$$

Эти напряжения не зависят от толщины пластинки, если сделать допущение, что разница температур $t_1 - t_2$ на обеих сторонах пластинки постоянна. Обыкновенно же разница температур возрастает вместе с толщиной пластинки, поэтому температурные напряжения в толстых пластинках больше, чем в тонких. Если пластинку закрепить не по всему контуру, то от нагревания пластинка будет изгибаться. Тогда задача сводится к решению общих уравнений изгиба пластинки, по краям которой распределены силы и пары сил ¹⁾.

Если температура пластинки изменяется по срединной плоскости, но по толщине пластинки остается постоянной, то имеет место плоская задача распределения напряжений. Ф. Нейман ²⁾ обсудил простейший случай этого рода, когда температура круглой пластинки есть функция одного только радиуса.

¹⁾ Geckeler J. W. См. его работу, упомянутую в сноске ⁶⁾ на стр. 625.

²⁾ Neumann F. E. Die Gesetze der Doppelbrechung des Lichts in komprimierten oder ungleichförmig erwärmten unkrystallinischen Körpern. Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1841, 2 Theil, SS. 1—254; ср. также Leon A. V. Spannungen und Formänderungen eines Hohlzylinders und einer Hohlkugel, die von ihnen erwärmt werden, unter den Annahme eines linearen Temperaturverteilungsgesetzes. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1905, Bd. 52, Heft 2, SS. 174—190.

§ 30. Остаточные напряжения при пластических деформациях

Остаточные напряжения в упругих телах появляются от различных причин: укажем кратко на эти причины: пластическая деформация в одной какой-либо части тела, холодная обработка материала прокаткой или протяжкой, нагрев при неравномерном охлаждении, закаливание. В качестве примера рассмотрим случай *чистого изгиба*. Если изгиб бруса будет происходить за пределом пропорциональности, то напряжения в продольных волокнах не будут больше пропорциональны удлинениям, и распределение напряжений по высоте поперечного сечения не будет следовать уже

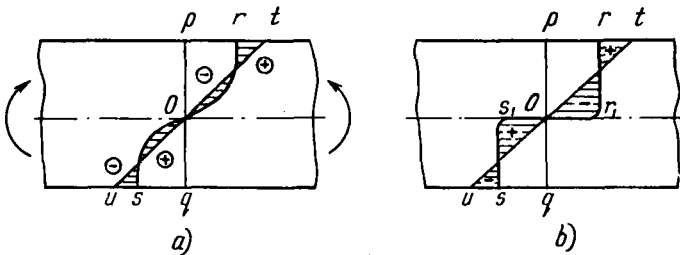


Рис. 37. Остаточные напряжения, обусловленные пластическим изгибом.

линейному закону. Мы уже видели (см. § 7), что закон распределения напряжений можно получить в этом случае с хорошим приближением, если допустить, что и за пределом пропорциональности поперечные сечения остаются плоскими. Тогда удлинение и сжатие продольных волокон пропорционально расстоянию их от нейтральной оси. Если на основании опытов известны кривые растяжения и сжатия, то для каждого частного случая легко получить распределение напряжений. Особо просто решить вопрос в случае прямоугольного поперечного сечения, когда кривые растяжения и сжатия получаются одинаковыми. Тогда нейтральная ось проходит через центр тяжести поперечного сечения, кривые растяжения и сжатия непосредственно дают распределение напряжений, и численные значения наибольших растягивающих и сжимающих напряжений в сечении для какого-либо изгибающего момента определяются на основании этих кривых.

Пусть кривая rOs (рис. 37) представляет распределение напряжений для какой-нибудь заданной величины изгибающего момента, настолько значительного, чтобы вызвать пластическую деформацию. Если действие момента прекращается, то в стержне все же возникают остаточные напряжения, вызванные текучестью материала. Величину этих остаточных напряжений мы найдем, исходя из предположения, что при разгрузке материал стержня следует закону

Гука; тогда соответствующие напряжения изобразятся прямой линией tOu . Наибольшую ординату pt мы найдем из того условия, что напряжения, изображенные треугольником ptO и кривой prO , должны дать одинаковые моменты. Разница в напряжениях, изображенных кривой rOs и прямой tOu , показанная на рис. 37, *a* заштрихованной площадью, представляет распределение остаточных напряжений, возникающих от текучести материала. Распределение остаточных напряжений становится особенно простым для материалов, имеющих ясно выраженный предел текучести, т. е. когда возможно пренебречь возрастанием напряжений при пластическом растяжении. Если вызванная изгибом стержня кривизна достаточно велика, то закон распределения напряжений приближается к виду, показанному на рис. 37, *b* в виде прямоугольников prr_1O и qss_1O . Исчезающие при разгрузке напряжения даны прямой tOu . Из равенства статических моментов треугольника ptO и прямоугольника prr_1O относительно оси s_1Or_1 заключаем, что остаточное напряжение rt в самом удаленном волокне равно половине первоначального напряжения.

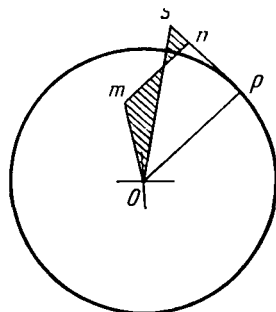


Рис. 38. Остаточные напряжения, обусловленные пластическим кручением.

Аналогичный метод для определения остаточных напряжений можно применить и в случае кручения круговых цилиндрических валов. Если предположить, что при кручении вала за пределом текучести радиусы поперечных сечений остаются прямыми, то сдвиг будет пропорционален радиальному расстоянию, и закон распределения напряжений по радиусу при сдвиге изобразится кривой линией Omn (рис. 38). Если же допустить, что при разгрузке материал вала будет следовать закону Гука, то напряжения, представленные прямой линией Os должны быть вычтены из напряжений, представленных кривой линией Omn . Остаточные напряжения, вызванные пластической деформацией материала, показаны штриховкой. Величины этих напряжений найдем из того условия, что моменты кручения, соответствующие закону распределения напряжений Omn , равны моментам, соответствующим линейному закону распределения напряжения Osp . Пластическую деформацию при кручении стержней некруглого поперечного сечения исследовали А. Надаи ¹⁾ и Э. Треффц ²⁾.

¹⁾ N á d a i A. Der Beginn des Fließvorganges in einem tordierten Stab. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1923, Bd. 3, Heft 6, SS. 442—454.

²⁾ T r e f f t z E. Über die Spannungsverteilung in tordierten Stäben bei teilweiser Überschreitung der Fließgrenze. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1925, Bd. 5, Heft 1, SS. 64—73.

Б. Сен-Венан ¹⁾ и Л. Турнер исследовали пластическую деформацию толстостенных цилиндров.

Пусть p — внутреннее давление, τ_s — предел текучести при сдвиге, a и b — соответственно внутренний и внешний радиусы цилиндра; тогда внутреннее давление, при котором материал на внутренней стороне цилиндра начинает течь, определится из выражения

$$p = \tau_s \frac{b^2 - a^2}{b^2}. \quad (108)$$

Если давление выше этого значения, то на внутренней поверхности цилиндра образуется зона пластической деформации. Радиальные и касательные составляющие напряжения в этой зоне на расстоянии r от оси найдутся из следующих формул:

$$\sigma_r = -p + 2\tau_s \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma_t = -p + 2\tau_s \left(\ln \frac{r}{a} + 1 \right), \quad (109)$$

если не принимать во внимание возрастания напряжений при пластическом растяжении. Наибольшую величину давления p получим, если весь цилиндр будет находиться в пластическом состоянии. Мы найдем его из первого уравнения (109), положив в нем $r=b$ и $\sigma_r=0$. Тогда имеем

$$p_{\max} = 2\tau_s \ln \frac{b}{a}. \quad (110)$$

В этом случае распределение напряжений определится следующими выражениями:

$$\sigma_r = 2\tau_s \ln \frac{r}{b}, \quad \sigma_t = 2\tau_s \left(1 + \ln \frac{r}{b} \right). \quad (111)$$

Если допустить, что материал стержня при разгрузке следует закону Гука, то остаточные напряжения от пластической деформации определяются как разница между напряжениями, полученными из уравнений (111) и напряжениями, определяемыми по формуле Ламэ, соответствующими внутреннему сжимающему давлению $p = 2\tau_s (\ln b/a)$. Тогда остаточные напряжения определяются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2\tau_s \left[\ln \frac{r}{b} - \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \ln \frac{b}{a} \right], \\ \sigma_t &= 2\tau_s \left[1 + \ln \frac{r}{b} - \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \ln \frac{b}{a} \right], \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

¹⁾ Saint-Venant B. Sur l'intensité des forces capables de déformer, avec continuité des blocs ductiles, cylindriques, pleins ou évidés, et placés dans diverses circonstances. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1872, tome 74, № 16, 1 Semestre, pp. 1009—1015; См. также Todhunter I., Pearson K. A history of the theory of elasticity and of the strength of materials, vol. 2, Part 1, Cambridge, University Press, 1893, 762 p. См. p. 172.

и соответствующее касательное максимальное напряжение будет

$$\tau = \tau_s \left(1 - \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} \right). \quad (113)$$

Если

$$\frac{b}{a} = 2,24,$$

то

$$\tau = -\tau_s.$$

Если $b/a > 2,24$, то при снятии внутреннего давления материал начинает течь. Для того чтобы при разгрузке существовали зависимости как для идеально упругого тела, сжимающее давление не должно превышать предела

$$p = 2\tau_s \frac{b^2 - a^2}{b^2}. \quad (114)$$

Из изложенного выше мы видим, что при нагружении внутренним давлением толстостенного цилиндра на внутренней поверхности его появляются остаточные сжимающие напряжения. Такое распределение остаточных напряжений очень благоприятно при проектировании цилиндров высокого внутреннего давления. Ухатиус несколько десятилетий назад исследовал расширение цилиндров при изготовлении орудий ¹⁾. Аналогичное распределение остаточных напряжений при превышении предела текучести можно наблюдать и во вращающихся цилиндрах и дисковых колесах центрифуг. Этот вопрос обсудили А. Стодола ²⁾, Г. Генки ³⁾ и Ф. Ласло ⁴⁾.

¹⁾ [Uchatius [F.] Über die Erhöhung des Elastizitätsgrenze der Metalle durch dauernde Spannung. Dingers polytechnisches Journal, 1877, Bd. 223, Heft 3, SS. 242—246.] Дальнейшую литературу см.: Jakobson L. Resistance et construction de bouches à feu autofretage. Paris, O. Doin et fils, 1909, 370 p. (Encyclopédie Scientifique, Bibliothèque de mécanique appliquée et génie 23); см. также Brown S. J. A method of gun construction by radial expansion. Proceedings of the United States Naval Institute, 1920, vol. 46, № 214, December, pp. 1941—1970.

²⁾ Stodola A. Dampf- und Gas-Turbinen. Mit einem Anhang über die Ausichten der Wärmekraft-Maschinen. 5 Auflage. Berlin, J. Springer, 1922, 1111 S. См. S. 893.

³⁾ Hensky H. Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1924, Bd. 4, Heft 4, SS. 323—334. [Перевод на русский язык: Генки Г. К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных напряжений. Теория пластичности, сборник статей. М., [ИЛ], 1948, стр. 114—135.]

⁴⁾ László F. Geschleuderte Umdrehungskörper im Gebiet bleibender Deformation. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1925, Bd. 5, Heft 4, SS. 281—293.

§ 31. Остаточные напряжения в поковках и отливках

В поковках и отливках могут получиться значительные остаточные напряжения вследствие неравномерного охлаждения. Из опытов известно, что во внешних слоях больших кованных цилиндров, которые употребляются в современных больших турбинах и генераторах, обычно появляются сжимающие остаточные напряжения, причем величина остаточных кольцевых напряжений доходит иногда до 1000 кг/см^2 . Внутри кованных изделий часто появляются значительные растягивающие напряжения, которые очень нежелательны, потому что величина их достигает величины напряжений, возникающих в процессе работы. Вследствие этого появляется очень высокое напряжение внутри кованных изделий, где механические свойства материала отличаются от свойств на поверхности. Для того чтобы избежать опасности получить дефектный материал в середине кованных изделий, в них просверливают центральное отверстие диаметром 12—15 см и производят по возможности более тщательные испытания материала в середине болванки. Посредством соответствующей термической обработки больших кованных изделий в них можно значительно уменьшить остаточные напряжения.

Нам известно появление в стальном литье и отливках значительных напряжений от неравномерного охлаждения. Поэтому в технике литья, во избежание появления опасных напряжений при отливке, выработаны особые способы обращения с формами и отлитыми изделиями. Первые исследования по этому вопросу произвел Е. Гейн ¹⁾, Р. Штейгер ²⁾ исследовал напряжения, появляющиеся при отливке решетчатых рам.

§ 32. Остаточные напряжения при закалке

Причиной возникающих при закалке стали напряжений является увеличение объема закаливаемой стали. Эти напряжения имеют существенное значение для практики, но мало еще исследованы. Возможность предварительного определения этих напряжений зависит в значительной степени от того, какое количество опытного материала находится в распоряжении инженера, исследующего объемные деформации различных сортов стали при разных скоростях

¹⁾ H e y n E. Über bleibende Spannungen in Werkstücken infolge Abkühlung. Stahl und Eisen, 1907, Jahrgang 27, № 37, SS. 1309—1315; № 38, SS. 1347—1353. См. также M a r t e n s A. Handbuch der Materialkunde für den Maschinenbau, Teil 2. Die technisch wichtigen Eigenschaften der Metalle und Legierungen von Heyn E. Berlin, J. Springer, 1912, 506 S.

²⁾ S t e i g e r R. Über Gußspannungen. Zürich, Gebr. Leemann und Co. 1913, 100 S. Dissertation, Zürich Eigenössische Technische Hochschule 1912/1913, Zürich, 1913.

охлаждения. Такие опыты были произведены Котаро—Гондо¹⁾ и Т. Матцусита²⁾. Очень интересные опыты измерения напряжений при закалке колец, вырезанных из цилиндра толщиной 24,1 см, имеются у Г. Вилле³⁾. Б. Штраусс показал, что в то время, как сплошной цилиндр диаметром в 30 мм при закаливании увеличивает на 0,05 мм свой диаметр, диаметр вырезанного из этого цилиндра кольца толщиной стенки в 2 мм увеличивается на 0,29 мм, так как кольцо могло свободно расширяться. Напротив, при сплошном цилиндре масса ядра не превращается в мартенсит; она старается принять свой первоначальный объем и тянет за собой внешнюю кольцевую оболочку. Происходящие под влиянием закалки нежелательные деформации частей машин, как, например, зубчатых колес, следует приписать происходящему при неравномерном охлаждении неравномерному распределению напряжений.

§ 33. Остаточные напряжения при холодной обработке

Остаточные напряжения, возникающие при холодной обработке, прокатке, протяжке, практически могут иметь громадное значение. В латуни⁴⁾ эти напряжения могут быть иногда причиной разрушения. В прокатанных или холоднотянутых электрических медных проводах остаточные напряжения достигают иногда у поверхности величины в 1500 кг/см². Этим объясняются нежелательные деформации при скручивании.

§ 34. Допускаемые напряжения при статическом нагружении

Назначение допускаемых напряжений имеет для практики очень большое значение. Величина коэффициента безопасности зависит от многих условий: точности определения величины внешних сил,

¹⁾ K o t a r o H o n d a. Tokujirô Matsushita, Sakaê Idei. On the cause of quenching cracks. Journal of the Iron and Steel Institute, 1921, vol. 103, № 1, pp. 251—266; discussion: pp. 267—269. См. также On the cause of quenching cracks. Engineering, 1921, vol. 111, May 13, pp. 595—597.

²⁾ M a t s u s h i t a T. On the slow construction of hardened carbon-steels. The Science Reports of the Tôhoku Imperial University, 1918, series 1, vol. 7, № 1, pp. 43—52 и other investigation on the quenching of carbon steels. The Science Reports of the Tôhoku Imperial University, series 1, 1923, vol. 12, № 1, pp. 7—25.

³⁾ W i l l e H. V. Internal stresses developed by different quenching mediums and their effects. Proceedings of the American Society for Testing Materials, 1915, vol. 15, part 2, technical papers, pp. 27—38; discussion: p. 39—41.

⁴⁾ G r e e n w o o d J. N. The failure of metals through the action of internal stress irregularities with special reference to tool steels. Transactions of the Faraday Society, 1921—1922, vol. 17, part 1, pp. 123—138. См. также M a s i n g G. Das Aufreiben von Messung durch innern spannungen. Zeitschrift für Metallkunde, 1924, Jahrgang 16, Heft 7, July, SS. 257—264 и W e l t e r G. Dynamische Zug-Elastizitätsmessung am Pendelschlagwerk. Zeitschrift für Metallkunde, 1925, Jahrgang, 17, Heft 4, April, SS. 109—114.

точности определения возникающих в рассматриваемом теле напряжений, однородности и качества материала и многих других. Предположим, что этот коэффициент безопасности установлен на основании опытных данных. Рассмотрим, какие допускаемые напряжения должны быть приняты для различных случаев напряженного состояния с тем, чтобы для всех частей конструкции была обеспечена одинаковая прочность.

Для пластичных материалов за основу при назначении допускаемых напряжений обыкновенно берут предел текучести. Если материал не имеет определенного предела текучести, то за такой предел иногда принимают напряжение, при котором остаточное удлинение составляет 0,2%. При статической нагрузке и пластичном материале высокие местные напряжения, появляющиеся вследствие концентрации напряжений вблизи отверстий, выкружек и резких изменений поперечного сечения, обычно не учитываются, потому что они могут вызвать только местную деформацию материала, безопасную для общей конструкции. Если мы имеем простое растяжение или сжатие, то допускаемое напряжение определяется из соотношения

$$\sigma_{\text{доп}} = \frac{\sigma_s}{n}, \quad (115)$$

где σ_s — предел текучести материала, n — коэффициент безопасности. Для общего случая объемного напряженного состояния допускаемое напряжение зависит от теории прочности, которая является критерием для суждения о степени напряженности. Существующие теории прочности обсуждали П. Рот¹⁾, Т. Карман²⁾, В. Лоде³⁾,

1) R o t h P. Die Festigkeitstheorie und die von ihnen abhängigen Formeln des Maschinenbaues, Leipzig, Druck von B. G. Teubner, 1902, 45 S. Dissertation. Berlin Technische Hochschule, 1902. См. также Die Festigkeitstheorien und die von ihnen abhängigen Formeln des Maschinenbaues. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1902, Bd. 48, Heft 2, SS. 285—316.

2) K á r m á n Th. Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1911, Bd. 55, № 42, SS. 1749—1757. [Перепечатка: K á r m á n Th. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1912, Heft 118, SS. 37—68; K á r m á n Th. Collected works. London, Butterworths scientific publication, 1956, vol. 1, pp. 274—303.] K á r m á n Th. Festigkeitsprobleme in Maschinenbau. In: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. 4, Mechanik, Heft 3, № 27. Leipzig, B. G. Teubner, 1910, SS. 311—385. [Перепечатка: K á r m á n Th. Collected works. London, Butterworths scientific publications, 1956, vol. 1, pp. 141—207.] K á r m á n Th., F ö r p l L. Physikalische Grundlagen der Festigkeitslehre. In: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. 4, Mechanik, Heft 5, № 31, Leipzig, B. G. Teubner, 1914, SS. 695—770. [Перепечатка: K á r m á n Th. Collected works, London, Butterworths scientific publications, 1956, vol. 1, pp. 208—273.]

3) L o d e W. Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf die Fließgrenze. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1925, Bd. 5, Heft 2, SS. 142—144 и Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle Eisen, Kupfer and Nickel. Zeitschrift für Physik, 1926, Bd. 36,

М. Рош и А. Эйхингер ¹⁾, Ф. Шлейхер ²⁾ и Б. Хей ³⁾. На практике для пластичного материала обыкновенно пользуются теорией максимальных касательных напряжений. Если главные напряжения мы обозначим через σ_1 , σ_2 и σ_3 и допустим, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то получим следующее условие для назначения прочных размеров:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \frac{\sigma_s}{n}. \quad (116)$$

Для хрупкого материала, как, например, чугун, в основу для определения допускаемых напряжений принимают временное сопротивление при растяжении σ_b или сжатии σ_{-b} , а также теорию наибольших нормальных напряжений. В этом случае уравнение (116) заменится следующим:

$$\sigma_1 \leq \frac{\sigma_b}{n}, \quad \sigma_3 \leq \frac{\sigma_{-b}}{n}. \quad (117)$$

Для хрупкого материала прочность может быть значительно понижена концентрацией местных напряжений. Это обычно компенсируется увеличением коэффициента безопасности n .

§ 35. Допускаемые напряжения при переменном нагружении

В случае простого растяжения и сжатия, если нагрузка часто меняется между отрицательной и равной ей по абсолютному значению положительной величиной, как основу для назначения величины допускаемого напряжения, следует положить предел усталости σ_e . Тогда

$$\sigma_{\text{доп}} = \frac{\sigma_e}{n}. \quad (118)$$

Необходимо при этом заметить, что при определении возникающих при переменной нагрузке напряжений всегда следует прини-

Heft 11/12 SS. 913—939. [Перевод на русский язык: Л о д е В. Влияние среднего напряжения на текучесть металлов. В сб. «Теория пластичности», М., ИЛ, 1948, стр. 168—205.]

¹⁾ R o š M., E i c h i n g e r A. Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr Eidgenössische Materialprüfungsanstalt an der Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Schweiz. Verband für die Materialprüfungen der Technik. Zürich, September, 1927, 14 S. [R o š M., E i c h i n g e r A. Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. Verhandlungen des 2. Internationalen Kongresses für technische Mechanik, 12—17 September, 1926, Zürich. Zürich und Leipzig, Orell Füssli Verlag, 1927, SS. 315—327.] [Перевод на русский язык: Р о ш М., Э й х и н г е р А. Опыты, связанные с выяснением вопроса об опасности разрушения. В сб. «Теория пластичности», М., ИЛ, 1948, стр. 157—167.]

²⁾ S c h l e i c h e r F. Der Spannungszustand an der Fließgrenze (Plastizitätsbedingung). Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1926, Bd. 6, Heft 3, SS. 199—216.

³⁾ H a i g h B. P. The strain-energy function and the elastic limit. Engineering, 1920, vol. 109. January 30, pp. 158—160.

мать во внимание концентрацию напряжений, так как появляющиеся при работе трещины обыкновенно берут начало у точек с высокими местными напряжениями. Если напряжение меняется между двумя пределами σ' и σ'' , то оно может быть разложено на две составляющих

1) постоянную составляющую напряжения

$$\sigma_0 = \frac{\sigma' + \sigma''}{2}$$

и 2) переменную составляющую

$$\sigma_w = \frac{\sigma' - \sigma''}{2}.$$

При вычислении σ_w нужно принимать во внимание концентрацию напряжений ¹⁾. При определении допускаемых напряжений для различных отношений σ_w/σ_0 на практике иногда применяют метод, указанный на рис. 39. На этом рисунке точка A определяет допускаемое напряжение в том случае, если действуют только переменные напряжения [$\sigma' = -\sigma''$], а B определяет допускаемое напряжение при действии лишь постоянного напряжения. Для промежуточных значений переменных напряжений, определяемых величиной отношения σ_w/σ_0 величины допускаемых значений напряжений σ_0 и σ_w

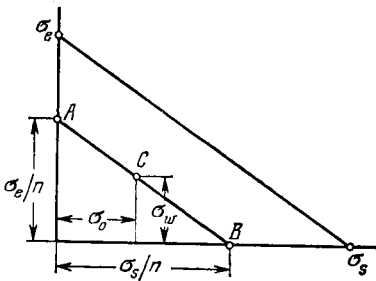


Рис. 39. Допускаемые напряжения при переменном нагружении.

находятся как координаты соответствующей точки C , лежащей на прямой AB . На основании рис. 39 имеем

$$\frac{\sigma_w}{\sigma_s - \sigma_0} = \frac{\sigma_e}{\sigma_s},$$

откуда

$$\frac{1}{n} = \frac{\sigma_w}{\sigma_e} + \frac{\sigma_0}{\sigma_s}. \quad (119)$$

При помощи этого уравнения можно определить составляющие напряжения: постоянную и переменную. Решая это уравнение отно-

¹⁾ В валах с переменным поперечным сечением радиусы закругления определяются иногда так, чтобы коэффициент концентрации напряжений был не больше двух. Коэффициент 2 рекомендуется принимать и тогда, когда не производятся особые исследования концентрации напряжения.

сительно σ_0 или σ_w , найдем допускаемые постоянную и переменную составляющие напряжения для данного их отношения:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_s}{n} \frac{1}{1 + \frac{\sigma_s}{\sigma_e} \cdot \frac{\sigma_w}{\sigma_0}}, \quad \sigma_w = \frac{\sigma_e}{n} \frac{1}{1 + \frac{\sigma_e}{\sigma_s} \cdot \frac{\sigma_0}{\sigma_w}}. \quad (120)$$

При пространственном напряженном состоянии и переменном нагружении для пластичных материалов можно применить теорию максимальных касательных напряжений¹⁾.

Если нагрузка изменяется между двумя равными пределами противоположных знаков, то для назначения прочных размеров будем иметь следующую формулу:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\sigma_e}{n}. \quad (121)$$

Для других отношений между пределами переменной нагрузки можно составить уравнения, аналогичные уравнениям (119). Если обозначить через σ_{1w} и σ_{3w} переменные составляющие, а через σ_{01} и σ_{03} — постоянные составляющие напряжений σ_1 и σ_3 , то уравнение для определения прочных размеров получит следующий вид:

$$\frac{1}{n} = \frac{\sigma_{1w} - \sigma_{3w}}{\sigma_e} + \frac{\sigma_{01} - \sigma_{03}}{\sigma_s}, \quad (122)$$

где при вычислении σ_{1w} и σ_{3w} нужно принять во внимание концентрацию напряжений.

Случается, что при переменной нагрузке меняется не только величина, но и направление главных напряжений. В этом случае, прежде чем применить уравнение (122), нужно определить положение самых неблагоприятных плоскостей, в которых действуют наибольшие касательные напряжения и пределы, между которыми они меняются. Например, случай, изображенный на рис. 40, имеет место, если к переменному изгибающему моменту добавить постоянный крутящий момент.

¹⁾ Усталость пластичных материалов при комбинированных напряжениях была исследована следующими авторами: *T u r n e r* L. B., The strength of steels in compound stress and endurance under repetition of stress. Engineering, 1911, vol. 92, July 28, pp. 115—117; *M a s o n* W. Alternating stress experiments. Engineering, 1917, vol. 103, February 23, pp. 184—185, 187—190; March 2, pp. 211—213; *S t a n t o n* T. E., *B a t s o n* G. G. On the fatigue resistance of mild steel under various conditions of stress distribution. Engineering, 1916, vol. 102, September 15, № 2646, pp. 269—270; *O n o* A. X-ray examination of inner structure of strained metals. Part I. Chiefly on copper wires. Memoires of the College of Engineering Kyushu Imperial University (Fukuoka), 1921, vol. 2, pp. 117—137; *L e a* F. G., *B u d g e n* H. P. Combined torsional and repeated bending stresses. Engineering, 1926, vol. 122, № 3162, August 20, pp. 242—245. Допускаемые напряжения при переменных напряжениях были обсуждены *V a i l e y* R. W. Ductile materials under variable shear stress. Engineering, 1917, vol. 104, № 2691, July 27, pp. 81—83 и *O n o* A. в его указанной выше работе.

Для $\sigma_1 = +\sigma$ положение плоскости mn максимальных касательных напряжений определяется уравнением $\operatorname{tg} 2\theta = \sigma/2\tau$. Действующее в этой плоскости максимальное касательное напряжение равно

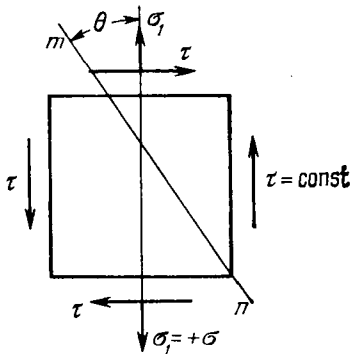


Рис. 40. Напряжения при совместном действии изгиба и кручения.

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Минимальное касательное напряжение в этой же плоскости будет при $\sigma_1 = -\sigma$. Постоянную и переменную составляющие касательных напряжений мы найдем из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= \frac{2\tau^2}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} \\ \sigma_w &= \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

Если для определения допускаемых напряжений воспользоваться методом, указанным на рис. 39, и теорией максимальных касательных напряжений, то из уравнений (120) и (123) получим

$$\frac{4\tau^2}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} = \frac{\sigma_s}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sigma_s}{\sigma_e} \cdot \frac{\tau_w}{\tau_0}}; \quad \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} = \frac{\sigma_e}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sigma_e}{\sigma_s} \cdot \frac{\tau_0}{\tau_w}}.$$

Отсюда для назначения прочных размеров найдем следующие формулы:

$$\tau = \frac{\sigma_s}{2n} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{4\tau^2}}}{1 + \frac{\sigma_s}{\sigma_e} \cdot \frac{\sigma^2}{4\tau^2}}, \quad \sigma = \frac{\sigma_e}{n} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{4\tau^2}{\sigma^2}}}{1 + \frac{\sigma_e}{\sigma_s} \cdot \frac{4\tau^2}{\sigma^2}}. \quad (124)$$

При этом следует иметь в виду, что для вычисления σ необходимо принимать во внимание концентрацию напряжений. Иногда для случаев совместного действия изгиба и кручения при переменной нагрузке пользуются уравнением (37), выведенным в § 9 в предположении постоянной нагрузки. В этом случае изменение изгибающего момента можно учесть следующим образом: вместо изгибающего момента M подставляют в уравнение величину kM , где k — отношение допускаемых напряжений для статического нагружения и случая перемены знака; если не производится особого исследования концентрации напряжений, то k обыкновенно приравнивают двум. Тогда уравнение для назначения прочных размеров вала

принимает вид

$$\frac{\sigma_s}{n} = \frac{1}{W} \sqrt{(kM_b)^2 + M_t^2}. \quad (125)$$

В изложенном выше исследовании допускаемые напряжения определялись из рассмотрения самих напряжений. Бывают случаи, при рассмотрении которых необходимо принимать во внимание максимальную деформацию или упругую устойчивость частей машин. Этот случай рассмотрен в нашей статье «Вопросы упругой устойчивости»¹⁾.

¹⁾ T i m o s h e n k o S. Stabilitätsprobleme der Elastizität. In: Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik. Bd. 4, Lieferung 1, Leipzig, J. A. Barth, 1929, SS. 81—145. [Перевод на русский язык: Т и м о ш е н к о С. П. Вопросы устойчивости упругих систем. Л., Кубуч, 1935, 119 стр. Перепечатка: Т и м о ш е н к о С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М., изд-во «Наука», 1971, стр. 553—643.]

Д. И. ЖУРАВСКИЙ И ЕГО ВКЛАД В ТЕОРИЮ СООРУЖЕНИЙ

D. I. Jourawski and his contribution to theory of structures. Federhofer—Girkmann—Festschrift. Beiträge zur angewandten Mechanik. Franz Deuticke Verlag. Wien, 1950, pp. 115—123.

Д. И. Журавский (1821—1891 гг.) закончил Институт инженеров путей сообщения в С.-Петербурге в 1842 г. Этот институт, основанный в 1809 г., был организован в сотрудничестве с французскими инженерами, и его программа была подобна французской школе мостов и дорог в Париже. Такое сотрудничество оказало большое влияние на развитие науки о сопротивлении материалов и теории сооружений в России. Первыми профессорами этого института были французские инженеры. С 1820 по 1830 г. профессорами по механике в ней были Г. Ламэ и Б. Клапейрон. В это время эти ученые опубликовали свой известный труд «Внутреннее равновесие сплошных однородных тел»¹⁾, который оказал большое влияние на развитие теории упругости. В связи со строительством собора Святого Исакия в С.-Петербурге они создали свою теорию арок и провели обширное экспериментальное исследование механических свойств русского железа, которое использовалось для висячих мостов²⁾ в этом городе. Во времена Д. И. Журавского (1838—1842 гг.) в Институте не было французских профессоров и преподавание было сосредоточено в руках русских. Математику преподавал М. В. Остроградский, хорошо известный математик³⁾ и выдающийся профессор. В своих лекциях он обычно шел далеко за пределы требований программы и, несомненно, Д. И. Журавский имел возможность по-

¹⁾ Lamé G., Clapeyron B. P. E. Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Grelle), 1831. Bd. 7, SS. 150—169, 237—252, 381—413.

²⁾ Это были первые висячие мосты, спроектированные в Европе.

³⁾ М. В. Остроградский (1801—1861 гг.) — ученик О. Коши, С. Пуассона и Фурье — в основном известен своей работой по вариационному исчислению. В «Истории вариационного исчисления» И. Тодхантера глава V (стр. 111—139) посвящена работе М. В. Остроградского (T o d h u n t e r I. A history of the progress of the calculus of variations during the nineteenth century. MacMillan and Co., London, 1861).

М. В. Остроградский работал также в области механики и опубликовал важные статьи по баллистике, гидродинамике и теории упругости. Его работа по теории упругости обсуждалась в томе I «Истории теории упругости» И. Тодхантера и К. Пирсона (T o d h u n t e r I., P e a r s o n K. A history of the theory of elasticity and of the strength of materials. From Galilei to the present time. Cambridge, University Press, vol. 1. Galilei to Saint-Venant, 1639—1850, 1886, pp. 404—407.)

лучить очень хорошую математическую подготовку. Упругие свойства материалов Д. И. Журавский изучал под руководством А. Т. Купфера, который особенно интересовался экспериментальным определением упругих констант различных материалов и написал выдающуюся в этой области работу ¹⁾.

Карьера Д. И. Журавского после получения образования была тесно связана с развитием железнодорожного строительства в России. Первые русские железные дороги были предложены в 1838 г. Это были две короткие линии, Петербург—Царское Село и Петербург—Петергоф, в строительстве которых принимал участие известный австрийский инженер Франц Герстнер. В 1842 г. началось строительство железной дороги между Петербургом и Москвой. Сразу же после окончания института Д. И. Журавский был направлен на эту важную работу. Его выдающиеся способности вскоре были замечены, и в 1844 г. он получил задание по проектированию и строительству одного из важнейших сооружений на линии моста через реку Веребье (девять пролетов длиной каждый 54 м с проезжей частью, возвышавшейся на 51 м над поверхностью воды).

В условиях России наиболее экономичными были деревянные мосты и для Веребье был выбран мост типа Гау, который применялся в течение нескольких лет при строительстве американских железных дорог. Однако в это время не существовало какой-либо теории анализа ферм ²⁾, и Д. И. Журавский должен был не только конструировать мост, но также найти метод расчета напряжений в его элементах. Д. И. Журавский преуспел в этой работе и дал общий метод анализа ферм с параллельными поясами.

Рассматривая ферму (показанную на рис. 1, а) Д. И. Журавский замечает, что тип связи в системе Гау такой, что диагонали могут работать только на сжатие, и в случае равномерного распределенной нагрузки будут работать только элементы, показанные сплош-

¹⁾ И. Тодхантер и К. Пирсон в своей «Истории» (см. том 1, стр. 750) делают следующее замечание относительно работы А. Т. Купфера: «Вероятно, нет более исчерпывающих и тщательных экспериментов, чем те, которые выполнены А. Т. Купфером по определению вибрационных постоянных упругости и температурного эффекта». За свой мемуар в 1852 г. А. Т. Купфер получил премию в Королевском научном обществе в Геттингене.

²⁾ Первые расчеты напряжений в фермах были опубликованы С. Уипплом в его книге «Описание конструкций моста». (Whipple S. Bridge-building, New York, Utica, 1869, 250 p.; первое издание этой книги вышло очень небольшим тиражом в несколько десятков экземпляров в 1847 г.: An essay on bridge building, Utica.) По-видимому, вначале работа С. Уиппла осталась незамеченной инженерами, и Г. Хаупт в предисловии к своей книге «Общая теория конструкций моста» в 1851 г. утверждает, что когда его внимание впервые было обращено на предмет наиболее рационального выбора размеров моста, он столкнулся с невозможностью получить сколько-нибудь удовлетворительную информацию как от инженеров и строителей, так и из книг. [Haupt H. General theory of bridge construction: containing demonstrations of the principles of the art and their application to practice. New York, D. Appleton and company, Philadelphia, G. S. Appleton, 1851, 268 p.]

ными линиями. Таким образом, получается статически определяемая система. Анализируя ферму и исходя из ее симметрии, Д. И. Журавский делает вывод, что нагрузка будет поровну распределена между двумя опорами, и можно допустить, что нагрузки, приходящиеся на левую половину пролета, вместе с половиной нагрузки, приложенной в середине его, передаются на левую опору, а остальные нагрузки — на правую опору. Отправляясь от верхнего центрального

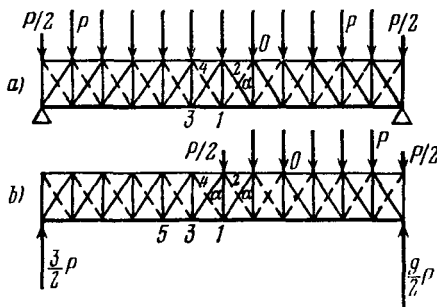


Рис. 1.

узла O , Д. И. Журавский заключает, что нагрузка $1/2 P$, передаваемая на левую опору, будет вызывать в диагонали $O-1$ сжимающее усилие $P/2 \cos \alpha$. Эта сила, передаваясь через узел 1 , будет вызывать растягивающее усилие $P/2$ в вертикальной болтовой стяжке $1-2$ и горизонтальное усилие $1/2 P \operatorname{tg} \alpha$, действующее вдоль нижнего пояса. Рассматривая далее узел 2 , видим, что в дополнение к растягивающему усилию $P/2$ в стяжке в ней будет действовать вертикально вниз нагрузка P . Очевидно, что эти две силы вместе будут вызывать в диагонали $2-3$ сжимающее усилие $3/2 P/\cos \alpha$, а в верхнем поясе будет действовать горизонтальное усилие $3/2 P \operatorname{tg} \alpha$. Поступая точно таким же образом с узлами $3, 4, \dots$, Д. И. Журавский находит для растягивающих усилий в остальных стяжках значения $5/2 P, 7/2 P, \dots$, а для сжимающих усилий в диагоналях — $3/2 P/\cos \alpha, 5/2 P/\cos \alpha, \dots$. Видно, что силы в болтовых стяжках и диагоналях возрастают от середины пролета к опорам. В то же самое время усилия в поясах наибольшие в середине пролета и уменьшаются к опорам.

В случае несимметричного нагружения, как показано на рис. 1, б, Д. И. Журавский начинает с определения диагоналей, которые будут участвовать в работе. Зная опорные реакции, он заключает, что первые две нагрузки слева будут передаваться на левую опору и рабочими диагоналями будут те, которые на рисунке отмечены сплошными линиями. Отправляясь далее от узла O и поступая, как прежде, можно легко определить усилия во всех элементах фермы. С помощью этого метода Д. И. Журавский нашел наиболее неблагоприятное распределение нагрузки для каждого элемента моста и вычислил соответствующие максимальные усилия, которые должны приниматься во внимание при выборе для этих элементов необходимых размеров поперечного сечения. Д. И. Журавский сделал модель моста, в которой вертикальные болтовые стяжки бы-

ли из струн. Высота тона струн при нагружении модели давала ему величины возникающих растягивающих усилий.

В действительности задача определения усилий в элементах фермы Гау более сложна, так как при затяжке болтовых стяжек в системе обычно возникают значительные начальные напряжения, которыми невозможно пренебречь при исследовании напряжения.

Д. И. Журавский исследует начальные напряжения, рассматривая сначала одну изолированную панель (рис. 2, а), и показывает, что в результате затяжки вертикальных болтовых стяжек в диагоналях возникает сжатие, а в элементах пояса — растяжение. Однако он предупреждает, что эти напряжения не должны просто складываться с напряжениями, вызванными внешними нагрузками ¹⁾. Чтобы доказать это, он предполагает, что стяжка ab

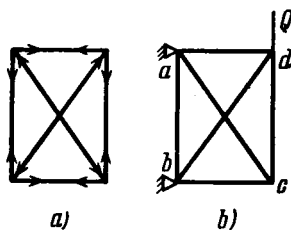


Рис. 2.

(рис. 2, б) закреплена, и рассматривает действие вертикальной нагрузки Q на стяжку cd . Легко заметить, что вследствие действия этой силы Q начальное сжатие в диагонали ac уменьшится, в то время как в диагонали bd оно увеличится. Наиболее неблагоприятное влияние начальной затяжки болтовой стяжки в некоторой панели моста достигается в том случае, когда под действием максимальной перерезывающей силы Q в этой панели в диагонали, такой, как ac на рис. 2, б, будет оставаться только небольшое сжимающее усилие, необходимое для удержания диагонали на своем месте. В таком случае полная величина сдвигающей силы Q будет передаваться второй диагонали и максимальные усилия в болтовых стяжках и диагоналях будут иметь те же самые значения, что и полученные ранее из анализа рис. 1.

В своем дальнейшем исследовании Д. И. Журавский рассматривает также более сложные системы, подобные изображенной на рис. 3, а, и предлагает вычислять усилия в их элементах путем наложения усилий, которые можно найти для двух простых ферм, показанных на рис. 3, б и 3, с.

В заключение Д. И. Журавский рассматривает фермы на трех опорах и дает метод расчета напряжений в них для случая равномерно распределенной нагрузки (рис. 4). Чтобы воспользоваться ранее разработанным методом анализа, Д. И. Журавскому необхо-

¹⁾ Такие приемы расчета практиковались некоторыми инженерами много лет спустя после Д. И. Журавского. См., например, книгу Г. Ребхана: *Rechnerische Holz- und Eisen-Constructionen mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen. Höhere Ingenieur-Wissenschaften*, Wien, Verlag und Druck von Carl Yerold's Sohn, 1856, 602 S.

димо найти положение поперечного сечения mn , определяющего нагрузку, которая распределена вдоль части aO фермы и которая передается на левую опору A . Если положение этого сечения найдено, то становится известным направление диагоналей, которые участвуют в работе, и можно продолжать анализ, как прежде, с верхнего узла O . Положение же поперечного сечения mn Д. И. Журавский определяет на основании двух допущений: 1) что это поперечное сечение совпадает с одной из болтовых стяжек (стяжка $O—O$ на рис. 4) и что эта стяжка остается вертикальной при прогибе фермы. Для определения положения этого поперечного сечения он использует метод последовательных приближений. Допустим, что стяжка $O—O$ совпадает с искомым поперечным сечением.

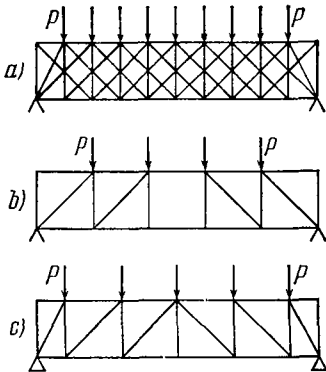


Рис. 3.

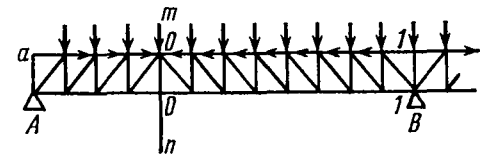


Рис. 4.

Тогда станут известными рабочие диагонали, а усилия в узлах, действующие вдоль верхнего пояса, будут определяться, как прежде. Рассматривая теперь участок $O—I$ верхнего пояса как балку, опертую по концам O и I , можно легко найти силу, передаваемую на неподвижную опору O . Если расположение стяжки $O—O$ было выбрано удовлетворительным, то эта сила должна уравниваться силами, действующими вдоль участка $O—a$ верхнего пояса. Таким путем Д. И. Журавский решает свою статически неопределенную задачу.

В конструкции своего моста Д. И. Журавский очень широко пользовался деревянными балками большой высоты и составными деревянными балками. Используемый материал очень слабо сопротивлялся сдвигу вдоль волокна, и Д. И. Журавский сделал заключение о том, что касательные напряжения в подобных балках имеют первостепенное значение и ими нельзя пренебрегать. Существовавшая в то время литература не давала методов расчета касательных напряжений ¹⁾. Д. И. Журавский решил эту задачу и с тех пор

¹⁾ Очевидно, что лучшей книгой, которую Д. И. Журавский имел в своих руках, была книга Л. Навье (Navier L., Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées, sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructi-

в течение последних ста лет все инженеры используют этот метод для анализа касательных напряжений в балках. Начав с простейшего случая прямоугольной консольной балки, нагруженной на конце (рис. 5) и рассматривая нейтральную плоскость $O-O$, Д. И.

Журавский приходит к заключению, что нормальные напряжения, распределенные по поперечному сечению mn , стремятся вызвать сдвиг вдоль этой плоскости. Величина сдвигающей силы получается равной $\sigma_{\max} bh/4 = 3Ql/2h$, а соответствующее касательное напряжение, равномерно распределенное по нейтральной плоскости $O-O$, будет $\tau = 3Q/2bh$. Подобным образом Д. И. Журавский вычисляет и касательные напряжения, действующие в произвольной плоскости, параллельной плоскости $O-O$. Он вычисляет только касательные напряжения в случае нагрузки, равномерно распределенной вдоль балки,

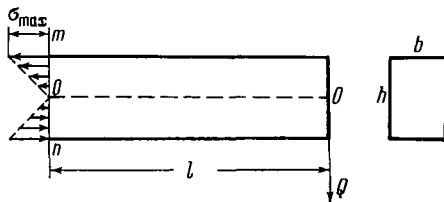


Рис. 5.

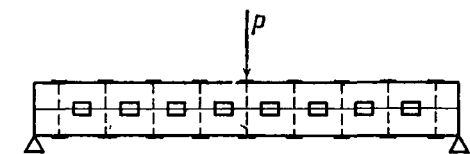


Рис. 6.

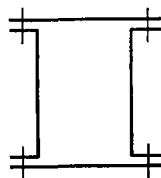


Рис. 7.

и показывает, что эти напряжения увеличиваются с удалением от свободного конца консоли.

Применяя эти сведения к случаю составных деревянных балок, Д. И. Журавский показывает, каким образом могут быть вычислены силы, действующие на каждую отдельную шпонку, и дает все необходимые сведения относительно соответствующего выбора материала и размеров шпонок (рис. 6).

Рассматривая далее изгиб составных железных труб (рис. 7), Д. И. Журавский показывает, как может быть определено соответствующее расстояние между заклепками, если известна сдвигающая сила на одну заклепку. На основании этого анализа он подвергает критике размещения заклепок в трубчатых мостах «Конуэй» и «Британия» и показывает, что количество заклепок можно было бы зна-

ons et des machines. Paris, deuxieme edition, chez carilian-Goeury, 1833, partie 1, 448 p.), которая не содержит каких-либо рассуждений относительно распределения касательных напряжений в балках.

чительно сократить на основании того факта, что поперечная сила, действующая в трубе, уменьшается от опор к середине пролета и, следовательно, шаг заклепок в средней части трубы можно увеличить без уменьшения прочности балки.

Следующей важной задачей, изученной Д. И. Журавским, была задача упругой устойчивости тонких вертикальных стенок трубчатых мостов. Эксперименты Итона Ходкинсона и Уиллима Фейрбейрна с моделями трубчатых мостов показали, что при размерах, которые выбирались для мостов «Конуэй» и «Британия», вопросы упругой устойчивости имеют значение. Чтобы обеспечить необходимую устойчивость, в эти мосты были введены вертикальные ребра. Количество материала, используемого для этих ребер жесткости, было таким же, как и количество материала для стенок. Д. И. Журавский начинает свое исследование с рассмотрения решетчатых ферм и правильно заключает, что выпучивание стенок вызывается максимальным сжимающим напряжением, действующим в стенках под углом 45° к горизонтали, и рекомендует располагать ребра жесткости в направлении максимальных сжимающих напряжений. Для того чтобы доказать справедливость своей точки зрения, он сделал несколько очень интересных экспериментов с моделями, которые выполнялись из толстой бумаги, подкрепленной картонными ребрами жесткости. При выборе этих материалов он приводит интересное обсуждение английских экспериментов. Д. И. Журавский считает неправильным судить о прочности конструкции на основании величины предельной нагрузки, поскольку при нагрузке, достигающей этого предельного значения, напряженные состояния в элементах конструкции могут отличаться от тех, которые имеют место в нормальных рабочих условиях. Он рекомендует производить испытания моделей при обстоятельствах, соответствующих условиям эксплуатации сооружений, и предлагает использовать для моделей материал с небольшим модулем упругости, с тем, чтобы деформации до предела упругости были бы достаточно большими и потому легко доступными для измерения. Используя свои бумажные модели, Д. И. Журавский имел возможность измерять деформации стенки и доказал, что наибольшее сжатие возникает под углом 45° к вертикали. Он имел возможность изучать также направление волн, которые образовались в процессе выпучивания стенок. Сравнивая эффективность усиления, он нашел, что модель с наклонными ребрами жесткости могла бы нести на 70% нагрузки больше, чем модуль с вертикальными ребрами. В то же время площадь поперечного сечения наклонных ребер оказывается в два раза меньше, чем у вертикальных ребер.

Из этого краткого обсуждения можно видеть, что Д. И. Журавским сто лет тому назад была сделана очень важная работа по теории сооружений. Он развил метод анализа ферм системы Гау, показал, как могут быть вычислены касательные напряжения, и ис-

пользовал свою теорию в конструкции из составных деревянных и железных балок. Он рассмотрел также вопрос упругой устойчивости тонких стенок трубчатых мостов и указал наиболее эффективный способ расположения ребер жесткости. Большинство этих исследований было сделано в период проектирования и строительства моста через реку Веребье. Публикация этих исследований была начата после того, как строительство моста было закончено. В 1850 г. Д. И. Журавский опубликовал свой метод анализа ферм ¹⁾. В 1854 г. он представил в Российскую Академию наук в полном виде свою работу о мостах системы Гау и получил за нее Демидовскую премию ²⁾. Работа, содержащая исследование подкреплений стенок мостов, появилась в 1860 г. ³⁾.

¹⁾ Журавский Д. И. Результаты исследования системы Гау, примененной к мостам С.-Петербургско-Московской железной дороги, Журнал главного управления путей сообщения и публичных зданий, 1850, том 11, книга 1, стр. 1—26.

²⁾ Эта работа была опубликована в 1856—1857 гг. в С.-Петербурге: Журавский Д. И. О мостах раскосной системы Гау. С.-Петербург, тип. Д. Кесневилля, 1855, часть I, 114 стр.; 1856, часть II, 161 стр. Часть, относящаяся к вычислению перерезывающих сил в балках, была переведена и опубликована во Франции. См. J o u r a w s k i D. Remarques sur la résistance d'un corps prismatique et d'une pièce composée en bois ou en tôle de fer à une sorce perpendiculaire à leur longueur. Annales des ponts et chaussées, memoires et documents, 3 serie, 1856, tome 12, pp. 328—351.

³⁾ J o u r a w s k i [D.] Remarques sur les poutres en treillis et les poutres pleines en tôle. Annales des ponts et chaussées. 3 serie, 1860, Mémoires 2, tome 20, pp. 113—149.

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ НАУКИ О СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ В РОССИИ

History of the development of strength of materials in Russia. Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, 1953, № 29, 8p.

Русская наука началась с организации Российской Академии наук в С.-Петербурге. Император Петр Великий занимался реорганизацией армии, начинал строить военно-морской флот и развивать промышленность России. Для всех этих нововведений он нуждался в образованных людях, и отсюда возникла необходимость развивать в стране систему образования. Петр начал с разработки планов построения Российской Академии и с этой целью вошел в контакт с Г. Лейбницем. Положение об Академии было готово в 1724 г., а ее деятельность началась только в 1727 г. после смерти Петра. Первая группа ученых прибыла из Западной Европы. В этой группе были два брата Николай и Даниил Бернулли, сыновья известного базельского математика Джона Бернулли. За братьями Бернулли вскоре последовал их друг Леонард Эйлер (1707—1783 гг.), который прибыл в С.-Петербург в должности члена-корреспондента Академии наук. Л. Эйлер вскоре становится членом академии и его деятельность оказывает огромное влияние на развитие науки не только в России, но и во всем мире.

Для Л. Эйлера основной интерес представляла чистая математика, но, находясь на службе у правительства России, он иногда должен был заниматься также вопросами техники: баллистикой, водяными турбинами, теорией кораблей и т. п. Вместе с Даниилом Бернулли он начал исследовать колебания стержней и дал полное решение задачи для случая призматического стержня с различными граничными условиями. В связи с развитием новой отрасли математики — вариационного исчисления — Л. Эйлер начал интересоваться кривыми прогибов тонких упругих полос и в приложении к своей книге ¹⁾ дает полное решение этой задачи. Яков Бернулли

¹⁾ E u l e r o L. Methodus inveniendi linears curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperitrici lottissimo sensu accepti. Additamentum I. De curvis elasticis. Lausannae et Genevae, Apud Marcum-Michaelum, Bouquet et Socios, 1744, pp. 245—310. [Перевод на русский язык: Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. Приложение I. Об упругих кривых. Сер. «Классики естествознания». М.— Л., Гостехиздат, 1934, стр. 447—572.]

показал ¹⁾, что кривая прогибов определяется следующим уравнением:

$$\frac{K}{\rho} = M, \quad (a)$$

где K — изгибная жесткость полосы; ρ — радиус кривизны, M — изгибающий момент. Эйлер приходит к тому же уравнению из рассмотрения условий минимума и максимума. Он утверждает: «Так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым творцом, то в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума... Даниил Бернулли сообщил мне, что он может представить всю силу, заключающуюся в упругой полосе, одной формулой, которую он называет потенциальной силой, и что это выражение должно быть минимальным ²⁾. Используя выражение для энергии деформации V , предложенное Даниилом Бернулли,

$$V = \frac{K}{2} \int_0^s \frac{ds}{\rho^2}, \quad (b)$$

Л. Эйлер приходит к следующему выводу: среди всех кривых одной и той же длины, которые не только проходят через точки A и B , но также касаются заданных прямых линий, проведенных через (ти точки, следует определить ту кривую, которая делает выражение эб) минимальным. При помощи такого подхода Л. Эйлер приходит к уравнению (a) и использует его для различных частных случаев. Два простых случая становятся особенно важными для дальнейшего развития сопротивления материалов. Рассматривая малые прогибы консоли длиной L , вызванные силой P , приложенной на ее конце Эйлер находит следующую зависимость:

$$K = \frac{PL^2(2L - 3f)}{6f} \quad (c)$$

и рекомендует эту формулу для вычисления изгибной жесткости K в том случае, если прогиб f найден экспериментально. Если в числителе этой формулы пренебречь f по сравнению с L , то получим обычную формулу для определения прогиба консоли при действии силы P . Во втором случае Л. Эйлер рассматривает стержень, сжатый силой P , и находит, что она начинает выпучиваться вбок, когда

¹⁾ Bernoulli J. Véritable hypothese de la résistance des solides, avec la démonstration de la courbure des corps qui font ressort. J a c o b i B e r n o u l l i. Basileensis, Opera, Geneve, sumptibus haredum Cramer fratrum Philibert, 1744, tome 2, pp. 976—986.

²⁾ [Цитируется по русскому переводу (см. стр. 449 ссылки 1 на стр. 652 настоящей статьи).]

сжимающая сила достигает величины, равной

$$P_{\text{кр}} = \frac{K\pi^2}{L^2}. \quad (d)$$

Это выражение представляет собой знаменитую формулу Л. Эйлера, определяющую критическую величину сжимающей силы для стержня.

Л. Эйлер рассмотрел также случаи, когда упругая полоса имеет начальную кривизну $1/\rho_0$. Вместо выражения (a) в этом случае имеем

$$K \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) = M. \quad (e)$$

Рассматривая малые колебания призматических стержней, Л. Эйлер заметил, что в этих случаях в выражении (a) в качестве кривизны можно взять выражение в форме d^2y/dx^2 . Тогда путем двойного дифференцирования получим уравнение

$$K \frac{d^4y}{dx^4} = q, \quad (f)$$

где через q обозначена интенсивность поперечной нагрузки. Подставляя вместо q инерционную силу и обозначая через p круговую частоту колебаний, получим

$$K \frac{d^4y}{dx^4} = mp^2y,$$

где через m обозначена масса, приходящаяся на единицу длины стержня.

Путем интегрирования этого уравнения Л. Эйлер вычислил частоты свободных колебаний стержней для различных случаев граничных условий. Работа в области науки о сопротивлении материалов, начатая Л. Эйлером, была продолжена его учениками, но ими не было получено ничего выдающегося, и вскоре интерес к этой науке в России исчез.

Возрождение интереса в России к теории упругости началось с организации в С.-Петербурге в 1809 г. новой инженерной школы Института инженеров путей сообщения. Впереди всех других стран по развитию инженерного образования в это время была Франция. При организации знаменитой Политехнической школы в Париже в процессе подготовки инженеров были введены некоторые новые особенности. Они заключались в весьма объемлющей предварительной подготовке студентов по таким фундаментальным дисциплинам, как математика, механика, физика и химия. Кроме того, вводилась система чтения лекций, лабораторной работы и периодические упражнения в решении задач. Эти нововведения в инженерном образовании имели большой успех, и другие страны последовали примеру Фран-

ции. Для организации Института инженеров путей сообщения были приглашены французские инженеры, и в течение первых двадцати пяти лет существования школы занятия в классах велись на французском языке.

В 1820 г. два молодых инженера Г. Ламэ (1795—1870 гг.) и Б. П. Е. Клапейрон (1799—1864 гг.), окончив Политехническую школу и Французскую школу горных инженеров, прибыли в С.-Петербург, чтобы преподавать в новой русской инженерной школе. Деятельность этих двух людей имела большое влияние на развитие науки о сопротивлении материалов не только в России, но и за границей. Они были не только преподавателями института, но и инженерами-консультантами на различных стройках, проводимых правительством. В связи с сооружением Исаакиевского собора они развивали новый метод исследования устойчивости арок ¹⁾. Во время работы над конструкцией подвесных мостов они стали интересоваться прочностью русского железа. Россия в то время была одной из наиболее передовых стран по производству железа, и было решено провести исследование механических свойств этого железа ²⁾. Г. Ламэ ³⁾ спроектировал и построил в 1824 г. специальную испытательную машину, сходную с машиной Лагерхельма ⁴⁾ в Стокгольме ⁵⁾. Результаты этих испытаний были использованы при проектировании железных конструкций в России, и они упоминались в книгах по сопротивлению материалов ⁶⁾.

Во время своей службы в С.-Петербурге эти два инженера написали свой представляющий большую ценность мемуар «О внутрен-

¹⁾ [Подполковники Ламэ и Клапейрон. Об устойчивости сводов. Журнал путей сообщения, 1826, книжка вторая, месяц август, стр. 16—28; книжка третья, месяц сентябрь, стр. 39—54.]

²⁾ [Ганри. Об употреблении железа при сооружении висячих мостов. Журнал путей сообщения, 1826 [1827], книжка пятая, месяц ноябрь, стр. 22—46. Рассматриваются свойства железа с крупным, мелким и среднего размера зерном. Приводится сравнение напряжений, при которых «привлекается в длину» и «переламывается от вытягивания по длине железо различных земель (русское, испанское, немецкое, французское, английское)». Сравняются опыты M. Duleau, L. Navier, Г. Ламэ, Telford'a.]

³⁾ [Подполковник Ламэ. О висячих мостах. Журнал путей сообщения, 1826, книжка третья, месяц сентябрь, стр. 55—81. Приводится описание двух цепных мостов на каналах С.-Петербурга. Дается описание машины для испытания цепей. Описываются опыты русского железа, как пишет автор, на сидиметре Ботанкура.]

⁴⁾ [Lagerhjelm.]

⁵⁾ По тому же самому принципу в 1832 г. была построена хорошо известная испытательная машина Вульвича [Woolwich], а также машина Кирхальди [Kirkaldu], London.

⁶⁾ См., например, Navier L. E. H. Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées, sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. P. 1. Contenant les leçons sur la resistance des matériaux, et sur l'établissement des constructions en terre, en masonnerie et en charpente. 2-me édition, corrigée et augmentée. Paris, Dunod, 1833, p. 27.

нем равновесии твердых тел из однородных материалов»¹⁾). Он содержал не только вывод уравнений равновесия теории упругости, которые были уже известны в то время из работ Л. Навье и О. Коши, но также и некоторые применения этих общих уравнений к решению задач, представляющих практический интерес. Они рассматривали, например, задачи о полом круговом цилиндре и сферической оболочке, нагруженных равномерным внутренним или внешним давлением, и вывели формулы для вычисления напряжений. Впоследствии этот мемуар был использован Г. Ламэ при подготовке его знаменитой книги «Лекции по математической теории упругости сплошных сред», первое издание которой появилось свыше ста лет назад (1852 г.)²⁾). После французской революции 1830 г. отношения между Россией и Францией расстроились, поэтому французские инженеры покинули Россию. Русские должны были заменить французских профессоров в институте, но, к счастью, последние уже успели подготовить для этой работы достаточно русских инженеров.

Среди людей, сделавших наибольший вклад в этот период в дальнейшее развитие инженерной науки в России, следует здесь упомянуть М. В. Остроградского (1801—1861 гг.) и А. Т. Купфера (1799—1865 гг.). М. В. Остроградский родился в селе под Полтавой. После окончания университета в Харькове он отправился в Париж, где стал учеником О. Коши, С. Пуассона и Ж. Фурье. Он известен главным образом своими работами по вариационному исчислению³⁾, но он сделал также вклад в теорию упругости и опубликовал два представляющих большую ценность мемуара о распространении волн в упругой среде⁴⁾). Он читал курс математического анализа в

¹⁾ Cl a r e u g o n E., L a m é G. Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes. Mémoires présentés par divers savans a l'Académie royale des sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. Sciences mathématique et physiques, 1833, tome 4, pp. 463—562.

²⁾ L a m é G. M. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris, Bachelier, 1852, 335 p.

³⁾ См. резюме статьи М. В. Остроградского (Mémoire sur le calcul des variations ges intégrales multiples [1834]. Mémoires de l'Académie de sciences de St.-Petersbourg. Série 6, Sciences mathématiques et physiques, 1838, tome 1, pp. 35—58) в главе V, посвященной деятельности М. В. Остроградского книги: I. T o d h u n t e r, A history of the progress of the calculating of variations during the nineteenth century. Cambridge — London, MacMillan, 1861, 532 p., см. стр. 111—139.

⁴⁾ O s t r o g r a d s k i M. Sur l'intégration des équations à différences partielles, relatives aux petit vibrations d'un milieu élastique. Mémoire de l'Académie des sciences de St.-Petersbourg, série 6. Sciences mathématique et physiques, 1831, tome 1, pp. 455—461. [Перевод на русский язык: О с т р о г р а д с к и й М. В. Об интегрировании уравнений в частных производных, относящихся к малым колебаниям упругой среды. Полное собрание трудов. Том I. Киев, Изд-во АН УССР, 1959, стр. 80—85.] Mémoire sur l'intégration des équations à différences partielles relatives aux petites vibrations des corps élastiques. Mémoire de l'Académie des sciences de St.-Petersbourg, série 6. Sciences mathématique et physiques, 183, tome 2, pp. 339—371. [Перевод на русский язык: О с т р о г р а д с к и й М. В. Мемуар об интегрировании уравнений в частных производных, относящихся к малым коле-

Институте инженеров путей сообщения и таким образом оказывал большое влияние на математическую подготовку молодых русских инженеров. А. Т. Купфер много вложил в экспериментальное изучение упругих свойств конструкционных материалов. В 1849 г. в России была основана центральная палата весов и мер и А. Т. Купфер был назначен первым директором этого учреждения. Он интересовался физическими свойствами металлов, поскольку они могли оказать влияние на эталоны измерения. Результаты его работ были опубликованы в годичных отчетах Центральной физической обсерватории за 1850—1861 гг. Относительно этих работ И. Тодхантер и К. Пирсон отмечают, что «вероятно, нет более полезных и исчерпывающих экспериментов, чем те, которые были проделаны А. Т. Купфером по определению упругих постоянных при колебаниях и по влиянию температуры» [на упругие свойства материала¹⁾]. За работу по определению влияния температуры на модуль упругости металлов А. Т. Купфер получил в 1855 г. премию, учрежденную Гёттингенским королевским обществом. В 1860 г. А. Т. Купфер опубликовал книгу²⁾, в которой были собраны все его многочисленные экспериментальные исследования. В предисловии он обращает внимание на большое значение, которое должно получить существование общегосударственного института по изучению упругих свойств и прочности строительных материалов. Он утверждает, что «публикацией сведений, касающихся полезных свойств металлов, будут снабжаться инженеры-конструкторы. Эта деятельность могла также оказать благотворное влияние на улучшение качества материалов, поскольку компании будут стремиться улучшить свою продукцию с целью расширения рынка сбыта».

Из учеников М. В. Остроградского, внесших вклад в развитие науки о сопротивлении материалов в России, упомянем здесь Д. И. Журавского (1821—1891 гг.) и Н. П. Петрова (1836—1920 гг.), чья деятельность протекала во второй половине девятнадцатого века.

Н. П. Петров известен главным образом своей гидродинамической теорией трения, которая была первой работой в этой области, но, кроме того, им было много сделано и в области прочности материалов. Его основная работа была посвящена исследованию прочности рельсов. С целью экономии в России применялись в железнодорожных

баниям упругих тел. Полное собрание трудов. Том I. Киев, Изд-во АН УССР, 1959, стр. 86—115.]

¹⁾ Todhunter I., Pearson K. A history of the theory of elasticity and the strength of materials from Galilei to present time. Vol. 1. Galilei to Saint-Venant, 1639—1850. Cambridge, University Press, 1886, pp. 750—753.

²⁾ Купфер А. Т. Опытное исследование упругости металлов, произведенное в Русской центральной физической обсерватории директором ее и членом С.-Петербургской академии наук А. Купфером и напечатанное по распоряжению Горного управления. С.-Петербург, тип. А. Якобсона, 1860, 422 стр.

путях очень легкие рельсы, поэтому исключительно важным был вопрос о напряжениях, которые вызывались в рельсах колесами локомотива. Статические задачи о напряжениях в рельсовой колее уже были решены Винклером. Н. П. Петров занимался исследованием динамических напряжений, которые вызывались плоскими участками ободов колес. Рассматривая рельс как сплошную балку на упругих опорах, Н. П. Петров получил необходимое дифференциальное уравнение, аналогичное тому, которое было получено Виллисом для балки со свободно опертыми концами, и интегрировал численно, находя перемещение рельса при помощи вычислений по шагам. Таким путем было вычислено максимальное динамическое напряжение, вызванное плоским участком некоторого принятого размера, и была показана важность сохранения идеальной формы поверхности колеса.

После Н. П. Петрова исследованиями напряжений в рельсовой колее интересовались другие русские инженеры и ими были развиты методы вычислений напряжений, которые впоследствии использовались в Западной Европе и в США.

В то же самое время важная работа по математической теории упругости была выполнена в России Х. С. Головиным, который в 1882 г. опубликовал ¹⁾ свое исследование об изгибе кривых стержней постоянного прямоугольного поперечного сечения. Трактую вопрос как двумерную задачу, Х. С. Головин смог получить решение для случая чистого изгиба кривого стержня и для случая изгиба при действии силы, приложенной на конце. Он показал, что распределение напряжений не зависит от значений упругих констант и для обычно применяемых пропорций арок оно примерно линейно так же, как и в случае прямых балок.

Когда по инициативе И. Баушингера было организовано Международное общество по испытаниям материалов, Россия присоединилась к этому обществу и принимала активное участие в его конгрессах, особенно под руководством хорошо известного русского инженера-мостостроителя Н. А. Белелюбского (1845—1922 гг.). Н. А. Белелюбский был директором лаборатории испытания материалов Института инженеров путей сообщения, вероятно, наиболее значительной лаборатории в этой области в России.

В конце 19-го и начале 20-го века Россия уже имела ряд инженеров, работавших в области сопротивления материалов и теории упругости и внесших значительный вклад в развитие этих наук, особенно в области теории упругой устойчивости и теории пластин. Мы упомянем здесь имя Ф. С. Ясинского (1856—1899 гг.), чья книга по устойчивости упругих систем ²⁾ представляла в то время наиболее

¹⁾ Головин Х. С. Одна из задач статики упругого тела. Известия С.-Петербургского технологического института, 1882, том 3, стр. 373—410.

²⁾ Ясинский Ф. С. Опыт развития теории продольного изгиба. С.-Петербург, тип. Ю. Н. Эрлиха, 1893, 270 стр. Перепечатка: Ясинский Ф. С. Собра-

полное исследование этого важного предмета. Студентов привлекали ясность и логичность его изложения, а также зачастую делавшиеся им обзоры новых проблем, что было связано с его большой деятельностью как инженера-строителя.

Вклад в усовершенствованные исследования напряжений в теории корабельных конструкций был сделан двумя русскими инженерами А. Н. Крыловым и И. Г. Бубновым. А. Н. Крылов (1863—1945 гг.) занимался развитием практических методов исследования колебаний кораблей и методами исследования напряжений в киле, который рассматривался как балка на упругом основании. И. Г. Бубнов (1872—1919 гг.) занимался теорией изгиба прямоугольных пластин, в которых принимались во внимание не только поперечные силы, но также силы, действующие в срединной плоскости пластины. Он также исследовал изгиб прямоугольных пластин, защемленных по всем краям, и подготовил первую удовлетворительную таблицу изгибающих моментов и прогибов для этого сложного случая. Благодаря работе этих двух выдающихся инженеров в России были наиболее современные монографии по теории конструкций кораблей.

Из этого краткого очерка развития сопротивления материалов в России можно сделать вывод, что публикации по этому вопросу, имевшие место в России до начала 20-го столетия, были на высоком уровне. Исследование более поздней литературы показывает, что в России в настоящее время продолжает проводиться значительная исследовательская работа в области изучения напряжений.

ние сочинений. Под редакцией Н. Н. Митинского. Том 1. Сборник С.-Петербургского института инженеров путей сообщения, 1902, вып. 56, 320 стр. [Я с и н с к и й Ф. С. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1952, стр. 11—137.]

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ИСТОРИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Stress concentration in the history of strength of materials. Proceedings of the Society for experimental stress analysis. Cambridge, Massachusetts, 1954, vol. 12, № 1, pp. 1—12.

Мне было предложено ¹⁾ рассказать здесь о вопросе концентрации напряжения, даже если этот предмет хорошо известен членам общества. По этой причине слово «история» было вынесено в заглавие моего сообщения. История развития этого вопроса очень непродолжительна. Наиболее важные практические результаты были получены в настоящее время.

Ранние работы по сопротивлению материалов касались в основном призматических стержней, для которых размеры поперечного сечения малы по сравнению с длиной. В таких случаях очень хорошие результаты могут быть получены в предположении, что поперечные сечения стержней в процессе деформации остаются плоскими. Таким образом, были решены задачи растяжения, сжатия, кручения и изгиба призматических стержней. Было установлено, что эти решения неточны вблизи точек приложения сил и в местах резкого изменения размеров поперечного сечения. При анализе напряженного состояния этими местными возмущениями в распределении напряжения обычно пренебрегали, что было оправдано в случае статических задач, с которыми имели дело инженеры-строители.

Условия стали совершенно другими, когда инженеры столкнулись с важными динамическими задачами, в которых местные напряжения и концентрация напряжения играют первостепенную роль. Исторически такие задачи впервые возникли и были решены при расчете железнодорожных сооружений. Начальные исследования о концентрации напряжений касались изучения причин разрушения железнодорожных осей. Обычно диаметр осей резко изменялся в том месте, где шейки оси соединяются с телом оси, и во входящих углах возникали усталостные трещины. Так как эти разрушения имеют характер хрупкого разрушения, то обычно предполагается, что при действии переменных напряжений и ударов мягкая сталь изменяет структуру своих волокон и становится хрупкой.

¹⁾ Доложено на ежегодном собрании Общества по экспериментальному анализу напряжений в декабре 1953 г. в Нью-Йорке.

Дж. Маккуорн Рэнкин (1820—1872 гг.)¹⁾ дал более удовлетворительное объяснение причины разрушения железнодорожных осей. Он исследовал много случаев разрушения и пришел к заключению о том, «что в осях имеет место постепенный износ без ухудшения структуры их волокон, и это не вызвано причиной, которую обычно указывают... Разрушение в каждом случае происходит во входящем углу, где шейка вала соединяется с телом вала. Возникновение разрушения начинается с появления гладкой, имеющей правильную форму мельчайшей трещинки, которая затем опоясывает шейку вала и проникает в глубину ее в среднем на высоту 12—13 мм. В дальнейшем трещинки постепенно распространяются от поверхности к центру оси... до тех пор, пока толщина неповрежденного металла в центре станет недостаточной, чтобы выдержать удары, которым она подвергается». При объяснении возрастающего действия ударов во входящем углу Маккуорн Рэнкин замечает, что «вследствие способа изготовления волокна материала не идут вдоль поверхности буртика, а проникают прямо в тело оси», и что «часть волокна, которая находится внутри тела оси, будет менее упруга, чем та, которая находится в шейке оси, и, вероятно, волокна изгибаются в буртике из-за того, что их упругое состояние внезапно исчезает в этой точке».

На основании этого соображения Маккуорн Рэнкин предлагает «при изготовлении осей до их поступления на токарный станок делать шейки с большим радиусом кривизны у буртика так, чтобы волокно было непрерывно по всей своей длине». Маккуорн Рэнкин утверждает, что «было разрушено несколько осей, имеющих один конец, выполненный подобным образом, а другой — обычным методом: первые из вышеуказанных концов выдерживали от пяти до восьми ударов молотка, в то время как вторые неизменно разрушались от первого удара». На основании этих испытаний Маккуорн Рэнкин делает заключение, что «в шейках вала улучшенной формы как непрерывность поверхностных волокон увеличивает силу сопротивления удару, так и непрерывность формы предотвращает разрушительное действие при колебаниях». Очевидно, что Маккуорн Рэнкин имел очень ясное представление об опасности резкого изменения диаметра осей, но прошло значительное время прежде чем эти представления были вообще приняты. Спустя семь лет после публикации статьи Маккуорна Рэнкина вопрос о железнодорожных осях дискутировался снова на нескольких собраниях в Институте инженеров-механиков. Джемс Макконели²⁾ представил статью

¹⁾ R a n k i n e W. J. M. On the causes of the unexpected breakage of the journals of railway axles; and on the means of preventing such accidents by observing the law of continuity in their construction. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 1843, vol. 2, pp. 105—107.

²⁾ M c C o n n e l l J. E. Axles for railway carriages and wagons. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1849, October, pp. 13—21; Deterioration of railway axles. Там же, 1850 January, pp. 5—19; 1850 April, pp. 3—14.

«О железнодорожных осях пассажирских и товарных вагонов», в которой он констатирует, что «хорошо известным фактом является то, что в структуре железа происходит некоторые превращения, и исследование этого обстоятельства заслуживает самого пристального внимания».

Французские инженеры также были заняты той же задачей. А. Морэн в своей книге по сопротивлению материалов обсуждает очень интересные отчеты двух инженеров, ответственных за почтовые кареты на французских посейских дорогах. Эти инженеры рекомендовали производить тщательный осмотр осей почтовых карет



Рис. 1.

после 70 000 км езды, потому что практика показала, что после такого периода работы возникала вероятность появления тонких трещин в местах, в которых размеры поперечного сечения осей претерпевают резкие изменения, причем особенно в острых входящих углах. Авторы отчета были не согласны с теорией, по которой циклические напряжения приводят к некоторой рекристаллизации железа. Статические испытания осей, долгое время бывших в эксплуатации, показали неизменность внутренней структуры металла. В заключение авторы рекомендовали избегать резкого изменения поперечных сечений осей и входящих углов. Они отметили, что оси, переделанные после длительной эксплуатации, становились такими же идеальными, как и совершенно новые оси.

Очень тщательные исследования прочности железнодорожных осей были проведены в Германии А. Вёлером ¹⁾ (1819—1914 гг.). Для испытаний железнодорожных осей на усталость он сконструировал и применил специальную машину (рис. 1). Машина работала только со скоростью 15 оборотов в минуту. Позднее, для того чтобы увеличить скорость испытания, А. Вёлер сконструировал подобную машину для испытания меньших образцов. Непосредственными испытаниями он доказал, что острые углы уменьшают продолжительность жизни образцов и что условия работы могут быть улучшены

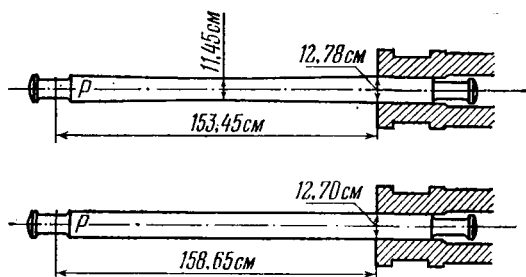


Рис. 2.

путем введения галтелей. На рис. 2 представлен его образец. Он показал, что лишний металл ослабляет образцы и что образование трещин всегда начинается во входящих углах (рис. 3). Эксперименты А. Вёлера были продолжены И. Баушингером, а позднее А. Фёпплем, который использовал усталостную испытательную машину в Мюнхене, подобную той, что была у А. Вёлера. А. Фёппль изучал ослабляющее действие различного рода выточек и круговых отверстий ²⁾. Чтобы уменьшить суммарное время, требующееся для проведения испытаний на усталость, А. Фёппль проводил испытания с более высокими напряжениями, которые несомненно вызывали некоторые пластические деформации. Конечно, при таких условиях влияние концентрации напряжений на усталостную прочность

¹⁾ W ö h l e r A. Bericht über die Versuche, welche auf der Königl. Niederschlesisch-Märkischen Eisenbahn mit Apparaten zum Messen der Biegung und Verdrehung von Eisenbahnwagen-Achsen während der Fahrt, angestellt wurden. Zeitschrift für Bauwesen, 1858, Jahrgang 8, SS. 641—652; Versuche zur Ermittlung der auf die Eisenbahnwagen-Achsen einwirkenden Kräfte und der Widerstandsfähigkeit der Wagen-Achsen, там же, 1860, Jahrgang 10, SS. 583—616; Versuche über die relative Festigkeit von Eisen, Stahl und Kupfer, там же, 1866, Jahrgang 16, Heft 1, SS. 67—84; Über die Festigkeits-Versuche mit Eisen und Stahl, там же, 1870, Jahrgang 20, Heft 1, SS. 73—106.

²⁾ F ö p p l A. Weitere Erfahrungszahlen für die Festigkeit von Beton. Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der K. Technischen Hochschule, München, Neue Folge, 1909, Heft 31, SS. 43—51.

образцов меньше, чем в случае более низких уровней напряжений, при которых для разрушения образцов требуется большое число циклов нагружения.

Первые теоретические исследования, относящиеся к концентрации напряжений, появились в конце девятнадцатого века. Дж. Лармор исследовал ¹⁾ концентрацию напряжений, вызванную в скручиваемом валу цилиндрической канавкой кругового сечения с осью, параллельной валу. Он использовал гидродинамическую аналогию, из которой следует, что задача распределения напряжений в закрученном призматическом стержне математически эквивалентна задаче о движении идеальной жидкости, вращающейся с постоянной угловой скоростью в жестком цилиндрическом сосуде той же формы, что и подверженный кручению вал. Известно, что скорость жидкости, обтекающей круговой цилиндр, имеет максимальное значение, равное

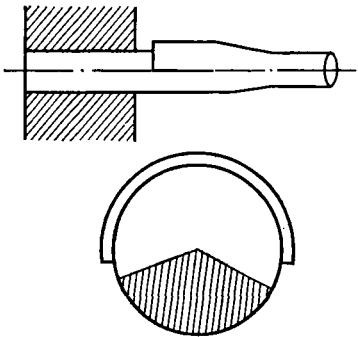


Рис. 3.

удвоенному значению скорости набегающего потока ²⁾. Отсюда можно заключить, что в случае закрученного вала напряжения сдвига вблизи круговой полости в два раза больше, чем вдали от полости.

Другая важная работа о концентрации напряжений была опубликована Г. Киршем ³⁾. Он исследовал распределение напряжений около небольшого кругового отверстия в широкой пластине, подверженной действию равномерной продольной растягивающей нагрузки, и показал, что максимальное напряжение возникает у контура отверстия (по концам его диаметра, перпендикулярного к направлению приложенной нагрузки) и что оно в три раза больше номинального напряжения. Г. Кирш также выполнил большое число испытаний на растяжение стальных пластин с круговыми отверстиями

¹⁾ L a r m o u r J. The influence of flows and air-cavities on the strength of materials. *Philosophical Magazine and Journal of Sciences*, Series 5, 1892, vol. 33, № 200, pp. 70—78.

²⁾ [Максимальное значение скорости на поверхности цилиндра будет при $\theta = \pm \pi/2$.]

³⁾ K i r s c h [G.] Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, 1898, Bd. 42, 29, SS. 797—807. Случай кругового отверстия в пластине, растягивающейся равномерно во всех направлениях в своей плоскости, рассматривался М. Грюблером. Используя известную формулу Г. Ламе, он показал, что в этом случае коэффициент концентрации напряжения равен двум. [M. G r ü b l e r, Der Spannungszustand in Schleifsteinen und Schmirgelscheiben. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, 1897, Bd. 41, № 30, SS. 860—864.]

и обнаружил, что в случае пластичных материалов обычно при наличии отверстия увеличивается допускаемое напряжение, так как поперечное сопротивление образца на разрушение отчасти ослабляется присутствием отверстия.

Таким образом, к концу XIX века важность вопроса о концентрации напряжения уже была признана европейскими инженерами-конструкторами и специалистами по анализу напряжений. В США изучение этого вопроса началось несколько позднее. Я вспоминаю, что только в 1925 г. на весеннем собрании Американского общества инженеров-механиков, после представления статьи о концентрации напряжений в галтелях, имела место дискуссия хорошо известного профессора ¹⁾ ведущего университета. Этот профессор не поверил такому понятию, как концентрация напряжения, и доказывал, что бесконечно широкая пластинка с небольшим круговым отверстием эквивалентна пластине конечной ширины без отверстия. Он не верил в решения теории упругости. По его мнению, «они некорректны математически, а также по здравому смыслу». Он также не верил экспериментальному методу определения напряжения. Измерения, полученные с помощью точных экстензометров, казались ему нереальными. Относительно метода фотоупругости он заметил: «Этот метод исследования недавно достиг некоторого успеха только потому, что он интересный и дает некоторые красивые световые эффекты». В эти же годы для определения максимального напряжения в отверстии применялся элементарный метод, показанный на рис. 4. Я привел эти четыре случая, чтобы охарактеризовать условия, которые существовали 30 лет тому назад. В наше время никто не будет пользоваться только что указанным методом для исследования концентрации напряжений. С того времени произошел большой прогресс в области определения напряжений.

С начала XX века важность точного анализа напряженного состояния в конструкции машин становится все более значительной.

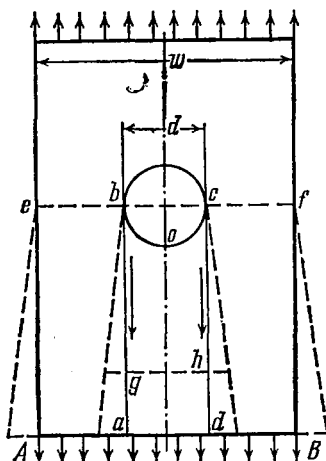


Рис. 4.

¹⁾ См. дискуссию профессора Г. Свейна по поводу статьи автора: Timoshenko S., Dietz W. Stress concentration produced by holes and fillets. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1926, vol. 47, № 1958, pp. 199—220; discussion: pp. 220—237 (Swain G. F. pp. 231—234). См. также его книгу по сопротивлению материалов (Swain G. F. Structural engineering. Strength of materials. New York—London, McGraw-Hill, 1924.)

В настоящее время старые методы, в которых для определения напряжений использовались элементарные формулы, а недостаточное знание действительных напряжений компенсировалось большими коэффициентами безопасности, не эффективны. Общая тенденция состоит в более точном анализе напряжений в деталях машин, для того чтобы конструировать с более экономичным использованием металла. Я думаю, что первой книгой, в которой была ярко проиллюстрирована эта тенденция в конструировании, была книга А. Стодоль¹⁾, озаглавленная «Паровые турбины и перспективы тепловых двигателей». Эта книга обращала внимание инженеров на такие важные проблемы, как концентрация напряжений, напряжения, вызванные инерционными силами и колебаниями, температурные напряжения, напряжения в пластинах и оболочках и т. д. Все эти проблемы были вне содержания элементарных книг по сопротивлению материалов и требовали использования методов математической теории упругости. После Сен-Венана делалось несколько попыток перенесения методов теории упругости в элементарные учебники. Были опубликованы книги Ф. Грасгофа²⁾ и Э. Винклера³⁾, но они не подходили в качестве курсов сопротивления материалов в инженерных школах и к концу XIX в. они были вытеснены более элементарными учебниками, в которых преподавание сопротивления материалов было совершенно оторвано от теории упругости. Лекции по теории упругости читались исключительно в математических школах, и поэтому эта наука, оторванная от каких-либо практических приложений, носила абстрактный характер.

В начале XX в. в связи с новыми требованиями в определении напряжений теория упругости стала важна для инженеров. Были опубликованы новые книги по этому предмету, отвечающие практическим требованиям, и многие технические школы ввели теорию упругости в свою программу. С этого времени начинается значительный прогресс в развитии исследования задач о концентрации напряжения.

Используя теорию функций комплексного переменного, больших успехов в решении задачи о концентрации напряжения, вызванной в пластине эллиптическим отверстием, достиг Г. В. Колосов⁴⁾. Он показал, что максимальное напряжение особенно велико,

¹⁾ S t o d o l a A. Die Dampfturbinen und die Aussichten der Wärmekraftmaschinen. Berlin, J. Springer, 1903, 220 S.

²⁾ G r a s h o f f F. Theorie der Elastizität und Festigkeit mit Bezug auf ihre Anwendungen in der Technik. 2. Auflage. Berlin, K. Gärtner, 1878, 408 S.

³⁾ W i n k l e r E. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik, für polytechnische Schulen, Bauakademien, Ingenieure, Maschinenbauer, Architekten, etc. Bd. 1. Prague, Dominicus, 1867, 388 S.

⁴⁾ См. его докторскую диссертацию: К о л о с о в Г. В. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости. Юрьев, тип. К. Маттисена, 1909, 187 стр.

если бóльшая ось эллипса перпендикулярна к напряжениям в пластине. Максимальное напряжение получается на концах этой оси и увеличивается с увеличением отношения большой оси к малой оси эллипса.

Аналогичная задача для эллиптического отверстия обсуждалась также К. Инглисом¹⁾. В своем исследовании, опубликованном в Известиях института корабельных архитекторов, он показал, как результаты, полученные для эллипса, можно приближенно перенести на случай концентрации напряжений, вызванный в палубе корабля прямоугольными отверстиями с закругленными углами. Концентрация напряжений, обусловленная отверстиями различной формы (рис. 5), обычно очень высока, и поэтому края отверстий требуется подкреплять. В случае кругового отверстия влияние подкрепления на величину максимального напряжения с достаточной степенью

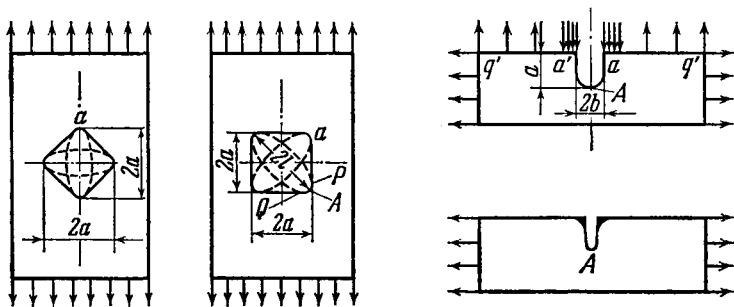


Рис. 5.

точности можно вычислить на основании теории кривого стержня, как показано на рис. 6²⁾. Подобным образом можно исследовать случай эллиптического отверстия, а также прямоугольного отверстия с закругленными углами. Все эти факты относительно больших напряжений у контура отверстия в палубе корабля были известны уже давно, но даже сейчас они иногда недостаточно учитываются на практике. В качестве примера можно упомянуть оригинальную конструкцию уголков люков пассажирских кораблей типа «Либерти» периода Второй мировой войны. В палубах этих кораблей были прямоугольные люки с острыми углами. В результате больших концентраций напряжения в период эксплуатации усталостные трещины

¹⁾ Inglis C. F. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. Transactions of the Institution of Naval Architects, 1913, vol. 105, part 1, pp. 219—230.

²⁾ См. статью автора: Timoshenko S. P. On stresses in a plate with a circular hole. Journal of the Franklin Institute, 1924, vol. 197, № 4, pp. 505—516. [Перепечатка: Timoshenko S. P. The collected papers. New York—London—Toronto, McGraw-Hill, 1953, pp. 385—392.]

развивались с такой быстротой, что за 100 рейсов у люков оказались разрушенными больше десяти углов. Конечно, позднее такие разрушения были предотвращены путем введения подходящего закругления и подкрепления углов.

Большой прогресс в теоретическом изучении концентраций напряжений был совершен учеником Г. В. Колосова Н. И. Мусхелишвили¹⁾, который дальше развил метод анализа распределения

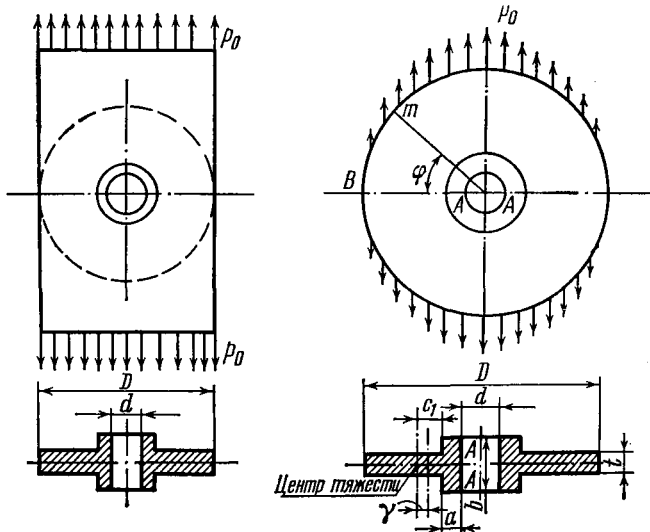


Рис. 6.

напряжений вокруг отверстий и решил задачи о концентрации напряжений для отверстия разнообразной формы²⁾.

Другой путь анализа концентрации напряжения был развит Г. Нейбером. Он применил общее решение уравнений теории упругости, представленное тремя гармоническими функциями³⁾, и таким образом получил некоторые результаты не только для двумер-

¹⁾ [См. его монографию: М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 4. М., Изд-во АН СССР, 1954].

²⁾ Книга, специально посвященная отверстиям произвольной формы, была опубликована недавно: С а в и н Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. М.—Л., Гостехиздат, 1951, 496 стр. [См. также С а в и н Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев, «Наукова думка», 1968, 887 стр.]

³⁾ Это решение независимо друг от друга дали П. Ф. Папкович (P a p k o v i t c h P. F. Solution générale des équations différentielles fondamentales d'élasticité, exprimée par trois fonctions harmoniques. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 1932, tome 195, № 10, pp. 513—515. Expressions générales des composantes des tensions, ne renfermant comme fonctions arbitraires que des fonctions harmoniques. Там же: № 19, pp. 754—756) и Г. Нейбер (N e u b e r H. Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter

ных, но также и для трехмерных случаев концентрации напряжения и опубликовал книгу, посвященную этой теме ¹⁾).

Хотя в последнее время теоретические методы решения задач о концентрации напряжений значительно развиты, все еще остается много практически важных задач, для которых не имеется строгих решений, и приходится обращаться к приближенным или экспериментальным методам. В развитие таких методов значительный вклад должны сделать инженеры.

Особенно полезны различные аналоговые методы. Эти методы основаны на том факте, что в некоторых случаях задача теории упругости математически эквивалентна задаче другого раздела физики, в котором требуемые величины могут быть легко измерены. Уже было упомянуто о гидродинамической аналогии, с помощью которой Дж. Лармор определил концентрацию напряжения в скручиваемом валу, вызванную малым круглым отверстием. Очень важная аналогия была развита Л. Прандтлем ²⁾. Он показал, что задача кручения эквивалентна определению поверхности прогибов равномерно растянутой и равномерно нагруженной мембраны, имеющей такую же форму, как и поперечное сечение скручиваемого вала. Используя мыльную пленку как мембрану и измеряя оптическим путем максимальный наклон поверхности прогибов, вызванный равномерным давлением газа, можно легко получить максимальное напряжение при кручении. В дальнейшем метод мембранной аналогии был развит Г. Тейлором ³⁾ и применен к исследованию напряжений при кручении валов со сложной формой поперечного сечения. Кроме того, таким же образом была изучена концентрация напряжения в круглых валах со шпоночными канавками.

Другая важная аналогия была развита Л. Джекобсен ⁴⁾ для измерения напряжений в галтели кругового вала с двумя различными

Fenzellast als Beispiel. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1934, Bd. 14, Heft 4, SS. 303—212).

¹⁾ Neuber H. Kerbspannungslehre, Grundlagen für genaue Spannungsrechnung. Berlin, Julius Springer, 1937, 160 SS. [Перевод на русский язык: Нейбер Г. Концентрация напряжений М.—Л., Гостехиздат, 1947, 204 стр.]

²⁾ Prandtl L. Zur Torsion von prismatischen Stäben. Physikalische Zeitschrift, 1903, Jahrgang 4, № 26, SS. 758—765. [Перепечатка: Prandtl L. Gesammelte Abhandlungen zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik. Erster Teil. Berlin, Springer-Verlag, 1961, SS. 79—86.] Prandtl L. Eine neue Darstellung der Torsionsspannungen bei prismatischen Stäben von beliebigen Querschnitt. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung; 1904, Bd. 13, Heft 2, SS. 31—36. [Перепечатка: Prandtl L. Gesammelte Abhandlungen... Erster Teil, SS. 81—86.]

³⁾ Taylor G. I., Griffith A. A. The use soap films in solving torsion problem. Report and Memoranda of the Advisory Committee for Aeronautics, 1917, № 333. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1917, pp. 755—789. [См. также Taylor G. I. The scientific papers. Vol. I. Mechanics of Solids, edited by G. K. Batchelor, Cambridge, University Press, 1958, pp. 1—23.]

⁴⁾ Jacobsen L. S. Torsional-stress concentration in shafts of circular cross-section and variable diameter. Transactions of the American Society of Mechanical

диаметрами. Он показал, что в этом случае задача определения напряжения математически эквивалентна задаче об электрическом токе в пластине, имеющей такие же границы, что и диаметрально продольное сечение вала, и толщину, изменяющуюся, как куб расстояния от продольной оси симметрии пластины. Он показал также, что скорость изменения потенциала вдоль более толстой кромки пластины, который легко может быть определен потенциометром, дает

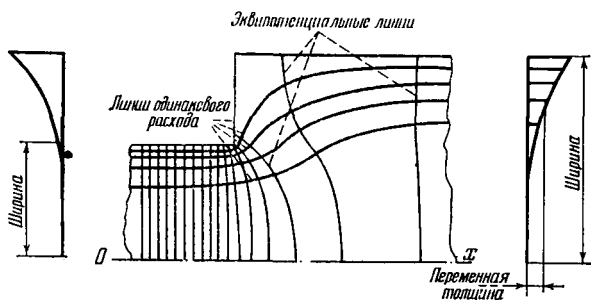


Рис. 7.

в определенном масштабе величину напряжений при кручении в галтели вала. Линии электрического тока и эквипотенциальные линии, а также соответствующие линии в скрученном стальном валу показаны на рис. 7. На основании измерений для галтелей различного радиуса и различных отношений диаметров валов Л. Якобсон составил ценные диаграммы, из которых в каждом частном случае может быть получен коэффициент концентрации напряжения.

Заканчивая рассмотрение вопроса аналогий, кратко обсудим другой приближенный метод решения задач теории упругости. Этот метод основан на замене дифференциальных уравнений этих задач уравнениями в конечных разностях и решении этих уравнений численно методом последовательных приближений. Впервые этот метод был использован К. Рунге ¹⁾, который таким образом решил сложную задачу кручения. В дальнейшем больших успехов достиг Л. Ричардсон, применивший этот метод к решению двумерных задач теории упругости и рассмотревший в качестве примера напряжения в дамбах от действия сил тяжести и давления воды ²⁾. В по-

Engineers, Milwaukee Meeting, 1925—1926, vol. 47, pp. 619—638; discussion: pp. 639—641.

¹⁾ Runge C. Über eine Methode die partielle Differential-gleichung Δu -Constans numerisch zu integrieren. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1908, Bd. 56, Heft 3, SS. 225—232.

²⁾ Richardson L. F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1910, Series A, vol. 210, pp. 307—357.

следнее время этот метод получил дальнейшее развитие и применен к различным задачам теории упругости и пластичности в работах Р. Саусвелла и его учеников ¹⁾. В этих работах было показано, что предложенный метод очень полезен для исследования задач о концентрации напряжения.

Параллельно с этими теоретическими исследованиями продолжалось экспериментальное изучение концентрации напряжений. Для определения максимальных напряжений, вызванных отверстиями, галтелями и выточками, были проведены испытания с использованием моделей, выполненных из хрупких материалов, таких, как стекло ²⁾ или алебастр ³⁾. Предполагалось, что в случае материалов, следующих до разрушения закону Гука, уменьшение предела прочности образца от концентрации напряжений, по сравнению с гладким образцом, будет давать эффект концентрации напряжения. Эксперименты не подтвердили этого предположения, однако испытания моделей из хрупкого материала дают значительно меньший эффект концентрации напряжения, чем это предсказывается теорией.

Другого рода эксперимент для изучения концентрации напряжения был основан на измерении деформаций в местах наибольших напряжений. Для того, чтобы увеличить деформацию и упростить ее измерение, модели изготавливались из очень упругого материала, иногда такого, как резина. Например, А. Фёппль использовал резиновые модели стандартных образцов для испытаний на растяжение цемента и бетона.

Таким образом, он показал ⁴⁾, что максимальная деформация в ослабленном поперечном сечении будет более чем в три раза больше, чем средняя деформация в том же самом поперечном сечении. В случае стальных моделей измерение концентрации напряжения требует очень чувствительных экстензометров. Э. Прейсс разработал экстензометр подобного рода и замерил

¹⁾ Southwell R. V. Stress-calculation in frameworks by the method of Systematic relaxation of constrains. Part 1. The method of systematic relaxation, as applied to braced frameworks having frictionless joints. Part 2. Extension of the relaxation method to frameworks having stiff joints. Part 3. The method of systematic relaxation as applied to a braced framework having rigid joints. Эти статьи были опубликованы в Proceedings of the Royal Society. Series A, 1935, vol. 151, pp. 56—95 (Part 1, 2); pp. 41—76 (Part 3). См. также Abstract. London, H. M. Stat. Off., 1936, 2 p. [Aeronautical research committee reports and memoranda. № 1668 (Strut 248, 298).]

²⁾ Leon A. Kerbgrösse und Kerbwirkung. Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der Technischen Hochschule in Wien, № 10, Wien, Lehmann und Wentzel, 1910, 56 S.

³⁾ Peterson R. E. An investigation of stress concentration by means of plaster of Paris specimens. Mechanical Engineering. 1926, vol. 48, № 12, pp. 1449—1452.

⁴⁾ Föppl A. Vorlesungen über technische Mechanik. Bd. 3, Festigkeitslehre, 5. Auflage, Leipzig; B. G. Teubner, 1914, S. 9.

деформации в отверстиях и канавках ¹⁾. Некоторые его результаты представлены на рис. 8. А. Уол разработал новый тип экстензометра с базой только 2,54 мм и использовал его для замера изгибных напряжений в галтели круглого вала диаметром 18,435 см (рис. 9 ²⁾).

Применение проволочных датчиков сопротивления улучшило экспериментальное изучение концентрации напряжений. Эти датчики деформации не только упростили измерение напряжений при

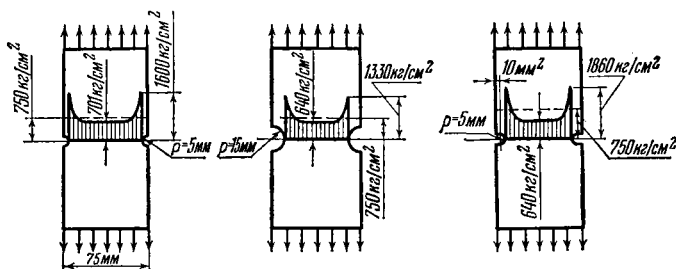


Рис. 8.

статических условиях, но дали возможность регистрировать переменные напряжения, когда часть детали находится в движении, как в случае коленчатых валов ³⁾).

Для приближенного определения напряжений в ослабленном месте сложных конструкций большие преимущества дает метод хрупких покрытий ⁴⁾. Если до приложения нагрузки поверхность модели покрыта хрупким лаком и затем постепенно нагружается, то первая трещина в лаке будет определять место максимальной деформации, а направление трещины будет указывать направление главных напряжений. Величина напряжения может быть также приближенно

¹⁾ P r e u s s E. Versuche über die Spannungs Verminderung durch die Ausrundung scharfer Ecken. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1912, Bd. 56, № 34, SS. 1349—1355; Versuche über die Spannungsverteilung in Gekerbtten Zugstäben. Там же, 1913, Bd. 57, № 17, SS. 664—667.

²⁾ Рис. 9 иллюстрирует результаты опытов Г. Ф. Мура, Р. Л. Жордана, Д. Морковина. См. их работы: M o o r e H. F., J o u r d a n R. L. Stress concentration in steel shafts with semicircular notches. Proceedings of the fifth international congress for applied mechanics. Held at Harvard University and the Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, Massachusetts, September 12—16, 1938. John Wiley, New York, London. Chapman and Hall, 1939, pp. 182—192.

M o o r e H. F., M o r k o v i n D. Progress report on the effect of size of specimen on fatigue strength of three types of steel. Proceedings of the American Society of Mechanics Engineers, 1942, vol. 42, pp. 145—153; 1943, vol. 43, pp. 109—120; 1944, vol. 4, pp. 137—154.

³⁾ G o l o f f A. Determination of operating loads and stresses in crankshafts. Proceedings of Society for Experimental Stress Analysis, Cleveland, 17—20 October 1944. Cambridge, Massachusetts, 1945, vol. 2, № 2, pp. 139—149.

⁴⁾ H e t e n y i M. Brittle models and brittle coatings. Handbook of experimental stress analysis. New York, John Wiley, London, Chapman and Hall, 1950, pp. 636—662.

определена, если предварительно провести испытание на растяжение калибровочного стержня, покрытого лаком того же состава.

Более точно напряжения в отверстиях и канавках можно определить с помощью метода фотоупругости. Дж. Максвелл первый разработал технику измерения напряжений методом фотоупругости. На

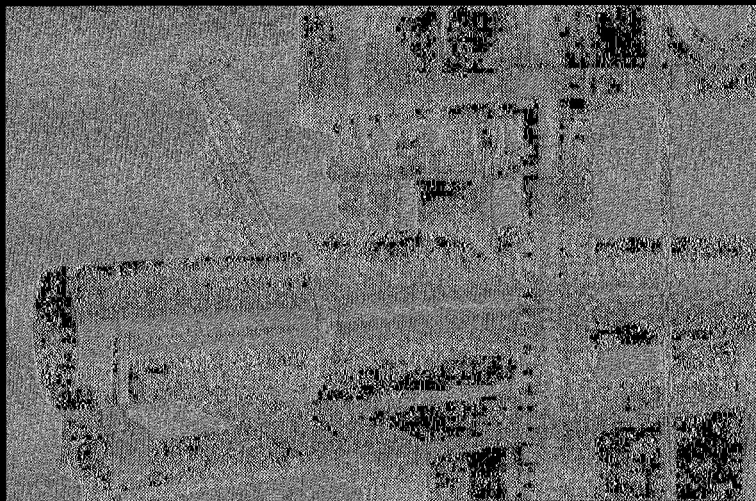


Рис. 9.

рис. 10 представлено один из его экспериментов по определению касательных напряжений при приложении крутящего момента к внутренней поверхности толстого цилиндра. В качестве материала для модели он использовал желатин из рыбьего клея, который заливался в пространство между двумя концентрическими цилиндрическими формами. По охлаждению это вещество превращалось в твердую, пригодную для экспериментирования массу. Расстояния между цветными кольцами показали, что разность в замедлении поляризованных лучей будет обратно квадрату радиуса. Дж. Максвелл наблюдал эту картину цветов и зарисовал ее акварельными красками. Он исследовал также более сложные случаи, такие, как остаточ-

*) См. биографию Дж. Максвелла, составленную Н. Кэмпбеллом и У. Гарнотом (C a m p b e l l L., G a r n o t W. The life of James Clerk Maxwell. With selections from his correspondence and occasional writings and sketch of his contributions to science. Macmillan and Co. London, 1832, 662 p.) Этот рисунок встречается в собрании трудов Дж. Максвелла. [The scientific papers of James Clerk Maxwell, Edited by W. D. Niven. Cambridge, printed by C. J. Clay & A. and sons, University Press, 1890, vol. 1, 607 p.; vol. 2, 306 p.]

ные напряжения в изготовленных стеклянных пластиках. Используя поляризованный по кругу свет, он получал изохроматические линии. Затем он показывал, как, используя плоскополяризованный свет, можно нарисовать изоклины и траектории напряжений. В заключение он показал, как с помощью траекторий напряжений можно последовательным интегрированием вычислить главные напряжения. Таким образом, Дж. Маквелл почти девяносто лет тому назад разработал полную технологию анализа напряжений в двумерных задачах методом фотоупругости. Он сделал важный вклад также в трехмерный метод фотоупругости, так как открыл материалы, в которых напряжения можно «заморозить».

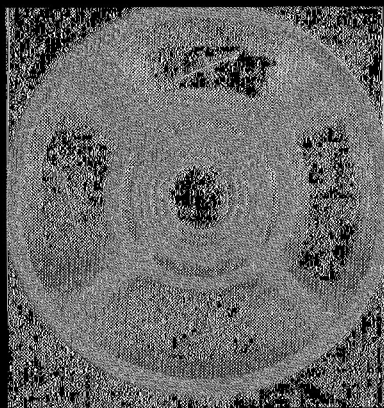


Рис. 10.

Все эти достижения в области фотоупругости были сделаны более чем сто лет тому назад, но, по-видимому, инженеров в то время не интересовала концентрация напряжений и дальнейшего прогресса в области фотоупругости не было, пока пятьдесят лет спустя А. Меннаже¹⁾ не ввел «компенсатор» и не использовал изменение толщины пластинки-модели для преодоления суммы главных напряжений.

Э. Кокер²⁾ упростил технику фотоупругости, ввел в качестве материала для модели целлулоид, а З. Тузи³⁾ развил «метод полого», который значительно улучшил точность измерений методом фотоупругости и теперь применяется всеми работающими в области фотоупругости. В настоящее время техника фотоупругости высоко развита в США и широко используется в промышленности.

Все описанные теоретические и экспериментальные методы дают большое количество информации о концентрации напряжений во многих практически важных случаях. Теперь встает вопрос, как эти

¹⁾ M e n n a g e A. Contribution à l'étude de la déformation élastique des solides. Annales des ponts et chaussées, 1901, tome 4, pp. 129 -190.

²⁾ Магочисленские публикации Э. Кокера собраны в книге C o k e r E. G., F I L O N L. N. G. Treatise on photo-elasticity, London, Cambridge University Press, New York, Macmillan Co., 1931, 720 p. [Перевод на русский язык: К о к е р Э., Ф а й л о н Л., Оригинский метод исследования напряжений. М.—М., ОИИИ, Глав. ред. облвузтехн. лит-ры, 1936, 634 стр.]

³⁾ T u z i Z. A new material for photo-elasticity; its application for stress study on a three dimensional test piece and on rapidly cooled specimens. Journal Society of Mechanical Engineering of Japan, 1927, vol. 30, № 119, March, pp. 127 -161.

очень сильно локализованные напряжения в действительности ослабляют деталь машины в эксплуатации. На этот важный вопрос можно удовлетворительно ответить только на основании экспериментального исследования. Статические испытания образцов из упругого материала показывают, что большие местные напряжения, вызванные различными разрывами непрерывности в форме образцов, обычно не снижают их предела прочности. Но результаты будут совершенно другими, если образцы подвергнуть действию переменных напряжений. Образование усталостных трещин может начаться при напряжениях ниже предела текучести материала, и в результате

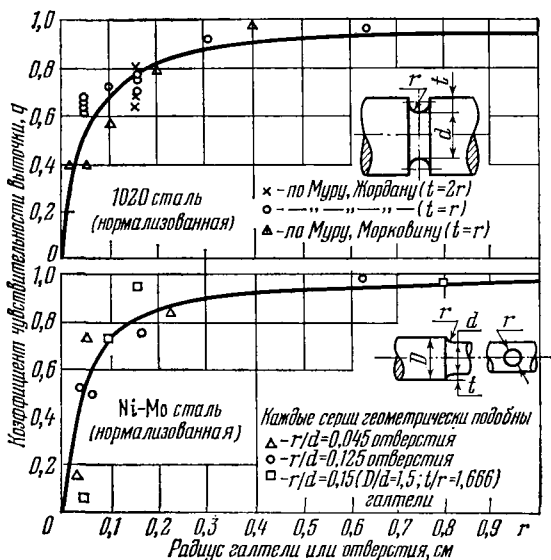


Рис. 11.

можно ожидать сильного влияния концентрации напряжений. Усталостные испытания показывают, что образцы с концентрацией напряжений становятся слабее, чем образцы, у которых концентрация напряжений исключена. Некоторые эксперименты указывают также на существование масштабного эффекта. Эксперименты показывают, что ослабляющее действие концентрации напряжения некоторого определенного вида увеличивается, если перейти от небольших образцов к геометрически подобным образцам большого размера ¹⁾ (рис. 11). Можно видеть, что ослабляющее действие концент-

¹⁾ Peterson R. E. Stress concentration design factors charts and relations useful in making strength calculations for machine parts and structural elements. New York, John Wiley, London, Chapman and Hall, 1953, 155 p.

рации напряжения достигает величины, определенной теоретическим расчетом, тогда, когда размеры образца увеличиваются. Увеличение ослабляющего действия концентрации напряжения отмечалось также Т. Буньяном и Г. Аattia, которые исследовали ¹⁾ усталостную прочность при кручении валов диаметром 24,77 см

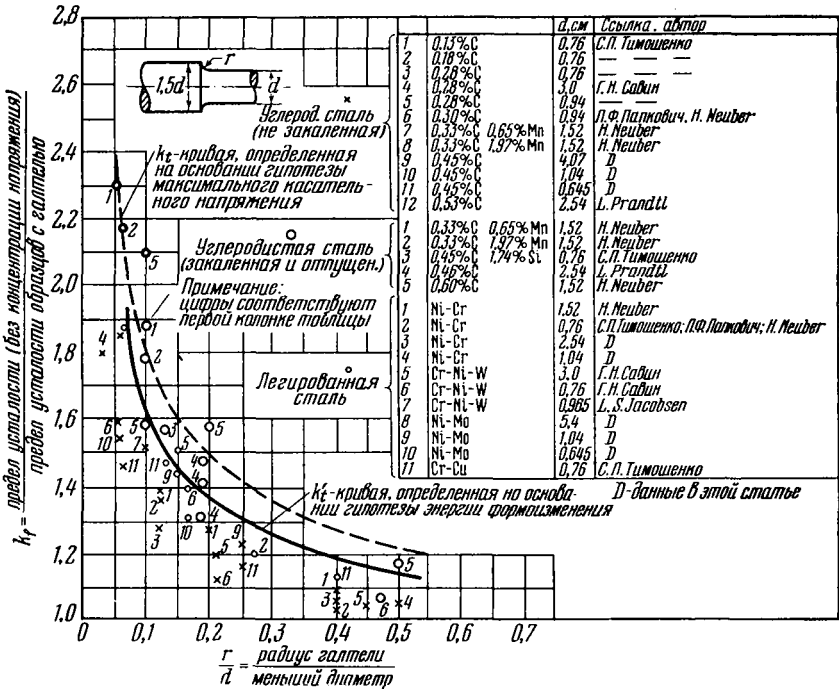


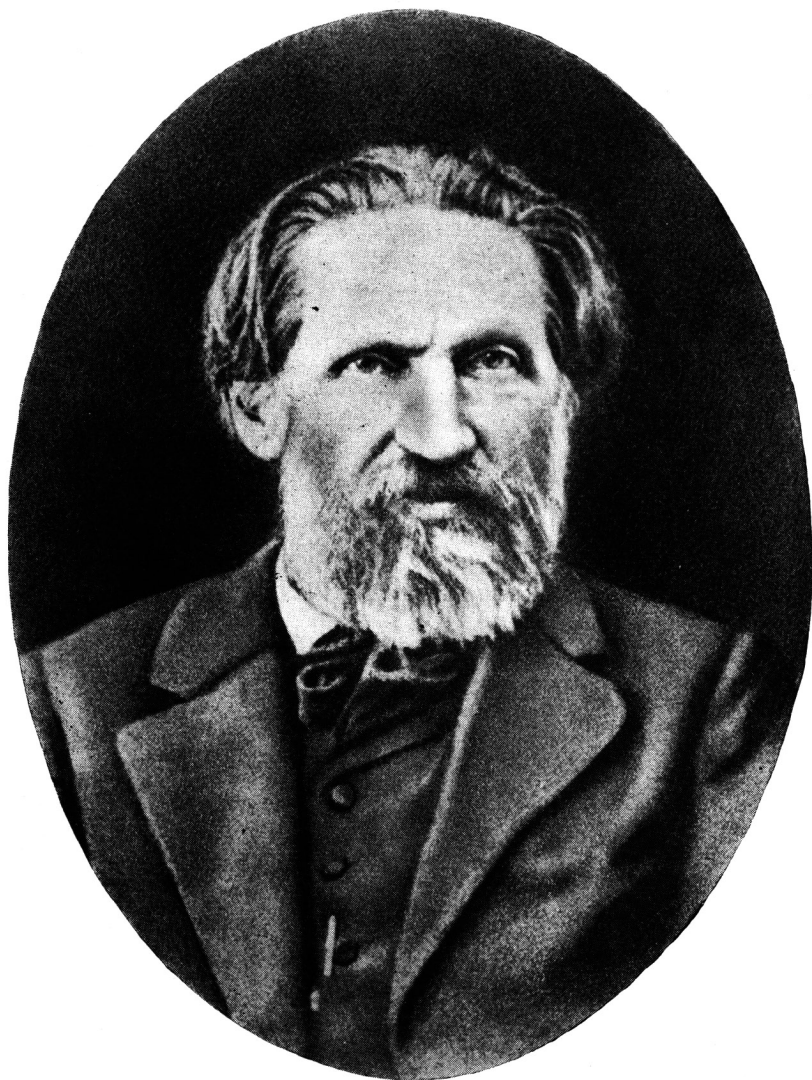
Рис. 12.

с галтелями различных радиусов и сравнивали свои результаты с результатами Л. Джекобсена, полученными им методом аналогии с электрическим током.

Явление масштабного эффекта позднее изучалось при статических испытаниях образцов их хрупкого материала без концентрации напряжений. Было обнаружено, что предел прочности снижается с увеличением размеров. Объяснение этого явления было получено ²⁾

¹⁾ B u n y a n T. W., A t t i a H. H. Investigation of effect of fillet radii on torsional fatigue strength of marine shafting. Transactions Institution of Engineers and Shipbuilders in Scotland, 1952, vol. 96, Part 7, pp. 425—483; discussion: pp. 483—492.

²⁾ W e i b u l l W. A statical theory of strength of materials. Proceedings of the Royal Swedish Institute for Engineering Research, 1939, № 151, pp. 1—45.



В. Л. КИРПИЧЕВ.

КРУЖОК ИМЕНИ В. Л. КИРПИЧЕВА

München, Druckerei «Einheit», 1958, 11 стр.

Петербургский Политехникум представлял собой необычный для России пример большого высшего учебного заведения, расположенного за пределами города. Большинство студентов и преподавательского персонала в первые годы существования Политехникума жили на территории Института. Сообщение с городом было мало удовлетворительное. Чтобы доехать до центра, нужно было затратить около полутора часов времени. При такой изоляции преподавательского персонала скоро появилась потребность в развитии местных научных кружков.

В отличие от старых высших учебных заведений, Политехникум ввел в программу широкую постановку практических занятий по основным научным предметам, таким, как математика, механика, физика и химия. Занятия велись в сравнительно небольших группах, в 20—30 человек, и требовали значительного числа преподавателей. Преподаватели хорошо оплачивались, и им не нужно было искать добавочных занятий на стороне. При таких условиях оставалось время для научной работы. Научные кружки процветали, и в «Известиях» Института того времени появился целый ряд научных работ существенного значения.

В 1903—1904 учебном году началось существование механического кружка, в котором приняли участие преподаватели теоретической и прикладной механики, сопротивления материалов, термодинамики и др. Успеху кружка содействовало то, что в нем принял участие наш бессменный председатель Виктор Львович Кирпичев (1844—1913). В. Л. Кирпичев — организатор и первый директор Харьковского технологического, а потом Киевского политехнического институтов, был назначен председателем строительной комиссии Петербургского Политехникума, и после окончания постройки остался при Институте преподавателем прикладной механики. По выслуге лет он уже не мог занимать должности штатного профессора и не состоял членом Совета профессоров, но во всех важных случаях он приглашался в Совет, и с его мнением там все считались.

Виктор Львович был выдающимся ученым в области прикладной механики и замечательным лектором. Его аудитория была всегда полна. По форме его лекции были очень просты. Он не прибегал к каким-либо ораторским приемам. Слушателей привлекали логич-

ность и ясность изложения и широта обобщений. При своей обширной эрудиции Виктор Львович мог брать для иллюстрации курса примеры из разных областей науки и техники, и это разнообразие делало его лекции особенно интересными.

Заходил на наши собрания и директор Института Андрей Григорьевич Гагарин. Это был милейший человек, ничего высокомерного в его обращении с нами, начинающими преподавателями, не было. А. Г. Гагарин интересовался вопросами испытания механических свойств строительных материалов. В нашей лаборатории стояла машина для испытания металлов, изобретенная и сконструированная им самим¹⁾. За нее он получил золотую медаль на Парижской всемирной выставке (1900). А. Г. Гагарин был прирожденным изобретателем, и в описываемое время занимался конструированием прибора для записи деформаций при ударе. Позднее этот прибор и относящаяся к нему теория были представлены А. Г. Гагариным в качестве диссертации для получения ученой степени адъюнкта института²⁾.

Первоначально главной задачей кружка было обсуждение появлявшихся в печати новых работ в разных областях прикладной механики. Начало XX века было очень интересным временем в развитии инженерного дела. Старые методы проектирования, основанные главным образом на применении разного рода эмпирических формул, быстро уступали место рациональным методам, основанным на теоретических расчетах и лабораторных исследованиях. Роль науки в инженерном деле быстро возрастала. Появился целый ряд новых задач, новых вопросов, и в нашем кружке было достаточно интересных тем для обсуждения.

Вспомою, например, какой интерес вызвала работа Г. Фрама³⁾, посвященная вопросу крутильных колебаний в паровых валах. В работе было показано, что обычный статический расчет далеко не всегда достаточен, что нужно основываться на динамической постановке вопроса, т. е. рассматривать крутильные колебания и выбирать размеры вала так, чтобы устранить возможность явления «резонанса», при котором амплитуда крутильных колебаний и соответствующие напряжения могут достигнуть опасных пределов. Работа

1) Крешерный пресс князя Гагарина. Журнал комиссии, составленный для разбора крешерного прессы капитана князя Гагарина, представленного им для соискания в 1899 г. Михайловской премии. Артиллерийский журнал, 1901, № 6, стр. 627—643.

2) Гагарин А. Г. Приборы, дающие зависимость между усилиями и деформациями во время удара. Диссертация, представленная на соискание степени адъюнкта С.-Петербургского политехнического института имени Петра Великого, С.-Пб, типолитография Шредера, 1912, 193 стр.

3) Frahm H. Neue untersuchungen über die dynamischen Vorgänge in den Wellenleitungen von Schiffsmaschinen mit besonderer Berücksichtigung der Resonanzschwingungen. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1902, Bd. 46, № 22, SS. 797—803.

Г. Фрама показала, что вопрос об упругих колебаниях имеет огромное значение при проектировании быстроходных машин.

Выяснилась необходимость познакомить наших студентов с колебаниями упругих конструкций. Помню, тогда было изготовлено в механической лаборатории несколько моделей для демонстрации колебаний, возбуждаемых в балках и валах быстровращающимся мотором с эксцентрично прикрепленным грузом.

Вопросы регулирования машин и расчеты махового колеса занимали тогда преподавателей прикладной механики. Виктор Львович познакомил нас со знаменитой работой И. Вышнеградского ¹⁾, которая положила начало теории регулирования в мировой литературе. Точный расчет махового колеса был дан тогда Ф. Виттенбауэром ²⁾, и было показано, что такого рода расчет требуется в случае двигателей внутреннего сгорания. Наш преподаватель К. Э. Рерих ³⁾ заинтересовался маховым колесом с переменным моментом инерции и представил в кружке разработанную им теорию такого маховика.

Большой интерес был вызван выходом в свет первого издания книги А. Стодолы ⁴⁾ по паровым турбинам. В ней аналитическим расчетам было уделено больше внимания, чем это обычно делалось в технической литературе. Особое внимание было уделено точным расчетам напряжений и указаны случаи, где обычные элементарные расчеты недостаточны и приходится обращаться к более точным решениям теории упругости. Было указано, например, на высокие напряжения, появляющиеся у краев круглых отверстий в быстровращающихся дисках. Вопрос концентрации напряжения поперечного сечения стержня или балки был в то время мало разработан. Имелось только решение ⁵⁾ для равномерно растянутой полосы, ослабленной круглым отверстием, и это решение было дано в окончательной форме без всякого указания на метод, каким оно было получено. Было ясно, что вопрос концентрации напряжений имеет не только

¹⁾ Вышнеградский И. О регуляторах прямого действия. Известия С.-Петербургского практического технологического института, 1877, том I, стр. 21—62. [Общий метод и главные результаты настоящего исследования были напечатаны в извлечении, представленном академиком Парижской Академии Треска под заглавием: Wischnegradski, Memoire sur la theorie generale des regulateurs. Comptes Rendus, 1876, vol. 83, № 5, p. 318.]

²⁾ Wittenbauer F. Graphische Dynamik. Berlin, 1923, S. 759.

³⁾ Ассур Л. В., Рерих К. Э. Графические методы определения момента инерции маховиков. С.-Петербург, издание кассы взаимопомощи студентов С.-Петербургского политехнического института, типолитография И. Трофимова, 1911, 63 стр. См. также Рерих К. Э., Теория регулирования машин. Часть I. Маховое колесо и периодическая неравномерность вращения машин. Петроград, тип. «Двигатель», 1916, 193 стр.

⁴⁾ Stodola A. Die Dampfturbinen und die Aussichten der Wärmekraftmaschinen. Berlin, Verlag von J. Springer, 1903.

⁵⁾ Kirsch [G.] Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1898, Bd. 42, № 29, SS. 797—807.

теоретическое, но и большое практическое значение, и в связи с этим Виктор Львович указал нам на работу русского ученого профессора Х. С. Головина¹⁾, занимавшегося исследованием напряжений в круговых арках. Работа эта никогда не была переведена на иностранные языки и осталась совершенно неизвестной на Западе. Пользуясь его методом, легко решали задачу о круглом отверстии не только для простого растяжения, но и для некоторых других случаев. В дальнейшем задачей о распределении напряжений у отверстий разных форм занялся профессор Г. В. Колосов и его ученик Н. И. Мухелишвили. Ими²⁾ были разработаны методы для решения такого рода задач, и сейчас в этой области теории упругости Россия впереди всех других стран.

Виктор Львович указал также на возможность изучения концентрации напряжений с помощью оптического метода, основанного на применении поляризованного света. Метод этот был разработан давно Джеймсом Максвелом³⁾, но долгое время не находил применения, и только с началом двадцатого столетия он вошел в употребление, главным образом благодаря трудам А. Менаже⁴⁾ и Э. Кокера⁵⁾. В России метод был совершенно неизвестен, и мы узнали о нем только из лекций Виктора Львовича, прочитанных для членов кружка. По указаниям Виктора Львовича был построен в то время для демонстрации метода простой прибор, в котором для поляризации применялось отражение света от зеркала. В моей жизни этот прибор сыграл большую роль. Вспоминаю начало моей деятельности в лаборатории компании Вестингауза в Питсбурге, где я тогда работал в качестве инженера по исследованию напряжений в деталях машин. Было немало сложных задач, которые могли бы быть разрешены только экспериментальным путем, и было вполне естест-

¹⁾ Головин Х. С. Одна из задач статики упругого тела. Известия С.-Петербургского практического технологического института, 1880—1881, стр. 373—410.

²⁾ Колосов Г. В. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости. Юрьев, тип. К. Маттисена, 1909; Колосов Г. В. Применение комплексной переменной к теории упругости. Л.—М., ОНТИ, 1935; Колосов Г. В., Мухелишвили Н. И. О равновесии упругих круглых дисков. Известия Электротехнического института, Петроград, 1915, том 12, № 7, стр. 39—55; Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 4-е, М., Изд-во АН СССР, 1954. [Первое издание вышло в Ленинграде в 1933 г., а последнее — пятое — в 1966 г.]

³⁾ Maxwell J. C. The scientific papers. Cambridge, University Press, 1890.

⁴⁾ Ménéage A. Contribution a l'étude de la déformation élastique des solides. Annales des ponts et chaussées. 1 Partie, 1901, 8 série, 71 année, 4^e trimestre, pp. 129—190.

⁵⁾ Coker E. G. The determination by photo-elastic methods, of variable section, with some application to ships' plating. Engineering, 1911, vol. 91, April 21, pp. 531—533; April 28, pp. 566—568. См. также: Кирпичев В. Л. Оптическое изучение упругих деформаций. Вестник общества технологов, 1913, том 20, № 1, стр. 1—9; См. стр. 37—47.

венно обратиться к оптическому методу исследования напряжений. Но для измерения напряжений с достаточной точностью нужны довольно сложные и дорогие приборы. Получить нужные средства для оборудования новой лаборатории, в особенности для недавно появившегося иностранца, не так-то просто. И вот тогда по моим указаниям был построен прибор, подобный тому, что я когда-то видел в лаборатории В. Л. Кирпичева. Прибор, конечно, был неподходящим для измерения напряжений, но вполне удовлетворительным для демонстрации напряжений в различных машинных частях. Помню, что после демонстрации этого прибора я больше не имел затруднений в получении средств не только для оптических приборов, но и для оборудования других отделов лаборатории. В конце концов компания оборудовала одну из лучших механических лабораторий в США. Пользуясь прибором В. Л. Кирпичева, я прочел тогда ряд лекций по оптическому методу в разных университетах страны, и это имело большое значение для моей дальнейшей уже педагогической деятельности. Эти лекции установили связь с преподавательским персоналом инженерных школ страны, и позже, когда я начал организовывать летние курсы для преподавателей механики, я всегда имел достаточно слушателей.

По политическим соображениям высшие учебные заведения России были закрыты для учебных занятий в 1905 г. и большей части 1906 г., но деятельность кружка не прекращалась, она даже расширялась, так как у преподавателей было больше свободного времени для научной работы. Делались не только обзоры текущей технической литературы, но и доклады о собственных научных работах. Помню, мне пришлось доложить об исследовании по кручению двутавровых балок, в котором впервые было получено уравнение, нашедшее впоследствии широкое применение в исследованиях продольного изгиба, связанного с кручением в случае сжатия тонкостенных стержней. Эти теоретические результаты были подтверждены опытами, произведенными в механической лаборатории. Докладывал также я о моих работах по устойчивости изгиба двутавровых балок ¹⁾ и об устойчивости сжатых пластинок ²⁾. Опять же теоретические результаты подтверждались опытами. В то время эти работы, казалось, были скорее академического характера, так как явления упругой неустойчивости возможны только в случае тонких пласти-

¹⁾ Тимошенко С. П. Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки под влиянием сил, действующих в плоскости ее наибольшей жесткости. Известия С.-Петербургского политехнического института, 1905, том 4, вып. 3—4, стр. 151—219; 1906, том 5, выпуск 1—2, стр. 3—34; вып. 3—4, стр. 263—292. [Перепечатка: Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М., изд-во «Наука», 1971, стр. 9—105.]

²⁾ Тимошенко С. П. К вопросу об устойчивости сжатых пластинок. Известия Киевского политехнического института, 1907, год 7, книга 2, стр. 35—94. Отд. оттиск. Киев. тип. С. В. Кульженко, 1907, 60 стр. [Перепечатка: там же, стр. 116—165.]

нок и тонкостенных конструкций. Но скоро нашлись и приложения в областях судостроения, мостостроения и особенно в аэропланных конструкциях. Одно из первых приложений теория устойчивости пластинок нашла при проектировании новых крейсеров возрождающегося русского флота. Тут применялась сталь повышенного качества. Допускаемые напряжения были увеличены, и получалась возможность применять более тонкие пластинки, для которых вопрос устойчивости приобретал большое практическое значение. Наш профессор И. Г. Бубнов был во главе проектирования и теоретическим расчетам на прочность и устойчивость уделял большое внимание. В результате этих исследований удалось получить значительную экономию в весе корпуса крейсеров. Помню, уже позже петербургские кораблестроительные заводы посетила делегация английского флота. Несмотря на быстрое возрастание в размерах и весе военных судов, англичане продолжали при проектировании пользоваться старыми эмпирическими формулами. Помню, критикуя выбранные нами толщины поперечных переборок, англичане в защиту своего мнения могли привести только устарелую формулу Рэнкина, и И. Г. Бубнов возразил, что, пользуясь этой формулой, можно предсказать что угодно, даже лунные затмения.

В связи с проектированием переборок, мною была разработана теория устойчивости пластинок, подкрепленных уголками жесткости ¹⁾. Теория эта нашла широкое применение при проектировании различного рода тонкостенных металлических конструкций. Применена она была и при постройке упомянутых выше крейсеров. В связи с этим были произведены опыты на больших моделях (до одной тонны весом) корабельных поперечных переборок. Может быть, и до сих пор эти модели стоят в коридорах Электротехнического института, в котором производились опыты?

Возвращаясь к деятельности кружка, упомяну, что там докладывались и работы экспериментального характера, имевшие дело с изучением механических свойств металлов. Особенно интересны всегда были доклады А. М. Драгомирова. Он тогда занимался определением предела текучести в разного рода сталях и, пользуясь машиной Гагарина, показал, что положение высшего предела текучести зависит от целого ряда причин и что при надлежащей постановке опытов можно получить предел текучести выше временного сопротивления материала. Для изучения однородности материала какой-либо конструкции А. М. Драгомиров ввел практику вырезывания из конструкции для испытаний весьма малых образцов и применил этот метод при изучении прочности ружейных стволов. К сожалению,

¹⁾ Тимошенко С. П. Об устойчивости пластинок, подкрепленных жесткими ребрами. Сборник Института инженеров путей сообщения, Петроград, 1915, вып. 89, стр. 1—31. Отд. оттиск. Петроград, тип. А. Э. Коллинса, 1914, 31 стр. [Перепечатка: Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М., изд-во «Наука», 1971, стр. 473—502.]

А. М. Драгомиров не публиковал результатов своих исследований, и о некоторых его работах мы узнаем только из ссылок в работах его товарищей ¹⁾).

Интересные опыты по ударной пробе были произведены Н. Н. Давиденковым ²⁾. Он указал на источник постоянных погрешностей при опытах с известной машиной Амслера и указал, как эти погрешности могут быть устранены. Об этом Н. Н. Давиденков доложил на Международном конгрессе по испытанию материалов в Нью-Йорке. С тех пор Н. Н. Давиденков опубликовал много важных работ по испытанию материалов и приобрел известность не только в России, но и далеко за ее пределами.

Интересовались мы в кружке и педагогическими вопросами. Часы упражнений по теоретической механике в небольших группах были тогда новинкой, и нам хотелось использовать эти занятия как можно продуктивнее. Вопрос контроля студенческих занятий был совершенно устранен. Студентов не вызывали к доске и не ставили отметок. Весь расчет был на то, что преподаватель сумеет заинтересовать студентов и привлечь их внимание надлежащим выбором задач и их решением. Мы, преподаватели, в большей части прошли в свое время чисто теоретический курс механики и испытывали на себе все недостатки системы, когда преподавание механики совершенно оторвано от инженерного дела. Нам хотелось преподавать по-иному. Выбрав примеры технического характера, нам хотелось показать студентам, что инженер обычно не встретит задач, готовых для математического решения, что в каждом частном случае нужно суметь выделить существенные элементы вопроса и, пользуясь ими, сформулировать задачу, и только когда задача правильно поставлена, приступить к ее математическому решению. Получив решение, мы обычно посвящали некоторое время обсуждению практического значения полученных результатов. Такое сближение науки и ее технических приложений оказалось жизненным. Студенты охотно посещали занятия и проявляли к ним интерес. Нужно, конечно, отметить высокий уровень научной подготовки наших сотрудников.

Политехникум привлекал большое число желающих в него поступить, и из их числа выбирались для приема те, кто показал в средней школе наивысшую успеваемость. Преподавательский

¹⁾ См. Давиденков Н. Н. Динамические испытания металла. М.— Л., Госиздат, 1929, 336 стр. [Книга эта «Посвящается памяти друга инженера Андрея Михайловича Драгомирова».]

²⁾ Давиденков Н. Н. К вопросу об ударной пробе (Доклад на VI конгрессе Международного общества испытания материалов в Нью-Йорке, 1912 г.), Известия С.-Петербургского политехнического института императора Петра Великого, 1913, том 19, стр. 561—597. Отд. оттиск. С.-Петербург, типолитография Шредера, 1913, 37 стр. Более подробное изложение доклада в его же работе: «Etude sur la théorie d'un appareil de choc par traction». Communications de l'Assoc. internat. pour l'essai des matériaux. Congress, 1912, № 10.

персонал тоже оказался на высоте положения, имелись не только знания, но и большой интерес к преподаванию. В групповом преподавании механики участвовали не только начинающие молодые преподаватели, но и профессора смежных кафедр, сознававшие всю важность для их предмета правильной постановки преподавания механики.

Припоминается одно интересное замечание В. Л. Кирпичева. После опыта с организацией трех высших технических учебных заведений он утверждал, что по его наблюдениям наивысший процент выдающихся инженеров во всех трех случаях приходился на первые выпуски, и объяснял это тем, что хотя при начале в преподавании еще нет сложившегося коллектива, недостаток в опыте преподавательского персонала восполняется энтузиазмом, всегда имеющимся при начале нового дела. У нас, членов механического кружка, этот энтузиазм был. Мы не считали количества часов, затрачиваемых на подготовку к занятиям, на обсуждение в кружке новых задач и примеров. Это время не пропало даром. Собранные примеры составили задачник, которым пользовались во всех высших технических школах России ¹⁾. Впоследствии книга была переведена в Америке на английский язык. Я широко пользовался этой книгой при составлении учебника элементарной механики. Учебник этот нашел большое распространение, переведен на многие языки Европы и Азии. Иногда получаешь книгу на незнакомом языке, не можешь ее читать, но видишь знакомые чертежи, составленные более пятидесяти лет тому назад для задачника Петербургского политехникума.

Во главе теоретической механики в Политехникуме стоял Иван Всеволодович Мещерский, представитель университетской школы. Это не мешало ему ясно понимать, что постановка преподавания механики для инженеров должна быть иной, чем на математическом факультете университета. Чтобы установить нужный контакт с инженерами, он посещал занятия нашего кружка и приглашал для групповых занятий по механике инженеров. Ему также принадле-

¹⁾ [Первое литографированное издание: Мещерский И. В., Сборник задач, относящихся к курсу теоретической механики, читанному на II семестре Технических Отделений С.-Пб. Политехнического института. Часть I, С.-Петербург, литография Трофимова, 1907, IV+78 стр. Часть II, то же 1908, IV+60 стр. Второе литографированное издание: Сборник задач, относящихся к курсу теоретической механики. Часть I. Издание профессора С.-Пб. Политехнического института И. В. Мещерского, литография Трофимова, С.-Петербург, 1909, IV+90 стр. Часть II, то же, 1910, IV+90 стр. Первое печатное издание: Сборник задач по теоретической механике. Часть I. Редактировал и издал И. В. Мещерский, С.-Петербург, 1911, типография А. С. Суворина, IV+3+65 стр. Часть II, то же, 1914, IV+3+132 стр. Второе печатное издание: Сборник задач по теоретической механике. Часть I. Редактировал и издал И. В. Мещерский, С.-Петербург, 1913, типография А. С. Суворина, IV+3+66 стр. Часть II, то же, 1914, IV+63 стр. Последнее издание: Мещерский И. В., Сборник задач по теоретической механике. Под ред. Н. В. Бутенина и др. Изд. 34, М., «Наука», 1975, 447 стр.]

жит заслуга организации при кафедре механики кабинета механики, в котором была собрана большая коллекция моделей и приборов, которыми и И. В. Мещерский и В. Л. Кирпичев часто пользовались для демонстраций на лекциях. В этом же кабинете студенты выполняли экспериментальные работы по механике, которые были обязательны для студентов некоторых отделений Института. Эти занятия вначале вел Александр Петрович Фан-дер-Флит, а потом Константин Эдуардович Рерих. Оба — постоянные посетители кружка. Немало вечеров в этом кабинете в начале моей преподавательской деятельности проводил и я.

И. В. Мещерский всегда старался приблизить свое преподавание к потребностям инженеров и значительно упростил курс механики, но все же это был чисто теоретический курс. С изложением механики иного характера мы познакомились в 1905 г., когда Институт был закрыт, и В. Л. Кирпичев прочел для нескольких членов кружка курс механики у себя на дому. Эти лекции были позже изданы под заглавием «Беседы по механике» и нашли в России широкое распространение¹⁾. Это были действительно беседы, а не лекции. Мы (нас было четыре слушателя: сын Виктора Львовича, К. Э. Рерих, В. Э. Классен²⁾ и я) размещались вокруг стола, и Виктор Львович, вооружившись мягким карандашом для писания на листках бумаги нужных выкладок, начинал изложение. Характерным было то, что Виктор Львович уделял математическим выводам сравнительно мало места. Часто, написав уравнения, сразу давал их решение, предполагая, что нужные выкладки слушатель сам сможет без затруднений выполнить дома. Время уходило на формулировку вопроса, на обсуждение вводимых допущений и часто на историческое введение. А когда решение было получено, обсуждалось его значение и область применения. При таком способе изложения можно было в сравнительно небольшое число лекций изложить довольно полный курс механики и показать сущность предмета, не затемняя ее промежуточными выкладками. На нас, слушателей, курс произвел большое впечатление и, без сомнения, оказал сильное влияние на нашу последующую педагогическую деятельность.

В конце 1906 г. я оставил Политехникум и опять вернулся туда только во второй половине 1911 г. За пять лет произошли большие перемены. Институт расширился. Прибавились новые отделения. Увеличилось число принимаемых студентов. Число преподавателей

¹⁾ К и р п и ч е в В. Л. Беседы о механике. С.-Петербург, изд. К. Л. Риккера, 1907, 371 стр. [См. также последующие издания: К и р п и ч е в В. Л. Беседы о механике. Основные вопросы механики системы. Изд. 2. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1933, 270 стр.; изд. 3, то же, 1938, 270 стр.; изд. 4, то же, 1950, 360 стр.; изд. 5, то же, 1951, 360 стр.]

²⁾ См. его работу: К л а с с е н В. Э. Способы увеличения гидравлических установок во время высрских вод. С.-Петербург, тип. журнала «Строитель», 1912, 21 стр.

возросло, и многие из них жили в городе и приезжали только в часы своих занятий. Механический кружок продолжал существовать и собирался под председательством Виктора Львовича, но характер его деятельности значительно изменился. Собирались редко. Заседания проходили не в механической лаборатории, а в большой аудитории и носили более формальный характер. После докладов уже не велись, как прежде, разговоры о наилучшем преподавании механики. Мы все были очень заняты и спешили после доклада домой.

Вспоминая теперь о деятельности механического кружка, ясно видно, что он не только содействовал научной работе участников, но им в свое время была выполнена важная работа по введению в жизнь нового метода преподавания механики, оказавшегося плодотворным и принятого теперь не только в России, но и далеко за ее пределами. Во всей этой работе руководство и указания В. Л. Кирпичева сыграли важную роль.

ПЕРЕЧЕНЬ СТАТЕЙ С. П. ТИМОШЕНКО

1. К вопросу о явлениях резонанса в валах. Известия С.-Петербургского политехнического института, 1905, том 3, вып. 1—2, стр. 55—106. Отд. оттиск, СПб., 1905, 52 стр.
2. Описание прибора А. Н. Крылова для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Известия С.-Петербургского политехнического института, 1905, том 3, вып. 3—4, стр. 397—406.
3. Формулы сложного сопротивления с точки зрения различных теорий о прочности. Известия С.-Петербургского политехнического института, 1905, том 3, вып. 3—4, стр. 415—455.
4. Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки под влиянием сил, действующих в плоскости ее наибольшей жесткости. Известия С.-Петербургского политехнического института, 1905, том 4, вып. 3—4, §§ 1—10, стр. 151—219; 1906, том 5, вып. 1—2, §§ 11—15, стр. 3—34; вып. 3—4, §§ 1—6, стр. 263—292. Отд. оттиск, СПб., 1906, 132 стр. Перепечатка: [1]¹⁾, стр. 9—105.
5. К вопросу о дополнительных напряжениях, обусловленных жесткостью узлов. Известия С.-Петербургского политехнического института, Отдел техники, естествознания и математики, 1907, том 7, вып. 1, стр. 135—144. Отд. оттиск, Киев, 1907, 10 стр.
6. О продольном изгибе стержней в упругой среде. Известия С.-Петербургского политехнического института, Отдел техники, естествознания и математики, 1907, том 7, вып. 1, стр. 145—157. Отд. оттиск, СПб., типолитография Шредера, 1907, 13 стр. Перепечатка: [1], стр. 106—115.
7. К вопросу об устойчивости сжатых пластинок. Известия Киевского политехнического института, 1907, год 7, книга 2, стр. 35—94. Отд. оттиск, Киев, тип. С. В. Кульженко, 1907, 60 стр. Перепечатка: [1], стр. 116—165.
8. О влиянии круглых отверстий на распределение напряжений в пластинках. Известия Киевского политехнического института, 1907, год 7, книга 3, стр. 95—113. Отд. оттиск, Киев, 1907, 21 стр.
9. К вопросу о продольном изгибе. Известия Киевского политехнического института, 1908, год 8, книга 2, стр. 181—212. Отд. оттиск, Киев, тип. С. В. Кульженко, 1908, 32 стр. Перепечатка: [1], стр. 166—190.
10. О распределении напряжений в круговом кольце, сжатом двумя взаимно противоположными силами. Известия Киевского политехнического института, 1909, год 9, книга 1, стр. 21—37.
11. О вынужденных колебаниях призматических стержней. (Приложение к исследованию колебания мостов.) Известия Киевского политехнического института, 1909, год 9, книга 4, стр. 201—252. Отд. оттиск, Киев, 1909, 50 стр.
12. Перечень докладов, читанных в кружке преподавателей механического и инженерного отделения Киевского политехнического института в 1909 г. Известия Киевского политехнического института, 1910, год 10, книга 1, стр. 1—2. [Перечислены следующие доклады, сделанные С. П. Тимошенко: а) Об установлении курса приближенных вычислений; б) Об изменениях в постановке «Известий Киевского политехнического института»;

¹⁾ Под [1] здесь и далее подразумевается сборник Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М., «Наука», 1971.

- в) О постановке преподавания математики в высших технических учебных заведениях; г) Применение нормальных координат к исследованию изгиба стержней и пластинок; д) Расчет перекрестных балок.]
13. Применение нормальных координат к исследованию изгиба стержней и пластинок. Известия Киевского политехнического института, Отдел инженерной механики, 1910, год 10, книга 1, стр. 1—49. Отд. оттиск, Киев, 1910, 49 стр.
 14. К вопросу об устойчивости упругих систем. Известия Киевского политехнического института, Отдел инженерной механики, 1910, год 10, книга 2, стр. 147—167. Отд. оттиск, Киев, 1910, 21 стр. Перепечатка: [I], стр. 191—207.
 15. L u d w i k P. Elemente der technologischen Mechanik. Berlin, 57 S. Рецензия. Известия Киевского политехнического института, Отдел инженерной механики, 1910, год 10, книга 2, Библиограф. отд., стр. 3.
 16. J a h n k e E., E m d e F. Funktionen tafeln mit Formeln und Kurven Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1909, 176 S. Рецензия. Известия Киевского политехнического института, 1910, год 10, книга 2. Библиограф. отд., стр. 4.
 17. Об устойчивости упругих систем. Применение новой методы к исследованию устойчивости некоторых мостовых конструкций. Известия Киевского политехнического института, Отдел инженерной механики, 1910, год 10, книга 4, стр. 375—560. Отд. оттиск, Киев. тип. С. В. Кульженко, 1910, 188 стр. То же, 1911. Перепечатка: [I], стр. 208—383.
 18. Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. IV, Heft 3. K a r m a n Th. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. Рецензия. Известия Киевского политехнического института, 1910, год 10, книга 4. Библиограф. отд., стр. 1—2.
 19. Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1910, Bd. 58, Heft 4, SS. 337—385. Sonderdruck: Leipzig, B. G. Teubner, 1910, 49 S. Перепечатка: [II] ¹⁾, pp. 1—50. Перевод на русский язык: «Некоторые теоретические проблемы упругой устойчивости». [I], стр. 386—433.
 20. Erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1911, Bd. 59, Heft 2, SS. 163—203. Перепечатка: [II], pp. 51—91.
 21. Приближенный метод исследования устойчивости упругих систем. Университетские известия, Киев, 1911, год 52, № 7, июль, стр. 1—25. Отд. оттиск, Киев, Университет, 1911, 25 стр.; Отд. оттиск, без указания места и года публикации, 19 стр. (Из протоколов физ.-матем. о-ва за 1911 г.) Перепечатка: [I], стр. 434—456.
 22. Приближений спосіб досліду зігнути штаб. Киев, Друкарня Другої Артїлі, 1911, 38 стр.
 23. К вопросу о действии удара на балку. Известия С.-Петербургского политехнического института. Отдел техники, естествознания и математики, 1912, том 17, вып. 2, стр. 407—425. Отд. оттиск, СПб., 1912, 19 стр.
 24. Вопросы прочности в паровых турбинах. Вестник общества технологов, 1912, том 19, № 7, стр. 266—279. Отд. оттиск, СПб., тип. «Строитель», 1912, 46 стр.
 25. Zur Frage nach der Wirkung eines Stosses auf einen Balken. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1913, Bd. 62, Heft 2, SS. 198—209. Перепечатка: [II], pp. 225—236.
 26. Sur la stabilité des systèmes élastiques. Application d'une nouvelle méthode à la recherche de la stabilité de certaines parties constitutives des ponts. Annales des ponts et chaussées, I Partie, 9 série, 1913, tome 15, vol. 3, Mai — Juin № 24, pp. 496—566; tome 16, vol. 4, Juillet — Août, № 39, pp. 73—132; tome 17, vol. 5, Septembre — Octobre, № 50, pp. 372—412; Paris, A. Dumas, 1914, 174 p. Перепечатка: [II], pp. 92—224. См. также реферат этой работы:

¹⁾ Под [II] здесь и в дальнейшем подразумевается сборник T i m o s h e n k o S. P. The collected papers. McCraw-Hill Publishing Company Ltd, New York — London — Toronto, 1953.

- T i m o s h e n k o S. Stabilité des systèmes élastiques. Annales des Travaux Publics de Belgique, 1914, Deuxième série, tome XIX, 1 Fascicule, Février, pp. 180—181, 186.
27. О графическом построении кривой расстояний. Реферат в статье «Из жизни общества технологов». Научно-механический кружок. Вестник общества технологов, 1913, том 20, № 7, стр. 241—242.
 28. Об изгибе стержней, имеющих незначительную первоначальную кривизну. Вестник общества технологов, 1913, том 20, № 13, стр. 411—414.
 29. К вопросу о расчете сферических оболочек. Вестник общества технологов, 1913, том 20, № 17, 1 сентября, стр. 549—557. Отд. оттиск, СПб., 1914, 25 стр.
 30. Применение функций напряжений к исследованию изгиба и кручения призматических стержней. Сборник Института инженеров путей сообщения, СПб., 1913, вып. 82, стр. 1—21. Отд. оттиск, СПб., 1913, 22 стр.
 31. К вопросу о деформациях и устойчивости цилиндрической оболочки. Вестник общества технологов, 1914, том 21, № 21, 1 ноября, стр. 785—792; Известия Электротехнического института, Петроград, 1914, том 11, стр. 267—287. Отд. оттиск, Петроград, тип. А. Э. Коллинса, 1914, 23 стр. Перепечатка: [I], стр. 457—472.
 32. Étude de la flexion des barres au moyen d'une méthode approximative. Annales des travaux publics de Belgique, 1914, serie 2, tome 19, 2 Fascicule — Avril, pp. 263—296. Extrait des «Annales des Travaux publics de Belgique», Bruxelles, J. Gœmaere, impr., 1914, 36 p. Перевод с русского языка: Т и м о ш е н к о С. П. Курс сопротивления материалов, Киев, изд. Л. Идзиковского, 1911, стр. 326—350, дополненный статьей «Применение нормальных координат к исследованию изгиба стержней и пластинок». Перепечатка: [II], pp. 237—263.
 33. Об устойчивости пластинок, подкрепленных жесткими ребрами. Сборник Института инженеров путей сообщения, Петроград, 1915, вып. 89, стр. 1—31. Отд. оттиск, Петроград, тип. А. Э. Коллинса, 1914, 31 стр. Перепечатка: [I], стр. 473—502.
 34. О влиянии первоначальной кривизны на изгиб прямоугольной пластинки с опертыми краями. Сборник Института инженеров путей сообщения, Петроград, 1915, вып. 89, стр. 1—4. Отд. оттиск, Петроград, 1914, 4 стр.
 35. Предисловие в книге: Теория прочности (Сборник статей). Под ред. проф. С. П. Тимошенко. Петроград, Изд-во «Образование», 1915, 122 стр. (Новые идеи в технике. Непериод. издание под ред. проф. А. А. Байкова, Сб. № 1), стр. III — V.
 36. О больших прогибах круглых пластинок. Сборник Института инженеров путей сообщения, Петроград, 1915, вып. 89, стр. 1—10. Отд. оттиск, Петроград, 1915, 10 стр.
 37. О динамических напряжениях в рельсах. Вестник инженеров, 1915, том 1, № 4, 15 февраля, стр. 143—152. Отд. оттиск, Петроград, тип. «Строитель», 1915, 30 стр.
 38. К вопросу о прочности рельс. Отд. оттиск, Петроград, тип. А. Э. Коллинса, 1915, 42 стр. (Ин-т инж. путей сообщения.)
 39. К вопросу о вибрациях рельс. Известия Электротехнического института, 1915, том 13, стр. 1—17. Отд. оттиск, Петроград, 1915, 17 стр.
 40. Влияние начальной осадки шпалы на условия изгиба рельс. Петроград, 1916, 14 стр. (Ин-т инж. путей сообщения.)
 41. Приближенный способ расчета перекрестных балок. Без указания места публикации, 1916, 8 стр.
 42. К вопросу о допускаемых напряжениях в металлических мостах. Известия собрания инженеров путей сообщения, 1917, № 7, стр. 140—146; № 8, стр. 173—179. Отд. оттиск, Петроград, тип. товарищества «П. Ф. Эл.—тип. Н. Я. Стойковой», 1917, 43 стр.
 43. До питання про організацію класи прикладного природознавства при фізично-математичному Відділі Української Академії наук. Збірник праць

- комісії для вироблення законопроекту про заснування Української Академії наук у Києві. Київ, 1919, стр. 80—85.
44. Розрахунок арок. Праці Інституту технічної механіки, 1919, 12—14 стр. (условно, (не опубліковано ¹⁾).
 45. Прочність аеропланів. Праці Інституту технічної механіки, 1919, 6—7 стр., (условно, (не опубліковано ¹⁾).
 46. On the differential equation for the flexural vibrations of prismatical rods. Glasnik Hrvatskoga prirodoslovnoga društva, Zagreb, 1920, godina 32, № 2, str. 55—57.
 47. K problemu pritiska na pravokutni paralelepiped. Glasnik Hrvatskoga društva, Zagreb, 1920, godina 32, № 2, str. 57—60.
 48. On the additional deflexion due to shearing. Glasnik Hrvatskoga prirodoslovnoga društva, Zagreb, 1921, godina 33, I polovina, септјарь, № 1, str. 50—52.
 49. Bemerkungen zum Aufsätze Prof. E. R a s c h «Über das unverstümmelte Grundgesetz der Biegungstheorie und über den Sinn der Eulerschen Knickgleichungen». Der Eisenbau, internationale Monatschrift für Theorie und Praxis der Eisenbaues. 1921, Jahrgang 12, № 3, März 8, SS. 69—70.
 50. Sagibanjekrive cijevi pravokutnog poprečnog presjeka. Tehnički list, Udruženja Jugoslovenskih Inženjera i Arhitekta, Zagreb, 1921, godina 3, Br. 1—2, januara 15, str. 1—3.
 51. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. Philosophical Magazine and Journal of Science, 1921, Series 6, vol. 41, May, № 245, pp. 744—746. Перепечатка: [11], pp. 288—290.
 52. Proračunavanje tankih ploča, oslabljenih otvorima. Tehnički list, Udruženja Jugoslovenskih Inženjera i Arhitekta, Zagreb, 1921, godina 3, Br. 4, februara 15, str. 37—40.
 53. Pitanje obuke u deskriptivnoj geometriji na tehnikama. Finis. Tehnički list, Udruženja Jugoslovenskih Inženjera i Arhitekta, Zagreb, 1921, godina 3, Br. 5, мап I, str. 55—56.
 54. Zavodi za naučno-tehnička instraživanja u savremenoj tehnici. Tehnički list, Udruženja Jugoslovenskih Inženjera i Arhitekta, Zagreb, 1921, godina 3, Br. 9, мап I, str. 102—105.
 55. O čvrstoći tračnica. Tehnički list, Udruženja Jugoslovenskih Inženjera i Arhitekta, Zagreb, 1921, godina 3, Br. 19, oktobra 1, str. 217—219.
 56. Über die Stabilität versteifter Platten (SS. 117—163), Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1921, Bd. 1, Heft 4 (Ende August), S. 332.
 57. Über die Stabilität versteifter Platten, Der Eisenbau, 1921, Bd. 12, № 5—6, SS. 147—163. Перепечатка: [11], pp. 264—287. Перевод на русский язык: «Об устойчивости подкрепленных пластин», [1], стр. 503—527.
 58. Etude de l'action des charges roulantes sur les rails. Le Génie Civil. 1921, 24 Décembre, № 2054, vol. 79, № 26, pp. 555—556.
 59. On the transverse vibrations of bars of uniform crosssections. Philosophical Magazine and Journal of Science, 1922, Series 6, vol. 43, January, № 253, pp. 125—131. Перепечатка: [11], pp. 329—333.
 60. Beams with loads irregularly distributed. Engineering, 1922, vol. 113, № 2929, February 17, pp. 196—197.
 61. The approximate solution of two-dimentional problems in elasticity. Zagreb, Yugoslavia, 1922, March, 7, 8 p. Перепечатана в [83].
 62. Paul Séjournee: Grandes voûtes. Tehnički list, Udruženja Jugoslovenskih Inženjera i Arhitekta, Zagreb, 1922, godina 4, Br. 8, aprila 15, str. 82—84.
 63. On the forced vibrations of bridges. Philosophical Magazine and Journal of Science, 1922, Series 6, vol. 43, May, № 257, pp. 1018—1019.

¹⁾ См. Звідомлення про діяльність Української Академії наук до 1 січня 1920 р. в книжці «Перший піврік існування Української Академії наук начеркції праць до кінця 1919 року». Київ, 1919, стр. LIX.

64. On the buckling of deep beams. *Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1922, Series 6, vol. 43, May, № 257, pp. 1023—1024.
65. Novija engleska istraživanja u području elasticitete i čvrstoće materijala. *Tehnički list, Udruženja Jugoslovenskih Inženjera i Arhitekta Zagreb*, 1922, godina 4, Br. 11—12, juna 15, str. 115—119.
66. On the distribution of the stresses in a circular ring compressed by two forces acting along a diameter. *Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1922, Series 6, vol. 44, November, № 263, pp. 1014—1019. Перепечатка: [II], pp. 334—337.
67. On the torsion of a prism, one of cross-sections of which remains plane. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1922, February, 10, [1921], vol. 20, Series 2, Part 5, pp. 389—397. Перепечатка: [II], pp. 314—320.
68. A membrane analogy to flexure *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1922, February 10, [1921], vol. 20, Series 2, Part 5, pp. 398—400; Part 6, pp. 401—407. Перепечатка: [II], pp. 321—328.
69. Berechnung der Schubspannungen im gebogenen Balken. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 1922, Bd. 2, Heft 4, SS. 160—161.
70. Calcul des arc élastiques. *Librairie Polytechnique, Ch. Béranger, Editeur, Paris*, 1922, 71 p. Перевод на русский язык: «Расчет упругих арки». Л.—М., Госстройиздат, 1933, 124 стр.
71. Über die Biegung der allseitig unterstützten rechteckigen Platte unter Wirkung einer Einzellast. *Der Bauingenieur*, 1922, Bd. 3, Heft 2, SS. 51—54. Перепечатка: [III], pp. 304—313.
72. Stress distribution in electric-railway motor pinions as determined by the photoelastic method. Discussion on the paper of P. Heymans and A. L. Kimball. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers (Atlanta meeting, New York meeting, 1922)*, 1923, vol. 44, № 1859, pp. 513—537. См. pp. 537—541.
73. Elasticity of pipe bends: discussion on «The elasticity of pipe bends» by S. Crocker and S. S. Sanford. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers (Atlanta meeting, New York meeting, 1922)*, 1923, vol. 44, № 1860, pp. 547—581; discussion: pp. 581—598. См. pp. 585—589.
74. Torsion of crankshafts. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. (Presented at the Annual Atlanta meeting; New York meeting, December 4—7, 1922)*, 1923, vol. 44, paper № 1864, pp. 653—667. Перепечатка: [II], pp. 291—303.
75. The static deflection and vibration of circular diaphragms. *Pittsburgh, Pa., Westinghouse Electric and Manufacturing Co., Minor Report ML-853*, 1933, August 20, 7 p.
76. Mathematical determination of the modulus of elasticity. *Mechanical Engineering*, 1923, vol. 45, № 4, April, pp. 259—260. Перепечатка под заголовком «Determination of the modulus of elasticity». [II], pp. 366—370.
77. The Herbert «pendulum» hardness tester. *The Engineer*, 1923, vol. 136, July 6, p. 21. Перепечатка под заголовком «The pendulum hardness tester». [II], pp. 363—365.
78. Kippsicherheit des gekrümmten Stabes mit kreisförmiger Mittellinie. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 1923, Bd. 3, Heft 5, SS. 358—362. Перепечатка: [III], pp. 371—376. Перевод на русский язык: «Устойчивость плоской формы изгиба кривых стержней с центральной осью в форме круга» [I], стр. 528—533.
79. Discussion of the Report on stresses in railway track. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 1923, vol. 86, pp. 1069—1073.
80. Discussion of tentative specifications for steel highway bridge superstructure. *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 1924, vol. 50, № 1, January, pp. 93—102.
81. The bending and torsion of multi-throw crankshafts of many supports. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers (Presented at the*

- Annual Atlanta meeting; New York meeting, December 3—6, 1923), 1924, vol. 45, Paper № 1907, pp. 449—469 (discussion: R. Eksergian), pp. 469—470). Перепечатка: [II], pp. 344—362.
82. Bending stresses in curved tubes of rectangular cross-section. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers (Montreal meeting, 28—31 May 1923; New York meeting), 1924, vol. 45, paper № 1893, pp. 135—140. Перепечатка: [II], pp. 338—343.
83. The approximate solution of two-dimensional problems in elasticity. Philosophical Magazine and Journal of Science, 1924, Series 6, vol. 47, June, № 282, pp. 1095—1104, Перепечатка: [II], pp. 393—400.
84. Deflections of a uniformly loaded circular plate with clamped edges. Pittsburgh, Pa., Westinghouse Electric and Manufacturing Co., Scientific Paper, № 162, July 14, 1924, 3 p. Перепечатка: [II], pp. 401—402.
85. Über die Biegung von Stäben, die eine kleine anfängliche Krümmung haben. Beiträge zur technischen Mechanik und technischen Physik. August Föppl zum siebzigsten Geburtstag am 25 Januar 1924 Festschrift, Berlin, Verlag von J. Springer, 1924, SS. 74—81. Перепечатка: [II], pp. 377—384.
86. On stresses in a plate with a circular hole. Journal of the Franklin Institute, 1924, vol. 197, № 4, April, pp. 505—516. Перепечатка: [II], pp. 385—392.
87. Beams without lateral support. Transactions of the American Society of Civil Engineers. 1924, vol. 87, paper № 1549, pp. 1247—1262; discussion (J. S. Newell): pp. 1263—1270; author's reply: pp. 1270—1272.
88. Longitudinal and torsional vibrations of prismatical bars. Pittsburgh, Pa., Westinghouse Electric and Manufacturing Co., Minor Report ML-1005, 1924, September 17, 8 p.
89. Discussion to paper «The strength and proportions of wheels, whell centers and hubs» by R. Eksergian. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1924, vol. 46, № 1941, pp. 978—980.
90. Discussion to paper «Temperature and stress distribution in hollow cylinders» by O. G. C. Dahl. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1924, vol. 46, № 1921, pp. 206—207.
91. Discussion to paper «The protection of strem-turbine disk wheels from axial vibration» by W. Campbell. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1924, vol. 46, № 1920, pp. 140—143.
92. Analysis of bi-metal thermostats. Journal of the Optical Society of America and Review of Scientific Instruments, 1925, vol. 11, № 3, pp. 233—255. Перепечатка: [II], pp. 403—421. Перевод на русский язык: «Расчет биметаллических термостатов», [I], стр. 534—552.
93. Properties of matter under high pressure. Mechanical Engineering, 1925, vol. 47, № 6, June, pp. 513—515.
94. Web-plates in compression members. Letters to the editor. Engineering, 1925, vol. 120, № 3129, December 18, pp. 778—779.
95. Stress concentration produced by holes and fillets. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers (Milwaukee meeting, New York meeting, 1925), 1926, vol. 47, № 1958, pp. 199—220; discussion (H. F. Moore, T. McLean Jasper, H. S. Prichard, G. F. Swain): pp. 220—237, author's closure: pp. 234—237 (in collaboration with W. Dietz).
96. Gear tooth stresses. Presented at the tenth annual convention of the American Gear Manufacturers Association, Book-Cadillac Hotel, Detroit, Michigan, 1926, May 13-14-15, 9 p. (in collaboration with R. V. Baud). Опубликована также под заглавием: «Strength of gear teeth».
97. The strength of gear teeth. Mechanical Engineering, 1926, vol. 48, № 11, November, pp. 1105—1109 (in collaboration with R. V. Baud). Letter to the editor (A. L. Kimball): Там же, 1927, vol. 49, January, № 1, p. 63; author's reply, March, № 3, p. 277, A. L. Kimball's reply: pp. 277—278.
98. Strength of gear teeth in greatly affected by fillet radius. Automotive Industries, 1926, vol. 55, № 4, July 22, pp. 138—142 (in collaboration with R. V. Baud).

99. Method of analysis of statical and dynamical stresses in rail. Proceedings of the second International congress for Applied Mechanics, Zürich, 12—17 September 1926. Zürich, Leipzig, O. Füssli, 1927, pp. 407—418. Extract: 12 p. Перепечатка: [II], pp. 422—435.
100. Stress concentration produced by fillets and holes. Proceedings of the second International congress for Applied Mechanics, Zürich, 12—17 September, 1926, Zürich, Leipzig, O. Füssli, 1927, pp. 419—426. Перепечатка: [II], pp. 436—447.
101. Trip report: trip to Europe. Pittsburgh, Pa., Westinghouse Electric and Manufacturing Co., 1926, December 31, 36 p.
102. The theory of the stiffened suspension bridge. Engineering, 1927, vol. 123, № 3199, May 6, p. 554.
103. Vibration of bridges. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1927—1928, vol. 49—50, Part 2, May—August, № 113, Paper RR-50-9, pp. 53—60; discussion (A. I. Lipetz, G. E. Thackray, G. M. Eaton, H. W. Fitch, W. Elmer): pp. 60—61, author's reply: p. 61. Перепечатка: [II], pp. 463—481.
104. Methods of determining of the strength of pipe flanges. [Discussion on the paper: «The strength of pipe flanges» by O. E. Waters, J. H. Taylor] Mechanical Engineering, 1927, vol. 49, № 12, December, pp. 1343—1345.
105. Stiffness of suspension bridges. Proceedings of the American Society Civil Engineers, 1928, vol. 54, № 5, May, Part 1, pp. 1464—1478, discussion (E. Steuermann, G. C. Priester): 1928, vol. 54., № 10, pp. 2737—2747, 1929; vol. 55, № 5, pp. 1239—1240.
106. Steifigkeit von Hängebrücken. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1928, Bd. 8, Heft 1, February, SS. 1—10. [Перевод с английского языка работы [101].]
107. The stiffness of suspension bridges. Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna, 3—10 Settembre 1928. [Proceedings of the International congress of Mathematics at Bologna], 1928, tome 6, Bologna, Nicola Zanichelli, Editore. Comunicazioni Sezione, IVA — V — VII, pp. 305—306.
108. Применение тригонометрических рядов к расчету висячих мостов. Вестник инженеров, 1929, № 8, Август, стр. 239—243. [Перевод с немецкого статьи [102].]
109. Problems concerning elastic stability in structures. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 1929, Part 1, vol. 55, № 4, April, pp. 855—875; vol. 55, № 9, pp. 2401—2404; discussion: Там же, 1929, Part 1, vol. 55, № 7, September, pp. 1889—1898; author's reply: Там же, 1930, Part 1, vol. 56, № 4, April, pp. 779—781. См. также Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1930, vol. 94, paper № 1749, pp. 1000—1020; discussion (H. M. Westergaard, W. Hovgaard, A. Nadai): pp. 1021—1033; author's reply: 1033—1035.
110. The teaching of advanced mechanics in engineering schools. Mechanical Engineering, 1929, vol. 51, № 8, August, pp. 609—610; discussion: pp. 612—613.
111. Stabilitätsprobleme der Elastizität. Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik. Bd. IV, Lieferung 1, Leipzig. Verlag von Johann Barth 1929, SS. 81—145. Перевод на русский язык: «Вопросы устойчивости упругих систем». Л., Кубуч, 1935, 117 стр. Его перепечатка: «Проблемы упругой устойчивости», [I], стр. 553—643.
112. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik. Bd. 4, Lieferung 1, Leipzig, Verlag von Johann Barth, 1929, SS. 176—198. Перевод на русский язык: «Вопросы прочности в машиностроении». Л., Кубуч, 1934, 93 стр.
113. Applied mechanics: the theory of elasticity. Mechanical Engineering, 1930, vol. 52, № 4, April, pp. 494—496.
114. Recent developments in the application of mechanics to machine design. Mechanical Engineering, 1930, vol. 52, № 6, June, pp. 607—610.
115. Vibration problems. Mechanical engineering handbook. L. S. Marks, editor in chief. McGraw-Hill book Co., Inc. New York — London. 3 edition, 1930, pp. 489—502.

116. Stability and strength of thin-walled construction. Proceedings of the third international congress for applied mechanics. Stockholm, August 24—29, 1930, vol. 3. Ab. Sveriges Litografiska Tryckerier, Stockholm, 1930, pp. 3—15.
117. The stiffness of suspension bridges. Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1930, vol. 94, Paper № 1732, pp. 377—391; discussion (L. G. Frost, H. H. Rode, E. Streuerman, G. C. Priestler): pp. 392—405, author's reply: pp. 404—405. Перепечатка: [II], pp. 448—462.
118. Third International Congress for Applied Mechanics. Review. Mechanical Engineering, 1931, vol. 53, № 11, December, pp. 850—852 (with J. P. Hartog).
119. Theory of elasticity. Mechanical Engineering, 1931, vol. 53, № 12, December, pp. 889—890.
120. Stresses in railroad track. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1932, vol. 54, № 23, ARM54-26, pp. 277—293; discussion (R. Bernard, C. B. Bronson, B. S. Cain, R. Eksergian, F. M. Graham, R. Grammel, W. M. Haessler, J. J. Karpinski, C. F. Dendy Marshal, S. Matsunawa, H. F. Moore, A. Ono, C. Richardson, E. Schwerin, S. Saller, A. Spoliansky and J. Lamoen, H. R. Thomas, H. Fromm, Authors' closure: pp. 301—302): pp. 294—302. См. также: American Society of Mechanical Engineers, Advanced paper, № 50, for meeting November 30-December 4, New York, 1931, 17 p. (In collaboration with B. F. Langer).
121. Stability of plate girders subjected to bending. International association for bridge and structural engineering. Preliminary publication of the first congress, Paris, 19—25 May 1932; Zürich, 1932. General secretariat, pp. 129—147.
122. Stability of plate girders subjected to bending. International association for bridge and structural engineering. First congress, Final report, Paris, 19—25 May 1932; Zürich, 1932, General secretariat, p. 150.
123. Dynamic problems of bridges (discussion). International association for bridge and structural engineering. First congress. Final report, Paris, 19—25 May 1932; Zürich, 1932. General secretariat, pp. 382—383.
124. Apparatus for making dynamic investigations on structures. International association for bridge and structural engineering. First congress. Final report, Paris, 19—25 May 1932; Zürich, 1932. General secretariat, pp. 386—389.
125. Working stresses for columns and thin-walled structures. New York 1932, 4 p. (American Society Mechanical Engineers — Advance, Paper. № 47, meeting December 5—9, 1932.) Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. 1933, vol. 55, October — December, № 4, pp. 173—177; discussion (G. E. Beggs, R. Eksergian, J. M. Frankland, G. H. MacCullough, M. Reiner): pp. 177—182. Author's closure: pp. 182—183 (APM 55—20). Journal of Applied Mechanics, 1933, vol. 1, № 1, pp. 173—177.
126. Über die Beugung von Trägerrosten. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1933, Bd. 13, Heft 2, April, SS. 153—159. Перепечатка: [II], pp. 482—492.
127. Stability of web of plate girders. New York, 1933, 6 p. American Society Mechanical Engineers — Advance Paper meeting, June 26—30.
128. The stability of the webs of plate girders. Engineering, 1934, vol. 138, August 24, № 3580, pp. 207—209; discussion (by O. E. Hovey): 1934, vol. 138, December 28, № 3598, pp. 715—716. Перепечатка: [II]. pp. 493—507. Перевод на русский язык: «Устойчивость стенок двутавровых балок», [I] стр. 644—661.
129. Suspension bridges with a continuous stiffening truss. Abstracts of papers to be read at the fourth international congress for applied mechanics, 3—9 July 1934. Printed at the University press, Cambridge, 1934, pp. 107—108. Proceedings of the fourth international congress for applied mechanics, Cambridge, England, 3—9, July, 1934. Printed at the University Press, Cambridge, 1935, pp. 257—258 (with collaboration S. Way).
130. Suspension bridges with a continuous stiffening truss. Publications of the international association for bridge and structural engineering, vol. 2, Swiss

- Federal Institute of Technology, Zürich, 1934, pp. 452—466. (In collaboration with S. Way.)
131. Engineer's trip report: various European laboratories. Pittsburgh, Pa., Westinghouse Electric and Manufacturing Co., Engineering Department, 1934, August 23, 28 p.
 132. Inglis C. E. A mathematical treatise on vibrations in railway bridges. University Press, Cambridge, 1934, 203, p. Mechanical Engineering, 1935, vol. 57, № 1, January, pp. 58—59.
 133. Buckling of flat curved bars and slightly curved plates. Journal of Applied Mechanics, 1935, vol. 2, March, № 1, pp. 17—20. Перепечатка: [I], pp. 508—515. Перевод на русский язык: «Выпучивание пологих стержней и слегка искривленных пластин», [I], стр. 662—669.
 134. Book reviews: elastic stability. Die Festigkeit von Druckstaben aus Stahl. Karl Jezek. Julius Springer, Wien, 1937, VIII + 252 S. Zur Konvergens des Engesser-Vianello-Verfahrens. A. Schleusner. B. G. Teubner, Leipzig — Berlin, 1938, 45 S. Strenge Theorie der Knickung und Biegung. A. Schleusner. Teil I. B. G. Teubner, Leipzig — Berlin, 1937, 144 S. Journal of Applied Mechanics, 1938, vol. 5, December, № 4, p. 184. См. также: Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Serier A, 1938, vol. 60, p. 184.
 135. Bending of rectangular plates with clamped edges. Proceedings of the fifth International Congress for Applied Mechanics, Cambridge, Massachusetts, September 12—16, 1938, New York: John Wiley and sons, inc., London: Chapman and hall, Ltd, 1939, pp. 40—43. Перепечатка: [II], pp. 516—522.
 136. Vibration. Mechanical engineering handbook. L. S. Marks, editor-in chief. McGraw-Hill book Co., Inc., New York — London, 4 edition, 1941, pp. 509—527 (revised by J. P. de Hartog).
 137. The forced vibrations of tie-rods. Theodore von Kármán Anniversary volume, Contributions in Applied Mechanics and related subjects by the friends of Theodore von Kármán on his sixtieth birthday. Pasadena, California, California Institute of Technology, 1941, pp. 226—230. Перепечатка: [II], pp. 610—614.
 138. Teaching dynamics. (49-th Annual meeting: Society for promotion of Engineering education.) The Journal of Engineering Education, New series, 1942, vol. 32, № 5, January, pp. 463—466.
 139. Theory of suspension bridges. Journal of the Franklin Institute, 1943, vol. 235, № 3, March, pp. 213—238; № 4, April, pp. 327—349. Перепечатка: [II] pp. 523—558.
 140. Theory of bending, torsion and buckling of thin-walled members of open cross-section. Journal of the Franklin Institute, 1945, vol. 239, March № 3, pp. 201—219; April № 4, pp. 249—268; May № 5, pp. 343—361. Перепечатка: [II], pp. 559—609. Перевод на французский язык: Théorie de la flexion, torsion et flambage des barres á parois minces et á section ouverte. L'ossature metallique, 1947, vol. 12, Juillet — Aout, № 7—8, pp. 328—341, Septembre № 9, pp. 376—388. Перевод на русский язык: «Теория изгиба, кручения и устойчивости тонкостенных стержней открытого поперечного сечения». Добавление к книге: Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.—Л., Гостехиздат, 1946, стр. 502—561. См. также: [I], стр. 670—727.
 141. On the treatment of discontinuities in beam deflection problems. Quarterly of Applied Mathematics, 1945, vol. 3, № 2, p. 182.
 142. Stress concentration and fatigue failures. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1947, vol. 157 (War emergency Issue), pp. 163—169. [Перепечатка: [II], pp. 615—642.]
 143. Stress concentration and fatigue failures. The Engineer, 1947, vol. 183, № 4763, May 9, pp. 398—399 (№ 1); № 4764, May 16, pp. 421—422 (№ 11). Discussion by O. Föppl. Там же, 1948, vol. 185, № 4801, January 30, pp. 114—115.

144. Book reviews. Beams on elastic foundation. M. H e t é n y i. University of Michigan Studies, Scientific Series, vol. 16, University of Michigan Press, 1946. Ann Arbor, Michigan, IX+255 p. Journal of Applied Mechanics, 1947, vol. 14, № 2, June, p. 175. См. также Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1947, Series A., vol 69, p. 175.
145. D. J. Jourawski and his contribution to theory of structures. Federhofer — Girkmann — Festschrift. Beiträge zur angewandten Mechanik. Franz Deuticke Verlag. Wien, 1950, pp. 115—123.
146. Fundamentals of the theory of elasticity. Handbook of experimental stress analysis. Edited by M. Hetényi. New York; John Wiley and sons, Inc.; London: Chapman and Hall, Limited, 1950, pp. 1013—1034.
147. Vibration. Mechanical engineering handbook. L. S. Marks, editor-in chief. McGraw-Hill book Co., Inc.; New York — Toronto — London. 5 edition, 1951, pp. 486—504 (revised by J. P. Hartog).
148. History of the development of strength of materials in Russia. Accademia Nazionale dei Lincei, Problemi attuali di scienza e di culture. Rome, 1953, Quaderno, № 29, 8 p.
149. Stress concentration in the history of strength of materials. Proceedings of the Society for experimental stress analysis, 1954, vol. 12, № 1, pp. 1—12, Cambridge, Massachusetts.
150. The development of engineering education in Russian. The Russian Review, 1956, vol. 15, № 3, July, pp. 173—185.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Андерсон К. (Anderson C. W.) 394, 396, 397, 404
Андрес Е. (Andrews E. S.) 608, 609
Антес Г. (Anthes H.) 559, 568
Арндт В. (Arndt W. F. C.) 575
Ассур Л. В. 681
Аттия Г. (Attia H. H.) 676
Ауз И. (Aue J.) 610, 614
Ауэрбах Ф. (Auerbach F.) 560, 567
- Бадген Х. (Budgen H. P.) 641
Бадер В. (Bader W.) 572
Бантлин А. (Bantlin A.) 606, 614, 616
Баньян Т. (Bunyan T.) 676
Барраклаф С. (Barraclough S. H.) 602
Бауд Р. (Baud R. V.) 580
Бауман К. (Baumann C.) 556
Баушингер И. (Bauschinger J.) 65, 66, 67, 68, 75, 84, 658, 663
Бауэр И. (Bauer J. H.) 601
Бах К. (Bach C.) 85, 86, 309, 583, 608, 612
Баш А. (Basch A.) 262
Бейли Р. (Bailey R.) 641
Белелюбский Н. А. 407, 658
Бернулли Д. (Bernoulli D.) 652, 653
Бернулли Я. (Bernoulli J.) 575, 576, 582, 652
Бетсон Дж. (Batson G. G.) 591, 641
Бирнбаум В. (Birnbbaum W.) 625
Бизено К. (Blezeno C. B.) 591
Блеях Ф. (Bleich F.) 567
Блюменталь О. (Blumenthal O.) 293, 302, 304, 305
Бони Ф. (Bohny F.) 422
Борч Р. (Bortsch R.) 582
Брайан Дж. (Bryan G. H.) 212
Бредт Р. (Bredt R.) 570, 601, 605
Бресс Ж. (Bresse J. A.) 600, 601
Буассе Г. (Bouasse H.) 620, 621
Бубнов И. Г. 190, 198, 204, 211, 381, 382, 585, 596, 627, 628, 684
Буссинекс Ж. (Boussinesq J.) 571, 603
Бэрстоу Л. (Bairstow L.) 393, 408
- Ватсон К. (Watson C.) 622
Ватцингер А. (Watzinger A.) 608
Вебер К. (Weber C.) 564, 572
Вейбулл В. (Weibull W.) 676
Вейраух Я. (Weyrauch J. J.) 407, 452, 601
Вейтбрехт Т. (Weitbrecht Th.) 602
Веляхов П. А. 107, 113, 121—123
Велтер Г. (Welter G.) 637
Вержбицкий В. 418
Вестергард Г. (Westergaard H. M.) 596
Вестфаль М. (Westphal M.) 594, 606
Ветцель К. (Wetzel C.) 625
Вехаге Г. (Wehage H.) 67
Вёлер А. (Wöhler A.) 393, 396, 407, 663
Вигхардт К. (Wiegardt K.) 122, 560, 610, 611
Видеркер Р. (Widerkehr R.) 557
- Викандер О. (Wikander O.) 625
Вилле Г. (Wille H.) 637
Виллерс Ф. (Willers F. A.) 255, 263, 573—575
Виллис Р. (Willis R.) 172, 173, 335, 376, 377
Вильсон Ж. (Wilson J. S.) 566
Винклер Э. (Winkler E.) 601, 604, 607—614, 666
Виноградов Н. П. 418
Висс Т. (Wyss Th.) 557
Витман Ф. (Wittman F.) 677
Виттенбауэр Ф. (Wittenbauer F.) 681
Виттмор Х. (Whittmore H. L.) 614
Витциг К. (Witzig K.) 620
Вольф К. (Wolf K.) 564, 575
Воропаев М. А. 613
Вышнеградский И. А. 681
Вышомирский А. (Wyszomirski A.) 575
- Гагарин А. Г. 680
Галднер Ф. (Guldner F.) 557
Галлилей Г. (Galilei G.) 64
Гарнет У. (Garnett W.) 673
Гартман Л. (Hartmann L.) 78, 559
Геддес А. (Geddes A. E. M.) 571
Гейгер И. (Geiger J.) 591
Гейзен Л. (Geussen L.) 583
Гейн Е. (Heyn E.) 559, 636
Геккелер И. (Geckeler J. W.) 575, 576, 591, 625, 631
Генки Г. (Hencky H.) 628, 635
Герберт Г. (Herbert H.) 584
Герстнер Ф. (Gerstner F.) 645
Герц Г. (Hertz H.) 69, 223, 232, 234
Гесснер А. (Gessner A.) 591
Гест Дж. (Guest J. J.) 65—68, 75—77, 84, 85, 262
Гёнингсбергер О. (Höningsberger O.) 614
Гибсон А. (Gibson A. H.) 571
Гиллио И. (Gullo J.) 622
Гиртлер Р. (Girtler R.) 566
Головини Х. С. 609, 658, 682
Голофф А. (Goloff A.) 672
Грасгоф Ф. (Grashoff F.) 67, 282, 601, 605, 666
Грейнер Дж. (Greiner J.) 403, 404
Гринвуд Дж. (Greenwood J.) 637
Гринхилл А. (Greenhill A. G.) 571
Гриффитс А. (Griffith A.) 559, 566, 568, 669
Грюблер М. (Grübler M.) 70, 262, 664
Губер Ф. (Huber F.) 572
Гугенбергер А. (Huggenberger A.) 557, 624
Гудвин Дж. (Goodwin G.) 571
Гудноф Г. (Goodenough G. A.) 612
Гупиль А. (Goupil A.) 389, 600
Гюнтер К. (Günter K.) 594
- Давиденков Н. Н. 677, 685
Даламбер Ж. (D'Alembert J. L. R.) 30, 45
Данкерлей С. (Dunkerley S.) 263

- Дарвин Дж. (Darwin G.) 68
 Джекобсен Л. (Jacobsen L. S.) 574, 669, 676
 Джонстон Р. (Johnston R. S.) 559
 Диксгорн И. (Dijhhoorn J. C.) 623
 Динник А. Н. 270
 Дитц В. (Dietz W.) 562, 665
 Драгомиров А. М. 684, 685
 Дрейзел К. (Drysdale C. V.) 571
 Дугей Ш. (Duguet Ch.) 77 — 79, 85
 Дюстербен Ф. (Düsterbehn F.) 618
- Евграфов Г. Т.** 401
Евневич И. А. 609
- Жордан Р.** (Jourdan R. L.) 672
Журавский Д. И. 9, 576, 644—651, 657
- Заальшютц Л.** (Saalschütz L.) 588
Занден К. (Sanden K. V.) 341, 594
Захарияс Л. (Zacharias L.) 622
Зеельман (Seelmann) 591
Зибель Е. (Siebel E.) 557, 559
Зидлицки Р. (Zidlicky R.) 563
Зиман (Siemann) 558
Зоммерфельд А. (Sommerfeld A.) 263
- Инглис К.** (Inglis C. E.) 564, 667, 697
- Каненберг Б.** (Kanenberg B. G.) 618
Карман Т. (Kármán Th.) 263, 577, 582, 614, 638
Карус Вильсон К. (Carus Wilson C. A.) 578
Карчер Дж. (Karcher J. C.) 558
Кастиглиано А. (Castigliano A.) 625
Качурин В. К. 400, 401
Кейс Д. (Keys D. A.) 558
Келлер Г. (Keller H.) 309
Кельвин лорд [Вильям Томсон] (Kelvin [William Thomson]) 55, 56, 58, 68, 571, 662
Кеннелли А. (Kennelly A. E.) 16
Кёрбер Ф. (Körber F.) 557, 559, 565
Кинне С. (Kiehne S.) 569
Киркалды Д. (Kirkaldy D.) 655
Кириличев В. Л. 9, 180, 679, 683, 687, 688
Кирш Г. (Kirsch G.) 106, 113, 118, 121, 263, 563, 664, 681
Клапейрон Б. (Clapeyron B. P. E.) 149, 644, 655, 656
Классен В. Э. 687
Клебш А. (Clebsch A.) 65, 173, 222, 335
Клейн Ф. (Klein F.) 263
Кнайп М. (Kneip M.) 567
Кокер Э. (Coker E. G.) 558, 561, 562, 614, 674, 682
Кокс Х. (Cox H.) 221
Колосов Г. В. 564, 666, 668, 682
Коммерс Ж. (Kommers J. B.) 566
Консидер А. (Considere A.) 583
Котаро-Гонда (Kôtarô Honda) 637
Коши О. (Cauchy A. L.) 656
Коялович Б. М. 210
Кри Ч. (Chree C.) 262, 263
Кривошеин Г. Г. 394, 405
Крыжановский В. И. 400, 401
Крылов А. Н. 55, 61, 62, 139, 141, 144, 174, 176, 336, 659, 689
Крюгер М. (Krüger M.) 400
Кук Дж. (Cook G.) 594
- Кулон Ш.** (Coulomb Ch. A.) 67, 77, 79, 85
Кувницкий С. К. 392, 394, 405
Купфер А. Т. 645, 656, 657
Кюнт М. (Cuénot M.) 400
Кэмпбелл Л. (Campbell L.) 673
- Лагранж Ж.** (Lagrange J. L.) 25, 26, 140, 161, 162
Ламэ Г. (Lamé G.) 65, 118, 245, 613, 644, 655, 656
Ландау Д. (Landau D.) 620
Лармор Дж. (Larmour J.) 571, 664, 669
Латовский Р. (Latowski R.) 583
Лаунхард В. (Launhard W.) 396, 407
Левн М. (Lévy M.) 219
Лейбниц Г. (Leibniz G. W.) 64, 652
Леон А. (Leon A.) 263, 563, 565, 631, 671
Лёге М. (Legay M.) 522
Лёнер О. (Leuner O.) 401
Лн Ф. (Lea F. G.) 624, 641
Линзенман Г. (Linsenmann H.) 602
Лодс В. (Lode W.) 638
Лонгботтом Дж. (Longbottom J. G.) 601
Лоренц Г. (Lorenz H.) 13, 16, 41, 43, 44, 570
Лоренц П. (Lorenz R.) 594
Лэмб Г. (Lamb H.) 122, 571, 603
Людвик П. (Ludwik P.) 690
Людерс В. (Lüders W.) 558, 613
Ляв А. (Love A. E. H.) 92, 93, 107, 108, 124, 262, 317, 561, 616
- Мазинг Г.** (Masing G.) 637
Майер Р. (Mayer R.) 422, 612
Майер-Мита Р. (Mayer-Mita R.) 600, 603
Мак-Кензи Дж. (McKenzie J. N.) 253, 256, 262
Мак-Коллум Б. (McCollum B.) 558
Мак-Коннэлл Дж. (McConnell J. E.) 661
Максвелл Дж. (Maxwell J. J.) 673, 674, 682
Марбек М. (Marbec M.) 600
Мари Г. (Marie G. M.) 620
Марriott Э. (Mariotte Ed.) 65, 66
Маркус Г. (Marcus H.) 616
Мартенс А. (Martens A.) 636
Масон В. (Mason W.) 641
Матсушита Т. (Matsushita T.) 637
Мейер Е. (Meyer E.) 583, 591
Мейер Ф. (Meyer V.) 625
Мейсснер Е. (Meissner E.) 309
Мелан Е. (Melan E.) 575
Мелвилл Г. (Melville G. W.) 13
Менаже А. (Messenger A.) 558, 560, 674, 682
Метцер В. (Metzger W.) 582
Мещерский И. В. 687
Мизес Р. (Mises R.) 616
Миллер Дж. (Miller J. W.) 622
Миллер К. (Miller C.) 608
Мисц Е. (Mysz E.) 566
Миш Р. (Miche R.) 567
Мичелл А. (Michell A. G.) 571
Мичелл Дж. (Michell J. H.) 122, 560, 561, 573, 579, 612, 616
Мишон А. (Michon A.) 66
Молеворт Дж. (Molesworth G.) 399
Мор О. (Mohr O.) 77, 79, 81—86, 262
Морковин Д. (Markovin D.) 672
Морли А. (Morley A.) 262, 263
Морш Е. (Morsch E.) 601
Морэн А. (Morin A.) 662
Мур Г. (Moore H. F.) 557, 566, 672
Мур Л. (Moore L. E.) 612
Мухслишвилли Н. И. 668, 682
Мюллер-Бреслау Г. (Müller-Breslau H. F. V.) 594, 609, 618

- Навье Л. (Navier C. L. M. H.) 64, 66, 222, 600,
 607, 610, 611, 648, 655, 656
 Надая А. (Náday A.) 572, 633
 Нейбер Г. (Neuber H.) 668, 669
 Нейман Ф. (Neumann F.) 631
 Николан Л. Ф. 394, 406
- Оно А. (Ono A.) 641
 Остроградский М. В. 644, 656, 657
- Папкович П. Ф. 582, 668
 Парр П. (Parr P. H.) 620
 Патон Е. О. 88, 401
 Пашу М. (Paschoud M.) 571, 572
 Передерий Г. П. 99
 Перри И. (Perry I.) 584, 622
 Петерман И. (Petermann J.) 584
 Петерс О. (Peters O.) 558
 Петерсон Р. (Peterson R.) 671, 675
 Петров Н. П. 331, 332, 335, 336, 338, 347,
 349, 397, 657, 658
 Пешль Т. (Pöschl Th.) 308, 564, 594
 Пяжо М. (Pigeaud M.) 490
 Пинегин В. (Pinegin W.) 584
 Пирсон К. (Pearson K.) 221, 583, 605, 619,
 634, 644, 645, 657
 Пистолькорс Е. Ю. 99
 Поллерт О. (Pollert O.) 603
 Помп А. (Pomp A.) 565
 Понселе Ж. (Poncelet J. V.) 66
 Посселят Р. (Posselt R.) 602
 Прайдль Л. (Prandtl L.) 264, 267, 268, 559,
 567, 609, 669
 Преусс Е. (Preuss E.) 557, 562, 613, 671
 Прескотт Дж. (Prescott J.) 570
 Пуассон С. (Poisson S. D.) 656
 Пурсер Ф. (Purser F.) 262
 Пфлейдерер К. (Pfleiderer C.) 581, 609
- Рабу Ш. (Rabut Ch.) 400
 Раш Э. (Rasch E.) 692
 Ребханн Г. (Rebhann G.) 647
 Резаль Г. (Résal H.) 600, 602, 605, 607,
 609—614, 620, 625
 Рейнгадт К. (Reinhardt K.) 601, 603
 Рейнольдс О. (Reynolds O.) 393
 Рейсснер Г. (Reissner H.) 292, 299, 588, 594
 Ренкин У. (Rankine W. J. M.) 417, 661
 Рерих К. Э. 681
 Рёвер А. (Röver A.) 623
 Рибьер М. (Ribière M.) 609
 Ридель В. (Riedel W.) 567, 578
 Ритц В. (Ritz W.) 265
 Ричардсон Л. (Richardson L.) 670
 Робинзон С. (Robinson S.) 400
 Розов И. 407
 Рот П. (Roth P.) 79, 82, 94, 262, 638
 Рош М. (Roş M.) 639
 Руделофф М. (Rudeloff M.) 70
 Рунге К. (Runge C.) 129, 130, 274, 341, 594,
 670
 Рэлей [лорд Джон Уильям Стрэтт] (Lord
 Rayleigh [John William Strutt]) 25, 139,
 149, 159, 160, 194, 196, 197, 223, 265, 603
- Савин Г. Н. 668
 Сандерс Т. (Sanders Th. H.) 620
 Саусвелл Р. (Southwell R. V.) 671
 Свейн Г. (Swain G. F.) 665
 Сейлес (Sales) 394
 Сен-Венан Б. (Saint-Venant B.) 64, 67, 173,
 222, 264, 281, 336, 600, 603, 616, 617,
 622, 634
- Сеттон Пиппард А. (Sutton Pippard A. J.) 608
 Сибел Э. (Siebel) 557
 Симен Х. (Seaman H. B.) 395, 403, 417
 Сирс Дж. (Sears J.) 222
 Скиннер Ф. (Skinner F. W.) 422
 Слейтер В. (Slater W. A.) 557
 Смят Дж. (Smith J.) 121, 393
 Соколов П. А. 582
 Соловьев Г. О. 394, 406
 Шнодгресс И. (Shodgrass J.) 557
 Стенг А. (Stang A. H.) 614
 Стентон Т. (Stanton T. E.) 393, 408, 591, 641
 Стодола А. (Stodola A.) 240, 247, 262, 263,
 635, 681, 666
 Стокс Дж. (Stokes G. G.) 173, 174, 335, 397,
 401, 578
 Стоун Е. (Stone E. H.) 396
 Стоун М. (Stone M.) 602
- Танака И. (Tanaka Y.) 620
 Тейлор Г. (Taylor G. I.) 559, 568, 571, 669
 Терзаги К. (Terzaghi K.) 308, 594
 Теймайер Л. (Teitmajer L.) 416, 417
 Тимошенко С. П. 10—12, 159, 224, 262, 263,
 314, 359, 380, 382, 398, 420, 421, 424, 559,
 562, 565—567, 569, 572, 577, 580, 584,
 591, 592, 596, 601, 610, 615, 624, 643,
 665, 667, 683, 684, 689, 690, 691, 697
 Тимпе А. (Timpe A.) 106, 108, 116, 128, 609
 Тодхантер И. (Todhunter I.) 583, 605, 619,
 634, 644, 645, 657
 Толле М. (Tolle M.) 585, 606
 Томас В. (Thomas W. N.) 566
 Томсон Дж. (Thomson J.) 55, 56
 Треска Г. (Tresca H.) 68
 Треффри Э. (Trefftz E.) 570, 572, 633
 Тузи Э. (Tuzi Z.) 674
 Турнер Л. (Turner L.) 634, 641
 Турниор Ф. (Turneaure F.) 400—404
 Тэт П. (Tait P. G.) 571, 622
- Уинслоу А. (Winslow A. M.) 557, 613
 Уиппл С. (Whipple S.) 558, 645
 Уинльд Г. (Unold G.) 618
 Уол А. (Wahl A. M.) 557, 616, 623, 672
 Ухатиус Ф. (Uchatius F.) 635
- Файлон Л. (Fillon L. N. G.) 566, 577, 578, 674
 Фан-дер-Флит А. П. 180, 585
 Федерхофер К. (Federhofer K.) 618
 Фейрбейрн У. (Fairbairn W.) 650
 Фергюсон А. (Ferguson A.) 571
 Фёппль А. (Föppl A.) 67, 70—72, 86, 99, 121,
 263, 566, 569, 570, 572, 573, 583, 609, 614,
 663, 671
 Фёппль Л. (Föppl L.) 570, 575, 638
 Филлипс Е. (Phillips E.) 619, 620
 Филлунгер П. (Fillunger P.) 608
 Фишер-Хиннен И. (Fisher-Hinnen J.) 16
 Фламан М. (Flamant M.) 578
 Фламах А. (Flamache A.) 336
 Фойхт В. (Voigt W.) 67, 72, 73, 85
 Форшгеймер Ф. (Forschheimer Ph.) 180
 Фрай А. (Fry A.) 559
 Фрам Г. (Frahm H.) 13, 14, 19—24, 35, 680,
 681
 Френкель В. (Fränkel W.) 400, 401
 Фридман Г. (Friedmann H.) 603
 Фурье Ж. (Fourier J. B. J.) 15, 52, 656
- Хант Ф. (Hunt F. R. W.) 571
 Хау М. (Howe M.) 452, 490
 Хаупт Г. (Haupt H.) 645

Хей Б. (Haigh B. P.) 566, 639
Хейвуд Ф. (Heywood F.) 624
Хелл-Шоу Х. (Hell-Shaw H. S.) 121, 575
Хетени М. (Hetenyi M.) 672, 697
Ховгард В. (Hovgaard W.) 616
Ходкинсон И. (Hodkinson E.) 221, 650
Холодецкий А. А. 331
Хольцер Х. (Holzer H.) 591
Хопкинсон Б. (Hopkinson B.) 393
Хустов Э. (Houston E. J.) 16

Циммерманн Г. (Zimmermann H.) 173, 327,
398, 592

Чалышев К. А. 290

Шаллер Л. (Schaller L.) 422
Шеванди Е. М. 676
Шварц Ф. (Schwarz F.) 417
Ширер Г. (Shearer G. W.) 622

Шлейхер Ф. (Schleicher F.) 616, 639
Штейгер Р. (Steiger R.) 636
Штутц И. (Stutz J.) 618
Шюле В. (Schuele W.) 583

Эдмондс Р. (Edmonds R.) 557, 613
Эйлер Л. 101, 184, 652—654
Эйхингер А. (Eichinger A.) 639
Экк Б. (Eck B.) 581
Эльзессер Р. (Elsässer R.) 558
Эмде Ф. (Emde F.) 690
Энгессер Ф. (Engesser F.) 583, 616
Эри Дж. (Airy G. B.) 568

Юнг Т. (Joung Th.) 220

Янке Е. (Jahnke E.) 690
Янушкевич Л. (Januszkiewicz L.) 74
Ясинский Ф. С. 289, 417, 418, 658, 659

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аналогия гидродинамическая** 669
— мембранная 576
Арка симметричная круговая 453
— — параболическая 445
— — произвольного очертания 458, 537
- Балки на податливом основании** 591
— перекрестные 382
- Вал быстровращающийся** 194
— коленчатый 590
— пароходный 19, 24
Влияние отверстий на напряжения в валу 571
— — — — диске 243
— — — — пластине 109, 563, 664
- Герца прием** 69, 223, 232
Гипотеза линейного распределения напряжений 135
— плоских сечений 136—138, 426
- Даламбера принцип** 30, 45
Диск гиперболического профиля 247
— постоянной толщины 242
— равного сопротивления 247
- Жесткость цилиндрическая пластинки** 201
- Изгиб балки статический** 166
— вала с насаженными дисками 581
— за пределом упругости 582
— зуба колеса 580
— стержней переменного сечения 590
— — призматических 588
— кольца эллиптического 600
— пластинки, имеющей первоначальную кривизну 311
— — круглой по шаровой поверхности 315
— — прямоугольной по цилиндрической поверхности 625
— с растяжением или сжатием 584
— стержня большой кривизны 605
— — малой кривизны 285, 599
— —, опирающегося на сплошное упругое основание 326
— — переменного поперечного сечения 579
— — прямого призматического 575
— трубки цилиндрической 212
— труб кривых 614
— чистых пластинки 114
- Интеграф Томсона** 55—57, 61
Интегрирование асимптотическое 302
- Колебания балок поперечные** 28
— вала простые гармонические 16, 26
— вынужденные 163, 170, 338, 353, 361
— затухающие 339
— рельса, лежащего на сплошном упругом основании 336
— свободные 151, 160, 163, 166, 170, 338, 352, 361
- Кольцо, сжатое двумя силами** 128
Координаты нормальные 180
Коэффициент безопасности при расчете дисков 253
— — — допускаемых напряжений в мостах 416
— — — статическом нагружении 637
— — сжатых стержней 104
— внутреннего трения 77
— динамический для центробежной силы 340
— — при вынужденных колебаниях системы 353
— концентрации напряжений 562, 573, 590, 670
— поперечного сжатия 66, 74, 86, 92, 96, 431, 577
— ударный 393, 396, 405, 412
Кривизна упругой линии 101
Кручение стержней переменного сечения 573
— — прямых призматических 567
Крылова прибор 55
- Лагранжа уравнение** 25, 140, 143, 146, 154, 161, 359
Линии текучести 558
- Масса вала, влияние на критическую угловую скорость** 259
— —, — — период колебания 41—43, 159
— рельса, влияние на динамический прогиб 336
- Метод фотоупругости** 561, 665, 673
— хрупких покрытий 672
Модуль основания 592
— упругости при сдвиге 14, 29, 31
- Напряжения в арке при повышении температуры** 448, 491, 496, 509, 552
— — — диске быстровращающемся 239
— — — постоянной толщины 243, 251
— — пластинке при одноосном растяжении (сжатии) 110
— — — равномерном растяжении (сжатии) по двум взаимно перпендикулярным направлениям 111
— — — с эллиптическим отверстием 666
— — стержнях большой кривизны 607, 609, 613
— — сферической оболочке 295, 301
— — дополнительные в фермах моста при «резонансе» 398
— —, обусловленные жесткостью узлов 98
— —, допускаемые в мостах 390, 392, 407, 414
— — при переменном нагружении 639
— — — статическом нагружении 637
— — знакопеременные 566
— касательные в пароходных валах 20
— — — плоскостях скольжения 82
— — — при кручении 266
— — — растяжении 68, 86, 113, 649

- Напряжения касательные при сдвиге 66, 75, 86
 — критические при расчете пластинок на устойчивость 419
 —, обусловленные Дополнительным прогибом рельса 350
 — — — остаточные в поковках и отливках 636
 — — — при закалке 636
 — — — пластических деформациях 632
 — — — холодной обработке 637
 — предельные главные 73
 — при деформации кривого бруса 426
 — — — изгибе в рельсах 334
 — — — — — случае квадратного стержня 281
 — — — — — круглого стержня 277
 — — — — — подвижно опертой сферической оболочки 299
 — — — — — кривых труб 615
 — — — — — стержней переменного поперечного сечения 579
 — — — — — кручении в случае круглого стержня 270
 — — — — — прямогоугольного стержня 272
 — — — — — прямых призматических, стержней 569
 — — — — — стержней переменного сечения 574
 — — — — — эллиптического стержня 271
 — — — — — растяжении пластинки конечной ширины 119
 — — — — — по двум взаимно перпендикулярным направлениям 67
 — — — — — (сжатии) внецентренном 114
 — — — — — сжатии кругового диска 125
 — — — — — кольца 128, 130—132, 136, 137
 — — — — — температурные растягивающие (сжимающие) 629
 Неправильности колеса и рельса, влияние на напряжения в рельсах 342
 Опорные реакции в арках 437
 Осадка шпалы, влияние на прогиб рельса при динамическом нагружении 376
 — — — — — статическом нагружении 372
 Перемещения в арках, вызванные изменением температуры 436, 480
 — — — — — при деформации кривого бруса 431, 436
 — — — — — радиальные при изгибе цилиндрической трубки 213, 218
 — — — — — стержня под действием растягивающей силы 144
 — — — — — тангенциальные при изгибе цилиндрической трубки 213, 218
 Пластины жесткие прямоугольные 627
 Поверка вала на резонанс 24
 Поверхность прочности материала 69
 Поллогграф 358
 Положение кривой давления в арках 465, 525
 Предел упругости в случае чистого сдвига 68, 75, 84
 Принцип возможных перемещений 597
 Причины, вызывающие колебания моста 402
 — — — — — разрушение железнодорожных осей 661
 — — — — — определяющие ударное действие подвижной нагрузки 404
 Прогиб балки перекрестной 385
 — — — — — динамической балки 221
 — — — — — мостов 172, 177
 Прогиб динамический рельса при переменной во времени силе 361, 370
 — — — — — постоянной поперечной силе 365
 — — — — — стержня 164—168, 170
 — — — — — дополнительный рельса, вызванный наличием впадины 343, 348, 350
 — — — — — переходом колеса на уклон 346
 — — — — — пластинки, опертой по контуру 200, 203, 208
 — — — — — с заделанными краями 209
 — — — — — рельса неограниченной длины 325
 — — — — — при динамическом действии колеса на рельс 344
 — — — — — на рельс системы подвижных грузов 351
 — — — — — статический вала 261
 — — — — — рельса под действием веса колеса 337, 338
 — — — — — при постоянной поперечной силе 365
 — — — — — стержня на сплошном упругом основании 191
 — — — — — с заделанными концами 194, 196
 — — — — — опертыми концами 181, 290, 362
 — — — — — статический 163—168
 Прочность усталостная при кручении 676
 — — — — — цемента в случае простого сжатия 70, 71
 Пружины Бельвилля 621
 — — — — — винтовые 622
 — — — — — кольцевые 625
 — — — — — листовые 619
 — — — — — спиральные 620
 Работоспособность пружин 619
 Радиальные напряжения при изгибе стержней 578
 Растяжение и сжатие внецентренное 114
 — — — — — стержней прямых, переменного сечения 560
 — — — — — простое 81
 Расчет арки круговой, ось которой совпадает с веревочной кривой 496
 — — — — — при загрузении сосредоточенной силой 499
 — — — — — равномерном распределении нагрузки 504
 — — — — — ось которой близка к веревочной кривой 541
 — — — — — имеет очертание катеноида 523
 — — — — — параболической с заделанными пятнами 514
 — — — — — произвольного очертания 527
 — — — — — с заделанными пятнами, ось которой — веревочная кривая 483
 — — — — — при загрузении симметричном 477
 — — — — — — — — — сосредоточенной силой 481
 — — — — — — — — — двухшарнирной, ось которой близка к веревочной кривой 463
 — — — — — — — — — при загрузении симметричном 437, 440
 — — — — — — — — — сосредоточенной силой 443, 455
 — — — — — барабанов турбинных 237
 — — — — — валов турбинных 254
 — — — — — диска быстро вращающегося 93, 239
 — — — — — кольца быстро вращающегося 236
 — — — — — кругового 610, 616
 — — — — — лопаток 238
 — — — — — напряжений в сферической оболочке 306
 — — — — — пластинок на устойчивость 419
 — — — — — рельса, как балки на упругих опорах 323, 593
 — — — — — стенки цилиндрического котла 90

- Расчет стержней, сжатых на продольный изгиб** 416
 — трубы толстостенной из железа, стали и др. 91
 — — — чугуна 96
 — элементов мостовых ферм на устойчивость 415
Резонанс в валах 19
 — — стержне при действии переменной во времени силы 363
 —, вызванный наличием впадин на рельсе 345
 — при колебаниях балки 166
Рэлея метод 25, 159, 171, 197, 259
- Сила сжимающая критическая** 367
Скорость вращения машины, влияние на амплитуду колебаний 23
 — критическая 367
 — — угловая 256
Сопротивление материала чистому сдвигу 79
 — сдвигу, зависимость от внутреннего трения 77
 — сложное 86
 — простому сжатию 66, 72
 — цемента при давлении по четырем граням 72
 — — — сжатии со смазкой 72
Стержни большой кривизны 605
 — малой кривизны 599
 — призматические 141, 146
- Теорема о взаимности перемещений** 444, 472, 482
Теория Бернулли для изгиба и стержней 575
 — Дюге 77—79
 — максимального напряжения нормально-го 64, 86
 — максимальной деформации линейной, относительной 65, 86
 — — разности нормальных напряжений 67, 77, 84
 — Мора 79—81, 84, 86
- Угол закручивания вала** 20, 53, 155
 — — стержня 570, 573
- Угол наклона касательной к упругой линии стержня** 101
Удлинение в случае разрыва при атмосферном давлении 74
 — — — — всестороннем давлении 73
Уравнение, определяющее свободные колебания колеса 337
 — предельной прямой 94, 95
 — равновесия изогнутой пластинки 314, 316
 — упругой линии стержня 184, 191, 196, 197, 326, 364, 382, 584, 596
Уравнитель 58, 60, 61
Условия прочности максимального нормального напряжения 64, 89
 — — максимальной линейной относительной деформации 66, 89, 90, 92, 93
 — — разности нормальных напряжений 68, 89, 90, 94
Усталость железа 393, 414
Устойчивость сжатой сферической оболочки 302
- Фишера-Хинниена прием** 16
Фермы с параллельными поясами 645
Формула Эйлера 101, 654
Функция напряжений при изгибе 274
 — — — кручения 265
- Частота колебаний вала** 156, 159
Число оборотов критическое 19
 — свободных колебаний вала в случае больших неравных моментов инерции шкивов 42, 43
 — — — — — равных моментов инерции шкивов 40, 41
 — — — — —, когда моменты инерции шкивов и вала величины одного порядка 25, 45—47
 — — — — — малых значений моментов инерции шкивов 25, 29, 31, 33
 — — — — с тремя шкивами 47, 51, 53
- Энергия кинетическая** 25, 26, 32, 48, 355
 — потенциальная 25, 26, 41, 221, 355
 — — при изгибе 195, 261
 — — — ударе 220
 — системы, влияние на период колебаний 29, 140, 146, 154, 181

