ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

Л. А. ПЕТРОСЯН, В. В. ЗАХАРОВ

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЭКОЛОГИЮ

ЛЕНИНГРАД
ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1986

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета*

УДК 518.9

Петросян Л. А., Захаров В. В. **Введение в математическую экологию.**— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. 224 с.

В книге рассматриваются актуальные вопросы математической экологии: исследуются математические модели популяционной динамики, проблемы оптимального управления в биологических системах, задачи охраны атмосферы от загрязнения, включающие задачи размещения и ограничения выбросов источников загрязняющих веществ, сохранения биоценозов островных и высокогорных систем, оптимизации структуры сельскохозяйственного производства по отраслям и регионам, проводится теоретико-игровой анализ конфликтных управляемых экологических процессов.

Книга предназначена для широкого круга специалистов в области прикладной математики, биологии, экономики, географии, интересующихся применением математических методов в исследовании экологических проблем.

Библиогр. 58 назв. Табл. 1. Ил. 19.

Рецензенты: проф. В. Г. Суздаль (Ленингр. ин-т текст. и легк. пром-сти им. С. М. Кирова), доц. Г. Г. Ткаченко (Сев.-зап. заочн. политехн. ин-т, Ленинград).

П $\frac{1502000000-114}{076(02)-86}$ 59—85

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математическая экология как наука начала формироваться в начале XX столетия. Ее возникновению способствовали труды выдающегося математика Вито Вольтерра и его современников А. Лотки и В. А. Костицина. Дальнейшее развитие математической экологии связано с именами Г. Ф. Гаузе, А. Н. Колмогорова, Ю. Одума, Ю. М. Свирежева, Р. А. Полуэктова и др. Наиболее глубоко математические методы проникли в исследование вопросов динамики численности биологических популяций, занимающих центральное место в задачах экологии и популяционной генетики.

Вместе с тем внимание многих исследователей привлекают проблемы взаимодействия человека и биосферы в современных условиях, когда возможности человека влиять на изменение процессов в биосфере стали сравнимы с энергией естественного происхождения. В настоящее время трудные сами по себе проблемы экономики и социального развития тесно переплелись с проблемами загрязнения окружающей среды, эволюции климата, устойчивого существования экосистем, истощения природных ресурсов и т. д. В связи с загрязнением окружающей среды и усилившимся воздействием человека на природу экология приобрела особое значение. Экология — это наука об отношениях растительных и животных организмов между собой и с окружающей средой. Ее объектами являются популяции организмов, биологические виды, сообщества, экосистемы и биосфера в целом. Особое направление — экология человека — состоит в изучении общих закономерностей взаимоотношений природы и общества. Именно поэтому экология сильно отличается от других наук, здесь мы не обнаруживаем единой основы, которая в других науках подобно мощному стволу дерева порождает более специализированные направления исследований. Как раз наоборот, многие науки: ботаника, зоология, климатология, физическая география, почвоведение, биохимия, микробиология, прикладная математика, социология, география населения, экономика, образующие как бы массу ее корней, сливаясь воедино, формируют могучий ствол.

Необходимость решения экологических проблем требует от математиков разработки специальных методов построения и исследования математических моделей экологических процессов. Основой для разработки таких методов служат фундаментальные исследования в области теории управления, теории игр, теории систем и т. д. Целью настоящей монографии является привлечение внимания математиков, экологов, экономистов, биологов к вопросам развития математического аппарата, ориентированного на решение экологических проблем.

Монография состоит из шести глав.

В первую главу включены классические модели функционирования биологических сообществ, оптимизационные задачи управления численностью видов, входящих в сообщества, вопросы устойчивости экологических систем. Во второй главе приведены модели загрязнения атмосферы, излагаются методы решения задач ограничения выбросов и оптимального размещения промышленных предприятий — источников выбросов. В третьей главе приводятся результаты применения теоретико-игрового подхода к анализу моделей, построенных в главе 2. Строится модель согласования интересов различных взаимодействующих сторон при использовании ограниченных природных ресурсов, предлагаются способы нормирования объемов расходования ресурсов, оптимизации штрафных санкций. В четвертой главе рассматриваются иерархические системы управления развитием замкнутых экологических систем. Исследуются системы, моделируемые иерархическими играми, ромбовидные системы управления с дополнительными связями, динамическая устойчивость экологических решений. Пятая глава посвящена многокритериальным оптимизационным задачам управления. Строится многокритериальная модель развития замкнутой экосистемы. Излагаются методы оптимального управления многокритериальными системами, предлагается метод построения Парето-оптимальных множеств в задаче сближения с несколькими целевыми точками. Шестая глава посвящена анализу математико-экологических моделей сельскохозяйственного производства. В ней вводятся балансовые соотношения между отраслями животноводства и растениеводства, а также балансовые уравнения между отраслями основного и вспомогательного производств. Решается задача оптимизации сельскохозяйственного производства по отраслям и регионам.

Авторы выражают благодарность К. Я. Кондратьеву, В. Г. Суздалю и Г. Г. Ткаченко за внимание к работе, а также С. И. Швец, В. А. Еськовой, С. А. Романовой за помощь в оформлении рукописи.

Глава 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ

Попытки математического моделирования динамики как отдельных биологических популяций, так и сообществ, включающих взаимодействующие популяции различных видов, предпринимались давно. Одна из первых моделей роста изолированной популяции была предложена еще в 1798 г.:

$$dn/dt = \mu N,$$

где N — численность популяции; μ — разность между коэффициентами рождаемости и смертности. Решение этого уравнения $N(t) = N(0)e^{\mu t}$ при $\mu > 0$ неограниченно возрастает. Однако эффект неограниченного экспоненциального роста популяции в природе, где ресурсы, обеспечивающие этот рост, ограничены, не наблюдается. Как правило, численность популяции в заданной среде ограничена некоторой величиной K, называемой емкостью среды: при $t \to \infty$ $N(t) \to K$. Модели, учитывающие в какой-то степени это обстоятельство, появились позже. Например, в 1825 г. Б. Гомпертц [51] рассмотрел следующую модель, описывающую эффект «насыщения»:

$$dn/dt = -\mu N \ln(N/K)/\ln K.$$

Однако эксперименты с животными показали, что насыщение наступает существенно быстрее, чем это следует из решения

$$N(t) = Ke^{\ln(N(0)/K)e^{-\mu t/\ln K}}$$

этого уравнения.

Наконец, в 1838 г. Ферхюльст предложил довольно простую и наглядную модель, которая достаточно хорошо описывала динамику многих биологических популяций:

$$dN/dt = \mu N(K-N)/K.$$

Наиболее серьезное исследование моделей биологических сообществ, включающих в себя несколько популяций различных видов, было проведено в работе В. Вольтерра [4]. Например, динамика взаимодействия в сообществе двух биологических популяций описывается системой дифференциальных уравнений

$$dN_1/dt = N_1(\varepsilon_1 + \gamma_1 N_2),\ dN_2/dt = N_2(\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1),$$

где ε_i — коэффициенты естественного прироста (или смертности) популяции; γ_i — коэффициенты межвидового взаимодействия. В зависимости от выбора коэффициентов модель описывает либо борьбу видов за общий ресурс, либо взаимодействие типа хищник — жертва, когда один вид является пищей для другого. Если в работах других авторов основное внимание уделялось построению различных моделей, то В. Вольтерра провел глубокое исследование построенных моделей биологических сообществ. Именно с книги В. Вольтерра [4], по мнению многих ученых, началась современная математическая экология. В послесловии к русскому изданию этой книги Ю. М. Свирежев пишет, что «труд В. Вольтерра — это, несомненно, теория биологических сообществ, построенная именно как математическая теория».

Одной из главных проблем математической экологии является проблема устойчивости экосистем. Под «устойчивостью» понимают обычно сохранение числа видов в данном биологическом сообществе, отсутствие колебаний численности популяций, входящих в сообщество, и т. д. Иногда за меру устойчивости сообщества принимают его разнообразие. Этот подход основан на предположении, что более широкий набор видов может лучше реагировать на различные изменения внешней среды и тем самым обеспечивать сохранение числа видов, уменьшать колебания их численности. Среди экологов широко применяется информационная мера видового разнообразия

$$D = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i,\quad p_i = N_i/N,\quad N = \sum_{i=1}^{n} N_i,$$

где n — число видов в сообществе; N_i — численность i-го вида. При таком подходе естественно считать, что сообщество тем более устойчиво, чем больше величина D. Известно, что D достигает максимума, если $p_i = 1/n$, т. е. когда все виды имеют одинаковую численность. Однако это не соответствует реальности, поскольку в естественных условиях, как правило, существуют доминирующие виды. Основной недостаток информационной меры устойчивости заключается в том, что она не учитывает взаимодействия внутри сообщества. Применение информационной меры вполне удовлетворительно к сообществам, находящимся на ранних стадиях развития, когда их взаимодействие еще слабо.

Математическая теория устойчивости имеет дело не с реальными объектами, а с их математическими моделями. Существует несколько определений понятия устойчивости, однако основным является понятие устойчивости по Ляпунову.

Предположим, что динамика взаимодействия видов описывается системой дифференциальных уравнений

$$dN_i/dt = f_i(N_1, N_2, \dots, N_n),\ i=1, 2, \dots, n, \qquad (*)$$

правые части которой удовлетворяют условиям, гарантирующим существование и единственность непрерывно дифференцируемого решения, исходящего в момент времени $t=t_0$ из точки $\mathbf{N}^0=(N_1^0, N_2^0, \dots, N_n^0)$.

Состоянием равновесия или стационарным состоянием называется точка $\mathbf{N}^*$ фазового пространства, такая, что $f_i(N_1^*, N_2^*, \dots, N_n^*)\equiv 0$ для всех $i=1, 2, \dots, n$.

Определение 1. Решение $\mathbf{N}=\mathbf{N}^*$ системы $(*)$ назовем устойчивым по Ляпунову, если по любому $\varepsilon>0$ для данного $t_0\geqslant 0$ можно указать $\delta>0$, такое, что при $\sum_{i=1}^{n}\left(N_i^0-N_i^*\right)^2<\delta^2$ будет $\sum_{i=1}^{n}\left(N_i(t, N_1^0, N_2^0, \dots, N_n^0, t_0)-N_i^*\right)^2<\varepsilon$ при $t\geqslant t_0$.

Здесь $N_i\left(t, N_1^0, N_2^0, \dots, N_n^0, t_0\right)$ $(i=1, 2, \dots, n)$ — решение системы $(*)$ с начальными данными $N_1^0, N_2^0, \dots, N_n^0, t_0$. Если при этом $\sum_{i=1}^{n}\left(N_i\left(t, N_1^0, N_2^0, \dots, N_n^0, t_0\right)-N_i^*\right)^2\to 0$ при $t\to+\infty$, то решение $\mathbf{N}=\mathbf{N}^*$ называется асимптотически устойчивым.

Функцию $V(N_1, N_2, \dots, N_n)$, заданную в фазовом пространстве системы $(*)$, будем называть положительно определенной (отрицательно определенной), если:

1) $V(N_1^*, N_2^*, \dots, N_n^*)=0$;

2) $V(N_1, N_2, \dots, N_n)>0$ $(V(N_1, N_2, \dots, N_n)<0)$ для $\mathbf{N}\neq\mathbf{N}^*$.

Определение 2. Производной функции $V(N_1, N_2, \dots, N_n)$ вдоль траекторий $\mathbf{N}(t)=(N_1(t, N_1^0, N_2^0, \dots, N_n^0, t_0), N_2(t, N_1^0, N_2^0, \dots, N_n^0, t_0), \dots, N_n(t, N_1^0, N_2^0, \dots, N_n^0, t_0))$ системы $(*)$ назовем выражение

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{N}(t))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial N_i}f_i=W(N_1, N_2, \dots, N_n).$$

Имеют место следующие основополагающие теоремы.

Теорема 1. Если система дифференциальных уравнений (*) такова, что можно найти положительно определенную функцию V, производная которой W, вычисленная в силу системы (*), удовлетворяет неравенству $W \leqslant 0$, то положение равновесия устойчиво.

Теорема 2. Положение равновесия $\mathbf{N}^*$ системы (*) будет асимптотически устойчивым, если выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, функция W отрицательно определена.

Более подробно с основами математической теории устойчивости можно ознакомиться в [14].

С устойчивостью экосистем тесно связаны вопросы оптимального управления этими системами, так как вмешательство человека в функционирование биологических сообществ должно происходить таким образом, чтобы воздействие на экосистему осуществлялось с учетом сохранения устойчивости равновесных состояний системы. При этом возникает задача управления системой с целью перевода ее из одного устойчивого состояния в другое. Поэтому в настоящей главе наряду с вопросами устойчивости рассматриваются оптимизационные задачи управления экосистемами.

§ 1. СОСУЩЕСТВОВАНИЕ ДВУХ БИОЛОГИЧЕСКИХ ВИДОВ

Следуя В. Вольтерра, предположим, что в условиях неограниченного количества пищи численности популяций двух видов N_1 и N_2 имеют постоянные положительные коэффициенты прироста ε_1 и ε_2.

В действительности при возрастании численности популяций количество пищи, а с ним и коэффициенты прироста будут убывать. Отразим это, представив коэффициенты прироста в виде $\varepsilon_1-\gamma_1 F(N_1, N_2)$ и $\varepsilon_2-\gamma_2 F(N_1, N_2)$, где γ_1, γ_2 — положительные постоянные, характеризующие потребности в пище каждого из видов; $F(N_1, N_2)$ — скорость потребления пищи. Предположим, что функция $F(N_1, N_2)$ обращается в нуль при $N_1=0$ и $N_2=0$ и монотонно неограниченно возрастает по каждой из переменных.

Динамика развития популяций может быть описана системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dN_1/dt &= N_1(\varepsilon_1-\gamma_1 F(N_1, N_2)), \\ dN_2/dt &= N_2(\varepsilon_2-\gamma_2 F(N_1, N_2)). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Перепишем (1.1.) в виде

$$\begin{aligned} d\ln N_1/dt &= \varepsilon_1-\gamma_1 F(N_1, N_2), \\ d\ln N_2/dt &= \varepsilon_2-\gamma_2 F(N_1, N_2). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Исключая из (1.2) функцию $F(N_1, N_2)$, получим

$$\gamma_2 \frac{d\ln N_1}{dt} - \gamma_1 \frac{d\ln N_2}{dt} = \varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\gamma_1,$$

или

$$\frac{d\ln\left(N_1^{\gamma_2} / N_2^{\gamma_1}\right)}{dt} = \varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\gamma_1.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}} = \frac{\left(N_1^0\right)^{\gamma_2}}{\left(N_2^0\right)^{\gamma_1}} = e^{(\varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\gamma_1)t}, \tag{1.3}$$

где $N_1^0 = N_1(0)$, $N_2^0 = N_2(0)$.

Нетрудно показать, что решение системы (1.1) с положительными начальными данными ограничены на бесконечном интервале времени. Действительно, найдем значение N'_1, такое, что $F(N'_1, 0) > \varepsilon_1/\gamma_1$, тогда, если решение $N_1(t)$ достигает значения N'_1, то получаем

$$F(N_1, N_2) > F(N'_1, 0) > \varepsilon_1/\gamma_1,$$

и, следовательно, dN_1/dt (см. (1.1)) становится меньше нуля, что делает дальнейший рост $N_1(t)$ невозможным. Аналогичные рассуждения можно провести и для $N_2(t)$.

Обратимся к исследованию выражения (1.3). Предположим, что $\varepsilon_1/\gamma_1 > \varepsilon_2/\gamma_2$, тогда отношение $N_1^{\gamma_2}/N_2^{\gamma_1}$ будет бесконечно возрастать, т. е. $\lim\limits_{t\to\infty}\left(N_1^{\gamma_2}/N_2^{\gamma_1}\right) = +\infty$. Отсюда в силу ограниченности N_1 и N_2 получаем, что $N_2(t)\to 0$.

Это означает, что численность второй популяции, для которой значение ε_i/γ_i меньше, убывает, стремясь к нулю, в то время как численность первой стремится к значению, определяемому из уравнения $\varepsilon_1 - \gamma_1 F(N_1, 0) = 0$. Это подтверждает интуитивный вывод о том, что исчезает вид, обладающий меньшим коэффициентом естественного прироста и более чувствительный к нехватке пищи.

Рассмотрим случай, когда один из видов является хищником, а другой — жертвой, и будем считать, что хищник питается только жертвой. Примем следующую простую гипотезу: коэффициент прироста жертвы равен $\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2$, а коэффициент прироста хищника $\gamma_2 N_1 - \varepsilon_2$, где N_1 — численность популяции жертвы; N_2 — численность популяции хищника; ε_1 — коэффициент естественного прироста жертвы; γ_1 — скорость потребления жертвы хищником; ε_2 — коэффициент смертности хищника в отсутствие жертвы; γ_2 — коэффициент «переработки» хищником биомассы жертвы в собственную биомассу. Тогда динамика численности популяций в системе хищник — жертва будет описываться дифференциальными уравнениями

$$dN_1/dt = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2),$$
$$dN_2/dt = N_2(\gamma_2 N_1 - \varepsilon_2). \tag{1.4}$$

Умножим первое уравнение на γ_2 и сложим со вторым, умноженным на γ_1:

$$\gamma_2 dN_1/dt + \gamma_1 dN_2/dt = \varepsilon_1\gamma_2 N_1 - \varepsilon_2\gamma_1 N_2. \tag{1.5}$$

Далее умножим первое уравнение на ε_2/N_1 и сложим со вторым, умноженным на ε_1/N_2:

$$\frac{\varepsilon_2}{N_1}\frac{dN_1}{dt} + \frac{\varepsilon_1}{N_2}\frac{dN_2}{dt} = -\varepsilon_2\gamma_1 N_2 + \varepsilon_1\gamma_1 N_1. \tag{1.6}$$

Из (1.5) и (1.6) следует

$$\gamma_2\frac{dN_1}{dt} + \gamma_1\frac{dN_2}{dt} = \varepsilon_2\frac{d\ln N_1}{dt} + \varepsilon_1\frac{d\ln N_2}{dt}.$$

Интегрируя, получаем

$$N_1^{-\varepsilon_2} e^{\gamma_2 N_1} = C N_2^{\varepsilon_1} e^{-\gamma_1 N_2}, \tag{1.7}$$

где $C = N_1^{0\,-\varepsilon_2} e^{\gamma_2 N_1^0} \Big/ \left(N_2^{0\,\varepsilon_1} e^{-\gamma_1 N_2^0}\right)$.

Уравнение (1.7) описывает семейство замкнутых кривых с центром в точке (N_1^*, N_2^*): $N_1^* = \varepsilon_2/\gamma_2$, $N_2^* = \varepsilon_1/\gamma_1$. Изучая поведение этих кривых, В. Вольтерра пришел к важному выводу о периодичности колебаний численности популяций и об устойчивости положения равновесия (N_1^*, N_2^*). Оказывается, N_1^* и N_2^* являются средними значениями N_1 и N_2 соответственно по периоду колебания. Действительно, перепишем уравнения (1.4) в виде

$$\frac{d\ln N_1}{dt} = \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2, \quad \frac{d\ln N_2}{dt} = -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1.$$

Проинтегрируем обе части уравнений по интервалу времени, равному одному периоду колебаний, и с учетом периодичности получим

$$0 = \varepsilon_1 T - \gamma_1\int_0^T N_2 dt, \quad 0 = -\varepsilon_2 T + \gamma_2\int_0^T N_1 dt.$$

Окончательно имеем

$$N_1^* = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} = \frac{1}{T}\int_0^T N_1 dt, \; N_2^* = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} = \frac{1}{T}\int_0^T N_2 dt.$$

Эти соотношения выражают закон сохранения средних значений, который формулируется следующим образом. Средние (в течение периода T) значения численностей хищников и жертв не зависят от начальных условий и равны численностям в положении равновесия.

Предположим, что в системе хищник — жертва происходит искусственное уничтожение особей обоих видов, и рассмотрим вопрос о том, каким образом уничтожение особей влияет на средние значения их численности, если осуществляется пропорционально этой численности с коэффициентами пропорциональности α_1 и α_2 соответственно для жертвы и хищника. С учетом сделанных предположений систему уравнений (1.4) перепишем в виде

$$
\begin{aligned}
dN_1/dt &= N_1(\varepsilon_1-\alpha_1-\gamma_1 N_2), \ \alpha_1>0, \\
dN_2/dt &= N_2(-\varepsilon_2-\alpha_2+\gamma_2 N_1), \ \alpha_2>0.
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

Предположим, что $\alpha_1<\varepsilon_1$, т. е. коэффициент истребления жертвы меньше коэффициента ее естественного прироста. В этом случае также будут наблюдаться периодические колебания численности. Вычислим средние значения численностей:

$$
\frac{1}{T}\int_0^T N_1(t)\,dt = \frac{\varepsilon_2+\alpha_2}{\gamma_2}, \quad \frac{1}{T}\int_0^T N_2(t)\,dt = \frac{\varepsilon_1-\alpha_1}{\gamma_1}.
$$

Таким образом, если $\alpha_1<\varepsilon_1$, то средняя численность популяций жертвы возрастает, а хищника — убывает.

Рассмотрим случай, когда коэффициент истребления жертвы больше коэффициента ее естественного прироста, т. е. $\alpha_1>\varepsilon_1$. В этом случае $\varepsilon_1-\alpha_1-\gamma_1 N_2<0$ при любых $N_2>0$, и, следовательно, решение первого уравнения (1.8) ограничено сверху экспоненциально убывающей функцией $N_1(t)\leqslant N_1^0 e^{(\varepsilon_1-\alpha_1)t}$, т. е. $N_1(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

Начиная с некоторого момента времени $\bar{t}$, при котором $\gamma_2 N_1(\bar{t})-\alpha_2-\varepsilon_2=0$, решение второго уравнения (1.8) также начинает убывать и при $t\to\infty$ стремится к нулю.

Таким образом, в случае $\alpha_1>\varepsilon_1$ оба вида исчезают.

§ 2. ОБОБЩЕННЫЕ МОДЕЛИ ВОЛЬТЕРРА ТИПА ХИЩНИК — ЖЕРТВА

Первые модели В. Вольтерра, естественно, не могли отражать все стороны взаимодействия в системе хищник — жертва, поскольку они были в значительной мере упрощены относительно реальных условий. Например, если численность хищника N_2 равна нулю, то из уравнений (1.4) следует, что численность жертвы неограниченно возрастает, что не соответствует действительности. Однако ценность этих моделей состоит именно в том, что они были основой, на которой быстрыми темпами начала развиваться математическая экология.

Появилось большое число исследований различных модификаций системы хищник — жертва, где были построены более общие модели, учитывающие в той или иной степени реальную ситуацию в природе.

В 1936 г. А. Н. Колмогоров предложил использовать для описания динамики системы хищник — жертва следующую систему уравнений:

$$dN_1/dt = N_1 g_1(N_1, N_2), \ dN_2/dt = N_2 g_2(N_1, N_2),$$

где g_1 убывает с возрастанием численности хищников, а g_2 возрастает с увеличением численности жертвы.

Эта система дифференциальных уравнений в силу ее достаточной общности позволяет хорошо учитывать реальное поведение популяций и вместе с тем проводить качественный анализ ее решений.

Позднее в работе [21] Колмогоров исследовал подробно менее общую модель

$$\begin{aligned} dN_1/dt &= g_1(N_1)N_1 - L(N_1)N_2, \\ dN_2/dt &= g_2(N_1)N_2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Модели аналогичного типа рассматривались в работах [51, 57].

Различные частные случаи системы дифференциальных уравнений (1.9) исследовались многими авторами. В таблице приведены различные частные случаи функций $g_1(N_1)$, $L(N_1)$, $g_2(N_1, N_2)$ в таких моделях (см. [58]).

Различные модели сообщества «хищник-жертва»

$g_1(N_1)$	$L(N_1)$	$g_2(N_1, N_2)$	Авторы
ε_1	$a_{12}N_1$	$-\varepsilon_2 + a_{21}N_1$	Вольтерра Лотка
$\varepsilon_1 - a_1 N_1$	$a_{12}N_1$	$\varepsilon_2(1 - e^{-\gamma N_1})$	Гаузе
ε_1	$a_{12}N_1$	$\varepsilon_2 - a_{21}\frac{N_2}{N_1}$	Пислоу
ε_1	$\frac{\alpha N_1}{1 + \alpha h N_1}$	$\varepsilon_2 - a_{21}\frac{N_2}{N_1}$	Холинг
ε_1	$b(1 - e^{-\gamma N_1})$	$\varepsilon_2 - a_{21}\frac{N_2}{N_1}$	Ивлев
ε_1	$\frac{\alpha(N_1)N_1}{1 + \alpha(N_1)hN_1}$	$\varepsilon_2 - a_{21}\frac{N_2}{N_1}$	Рояма
$1 - \frac{N_1}{K_1}$	$\frac{\alpha N_1}{1 + \alpha h N_1}$	$1 - \frac{N_2}{K_1} N_1$	Шимазу и др.
$\varepsilon_1 - a_1 N_1$	$a_{12}(1 - e^{-\gamma N_1})$	$\varepsilon_2(1 - a_{21} e^{-\mu N_1})$	Мэй

Рассмотрим модель, в которой учитывается внутривидовая конкуренция среди особей жертвы [45]:

$$
\begin{aligned}
dN_1/dt &= \varepsilon_1 N_1 - \gamma_1 N_1 N_2 - \gamma N_1^2,\\
dN_2/dt &= k\gamma_1 N_1 N_2 - \varepsilon_2 N_2.
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Здесь внутривидовая конкуренция учитывается с помощью слагаемого γN_1^2. В этой модели численность популяции жертвы при отсутствии хищника не возрастает до бесконечности, а ограничена, как легко видеть, константой ε_1/γ, $\gamma>0$.

Система (1.10) имеет единственное нетривиальное положение равновесия (N_1^*, N_2^*):

$$N_1^* = \frac{\varepsilon_2}{k\gamma_1}, \quad N_2^* = \frac{\varepsilon_1 k\gamma_1 - \varepsilon_2\gamma}{k\gamma_1^2}.$$

Поскольку N_1 ограничено, то, очевидно, должно выполняться неравенство $N_1^* = \varepsilon_2/(k\gamma_1) \leqslant \varepsilon_1/\gamma$. Это неравенство гарантирует также неотрицательность N_2^*.

Покажем, что траектория $N(t) = (N_1(t), N_2(t))$, исходящая из точки (N_1^0, N_2^0), такой, что $0 < N_1 \leqslant \frac{\varepsilon_1}{\gamma}$, $N_2 > 0$, стремится к точке (N_1^*, N_2^*) при $t \to \infty$. Для доказательства рассмотрим следующую функцию:

$$
\begin{aligned}
V(N_1, N_2) = N_1^* &\left(\frac{N_1}{N_1^*} - \ln\frac{N_1}{N_1^*} - 1\right) + \\
+ \frac{1}{k} N_2^* &\left(\frac{N_2}{N_2^*} - \ln\frac{N_2}{N_2^*} - 1\right).
\end{aligned}
$$

Каждое из выражений, стоящих в скобках, неотрицательно, причем равенство нулю возможно лишь при $N_1 = N_1^*$ или $N_2 = N_2^*$. Таким образом, $V(N_1, N_2) > 0$ во всех точках $N = (N_1, N_2) > 0$, кроме положения равновесия, и $V(N_1, N_2) = 0$ только в точке $\left(N_1^*, N_2^*\right)$.

Преобразуем систему уравнений (1.10), подставив вместо ε_1 и ε_2 их выражения через N_1^* и N_2^*:

$$\varepsilon_2 = k\gamma_1 N_1^*, \quad \varepsilon_1 = \gamma_1 N_2^* + \varepsilon_2\gamma/(k\gamma_1).$$

Получим

$$
\begin{aligned}
dN_1/dt &= \gamma_1 N_1 (N_2^* - N_2) + N_1\gamma(N_1^* - N_1),\\
dN_2/dt &= k\gamma_1 N_2 (N_1 - N_1^*).
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Вычислим производную функции $V(N_1, N_2)$ по времени вдоль траекторий (1.11):

$$\frac{dV}{dt}=N_1^*\left(\frac{1}{N_1^*}-\frac{1}{N_1}\right)\left[\gamma_1 N_1(N_2^*-N_2)+N_1\gamma(N_1^*-N_1)\right]+$$

$$+\frac{1}{k}N_2^*\left(\frac{1}{N_2^*}-\frac{1}{N_2}\right)\left[k\gamma_1 N_2(N_1-N_1^*)\right]=-\gamma(N_1^*-N_1)^2.$$

Таким образом, производная функции V в силу системы (1.11) отрицательна во всех точках, кроме прямой $N_1=N_1^*$ (при $\gamma>0$). На этой прямой содержится только одна целая траектория $N^*=\left(N_1^*, N_2^*\right)$. Действительно, для любой точки прямой (N_1^*, N_2), где $N_2\neq N_2^*$, в силу (1.10) справедливо $\left.\frac{dN_1}{dt}\right|_{(N_1^*, N_2)}\neq 0$, $\left.\frac{dN_2}{dt}\right|_{(N_1^*, N_2)}=0$. Следовательно, если в некоторый момент времени $\bar{t}$ $N_1(\bar{t})=N_1^*$, $N_2(\bar{t})=N_2\neq N_2^*$, то для $t=\bar{t}+\Delta t$ $(\Delta t>0)$ имеем $N_1(\bar{t}+\Delta t)\neq N_1^*$, т. е. траектория в момент $\bar{t}+\Delta t$ покидает прямую $N_1=N_1^*$. Таким образом, функция V убывает вдоль траектории системы (1.10), отличной от положения равновесия, и, следовательно, $N(t)\to N^*$ при $t\to\infty$. Последнее означает асимптотическую устойчивость положения равновесия при $\gamma>0$. Если $\gamma=0$, то $\frac{dV}{dt}\equiv 0$. Это означает, что положение равновесия (N_1^*, N_2^*) устойчиво, но не асимптотически.

Рассмотрим теперь более подробно модель Колмогорова (1.9).

Сделаем несколько естественных предположений относительно функций g_1, g_2 и L (см. (1.9)).

1) $dg_1/dN_1<0$, $g_1(\infty)<0<g_1(0)$. Эти ограничения означают, что коэффициент естественного прироста монотонно убывает при возрастании численности популяции жертвы, что указывает на наличие внутривидовой конкуренции. При этом он обращается в нуль при некотором значении $\overline{N_1}$, которое является верхней границей численности популяции жертвы в отсутствие хищников.

2) $dg_2/dN_1>0$, $g_2(0)<0<g_2(\infty)$. Это означает, что с ростом численности популяции жертвы коэффициент естественного прироста численности хищника возрастает, причем этот коэффициент меняет знак с минуса на плюс, обращаясь в нуль в точке $N_1=N_1^*$.

3) $L(N_1)>0$, $N_1>0$, $L(0)=0$. Нетрудно видеть, что у системы (1.9) по крайней мере две стационарные точки (0, 0) и

$(\overline{N}_1, 0)$, где $\overline{N_1}$ определяется из уравнения $g_1(\overline{N})=0$. В случае, если (N_1^*, N_2^*) есть решение системы уравнений

$$g_1(N_1)N_1-L(N_1)N_2=0,\ g_2(N_1)=0$$

и $0<N_1^*<\overline{N_1}$, точка (N_1^*, N_2^*) также является стационарной.

Линеаризуем систему (1.9) в окрестности положения равновесия. Пусть $\xi=N_1-\tilde{N}_1$, $\eta=N_2-\tilde{N}_2$, где $\tilde{N}_1$ и $\tilde{N}_2$ — координаты стационарных точек.

1. В точке (0, 0) получим

$$d\xi/dt=g_1(0)\,\xi,\ d\eta/dt=g_2(0)\,\eta.$$

Корни характеристического уравнения этой системы

$$(\lambda-g_1(0))\,(\lambda-g_2(0))=0$$

равны $\lambda_1=g_1(0)>0$, $\lambda_2=g_2(0)<0$, поэтому точка (0, 0) является седлом. Угловые коэффициенты сепаратрис находятся из уравнения

$$L(0)\varkappa^2-(g_1(0)-g_2(0))\varkappa=0,$$

т. е. $\varkappa_1=0$, $\varkappa_2=(g_1(0)-g_2(0))/L(0)$.

Учитывая, что $L(0)=0$, получаем, что сепаратрисами являются оси ON_1, ON_2, причем первая сепаратриса выходит из седла, вторая входит в него.

2. В точке $(\overline{N}_1, 0)$ линеаризованные уравнения имеют вид

$$d\xi/dt=g_1'(\overline{N}_1)\overline{N}_1\xi-L(\overline{N}_1)\eta,$$

$$d\eta/dt=g_2'(\overline{N}_1)\eta.$$

Корнями характеристического уравнения являются $\lambda_1=g_1'(\overline{N}_1)\overline{N}_1$, $\lambda_2=g_2(\overline{N}_1)$. Так как $g'(\overline{N}_1)<0$, то $\lambda_1<0$. Если $N_1>N_1^*$, т. е. $g_2(\overline{N}_1)>0$, то $\lambda_2>0$ и точка $(\overline{N}_1, 0)$ будет седлом, если же $g_2(\overline{N}_1)<0$, т. е. $\overline{N}_1<\overline{N}_1^*$, то точка $(\overline{N}_1, 0)$ — устойчивый узел: Угловые коэффициенты сепаратрис седла равны

$$\varkappa_1=0,\ \varkappa_2=(g_1'(\overline{N}_1)-g_2(\overline{N}_1))/L(\overline{N}_1)<0.$$

Сепаратриса с угловым коэффициентом $\varkappa_2$ выходит из седла в направлении положительного квадранта.

3. В точке $\left(N_1^*, N_2^*\right)$ получаем

$$d\xi/dt=\sigma\xi-L\left(N_1^*\right)\eta,\ d\eta/dt=g_2'\left(N_1^*\right)N_2^*\xi,$$

где $\sigma=g_1\left(N_1^*\right)+g_1'\left(N_1^*\right)N_1^*-L'\left(N_1^*\right)N_2^*$.

Характеристическое уравнение для этой системы

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + L\left(N_1^*\right) g_2'\left(N_1^*\right) N_2^* = 0.$$

Поскольку свободный член положителен, то в соответствии со знаком детерминанта этого уравнения будем иметь: если $\sigma^2 < 4L\left(N_1^*\right) g_2'\left(N_1^*\right) N_2^*$, то $\left(N_1^*, N_2^*\right)$ есть фокус, если же $\sigma^2 > 4L\left(N_1^*\right) g_2'\left(N_1^*\right) N_2^*$, то $\left(N_1^*, N_2^*\right)$ — узел. Причем при $\sigma < 0$ стационарные точки будут устойчивыми, а при $\sigma > 0$ — неустойчивыми.

Рассмотрим поведение сепаратрисы, выходящей из точки $(\bar{N}_1, 0)$ в направлении положительного квадранта. Возможны следующие случаи:

а) сепаратриса наматывается на предельный цикл;

б) сепаратриса входит в точку $\left(N_1^*, N_2^*\right)$ в случае устойчивости последней.

В итоге получим следующую классификацию траекторий, фазовые проекции которых изображены на рис. 1:

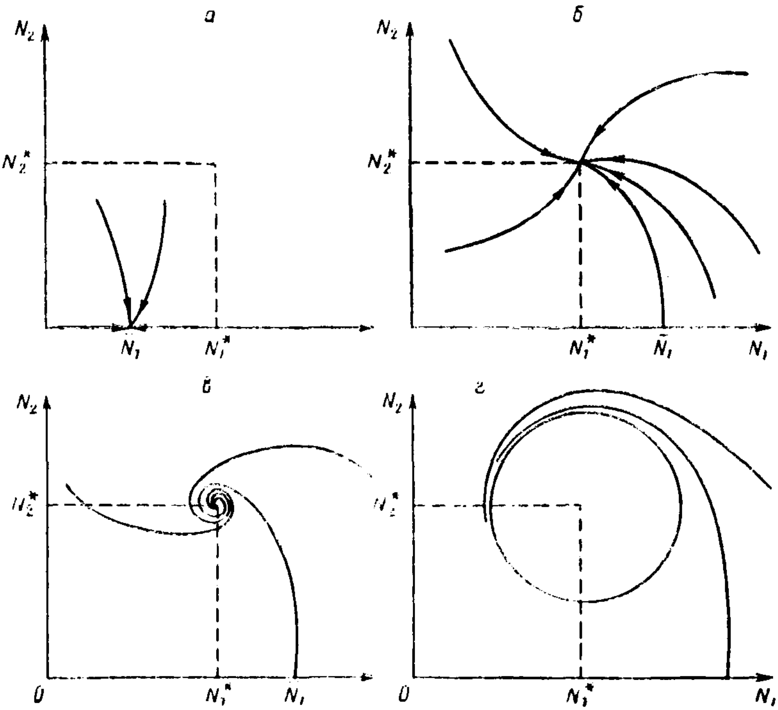

Рис. 1.

1) $N_1^* > \overline{N}_1$, точка $(\overline{N_1}, 0)$ — устойчивый узел;

2) $N_1^* < \overline{N}_1$, сепаратриса, выходящая из точки $(\overline{N}_1, 0)$, входит в точку $\left(N_1^*, N_2^*\right)$, которая является устойчивым фокусом (рис. 1, *в*) или устойчивым узлом (рис. 1, *б*);

3) $N_1^* < \overline{N}_1$, сепаратриса, выходящая из точки $(\overline{N}_1, 0)$, наматывается на предельный цикл (рис. 1, *г*).

§ 3. ТИПЫ ТРОФИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ ХИЩНИК — ЖЕРТВА

Пусть $L = L(N_1)$ — функция, описывающая потребление жертвы одним хищником за единицу времени. Функция $L(N_1)$ называется трофической функцией хищника.

В рассмотренных ранее системах трофические функции были постоянными величинами (за исключением модели Колмогорова). Экспериментальные исследования показывают, что эти функции принадлежат, как правило, к одному из трех типов. Функции первого типа (рис. 2, *а*) — монотонно возрастающие с медленно убывающей производной — характерны для беспозвоночных и некоторых видов хищных рыб. Функции второго типа (рис. 2, *б*) — линейные на некотором интервале и имеющие резкий порог насыщения — характерны для хищников-фильтратов (например, многих моллюсков). Третий тип функций (рис. 2, *в*) характерен для хищников, способных к целенаправленному поиску жертв.

Определение 2. Функцию $L(N)$ будем называть выпуклой, если для любых двух точек $N^{(1)}$ и $N^{(2)}$, таких, что $N^{(1)} \neq N^{(2)}$, справедливо неравенство

$$L(N^{(1)}\lambda + N^{(2)}(1-\lambda)) \geqslant \lambda L(N^{(1)}) + (1-\lambda) L(N^{(2)})$$

для всех $\lambda \in [0, 1]$. Если выполнено обратное неравенство, то функцию будем называть вогнутой.

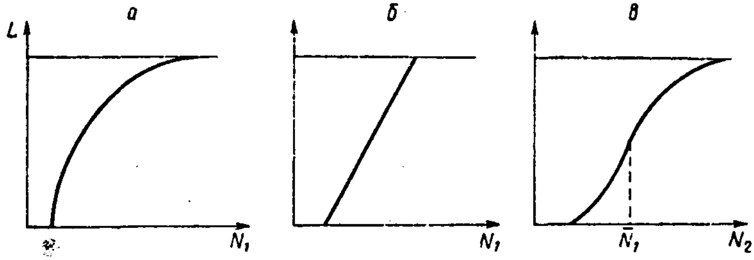

Рис. 2.

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений, описывающую взаимодействие хищника и жертвы с трофической функцией $L(N_1)$:

$$dN_1/dt=\varepsilon_1 N_1-L(N_1)N_2,\quad dN_2/dt=kL(N_1)N_2-\varepsilon_2 N_2, \qquad (1.12)$$

где $k>0$.

Нетривиальным положением равновесия этой системы будет точка $\left(N_1^*, N_2^*\right)$, координаты которой удовлетворяют условиям

$$L\left(N_1^*\right)=\varepsilon_2/k,\quad N_2^*=(k\varepsilon_1/\varepsilon_2)N_1^*.$$

Поскольку функция $L(N_1)$ монотонно возрастает, то положительная стационарная точка $\left(N_1^*, N_2^*\right)$ единственна.

Характеристическое уравнение линеаризованной в окрестности точки $\left(N_1^*, N_2^*\right)$ системы (1.12) имеет вид

$$\lambda^2-\lambda\varepsilon_1\left(1-\frac{L'\left(N_1^*\right)N_1^*}{L\left(N_1^*\right)}\right)+\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{L'\left(N_1^*\right)N_1^*}{L\left(N_1^*\right)}=0.$$

Обозначив $\alpha=L'\left(N_1^*\right)N_1^*/L\left(N_1^*\right)$, перепишем характеристическое уравнение следующим образом:

$$\lambda^2-\lambda\varepsilon_1(1-\alpha)+\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha=0.$$

Корнями уравнения будут

$$\lambda_{1,2}=\frac{\varepsilon_1(1-\alpha)}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_1^2(1-\alpha)^2-4\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha}.$$

Если $\varepsilon_1^2(1-\alpha)^2-4\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha\geqslant 0$, то стационарная точка является узлом $(\lambda_1\lambda_2>0)$ или седлом $(\lambda_1\lambda_2<0)$. В противном случае, а именно если $\varepsilon_1^2(1-\alpha)^2-4\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha<0$, стационарная точка будет фокусом $(1\neq\alpha)$ или центром $(1=\alpha)$.

Рассмотрим уравнение

$$\alpha^2-2\left(\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\alpha+1=0,$$

корнями которого являются

$$\alpha_{1,2}=\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2\pm 2\sqrt{\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}{\varepsilon_1}.$$

Тогда стационарная точка будет фокусом или центром, если

$$\alpha_1<L'\left(N_1^*\right)N_1^*/L\left(N_1^*\right)<\alpha_2,$$

и узлом или седлом, если

$$L'\left(N_1^*\right)N_1^*/L\left(N_1^*\right)\leqslant\alpha_1 \text{ или } L'\left(N_1^*\right)N_1^*/L\left(N_1^*\right)\geqslant\alpha_2.$$

Устойчивость состояния равновесия будет обеспечена, если $1-\alpha<0$ или, с учетом значения α,

$$L'\left(N_1^*\right)N_1^* > L\left(N_1^*\right). \qquad (1.13)$$

Рассмотрим функцию $L(N_1)/N_1$, описывающую относительную долю потребления хищником жертвы. Условием возрастания этой функции в точке N_1^* является положительность ее производной, т. е.

$$L'\left(N_1^*\right)/N_1^* - L\left(N_1^*\right)/\left(N_1^*\right)^2>0.$$

Последнее неравенство эквивалентно (1.13). Это означает, что состояние равновесия устойчиво в случае, когда относительная доля потребления хищником жертвы возрастает в окрестности точки N_1^*.

Для трофической функции первого типа справедливо

$$L\left(N_1^2\right)/N_1^2 < L\left(N_1^1\right)/N_1^1,$$

где $N_1^2 > N_1^1 > 0$. Это следует из выпуклости трофической функции. Таким образом, для сообществ с трофической функцией первого типа (см. рис. 2, *а*) относительная доля потребления хищником жертвы убывает, следовательно, такое сообщество устойчивостью не обладает.

Для трофической функции третьего типа состояние равновесия будет устойчивым, если $N_1 < \bar{N}_1$, где $\bar{N}_1$ — точка перегиба функции (см. рис. 2, *в*). Это следует из того, что на интервале $[0, \bar{N}_1]$ трофическая функция вогнута и, следовательно, относительная доля потребления хищником жертвы возрастает.

Вид трофической функции оказывает большое влияние на устойчивость системы хищник — жертва. Однако существуют и другие факторы, влияющие на устойчивость, например условия среды, возможность выработки жертвой некоторой защитной стратегии, изменение коэффициента естественного прироста жертвы в зависимости от численности и др. Учет этих факторов требует дополнительного исследования более сложных моделей.

§ 4. МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ n ВИДОВ

Построение большинства моделей взаимодействия в биологических сообществах опирается на описание взаимодействия с помощью системы дифференциальных уравнений относительно численностей видов $N_i(t)$. Естественно, что биологический смысл имеют лишь неотрицательные решения.

Уравнения динамики сообщества (в котором не учитывается возрастная структура популяций) в общем случае имеют вид

$$dN_i/dt = F_i(N_1, N_2, \ldots, N_n; t), \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.14}$$

где функции F_i описывают скорость изменения численности популяций в зависимости от структуры видовых взаимодействий и их количественных показателей.

Предположим, что функции F_i не зависят явным образом от времени и система (1.14) является изолированной. Тогда из равенства $N_i = 0$ вытекает $F_i(N_1, \ldots, N_{i-1}, 0, N_{i+1}, \ldots, N_n) = 0$ и F_i представимы в виде

$$F_i(N_1, N_2, \ldots, N_n) = N_i G_i(N_1, N_2, \ldots, N_n),$$

где G_i играют роль обобщенных коэффициентов прироста. В простейшем случае эти функции имеют вид

$$G_i(N_1, N_2, \ldots, N_n) = \varepsilon_i - \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} N_j,$$

что приводит к системе уравнений

$$dN_i/dt = N_i\left(\varepsilon_i - \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} N_j\right), \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.15}$$

Модели типа (1.15) в современной литературе по математической экологии принято называть вольтерровскими. Здесь ε_i — скорость естественного прироста или смертности i-го вида при отсутствии остальных видов; коэффициенты γ_{ii} отражают характер взаимодействия видов i и j $(i \neq j)$; γ_{ij} — показатели внутривидового взаимодействия. Матрицу $\Gamma = \|\gamma_{ij}\|$ обычно называют матрицей сообщества или матрицей взаимодействия. Коэффициенты γ_{ii} матрицы Γ влияют на коэффициент естественного прироста численности вида i при отсутствии других видов. Если $\gamma_{ii} > 0$, то говорят о наличии внутривидовой конкуренции или самолимитирования по численности i-го вида. Влияние j-го вида на вид i-й задано с помощью произведения $\gamma_{ij} N_i N_j$ при условии справедливости гипотезы «встреч и эквивалентов», которая состоит в следующем.

Предположим, что число встреч особей видов i и j за время dt равно $m_{ij} N_i N_j dt$. В результате этих встреч происходит сокращение численности вида i на величину $p_{ij} m_{ij} N_i N_j dt$, где p_{ij} указывает на долю особей вида j, которые истребляются при встрече $(0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1)$. В то же время число особей вида i возрастает на величину $p_{ij} m_{ij} N_i N_j dt$ с некоторым коэффициентом пропорциональности, называемым эквивалентом. Таким образом, происходит немедленное преобразование биомассы вида i в биомассу вида j.

Мы уже говорили о том, что биологический смысл имеют только неотрицательные решения системы (1.15). Кроме этого исследуемые модели довольно плохо описывают динамику сообществ, если численности видов близки к нулю, поскольку в этом случае виды могут исчезнуть в результате действия случайных факторов, которые не отражены в уравнениях.

Обозначим через R^n_+ положительный ортант n-мерного евклидова пространства R^n. В дальнейшем будем исследовать устойчивость положений равновесия $\mathbf{N}^* \in R^n_+$.

Положение равновесия системы (1.15) $\mathbf{N}^* = \left(N_1^*, N_2^*, \ldots \right.$ $\left. \ldots, N_n^*\right)$ должно удовлетворять системе уравнений

$$N_i(\varepsilon_i - \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} N_j) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Если $\mathbf{N}^* > 0$, то это положение равновесия является решением системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} N_j = \varepsilon_i,\ i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1.16)$$

или в матричной форме

$$\Gamma \mathbf{N} = \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad (1.17).$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$.

При исследовании систем типа (1.15) В. Вольтерра рассматривал два подкласса таких систем — консервативные и диссипативные.

Отождествим некоторую величину $\alpha_i > 0$ со средним значением биомассы особей вида i. Тогда общая биомасса сообщества будет равна $\overline{M} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i N_i$. На траекториях системы (1.15) общая биомасса сообщества будет изменяться в соответствии с уравнением

$$d\overline{M}/dt = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i N_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} N_i N_j.$$

Если удастся подобрать положительные коэффициенты α_i таким образом, что квадратичная форма

$$\chi = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \gamma_{ij} N_i N_j \equiv 0,$$

то система (1.15) называется консервативной. Если же квадратичная форма χ положительно определена, система называется диссипативной.

Таким образом, для консервативных систем характерен неограниченный рост общей биомассы сообщества, в диссипативной системе рост общей биомассы замедляется вследствие влияния взаимодействия видов.

Для консервативной системы должно выполняться

$$\gamma_{ii} = 0,\ \alpha_i \gamma_{ij} + \alpha_j \gamma_{ji} = 0,\ i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, коэффициенты γ_{ij} и γ_{ji} имеют противоположные знаки или одновременно равны нулю.

В. Вольтерра показал, что для консервативности системы

(1.15) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) $\gamma_{ii}=0$, $i=1, 2, \ldots, n$;

2) $\gamma_{ij}=\gamma_{ji}=0$ или $\gamma_{ij}\gamma_{ji}<0$ при $i\neq j$;

3) $\gamma_{i_1 i_2}\gamma_{i_3 i_4}\cdots\gamma_{i_{m-1} i_m}=(-1)^m\gamma_{i_2 i_1}\gamma_{i_4 i_3}\cdots\gamma_{i_m i_{m-1}}$

для любой перестановки $i_1, i_2, \ldots, i_m$ индексов из $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Перепишем систему (1.15) в виде

$$dN_i/dt=-N_i\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}(N_j-N_j^*),\ i=1, 2, \ldots, n, \qquad (1.18)$$

где $N^*=(N_1, N_2 \ldots, N_n)$ — нетривиальное положение равновесия, т. е. $N_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим функцию

$$V(N_1, N_2, \ldots, N_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(N_i-N_i^*\ \ln N_i) \qquad (1.19)$$

и вычислим производную этой функции вдоль траекторий системы (1.18):

$$dV/dt=-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(N_i-N_i^*)\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}(N_j-N_j^*),$$

или

$$dV/dt=-\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\gamma_{ij}\left(N_i-N_i^*\right)\left(N_j-N_j^*\right). \qquad (1.20)$$

Если система консервативна, то выражение (1.20) тождественно равно нулю. Функция $V(\mathbf{N})$ является функцией Ляпунова для системы (1.18) и достигает минимального значения в точке $\mathbf{N}^*$. Поскольку производная функции $V(\mathbf{N})$ тождественно равна нулю для всех $\mathbf{N}\in R_+^n$, то положение равновесия $\mathbf{N}^*$ устойчиво (но не асимптотически устойчиво).

Анализируя консервативные системы, В. Вольтерра показал существование в случае невырожденности матрицы Γ и при четном n первого интеграла

$$\left(e^{N_1}/N_1^{q_1}\right)^{\alpha_1}\left(e^{N_2}/N_2^{q_2}\right)^{\alpha_2}\ldots\left(e^{N_n}/N_n^{q_n}\right)^{\alpha_n}=\mathrm{const},$$

где $\mathbf{q}=(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ — решение системы (1.16). Отсюда следует, что при $\mathbf{q}>0$ численности всех видов ограничены сверху и снизу положительными константами, и если $\mathbf{N}(0)\neq\mathbf{N}^*$, то по крайней мере один вид имеет незатухающие колебания численности. Причем средние значения численности

$$\frac{1}{t}\int_0^t N_i(\tau)d\tau\xrightarrow[t\to\infty]{}N_i^*.$$

Это свойство называется законом асимптотических средних.

В диссипативных системах квадратичная форма χ положительно определена. Отсюда следует, что все $\gamma_{ii}>0$, т. е. все виды должны обладать самолимитированием. Это говорит о том, что классы консервативных и диссипативных систем не пересекаются. Еще одним необходимым условием диссипативности является неравенство нулю определителя матрицы Г, откуда сразу следует единственность решения системы (1.17). И, наконец, последнее необходимое условие состоит в том, что все главные миноры матрицы **Г** положительны.

Если решение системы (1.17) положительно, то первый интеграл систем (1.15) имеет вид

$$(e^{n_1}/n_1)^{\alpha_1 N_1^*} \ldots (e^{n_n}/n_n)^{\alpha_n N_n^*} = c \exp\left\{-\int_0^t \chi\left(N_1^* - N_1, \ldots, N_n^* - N_n\right) d\tau\right\},$$

где $n_i = N_i/N_i^*$, $c>0$. Поскольку квадратичная форма χ положительно определена, то, как показал В. Вольтерра, $\mathbf{N}(t) \to \mathbf{N}^*$ при $t\to\infty$ при любых начальных значениях $\mathbf{N}(0) \in R_+^n$.

Если мы рассмотрим функцию $V(N_1, N_2, \ldots, N_n)$ вида (1.19), то на траекториях диссипативной системы получим $dV/dt \leqslant 0$ для всех $\mathbf{N}(t)$ из области R_+^n, причем равенство $dV/dt=0$ выполняется только при $\mathbf{N}(t)=\mathbf{N}^*$. Это означает, что $\mathbf{N}(t)\to\mathbf{N}^*$ *при $t\to\infty$ и положение равновесия асимптотически устойчиво* при любых начальных данных из R_+^n, т. е. областью асимптотической устойчивости является весь неотрицательный ортант, что также объясняет выводы, полученные В. Вольтерра.

Рассмотрим биологическое сообщество, состоящее из популяций n видов, в котором вид с номером j потребляет вид с номером $j-1$ [45]. Динамику взаимодействия зададим системой дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} dN_1/dt = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_{11}N_1 - \gamma_{12}N_2), \\ dN_i/dt = N_i(-\varepsilon_i + \gamma_{i,\,i-1}N_{i-1} - \gamma_{i,\,i+1}N_{i+1}), \\ \gamma_{n,\,n+1} = 0,\ i = 2, 3, \ldots, n, \end{gathered} \tag{1.21}$$

где ε_i, $\gamma_{ij}>0$, $\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно, эта система не является ни консервативной, ни диссипативной. Самолимитирование отсутствует для всех видов, кроме первого.

Положением равновесия для этой системы является точка фазового пространства, удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{gathered} \gamma_{11}N_1 + \gamma_{12}N_2 = \varepsilon_1,\ \gamma_{i,\,i-1}N_{i-1} - \gamma_{i,\,i+1}N_{i+1} = \varepsilon_i, \\ \gamma_{n,\,n+1} = 0,\ i = 2, 3, \ldots, n. \end{gathered}$$

Предположим, что существует положительное решение этой системы.

Уравнения (1.21) перепишем в виде

$$
\begin{gathered}
dN_1/dt = -N_1(\gamma_{11}(N_1 - N_1^*) + \gamma_{12}(N_2 - N_2^*)),\\
dN_i/dt = N_i(\gamma_{i,\,i-1}(N_{i-1} - N_{i-1}^*) - \gamma_{i,\,i+1}(N_{i+1} - N_{i+1}^*)),\\
\gamma_{n,\,n+1} = 0,\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.
\end{gathered} \tag{1.22}
$$

Вычислим производную функции $V(N_1, N_2 \ldots, N_n)$ на траекториях системы (1.21)

$$
\begin{gathered}
dV/dt = -\alpha_1(\gamma_{11}(N_1 - N_1^*) + \gamma_{12}(N_1 - N_1^*)(N_2 - N_2^*) + \\
+ \sum_{i-1}^{n} \alpha_i(N_i - N_i^*)(\gamma_{i,\,i-1}(N_{i-1} - N_{i-1}^*) - \gamma_{i,\,i+1}(N_{i+1} - N_{i+1}^*)).
\end{gathered}
$$

Выберем коэффициенты α_i следующим образом:

$$
\alpha_1 = 1,\quad \alpha_{i+1} = \alpha_i\gamma_{i,\,i+1}/\gamma_{i+1,\,i},\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.
$$

Тогда, учитывая, что $\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$, получим

$$
dV/dt = -\gamma_{11}(N_1 - N_1^*)^2.
$$

Покажем, что множество $V^* = \{\mathbf{N}: N_1 = N_1^*,\ \mathbf{N} > 0\}$ не содержит траекторий системы (1.22), кроме точки покоя $\mathbf{N} = \mathbf{N}^*$. Действительно, предположим противное: пусть существует траектория $\mathbf{N}(t)$, которая целиком лежит в множестве V^* и не совпадает с $\mathbf{N}^*$. Поскольку $N_1(t) = N_1^*$, то $dN_1(t)/dt \equiv 0$. Отсюда получаем, что $N_2(t) \equiv N_2^*$ и $dN_2(t)/dt \equiv 0$. Аналогично получаем, что $N_i(t) \equiv N_i^*$, $i = 3, 4, \ldots, n$.

Таким образом, для рассмотренного сообщества типа хищник — жертва можно сделать вывод об асимптотической устойчивости в целом положительного положения равновесия, т. е. для любых начальных данных $\mathbf{N}(0) > 0$ эволюция происходит таким образом, что $\mathbf{N}(t) \underset{t \to \infty}{\to} \mathbf{N}^*$ при условии, что $\mathbf{N}^* > 0$.

§ 5. ПОНЯТИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ НИШИ И УРАВНЕНИЯ КОНКУРЕНЦИИ

Коэффициенты γ_{ij} матрицы сообщества Г, которые мы истолковали на основе гипотезы «встреч и эквивалентов», имеют интересную и содержательную интерпретацию, использующую понятия экологической ниши и конкуренции.

Предположим, что задано пространство X жизненно важных для популяций сообщества факторов среды. Под жизненно важными факторами можно понимать количество и видовой состав пищи, условия местообитания, рельеф местности, интенсивность эксплуатации природных ресурсов человеком и т. д. Экологической нишей принято считать некоторую область пространства X, в которой возможно существование вида и вне которой вид существовать не может.

В реальных условиях, как правило, наблюдается пересечение экологических ниш. Многие виды сосуществуют на одной местности и потребляют один и тот же ресурс. Если ресурс ограничен, то это порождает конкурентные явления, а экологическая ниша оказывается важным фактором в определении структуры конкурентного взаимодействия.

При рассмотрении экологических ниш обычно пользуются принципом конкурентного исключения Г. Ф. Гаузе, согласно которому предполагается невозможным сосуществование двух видов с одинаковыми экологическими нишами, т.е. ниши могут лишь частично перекрывать друг друга.

Дадим определение ниши, опираясь на понятие ресурса и функции потребления.

Предположим, что ресурс, потребляемый входящими в сообщество популяциями, характеризуется вектором $x \in X$, а его объем ограничен величиной $K(x)$. Функцию $K(x)$ обычно называют спектром ресурса. Потребление ресурса видом i характеризуется некоторой функцией предпочтения $f_i(x)$, называемой часто функцией потребления. Функция $f_i(x)$ может также описывать плотность распределения вероятностей потребления видом i ресурса x. Наиболее предпочитаемый ресурс x^i, соответствующий максимальному значению функции f_i, принято называть центром ниши.

Пусть $N_i(t)$ — численность (биомасса) популяции i в момент времени t. Тогда произведение $f_i(x)N_i(t)$ описывает объем ресурса x, потребляемого видом i. Разность $K(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)N_i(t)$ указывает на потенциальную возможность сосуществования популяций, потребляющих ресурс x. Если эта разность достаточно велика, то можно считать, что численность популяции увеличивается в соответствии с законом $dN_i/dt = \varepsilon_i N_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Будем считать, что на рост популяции влияет относительная истощенность ресурса в точке x, равная $[K(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)N_i(t)]/K(x)$. При этом динамика численности популяции i будет описываться уравнением

$$\frac{dN_i}{dt} = \frac{\varepsilon_i N_i}{K(x)}\left[K(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)N_i(t)\right] \qquad (1.23)$$

Обозначим $K_i = \int_X K(x)f_i(x)dx$. Выражение K_i имеет смысл общего объема ресурсов, потребляемых видом i. и называется емкостью ниши. Умножив уравнение (1.23) на $f_i(x)K(x)$ и проинтегрировав по всему пространству ресурса X, получим

$$\frac{dN_i}{dt} = \varepsilon_i N_i \left(1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{K_i} N_i\right). \qquad (1.24)$$

где $a_{ij}=\int\limits_X f_i(x)f_i(x)dx$ называются коэффициентами конкуренции. Обозначив $\gamma_{ij}=\varepsilon_i a_{ij}/K_i$, $i, j=1, 2, \ldots, n$, запишем уравнение (1.24) следующим образом:

$$\frac{dN_i}{dt}=N_i\left(\varepsilon_i-\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}N_j\right). \qquad (1.25)$$

Система (1.25) является диссипативной, поскольку при $\alpha_i=K_i/\varepsilon_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\gamma_{ij}N_iN_j=\int\limits_X\sum_{i,j=1}^{n}f_i(x)N_if_j(x)N_jdx=\int\limits_X\left[\sum_{i=1}^{n}f_i(x)N_i\right]^2>0$$

при всех $N\neq0$.

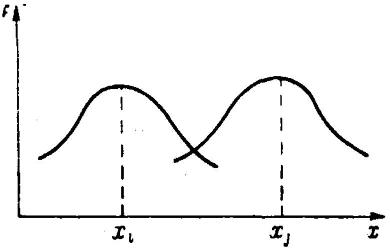

Рис. 3.

Таким образом, если существует положительное решение системы уравнений $\Gamma N=\varepsilon$ с коэффициентами из (1.25), то оно является положением равновесия, асимптотически устойчивым в целом в положительном ортанте R^n_+.

Рассмотрим сообщества с функциями потребления гауссовского типа [45]

$$f_i(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}}\exp\left[\frac{-(x-x_i)^2}{2\sigma_i^2}\right],$$

где $x\in(-\infty, +\infty)$; x_i — центр ниши; σ_i^2 — дисперсия нормального распределения (рис. 3). Обозначим через d_{ij} расстояние между центрами x_i и x_j. Тогда коэффициенты конкуренции принимают вид

$$a_{ij}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i\sigma_j}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}-\frac{(x-d_{ij})^2}{2\sigma_j^2}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2T\left(\sigma_i^2+\sigma_j^2\right)}}\exp\left[-\frac{d_{ij}^2}{2\left(\sigma_i^2+\sigma_j^2\right)}\right].$$

Если все распределения имеют одинаковую дисперсию $\sigma=\sigma_i^2$ и $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_n$, то $d_{ij}=|i-j|d$,

$$a_{ij}=\frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}\exp\left[-\frac{(i-j)^2d^2}{4\sigma^2}\right].$$

Перепишем коэффициенты конкуренции в виде

$$a_{ij}=a^{(i-j)2},\ a=(2\sigma\sqrt{\pi})^{-1-(i-j)2}\exp\left(-\frac{d^2}{4\sigma}\right).$$

Тогда получим матрицу конкуренции

$$A=\begin{matrix} 1 & a & a^4 & \ldots & a^{(n-1)^2} \\ a & 1 & a & \ldots & a^{(n-2)^2} \\ a^4 & a & 1 & \ldots & a^{(n-3)^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a^{(n-1)^2} & a^{(n-2)^2} & a^{(n-3)^2} & \ldots & 1 \end{matrix}\,.$$

Величиной d/σ обычно характеризуют плотность видовой упаковки сообщества или меру близости экологических ниш. Заметим, что диссипативность матрицы A сохраняется при всех даже достаточно малых значениях d/σ (при сколь угодно плотной видовой упаковке). Поэтому положительное положение равновесия будет асимптотически устойчиво при видовой упаковке любой плотности. Скорость сходимости возмущений системы к положению равновесия характеризуется минимальным собственным числом матрицы A. При достаточно большом n $\lambda_{\min}\approx 1-2a+2a^4-2a^9+2a^{16}-\ldots$, что при малых значениях d/σ дает

$$\lambda_{\min}\approx 4\sqrt{\pi}(\sigma/d)\exp(-\pi\sigma^2/d^2).$$

Отсюда следует, что при большой плотности упаковки $\lambda_{\min}$ хотя и остается положительным и формально ассимптотическая устойчивость сохраняется, однако время возвращения системы из возмущенного состояния $N(0)$ к состоянию равновесия резко возрастает.

§ 6. БАЛАНСОВЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЭКОЛОГИИ. ПРИВЕДЕНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В СОСТОЯНИЕ УСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ

Балансовые уравнения в экологии, описывающие движение потоков биомассы и энергии между основными компонентами наземных систем, опираются на законы сохранения массы и энергии. Схематично потоки массы и энергии изображены на рис. 4.

Компоненты сообщества определяются следующим образом.

Продуценты с биомассами x_i ($i=1, 2, \ldots, m$) — это в основном зеленые растения, способные преобразовывать световую энергию в собственную биомассу и использовать в пищу простые вещества — субстраты, биомассу которых обозначим c_k ($k=1, 2, \ldots, p$). Субстраты в ос-

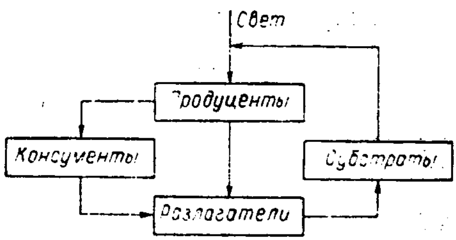

Рис. 4.

новном являются продуктами жизнедеятельности консументов. Консументы с биомассами $y_j (j=1, 2, ..., n)$ — это животные, питающиеся продуцентами и другими организмами.

Уравнения, отражающие баланс масс в экосистеме, имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt}=\left(F^i_x-D^i_x\right)x_i-\sum_{j=1}^{n} u_{ij}y_j+\sum_{k=1}^{p} w_{ik}c_k+R_x,\ i=1, 2, \ldots, m;$$

$$\frac{dy_j}{dt}=\left(F^j_y-D^j_y\right)y_j-\sum_{r=1}^{n} v_{jr}y_r,\ j=1, 2, \ldots, n;$$

$$\frac{dc_k}{dt}=\sum_{j=1}^{n} V_{kj}y_j-\sum_{i=1}^{m} w_{ki}x_i,\ k=1, 2, \ldots, r.$$

Здесь F^i_y, F^j_y — коэффициенты естественного прироста; D^i_x, D^i_y — коэффициенты смертности; u_{ij} — скорость потребления биомассы i-го вида продуцента индивидуумом j-го вида консумента; w_{ik} — скорость преобразования биомассы k-го вида субстрата в биомассу i-го вида продуцента; v_{jr} — скорость потребления j-го вида консумента r-м; V_{jk} — скорость производства k-го субстрата j-м видом консументов; w_{ki} — скорость потребления k-го субстрата i-м видом продуцента; R_x описывает преобразование света.

Такая модель в целом правильно описывает балансовые соотношения в наземных экосистемах, однако страдает излишней общностью, не позволяющей использовать ее для исследования конкретных систем. Поэтому модель необходимо конкретизировать с помощью подходящего выбора коэффициентов, которые являются, вообще говоря, функциями компонент, входящих в экосистему.

При довольно естественных предположениях о коэффициентах прироста и смертности, а также скоростях преобразования биомасс можно (как показано, например, в [45]) преобразовать уравнения экологического баланса к вольтерровской системе и тем самым констатировать возможность построения вольтерровских моделей на основе более общих соображений, чем гипотеза «встреч и эквивалентов».

Рассмотрим задачу управления вольтерровской системой

$$dN_i/dt=N_i\Big(\varepsilon_i-\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}N_j\Big)+u_i, \qquad (1.26)$$

где вектор управлений $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ выбирается из некоторого множества допустимых управлений U.

Предположим, что в системе (1.26) при $\mathbf{u}\equiv 0$ существует положительное устойчивое состояние равновесия $\mathbf{N}^*$. Рассмотрим задачу: найти такой вектор управлений $\mathbf{u}\in U$, чтобы система (1.26) получила новое устойчивое положение равновесия $\overline{\mathbf{N}}^*>0$.

Таким образом, поставлена задача перевода экологической системы на новый режим, при котором поддерживалась бы заданная численность популяций.

Выберем в качестве допустимых управлений векторы вида

$$\mathbf{u}=\mathbf{CN}, \qquad (1.27)$$

где $\mathbf{C}=\mathrm{diag}\{c_i\}$.

Перепишем систему (1.26) в виде

$$dN_i/dt=N_i\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}\left(N_j^*-N_j\right)+u_i$$

и подставим вместо управления u_i его выражение из (1.27):

$$dN_i/dt=N_i\left(\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}\left(N_j^*-N_j\right)+c_i\right). \qquad (1.28)$$

Найдем теперь c_i исходя из условия, что система (1.28) имеет положение равновесия $\overline{\mathbf{N}}^*$. Для этого необходимо, чтобы при $\mathbf{N}=\overline{\mathbf{N}}^*$ выражение в скобках равнялось нулю. Отсюда получаем

$$c_i=\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}\left(\overline{N}_j^*-N_j^*\right). \qquad (1.29)$$

Таким образом, если в системе (1.26) управление выбирается в виде (1.27) с коэффициентами (1.29), то у нее появляется новое положение равновесия $\overline{\mathbf{N}}^*$, причем устойчивое, если было устойчивым положение равновесия $\mathbf{N}^*$, поскольку на коэффициенты матрицы сообщества управление не оказывает влияния.

В случае диссипативной системы при любом $\mathbf{N}(0)\in R_+^n$ траектория системы (1.26) при выбранном управлении достигает точки $\overline{\mathbf{N}}^*$ в силу асимптотической устойчивости этого положения равновесия. Таким образом, управление (1.27) с коэффициентами (1.29) в случае диссипативной системы решает задачу приведения системы (1.26) из любого начального положения $\mathbf{N}(0)\in R_+^n$ в заданное стационарное состояние $\overline{\mathbf{N}}^*$.

В случае же консервативной системы положение равновесия $\mathbf{N}^*$ будет устойчивым, но не асимптотически устойчивым, поэтому в системе образуются устойчивые колебания численности, и задачу перевода в стационарное состояние управление (1.27) не решает.

Рассмотрим функцию Ляпунова для консервативной системы (1.28), в которой $\alpha_i=1$, $i=1, 2, \ldots, n$, в виде

$$V(\mathbf{N})=\sum_{i=1}^{n}\left((N_i-\overline{N}_i^*\ \ln N_i\right)$$

и вычислим производную этой функции вдоль траекторий этой системы

$$dV/dt=-\sum_{i,j=1}^{n}\gamma_{ij}\left(N_i-\overline{N}_i^*\right)\left(N_j-\overline{N}_j^*\right). \qquad (1.30)$$

Поскольку рассматриваемая система консервативна, то производная функции V вдоль траекторий системы тождественно равна нулю.

Прибавим к правой части выражения (1.30) слагаемое $-\sum_{i=1}^{n}\Delta\gamma_i\left(N_i-\overline{N}_i^*\right)^2<0$, $\Delta\gamma_i>0$. Тогда dV/dt становится отрицательной всюду, за исключением точки $\mathbf{N}^*$.

Заменим управление $\mathbf{u}=\mathbf{C}\mathbf{N}$, выбрав

$$\mathbf{u}=\mathbf{C}\mathbf{N}+\operatorname{diag}\{\delta_i N_i\}(\overline{\mathbf{N}}^*-\mathbf{N}), \qquad (1.31)$$

где $\delta_i>0$, и подставим в систему (1.26). Вычисляя производную функции V вдоль траекторий системы (1.26) с управлением (1.31), получаем

$$dV/dt=-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(N_i-\overline{N}_i^*\right)^2<0.$$

Таким образом, положение равновесия системы (1.26) при управлении (1.31) становится асимптотически устойчивым и, следовательно, управление (1.31) решает задачу перевода консервативной системы (1.26) в заданное устойчивое состояние равновесия $\overline{\mathbf{N}}^*$.

Рассмотрим задачу управления сообществом, состоящим из популяций n видов, в котором вид с номером j потребляет вид с номером $j-1$ и имеет место самолимитирование первого вида. Вопрос об устойчивости этой системы исследован в § 4 настоящей главы.

Динамика сообщества описывается уравнениями

$$\begin{aligned}
&dN_1/dt=N_1(\varepsilon_1-\gamma_{11}N_1-\gamma_{12}N_2),\\
&dN_i/dt=N_i(-\varepsilon_i+\gamma_{i,\,i-1}N_{i-1}-\gamma_{i,\,i+1}N_{i+1}), \qquad (1.32)\\
&\gamma_{n,\,n+1}=0,\ i=2,\ 3,\ \dots,\ n,
\end{aligned}$$

где ε_i, $\gamma_{ij}>0$, $\gamma_{ij}=-\gamma_{ji}$, $i,\ j=1,\ 2,\ \dots,\ n$.

Предположим, что требуется перевести систему из точки $\mathbf{N}(0)\in R_+^n$ в устойчивое положение равновесия, в котором $N_1=N_1^*$. Поскольку имеет место самолимитирование первого вида, то будем считать, что $N_1^*<\varepsilon_1/\gamma_{11}$.

Рассмотрим сначала случай, когда $n=3$. Введем в систему (1.32) управление $u_3=c_3N_3$:

$$\begin{aligned}
&dN_1/dt=N_1(\varepsilon_1-\gamma_{11}N_1-\gamma_{12}N_2),\\
&dN_2/dt=N_2(-\varepsilon_2+\gamma_{21}N_1-\gamma_{23}N_3), \qquad (1.33)
\end{aligned}$$

$$dN_3/dt=N_3(-\varepsilon_3+\gamma_{32}N_2)+u_3.$$

Состояние равновесия $\mathbf{N}^*$ должно удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1-\gamma_{11}N_1-\gamma_{12}N_2=0,\\ &-\varepsilon_2+\gamma_{21}N_1-\gamma_{23}N_3=0,\\ &-\varepsilon_3+\gamma_{32}N_2+c_3=0. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Выразим N_2 и N_3 через N_1:

$$N_2=(\varepsilon_1-\gamma_{11}N_1)/\gamma_{12},\quad N_3=(-\varepsilon_2+\gamma_{21}N_1)/\gamma_{23}. \tag{1.35}$$

Положим $N_1=N_1^*$ и подставим в (1.35), получим

$$N_2^*=(\varepsilon_1-\gamma_{11}N_1^*)/\gamma_{12},\quad N_3^*=(-\varepsilon_2+\gamma_{21}N_1^*)/\gamma_{23}. \tag{1.36}$$

Значение управления u_3 найдем из системы уравнений (1.34)

$$u_3=\left(\varepsilon_3-\gamma_{32}\frac{\varepsilon_1-\gamma_{11}N_1^*}{\gamma_{12}}\right)N_3. \tag{1.37}$$

Так как $N_1^*<\varepsilon_1/\gamma_{11}$, $N_2^*>0$. Для того чтобы N_3^* было также положительным, необходимо, чтобы $N_1^*>\varepsilon_2/\gamma_{21}$. В этом случае система (1.33) с управлением (1.37) имеет асимптотически устойчивое положительное состояние равновесия (N_1^*, N_2^*, N_3^*). Если $N_1^*<\varepsilon_2/\gamma_{21}$, то N_3^*, полученное в (1.36), будет отрицательным, и, следовательно, введения в систему (1.32) только управления u_3 недостаточно.

Рассмотрим управляемую систему вида

$$\begin{aligned} dN_1/dt&=N_1(\varepsilon_1-\gamma_{11}N_1-\gamma_{12}N_2)+u_1,\\ dN_2/dt&=N_2(-\varepsilon_2+\gamma_{21}N_1-\gamma_{13}N_3)+u_2,\\ dN_3/dt&=N_3(-\varepsilon_3+\gamma_{32}N_2)+u_3, \end{aligned} \tag{1.38}$$

где $u_i=c_iN_i$. Стационарная точка системы $\mathbf{N}^*>0$ должна удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1-\gamma_{11}N_1-\gamma_{12}N_2+c_1=0,\\ &-\varepsilon_2+\gamma_{21}N_1-\gamma_{13}N_3+c_2=0,\\ &-\varepsilon_3+\gamma_{32}N_2+c_3=0. \end{aligned}$$

Пусть $N_1^*<\varepsilon_2/\gamma_{21}$. Выразив N_2 и N_3 через N_1 и подставив $N_1=N_1^*$, получим

$$N_2^*=\frac{\varepsilon_1-\gamma_{11}N_1^*+c_1}{\gamma_{12}},\quad N_3^*=\frac{-\varepsilon_2+\gamma_{21}N_1^*+c_2}{\gamma_{13}}.$$

Поскольку $N_1^*<\varepsilon_1/\gamma_{11}$, то $N_2^*>0$ при любом $c_1\geqslant 0$. Положим $c_1=0$. Из условия $N_3^*\geqslant 0$ получим

$$c_2 > \varepsilon_2 - \gamma_{21} N_1^* . \qquad (1.39)$$

Значение c_3 необходимо взять тем же, что и в (1.37). Тогда положение равновесия $\mathbf{N}^* \in R_+^n$ системы (1.38) будет точка с координатами

$$N_1^*, \; N_2^* = \frac{\varepsilon_1 - \gamma_{11} N_1^*}{\gamma_{12}}, \; N_3^* = \frac{-\varepsilon_2 + \gamma_{21} N_1^* + c_2^*}{\gamma_{13}},$$

где c_2^* удовлетворяет (1.39). Управление в системе (1.38) будет следующим:

$$u_1 = 0, \; u_2 = c_2^* N_2, \; u_3 = \left(\varepsilon_3 - \gamma_{32} \frac{\varepsilon_1 - \gamma_{11} N_1^*}{\gamma_{12}} \right) N_3. \qquad (1.40)$$

Таким образом, в зависимости от знака выражения $\varepsilon_2 - \gamma_{21} N_1^*$ для перевода системы (1.32) ($n = 3$) из начального состояния $\mathbf{N}(0) \in R_+^n$ в устойчивое положительное состояние равновесия, в котором N_1 принимает необходимое значение N_1^*, следует использовать управление (1.37) для системы (1.33) и управление (1.40) для системы (1.38).

Теперь легко обобщить результаты на случай $n > 3$. Система уравнений (1.32) с управлением $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ будет иметь вид

$$\begin{gathered} dN_1/dt = (\varepsilon_1 - \gamma_{11} N_1 - \gamma_{12} N_2) + u_1, \\ dN_i/dt = (-\varepsilon_i + \gamma_{i,\, i-1} N_{i-1} - \gamma_{i,\, i+1} N_{i+1}) + u_i, \\ i = 2, 3, \dots, n, \; \gamma_{n,\, n+1} = 0. \end{gathered} \qquad (1.41)$$

Управление $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{N}$, где $\mathbf{C} = \mathrm{diag}\{c_i^*\}$, $c_1^* = 0$; $c_n^* = \varepsilon_n - \gamma_{n,\, n-1} N_n^*$; $c_i^* = 0$, если $N_{i-1}^* > \varepsilon_i / \gamma_{i,\, i-1}$, $i = 2, 3, \dots, n-1$, $c_i^* > \varepsilon_i - \gamma_{i,\, i-1} N_{i-1}^*$, если $N_{i-1}^* \leqslant \varepsilon_i / \gamma_{i,\, i-1}$, $i = 2, 3, \dots, n-1$, переводит систему (1.41) из любого начального состояния $\mathbf{N}(0) \in R_+^n$ в устойчивое состояние равновесия с заданным значением N_1^*. При этом остальные координаты положения равновесия определяются по формулам

$$N_2^* = \frac{\varepsilon_1 - \gamma_{11} N_1^*}{\gamma_{12}},$$

$$N_i^* = \frac{c_{i-1} - \varepsilon_{i-1} + \gamma_{i-1,\, i-2} N_{i-2}^*}{\gamma_{i-1,\, i}}, \; i = 3, 4, \dots, n.$$

Рассмотрим задачу оптимального управления сообществом, в которое поступает извне некоторый ресурс и каждый последующий вид является потребителем предыдущего в случае $n = 3$ [47]. Например, это может быть сообщество, состоящее из сельскохозяйственной культуры, насекомых-вредителей и хищника, поедающего этих насекомых. Под внешним ресурсом можно подразумевать удобрение или воду, применяемую для полива.

Динамику сообщества зададим уравнениями

$$\begin{aligned} dN_0/dt &= Q-\gamma_0 N_0 N_1, \\ dN_1/dt &= N_1(\varepsilon_1+\gamma_{10}N_0-\gamma_{12}N_2), \\ dN_2/dt &= N_2(-\varepsilon_2+\gamma_{21}N_1-\gamma_{23}N_3), \\ dN_3/dt &= N_3(-\varepsilon_3+\gamma_{32}N_2), \end{aligned} \tag{1.42}$$

где Q — скорость поступления ресурса N_0; N_1, N_2, N_3 — численности видов; коэффициенты γ_0, $\gamma_{ij}>0$ таковы, что существует положительное асимптотически устойчивое состояние равновесия.

Предположим, что мы стремимся увеличить урожайность сельскохозяйственной культуры, т. е. численность N_1. При этом мы используем химический и биологический методы борьбы с вредителями. Первый заключается во внесении на поля инсектицидов, второй — в увеличении численности вида-паразита, т. е. хищника. Управляющим параметром является также скорость поступления внешнего ресурса (внесение удобрений). Введем в систему (1.42) управления u_2 и u_3:

$$\begin{aligned} dN_0/dt &= Q-\gamma_0 N_0 N_1, \\ dN_1/dt &= N_1(\varepsilon_1+\gamma_{10}N_0-\gamma_{12}N_2), \\ dN_2/dt &= N_2(-\varepsilon_2+\gamma_{21}N_1-\gamma_{23}N_3)-u_2, \\ dN_3/dt &= N_3(-\varepsilon_3+\gamma_{32}N_2)+u_3, \end{aligned} \tag{1.43}$$

где $u_2=c_2N_2$, $u_3=c_3N_3$. Величина $c_2\geqslant 0$ есть скорость внесения инсектицида, а $c_3\geqslant 0$ — относительная скорость искусственного увеличения численности хищника. Управляющими параметрами являются Q, c_2, c_3.

Выберем функционал для задачи (1.43) в виде

$$J=k_1N_1^* - k_0Q - k_2c_2N_2^* - k_3c_3N_3^* . \tag{1.44}$$

Здесь k_1 — стоимость единицы биомассы первого вида; k_0 — стоимость затрат на внесение ресурса с единичной скоростью; k_2 — стоимость затрат на внесение инсектицида с единичной скоростью; k_3 — стоимость затрат на выращивание и выпуск единицы биомассы хищника; N_1^*, N_2^*, N_3^* — численности видов в положении равновесия системы (1.43).

Будем предполагать, что все управляющие воздействия ограничены сверху: $Q\leqslant\overline{Q}$, $c_2\leqslant\overline{c_2}$, $c_3\leqslant\overline{c_3}$. Сформулируем следующую задачу: найти значения параметров Q, c_2 и c_3, обеспечивающие существование и устойчивость сообщества с максимальным значением функционала (1.44).

Состоянием равновесия системы (1.43) будет

$$N_1^* = Q/(\gamma_0 N_0^*),\ N_2^* = (\varepsilon_3-c_3)/\gamma_{32},$$

$$N_0^* = (\gamma_{12}N_2^* - \varepsilon_1)/\gamma_{10},\ N_3^* = (\gamma_{21}N_1^* - \varepsilon_2 - c_2)/\gamma_{32}, \qquad (1.45)$$

оно определяется через параметры Q, c_2, c_3. Для положительности $\mathbf{N}^*$ необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$0 \leqslant c_3 < \varepsilon_3,\ 0 \leqslant c_2 < \gamma_{21}N_1^* - \varepsilon_2,\ 0 < \gamma_{12}N_2^* - \varepsilon_1. \qquad (1.46)$$

Выразим Q, c_2, c_3 через N_0^*, N_1^*, N_2^*, N_3^* с помощью (1.45):

$$Q = \gamma_0 N_0^* N_1^*,$$
$$c_2 = \gamma_{21}N_1^* - \gamma_{23}N_3^* - \varepsilon_2, \qquad (1.47)$$
$$c_3 = -\gamma_{32}N_2^* + \varepsilon_3$$

и подставим эти выражения в (1.44). Это дает нам

$$J = k_1N_1^* - k_0N_0^* N_1^* - k_2\gamma_{21}N_1^* N_2^* +$$
$$+ (k_3\gamma_{32} + k_2\gamma_{23})N_2^* N_3^* + k_2\varepsilon_3N_2^* - k_3\varepsilon_3N_3^* .$$

Учитывая (1.46), (1.47), ограничения для N_i^* можно записать в виде $N_i^* > 0$, $\gamma_{21}N_1^* - \gamma_{23}N_3^* - \varepsilon_2 \geqslant 0$.

Окончательно задачу сформулируем следующим образом: найти

$$J = k_1N_1^* - k_0N_0^* N_1^* - k_2\gamma_{21}N_1^* N_2^* +$$
$$+ (k_3\gamma_{32} + k_2\gamma_{23})N_2^* N_3^* + k_2\varepsilon_2N_2^* - k_3\varepsilon_3N_3^* \to \max_{\mathbf{N}^*} \qquad (1.48)$$

при условиях

$$\gamma_0N_0^* N_1^* \leqslant \overline{Q},\ 0 \leqslant \gamma_{21}N_1^* - \gamma_{23}N_3^* - \varepsilon_2 \leqslant \overline{c}_2,$$
$$-\gamma_{32}N_2^* \leqslant \overline{c}_3 - \varepsilon_3,\ N_i^* \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3. \qquad (1.49)$$

Пусть $\overline{\mathbf{N}}^*$ — решение задачи (1.48), (1.49). Если $c_3 = -\gamma_{32}\overline{N}_2^* + \varepsilon_3 > 0$, то это означает, что истребление вредителей будет происходить с помощью увеличения численности вида-паразита, т. е. используется биологический способ борьбы. Если же $c_2 = \gamma_{21}\overline{N}_1^* - \gamma_{23}\overline{N}_3^* - \varepsilon_3 > 0$, то выбирается химический способ борьбы с вредителями. Если c_2 и c_3 больше нуля одновременно, то такой способ борьбы называется смешанным.

§ 7. УПРАВЛЕНИЕ ОБОБЩЕННЫМИ СИСТЕМАМИ ЛОТКИ — ВОЛЬТЕРРА

Рассмотрим обобщенную систему Лотки — Вольтерра следующего вида:

$$dN_i/dt = g_i(N_i)\left(\varepsilon_i - \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}f_j(N_j)\right),\ i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1.50)$$

где функции g_i, f_i непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} &1)\ f_i(0)=0;\\ &2)\ df_i/dN_i>0;\\ &3)\ g_i(0)=0;\\ &4)\ g_i(N_i)>0 \text{ при } N_i>0. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Сделаем в уравнении (1.50) замену переменных

$$y_i=f_i(N_i),\ i=1,\ 2,\ \dots,\ n. \tag{1.52}$$

В силу условия 2) существуют при $N_i \geqslant 0$ однозначные обратные функции $N_i=f_i^{-1}(y_i)$, $i=1, 2, \dots, n$. Из (1.51) следует, что функции f_i^{-1} удовлетворяют условиям:

1) $f_i^{-1}(0)=0$;

2) $\partial f^{-1}(y_i)/\partial y_i>0$ при $y_i \geqslant 0$.

С учетом замены переменных (1.52) уравнение (1.51) принимает вид

$$dy_i/dt=\Psi_i(y_i)\,(\varepsilon_i-\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}y_j),\ i=1,\ 2,\ \dots,\ n, \tag{1.53}$$

где

$$\Psi_i(y_i)=\left(\frac{\partial f^{-1}(y_i)}{\partial y_i}\right)^{-1} g_i(f_i^{-1}(y_i)).$$

Очевидно,

1) $\Psi_i(0)=0$;

2) $\Psi_i(y_i)>0$ при $y_i>0$.

Пусть $\mathbf{y}^*$ — положительное состояние равновесия системы (1.53). Тогда перепишем (1.53) в виде

$$dy_i/dt=\Psi_i(y_i)\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}(y_j^*-y_j) \tag{1.54}$$

и рассмотрим задачу управления системой (1.54). Для этого добавим в правую часть управление, т. е. рассмотрим систему

$$dy_i/dt=\Psi_i(y_i)\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}(y_j^*-y_j)+u_i, \tag{1.55}$$

где $\mathbf{u}=(u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_n)$ — вектор управляющих воздействий, выбираемый из множества допустимых управлений U.

Покажем, что функция

$$V(y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\int_{y_i^*}^{y_i}\frac{x-y_i^*}{\Psi_i(x)}dx$$

является функцией Ляпунова для системы (1.54). Действительно, поскольку

$$\frac{\partial V}{\partial y_i}=\alpha_i\,\frac{y_i-y_i^*}{\Psi_i(y_i)},\ i=1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

то функция V имеет единственный экстремум, который достигается в точке $\mathbf{y}=\mathbf{y}^*$, при этом $V(\mathbf{y}^*)=0$. Гессиан функции V в точке y^* имеет вид

$$H(V)=\left\|\frac{\partial^2 V}{\partial N_i \partial N_j}\right\|=\operatorname{diag}\left\{\frac{\alpha_i}{\Psi_i(y_i^*)}\right\}$$

и, так как $\Psi_i(y_i^*)>0$, является положительно определенной матрицей. Таким образом, в точке $\mathbf{y}=\mathbf{y}^*$ достигается глобальный минимум функции $V(\mathbf{y})>0$, а $V'(\mathbf{y})<0$ при $\mathbf{y}>0$, $\mathbf{y}\neq\mathbf{y}^*$.

Пусть требуется перевести систему (1.55) из состояния $\mathbf{y}>0$ в устойчивое положение равновесия $\overline{\mathbf{y}}^*>0$. Предположим, что система (1.53) диссипативна и $\alpha_i=1$, $i=1, 2, \ldots, n$, тогда управление $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, где

$$u_i=\Psi_i(y_i)\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}(\overline{y}_j^*-y_j^*), \tag{1.56}$$

решает поставленную задачу.

Действительно, вычислим производную функции

$$V=\sum_{i=1}^{n}\int_{\overline{y}_i^*}^{y_i}\frac{x-\overline{y}_i^*}{\Psi_i(x)}dx \tag{1.57}$$

в силу системы (1.55) с управлением (1.56). Получим

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i-\overline{y}_i^*}{\Psi_i(y_i)}\left(\sum_{j=1}^{n}\Psi_i(y_i)\gamma_{ij}(y_j^*-y_j)+\right.$$

$$\left.+\Psi_i(y_i)\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}(\overline{y}_j^*-y_j^*)\right)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_i-\overline{y}_i^*)\gamma_{ij}(y_j-\overline{y}_j^*)=$$

$$=-(\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}}^*)\Gamma(\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}}^*)<0.$$

Если система (1.53) консервативна, то в системе (1.55) с управлением (1.56) образуются устойчивые периодические колебания. Положение равновесия $\overline{\mathbf{y}}^*$ будет устойчиво, но не асимптотически устойчиво. Выберем управление

$$u_i=\Psi_i(y_i)\left(\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}(\overline{y}_j^*-y_j^*)+\delta_i(\overline{y}_i^*-y_i)\right), \tag{1.58}$$

где $\delta_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Вычислим производную функции (1.57) на траекториях системы (1.55) с управлением вида (1.58):

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i-\overline{y}_i^*}{\Psi_i(y_i)}\left(\sum_{j=1}^{n}\Psi_i(y_i)\gamma_{ij}(y_j^*-y_j)+\right.$$

$$\left.+\Psi_i(y_i)\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}(\overline{y}_j^*-y_j^*)+\Psi_i(y_i)\delta_i(\overline{y}_i^*-y_i)\right)=$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_i-\overline{y}_i^*)\,\gamma_{ij}(y_j-\overline{y}_j^*) - \sum_{i=1}^{n}\delta_i(\overline{y}_i^* - y_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\delta_i(\overline{y}_i^* - y_i) < 0. \tag{1.59}$$

Неравенство выполнено во всех точках $\mathbf{y} \neq \overline{\mathbf{y}}^*$. Таким образом, в случае консервативной системы управление (1.58) решает задачу перевода системы (1.55) из любого положения $\overline{\mathbf{y}} > \mathbf{0}$ в положение равновесия $\overline{\mathbf{y}}^*$, причем вследствие (1.59) это положение устойчиво.

В этой главе мы изложили лишь некоторые вопросы теории вольтерровских систем, уделив особое внимание проблемам управления этими системами.

По нашему убеждению, применение результатов теории оптимального управления в изучении биологических систем поможет экологам глубже понять механизмы воздействия человека на экосистемы, найти пути к оптимальной эксплуатации этих систем. Что касается современного состояния теории вольтерровских систем, то читатель, желающий глубже ознакомиться с этой теорией, сможет сделать это, прочитав, например, книги [4, 42, 45, 46].

Глава 2

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ВОЗДУШНОГО БАССЕЙНА

Исследование проблем атмосферной диффузии имеет длительную историю, однако его результаты применяются к вопросам загрязнения атмосферы сравнительно недавно.

В 20—30-х годах XX столетия выработалось представление о том, что во многих случаях перенос тепла и влаги в приземном слое атмосферы можно приближенно рассматривать как распространение пассивной примеси и исследовать эти процессы на основе одних и тех же дифференциальных уравнений.

Связь между результатами исследований атмосферной диффузии примеси и закономерностями тепло- и влагообмена в приземном слое воздуха непосредственно проявляется и при решении соответствующих задач. Так, получаемые при решении дифференциальных уравнений тепло- и влагообмена функции Грина представляют собой функции распределения примеси, распространяющейся в атмосфере от источника при определенных граничных условиях.

Важное значение имело установление вида уравнений, описывающих атмосферную диффузию. Для описания процесса атмосферной диффузии использовались уравнения параболического вида, являющиеся обобщением известного уравнения Фикка. Одним из первых на возможность использования для этой цели уравнения Фикка указал Л. В. Келлер. Уже в первых работах, посвященных проблемам атмосферной диффузии, наметились два подхода к исследованию распространения примеси в приземном слое атмосферы. Один подход, опирающийся на работу А. Роберса, основан на решении уравнения турбулентной диффузии с постоянными коэффициентами. Другой подход был развит О. Саттоном и заключался в использовании формул для определения концентрации примесей от источника, полученных статистическим путем.

Обзоры исследований, проведенных в этих направлениях, содержатся в книгах А. С. Монина и А. М. Яглома [31], Г. Ченади [50] и др.

В отечественных работах, как правило, рассматриваются уравнения турбулентной диффузии с переменными коэффициентами. Такой путь исследования является универсальным, так как позволяет решать задачи с различными источниками, характеристиками среды, граничными условиями.

Со временем появились новые требования к методам исследования атмосферной диффузии. Возникла необходимость изучения турбулентных потоков на больших высотах, исследования вопросов рассеивания примесей от источников на больших расстояниях, учета большего числа параметров. Этапы эволюции методов исследования отображены, например, в работе М. Е. Берлянда [2]. Исследование атмосферной диффузии применительно к проблемам охраны окружающей среды получило значительное развитие в работах Г. И. Марчука [25, 26].

В настоящей главе будут рассмотрены вопросы оценки загрязнения атмосферы выбросами промышленных предприятий, оптимального размещения новых и определения выбросов действующих предприятий с учетом соблюдения норм загрязнения атмосферы экологически значимых зон, управления интенсивностью выбросов движущегося источника.

§ 1. УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА И ДИФФУЗИИ ПРИМЕСЕЙ В АТМОСФЕРЕ

В соответствии с методикой, разработанной Эйлером, поток воздуха в момент времени t характеризуется полем скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, т. е. значениями составляющих вектора скорости во всевозможных точках $r = (x, y, z)$ прямоугольного декартова пространства. Однако для изучения явления турбулентной диффузии (т. е. распространения примеси в турбулентном потоке) более удобным оказывается лагранжев метод описания движения, который заключается в том, что вместо скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ в точках $\mathbf{r}$ используются траектории движения отдельных достаточно малых элементов объема воздуха. Если элементы объема воздуха различаются по своему химическому составу, т. е. в них присутствуют посторонние вещества, отличные от воздуха, то мы будем говорить, что в потоке имеется некоторая примесь. Если ввести примесь лишь в каких-то точках турбулентного течения, то в результате диффузии примесь достаточно быстро распространится на весь объем, занятый потоком воздуха.

Как правило, примесь входит в поток в виде газообразной добавки или большого числа мелких твердых веществ. При этом она характеризуется эйлеровым полем объемной концентрации $q(t, x, y, z)$. Рассмотрим явление переноса при отсутствии диффузии. В этом случае концентрация примеси в элементе объема воздуха остается постоянной, поэтому вдоль траекторий движения этого элемента объема тождественно выполняется равенство $dq/dt=0$, или

$$\frac{\partial q}{\partial t}+v_1\frac{\partial q}{\partial x}+v_2\frac{\partial q}{\partial y}+v_3\frac{\partial q}{\partial z}=0, \tag{2.1}$$

где v_1, v_2, v_3 — составляющие скорости $\mathbf{v}(x, y, z)$ потока воздуха.

Известно, что для нижнего слоя атмосферы выполняются так называемые уравнения неразрывности [25]

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}=0, \tag{2.2}$$

или $$\operatorname{div}\mathbf{v}=0,\ \mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3).$$

Учитывая равенство (2.2), имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{v}q=v_1\frac{\partial q}{\partial x}+v_2\frac{\partial q}{\partial y}+v_3\frac{\partial q}{\partial z}+q\operatorname{div}\mathbf{v}=$$

$$=v_1\frac{\partial q}{\partial x}+v_2\frac{\partial q}{\partial y}+v_3\frac{\partial q}{\partial z}.$$

Тогда уравнение (2.1) перепишется в виде

$$\partial q/\partial t+\operatorname{div}\mathbf{v}q=0. \tag{2.3}$$

В дальнейшем будем считать, что условие (2.2) всегда выполняется. Кроме того, будем предполагать, что

$$v_3=0 \text{ при } z=0 \text{ и } z=H.$$

Уравнение (2.3) можно обобщить. Так, если в процессе переноса примеси часть ее оседает или перестает существовать, то уравнение (2.1) примет вид

$$dq/dt=-\sigma q,$$

где $\sigma\geqslant 0$ — величина, пропорциональная относительной скорости самопроизвольного уменьшения концентрации примеси. Уравнение (2.3) в этом случае примет вид

$$\partial q/\partial t+\operatorname{div}\mathbf{v}q+\sigma q=0. \tag{2.4}$$

Если в некоторой точке $\mathbf{r}_0=(x_0, y_0, z_0)$ пространства расположен источник примеси, интенсивность и местоположение которого описываются функцией $f(x, y, z, t)$, например $f(x, y, z, t)=$ $=Q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$, где $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ — δ-функция, удовлетворяющая условию

$$\int_G \varphi(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)d\mathbf{r}=\begin{cases}\varphi(\mathbf{r}_0), & \mathbf{r}_0\in G,\\ 0, & \mathbf{r}_0\overline{\in} G,\end{cases}$$

то перенос примеси в отсутствие диффузии описывается уравнением

$$dq/dt=f. \tag{2.5}$$

С учетом (2.4) и (2.5) уравнение переноса при наличии источника примеси имеет вид

$$dq/dt+\operatorname{div}\mathbf{v}q+\sigma q=f. \tag{2.6}$$

Пусть уравнение (2.6) задано в области G трехмерного декартова пространства с боковой цилиндрической поверхностью S и основаниями $z=0$ и $z=H$.

Добавим к уравнению (2.6) начальные и граничные условия

$$q=q_0 \text{ при } t=t_0, \tag{2.7}$$

$$q=q_s \text{ на } S \text{ при } v_n<0, \tag{2.8}$$

где q_0 и q_s — заданные функции; v_n — проекция вектора $\mathbf{v}$ на внешнюю нормаль к боковой поверхности S.

Умножим уравнение (2.6) на q и проинтегрируем по интервалу времени $0\leqslant t\leqslant T$ и области G. Получим

$$\int_0^T\int_G \frac{q^2}{2}\,dGdt+\int_0^T\int_G \operatorname{div}\frac{\mathbf{v}q^2}{2}\,dGdt+$$

$$+\sigma\int_0^T\int_G q^2dGdt=\int_0^T\int_G fqdGdt.$$

Используя формулу Остроградского — Гаусса

$$\int_G \operatorname{div}\frac{\mathbf{v}q^2}{2}\,dG=\int_S v_n\frac{q^2}{2}\,dS,$$

получаем

$$\int_G \frac{q_T^2}{2}\,dG+\int_0^T dt\int_S \frac{v_n^+\,q_S^2}{2}\,dS+\sigma\int_0^T dt\int_G q^2dG=$$

$$=\int_G \frac{q_0^2}{2}\,dG-\int_0^T dt\int_S \frac{v_n^-\,q_S^2}{2}\,dS+\int_0^T dt\int_G fqdG, \tag{2.9}$$

где
$$v_n^+=\begin{cases} v_n, & v_n>0,\\ 0, & v_n<0,\end{cases}\qquad v_n^-=v_n-v_n^+.$$

Рассмотрим вопрос о единственности задачи (2.6)—(2,8). Предположим, что уравнению (2.6) с граничными условиями (2.7), (2.8) соответствуют два решения q_1 и q_2, не совпадающие на некотором множестве ненулевой меры. Положим $\omega=q_1-q_2$ и рассмотрим задачу

$$d\omega/dt+\operatorname{div}\mathbf{v}\omega+\sigma\omega=0;$$

$$\omega=0 \text{ при } t=0;\ \omega=0 \text{ на } S, \text{ если } v_n<0.$$

Для функции ω тождество (2.9) примет вид

$$\int_G \frac{\omega_T^2}{2}\,dG+\int_0^T dt\int_S \frac{v_n^+\,\omega^2}{2}\,dS+\sigma\int_0^T dt\int_G \omega^2dG=0. \tag{2.10}$$

Выражение (2.10) будет тождеством только тогда, когда $\omega=0$, т. е. $q_1=q_2$. Таким образом, единственность решения доказана.

Здесь мы привели лишь схему доказательства единственности решения задачи (2.6)—(2.8). В дальнейшем, не углубляясь в тонкости теории, будем предполагать, что все условия, обеспечивающие единственность решения задачи, выполнены.

Рассмотренная модель распространения примеси достаточно хорошо отражает сущность процесса, хотя в определенной степени идеализирует реальную физическую картину, которая гораздо сложнее. Известно, что примесь расплывается в воздухе, образуя довольно сложное распределение концентраций на достаточно большом расстоянии от источника. Это объясняется тем, что атмосфера является турбулентной средой, в которой стихийно образуются вихри (мелкомасштабные флуктуации). Физика флуктуационных эффектов изучена достаточно хорошо. Простейшая теория, позволяющая получать уравнения для средних значений концентраций, предполагает представление функции q в виде суммы осредненной $\overline{q}$ и флуктуационной q' компонент, т. е. $q=\overline{q}+q'$, при этом q' достаточно быстро меняется во времени и является малой величиной по сравнению с $\overline{q}$. Как показано в [26], уравнение для средних значений концентрации примеси имеет вид

$$\frac{\partial q}{dt}+\operatorname{div}\mathbf{v}q+\sigma q=\frac{\partial}{\partial z}\,\nu\,\frac{\partial q}{\partial z}+\mu\Delta q+f, \tag{2.11}$$

где Δ — оператор Лапласа; $\nu \geqslant 0$ и $\mu \geqslant 0$ — соответственно горизонтальный и вертикальный коэффициенты диффузии, вычисляемые экспериментально, с начальными и граничными условиями

$$q=q_S \text{ на } S,\ v_n<0; \tag{2.12}$$

$$\partial q/\partial z=\alpha q \text{ при } z=0;\ \partial q/\partial z=0 \text{ при } z=z_H. \tag{2.13}$$

Задача (2.11), (2.12) также имеет единственное решение.

Методы исследования процесса распространения примеси удобно сначала рассматривать на простейших примерах [25]. Рассмотрим чисто диффузионную постановку задачи, в которой $\mathbf{v}\equiv 0$,

$$\sigma q=\mu d^2q/dx^2+Q\delta(x-x_0) \tag{2.14}$$

в бесконечной среде $-\infty<x<\infty$, где Q — мощность источника выбросов примеси, расположенного в точке $x=x_0$. В качестве граничных условий будем использовать условие ограниченности решения во всей области, в качестве функции источника f — функцию $f=Q\delta(x-x_0)$, где $Q\geqslant 0$ — постоянная величина. В случае наличия n источников, расположенных в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$, функция f имеет следующий вид:

$$f=\sum_{i=1}^{n} Q_i(t)\delta(x-x_i),$$

где $Q_i\geqslant 0$ — мощность i-го источника. В том случае, если интенсивность выброса есть функция времени, f примет вид

$$f=\sum_{i=1}^{n} Q_i(t)\delta(x-x_i).$$

Для задачи с движущимся источником следует использовать функцию

$$f=\sum_{i=1}^{n} Q_i(t)\delta(x-x_i(t)).$$

Обратимся к исследованию задачи (2.14). Приведем ее к эквивалентной форме, не содержащей δ-функции. Для этого проинтегрируем уравнение в ε-окрестности точки x_0

$$\sigma\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} q dx=\mu \left.\frac{dq}{dx}\right|_{x_0+\varepsilon}-\mu\left.\frac{dq}{dx}\right|_{x_0-\varepsilon},$$

воспользовавшись свойством δ-функции

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\delta(x-x_0)dx=1.$$

Устремив ε к нулю, получим

$$\mu \left.\frac{dq}{dx}\right|_{x_0+\varepsilon}-\mu\left.\frac{dq}{dx}\right|_{x_0-\varepsilon}+Q=0. \qquad (2.15)$$

Рассмотрим две области $-\infty<x\leqslant x_0$, $x_0\leqslant x\leqslant\infty$ и соответствующие им решения обозначим q_- и q_+, т. е. будем рассматривать две задачи:

$$\mu d^2q_+/dx^2-\sigma q_+=0,\ q_+=0 \text{ при } x\to\infty; \qquad (2.16)$$

$$\mu d^2q_-/dx^2-\sigma q_-=0,\ q_-=0 \text{ при } x\to-\infty. \qquad (2.17)$$

При $x=x_0$ решения задач (2.16), (2.17) связаны соотношением (2.15). Предполагая решение задачи непрерывным во всех точках, включая $x=x_0$, получим

$$q_+=q_- \text{ при } x=x_0. \qquad (2.18)$$

Решения задач (2.16), (2.17) имеют вид

$$q_+=C_+\exp[-\sqrt{\sigma/\mu}(x-x_0)],$$

$$q_-=C_-\exp[-\sqrt{\sigma/\mu}(x_0-x)].$$

Подставляя эти решения в (2.15) и (2.18), получим $C_+=C_-=Q/(2\sqrt{\mu\sigma})$. Окончательное решение задачи (2.14) запишем в виде

$$q(x)=\frac{Q}{2\sqrt{\tau\mu}}\begin{cases}\exp\left[-\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}(x-x_0)\right], & x\geqslant x_0,\\ \exp\left[-\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}(x_0-x)\right], & x<x_0.\end{cases}$$

Отсюда видно, что в результате диффузии получается решение,

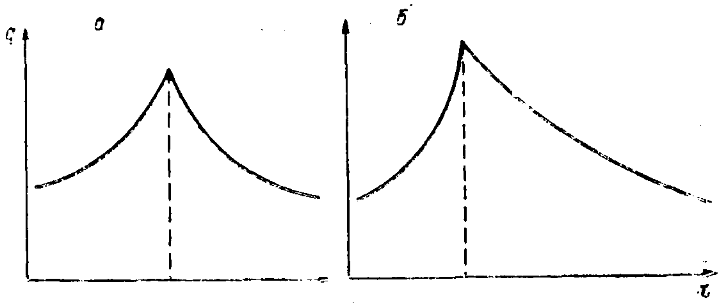

Рис. 5.

экспоненциально и симметрично убывающее в оба направления от точки $x=x_0$. График функции $q(x)$ изображен на рис. 5, *а*.

Рассмотрим теперь более сложную ситуацию, когда скорость потока воздуха v отлична от нуля, т. е. распространение примеси описывается уравнением

$$v\frac{dq}{dx}+\sigma q=\mu\frac{d^2q}{dx^2}+Q\delta(x-x_0),$$

$v>0$, $-\infty<x<+\infty$. Аналогично предыдущему случаю получим две задачи:

$$\mu\frac{d^2q_+}{dx^2}-v\frac{dq_+}{dx}-\sigma q_+=0,\ q_+=0 \text{ при } x\to+\infty; \tag{2.19}$$

$$\mu\frac{d^2q_-}{dx^2}-v\frac{dq_-}{dx}-\sigma q_-=0,\ q_-=0 \text{ при } x\to-\infty. \tag{2.20}$$

Решения задач (2.19) и (2.20) можно представить в виде

$$q_+=C_+\exp\left[-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}+\frac{v^2}{4\mu^2}}-\frac{v}{2\mu}\right)(x-x_0)\right],\ x\geqslant x_0, \tag{2.21}$$

$$q_-=C_-\exp\left[-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}+\frac{v^2}{4\mu^2}}-\frac{v}{2\mu}\right)(x_0-x)\right],\ x\leqslant x_0. \tag{2.22}$$

Подставляя (2.21) и (2.22) в (2.15) и (2.18), получим $C_+=C_-=$ $=C=Q/\sqrt{4\sigma\mu+v^2}$. В итоге решение задачи будет иметь вид

$$q(x)=\frac{Q}{\sqrt{4\sigma\mu+v^2}}\begin{cases}\exp\left[-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}+\frac{v^2}{4\mu^2}}\right)(x-x_0)\right], & x\geqslant x_0,\\ \exp\left[-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}+\frac{v^2}{4\mu^2}}\right)(x_0-x)\right], & x\leqslant x_0.\end{cases}$$

График функции $q(x)$ изображен на рис. 5, *б*.

§ 2. СОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА ДИФФУЗИИ

В предыдущем параграфе мы рассмотрели уравнения переноса примесей в атмосфере, позволяющие получать распределение усредненных значений концентрации примесей в заданной области. Вместе с тем во многих практических задачах возникает необходимость рассмотрения сопряженных уравнений диффузии, например в задаче размещения предприятий с учетом соблюдения допустимого уровня загрязнения [26].

Пусть L — некоторый линейный оператор в гильбертовом пространстве функций, удовлетворяющих необходимым условиям гладкости. Скалярное произведение двух функций из рассматриваемого пространства определим следующим образом:

$$(g, h)=\int_0^T dt \int_G hg dG,$$

где $[0, T]$ — интервал изменения переменной; G — область значений пространственных переменных.

Рассмотрим уравнение

$$Lg=f, \tag{2.23}$$

где g и f — заданные элементы гильбертова пространства. Оператору L поставим в соответствие сопряженный оператор L^*, определяемый из условия

$$(g, Lh)=(h, L^*g). \tag{2.24}$$

Если положить в этом уравнении $h=q$, $g=q^*$, то получим

$$(q^*, Lq)=(q, L^*q^*),$$

или, учитывая (2.23),

$$(q^*, f)=(q, L^*q^*).$$

Предположим, что справедливо следующее равенство:

$$L^*q^*=p, \tag{2.25}$$

где p — пока неопределенная функция. Тогда условие (2.24) примет вид

$$(q^*, f)=(q, p). \tag{2.26}$$

Задача (2.25) называется сопряженной к задаче (2.23), а условие (2.26) — условием двойственности рассматриваемых задач.

Перейдем теперь к построению сопряженных уравнений для нашей задачи. Рассмотрим уравнение турбулентной диффузии

$$\frac{\partial q}{\partial t}+v_1\frac{\partial q}{\partial x}+v_2\frac{\partial q}{\partial y}+v_3\frac{\partial q}{\partial z}+\sigma q=$$
$$=\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial q}{\partial z}+\mu\Delta q+f \tag{2.27}$$

с начальными и граничными условиями

$$q=q_0 \text{ при } t=t_0,\ q=0 \text{ на } S,$$
$$\frac{\partial q}{\partial z}=\alpha q \text{ при } z=0,\ \frac{\partial q}{\partial z}=0 \text{ при } z=H, \tag{2.28}$$
$$q(0, x, y, z)=q(T, x, y, z).$$

Будем предполагать, что $v_3=0$ при $z=0$, $z=H$.

Рассмотрим гильбертово пространство Ψ периодических на отрезке $[0, T]$ функций, удовлетворяющих необходимым условиям, обеспечивающим существование и единственность решения уравнения (2.27), а также начальным и граничным условиям (2.28).

Скалярное произведение в пространстве Ψ определим в виде

$$(g, h)=\int_0^T dt\int_G ghdG.$$

Уравнение (2.27) для функций пространства Ψ запишем в виде

$$Lq=f,$$

где $L=\frac{\partial}{\partial z}+v_1\frac{\partial}{\partial x}+v_2\frac{\partial}{\partial y}+v_3\frac{\partial}{\partial z}+\sigma-\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial}{\partial z}-\mu\Delta.$

Перепишем левую часть тождества (2.24) для функций пространства Ψ:

$$(g, Lh)=\int_0^T dt\int_G\left(\frac{\partial h}{\partial t}+v_1\frac{\partial h}{\partial x}+v_2\frac{\partial h}{\partial y}+v_3\frac{\partial h}{\partial z}+\right.$$
$$\left.+\sigma h-\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial h}{\partial z}\right)dG. \tag{2.29}$$

Интегрируя по частям и используя формулы Остроградского — Гаусса, получаем следующие равенства:

$$\int_0^T dt\int_G g\frac{\partial h}{\partial t}dG=\int_G g_Th_TdG-\int_G g_0h_0dG-\int_0^T dt\int_G h\frac{\partial g}{\partial t}dG,$$

$$\int_0^T dt\int_G g\left(v_1\frac{\partial h}{\partial x}+v_2\frac{\partial h}{\partial y}+v_3\frac{\partial h}{\partial z}\right)dG=\int_0^T dt\int_S v_nghdS-$$
$$-\int_0^T dt\int_G h\left(v_1\frac{\partial g}{\partial x}+v_2\frac{\partial g}{\partial y}+v_3\frac{\partial g}{\partial z}\right)dG,$$

$$\int_0^T dt\int_G g\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial h}{\partial z}dG=\int_0^T dt\int_{S_H}\nu\left(g\frac{\partial h}{\partial z}-h\frac{\partial g}{\partial z}\right)dS-$$
$$-\int_0^T dt\int_{S_0}\nu\left(g\frac{\partial h}{\partial z}-h\frac{\partial g}{\partial z}\right)dS+\int_0^T dt\int_G h\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial g}{\partial z}dG,$$

$$\mu\int_0^T dt\int_G g\Delta hdG=\mu\int_0^T dt\int_S\left(g\frac{\partial g}{\partial n}-h\frac{\partial g}{\partial n}\right)dS+$$
$$+\mu\int_0^T dt\int_G h\Delta gdG,$$

где v_n — проекция вектора скорости на внешнюю нормаль к боковой поверхности; S_H и S_0 — соответствующие кривые пересечения боковой поверхности цилиндра с верхней $z=H$ и нижней $z=0$ гранями.

Далее, учитывая периодичность функций g и h и граничные условия задачи, преобразуем (2.29) к виду

$$(g, Lh)=\int_0^T dt\int_G h\Big(-\frac{\partial g}{\partial t}-v_1\frac{\partial g}{\partial x}-v_3\frac{\partial g}{\partial y}-v_3\frac{\partial g}{\partial z}+\sigma g-$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial g}{\partial z}-\mu\Delta g\Big)dG.$$

Если обозначить

$$-\frac{\partial}{\partial t}-v_1\frac{\partial}{\partial x}-v_2\frac{\partial}{\partial y}-v_3\frac{\partial}{\partial z}+\sigma-\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial}{\partial z}+\mu\Delta=L^*,$$

то придем к тождеству $(g, Lh)=(h, L^*g)$.

Определим сопряженную задачу следующим образом:

$$-\frac{\partial g^*}{\partial t}-v_1\frac{\partial g^*}{\partial x}-v_2\frac{\partial g^*}{\partial y}-v_3\frac{\partial g^*}{\partial z}-\sigma q^*-$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial g^*}{\partial z}-\mu\Delta g^*=p,$$

$$q^*=q_0^* \text{ при } t=0,\ q^*=0 \text{ на } S;$$

$$\partial q^*/\partial z=\alpha q^* \text{ при } z=0,\ \partial q^*/\partial z=0 \text{ при } z=\mathrm{H};$$

$$q^*(0, x, y, z)=q^*(T, x\ y, z).$$

Здесь функция p выбирается по виду функционала исходной задачи. Например, пусть в качестве функционала выбрано осредненное по некоторой области $G_0\subset G$ и интервалу времени $[0, T]$ значение концентрации q вредной примеси

$$J=\int_0^T dt\int_{G_0} q dG.$$

Тогда, учитывая условие двойственности $(g, f)=(h, p)$ и выбирая функцию p в виде

$$p=\begin{cases} 1, & (x, y, z)\in G_0, \\ 0, & (x, y, z)\overline{\in} G_0, \end{cases}$$

будем иметь $J=(q, p)$, или по двойственной формуле

$$J=(q^*, f). \tag{2.30}$$

Таким образом, для вычисления функционала J можно воспользоваться двумя путями. Первый состоит в решении прямой задачи и вычислении с помощью подходящего выбора функции p значения функционала. Второй путь заключается в использовании решения сопряженной задачи при известной функции источников f. Вопрос о том, какой путь избрать, зависит от конкретных условий задачи и целей оптимизации. Например, если рассматривается задача оптимизации значения функционала J с помощью выбора функции f или ее параметров, описывающих местонахождение источников и их интенсивность, то для ее решения целесообразно воспользоваться сопряженным уравнением и представлением функционала J в виде (2.30).

Пример 1 [26]. Пусть процесс распространения примеси описывается простейшим уравнением диффузии

$$dq/dt+\sigma q-\mu\, d^2q/dx^2=Q\delta(x-x_0); \tag{2.31}$$

$q=0$ при $t=0$.

Требуется определить область $\omega\subset G=(-\infty;\ +\infty)$, где может быть расположен источник выбросов интенсивностью Q, чтобы уровень загрязнения в заданной точке области $G: x=\xi$ в момент времени $t=\tau_1$ не превышал заданной константы c, т. е. $J=q(\xi,\ \tau_1)\leqslant c$. Функционал J представим в виде $J=\int\limits_0^T dt\int\limits_G pqdG$, где $p=\delta(x-\xi)\delta(t-\tau_1)$.

Двойственное представление функционала дает

$$J=\int\limits_0^T dt\int\limits_G fq^*dG=Q\int\limits_0^T q^*(x_0,\ t)dt. \tag{2.32}$$

Здесь q^* — решение сопряженного уравнения

$$-\frac{\partial q^*}{\partial t}+\sigma q^*-\mu\frac{\partial^2 q^*}{\partial x^2}=\delta(x-\xi)\delta(t-\tau_1);$$

$q^*=0$ при $t=T$. Сделаем в (2.32) замену переменной $\tilde{t}=T-t$, $\tilde{t}\in[0,\ T]$. При этом оператор полученной задачи будет совпадать с оператором задачи (2.31)

$$\frac{\partial q^*}{\partial \tilde{t}}+\sigma q^*-\mu\frac{\partial^2 q^*}{\partial x^2}=\delta(x-\xi)\delta(T-\tilde{t}-\tau_1). \tag{2.33}$$

Известно, что решение задачи (2.33) можно получить в виде

$$q^*(\tilde{t},\ x)=\int\limits_0^{\tilde{t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{q}(x-\eta,\ \tilde{t}-\tau)\delta(\eta-\xi)\delta(T-\tau-\tau_1)d\eta d\tau, \tag{2.34}$$

где $\tilde{q}$ — фундаментальное решение задачи (2.33)

$$\tilde{q}(t,\ x)=\frac{\theta(t)}{2\sqrt{\mu\pi t}}\exp\left[-\left(\sigma t+\frac{x^2}{4\mu t}\right)\right], \tag{2.35}$$

$$\theta(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

Подставляя (2.35) в (2.34) и возвращаясь к переменной t, получаем

$$q^*(t,\ x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\mu\pi(\tau_1-t)}}\exp\left[-\sigma(\tau_1-t)-\dfrac{(x-\xi)^2}{4\mu(\tau_1-t)}\right] \text{при } t\in[0,\ \tau_1),\\ 0 \text{ при } t\in[\tau_1,\ T].\end{cases}$$

Отсюда

$$J(x_0)=\frac{Q}{2\sqrt{\mu\pi}}\int_0^{\tau_1}\frac{1}{\sqrt{\tau_1-t}}\exp\left[-\sigma(\tau_1-t)-\frac{(x-\xi)^2}{4\mu(\tau_1-t)}\right]dt. \qquad (2.36)$$

Область, в которой может быть размещен источник мощностью Q, определим из условия $J(x)\leqslant c$. Из рис. 6. видно, что $\omega=\{x:x\leqslant x_1 \vee x\geqslant x_2\}$. После того, как выбрано $x_0\in\omega$, распространение примеси описывается решением задачи (2.31), которое с учетом (2.35) примет вид

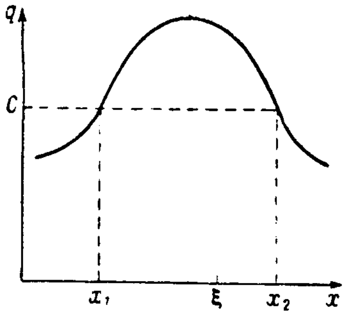

Рис. 6.

$$q(t,\ x)=\frac{Q}{2\sqrt{\mu T}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\times$$

$$\times\quad\exp\left\{-\left[\sigma(t-\tau)+\frac{(x-x_0)^2}{4\mu(t-\tau)}\right]\right\}d\tau.$$

Пример 2 [26]. Пусть процесс переноса примеси описывается уравнением

$$\frac{\partial q}{\partial t}+v\frac{\partial q}{\partial x}+\sigma q-\mu\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}=Q\delta(x-x_0);$$

$$q=0 \text{ при } t=0,\ q\to 0 \text{ при } t\to\pm\infty.$$

Необходимо разместить источник вредной примеси в такой точке x_0, для которой выполняются условия

$$|x_0-\xi_1|=\min_{x\in G}|x-\xi_1|,\ q(\tau_1,\ \xi_1)\leqslant c,$$

т. е. в момент τ_1 в точке ξ_1 уровень загрязнения не должен превосходить постоянной величины $c>0$ и при этом точка x_0 будет наиболее близка к точке ξ_1.

Функционалом прямой задачи будет функционал

$$J=\int_0^T dt\int_{-\infty}^{+\infty}pq\,dx=q(\tau_1,\ \xi_1),$$

т. е. $p=\delta(x-\xi_1)\delta(t-\tau_1)$. Сопряженной задачей в этом случае будет следующая:

$$-\frac{\partial q^*}{\partial t}-v\frac{\partial q^*}{\partial t}+\sigma q^*-\mu\frac{\partial^2 q^*}{\partial x^2}=p; \qquad (2.37)$$

$$q^*=0 \text{ при } t=T,\ q^*\to 0 \text{ при } x\to\pm\infty.$$

Исходя из условия двойственности, получим двойственное представление функционала

$$J=\int_0^T dt\int_{-\infty}^{+\infty}fq^*dx=Q\int_0^T q^*(t,\ x_0)\,dt. \qquad (2.38)$$

4—2169

Фундаментальное решение оператора задачи (2.37) можно найти с помощью преобразования Фурье

$$F[q]=\int_{-\infty}^{+\infty} q(t,\ x)e^{i\xi x}\,dx.$$

Применим преобразование Фурье к уравнению

$$\frac{\partial q}{\partial t}-v\,\frac{\partial q}{\partial x}+\sigma q-\mu\,\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}=\delta(t)\delta(x).$$

Получим уравнение

$$\partial/\partial t\,F[q]-(iv\xi+\sigma+\mu\xi^2)F[q]=\delta(t),$$

решением которого является функция

$$F[q](t,\ \xi)=\theta(t)\ \exp\{-(iv\xi+\sigma+\mu\xi^2)t\}.$$

Использование обратного преобразования Фурье приводит нас к фундаментальному решению

$$q(t,\ x)=\frac{\theta(t)}{2\sqrt{\mu\pi t}}\exp\left\{-\left[\sigma t+\frac{(x+vt)^2}{4\mu t}\right]\right\}.$$

Сделав замену переменных $t=T-t-\tau_1$ и $x=x-\xi_1$ и учитывая (2.34), придем к решению сопряженной задачи (2.37)

$$q^*(t,\ x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\mu\pi(\tau_1-t)}}\exp\left\{-\left[\sigma(\tau_1-t)+\dfrac{(x-\xi+v(\tau_1-t))^2}{4\mu(\tau_1-t)}\right]\right\}, \\ t\in[0,\ \tau_1], \\ 0,\ t\in[\tau_1,\ T].\end{cases} \tag{2.39}$$

Функционал (2.38) примет вид

$$J=\frac{Q}{2\sqrt{\mu\pi}}\int_0^{\tau_1}\frac{1}{\sqrt{\tau_1-\tau}}\exp\left\{-\left[\sigma(\tau_1-\tau)+\frac{(x_0-\xi_1+v(\tau_1-\tau))^2}{4\mu(\tau_1-\tau)}\right]\right\}d\tau.$$

В качестве еще одного случая использования сопряженных уравнений рассмотрим задачу распространения примеси от движущегося источника на плоскости.

П р и м е р 3. Пусть распространение примеси описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}+v_1\,\frac{\partial q}{\partial x}+v_2\,\frac{\partial q}{\partial y}+\sigma q-\mu\Delta q=\sum_{i=1}^{n} Q_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\delta(t-\tau_i);$$

$$q\to 0 \text{ при } |\mathbf{r}|\to\infty;\ q(T,\ x,\ y)=q(0,\ x,\ y)=0.$$

Здесь областью G является вся плоскость; $\mathbf{r}=(x,\ y)$; Q_i — мощность выброса источника в момент τ_i, находящегося в точке $\mathbf{r}_i=(x_i,\ y_i)$, $0\leqslant\tau_i<T$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

В качестве функционала рассмотрим уровень загрязнения в точке $\mathbf{r}_T$ в момент T.

Сопряженная задача для (2.39) будет иметь вид

$$-\frac{\partial q^*}{\partial t}-v_1\,\frac{\partial q^*}{\partial x}-v_2\,\frac{\partial q^*}{\partial y}+\sigma q^*-\mu\Delta q^*=$$

$$=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_T)\delta(t-T);$$
$$q^*\to 0 \text{ при } |\mathbf{r}|\to\infty;\ q^*(0, x, y)=q^*(T, x, y)=0.$$

Для получения решений прямой и сопряженной задач представим q и q^* следующим образом:

$$q=\sum_{i=1}^{n} q_i,\quad q^*=\sum_{i=1}^{n}\ q_i^*\ ,$$

где q_i является решением задачи

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}+v_1\frac{\partial q_i}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial q_i}{\partial y}+\sigma q_i-\mu\Delta q_i=Q_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\delta(t-t_i); \tag{2.40}$$
$$q_i=0 \text{ при } t=0;\ q_i\to 0 \text{ при } |\mathbf{r}|\to\infty,$$

а q_i^* — решением сопряженной к (2.40) задачи

$$-\frac{\partial q_i^*}{\partial t}-v_1\frac{\partial q_i^*}{\partial x}-v_2\frac{\partial d_i^*}{\partial y}+\sigma q_i^*\ -\mu\Delta q_i=$$
$$=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_T)\delta(t-T), \tag{2.41}$$
$$q_i^*\ =0 \text{ при } t=T;\ q_i^*\ \to 0 \text{ при } |\mathbf{r}|\to\infty.$$

Пусть функционал прямой задачи (2.40)

$$J_i=q_i(\mathbf{r}_T, T), \tag{2.42}$$

а его двойственное представление имеет вид

$$J_i=Q_i q_i^*\ (\mathbf{r}_i, \tau_i). \tag{2.43}$$

Решения задач (2.40) и (2.41) могут быть получены по аналогии с одномерным случаем предыдущей задачи. Необходимо учесть, что при выводе указанных ниже формул предполагается, что $v_1=\mathrm{const}$ и $v_2=\mathrm{const}$. Получаем следующие формулы для решений прямой и сопряженной задач:

$$q_i=\begin{cases}\dfrac{Q_i}{4\pi\mu(t-\tau_i)}\exp\left\{-\sigma(t-\tau_1)-\dfrac{[x-x_i-v_1(t-\tau_1)]^2}{4\mu(t-\tau_i)}-\right.\\ \left.-\dfrac{[y-y_i-v_2(t-\tau_i)]^2}{4\mu(t-\tau_i)}\right\},\ t\in(\tau_i, T],\\ 0,\ t\in[0, \tau_i],\end{cases}$$

$$q_i^*\ =\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\mu(T-t)}\exp\left\{-\sigma(T-t)-\dfrac{[x-x_T-v_1(T-t)]^2}{4\mu(T-t)}-\right.\\ \left.-\dfrac{[y-y_T+v_2(T-t)]^2}{4\mu(T-t)}\right\},\ t\in[0, T),\\ 0,\ t=T.\end{cases}$$

Учитывая, что $J=\sum\limits_{i=1}^{n} J_i$, получим

$$J=\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{4\pi\mu(T-\tau_i)}\exp\left\{-\left[\sigma(T-\tau_i)+\frac{(x_T-x_i-v_1(T-\tau_i))^2+}{4\mu(T-\tau_i)}\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{+\ (y_T-y_i-v_2(T-\tau_i))^2}{4\mu(T-\tau_i)}\right]\right\}.$$

Это выражение не зависит от того, каким представлением функционалов J_i мы пользуемся — (2.42) или (2.43).

Рассмотренные примеры, несмотря на значительное число упрощающих предположений, достаточно хорошо характеризуют возможности сопряженных уравнений для решения задач размещения источников вредных выбросов, принятия решений об определении предельно допустимых выбросов и др. Эффективное применение сопряженных уравнений в значительной степени зависит от правильной постановки задачи, выбора функционала прямой задачи и его двойственного представления. Именно использование двойственного представления функционала позволяет значительно сократить объем вычислений, поскольку пропадает необходимость многократного решения прямой задачи.

§ 3. ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Эта задача возникает при планировании экономического развития районов, в которых уже сложилась определенная экономическая структура. Эти районы, как правило, густо населены, в них имеются зоны отдыха, другие экологически значимые зоны, что накладывает на размещение предприятий особые ограничения.

Предположим, что нам необходимо определить место для строительства нового предприятия, при этом уровень загрязнения в результате деятельности этого предприятия не должен превысить допустимые санитарные нормы в заданных экологически значимых зонах.

Пусть источник вредной примеси находится в точке $\mathbf{r}_0=(x_0, y_0, z_0)$ и его интенсивность равна Q. Уравнение, описывающее перенос примеси в этом случае, будет иметь вид

$$\frac{\partial q}{\partial t}+v_1\frac{\partial q}{\partial x}+v_2\frac{\partial q}{\partial y}+v_3\frac{\partial q}{\partial z}+\sigma q=$$
$$=\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial q}{\partial z}+\mu\Delta q+Q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \tag{2.44}$$

с начально-граничными условиями

$$q=q_0 \text{ при } t=0; \tag{2.45}$$

$$\partial q/\partial z=\alpha q \text{ при } z=0,$$
$$\partial q/\partial z=0 \text{ при } z=H,\ q=0 \text{ на } S. \tag{2.46}$$

Наложим также на решения необходимые условия гладкости и периодичности

$$q(T, \mathbf{r})=q(0, \mathbf{r}).$$

Требуется определить область $\omega\in G$, в которой может быть размещен источник вредной примеси, и при этом уровень загрязнения в экологически значимых зонах G_k ($k=1, 2, \ldots, m$) не должен превосходить заданной санитарной нормы c.

В качестве функционалов выберем осредненное по времени и зонам G_k значение концентрации

$$J_k=\frac{1}{T}\int_0^T dt \int_{G_k} q dG.$$

Построенные функционалы должны удовлетворять ограничениям

$$J_k \leqslant c, \; k=1, 2, \ldots, m. \qquad (2.47)$$

Эта задача может быть решена с помощью перебора значений $\mathbf{r}_0$ в области G, что является довольно трудоемким процессом. На практике такой перебор можно осуществить целенаправлено с учетом распределения воздушных течений, с использованием статистических методов. И тот и другой путь требует огромного числа вычислений и достаточно труден даже для современных вычислительных машин. В то же время использование сопряженных уравнений значительно уменьшает трудности в нахождении решения, поскольку для каждой из зон G_k требует только однократного решения соответствующей сопряженной задачи. Перейдем к рассмотрению этого алгоритма.

Сначала определим области ω_k, пригодные для размещения источника и учитывающие ограничения (2.47) для соответствующего значения k. Тогда область ω может быть получена пересечением областей ω_k: $\omega=\bigcap_{k=1}^{m}\omega_k$. Для определения каждой из областей построим соответствующую сопряженную задачу и выберем функционалы. Функционал прямой задачи перепишем таким образом:

$$J_k=\int_G \int_0^T dt p_k q dG,$$

где $p_k=\begin{cases} \frac{1}{T}, & \mathbf{r}\in G_k, \\ 0, & \mathbf{r}\overline{\in} G_k, \; k=1, 2, \ldots, m. \end{cases}$

Сопряженной по отношению к задаче (2.44)—(2.46) будет следующая задача:

$$-\frac{\partial q^*}{\partial t}-v_1\frac{\partial q^*}{\partial x}-v_2\frac{\partial q^*}{\partial y}-v_3\frac{\partial q^*}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial q^*}{\partial z}+\mu\Delta q^*+p_k, \qquad (2.48)$$

$$q^*=q^*_T \quad \text{при } t=T, \; q^*(T, \mathbf{r})=q^*(0, \mathbf{r})=0; \qquad (2.49)$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial z}=\alpha q^* \text{ при } z=0, \; \frac{\partial q^*}{\partial z}=0 \text{ при } z=H, \; q^*=0 \text{ на } S. \qquad (2.50)$$

Двойственное представление функционала J_k будет иметь вид

$$J_k=Q\int_0^T q^*_k(t, \mathbf{r}_0)dt,$$

где $q_k^*(t, \mathbf{r})$ — решение задачи (2.48)—(2.50).

Использование двойственного представления функционала позволяет определить область

$$\omega_k = \{\mathbf{r} = (x, y, z) \in G : Q \int_0^T q_k^*(\mathbf{r}, t)\,dt \leqslant c\}$$

для каждого $k = 1, 2, \ldots, m$.

Если пересечение $\omega = \bigcap_{k=1}^{m} \omega_k$ непусто, то источник можно разместить в одной из точек области ω; если же оно пусто, то, по всей вероятности, необходимо снизить интенсивность выброса Q до уровня, обеспечивающего непустоту области ω. Очевидно, что такая возможность всегда существует.

Предположим, что область ω непуста. Рассмотрим следующую проблему минимакса: определить значение $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, h) \in G$ выражения

$$\max_k J_k(\mathbf{r}_0) \to \min_{\mathbf{r}_0 \in G^h},$$

где $C^h = \{\mathbf{r} \in G : \mathbf{r} = (x, y, h)\}$.

Ее смысл состоит в том, что необходимо определить точку $\mathbf{r}_0$, для которой максимальное из значений функционалов J_k было бы минимально. Поскольку область ω непуста, то очевидно, что точка $\mathbf{r}_0$ должна принадлежать этой области. Следовательно, если для решения этой задачи использовать сопряженные уравнения и условие двойственности, то поиски решения возможно ограничить только областью ω, которая, как правило, значительно меньше G^h. Это позволяет существенно сократить объем необходимых вычислений. Кроме того, с помощью последовательного уменьшения константы c можно добиться того, чтобы область G состояла из единственного элемента. Это и будет искомая точка $\mathbf{r}_0$. Последнее обстоятельство позволяет отказаться от перебора значений $\mathbf{r}_0$ внутри области ω и заменить его на перебор константы c.

Приведем строгие выкладки. Предположим, что область ω состоит из единственного элемента $\mathbf{r}_0$, тогда выполняются следующие неравенства $J_k(\mathbf{r}_0) \leqslant c$, $k = 1, 2, \ldots, m$, при этом $\max_k J_k = c$. Для любого $\mathbf{r}'$, отличного от $\mathbf{r}_0$, очевидно, найдется номер l, такой, что $J_l(\mathbf{r}') > c$, а следовательно,

$$\max_k J_k(\mathbf{r}) > c = \max_k J_k(\mathbf{r}_0).$$

Отсюда заключаем, что $c = \min_{\mathbf{r}} \max_k J_k(\mathbf{r})$.

На основании приведенных рассуждений можно также сделать следующий вывод. Размещение предприятия с учетом непревышения допустимого уровня загрязнения в экологически значимых зонах возможно только в том случае, если санитарная норма связана с решением проблемы минимакса следующим образом: $c \geqslant \min\limits_{\mathbf{r} \in G^h} \max\limits_k J_k(\mathbf{r})$.

§ 4. НОРМИРОВАНИЕ ВЫБРОСОВ ДЕЙСТВУЮЩИХ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Предположим, что в районе действуют n предприятий, имеющих источники выбросов вредной примеси. Источники расположены в точках $\mathbf{r}_i \in G$, $i=1, 2, \ldots, n$, и имеют мощности $Q_i \geqslant 0$. Требуется определить такие размеры допустимых выбросов источников, чтобы уровень загрязнения в экологически значимой зоне $G_0 \subset G$ не превышал санитарной нормы c.

Для описания распространения примеси воспользуемся уравнением

$$\frac{\partial q}{\partial t}+v_1\frac{\partial q}{\partial x}+v_2\frac{\partial q}{\partial y}+v_3\frac{\partial q}{\partial z}+\sigma q=\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial q}{\partial z}+$$

$$+\mu\Delta q+\sum_{i=1}^{n} Q_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i). \tag{2.51}$$

Начальные и граничные условия выберем в виде

$$q=q_0 \text{ при } t=0; \tag{2.52}$$

$$q=0 \text{ на } S; \frac{\partial q}{\partial z}=0 \text{ при } z=H, \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial q}{\partial z}=\alpha q \text{ при } z=0,\ q(T, \mathbf{r})=q(0, \mathbf{r}).$$

В качестве функционала используем выражение

$$J=\int_0^T dt\int_{G_0} pq\,dG, \tag{2.54}$$

где

$$p=\begin{cases} 1/T, & \mathbf{r}\in G_0, \\ 0, & \mathbf{r}\,\overline{\in}\, G_0. \end{cases}$$

Будем решать задачу с использованием сопряженного уравнения и двойственного представления функционала (2.54).

Сопряженная к (2.51)—(2.53) задача имеет вид

$$-\frac{\partial q^*}{\partial t}-v_1\frac{\partial q^*}{\partial x}-v_2\frac{\partial q^*}{\partial y}-v_3\frac{\partial q^*}{\partial z}+\sigma q^*=$$

$$=\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial q^*}{\partial z}+\mu\Delta q^*+p, \tag{2.55}$$

$$q^*=0 \text{ при } t=T,\ q^*=0 \text{ на } S;$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial z}=\alpha q^* \text{ при } z=0,\ \frac{\partial q^*}{\partial z}=0 \text{ при } z=H,\ q^*(T, \mathbf{r})=q^*(0, \mathbf{r}).$$

В качестве функционала этой задачи используем двойственное представление функционала (2.54)

$$J=\int_0^T dt\int_G q^*\sum_{i=1}^n Q_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)dG=\sum_{i=1}^n Q_i\int_0^T q^*(\mathbf{r}_i,\ t)dt.$$

Обозначим через A_i выражение $A_i=\int_0^T q^*(\mathbf{r}_i,\ t)dt$. Тогда условие $J\leqslant c$ можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^n A_iQ_i\leqslant c. \tag{2.56}$$

Таким образом, множество допустимых выбросов описывается неравенством (2.56).

Значения выбросов $\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots, \overline{Q}_n$ будем называть предельно допустимыми, если $\sum_{i=1}^n A_i\overline{Q}_i=c$. Ясно, что решение такого уравнения не единственно. Поэтому для вычисления предельно допустимых выбросов необходимо использовать дополнительные критерии оптимальности. Например, если в качестве критерия взять суммарные затраты предприятий на поддержание уровня загрязнения, не превышающего санитарную норму c, то задачу определения предельно допустимых выбросов можно сформулировать в виде

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i\overline{Q}_i\to\min,\ \sum_{i=1}^n A_i\overline{Q}_i=c,\ \overline{Q}_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где λ_i — расходы предприятия i на снижение своего выброса на единицу.

При нахождении предельно допустимых выбросов на практике часто приходится руководствоваться несколькими критериями оптимальности, что приводит к необходимости исследовать многоэкстремальные задачи. Причем согласование решений о нормировании предельно допустимых выбросов происходит между рядом заинтересованных сторон, имеющих собственные критерии оптимальности. В связи с этим требуется проведение теоретико-игрового анализа ситуаций (см. главу 3).

Предположим, что в области G выделено несколько экологически значимых зон $G_1, G_2, \ldots, G_m$, при этом санитарные нормы в каждой из них равны соответственно $c_1, c_2 \ldots, c_m$. Тогда вместо функционала (2.54) для задачи (2.51)—(2.53) следует рассмотреть m функционалов

$$J_k=\int_0^T dt\int_{G_k} p_kqdG,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

где

$$p_k=\begin{cases} 1/T, & \mathbf{r}\in G_k,\\ 0, & \mathbf{r}\overline{\in} G_k.\end{cases} \tag{2.57}$$

Для решения рассматриваемой задачи необходимо исследовать m сопряженных задач

$$-\frac{\partial q^*}{\partial t}-v_1\frac{\partial q^*}{\partial x}-v_2\frac{\partial q^*}{\partial y}-v_3\frac{\partial q^*}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial q^*}{\partial z}+\mu\Delta q^*+p_k$$

с функционалами

$$J_k=\int_0^T dt\sum_{i=1}^n Q_i\delta_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)q_k^*\,dG=\sum_{i=1}^n Q_i\int_0^T q_k^*(\mathbf{r}_i,t)dt,$$

где q_k^* — решение задачи (2.55) с соответствующими граничными условиями, $k=1, 2, \dots, m$.

Условие, которому должны удовлетворять функционалы J_k для каждого $k=1, 2, \dots, m$, будут следующими:

$$\sum_{i=1}^n Q_i\int_0^T q_k^*(\mathbf{r}_i,t)dt\leqslant c_k.$$

Обозначим

$$A_{ki}=\int_0^T q_k^*(\mathbf{r}_i,t)dt.$$

Тогда множество допустимых выбросов описывается системой неравенств $\sum_{i=1}^n A_{ki}Q_i\leqslant c_k$, $k=1, 2, \dots, m$.

§ 5. ЗАДАЧА О НОРМИРОВАНИИ ВЫБРОСОВ ДВИЖУЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА

Пусть движение источника в области G описывается функцией $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, при этом в моменты времени t_i $(0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\dots$ $\dots\leqslant t_n<T)$ источник выбрасывает примесь с интенсивностью Q_i, $i=1, 2, \dots, n$. В области G имеется m экологически значимых зон G_k, $k=1, 2, \dots, m$, в которых заданы санитарные нормы c_k. Требуется определить предельно допустимые значения выбросов для каждого из моментов t_i, $i=1, 2, \dots, n$, при которых уровень загрязнения в каждой из зон G_k не превосходит санитарной нормы.

Уравнение распространения примеси от движущегося источника с начально-граничными условиями запишем в виде

$$\frac{\partial q}{\partial t}+v_1\frac{\partial q}{\partial x}+v_2\frac{\partial q}{\partial y}+v_3\frac{\partial q}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial q}{\partial z}+$$
$$+\mu\Delta q+\sum_{i=1}^n Q_i\delta_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\delta(t-t_i), \qquad (2.58)$$

где $\mathbf{r}_i=\mathbf{r}(t_i)$;

$$q=0 \text{ при } t=0,\ q=0 \text{ на } S;$$
$$\frac{\partial q}{\partial z}=\alpha q \text{ при } z=0,\ \frac{\partial q}{\partial z}=0 \text{ при } z=H;$$
$$q(0, r)=q(T, r).$$

Функционал прямой задачи будет следующим:

$$J_k = \int_0^T dt \int_{G_k} p_k q dG,$$

где p_k имеет вид (2.57).

В соответствии с избранной методикой для каждого из функционалов J_k построим сопряженную к (2.58) задачу

$$-\frac{\partial q_k^*}{\partial t} - v_1 \frac{\partial q_k^*}{\partial x} - v_2 \frac{\partial q_k^*}{\partial y} - v_3 \frac{\partial q_k^*}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial q_k^*}{\partial z} + \mu \Delta q_k^* + p_k$$

с начально-граничными условиями

$$q_k^* = 0 \text{ при } t = T; \; q_k^* = 0 \text{ на } S;$$

$$\frac{\partial q_k^*}{\partial z} = \alpha q_k^* \text{ при } z = 0; \frac{\partial q_k^*}{\partial z} = 0 \text{ при } z = H;$$

$$q_k^* (T, \mathbf{r}) = q_k^* (0, \mathbf{r}).$$

Двойственный функционал имеет вид

$$J_k = \int_0^T dt \int_{G_k} \sum_{i=1}^n Q_i q_k^* \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(t - t_i) dG =$$

$$= \sum_{i=1}^n Q_i q_k^* (\mathbf{r}_i, t_i). \tag{2.59}$$

Таким образом, ограничения, которым должны удовлетворять величины Q_i, получим в виде

$$\sum_{i=1}^n Q_i q_k^* (\mathbf{r}_i, t_i) \leqslant c_k, \; k = 1, 2, \ldots, m .$$

На основании приведенной задачи может быть рассмотрена следующая задача управления.

Пусть движение источника описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{r}} = f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t), \; \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \tag{2.60}$$

где $\mathbf{u}$ — управление движением источника. На функцию f и управление $\mathbf{u}$ наложены ограничения, обеспечивающие существование и единственность решения уравнения (2.60).

В качестве критерия оптимальности выберем

$$\max_k J_k \to \min.$$

Тогда оптимальным будет управление, обеспечивающее движение источника, минимизирующее максимальный по всем экологически значимым зонам уровень загрязнения. Учитывая (2.59), критерий оптимальности можно записать в виде

$\max\limits_k \sum\limits_{i=1}^{n} Q_i q_k^* (\mathbf{r}_i, t_i) \to \min$. Таким образом может быть формализована задача расположения новых магистралей автомобильного транспорта в городе или зонах отдыха, лесных массивах и т. п.

В этой главе мы постарались кратко изложить некоторые из проблем, связанных с охраной атмосферы от загрязнения, и познакомить читателя с возможными подходами к их решению. Наибольший интерес, по нашему мнению, представляет изложенный метод определения областей размещения промышленных предприятий с учетом загрязнения в экологически значимых зонах, который предполагает использование сопряженных уравнений диффузии.

Возможности этого метода мы проиллюстрировали на конкретных примерах. Читателю, желающему глубже ознакомиться с разделом математической экологии, касающимся проблем загрязнения окружающей среды, мы рекомендуем обратиться к работам [22, 25, 26].

Глава 3

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ ОХРАНЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Часто в задачах природопользования в условиях ограниченности ресурса возникает проблема его распределения с учетом интересов потребителей. Математическая формализация такой задачи может быть проведена следующим образом [12].

Предположим, что n потребителей имеют возможность расходовать (накапливать) некоторый ресурс, объем которого ограничен величиной $A>0$. Обозначим объем ресурса, который расходует (накапливает) i-й потребитель, через x_i. В зависимости от значений вектора $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ потребители получают выигрыш, который оценивается для i-го потребителя функцией $h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если общий объем израсходованного (накопленного) ресурса не превосходит заданной положительной величины $\Theta<A$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \Theta, \quad x_i \geqslant 0.$$

Если выполняется противоположное неравенство, то выигрыш i-го потребителя вычисляется с помощью функции $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При этом предполагается, что полезность ресурса резко снижается, если $\sum_{i=1}^{n} x_i>\Theta$, т. е. в этом случае

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)<h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Рассмотрим неантагонистическую игру в нормальной форме

$$\Gamma=\langle I, \{X_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I} \rangle,$$

в которой функции выигрыша игроков имеют вид

$$H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\begin{cases} h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), & \sum_{i=1}^{n} x_i\leqslant\Theta, \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), & \sum_{i=1}^{n} x_i>\Theta, \end{cases}$$

$$X_i=[0,\ a_i],\ 0\leqslant a_i\leqslant A,\ \sum_{i=1}^{n} a_i=A,\ I=\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}.$$

Игроками в этой игре являются потребители ресурса. На основании такой формализации можно получать различные способы распределения ресурса, используя известные в теории игр принципы оптимальности типа равновесия по Нэшу, сильного равновесия и т. д. В § 1 и 5 мы покажем возможности такого подхода на примере статической и динамической задач о нормировании выбросов в атмосферу.

На практике резкое снижение полезности ресурса в том случае, если его общий объем, израсходованный (накопленный) потребителями, превысил заданную величину Θ, происходит не всегда. Тем не менее возможно обосновать снижение полезности с точки зрения охраны окружающей среды и ввести штрафы за «перерасход» ресурса. В связи с этим появляется проблема определения размеров штрафов. Часто используемый для этого подход состоит в обосновании размеров штрафов исходя из величины затрат, необходимых на восстановление ресурса. Это во многих случаях приводит к тому, что размеры назначаемых штрафов либо очень велики, что затрудняет их практическое использование, либо так малы, что потребители предпочитают уплатить штраф вместо выполнения нормативных требований по расходованию ресурса.

Целесообразным, по нашему мнению, является использование такого подхода, при котором размер штрафа превышает величину «выигрыша», который получает потребитель, когда допускает «перерасход» ресурса. Этот подход мы проиллюстрируем на примере статической модели нормирования выбросов.

Для решения проблем охраны окружающей среды затрачивается значительный объем средств. Это делает актуальной задачу эффективного их использования. В промышленных районах, как правило, возможно объединение усилий различных ведомств при проведении природоохранных мероприятий, направленных на снижение уровня загрязнения водоемов и атмосферы, утилизацию отходов и т. п. При объединении усилий приходится учитывать интересы ведомств и предприятий района. Анализ такой ситуации возможен на основании теоретико-игрового подхода. Примером этого служит математическая модель объединения усилий при проведении природоохранных мероприятий, рассматриваемая в § 7.

§ 1. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ И НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Раздел математики, посвященный изучению математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликтов, называется теорией игр. Для формализации конфликтной ситуации принятия решений необходимо описать математически все возможные действия участников конфликта (игроков) и результаты этих действий.

Пусть $I=\{1, 2, \dots, n\}$ — множество игроков. Каждый из игроков может совершать различные действия, которые обычно называют стратегиями. Множество X_i всевозможных действий игроков называется множеством стратегий. Вектор $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_i принадлежит множеству X_i стратегий игрока i, называется ситуацией в игре. В каждой ситуации x игрок i получает выигрыш, который обозначим через $H_i(x)$. Отображение $H_i: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \to R^1$ называется функцией выигрыша игрока i.

Определение 1. Бескоалиционной игрой называется система

$$\Gamma = \langle I, \{X_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle,$$

где $I=\{1, 2, \dots, n\}$ — множество игроков; X_i — множество стратегий игрока i; H_i — функция выигрыша игрока i, заданная на множестве $X=X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ ситуаций игры.

Каждый из игроков в игре Γ старается максимизировать свой выигрыш. Поэтому естественно, что любую ситуацию игрок пытается изменить с помощью своей стратегии таким образом, чтобы его выигрыш был максимальным. Обозначим ситуацию x, в которой игрок i изменил свою стратегию x_i на x'_i, через $\mathbf{x}\|x'_i=(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Будем говорить, что ситуация приемлема для игрока i, если $H_i(\mathbf{x}) \geqslant H_i(\mathbf{x}\|x'_i)$ для любой стратегии $x'_i \in X_i$. Если некоторая ситуация является приемлемой для одного игрока, но не является приемлемой для другого, то второй игрок будет стремиться изменить ситуацию. Если же ситуация приемлема для всех игроков, то ни один из них не будет этого делать, т. е. в игре установится равновесие.

Определение 2. Ситуация x называется ситуацией равновесия по Нэшу, если для любого $i \in I$ и любой стратегии $x'_i \in X_i$ выполнено неравенство $H_i(\mathbf{x}) \geqslant H_i(\mathbf{x}\|x'_i)$.

Пример 1 [5]. Каждое из трех предприятий (игроки 1, 2, 3), использующее для технических целей воду из некоторого водоема, располагают двумя стратегиями: 1) использовать очистные сооружения для очистки отработанной воды; 2) сбрасывать ее без очистки. Предполагается, что в случае, когда неочищенную воду сбрасывают не более одного предприятия, вода в водоеме остается пригодной для использования и предприятия убытков не несут. Если же неочищенную воду сбрасывают два и более предприятий, то каждое несет убытки в размере трех единиц. Стоимость эксплуатации очистных сооружений обходится каждому предприятию в одну единицу.

Построим куб ситуаций для описанной игры и укажем выигрыши игроков в этих ситуациях (рис. 7).

Опишем множество приемлемых ситуаций для игроков:

1: (2,1,1), (2,2,2), (1,1,2), (1,2,1);

2: (1,2,1,), (2,2,2), (1,1,2), (2,1,1);

3: (1,1,2), (2,2,2), (2,1,1), (1,2,1).

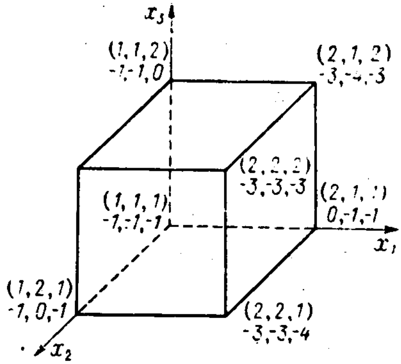

Рис. 7.

Отсюда получаем, что ситуациями равновесия в этой игре являются все приемлемые ситуации. При этом ситуация (2,2,2) наименее выгодна как с точки зрения охраны природы, так и с точки зрения величины выигрыша игроков, поскольку в этой ситуации загрязнение больше, а выигрыши игроков меньше, чем в других приемлемых ситуациях. Использование в качестве принципа оптимальности равновесия по Нэшу имеет несколько недостатков. Во-первых, ситуации равновесия существуют далеко не в каждой игре. Во-вторых, в различных ситуациях равновесия выигрыши игроков различны. И, в-третьих, ситуации равновесия могут оказаться неустойчивыми относительно отклонения группы игроков, которые одновременно изменяют свои стратегии с целью увеличения выигрышей.

Любое подмножество S множества I будем называть коалицией. Обозначим через $\mathrm{x}\|x_S$ ситуацию, в которой все игроки, входящие в S, одновременно изменили свои стратегии x_i на x'_i.

Определение 3. Ситуация x называется сильно равновесной, если не существует такой коалиции $S\subseteq I$ и такой стратегии $x_S\in\prod\limits_{i\in S} X_i$, что $H_i(\mathrm{x}\|x_S)>H_i(\mathrm{x})$ для всех $i\in S$.

В рассмотренном примере сильно равновесными будут три ситуации: (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1). Ситуация (2,2,2) сильно равновесной ситуацией не является.

Множество сильно равновесных ситуаций, очевидно, содержится во множестве ситуаций равновесия.

Пример 2. Каждое из двух предприятий использует ежедневно объем воды, равный соответственно трем и четырем единицам. При этом первое предприятие часть воды общим объемом $x_1\leqslant 3$ сбрасывает в водоем без очистки, второе $x_2\leqslant 4$. Если общий объем сброшенной без очистки воды не превосходит пяти единиц, то убытки первого предприятия составляют $3+x_2-x_1$, а второго — x_1+4-x_2. Если общий объем сброшенной без очистки воды превышает пять единиц, то предприятиям назначается штраф в размере одной единицы. Будем считать, что выигрыши игроков равны величине убытков с обратным знаком. Функции выигрыша запишем в виде

$$H_1(x_1, x_2)=\begin{cases} x_1-3-x_2, & x_1+x_2\leqslant 5, \\ x_1-3-x_2-1, & x_1+x_2>5, \end{cases}$$

$$H_2(x_1, x_2)=\begin{cases} x_2-4-x_1, & x_1+x_2\leqslant 5, \\ x_2-4-x_1-1, & x_1+x_2>5, \end{cases}$$

где $0\leqslant x_1\leqslant 3$, $0\leqslant x_2\leqslant 4$.

Множество приемлемых ситуаций для игрока I следующее:

$$P_1=\{x:x_1=3,\ 0\leqslant x_2\leqslant 2\}\cup\{x:x_1+x_2=5,\ 2\leqslant x_1\leqslant 3\}\cup\{(3,\ 4)\},$$

для игрока II:

$$P_2=\{x:x_2=4,\ 0\leqslant x_1\leqslant 1\}\cup\{x:x_1+x_2=5,\ 0\leqslant x_1\leqslant 2\}\cup\{(3,\ 4)\}.$$

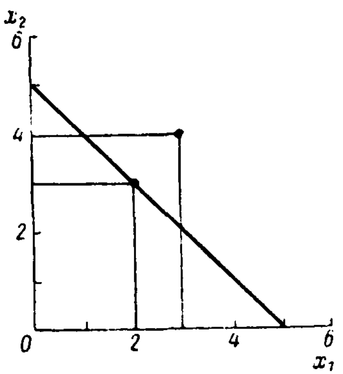

Рис. 8.

Пересечение этих множеств дает нам две точки $x^1=(2,\ 3)$ и $x^2=(3,\ 4)$, которые являются ситуациями равновесия и одновременно сильно равновесными ситуациями. Таким образом, в этом примере множество сильно равновесных ситуаций совпадает с множеством ситуаций равновесия. При этом ситуация x^1 является более предпочтительной с точки зрения предотвращения загрязнения водоема (рис. 8).

Пусть в игре Г участвуют два игрока. Если при этом $H_1(x)=-H_2(x)$, то такая игра называется антагонистической.

Определение 4. Пусть заданы два произвольных множества P, E. Множество P будем называть множеством стратегий первого игрока, а E — множеством стратегий второго. На декартовом произведении $P\times E$ задана вещественная функция K. Тройку $\Gamma=\langle P,\ E,\ K\rangle$ будем называть антагонистической игрой в нормальной форме.

В такой игре игроки одновременно выбирают стратегии $a\in P$, $b\in E$. После этого второй игрок получает выигрыш, равный $K\ (a,\ b)$, а первый игрок — выигрыш, равный — $K\ (a,\ b)$.

Величина

$$\overline{V}=\inf_{a\in P}\sup_{b\in E} K(a,\ b)$$

называется верхним значением, а величина

$$\underline{V}=\sup_{b\in E}\ \inf_{a\in P} K(a,\ b)$$

— нижним значением игры Г. Для них справедливо неравенство $\overline{V} \geqslant \underline{V}$. Действительно, для любых стратегий $a \in P$, $b \in E$ $\sup\limits_{b \in E} K(a, b) \geqslant K(a, b)$. Отсюда заключаем, что

$$\overline{V} = \inf_{a \in P} \sup_{b \in E} K(a, b) \geqslant \inf_{a \in E} K(a, b).$$

Поскольку это неравенство справедливо при всех $b \in E$, то

$$\overline{V} \geqslant \sup_{b \in E} \inf_{a \in P} K(a, b) = \underline{V}.$$

Говорят, что игра имеет значение, если выполняется равенство $\overline{V} = \underline{V}$. Значение игры обычно обозначают символом $V = \mathrm{val}\,\Gamma = \overline{V} = \underline{V}$.

Пример 3. Сельскохозяйственное предприятие может посеять одну из трех культур A_1, A_2, A_3. Урожайность каждой культуры зависит от погодных условий. Необходимо выбрать для посева культуру, которая даст максимальный урожай. Таким образом, с одной стороны, сельскохозяйственное предприятие (игрок II) заинтересовано в том, чтобы выбрать для посева культуру, дающую максимальный урожай, с другой — природа (игрок I) может «препятствовать» этому, если, например, погодные условия будут неблагоприятными для той или иной культуры [8].

Будем считать, что погода может быть засушливой, нормальной и дождливой, т. е. игрок I (природа) имеет только три стратегии. У предприятия также три стратегии: посеять культуру A_1, A_2 или A_3. Зададим урожайность культур в зависимости от погодных условий матрицей $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, 3$, где a_{ij} — урожайность культуры A_j при погодных условиях типа i. Пусть A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 5 & 9 & 6 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Функция выигрыша $K(i, j)$ в данном случае есть $K(i, j) = a_{ij}$.

Вычислим верхнее и нижнее значения игры:

$$\overline{V} = \min_i \max_j K(i, j) = \min_i \max_j a_{ij} = a_{32} = 8,$$

$$\underline{V} = \max_j \min_i K(i, j) = \max_j \min_i a_{ij} = a_{12} = 6.$$

Стратегия $j = 2$ второго игрока обеспечивает ему в любом случае выигрыш не меньше $\underline{V}$ и называется максиминной стратегией. Стратегия $i = 3$ первого игрока обеспечивает ему при любых действиях второго игрока проигрыш не больше $\overline{V}$ и называется минимаксной стратегией.

Таким образом, если сельскохозяйственное предприятие выберет для посева культуру A_2, то при любых погодных условиях урожайность будет не меньше 6 единиц.

В примере 3 $\overline{V} > \underline{V}$, т. е. не существует значения игры, а также ситуации равновесия.

Вернемся теперь к рассмотрению игр с участием n лиц.

Пусть игроки из множества I находятся в таких условиях, что совокупный выигрыш, который в состоянии получить любая из коалиций $S \subseteq I$, может быть произвольным образом распределен между членами коалиции S. В этом случае говорят, что выигрыши трансферабельны. Обозначим через $v(S)$ максимальный выигрыш, который может гарантировать себе коалиция S. Функция $v(S)$, ставящая в соответствие каждой коалиции $S \subseteq I$ максимальный гарантированный ею выигрыш $v(S)$, называется характеристической функцией. Характеристическая функция является основополагающим понятием теории кооперативных игр.

Происхождение характеристической функции может иметь различную природу.

Пример 4. Три предприятия могут строить очистные сооружения как совместно, так и каждое в отдельности. При этом строительство очистных сооружений обойдется предприятию с номером i в сумму $W(\{i\})$, а для другого объединения предприятий S — в сумму $W(S)$. Если считать, что объединение предприятий снижает затраты на строительство, то предприятия получат от объединения выигрыш $v(S) = \sum_{i \in S} W(\{i\}) - W(S)$, $S \subseteq \{1, 2, 3\}$, который может быть распределен между ними. Поскольку функция $v(S)$ представляет собой максимальный гарантированный выигрыш, который получает коалиция S, то ее можно назвать характеристической функцией.

При построении характеристической функции наиболее часто пользуются следующим ее определением.

Определение 5. Характеристической функцией игры n лиц называется вещественная функция v, определенная на подмножествах множества I и ставящая в соответствие любому $S \subseteq I$ значение (для S) антагонистической игры (если оно существует), которую разыграли бы коалиции S и $I \setminus S$, если бы они действительно возникли; при этом под функцией выигрыша коалиции S понимается сумма выигрышей участников коалиции $K_S = \sum_{i \in S} H_i(x)$, а функция выигрыша коалиции $I \setminus S$ полагается равной $-K^S$.

Пустую коалицию, как и всякое пустое множество, будем обозначать символом $\varnothing$. Из приведенного определения следует $v(\varnothing) = 0$.

Если S и R — непересекающиеся коалиции, то, очевидно, объединив свои усилия, они могут получить выигрыш не меньше, чем если бы они действовали отдельно. Следовательно, $v(S) + v(R) \leqslant v(S \cup R)$, если $S \cap R = \varnothing$.

Это свойство характеристической функции называется супераддитивностью. Докажем его.

Обозначим через $\mathbf{x}_S$ вектор стратегий игроков, входящих в коалицию S. Представим $v(S)$ в виде

$$v(S)=\sup_{\mathbf{x}_S\in X_S}\ \inf_{\mathbf{x}_{I\setminus S}\in X_{I\setminus S}}\ \sum_{i\in S} H_i(\mathbf{x}_S),\ \mathbf{x}_{I\setminus S}),$$

где $X_S=\prod_{i\in S} X_i$ — множество стратегий коалиции S; $X_{I\setminus S}=\prod_{i\in I\setminus S} X_i$ — множество стратегий коалиции $I\setminus S$. Имеем

$$v(S\cup R)=\sup_{\mathbf{x}_{S\cup R}\in X_{S\cup R}}\ \inf_{\mathbf{x}_{I\setminus(S\cup R)}\in X_{I\setminus(S\cup R)}}\ \sum_{i\in S\cup R} H_i(\mathbf{x}_{S\cup R},\ x_{I\setminus(S\cup R)}).$$

Если супремум в правой части взять по множеству X_S, а затем по X_R, то он разве лишь уменьшится, т. е.

$$v(S\cup R)\geqslant \sup_{\mathbf{x}_S\in X_S}\ \sup_{\mathbf{x}_R\in X_R}\ \inf_{\mathbf{x}_{I\setminus(S\cup R)}\in X_{I\setminus(S\cup R)}}\ \sum_{i\in S\cup R} H_i(\mathbf{x}_S,\ \mathbf{x}_R,\ \mathbf{x}_{I\setminus(S\cup R)})$$

и тем более

$$v(S\cup R)\geqslant \inf_{\mathbf{x}_{I\setminus(S\cup R)}\in X_{I\setminus(S\cup R)}}\ \sum_{i\in S\cup R} H_i(\mathbf{x}_S,\ \mathbf{x}_R,\ \mathbf{x}_{I\setminus(S\cup R)})\geqslant$$
$$\geqslant \inf_{\mathbf{x}_{I\setminus(S\cup R)}\in X_{I\setminus(S\cup R)}}\ \sum_{i\in S} H_i(\mathbf{x}_S,\ \mathbf{x}_R,\ \mathbf{x}_{I\setminus(S\cup R)})+$$
$$+\inf_{\mathbf{x}_{I\setminus(S\cup R)}\in X_{I\setminus(S\cup R)}}\ \sum_{i\in R} H_i(\mathbf{x}_S,\ \mathbf{x}_R,\ \mathbf{x}_{I\setminus(S\cup R)}).$$

Возьмем inf первого слагаемого по $\mathbf{x}_R\in X_R$, а inf второго — по $\mathbf{x}_S\in X_S$. Тогда

$$v(S\cup R)\geqslant \inf_{\mathbf{x}_R\in X_R}\ \inf_{\mathbf{x}_{I\setminus(S\cup R)}\in X_{I\setminus(S\cup R)}}\ \sum_{i\in S} H_i(\mathbf{x}_S,\ \mathbf{x}_R,\ \mathbf{x}_{I\setminus(S\cup R)})+$$
$$+\inf_{\mathbf{x}_S\in X_S}\ \inf_{\mathbf{x}_{I\setminus(S\cup R)}\in X_{I\setminus(S\cup R)}}\ \sum_{i\in R} H_i(\mathbf{x}_S,\ \mathbf{x}_R,\ \mathbf{x}_{I\setminus(S\cup R)}).$$

Переход в первом слагаемом от inf по множествам X_R и $X_{I\setminus(S\cup R)}$ к inf по множеству $X_{I\setminus S}$ всевозможных пар $(x_R,\ x_{I\setminus(S\cup R)})$ и во втором слагаемом от inf по множествам X_S и $X_{I\setminus(S\cup R)}$ к inf по множеству $X_{I\setminus R}$ всевозможных пар $(x_S,\ x_{I\setminus(S\cup R)})$ может лишь уменьшить правую часть, поэтому

$$v(S\cup R)\geqslant \inf_{\mathbf{x}_{I\setminus S}\in X_{I\setminus S}}\ \sum_{i\in S} H_i(\mathbf{x}_S,\ \mathbf{x}_{I\setminus S})+$$
$$+\inf_{\mathbf{x}_{I\setminus R}\in X_{I\setminus R}}\ \sum_{i\in R} H_i(\mathbf{x}_R,\ \mathbf{x}_{I\setminus R})$$

для всех $\mathbf{x}_S\in X_S$ и $\mathbf{x}_R\in X_R$. Отсюда

$$v(S\cup R)\geqslant \sup_{\mathbf{x}_S\in X_S}\ \inf_{\mathbf{x}_{I\setminus S}\in X_{I\setminus S}}\ \sum_{i\in S} H_i(\mathbf{x}_S,\ \mathbf{x}_{I\setminus S})+$$

$$+\sup_{x_R\in X_R}\ \inf_{x_{I\setminus R}\in X_{I\setminus R}}\ \sum_{i\in R} H_i(x_R, x_{I\setminus R})=v(S)+v(R),$$

что и требовалось доказать.

Определим понятие дележа в кооперативной игре.

Определение 6. Дележом для игры n лиц с характеристической функцией v называется вектор $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, удовлетворяющий условиям: 1) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i=v(I)$; 2) $\alpha_i\geqslant v(\{i\})$ для всех $i\in I$.

Первое условие означает, что весь полученный выигрыш распределяется между игроками. Оно называется условием коллективной рациональности. Второе условие означает, что игрок в результате объединения должен получить выигрыш не меньший, чем он может себе уверенно обеспечить, действуя самостоятельно, и называется условием индивидуальной рациональности.

Пусть α' и α'' — дележи и S — некоторая коалиция.

Определение 7. Дележ α' доминирует дележ α'' по коалиции $S(\alpha'\overset{S}{\succ}\alpha'')$, если: а) $\alpha_i'>\alpha_i''$ для всех $i\in S$; б) $\sum_{i\in S}\alpha'_i\leqslant v(S)$.

Дележ α' доминирует $\alpha''(\alpha'\succ\alpha'')$, если существует такая коалиция $S\subset I$, что $\alpha'\overset{S}{\succ}\alpha''$.

Условие а) в определении доминирования означает, что все члены S предпочитают α', условие б) — что они в состоянии реализовать дележ α'. Отметим, что доминирование по коалиции, состоящей из единственного игрока, а также по множеству всех игроков I невозможно. Как легко видеть, в этих случаях нарушаются первое и второе свойства дележа.

Дележ, который не доминируется никаким другим дележом, можно считать в известном смысле «вполне устойчивым».

Определение 8. Множество всех недоминируемых дележей в кооперативной игре с характеристической функцией v называется C-ядром.

Любой дележ из C-ядра устойчив в том смысле, что ни одна из коалиций не имеет возможности изменить исход игры.

Приведем важное необходимое и достаточное условие принадлежности дележа C-ядру.

Теорема 1. Для того чтобы дележ α принадлежал C-ядру кооперативной игры, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\sum_{i\in S}\alpha_i\geqslant v(S)$ для любой коалиции $S\subset I$ $(S\subseteq I,$ $|S|>1)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть дележ α принадлежит C-ядру. Предположим, что найдется некоторая коалиция $S\subset I$, для которой $\sum_{i\in S}\alpha_i<v(S)$. Функция v супераддитивна, поэтому

$$v(I) \geqslant v(I \setminus S) + v(S) \geqslant \sum_{i \in I \setminus S} v(\{i\}) + v(S).$$

Обозначим $\xi = v(I) - v(S) - \sum_{i \in I \setminus S} v(\{i\}) \geqslant 0$ и составим вектор $\bar{\alpha}$:

$$\bar{\alpha}_i = \begin{cases} \alpha_i + \dfrac{v(S) - \sum\limits_{i \in S} \alpha_i}{|S|} & \text{для всех } i \in S, \\ v(\{i\}) + \dfrac{\xi}{|I \setminus S|} & \text{для всех } i \in I \setminus S. \end{cases}$$

Из положительности ξ имеем $\bar{\alpha}_i \geqslant v(\{i\})$. Непосредственной проверкой получаем, что $\sum_{i \in I} \bar{\alpha}_i = v(I)$. Поэтому вектор $\bar{\alpha}$ является дележом, более того, $\bar{\alpha} \succ_S \alpha$. Последнее противоречит принадлежности дележа α C-ядру. Следовательно, $\sum_{i \in S} \alpha_i \geqslant v(S)$.

Достаточность. Предположим, что условие утверждения выполняется, а α не принадлежит C-ядру. Тогда существуют некоторая коалиция S и дележ $\bar{\alpha}$, такой, что $\sum_{i \in S} \bar{\alpha}_i \leqslant v(S)$, $\alpha_i < \bar{\alpha}_i$, для всех $i \in S$. Отсюда получаем $\sum_{i \in S} \alpha_i < \sum_{i \in S} \bar{\alpha}_i \leqslant v(S)$. Это противоречие доказывает утверждение.

Перейдем к рассмотрению дифференциальных игр.

Предмет исследования дифференциальных игр составляют конфликтные задачи об управлении объектами, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями.

Пусть динамика объекта описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.1}$$

при начальном условии

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{3.2}$$

где $\mathbf{x} \in R^n, u_i \in U_i$, $i \in I$; U_i — компактные множества в евклидовом пространстве R^m.

Обозначим через D_i множество допустимых управлений i-го игрока, состоящее из всех измеримых на отрезке $[t_0, T]$ вектор-функций, удовлетворяющих для всех $t \in [t_0, T]$ ограничениям

$$u_i(t) \in U_i.$$

Будем предполагать, что на правую часть системы (3.1) наложены все условия, гарантирующие существование, единственность и продолжимость решения на отрезок $[t_0, T]$ при любых измеримых управлениях $u_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Кроме того, будем предполагать, что вектор-функция представима в виде

$$f(\mathbf{x}, u_1, u_2, \ldots, u_n) = f^{(1)}(\mathbf{x}, u_1) + f^{(2)}(\mathbf{x}, u_2) + \ldots + f^{(n)}(\mathbf{x}, u_n).$$

Обозначим через $D_i[t_1, t_2)$ множество всех сужений допустимых управлений i-го игрока на отрезок $[t_1, t_2)$, $t_0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$. Пусть $\Delta = \{t_0^\Delta < t_1^\Delta < \ldots < t_{n(\Delta)}^\Delta\}$ — произвольное конечное разбиение отрезка времени $[t_0, T]$, а $\{\Delta\}$ — множество всех таких разбиений.

Определение 9. Последовательность $\varphi_\Delta^i = (\varphi_{\Delta,1}^i, \varphi_{\Delta,2}^i, \ldots, \varphi_{\Delta,n(\Delta)}^i)$, где $\varphi_{\Delta,1}^i \in D_i[t_0, t_1^\Delta)$, а $\varphi_{\Delta,k}^i$ $(k=2, 3, \ldots, n(\Delta))$ — любое отображение множества $D_1[t_0, t_{k-1}^\Delta) \times \ldots \times D_n[t_0, t_{k-1}^\Delta)$ в $D_i[t_{k-1}^\Delta, t_k^\Delta)$, называется Δ-стратегией i-го игрока.

Пара $\varphi_i = (\Delta, \varphi_\Delta^i)$, где $\Delta \in \{\Delta\}$, а φ_Δ^i — любая Δ-стратегия i-го игрока, называется кусочно-программной стратегией i-го игрока. Обозначим множество всех Δ-стратегий i-го игрока через $D_{i,\Delta}$, а множество всех кусочно-программных стратегий — через $D^{(i)}$, $i \in \mathrm{I}$. По определению $D^{(i)} = \bigcup_{\Delta \in \{\Delta\}} D_{i,\Delta}$.

Набор $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, где $\varphi_i \in D^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$, называется ситуацией в игре. Можно показать (см. [38] и § 6 настоящей главы), что каждой ситуации φ и начальному условию $x(t_0) = x_0$ соответствует единственная траектория $x(t)$ $(x(t)|_{t=t_0} = x_0)$.

Дифференциальной игрой n лиц в нормальной форме фиксированной продолжительностью $T - t_0$, описываемой дифференциальным уравнением (3.1) с начальным условием (3.2), будем называть игру

$$\Gamma(t_0, x_0) = \langle D^{(i)}, K_{t_0, x_0}^i, i \in I \rangle,$$

в которой функция выигрыша i-го игрока имеет вид

$$K_{t_0, x_0}^i(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \int_{t_0}^{T} h(x(t))\,dt + H_i(x(T)), \tag{3.3}$$

где h_i и H_i — непрерывные функции на R^n и $x(t)$ — траектория в ситуации $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ с начальным условием $x(t)|_{t=t_0} = x_0$. Целью i-го игрока является максимизация своего выигрыша в момент T.

Если в правой части (3.3) $H_i = 0$, $i \in I$, то выигрыш называется интегральным; если $h_i = 0$, $i \in I$, то игра имеет терминальный выигрыш.

В случае, когда $I = \{1, 2\}$ и $K_{t_0, x_0}^1(\cdot) = -K_{t_0, x_0}^2(\cdot)$, игру

$$\Gamma(t_0, x_0) = \langle D^1, D^2, K_{t_0, x_0} \rangle, \quad K_{t_0, x_0} = K_{t_0, x_0}^1$$

будем называть дифференциальной антагонистической игрой в нормальной форме.

Пусть задано $\varepsilon > 0$.

Определение 10. Ситуация $(u^*_{1,\varepsilon}(\cdot),\ u^*_{2,\varepsilon}(\cdot))$ называется ситуацией ε-равновесия в антагонистической игре $\Gamma(t_0,\ x_0)$, если для всех $u_1(\cdot)\in D^1$ и $u_2(\cdot)\in D^2$ имеет место неравенство

$$K_{t_0,x_0}(u_1(\cdot),\ u^*_{2,\varepsilon}(\cdot))+\varepsilon\geqslant K_{t_0,x_0}(u^*_{1,\varepsilon}(\cdot),\ u^*_{2,\varepsilon}(\cdot))\geqslant$$
$$\geqslant K_{t_0,x_0}(u^*_{1,\varepsilon}(\cdot),\ u_2(\cdot))-\varepsilon.$$

Стратегии $u^*_{1,\varepsilon}(\cdot)$, $u^*_{2,\varepsilon}(\cdot)$ называются ε-оптимальными.

Определение 11. Пусть $u^*_1(\cdot)$, $u^*_2(\cdot)$ — пара стратегий, такая, что

$$K_{t_0,x_0}(u_1(\cdot),\ u^*_2(\cdot))\geqslant K_{t_0,x_0}(u^*_1(\cdot),\ u^*_2(\cdot))\geqslant$$
$$\geqslant K_{t_0,x_0}(u^*_1(\cdot),\ u_2(\cdot))$$

для всех $u_1(\cdot)\in D^1$, $u_2(\cdot)\in D^2$. Тогда ситуация $(u^*_1(\cdot),\ u^*_2(\cdot))$ называется ситуацией равновесия в игре $\Gamma(t_0,\ x_0)$.

Определение 12. Верхней Δ-стратегией второго игрока называется последовательность $\varphi^{\Delta,2}=(\varphi^{\Delta,2}_1,\ \varphi^{\Delta,2}_2,\ \dots,\ \varphi^{\Delta,2}_{n(\Delta)})$, где $\varphi^{\Delta,2}_1: D_1[t_0,\ t^\Delta_1)\to D_2[t_0,\ t^\Delta_1)$, $\varphi^{\Delta,2}_k: D_1[t_0,\ t^\Delta_k)\times D_2[t_0,\ t^\Delta_{k-1})\to$ $\to D_2(t^\Delta_{k-1},\ t^\Delta_k)$, $k=2,\ 3,\ \dots,\ n(\Delta)$.

Аналогично определяется верхняя Δ-стратегия первого игрока. Обозначим D^Δ_i — множество верхних Δ-стратегий i-го игрока.

Верхней Δ-игрой будем называть тройку

$$\Gamma^\Delta(t_0,\ x_0)=\langle D_{1,\Delta},\ D^\Delta_2,\ K_{t_0,x_0}\rangle,$$

а нижней Δ-игрой — тройку

$$\Gamma_\Delta(t_0,\ x_0)=\langle D^\Delta_1,\ D_{2,\Delta},\ K_{t_0,x_0}\rangle.$$

Для антагонистической дифференциальной игры с предписанной продолжительностью и терминальным выигрышем, динамика которой описывается уравнением (3.1), справедливы утверждения [39].

Лемма 1. В играх $\Gamma^\Delta(t_0,\ x_0)$ и $\Gamma_\Delta(t_0,\ x_0)$ с терминальным выигрышем существуют ситуации равновесия при всех $x\in R^n$, $T<\infty$, и для любого конечного разбиения $\Delta(n)$ выполняется неравенство $\mathrm{val}\ \Gamma^\Delta(t_0,\ x_0)\leqslant\mathrm{val}\ \Gamma_\Delta(t_0,\ x_0)$.

Теорема 2. При всяких t_0, x_0, $T<\infty$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{val}\ \Gamma^\Delta(t_0,\ x_0)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{val}\ \Gamma_\Delta(t_0,\ x_0).$$

Теорема 3. Для любых x_0, t_0, $T<\infty$ в игре $\Gamma(t_0,\ x)$ с терминальным выигрышем существует ситуация ε-равновесия для любого $\varepsilon>0$. При этом

$$\mathrm{val}\ \Gamma(t_0, \mathrm{x}_0) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{val}\ \Gamma^{\Delta(n)}(\mathrm{x}_0, t_0).$$

Изложенные здесь элементы теории игр необходимы для понимания следующих параграфов. Для более глубокого ознакомления с основами этой теории мы рекомендуем обратиться к книгам [22, 23, 33, 35, 39].

§ 2. СТАТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ НОРМИРОВАНИЯ ВЫБРОСОВ ВРЕДНЫХ ВЕЩЕСТВ. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ

Пусть в промышленном районе расположено n предприятий, каждое из которых имеет один источник, выбрасывающий в атмосферу вредную примесь. В районе имеется экологически значимая зона Ω, уровень загрязнения в которой не должен превышать предельно допустимого значения. Как было показано в главе 2 (см. § 3), усредненное по времени и области Ω значение концентрации вредной примеси в атмосфере при наличии n источников можно приближенно рассчитать по формуле

$$q = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant a_i,$$

где $c_i > 0$ — интегралы решений сопряженной задачи турбулентной диффузии, зависящие от параметров процесса атмосферного переноса, местонахождения и технических характеристик источников выбросов. Пусть $\Theta < \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$ — значение предельно допустимой концентрации (ПДК) вредной примеси.

Считая предприятия игроками, построим игру, моделирующую конфликтную ситуацию загрязнения атмосферы. Предположим, что каждое предприятие i может снижать свои эксплуатационные расходы посредством увеличения выброса x_i, однако, если в зоне Ω уровень загрязнения превышает ПДК, на предприятие накладывается штраф $s_i > 0$.

Пусть игрок (предприятие) i имеет возможность выбирать значения x_i из множества $X_i = [0, a_i]$. Функции выигрыша игроков (предприятий) имеют вид

$$H_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} h_i(x_1, x_2, \dots, x_n), & q \leqslant \Theta, \\ h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - s_i, & q > \Theta, \end{cases}$$

где $h_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — непрерывные и возрастающие по аргументу x_i функции.

В качестве принципа оптимальности в этой игре рассмотрим равновесие по Нэшу (см. § 1). В силу монотонности каждой из функций выигрыша $h_i(\mathrm{x})$ по аргументу x_i ситуации равновесия находятся на гиперплоскости $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \Theta$. Действительно, предположим, что ситуация $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ является равновесной и при этом $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^0 < \Theta$. Тогда найдется $j \in I$, такое, что $x_j^0 < a_j$ и $x'_j \in (x_j^0, a_j]$, причем $\sum_{i=1, i\neq j}^{n} c_i x_i^0 + x'_j c_j \leqslant \Theta$. В силу монотонности функции h_j имеем $h_j(\mathbf{x}^0) < h_j(\mathbf{x}^0 \| x'_j)$, или

$$H_j(\mathbf{x}^0) = h_j(\mathbf{x}^0) < h_j(\mathbf{x}^0 \| x'_j) = H_j(\mathbf{x}^0 \| x'_j).$$

Если же $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^0 > \Theta$ и найдется такое $j \in I$, что $x_j^0 < a_j$, то, очевидно, $h_j(\mathbf{x}^0 \| a_j) > h_j(\mathbf{x}^0)$, или

$$H_j(\mathbf{x}^0 \| a_j) = h_j(\mathbf{x}^0 \| a_j) - s_j > h_j(\mathbf{x}^0) - s_j = H_j(\mathbf{x}^0).$$

Следовательно, $\mathbf{x}^0$ не является ситуацией равновесия.

Нетрудно заметить, что единственной ситуацией равновесия, не лежащей на указанной гиперплоскости, может быть ситуация $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Обсуждая в дальнейшем существование ситуаций равновесия, мы везде будем иметь в виду ситуации равновесия в чистых стратегиях, не затрагивая вопроса о существовании ситуаций равновесия в смешанных стратегиях [5].

Будем называть ситуацию равновесия $\mathbf{x}$ допустимой, если $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leqslant \Theta$, а оптимальным решением в игре Γ — множество допустимых ситуаций равновесия.

Предположим, что оптимальное решение существует и $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ — допустимая ситуация равновесия. Выберем в качестве предельно допустимого выброса предприятия i значение x_i^*. Значения x_i^* обладают двумя важными свойствами: во-первых, если предприятия осуществляют выбросы, не превышающие соответствующие значения x_i^*, то уровень загрязнения в зоне Ω не превышает ПДК; во-вторых, превышение значения ПДК невыгодно предприятию, поскольку уменьшает его выигрыш.

Ниже мы проанализируем несколько игр, в которых будут найдены условия существования и единственности ситуаций равновесия в чистых стратегиях, а также указаны оптимальные решения.

1. Рассмотрим бескоалиционную игру

$$\Gamma_1 = \langle I, \{X_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I} \rangle,$$

в которой функции выигрыша заданы в виде

$$H_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} h_i(q), & q \leqslant \Theta, \\ h_i(q) - s_i, & q > \Theta, \end{cases}$$

$$q = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

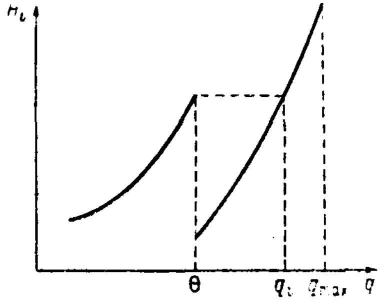

Рис. 9.

где $h_i(q)$ непрерывны и возрастают. График функции H_i изображен на рис. 9.

Пусть $q_{\max} = \sum_{i \in I} c_i a_i$, a $K \subseteq I$ — множество игроков, для которых существуют $q_j \in (\Theta, \Theta + c_j a_j)$, $j \in K$, такие, что $h_j(\Theta) = h_j(q_j) - s_j$, $j \in K$.

Теорема 4. Множество решений системы

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \Theta, \; 0 \leqslant x_i \leqslant a_i, \qquad (3.4)$$

$$q_i - \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} c_i x_i \geqslant c_j a_j, \; j \in K, \; c_j > 0,$$

совпадает с множеством допустимых ситуаций равновесия в игре Γ_1.

Доказательство. Предположим, что множество K непусто. Пусть для некоторого решения (3.4) существуют $j \in K$ и значения $x'_j \in [0, a_j]$, такие, что $H_j(\mathbf{x} \| x'_j) > H_j(\mathbf{x})$. Предположим, что $x'_j < x_j$. Тогда

$$\sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} c_i x_i + c_j x'_j < \Theta,$$

и, следовательно,

$$H_j(\mathbf{x} \| x'_j) = h_j\Big(\sum_{\substack{i \in I \\ j \neq i}} c_i x_i + c_j x'_j\Big),$$

но поскольку функция $h_j(q)$ возрастающая и $H_j(\mathbf{x}) = h_j(\Theta)$, должно выполняться неравенство $H_j(\mathbf{x} \| x'_j) < H_j(\mathbf{x})$. Пусть теперь $x'_j > x_j$. Тогда

$$\sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} c_i x_i + c_j x'_j > \Theta,$$

$$H_j(\mathbf{x} \| x'_j) = h_j\Big(\sum_{\substack{i \in I \\ j \neq i}} c_i x_i + c_j x'_j\Big) - s_j.$$

Из условий (3.4) имеем

$$q_j \geqslant \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} c_i x_i + c_j a_j \geqslant \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} c_i x_i + c_j x_j' ,$$

следовательно, $h_j(q_j) \geqslant h_j(\sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} c_i x_i + c_j x_j')$. Отсюда получим

$$H_j(\mathbf{x}\|x_j') = h_j(\sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} c_i x_i + c_j x_j') - s_j \leqslant h_j(q_j) - s_j =$$

$$= h_j(\Theta) = H_j(\mathbf{x}),$$

или $H_j(\mathbf{x}\|x_j) \leqslant H_j(\mathbf{x})$. Следовательно, для всех $j\in K$ и $x_j' \in [0, a_j]$ имеет место неравенство $H_j(\mathbf{x}\|x_j') \leqslant H_j(\mathbf{x})$.

Для любого игрока $p \in I \setminus K$ $h_p(\Theta) > h_p(q) - s_j$ при любых значениях $q \in [\Theta, \Theta + c_p a_p]$ и $h_p(\Theta) \geqslant h_p(q)$ при $q \in [0, \Theta]$. Следовательно, $H_p(\mathbf{x}\|x_p') \leqslant H_p(\mathbf{x})$ для любых $x_p' \in [0, a_p]$.

Покажем теперь, что любая допустимая ситуация равновесия является решением системы (3.4). Действительно, предположим, что допустимая ситуация равновесия $\mathbf{x}$ не является решением системы (3.4), тогда для некоторого $j\in K$ справедливо

$$q_j - \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} c_i x_i < c_j a_j.$$

Следовательно, в силу монотонности функции h

$$H_j(\mathbf{x}\|a_j) = h_j(\sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} c_i x_i + c_j x_j) - s_j > h_j(q) = H_j(\mathbf{x}),$$

т. е. $\mathbf{x}$ не является ситуацией равновесия. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Перепишем систему (3.4) в виде

$$\sum_{i\in I} c_i x_i = \Theta, \; 0 \leqslant x_i \leqslant a_i,$$

$$q_j \geqslant \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - c_j x_j + c_j a_j, \; j\in K,$$

или

$$\sum_{i\in I} c_i x_i = \Theta, \; x_j \geqslant a_j - \frac{1}{c_j}(q_j - \Theta), \qquad (3.5)$$

$$j\in K, \; 0 \leqslant x_i \leqslant a_i, \; i\in I.$$

Система (3.5), очевидно, не всегда имеет решение. Следующая лемма дает необходимое и достаточное условие существования решений этой системы уравнений.

Лемма 2. Если $\sum_{j\in K} c_j a_j \geqslant \Theta$, то для того чтобы система (3.5) имела решение, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\sum_{j\in K}(q_j-c_ja_j)\geqslant\Theta(|K|-1),\ K\neq\varnothing. \tag{3.6}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $x=(x_1, \dots, x_n)$ — некоторое решение системы (3.5), тогда

$$x_j\geqslant a_j-\frac{1}{c_j}(q_j-\Theta),\ j\in K.$$

Учитывая, что $\sum\limits_{j\in K} c_jx_j\leqslant\Theta$, получаем

$$\Theta\geqslant\sum_{j\in K}(c_ja_j-q_j)+|K|\Theta.$$

Окончательно имеем $\sum\limits_{j\in K}(q_j-c_ja_j)\geqslant\Theta(|K|-1)$.

Достаточность. Перепишем неравенство (3.6) следующим образом:

$$\Theta\geqslant\sum_{j\in K}(c_ja_j-q_j)+|K|\Theta.$$

Будем искать решение системы (3.5) в виде

$$x_j=a_j-(q_j-\Theta)/c_j+\varepsilon_j,\ j\in K,\ x_j=0,\ j\in I\setminus K, \tag{3.7}$$

где ε_j удовлетворяет неравенствам $0\leqslant\varepsilon_j\leqslant\frac{(q_j-\Theta)}{c_j}$, $j\in K$.

Выберем ε_j в виде

$$\varepsilon_j=\frac{q_j-\Theta}{c_j}\ \frac{\sum\limits_{j\in K}(q_j-c_ja_j)-\Theta(|K|-1)}{\sum\limits_{j\in K}(q_j-\Theta)}.$$

В силу (3.6) и $q_j>\Theta$ оба сомножителя неотрицательны и, следовательно, $\varepsilon_j\geqslant 0$. Покажем, что $\varepsilon_j\leqslant(q_j-\Theta)/c_j$. Это неравенство может быть получено из условия $\Theta\leqslant\sum\limits_{j\in K}c_ja_j$. Действительно,

$$\Theta\leqslant\sum_{j\in K}c_ja_j+\sum_{j\in K}q_j-|K|\Theta-\sum_{j\in K}q_j+|K|\Theta,$$

или

$$\sum_{j\in K}(q_j-c_ja_j)-\Theta(|K|-1)\leqslant\sum_{j\in K}(q_j-\Theta).$$

Отсюда

$$\frac{\sum\limits_{j\in K}(q_j-c_ja_j)-\Theta(|K|-1)}{\sum\limits_{j\in K}(q_j-\Theta)}\leqslant 1$$

и, следовательно,

$$\varepsilon_j\leqslant(q_j-\Theta)/c_j.$$

Таким образом,

$$x_j\geqslant a_j-(q_j-\Theta)/c_j.$$

Остается проверить, что построенное по формуле (3.7) решение удовлетворяет условию $\sum\limits_{i\in I}c_ix_i=\Theta$. Действительно,

$$\sum_{i\in I} c_i x_i = \sum_{j\in K} c_j a_j - \sum_{j\in K} (q_j-\Theta) + \sum_{j\in K} c_j \varepsilon_j =$$

$$= \sum_{j\in K} (c_j a_j - q_j) + |K|\Theta + \sum_{j\in K} (q_j-\Theta) \frac{\sum\limits_{j\in K} (q_j - c_j a_j) - \Theta(|K|-1)}{\sum\limits_{j\in K} (q_j-\Theta)} = \Theta.$$

. Замечание. В случае $\sum\limits_{j\in K} c_j a_j < \Theta$ решение системы (3.5) существует всегда. Например, вектор $\mathbf{x}$ с компонентами

$$x_j = a_j,\ j\in K,\ x_i = a_i \frac{\Theta - \sum\limits_{j\in K} c_j a_j}{\sum\limits_{p\in I\setminus K} c_p a_p}$$

является решением системы (3.5).

На основании доказанной леммы и теоремы 4 справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть $K\neq\varnothing$ и $\sum\limits_{j\in K} c_j a_j \geqslant \Theta$, $c_j > 0$, тогда для того чтобы в игре Γ_1 существовала допустимая ситуация равновесия по Нэшу, необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\Theta(|K|-1) \leqslant \sum_{j\in K} (q_j - c_j a_j). \tag{3.8}$$

Интересным представляется случай, когда оптимальное решение единственно.

Теорема 6. Допустимая ситуация равновесия в игре Γ_1 единственная, если выполнены условия:

1) $\sum\limits_{j\in K} q_j = (|K|-1)\Theta + \sum\limits_{j\in K} c_j a_j$,

2) $\sum\limits_{j\in K} c_j a_j \geqslant \Theta$.

Доказательство. Покажем, что условие $\Theta < q_j \leqslant \Theta + c_j a_j$, $j\in K$, и условия 1) и 2) теоремы совместны. Положим $q_j = \Theta + c_j a_j - \eta_j$, $j\in K$. Тогда условие 1) можно переписать в виде $\sum\limits_{j\in K} \eta_j = \Theta$. В силу того, что $\sum\limits_{j\in K} c_j a_j \geqslant \Theta$, всегда существуют значения η_j, удовлетворяющие условию 1). Например, можно выбрать η_j в виде $\eta_j = c_j a_j \Theta / \sum\limits_{j\in K} c_j a_j$.

Действительно, $0 < \Theta / \sum\limits_{j\in K} c_j a_j \leqslant 1$, поэтому $0 \leqslant \eta_j \leqslant c_j a_j$ и сумма всех η_j равна Θ.

Пусть $\{q_j\}$ удовлетворяет условию 1). Возьмем $\mathbf{x}$ в виде

$$x_i = 0,\ i\in I\setminus K,\ x_j = a_j - (q_j - \Theta)/c_j,\ j\in K,$$

и рассмотрим сумму

$$\sum_{i\in I} c_i x_i = \sum_{j\in K} c_j a_j - \sum_{j\in K} q_j + |K|\Theta.$$

Воспользовавшись условием 1), получим

$$\sum_{i\in I} c_i x_i = \sum_{j\in K} c_j a_j - \sum_{j\in K} c_j a_j - (|K|-1)\Theta + |K|\Theta = \Theta.$$

Очевидно, что x_j удовлетворяют неравенству

$$x_j \geqslant a_j - (q_j - \Theta)/c_j,\ j\in K.$$

Остается установить, является ли построенная допустимая ситуация равновесия единственной. Пусть отличный от **x** вектор **x**$'$ также является допустимой ситуацией равновесия. Тогда **x**$'$ удовлетворяет системе неравенств

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i' = \Theta,\ x_j' \geqslant a_j - (q_j - \Theta)/c_j,\ j\in K.$$

Поскольку **x**$'$ отличен от **x**, то из равенств

$$\sum_{j\in K} c_j x_j = \sum_{i\in I} c_i x_i = \sum_{i\in I} c_i x_i'$$

следует, что найдется такой игрок $j_0 \in K$, что $x_{j_0}' < x_{j_0}$ и, следовательно, $x_{j_0}' < a_{j_0} - (q_{j_0} - \Theta)/c_{j_0}$, что противоречит тому, что **x**$'$ является решением системы (3.5).

2. Рассмотрим теперь несколько иную постановку задачи. Предположим, что потери предприятия i складываются из расходов на переработку отходов и налога за загрязнение. Пусть $f_i(a_i - x_i)$ — непрерывная убывающая функция, характеризующая величину расходов на переработку отходов, где x_i — выброс i-го предприятия $(0 \leqslant x_i \leqslant a_i)$, а $a_i > 0$ — максимальный возможный выброс i-го предприятия. Налог за загрязнение определим для предприятия i в виде $k_i \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, где $k_i > 0$. Величину k_i будем называть ценой загрязнения для предприятия i. Предположим, что для любого i и для любых x_i' и x_i'', таких, что $0 \leqslant x_i' < x_i'' \leqslant a_i$, выполнено условие

$$f_i(a_i - x_i') - f_i(a_i - x_i'') > k_i c_i (x_i'' - x_i').$$

Оно означает, что при увеличении выброса расходы предприятия на переработку уменьшаются быстрее, чем растет налог за загрязнение.

Обозначим

$$h_i(x_i) = -f_i(a_i - x_i),$$

$$H_i(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} h_i(x_i) - k_i \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i, & q \leqslant \Theta, \\ h_i(x_i) - k_i \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i - s_i, & q > \Theta, \end{cases} \tag{3.9}$$

$$q=\sum_{i\in I} c_i x_i,\ c_i>0,\ s_i>0.$$

Рассмотрим бескоалиционную игру n лиц $\Gamma_2=<I, \{X_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I}>$, где $H_i(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ имеют вид (3.9), $X_i=[0, a_i]$. Обозначим через N множество игроков, для которых выполнено неравенство $h_j(0)>h_j(a_j)-k_jc_ja_j-s_j$, $j\in N$.

Теорема 7. Множество решений системы

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i=\Theta,\ 0\leqslant x_i\leqslant a_i, \tag{3.10}$$

$$h_j(x_j)-k_jc_jx_j\geqslant h_j(a_j)-k_jc_ja_j-s_j,\ j\in N,$$

совпадет с множеством допустимых ситуаций равновесия в игре Γ_2.

Доказательство. Предположим, что $\mathbf{x}=(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ является решением системы (3.10). Пусть для некоторого $j\in N$ найдется такое значение $x_j'\in X_j$, что

$$H_j(\mathbf{x}\|x_j')>H_j(\mathbf{x}). \tag{3.11}$$

Так как $h_j(x_j)-k_j\sum_{i\in I} c_i x_i$ возрастает, то $x_j'>x_j$ и, следовательно,

$$\Theta=\sum_{i\in I} c_i x_i<\sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} c_i x_i+c_j x_j'.$$

Отсюда получаем, что

$$H_j(\mathbf{x}\|x_j')=h_j(x_j')-k_j(\sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} c_i x_i+c_j x_j')-s_j,$$

поэтому неравенство (3.11) можно переписать в виде

$$h_j(x_j)-k_jc_jx_j<h_j(x_j')-k_jc_jx_j'-s_j.$$

Учитывая, что $h_j(x_j')-k_jc_jx_j'<h_j(a_j)-k_jc_ja_j$, получаем

$$h_j(x_j)-k_jc_jx_j<h_j(a_j)-k_jc_ja_j-s_j.$$

Так как $\mathbf{x}$ является решением системы (3.10), то для $j\in N$ последнее неравенство выполняться не может. А для $j\in I\setminus N$ это неравенство не может быть выполнено, поскольку

$$h_j(x_j)-k_jc_jx_j>h_j(0)\geqslant h_j(a_j)-k_jc_ja_j-s_j\ \ j\in I\setminus N.$$

Покажем теперь, что любая допустимая ситуация равновесия $\mathbf{x}^*$ является решением системы (3.10). Предположим, что $\mathbf{x}^*$ не является решением системы (3.10), тогда найдется $j\in N$, такое, что $h_j(x_j^*)-k_jc_jx_j^*<h_j(a_j)-k_jc_ja_j-s_j$ и, следовательно,

$$H_j(\mathbf{x}^*)=h_j(x_j^*)-\sum_{i=1}^{n}k_ic_ix_i^* \quad <H_j(\mathbf{x}^*\|a_j),$$

что противоречит тому, что $\mathbf{x}^*$ является ситуацией равновесия. Теорема доказана.

Обозначим через $x_j^0\in[0,\ a_j]$ $(j\in N)$ значение x_j, при котором $h_j(x_j^0)-k_jc_jx_j^0=h_j(a_j)-k_jc_ja_j-s_j$. В силу свойства функций h_j значение x_j^0 для каждого $j\in N$ определяется единственным образом.

Для решения вопроса о существовании оптимального решения в игре Γ_2 будем использовать следующую теорему.

Теорема 8. Для того чтобы в игре Γ_2 существовала допустимая ситуация равновесия, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{j\in N}c_jx_j^0\leqslant\Theta. \tag{3.12}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ есть допустимая ситуация равновесия в игре Γ_2. Тогда для $j\in N$ справедливо неравенство

$$h_j(x_j)-k_jc_jx_j\geqslant h_j(a_j)-k_jc_ja_j-s_j=h_j(x_j^0)-k_jc_jx_j^0\ .$$

Отсюда следует, что $x_j\geqslant x_j^0$ для $j\in N$. Поскольку $\sum\limits_{j\in N}c_jx_j^0\leqslant$ $\leqslant\sum\limits_{j\in I}c_jx_j=\Theta$, то, следовательно, $\sum\limits_{j\in N}c_jx_j^0\leqslant\Theta$.

Достаточность. Предположим, что неравенство (3.12) выполняется. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $\sum\limits_{j\in N}c_ja_j\geqslant\Theta$. Решение системы (3.10) можно записать в виде

$$x_j=x_j^0+\varepsilon_j,\ j\in N,\ x_j=0,\ j\in I\setminus N,$$

где

$$\varepsilon_j=(a_j-x_j^0)\,\frac{\Theta-\sum\limits_{j\in N}c_jx_j^0}{\sum\limits_{j\in N}(c_ja_j-c_jx_j^0)}.$$

Проверим, что построенный вектор $\mathbf{x}=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ является решением системы (3.10). Поскольку $\sum\limits_{j\in N}c_jx_j^0\leqslant\Theta\leqslant\sum\limits_{j\in N}c_ja_j$, то

$$0\leqslant\frac{\Theta-\sum\limits_{j\in N}c_jx_j^0}{\sum\limits_{j\in N}(c_ja_j-c_jx_j^0)}\leqslant1$$

и, следовательно, $x_j=x_j^0+\varepsilon_j\leqslant a_j$, $j\in N$. Имеем $x_j^0\leqslant x_j$ для $j\in N$, поэтому

$$h_j(x_j)-k_jc_jx_j\geqslant h_j(x_j^0)-k_jc_jx_j^0=h_j(a_j)-k_jc_ja_j-s_j.$$

Остается проверить, что $\sum\limits_{j\in N} c_jx_j=\Theta$.

Действительно,

$$\sum_{j\in N} c_jx_j=\sum_{j\in N} c_jx_j^0+\sum_{j\in N} c_j\varepsilon_j=\sum_{j\in N} c_jx_j^0+$$

$$+\sum_{j\in N}(c_ja_j-c_jx_j^0)\frac{\Theta-\sum\limits_{j\in N} c_jx_j^0}{\sum\limits_{j\in N}(c_ja_j-c_jx_j^0)}=\Theta.$$

Случай 2: $\sum\limits_{j\in N} c_ja_j<\Theta$. В этом случае одним из решений системы (3.10) является вектор **x**, компоненты которого равны

$$x_j=a_j,\ j\in N,\ x_i=a_i\frac{\Theta-\sum\limits_{j\in N} c_ja_j}{\sum\limits_{i\in I\setminus N} c_ia_i},\ i\in I\setminus N.$$

Таким образом, теорема доказана полностью.

Условия единственности допустимой ситуации равновесия в игре Γ_2 можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 9. Пусть $\sum\limits_{j\in N} c_ja_j\geqslant\Theta$. Для того чтобы допустимая ситуация равновесия в игре Γ_2 была единственной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{j\in N} c_jx_j^\theta=\Theta. \tag{3.13}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является единственным решением системы (3.10). Предположим, что неравенство (3.13) не выполняется, т. е. $\sum\limits_{j\in N} c_jx_j^0<\Theta$. В этом случае, если $\sum\limits_{j\in N} c_ja_j<\Theta$, то оптимальное решение, очевидно, неединственно, так как существует целое множество решений **x**, таких, что $x_j=a_j$, $j\in N$, а x_i, $i\in I\setminus N$, определяются из условия $\sum\limits_{i\in I\setminus N} c_ix_i=\Theta-\sum\limits_{j\in N} a_j$. Поэтому необходимо предположение $\sum\limits_{j\in N} c_ja_j\geqslant\Theta$. В этом случае всегда найдутся два игрока $j_1\in I\setminus N$ и $j_2\in N$, такие, что

$$0<x_{j_1}\leqslant a_{j_1}, \tag{3.14}$$

$$x_{j_2}^0\leqslant x_{j_2}<a_{j_2}. \tag{3.15}$$

Тогда решением системы (3.10) будет также любой вектор **x′**, компоненты которого совпадают с компонентами вектора **x**, кроме компонент x'_{j_1} и x'_{j_2}, которые удовлетворяют условиям (3.14), (3.15) и

$$c_{j_1} x'_{j_1} + c_{j_2} x'_{j_2} = c_{j_1} x_{j_1} + c_{j_2} x_{j_2}.$$

Получили противоречие, которое доказывает, что $\sum_{j \in N} c_j x_j^0 = \Theta$.

Достаточность. Предположим, что равенство (3.13) выполнено, тогда единственным решением системы (3.10) является вектор $\mathbf{x}$, такой, что $x_j = x_j^0$, $j \in N$, $x_j = 0$, $i \in I \setminus N$.

Пусть $\mathbf{x}'$ — отличное от $\mathbf{x}$ решение системы (3.10). Тогда найдется игрок $j \in N$, для которого $x'_j < x_j$, но тогда

$$h_j(x'_j) - k_j c_j x'_j < h_j(x_j^0) - k_j c_j x_j^0 = h_j(a_j) - k_j c_j a_j - s_j,$$

а это противоречит тому, что $\mathbf{x}'$ является решением системы (3.10). Теорема доказана.

§ 3. О СУЩЕСТВОВАНИИ СИЛЬНО РАВНОВЕСНЫХ СИТУАЦИЙ

В § 2 мы определили ситуацию равновесия как набор n стратегий, при котором ни один игрок не может выгадать односторонним изменением своей стратегии. Однако если мы будем учитывать возможность совместных действий игроков, полученные решения уже не смогут нас удовлетворить.

Определим сильно равновесную ситуацию как набор n стратегий (которые могут, если это необходимо, выбираться совместно), таких, что не существует коалиции $S \subseteq N$, которая односторонним изменением стратегий входящих в нее игроков может увеличить выигрыши своих членов, если остальные игроки не изменяют стратегий. Ситуация $\mathbf{x}^*$ в игре Γ является сильно равновесной, если не существует $S \subseteq I$ и $\mathbf{x}_S = \{x_j\}_{j \in S}$ таких, что $0 \leqslant x_j \leqslant a_j$ и $H_j(\mathbf{x}^* \| \mathbf{x}_S) > H_j(\mathbf{x}^*)$ для всех $j \in S$.

Рассмотрим в качестве принципа оптимальности сильное равновесие. Так же, как и раньше, будем называть ситуацию допустимой, если $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leqslant \Theta$. Оптимальным решением будем называть множество допустимых сильно равновесных ситуаций.

Исследуем вопрос о существовании допустимых сильно равновесных ситуаций в игре Γ_1. Заметим, что множество допустимых сильно равновесных ситуаций содержится во множестве допустимых ситуаций равновесия по Нэшу, поэтому для любой сильно равновесной ситуации $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ справедливо

$$\sum_{i \in I} c_i x_i = \Theta.$$

Напомним, что функции выигрыша в игре Γ_1 имеют вид

$$H_i(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{cases} h_i(q), & q \leqslant \theta, \\ h_i(q) - s_i, & q > \theta, \end{cases}$$

где $q = \sum_{i \in I} c_i x_i$. Множество $K \subseteq I$ определим как множество игроков, для которых существуют значения $q_j \in (\theta, \sum_{i \in I} c_i a_i)$, такие, что $h_j(q_j) - s_j = h_j(\theta)$.

Рассмотрим вспомогательные игры Γ_S ($S \subseteq K$). Множество игроков в игре Γ_S состоит из игроков, не принадлежащих S, и коалиции S, которая действует как один игрок j_S. Обозначим множество игроков в игре Γ_S через I_S. Множество стратегий игрока j_S определим следующим образом:

$$X_{j_S} = \{ x_{j_S} : 0 \leqslant x_{j_S} \leqslant a_{j_S} \},$$

где $a_{j_S} = \sum_{k \in S} c_k a_k$.

Обозначим $q_{j_S} = \max_{k \in S} q_k$. Пусть $k_S \in S$ — игрок, для которого значение q_{k_S} — наибольшее из всех q_j для $j \in S$. Функции выигрыша игрока j_S выберем в виде

$$H_{j_S}(\mathbf{x}) = H_{k_S}(\mathbf{x}) = \begin{cases} h_{k_S}(q), & q \leqslant \theta, \\ h_{k_S}(q) - s_{k_S}, & q > \theta, \end{cases}$$

где $q = \sum_{j \in I \setminus S} c_j x_j + x_{j_S}$. Функции выигрыша остальных игроков определим так же, как в игре Γ_1.

Обозначим через X^S множество допустимых ситуаций равновесия в игре Γ_S, а через X_{Γ_1} — множество допустимых сильно равновесных ситуаций в игре Γ_1.

Любая допустимая сильно равновесная ситуация $\mathbf{x}^* \in X_{\Gamma_1}$ принадлежит X^S для любой $S \subseteq K$. Действительно, если $\mathbf{x}^*$ — допустимая сильно равновесная ситуация в игре Γ_1, то никакая коалиция $S \subseteq I$ не в состоянии односторонним изменением стратегий своих игроков увеличить выигрыш всех своих членов. Следовательно, в игре Γ_S ни один игрок не сможет изменить свою стратегию так, чтобы увеличить свой выигрыш, в том числе и игрок j_S. Таким образом, для любой коалиции $S \subseteq I$ справедливо включение $X_{\Gamma_1} \subseteq X^S$, или $X_{\Gamma_1} \subseteq \bigcap_{S \subseteq K} X^S$.

С другой стороны, если $\bigcap_{S \subseteq K} X^S \neq \varnothing$ и $\mathbf{x}^0 \in \bigcap_{S \subseteq K} X^S$, то для любой коалиции $S \subseteq K$ $H_{j_S}(\mathbf{x}^0 \| \mathbf{x}_S) \leqslant H_{j_S}(\mathbf{x}^0)$. Это означает, что ни одна из коалиций $S \subseteq K$ в ситуации $\mathbf{x}^0$ не в состоянии односторонним изменением стратегий входящих в нее игроков увеличить одновременно в игре Γ_1 выигрыш всех своих игроков. Любая коалиция $R \subseteq I$ $(R \neq \varnothing)$, такая, что $R \cap K \neq R$, имеет в своем составе хотя бы одного игрока j, не входящего в коалицию K. Для такого игрока $h_j(\Theta)\geqslant h_j(q)-s_j$ для любого $q\in[0, \sum_{i\in I} c_i a_i]$. Следовательно, коалиция K не может в ситуации $\mathbf{x}^0$ увеличить выигрыш этого игрока. Таким образом, поскольку никакая коалиция $S\subseteq I$ не в состоянии в ситуации $\mathbf{x}^0$ в игре Γ_1 увеличить выигрыш всех своих игроков, то $\bigcap_{S\subseteq K} X^S\subseteq X_{\Gamma_1}$.

Окончательно получаем $X_{\Gamma_1}=\bigcap_{S\subseteq K} X^S$.

Множество допустимых ситуаций равновесия в игре Γ_S совпадает согласно теореме 3 с множеством решений системы уравнений и неравенств

$$\sum_{i\in I\setminus S} c_i x_i + x_{j_S}=\Theta,\quad 0\leqslant x_i\leqslant a_i,\quad 0\leqslant x_{j_S}\leqslant a_{j_S}, x_j\geqslant a_j-(q_j-\Theta)/c_j,$$
$$j\in K_S,\ x_{j_S}\geqslant a_{j_S}-q_{j_S}+\Theta,$$

если $q_{j_S}<a_{j_S}+\Theta$, и системы

$$\sum_{i\in I\setminus S} c_i x_i + x_{j_S}=\Theta,\quad 0\leqslant x_i\leqslant a_i,\quad 0\leqslant x_{j_S}\leqslant a_{j_S}, x_j\geqslant a_j-(q_j-\Theta)/c_j,$$
$$j\in K_S\setminus S,$$

если $q_{j_S}\geqslant a_{j_S}+\Theta$. Здесь $K_S=\{j:j\in K\setminus S,\ q_j<\Theta+c_j a_j\}$.

Множество сильно равновесных ситуаций в игре Γ_1 совпадает с пересечением множеств X^S по всем $S\subseteq K$ и, следовательно, описывается системой уравнений и неравенств

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i=\Theta,\quad 0\leqslant x_i\leqslant a_i,\quad i=1,2,\dots,n,\quad \sum_{j\in S} c_j x_j\geqslant \sum_{j\in S} c_j a_j-q_{j_S}+\Theta,$$
$$S\subseteq K. \tag{3.16}$$

Если $q_{j_S}<\Theta+a_{j_S}$, то необходимое и достаточное условие существования в игре Γ_S допустимой ситуации равновесия согласно теореме 5 можно записать в виде

$$\sum_{j\in K_S} (q_j-c_j a_j)+q_{j_S}-a_{j_S}\geqslant\Theta(|K_S|-1). \tag{3.17}$$

Если $q_{j_S}\geqslant\Theta+a_{j_S}$, то условие (3.17) примет вид

$$\sum_{j\in K_S} (q_j-c_j a_j)\geqslant\Theta(|K_S|-1).$$

Сформулируем необходимое и достаточное условие существования допустимой сильно равновесной ситуации в игре Γ_1.

Теорема 10. Если $q_{j_S}<\Theta+a_{j_S}$ для всех $S\subseteq K$, то для того чтобы в игре Γ_1 существовала допустимая сильно равновесная ситуация, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$q_{j_K}-\sum_{i\in K} c_i a_i\geqslant 0. \tag{3.18}$$

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим игру Γ_K и выпишем для нее необходимое и достаточное условие существования допустимой ситуации равновесия (3.17). Так как $K_K=\varnothing$, то получим $q_{i_K} - \sum\limits_{i\in K} c_j a_j \geqslant 0$.

Достаточность. Предположим, что неравенство (3.18) справедливо. Тогда для любого $S\subseteq K$ справедливо неравенство (3.17). Возьмем $j\in K$ и убедимся сначала, что неравенство (3.17) верно для $S=K\diagdown\{j\}$. Действительно, поскольку

$$q_{i_K} = \begin{cases} q_{i_{K\setminus\{j\}}}, \text{ если } q_j \neq \max\limits_{i\in K} q_i, \\ q_j, \text{ если } q_j=\max\limits_{j\in K} q_i, \end{cases}$$

то
$$q_{i_K} \leqslant q_{i_{K\setminus\{j\}}} + q_j - \Theta. \tag{3.19}$$

В самом деле, если $q_{i_K} = q_{i_{K\setminus\{j\}}}$, то, учитывая, что $q_j>\Theta$, можно записать $q_{i_{K\setminus\{j\}}} \leqslant q_{i_{K\setminus\{j\}}} + q_j - \Theta$. Поэтому в данном случае (3.19) верно. Если же $q_{i_K}=q_j$, то поскольку $q_{i_{K\setminus\{j\}}}>\Theta$, получим $q_j\leqslant q_j+q_{i_{K\setminus\{j\}}}-\Theta$. Следовательно, (3.19) верно и в этом случае. Перепишем неравенство (3.17) в виде $q_{i_K} - a_{i_{K\setminus\{j\}}} - c_j a_j \geqslant 0$. Используя неравенство (3.19), получим

$$q_{i_{K\setminus\{j\}}} + q_j - \Theta - a_{i_{K\setminus\{j\}}} - c_j a_j \geqslant 0,$$

или
$$q_j - c_j a_j \geqslant \Theta + a_{i_{K\setminus\{j\}}} - q_{i_{K\setminus\{j\}}}.$$

Предположим, что (3.17) верно для $S\subseteq K$, и покажем, что оно справедливо и для $S\diagdown\{j\}$ $(j\in S)$. Нетрудно показать, что справедливо неравенство $q_{i_S} \leqslant q_{i_{S\setminus\{j\}}} + q_j - \Theta$.

Преобразуем (3.17) к виду

$$\sum_{i\in K_S} (q_i - c_i a_i) + q_{i_{S\setminus\{j\}}} + q_j - \Theta - a_{i_{S\setminus\{j\}}} - c_j a_j \geqslant \Theta|K|.$$

Окончательно имеем

$$\sum_{i\in K_S\setminus\{j\}} (q_i - c_i a_i) + q_{i_{S\setminus\{j\}}} - a_{i_{S\setminus\{j\}}} \geqslant \Theta(|K_S|+1|.$$

Учитывая, что $|K_S|+1=|K_{S\setminus\{j\}}|$, получаем, что неравенство (3.17) справедливо для коалиции $S\diagdown\{j\}$.

Рассмотрим два случая:

Случай 1: $\sum\limits_{j\in K} c_j a_j \leqslant \Theta$. Так как в этом случае неравенство (3.18) выполняется, то решение системы (3.16) должно существовать. Можно указать, например, такое решение:

$$x_j = a_j,\ j\in K,\ x_i = a_i \frac{\Theta - \sum\limits_{i\in K} c_j a_j}{\sum\limits_{j\in I\setminus K} c_j a_j},\ i\in I\diagdown K.$$

Нетрудно убедиться, что $\sum_{j\in I} c_j x_j=\Theta$ и для любого $S\subseteq K$

$$\sum_{j\in K} c_j x_j \geqslant \sum_{j\in K} c_j a_j+\Theta-q_{j_s}\ .$$

Случай 2: $\sum_{j\in K} c_j a_j>\Theta$. Будем искать решение в виде

$$x_j=a_j-\frac{1}{c_j}\,\varepsilon_j,\ j\in K,\ x_i=0,\ i\in I\setminus K.$$

Для любого $S\subseteq K$ должно выполняться неравенство (3.16), следовательно,

$$\sum_{j\in S} c_j x_j=\sum_{j\in S} c_j a_j-\sum_{j\in S}\varepsilon_j\geqslant\sum_{j\in S} c_j a_j-q_{j_S}+\Theta,$$

или $\sum_{j\in S}\varepsilon_j\leqslant q_{j_S}-\Theta$.

С другой стороны, для $S=\{j\}$ $c_j x_j\geqslant c_j a_j-q_j+\Theta$, следовательно, $0\leqslant\varepsilon_j\leqslant q_j-\Theta$.

Упорядочим q_j $(j\in K)$ по возрастанию: $q_{j_1}\leqslant q_{j_2}\leqslant\ldots\leqslant q_{j_{|K|}}$

Выберем ε_{j_r} такими, что $\varepsilon_{j_1}\leqslant q_{j_1}-\Theta$, $\varepsilon_{j_r}\leqslant q_{j_r}-q_{j_{r-1}}$. Если $l=\max\limits_{j_r\in S} r$, то $q_{j_l}=q_{j_S}$. Поскольку $\sum_{j\in S}\varepsilon_j\leqslant\sum_{r=1}^{l}\varepsilon_{j_r}$, то, очевидно, $\sum_{j\in S}\varepsilon_j\leqslant q_{j_S}-\Theta$.

Приведенным условиям удовлетворяют, например, такие значения ε_{j_r}:

$$\varepsilon_{j_r}=(q_{j_r}-q_{j_{r-1}})\,\frac{\sum_{j\in K} c_j a_j-\Theta}{q_{j_K}-\Theta},\quad r=2,3,\ldots,|K|,$$

$$\varepsilon_{j_1}=(q_{j_1}-\Theta)\,\frac{\sum_{j\in K} c_j a_j-\Theta}{q_{j_K}-\Theta}\ .$$

Нетрудно проверить, что $\sum_{i\in I} c_i x_i=\Theta$. Действительно,

$$\sum_{i\in I} c_i x_i=\sum_{j\in K} c_j a_j-\sum_{j\in K}\varepsilon_j=\sum_{j\in K} c_j a_j-\sum_{r=1}^{|K|}\varepsilon_{j_r}=$$

$$=\sum_{j\in K} c_j a_j-\sum_{j\in K} c_j a_j+\Theta=\Theta.$$

Теорема доказана.

В игре Γ_2 множество допустимых сильно равновесных ситуаций совпадает с множеством допустимых ситуаций равновесия по Нэшу. Действительно, любая допустимая ситуация равновесия по Нэшу $\mathbf{x}$ является допустимой сильно равновесной, так как никакие усилия ни одной из коалиций $S\subset I$ не могут привести к ситуации $\mathbf{x}'$, такой, что $H_j(\mathbf{x})<H_j(\mathbf{x}\|x')$ для всех $j\in S$.

Это следует из неравенства

$$h_j(x_j)-k_jc_jx_j\geqslant h_j(a_j)-c_jk_ja_j-s_j$$

для любого $j\in N$ и тем более для $j\in I\setminus N$.

И обратно, любая допустимая сильно равновесная ситуация является допустимой ситуацией равновесия по Нэшу.

Таким образом, для нахождения допустимых сильно равновесных ситуаций в игре Γ_2 можно пользоваться теоремами из предыдущего параграфа.

§ 4. ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫБОРА РАЗМЕРОВ ШТРАФОВ ЗА ЗАГРЯЗНЕНИЕ

При выборе размеров штрафов будем руководствоваться следующим принципом: если при выбранной системе штрафов $\{s_i\}_{i=1}^n$ множество допустимых равновесных или сильно равновесных ситуаций в игре Γ непусто, то данную систему штрафов будем считать оптимальной, а размеры штрафов оптимальными.

Рассмотрим простой пример. Предположим, что затраты предприятия на переработку несброшенных отходов пропорциональны их объему и оцениваются величиной $m(a-x)$, и при осуществлении предприятием выброса $x>x^0$ на предприятие накладывается штраф в размере s. Тогда потери предприятия можно представить в виде

$$f(x)=\begin{cases} m(a-x), & x\leqslant x^0, \\ m(a-x)+s, & x>x^0, \end{cases}$$

где $m>0$, $0\leqslant x\leqslant a$, $s>0$.

Будем считать, что предприятие старается минимизировать свои потери. В зависимости от размера штрафа минимальные потери равны

$$\min_{x\in[0,a]} f(x)=\begin{cases} m(a-x^0), & m(a-x^0)\leqslant s, \\ s, & m(a-x^0)>s, \end{cases}$$

или

$$\min_{x\in[0,a]} f(x)=\begin{cases} f(x^0), & m(a-x^0)\leqslant s, \\ f(a), & m(a-x^0)>s. \end{cases}$$

Таким образом, если штраф недостаточно велик, например $s<m(a-x^0)$, то предприятию выгоднее заплатить штраф, чем перерабатывать отходы.

С увеличением количества предприятий выбор размеров штрафов за загрязнение усложняется. Исследуем возможности выбора размеров штрафов на примере игр Γ_1 и Γ_2.

1. Рассмотрим игру Γ_1. Функции выигрыша в ней определены по формулам

$$H_i(x_1, x_2, \dots, x_n)=\begin{cases} h_i(q), & q\leqslant\Theta, \\ h_i(q)-s_i, & q>\Theta, \end{cases}$$

где $q = \sum_{i \in I} c_i x_i$ $(c_i > 0)$, а функции $h_i(q)$ непрерывны и возрастают.

В § 2 мы определили величины $q_j (j \in K)$ из условия

$$h_j(\Theta) = h_j(q_j) - s_j, \; q_j \in (\Theta, \Theta + c_j a_j).$$

В силу монотонности функций h_j штрафы s_j можно однозначно выразить через q_j:

$$s_j = h_j(q_j) - h_j(\Theta), \; j \in K. \tag{3.20}$$

Рассмотрим систему неравенств

$$\sum_{j \in I} (\alpha_j - c_j a_j) \geqslant \Theta(n-1), \quad \Theta < \alpha_j \leqslant \Theta + c_j a_j. \tag{3.21}$$

Пусть $\alpha^0 = (\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_n^0)$ — некоторое решение этой системы. Положим $q_j = \alpha_j^0$, $j \in I$, и назначим игрокам штрафы

$$s_j = h_j(\alpha_j^0) - h_j(\Theta), \; j \in I. \tag{3.22}$$

При таком выборе штрафов множество K совпадает с I. Поскольку α^0 является решением системы неравенств (3.21), то $q_j = \alpha_j^0$ и, следовательно, выполняется условие существования допустимой ситуации равновесия (3.8) теоремы 5. Поэтому если штрафы игроков вычисляются по формуле (3.22), то допустимые ситуации равновесия заведомо существуют.

Рассмотрим систему неравенств

$$\sum_{j \in I} (\alpha_j - c_j a_j) = \Theta(n-1), \; 0 < \alpha_j \leqslant \Theta + c_j a_j, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*)$ — некоторое решение этой системы. Положим штрафы s_j равными

$$s_j = h_j(\alpha_j^*) - h_j(\Theta), \; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.23}$$

Величины $q_j = \alpha_j^*$ в этом случае удовлетворяют условиям теоремы 6, и, следовательно, допустимая ситуация равновесия единственна.

Например, α^* можно выбрать следующим образом:

$$\alpha_j = \Theta + \lambda \frac{c_j a_j}{\sum_{j \in I} c_j a_j}, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\lambda = \sum_{j \in I} c_j a_j - \Theta$ есть разность между максимально возможным и предельно допустимым уровнями загрязнения. Таким образом, выбирая штрафы s_j согласно (3.22) или (3.23), мы обеспечиваем в одном случае существование, в другом — единственность оптимального решения.

2. Рассмотрим игру Γ_2. Функции выигрыша в этой игре определены по формулам

$$H_i(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} h_i(x_i) - k_i \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i, & q \leqslant \Theta, \\ h_i(x_i) - k_i \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i - s_i, & q > \Theta. \end{cases}$$

Разность $h_i(x_i) - k_i \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$ по предположению является возрастающей по x_i функцией. Поэтому величины x_j^0 (см. § 2) однозначно выражаются через s_j и, наоборот,

$$s_j = h_j(a_j) - h_j(x_j^0) - k_j c_j (a_j - x_j^0), \; j \in K.$$

Положим для $i = 1, 2, \ldots, n$

$$s_i = h_i(a_i) - h_i \left(\frac{a_i \Theta}{\sum\limits_{r \in I} c_r a_r} \right) - k_i c_i \left(a_i - \frac{a_i \Theta}{\sum\limits_{r \in I} c_r a_r} \right). \qquad (3.24)$$

При таком выборе s_i множество K совпадает с I и $x_i^0 = \dfrac{a_i \Theta}{\sum\limits_{r \in I} c_r a_r}$.

Вектор $\mathbf{x}^0$ удовлетворяет условиям существования и единственности допустимой ситуации равновесия (3.12) и (3.13), так как

$$\sum_{i \in I} c_i x_i^0 = \sum_{i \in I} c_i a_i \frac{\Theta}{\sum\limits_{i \in I} c_i a_i} = \Theta.$$

Таким образом, выбор штрафов согласно (3.24) обеспечивает существование и единственность допустимой ситуации равновесия.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть $I = \{1, 2\}$, $q = x_1 + x_2$, $0 \leqslant x_1 \leqslant 4$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 5$, $\Theta = 6$ и функции выигрыша игроков имеют вид

$$H_1(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2, & q \leqslant 6, \\ x_1 + x_2 - s_1, & q > 6; \end{cases}$$

$$H_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 3(x_1 + x_2), & q \leqslant 6, \\ 3(x_1 + x_2) - s_2, & q > 6. \end{cases}$$

Предположим, что первоначально выбраны следующие штрафы: $s_1 = 2$, $s_2 = 1{,}5$. Пользуясь теоремой 5, проверим, существует ли ситуация равновесия в этой игре. Для этого определим значения q_1 и q_2: $q_1 = \Theta + s_1 = 8$, $q_2 = \Theta + s_2/3 = 6{,}5$. В нашем примере $K = \{1, 2\}$, поэтому условие существования допустимой ситуации равновесия принимает вид $\sum\limits_{i=1}^{2} (q_i - a_i) \geqslant \Theta$. Подставим значения q_i, a_i и Θ: $\sum\limits_{i=1}^{2} (q_i - a_i) = 5{,}5 < \Theta = 6$. Следовательно, допустимой ситуации равновесия не существует. Изменим штрафы таким образом, чтобы неравенство $\Theta+s_1-a_1+\Theta+s_2/3-a_2\geqslant\Theta$ выполнялось. Запишем это неравенство иначе: $s_1+s_2/3\geqslant a_1+a_2-\Theta=3$. Выберем $s_1={}^4/_3$, $s_2=5$. Тогда, пересчитав заново значения q_j, получим $q_1=7\frac{1}{3}$, $q_2=7\frac{2}{3}$.

Оптимальное решение можно определить по формуле (3.7):

$$x_i=a_i-\frac{1}{c_i}\quad(q_i-\Theta)+\varepsilon_i,$$

где

$$\varepsilon_i=\frac{q_i-\Theta}{c_i}\;\frac{\sum\limits_{i=1}^{2}(q_i-c_ia_i)-\Theta}{\sum\limits_{i=1}^{2}(q_i-\Theta)}.$$

Отсюда получим $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=0$, а единственной допустимой ситуацией будет следующая:

$$x_1=4-\frac{4}{3}=2\frac{2}{3},\; x_2=5-\frac{5}{3}=3\frac{1}{3}.$$

Таким образом, выбрав штрафы $s_1=\frac{4}{3}$ и $s_2=5$, мы можем определить ПДВ для предприятия 1 в размере $2\frac{2}{3}$, а для предприятия 2 в размере $3\frac{1}{3}$. В этой ситуации превышение ПДВ не будет выгодно ни одному из предприятий.

Пример 2. Пусть в игре Γ_1 принимают участие три игрока $I=\{1, 2, 3\}$. Среднее значение концентрации примеси в зоне Ω рассчитывается по формуле $q=x_1+2x_2+3x_3$; $a_1=2$, $a_2=1$, $a_3=2$, $\Theta=7$.

Функций выигрыша игроков полагаем равными

$$H_1(x_1, x_2, x_3)=\begin{cases}3(x_1+2x_2+3x_3), & q\leqslant\Theta,\\ 3(x_1+2x_2+3x_3)-3, & q>\Theta;\end{cases}$$

$$H_2(x_1, x_2, x_3)=\begin{cases}2(x_1+2x_2+3x_3), & q\leqslant\Theta,\\ 2(x_1+2x_2+3x_3)-6, & q>\Theta;\end{cases}$$

$$H_3(x_1, x_2, x_3)=\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3, & q\leqslant\Theta,\\ x_1+2x_2+3x_3-1, & q>\Theta.\end{cases}$$

Требуется найти допустимую сильно равновесную ситуацию в этой игре.

Вычислим значения q_j:

$$q_1=(3\Theta+s_1)/3=8,\; q_2=(2\Theta+s_2)/2=10,\; q_3=\Theta+s_3=8.$$

Множество K здесь состоит из двух игроков: $K=\{1, 3\}$. В качестве q_{j_K} можно выбрать либо q_1, либо q_2. Пусть $q_{j_K}=q_1$. Неравенство (3.18) в данном случае выполняется. Поэтому допустимая сильно равновесная ситуация существует. Так же, как и при доказательстве теоремы 9, оптимальное решение запишем в виде

$$x_j = a_j - \varepsilon_j/c_j,\ j=1,\ 3,\ x_2=0,$$

где ε_j равны

$$\varepsilon_1 = (q_1 - q_3)\ \frac{a_1+3a_2-\Theta}{q_1-\Theta} = 0,$$

$$\varepsilon_3 = (q_3 - \Theta)\ \frac{a_1+3a_2-\Theta}{q_1-\Theta} = 1.$$

Таким образом, одной из допустимых сильно равновесных ситуаций в игре Γ_1 будет вектор $x = \left(2,\ 0,\ 1\frac{2}{3}\right)$.

Пример 3. Рассмотрим игру Γ_2, в которой $I=\{1,\ 2,\ 3\}$; $q=2x_1+3x_2+4x_3$; $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=2$; $\Theta=10$; функции выигрыша игроков определяются по формулам

$$H_1(x_1,\ x_2,\ x_3) = \begin{cases} 3x_1 - k_1(2x_1+3x_2+4x_3), & q \leqslant \Theta, \\ 3x_1 - k_1(2x_1+3x_2+4x_3) - s_1, & q > \Theta; \end{cases}$$

$$H_2(x_1,\ x_2,\ x_3) = \begin{cases} 4x_2 - k_2(2x_1+3x_2+4x_3), & q \leqslant \Theta, \\ 4x_2 - k_2(2x_1+3x_2+4x_3) - s_2, & q > \Theta; \end{cases}$$

$$H_3(x_1,\ x_2,\ x_3) = \begin{cases} 5x_3 - k_3(2x_1+3x_2+4x_3), & q \leqslant \Theta, \\ 5x_3 - k_3(2x_1+3x_2+4x_3) - s_3, & q > \Theta. \end{cases}$$

Пусть цена загрязнения для каждого из игроков установлена и $k_i=1$, $i=1,\ 2,\ 3$. Выберем штрафы s_i таким образом, чтобы существовала допустимая ситуация равновесия по Нэшу. Воспользуемся условиями

$$s_1 = 3a_1 - 3x_1^0 - 2(a_1 - x_1^0),$$

$$s_2 = 4a_2 - 4x_2^0 - 3(a_2 - x_2^0),$$

$$s_3 = 5a_3 - 5x_3^0 - 4(a_3 - x_3^0)$$

и выразим x_i^0 через s_i:

$$x_1^0 = a_1 - s_1,\ x_2^0 = a_2 - s_2,\ x_3^0 = a_3 - s_3.$$

Штрафы выберем исходя из условия $\sum_{i \in I} c_i x_i^0 \leqslant \Theta$. Получим

$$\sum_{i=1}^{3} c_i s_i \geqslant \sum_{i=1}^{3} c_i a_i - \Theta = 1,\ 2s_1 - 3s_2 + 4s_3 \geqslant 1.$$

Возьмем $s_1 = 1{,}5$, $s_2 = 1$, $s_3 = 1{,}5$. Теперь найдем x_j:

$$x_1^0 = a_1 - s_1 = 0{,}5,\ x_2^0 = a_2 - s_2 = 2,\ x_3^0 = a_3 - s_3 = 0{,}5.$$

Оптимальное решение определим по формуле $x_i = x_i^0 + \varepsilon_i$, $i=1,\ 2,\ 3$, где

$$\varepsilon_i=(a_i-x_i^0)\ \frac{\Theta-\sum\limits_{i\in N} c_i x_i^0}{\sum\limits_{i\in N} c_i(a_i-x_i^0)}.$$

Подставляя значения a_i, c_i, x_i^0, получим $\varepsilon_1={}^1/_8$, $\varepsilon_2={}^1/_{12}$, $\varepsilon_3={}^1/_8$. Отсюда получим, что ситуация $\mathrm{x}=\left(\frac{5}{8},\ 2\frac{1}{12},\ \frac{5}{8}\right)$ есть допустимая ситуация равновесия по Нэшу.

Предположим теперь, что заданы штрафы $s_1=s_2=s_3=1$ и необходимо установить цену загрязнения k_i для каждого из предприятий таким образом, чтобы $k_1+k_2+k_3=3$ и существовала допустимая ситуация равновесия. Величины x_i^0 и s_i связаны уравнениями

$$x_1^0=\frac{3a_1-2k_1a_1-s_1}{3-2k_1}=a_1-\frac{s_1}{3-2k_1},$$

$$x_2^0=\frac{4a_2-3k_2a_2-s_2}{4-3k_2}=a_2-\frac{s_2}{4-3k_2},$$

$$x_3^0=\frac{5a_3-4k_3a_3-s_3}{5-4k_3}=a_3-\frac{s_3}{5-4k_3}.$$

Следовательно, для существования допустимой ситуации равновесия достаточно, чтобы

$$\frac{s_1}{3-2k_1}+\frac{s_2}{4-3k_2}+\frac{s_3}{5-4k_3}\geqslant\sum_{i=1}^{3}c_ia_i-\Theta,$$

$$\text{или}\quad \frac{1}{3-2k_1}+\frac{1}{4-3k_2}+\frac{1}{5-4k_3}\geqslant 11.$$

Кроме этого на k_i необходимо наложить условия

$$k_1<\frac{3}{2},\ k_2<\frac{4}{3},\ k_3<\frac{5}{4},\ k_1+k_2+k_3=3.$$

Возьмем $k_1=\frac{7}{8}$, $k_2=1$, $k_3=\frac{9}{8}$. Вычислим x_i^0 : $x_1^0=1,2$, $x_0^2=-2$, $x_3^0=0$. Множество N в этом случае содержит двух игроков: $\{1,\ 2\}$. Поскольку $c_1a_1+c_2a_2>\Theta$, будем искать решение в виде $x_j=x_j^0+\varepsilon_j$, $j\in N$, $x_3=0$, где

$$\varepsilon_j=(a_j-x_j^0)\ \frac{\Theta-\sum\limits_{j\in N} c_jx_j^0}{\sum\limits_{j\in N} c_j(a_j-x_j^0)}.$$

Получим $\varepsilon_1={}^{32}/_{115}$, $\varepsilon_3={}^8/_{23}$. В итоге оптимальное решение будет $\mathrm{x}=({}^{170}/_{115},\ {}^{54}/_{23},\ 0)$.

§ 5. ПРИНЦИП СПРАВЕДЛИВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УЩЕРБА ОТ ЗАГРЯЗНЕНИЯ

Предположим, что предприятия наносят вред окружающей среде, измеряемый определенным экономическим ущербом, и вынуждены платить штраф, равный этому ущербу. Рассмотрим вопрос о том, каково должно быть распределение штрафа между предприятиями, если нанесен ущерб, равный C.

Предположим, что мы не имеем возможности определить, какая из коалиций $S \subseteq I$ является вредящей, т. е. наносит ущерб. Будем, однако, считать, что задано распределение вероятностей образования вредящих коалиций $p(S)$.

Пусть $W(S)$ есть максимальный ущерб, который способна нанести коалиция S, при условии, что игроки, не принадлежащие коалиции S, ущерба не наносят.

Предположим, что функция $W(S)$ обладает следующим свойством: для любых коалиций S и T, таких, что $T \subseteq S$, выполнено неравенство $W(S) \geqslant W(T)$.

Определим для каждой коалиции $S \subseteq I$ распределение штрафа $W(S)$ по формуле

$$\psi_i^S = \frac{W(S) - W(S \setminus i)}{\sum\limits_{i \in S} (W(S) - W(S \setminus i))} W(S), \ i \in S.$$

В том случае, если $W(S) = W(S \setminus i)$, положим $\psi_i^S = 0$. Величину ψ_i^S можно интерпретировать как максимальный штраф игрока i в коалиции S.

Определим средний по коалиции максимальный штраф игрока следующим образом:

$$\overline{\psi}_i = \sum_{S \subseteq I} p(S) \psi_i^S = \sum_{\substack{S \subseteq I \\ S \cap \{i\} \neq \varnothing}} p(S) \psi_i^S .$$

Аналогично определим средний по коалиции максимальный ущерб $\overline{W} = \sum\limits_{S \subseteq I} p(S) W(S)$.

Будем считать справедливым распределение штрафа C, если игрок получает штраф пропорционально величине

$$\xi_i = \overline{\psi}_i / \overline{W}.$$

Покажем, что $\sum\limits_{i \in I} \xi_i = 1$. Действительно,

$$\sum_{i \in I} \xi_i = \sum_{i \in I} \frac{\overline{\psi}_i}{\overline{W}} = \sum_{i \in I} \frac{\sum\limits_{S \subseteq I} p(S) \psi_i^S}{\sum\limits_{S \subseteq I} p(S) W(S)} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i \in I} \sum\limits_{S \subseteq I} p(S)\psi_i^S}{\sum\limits_{S \subseteq I} p(S) W(S)} = \frac{\sum\limits_{S \subseteq I} p(S) \sum\limits_{i \in I} \psi_i^S}{\sum\limits_{S \subseteq I} p(S) W(S)} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{S \subseteq I} p(S) W(S)}{\sum\limits_{S \subseteq I} p(S) W(S)} = 1.$$

Принцип справедливого распределения. Распределение затрат будем считать справедливым, если доля в возмещении ущерба определяется для каждого игрока величиной

$$\xi_i = \overline{\psi_i} / \overline{W}.$$

В случае, если образование любой коалиции равновероятно, то ξ_i можно вычислить по формуле

$$\xi_i = \sum_{S \subseteq I} \psi_i^S \Big/ \sum_{S \subseteq I} W(S).$$

Рассмотрим более подробно случай, когда образование любой коалиции равновероятно.

Введем понятия сильной и слабой ущербностей коалиции S. Под слабой ущербностью коалиции S мы будем понимать среднее значение ущерба по всем коалициям R, содержащим хотя бы одного игрока из S: $\frac{1}{2^n} \sum\limits_{R \subseteq I : R \cap S \neq \varnothing} W(R)$. Под сильной ущербностью коалиции S будем понимать среднее значение ущерба по всем коалициям, входящим в S: $\frac{1}{2^n} \sum\limits_{R \subseteq S} W(R)$. Очевидно, что для коалиции, содержащей всех игроков, эти два значения совпадают и равны $\frac{1}{2^n} \sum\limits_{R \subseteq I} W(R)$. Рассмотрим функции

$$\overline{v}_C(S) = \frac{\sum\limits_{R \subseteq I : R \cap S \neq \varnothing} W(R)}{\sum\limits_{R \subseteq I} W(R)} C, \quad \underline{v}_C(S) = \frac{\sum\limits_{R \subseteq S} W(R)}{\sum\limits_{R \subseteq I} W(R)} C.$$

Покажем, что $\overline{v}_C$ является вогнутой, т. е. $\overline{v}_C(S \cup T) \leqslant \overline{v}_C(S) + \overline{v}_C(T) - \overline{v}_C(S \cap T)$, $S \subseteq I$, $T \subseteq I$. Действительно,

$$\sum_{R \subseteq I : R \cap (S \cup T) \neq \varnothing} W(R) \leqslant \sum_{R \subseteq I : R \cap S \neq \varnothing} W(R) + \sum_{S \subseteq I : R \cap T \neq \varnothing} W(R) - \sum_{R \subseteq I : R \cap (S \cap T) \neq \varnothing} W(R),$$

что и доказывает требуемую вогнутость функции $\overline{v}_C$. Аналогично можно показать, что функция $\underline{v}_C$ является выпуклой.

Выберем $\underline{v}_C$ в качестве характеристической функции игры. Определим ядро этой игры $c(v)$ как множество таких дележей $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что $x_i \geqslant 0$, $x(S) = \sum\limits_{i \in S} x_i \leqslant \overline{v}_C(S)$, $S \subset I$. В силу вогнутости характеристической функции ядро непусто. Покажем, что дележ, определяемый по принципу справедливого распределения, принадлежит ядру кооперативной игры $\overline{v}_C$. Действительно,

$$x(S)=\sum_{i\in S}\xi_i C=\frac{\sum\limits_{i\in S}\sum\limits_{R\subseteq I}\psi_i^R}{\sum\limits_{R\subseteq I}W(R)}C=$$

$$=\frac{\sum\limits_{R\subseteq S}W(R)+\sum\limits_{i\in S}\sum\limits_{R\not\subseteq S}\psi_i^R}{\sum\limits_{R\subseteq I}W(R)}C\leqslant\frac{\sum\limits_{R\subseteq S}W(R)+\sum\limits_{R\not\subseteq S:R\cap S\neq\varnothing}W(R)}{\sum\limits_{R\subseteq I}W(R)}C=$$

$$=\frac{\sum\limits_{R\subseteq I:R\cap S\neq\varnothing}W(R)}{\sum\limits_{R\subseteq I}W(R)}C=\overline{v}_C(S).$$

Нетрудно показать, что справедливым является также неравенство $\sum\limits_{i\in S}\xi_i C\geqslant\underline{v}_C(S)$.

Таким образом, дележ ξC удовлетворяет следующему условию: $\underline{v}_C(S)\leqslant\sum\limits_{i\in S}\xi_i C\leqslant\overline{v}_C(S)$. Заметим, что $\underline{v}_C(I)=\sum\limits_{i\in I}\xi_i C=$ $=\overline{v}_C(I)=C$.

Покажем, что если для коалиции S нарушается одно из неравенств, то для коалиции $I\setminus S$ нарушается второе, и наоборот. Действительно, пусть $x(S)=\sum\limits_{i\in S}\xi_i C<\underline{v}_C(S)$, тогда

$$x(I\setminus S)=\sum_{i\in I\setminus S}\xi_i C=(1-\sum_{i\in S}\xi_i)C>C-\underline{v}_C(S)=$$

$$=\left(1-\frac{\sum\limits_{R\subseteq S}W(R)}{\sum\limits_{R\subseteq I}W(R)}\right)C=\frac{\sum\limits_{R\subseteq I:R\cap(I\setminus S)\neq\varnothing}W(R)}{\sum\limits_{R\subseteq I}W(R)}C=\overline{v}_C(I\setminus S).$$

Таким образом, имеют место следующие свойства:

1. $\overline{v}_C(S\cup T)+\overline{v}_C(S\cap T)\leqslant\overline{v}_C(S)+\overline{v}_C(T)$, $S\subseteq I$, $I\supseteq T$.
2. $\underline{v}_C(S\cup T)+\underline{v}_C(S\cap T)\geqslant\underline{v}_C(S)+\underline{v}_C(T)$, $S\subseteq I$, $T\subseteq I$.
3. $\{\mathbf{x}:x_i\geqslant 0,\ \sum\limits_{i\in I}x_i=C,\ \sum\limits_{i\in S}x_i\geqslant\underline{v}_C(S),\ S\subseteq I\}=$ $=\{\mathbf{x}:x_i\geqslant 0,\ \sum\limits_{i\in I}x_i=C,\ \sum\limits_{i\in S}x_i\leqslant\overline{v}_C(S),\ S\subseteq I\}$.
4. $\underline{v}_C(S)\leqslant\sum\limits_{i\in S}\xi_i C\leqslant\overline{v}_C(S)$, $S\subseteq I$.
5. Если $W(S)=W(S\cup i)$ для любой коалиции $S\subseteq I$, то $\xi_i=0$.
6. Для любого вещественного числа k $\xi^W=\xi^{kW}$.

§ 6. ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ОХРАНЫ АТМОСФЕРЫ ОТ ЗАГРЯЗНЕНИЯ

Наряду со статическими моделями, рассмотренными в предыдущих параграфах, в которых интенсивности выбросов вредной примеси были постоянными величинами, целесообразно рассматривать модели с интенсивностями выбросов, меняющимися во времени. Это позволит использовать для определения ПДВ аппарат теории дифференциальных игр и применить понятие динамической устойчивости решений.

Пусть для предприятия i интенсивность максимально возможного выброса в момент t описывается неотрицательной интегрируемой функцией $\gamma_i(t)$. Обозначим через $u_i(t)$ интенсивность выброса примеси предприятием i в момент t. Предположим, что при определенных затратах предприятие может производить полную очистку выбрасываемого аэрозоля от примеси, и будем считать, что $u_i(t)$ удовлетворяет ограничениям

$$0 \leqslant u_i(t) \leqslant \gamma_i(t), \; i=1, 2, \dots, n, \qquad (3.25)$$

в каждый момент времени $t \in [t_0, T]$.

Для описания изменения средних значений концентрации примеси, выбрасываемой в атмосферу несколькими источниками, воспользуемся уравнением турбулентной диффузии (см. главу 2 § 1)

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v_1 \frac{\partial q}{\partial x} + v_2 \frac{\partial q}{\partial y} + v_3 \frac{\partial q}{\partial z} - pq = \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial q}{\partial z} + $$

$$+ \mu \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) \omega_i(x, y, z). \qquad (3.26)$$

Здесь оси x и y расположены в горизонтальной плоскости, ось z — по вертикали; v_1, v_2, v_3 — составляющие средней скорости перемещения примеси соответственно по направлению осей x, y, z, удовлетворяющие уравнению неразрывности

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0.$$

Коэффициент p описывает изменение концентрации за счет превращения примеси. Коэффициенты ν, μ выбираются на основе теории статистической турбулентности. Функция $\omega_i(x,y,z) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$ задает местонахождение источника i, где $\mathbf{r}=(x, y, z)$, $\mathbf{r}_i=(x_i, y_i, z_i)$.

Уравнение (3.26) задано в области $D \times \Xi$, где $D \in R^3$ — цилиндрическая область, ограниченная плоскостями $z=0$ и $z=z_H$ и кусочно-гладкой боковой поверхностью G; множество Ξ имеет вид $\Xi = [t_0, T]$. Граничные условия для уравнения (3.26) запишем в виде

$$a \frac{\partial q}{\partial z} + bq = 0 \text{ при } z=0, \frac{\partial q}{\partial z} = 0 \text{ при } z=z_H; \; q=0 \text{ на G}. \qquad (3.27)$$

Здесь a и b — заданные константы или функции от x, y. Пусть в начальный момент $t=t_0$ задано распределение концентраций $q_0(x, y, z)$, которое возьмем в качестве начального условия для уравнения (3.26):

$$q(t_0, x, y, z)=q_0(x, y, z)\geqslant 0. \qquad (3.28)$$

Множество U_i измеримых функций $u_i(t)$, удовлетворяющих (3.25), будем называть множеством допустимых управлений игрока i, $U=U_1\times U_2\times\ldots\times U_n$ — множеством допустимых управлений в игре.

Предположим, что относительно коэффициентов уравнения (3.26) и граничных условий (3.27) выполнены условия, обеспечивающие существование и единственность в пространстве $H_2(D, \Xi)$ решения уравнения (3.26) с начально-граничными условиями (3.27), (3.28) для любых $q_0\in H_2(D)$ и $u\in U$, где $H_2(D, \Xi)$ — пространство Соболева второго порядка в области $D\times\Xi$ функций $q(t, x, y, z)$, суммируемых в квадрате, таких, что по всем переменным существуют обобщенные производные до второго порядка включительно [24].

Решение $q(t, x, y, z, t_0, q_0, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ уравнения (3.26) с начально-граничными условиями (3.27), (3.28) задает распределение концентрации примеси в момент t, получающееся в результате сброса $u_i(\tau)$, $0\leqslant\tau<t$.

Пусть I — по-прежнему множество игроков (предприятий). Будем считать, что выигрыш игрока определяется как затраты предприятия, взятые с обратным знаком. Предположим, что предприятие получает доход в зависимости от того, имеет ли оно возможность выбрасывать примесь или вынуждено тратить средства на очистку. Интегральный доход, который предприятие получает к моменту t, запишем в виде $\int\limits_{t_0}^{t} h_i(u_i(\tau))\,d\tau$, где $h_i(u_i(\tau))$ — неотрицательная интегрируемая функция, такая, что в любой фиксированный момент τ_0 функция $h_i(u_i)$ монотонно возрастает по u_i, $0\leqslant u_i\leqslant\gamma_i(\tau_0)$. Пусть предприятие уплачивает «налог» за загрязнение в зависимости от уровня загрязнения атмосферы в регионе, который оценивается осредненным по времени и по зоне Ω значением концентрации примеси. Определим «налог» за загрязнение для предприятия i в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\Omega} c_i(x, y, z)q(\tau, x, y, z)d\Omega d\tau,\ \Omega\in D,$$

где $c_i(x, y, z)$ — неотрицательная интегрируемая функция. Функция $c_i(x, y, z)$ позволяет задавать значение налога для каждого из игроков в зависимости от конкретных условий. И, наконец, будем считать, что предприятию может быть назначен штраф, если уровень загрязнения атмосферы превысил предельно допустимый. Предположим, что штраф задается функцией

$$s_i=\begin{cases} H_i\left(\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{\Omega} q(\tau, x, y, z)\, d\Omega d\tau\right), \frac{1}{T-t_0}\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{\Omega} q(\tau, x, y, z)\, d\Omega d\tau>\Theta, \\ 0, \ \frac{1}{T-t_0}\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{\Omega} q(\tau, x, y, z)\, d\Omega d\tau\leqslant\Theta, \end{cases}$$

где Θ — предельно допустимая средняя концентрация примеси. Таким образом, мы можем определить выигрыши игроков в виде

$$K^i(q(t, x, y, z), u_i(t)) = \int\limits_{t_0}^{T} h_i(u_i(\tau))\mathrm{d}\tau -$$

$$-\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{\Omega} c_i(x, y, z) q(\tau, x, y, z) d\tau d\Omega - s_i.$$

В качестве допустимых стратегий игроков рассмотрим кусочно-программные [36]. Обозначим через $U_i([t_1, t_2])$ множество всех сужений допустимых управлений игрока i на отрезок $[t_1, t_2)$, $t_0\leqslant t_1<t_2\leqslant T$. Пусть $\Delta_i=\{t_0=t_0^i<t_1^i<\ldots<t_{m_i}^i=T\}$ — конечные разбиения отрезка $[t_0, T]$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Определение 13. Пара $u_i(\cdot)=\{\Delta_i, a_i\}$, $a_i=(a_i^0, a_i^1, \ldots$ $\ldots, a_i^{m_i-1})$, где $a_i^{k_j}$ — отображение, которое моменту времени $t_{k_j}^i$ и состоянию $q(t_{k_j}^i, x, y, z)$ ставит в соответствие программное управление $u_i^{k_j}(t_{k_j}^i)\in U([t_{k_j}^i, t_{k_j+1}^i])$, называется кусочно-программной стратегией i-го игрока.

Обозначим множество кусочно-программных стратегий игрока i через $X_i=\{u_i(\cdot)\}$, а через $\mathbf{u}=(u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))$ — ситуацию в игре. Через $\mathbf{X}=X_1\times X_2\times X_3\times \ldots \times X_n$ обозначим множество всех ситуаций в игре.

Покажем, что каждая ситуация $(u_1(\cdot), u_2(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))$ определяет единственную в пространстве $L_2(\Xi, D)$ траекторию. Пусть в начальный момент в состоянии $q_0(x, y, z)\in H_2(D)$ игроки выбирают свои кусочно-программные стратегии $u_1=(\Delta_1, a_1)$, $u_2=(\Delta_2, a_2)$, $\ldots$, $u_n=(\Delta_n, a_n)$. Расположим числа $t_{k_j}^i$ в порядке возрастания. Тогда получим последовательность $t_0<t_1\leqslant\ldots\leqslant$ $\leqslant t_m=T$, $m=m_1+m_2+\ldots+m_n$. В начальный момент игроки выбирают согласно a_i^0 свои управления $u_i^0(t)=a_i(t_0, a_0)\in$ $\in U_i([t_0, t_1^i))$, $t\in[t_0, t_1^i)$ и не меняют их до момента t_1^i. Обозначим через $I_1\subset I$ множество игроков, для которых $t_1=t_1^i$, $i\in I_1$. Обозначим управление игрока i на отрезке $[\tau_1, \tau_2)$ через $u_i([\tau_1, \tau_2))$. В момент t_1 игроки из I_1 выбирают новые управления $u_i([t_1, t_2^i))$, $i\in I_1$. При этом $u_i^1([t_1, t_2^i])=$ $=a_i(t_1, q(t_1, x, y, z, t_0, q_0, u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau))$, где $q(t_1, x, y, z, t_0,$ $q_0, u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau))\in H_2(D)$ — решение уравнения (3.26) с начально-граничными условиями (3.27), (3.28) в момент t_1 при

допустимых управлениях $u_i(\tau)=u_i([t_0, t_1^i])$. Предположим, что множество I_1 состоит из l игроков. Тогда $t_1=t_2=\ldots=t_l<t_{l+1}$. Обозначим $I_{21}=\{i\in I;\ t_{l+1}=t_1^i\}$, $I_{22}=\{i\in I,\ t_{l+1}=t_2^i\}$. Заметим, что $I_{21}\cap I_{22}=\varnothing$.

В момент t_{l+1} игроки из I_{21} выбирают управления $u_i^1([t_{l+1}, t_2^i))=a_i(t_{l+1}, q(t_{l+1}, x, y, z, t_0, q_0, u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau)))$, где $i\in I_{21}$, $q(t_{l+1}, x, y, z, t_0, q_0, u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau))\in H_2(D)$ — решение уравнения (3.26) в момент t_{l+1} с начально-граничными условиями (3.27), (3.28). Игроки из I_{22} выбирают управления $u_i^0([t_{l+1}, t_3^i))=a_i(t_{l+1}, q(t_{l+1}, x, y, z, t_0, q_0, u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau)))$, причем управления $u_i(\tau)$ имеют следующий вид для $\tau\in[t_1, t_{l+1})$:

$$u_i(\tau)=\begin{cases} u_i^0([t_1, t_{l+1})),\ i\in I\setminus I_1, \\ u_i^1([t_1, t_{l+1})),\ i\in I_1. \end{cases}$$

Продолжая построение таким образом, мы получаем единственный набор управлений $\mathbf{u}=(u_1(t), \ldots, u_n(t))$, порожденных стратегиями $u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot)$. Так как получаемое управление $\mathbf{u}\in\mathbf{U}(\Xi)\subset L_2(\Xi)$, то ему соответствует единственное в пространстве $H_2(D, \Xi)$ решение $q(t, x, y, z, t_0, q_0, u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t))$. Следовательно, любая ситуация $u(\cdot)=(u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))\in\mathbf{X}$ определяет единственную в $H_2(D, \Xi)$ траекторию. Поскольку $\mathbf{u}(t)\subset\mathbf{U}$ и $q(t, x, y, z, t_0, q_0, u_1(t), \ldots, u_n(t))\in L_2$, однозначно определен функционал $K^i(q(t, x, y, z), u_i(t))$ и, следовательно, на множестве ситуаций $\mathbf{X}$ определена функция выигрыша i-го игрока

$$K^i_{t_0, q_0}(u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))=K_i(t_0, q_0, u_1, u_2, \ldots, u_n)=$$
$$=K^i(q(t, x, y, z), u_i(t)).$$

Таким образом, определена дифференциальная игра n лиц в нормальной форме с предписанной продолжительностью $T-t_0$, динамика которой описывается уравнением (3.26) с начально-граничными условиями (3.27), (3.28):

$$\Gamma(t_0, q_0)=\langle X_i, K^i_{t_0, q_0}, i\in I\rangle.$$

После формализации задачи как дифференциальной игры n лиц важное значение приобретает выбор принципа оптимальности. Предположим, что выигрыши трансферабельны, т. е. игроки имеют возможность передавать часть своего выигрыша другим игрокам. Это позволяет им объединяться в коалиции с целью увеличения суммарного выигрыша и распределения его в соответствии с выбранным принципом оптимальности. Для исследования возможностей такого поведения построим динамическую кооперативную игру.

Предположим, что образовалась коалиция S. Тогда множество игроков из этой коалиции можно рассматривать как одного игрока с множеством стратегий

$$X_S = \prod_{i \in S} X_i = \{u_S(\cdot) = (u_{i_1}(\cdot), \dots, u_{i_{|S|}}(\cdot)), i_k \in S\}$$

и выигрышем

$$K_S(t_0, q_0, u_S, u_{I \setminus S}) = \sum_{i \in S} K_i(t_0, q_0, u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Определим характеристическую функцию игры $\Gamma(t_0, q_0)$ следующим образом:

$$v(\varnothing) = 0, \; v(I) = \sup_{u \in U} \sum_{i \in I} K_i(t_0, q_0, u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Для любой коалиции $S \subset I$ $(\varnothing \neq S \neq I)$

$$v(S) = \mathrm{val}\,\Gamma_{S/I \setminus S}(t_0, q_0),$$

где $\Gamma_{S/I \setminus S}(t_0, q_0)$ — антагонистическая дифференциальная игра двух лиц : множества S, выступающего как максимизирующий игрок, и $I \setminus S$, выступающего как минимизирующий игрок. Множествами стратегий игроков S и $I \setminus S$ будут соответственно множества X_S и $X_{I \setminus S}$. Функция выигрыша в игре $\Gamma_{S/I \setminus S}(t_0, q_0)$ в каждой ситуации $(u_S, u_{I \setminus S})$ определяется для коалиции S как $K_S(t_0, q_0, u_S, u_{I \setminus S})$.

При определенных условиях значение антагонистической игры $\Gamma_{S/I \setminus S}(t_0, q_0)$ может не существовать. В этом случае можно определять характеристическую функцию следующим образом:

$$v(s) = \sup_{u_S \in X_S} \; \inf_{u_{I \setminus S} \in X_{I \setminus S}} K_S(t_0, q_0, u_S, u_{I \setminus S}).$$

Определение 14. Траекторию $\overline{q}(t, x, y, z)$ управления (3.26) с начально-граничными условиями (3.27), (3.28) и соответствующее ей программное управление $\overline{u}(t) = (\overline{u}_1(t), \overline{u}_2(t), \dots, \overline{u}_n(t))$ будем называть оптимальной траекторией и оптимальным управлением в игре $\Gamma(t_0, q_0)$, если

$$\sum_{i \in I} K_i(t_0, q_0, \overline{u}_1, \dots, \overline{u}_n) = \sup_{u \in U} \sum_{i \in I} K_i(t_0, q_0, u_1, \dots, u_n) \qquad (3.29)$$

при условии

$$\frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^{T} \int_{\Omega} \overline{q}(t, x, y, z, t_0, q_0, \overline{u_1}, \dots, \overline{u_n}) d\Omega dt \leqslant \Theta. \qquad (3.30)$$

Заметим, что оптимальная траектория и оптимальное управление существуют не всегда.

Если при выполнении (3.29) условие (3.30) нарушается, то траекторию $q(t, x, y, z)$ нельзя считать допустимой с точки зрения сохранения окружающей среды. В этом случае интересы предприятий (игроков), направленные на максимизацию выгрыша, вступают в противоречие с требованием сохранения допустимого уровня загрязнения. Поэтому с помощью увеличения размеров штрафов необходимо добиться выполнения условия (3.30).

Будем предполагать, что оптимальная траектория и оптимальное управление существуют, и рассмотрим дифференциальную игру в форме характеристической функции $v(S, t_0, q_0)$.

Обозначим $E(t_0, q_0)=\{\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n):\xi_i\geqslant v(\{i\}, t_0, q_0)$ для всех $i\in I$, $\sum\limits_{i\in I}\xi_i=v(I, t_0, q_0)\}$ — множество всех реализуемых в игре $\Gamma(t_0, q_0)$ дележей. Под решением кооперативной игры будем понимать подмножество $M(t_0, q_0)$ множества $E(t_0, q_0)$, определяемое в зависимости от выбранного принципа оптимальности.

Допустим, что игроки договорились о реализации определенного дележа в условиях характеристической функции v и плата игрокам происходит непрерывно во времени. В связи с этим встает вопрос о том, какова «устойчивая» доля, которую должен получить игрок к моменту t, чтобы в течение всей игры он не отклонялся от принятого соглашения.

Пусть $\bar{q}(t, x, y, z)$ — оптимальная траектория в игре $\Gamma(t_0, q_0)$, а $\Gamma(t, \bar{q}(t, x, y, z))$, $t_0\leqslant t<T$,— текущая игра с решением $M(t, \bar{q}(t, x, y, z))\subset E(t, \bar{q}(t, x, y, z))$, где

$$E(t, \bar{q}(t, x, y, z))=\{\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n):\xi_i\geqslant v(\{i\}, t, \bar{q}(t, x, y, z))$$

для всех $i\in I$, $\sum\limits_{i\in I}\xi_i=v(I, t, \bar{q}(t, x, y, z))\}$. Здесь через $v(I, t, \bar{q}(t, x, y, z))$ обозначена характеристическая функция текущей игры $\Gamma(t, \bar{q}(t, x, y, z))$. Предположим, что $M(t, \bar{q}(t, x, y, z))\neq\varnothing$ для всех $t\in[t_0, T]$.

Определение 15. Дележ $\xi\in M(t_0, q_0)$ будем называть динамически устойчивым вдоль траектории $\bar{q}(t, x, y, z)$, если для любого $t\in[t_0, T]$ найдется непустое подмножество $M'(t, \bar{q}(t, x, y, z))$ множества $M(t, \bar{q}(t, x, y, z))$, такое, что

$$\xi\in\{\alpha(t)+M'(t, \bar{q}(t, x, y, z))\}\subseteq M(t_0, q_0),$$

где $\alpha(t)$ — вектор выигрышей, полученных игроками к моменту t; $\alpha(t)+M'(t, \bar{q}(t, x, y, z))$ — множество всех векторов вида $\alpha(t)+\mathbf{y}$, где $\mathbf{y}\in M'(t, \bar{q}(t, x, y, z))$.

Решение кооперативной игры будем называть динамически устойчивым, если динамически устойчивы все входящие в него дележи.

Понятие динамической устойчивости в неантагонистических дифференциальных играх было впервые введено в работе [36]. Динамическая устойчивость решения кооперативной дифференциальной игры означает, что к любому моменту $t\in[t_0, T]$ каждый игрок должен получить такой выигрыш $\alpha(t)$, чтобы оставшаяся часть дележа $\xi-\alpha(t)$ была оптимальным дележом в текущей игре $\Gamma(t, q(t, x, y, z))$. Динамически устойчивые решения обладают тем важным свойством, что достигнутая между игроками в начальный момент времени договоренность о выборе дележа не нарушается в процессе игры, если, конечно, игроки не отклоняются от выбранного принципа оптимальности. В дальнейшем мы будем предполагать, что игроки на протяжении игры не отклоняются от выбранного принципа оптимальности.

Представим накопленный выигрыш, который получают игроки к моменту времени t на отрезке $[t_0, t]$, в виде

$$\alpha_i(t)=\int_{t_0}^{t} h_i(\overline{u}_i(\tau))d\tau-\beta_i(t)\sum_{i\in I}\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega} c_i(x, y, z)\overline{q}(\tau, x, y, z)\, d\Omega d\tau, \tag{3.31}$$

где функции $\beta_i(t)$ для всех $t\in[t_0, T]$ удовлетворяют условиям

$$0\leqslant\beta_i(t)\leqslant 1,\ i\in I,\ \sum_{i\in I}\beta_i(t)=1.$$

Выбор функций $\beta_i(t)$ имеет важное значение, поскольку позволяет регулировать величину выигрышей, получаемых игроками к моменту t, и, следовательно, способствовать обеспечению динамической устойчивости решений. В дальнейшем мы покажем, каким условиям должны удовлетворять функции $\beta_i(t)$, чтобы решения игры были динамически устойчивы.

Исследуем понятие динамической устойчивости решений кооперативной игры $v(S, t_0, q_0)$ на примере C-ядра.

Определение 16. C-ядром текущей игры $\Gamma(t, \overline{q}(t, x, y, z))$ будем называть множество дележей

$$C(t, \overline{q}(t, x, y, z))=\{\xi^t=(\xi_1^t, \ldots, \xi_n^t)\in E(t, \overline{q}(t, x, y, z)):$$
$$\sum_{i\in S}\xi_i^t\geqslant v(S, t, \overline{q}(t, x, y, z),\ S\in I)\}.$$

Пусть выигрыши $\alpha(t)$, получаемые игроками к моменту t, определяются согласно (3.31). Рассмотрим вопрос о том, каким условиям должны удовлетворять функции $\beta_i(t)$, чтобы C-ядро игры $\Gamma(t_0, q_0)$ было динамически устойчивым. Распорядимся вектором $\beta(t)$ таким образом, чтобы $\xi-\alpha(t)\in C(t, \overline{q}(t, x, y, z))$. Это означает, что (см. § 1)

$$\sum_{i\in S}\xi_i-\sum_{i\in S}\alpha_i(t)\geqslant v(S, t, \overline{q}(t, x, y, z)),\ S\subset I;$$

$$\sum_{i\in I}\xi_i-\sum_{i\in I}\alpha_i(t)=v(I, t, \overline{q}(t, x, y, z)).$$

Учитывая, что

$$\sum_{i\in I}\xi_i=v(I, t_0, q_0),\ \sum_{i\in I\setminus S}\xi_i\geqslant v(I\setminus S, t_0, q_0),$$

получим

$$\sum_{i\in S} \alpha_i(t)\leqslant v(I, t_0, q_0)-v(I\setminus S, t_0, q_0)-v(S, t, \overline{q}(t, x, y, z)),$$

или

$$\sum_{i\in S} \beta_i(t) \sum_{j\in I} \int_{t_0}^{t}\int_{\Omega} c_j(x, y, z)\overline{q}(t, x, y, z)\, d\Omega d\tau\leqslant v(I, t_0, q_0)-$$

$$-v(I\setminus S, t_0, q_0)-v(S, t, \overline{q}(t, x, y, z))-\sum_{i\in S}\int_{t_0}^{t} h_i(\overline{u}_i(\tau))d\tau.$$

Окончательно перепишем неравенство в виде

$$\sum_{i\in S} \beta_i(t)\geqslant(v(I\setminus S, t_0, q_0)-v(S, t, \overline{q}(t, x, y, z))-v(I, t_0, q_0)+$$

$$+\sum_{i\in S}\int_{t_0}^{t} h_i(\overline{u}_i(\tau))\, d\tau)/\sum_{i\in S}\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega} c_i(x, y, z)\,\overline{q}(\tau, x, y, z)\, d\Omega d\tau.$$

Заметим, что в каждый момент должно выполняться равенство

$$\sum_{i\in I} \alpha_i(t)=v(I, t_0, q_0,)-v(I, t, \overline{q}(t, x, y, z))=$$

$$=-\sum_{i\in I}\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega} c_i(x, y, z)\, q(t, x, y, z)d\Omega d\tau+\sum_{i\in I}\int_{t_0}^{t} h_i(\overline{u}_i(\tau))d\tau,$$

и, следовательно (см. (3.31)), $\sum_{i\in I} \beta_i(t)=1$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 11. Для того чтобы C-ядро $C(t_0, q_0)$ в игре $\Gamma(t_0, q_0)$ с характеристической функцией $v(S, t_0, q_0)$ было динамически устойчивым, необходимо, чтобы для каждого дележа $\xi\in C(t_0, q_0)$ существовала вектор-функция $\boldsymbol{\beta}(t)$, такая, что

$$\xi_i=\int_{t_0}^{T} h_i(\overline{u}_i(\tau))d\tau-\beta_i(T)\sum_{j\in I}\int_{t_0}^{T}\int_{\Omega} c_j(x, y, z)\,\overline{q}(\tau, x, y, z)d\Omega d\tau,\ i\in I,$$

и для любого $t\in(t_0, T]$ выполнялись условия:

1) для всех $S\subseteq I$

$$\sum_{i\in S} \beta_i(t)\geqslant(v(I\setminus S, t_0, q_0)-v(I, t_0, q_0,)+(S, t, \overline{q}(t, x, y, z))+$$

$$+\sum_{i\in S}\int_{t_0}^{t} h_i(\overline{u}_i(\tau))d\tau)/\sum_{i\in I}\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega} c_i(x, y, \overline{z})q(\tau, x, y, z)d\Omega d\tau;$$

2) $\sum_{i\in I} \beta_i(t)=1,\ 0\leqslant\beta_i(t)\leqslant 1.$

Теорема 11 дает нам необходимые условия динамической устойчивости C-ядра рассматриваемой игры.

Предположим, что существует вектор-функция $\boldsymbol{\beta}(t)$, такая, что для всех $S\subseteq I$, $t\in[t_0, T]$

$$\sum_{i\in S} \beta_i(t)\geqslant(v(S, t, \overline{q}(t, x, y, z))-v(S, t_0, q_0)+$$

$$+\sum_{i\in S}\int_{t_0}^{t} h_i(\bar{u}_i(\tau))d\tau)/\sum_{i\in I}\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega} c_i(x, y, z)\bar{q}(\tau, x, y, z)d\Omega d\tau,$$

$$\sum_{i\in I}\beta_i(t)=1.$$

Тогда

$$\sum_{i\in S}\alpha_i(t)\leqslant v(S, t_0, q_0)-v(S, t, \bar{q}(t, x, y, z)).$$

Поскольку $\xi=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ принадлежит ядру игры $\Gamma(t_0, q_0)$, т. е. $\sum_{i\in S}\xi_i\geqslant v(S, t_0, q_0)$, $S\subset I$, то приходим к неравенству

$$\sum_{i\in S}\xi_i-\sum_{i\in S}\alpha_i(t)\geqslant v(S, t, \bar{q}(t, x, y, z)).$$

Следовательно, $\xi-\alpha(t)\in C(t, \bar{q}(t, x, y, z))$.

Теорема 12. Если для каждого $\xi\in C(t_0, q_0)$ существует вектор-функция $\beta(t)$, такая, что

$$\xi_i=\int_{t_0}^{T} h_i(\bar{u}_i(\tau))d\tau-\beta_i(T)\sum_{j\in I}\int_{t_0}^{T}\int_{\Omega} c_j(x, y, z)\bar{q}(\tau, x, y, z)d\Omega d\tau,$$

и для любого $t\in(t_0, T)$ выполнены условия

$$\sum_{i\in S}\beta_i(t)\geqslant(v(S, t, \bar{q}(t, x, y, z))-v(s, t_0, q_0)+$$

$$+\sum_{i\in S}\int_{t_0}^{t} h_i(\bar{u}_i(\tau))d\tau)/\sum_{i\in I}\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega} c_i(x, y, z)\bar{q}(\tau, x, y, z)d\Omega d\tau, \quad S\subset I;$$

$$\sum_{i\in I}\beta_i(t)=1, \quad 0\leqslant\beta_i(t)\leqslant 1,$$

то C-ядро динамически устойчиво в игре $\Gamma(t_0, q_0)$ с характеристической функцией $v(S, t_0, q_0)$.

§ 7. ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ОБЪЕДИНЕНИЯ УСИЛИЙ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ПРИРОДООХРАННЫХ МЕРОПРИЯТИЙ

Пусть объем капиталовложений, выделяемых предприятиями для проведения в течение планируемого периода $[0, T]$ мероприятий по снижению уровня загрязнения, определяется вектором $\mathbf{w}=(w_1, w_2, \dots, w_n)$, где w_i — объем капиталовложений, выделяемых предприятием i. Также известно, что в год l $(l=1, 2, \dots, T)$ этот объем составляет величину $w_{il}\geqslant 0$. Очевидно, $\sum_{l=1}^{T} w_{il}=w_i$. Каждому предприятию планируется снижение выброса в течение периода $[0, T]$ на величину Δx_i. Между плановым заданием на снижение выброса и выделяемым объемом капиталовложений существует связь, а именно $w_i=\Delta x_i/\gamma_i$, $\gamma_i>0$, $i=1, 2, \dots, n$.

Определение плановых заданий по снижению выбросов обусловлено необходимостью снижения уровня загрязнения в экологически значимых зонах $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$, расположенных на территории региона. Предположим, что для каждой из зон такое снижение задается величиной Δq_j. При этом величины $\{\Delta q_j\}$ и $\{\Delta x_i\}$ связаны уравнением

$$\Delta q_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ji}\Delta x_i,\ c_{ji}>0,\ j=1, \dots, m.$$

Будем считать, что предприятиям предоставлена возможность объединить свои усилия при проведении мероприятий по снижению уровня загрязнения с целью достижения планируемого уровня загрязнения в зонах Ω_j при меньших затратах, а часть капиталовложений, высвободившихся в результате объединения усилий, распределить между собой в виде премии.

Пусть группа предприятий S имеет возможность осуществить совместно некоторую совокупность мероприятий, направленных на снижение уровня загрязнения, которую мы обозначим через R^S; $a_k^S>0$ — объем капиталовложений, необходимых для осуществления группой S мероприятия $k\in R^S$ за счет капиталовложений $w(S)=\sum_{i\in S} w_i$; $\mu_{ik}^S>0$ — коэффициент, характеризующий сокращение выброса предприятия $i\in S$ на единицу капиталовложений при проведении мероприятия $k\in R^S$ в условиях коопераций предприятий из S (снижение выброса считается прямо пропорциональным объему капиталовложений, направляемых на проведение мероприятия).

Предположим, что для любых $Q\subset I$ и $F\subset I$, таких, что $Q\cap F=\varnothing$,

$$R^Q\cap R^F=\varnothing, \tag{3.32}$$

для S и S', таких, что $S\subseteq S'\subseteq I$, справедливо

$$R^S\subseteq R^{S'}, \tag{3.33}$$

$$a_k^{S'}\geqslant a_k^{S'},\ k\in R^S, \tag{3.34}$$

$$\mu_{ik}^S\, a_k^S \leqslant \mu_k^{S'}\, a_k^{s'},\ k\in R^S,\ i\in S, \tag{3.35}$$

и для любого $i\in I$

$$\gamma_i = \max_{k\in R^{\{i\}}} \mu_{ik}^{\{i\}}. \tag{3.36}$$

Условие (3.33) означает, что бо́льшая коалиция обладает бо́льшими возможностями по проведению совместных мероприятий. Условие (3.34) означает, что если мероприятие k проводится бо́льшей коалицией, то требуется меньший объем капиталовложений. Естественно также предположить, что бо́льшая коалиция может более эффективно использовать капиталовложения за счет внутренних организационных резервов. Это отражено в условии (3.35).

Условие (3.36) означает, что каждое предприятие, действуя изолированно, выбирает мероприятие для снижения уровня загрязнения, требующее минимальных затрат.

Пусть $\Delta q_j^S = \sum\limits_{i\in S} c_{ji}\Delta x_i$ — доля группы предприятий S в снижении уровня загрязнения в зоне Ω_j, а $\Delta \mathbf{q}^S = (\Delta q_1^S, \Delta q_2^S, \ldots$ $\ldots, \Delta q_m^S)$ — вектор, характеризующий планируемый вклад этой группы в снижение уровня загрязнения во всех экологически значимых зонах. Введем в рассмотрение функцию $\overline{v}(S)$, $S\subseteq I$:

$$\overline{v}(S) = \min_y \sum_{k\in R^S} a_k^S\, y_k \tag{3.37}$$

при условии

$$\sum_{k\in R^S} \sum_{i\in S} c_{ji}\mu_{ik}^S\, a_k^S\, y_k \geqslant \Delta q_j^S,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m; \tag{3.38}$$

$$\sum_{k\in R^S} a_k^S\, y_k \leqslant \sum_{i\in S} w_i,$$

где y_k принимает значения 0 или 1. Предположим, что выделенные капиталовложения w_i должны быть такими, чтобы существовало по крайней мере одно допустимое решение задачи (3.38). Функция $\overline{v}(S)$ характеризует минимальные затраты группы предприятий S на достижение планируемого снижения уровня загрязнения $\Delta\mathbf{q}^S$ и обладает следующим свойством:

$$\overline{v}(Q+F) \leqslant \overline{v}(Q) + \overline{v}(F),\ Q\cap F=\varnothing. \tag{3.39}$$

Действительно, возьмем любые непересекающиеся группы предприятий $Q\subset I$, $F\subset I$. Пусть y^Q и y^F есть решения задачи (3.37), (3.38) при S, равном соответственно Q и F. Обозначим через P_Q множество мероприятий, проводимых группой предприятий Q для достижения планируемого снижения уровня загрязнения $\Delta\mathbf{q}^Q$ при минимальных затратах, т. е. $P^Q = \{k\in R^Q : y_k^Q = 1\}$. Аналогично $P^F = \{k\in R^F : y_k^F = 1\}$. Учитывая (3.34), имеем

$$\sum_{k\in P^Q} a_k^Q \geqslant \sum_{k\in P^Q} a_k^{Q\cup F},\ \sum_{k\in P^F} a_k^F \geqslant \sum_{k\in P^F} a_k^{Q\cup F}.$$

Отсюда в силу (3.32) получаем

$$\sum_{k\in P^Q} a_k^Q + \sum_{k\in P^F} a_k^F \geqslant \sum_{k\in P^Q\cup P^F} a_k^{Q\cup F}. \tag{3.40}$$

Используя свойства (3.32) и (3.35), приходим к следующим неравенствам:

$$\sum_{k\in P^Q} \sum_{i\in Q} c_{ji}\mu_{ik}^Q\, a_k^Q + \sum_{k\in P^F} \sum_{i\in F} c_{ji}\mu_k^F\, a_k^F \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k\in P^Q}\sum_{i\in Q} c_{ji}\mu_{ik}^{Q\cup F} a_k^{Q\cup F} + \sum_{k\in P^F}\sum_{i\in F} c_{ji}\mu_{k}^{Q\cup F} a_k^{Q\cup F} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k\in P^Q}\sum_{i\in Q} c_{ji}\mu_{ik}^{Q\cup F} a_k^{Q\cup F} + \sum_{k\in P^F}\sum_{i\in Q} c_{ji}\mu_{ik}^{Q\cup F} a_k^{Q\cup F} +$$

$$+ \sum_{k\in P^F}\sum_{i\in F} c_{ji}\mu_{ik}^{Q\cup F} a_k^{Q\cup F} + \sum_{k\in P^Q}\sum_{i\in F} c_{ji}\mu_{ik}^{Q\cup F} a_k^{Q\cup F} =$$

$$= \sum_{k\in P^F\cup P^Q}\sum_{i\in Q\cup F} c_{ji}\mu_{ik}^{Q\cup F} a_k^{Q\cup F}.$$

Таким образом:

$$\sum_{k\in P^Q}\sum_{i\in Q} c_{ji}\mu_{ik}^{Q} a_k^{Q} + \sum_{k\in P^F}\sum_{i\in F} c_{ji}\mu_{ik}^{F} a_k^{F} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k\in P^F\cup P^Q}\sum_{i\in Q\cup F} c_{ji}\mu_{ik}^{Q\cup F} a_k^{Q\cup F}, \quad j=1, 2, \dots, m.$$

Пусть $y^{Q\cup F}$ есть решение задачи (3.37)—(3.38) при $S=Q\cup F$. Поскольку

$$\sum_{k\in P^Q}\sum_{i\in Q} c_{ji}\mu_{ik}^{Q} a_k^{Q} \geqslant \Delta q_j^Q, \quad \sum_{k\in P^F}\sum_{i\in F} c_{ji}\mu_{ik}^{F} a_k^{F} \geqslant \Delta q_j^F,$$

$$\Delta q_j^{Q\cup F} = \Delta q_j^Q + \Delta q_j^F, \quad j=1, 2, \dots, m,$$

то с учетом (3.40) имеем

$$\sum_{k\in P^Q\cup P^F}\sum_{i\in Q\cup F} c_{ji}\mu_{ik}^{Q\cup F} a_k^{Q\cup F} \geqslant \Delta q_j^{Q\cup F}, \quad j=1, 2, \dots, m.$$

Отсюда, учитывая, что $P^Q\cup P^F \subset R^{Q\cup F}$, получаем

$$\sum_{k\in R^{Q\cup F}} a_k^{Q\cup F} y_k^{Q\cup F} \leqslant \sum_{k\in P^Q\cup P^F} a_k^{Q\cup F} y_k^{Q\cup F}$$

и окончательно

$$\overline{v}(Q)+\overline{v}(F) = \sum_{k\in P^Q} a_k^Q + \sum_{k\in P^F} a_k^F \geqslant \sum_{k\in P^{Q\cup F}}$$

$$a_k^{Q\cup F} y_k^{Q\cup F} = \overline{v}(Q\cup F).$$

Таким образом, справедливость (3.39) доказана. Так как $\gamma_i = \max\limits_{k\in R^{\{i\}}} \mu_{ik}^{\{i\}}$, то $w_i=\overline{v}(\{i\})$. Из (3.39) следует, что

$$\overline{v}(S) \leqslant \overline{v}(S \setminus \{i\}) + \overline{v}(\{i\}) \leqslant \dots \leqslant \sum_{i\in S} \overline{v}(\{i\}) = \sum_{i\in S} w_i.$$

Отсюда заключаем, что (3.38) также справедливо.

Предположим, что все предприятия объединяют свои усилия и проводят множество мероприятий $P^I \subseteq R^I$, которые обеспечивают в условиях кооперации достижение планируемого снижения уровня загрязнения Δq_j ($j=1, 2, \dots, m$) при наименьших затратах. Объем капиталовложений, который необходимо выделить для проведения мероприятия $k \in P^I$, равен a_k^I. Если в l-й год для проведения мероприятия $k \in P^I$ выделяется a_{kl}^I рублей капиталовложений, то к концу l-го года произойдет снижение уровня загрязнения в зоне Ω_j за счет предприятий S на величину

$$\Delta q_{jl}^S = \sum_{i \in S} c_{ji} \sum_{k \in P^I} \mu_{ik}^I \sum_{r=1}^{l} a_{kr}^I .$$

Определим функцию $\overline{v}(S, l)$ следующим образом:

$$\overline{v}(S, l) = \min_{y} \sum_{k \in R_l^S} a_k^{S,l} y_k$$

при условии

$$\sum_{k \in R_l^S} a_k^{S,l} y_k \leqslant \sum_{r=l+1}^{T} \sum_{i \in S} w_{ir},$$

$$\sum_{k \in R_l^S} \sum_{i \in S} c_{ji} \mu_{ik}^{S,l} a_k^{S,l} \geqslant \Delta q_j^S - \Delta q_{jl}^S, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где R_l^S — набор мероприятий, которые может осуществить группа предприятий S за период $[l+1, T]$; $\mu_{ik}^{S,l}$ — коэффициент, характеризующий снижение выброса предприятия $i \in S$ при вложении в мероприятие $k \in R_l^S$ единичного объема капиталовложений в условиях кооперации предприятий из S в течение периода $[l+1, T]$; $a_k^{S,l}$ — объем капиталовложений, который необходимо выделить группе предприятий S для осуществления мероприятия $k \in R_l^S$ в течение периода $[l+1, T]$.

Предположим, что для любого $l = 1, 2, \dots, T$ выполнены условия, аналогичные (3.34), (3.35), тогда, очевидно, $\overline{v}(Q, l) + \overline{v}(F, l) \geqslant \overline{v}(Q \cup F, l)$, $Q \cap F = \varnothing$.

Определение 17. План распределения капиталовложений по годам $\{a_{kl}^I\}_{k \in P^I}$ $(l = 1, 2, \dots, T)$ будем называть допустимым, если

$$\sum_{k \in P^I} a_{kl}^I \leqslant \sum_{i \in I} w_{il}, \quad l = 1, 2, \dots, T; \qquad \sum_{r=1}^{T} a_{kr}^I = a_k^I, \quad k \in P^I.$$

Пусть выбран допустимый план распределения капиталовложений $\{a_{kl}^I\}$, $k \in P^I$, $l = 1, 2, \dots, T$.

Неизрасходованная часть капиталовложений, которая может быть распределена между предприятиями в виде премии, равна $\sum_{i \in I} w_i - \sum_{k \in P^I} a_k^I$.

Для определения принципов премирования построим теоретико-игровую модель, в которой игроками являются предприятия. Характеристическую функцию соответствующей кооперативной игры n лиц запишем в виде $v(S)=\sum_{i\in S} w_i-\bar{v}(S)$, $S\subseteq I$.

Поскольку $\bar{v}(I)=\sum_{k\in P^I} a_k^l$, то $v(I)=\sum_{i\in I} w_i-\sum_{k\in P^I} a_k^l$.

Таким образом, дележу в кооперативной игре подлежит весь объем неизрасходованных капиталовложений. Премия накапливается постепенно и к концу года l составляет величину $\sum_{r=1}^{l}\left(\sum_{i\in S} w_{ir}-\sum_{k\in P^I} \bar{a}_{kr}^l\right)$. Предположим, что премия, поступающая каждый год, целиком подлежит распределению. Здесь возникает вопрос, как распределить премии на всем интервале времени $[t_0, T]$, чтобы игроки согласились участвовать в общей коалиции I и не создавали никаких подкоалиций, и как распределять премию по годам, чтобы ни один из игроков не отказался от намеченного соглашения действовать совместно.

Хорошим распределением премии может быть, например, такое распределение, при котором дележ принадлежит C-ядру игры, определенной на отрезке $[0, T]$.

Рассмотрим в качестве решения игры C-ядро, и пусть $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — некоторый дележ из C-ядра. Выбранный дележ должен удовлетворять неравенствам

$$\xi_i\geqslant 0,\ \sum_{i\in S}\xi_i\geqslant v(S),\ \sum_{i\in I}\xi_i=v(I)=\sum_{i\in I} w_i-\sum_{k\in P^I} a_k^l,$$

где ξ_i представляет собой премию, которую получает предприятие за весь период $[0, T]$.

Однако теперь, чтобы определить размер премии по годам, гарантирующий сохранение соглашения действовать совместно, необходимо так распределять премию каждый год, чтобы остаток премии принадлежал C-ядру текущей игры. Поэтому предположим, что C-ядро непусто вдоль выбранного плана $\{\bar{a}_{kl}^l\}$, и рассмотрим вопрос о его динамической устойчивости.

Характеристическую функцию текущей игры запишем в виде

$$v(S, l)=\sum_{r=l+1}^{T}\sum_{i\in S} w_{ir}-\bar{v}(S, l).$$

Поскольку $\bar{v}(I, l)=\sum_{r=l+1}^{T}\sum_{i\in S}\bar{a}_{kr}^l$, то

$$v(I, l)=\sum_{r=l+1}^{T}\left(\sum_{i\in I} w_{ir}-\sum_{k\in P^I}\bar{a}_{kr}^l\right).$$

Следовательно, дележу в текущей игре подлежит та часть премии, которая поступит в течение периода $[l+1, T]$.

Заметим, что $v(S, 0)=v(S)$. Обозначим через $\alpha_i(l)$ накопленный выигрыш, который игрок получает к концу года l. Предположим, что $\alpha_i(l)$ определяется по формуле

$$\alpha_i(l)=\beta_i(l)\sum_{r=1}^{l}\left(\sum_{i\in I} w_{ir}-\sum_{k\in P^l}\bar{a}^l_{kr}\right), \qquad (3.41)$$

где

$$\sum_{i\in I}\beta_i(l)=1,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ T,\ 0\leqslant\beta_i(l)\leqslant 1,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (3.42)$$

Выбранный дележ ξ будет динамически устойчивым элементом ядра, если для любого l дележ $\xi^l=(\xi_1-\alpha_1(l),\ \ldots,\ \xi_n-\alpha_n(l))$ будет принадлежать C-ядру текущей игры $v(S,\ l)$, т. е. будут выполнены условия

$$\xi_i-\alpha_i(l)\geqslant 0, \qquad (3.43)$$

$$\sum_{i\in S}(\xi_i-\alpha_i(l))\geqslant v(S,\ l),\ S\subset I, \qquad (3.44)$$

$$\sum_{i\in I}(\xi_i-\alpha_i(l))=v(I,\ l)=\sum_{r=l+1}^{T}\left(\sum_{i\in I} w_{ir}-\sum_{k\in P^l} a^l_{kr}\right). \qquad (3.45)$$

В силу (3.41) и (3.42) условие (3.45) выполняется. Подставим выражение для $\alpha_i(l)$ из (3.41) в (3.44) и получим условие для функций $\beta_i(l)$:

$$\sum_{i\in S}\beta_i(l)\leqslant\frac{\sum\limits_{i\in S}\xi_i-v(S,\ l)}{\sum\limits_{r=1}^{l}\left(\sum\limits_{i\in I} w_{ir}-\sum\limits_{k\in P^l}\bar{a}^l_{kr}\right)}. \qquad (3.46)$$

Таким образом, если удастся подобрать для каждого дележа из C-ядра вектор-функцию $\boldsymbol{\beta}(l)$, удовлетворяющую условиям (3.41), (3.42) и (3.46), то C-ядро будет динамически устойчивым в кооперативной игре с характеристической функцией v.

Динамическая устойчивость решения игры означает, что существует возможность таким образом премировать предприятия, чтобы они были заинтересованы в осуществлении намеченного плана совместных мероприятий в течение всего периода.

Глава 4
ИЕРАРХИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЕМ

§ 1. ОСНОВНЫЕ И СОПУТСТВУЮЩИЕ КОМПОНЕНТЫ РАЗВИТИЯ ЗАМКНУТЫХ ЭКОСИСТЕМ

При построении динамических моделей развития даже сравнительно небольших экологически замкнутых регионов возникает необходимость учета сложных взаимосвязей компонент модели, оказывающих действенное влияние на реализацию альтернатив развития и достижения поставленных целей. Внутренние межкомпонентные связи могут быть описаны с помощью конечного графа $\Gamma=(Z, \Gamma)$ (см. [3]), вершинами которого служат компоненты модели. На графе межкомпонентных связей Γ целесообразно выделить основные компоненты модели развития, которые могут непосредственно управляться извне путем выделения дополнительных ресурсов и капиталовложений, и сопутствующие компоненты, состояние которых однозначно определяется состоянием основных компонент. При моделировании такой сложной системы необходимо иметь в виду, что развитие основных компонент может управляться относительно независимыми сторонами, имеющими свои собственные цели, не всегда совпадающие с общими целями развития региона. Это приводит к необходимости исследования иерархического графа Γ межкомпонентных связей с определением ограничений, накладываемых компонентами системы друг на друга, формулировкой общей цели развития и подцелей развития для каждой из основных компонент. Математическими моделями функционирования иерархических систем управления с учетом несовпадающих интересов компонент системы являются иерархические игры.

Поясним высказанные положения на хорошо известном в научной литературе примере (см. [49]) развития высокогорной деревни Обергурль (Австрия). Находясь на высоте 2000 м над уровнем моря, она привлекает к себе постоянно увеличивающийся поток туристов как зимой, так и летом. К 70-м годам стали проявляться первые признаки экологических последствий бурного развития вследствие строительства гостиниц и подъемников, резкого увеличения числа людей и транспортных потоков в деревне и ее окрестностях. В настоящее время стала реальной опасность того, что туристы перестанут посещать деревню, поскольку она потеряет для них всякую привлекательность.

Ограничивающим фактором развития туризма является нехватка площадей под строительство новых гостиниц и недостаток безопасных от снежных лавин площадей. По инициативе национального комитета Австрии по МАБ Обергурль была выбрана в качестве объекта для интенсивных исследований. При тесном взаимодействии ученых разных специальностей: метеорологов, ботаников, зоологов, микробиологов, географов, экономистов, социологов и даже антропологов были разработаны различные динамические модели развития Обергурль. Здесь мы не будем касаться подробно описания этих моделей, поскольку использованный при их исследовании математический аппарат был достаточно простым. Нас интересует граф связей важнейших компонент, которые следует учитывать при планировании сбалансированного развития. Такой граф приведен в [49] и там же качественно проанализированы неожиданные воздействия, которые может оказать изменение одной из компонент графа на другие. Вместе с тем в [49] нет разбиения компонент на основные и сопутствующие.

Пусть общий конечный граф (Z, Γ) определяет взаимосвязь компонент замкнутой экологической системы [3]. Узлы $z \in Z$ представляют собой компоненты, а отображение Γ определяет зависимость компонент между собой.

Предположим, что множество Z разбито на два подмножества X, Y ($X \cup Y = Z$, $X \cap Y = \varnothing$) основных управляемых извне компонент (X) и сопутствующих компонент (Y). Перенумеруем компоненты множества X индексами $i = 1, \ldots, m$, а компоненты множества Y — индексами $j = 1, \ldots, n$. Количественное состояние компоненты $i \in X$ определяется вектором $\mathbf{x}^i \in R^n$, количественное состояние компоненты $j \in Y$ — вектором $\mathbf{y}^j \in R^n$.

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{x}^{\Gamma^{-1}(j)} = \{\mathbf{x}^k : k \in \Gamma^{-1}(j)\}, \quad \mathbf{y}^{\Gamma^{-1}(j)} = \{\mathbf{y}^k : k \in \Gamma^{-1}(j)\},$$

т. е. $\mathbf{x}^{\Gamma^{-1}(j)}$, $\mathbf{y}^{\Gamma^{-1}(j)}$ — векторы, координаты которых представляют собой количественные состояния компонент из множеств $\Gamma^{-1}(j) \cap X$ и $\Gamma^{-1}(j) \cap Y$ соответственно.

Обозначения $\mathbf{h}_j[\mathbf{x}^{\Gamma^{-1}(j)}, \mathbf{y}^{\Gamma^{-1}(j)}]$, $\mathbf{f}_i[\mathbf{x}^{\Gamma^{-1}(i)}, \mathbf{y}^{\Gamma^{-1}(i)}]$, $\mathbf{u}_i[\mathbf{x}^{\Gamma^{-1}(i)}, \mathbf{y}^{\Gamma^{-1}(i)}]$ будем использовать для выражения зависимостей соответствующих функций от количественных состояний компонент из множеств $\Gamma^{-1}(i)$, $\Gamma^{-1}(j)$. Предположим, что можно определить балансовые соотношения

$$\mathbf{y}^{(j)} = \mathbf{h}_j[\mathbf{x}^{\Gamma^{-1}(j)}, \mathbf{y}^{\Gamma^{-1}(j)}], \; j \in Y; \quad \mathbf{x}^i = \mathbf{f}_i\{[\mathbf{x}^{\Gamma^{-1}(i)}, \mathbf{y}^{\Gamma^{-1}(i)}], \mathbf{u}_i\}, \; i \in X,$$

где $\mathbf{h}_j$, $\mathbf{f}_i$ — вещественные вектор-функции с размерностью n; $\mathbf{u}_i$ — управляющий параметр из множества

$$U_i[\mathbf{x}^{\Gamma^{-1}(i)}, \mathbf{y}^{\Gamma^{-1}(i)}] \subset R^l,$$

структура которого определяется количественными состояниями компонент, оказывающих влияние на изменения компоненты $\mathbf{x}^i$. С каждой компонентой $i \in X$ свяжем выигрыш стороны, заинтересованной в развитии этой компоненты и имеющей возможность с помощью выбора управления $\mathbf{u}_i \subset U_i[\mathbf{x}^{\Gamma^{-1}(i)}, \mathbf{y}^{\Gamma^{-1}(i)}]$ влиять на процесс развития. Этот выигрыш, вообще говоря, определяется не только количественным состоянием компоненты i, но и других компонент. Обозначим его через $H_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, где наборы векторов $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}^i, i \in X\}$, $\mathbf{y} = \{\mathbf{y}^j, j \in Y\}$ определяют количественные состояния всей системы. Поскольку состояния $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ зависят от выбора управления $\mathbf{u}_i$, $i \in X$, всеми сторонами, заинтересованными в развитии компонент $i \in X$, то можно определить новый выигрыш для M_i по формуле

$$M_i(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) = H_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \; i \in X, \tag{4.1}$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — количественные состояния, реализовавшиеся при выборе управления $\mathbf{u}_i \in U_i[\mathbf{x}^{\Gamma^{-1}(i)}, \mathbf{y}^{\Gamma^{-1}(i)}]$.

Таким образом, мы имеем иерархическую игру m лиц (сторон, заинтересованных в развитии основных компонент $i \in X$, $i = 1, \ldots, m$) с множествами стратегий

$$\{\mathbf{u}_i\} = U_i[\mathbf{x}^{\Gamma^{-1}(i)}, \mathbf{y}^{\Gamma^{-1}(i)}]$$

и функциями выигрыша, определенными по формуле (4.1).

Построенная игра отличается от классических некооперативных игр в нормальной форме, рассмотренных в предыдущих главах. Ее особенность заключается в том, что множества стратегий игроков $U_i[\mathbf{x}^{\Gamma^{-1}(i)}, \mathbf{y}^{\Gamma^{-1}(i)}]$ зависят от количественных состояний компонент, влияющих на компоненту i, а следовательно, и от выборов других игроков $i' \in X$, $i \neq i'$, влияющих на изменение состояний компонент из множества $\Gamma^{-1}(i)$. Следовательно, здесь нельзя говорить о том, что игроки выбирают свои стратегии одновременно и независимо друг от друга, так как выбор может привести к возникновению противоречивых ситуаций. Действительно, для выбора своей стратегии $\mathbf{u}_i$ игрок i должен знать множество $U_i[\mathbf{x}^{\Gamma^{-1}(i)}, \mathbf{y}^{\Gamma^{-1}(i)}]$, а следовательно, количественные состояния $\mathbf{x}^{\Gamma^{-1}(i)}$, $\mathbf{y}^{\Gamma^{-1}(i)}$, определяемые стратегиями соответствующих игроков. Это возможно при конкретизации информационной структуры между различными основными компонентами иерархической системы, определяемой порядком очередности выборов стратегий игроками. Более подробно мы рассмотрим этот вопрос при анализе конкретных иерархических игр.

Изучение оптимального поведения в иерархических играх представляет собой достаточно серьезную проблему и может быть предметом специального рассмотрения. В последующих параграфах данной главы мы исследуем некоторые простейшие иерархические игры — древовидные игры и варианты игр ромбовидной структуры — с целью иллюстрации возможностей построения принципов оптимального поведения в иерархических системах (см. [53, 55]).

Заметим также, что в том случае, когда управления $\mathbf{u}_i \in U_i[\mathbf{x}^{\Gamma^{-1}(i)}, \mathbf{y}^{\Gamma^{-1}(i)}]$ для всех $i \in X$ могут выбираться одним управляющим центром, мы имеем многокритериальную оптимизационную задачу с векторным критерием $\mathbf{M} = \{M_1, \ldots, M_m\}$, рассматриваемую в следующей главе.

§ 2. ДРЕВОВИДНЫЕ ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Игры, рассматриваемые в данной главе, являются моделями конфликтно управляемых систем с иерархической структурой, т. е. систем управления со сложной структурой, представляющей собой последовательность уровней управления, следующих друг за другом в порядке определенного приоритета.

Первой работой, в которой систематически исследовались математические модели иерархических структур управления и анализировались преимущества, получаемые от применения иерархического подхода в различных случаях, является, по-видимому, работа [28]. Необходимость учета несовпадения интересов компонент управляемой системы, наличия неопределенных факторов и различной степени информированности на разных уровнях является в достаточной степени признанной среди специалистов по исследованию операций и экономистов. В настоящее время существуют различные подходы к исследованию подобных задач, среди которых особое место занимает информационная теория иерархических систем. Основы этой теории были заложены Н. Н. Моисеевым в середине 60-х годов [6, 28—30]. Кроме того, в последнее время появился ряд работ, посвященных иерархическим моделям принятия решений в различных областях практики ([6, 8, 52] и др.).

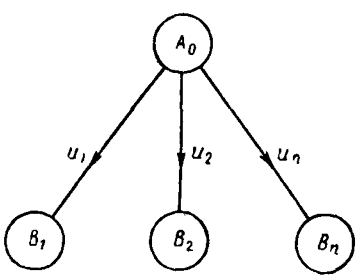

Рис. 10.

В математической постановке иерархические системы обычно классифицируются по числу уровней и по характеру вертикальных связей. Простейшей из них является двухуровневая система (рис. 10).

Управляющий (координирующий) центр A_0, находящийся на первом уровне иерархии, выбирает вектор $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ из заданного множества управлений U, $\mathbf{u}_i$ — управляющее воздействие центра на подчиненное ему подразделение B_i, находящееся на втором уровне иерархии. В свою очередь, B_i, $i = 1, \ldots, n$, выбирают управления $\mathbf{v}_i \in U_i(\mathbf{u})$, где $U_i(\mathbf{u})$ — множество управлений подразделения B_i, предопределенное управлением центра A_0. Таким образом, управляющий центр имеет право первого хода и может ограничивать возможности подчиненных ему подразделений, направляя их действия в нужное русло. Цель центра A_0 заключается в максимизации некоторого функционала $h_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \ldots$ $\ldots, \mathbf{v}_n)$, а подразделения B_i обладают собственными целями: $\max\limits_{\mathbf{v}_i} h_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i)$, $i=1, \ldots, n$.

Примером двухуровневой системы может служить задача распределения ресурсов административным центром экологически замкнутого региона между подчиненными ему производственными подразделениями. Очевидно, что условия производства в каждом подразделении, вообще говоря, различны. Различными являются также выигрыши, связанные с выпуском окончательной продукции, для каждого подразделения и административного центра. Задача заключается в построении в некотором смысле оптимальной производственной программы для производственных подразделений и оптимального плана распределения ресурсов административным центром.

Формализуем задачу как бескоалиционную игру $n+1$ лиц — административного центра A_0 и производственных подразделений $B_1, \ldots, B_n$.

Игрок A_0 выбирает систему из n векторов $\mathbf{u}=(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, $\mathbf{u}_i \geqslant 0$, $\mathbf{u}_i \in R^l$, $i=1, \ldots, n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i \leqslant \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \geqslant 0$. Вектор $\mathbf{u}_i$ будем интерпретировать как набор ресурсов l наименований, выделяемых центром A_0 для i-го производственного подразделения. Каждый из игроков B_i, зная выбор A_0, выбирает вектор $\mathbf{v}_i \in R^m$ из множества векторов, стесненных ограничениями

$$\mathbf{v}_i A_i \leqslant \mathbf{u}_i + \alpha_i, \quad \mathbf{v}_i \geqslant 0. \tag{4.2}$$

Вектор $\mathbf{v}_i$ интерпретируется как производственная программа i-го производственного подразделения по различным видам продукции; A_i — производственная или технологическая матрица i-го производственного подразделения ($A_i \geqslant 0$); α_i — вектор наличных ресурсов i-го производственного подразделения ($\alpha_i \geqslant 0$).

Определим функции выигрышей. Для игрока A_0 она полагается равной

$$J_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1(\mathbf{u}), \ldots, \mathbf{v}_n(\mathbf{u})) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}_i \mathbf{v}_i(\mathbf{u})), \quad \mathbf{a}_i \geqslant 0, \quad \mathbf{a}_i \in R^l, \quad i=1, \ldots, n,$$

где $\mathbf{u}=(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ — стратегия игрока A_0; $\mathbf{v}_i(\mathbf{u}_i)$ — стратегия игрока B_i, удовлетворяющая условию (4.2) (производственная программа B_i зависит от ресурса $\mathbf{u}_i$, выделяемого ему центром A_0, поэтому его стратегия есть функция от параметра $\mathbf{u}_i$ или в общем случае от $\mathbf{u}$); $\mathbf{a}_i$ — вектор выигрышей центра A_0 от продукции, выпускаемой i-м производственным подразделением; $(\mathbf{a}_i \mathbf{v}_i(\mathbf{u}_i))$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{v}_i(\mathbf{u}_i)$.

Функция выигрыша игроков B_i ($i=1, \dots, n$) полагается равной $J_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1(\mathbf{u}), \dots, \mathbf{v}_n(\mathbf{u})) = (\mathbf{c}_i \mathbf{v}_i(\mathbf{u}))$, $\mathbf{c}_i \geqslant 0$, $\mathbf{c}_i \in R^l$, $i=1, \dots, n$, где $\mathbf{c}_i$ — вектор выигрышей B_i от различных видов своей продукции.

Каждый из игроков стремится максимизировать свой выигрыш. Заметим, что игроки B_i, $i=1, \dots, n$, выбирают свои производственные программы в зависимости от стратегии игрока A_0.

Рассматриваемая игра является игрой с полной информацией, поэтому, согласно теореме Цермело [24], в ней существует ситуация равновесия в чистых стратегиях. Найдем ситуацию равновесия в этой игре. Пусть $\mathbf{v}_i^*(\mathbf{u})$ — решение задачи параметрического программирования (здесь параметром является вектор $\mathbf{u}$)

$$\max_{\mathbf{v}_i} (\mathbf{c}_i \mathbf{v}_i),$$

$$\mathbf{v}_i A_i \leqslant \mathbf{u}_i + a_i, \mathbf{u}_i \geqslant 0, \ a_i \geqslant 0, \ \mathbf{v}_i \geqslant 0,$$

а $\mathbf{u}^* = (\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_n^*)$ — решение задачи*

$$\max_u \sum_{i=1}^n (\mathbf{a}_i \mathbf{v}_i^*(\mathbf{u})),$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \leqslant \mathbf{b}, \ \mathbf{u}_i \geqslant 0, \ i=1, \dots, n. \tag{4.3}$$

Задача (4.3) является задачей нелинейного программирования с существенно разрывной целевой функцией (максимизация ведется по $\mathbf{u}$, а $\mathbf{v}_i^*(\mathbf{u})$ — вообще говоря, разрывная функция параметра $\mathbf{u}$).

Покажем, что точка $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}_1^*(\mathbf{u}), \dots, \mathbf{v}_n^*(\mathbf{u}))$ является ситуацией равновесия в нашей игре. Действительно,

$$J_0(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}_1^*(\mathbf{u}), \dots, \mathbf{v}_n^*(\mathbf{u})) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{a}_i \mathbf{v}_i^*(\mathbf{u}^*)) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^n (\mathbf{a}_i \mathbf{v}_i^*(\mathbf{u})) = J_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*(\mathbf{u}), \dots, \mathbf{v}_n^*(\mathbf{u})),$$

для всех $i=1, \dots, n$

$$J_i(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}_1^*(\mathbf{u}), \dots, \mathbf{v}_n^*(\mathbf{u})) = \mathbf{c}_i \mathbf{v}_i^*(\mathbf{u}^*) \geqslant \mathbf{c}_i \mathbf{v}_i(\mathbf{u}^*) =$$

$$= J_i(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}_1^*(\mathbf{u}), \dots, \mathbf{v}_{i-1}^*(\mathbf{u}), \mathbf{v}_i(\mathbf{u}), \mathbf{v}_{i+1}^*(\mathbf{u}), \dots, \mathbf{v}_n^*(\mathbf{u})).$$

Таким образом, никому из игроков $A_0, B_1, \dots, B_n$ невыгодно в одностороннем порядке отклоняться от ситуации $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}_1^*(\mathbf{u}), \dots$

---

* Здесь и в дальнейшем в этой главе мы будем предполагать для простоты, что все max и min достигаются.

..., $v_n^*(u))$, т. е. она является равновесной. Эта ситуация также устойчива против отклонения от нее коалиции игроков $S \subset \{B_1, \ldots, B_n\}$. Действительно, пусть $S = \{B_{i_1}, \ldots, B_{i_q}\}$ — произвольная группа игроков (без центра A_0). Для каждого $B_{i_k} \in S$ и любой стратегии $v_{i_k}(u)$, $k=1, \ldots, q$, имеем

$$J_{i_k}(u^*, v_1^*(u), \ldots, v_n^*(u)) = (c_{i_k}\, v_{i_k}^*(u^*)) \geqslant (c_{i_k}\, v_{i_k}(u^*)) =$$

$$= J_{i_k}(u^*, v_1^*(u), \ldots, v_{i_k-1}^*(u), v_{i_k}(u), v_{i_{h+1}}^*(u), \ldots, v_n^*(u)) =$$

$$= J_{i_k}(u^*, v_1^*(u), \ldots, v_{i_{k-1}}^*(u), v_{i_1}(u), \ldots, v_{i_k}(u), \ldots, v_{i_q}(u),$$

$$v_{i_{q+1}}^*(u), \ldots, v_n^*(u)),$$

следовательно, групповое отклонение от ситуации равновесия невыгодно ни для одного из игроков $B_1, \ldots, B_n$.

Рассмотрим кооперативный вариант предыдущей задачи. Исходя из содержательного смысла задачи и используя стратегии, образующие равновесия по Нэшу, для каждой коалиции S определим ее гарантированный доход:

$$v(S) = \begin{cases} 0, \text{ если } S = \{A_0\}, \\ \sum\limits_{i \in S} c_i v_i^*(0), \text{ если } S \subset \{B_1, \ldots, B_n\}, \\ \max\limits_{\substack{u \in \{u:\ \sum_{i:B_i \in S} u_i \leqslant b \\ u_i \geqslant 0,\ i \in S\}}} \sum\limits_{i: B_i \in S} (a_i + c_i) v_i^*(u), \text{ если } S \supset \{A_0\}, \end{cases} \tag{4.4}$$

где $v_i^*(u)$ $(i=1, \ldots, n)$ — решение задачи параметрического программирования

$$\max_{v_i}(c_i v_i),$$

$$v_i A_i \leqslant u_i + a_i,\ u_i \geqslant 0,\ a_i \geqslant 0,\ i=1, \ldots, n.$$

Равенство (4.4) справедливо, поскольку коалиция $\{B_1, \ldots$ $\ldots, B_n\}$ может добиться получения нулевого выигрыша игроком A_0, выбирая все $v_i = 0$, $i=1, \ldots, n$, поскольку игрок A_0 всегда может гарантировать для S выигрыш не более $\sum\limits_{i \in S} c_i v_i^*(0)$, выделяя каждому $i \in S$ нулевой ресурс, поскольку коалиция S, содержащая в своем составе A_0, всегда может обеспечить распределение всего ресурса b только между своими членами.

Пусть $\bar{u}^S = (\bar{u}_1^S, \ldots, \bar{u}_n^S)$ — решение задачи нелинейного программирования (4.4), для $i: B_i \overline{\in} S$, $\bar{u}_i^S \equiv 0)$. При $S = \{A_0, B_1, \ldots$ $\ldots, B_n\}$ распределение u^S будем обозначать через $\bar{u}$.

Пусть $S \subset K$, $b_i \geqslant 0$, тогда

$$\sum_{i\in K} b_i v_i^*(\bar{u}^K) \geqslant \sum_{i\in K} b_i v_i^*(\bar{u}^S) \quad (b_i = a_i + c_i),$$

т. е. распределение ресурсов (согласно (4.4)) на большее количество предприятий выгоднее.

Пусть $S, R \subset \{A_0, B_1, \dots, B_n\}$ и $S \cap R = \varnothing$. Тогда из $A_0 \in S$ следует $A_0 \bar{\in} R$. Принимая во внимание наше предположение и условия $a_i \geqslant 0$, $c_i \geqslant 0$, $v_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, n$, имеем

$$V(S \cup R) = \sum_{i:B_i \in S\cup R} (a_i + c_i) v_i^*(\bar{u}^{S\cup R}) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i:B_i \in S\cup R} (a_i + c_i) v_i^*(\bar{u}^S) = \sum_{i:B_i \in S} (a_i + c_i) v_i^*(\bar{u}^S) +$$

$$+ \sum_{i:B_i \in R} (a_i + c_i) v_i^*(0) =$$

$$= V(S) + V(R) + \sum_{i\in R} a_i v_i^*(0) \geqslant V(S) + V(R),$$

где $\sum\limits_{i\in R} a_i v_i^*(0) \geqslant 0$ — прибыль центра A_0 от «нефинансируемых» предприятий. Определив супераддитивную функцию V, мы можем рассмотреть кооперативную игру $\langle \{A_0, B_1, \dots, B_n\}, V \rangle$ в форме характеристической функции V.

Рассмотрим $(n+1)$-вектор

$$\xi = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i^*(\bar{u}), c_1 v_1^*(\bar{u}), \dots, c_n v_n^*(\bar{u}) \right). \qquad (4.5)$$

Так как

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \xi_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i^*(\bar{u}) + \sum\limits_{i=1}^{n} c_i v_i^*(\bar{u}) = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + c_i) v_i^*(\bar{u}) =$
$= V(\{A_0, B_1, \dots, B_n\})$,

2) $\xi_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i^*(\bar{u}) \geqslant 0 = V(\{A_0\})$, $\quad \xi_i = c_i v_i^*(\bar{u}) \geqslant c_i v_i^*(0) =$
$= V(\{B_i\})$, $i = 1, \dots, n$,

то вектор $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$, определенный равенством (4.5), является дележом. Напомним условие принадлежности дележа C-ядру. Согласно теореме 1 главы 3 необходимым условием принадлежности дележа $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ C-ядру является выполнение неравенства

$$\sum_{i\in S} \xi_i \geqslant V(S) \qquad (*)$$

для всех коалиций $S \subset \{A_0, B_1, \dots, B_n\}$.

Выведем условие, при котором дележ ξ принадлежит C-ядру. Когда $S = \{A_0\}$ и $S \subset \{B_1, \dots, B_n\}$, условие (*) выполнено, так как

$$\xi_0=\sum_{i=1}^{n} a_i v_i^*(\bar{u})\geqslant 0=V(\{A_0\}),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i=\sum_{i:B_i\in S} c_i v_i^*(\bar{u})\geqslant\sum_{i:B_i\in S} c_i v_i^*(0)=V(S).$$

Когда $S\supset\{A_0\}$, условие (*) переписывается в виде

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i^*(\bar{u})+\sum_{i:B_i\in S} c_i v_i^*(\bar{u})=\sum_{i:B_i\in S} a_i v_i^*(\bar{u})+$$

$$+\sum_{i:B_i\in S} c_i v_i^*(\bar{u})+\sum_{i:B_i\in \bar{S}} a_i v_i^*(\bar{u})\geqslant\sum_{i:B_i\in S}(a_i+c_i)v_i^*(\bar{u}^S).$$

Следовательно, условие принадлежности дележа (4.5) C-ядру для всех $S\supset\{A_0\}$ имеет вид

$$\sum_{i:B_i\in \bar{S}} a_i v_i^*(\bar{u})\geqslant\sum_{i:B_i\in S}(a_i+c_i)[v_i^*(\bar{u}^S)-v_i^*(\bar{u})].$$

Смысл этого неравенства следующий: административный центр A_0 получает больший выигрыш от подключения к работе новых предприятий по сравнению с использованием только множества S, даже в том случае, если бы всю прибыль от предоставления дополнительных ресурсов предприятия группы S отдавали непосредственно игроку A_0. Заметим, что в данном случае мы определили характеристическую функцию игры через выигрыш в ситуации равновесия по Нэшу. Величина $V(N)=\max\limits_{u}\sum_{i=1}^{n}(a_i+c_i)v_i^*(\bar{u})$, вообще говоря, меньше максимального суммарного выигрыша всех игроков

$$\max_{u\in U=\{u:u_k\geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{n}u_k\leqslant b\}}\ \max_{\substack{v_k\in B_k(u_k)=\\ =\{v_k:v_kA_k\leqslant u_k+\alpha_k\}}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(a_k+c_k)v_k\right\}$$

(в этом отличие от принятого определения характеристической функции).

Построим теперь характеристическую функцию игры обычным способом как значение антагонистической игры между этой коалицией и коалицией остальных игроков S'. Строя характеристическую функцию таким образом, мы при этом несколько обобщим предыдущую задачу, введя в рассмотрение произвольные функции выигрышей для участников игры.

Как и раньше, центр A_0 распределяет ресурсы между производственными подразделениями $B_1, \dots, B_n$, которые используют их для производства продукции. Выигрыши управляющего центра A_0, и производственных подразделений $B_1, \dots, B_n$ зависят от производимой продукции.

Вектор ресурсов, имеющийся в распоряжении центра A_0, обозначим через b. Центр (игрок) A_0 выбирает систему из n векторов $u=(u_1, \dots, u_n)$ из множества

$$U=\{\mathbf{u}=\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n):\mathbf{u}_k \geqslant 0,\ \mathbf{u}_k \in R^l,\ \sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k \leqslant b,\ k=1, \ldots, n\}.$$

Здесь $\mathbf{u}_k$ интерпретируется как вектор ресурса, выделяемый центром A_0 производственному подразделению B_k. Возможности B_k определяются этим ресурсом, т. е. предприятие (игрок) B_k выбирает свою производственную программу из множества $B_k(\mathbf{u}_k)$ неотрицательных векторов $\mathbf{x}_k \in B_k(\mathbf{u}_k) \subset R^m$.

Будем предполагать, что множество $B_k(\mathbf{u}_k)$ при всех $\mathbf{u}_k$ содержит нулевой вектор и, кроме того, имеет место $B_k(0)=\varnothing$ (невозможность производства при отсутствии ресурсов).

Пусть $\mathbf{x}=(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$. Выигрыши A_0 и B_k определяются с помощью неотрицательных функций $l_k(\mathbf{x}_k) \geqslant 0$, $k=0, 1, \ldots, n$ (замечаем, что выигрыш B_k зависит лишь от его производственной программы). Будем для простоты считать, что выигрыш A_0 удовлетворяет условию $l_0(\mathbf{x})=\sum_{k=1}^{n} l_{k_0}(\mathbf{x}_k)$, где слагаемое $l_{k_0}(\mathbf{x}_k)$ интерпретируется как выигрыш A_0, получаемый от игрока B_k. Предполагаем также, что $l_{k_0}(\mathbf{x}_k) \geqslant 0$ для всех $\mathbf{x}_k \in B_k(\mathbf{u}_k)$ и $l_k(0)=0$, $l_{k_0}(0)=0$, $k=1, \ldots, n$.

Рассмотрим характеристическую функцию построенной неантагонистической игры. Характеристическая функция, определенная на множестве всех подмножеств (коалиций) игроков, для каждого подмножества интерпретируется как максимальный выигрыш, гарантируемый этим подмножеством (см. [5]), т. е. как значение антагонистической игры между данным подмножеством S и подмножеством остальных игроков S'. Поэтому, если следовать содержательному определению характеристической функции, надо для каждого подмножества S решить соответствующую антагонистическую игру, в которой выигрыш S определяется как сумма выигрышей игроков этого подмножества.

Пусть $N=\{A_0, B_1, \ldots, B_n\}$. Тогда

$$\overline{V}(N)=\max_{\mathbf{u}\in U=\{\mathbf{u}:\ \sum_{k=1}^{n}\mathbf{u}_k\leqslant b,\ \mathbf{u}_k\geqslant 0\}}\ \max_{\substack{\mathbf{x}_k\in B_k(\mathbf{u}_k)\\ k=1,\ldots,n}}\left\{\sum_{k=1}^{n}[l_{k_0}(\mathbf{x}_k)+l_k(\mathbf{x}_k)]\right\}.$$

Заметим, что для всех $S\subset\{B_1, \ldots, B_n\}$ $V(S)=0$, поскольку игрок A может распределить весь ресурс b среди членов коалиции $N\setminus S$, в которую он входит, лишив, таким образом, коалицию S ресурсов (т. е. A_0 может выбрать $\mathbf{u}_k=0$ для $B_k\in S$, что приводит к $B_k(0)=\varnothing$ для всех $B_k\in S$). По аналогичным соображениям и $V(A_0)=0$, поскольку игроки $B_1, \ldots, B_n$ могут сделать выигрыш игрока A равным нулю, выбрав $\mathbf{x}_k=0$ для $k=1, \ldots, n$ (не производя продукции).

В том случае, когда коалиция S содержит центр A_0, очевидно, что A_0 будет распределять весь ресурс в первую очередь среди членов своей коалиции; это соображение приводит нас к следующей формуле:

$$\overline{v}(S)=\max_{\mathbf{u}\in\{\mathbf{u}:\ \sum\limits_{k\in S}\mathbf{u}_k\leqslant\mathbf{b}\}}\ \max_{\mathbf{x}_k\in B_k(\mathbf{u}_k)}\ \sum_{k\in S}\ [l_{k_0}\ (\mathbf{x}_k)+l_k(\mathbf{x}_k)]$$

для $S\ni A_0$.

Будем говорить, что вектор $\alpha=(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ является дележом, если

$$\alpha_0\geqslant\overline{V}(A_0),\ \alpha_i\geqslant\overline{V}(B_i),\ i=1, \ldots, n,\ \sum_{i=0}^{n}\alpha_i=\overline{V}(N). \qquad (4.6)$$

В нашей игре при таком определении характеристической функции ядро всегда непусто. Например, вектор $\alpha^*=\{\overline{V}(N), 0, \ldots, 0\}$ всегда принадлежит ядру. Действительно, поскольку $\overline{V}(A_0)=0$, $\overline{V}(B_k)=0$, $k=1, \ldots, n$, то $\alpha_0^*=\overline{V}(N)\geqslant\overline{V}(A_0)=0$ и $\alpha_0^*=\overline{V}(B_i)=0$, $i=1, \ldots, n$, и очевидно, что (4.6) выполнено, $\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i^*=\overline{V}(N)$, т. е. α^* — дележ. Покажем, что α^* принадлежит ядру. Рассмотрим два случая:

а) $S\overline{\ni}A_0$ и, следовательно, $\overline{V}(S)=0$, тогда $\sum\limits_{i\in S}\alpha_i^*=\overline{V}(S)=0$.

б) $S\ni A_0$, тогда

$$\sum_{i\in S}\alpha_i^*=\alpha_0^*=\overline{V}(N)\geqslant\overline{V}(S),$$

что следует из монотонности характеристической функции. Таким образом, мы проверили принадлежность α^* ядру игры. Заметим, что в условиях дележа α^* центр A_0 получает максимальный возможный выигрыш, равный максимальному суммарному выигрышу коалиции из всех игроков. В действительности такое распределение выигрыша между игроками едва ли устраивает игроков $B_1, \ldots, B_n$. Поэтому, хотя ядро и является признанным принципом оптимальности, в данном случае такое распределение суммарного выигрыша не может быть применено на практике. Дело в том, что построенная на основе принципа минимакса характеристическая функция не учитывает возможности предприятий $B_1, \ldots, B_n$ влиять на поведение игрока A_0.

Попытаемся построить новую характеристическую функцию, которая бы в какой-то мере учитывала это обстоятельство, при этом необходимо сохранить основное свойство характеристической функции — супераддитивность.

Определим новую характеристическую функцию $W(S)$ по формуле

$$W(S)=\max_{\mathbf{u}\in\{\mathbf{u}:\ \sum\limits_{k\in S}\mathbf{u}_k\leqslant b\}}\ \max_{\substack{\mathbf{x}_k\in B_k(\mathbf{u}_k)\\ k\in S}}\ \sum_{k\in S}\ [l_{k_0}(\mathbf{x}_k)+ +l_k(\mathbf{x}_k)], \qquad (4.7)$$

если $A_0 \in S$,

$$W(S) = \min_{\substack{\overline{S}: A_0 \in \overline{S} \\ \overline{S} \cap S = \varnothing}} [W(S \cup \overline{S}) - W(\overline{S})], \tag{4.8}$$

если $A_0 \overline{\in} S$.

Заметим, что выражение (4.8) использует значения $W(S \cup \overline{S})$ и $W(\overline{S})$, уже полученные в (4.7), поскольку $S \cup S$ и $\overline{S}$ содержат A_0.

Таким образом, в том случае, когда A_0 принадлежит S, значения функций $W(S)$ и $V(S)$ совпадают, если же $S \overline{\ni} A_0$, то значение характеристической функции $W(S)$ полагается равным минимальному вкладу коалиции S в коалиции, содержащие центр A_0.

Покажем супераддитивность $W(S)$. Рассмотрим два случая.

1. $S_1 \ni A_0$, $S_2 \overline{\ni} A_0$. Необходимо показать, что $W(S_1 \cup S_2) \geqslant$ $\geqslant W(S_1) + W(S_2)$, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Поскольку $S_2 \overline{\ni} A_0$, имеем

$$W(S_2) = \min_{\overline{S}: \overline{S} \ni A_0} [W(\overline{S} \cup S_2) - W(\overline{S})] \leqslant W(S_1 \cup S_2) - W(S_1),$$

что и дает требуемое неравенство.

2. $S_1 \overline{\ni} A_0$, $S_2 \overline{\ni} A_0$. Тогда

$$W(S_1 \cup S_2) = \min_{\substack{\overline{S}: \overline{S} \ni A_0 \\ \overline{S} \cap S_1 = \varnothing \\ \overline{S} \cap S_2 = \varnothing}} [W(S_1 \cup S_2 \cup \overline{S}) - W(\overline{S})] \geqslant$$

$$\geqslant \min_{\substack{\overline{S}: \overline{S} \ni A_0 \\ \overline{S} \cap S_1 = \varnothing \\ \overline{S} \cap S_2 = \varnothing}} [W(S_1) + W(S_2 \cup \overline{S}) - W(\overline{S})] \geqslant$$

$$\geqslant \min_{\substack{\overline{S}: \overline{S} \in A_0 \\ \overline{S} \cap S_1 = \varnothing \\ \overline{S} \cap S_2 = \varnothing}} [W(S_1) + W(S_2) + W(\overline{S}) - W(\overline{S})] = W(S_1) + W(S_2), \tag{4.9}$$

поскольку (см. случай 1)

$$W(S_1 \cup \overline{S}) + W(S_2) \leqslant W(S_1 \cup \overline{S} \cup S_2), \quad W(S_2) + W(\overline{S}) \leqslant W(S_2 \cup \overline{S}), \tag{4.10}$$

так как $S_1 \cup S_2 \cup \overline{S} \ni A_0$ и $S_1 \cup \overline{S} \ni A_0$.

Построенная функция $W(S)$ обладает всеми свойствами характеристической функции и может быть использована при построении таких принципов оптимальности, как ядро и НМ-решение. Очевидно также, что дележ α^* не будет принадлежать ядру, построенному на основе функции $W(S)$. Это показывает, что мы пришли к некоторому новому принципу оптимальности, который учитывает интересы не только центра A_0, но и подчиненных ему предприятий. На наш взгляд, такой подход более приемлем при решении вопросов, связанных с оптимальным функционированием иерархических систем управления. Аналогичным способом можно строить характеристические функции и для более сложных древовидных систем.

Таким образом, для данной игры нами построено три вида характеристических функций V, $\overline{V}$, W, каждой из которых соответствует свой принцип оптимальности. В первом случае принцип оптимальности наиболее приемлем для производственных подразделений, однако не дает максимального выигрыша для всей коалиции, поскольку сумма выигрышей игроков в ситуации равновесия по Нэшу не равна максимальному суммарному выигрышу. Характеристические функции $\overline{V}$ и W предписывают максимальный суммарный выигрыш для коалиции, состоящей из всех игроков, однако функция $\overline{V}$ малоприемлема для $B_1, \ldots, B_n$, поскольку гарантирует им лишь нулевые выигрыши. Характеристическая функция W обеспечивает получение коалициями игроков $S \subset \{B_1, \ldots, B_n\}$ некоторых выигрышей, которые, однако, не больше выигрышей, определяемых характеристической функцией V.

Одним из часто используемых принципов оптимальности в древовидных иерархических играх является ситуация равновесия по Нэшу, основанная на использовании игроком A_0 стратегий наказания, включающих угрозу невыделения ресурса игроку B_k, не выполняющему требований центра A_0 [6, 29, 30].

Моделируя иерархические системы управления кооперативными играми, мы всегда будем иметь дело с двумя элементами игры — характеристической функцией, измеряющей потенциальные силы коалиций, и векторами выигрышей игроков как дележей из C-ядра, определяемого при помощи значений характеристической функции для отдельных коалиций. Что касается характеристической функции, то для каждого вида иерархических систем управления, рассматриваемых далее, мы будем строить ее двумя способами: минимаксным и на основе ситуации равновесия по Нэшу. Напомним, что характеристическая функция, построенная минимаксным способом, всегда супераддитивна, во втором случае это нужно специально доказывать. Выбор C-ядра в качестве решения кооперативной игры как модели иерархической системы управления объясняется тем, что недоминируемые дележи являются наиболее подходящими объектами достижения соглашений между индивидуумами, имеющими различные предпочтения. Однако применение этого принципа оптимальности ограничено тем, что для многих игр ядро оказывается пустым.

§ 3. РОМБОВИДНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Иерархические системы с подразделениями двойного подчинения называются ромбовидными. Простая схема ромбовидной системы дана на рис. 11. Выбор управления подразделением двойного подчинения C зависит как от управления подразделения B_1, так и B_2. Можно представить ситуацию, в которой центр B_1 представляет интересы отрасли, а B_2 — региональные интересы, включающие вопросы охраны окружающей среды.

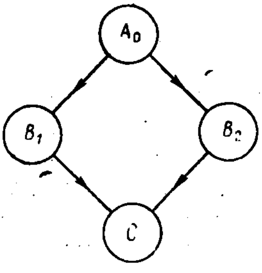

Рис. 11.

Простая ромбовидная система управления является примером иерархической системы с тремя уровнями принятия решений. На высшем уровне находится административный центр, располагающий материальными и трудовыми ресурсами. Он воздействует на деятельность двух подчиненных ему центров, принадлежащих следующему уровню, не только материальными и трудовыми ресурсами, но и своим авторитетом. От решений, принимаемых этими центрами, зависит объем производства предприятия, находящегося на последнем уровне иерархической системы.

Будем рассматривать этот процесс принятия решений как некоторую игру Г четырех лиц. Задача состоит в построении в некотором смысле оптимального плана работы производственного подразделения C и оптимального плана действий административных центров A_0, B_1, B_2. Переходя к игровой постановке, будем считать, что на первом шаге игрок A_0 выбирает элемент (стратегию) $u=(u_1, u_2)$ из множества $\boldsymbol{A}$, которое будем называть множеством стратегий игрока A_0. Элемент $u \in \boldsymbol{A}$ ограничивает возможности выборов игроков B_1 и B_2 на следующем шаге. Другими словами, множество альтернатив игрока B_1 оказывается функцией параметра u_1 и аналогично множество альтернатив игрока B_2 оказывается функцией параметра u_2. Через $w_1 \in B_1(u_1)$ и $w_2 \in B_2(u_2)$ обозначим элементы множества альтернатив игроков B_1 и B_2 соответственно.

Параметры w_1 и w_2, выбираемые игроками B_1 и B_2, задают ограничения на множество альтернатив (производственные программы), выбираемых игроком C на третьем шаге игры, т. е. это множество оказывается функцией параметров w_1 и w_2. Обозначим его через $C(w_1, w_2)$, а элементы этого множества (производственные программы) — через v.

Итак, стратегиями игрока A_0 являются элементы $\mathbf{u}=(u_1, u_2) \in \boldsymbol{A}$; стратегиями игроков B_1, B_2 и C являются функции $w_1(u_1, u_2)$, $w_2(u_1, u_2)$, $v(w_1, w_2)$ соответственно со значениями в множествах $B_1(u_1)$, $B_2(u_2)$, $C(w_1, w_2)$, ставящие в соответствие выборам игроков более высокого уровня альтернативу, выбираемую данным игроком.

Выигрыши всех игроков зависят только от производственной программы v, выбираемой игроком C, и равны соответственно $f_1(v)$, $f_2(v)$, $f_3(v)$, $f_4(v)$. Будем считать, что $f_i(v)\geqslant 0$, $i=1, \dots, 4$, и существует такое $v_0\in C(w_1, w_2)$, что $f_i(v_0)=0$ для любых u, w_1, w_2.

Таким образом, мы определили бескоалиционную игру четырех лиц в нормальной форме: $\Gamma=\langle A_0, B_1, B_2, C, f_1, \dots, f_4\rangle$.

Найдем ситуацию равновесия по Нэшу в построенной игре Γ. Для каждой пары (w_1, w_2), $w_1\in B_1$, $w_2\in B_2$, игрок C решает следующую задачу параметрического программирования:

$$\max f_4(v) \tag{4.11}$$

при условиях

$$v\in C(w_1, w_2),\ v\geqslant 0.$$

Решение задачи (4.11) $v^*=v^*(w_1, w_2)$ оказывается функцией параметров w_1 и w_2.

Далее нам необходимо рассмотреть вспомогательную параметрическую (с параметрами u_1, u_2) игру $\Gamma'(u_1, u_2)=\langle B_1(u_1), B_2(u_2), f_2, f_3\rangle$ двух лиц B_1 и B_2, где $f_2=f_2(v^*(w_1, w_2))$ и $f_3=f_3(v^*(w_1, w_2))$ — функции выигрышей B_1 и B_2 соответственно. Предположим, что в игре $\Gamma'(u_1, u_2)$ существует ситуация равновесия по Нэшу $(w_1^*(u_1, u_2), w_2^*(u_1, u_2))$.

Пусть далее пара (u_1^*, u_2^*) есть решение следующей нелинейной оптимизационной задачи:

$$\max f_1(v^*(w_1^*(u_1, u_2), w_2^*(u_1, u_2))) \tag{4.12}$$

при условии

$$u=(u_1, u_2)\in \boldsymbol{A}.$$

Лемма 1. Совокупность

$$(v^*, w_1^*, w_2^*, (u_1^*, u_2^*)), \tag{4.13}$$

где v^* — решение задачи (4.11) при параметрах w_1^*, w_2^*, (w_1^*, w_2^*) — ситуация равновесия в игре $\Gamma'(u_1^*, u_2^*)$; (u_1^*, u_2^*) — решение задачи (4.12), является ситуацией равновесия по Нэшу в игре Γ.

Доказательство. Для удобства переобозначим:

$$J_{A_0}((u_1, u_2), w_1(u_1, u_2), w_2(u_1, u_2), v(w_1, w_2)) = $$
$$= f_1(v(w_1(u_1, u_2), w_2(u_1, u_2))),$$
$$J_{B_1}((u_1, u_2), w_1(u_1, u_2), w_2(u_1, u_2), v(w_1, w_2)) = f_2(v(w_1, w_2)),$$
$$J_{B_2}((u_1, u_2), w_1(u_1, u_2), w_2(u_1, u_2), v(w_1, w_2)) = f_3(v(w_1, w_2)),$$
$$J_C((u_1, u_2), w_1(u_1, u_2), w_2(u_1, u_2), v(w_1, w_2)) = f_4(v(w_1, w_2)).$$

По определению решения задачи (4.13) для всех $(u_1, u_2)\in \boldsymbol{A}$

$$J_{A_0}((u_1^*, u_2^*), w_1^*(u_1^*, u_2^*), w_2^*(u_1^*, u_2^*), v^*(w_1^*, w_2^*))=$$
$$= \max_{(u_1, u_2)\in A} f_1(v^*(w_1^*(u_1, u_2), w_2^*(u_1, u_2)))=$$
$$=f_1(v^*(w_1^*(u_1^*, u_2^*), w_2^*(u_1^*, u_2^*)))\geqslant$$
$$\geqslant f_1(v^*(w_1^*(u_1, u_2), w_2^*(u_1, u_2)))=$$
$$=J_{A_0}((u_1, u_2), w_1^*(u_1, u_2), w_2^*(u_1, u_2), v^*(w_1, w_2)).$$

Поскольку w_1^* и w_2^* образуют ситуацию равновесия по Нэшу во вспомогательной игре Г′, то

$$J_{B_1}((u_1^*, u_2^*), w_1^*(u_1, u_2), w_2^*(u_1, u_2), v^*(w_1, w_2))=$$
$$=f_2(v^*(w_1^*, w_2^*))\geqslant f_2(v^*(w_1, w_2^*))=$$
$$=J_{B_1}((u_1^*, u_2^*), w_1(u_1, u_2), w_2^*(u_1, u_2), v^*(w_1, w_2))$$

для всех $w_1\in B(u_1)$. Аналогичное суждение справедливо и для игрока B_2.

По определению решения задачи (4.11) для w_1, w_2 и всех $v\in C(w_1^*, w_2^*)$

$$J_C((u_1^*, u_2^*), w_1^*(u_1, u_2), w_2^*(u_1, u_2), v^*(w_1, w_2))=$$
$$= \max_{v\in C(w_1^*, w_2^*)} f_4(v)=f_4(v^*(w_1^*, w_2^*))\geqslant$$
$$\geqslant f_4(v(w_1^*, w_2^*))=J_C((u_1^*, u_2^*), w_1^*(u_1, u_2),$$
$$w_2^*(u_1, u_2), v(w_1^*, w_2^*)).$$

Следовательно, ситуация (4.13) является равновесной по Нэшу в игре Г четырех лиц A_0, B_1, B_2 и C.

Применяя минимаксный подход, для каждой коалиции $S\subset\{A_0, B_1, B_2, C\}$ определим $V(S)$ как наибольший гарантированный выигрыш S в антагонистической игре между коалицией S, выступающей как максимизирующий игрок, и коалицией $S'=\{A_0, B_1, B_2, C\}\setminus S$.

Будем различать два вида коалиций: 1) $S:C\bar{\in}S$; 2) $S:C\in S$. В первом случае $S\subset\{A_0, B_1, B_2\}$ и игрок С, являющийся членом коалиции S', может выбрать стратегию $v_0:f_i(v_0)=0$, $i=1, 2, 3, 4$. Поэтому $V(S)=0$. Второй случай распадается на следующие подслучаи:

а) $S=\{C\}$:

$$V(\{C\}) = \min_{u\in A} \{ \min_{w_1\in B_1(u_1)} \min_{w_2\in B_2(u_2)} [\max_{v\in C(w_1,\, w_2)} f_4(v)]\}$$

(здесь и далее предполагаем, что все max и min достигаются);

б) $S=\{A_0, C\}$:

$$V(\{A_0, C\}) = \max_{u\in A} \{ \min_{w_1\in B_1(u_1)} \min_{w_2\in B_2(u_2)} [\max_{v\in C(w_1,\, w_2)} f_1(v)+f_4(v)]\};$$

в) $S=\{B_1, C\}$:

$$V(\{B_1, C\}) =$$

$$= \min_{u\in A} \{ \max_{w_1\in B_1(u_1)} \min_{w_2\in B_2(u_2)} [\max_{v\in C(w_1,\, w_2)} [f_2(v)+f_4(v)]]\};$$

г) $S=\{B_2, C\}$:

$$V(\{B_2, C\}) =$$

$$= \min_{u\in A} \{ \min_{w_1\in B_1(u_1)} \max_{w_2\in B_2(u_2)} [\max_{v\in C(w_1,\, w_2)} (f_3(v)+f_4(v))]\};$$

д) $S=\{B_1, B_2, C\}$:

$$V(\{B_1, B_2, C\}) =$$

$$= \min_{u\in A} \{ \max_{w_1\in B_1(u_1)} \max_{w_2\in B_2(u_2)} [\max_{v\in C(w_1,\, w_2)} \sum_{i=2}^{4} f_i(v)]\};$$

е) $S=\{A_0, B_1, C\}$:

$$V(\{A_0, B_1, C\}) =$$

$$= \max_{u\in A} \{ \max_{w_1\in B_1(u_1)} \min_{w_2\in B_2(u_2)} [\max_{v\in C(w_1,\, w_2)} \sum_{i=1,2,4} f_i(v)]\};$$

ж) $S=\{A_0, B_2, C\}$:

$$V(\{A_0, B_2, C\}) =$$

$$= \max_{u\in A} \{ \max_{w_2\in B_2(u_2)} \min_{w_1\in B_1(u_1)} [\max_{v\in C(w_1,\, w_2)} \sum_{i=1,3,4} f_i(v)]\};$$

з) $S=\{A_0, B_1, B_2, C\}$:

$$V(\{A_0, B_1, B_2, C\}) =$$

$$= \max_{u\in A} \{ \max_{w_1\in B_1(u_1)} \max_{w_2\in B_2(u_2)} [\max_{v\in C(w_1,\, w_2)} \sum_{i=1}^{4} f_i(v)]\}.$$

При таком определении характеристическая функция обладает свойством супераддитивности, т. е. для любых $S, R\subset\{A_0, B_1, B_2, C\}$ $S\cap R=\varnothing$, $V(S\cup R)\geqslant V(S)+V(R)$.

Построим теперь характеристическую функцию, используя стратегии и выигрыши в ситуации равновесия по Нэшу, найденные в предыдущем пункте. Обозначим ее V'.

1) $S \subset \{A_0, B_1, B_2\}$, $V'(S) = 0$;

2) $S: C \in S$;

а) $S = \{C\}$:

$$V'(\{C\}) = \min_{u \in A} \min_{w_1 \in B_1(u_1)} \min_{w_2 \in B_2(u_2)} f_4(v^*(w_1, w_2)) =$$

$$= \min_{w_1 \in B_1(\overline{u_1})} \min_{w_2 \in B_2(\overline{u_2})} f_4(v^*(w_1, w_2)) = f_4(v^*(\overline{w_1}, \overline{w_2})),$$

где $(\overline{u_1}, \overline{u_2})$, $\overline{w_1}$, $\overline{w_2}$ — точки, в которых достигаются соответствующие минимумы, а $v^*(\overline{w_1}, \overline{w_2})$ — решение задачи (4.11) для параметров $\overline{w_1}$ и $\overline{w_2}$;

б) $S = \{A_0, C\}$:

$$V'(\{A_0, C\}) = \min_{w_1 \in B_1(u_1^*)} \min_{w_2 \in B_2(u_2^*)} [f_1(v^*(w_1, w_2)) + f_4(v^*(w_1, w_2))] =$$

$$= f_1(v^*(\overline{w_1}, \overline{w_2})) + f_4(v^*(\overline{w_1}, \overline{w_2})),$$

где $\overline{w_1}$, $\overline{w_2}$ — точки, в которых достигаются соответствующие минимумы, а v^* и (u_1^*, u_2^*) — решение задач (4.11) и (4.12). И далее,

в) $S = \{B_1, C\}$:

$$V'(\{B_1, C\}) = \min_{u \in A} \min_{w_2 \in B_2(u_2)} [f_2(v^*(w_1^*(u_1), w_2)) +$$
$$+ f_4(v^*(w_1^*(u_1), w_2))];$$

г) $S = \{B_2, C\}$:

$$V'(\{B_2, C\}) = \min_{u \in A} \min_{w_1 \in B_1(u_1)} [f_3(v^*(w_1, w_2^*(u_2))) +$$
$$+ f_4(v^*(w_1, w_2^*(u_2)))];$$

д) $S = \{B_1, B_2, C\}$:

$$V'(\{A_0, B_2, C\}) = \min_{u \in A} \left[\sum_{i=2}^{4} f_i(v^*(w_1^*(u_1), w_2^*(u_2))) \right];$$

е) $S = \{A_0, B_1, C\}$:

$$V'(\{A_0, B_1, C\}) = \min_{w_2 \in B_2(u_2^*)} [\sum_{i=1,2,4} f_i(v^*(w_1^*(w_1^*), w_2(u_2^*)))];$$

ж) $S = \{A_0, B_2, C\}$:

$$V'(\{A_0, B_2, C\}) = \min_{w_1 \in B_1(u_1^*)} [\sum_{i=1,3,4} f_i(v^*(w_1(u_1^*), w_2^*(u_2^*)))];$$

з) $S = \{A_0, B_1, B_2, C\}$:

$$V'(\{A_0, B_1, B_2, C\}) = \sum_{i=1}^{4} f_i(v^*(w_1^*(u_1^*), w_2^*(u_2^*)))].$$

Лемма 2. Функция V' супераддитивна.

Доказательство. Из построения функции V' следует, что для любых $S \subset \{A_0, B_1, B_2, C\}$ и $i \in [\{A_0, B_1, B_2, C\} \setminus S]$ $V'(S \cup i) \geqslant V'(S)$, т. е. функция V' монотонна. Пусть $K, R \subset \{A_0, B_1, B_2, C\}$, $K \cap R = \varnothing$. Поскольку игрок C, который обеспечивает положительность $V'(S)$, может входить лишь в одну из коалиций K или R и поэтому всегда только одно из слагаемых $V'(K)$ или $V'(R)$ может быть отличным от нуля, то супераддитивность просто следует из монотонности V'.

Теорема 1. Вектор $\xi^* = \{f_i(v^*(w_1^*(u_1^*), w_2^*(u_2^*))), i = 1, \ldots$ $\ldots, 4\}$, где (u_1^*, u_2^*), w_1^*, w_2^*, v^* — стратегии игроков из ситуации равновесия (4.13), является дележом в игре $\Gamma_{V'}$ и принадлежит его C-ядру.

Доказательство. Действительно, поскольку

$$\sum_{i=1}^{4} \xi_i^* = V'(\{A_0, B_1, B_2, C\}), \quad V'(\{A_0\}) = V'(\{B_1\}) = V'(\{B_2\}) = 0,$$

$$f_i(v^*(w_1^*(u_1^*), w_2^*(u_2^*))) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

и

$$f_4(v^*(w_1^*(u_1^*), w_2^*(u_2^*))) \geqslant$$

$$\geqslant \min_{u \in A} \min_{w_1 \in B_1(u_1)} \min_{w_2 \in B_2(u_2)} f_4(v^*(w_1(u_1), w_2(u_2))) = V'(\{C\}),$$

то ξ^* — дележ. Покажем далее, что для любого $S \subset \{A_0, B_1, B_2, C\}$

$$\sum_{i \in S} f_i(v^*(w_1^*(u_1^*), w_2^*(u_2^*))) \geqslant V'(S), \tag{4.14}$$

т. е. что дележ ξ^* принадлежит C-ядру игры $\Gamma_{v'}$.

Для $S = \{A_0, B_1, B_2, C\}$ и одноэлементных коалиций это следует из того, что ξ^* — дележ. Для всех $S \subset \{A_0, B_1, B_2,\}$ условие (4.14) следует из неотрицательности функций $f_i(v)$, $i = 1, \ldots, 4$, поскольку в этом случае $V'(S) = 0$. Во всех остальных случаях условие (4.14) следует из того, что сумма слева (4.14) отличается от $V'(S)$ тем, что в $V'(S)$ по переменным, не входящим в S, берется минимум. Например, покажем это для случая $S = \{A_0, B_2, C\}$. Имеем

$$V'(\{A_0, B_2, C\}) = \min_{w_1 \in B_1(u_1^*)} \Big[\sum_{i=1,3,4} f_i(v^*(w_1(u_1^*),$$

$$w_2^*(u_2^*)))] \leqslant \sum_{i=1,3,4} f_i(v^*(w_1^*(u_1^*), w_2^*(u_2^*))).$$

Теорема доказана.

Как видно из приведенных примеров, иерархические системы управления предполагают наличие нескольких сторон, каждая из которых стремится к достижению своей цели, т. е. это типичная конфликтно управляемая система. Поэтому исследование вопросов принятия решений в таких системах с позиций теории игр многих лиц вполне справедливо. Особенностью игр, являющихся моделями иерархических систем, по сравнению с ранее рассмотренными является то, что в них имеется один игрок, выбирающий свои стратегии независимо, а стратегии остальных зависят от выбора одного или нескольких игроков. При такой постановке для определения оптимальных стратегий игроков естественным образом возникают параметрические оптимизационные задачи. Это безусловно вносит дополнительные сложности, в первую очередь технического порядка. Между тем в настоящее время для решения параметрических задач имеются достаточно хорошо разработанные вычислительные алгоритмы, и поэтому такой способ определения оптимальных стратегий игроков можно считать конструктивным.

Заметим, что «экономическая» терминология: производственная программа, ресурс, производственные подразделения используется для удобства и имеет чисто условное значение. Фактически здесь рассмотрены частные случаи общего графа (Z, Γ) межкомпонентных связей из § 1 настоящей главы.

Рассмотрим ситуацию, которая часто возникает при исследовании реальных систем управления. Административный центр A_0, располагающий определенными ресурсами, должен распре-

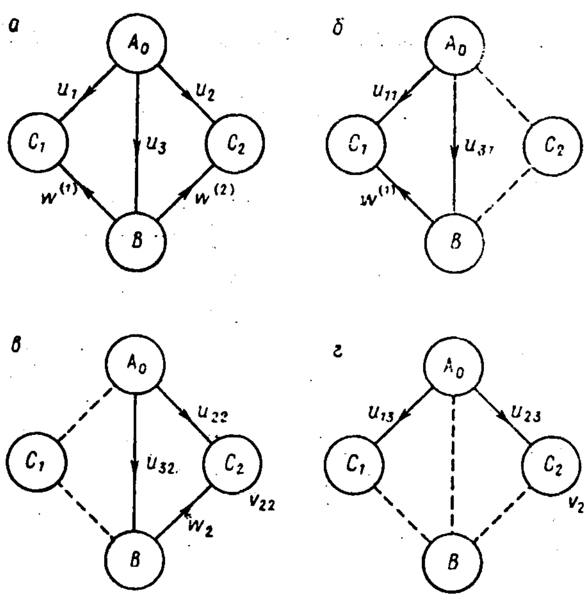

Рис. 12.

делить их между несколькими подразделениями C_1, C_2, B. При этом продукция производственного подразделения B используется как сырье в производственных подразделениях C_1 и C_2. Последние, в свою очередь, производят окончательные продукты, используя ресурсы, получаемые от A_0 и B. Соответствующий граф приведен на рис. 12, *а*.

Построим теоретико-игровую модель этой системы управления. Обозначим через $\mathbf{b}$ вектор ресурсов, которыми располагает игрок A_0. На первом шаге A_0 выбирает систему из трех векторов из множества

$$\boldsymbol{A}=\{\mathbf{u}=(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3):\mathbf{u}_i\geqslant 0,\ \mathbf{u}_i\in R^l,\ i=1,\ 2,\ 3,\ \sum_{i=1}^{3}\mathbf{u}_i\leqslant\mathbf{b},\ \mathbf{b}\geqslant 0\}.$$

Вектор $\mathbf{u}_i$ интерпретируется как набор ресурсов l наименований, выделяемых центром A_0 для i-го производственного подразделения. При этом $\mathbf{u}_i$, $i=1,\ 2$, предназначаются для C_i, $i=1,\ 2$, а $\mathbf{u}_3$ — для B. На втором шаге игрок B определяет свою производственную программу $\mathbf{w}=(\mathbf{w}^1,\ \mathbf{w}^2)$, направляя $\mathbf{w}^1$ игроку C_1 и $\mathbf{w}^2$ — игроку C_2. Вектор $\mathbf{w}$ выбирается из множества

$$\boldsymbol{B}(\mathbf{u}_3)=\{\mathbf{w}=(\mathbf{w}^1,\ \mathbf{w}^2):(\mathbf{w}^1+\mathbf{w}^2)A_1\leqslant\mathbf{u}_3,$$
$$\mathbf{w}^1,\ \mathbf{w}^2\geqslant 0,\ \mathbf{w}^1,\ \mathbf{w}^2\in R^n,\ A_1\geqslant 0\},$$

где A_1 — технологическая матрица для игрока B.

На третьем шаге ходят C_1 и C_2. Выборы игроков C_1 и C_2 зависят от начального распределения ресурсов игроком A_0 и ресурсов $\mathbf{w}^1$, $\mathbf{w}^2$, выделяемых игроком B. Игрок C_1 выбирает некоторый элемент из множества

$$\zeta_1=C_1(\mathbf{w}^1,\mathbf{w}^2)=\{\mathbf{v}_1:\mathbf{v}_1A_2\leqslant\mathbf{z}_1,\ \mathbf{v}_1\geqslant 0,\ \mathbf{v}_1\in R^k,\ A_2\geqslant 0\},$$

где A_2 — технологическая матрица для игрока C_1. Компоненты вектора $\mathbf{z}_1=(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{w}^1)$ являются компонентами вектора ресурсов, которые используются игроком C_1. Игрок C_2 выбирает некоторый элемент из множества

$$\zeta_2=C_2(\mathbf{u}_2,\ \mathbf{w}^2)=\{\mathbf{v}_2:\mathbf{v}_2A_2\leqslant\mathbf{z}_2,\ \mathbf{v}_2\geqslant 0,\ \mathbf{v}_2\in R^q,\ A_3\geqslant 0\},$$

где A_3 — технологическая матрица для игрока C_2. Компоненты вектора $\mathbf{z}_2=(\mathbf{u}_2,\mathbf{w}^2)$ являются компонентами вектора ресурсов, которые используются игроком C_2.

Определим функции выигрышей игроков. Выигрыш игрока A_0 зависит только от производства B и C_1, C_2. Выигрыши B, C_1, C_2 зависят лишь от их собственного производства.

Пусть $((\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3),\ \mathbf{w}(\mathbf{u}_3),\ \mathbf{v}_1(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{w}^1),\ \mathbf{v}_2(\mathbf{u}_2,\ \mathbf{w}^2))$ — некоторая ситуация, т. е. $\mathbf{u}=(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3)\in\boldsymbol{A}$, $\mathbf{w}\in\boldsymbol{B}$, $\mathbf{v}_1\in\zeta_1$, $\mathbf{v}_2\in\zeta_2$. Для игрока A_0 функция выигрыша имеет вид $J_{A_0}((\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3),\mathbf{w}(\mathbf{u}_3),\mathbf{v}_1(\mathbf{u}_1,\mathbf{w}^1(\mathbf{u}_3)),\ \mathbf{v}_2(\mathbf{u}_2,\ \mathbf{w}^2(\mathbf{u}_3)))=\mathbf{a}_1\mathbf{w}(\mathbf{u}_3)+\mathbf{a}_2\mathbf{v}_1(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{w}^1)+\mathbf{a}_3\mathbf{v}_2(\mathbf{u}_2,\ \mathbf{w}^2)$, где векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ представляют собой единичные выигрыши игрока A_0, когда B, C_1 и C_2 выбирают свои производственные программы $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$.

Для игрока B функция выигрыша имеет вид

$$J_B((u_1, u_2, u_3), w(u_3), v_1(u_1, w^1(u_3)), v_2((u_2), w^2(u_3))) = c_1 w^1(u_3) + \\ + c_2 w^2(u_3),$$

где векторы $c_1, c_2 \geqslant 0$ представляют собой единичные выигрыши игрока B от производства $c_1, c_2 \in R^n$.

Для игрока C_1 функция выигрыша имеет вид

$$J_{C_1}((u_1, u_2, u_3), w(u_3), v_1(u_1, w^1(u_3)), v_2(u_2, w^2(u_3))) = c_3 v_1(u_1, w^1),$$

где $c_3 \geqslant 0$ имеет смысл, аналогичный векторам c_1, c_2. Функция выигрыша игрока C_2 определяется аналогично:

$$J_{C_2}((u_1, u_2, u_3), w(u_3), v_1(u_1, w^{(1)}(u_3)), v_2(u_2, w^{(2)}(u_3))) = \\ = c_4 v_2(u_2, w^{(2)}), \; c_4 \geqslant 0.$$

Таким образом, мы определили игру четырех лиц в нормальной форме:

$$\Gamma = \langle A, B, C_1, C_2; I_{A_0} I_B, I_{C_1}, I_{C_2} \rangle.$$

Построим ситуацию равновесия по Нэшу в только что построенной игре. Оптимальные стратегии игроков C_1 и C_2 построим как решение некоторых задач линейного параметрического программирования.

Пусть игрок C_1 выбирает стратегию $v_1^*(u_1, w^{(1)})$ из условия:

$$\max (c_3 v_1) = c_3 v_1^* (u_1, w^{(1)}) \tag{4.15}$$

при ограничениях

$$v_1 A_2 \leqslant z_1 \quad (z_1 = (u_1, w^{(1)})), \; v_1 \geqslant 0, \; A_2 \geqslant 0.$$

При выборе оптимальной стратегии его выигрыш будет равен $c_3 v_1^* (u_1, w^{(1)})$.

Пусть игрок C_2 выбирает стратегию $v_2^* (u_2, w^{(2)})$ из условия:

$$\max c_4 v_2 = c_4 v_2^* (u_2 w^{(2)}) \tag{4.16}$$

при ограничениях

$$v_2 A_3 \leqslant z_2 \quad (z_2 = (u_2, w^{(2)})), \; v_2 \geqslant 0, \; A_3 \geqslant 0.$$

При выборе оптимальной стратегии его выигрыш будет равен $c_4 v_2^* (u_2, w^{(2)})$.

Оптимальную стратегию игрока B построим как решение следующей задачи линейного параметрического программирования. Игрок B выбирает свою стратегию $w^*(u_3) = (w^{(1)*}(u_3), w^{(2)*}(u_3))$ из условия:

$$\max [c_1 w^{(1)} + c_2 w^{(2)}] = c_1 w^{(1)*}(u_3) + c_2 w^{(2)*}(u_3) \tag{4.17}$$

при ограничениях

$$(w^{(1)} + w^{(2)}) A_1 \leqslant u_3, \; w^{(1)} \geqslant 0, \; w^{(2)} \geqslant 0, \; A_1 \geqslant 0.$$

При выборе оптимальной стратегии его выигрыш будет равен

$c_1 w^{(1)*}(u_3)+c_2 w^{(2)*}(u_3)$. Введя вектор $c=(c_1, c_2)$, $w=(w^{(1)}, w^{(2)})$, функцию выигрыша игрока B мы можем представить в виде $c_1 w^{(1)}+c_2 w^{(2)}=cw$. Оптимальная стратегия игрока A_0 определяется из решения следующей задачи нелинейного программирования:

$$\max\,[a_1 w^*(u_3)+a_2 v_1^*\ (u_1, w^{(1)*}(u_3))+a_3 v_2^*\ (u_2, w^{(2)*}(u_3))] \qquad (4.18)$$

при условиях

$$u_1+u_2+u_3\leqslant b,\ u_1\geqslant 0,\ u_2\geqslant 0,\ u_3\geqslant 0.$$

Целевая функция этой задачи существенно нелинейна, поскольку таковыми являются функции $w^*\ (u_3)$, $v_1^*\ (u_1, w^{(1)*})$, $v_2^*\ (u_2, w^{(2)*})$. Решив эту задачу, найдем векторы u_1^*, u_2^*, u_3^*, определяющие оптимальные планы распределения ресурсов с точки зрения игрока A_0.

Лемма 3. Совокупность

$$((u_1^*, u_2^*, u_3^*), w^*, v_1^*, v_2^*), \qquad (4.19)$$

где (u_1^*, u_2^*, u_3^*) — решение задачи (4.18); $w^*(w^{(1)*}, w^{(2)*})$ — решение задачи (4.17); v_1^* и v_2^* — решения задач (4.15) и (4.16), является ситуацией равновесия в игре Г.

Доказательство. Для всех $u\in A$

$$J_{A_0}(u^*, w^*(u_3), v_1^*\ (u_1, w^{(1)}(u_3)), v_2^*\ (u_2, w^{(2)}(u_3)))=$$

$$=a_1 w^*(u_3^*)+a_2 v_1^*\ (u_1^*, w^{(1)*}(u_3))+a_3 v_2^*\ (u_2^*, w^{(2)*}(u_3))\geqslant$$

$$\geqslant a_1 w^*(u_3)+a_2 v_1^*\ (u_1, w^{(1)*}(u_3))+a_3 v_2^*\ (u_2, w^{(2)*}(u_3))=$$

$$=J_{A_0}(u, w^*(u_3), v_1^*\ (u_1, w^{(1)}(u_3)), v_2^*\ (u_2, w^{(2)}(u_3))).$$

Для всех $w\in B(u_3)$ $(w=(w^{(1)}, w^{(2)}))$

$$J_B(u^*, w^*(u_3), v_1^*\ (u_1, w^{(1)}(u_3)), v_2^*\ (u_2, w^{(2)}(u_3)))=$$

$$=c_1 w^{(1)*}(u_3^*)+c_2 w^{(2)*}(u_3^*)\geqslant c_1 w^{(1)}(u_3^*)+c_2 w^{(2)}(u_3^*)=$$

$$=J_B(u^*, w(u_3), v_1^*\ (u_1, w^{(1)}(u_3)), v_2^*\ (u_2, w^{(2)}(u_3))).$$

Для всех $v_1\in C_1(u_1, w^{(1)})$

$$J_{C_1}\ (u^*, w^*(u_3), v_1^*\ (u_1, w^{(1)}(u_3)), v_2^*\ (u_2, w^{(2)}(u_3)))=$$

$$=c_3 v_1^*\ (u_1^*, w^{(1)*}(u_3^*))\geqslant c_3 v_1(u_1^*, w^{(1)*}(u_3^*))=$$

$$=J_{C_1}\ (u^*, w^*(u_3), v_1(u_1, w^{(1)}(u_3)), v_2^*\ (u_2, w^{(2)}(u_3))).$$

И, наконец, для всех $v_2\in C_2(u_2, w^{(2)})$

$$J_{C_2}\ (u^*, w^*(u_3), v_1^*\ (u_1, w^{(1)}(u_3)), v_2^*\ (u_2, w^{(2)}(u_3)))=$$

$$=c_4 v_2^*(u_2^*, w^{(2)*}(u_3^*)) \geqslant c_4 v_2(u_2^*, w^{(2)*}(u_3^*)) =$$
$$= J_{c_2}(u^*, w^*(u_3), v_1^*(u_1, w^{(1)}(u_3)), v_2(u_2, w^{(2)}(u_3))).$$

Все полученные здесь неравенства следуют из определений max в задачах (4.15) — (4.18), т. е. действительно ситуация (4.19) является равновесной по Нэшу в игре Г четырех лиц A_0, B, C_1 и C_2.

Построим характеристическую функцию. Заметим, что игроки B, C_1 и C_2 не имеют никаких ресурсов, кроме тех, которые они получают от A_0. Поэтому при построении характеристической функции будем различать два случая:

1) $S \subset \{B, C_1, C_2\}$, т. е. $S \not\ni A_0$;

2) $S: A_0 \in S$.

1. Сначала воспользуемся минимаксным способом. Так как в случае 1) игрок A_0 всегда может лишить коалицию $\{B, C_1, C_2\}$ и любую ее подкоалицию ресурсов, что приведет к невозможности производства продукции, то $V(S)=0$. Случай 2) распадается на следующие подслучаи:

а) $S=\{A_0\}$. Выигрыш игрока A_0 зависит от производства продукции игроками B, C_1 и C_2, которые, образовав коалицию $\{B, C_1, C_2\}$, могут отказаться производить продукцию, тем самым обеспечив игроку A_0 нулевой выигрыш: $V(\{A_0\})=0$.

б) $S=\{A_0, B\}$. Все имеющиеся ресурсы игрок A_0 направляет игроку B. Поэтому максимальный доход, который гарантирует себе коалиция $\{A_0, B\}$, равен $\max\limits_{w}((a_1+c)w)$, $c=(c_1, c_2)$ при условиях

$$(w^{(1)}+w^{(2)})A_1 \leqslant b, \quad w^{(1)} \geqslant 0, \quad w^{(2)} \geqslant 0.$$

Решение этой задачи обозначим $\tilde{w}(b)$. Тогда $V(\{A_0, B\}) = (a_1+c)w(b)$.

Заметим, что, вообще говоря, $w(b) \neq w^*(b)$, где $w^*(b)$ — решение задачи (4.17) при $u_3=b$.

в) $S=\{A_0, C_1\}$. Все свои ресурсы игрок A_0 направляет игроку C_1, а B направляет игроку C_1 нулевой ресурс. Доход коалиции $\{A_0, C_1\}$ равен $\max\limits_{v_1}((a_2+c_3)v_1)$ при условиях $v_1 A_2 \leqslant (b, 0)$, $v_1 \geqslant 0$.

Решение этой задачи обозначим $\tilde{v}_1(b, 0)$. В общем случае $\tilde{v}_1(b, 0) \neq v_1^*(b, 0)$, где $v_1^*(b, 0)$ — решение задачи (4.15) при $u_1=b$, $w^{(1)}=0$. Искомое значение есть $V(\{A_0, C_1\}) = (a_2+c_3)\tilde{v}_1(b, 0)$.

г) $S=\{A_0, C_2\}$. Этот случай симметричен случаю в) и потому $V(\{A_0, C_2\}) = (a_3+c_4)\tilde{v}_2(b, 0)$, где $\tilde{v}_2(b, 0)$ — решение следующей задачи: $\max\limits_{v_2}((a_3+c_4)v_2)$ при условиях $v_2 A_3 \leqslant (b, 0)$, $v_2 \geqslant 0$.

Заметим, что $\tilde{v}_2(b, 0) \neq v_2^*(b, 0)$ (см. (4.16)).

д) $S=\{A_0, B, C_1\}$. В этом случае игрок A_0 все свои ресурсы распределяет между игроками B и C_1, а B всю продукцию передает C_1 и

$$V(\{A_0, B, C_1\})=(a_1+c)\tilde{w}(\tilde{u}_3)+(a_2+c_3)\tilde{v}_1(\tilde{u}_1, \tilde{w}^{(1)}(\tilde{u}_3)),$$

где $((\tilde{u}_1, \tilde{u}_3), \tilde{v}_1, \tilde{w})$ — решение следующей задачи:

$$\max_{u_1, u_3} \max_{v_1} \max_{w}[(a_1+c)w(u_3)+(a_2+c_3)v_1(u_1, w(u_3))]$$

при условиях $(w=w^{(1)}+w^{(2)})$.

$$wA_1 \leqslant u_3,\ vA_2 \leqslant (u_1, w),\ u_1+u_3 \leqslant \bar{b},\ w, v_1, u_1, u_3 \geqslant 0.$$

Очевидно, что $\tilde{w}(\tilde{u}_3) \neq w^*(u_3^*)$ (см. (4.17)) и $\tilde{v}_1(\tilde{u}_1, \tilde{w}(\tilde{u}_3)) \neq v_1^*(u_1^*, w^{(1)*}(u_3^*))$ (см. (4.15)).

е) $S=\{A_0, B, C_2\}$. Данный случай симметричен случаю д) и потому

$$V(\{A_0, B, C_2\})=(a_1+c)\tilde{w}(\tilde{u}_3)+(a_3+c_4)\tilde{v}_2(\tilde{u}_2, w(\tilde{u}_3)),$$

где $((\tilde{u}_2, \tilde{u}_3), \tilde{v}_2, \tilde{w})$ — решение следующей задачи:

$$\max_{u_2} \max_{u_3} \max_{v_2} \max_{w}[(a_1+c)w(u_3)+(a_3+c_4)v_2(u_2, \dot{w}(u_3))]$$

при условиях $(w=w^{(1)}+w^{(2)})$

$$wA \leqslant u_3,\ v_2A_3 \leqslant (u_2, \dot{w}),\ u_2+u_3 \leqslant b,\ w, v_2, u_2, u_3 \geqslant 0.$$

ж) $S=\{A_0, C_1, C_2\}$. Игрок A_0 все свои ресурсы распределяет между C_1 и C_2, а игрок B не поставляет никаких ресурсов игрокам C_1 и C_2:

$$V(\{A_0, C_1, C_2\})=(a_2+c_3)\tilde{v}_1(\tilde{u}_1, 0)+(a_3+c_4)\tilde{v}_2(\tilde{u}_2, 0),$$

где $((\tilde{u}_1, \tilde{u}_2), \tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ — решение следующей задачи:

$$\max_{u_1} \max_{u_2} \max_{v_1} \max_{v_2}[(a_2+c_3)v_1(u_1, 0)+(a_3+c_4)v_2(u_2, 0)]$$

при условиях

$$v_1A_2 \leqslant (u_1, 0),\ v_2, A_3 \leqslant (u_2, 0),\ u_1+u_2 \leqslant b,\ v_1, v_2, u_1, u_2 \geqslant 0.$$

Очевидно, что $\tilde{v}_1(\tilde{u}_1, 0) \neq v_1^*(u_1^*, 0)$ (см. (4.15)) и $\tilde{v}_2(\tilde{u}_2, 0) \neq$ $\neq v_2^*(u_2^*, 0)$ (см. (4.16)).

з) $S=\{A_0, B, C_1, C_2\}$.

$$V(\{A_0, B, C_1, C_2\})=\max_{u} \max_{v_1} \max_{v_2} \max_{w}[(a_1+c)w(u_3)+$$
$$+(a_2+c_3)v_1(u_1, w^{(1)})+(a_3+c_4)v_2(u_2, w^{(2)})]$$

при условиях

$$\mathbf{w}A_1 \leqslant \mathbf{u}_3,\ \mathbf{v}_1 A_2 \leqslant (\mathbf{u}_1,\ \mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{u}_3)),\ \mathbf{v}_2 A_3 \leqslant (\mathbf{u}_2,\ \mathbf{w}^{(2)}(\mathbf{u}_3)),$$

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \leqslant \mathbf{b},\ \mathbf{w},\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3 \geqslant 0.$$

Определив для каждой коалиции $S \subset \{A_0, B, C_1, C_2\}$ ее гарантированный выигрыш $V(S)$ как значение антагонистической игры, мы определили супераддитивную функцию V, на основе которой можно рассматривать соответствующую кооперативную игру.

2. Построим характеристическую функцию V' с помощью ситуации равновесия (4.19). Имеют место те же случаи, что и в предыдущем пункте.

1) Для всех $S \subset \{B, C_1, C_2\}$, т. е. для коалиций, не содержащих A_0, получаем $V'(S) = 0$.

2) $S \subset \{A_0, B, C_1, C_2\}$: $A_0 \in S$.

а) $S = \{A_0\}$: $V'(A_0) = 0$;

б) $S = \{A_0, B\}$: $V'(\{A_0, B\}) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{c})\mathbf{w}^*(\mathbf{b})$, где $\mathbf{w}^*(\mathbf{b})$ — решение задачи (4.17) при $\mathbf{u}_3 = \mathbf{b}$;

в) $S = \{A_0, C_1\}$: $V'(\{A_0, C_1\}) = (\mathbf{a}_2 + \mathbf{c}_3)\mathbf{v}_1^*(\mathbf{b}, 0)$, где $\mathbf{v}_1^*(\mathbf{b}, 0) =$ решение задачи (4.15) при $\mathbf{u}_1 = \mathbf{b}$, $\mathbf{w}^{(1)} = 0$;

г) $S = \{A_0, C_2\}$: $V'(\{A_0, C_2\}) = (\mathbf{a}_3 + \mathbf{c}_4)\mathbf{v}_2^*(\mathbf{b}, 0)$, где $\mathbf{v}_2^*(\mathbf{b}, 0)$ — решение задачи (4.16) при $\mathbf{u}_2 = \mathbf{b}$, $\mathbf{w}^{(2)} = 0$;

д) $S = \{A_0, B, C_1\}$. Для вычисления значения характеристической функции в этом случае рассмотрим вспомогательную бескоалиционную игру Γ_1 (см. рис. 12, *б*) трех лиц A_0, B и C_1 и построим в ней ситуацию равновесия по Нэшу.

В игре Γ_1 игрок A_0 распределяет ресурсы между игроками B и C_1. Игрок B, получая ресурсы в количестве $\mathbf{u}_{31}$ от игрока A_0, направляет свою продукцию $\mathbf{w}_1$ игроку C_1. Игрок C_1 получает от A_0 ресурсы в количестве $\mathbf{u}_{11}$ и, используя их, производит окончательный продукт $\mathbf{v}_{11}$. Двойные индексы в параметрах $\mathbf{u}_{11}$, $\mathbf{u}_{31}$, $\mathbf{v}_{11}$ и нижний индекс в $\mathbf{w}_1$ показывает, что решение принимается в игре Γ_1.

Множество стратегий игрока A_0 в игре Γ_1 имеет вид

$$\{(\mathbf{u}_{11}, \mathbf{u}_{31}) \mid \mathbf{u}_{11} \geqslant 0,\ \mathbf{u}_{31} \geqslant 0,\ \mathbf{u}_{11} + \mathbf{u}_{31} \leqslant \mathbf{b},\ \mathbf{u}_{11}, \mathbf{u}_{31},\ \mathbf{b} \in R^l\}.$$

Стратегиями игрока B являются функции вида $\mathbf{w}_1(\mathbf{u}_{31})$ со значениями во множестве

$$\{\mathbf{w}_1 \mid \mathbf{w}_1 A_1 \leqslant \mathbf{u}_{31},\ \mathbf{w}_1 \geqslant 0,\ \mathbf{w}_1 \in R^n,\ A_1 \geqslant 0\}.$$

Стратегиями игрока C_1 являются функции вида $\mathbf{v}_{11}(\mathbf{w}_1, \mathbf{u}_{11})$ со значениями в множестве $\{\mathbf{v}_{11} A_2 \leqslant (\mathbf{u}_{11}, \mathbf{w}_1),\ \mathbf{u}_{11} \geqslant 0,\ A_2 \geqslant 0\}$.

Для построения ситуации равновесия в игре Γ_1 рассмотрим следующие три задачи:

$$\max(\mathbf{c}_3 \mathbf{v}_{11}) \tag{4.20}$$

при условиях $\mathbf{v}_{11} A_2 \leqslant (\mathbf{u}_{11}, \mathbf{w}_1)$, $\mathbf{v}_{11} \geqslant 0$, $A_2 \geqslant 0$;

$$\max(\mathbf{c}_1 \mathbf{w}_1) \tag{4.21}$$

при условиях $(\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_1) A_1 \leqslant \mathbf{u}_{31}$, $\mathbf{w}_1 \geqslant 0$, $\mathbf{u}_{31} \geqslant 0$, $\mathbf{w}_2 \geqslant 0$, $A_1 > 0$;

$$\max[a_1\bar{w}_1(u_{31})+a_2\bar{v}_{11}(u_{11},\bar{w}_1(u_{31}))] \qquad (4.22)$$

при условиях $u_{11}+u_{31}\leqslant b$, $u_{11}\geqslant 0$, $u_{31}\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, где $\bar{v}_{11}$, $\bar{w}_1$ — решения задач линейного параметрического программирования (4.20), (4.21). В отличие от первых двух задач (4.22) является задачей нелинейного программирования.

Лемма 4. Ситуация $((\bar{u}_{11}, \bar{u}_{31}), \bar{w}_1, \bar{v}_{11})$, составленная соответственно из решений задач (4.22), (4.21), (4.20), является равновесной в игре Γ_1.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.

Теперь полагаем, что

$$V'(\{A_0, B, C_1\}) = (a_1+c)\bar{w}_1(\bar{u}_{31})+(a_2+c_3)\bar{v}_{11}(\bar{u}_{11}, \bar{w}_1(\bar{u}_{31}))$$

— суммарный выигрыш игроков A_0, B, C_1 в ситуации равновесия по Нэшу в игре Γ_1 $(c=c_1+c_2)$.

е) $S=\{A_0, B, C_2\}$. Для вычисления значения характеристической функции в данном случае рассматривается вспомогательная бескоалиционная игра Γ_2 (см. рис. 12, *б*) трех лиц A_0, B, и C_2. Ситуация равновесия по Нэшу в игре Γ_2 строится так же, как и в предыдущем случае (в игре Γ_1). Пусть $((\bar{\bar{u}}_{22}, \bar{\bar{u}}_{32}), \bar{\bar{w}}_2, \bar{\bar{v}}_{22})$ — такая ситуация. Полагаем $V'(\{A_0, B, C_2\})$ равным суммарному доходу игроков A_0, B, C_1 в ситуации равновесия по Нэшу в игре Γ_2:

$$v'(\{A_0, B, C_2\})=(a_1+c)\bar{\bar{w}}_2(\bar{\bar{u}}_{32})+(a_3+c_4)\bar{\bar{v}}_{22}(\bar{\bar{u}}_{22}, \bar{\bar{w}}_2(\bar{\bar{u}}_{32})).$$

ж) $S=\{A_0, C_1, C_2\}$. Аналогично предыдущим двум случаям рассмотрим вспомогательную бескоалиционную игру Γ_3 (см. рис. 12, *г*) с тремя участниками A_0, C_1 и C_2 и построим в ней ситуацию равновесия по Нэшу.

Пусть $((\hat{u}_{13}, \hat{u}_{23}), \hat{v}_{13}, \hat{v}_{23})$ — ситуация равновесия в игре Γ_3. Полагаем $V'(\{A_0, C_1, C_2\})$ равным суммарному выигрышу игроков в этой ситуации:

$$V'(\{A_0, C_1, C_2\})=(a_2+c_3)\hat{v}_{13}(\hat{u}_{13})+(a_3+c_4)\hat{v}_{23}(\hat{u}_{23}).$$

з) $S=\{A_0, B, C_1, C_2\}$:

$$V'(\{A_0, B, C_1, C_2\})=(a_1+c)w^*(u_3^*)+(a_2+c_3)\times$$
$$\times v_1^*(u_1^*, w^{(1)*}(u_3^*))+(a_3+c_4)v_2^*(u_2^*, w^{(2)*}(u_3^*)),$$

т. е. значение характеристической функции для максимальной коалиции равно суммарному выигрышу всех игроков в ситуации равновесия по Нэшу (4.19) в игре Γ.

Лемма 5. Функция V' супераддитивна.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

Вектор выигрышей

$$\xi=(a, w^*(u_3^*)+a_2v_1^*(u_1^*, w^{(1)*}(u_3^*))+a_3v_2^*(u_2^*, w^{(2)*}, (u_3^*));$$

$$cw^*(u_3^*);\ c_3v_1^*(u_1^*,\ w^{(1)*}(u_3^*));\ c_4v_2^*(u_2^*,\ w^{(2)*}(u_3^*))),$$

компонентами которого являются выигрыши игроков в ситуации равновесия (4.19), как легко видеть, является дележом в игре Г. Действительно,

$$\sum_{i=1}^{4} \xi_i = V'(\{A_0, B, C_1, C_2\},\ \xi_i \geqslant 0,\ i=1, \dots, 4,$$

$$V'(\{A_0\}) = V'(\{B\}) = V'(\{C_1\}) = V'(\{C_2\}) = 0.$$

В отличие от простой ромбовидной иерархической системы управления (теорема 1) нельзя утверждать, что дележ ξ принадлежит C-ядру игры $\Gamma_{V'}$

§ 4. РОМБОВИДНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

Рассмотрим еще один пример ромбовидной структуры управления. Административный центр A_0, располагающий ресурсами, должен распределить их между подчиненными ему двумя административными центрами B_1, B_2 и одним производственным подразделением C_1. Административные центры B_1 и B_2 распределяют полученные от A_0 ресурсы следующим образом. Центр B_1 может направлять свои ресурсы в C_1, получая от него взамен некоторое количество продукции или направлять эти ресурсы в подведомственное ему производственное подразделение, имеющее одинаковые интересы с B_1. (В общем случае у B_1 может быть несколько таких подразделений.) Обозначим это подразделение через B_{11}. Точно так же центр B_2 может направлять свои ресурсы или в C_1, или в свое подведомственное подразделение B_{21}.

Пусть $\mathbf{b}$ — вектор ресурсов, которыми располагает A_0; $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ — векторы ресурсов, которые получают соответственно B_1, B_2, C_1; $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_{11}$ — векторы ресурсов, направляемые в C_1, B_{11} игроком B_1; $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_{21}$ — векторы ресурсов, направляемые в C_1 и B_{21} игроком B_2. Множества всевозможных распределений ресурсов центрами A_0, B_1 и B_2 соответственно имеют вид

$$\{(\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w})\,|\,\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w} \leqslant \mathbf{b},\ \mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w} \geqslant 0,\ \mathbf{b} \geqslant 0\},$$

$$\{(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_{11})\,|\,\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_{11}=\mathbf{u},\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_{11} \geqslant 0\},$$

$$\{(\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_{21})\,|\,\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_{21}=\mathbf{v},\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_{21} \geqslant 0\}.$$

Производственное подразделение C_1 получает ресурсы от A_0, B_1, B_2 в количествах $\mathbf{w}$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$ соответственно и, используя их, производит продукцию $\alpha=\alpha(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{w})$ для B_1 и продукцию $\beta=\beta(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{w})$ для B_2. Через $\gamma=\gamma(\mathbf{u}_{11})$ и $\delta=\delta(\mathbf{v}_{21})$ обозначим производственные программы подведомственных подразделений B_{11} и B_{21}. На рис. 13 показан граф соответствующей иерархической системы управления.

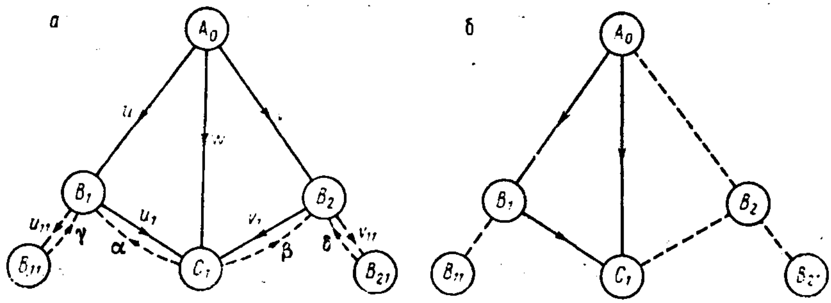

Рис. 13.

С помощью схемы, примененной для предыдущего случая, построим игру четырех лиц A_0, B_1, B_2 и C_1 (подразделения B_{11} и B_{21} игроками не считаются). Множества стратегий игроков имеют вид

$$\text{для } A_0 \ \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \mid \mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w} \leqslant \mathbf{b};\ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \geqslant 0,\ \mathbf{b} \geqslant 0,\ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{b} \in R^l\};$$

$$\text{для } B_1 \ \{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{11}, \gamma) \mid \mathbf{u}_1+\mathbf{u}_{11}=\mathbf{u},\ \gamma B^1 \leqslant \mathbf{u}_{11},\ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{11}\gamma \geqslant 0,\ B^1 \geqslant 0\};$$

$$\text{для } B_2 \{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{21}, \delta) \mid \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_{21}=\mathbf{v},\ \delta B^2 \leqslant \mathbf{v}_{21},\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{21}, \delta \geqslant 0,\ B^2 \geqslant 0\};$$

$$\text{для } C_1 \{(\alpha, \beta) \mid (\alpha+\beta) A_1 \leqslant \mathbf{u}_1+\mathbf{v}_1+\mathbf{w},\ \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ A_1 \geqslant 0\},$$

где B^1, B^2 и A_1 — технологические матрицы B_1, B_2 и C_1. Поскольку интересы B_1 и B_{11} (B_2 и B_{21}) совпадают и задание объема ресурсов $\mathbf{u}_{11}$ ($\mathbf{v}_{21}$) центром B_1 (B_2) определяет объем выпуска продукции $\gamma(\mathbf{u}_{11})$ ($\delta(\mathbf{v}_{21})$), то в игровой модели полномочия подразделения B_{11} (B_{21}) переданы координирующему центру B_1 (B_2). Отсюда стратегии игроков B_1 и B_2 имеют вид ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_{11}$, γ) и ($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_{21}$, δ)· Это можно объяснить как совместное принятие решения игроками B_1 и B_{11} (B_2 и B_{21}) по части ($\mathbf{u}_{11}$, γ) (или ($\mathbf{v}_{21}$. δ)), что, очевидно, соответствует реальной ситуации.

Функции выигрышей игроков определим следующим образом:

для A_0 $J_{A_0} = \mathbf{a}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$, где $\mathbf{a} \geqslant 0$ — вектор полезности от единицы продукции вида $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ для игрока A_0;

для B_1 $J_{B_1} = \mathbf{a}_1\alpha+\mathbf{b}_1\gamma$, где $\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{b}_1 \geqslant 0$ имеют тот же смысл для игрока B_1, что и $\mathbf{a}$ для A_0;

для B_2 $J_{B_2} = \mathbf{a}_2\beta+\mathbf{b}_2\delta$, где $\mathbf{a}_2 \geqslant 0$, $\mathbf{b}_2 \geqslant 0$ имеют тот же смысл для игрока B_2, что и $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$ для B_1;

для C_1 $J_{C_1} = \mathbf{a}_3\alpha+\mathbf{b}_3\beta$, где $\mathbf{a}_3 \geqslant 0$, $\mathbf{b}_3 \geqslant 0$ имеют тот же смысл для игрока C_1, что и $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_2$ для B_2.

Определив для каждого игрока A_0, B_1, C_1, B_2 множество стратегий и функцию выигрыша, мы определили бескоалиционную игру Q четырех лиц.

Оптимальную стратегию игрока C_1 в игре Q построим как решение следующей задачи параметрического программирования:

$$\max_{\alpha, \beta}[a_3\alpha + b_3\beta] \qquad (4.23)$$

при условиях $(\alpha+\beta)A \leqslant u_1 + v_1 + w$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, где u_1, v_1, w — параметры задачи. Решение задачи (4.23) обозначим $\alpha^* = \alpha^*(u_1, v_1, w)$, $\beta^* = \beta^*(u_1, v_1, w)$.

Для определения оптимальной производственной программы γ^* решим задачу

$$\max_{\gamma}[a_1\alpha^*(u_1, v_1, w) + b_1\gamma] \qquad (4.24)$$

при условиях $\gamma B^1 \leqslant u_{11}$, $u_1 + u_{11} = u$, $u_1 \geqslant 0$, $u_{11} \geqslant 0$, $\gamma \geqslant 0$, где u_{11}, u — параметры задачи. Пусть решение задачи (4.24) имеет вид $\gamma^* = \gamma^*(u_{11})$.

Для определения оптимальной производственной программы δ^* решим задачу

$$\max_{\delta}[a_2\beta^*(u_1, v_1, w) + b_2\delta] \qquad (4.25)$$

при условиях $\delta B^2 \leqslant v_{21}$, $v_1 + v_{21} = v$, $v_1 \geqslant 0$, $v_{21} \geqslant 0$, $\delta \geqslant 0$, где v_{21}, v — параметры задачи. Пусть решение задачи (4.25) имеет вид $\delta^* = \delta^*(v_{21})$.

Обозначим

$$F_1(u_1, v_1, w, u_{11}) = a_1\alpha^*(u_1, v_1, w) + b_1\gamma^*(u_{11}),$$

$$F_2(u_1, v_1, w, v_{21}) = a_2\beta^*(u_1, v_1, w) + b_2\delta^*(v_{21}).$$

Поскольку $u_1 + u_{11} = u$, $v_1 + v_{21} = v$, то можно написать

$$F_1 = F_1(u_1, v_1, w, u), \quad F_2 = F_2(u_1, v_1, w, v).$$

Поэтому для каждой фиксированой тройки (u, v, w) — стратегии игрока A_0 — функции F_1 и F_2 зависят только от u_1 и v_1. Игроки B_1, B_2 при каждом выборе (u, v, w) игроком A_0 оказываются в условиях неантагонистического конфликта. Следовательно, оптимальные значения u_1^* и v_1^* должны образовывать ситуацию равновесия в бескоалиционной параметрической (с параметрами (u, v)) игре двух лиц B_1 и B_2:

$$\Gamma(u, v) = \langle [0, u], [0, v]; F_1, F_2 \rangle,$$

где $[0, u]$ и $[0, v]$ — множества стратегий B_1 и B_2; $F_i = F_i(u_1, v_1)$ — функция выигрыша B_i, $i = 1, 2$, $u_1 \in [0, u]$, $v_1 \in [0, v]$. Предположим, что такая ситуация существует.

Итак, для каждого (u, v, w) оптимальной стратегией игрока B_1 в игре Q считаем тройку $(u_1^*(u, v), u_{11}^*(u, v), \gamma^*(u_{11}^*))$, где $u_1^*(u, v)$ — оптимальная стратегия B_1 в игре $\Gamma(u, v)$; $u_{11}^*(u, v) = u - u_1^*(u, v)$, а $\gamma^*(u^*_{11})$ — решение задачи (4.24) для параметров u_{11}^*, u.

Точно так же для каждого $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ считаем оптимальной стратегией игрока B_2 в игре Q тройку $(\mathbf{v}^*_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{v}^*_{21}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \delta^*(\mathbf{v}_{21}^*))$, где $\mathbf{v}^*_1$ $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — оптимальная стратегия B_2 в игре $\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v})$; $\mathbf{v}^*_{21}(\mathbf{u}, \mathbf{v})=\mathbf{v}-\mathbf{v}^*_1$ $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, а $\delta^*(\mathbf{v}_{21}^*)$ — решение задачи (4.25) для параметров $\mathbf{v}_{21}^*$, $\mathbf{v}$.

Оптимальную стратегию игрока A_0 в игре Q построим как решение следующей задачи:

$$\max(\mathbf{a}[\alpha^*(\mathbf{u}^*_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{v}^*_1(\mathbf{u}_1\mathbf{v}), \mathbf{w})+$$
$$+\beta^*(\mathbf{u}^*_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{v}^*_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w})+$$
$$+\gamma^*(\mathbf{u}^*_{11}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))+\delta^*(\mathbf{v}^*_{21}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))]) \tag{4.26}$$

при условиях

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}\leqslant\mathbf{b},\ \mathbf{u}\geqslant 0,\ \mathbf{v}\geqslant 0,\ \mathbf{w}\geqslant 0.$$

Решение задачи (4.26) обозначим $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, \mathbf{w}^*)$.

Лемма 6. Ситуация

$$((\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, \mathbf{w}^*), (\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_{11}^*, \gamma^*), (\mathbf{v}^*_1, \mathbf{v}_{21}^*, \delta^*), (\alpha^*, \beta^*)),$$

составленная из оптимальных решений задач (4.23)—(4.26) и игры $\Gamma(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$, является равновесной в игре Q.

Доказывается лемма 6 аналогично лемме 3.

Для каждой коалиции S определим ее наибольший гарантированный выигрыш, имея в виду, что в случае ее образования в игре Q остальные игроки могут образовать коалицию S' и действовать против S. С этой целью рассмотрим всевозможные коалиции S.

1) $S\subset\{B_1, B_2, C_1\}$. Так как предполагается, что игроки B_1, B_2, C_1 не располагают никакими ресурсами, кроме тех, которые они получают от A_0, то $V(S)=0$ (игрок A_0 может лишить коалицию $\{B_1, B_2, C_1\}$ и любую ее подкоалицию ресурсов, и выпуск продукции становится невозможным).

2) $S=\{A_0\}$. Так как коалиция $S'=\{B_1, B_2, C_1\}$ может отказаться от производства, обеспечив игроку A_0 нулевой выигрыш, то $V(A_0)=0$.

3) $S=\{A_0, B_1\}$. Игрок A_0 направляет все ресурсы игроку B_1, $\mathbf{u}=\mathbf{b}$, а игрок B_1, в свою очередь, использует эти ресурсы для производства γ, т. е. $\mathbf{u}_{11}=\mathbf{u}=\mathbf{b}$. Поскольку $\mathbf{u}_1=\mathbf{w}=\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_{21}=0$, то $\alpha=\beta=\delta=0$. Поэтому $V(\{A_0, B_1\})=(\mathbf{a}+\mathbf{b}_1)\gamma(\mathbf{b})$, где $(\hat{\mathbf{b}})$ — решение следующей задачи:

$$\max_{\mathbf{u}}\max_{\gamma}(\mathbf{a}+\mathbf{b}_1)\gamma(\mathbf{u}),$$

при условиях

$$\gamma B^1\leqslant\mathbf{u}_{11},\ \mathbf{u}_{11}=\mathbf{u}=\mathbf{b}\geqslant 0,\ \gamma\geqslant 0.$$

Заметим, что $\gamma(\mathbf{b})\neq\gamma^*(\mathbf{b})$, где $\gamma^*(\mathbf{b})$ — решение задачи (4.24) при $\mathbf{u}_{11}=\mathbf{u}=\mathbf{b}$.

4) $S=\{A_0, B_2\}$. Аналогично случаю 3)

$$V(\{A_0, B_2\})=(\mathbf{a}+\mathbf{b}_2)\tilde{\delta}(\mathbf{b}),$$

где $\tilde{\delta}(\mathbf{b})$ — решение задачи $\max\limits_{\mathbf{v}}\max\limits_{\delta}(\mathbf{a}+\mathbf{b}_2)\delta(\mathbf{v})$ при условиях

$$\delta\mathbf{B}^2\leqslant\mathbf{v}_{21},\ \mathbf{v}_{21}=\mathbf{v}=\mathbf{b}\geqslant 0,\ \delta\geqslant 0$$

($\tilde{\delta}(\mathbf{b})\neq\delta^*(\mathbf{b})$, $\delta^*(\mathbf{b})$ — решение (4.25) при $\mathbf{v}_{21}=\mathbf{v}=\mathbf{b}$).

5) $S=\{A_0, C_1\}$:

$$V(\{A_0, C_1\})=(\mathbf{a}+\mathbf{a}_3)\tilde{\alpha}(0,\ 0,\ \mathbf{b})+(\mathbf{a}+\mathbf{b}_3)\tilde{\beta}(0,\ 0,\ \mathbf{b}),$$

где $(\tilde{\alpha},\ \tilde{\beta})$ — решение следующей задачи:

$$\max_{\mathbf{w}}\max_{\alpha,\ \beta}[(\mathbf{a}+\mathbf{a}_3)\alpha(0,\ 0,\ \mathbf{w})+(\mathbf{a}+\mathbf{b}_3)\beta(0,\ 0,\ \mathbf{w})]$$

при условиях (см. (4.23))

$$(\alpha+\beta)\times A_1\leqslant\mathbf{w},\ \mathbf{w}=\mathbf{b}\geqslant 0,\ \alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0,$$

$$\tilde{\alpha}(0,\ 0,\ \mathbf{b})\neq\alpha^*(0,\ 0,\ \mathbf{b}),\ \tilde{\beta}(0,\ 0,\ \mathbf{b})\neq\beta^*(0,\ 0,\ \mathbf{b}).$$

6) $S=\{A_0, B_1, C_1\}$. Все ресурсы распределяются между B_1 и C_1, т. е.

$$V(\{A_0, B_1, C_1\})=\max_{\mathbf{u},\ \mathbf{w}}\max_{\gamma,\ \mathbf{u}_1}\max_{\alpha,\ \delta}[(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}+\mathbf{a}_3)\times$$

$$\times\alpha(\mathbf{u}_1,\ 0,\ \mathbf{w})+(\mathbf{a}+\mathbf{b}_3)\beta(\mathbf{u}_1,\ 0,\ \mathbf{w})+(\mathbf{a}+\mathbf{b}_1)\gamma(\mathbf{u}_{11})]$$

при условиях

$$(\alpha+\beta)A_1\leqslant\mathbf{u}_1+\mathbf{w},\ \gamma B^1\leqslant\mathbf{u}_{11},$$

$$\mathbf{u}+\mathbf{w}\leqslant\mathbf{b},\ \mathbf{u}_1+\mathbf{u}_{11}=\mathbf{u},\ \mathbf{u},\ \mathbf{w},\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_{11}\geqslant 0,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma\geqslant 0.$$

7) $S=\{A_0, B_2, C_1\}$. Аналогично случаю 6)

$$V(\{A_0,\ B_2,\ C_1\})=\max_{\mathbf{v},\ \mathbf{w}}\max_{\delta,\ \mathbf{v}_1}\max_{\alpha,\ \beta}[(\mathbf{a}+\mathbf{a}_2+\mathbf{b}_3)\times$$

$$\times\beta(0,\mathbf{v}_1,\mathbf{w})+(\mathbf{a}+\mathbf{a}_3)\alpha(0,\mathbf{v}_1,\mathbf{w})+(\mathbf{a}+\mathbf{b}_2)\delta(\mathbf{v}_{21})]$$

при условиях

$$(\alpha+\beta)A_1\leqslant\mathbf{v}_1+\mathbf{w},\ \delta B^2\leqslant\mathbf{v}_{21},\ \mathbf{v}+\mathbf{w}\leqslant\mathbf{b},$$

$$\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_{21}=\mathbf{v},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w},\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_{21}\geqslant 0,\ \alpha,\ \beta,\ \delta\geqslant 0.$$

8) $S=\{A_0, B_1, B_2\}$:

$$V(\{A_0, B_1, B_2\})=\max_{\mathbf{u},\ \mathbf{v}}\max_{\gamma}\max_{\delta}[(\mathbf{a}+\mathbf{b}_1)\gamma(\mathbf{u})+(\mathbf{a}+\mathbf{b}_2)\delta(\mathbf{v})]$$

при условиях

$$\gamma B^1\leqslant\mathbf{u}_{21},\ \delta B^2\leqslant\mathbf{v}_{21},\ \mathbf{u}+\mathbf{v}\leqslant\mathbf{b},$$

$$\mathbf{u}_{11}=\mathbf{u}\geqslant 0,\ \mathbf{v}_{21}=\mathbf{v}\geqslant 0,\ \gamma,\ \delta\geqslant 0.$$

9) $S=\{A_0, B_1, B_2, C_1\}$:

$$V(\{A_0,\ B_1,\ B_2,\ C_1\}) = \max_{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}}\ \max_{\mathbf{u}_{11},\gamma}\ \max_{\mathbf{v}_{21},\delta}\ \max_{\alpha,\beta}[(\mathbf{a}+\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_3)\times$$

$$\times\alpha(\mathbf{u}_1(\mathbf{u},\mathbf{v}),\mathbf{v}_1(\mathbf{u},\mathbf{v}),\mathbf{w}) + (\mathbf{a}+\mathbf{a}_2+\mathbf{b}_3)\beta(\mathbf{u}_1(\mathbf{u}_1\ \mathbf{v}),\ \mathbf{v}_1(\mathbf{u},\mathbf{v}),\mathbf{w}) +$$

$$+ (\mathbf{a}+\mathbf{b}_1)\gamma(\mathbf{u}_{11}) + (\mathbf{a}+\mathbf{b}_2)\delta(\mathbf{v}_{21})]$$

при условии, что будут выполнены все ограничения задач (4.23)—(4.26).

Поскольку для каждого S $V(S)$ имеет смысл значения антагонистической игры между S и S', то функция V супераддитивна и, следовательно, определена кооперативная игра

$$Q_V = <\{A_0, B_1,\ B_2,\ C_1\},\ V>.$$

Построим теперь характеристическую функцию V', используя ситуацию равновесия в игре Q (см. лемму 6).

1) Для всех $S \subset \{B_1,\ B_2,\ C_1\}$ и $S = \{A_0\}$ полагаем $V'(S) = 0$.

2) $S = \{A_0, B_1\}$: $V'(\{A_0, B_1\}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b}_1)\gamma^*(\mathbf{b})$, где $\gamma^*(\mathbf{b})$ — оптимальная стратегия игрока B^1 в бескоалиционной игре Q при $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{21} = \mathbf{b}$.

3) при $S = \{A_0,\ B_2\}$ аналогично случаю 2) $V'(\{A_0, B_2\}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b}_2)\delta^*(\mathbf{b})$.

4) $S = \{A_0, C_1\}$:

$$V'(\{A_0, C\ \}) = (\mathbf{a}+\mathbf{a}_3)\alpha^*(0,0,\mathbf{b}) + (\mathbf{a}+\mathbf{b}_3)\beta^*(0,0,\mathbf{b}),$$

где $\alpha^*(0,\ 0,\ \mathbf{b})$, $\beta^*(0,\ 0,\ \mathbf{b})$ — оптимальная стратегия игрока C_1 в игре Q при $\mathbf{w} = \mathbf{b}$, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = 0$.

5) $S = \{A_0,\ B_1,\ C_1\}$. Рассмотрим бескоалиционную игру Q' трех лиц A_0, B_1, C_1 (рис. 12), в которой A_0 распределяет свои ресурсы между B_1 и C_1: A_0 выбирает $(\mathbf{u}',\ \mathbf{w}^1)$, игрок B_1 выбирает программу $(\mathbf{u}'_1,\ \gamma'(\mathbf{u}'_{11}))$, а игрок C_1 выбирает программу $(\alpha',\ \beta')$.

Поступая, как в игре Γ_1 (см. (4.16)—(4.18)), построим ситуацию равновесия в игре Q': $((\overline{\mathbf{u}'},\ \overline{\mathbf{w}'}),\ (\overline{\mathbf{u}'_1},\ \overline{\gamma'}),\ (\overline{\alpha'},\ \overline{\beta'}))$ и положим

$$V'(\{A_0,\ B_1,\ C_1\}) = (\mathbf{a}+\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_3)\overline{\mathbf{a}}' + (\mathbf{a}+\mathbf{b}_3)\overline{\beta}' + (\mathbf{a}+\mathbf{b}_1)\gamma'.$$

6) $S = \{A_0,\ B_2,\ C_1\}$. Аналогично случаю 5) находим ситуацию равновесия $((\mathbf{v}'',\ \mathbf{w}''),\ (\mathbf{v}'',\ \delta''),\ (\alpha'',\ \beta'))$ во вспомогательной бескоалиционной игре Q'' трех лиц A_0, B_2 и C_1 и полагаем

$$V'(\{A_0,\ B_2,\ C_1\}) = (\mathbf{a}+\mathbf{a}_2+\mathbf{b}_3)\beta'' + (\mathbf{a}+\mathbf{b}_2)\delta'' + (\mathbf{a}+\mathbf{a}_3)\alpha''.$$

7) $S = \{A_0,\ B_1,\ B_2\}$. Аналогично предыдущим двум случаям находим ситуацию равновесия $((\hat{\mathbf{u}}''',\ \hat{\mathbf{v}}''',\ \hat{\gamma}''',\ \hat{\delta}''')$ во вспомогательной бескоалиционной игре Q''' трех лиц A_0, B_1, B_2 и полагаем

$$V'(\{A_0,\ B_1,\ B_2\}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b}_1)\gamma''' + (\mathbf{a}+\mathbf{b}_2)\hat{\delta}'''.$$

8) $S = \{A_0,\ B_1,\ B_2,\ C_1\}$:

$$V'(\{A_0,\ B_1,\ B_2,\ C_1\}) =$$

$$= (a+a_1+a_3)\alpha^*(u_1^* (u^*, v^*), v_1^* (u^*, v^*), w^*) +$$
$$+ (a+a_2+b_3)\beta^*(u_1^* (u^*, v^*), v_1^* (u^*, v^*), w^*) +$$
$$+ (a+b_1)\gamma^*(u_{11}^*) + (a+b_2)\delta^*(v_{21}^*),$$

где $((u^*, v^*, w^*), (u_1^*, u_{11}^*, \gamma^*), (v_1^*, v_{21}^*, \delta^*), (\alpha^*, \beta^*))$ — ситуация равновесия по Нэшу в игре Q.

Лемма 7. Функция V' супераддитивна, а вектор

$$\xi = (a(\alpha^*+\beta^*+\gamma^*+\delta^*),\ a_1\alpha^*+b_1\gamma^*,\ a_2\beta^*+b_2\delta^*,\ a_3\alpha^*+b_3\beta^*),$$

компоненты которого являются выигрышами игроков в ситуации равновесия игры Q, является дележом в кооперативной игре $Q_{V'} = \langle \{A_0, B_1, B_2, C_1\} V' \rangle$.

Доказательство аналогично доказательству соответствующих утверждений в лемме 2 и теореме 1.

Условие принадлежности дележа ξ C-ядру игры $Q_{V'}$ можно получить, применяя условие (*) из § 2 настоящей главы.

§ 5. ДИНАМИЧЕСКИЕ ИЕРАРХИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Динамическая задача распределения ресурсов. В § 1 данной главы мы рассматривали статическую двухуровневую систему управления с одним административным центром A_0 и n производственными подразделениями $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Были найдены для такой системы оптимальные в смысле Нэша управления, построена характеристическая функция и определено условие принадлежности вектора выигрышей игроков C-ядру кооперативной игры.

В данном параграфе мы будем рассматривать функционирование этой системы управления во времени, точнее на отрезке $[0, T]$, предполагая, что параметр t пробегает дискретное множество значений $0=t_1<t_2< \ldots <t_m=T$. Будем считать, что все параметры, входящие в задачу, изменяются со временем, т. е. величины b, A_i, c_i, a_i, α_i, $i=1, \ldots, n$, являются функциями времени: $b(t)$, $A_i(t)$, $c_i(t)$, $a_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $i=1, \ldots, n$.

Административный центр A_0 и производственные подразделения $B_1, \ldots, B_n$ заинтересованы в максимизации суммарного за все время функционирования системы дохода, т. е. выигрыши игроков $A_0, B_1, \ldots, B_n$ равны соответственно

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (a_i(t_k), v_i(t_k)),$$

$$\sum_{k=1}^{m} (c_1(t_k), v_1(t_k)), \ldots, \sum_{k=1}^{m} (c_n(t_k)\ v_n(t_k)),$$

где $v_i(t_k) = v_i(u, t_k)$ — производственная программа подразделения B_i, принимаемая им в момент t_k и удовлетворяющая ограничениям

$$\mathbf{v}_i(t_k)A_i(t_k)\leqslant\mathbf{u}_i(t_k)+\alpha_i(t_k),\quad \mathbf{v}_i(t_k)\geqslant 0,$$

вытекающим из выбора распределения ресурсов

$$\mathbf{u}(t_k)=(\mathbf{u}_1(t_k),\ \ldots,\ \mathbf{u}_n(t_k)),\quad \sum_{i=1}^{n}\mathbf{u}_i(t_k)\leqslant\mathbf{b}(t_k),\ \mathbf{u}_i(t_k)\geqslant 0$$

в момент t_k административным центром A_0; $\alpha_i(t_k)$ — вектор наличных ресурсов подразделения B_i в момент t_k.

Статическую игру, рассматриваемую в год t_k, в которой выигрыши игроков имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{a}_i(t_k)\mathbf{v}_i(t_k)),\ (\mathbf{c}_1(t_k)\mathbf{v}_1(t_k)),\ \ldots,\ (\mathbf{c}_n(t_k),\ \mathbf{v}_n(t_k)),$$

обозначим $\Gamma(t_k)$.

Наряду с играми $\Gamma(t_k)$ рассмотрим текущие игры $\Gamma(t_k,\ T)$ $t_k\in[0,\ T]$, на отрезке времени $[t_k,\ T]$. Выигрыши игроков в $\Gamma(t_k,\ T)$ равны

$$\sum_{l=k}^{m}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{a}_i(t_l)\mathbf{v}_i(t_l)),\ \sum_{l=k}^{m}(\mathbf{c}_1(t_l)\mathbf{v}_1(t_l)),\ \ldots,\ \sum_{l=k}^{m}(\mathbf{c}_n(t_l)\mathbf{v}_n(t_l)).$$

Пусть $\mathbf{u}^*(t_k)$, $\mathbf{v}_1^*(\mathbf{u},\ t_k),\ \ldots,\ \mathbf{v}_n^*(\mathbf{u},\ t_k)$ — оптимальные в смысле Нэша стратегии игроков $A_0,\ B_1,\ \ldots,\ B_n$ в статической игре $\Gamma(t_k)$. Повторяя рассуждения из § 1 настоящей главы, можно показать, что ситуация равновесия по Нэшу в игре $\Gamma(t_k,\ T)$ состоит в использовании в каждый год $t_l(l\geqslant k)$ игроками стратегий, образующих ситуацию равновесия по Нэшу в статической игре $\Gamma(t_l)$, т. е. она имеет вид

$$(\mathbf{u}^*_{t_k}(t),\ \mathbf{v}^*_{1,t_k}(\mathbf{u},\ t),\ \ldots,\ \mathbf{v}^*_{n,t_k}(\mathbf{u},\ t)),$$

где

$$\mathbf{u}^*_{t_k}(t)=\begin{cases}\mathbf{u}^*(t_k),\ t\in[t_k,\ t_{k+1}),\\ \ldots\qquad\qquad \ldots\\ \mathbf{u}^*(t_{m-1}),\ t\in[t_{m-1},\ T),\\ \mathbf{u}^*(T),\ t=T,\end{cases}$$

$$\mathbf{v}^*_{i,t_k}(\mathbf{u},\ t)=\begin{cases}\mathbf{v}_i^*(\mathbf{u},\ t_k),\ t\in[t_k,\ t_{k+1}),\\ \ldots\qquad \ldots\qquad \ldots\\ \mathbf{v}_i^*(\mathbf{u},\ t_{m-1}),\ t\in[t_{m-1},\ T),\\ \mathbf{v}_i^*(\mathbf{u},\ T),\ t=T.\end{cases}$$

Обозначим $N=\{A_0,\ B_1,\ \ldots,\ B_n\}$. В игре $\Gamma(t_0,\ T)$ определим функцию $V(S,\ t_0,\ T)$, $S\subset N$, с использованием выигрышей и стратегий в ситуации равновесия по Нэшу. Построение функции $V(S,\ t_0,\ T)$ аналогично построению характеристической функции (4.4), имеются лишь непринципиальные различия, связанные с различными видами выигрышей игроков в статической и динамической играх. Поэтому соответствующие формулы приведем без доказательств:

1) для A_0 $V(A_0, t_0, T)=0$;

2) для $S\subset\{B_1, \dots, B_n\}$

$$V(S, t_0, T)=\sum_{l=1}^{m}\sum_{i\in S}(\mathrm{c}_i(t_l)\mathrm{v}_i^*(0, t_l)); \tag{4.27}$$

3) для $S(A_0\in S)$

$$V(S, t_0, T)=\sum_{l=1}^{m}\sum_{i\in S}[\mathrm{a}_i(t_l)+\mathrm{c}_i(t_l)]\mathrm{v}_i^*(\mathrm{u}^{*S}(t_l), t_l),$$

где $\mathrm{u}^{*S}(t_l)$ — решение следующей задачи нелинейного программирования:

$$\max_{\mathrm{u}}\sum_{l=1}^{m}\sum_{i\in S}\mathrm{a}_i(t_l)\mathrm{v}_i^*(\mathrm{u}(t_l), t_l)$$

при условии $\sum_{i\in S}\mathrm{u}_i(t_l)\leqslant\mathrm{b}(t_l)$, $\mathrm{u}_i(t_l)\geqslant 0$, $i\in S$.

Поскольку управления $\mathrm{u}_i(t_l)$ при различных l выбираются независимо, то функция $V(\mathrm{S}, t_0, T)$ равна сумме характеристических функций в статических играх $\Gamma(t_l)$, $l=1, \dots, m$, т. е. имеет место следующее представление (ср. (4.4) и (4.27)):

$$V(S, t_0, T)=\sum_{l=1}^{m}V(S, t_l),\ S\subset N, \tag{4.28}$$

где $V(S, t_l)$ — характеристическая функция в статической игре $\Gamma(t_l)$, определенная по формуле (4.4). Из (4.28) непосредственно следует, что функция $V(S, t_0, T)$ обладает свойством супераддитивности по S, поскольку этим свойством обладают, как было показано, функции $V(S, t_l)$, $l=1, \dots, m$. Следовательно, $V(S, t_0, T)$ является характеристической функцией и порождает кооперативную игру $\Gamma_V(t_0, T)$.

Построим $(n+1)$-вектор

$$\eta^0=\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{a}_i(t_l)\mathrm{v}_i^*(\mathrm{u}^*(t_l), t_l))\right), \sum_{l=1}^{m}(\mathrm{c}_1(t_l),$$

$$\mathrm{v}_1^*(\mathrm{u}^*(t_l), t_l)), \dots \sum_{l=1}^{m}(\mathrm{c}_n(t_l)\mathrm{v}_n^*(\mathrm{u}^*(t_l), t_l)),$$

компоненты которого равны выигрышам игроков A_0, $B_1, \dots, B_n$ соответственно в ситуации равновесия по Нэшу, и покажем, что он является дележом в кооперативной игре $\Gamma_V(x_0, T)$ в форме характеристической функции $V(S, t_0, T)$. Рассмотрим вектор

$$\eta^0=\sum_{l=1}^{m}\xi^{t_l}, \tag{4.29}$$

где $(n+1)$-вектор ξ^{t_l} равен

$$\xi^{t_l} = \left(\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}_i(t_l)\mathbf{v}_i^*(\mathbf{u}^*(t_l), t_l)) \right), (\mathbf{c}_1(t_l)\times$$

$$\times \mathbf{v}_1^*(\mathbf{u}^*(t_l), t_l)), \ldots, (\mathbf{c}_n(t_l)\mathbf{v}_n^*(\mathbf{u}^*(t_l), t_l))).$$

По доказанному (см. § 2, (4.5)) ξ^{t_l} является дележом в статической кооперативной игре $\Gamma_V(t_l)$ в форме характеристической функции $V(S, t_l)$, т. е.

1) $\xi_i^{t_l} \geqslant V(\{i\}, t_l),\ i \in N;$

2) $\sum_{i \in N} \xi_i^{t_l} = V(N, t_l),\ l = 1, \ldots, m.$

Отсюда имеем

$$\sum_{l=1}^{m} \xi_i^{t_l} \geqslant \sum_{l=1}^{m} V(\{i\}, t_l)\ i \in N,$$

$$\sum_{l=1}^{m} \sum_{i \in N} \xi_i^{t_l} = \sum_{l=1}^{m} V(N, t_l),$$

или, применяя (4.28) и (4.29), получаем

$$\eta_i^0 \geqslant V(\{i\}, t_0, T),\ i \in N; \quad \sum_{i \in N} \eta_i^0 = V(N, t_0, T).$$

Следовательно, η^0 действительно является дележом в игре $\Gamma_V(t_0, T)$.

Далее, повторяя соответствующие рассуждения из § 1 настоящей главы, можно доказать, что при выполнении условия

$$\sum_{i \in S} \mathbf{a}_i(t_l)\mathbf{v}_i^*(\mathbf{u}^{*S}(t_l), t_l) \geqslant \sum_{i \in S}^{n} (\mathbf{a}_i(t_l) + \mathbf{c}_i(t_l)) \times$$

$$\times [\mathbf{v}_i^*(\mathbf{u}^{*S}(t_l), t_l) - \mathbf{v}_i^*(\mathbf{u}^{*S}(t_l), t_l)] \qquad (4.30)$$

для всех $l = 1, \ldots, m$ и $S: A_0 \in S$ дележ η^0 принадлежит C-ядру $C_V(t_0, T)$ игры $\Gamma_V(t_0, T)$.

Это обстоятельство позволяет сделать вывод о том, что если в каждый год t_l игроки распределяют доходы между собой согласно дележу ξ^{t_l} и выполнено условие (4.30) (оно имеет такую же экономическую интерпретацию, что и соответствующее условие в) из §2 настоящей главы), то их устойчивое во времени функционирование гарантировано.

Рассмотрим теперь функционирование ромбовидной системы, изученной в § 2 (см. рис. 12), на отрезке $[0, T]$. Пусть Δ — произвольное разбиение отрезка $[0, T]$ точками t_k, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, m$. Пусть $\Gamma(t_0, T)$ — соответствующая игра, где $t_0 = 0$.

Выигрыши игроков A_0, B_1, B_2, C в $\Gamma(t_0, T)$ равны соответственно

$$J_i(t_0, \mathbf{v}(t)) = \sum_{k=0}^{m} f_i(t_k, \mathbf{v}(t_k)),\ i=1, \dots, 4,$$

где $\mathbf{v}(t_k) \in C(\mathbf{w}_1(t_k),\ \mathbf{w}_2(t_k))$ — производственная программа игрока C в момент $t_k \in \Delta$; $\mathbf{w}_i(t_k, \mathbf{u}_i(t_l))$ — управление игрока B_i, $i=1, 2$, в момент t_k, а $\mathbf{u}(t_k) = (\mathbf{u}_1(t_k),\ \mathbf{u}_2(t_k))$ — управление игрока A_0 в тот же момент времени.

В момент t_k определим статическую бескоалиционную игру $\Gamma(t_k)$ с выигрышами $f_i(t_k)$, $i=1, \dots, 4$. Пусть

$$(\mathbf{v}^*(t_k),\ \mathbf{w}_1^*(t_k), \mathbf{w}_2^*(t_k),\ \mathbf{u}^*(t_k)) \tag{4.31}$$

— ситуация равновесия по Нэшу в игре $\Gamma(t_k)$. Стратегии из (4.31) определяются путем решения задач (4.11)—(4.13), в которых все параметры определены в момент t_k. Тогда ситуация

$$(\mathbf{v}^*_{t_0}(t),\ \mathbf{w}^*_{1t_0}(t),\ \mathbf{w}^*_{2t_0}(t),\ \mathbf{u}^*_{t_0}(t)),$$

где

$$\mathbf{v}^*_{t_0}(t) = \begin{cases} \mathbf{v}^*(t_0), \text{ если } t \in [t_0, t_1), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathbf{v}^*(t_{m-1}), \text{ если } t \in [t_{m-1}, T), \\ \mathbf{v}^*(T), \text{ если } t = T, \end{cases}$$

является равновесной в игре $\Gamma(t_0, T)$ (см. § 2 настоящей главы) (стратегии $\mathbf{w}_1^*$, $\mathbf{w}_2^*$, $\mathbf{u}^*$ определяются аналогично). Используя (4.31) и выигрыши (4.30) в этой ситуации, построим характеристическую функцию $V'(S, t_0, T)$ (см. § 1 настоящей главы).

Имеет место представление

$$V'(S, t_0, T) = \sum_{k=0}^{m} V'(S, t_k),\ S \subset \{A_0, B_1, B_2, C\},$$

где $V'(S, t_k)$ — характеристическая функция для $\Gamma(t_k)$, построенная тем же способом. По лемме 7 $V'(S, t_k)$ супераддитивна по S, значит, и $V'(S, t_k, T)$ супераддитивна по S. Кроме того, из такого представления следует, что $V'(S, t_k, T)$ аддитивна по t_k. Поэтому утверждение о том, что дележ

$$\xi = (\{J_i(t_0, v^*_{t_0}(t)),\ i=1, \dots, 4\})$$

принадлежит C-ядру игры $\Gamma_{V'}(t_0, T)$ и динамически устойчив в ней, может быть доказано ссылкой на теорему 1.

При планировании развития замкнутых экологических систем необходимо учитывать основные и сопутствующие компоненты системы, число которых даже в самых простейших случаях может быть достаточно велико. Когда развитие системы может управляться извне путем выделения ресурсов, капиталовложений или законодательными актами, взаимодействие компонент может моделироваться иерархической игрой на конечном графе межкомпонентных связей. Из-за наличия большого числа участников, имеющих необязательно совпадающие интересы, рассматриваемые иерархические игры оказываются неантагонистическими играми многих лиц, и поэтому наиболее серьезной проблемой здесь является выработка приемлемого принципа оптимальности. Мы исследовали простейшие иерархические игры: древовидные, ромбовидные, ромбовидные с дополнительными связями и др. В каждом случае, анализируя возможность оптимального поведения, мы сравнивали различные принципы оптимальности: ситуацию равновесия по Нэшу и ядро, построенное с использованием различных видов характеристических функций. При этом нами получены конструктивные способы нахождения принципов оптимальности, если их существование обеспечивается соответствующими аналитическими условиями. Однако несмотря на конструктивность построений, в упомянутых простейших случаях реальные расчеты оптимального поведения могут оказаться достаточно сложными. Рассмотренный подход может быть распространен и на более общие иерархические игры, моделирующие взаимодействие замкнутых экологических систем с большим числом основных компонент. Вместе с тем получение конкретных рекомендаций по оптимальному поведению будет затруднено из-за большой размерности задачи. Поэтому наиболее приемлемой может быть лишь модель, правильно выделяющая небольшое число основных (управляемых) компонент системы.

Глава 5

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

§ 1. МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ ЗАМКНУТЫХ ЭКОСИСТЕМ

В настоящей главе мы рассмотрим математические модели развития экологически замкнутых регионов.

Хорошо известно, что экологические проблемы возникают не сами по себе, а в тесной связи с другими задачами развития и управления. Созидательная деятельность человека в течение последних десятилетий приводит к природным изменениям, сопоставимым с изменениями, протекавшими на протяжении миллионов лет.

Некоторые из наиболее красивых и гармоничных ландшафтов связаны с деятельностью человека: это цветущие луга, леса и пастбища в горах Европы, уходящие в горы террасы и рисовые поля в Юго-Восточной Азии, африканские саванны и южноамериканские пампасы, созданные с целью расчистки районов охоты и др. Велика позитивная роль человека в создании и сохранении генетического разнообразия. Мы наблюдаем результаты его деятельности по увеличению многообразия видов домашних животных (овец, крупного рогатого скота, собак, пушных животных). Нередко исчезновение какого-либо вида было связано с тем, что человек не мог своевременно вмешаться в его распространение, которое привело к подрыву кормового потенциала его ареала.

Таким образом, сохранение природного разнообразия должно включать в себя принцип активного управления. Развитие экологически замкнутых регионов, вызванное деятельностью человека, является объективной реальностью и не должно восприниматься как недопустимое, нежелательное явление.

Наиболее остро проблемы охраны окружающей среды и сохранения существующих экосистем возникают при решении задач крупномасштабного планирования развития промышленного и сельскохозяйственного производства. Если мы хотим учесть экологические аспекты развития, то необходимо ввести дополнительные цели развития, отвечающие определенным экологическим требованиям.

Для объективной оценки результата развития естественно использование нескольких независимых критериев, часть которых отвечает требованиям охраны окружающей среды и сохранения существующих экосистем. В подавляющем большинстве случаев «экологическая» группа критериев бывает трудносовместима с «экономической» группой, поэтому объединение (скаляризация) критериев не имеет достаточного обоснования. Это приводит к постановке многокритериальных задач оптимального управления, которые на сегодняшний день мало изучены. В том случае, когда стороны, заинтересованные в достижении экологических критериев, могут активно влиять на процесс развития, мы приходим к конфликтным управляемым процессам, описываемым неантагонистическими дифференциальными играми.

При оценке качества того иного плана развития необходимо также учитывать фактор времени, который может привести к изменению целей развития, а следовательно, к потере динамической устойчивости выбранного решения. Многочисленные примеры оценки результатов развития с использованием экологических критериев, приводящих к многокритериальным оптимизационным задачам, рассмотрены в работе [19], и здесь мы не будем подробно останавливаться на их изложении. Вместе с тем эти примеры носят статический характер и не учитывают временно́го фактора.

Наиболее уязвимыми экосистемами являются островные экосистемы и относительно изолированные от внешнего мира горные районы. В то же время они являются удобным местом для изучения экологических последствий развития. Здесь из-за строгой ограниченности региона исследований можно сравнительно легко определить компоненты, которые играют определяющую роль во взаимодействии человека с окружающей средой. Относительно небольшое число параметров позволяет использовать простые математические модели, и информационный материал, подлежащий переработке, по своему объему оказывается вполне доступным для современных вычислительных машин. Результаты моделирования могут служить основой для качественных рекомендаций в более общих случаях.

В нашей стране одной из таких хрупких экосистем являются Командорские острова, которые представляют собой уникальный природный комплекс. Они являются частью Алеутского архипелага, протянувшегося от Аляски до Камчатки. Нарушение экосистемы этих островов носит необратимый характер, поскольку она относится к северным биоценозам с малым числом компонент. Исключительная ценность островов обусловлена тесным сочетанием биоценозов суши с биоценозами морских и пресных вод. В настоящее время здесь обитают тюлень, сивуч, морской котик, калан и другие ценные животные. Прибрежные пляжи и скалы густо заселены многочисленными колониями птиц.

Со времени открытия Командорских островов Витусом Берингом (1741 г.) и до начала XX в. на островах велся почти неконтролируемый охотничий и пушной промысел. На грани уничтожения находились калан и котик, полностью была истреблена корова Стеллера. В течение всего XIX в. на Командорских островах ежегодно заготавливалось 20—30 тыс. шкур котика, однако в начале нынешнего столетия начался резкий упадок лежбищ.

За годы Советской власти были проведены конкретные мероприятия для восстановления численности котиков и каланов, которые были взяты под охрану государства. Эта задача была в основном успешно решена, и создались условия для рациональной эксплуатации природных ресурсов островов. Однако в настоящее время происходит резкое увеличение интенсивности хозяйственной деятельности человека, что может поставить под угрозу сложившееся экологическое равновесие уникального природного комплекса. Поэтому особенно актуальным является определение правильных путей развития островного хозяйства с учетом особого значения островов для нашей страны. Для этого необходимо определить научные критерии и оправданные цели, которые могли бы служить основой для ведения хозяйства.

Для оценки альтернативных вариантов развития в данном случае не так легко определить соответствующие критерии. Поэтому можно пойти по другому пути.

Состояние экологически замкнутого региона может описываться с помощью вектора $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$, компонентами которого являются количественные состояния отраслей хозяйства и основных форм деятельности: число жителей, плотность видов животных, состояние растительной среды и др. Организации, заинтересованные в развитии острова и отвечающие за развитие определенных форм хозяйственной деятельности, на основе анализа положения дел на острове и с учетом своих интересов могут предложить свое понимание «идеального» состояния островного хозяйства путем определения целевой точки M_i (точка M_i выбирается i-й организацией) в пространстве всех возможных состояний X, к которой с точки зрения данной организации должно стремиться развитие острова.

В зависимости от количества заинтересованных организаций мы получим набор целей $M_1, \dots, M_i, \dots, M_m$. Пусть в результате реализации одной из альтернатив развития в конце периода длительного планирования T состояние острова переходит из точки $\mathbf{x}_0$ в точу $\mathbf{x}(T)$, тогда естественно в качестве критерия развития выбрать векторный критерий

$$[\varrho(\mathbf{x}(T), M_1), \dots, \varrho(\mathbf{x}(T), M_i), \dots, \varrho(\mathbf{x}(T), M_m)].$$

где ϱ — евклидово расстояние состояния, получившегося в результате развития, от целевых точек $M_1, \dots, M_i, \dots, M_m$. Точка $\mathbf{x}(T)$ находится с использованием математических моделей согласно выбранной альтернативе развития.

§ 2. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Предыдущий пример показал нам необходимость оценки «экологических» решений по нескольким независимым критериям. В настоящее время существует целая область математической теории управления — теория многокритериальной оптимизации, в которой исследуются задачи такого типа. Для всестороннего ознакомления с соответствующими результатами рекомендуем обратиться к монографии [41].

Не имея возможности подробно останавливаться на исследовании многокритериальных оптимизационных задач, мы сформулируем различные подходы к построению принципов оптимальности, проанализируем динамическую устойчивость этих принципов и предложим методы нахождения оптимальных решений в конкретных случаях.

При наличии нескольких независимых критериев для оценки управленческих решений выбор наилучшего решения является нетривиальной задачей. Довольно очевидно, что в многокритериальной задаче максимизации из двух векторных оценок, отличающихся лишь одной компонентой, предпочтительнее та, у которой такая компонента больше. Гораздо сложнее сравнение векторных оценок с различными компонентами.

Пусть X — множество возможных исходов принятия решения. Каждое из исходов $\mathbf{x} \in X$ оценивается с помощью векторного критерия $H(\mathbf{x}) = \{H_1(\mathbf{x}), \dots, H_i(\mathbf{x}), \dots, H_m(\mathbf{x})\}$ (предположим, что степень предпочтительности исхода возрастает с возрастанием компонент вектора H). Поскольку $H \in R^n$, то введем на множестве векторов $\{H\} \in R^n$ отношение строгого предпочтения $>$ так же, как это делается для n-мерного евклидова пространства R^n. Будем говорить, что вектор $H' = \{H'_i\} > H'' = \{H''_i\}$ тогда и только тогда, когда $H'_i > H''_i$ для всех $i = 1, \dots, m$. Аналогично вводится отношение нестрогого предпочтения $\geqslant$: будем говорить, что вектор $H' = \{H'_i\} \geqslant H'' = \{H''_i\}$, если $H'_i \geqslant H''_i$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Обозначим через $\varkappa = \{H(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\}$ множество оценок для всех возможных значений $\mathbf{x} \in X$. Довольно очевидно, что если найдется такой вектор $H^* \in \varkappa$, что $H^* \geqslant H$ для всех $H \in \varkappa$, то решение $\mathbf{x}^*$, для которого $H(\mathbf{x}^*) = H^*$, следует считать наилучшим, поскольку оно явится наилучшим по всем компонентам векторного критерия H среди решений $\mathbf{x} \in X$.

Векторная оценка $H^* \in \varkappa$ называется максимальной по $\geqslant$

(по $>$) относительно $\varkappa$, если не существует оценки $H \neq H^*$, $H \in \varkappa$, такой, что $H \geqslant H^*$ $(H > H^*)$. Оценка, максимальная по $\geqslant$, называется оптимальной по Парето (или эффективной) оценкой, а соответствующее решение $\mathbf{x}^*$ — оптимальным по Парето (или эффективным).

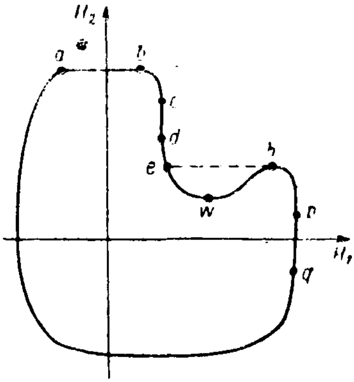

Рис. 14.

Таким образом, оптимальное по Парето решение обладает тем свойством, что не существует никакого другого решения $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}^* \in X$, которое превосходит его в смысле отношения порядка $\geqslant$ по всем компонентам критерия H. Иными словами, если $\mathbf{x}^*$ — Парето-оптимальное решение, то из условия $H_i(\mathbf{x}') \geqslant H_i(\mathbf{x}^*)$, $i = 1, \ldots, m$, должно следовать $\mathbf{x}' = \mathbf{x}^*$ (а значит, $H_i(\mathbf{x}') = H_i(\mathbf{x}^*)$).

Множество оценок $\varkappa \subset \varkappa$, удовлетворяющих этому условию, называется множеством Парето, или эффективным, а множество соответствующих решений $P(\mathbf{x}) \subset X$ — множеством эффективных решений, или Парето-оптимальным множеством, т. е. $P(X) = \{\mathbf{x} \in X : H(\mathbf{x}) \in \varkappa\}$.

Векторная оценка $\overline{H} \in \varkappa$, максимальная по $>$, называется слабоэффективной, или слабооптимальной по Парето, или оптимальной по Слейтеру, а соответствующее решение $\bar{\mathbf{x}}$ — оптимальным по Слейтеру, или слабоэффективным. Таким образом, оптимальное по Слейтеру решение обладает тем свойством, что не существует никакого другого решения $\mathbf{x}' \neq \bar{\mathbf{x}} \in X$, которое превосходит его в смысле порядка $>$ по всем компонентам критерия H. Иными словами, если $\bar{\mathbf{x}}$ оптимальна по Слейтеру, то не существует такого $\mathbf{x}' \in X$, что $H_i(\mathbf{x}') > H_i(\mathbf{x}^*)$, $i = 1, \ldots, m$.

Множество оценок $\overline{\varkappa} \subset \varkappa$, оптимальных по Слейтеру, удовлетворяющих этому условию, называется слабоэффективным множеством, а множество соответствующих решений $S(X) \subset X$ — слабоэффективным множеством решений, т. е. $S(X) = \{\mathbf{x} \in X$, для которых не существует $\mathbf{x}' \in X$, таких, что $H_i(\mathbf{x}') > H_i(\mathbf{x})\}$.

Поскольку из $H > H'$ следует $H \geqslant H'$, то всякая эффективная оценка слабоэффективна, так что $\varkappa \subset \overline{\varkappa}$ и $P(X) \subset S(X)$.

Пусть множество $\varkappa$[41] имеет вид, изображенный на рис. 14 (случай двух критериев). Множество $\varkappa$ совпадает с «северо-восточной» границей множества $\varkappa$ (кривые bc, de без точек d и e, hp), а множество $\overline{\varkappa}$ состоит из кривой $abcde$ (включая e) и hpq.

Основной задачей многокритериальной оптимизации является выделение оптимального решения из множества всех решений. Естественно, что хорошим следует считать метод, когда это решение оказывается эффективным или слабоэффективным. Мы опишем здесь два подхода к выделению оптимального решения.

Пусть $y_i^* = \max_{x \in X} H_i(x)$. Рассмотрим выраженне

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant m} \frac{y_i^* - H_i(x)}{|y_i^*|}, \tag{5.1}$$

оценивающее максимальное отклонение оценки H произвольного решения $x \in X$ от вектора $y^* = (y_1^*, \ldots, y_i^*, \ldots, y_m^*)$, представляющего собой вектор максимумов по каждому критерию. В качестве оптимальной точки $x^* \in X$ предлагается выбрать точку x^*, минимизирующую выражение (5.1), т. е.

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{y_i^* - H_i(x^*)}{|y_i^*|} = \min_{x \in X} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{y_i^* - H_i(x)}{|y_i^*|}. \tag{5.2}$$

Можно показать, что решение x^* всегда слабоэффективно, а если оно единственно (с точностью до эквивалентности), то и эффективно.

Другим методом выбора оптимального решения являются так называемые арбитражные схемы. Метод формулируется при некоторых предположениях о структуре множества $\varkappa$ и функций $H_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$. Однако он может быть применен и в более общем случае.

Будем считать, что множество $\varkappa$ всевозможных оценок выпукло и компактно в R^n. Введем в рассмотрение некоторое исходное решение $x^0 \in X$, которое будет интерпретироваться нами как «консервативное» решение, подлежащее улучшению при решении данной многокритериальной задачи. Значение вектора полезностей H в точке $x^0 \in X$ $H(x^0) = \{H_1(x^0), \ldots, H_m(x^0)\}$ будем называть точкой «статус-кво».

Под арбитражной схемой понимается правило φ, которое каждой паре $(\varkappa, H(x_0))$ ставит в соответствие некоторую пару $(\overline{H}, \overline{x}) = \varphi(\varkappa, H(x^0))$, где $\overline{H} \in \hat{\varkappa}$, $\overline{x} \in X$ и $\overline{H} = H(\overline{x})$ (x интерпретируется как оптимальное решение).

Сформулируем для арбитражных схем аксиомы, которым должно удовлетворять правило φ, сопоставляющее каждому выпуклому замкнутому подмножеству $\varkappa$ и точке $H \in \varkappa$ некоторую пару $(\overline{x}, \overline{H})$:

1) Реализуемость: $\overline{H} \in \varkappa$, $\overline{x} \in X$, $\overline{H} = H(\overline{x})$.
2) Индивидуальная рациональность: $\overline{H} \geqslant H(x^0)$.
3) Оптимальность по Парето: если $H \in \varkappa$ и $H \geqslant \overline{H}$, то $\overline{H} = H$.
4) Независимость от посторонних альтернатив: если

$\overline{H} \in A \subset \varkappa$ и $(\overline{H}, \overline{x}) = \varphi(\varkappa, H(x^0))$, то $(\overline{H}, \overline{x}) = \varphi(A, H(x^0))$.

5) Линейность: если множество $\varkappa' = \alpha\varkappa + \beta$ получается из $\varkappa$ с помощью линейного преобразования, т. е. $H'_i = \alpha_i H_i + \beta_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, а $\varphi(\varkappa, H(x^0)) = (\overline{H}, \overline{x})$, то $\varphi(\varkappa', \alpha H(x^0) + \beta) = (\alpha \overline{H}(\overline{x}) + \beta, \overline{x})$.

Смысл трех первых аксиом достаточно ясен. Аксиома 4) означает, что имея бо́льшие возможности для выбора $(\overline{H}, \overline{x})$, можно согласиться на этот же вектор выигрышей при меньших возможностях, если этот вектор реализуем. Аксиома линейности утверждает, что в разных шкалах измерения полезностей мы руководствуемся одинаковым принципом оптимальности при выборе (H, x).

Будем для простоты считать, что в множестве $\varkappa$ существует вектор H, каждая i-я координата которого строго больше $H_i(x^0)$. Имеет место следующее утверждение (доказательство см. в [8]). Функция

$$\varphi(\varkappa, H(x^0)) = \{(\overline{H}, \overline{x}) \mid \max_{\substack{H \geqslant H(x^0) \\ H \in \varkappa}} g(H, \varkappa, H(x^0)) = g(\overline{H}(\overline{x}), \varkappa, H(x^0))\},$$

где $g(H, \varkappa, H(x^0)) = \prod_{i=1}^{m} (H_i - H_i(x^0))$, удовлетворяет аксиомам 1)—4).

Исследуем теперь возможность скаляризации векторного критерия H. Оказывается, в достаточно широком классе случаев максимум скаляризованного критерия находится во множестве эффективных или слабоэффективных точек и, наоборот, каждая эффективная или слабоэффективная точка в смысле векторного критерия H может быть вычислена как максимум некоторого скалярного критерия, полученного из H. Сформулируем более точно условия, при которых это имеет место.

Определение. *Множество $S \subset R^n$ называется выпуклым, если оно вместе с двумя любыми точками содержит и соединяющий их отрезок, т. е. если $(\lambda x + (1-\lambda)x') \in S$ при любых x, $x' \in S$ и $\lambda \in [0, 1]$.*

Пусть для каждой точки $y \in R^n$ $A_y = \{y' : y' \leqslant y\}$, тогда множество S называется слабовыпуклым, если выпукло множество $S_* = \bigcup_{y \in S} A_y$.

Очевидно, что если некоторая оценка H слабоэффективна во множестве $\varkappa$, то она будет слабоэффективной и во множестве $\varkappa_*$. Пусть $\varkappa$ слабовыпукло. Оценка $H^* \in \varkappa$ слабоэффективна тогда и только тогда, когда существует такой вектор $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $\mu_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{m} \mu^i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, при котором $(\mu, H^*) \geqslant$

$\geqslant(\mu, H)$ для всех $H \in \varkappa$ (скобка означает скалярное произведение). Последнее утверждение сводит задачу нахождения слабоэффективных точек множества $\varkappa$ и слабоэффективных решений к задаче нахождения максимума линейной функции (μ, H) на множестве $\varkappa$. При этом, перебирая всевозможные векторы $\{\mu: \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1, \mu_i \geqslant 0\}$, мы получаем все множество слабоэффективных решений.

Перейдем теперь к рассмотрению динамических многокритериальных задач.

§ 3. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть состояние экологически замкнутого региона описывается вектором $\mathbf{x} \in R^n (\mathbf{x} \geqslant 0)$. В начальный момент t_0 регион находится в состоянии $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, и задача заключается в определении альтернатив его развития на длительную перспективу $[t_0, T]$, где T — конец периода планирования. Предположим, что развитие региона на отрезке времени $[t_0, T]$ может быть описано системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \ \mathbf{x} \in R^n, \ \mathbf{u} \in U \subset \operatorname{comp} R^n,$$

где $\mathbf{u}$ — управляющий параметр, имеющий смысл внешних воздействий (скорость роста капиталовложений и ресурсов), с помощью которых происходит управление развитием. Будем считать, что параметр $\mathbf{u}$ выбирается непрерывно во времени и получившиеся в результате функции $\mathbf{u}(t) \subset U$, $t \in [t_0, T]$, измеримы по t. Будем также считать выполненными все условия, гарантирующие существование, продолжимость и единственность решения системы

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t)) \tag{5.2}$$

при любом измеримом управлении $\mathbf{u}(t)$ на отрезке времени $[t_0, T]$ и при начальном условии $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Каждое программное управление $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, T]$, определяет некоторую альтернативу движения $\mathbf{x}(t)$, $t \in [t_0, T]$, получаемую как решение уравнения (5.2) при начальном условии $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Пусть $C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)$ — множество достижимости системы (5.2), т. е. множество точек в R^n, в которые может попасть решение системы (5.2) из начального состояния $\mathbf{x}_0$ в момент T при использовании всевозможных программных управлений $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, T]$. Иными словами, множество достижимости — это множество концов траектории системы (5.2) $\{\mathbf{x}(T)\}$, исходящих из начального состояния $\mathbf{x}_0$ при всевозможных программных управлениях $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Предположим далее, что качество альтернативы развития определяется точкой $\mathbf{x}(T)$, в которую переходит регион в результате этого развития в конечный момент T. Таким образом, можно считать, что на множестве достижимости $C^{T-t_0}(\mathrm{x}_0)$ системы (5.2) задан векторный критерий $\mathrm{H}(\mathrm{x}(T))\in R^m$, $\mathrm{x}(T)\in C^{T-t_0}(\mathrm{x}_0)$, определяющий качество траектории $\mathrm{x}(t)$ и соответствующего управления $\mathrm{u}(t)$. Мы приходим к динамической многокритериальной задаче оптимизации, рассмотренной в предыдущем параграфе:

$$\chi(\mathrm{x}_0,\ T-t_0)=\{\mathrm{x}(T):\mathrm{x}(T)\in C^{T-t_0}(\mathrm{x}_0)\}, \qquad (5.3)$$

$$\varkappa(\mathrm{x}_0,\ T-t_0)=\{H(\mathrm{x}(T)):\mathrm{x}(T)\in C^{T-t_0}(\mathrm{x}_0)\}. \qquad (5.4)$$

Здесь множества $\varkappa$ и χ зависят от параметров x_0, $T-t_0$, представляющих начальные условия задачи развития (5.2). Поскольку сформулированная динамическая многокритериальная задача оптимизации зависит от начальных условий x_0, $T-t_0$ (начальное состояние региона и продолжительность планирования), будем обозначать ее через $\Gamma(\mathrm{x}_0,\ T-t_0)$.

Итак, мы имеем динамическую многокритериальную задачу оптимизации $\Gamma(\mathrm{x}_0,\ T-t_0)$, множество всевозможных исходов $\chi(\mathrm{x}_0,\ T-t_0)$, определенных в (5.3), и множество всевозможных оценок $\varkappa(\mathrm{x}_0,\ T-t_0)$, определенных в (5.4). Пусть даны: $\underline{\varkappa}(\mathrm{x}_0,\ T-t_0)\subset\varkappa(\mathrm{x}_0,\ T-t_0)$ — множество эффективных оценок; $\overline{\varkappa}(\mathrm{x}_0,\ T-t_0)\subset\varkappa(\mathrm{x}_0,\ T-t_0)$ — множество слабоэффективных оценок; $P[\chi(\mathrm{x}_0,\ T-t_0)]$ и $S[\chi(\mathrm{x}_0,\ T-t_0)]$ — соответствующие множества решений.

В динамических оптимизационных задачах очень важен вопрос о динамической устойчивости выбранного принципа оптимальности. Этот вопрос, являющийся тривиальным следствием принципа максимума Л. С. Понтрягина и принципа оптимальности Р. Беллмана в случае классических однокритериальных динамических оптимизационных задач, при переходе к многокритериальным оптимизационным задачам и неантагонистическим игровым задачам становится серьезной проблемой (см. [34, 35, 38]).

Для исследования динамической устойчивости погрузим нашу конкретную динамическую задачу многокритериальной оптимизации $\Gamma(\mathrm{x}_0,\ T-t_0)$, зависящую от начального условия x_0 и продолжительности процесса $T-t_0$, в семейство аналогичных многокритериальных оптимизационных задач с начальными условиями x_0 и продолжительностью $T-t$ $(t_0\leqslant t\leqslant T)$. Такую задачу обозначим через $\Gamma(\mathrm{x},\ T-t)$.

Как мы уже видели в предыдущем параграфе, многокритериальные задачи характеризуются множественностью принципов оптимальности. Поясним для полноты требование динамической устойчивости принципов оптимальности или устойчивость принципов оптимальности во времени при развитии по оптимальному пути. Предположим, что в начале процесса, т. е. решая задачу $\Gamma(\mathrm{x}_0,\ T-t_0)$, мы применили некоторый принцип оптимальности и в соответствии с ним построили оптимальную траекторию. В процессе движения вдоль этой траектории от задачи с одними начальными состояниями перейдем к задаче с другими начальными состояниями. Несмотря на то, что выбранная траектория является оптимальной в задаче для начальных состояний процесса, оставшийся отрезок траектории (начиная с некоторого текущего момента $t_0 \leqslant t \leqslant T$) может, вообще говоря, не быть оптимальной траекторией, реализующей тот же принцип оптимальности в задаче для начальных состояний на этой траектории, соответствующих текущему моменту t. Поэтому у нас в момент t может не быть оснований придерживаться и далее выбранной вначале оптимальной траектории, что может привести к отказу от принятого в первоначальной задаче принципа оптимальности, т. е. неустойчивости процесса в целом. Требование динамической устойчивости заключается в сохранении первоначально выбранного движения в задачах с текущими начальными данными на оптимальной траектории.

К числу динамически устойчивых принципов оптимальности относится оптимальность по Парето и оптимальность по Слейтеру. Покажем динамическую устойчивость Парето-оптимального множества (динамическая устойчивость слабоэффективного множества или множества оценок, оптимальных по Слейтеру, доказывается аналогично). Действительно, пусть $\hat{\varkappa}(\mathbf{x}_0, T-t_0)$ — Парето-оптимальное множество оценок и $P(\chi(\mathbf{x}_0, T-t_0))$ — Парето-оптимальное множество решений в многокритериальной динамической задаче оптимизации $\Gamma(\mathbf{x}_0, T-t_0)$ из начального состояния $\mathbf{x}_0$ с предписанной продолжительностью $T-t_0$ и терминальным выигрышем. Пусть $\{H_i^*\}=\mathbf{H}^*$ — вектор оценок из множества $\hat{\varkappa}(\mathbf{x}_0, T-t_0)$. Предположим, что нами вабраны управление $\bar{\mathbf{u}}(t)$ и соответствующая траектория $\bar{\mathbf{x}}(t)$, при которых в конце процесса реализуется оценка $\mathbf{H}^*=\{H_i^*\}$, т. е. управление $\bar{\mathbf{u}}(t)$ таково, что $\bar{\mathbf{x}}(\tau)$ в момент T (в момент окончания процесса) проходит через точку $\bar{\mathbf{x}}(T)$, в которой $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}(T))= =\{H_i(\bar{\mathbf{x}}(T))\}$ равно как раз вектору полезностей $\mathbf{H}^*=\{H_i^*\}$. Пусть $C^{T-t_0}(\bar{\mathbf{x}}_0)$ — множество достижимости управляемой системы из начального состояния $\mathbf{x}_0$ к моменту времени T. Рассматривая изменение этого множества вдоль траектории $\mathbf{x}(\tau)$, можно заметить, что

$$C^{T-\tau_1}(\bar{\mathbf{x}}(\tau_1))\supset C^{T-\tau_2}(\bar{\mathbf{x}}(\tau_2)),\ t_0\leqslant\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant T. \tag{5.5}$$

Из (5.5) имеем

$$\varkappa(\bar{\mathbf{x}}(\tau_1),\ T-\tau_1)\supset\varkappa(\bar{\mathbf{x}}(\tau_2),\ T-\tau_2),\ t_0\leqslant\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant T.$$

Поскольку вектор $\mathbf{H}^*=\{H_i^*\}$ принадлежит Парето-оптимальному множеству в задаче с начальным состоянием $\mathbf{x}_0$ и продолжительностью $T-t_0$, то не существует такого вектора полезностей

$\mathbf{H}'\neq\mathbf{H}^*$, принадлежащего $\varkappa(\mathbf{x}_0, T-t_0)$, что $H'_i \geqslant H^*_i$ для всех $1\leqslant i\leqslant n$. Из (5.5) имеем, что тем более это имеет место для множества $\varkappa(\overline{\mathbf{x}}(\tau), T-\tau)$, $t_0\leqslant\tau\leqslant T$. Таким образом, вектор полезностей $\mathbf{H}^*=\{H^*_i\}$ не доминируется ни одним из дележей множества $\varkappa(\overline{\mathbf{x}}(\tau), T-\tau)$, или, иначе говоря, принадлежит Парето-оптимальным множествам текущей задачи с начальным условием $\overline{\mathbf{x}}(\tau)$ и продолжительностью $T-\tau$. Это означает, что вектор полезностей $\mathbf{H}^*=\{H^*_i\}$, во всех текущих задачах (при движении вдоль траектории $\overline{\mathbf{x}}(\tau)$) остается Парето-оптимальным. Поскольку вектор $\mathbf{H}^*$ был выбран произвольно из множества $\hat{\varkappa}(\mathbf{x}_0, T-t_0)$, то это означает динамическую устойчивость Парето-оптимального множества.

Однако, как мы это видели в статическом случае, для выработки коллективного решения еще недостаточно Парето-оптимального множества, необходимо иметь некоторый справедливый способ выбора терминальной точки из Парето-оптимального множества, поскольку в действительности может быть реализован лишь один исход развития.

Рассмотрим теперь различные подходы к выбору конкретного эффективного (слабоэффективного) решения из множества всех эффективных (слабоэффективных) решений, упомянутые в предыдущем параграфе, и исследуем их динамическую устойчивость.

Слабоэффективное решение $\mathbf{x}^*$, выбранное из условия

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\frac{y^*_i-H_i(\mathbf{x}^*)}{|y^*_i|}=\min_{\mathbf{x}\in C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)}\max_{1\leqslant i\leqslant m}\frac{y^*_i-H_i(\mathbf{x})}{|y^*_i|}$$

в задаче $\Gamma(\mathbf{x}_0, T-t_0)$, будем обозначать через $\mathbf{x}^*(\mathbf{x}_0, T-t_0)$ и соответствующую оценку $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$ — через $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)=\mathbf{H}^*(\mathbf{x}_0, T-t_0)$, подчеркивая зависимость от начальных условий задачи. При этом заметим, что $y^*_i=\max\limits_{\mathbf{x}\in C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)} H_i(\mathbf{x})$, где max берется по множеству достижимости $C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)$, также зависит от начальных условий $\mathbf{x}_0$, $T-t_0$ как от параметров, поэтому условие выбора точки $\mathbf{x}^*(\mathbf{x}_0, T-t_0)$ в полном виде записывается следующим образом:

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\frac{\max\limits_{\mathbf{x}\in C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)} H_i(\mathbf{x})-H_i[\mathbf{x}^*(\mathbf{x}_0, T-t_0)]}{\left|\max\limits_{\mathbf{x}\in C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)} H_i(\mathbf{x})\right|}= \tag{5.6}$$

$$=\min_{\mathbf{x}\in C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)}\max_{1\leqslant i\leqslant m}\frac{\max\limits_{\mathbf{x}\in C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)} H_i(\mathbf{x})-H_i(\mathbf{x})}{\left|\max\limits_{\mathbf{x}\in C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)} H_i(\mathbf{x})\right|}.$$

Пусть $\overline{x}(t)$ — оптимальная траектория, ведущая в точку $x^*(x_0, T-t_0)$, т. е. $\overline{x}(t)|_{t=t_0}=x_0$, $\overline{x}(t)|_{t=T}=x^*(x_0\ T-t_0)$. Рассмотрим текущую задачу $\Gamma(\overline{x}(t), T-t)$ при $t_0\leqslant t\leqslant T$. Предположим, что мы хотим в момент t проверить, удовлетворяет ли выбранная точка $x^*(x_0, T-t_0)$ условию (5.6), выписанному для текущей задачи. Тогда нам необходимо вновь выбрать слабоэффективную точку, используя предыдущую формулу для текущей игры. С этой целью необходимо вычислить

$$\min_{x\in C^{T-t}(\overline{x}(t))}\ \max_{1\leqslant i\leqslant m} \frac{\max\limits_{x\in C^{T-t}(\overline{x}(t))} H_i(x)-H_i(x)}{\left|\max\limits_{x\in C^{T-t}(\overline{x}(t))} H_i(x)\right|}. \tag{5.7}$$

Пусть min в выражении (5.7) достигается в точке $x^*(\overline{x}(t), T-t)$. Условие совпадения текущих слабоэффективных точек дает

$$x^*(x_0, T-t_0)=x^*(\overline{x}(t), T-t) \tag{5.8}$$

при $t\in[t_0, T]$. Очевидно, что (5.8) имеет место в крайне редких случаях, поскольку множества $C^{T-t}(\overline{x}(t))$ убывают по включению при $t\in[t_0, T]$ и $\max\limits_{x\in C^{T-t}(\overline{x}(t))} H_i(x)$ также, вообще говоря, убывает, кроме тривиального случая, когда он достигается при всех $1\leqslant i\leqslant m$ в одной и той же точке $x^*(x_0, T-t_0)$. Это означает, что выбор слабоэффективной точки с использованием формулы (5.6) не является динамически устойчивым.

Для исследования динамической устойчивости арбитражной схемы Нэша необходимо конкретизировать понятие «консервативного» решения и точки статус кво. Формально говоря, под консервативным решением в задаче $\Gamma(x_0, T-t_0)$ можно понимать любую точку $x^0(T)$ множества достижимости $C^{T-t_0}(x_0)$. Однако эта точка $x^0(T)$ должна являться концом траектории $x^0(t)$, $t\in[t_0, T]$, определяющей развитие при использовании управления $\tilde{u}^0(t)$, $t\in[t_0, T]$, получаемого экстраполяцией управления $\tilde{u}(\tau)$, $\tau<t_0$. Пусть

$$(\overline{H}(x_0, T-t_0), \overline{x}(x_0, T-t_0))=\varphi(\varkappa(x_0, T-t_0), H[x^0(x_0, T-t_0)])$$

— выбор эффективной точки согласно арбитражной схеме φ в задаче $\Gamma(x_0, T-t_0)$ при условии, что консервативное решение есть точка $x^0(x_0, T-t_0)\in C^{T-t_0}(x_0)$. Как мы уже видели, точка $(\overline{H}(x_0, T-t_0), \overline{x}(x_0, T-t_0))$ определяется из условия (см. § 9 настоящей главы)

$$\varphi(\varkappa(x_0, T-t_0), H[x^0(x_0, T-t_0)])=\{(\overline{H}(x_0, T-t_0), \overline{x}(x_0, T-t_0))\,|$$

$$\max_{H\geqslant H[x^0(x_0, T-t_0)]}\prod_{i=1}^{m}(Hi-H_i[x^0(x_0, T-t_0)])=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(\bar{H}_i(\bar{\mathbf{x}})-H_i[\mathbf{x}^0(\mathbf{x}_0,\ T-t_0)]))\}.$$

Пусть $\mathbf{x}^*(t)$ — оптимальная траектория, соединяющая точку $\mathbf{x}_0$ с $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0,\ T-t_0)$, т. е. $\mathbf{x}^*(t)|_{t=t_0}=\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}^*(t)|_{t=T}=\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0,\ T-t_0)$. Рассмотрим арбитражную схему для текущей задачи $\Gamma(\mathbf{x}^*(t),\ T-t)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$. Пусть $(\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}^*(t),\ T-t),\ \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t),\ T-t))$ — выбор, диктуемый арбитражной схемой, т. е.

$$\varphi(\varkappa(\mathbf{x}^*(t),\ T-t),\ \mathbf{H}[\mathbf{x}^0(\mathbf{x}^*(t),\ T-t)])=$$

$$=\{\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}^*(t),\ T-t),\ \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t),\ T-t))\mid$$

$$\max_{\mathbf{H}\geqslant\mathbf{H}[\mathbf{x}^0(\mathbf{x}^*(t),\ T-t)]}\prod_{i=1}^{m}(H_i-H_i[\mathbf{x}^0(\mathbf{x}^*(t),\ T-t])=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(\bar{\mathbf{H}}_i(\bar{\mathbf{x}})-H_i[\mathbf{x}^0(\mathbf{x}^*(t),\ T-t)]))\}. \tag{5.9}$$

Динамическая устойчивость означает выполнение условия

$$\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t),\ T-t)=\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0,\ T-t_0) \tag{5.10}$$

при всех $t\in[t_0,\ T]$. Как видно из (5.9), это зависит от характера изменения «консервативного» решения $\mathbf{x}^0(\mathbf{x}^*(t),T-t)$ и точки статус кво $H_i(\mathbf{x}^0(\mathbf{x}^*(t),\ T-t))$ вдоль оптимальной траектории $\mathbf{x}^*(t)$ при $t\in[t_0,\ T]$. Предварительный анализ показывает, что (5.10) выполняется в крайне редких случаях.

Что касается метода выбора эффективного (слабоэффективного) решения, основанного на свертке критериев, то в этом случае задача сводится к некоторой задаче оптимального управления с одним критерием, для которой выполнены принцип максимума Л. С. Понтрягина и принцип оптимальности Р. Беллмана. Следовательно, полученное в результате эффективное (слабоэффективное) решение будет всегда динамически устойчивым.

§ 4. ПОСТРОЕНИЕ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА В ЗАДАЧЕ СБЛИЖЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ ЦЕЛЕВЫМИ ТОЧКАМИ

Пусть состояние данного экологически замкнутого региона в начальный момент t_0 описывается вектором $\mathbf{x}_0\in R^n$ $(\mathbf{x}_0\geqslant 0)$. Будем предполагать, что развитие региона на отрезке времени $[t_0,\ T]$ может быть описано системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}=f(\mathbf{x},\ \mathbf{u}),\ \mathbf{x}\in R^n,\ \mathbf{u}\in U\subset R^l,\ \mathbf{u}\geqslant 0, \tag{5.11}$$

где $\mathbf{u}$ — управляющий параметр, имеющий смысл капиталовложений для обеспечения развития региона. Компонента x_i в векторе состояния описывает количественное состояние i-й отрасли или i-го направления деятельности региона, а i-я компонента управляющего параметра $\mathbf{u}_i$ означает капиталовложение в i-ю отрасль или направление. Мы будем предполагать далее, что распределение капиталовложений осуществляется централизованно внешним управляющим центром A_0. Каждому начальному условию $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$ и измеримому программному управлению $\mathbf{u}(t)$ при $t\in[t_0, T]$ соответствует при выполнении стандартных условий на правую часть системы (5.11) единственная траектория развития региона, определенная на отрезке времени $[t_0, T]$.

Пусть $C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)$ — множество достижимости системы (5.11), т. е. множество состояний $\mathbf{x}(T)$, в которых может оказаться регион R в момент T при всевозможных способах управления со стороны центра A_0. Будем предполагать в дальнейшем, что это множество выпукло и компактно.

Пусть результат развития региона может быть оценен несколькими «экспертами» $B_1, \ldots, B_m$, представляющими интересы ведомств по охране окружающей среды, отраслей или направлений деятельности региона.

Каждый из экспертов B_i, $i=1, \ldots, m$, в соответствии со своим пониманием стоящих перед регионом проблем определяет целевую точку M_i, к которой, с его точки зрения, целесообразно устремлять развитие при планировании распределения капиталовложений на отрезке времени $[t_0, T]$. Целевые точки M_i могут находиться достаточно близко друг от друга, однако предположение об их совпадении было бы слишком сильной идеализацией.

В результате полезность каждой точки $\mathbf{x}(T)\in C^{T-t}(\mathbf{x}_0)$ (потенциального результата развития региона R) может быть оценена центром A_0 с точки зрения ее близости от целевых точек $M_1, \ldots, M_m$. Поэтому мы получаем связанный с каждой точкой $\mathbf{x}(T)$ вектор полезностей

$$\{-\varrho(\mathbf{x}(T), M_i)\}=H_i(\mathbf{x}(T)), \tag{5.12}$$

где ϱ — евклидово расстояние между точками $\mathbf{x}(T)$, M_i. (Можно использовать и другие определения расстояния в R^n, например, считать эти расстояния различными для различных M_i, т. е. рассматривать функции $(\mathbf{x}(T), M_i)$. При этом, однако, мы не получим наглядной геометрической интерпретации оптимальных решений. Разумеется, при таком определении нельзя применить трансферабельный подход, поскольку функции полезностей каждого из «экспертов» имеют строго индивидуальное содержание.)

Математически задача сводится к нахождению оптимальных траекторий развития в смысле векторного критерия $H(\mathbf{x})$.

Определение. Управление $\bar{\mathbf{u}}(t)$ называется оптимальным по Парето, если не существует такого управления $\mathbf{u}(t)$, что

$$H_i(\overline{\mathbf{x}}(T), \overline{\mathbf{u}}(t)) \leqslant H_i(\mathbf{x}(T), \mathbf{u}(t)),\ i=1, \ldots, m,$$

и хотя бы для одного i_0 $H_{i_0}(\mathbf{x}(\overline{\mathbf{x}}(T), \overline{\mathbf{u}}(t)) < H_{i_0}(\mathbf{x}(T), \mathbf{u}(t))$, где $H(\mathbf{x}(T), \mathbf{u}(t))$ — вектор полезностей при использовании управления $\mathbf{u}(t)$, а $\mathbf{x}(t)$ — соответствующая траектория.

Множество оптимальных по Парето управлений мы будем обозначать через $\{\mathbf{u}^P\}$, а множество соответствующих траекторий, приводящих к реализации этих решений, через $\{\mathbf{x}^P(t)\}$.

Определим структуру множества Парето в нашей задаче. Выше мы предположили, что множество достижимости $C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)$ выпукло и компактно. В множестве $C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)$ у каждого эксперта имеется своя наилучшая точка $\mathbf{x}(T)$, такая, что $\varrho(\mathbf{x}(T), M_i) = \min\limits_{\xi \in C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)} \varrho(\xi, M_i)$. Однако, вообще говоря, ни один из B_i не может гарантировать ее достижение. Можно ожидать, и это естественно, что в результате предварительных переговоров эксперты ограничатся рассмотрением множества терминальных точек, заключенных в некотором смысле «между» наилучшими точками для каждого из B_i.

Покажем, что именно множество точек такой структуры соответствует множеству оптимальных по Парето ситуаций.

Каждой точке $\mathbf{x}(T) \in C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)$ соответствует вектор $H(\mathbf{x}(T)) = (-\varrho(\mathbf{x}(T), M_1), \ldots, -\varrho(\mathbf{x}(T), M_m))$. Пусть $\varkappa(\mathbf{x}_0\ T-t_0) = \{H(\mathbf{x}(T)) \mid \mathbf{x}(T) \in C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)\}$. Множество $\varkappa(\mathbf{x}_0, T-t_0)$ есть множество всевозможных реализуемых в момент T вектор-выигрышей, а подмножество множества $\varkappa(\mathbf{x}_0, T-t_0)$, соответствующее множеству Парето управлений $\{\mathbf{u}^P\}$), обозначим через $\hat{\varkappa}(\mathbf{x}_0, T-t_0)$:

$$\hat{\varkappa}(\mathbf{x}_0, T-t_0) = \{H(\mathbf{x}^P(T))\}.$$

Пусть $\hat{M} = \operatorname{conv}\{M_i,\ i=1, \ldots, n\}$, где $\operatorname{conv}\{M_i,\ i=1, \ldots, n\}$,— выпуклая оболочка точек M_i. Обозначим через π оператор ортогонального проектирования из пространства R^n на некоторое выпуклое компактное множество B. Под ортогональной проекцией точки $\mathbf{x} \in R^n$ на B ($\mathbf{x} \overline{\in} B$) будем понимать точку $\pi_B \mathbf{x} \in B$:

$$\varrho(\mathbf{x}, \pi_B \mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y} \in B} \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{5.13}$$

Данную точку назовем образом, а точку $\mathbf{x}$ — прообразом оператора проектирования. Под ортогональной проекцией точки $\mathbf{x} \in B$ на B будем понимать саму точку $\mathbf{x}$, а под ортогональной проекцией $\pi_B A$ множества A на множество B — множество ортогональных проекций, входящих во множество A точек на B.

В дальнейшем нам потребуются следующие леммы:

Лемма 1. Пусть B — замкнутое выпуклое множество в R^n и $\mathbf{x}$ — некоторая точка, не принадлежащая B. Тогда для всех $\mathbf{y} \in B$ справедливо неравенство $\varrho(\pi_B \mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Доказательство. Точка $\pi_B\mathbf{x}$ существует (так как B замкнуто) и является граничной. Возьмем произвольную точку $\mathbf{y}\in B$, $\mathbf{y}\neq\pi_B\mathbf{x}$. Поскольку B выпукло, то $\omega_\lambda=\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\pi_B\mathbf{x}\in B$, $0\leqslant\lambda\leqslant1$. По определению точка $\pi_B\mathbf{x}$ доставляет минимум функции $\varrho^2(\mathbf{x},\omega_\lambda)=\sum\limits_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-\lambda\mathbf{y}_i-(1-\lambda)\pi_B\mathbf{x}_i)^2$. Поэтому

$$\left.\frac{\partial\rho^2(\mathbf{x},\omega_\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}=2\sum_{i=1}^{n}(\pi_B\mathbf{x}_i-\mathbf{y}_i)(\mathbf{x}_i-\pi_B\mathbf{x}_i)\geqslant0.$$

Отсюда получаем неравенство

$$-2((\mathbf{y}-\pi_B\mathbf{x})(\mathbf{x}-\pi_B\mathbf{x}))\geqslant0.$$

Следовательно, угол между векторами $\mathbf{y}-\pi_B\mathbf{x}$, $\mathbf{x}-\pi_B\mathbf{x}$ не меньше прямого и является наибольшим из всех внутренних углов треугольника с вершинами $(\mathbf{x},\pi_B\mathbf{x},\mathbf{y})$, т. е. $\varrho(\mathbf{x},\mathbf{y})\geqslant\varrho(\pi_B\mathbf{x},\mathbf{y})$. Лемма доказана.

Пусть $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\bar{\mathbf{x}}}\in\omega_\lambda$, где $\omega_\lambda=\lambda\bar{\mathbf{y}}+(1-\lambda)\bar{\bar{\mathbf{y}}}$, $\lambda\in[0,1]$, $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\bar{\mathbf{x}}}$, $\bar{\mathbf{y}}$, $\bar{\bar{\mathbf{y}}}\in R^n$. Введем функцию $F(\lambda)=\varrho(\bar{\mathbf{x}},\omega_\lambda)-\varrho(\bar{\bar{\mathbf{x}}},\omega_\lambda)$.

Лемма 2. Из $F(\lambda)\geqslant0$ при $\lambda=0$; 1 следует $F(\lambda)\geqslant0$ при всех $\lambda\in(0,1)$.

Доказательство. Поскольку $\varrho(\mathbf{x},\omega_\lambda)$ и $\varrho(\bar{\bar{\mathbf{x}}},\omega_\lambda)$ — положительные величины, то из неравенства $\varrho^2(\bar{\mathbf{x}},\omega_\lambda)\geqslant\varrho^2(\bar{\bar{\mathbf{x}}},\omega_\lambda)$ следует неравенство $\varrho(\bar{\mathbf{x}},\omega_\lambda)\geqslant\varrho(\bar{\bar{\mathbf{x}}},\omega_\lambda)$ при $\lambda\in[0,1]$. Поэтому для удобства вместо $F(\lambda)$ возьмем $F'(\lambda)=\varrho^2(\bar{\mathbf{x}},\omega_\lambda)-\varrho^2(\bar{\bar{\mathbf{x}}},\omega_\lambda)$.

Зафиксируем $\lambda=\lambda_1\in(0,1)$. Тогда $\omega_{\lambda_1}=\tilde{\mathbf{x}}=\lambda_1\bar{\mathbf{y}}+(1-\lambda_1)\bar{\bar{\mathbf{y}}}$ и

$$F'(\lambda_1)=\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_i-\lambda_1\bar{y}_i-(1-\lambda_1)\bar{\bar{y}}_i)^2-\sum_{i=1}^{n}(\bar{\bar{x}}_i-\lambda_1\bar{y}_i-(1-\lambda_1)\bar{\bar{y}}_i)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\Big[\bar{x}_i^2-\bar{\bar{x}}_i^2-2(1-\lambda_1)\bar{\bar{y}}_i\bar{x}_i-2\lambda_1\bar{y}_i\bar{x}_i+$$

$$+2(1-\lambda_1)\bar{\bar{y}}_i\bar{\bar{x}}_i+2\lambda_1\bar{y}_i\bar{\bar{x}}_i\Big].$$

Принимая во внимание равенства

$$F'(0)=\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_i^2-2\bar{x}_i\bar{\bar{y}}_i-\bar{\bar{x}}_i^2+2\bar{\bar{x}}_i\bar{\bar{y}}_i),$$

$$F(1)=\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_i^2-2\bar{x}_i\bar{y}_i-\bar{\bar{x}}_i^2+2\bar{\bar{x}}_i\bar{y}_i),$$

имеем

$$F'(\lambda_1)=F'(0)+F'(1)+\sum_{i=1}^{m}\{\overline{\overline{x}}_i^2-\overline{x}_i^2+2\overline{x}_i[\lambda_1\overline{\overline{y}}_i+(1-\lambda_1)\overline{y}_i]-$$

$$-2\overline{\overline{x}}_i[\lambda_1\overline{\overline{y}}_i+(1-\lambda_1)\overline{y}_i]\}=F'(0)+F'(1)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}(\overline{\overline{x}}_i^2-\overline{x}_i+2\overline{x}_i\hat{x}_i-2\overline{\overline{x}}_i\hat{x}_i),$$

где $(\hat{x}_i=\lambda_1\overline{\overline{y}}_i+(1-\lambda_1),\overline{y}_i)$ — точка, симметричная точке $\tilde{x}$ относительно середины отрезка ω_λ. Проведя простые преобразования, получим

$$\sum_{i=1}^{m}(\overline{\overline{x}}_i^2-\overline{x}_i^2+2\overline{x}_i\hat{x}_i-2\overline{\overline{x}}_i\hat{x}_i)=\sum_{i=1}^{m}(\overline{\overline{x}}_i-\hat{x}_i)^2-\sum_{i=1}^{m}(\overline{x}_i-\hat{x}_i)^2=$$

$$=\varrho^2(\overline{\overline{\mathrm{x}}},\hat{\mathrm{x}})-\varrho^2(\overline{\mathrm{x}},\hat{\mathrm{x}})=-F'(1-\lambda_1).$$

Окончательно $F'(\lambda_1)=F'(0)+F'(1)-F'(1-\lambda_1)$. Положим $\lambda_1=1/2$. Тогда $F'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}[F'(0)+F'(1)]\geqslant 0$.

Аналогично можно показать, что для всех $\lambda_l=l/2^k$, $k=1, 2, \ldots$ $\ldots, l=1, 2, \ldots, 2^k-1$ $(\lambda_l\in(0, 1))$,

$$F'\left(\frac{l}{2^k}\right)=\frac{1}{2}\left[F'\left(\frac{l-1}{2^k}\right)+F'\left(\frac{l+1}{2^k}\right)\right]\geqslant 0.$$

Лемма 3. Пусть B^r—r-мерный замкнутый выпуклый многогранник в R^n с вершинами $B_1, \ldots, B_q$. Тогда для всех $\mathrm{y}\in B^r$ и $\mathrm{x}\in\overline{B^r}$ выполняется неравенство $\varrho(\mathrm{y}, B_i)<\varrho(\mathrm{x}, B_i)$ хотя бы для одного $i\in I=\{1, \ldots, q\}$.

Доказательство (по индукции). При $r=1$ B^1 — отрезок. Лемма очевидна. Пусть она справедлива для $r=k-1$. Так как B^k выпукло, отрезок

$$\omega_\lambda=[\lambda\xi+(1-\lambda)\pi_{B_k}\mathrm{x}]\in B^k,\ \lambda\in[0, 1],$$

где точка $\xi\in B^{k-1}$ — такая, что $\mathrm{y}\in\omega_\lambda$. По индукции существует $i_0\in I$, такое, что $\varrho(\xi, B_{i_0})<\varrho(\mathrm{x}, B_{i_0})$, где $B_{i_0}\in B^{k-1}$. Но

$$\varrho(\mathrm{y}, B_{i_0})=\varrho[\overline{\lambda}\xi+(1-\overline{\lambda})\pi_{B^k}\mathrm{x}, B_{i_0}]\leqslant\overline{\lambda}\varrho(\xi, B_{i_0})+$$

$$+(1-\overline{\lambda})\varrho(\pi_{B^k}\mathrm{x}, B_{i_0})<\overline{\lambda}\varrho(x, B_{i_0})+(1-\overline{\lambda})\times$$

$$\times\varrho(\pi_{B^k}\mathrm{x}, B_{i_0}).$$

Из леммы 1 следует $\varrho(\pi_{B^k}\mathrm{x}, B_{i_0})\leqslant\varrho(\mathrm{x}, B_{i_0})$, поэтому

$$\overline{\lambda}\varrho(\mathrm{x}, B_{i_0})+(1-\overline{\lambda})\varrho(\pi_{B^k}\mathrm{x}, B_{i_0})\leqslant\overline{\lambda}\varrho(\mathrm{x}, B_{i_0})+$$

$$+(1-\overline{\lambda})\varrho(\mathrm{x}, B_{i_0})=\varrho(\mathrm{x}, B_{i_0}).$$

В результате получим $\varrho(\mathrm{y}, B_{i_0}) < \varrho(\mathrm{x}, B_{i_0})$, $i_0 \in I$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. Пусть B^r—r-мерный замкнутый выпуклый многогранник в R^n с вершинами $B_1, \ldots, B_q$, а x, y — некоторые точки, не принадлежащие B^r. Если найдется точка $\bar{\xi} \in B^r$, для которой $\varrho(\mathrm{y}, \bar{\xi}) < \varrho(\mathrm{x}, \bar{\xi})$, то $\varrho(\mathrm{y}, B_i) < \varrho(\mathrm{x}, B_i)$ хотя бы для одного $i \in I$.

Доказательство. При $\bar{\xi} \in B^1$ лемма очевидна. Допустим, что лемма справедлива для $\bar{\xi} \in B^{k-1}$, и положим $\bar{\xi} \in B$. По определению B^{k-1} и B^k существует такой индекс $i_0 \in I$, что $B_{i_0} \in B^k \setminus B^{k-1}$. Тогда существует точка $\xi_{i_0} \in B^{k-1}$, для которой

$$\bar{\xi} \in \omega_\lambda = [\lambda B_{i_0} + (1-\lambda)\xi_{i_0}] \in B^k,\ \lambda \in [0, 1].$$

Предположим, что $\varrho(\mathrm{y}, B_{i_0}) \geqslant \varrho(\mathrm{x}, B_{i_0})$. Если $\varrho(\mathrm{y}, \xi_{i_0}) < \varrho(\mathrm{x}, \xi_{i_0})$, то согласно индукции существует $B_i \in B^{k-1} \subset B^k$, такое, что $\varrho(\mathrm{y}, B_i) < \varrho(\mathrm{x}, B_i)$.

Если $\varrho(\mathrm{y}, \xi_{i_0}) \geqslant \varrho(\mathrm{x}, \xi_{i_0})$, то по лемме 2 $\varrho(\xi, \mathrm{y}) \geqslant \varrho(\xi, \mathrm{x})$ для всех $\xi \in \omega_\lambda = \lambda\xi_{i_0} + (1-\lambda)B_{i_0}$, $\lambda \in [0, 1]$, что противоречит условию леммы. Значит, $\varrho(\mathrm{y}, B_{i_0}) < \varrho(\mathrm{x}, B_{i_0})$ хотя бы для одного i_0.

Обозначим $\hat{M} = \mathrm{conv}\{M_i,\ i=1, \ldots, n\}$.

Теорема 1. Пусть $M \cap C^{T-t_0}(\mathrm{x}_0) = \varnothing$. Тогда

$$\hat{\varkappa}(\mathrm{x}_0, T-t_0) = \{H(\mathrm{x}) \mid \mathrm{x} \in \pi_{C^{T-t_0}(\mathrm{x}_0)} \hat{M}\}$$

(в этом случае целевые точки недостижимы, рис. 15).

Доказательство. Пусть $\mathrm{y}' \in \pi_{C^{T-t_0}(\mathrm{x}_0)} \hat{M}$, $\mathrm{x} \in C^{T-t_0}(\mathrm{x}_0)$, $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}'$. Введем функцию $F(\xi) = \varrho(\mathrm{y}', \xi) - \varrho(\mathrm{x}, \xi)$, $\xi \in \hat{M}$, и множество $Y = \{\mathrm{y} \in \mathrm{M} \mid \mathrm{y}' = \pi_{C^{T-t_0}(\mathrm{x}_0)} \mathrm{y}\}$. Возьмем $\bar{y} \in Y: \varrho(\mathrm{y}', \bar{\mathrm{y}}) = \min\limits_{y \in Y} \varrho(\mathrm{y}'\ \mathrm{y})$. Такая точка существует, так как Y компактно. По определению точки $\bar{\mathrm{y}}$ для всех $\mathrm{x} \in C^{T-T_0}(\mathrm{x}_0)$ справедливо неравенство $F(\bar{\mathrm{y}}) < 0$. Тогда из леммы 4 вытекает неравенство $\varrho(\mathrm{y}', M_i) < \varrho(\mathrm{x}, M_i)$ хотя бы для одного $\mathrm{i} = 1, \ldots, m$, т. е.

$$H_i(\mathrm{y}') > H_i(\mathrm{x}) \qquad (5.14)$$

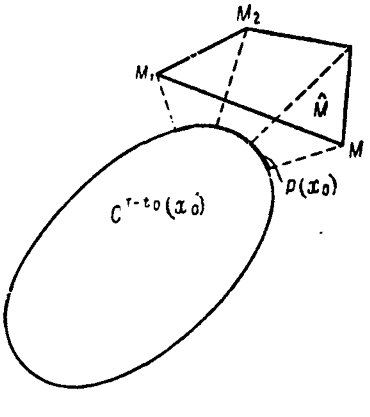

Рис. 15.

хотя бы для одного $i \in N$. А это означает, что $H(\mathrm{y}') \in \hat{\varkappa}(\mathrm{x}_0, T-t_0)$.

Покажем, что кроме точек множества $\pi_{C^{T-t_0}(x_0)}\hat{M}$ в множестве $C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)$ нет точек, обладающих свойством (5.14). Это значит, что для любых $\mathbf{x}\in C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)\setminus\pi_{C^{T-t_0}(x_0)}\hat{M}$ найдется точка $\tilde{\mathbf{y}}\in\pi_{C^{T-t_0}(x_0)}\hat{M}$, в которой

$$H_i(\tilde{\mathbf{y}})\geqslant H_i(\mathbf{x}) \text{ для всех } i=1, \ldots, m. \tag{5.15}$$

Рассмотрим множества

$$\hat{M}_1=\mathrm{conv}(\hat{M}, \pi_{C^{T-t_0}(x_0)}\hat{M}), \quad \hat{M}_2=\mathrm{conv}\,\pi_{C^{T-t_0}(x_0)}\hat{M}.$$

Очевидно, что $\hat{M}_2\subset\hat{M}_1$. По лемме 3 для любых $\mathbf{x}\in C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)\setminus\hat{M}_1$ существует точка $\tilde{\mathbf{y}}\in\pi_{\hat{M}_1}\mathbf{x}\in\hat{M}_1$, удовлетворяющая неравенству (5.15).

Пусть теперь $\mathbf{x}\in\hat{M}_2\setminus\pi_{C^{T-t_0}(x_0)}\hat{M}$, а $\pi_{\hat{M}}\mathbf{x}$ — ее образ на $\hat{M}$. Поскольку множество $C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)$ по определению выпукло и $\pi_{C^{T-t_0}(x_0)}\hat{M}\subset C^{\overline{T-t_0}}(\mathbf{x}_0)$ (ввиду пустоты множества $\hat{M}\cap C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)$), где $C^{\overline{T-t_0}}(\mathbf{x}_0)$ — граница множества $C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)$), то существует точка $\mathbf{x}'\in\pi_{C^{T-t_0}(x_0)}\hat{M}\cap\omega_\lambda$, $\omega^\lambda=\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\pi_{\hat{M}}\mathbf{x}$, $\lambda\in[0, 1]$. Эта точка является искомой, ибо по лемме 1 она удовлетворяет неравенству (5.14).

Итак, только точки множества $\pi_{C^{T-t_0}(x_0)}\hat{M}$ обладают свойством (5.15). Следовательно, $\hat{\varkappa}(\mathbf{x}_0, T-t_0)=\{H(\mathbf{y})\,|\,\mathbf{y}\in\pi_{C^{T-t_0}(x_0)}\hat{M}\}$.

Теорема 2. Пусть $\hat{M}\subset C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)$. Тогда

$$\hat{\varkappa}(x_0, T-t_0)=\{H(\mathbf{x})\,|\,\mathbf{x}\in\pi_{C^{T-t_0}(x_0)}\hat{M}=\hat{M}\}$$

(в этом случае все целевые точки достижимы, рис. 16).

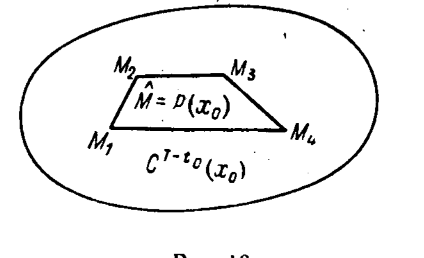

Рис. 16.

Доказательство. Возьмем в качестве множества B из леммы 1 множество $\mathrm{conv}\{\mathbf{x}', \hat{M}\}$ и воспользуемся леммой 3. Для любого $x\in\overline{\hat{M}}$ существует $\xi\in\hat{M}(\xi\in\pi_{\hat{M}}\mathbf{x})$, такое, что $H_i(\xi)\geqslant H^i(x)$ для всех $i\in N$. Кроме того, по той же лемме для любого $\overline{\mathbf{x}}\in\hat{M}$ и всех $\mathbf{y}\in\hat{M}$ неравенство $H_i(\mathbf{y})>H_i(\mathbf{x})$ выполняется хотя бы для одного $i\in N$.

Мы установили, что Парето-оптимальными могут быть только векторы выигрышей на множестве $\hat{M}$. Покажем, что все векторы этого множества являются таковыми.

Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}\in\hat{M}$, $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$. При $r=1$ $\hat{M}$ есть отрезок с концами M_1 и M_2. Имеем

$$\varrho(M_1, M_2)=\varrho(M_1, \mathbf{y})+\varrho(\mathbf{y}, M_2)=\varrho(M_1, \mathbf{x})+\varrho(\mathbf{x}, M_2).$$

Но так как $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$, $\varrho(M_1, \mathbf{y})<\varrho(M_1, \mathbf{x})$ либо $\varrho(M_2, \mathbf{y})<\varrho(M_2, \mathbf{x})$. Поэтому $H(\mathbf{y})\in\hat{\varkappa}(\mathbf{x}_0, T-t_0)$.

Пусть теорема справедлива для $r=k-1$. Рассмотрим луч $Z_{\mathbf{x}}$ с началом в точке $\mathbf{x}$, проходящий через y, если $r=k$. Тогда существует точка $\overline{\mathbf{z}}\in Z_x$, такая, что $\varrho(x, \overline{z})=\max\limits_{z\in\hat{M}\cap Z_x}\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{z})$. Очевидно, что $\overline{\mathbf{z}}$ лежит на границе $\hat{M}$, т. е. принадлежит $(k-1)$-мерной грани k-мерного многогранника $\hat{M}$. По индукции $H(\mathbf{z})\in\in\hat{\varkappa}(\mathbf{x}_0, T-t_0)$. Тогда по определению Парето-оптимального множества существует хотя бы одно $i_0\in N$, для которого $H_{i_0}(\overline{\mathbf{z}})>>H_{i_0}(\mathbf{x})$, или, что то же, $\varrho(\overline{\mathbf{z}}, M_{i_0})<\varrho(\mathbf{x}, M_{i_0})$.

Учитывая, что $\mathbf{y}\in\omega_\lambda=\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\overline{\mathbf{z}}$, $\lambda\in[0, 1]$, имеем

$$\varrho(\mathbf{y}, M_{i_0})=\varrho(\overline{\lambda}\mathbf{x}+(1-\overline{\lambda})\overline{\mathbf{z}}, M_{i_0})\leqslant\overline{\lambda}\varrho(\mathbf{x}, M_{i_0})+(1-\overline{\lambda})\varrho(\overline{\mathbf{z}}, M_{i_0})<$$
$$<\overline{\lambda}\varrho(\mathbf{x}, M_{i_0})+(1-\overline{\lambda})\varrho(\mathbf{x}, M_{i_0})=\varrho(\mathbf{x}, M_{i_0}),$$

т. е. $\varrho(\mathbf{y}, M_{i_0})<\varrho(\mathbf{x}, M_{i_0})$. Значит, $H(\mathbf{y})\in\hat{\varkappa}(\mathbf{x}_0, T-t_0)$.

Поменяв местами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, аналогично получим, что $H(\mathbf{x})\in\hat{\varkappa}(\mathbf{x}_0, T-t_0)$.

Таким образом, для всех $\mathbf{y}\in\hat{M}\equiv\pi_{C^{T-t_0}(x_0)}\hat{M}$ и только для них $H(\mathbf{y})\in\overline{\varkappa}(\mathbf{x}_0, T-t_0)$. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть точки M_i, $i=1, \ldots, n$, расположены таким образом, что $\hat{M}\supset C^{T-t_0}(x_0)$. Тогда

$$\hat{\varkappa}(\mathbf{x}_0, T-t_0)=\{H(\mathbf{x})\,|\,\mathbf{x}\in\pi_{C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)}M=C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)\}=\Xi(\mathbf{x}_0, T-t_0)$$

(в этом случае все целевые точки недостижимы, но цели экспертов сильно отличаются друг от друга, рис. 17).

Доказательство следует из теоремы 2, если множества $\hat{M}$ и $C^{T-t_0}(x_0)$ поменять местами.

Рассмотрим общий случай расположения точек M_i, $i=1, \ldots$

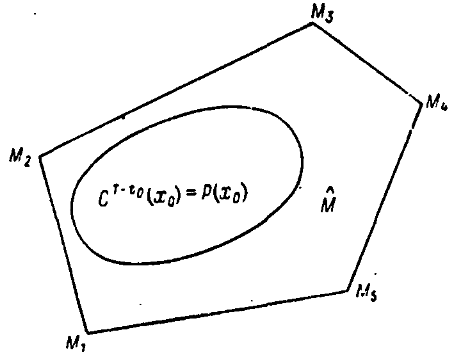

Рис. 17.

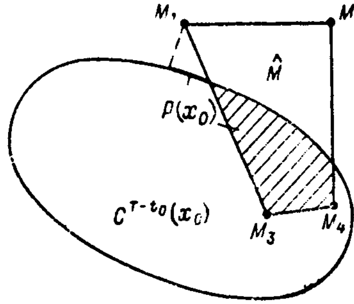

Рис. 18.

..., m, относительно множества C^{T-t_0} $(\mathbf{x}_0)$ (рис. 18).

Пусть существует такое разбиение $\tau=(N_1, N_2)$ множества N $(N_1\cup N_2=N,\ N_1\cap N_2=\varnothing)$, что

$$N_1=\{i\in N\,|\,M_i\in C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)\},\quad N_2=\{i\in N\,|\,M_i\overline{\overline{\in}}C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)\}.$$

Теорема 4. В игре $\Gamma(\mathbf{x}_0, T-t_0)$ $\hat\varkappa(\mathbf{x}_0, T-t_0)=\{H(\mathbf{x})\,|$ $\mathbf{x}\in\pi_{C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)}\hat M\}$.

Доказательство. Если $N_1=\varnothing$, то выполняются условия теоремы 1 или теоремы 3 соответственно, когда $\hat M\cap C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)=\varnothing$ или $C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)\subset\hat M$ (здесь остается еще случай $M_i\overline{\overline{\in}}C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)$, $C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)\not\subset\hat M$, $C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)\cap\hat M\neq\varnothing$). Если $N_2=\varnothing$, то $\hat M\subset C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)$, и мы находимся в условиях теоремы 2.

Будем считать, что N_1, $N_2\neq\varnothing$. Введем обозначения $\hat M_1=\hat M\cap$ $\cap C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)$, $\hat M_2=\hat M\diagdown\hat M_1$. Тогда $\pi_{C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)}\hat M=\hat M_1\cup\pi_{C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)}\hat M_2$. Пусть

$$\mathbf{y}'\in\pi_{C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)}\hat M,\quad \mathbf{x}\in C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0),\quad \mathbf{x}\neq\mathbf{y}'. \tag{5.16}$$

Нужно показать, что

$$H_i(\mathbf{y}')>H_i(\mathbf{x}) \tag{5.17}$$

хотя бы для одного $i\in N$. Для этого рассмотрим два случая:

1) $\mathbf{y}\in\hat M_1$. В данном случае доказательство неравенства (5.17) проводится аналогично доказательству теоремы 2;

2) $\mathbf{y}'\in\pi_{C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)}\hat M\diagdown\hat M_1=\pi_{C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)}\hat M_2$. Тогда для любых $\mathbf{x}$ из

(5.16) и $\bar{y} \in Y$, где $Y = \{y \in \hat{M}_2 | \pi_{C^{T-t_0}(x_0)}\, y = y'\}$, выполняется неравенство $\varrho(y', \bar{y}) < \varrho(x, \bar{y})$. Поэтому неравенство (5.17) вытекает из леммы 4.

Итак, множество $\pi_{C^{T-t_0}(x_0)} M$ состоит только из точек, удовлетворяющих условию (5.17).

Покажем, что кроме точек множества $\pi_{C^{T-t_0}(x_0)} \hat{M}$ в множестве $C^{T-t_0}(x_0)$ нет точек, обладающих свойством (5.17), т. е. что для любых $x \in C^{T-t_0}(x_0) \setminus \pi_{C^{T-t_0}(x_0)} \hat{M}$ найдется такая точка $\tilde{y} \in \pi_{C^{T-t_0}(x_0)} \hat{M}$, в которой $\varrho(\tilde{y}, M_i) < \varrho(x, M_i)$ для всех $i \in N$. Рассмотрим множество $\hat{M}_3 = \mathrm{conv}\,\pi_{C^{T-t_0}(x_0)} \hat{M}$. По лемме 3 для любых $x \in C^{T-t_0} \setminus \hat{M}_3$ существует точка $\tilde{y} \in \pi_{C^{T-t_0}(x_0)} \hat{M}_3$, $x \in \hat{M}_3$, такая, что $\varrho(\tilde{y}, M_i) < \varrho(x, M_i)$ для всех $i \in N$.

Пусть теперь $x \in (\hat{M}_3 \setminus \pi_{C^{T-t_0}(x_0)} \hat{M})$. Если $\pi_{\hat{M}} x \in \hat{M}_1$, то точка $\tilde{y}$ — искомая (см. лемму 3), т. е. $\tilde{y} = \pi_{\hat{M}} x$. Если же $\pi_{\hat{M}} x \in \hat{M}_2$, то $\pi_{\hat{M}} x \bar{\in} \pi_{C^{T-t_0}(x_0)} \hat{M}$, но существует точка $x' \in \pi_{C^{T-t_0}(x_0)} \hat{M}_2 \cap \omega_\lambda$, где $w_\lambda = \lambda x + (1-\lambda)\pi_{\hat{M}} x$, $\lambda \in [0, 1]$, и по лемме 3 $\varrho(x', M_i) < \varrho(x, M_i)$ для всех $i = 1, \ldots, n$ (если в качестве B_k взять $\mathrm{conv}(x'\,\mathrm{conv}\,\pi_{C^{T-t_0}(x_0)} \hat{M})$), т. е. x' есть искомая точка y.

Случай, когда $M_i \bar{\in} C^{T-t_0}(x_0)$, $C^{T-t_0}(x_0) \not\subset \hat{M}$, однако $C^{T-t_0}(x_0) \cap \hat{M} \neq \varnothing$, доказывается аналогично теореме 2. Теорема доказана.

Теоремы 1—4 дают конструктивный способ построения Парето-оптимального множества при различных расположениях «целевых» точек относительно области достижимости.

§ 5. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЕМ

В настоящем параграфе мы построим математическую модель развития экологически замкнутого региона в предположении, что на него оказывают влияние несколько сторон (игроков) $B_1, \ldots, B_m$, представляющих интересы различных отраслей и ведомств по охране окружающей среды. При этом полезность (функция выигрыша) той или иной траектории развития для игрока B_i находится по формуле (5.12) через целевые точки

M_i, $i=1, \dots, m$, определенные для каждой из сторон $B_1, \dots, B_m$.

Будем предполагать, что развитие региона на отрезке времени $[t_0, T]$ может быть описано системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n),\ \mathbf{x}\in R^n,\ \mathbf{u}_i\in U_i\subset \mathrm{Comp}\ R^l, \qquad (5.18)$$

где $\mathbf{u}_i\in U_i$ — управляющий параметр, выбираемый стороной B_i (i-м игроком).

Таким образом, мы имеем неантагонистическую дифференциальную игру m лиц $B_1, \dots, B_m$ (подробную формализацию игры читатель может найти в [38], глава 4).

Предложим некоторый принцип оптимальности, который хотя и напоминает принципы теории Неймана — Моргенштерна, однако свободен от предположения трансферабельности выигрышей игроков. По существу нетрансферабельность выигрышей означает, что каждой точке $\mathbf{x}(T)\in C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)$ соответствует единственный дележ. Каждой коалиции S будем сопоставлять некоторое множество, состоящее из всех таких векторов (дележей), которые коалиция может гарантировать своим членам. Понятия дележа и доминирования также будут изменены.

Обозначим получившуюся дифференциальную неантагонистическую игру через $\Gamma(t_0, \mathbf{x}_0)$.

Определение 1. Под дележом в игре $\Gamma(t_0, \mathbf{x}_0)$ с терминальными выигрышами будем понимать вектор

$$\mathrm{H}(\mathbf{x}(T))=\{H_i(\mathbf{x}(T)),\ i=1, \dots, \mathrm{m}\},\ \mathbf{x}(T)\in C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0).$$

Множество дележей, реализуемых в игре $\Gamma(t_0, \mathbf{x}_0)$, обозначим через $E(t_0, \mathbf{x}_0)$, т. е. $E(t_0, \mathbf{x}_0)=\{\mathbf{H}(\mathbf{x}(T)) : \mathbf{x}(T)\in C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)\}$. Под решением игры $\Gamma(t_0, \mathbf{x}_0)$ будем понимать некоторое подмножество $M(t_0, \mathbf{x}_0)\subset E(t_0, \mathbf{x}_0)$ реализуемых в игре дележей. В зависимости от способа задания подмножества $M(t_0, \mathbf{x}_0)$ получаем те или иные критерии оптимальности в дифференциальной игре $\Gamma(t_0, \mathbf{x}_0)$ с терминальными выигрышами. Далее укажем конкретные виды множеств $M(t_0, \mathbf{x}_0)$.

Для каждой коалиции определим множество $V(S)$, которое будем называть характеристическим множеством коалиции S:

1) $V(\varnothing)=0$;

2) $V(N)=E(t_0, \mathbf{x}_0)$;

3) для определения $V(S)$ при $S\neq N\neq\varnothing$ рассмотрим семейство вспомогательных антагонистических дифференциальных игр $\Gamma_{\mathbf{y}}(t_0, \mathbf{x}_0, S)$ при $\mathbf{y}\in C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)$.

Игра $\Gamma_{\mathbf{y}}(t_0, \mathbf{x}_0, S)$ является антагонистической дифференциальной игрой между коалицией S, выступающей как максимизирующий игрок, и коалицией $N\setminus S$, выступающей как игрок минимизирующий. Множества стратегий игроков представляют собой декартовы произведения множеств стратегий участников коалиции, т. е. множества $D^{(S)}=\prod_{i\in S} D^{(i)}$ для коалиции S и множества $D^{(N\setminus S)}=\prod\limits_{i\in N>S} D^{(i)}$ для коалиции $N\setminus S$ [38]. Элементы множеств $D^{(S)}$ и $D^{(N\setminus S)}$ будем обозначать соответственно через φ_S и $\varphi_{N\setminus S}$. Через $\mathbf{x}(t)$ будем, как и прежде, обозначать решение системы (5.18) при начальном условии $\mathbf{x}_0$. Выигрыш для игрока S в каждой ситуации $(\varphi_S, \varphi_{N\setminus S})$ определяется следующим образом: $K(t_0, \mathbf{x}_0, \varphi_S, \varphi_{N\setminus S})=-\varrho(\mathbf{x}(T), \mathbf{y})$, где $\mathbf{x}(t)$ — траектория в ситуации $(\varphi_S, \varphi_{N\setminus S})$ из начального состояния $\mathbf{x}_0$. Выигрыш игрока $N\setminus S$ полагаем равным $-K$. Хорошо известно, что значение такой игры всегда существует в классе кусочно-программных стратегий. Обозначим его через $\mathrm{val}\,\Gamma_y(t_0, \mathbf{x}_0, S)$. Пусть

$$\mathcal{Y}(S)=\{\mathbf{y}\in C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)\,|\,\mathrm{val}\Gamma_y\ (t_0, \mathbf{x}_0, S)=0\}.$$

Из определения значения игры и множества $\mathcal{Y}(S)$ следует, что для всех $\mathbf{y}\in\mathcal{Y}(S)$ коалиция S может гарантировать для любого $\varepsilon>0$ ε-сближение с $\mathbf{y}$.

Определим теперь множество $V(S)$: $V(S)=\{\mathbf{H}(\mathbf{x}(T))\,|\, \mathbf{x}(T)=\mathbf{y}\in\mathcal{Y}(S)\}$, т. е. $V(S)$ есть множество тех дележей, которые коалиция S может гарантировать с любой наперед заданной точностью $\varepsilon>0$. Таким образом, для каждой коалиции S мы определили характеристическое множество $V(S)$.

Лемма 5. Характеристические множества коалиции обладают следующими свойствами:

1) $V(\varnothing)=\varnothing$;

2) $V(R\cup S)\supset V(R)\cup V(S)$, если $R\cap S\neq\varnothing$;

3) $V(S)\subset V(N)$ для всех $R, S\subset N$.

Доказательство. Свойства 1) и 3) вытекают непосредственно из определения $V(S)$. Для доказательства свойства 2) предположим, что дележ $\mathbf{H}$ принадлежит $V(S)$. Тогда существует такое $\mathbf{y}\in\mathcal{Y}(S)$, что $H_i=H_i(\mathbf{y})$, $i=1, \ldots, m$. Покажем, что для любого $S'\supset S$ $\mathcal{Y}(S')\supset\mathcal{Y}(S)$.

Действительно, пусть $\mathbf{y}\in\mathcal{Y}(S)$, это означает, что $\mathrm{val}\Gamma_y(t_0, \mathbf{x}_0, S)=0$. Поскольку $S'\supset S$, то тем более $\mathrm{val}\,\Gamma_y(t_0, \mathbf{x}_0, S')=0$, так как если коалиция S гарантирует сближение с $\mathbf{y}$ на расстояние меньше ε, то это может гарантировать и любая коалиция $S'\supset S$ (всегда возможна следующая стратегия: игроки из S используют стратегию, ε-оптимальную в игре $\Gamma_y(t_0, \mathbf{x}_0, S)$, а игроки из $S'\setminus S$ — усечение на множестве $S'\setminus S$ ε-оптимальной стратегии коалиции $N\setminus S$ в этой же игре). Отсюда получаем, что $\mathcal{Y}(S')\supset\mathcal{Y}(S)$, что дает $\mathcal{Y}(R\cup S)\supset\mathcal{Y}(S)$, т. е. $\mathbf{y}\in\mathcal{Y}(R\cup S)$. Последнее по опеделению множества $V(R\cup S)$ означает, что дележ $\mathbf{H}=\{H_i(\mathbf{y}), i=1, \ldots, n\}\in V(R\cup S)$.

Таким образом, мы показали, что $V(S)\subset V(R\cup S)$. Заменяя S на R, получаем $V(R)\subset V(S\cup R)$, и окончательно $V(R\cup S)\supset \supset V(S)\cup V(R)$.

Пусть $\mathbf{H}'$ и $\mathbf{H}''$ — дележи, а S — некоторая коалиция.

Определение 2. Будем говорить, что дележ $\mathbf{H}'$ доминирует дележ $\mathbf{H}''$ по коалиции $S(\mathbf{H}'\succ_S\mathbf{H}'')$, если $\mathbf{H}'\in V(S)$ и

$H'_i > H''_i$ для всех $i \in S$; дележ $\mathbf{H}'$ доминирует дележ $\mathbf{H}''$ ($\mathbf{H}'' \succ \succ \mathbf{H}''$), если существует такая коалиция S, что $\mathbf{H}' \succ_S \mathbf{H}''$.

При таком понимании доминирования определения C-ядра и НМ-решения переносятся из кооперативной теории Неймана — Моргенштерна на дифференциальные игры без изменения [5, 33].

Пусть функции выигрыша игрока в $\Gamma(t_0, x_0)$ имеют вид (5.12). Оказывается, что в ряде случаев множество $\varkappa$ оптимальных по Парето дележей совпадает с C-ядром и НМ-решением. Для упрощения дальнейших выкладок будем полагать, что $\hat{M} \cap C^{T-t_0}(x_0) = \varnothing$. Пусть $R_i = \max\limits_{x \in \pi \hat{M}} \varrho(x, M_i)$, $i = 1, \ldots, m$, и $C(M_i, R_i)$ — замкнутая сфера с центром M_i и радиусом R_i (здесь и в дальнейшем $\pi \hat{M} = \pi_{C^{T-t_0}(x_0)} \hat{M}$). Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Для того чтобы в игре $\Gamma(t_0, x_0)$ с выигрышами (5.12) C-ядро совпало с множеством $\bar{\varkappa}$, достаточно выполнения равенства

$$[\bigcap_{i \in S} C(M_i, R_i)] \cap \mathcal{Y}(S) = \varnothing \qquad (5.19)$$

для всех $S \subset N$, $S \neq N$.

Доказательство. Пусть условие теоремы выполнено. Докажем, что C-ядро существует и совпадает с множеством $\hat{\varkappa}$. Для этой цели достаточно показать, что ни один дележ из $\hat{\varkappa}$ не доминируется.

Предположим противное. Пусть дележ $\mathbf{H}'(x)$ ($x \in \pi \hat{M}$) доминируется некоторым дележом $\mathbf{H}''(y)$, $y \in C^{T-t_0}(x_0)$. Это означает, что существует такая коалиция $S \subset N$ ($S \neq N$), что

$$\mathbf{H}''(y) \in V(S), \ H''_i(y) > H'_i(x) \qquad (5.20)$$

для всех $i \in S$. Поскольку $\mathbf{H}''(y) \in V(S)$, то $y \in \mathcal{Y}(S)$, и из условия (5.20) имеем

$$-H''_i(y) = \varrho(y, M_i) > R_i$$

хотя бы для одного $i \in S$. Однако для всех $x \in \pi \hat{M}$ $\varrho(x, M_i) = -H'_i(x) \leqslant R_i$ (см. (5.19)), что противоречит неравенству (5.20). Поскольку точка $x \in \pi \hat{M}$ выбиралась произвольным образом, то теорема доказана.

Теорема 6. Для того чтобы в игре $\Gamma(t_0, x_0)$ с выигрышами (5.12) существовало НМ-решение L, достаточно, чтобы имело место равенство

$$\mathcal{Y}(N \setminus \{i\}) \cap \overline{C^{T-t_0}}(x_0) = \varnothing \qquad (5.21)$$

для всех $i=1, \ldots, m$, где $\overline{C^{T-t_0}}(\mathrm{x}_0)$ — граничные точки множества $C^{T-t_0}(\mathrm{x}_0)$. В этом случае множество $\varkappa$ оптимальных по Парето решений совпадает с НМ-решением, т. е. $L=\hat{\varkappa}$.

Доказательство. Очевидно, что $\pi\hat{M}\subset\overline{C^{T-t_0}}(\mathrm{x}_0)$. Из условия теоремы следует, в частности, что $\mathcal{Y}(S)\cap\pi\hat{M}=\varnothing$ для всех $S\neq N$, поскольку при $S\neq N$ $S\subset N\setminus\{i\}$ для некоторого $i\in N$.

Пусть $\mathbf{H}'$, $\mathbf{H}''\in\varkappa(\mathrm{x}_0, T-t_0)$. Покажем, что они не могут доминировать друг друга. Из определения $\hat{\varkappa}$ следует, что дележи $\mathbf{H}'$, $\mathbf{H}''$ не доминируют друг друга по коалиции N. Если же $\mathbf{H}'\succ_S\mathbf{H}''$ по некоторой коалиции $S\subset N(S\neq N)$, то по определению доминирования $\mathbf{H}'(\mathrm{y})\in V(S)$. Однако это невозможно, поскольку по определению $V(S)$ в данном случае $\mathrm{y}\in\mathcal{Y}(S)$. В то же время $\mathbf{H}'\in\hat{\varkappa}$ и, следовательно, $\mathrm{y}\in\pi\hat{M}$. В результате получаем $\mathcal{Y}(S)\cap\pi\hat{M}\neq\varnothing$ для некоторого $S\neq N$, что противоречит (5.21).

Второе свойство НМ-решения всегда выполняется для множества $\hat{\varkappa}(\mathrm{x}_0, T-t_0)$.

Теоремы 5, 6 дают конструктивный способ построения множества оптимальных по Парето дележей, C-ядра и НМ-решения.

Определение 3. Пусть $\mathrm{y}\in M(t_0, \mathrm{x}_0)$. Управление $\bar{\mathbf{u}}(t)$ и соответствующая ей траектория $\bar{\mathrm{x}}(t)$ называются условно-оптимальными, если $\bar{\mathrm{x}}(t_0)=\mathrm{x}_0$, $\bar{\mathrm{x}}(T)=\mathrm{y}$.

Рассмотрим текущие игры $\Gamma(t, \bar{\mathrm{x}}(t))$ и соответствующие им решения $M(t, \bar{\mathrm{x}}(t))$. По определению при всех $t_0\leqslant t\leqslant T$ $M(t, \bar{\mathrm{x}}(t))\subset E(t, \bar{\mathrm{x}}(t))$, где $E(t, \bar{\mathrm{x}}(t))=\{\mathbf{H}(\mathrm{x}):\mathrm{x}\in C^{T-t}(\bar{\mathrm{x}}(t))\}$. Ввиду нетрансферабельности выигрышей $E(t, \bar{\mathrm{x}}(t))\subset E(t_0, \mathrm{x}_0)$ при всех $t>t_0$. Вообще говоря, легко показать, что при всех $t_0\leqslant t'<t''\leqslant T$ $E(t'', \bar{\mathrm{x}}(t''))\subset E(t', \bar{\mathrm{x}}(t'))$.

Определение 4. Решение $M(t_0, \mathrm{x}_0)$ называется динамически устойчивым в игре $\Gamma(t_0, \mathrm{x}_0)$ с терминальными выигрышами, если для каждого $\mathbf{H}(\mathrm{y})\in M(t_0, \mathrm{x}_0)$ найдется хотя бы одна условно-оптимальная траектория $\bar{\mathrm{x}}(t)=\mathrm{x}_0$, $\bar{\mathrm{x}}(T)=\mathrm{y}$, такая, что* $\mathbf{H}(\mathrm{y})=\bigcap\limits_{t_0<t\leqslant T}M(t, \bar{\mathrm{x}}(t))$.

Условно-оптимальные траектории, соответствующие дележам из устойчивого решения, будем называть оптимальными траекториями.

Динамическая устойчивость решения гарантирует разум-

---

* Имеет место равенство, так как множество $M(T, \bar{\mathrm{x}}(T))=\mathbf{H}(\bar{\mathrm{x}}(T))$, т.е. состоит из единственного дележа, компоненты которого есть выигрыши в точке $\mathrm{x}(T)=\mathrm{y}$.

ность движения вдоль оптимальной траектории $\bar{\mathbf{x}}(t)$ в каждый момент времени, поскольку при всех $t \in [t_0, T]$ дележ в конечном состоянии $\mathbf{y}$ продолжает удовлетворять критерию оптимальности, т. е. $\mathbf{H}(\mathbf{y}) \in M(t, \bar{\mathbf{x}}(t))$ при всех $t \in [t_0, T]$. Нарушение этого условия могло бы привести к необходимости изменить коллективное решение игроков (дележ $\mathbf{H}(\mathbf{y})$) в любой момент t, когда $\mathbf{H}(\mathbf{y}) \bar{\in} M(t, \bar{\mathbf{x}}(t))$.

Пусть $\bar{\mathbf{x}}(t)$, $\bar{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $\bar{\mathbf{x}}(T) = \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \pi \hat{M}$ — оптимальная траектория. Обозначим через $\pi \hat{M}$ проекцию множества $\hat{M}$ на множество $C^{T-t}(\bar{\mathbf{x}}(t))$. Поскольку $\mathbf{y} \in \pi \hat{M}$, то она является ближайшей в множестве $C^{T-t_0}(x_0)$ точкой к некоторой точке $z \in \hat{M}$, т. е.

$$\varrho(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y}' \in C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)} \varrho(\mathbf{z}, \mathbf{y}').$$

Поскольку $C^{T-t_0}(\bar{\mathbf{x}}(t)) \subset C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{y} \in C^{T-t}(\bar{\mathbf{x}}(t))$, то $\mathbf{y}$ будет оставаться точкой, ближайшей в множестве $C^{T-t}(\bar{\mathbf{x}}(t))$ к точке $\mathbf{z}$ при всех $t \in [t_0, T]$, т. е. при всех $t \in [t_0, T]$ она будет проекцией $\mathbf{z}$ на множество $C^{T-t}(\bar{\mathbf{x}}(t))$, а следовательно, $\mathbf{y} \in \pi \hat{M}(t)$ при всех $t \in [t_0, T]$.

Из теоремы 4 вытекает, что множество дележей, оптимальных по Парето в игре $\Gamma(t, \bar{\mathbf{x}}(t))$, имеет вид $\varkappa(\bar{\mathbf{x}}(t), T-t) = \{\mathbf{H}(\mathbf{y}') \mid \mathbf{y}' \in \pi \hat{M}(t)\}$. Поскольку $\mathbf{y} \in \pi \hat{M}(t)$ при всех $t \in [t_0, T]$, то $\mathbf{H}(\mathbf{y}) \in \hat{\varkappa}(\mathbf{x}(t), T-t)$ при всех $t \in [t_0, T]$. Отсюда получаем следующую теорему об устойчивости оптимальных по Парето дележей.

Теорема 7. Для любой условно-оптимальной траектории $\bar{\mathbf{x}}(t)$ в игре $\Gamma(t_0, \mathbf{x}_0)$ с выигрышами (5.4.3) дележ

$$\mathbf{H}(\mathbf{y}) = \{H_i(\bar{\mathbf{x}}(T)) = H_i(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in \pi \hat{M},\ i = 1, \ldots, m\}$$

принадлежит множеству дележей, оптимальных по Парето, $\hat{\varkappa}(\bar{\mathbf{x}}(t), T-t)$ для всех текущих игр $\Gamma(t, \bar{\mathbf{x}}(t))$ при $t \in [t_0, T]$, т. е. множество дележей, оптимальных по Парето, динамически устойчиво.

Заметим, что эта теорема является следствием более общего результата из § 3 о динамической устойчивости Парето-оптимальных решений.

Пусть $\mathcal{Y}_t(S) = \mathcal{Y}(S, t, \bar{\mathbf{x}}(t))$. Следующие теоремы являются следствиями из теорем 5—7. В них под C-ядром в игре с нетрансферабельными выигрышами будем понимать множество недоминируемых в смысле определения 2 дележей (в отличие от определения доминирования для игры с трансферабельными выигрышами здесь возможно доминирование по множеству всех игроков). Аналогично, допуская возможность доминирования по множеству всех игроков, понятие НМ-решения (определение см. в [5, 33]) переносится на случай игры с нетрансферабельными выигрышами.

Теорема 8. Если для всех $S \subset N$, $S \neq N$, имеет место равенство

$$[\bigcap_{i \in S} C(M_i, R_i(t))] \cap \mathcal{Y}_t(S) \neq \varnothing, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T,$$

то в игре с выигрышами (5.12) C-ядро динамически устойчиво. Здесь $R_i(t) = \max\limits_{x \in \pi M(t)} \varrho(\mathrm{x}, M_i)$, $i = 1, \ldots, m$.

Теорема 9. Если для всех $i = 1, \ldots, m$ и $t \in [t_0, T]$ имеет место соотношение $\mathcal{Y}_t(N \setminus \{i\}) \cap C^{T-t}(\bar{\mathrm{x}}(t)) = \varnothing$, то в игре с выигрышами (5.12) НМ-решение динамически устойчиво.

Другим примером динамически устойчивых решений является множество дележей в ситуации равновесия по Нэшу.

Пример. Пусть система (5.18) имеет вид

$$\dot{\mathrm{x}} = u_1 + u_2 + u_3, \quad \mathrm{x} = (x_1, \; x_2) \in E_2,$$

$$u_i = \{u_1^i, \; u_2^i\}, \; |u_i| \leqslant 1, \; i = 1, 2, 3, \; \mathrm{x}(0) = \mathrm{x}_0 = 0,$$

$$N = \{1, 2, 3\}, \; M = \{M_1, M_2, M_3\}, \; \hat{M} \cap C^{T-t_0}(\mathrm{x}_0) = \varnothing, \; T = 1.$$

Множество достижимости $C^{T-t_0}(\mathrm{x}_0)$ (рис. 19) представляет собой круг радиусом $R = 3$ с центром в точке $\mathrm{x}(0) = 0$. Множество $\pi\hat{M}$ совпадает с дугой AB.

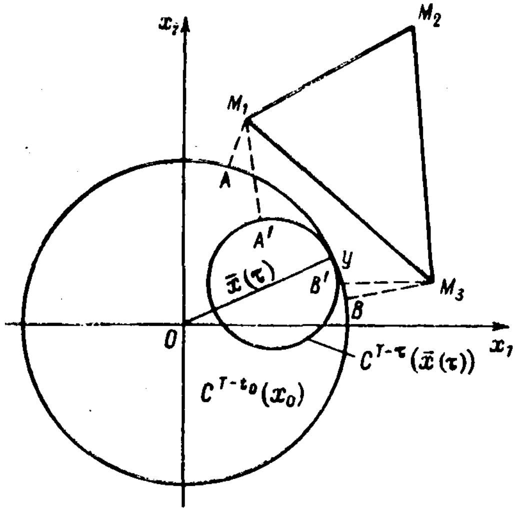

Рис. 19.

Пусть $\mathbf{y} \in AB$, $\bar{\mathbf{x}}(t) = Oy$ — оптимальная траектория и при $\tau \in [0, 1]$ множество $C^{T-\tau}(\bar{\mathbf{x}}(\tau))$ — круг, касающийся множества $C^{T-t_0}(\mathbf{x}_0)$ в точке y; множество $\pi \hat{M}(\tau)$ совпадает с дугой $A'B'$, являющейся ортогональной проекцией треугольника $\hat{M} = \Delta M_1 M_2 M_3$ на круг $C^{T-\tau}(\mathbf{x}(\tau))$. Поскольку в данном случае условия теорем 8, 9 очевидным образом выполняются, то

$$H(\mathbf{y}) = \{-\varrho(\mathbf{y}, M_1), -\varrho(\mathbf{y}, M_2), -\varrho(\mathbf{y}, M_3)\} \in \hat{\varkappa}(\bar{\mathbf{x}}(t), T-t)$$

при всех $\tau \in [0, 1]$, т. е. существуют динамически устойчивое C-ядро и НМ-решение.

Задачи оптимального планирования, учитывающие экологический фактор, являются по существу многокритериальными. При рассмотрении многокритериальных задач оптимального управления возникает нетривиальный вопрос о динамической устойчивости принципов оптимальности, который практически отсутствует в классических однокритериальных задачах. Оказывается, что множество Парето-оптимальных решений динамически устойчиво, однако процедура выбора конкретного решения из этого множества может таковой не оказаться.

Построение Парето-оптимальных множеств в общем случае представляет серьезную проблему, в то же время в задаче перспективного планирования экологически замкнутых регионов с конечным числом целевых точек она оказывается вполне разрешимой. Множество Парето-оптимальных решений в этом случае строится как проекция выпуклой оболочки целевых точек на множество достижимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процессы развития. При наличии нескольких заинтересованных в развитии сторон можно воспользоваться аппаратом теории неантагонистических дифференциальных игр. В этом случае также удается найти эффективные способы построения принципов оптимальности для решения задач сближения с конечным числом целевых точек.

Глава 6

ЭКОЛОГИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА

§ 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА С УЧЕТОМ ВЫПОЛНЕНИЯ БАЛАНСОВЫХ СООТНОШЕНИЙ

При планировании развития отраслей сельского хозяйства важную роль играют межотраслевые балансовые соотношения, учитывающие внешние и внутриотраслевые потребности, и распределение производства сельскохозяйственной продукции по регионам. Поскольку экология есть наука об отношениях растительных и животных организмов и образуемых ими сообществ между собой и окружающей средой, выполнение межотраслевых балансовых соотношений в процессе развития и правильное региональное планирование составляют одну из основных экологических задач для сельского хозяйства.

Исключительное значение приобретает рациональное соотношение отраслей животноводства, которые являются одним из основных потребителей сельскохозяйственной продукции. Считая конечным результатом развития достижение запланированных показателей по основным видам сельскохозяйственной продукции, необходимо ставить задачу на минимизацию затрат, связанных с достижением этих показателей за счет выбора правильного соотношения отраслей животноводства и растениеводства, рационального регионального планирования и обязательного выполнения основных балансовых соотношений между отраслями. Минимизация затрат естественным образом ведет к минимизации времени достижения запланированных показателей.

Поскольку сельское хозяйство является одним из источников загрязнения окружающей среды и его развитие приводит к изменению природного ландшафта и вытеснению популяций диких животных из традиционных ареалов обитания, то при планировании должны учитываться и эти факторы.

Мы будем считать фиксированными нормативные задания по производству основных видов сельскохозяйственной продукции на конец периода длительного планирования, а также основные балансовые соотношения между отраслями сельскохозяйственного производства. Задача состоит в построении плана распределения ежегодных капиталовложений по отраслям сельскохозяйственного производства, который бы сохранял балансовые соотношения между отраслями, обеспечивая одновременное выполнение нормативных заданий по всем отраслям сельскохозяйственного производства на конец периода длительного планирования. Ставится также задача нахождения наиболее рационального плана развития сельскохозяйственного производства с точки зрения сглаживания существующих диспропорций между отраслями.

Перейдем к математической постановке задачи. Индексами $i=1, 2, \ldots, n$ будем обозначать различные отрасли сельскохозяйственного производства. Предположим, что состояние каждой отрасли может быть описано одним числовым параметром. Пусть z_i^0 — начальное количественное состояние отрасли i. Предполагается заданным перспективный план развития всех отраслей сельскохозяйственного производства $\bar{\mathbf{z}}=(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_i, \ldots \ldots, \bar{z}_n)$, определенный на конец некоторого периода длительного планирования (20—25 лет). В плане $\bar{\mathbf{z}}$ компонента $\bar{z}_i$ означает планируемое количественное состояние отрасли i на конец этого периода. План $\bar{\mathbf{z}}$ может быть определен путем решения некоторой вспомогательной оптимизационной задачи, которая будет рассмотрена ниже.

Будем считать, что вектор $\bar{\mathbf{z}}$ представлен в виде суммы двух векторов $\bar{\mathbf{z}}=\bar{\mathbf{x}}+\bar{\mathbf{y}}$, где $\bar{\mathbf{x}}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_i, \ldots, \bar{x}_n)\geqslant 0$ — вектор производства продукции, идущей на потребление (т. е. используемый вне рассматриваемых отраслей сельского хозяйства), а вектор $\bar{\mathbf{y}}=(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_i, \ldots, \bar{y}_n)\geqslant 0$ — вектор производства продукции, используемой при производстве.

Предположим, что основным показателем работы сельского хозяйства является вектор $\bar{\mathbf{x}}$, а вектор $\bar{\mathbf{y}}$ так же, как и вектор $\bar{\mathbf{z}}$, рассчитывается по вектору $\bar{\mathbf{x}}$.

Пусть задана матрица баланса $A=\{a_{ij}\}$, $a_{ij}\geqslant 0$, в которой элемент a_{ij} представляет собой количество продукта отрасли j, необходимое для производства единицы продукции отрасли i. Очевидно, что для всех j выполняется равенство

$$\sum_i (\bar{x}_i+\bar{y}_i)a_{ij}=\bar{y}_j, \quad j=1, \ldots, n, \tag{6.1}$$

или в матричной форме $(\bar{\mathbf{x}}+\bar{\mathbf{y}})A=\bar{\mathbf{y}}$, или $\bar{\mathbf{x}}A=\bar{\mathbf{y}}(E-A)$.

Если в уравнении (6.1) вектор $\bar{\mathbf{x}}$ считать известным, то его решение относительно $\bar{\mathbf{y}}$ даст количество продукции, достаточное для реализации плана $\bar{\mathbf{x}}$.

Уравнение (6.1) будем называть балансовым уравнением. В случае невырожденности матрицы $E-A$, зная план $\bar{\mathbf{x}}$, из

(6.1) можем определить план $\bar{y}$ и затем сформировать план $\bar{z}$: $\bar{z}=\bar{x}+\bar{y}$.

В рассматриваемой модели перспективный план производства $\bar{z}=\bar{x}+\bar{y}$ считается заданным по всем отраслям сельского хозяйства. Ставится задача перевода отраслей сельского хозяйства из некоторого начального состояния $z^0=x^0+y^0$ в состояние $\bar{z}$. Предполагаем, что заданы ежегодные суммарные капиталовложения, направляемые на развитие сельского хозяйства: $\Delta C(t)\geqslant 0$, и задача заключается в распределении этих капиталовложений по отраслям таким образом, чтобы довести мощности производства до планируемого состояния $\bar{z}$ (из состояния z^0).

При этом должны выполняться следующие условия:

1. Достижение уровня $\bar{z}$ должно произойти одновременно по всем отраслям.

2. На каждом этапе развития производства должно соблюдаться уравнение баланса (6.1).

3. Развитие производства должно быть в каком-то смысле оптимальным (например, в смысле ликвидации диспропорции между отраслями).

4. План распределения капиталовложений по отраслям должен быть обеспечен внешними ресурсами, необходимыми для развития производства $\bar{x}$, помимо ресурсов $\bar{y}$, идущих на производство $\bar{x}$. Если план распределения капиталовложений не обеспечен ресурсами, то часть капиталовложений должна направляться на развитие производства ресурсов (ресурсов, обеспечивающих развитие сельского хозяйства).

Пусть $\Delta z(t)=\Delta x(t)+\Delta y(t)$ — приращение производства в год t. Для простоты будем считать, что развитие отраслей сельского хозяйства происходит пропорционально направленному на это развитие капиталовложению, т. е. $\Delta z_i(t)=s_i u_i(t)$, $i=1, \ldots, n$, где $u_i(t)\geqslant 0$ — капиталовложение, направляемое на развитие отрасли i.

Пусть существует некоторый план распределения капиталовложений по отраслям сельскохозяйственного производства, удовлетворяющий условиям 1, 2. Обозначим его $\bar{u}(t)=\{\bar{u}_1(t), \ldots$ $\ldots, \bar{u}_n(t)\}$. Тогда в силу линейности системы любой план вида $\alpha\bar{u}(t)=\{\alpha\bar{u}_1(t), \ldots, \alpha\bar{u}_i(t), \ldots, \alpha\bar{u}_n(t)\}$ обладает тем же свойством.

Рассчитаем теперь ресурсы, необходимые для развития сельскохозяйственного производства. Пусть β_{ik} — количество ресурсов типа k, необходимое для увеличения производства на одну единицу в отрасли i. Тогда количество ресурсов типа k, необходимое для увеличения производства всех отраслей на $\Delta z(t)$, равно $\sum\limits_i \Delta z_i(t)\beta_{ik}$.

Пусть $\Delta\mathbf{w}^1(t)$ — вектор производства ресурсов, необходимых для развития сельского хозяйства, которые имеются в наличии на данном этапе планирования (в данный год) и могут быть использованы для этого развития: $\Delta\mathbf{w}^1(t)=\{\Delta w_k^1(t)\}\geqslant 0$ и $\mathbf{w}^2(t)=\{\Delta w_k^2(t)\}\geqslant 0$ — вектор ресурсов, требующих дополнительного привлечения капиталовложений и необходимых для полной реализации плана развития производства

$$\overline{\alpha\mathbf{u}}(t)=\{\overline{\alpha u_1}(t), \ldots, \overline{\alpha u_i}(t) \ \ldots, \overline{\alpha u_n}(t)\}, \ u>0$$

(если ресурсы $\Delta\mathbf{w}^1(t)$ достаточны для реализации $\overline{\alpha\mathbf{u}}(t)$, то $\Delta\mathbf{w}^2(t)=0$).

Предположим, что рост производства ресурсов осуществляется линейно в зависимости от капиталовложений. Пусть $v_k(t)$ — их объем, необходимый для развития ресурса типа k в год t. Тогда $\Delta w_k^2(t)=\mu_k v_k(t)$.

Для развития производства ресурсов также необходимы ресурсы. Пусть γ_{kj} — количество ресурса типа j, необходимое для увеличения производства ресурса типа k на одну единицу. Тогда для увеличения производства ресурсов на величину $\Delta\mathbf{w}^2(t)=\{\Delta w_j^2(t)\}=\{\mu_j v_j(t)\}$ необходимо увеличение ресурса типа k на величину

$$\sum_j \Delta w_j^2(t)\gamma_{kj}=\sum_j \mu_j v_j(t)\gamma_{kj}. \tag{6.2}$$

Объем ресурсов типа k, необходимый для реализации плана распределения капиталовложений $\overline{\alpha u}(t)$, равен

$$\sum_i \Delta z_i(t)\beta_{ik}=\alpha\sum_i s_i u_i(t)\beta_{ik}.$$

Объем капиталовложений $\Delta C(t)$, направляемых на развитие сельского хозяйства, слагается из двух частей: $\Delta C(t)=\Delta C_1(t)+ +\Delta C_2(t)$. Здесь $\Delta C_1(t)=\alpha\sum_i u_i(t)$ — капиталовложение на развитие собственно сельскохозяйственного производства и $\Delta C_2(t)=\sum_k v_k(t)$ — капиталовложение на развитие сопутствующего производства ресурсов, необходимых для развития сельского хозяйства.

Для того чтобы план $\overline{\alpha\mathbf{u}}(t)\geqslant 0$ был обеспечен ресурсами, необходимо выполнение условия

$$\Delta w_k^1(t)-\sum_j \mu_j v_j(t)\gamma_{kj}+\mu_k v_k(t)\geqslant\alpha\sum_i \overline{u_i}(t)\beta_{ik}s_i,$$

$$\alpha\sum_i \overline{u_i}(t)+\sum_k v_k(t)\leqslant\Delta C(t), \ v_k(t)\geqslant 0, \ \alpha\geqslant 0. \tag{6.3}$$

Поскольку целью является не развитие ресурсов для развития сельскохозяйственного производства, а развитие самого производства, то естественно направлять максимальный объем капиталовложений на развитие сельскохозяйственного производства. Это приводит к следующей задаче максимизации:

$$\max \alpha \text{ при условии } (6.3),$$

что и означает максимизацию доли капиталовложений на развитие сельскохозяйственного производства.

Допустимое решение задачи (6.3) всегда существует. Достаточно положить $\alpha=0$, $v_k(t)=0$ для всех k.

Решение задачи даст коэффициент α и план $\{v_k(t)\}$ распределения капиталовложений по отраслям, производящим ресурсы. Отсюда получаем также величину $\Delta C_1(t)=\alpha\sum_i \overline{u}_i(t)$ — капиталовложение в год t на развитие сельскохозяйственного производства.

Сформируем теперь план распределения капиталовложений по отраслям сельскохозяйственного производства $\overline{\mathbf{u}}(t)=\{\overline{u}_1(t), \ldots, \overline{u}_i(t), \ldots, \overline{u}_n(t)\}$, удовлетворяющий условиям 2 и 3, поскольку, как мы уже убедились, выбором множителя α всегда можно добиться выполнения условия 4. Итак, пусть заданы план $\overline{\mathbf{z}}$ и его составные части $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{y}}$. Пусть далее $\mathbf{z}^0=\mathbf{x}^0+\mathbf{y}^0$ — начальный уровень производства, соответственно разбитый на $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{y}^0$. Задача заключается в переводе точки $\mathbf{z}^0 \to \overline{\mathbf{z}}$ одновременно по всем отраслям с соблюдением условия баланса (6.1).

Пусть $\overline{\mathbf{u}}(t)$ — такой план. Тогда $\overline{\mathbf{u}}(t)$ можно представить в виде суммы двух слагаемых: $\overline{\mathbf{u}}(t)=\overline{\mathbf{u}}^1(t)+\overline{\mathbf{u}}^2(t)$, где $\overline{\mathbf{u}}^1(t)$ — план распределения капиталовложений, гарантирующий достижение точкой $\mathbf{x}^0$ точки $\overline{\mathbf{x}}$, а $\overline{\mathbf{u}}^2(t)$ — план распределения капиталовложений, гарантирующий достижение точкой $\mathbf{y}^0$ точки $\overline{\mathbf{y}}$.

Выпишем уравнение баланса (6.1) для приращения сельскохозяйственного производства в год t:

$$(1-a_{jj})\Delta y_j(t)-\sum_{i\neq j}\Delta y_i(t)a_{ij}=\sum_i \Delta x_i(t)a_{ij} \qquad (6.4)$$

(здесь, очевидно, $\Delta z_j(t)=\Delta x_j(t)+\Delta y_j(t)$). Подставим в уравнение (6.4) выражения $\Delta y_i(t)=s_i\overline{u}_i^2(t)$, $\Delta x_i(t)=s_i\overline{u}_i^1(t)$. Получим балансные соотношения для ежегодных капиталовложений

$$(1-a_{jj})s_j\overline{u}_j^2(t)-\sum_{i\neq j}s_i\overline{u}_i^2(t)a_{ij}=\sum_i s_i\overline{u}_i^1(t)a_{ij}.$$

Если уравнение (6.4) соблюдается в каждый год t, то имеет решение и последнее уравнение. Однако может оказаться, что суммарное капиталовложение

$$\sum_i \overline{u}_i^1(t)+\sum_i \overline{u}_i^2(t)+\sum_k v_k(t)\neq\Delta C(t),$$

где $v_k(t)$ — капиталовложение на развитие ресурса типа k, необходимого для реализации плана $\overline{u}(t)$, т. е. суммарные затраты в год t не будут равны объему капиталовложений $\Delta C(t)$ на развитие сельского хозяйства. Но всегда можно найти такое $\nu>0$, что

$$\sum_i \overline{u}_i^1(t)+\sum_i \overline{u}_i^2(t)+\sum_k v_k(t)=\Delta C(t)/\nu,$$

или

$$\nu\sum_i \overline{u}_i^1(t)+\nu\sum_i \overline{u}_i^2(t)+\nu\sum_k v_k(t)=\Delta C(t),$$

$$\sum_i \nu\overline{u}_i^1(t)+\sum_i \nu\overline{u}_i^2(t)+\sum_k \nu v_k(t)=\Delta C(t).$$

Полагаем $\sum_i \nu\overline{u}_i^1(t)+\sum_i \nu\overline{u}_i^2(t)=\Delta C_1(t)$, где $\Delta C_1(t)$ имеет смысл объема капиталовложений непосредственно на развитие сельского хозяйства.

Если мы теперь положим

$$\overline{\overline{u}}_i^1(t)=\nu\overline{u}_i^1(t);\ \overline{\overline{u}}_i^2(t)=\nu\overline{u}_i^2(t),\ \overline{v}_k(t)=\nu v_k(t),$$

то вновь полученный план распределения капиталовложений по отраслям вместе с производством ресурсов удовлетворяет условиям 1—4.

При формировании плана распределения капиталовложений по отраслям сельскохозяйственного производства основной проблемой является формирование плана распределения капиталовложений $\overline{\overline{\mathbf{u}}}^1(t)=\{\overline{\overline{u}}_i^1(t)\}$, обеспечивающего развитие производства из состояния $\mathbf{x}^0$ в состояние $\overline{\mathbf{x}}$, поскольку планы развития $\overline{\overline{\mathbf{u}}}^2(t)$ и $\overline{\mathbf{v}}(t)$ вычисляются по плану $\overline{\overline{\mathbf{u}}}^1(t)$.

Если не ставить оптимизационных задач, то существует целое множество допустимых планов распределения капиталовложений, переводящих $\mathbf{x}^0$ в $\overline{\mathbf{x}}$ одновременно по всем отраслям. Как показано в [18], одним из лучших планов этого типа является введенный В. И. Зубовым [17] опорный план распределения капиталовложений. Согласно этому плану капиталовложения в отрасли сельскохозяйственного производства пропорциональны отставанию этой отрасли от выбранных нормативов. Опорный план вычисляется по следующей формуле:

$$\overline{\overline{u}}_i^1(t)=\frac{[\overline{x}_i-x_i(t)]/s_i}{\sum_i [\overline{z}_i-z_i(t)]/s_i}\Delta C_1(t),$$

$$\overline{\overline{u}}_i^2(t)=\frac{[\overline{y}_i-y_i(t)]/s_i}{\sum_i [\overline{z}_i-z_i(t)]/s_i}\Delta C_1(t),\ i=1, 2, \ldots, n.$$

Отметим, что опорный план обладает тем свойством, что в каждый год t, $t=0, 1, \ldots, T-1$, состояние сельскохозяйственного производства удовлетворяет уравнению баланса (6.1), если исходная задача поставлена корректно.

Действительно, начальное состояние $\mathbf{z}^0=\mathbf{x}^0+\mathbf{y}^0$ удовлетворяет уравнению баланса. Планируемое на конец периода длительного планирования (20—25 лет) состояние $\bar{\mathbf{z}}=\bar{\mathbf{x}}+\bar{\mathbf{y}}$ должно быть сбалансированным, поскольку в противном случае сама задача была бы экономически некорректной. Допустим, что состояние $\mathbf{z}(t)=\mathbf{x}(t)+\mathbf{y}(t)$, получившееся в год t в результате применения опорного плана развития, является сбалансированным (т. е. удовлетворяет (6.1)), покажем, что то же имеет место и для состояния $\mathbf{z}(t+1)=\mathbf{x}(t+1)+\mathbf{y}(t+1)$, где

$$x_i(t+1)=x_i(t)+s_i\bar{\bar{u}}_i^1(t)=x_i(t)+s_i\frac{[\bar{x}_i-x_i(t)]/s_i}{\sum\limits_i[\bar{z}_i-z_i(t)]/s_i}\Delta C_1(t),$$

$$y_i(t+1)=y_i(t)+s_i\frac{[\bar{y}_i-y_i(t)]/s_i}{\sum\limits_i[\bar{z}_i-z_i(t)]/s_i}\Delta C_1(t).$$

Действительно,

$$[\mathbf{x}(t+1)+\mathbf{y}(t+1)]A=\mathbf{z}(t+1)A=$$

$$=\left\{\mathbf{x}(t)+\mathbf{y}(t)+\frac{\bar{\mathbf{x}}+\bar{\mathbf{y}}-\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}(t)}{\sum\limits_i[\bar{z}_i-z_i(t)]/s_i}\Delta C_1(t)\right\}A=$$

$$=\left\{\mathbf{x}(t)+\mathbf{y}(t)+\frac{\Delta C_1(t)}{\sum\limits_i[\bar{z}_i-z_i(t)]/s_i}\bar{\mathbf{z}}-\frac{\Delta C_1(t)}{\sum\limits_i[\bar{z}_i-z_i(t)]/s_i}\mathbf{z}(t)\right\}A=$$

$$=\mathbf{y}(t)+\frac{\bar{\mathbf{y}}-\mathbf{y}(t)}{\sum\limits_i[\bar{z}_i-z_i(t)]/s_i}\Delta C_1=\mathbf{y}(t+1)$$

(поскольку в (6.1) имеем $(\mathbf{x}+\mathbf{y})A=\mathbf{y}$) .

В координатной записи получим

$$\sum_i[x_i(t+1)+y_i(t+1)]a_{ij}=y_j(t)+s_j\bar{\bar{u}}_j^2(t)=$$
$$=y_j(t)+\Delta y_j(t)=y_j(t+1),$$

где $\bar{\bar{u}}_j^2$ имеет вид

$$\bar{\bar{u}}_j^2=\frac{[\bar{y}_j-y_j(t)]/s_j}{\sum\limits_i[\bar{z}_i-z_i(t)]/s_i}\Delta C_1(t),$$

что и требовалось доказать.

Опорный план гарантирует:

1. Одновременное достижение по всем отраслям состояния $\bar{\mathbf{z}}=\bar{\mathbf{x}}+\bar{\mathbf{y}}$, сбалансированность и обеспечение плана развитием производства ресурсов.

2. Сглаживание диспропорций в развитии сельского хозяйства, поскольку при его реализации «подтягивание» отраслей происходит пропорционально их отставанию.

Само существование опорного плана $\overline{\overline{\mathbf{u}}}^1(t)$, $\overline{\overline{\mathbf{u}}}^2(t)$ гарантирует существование по крайней мере одного плана распределения капиталовложений, удовлетворяющего условиям 1, 2, 4, поэтому можно ставить задачу об оптимальности развития.

§ 2. ПЛАНИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВА СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ПРОДУКЦИИ ПО РЕГИОНАМ И УЧЕТ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ТРЕБОВАНИЙ

Здесь мы обратим особое внимание на составление оптимального перспективного плана сельскохозяйственного производства на конец периода длительного планирования (20—25 лет). Отметим, что в предыдущем параграфе мы сознательно избегали этой задачи, решая в основном проблему оптимального перехода из указанного начального в уже каким-то образом найденное конечное состояние сельскохозяйственного производства. Иными словами, мы не обсуждали вопрос о способах вычисления оптимального перспективного плана $\bar{\mathbf{z}}$, который предполагали заданным. Остановимся на этой задаче применительно к отраслям растениеводства (животноводство мы пока рассматривать не будем). Для простоты рассмотрения ограничимся двухуровневой моделью распределения капиталовложений по отраслям и регионам сельскохозяйственного производства.

Все сельскохозяйственное производство можно разбить на основное и вспомогательное. К основному производству относится возделывание различных культур сельского хозяйства, к вспомогательному — различные виды сельскохозяйственного строительства. Объем сельскохозяйственного строительства рассчитывается по объему основного производства через задаваемые определенным образом нормативы.

В свою очередь, земли, отведенные под сельскохозяйственные культуры, делятся на мелиорируемые и немелиорируемые. Поскольку стоимость возделывания одной и той же культуры на землях разного типа различна, то основное сельскохозяйственное производство также можно разбить на две части.

Пусть нам необходимо запланировать развитие сельского хозяйства на длительный период $[t_0, T]$, где t_0 — начало планируемого периода, а T — его конец. Предположим, что в каждый год t, $t \in [t_0, T]$, в сельское хозяйство вкладывается сумма капиталовложений, равная $\Delta C(t) \geqslant 0$. Эту сумму необходимо распределить между основным и вспомогательным производством.

Под отраслью сельского хозяйства будем понимать чисто условно производство одной сельскохозяйственной культуры. Обозначим через $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), ..., x_i(t), ..., x_n(t)\}$ количественные состояния отраслей сельского хозяйства на мелиорируемых землях, а через $\mathbf{y}(t) = \{y_1(t), ..., y_i(t), ..., y_n(t)\}$ — состояния отраслей на немелиорируемых землях, где $t \in [t_0, T]$ — год текущего планирования. Пусть $u_i(t)$ — капиталовложение на развитие отрасли i на мелиорируемых землях, а $v_i(t)$ — капиталовложение на развитие отрасли i на немелиорируемых землях.

Так же, как и в предыдущем параграфе, будем считать, что развитие отраслей пропорционально объему капиталовложений, т. е.

$$x_i(t+1) = x_i(t) + s_i u_i(t),\ y_i(t+1) = y_i(t) + l_i v_i(t),$$

где $1/s_i$ и $1/l_i$ — расходы на увеличение количественного состояния отрасли на одну единицу соответственно на мелиорируемых и немелиорируемых землях.

Таким образом, наша задача свелась к следующей: найти такие распределения капиталовложений по отраслям сельского хозяйства $\{u_i(t)\}$ и $\{v_i(t)\}$, которые при задаваемых ежегодных суммарных капиталовложениях $\Delta C(t)$ обеспечивали бы одновременный перевод отраслей из состояния $\{x_i(t_0)\}$ в $\{\overline{x_i}(T)\}$ и из $\{y_i(t_0)\}$ в $\{\overline{y_i}(T)\}$ с учетом необходимости развития отраслей вспомогательного производства.

Если обозначить через $\Delta A(t)$ объем капиталовложений, идущих на развитие основного сельскохозяйственного производства, то должно выполняться следующее ограничение: $\sum\limits_i u_i(t) + \sum\limits_i v_i(t) = \Delta A(t)\gamma$, где γ — некоторый коэффициент, смысл которого будет выяснен впоследствии.

Пусть $\overline{\mathbf{x}}(T) = \{\overline{x_1}(T), \ldots, \overline{x_i}(T), \ldots, \overline{x}_n(T)\}$, $\overline{\mathbf{y}}(T) = \{\overline{y_1}(T), \ldots, \overline{y_i}(T), \ldots, \overline{y}_n(T)\}$ — планируемые количественные состояния отраслей соответственно на мелиорируемых и немелиорируемых землях. Вычислим опорные планы распределения капиталовложений соответственно на мелиорируемых и немелиорируемых землях при заданном капитале $\Delta A(t)$ и неизвестном коэффициенте γ:

$$\overline{u_i}(t) = \frac{[\overline{x_i} - x_i(t)]/s_i}{\sum\limits_i [\overline{x_i} - x_i(t)]/s_i + \sum\limits_i [\overline{y_i} - y_i(t)]/l_i}\Delta A(t)\gamma, \qquad (6.5)$$

$$\overline{v_i}(t) = \frac{[\overline{y_i} - y_i(t)]/l_i}{\sum\limits_i [\overline{x_i} - x_i(t)]/s_i + \sum\limits_i [\overline{y_i} - y_i(t)]/l_i}\Delta A(t)\gamma. \qquad (6.6)$$

Приращение производства в данный год t будет равно $s_i\overline{u_i}(t) = \Delta x_i(t)$, $l_i\overline{v}(t) = \Delta y_i(t)$. С приращением производства связано строительство дополнительных сельскохозяйственных объектов. Обозначим через α_{ik} (β_{ik}) число объектов типа k, которые необходимо построить при увеличении производства на одну единицу по отрасли i на мелиорируемых (немелиорируемых) землях. Обозначим стоимость строительства одного объекта типа k через ω^1_k и ω^2_k соответственно. При увеличении мощности производства по отраслям на величину $\Delta x_i(t)$ $(\Delta y_i(t))$ возникают дополнительные затраты, которые вычисляются следующим образом:

$$\sum_k w_k^1 \sum_i a_{ik}\Delta x_i(t) = \sum_k \left[\sum_i a_{ik}\overline{u}_i(t)s_i\right] w_k^1,$$

$$\sum_k w_k^2 \sum_i \beta_{ik}\Delta y_i(t) = \sum_k \left[\sum_i \beta_{ik}\overline{v}_i(t)l_i\right] w_k^2. \qquad (6.7)$$

Здесь $\overline{u}_i(t)$, $\overline{v}_i(t)$ — соответствующие опорные планы развития, полученные из (6.5), (6.6). Тогда суммарные капиталовложения в год t должны быть равны

$$\sum_i \overline{u}_i(t) + \sum_i \overline{v}_i(t) + \sum_k w_k^1 \sum_i a_{ik}\Delta x_i(t) + \sum_k w_k^2 \sum_i \beta_{ik}\Delta y_i(t),$$

или

$$\Delta A(t)\gamma + \sum_k w_k^1 \sum_i a_{ik}\Delta x_i(t) + \sum_k w_k^2 \sum_i \beta_{ik}\Delta y_i(t). \qquad (6.8)$$

Однако сумма (6.8) должна равняться $\Delta C(t)$. Подставив в (6.7) вместо $\overline{u}_i(t)$ и $\overline{v}_i(t)$ их выражения из (6.5) и (6.6), получаем значение коэффициента γ, при котором имеет место равенство

$$\Delta A(t)\gamma + \sum_k w_k^1 \sum_i a_{ik}\overline{u}_i(t)s_i + \sum_k w_k^2 \sum_i \beta_{ik}\overline{v}_i(t)l_i =$$

$$= \Delta A(t)\gamma + \sum_k w_k^1 \sum_i a_{ik} \frac{s_i \Delta A(t)\gamma[\overline{x}_i - x_i(t)]/s_i}{\sum_i [\overline{x}_i - x_i(t)]/s_i + \sum_i [\overline{y}_i - y_i(t)]/l_i} +$$

$$+ \sum_k w_k^2 \sum_i \beta_{ik} \frac{l_i \Delta A(t)\gamma[\overline{y} - y_i(t)]/l_i}{\sum_i [\overline{x}_i - x_i(t)]/s_i + \sum_i [\overline{y}_i - y_i(t)]/l_i} = \Delta C(t),$$

или

$$\gamma\Delta A(t)\left[1 + \frac{\sum_k w_k^1 \sum_i a_{ik}[\overline{x}_i - x_i(t)] + \sum_k w_k^2 \sum_i \beta_{ik}[\overline{y}_i - y_i(t)]}{\sum_i [\overline{x}_i - x_i(t)]/s_i + \sum_i [\overline{y}_i - y_i(t)]/l_i}\right] = \Delta C(t),$$

или

$$\gamma = \frac{\Delta C(t)}{\Delta A(t)} \Bigg/ \left(1 + \frac{\sum_k w_k^1 \sum_i a_{ik}[\overline{x}_i - x_i(t)] + \sum_k w_k^2 \sum_i \beta_{ik}[\overline{y}_i - y_i(t)]}{\sum_i [\overline{x}_i - x_i(t)]/s_i + \sum_i [\overline{y}_i - y_i(t)]/l_i}\right). \qquad (6.9)$$

Подставляя γ, вычисленное по формуле (6.9), в (6.5) и (6.6), получим распределения капиталовложений $\{\overline{u}_i(t)\}$ и $\{\overline{v}_i(t)\}$ по отраслям основного производства согласно опорному плану распределения капиталовложений, который позволяет выйти на запланированный уровень к концу периода длительного планирования T одновременно по всем отраслям. Подставляя значения $\overline{u}_i(t)$ и $\overline{v}_i(t)$ в выражения (6.7), получим объем капиталовложений, требуемых для вспомогательного производства на мелиорируемых и немелиорируемых землях, а также время T, необходимое для достижения планируемого уровня $\bar{x}$, $\bar{y}$ при задаваемом ежегодном поступлении капитала $\Delta C(t)$.

При формировании опорного плана развития сельскохозяйственного производства по отраслям учитываются удельные затраты $1/s_i$, $1/l_i$, средние для соответствующей отрасли. Однако величина средних затрат существенно зависит от самого плана распределения капиталовложений, точнее от плана распределения капиталовложений на более низких уровнях иерархической системы управления. В случае сельскохозяйственного производства она будет зависеть от того, какая доля капиталовложений $u_i(v_i)$, направляемых на развитие отрасли i, будет направлена на развитие этой отрасли в конкретном сельскохозяйственном регионе. Нам будет удобно под регионом понимать такой географический район, для которого удельные затраты на производство любого вида сельскохозяйственной продукции на мелиорируемых (немелиорируемых) землях можно без большой потери общности считать одинаковыми для всех сельскохозяйственных центров этого района. Таким образом, под регионом понимается район примерно с одинаковыми условиями для производства сельскохозяйственной продукции. Регионы будем обозначать индексом $j \in \{1, ..., j, ..., m\}$.

Пусть x^0_i (y^0_j) — начальное количественное состояние отрасли i в регионе j. Предположим заданным перспективный план развития всех регионов по отраслям сельскохозяйственного производства на мелиорируемых и немелиорируемых землях:

$$\bar{x}_i = (\bar{x}_{i1}, ..., \bar{x}_{ij}, ..., \bar{x}_{im}),\ \bar{y}_i = (\bar{y}_{i1}, ..., \bar{y}_{ij}, ..., \bar{y}_{im}),$$
$$i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., m,$$

определенный на конец того же периода длительного планирования, на который определен перспективный план $x = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$, $y = (\bar{y}_1, ..., \bar{y}_n)$ по отраслям. Очевидно, имеют место соотношения

$$\sum_j \bar{x}_{ij} = \bar{x}_i,\ \sum_j \bar{y}_{ij} = \bar{y}_i,\ \bar{x}_{ij} \geqslant 0,\ \bar{y}_{ij} \geqslant 0,\ i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., m.$$

Сформируем опорные планы распределения капиталовложений внутри каждого региона j по всем отраслям на мелиорируемых и немелиорируемых землях:

$$\bar{u}_{ij}(t) = \frac{[\bar{x}_{ij} - x_{ij}(t)]/s_{ij}}{\sum_j [\bar{x}_{ij} - x_{ij}(t)]/s_{ij}} \bar{u}_i(t), \qquad (6.10)$$

$$\bar{v}_{ij}(t) = \frac{[\bar{y}_{ij} - y_{ij}(t)]/l_{ij}}{\sum_j [\bar{y}_{ij} - y_{ij}(t)]/l_{ij}} \bar{v}_i(t), \qquad (6.11)$$

где $^1/s_{ij}$ и $^1/l_{ij}$ — удельные затраты на производство единицы сельскохозяйственной продукции типа i на мелиорируемых и немелиорируемых землях региона j.

Покажем (см. [18]), что средние удельные затраты на производство единицы сельскохозяйственной продукции $^1/s_i$ ($^1/l_i$) на мелиорируемых (немелиорируемых) землях вычисляются через региональные затраты $^1/s_{ij}$ ($^1/l_{ij}$) по формулам

$$\frac{1}{s_i} = \frac{\sum_j [\overline{x_{ij}} - x_{ij}(t)]/s_{ij}}{\sum_j [\overline{x_{ij}} - x_{ij}(t)]}, \tag{6.12}$$

$$\frac{1}{l_i} = \frac{\sum_j [\overline{y_{ij}} - y_{ij}(t)]/l_{ij}}{\sum_j [\overline{y_{ij}} - y_{ij}(t)]}. \tag{6.13}$$

Действительно, имеем $\Delta x_i(t) = \sum_j \Delta x_{ij}(t)$, откуда получаем $s_i\overline{u_i}(t) = \sum_j s_{ij}\overline{u_{ij}}(t)$, или

$$s_i\overline{u_i}(t) = \sum_j s_{ij} \frac{[\overline{x_{ij}} - x_{ij}(t)]/s_{ij}}{[\overline{x_{ij}} - x_{ij}(t)]/s_{ij}} \overline{u_i}(t).$$

Тогда

$$s_i = \frac{\sum_j [\overline{x_{ij}} - x_{ij}(t)]}{\sum_j [\overline{x_{ij}} - x_{ij}(t)]/s_{ij}}$$

и окончательно

$$\frac{1}{s_i} = \frac{\sum_j [\overline{x_{ij}} - x_{ij}(t)]/s_{ij}}{\sum_j [\overline{x_{ij}} - x_{ij}(t)]}.$$

Формула (6.12) доказана, аналогично доказывается и формула (6.13). Однако формулы (6.12), (6.13) в действительности не дают полных средних затрат на производство единицы сельскохозяйственной продукции, поскольку не учитываются затраты, связанные с необходимостью строительства новых сельскохозяйственных объектов, нормативы которых различны для различных регионов.

Как мы уже видели, с приращением производства сельскохозяйственной продукции типа i в регионе j связано строительство новых сельскохозяйственных объектов. Обозначим через α_{ik}^j для мелиорируемых и β_{ik}^j для немелиорируемых земель число объектов типа k, которые необходимо построить при увеличении производства i-й сельскохозяйственной продукции на единицу в регионе j. Обозначим стоимость строительства одного объекта типа k для мелиорируемых земель через f_k^1 и для немелиорируемых — f_k^2 (для простоты не учитываем зависимость стоимости строительства от региона j).

Таким образом, увеличение производства сельскохозяйственной продукции типа i влечет дополнительные затраты

$$\sum_k \sum_j f_k^1 \alpha_{ik}^j \Delta x_{ij}(t) = \sum_k \sum_j f_k^1 \alpha_{ik}^j s_{ij}\overline{u}_{ij}(t),$$

$$\sum_k \sum_j f_k^2 \beta_{ik}^j \Delta y_{ij}(t) = \sum_k \sum_j f_k^2 \beta_{ik}^j l_{ij}\overline{v}_{ij}(t),$$

где $\{\overline{u}_{ij}(t)\}$, $\{\overline{v}_{ij}(t)\}$ — опорный план распределения капиталовложений по отраслям региона j, вычисленный по формулам (6.10), (6.11).

Таким образом, реальные затраты на производство единицы сельскохозяйственной продукции типа i оказываются равными на мелиорируемых землях (в год t)

$$1/s_i' = \left[\sum_j \overline{u}_{ij}(t) + \sum_k \sum_j f_k^1 \alpha_{ik}^j s_{ij}\overline{u}_{ij}(t)\right] / \Delta x_i(t),$$

или

$$1/s_i' = \left[\overline{u_i}(t) + \sum_k \sum_j f_k^1 \alpha_{ik}^j s_{ij}\overline{u}_{ij}(t)\right] / \sum_j s_{ij}\overline{u}_{ij}(t).$$

Подставляя выражения для $\overline{u}_{ij}$, $\overline{v}_{ij}$ из (6.10), (6.11), получим

$$1/s_i' = \frac{\sum_j [\overline{x_{ij}} - x_{ij}(t)]/s_{ij}}{\overline{x_i} - x_i(t)} + \frac{\sum_j [\overline{x_{ij}} - x_{ij}(t)] \sum_k f_k^1 \alpha_{ik}^j}{\overline{x_i} - x_i(t)}$$

и аналогично на немелиорируемых землях

$$1/l_i' = \frac{\sum_j [\overline{y_{ij}} - y_{ij}(t)]/l_{ij}}{\overline{y_i} - y_i(t)} + \frac{\sum_j [\overline{y_{ij}} - y_{ij}(t)] \sum_k f_k^2 \beta_{ik}^j}{\overline{y_i} - y_i(t)}.$$

Тогда суммарные затраты для достижения нормативного уровня по отрасли i будут равны (на отрезке $[t_0, T]$)

$$(\overline{x}_i - x_i^0)/s_i' + (y_i - y_i^0)/l_i' =$$

$$= \sum_j (\overline{x}_{ij} - x_{ij}^0)\left(\sum_k f_k^1 \alpha_{ik}^j + 1/s_{ij}\right) +$$

$$+ \sum_j (\overline{y}_{ij} - y_{ij}^0)\left(\sum_k f_k^2 \beta_{ik}^j + 1/l_{ij}\right),$$

по всем отраслям

$$\sum_i \sum_j (\overline{x}_{ij} - x_{ij}^0)\left(\sum_k f_k^1 \alpha_{ik}^j + s_{ij}^{-1}\right) +$$

$$+ \sum_i \sum_j (\overline{y}_{ij} - y_{ij}^0)\left(\sum_k f_k^2 \beta_{ik}^j + l_{ij}^{-1}\right). \qquad (6.12')$$

Формула (6.12′) показывает зависимость суммарных затрат от распределения планового задания по производству сельскохозяйственной продукции на мелиорируемых и немелиорируемых землях на конец периода длительного планирования по регионам. Естественно поставить задачу построения такого перспективного плана производства продукции по регионам, который бы минимизировал при указанных плановых заданиях по отраслям i суммарные затраты, а следовательно, и минимизировал время достижения планируемых показателей. Это приводит нас к следующей задаче.

Найти минимум выражения

$$\sum_i \sum_j (\overline{x}_{ij}-x^0_{ij})\Big(\sum_k f^1_k \ \alpha^i_{ik} + s^{-1}_{ij}\Big) +$$

$$+\sum_i \sum_j (\overline{y}_{ij}-y^0_{ij})\Big(\sum_k f^2_k \ \beta^i_{ik} + l^{-1}_{ij}\Big) \qquad (6.13')$$

при условиях

$$\sum_j \overline{x}_{ij}=\overline{x}_i,\ \overline{x}_{ij}\geqslant 0,\ \sum_j \overline{y}_{ij}=\overline{y}_i,\ \overline{y}_{ij}\geqslant 0,$$

$$\alpha^1_{ij}\leqslant\overline{x}_{ij}\leqslant\alpha^2_{ij},\ \beta^2_{ij}\leqslant\overline{y}_{ij}\leqslant\beta^2_{ij},$$

$$\sum_i f_i\,\overline{y}_{ij}\leqslant B_j,\ \sum_i g_i\overline{x}_{ij}\leqslant\Lambda_j \qquad (6.14)$$

(переменными в этой задаче являются величины $\{\overline{y}_{ij}\}$, $\{\overline{x}_{ij}\}$, $i=1, ..., m$, $j=1, ..., n$). Последние четыре неравенства учитывают ограниченные возможности региона в производстве сельскохозяйственной продукции.

Решение задачи (6.13′), (6.14) при заданном перспективном плане развития сельскохозяйственного производства по отраслям $\mathbf{x}=(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$; $\mathbf{y}=(\overline{y}_1, ..., \overline{y}_n)$ дает оптимальные плановые задания по производству всех видов сельскохозяйственной продукции по каждому региону.

Используя предыдущее построение, попытаемся предложить некоторую грубую методику определения допустимости перспективного плана развития сельского хозяйства с точки зрения сохранения существующего в данном изолированном районе экологического равновесия. При планировании развития таких районов обычно определяют некоторые основные показатели (показатели по основным отраслям) $\overline{\mathbf{z}}=(\overline{z}_1, ..., \overline{z}_i, ..., \overline{z}_n)$. Приближение к данным показателям, как мы уже видели в предыдущих параграфах, требует в ряде случаев развития материальных и трудовых ресурсов, а также всевозможных сопутствующих вспомогательных видов деятельности, имеющих второстепенный характер и поэтому обычно не учитываемых в перспективном плане $\overline{\mathbf{z}}$. В то же время требование сохранения экологического равновесия естественным образом накладывает определенные ограничения на развитие материальных и трудовых ресурсов. Таким образом, план $\overline{\mathbf{z}}$ может быть допустимым перспективным планом развития, если в процессе его достижения не происходит превышения ограничений по материальным и трудовым ресурсам.

Для небольшого изолированного района удельные затраты на развитие $^1/s_i$ можно считать постоянными. Пусть $z^0 = (z_1^0, \ldots$ $\ldots, z_i^0, \ldots, z_n^0)$ — начальное состояние тех основных отраслей, по которым заданы показатели в перспективном плане развития $\bar{z}$. Хозяйство района ежегодно для своего развития получает некоторый объем капиталовложений $C(t)$. Удельные затраты в каждой отрасли известны и равны $^1/s_i$. Выделяя некоторую долю $\alpha C(t)$ на развитие основных отраслей, мы можем построить опорный план развития хозяйства района

$$\bar{u}_i(t) = \frac{[\bar{z}_i - z_i(t)]s_i^{-1}}{\sum\limits_k [\bar{z}_k - z_k(t)]s_k^{-1}} \alpha C(t).$$

По данному опорному плану $u_i(t)$ рассчитаем ресурсы, требуемые для его реализации, а также объем капиталовложений, необходимых для развития вспомогательных отраслей.

Пусть H_k^1 — объем ввозимых извне ресурсов типа k, имеющихся в наличии в год t, который может быть использован на развитие; β_{ik} — объем ресурсов типа k, необходимых для развития отрасли i на единицу; α_{ij} — количественный рост j-й вспомогательной отрасли при росте отрасли i на одну единицу; $^1/l_j$ — удельное капиталовложение, необходимое для роста j-й вспомогательной отрасли; γ_{jk} — объем ресурсов типа k, необходимых для развития вспомогательной отрасли j на единицу; $v_k(t)$ — капиталовложение на развитие отрасли, производящей ресурс типа k в год t; $^1/\mu_k$ — удельное капиталовложение, необходимое для роста производства ресурсов на единицу; $\omega_j(t)$ — капиталовложение на развитие j-й вспомогательной отрасли в год t и $y_j(t)$ — количественное состояние j-й вспомогательной отрасли в год t. Так же, как и раньше, можно показать, что наибольшая скорость движения из состояния z^0 в состояние $\bar{z}$ достигается при выделении на развитие основных отраслей капиталовложения $\alpha^* C(t)$, где α^* определяется из условия $\alpha^* =$ $= \max \alpha$ при условиях *

$$\sum_i \Delta z_i \beta_{ik} + \sum_j \Delta y_j \gamma_{jk} \leqslant H_k^1 + \mu_k v_k(t),$$

$$\sum_i \Delta z_i \alpha_{ij} \leqslant l_j \omega_j(t) = \Delta y_j(t), \quad \sum_k v_k(t) + \sum_j \omega_j(t) \leqslant C(t) - \alpha C(t),$$

$$v_k(t) \geqslant 0, \ \omega(t) \geqslant 0, \ j = 1, \ldots, m, \ k = 1, \ldots, n,$$

или, что то же самое, max α при условии

* Считаем, что развитие отраслей, производящих ресурсы, не требует развития ресурсов и вспомогательных отраслей.

$$\sum_i s_i\bar{\bar{u}}_i(t)\,\beta_{ik}+\sum_j l_j\omega_j(t)\,\gamma_{jk}\leqslant H^1_k+\mu_k v_k(t),$$

$$\sum_i s_i\overline{u_i}(t)\alpha_{ij}\leqslant l_j\omega_j(t), \tag{6.15}$$

$$\sum_k v_k(t)+\sum_j \omega_j(t)\leqslant C(t)-\alpha C(t),$$

$$v_k(t)\geqslant 0,\ \omega_j(t)\geqslant 0,\ j=1,\ldots,m,\ k=1,\ldots,n.$$

Решение задачи (6.15) дает опорный план развития основных отраслей $\bar{\bar{u}}_j(t)=\alpha^*\overline{u_j}(t)$, капиталовложение $\sum_k \overline{v_k}(t)$ на развитие производства ресурсов и капиталовложение $\sum_j \overline{\omega}_j(t)$, необходимое для развития вспомогательных отраслей.

Пусть H_k — количественное состояние производимого в регионе ресурса типа k в год t; $y_j(t)$ — количественное состояние вспомогательной отрасли j. После освоения капиталовложений $\overline{v_k}(t)$, $\overline{\omega}_j(t)$ по (6.15) получим новое состояние $H_k(t+1)=$ $=H_k(t)+\mu_k\overline{v_k}(t)$. Величины $H_k(t)$ могут быть рассчитаны для всех k, t.

Пусть T — момент достижения основными отраслями планируемого состояния $\bar{z}$; величины L_k, $k=1, \ldots, n$, задают ограничения на ресурсы данного региона; начальное состояние $\mathbf{z}^0$ основных отраслей не нарушает экологического равновесия. Тогда перспективный план развития основных отраслей $\bar{\mathbf{z}}$ называется допустимым, если не существует такого $\bar{t}$, $\bar{t}\in\{0, 1, \ldots, T\}$, и такого индекса k_0, что $H_{k_0}(\bar{t})\geqslant L_{k_0}$.

Последнее неравенство позволяет просто сравнивать различные перспективные планы с точки зрения их воздействия на существующее экологическое равновесие в регионе.

§ 3. О СООТНОШЕНИИ ОТРАСЛЕЙ ЖИВОТНОВОДСТВА И РАСТЕНИЕВОДСТВА

Сельскохозяйственное производство делится на животноводство и растениеводство. В данном параграфе мы условно под отраслью сельскохозяйственного производства будем понимать выращивание сельскохозяйственной культуры одного вида или разведение одного вида домашних животных.

Для определенности положим, что первые k отраслей сельского хозяйства относятся к животноводству, а остальные — к растениеводству. Для n-мерного вектора $w=(w_1, \ldots, w_n)$ будем использовать обозначения: $w=(w^1, w^2)$, где $w^1=(w_1, w_2, \ldots, w_k)$, а $w^2=(w_{k+1}, \ldots, w_n)$. Тогда основные векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ (см. § 1 настоящей главы), характеризующие состояние сельскохозяйственного производства, записываются в виде $\mathbf{z}=(\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2)$, $\mathbf{y}=(\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2)$, $\mathbf{x}=(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$, где $\mathbf{z}^1$, $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{y}^1$ — состояние отраслей животноводства, а $\mathbf{z}^2$, $\mathbf{x}^2$, $\mathbf{y}^2$ — состояние отраслей растениеводства. Можно считать, что перспективный план развития отраслей растениеводства по части, идущей на потребление населением, определяется по формуле $\overline{\mathbf{x}}^2=\mathbf{k}F(T)$, где $F(T)$ — прогнозируемое население страны на конец периода длительного планирования, а $\mathbf{k}$ — некоторый вектор той же размерности, что и $\mathbf{x}^2$. Вектор $\mathbf{k}$ характеризует норму потребления населением продуктов растениеводства. В наших условиях вектор $\mathbf{k}$ можно считать постоянным, так как на сегодня потребность населения в продуктах растениеводства удовлетворяется полностью.

Наиболее важной задачей является резкое увеличение производства животноводческих отраслей и, в частности, увеличение поголовья различных видов домашних животных.

Естественно, что решение этой задачи должно сопровождаться ростом производства в отраслях растениеводства, продукция которых используется в животноводстве. При этом надо иметь в виду ограниченность материальных и трудовых ресурсов, а также возможностей в производстве сельскохозяйственной продукции для конкретных сельскохозяйственных районов. Указанные ограничения можно сформулировать математически.

Между отраслями животноводства и остальными отраслями существуют балансовые соотношения. Пусть N_j, $j=1,\dots,l$, — основные питательные вещества, содержащиеся в продуктах растениеводства, используемых в животноводстве. Пусть β_{ij} — количество питательных веществ типа j, необходимых в i-й отрасли животноводства (для i-го вида животного) в единицу времени; γ_{ij} — количество питательных веществ типа j, содержащихся в i-м виде продукции растениеводства. Тогда должно иметь место следующее соотношение:

$$\sum_i \overline{x}_i^1\,\beta_{ij}=\sum_i \overline{y}_i^2\,\gamma_{ij}.$$

Пусть $\{\overline{z}_{ik}\}$, $\{\overline{x}_{ik}\}$, $\{\overline{y}_{ik}\}$ — перспективный план производства i-го вида сельскохозяйственной продукции по сельскохозяйственному региону k. Тогда очевидно, что $y_i^r=\sum_k y_{ik}^r$, $x_i^r=\sum_k x_{ik}^r$, $r=1, 2$.

Пусть c_{ik} — затраты на увеличение производства по i-й отрасли сельского хозяйства в k-м регионе на одну единицу; a_{ik}, b_{ik} — верхние и нижние пределы возможностей для производства i-го вида сельскохозяйственной продукции в регионе k.

Для определения оптимальной структуры сельскохозяйственного производства можно сформулировать следующую задачу:

$$\max\sum_i a_i\overline{x}_i^1 \qquad (6.16)$$

при условиях

$$\sum_i \overline{x}_i^1 \beta_{ij} = \sum_i \overline{y}_i^2 \gamma_{ij},\ j=1, ..., l, \qquad (6.17)$$

$$\overline{y}_i^2 = \sum_k \overline{y}_{ik}^2,\ \overline{x}_i^1 = \sum_k \overline{x}_{ik}^1,$$

$$\sum_k c_{ik}(z_{ik}^2(t) - \overline{z}_{ik}^2) \leqslant A,$$

$$\overline{z}_{ik}^2 = \overline{x}_{ik}^2 + \overline{y}_{ik}^2,\ a_{ik} \leqslant z_{ik}^2 \leqslant b_{ik},\ \overline{y}_{ik} \geqslant 0,\ \overline{x}_{ik} \geqslant 0.$$

Здесь переменными являются величины $\overline{x}_{ik}^1$, $\overline{y}_{ik}^1$, $\overline{z}_{ik}$, $\overline{x}_{ik}^2$, $\overline{y}_{ik}^2$, $\overline{z}_{ik}^2$; $z_{ik}(t)$ — состояние отрасли i в регионе k в момент t; α_i могут иметь смысл ценностей i-го вида животных или средний убойный вес одного домашнего животного i-го вида; A — объем капиталовложений, выделяемых на развитие. В последнем случае функционал (6.17) означает суммарный убойный вес по всем видам животных.

Однако могут быть и другие показатели эффективности отраслей животноводства, что приводит к другим подходам для определения оптимальной структуры сельскохозяйственного производства.

Решение задачи (6.16) при условиях (6.17) определяет лишь перспективное оптимальное состояние отраслей сельскохозяйственного производства по регионам. Для достижения этого состояния из текущего состояния $\{z_{ik}(t)\}$ может потребоваться значительное время, которое определяется ежегодными суммарными капиталовложениями в сельское хозяйство, при этом само развитие может происходить согласно опорному плану, обсуждение которого подробно проводилось в предыдущих параграфах этой главы. Вместе с тем на практике такой ход развития не всегда бывает приемлемым из-за необходимости скорейшего решения задач, связанных с увеличением производства, в первую очередь мясных продуктов, идущих на потребление населением. Это зачастую приводит к необходимости развития скороспелых отраслей животноводства, таких, как свиноводство и птицеводство, и может привести к нарушению оптимального соотношения отраслей в конце периода длительного планирования. На это обстоятельство обратил внимание В. И. Зубов в работе [16]. Дело в том, что развитие скороспелых отраслей животноводства требует больших материальных затрат.

Остановимся подробнее на возможных последствиях ускоренного развития свиноводства.

Главная ценность свиньи для современного агропроизводства заключается в высокой эффективности использования корма в смысле превращения его в мясо. Прирост энергетической ценности мяса в расчете на одну калорию полученного корма у свиньи превосходит этот показатель для крупного рогатого скота, овец и домашней птицы. Вместе с тем стоимость кормов в свиноводческих хозяйствах довольно высока и составляет от 55 до 65% всех производственных расходов. Стоимость кормов, в свою очередь, зависит от доступности и наличия кормов в данном регионе, потребности в этих продуктах людей и домашних животных. Пищеварительная система свиньи сходна с человеческой, это ведет к сходству в пищевых потребностях, поэтому, развивая свиноводство, мы автоматически вступаем в конкурентные отношения с населением региона за продукты питания. Острота вопроса зависит от того, насколько велика потребность в тех или иных продуктах у населения региона и может ли регион обеспечить всех потребителей или необходим ввоз продуктов питания извне. Именно необходимостью использования пищевого белка в корм и объясняется сравнительно невысокий процент свинины в общем объеме производства продукции животноводства в большинстве развитых стран. Показатель

$$k = \frac{\text{численность населения страны}}{\text{поголовье свиней}}$$

для развитых стран принимает следующие значения: Аргентина — 27,9/3,5; Австралия — 14,9/2,5; Финляндия — 4,8/1,1; Италия — 57,4/9,1; Япония — 118/9,4; Мексика — 64,4/12,4; СССР — 268,8/73,5; США — 226,5/64,5.

В некоторых странах этот показатель довольно мал: Дания — 5,1/9,6; Венгрия — 10,8/8,2; ГДР — 16,8/12,9; Новая Зеландия — 3,1/2,9. Это объясняется как небольшим населением (Дания, Новая Зеландия), так и активным импортом кормов (ГДР, Венгрия), что для больших стран практически трудноосуществимо.

Потребность в белке у свиньи в 5 раз выше, чем у человека, у кур в 5 раз меньше, чем у человека. В. И. Зубов [16] предлагает оценивать способность перерабатывать клетчатку, создавая из нее белок, объемом части пищеварительного тракта животных, в котором происходит размножение бактерий, находящихся в симбиозе с организмом хозянна. Для коровы этот объем можно принять равным 100 л, для овец н коз — 10 л, для лошади — 30 л. В [16] предлагается следующий критерий для оценки эффективности отраслей животноводства.

Пусть x_1^1 — число крупного рогатого скота, имеющегося в сельском хозяйстве; x_2^1 — число лошадей и x_3^1, x_4^1 — чнсло овец и коз. Тогда общий объем, в котором развивается активная бактериальная среда, представится выражением $100\,x_1^1 + 30\,x_2^1 + {} + 10(x_3^1 + x_4^1)$.

Если F — население страны, а x_5^1 и x_6^1 — соответственно число свиней и кур, то число потребителей может быть представлено суммой $F+5x_5^1+x_6^1$ /5 (одна свинья потребляет в пять раз больше белка, чем человек, а одна кура — в пять раз меньше). Показатель

$$V=50\ \frac{100x_1^1+30x_2^1+10(x_3^1+x_4^1)}{5F+25x_5^1+x_6^1} \qquad (6.18)$$

является объективной характеристикой правильности соотношения отраслей животноводства.

Можно в качестве функционала в задаче (6.16), (6.17) взять показатель (6.18) или некоторый функционал, учитывающий этот показатель. При этом, по-видимому, предложенная нами в начале данного параграфа модель при реальных подсчетах приведет к близким результатам, поскольку максимизация показателя эффективности V как раз и предполагает наиболее рациональное с точки зрения затрат производство белков животного происхождения.

§ 4. ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗВИТИЯ САХАРНОГО КОМПЛЕКСА

В данном и последующих параграфах мы остановимся более подробно на проблеме управления развитием сахарного комплекса, имея в виду планирование производства сахарного тростника, организацию уборочных работ, организацию транспорта, развитие мощностей сахарных заводов и других сопутствующих видов деятельности. Рассмотренная задача может быть использована при исследовании вопросов планирования развития любой массовой сельскохозяйственной культуры: зерна, риса, хлопка, льна, сахарной свеклы и др.

Результаты этого и последующих параграфов данной главы получены совместно с Р. Родригесом из университета «Ориенте» (Куба).

Сахарный комплекс включает в себя заводы по производству сахара; мощности по производству сопутствующих продуктов; мощности по транспортировке и очистке сахарного тростника; сельскохозяйственный сектор, отвечающий за посадку сахарного тростника, культивацию земли и рубку; сектор ремонта, отвечающий в периоды отсутствия сырья за разработку, сборку и ремонт оборудования на сахарных заводах. Для обеспечения развития производства сахара необходимо сбалансированное развитие всех секторов и направлений сахарного комплекса. Необходимо также создать условия для роста производства ресурсов, обеспечивающих развитие секторов и направлений комплекса. В качестве основного показателя работы комплекса мы берем количество сахара, произведенное в комплексе за год. Все остальные показатели, такие, как объемы производства сопуствующих продуктов, мощности по транспортировке и чистке, показатели сельскохозяйственного сектора,

сектора ремонта и производства дополнительных ресурсов, необходимых для развития, вычисляются путем умножения основного показателя на некоторые коэффициенты (см. [40, 56]).

На конец периода длительного планирования определяется нормативное задание по производству сахара, дифференцированное по регионам и сортам сахарного тростника; известны суммарные ежегодные капиталовложения, выделяемые на развитие сахарного комплекса. Задача заключается в построении такого плана распределения капиталовложений по регионам и видам сахарного тростника, который обеспечивал бы одновременное достижение нормативных заданий по производству сахара и сбалансированное развитие всех секторов и направлений деятельности сахарного комплекса.

Введем следующие обозначения: i — регионы производства сахара; j — виды сахарного тростника; X — объем производства сахара (т/г), планируемый на конец периода длительного планирования (20—25 лет); $\overline{x}_{ij}$ — объем производства сахара, планируемый на конец периода длительного планирования в регионе i из j-го вида сахарного тростника; x_{ij} — объем производства сахара в регионе i из j-го вида сахарного тростника в год t; l — виды сопутствующих работ или направлений деятельности. Сюда относятся: виды сопутствующих продуктов; направления работ по посадке, очистке, сборке и транспортировке сахарного тростника, культивации земли, по разборке, сборке и ремонту оборудования сахарных заводов и др.; $\overline{y}_l$ — объем l-й сопутствующей работы или направления деятельности, планируемой на конец периода длительного планирования; $y_l(t)$ — объем l-й сопутствующей работы или направления деятельности в год t; $1/\lambda_{ij}$ — удельные затраты на увеличение мощностей по производству сахара на одну единицу в регионе i из j-го вида сахарного тростника; $1/\mu_l$ — удельные затраты на увеличение мощностей по выполнению l-й сопутствующей работы или направления деятельности сахарного комплекса; $1/\nu_k$ — удельные затраты на увеличение мощностей по производству ресурса вида k; $C(t)$ — суммарный объем капиталовложений, вкладываемых в год t на развитие сахарного комплекса; $\omega_k(t)$ — количество ресурса типа k, имеющееся в наличии в год t, которое может быть использовано для потребностей развития сахарного комплекса; $u_{ij}(t)$ — капиталовложения, направляемые в год t на развитие производства сахара в регионе i из j-го вида сахарного тростника; $u'_l(t)$ — капиталовложения, направляемые в год t на развитие сопутствующих работ или направлений деятельности; $v_k(t)$ — капиталовложения, направляемые в год t на развитие производства ресурса вида k, необходимого для развития сахарного комплекса.

Мы считаем, что развитие производства сахара, сопутствующих работ или направлений деятельности и используемых ресурсов происходит пропорционально объему капиталовложений, т. е. имеют место соотношения

$$x_{ij}(t+1)=x_{ij}(t)+\lambda_{ij}u_{ij}(t), \tag{6.19}$$

$$y_l(t+1)=y_l(t)+\mu_l u_l'(t),$$

$$w_k(t+1)=w_k(t)+\nu_k v_k(t),$$

или

$$\Delta x_{ij}(t)=\lambda_{ij}u_{ij}(t),\ \Delta y_l(t)=\mu_l u_l'(t), \tag{6.20}$$

$$\Delta w_k(t)=\nu_k v_k(t).$$

Пусть $\beta(t)>0$ — некоторый коэффициент, вычисление которого мы проведем позднее. Распределим капиталовложения $\beta(t)C(t)$ между регионами и видами сахарного тростника согласно опорному плану (см. § 1, 2):

$$\bar{u}_{ij}(t)=\frac{[\bar{x}_{ij}-x_{ij}(t)]/\lambda_{ij}}{\sum\limits_i\sum\limits_j [\bar{x}_{ij}-x_{ij}(t)]/\lambda_{ij}}\beta(t)C(t). \tag{6.21}$$

Для сбалансированного развития сахарного комплекса необходимо также обеспечить развитие сопутствующих работ или направлений деятельности и ресурсов, необходимых для развития сахарного комплекса.

Объемы сопутствующих работ или направлений деятельности определяются через объемы производства сахара по следующим формулам:

$$\bar{y}_l=g_l x,\ y_l(t)=g_l\Big(\sum_i\sum_j x_{ij}(t)\Big)=g_l x(t).$$

Полагая $\Delta x(t)=\sum\limits_i\sum\limits_j \Delta x_{ij}(t)$, имеем

$$\Delta y_l(t)=g_l\Delta x(t)=g_l\Big(\sum_i\sum_j \Delta x_{ij}(t)\Big)=g_l\Big(\sum_i\sum_j \lambda_{ij}\bar{u}_{ij}(t)\Big),$$

или, подставляя выражение для опорного плана (6.21), получаем

$$\Delta y_l(t)=\frac{\sum\limits_i\sum\limits_j [\bar{x}_{ij}-x_{ij}(t)]}{\sum\limits_i\sum\limits_j [\bar{x}_{ij}-x_{ij}(t)]/\lambda_{ij}}\beta(t)C(t)g_l.$$

Введем обозначение

$$\bar{\lambda}(t)=\frac{\sum\limits_i\sum\limits_j [\bar{x}_{ij}-x_{ij}(t)]}{\sum\limits_i\sum\limits_j [\bar{x}_{ij}-x_{ij}(t)]/\lambda_{ij}}. \tag{6.22}$$

Тогда $\Delta x(t)=\bar{\lambda}(t)\beta(t)\,C(t)$ и

$$\Delta y(t)=g_l\bar{\lambda}(t)\,\beta(t)\,C(t).$$

Отсюда получаем выражение для капиталовложений

$$u_l'(t) = (g_l/\mu_l)\overline{\lambda}(t)\beta(t)C(t). \tag{6.23}$$

Рассчитаем теперь ресурсы, необходимые для реализации опорного плана развития (6.21). Потребность в ресурсе вида k равна $\Delta x(t)\gamma_k$. При этом дополнительные потребности в ресурсе вида k равны $\Delta x(t)\gamma_k - \omega_k(t) = \Delta\omega_k(t)$. Затраты на производство ресурса типа k, покрывающие дополнительные потребности:

$$\Delta\omega_k(t)\,\frac{1}{\nu_k} = \frac{\Delta x(t)\gamma_k - \omega_k(t)}{\nu_k}.$$

Суммарные затраты на развитие производства ресурсов всех типов, обеспечивающих реализацию опорного плана (6.21), равны

$$S = \sum_k \left[\frac{\gamma_k}{\nu_k}\overline{\lambda}(t)\beta(t)C(t) - \frac{\omega_k(t)}{\nu_k}\right]. \tag{6.24}$$

Заметим, что капиталовложения по направлениям деятельности сахарного комплекса зависят теперь от одного неизвестного параметра $\beta(t)$. Для его определения потребуем, чтобы суммарные затраты на развитие сахарного комплекса в год t были равны объему капиталовложений $C(t)$, выделяемых для этой цели, т. е. капиталовложения на развитие производства сахара, развитие сопутствующих работ или направлений деятельности, а также недостающих ресурсов, в сумме составили бы $C(t)$. Тогда получим

$$\sum_i \sum_j \overline{u}_{ij}(t) + \sum_l u_l'(t) + \sum_k \left[\frac{\gamma_k}{\nu_k}\overline{\lambda}(t)\beta(t)C(t) - \frac{\omega_k(t)}{\nu_k}\right] = C(t).$$

Поскольку $\sum\limits_i \sum\limits_j \overline{u}_{ij}(t) = \beta(t)C(t)$ (см. (6.21)), то будем иметь

$$\beta(t)C(t) + \sum_l \frac{g_l}{\mu_l}\overline{\lambda}(t)\beta(t)C(t) + \sum_k \frac{\gamma_k}{\nu_k}\overline{\lambda}(t)\beta(t)C(t) = C(t) + \sum_k \frac{\omega_k(t)}{\nu_k},$$

$$\beta(t)C(t)\left[1 + \overline{\lambda}(t)\left(\sum_l \frac{g_l}{\mu_l} + \sum_k \frac{\gamma_k}{\nu_k}\right)\right] = C(t) + \sum_k \frac{\omega_k(t)}{\nu_k}.$$

Отсюда

$$\beta(t) = \frac{C(t) + \sum\limits_k \frac{\omega_k(t)}{\nu_k}}{C(t)\left[1 + \overline{\lambda}(t)\left(\sum\limits_l \frac{g_l}{\mu_l} + \sum\limits_k \frac{\gamma_k}{\nu_k}\right)\right]}, \tag{6.25}$$

где $\overline{\lambda}(t)$ определяется по формуле (6.22). Подставляя выражение (6.25) в (6.21), (6.23), (6.24), получаем план распределения капиталовложений, определенный на период длительного планирования, по всем видам деятельности сахарного комплекса.

Сосредоточим внимание на построении математической модели планирования развития мощностей сахарных заводов. Это развитие необходимым образом следует из реализации программы увеличения производства сахара. Мы несколько изменим предыдущую постановку задачи, придавая новый смысл основополагающим коэффициентам модели, которые в данном случае будут связываться с производством сахарного тростника (но не сахара) по регионам и видам. В то же время количество произведенного сахара в год будет оставаться основным показателем развития. Это изменение модели необходимо, поскольку производственные мощности сахарных мельниц и содержание сахара в сахарном тростнике зависят от типа сахарного тростника и климатических условий, которые различны в различных регионах.

Поясним используемую терминологию. Производство (выращивание) сахарного тростника осуществляется в гранхах (сельскохозяйственных фермах). В большинстве случаев продукция гранхи перерабатывается на одном сахарном заводе, однако бывают исключения, когда она перерабатывается на нескольких сахарных заводах. Производство сахарного тростника внутри гранхи распределяется по блокам, каждый блок (14—16 га) представляет собой совокупность полей с одинаковыми условиями обработки. Гранха может состоять из нескольких сотен блоков. В каждой гранхе имеется от 12 до 18 пунктов приемки. Каждый пункт приемки связан с заводом единственным видом транспорта — железной дорогой.

Здесь и в дальнейшем в этой главе мы будем для простоты отождествлять сельскохозяйственный регион с блоком. Для построения математической модели развития сахарных заводов необходимо решить задачу определения оптимальной структуры производства сахарного тростника по блокам и видам, а также задачу оптимального распределения капиталовложений на производство сахарного тростника и сопутствующей продукции с целью достижения оптимальной структуры. Поскольку эти задачи существенно не отличаются от ранее рассмотренной, то остановимся лишь на основных моментах.

Пусть $\overline{X}$ — общее количество сахара в тоннах, производство которого планируется в последний год периода длительного планирования. Оно определяется заданием величин $\overline{x}_{ij}$, представляющих собой годовое производство сахарного тростника j-го типа в блоке i в конце периода длительного планирования. Пусть k_{ij} — выход сахара с одной тонны сахарного тростника типа j, полученного в блоке i (коэффициент k_{ij} зависит также и от индекса i, так как условия выращивания сахарного тростника в различных блоках различны). Очевидно, имеем

$$X = \sum_i \sum_j x_{ij} k_{ij}, \quad x_{ij} \geqslant 0.$$

Пусть x_{ij} — годовое производство сахарного тростника типа

j в болоке i в настоящее время. Мы будем предполагать, что $\overline{x}_{ij} \geqslant x_{ij}$. Очевидно, что затраты на увеличение производства сахарного тростника на одну тонну зависят от конкретного блока и вида сахарного тростника.

Пусть c_{ij} — средние удельные затраты на увеличение производства сахарного тростника. Тогда общие затраты на увеличение производства сахарного тростника по типам и видам от состояния $\{x_{ij}\}$, $i=1, ..., m$, $j=1, ..., n$, до состояния $\{\overline{x}_{ij}\}$, $i=1, ..., m$, $j=1, ..., n$, равны $\sum\limits_i \sum\limits_j (\overline{x}_{ij}-x_{ij})c_{ij}$. Очевидно, что для определения оптимальной структуры перспективного производства сахарного тростника $\{\overline{x}_{ij}\}$, $i=1, ..., m$, $j=1, ..., n$, необходимо решить задачу минимизации суммарных затрат $\min \sum\limits_i \sum\limits_j (\overline{x}_{ij}-x_{ij})c_{ij}$ при уисловиях выполнения плана производства сахара

$$\overline{X}=\sum_i \sum_j \overline{x}_{ij}k_{ij}, \ \overline{x}_{ij} \geqslant x_{ij}, \ \overline{x}_{ij} \geqslant 0, \ i=1, ..., m, \ j=1, ..., n \qquad (6.26)$$

(заметим, что в данной задаче величины $\overline{x}_{ij}$ являются переменными, по которым ведется минимизация, а $\overline{X}$, k_{ij}, c_{ij}, x_{ij}, $i=1, ...$ $..., m$, $j=1, ..., n$, суть константы задачи). Решив задачу (6.26), мы определим оптимальную структуру производства сахарного тростника с точки зрения минимизации затрат и одновременного достижения суммарного годового производства сахара $\overline{X}$.

Исследуем теперь задачу распределения ежегодных капиталовложений по блокам и видам сахарного тростника. При этом для простоты мы не будем рассматривать проблему развития сопутствующих отраслей, поскольку этот вопрос может быть решен таким же образом, как это было сделано выше. Введем следующие обозначения: $x_{ij}(t)$ — количество сахарного тростника типа j, получаемого в блоке i в год t; $1/\lambda_{ij}$ — удельные затраты на увеличение производства сахарного тростника типа j в блоке i $(1/\lambda_{ij}=c_{ij})$; $c(t)$ — суммарное капиталовложение в год t, направляемое на развитие производства сахарного тростника.

Задача заключается в определении плана распределения капиталовложений по годам, блокам и видам сахарного тростника, гарантирующего одновременное достижение уровня $\{\overline{x}_{ij}\}$ по всем блокам и видам сахарного тростника из начального состояния $\{x_{ij}\}$, $i=1, ..., m$, $j=1, ..., n$. При решении задачи целесообразно придерживаться пути развития, минимизирующего диспропорции между различными блоками и видами сахарного тростника. Как и раньше, предполагаем, что развитие производства сахарного тростника происходит пропорционально капиталовложению, поэтому, если обозначить через $u_{ij}(t)$ капиталовложение, направляемое в год t на развитие j-го вида сахарного тростника в блоке i, будем иметь $x_{ij}(t+1)=x_{ij}(t)+$ $+\lambda_{ij}u_{ij}(t)$, или $\Delta x_{ij}(t)=\lambda_{ij}u_{ij}(t)$. Определим опорный план распределения капиталовложений по блокам и видам сахарного тростника по формуле

$$\bar{u}_{ij}(t)=\frac{[\bar{x}_{ij}-x_{ij}(t)]/\lambda_{ij}}{\sum\limits_{i}\sum\limits_{j}[\bar{x}_{ij}-x_{ij}(t)]/\lambda_{ij}}C(t). \qquad (6.27)$$

Предположим, что планирование развития производства сахарного тростника начинается с момента $t=t_1$. Тогда для достижения нормативного уровня необходимо время T, определяемое как наименьшее положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\sum_{i}\sum_{j}[\bar{x}_{ij}-x_{ij}(t_1)]/\lambda_{ij}\leqslant\sum_{r=t_1}^{T}C(r), \qquad (6.28)$$

где $C(r)$ — суммарное капиталовложение, выделяемое на развитие в год r. Неравенство (6.28) означает, что объем капиталовложений, выделяемых на развитие на отрезке времени $[t_1,T]$, должен превосходить суммарные затраты на развитие производства сахарного тростника. Будем обозначать индексами $k=1,...,l$ различные сахарные заводы. Пусть A_{kj} — мощность мельниц сахарного завода k по отношению к сахарному тростнику типа j (A_{kj} — это то количество сахарного тростника типа j, которое может быть переработано фабрикой в течение одного года при условии, что на фабрике перерабатывается тростник только этого типа). Заметим, что количество A_{kj} не зависит от блока, с которого тростник доставляется на завод. Вообще говоря, тростник, подлежащий переработке, может различаться степенью зрелости, толщиной стебля, высотой стебля и т. д. Эти факторы влияют на производительность завода, однако для упрощения модели при определении величины A_{kj} мы это обстоятельство учитывать не будем.

Предположим, что, решив задачу (6.26), мы получим оптимальную структуру производства сахарного тростника $\{\bar{x}_{ij}\}$, $i=1,...,m$, $j=1,...,n$. Поскольку план производства $\{\bar{x}_{ij}\}$ является перспективным, производственные мощности сахарных заводов недостаточны для переработки всего количества сахарного тростника $\sum\limits_{i}\sum\limits_{j}\bar{x}_{ij}$. Поэтому возникает задача увеличения мощности сахарных заводов с целью обеспечения переработки урожая $\{\bar{x}_{ij}\}$. При этом целесообразно увеличить мощности таким образом, чтобы минимизировать суммарные затраты на транспортировку сахарного тростника с блоков на заводы. Обозначим через $\bar{x}_j=\sum\limits_{i}\bar{x}_{ij}$ общее количество сахарного тростника типа j, которое должно быть произведено в соответствии с планом $\{\bar{x}_{ij}\}$, $i=1,...,m$, $j=1,...,n$. Пусть далее $A_j=\sum\limits_{k}A_{kj}$ —

суммарная мощность всех сахарных заводов по производству сахарного тростника типа j. Для переработки количества $\bar{x}_i$ сахарного тростника типа j требуется время, равное $\bar{x}_j/A_j$, поэтому общее время переработки урожая $\{\bar{x}_{ij}\}$, $i=1,...,m$, $j=1,...,n$, равно $\sum_j \bar{x}_j/A_j$. Если

$$\sum_j \bar{x}_j/A_j \leqslant 1,$$

то весь урожай может быть переработан в течение года (за один период работы сахарного завода) и нет необходимости увеличения мощностей сахарных заводов. Однако на практике это неравенство не выполняется, т. е. имеет место

$$\sum_j \bar{x}_j/A_j > 1. \tag{6.29}$$

В этом случае для определения заводов, подлежащих расширению, и размеров этого расширения можно действовать следующим образом. Разрешаем вспомогательную транспортную задачу на минизацию затрат на перевозку сахарного тростника с блоков на пункты приемки, отождествляя пункт приемки с соответствующим сахарным заводом (т. е. затраты на перевозку от пункта приемки на соответствующий завод не рассматриваются). Поскольку планируемый урожай сахарного тростника превосходит возможности заводов, в каждом блоке i останется некоторое количество $\bar{y}_{ij}$ сахарного тростника типа j, который не может быть переработан на заводе в течение года. Это количество сахарного тростника перевозится на ближайший с точки зрения транспортных затрат пункт приемки, связанный с определенным сахарным заводом. Этот избыток сахарного тростника по различным видам собирается на пунктах приемки в течение всего года. Суммарный избыток на пунктах приемки по видам сахарного тростника за год и определяет требуемое увеличение мощности соответствующих сахарных заводов. Очевидно, что сахарные заводы, приемные пункты которых не обладают избытком сахарного тростника, в расширении не нуждаются.

Сформулируем теперь задачу математически. Будем считать, что мы находимся в условиях выполнения неравенства (6.29), и $\bar{y}_{ij} \geqslant 0$. Введем в рассмотрение переменные $\tilde{x}_{ij}$, $\bar{y}_{ij}$ следующим образом:

$$\tilde{x}_{ij} = \bar{x}_{ij} - \bar{y}_{ij},\ \bar{x}_{ij} \geqslant 0,\ \bar{y}_{ij} \geqslant 0,\ i=1,...,m,\ j=1,...,n \tag{6.30}$$

(количество сахарного тростника, которое может быть переработано без расширения сахарных заводов). Если ввести в рассмотрение $\tilde{x}_j = \sum_i \tilde{x}_{ij}$, то должно выполняться

$$\sum_j \tilde{x}_j/A_j=1. \qquad (6.31)$$

Очевидно, что соотношения (6.30) и (6.31) определяют переменные $\tilde{x}_{ij}$ и $\bar{y}_{ij}$ не единственным образом. Подставляя (6.30) в (6.31), получаем равенство

$$\sum_j \frac{\sum_i (\bar{x}_{ij}-\bar{y}_{ij})}{A_j}=1$$

для определения переменных $\bar{y}_{ij}$ и, полагая $\sum_i \bar{y}_{ij}=\bar{y}_j$, $\sum_i \bar{x}_{ij}=\bar{x}_j$, получаем

$$\sum_j \bar{y}_j/A_j=\sum_j \bar{x}_j/A_j-1. \qquad (6.32)$$

Переменные $\bar{y}_j$ определяют количество сахарного тростника типа j, которое не может быть переработано на сахарном заводе. Для определения величин $\bar{y}_{ij}$ предположим, что количество $\bar{y}_j$ пропорционально количеству сахарного тростника типа j, производимого в блоке i в соответствии с планом $\bar{x}_{ij}$:

$$\bar{y}_j=\lambda\bar{x}_j. \qquad (6.33)$$

Из (6.32) и (6.33) получаем

$$\lambda\sum_j \bar{x}_j/A_j=\sum_j \bar{x}_j/A_j-1,\ \lambda=1-\frac{1}{\sum_j \bar{x}_j/A_j}.$$

Отсюда имеем

$$\bar{y}_j=[1-1/\Sigma\bar{x}_j/A_j]\bar{x}_j=\bar{x}_j-\bar{x}_j/\sum_j \bar{x}_j/A_j \qquad (6.34)$$

и окончательно

$$\tilde{x}_j=\bar{x}_j-\bar{y}_j=\bar{x}_j/\sum_j \bar{x}_j/A_j. \qquad (6.35)$$

Формула (6.35) определяет количество сахарного тростника типа j, который может быть переработан на заводе без увеличения его мощности. Количество сахарного тростника типа j, производимого в блоке i, которое может быть переработано на сахарном заводе без увеличения его мощности, определяется по формуле

$$\tilde{x}_{ij}=\bar{x}_{ij}/\sum_j \bar{x}_{ij}/A_j.$$

Можно просто показать, что урожай $\{\tilde{x}_{ij}\}$ может быть полностью переработан на существующих заводах, действительно:

$$\sum_j\sum_i \tilde{x}_{ij}A_j^{-1}=\sum_j \tilde{x}_jA_j^{-1}=\sum_j \frac{\bar{x}_j A_j^{-1}}{\sum_k \bar{x}_k A_k^{-1}}=1.$$

Определим теперь, насколько необходимо увеличить мощности сахарных заводов. Пусть $\tilde{y}_{ij}=\bar{x}_{ij}-\tilde{x}_{ij}$, $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n$. Будем действовать следующим образом. Предположим, что сахарный тростник в количестве $\tilde{y}_{ij}$ направляется на тот из пунктов приемки, который наиболее близок с точки зрения транспортных затрат. Он связан с определенным сахарным заводом s. Обозначим через N_s множество блоков, из которых дополнительный сахарный тростник $\tilde{y}_{ij}$ направляется в s (т. е. множество тех блоков, для которых пункты приемки завода s оказываются ближайшими с точки зрения транспортных затрат). Тогда дополнительное количество сахарного тростника, которое должно быть переработано на заводе s, будет равно $\sum\limits_{i\in N_s} \tilde{y}_{ij}=\tilde{y}_j(N_s)$. Величина $\tilde{y}_j(N_s)$ автоматически определяет необходимое увеличение мощности сахарного завода по каждому типу сахарного тростника. Пусть $\{x^*_{ij}\}$, $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n$,— траектория развития из начального состояния $\{x_{ij}(t_1)\}$ до состояния $\{\bar{x}_{ij}\}$ при условии, что развитие идет согласно опорному плану

$$x^*_{ij}(t+1)=x^*_{ij}(t)+\lambda_{ij}(t)\bar{u}_{ij}(t),$$

где $\bar{u}_{ij}(t)$ определяется по формуле (6.27). Обозначим $x^*_j(t)=\sum\limits_i x^*_{ij}(t)$, $j=1, \ldots, n$. До некоторого момента имеет место неравенство $\sum\limits_{j=1}^{n} x^*_j(t)/A_j<1$. Пусть t_0 — момент времени, когда впервые $\sum\limits_{j=1}^{n} x^*_j(t)/A_j\geqslant 1$, т. е., начиная с этого момента, необходимо осуществлять капиталовложения в развитие мощностей сахарных заводов. При этом возникает задача увеличения мощностей завода s на величину $y_j(N_s)$ на интервале времени $[t_0, T]$. Пусть d_{sj} — удельные затраты на увеличение мощностей мельниц завода s по переработке сахарного тростника типа j. Тогда суммарные затраты на увеличение мощностей сахарных заводов будут равны $\sum\limits_j \sum\limits_s d_{sj}\tilde{y}_j(N_s)=Д$. Очевидно, что если весь капитал $Д$ будет реализован в год t_0, то мы можем быть уверены, что в течение всего периода длительного планирования полученных мощностей сахарных заводов будет достаточно. Однако более реальной является следующая постановка задачи: определить такое распределение капиталовложений по годам, при котором в каждый год $t\in[t_0, T]$ произведенный сахарный тростник может быть полностью переработан. Пусть $Д(t)$ — объем капиталовложений, направляемый на развитие сахарных заводов в год t. Очевидно, имеет место равенство $\sum_{t_0 \leq t \leq T} Д(t) = Д$. Определим опорный план распределения капиталовложений на увеличение мощностей сахарных заводов s по j-му типу сахарного тростника по формуле

$$v_j^S(t) = Д(t)\,\tilde{y}_j(N_s)d_{js} \Big/ \sum_j \sum_S \tilde{y}_j(N_s)d_{js}. \qquad (6.36)$$

Обозначим через $z_{sj}(t)$ мощность сахарного завода s по переработке сахарного тростника типа j, $t \in [t_0, T]$. Тогда

$$\Delta z_{sj}(t) = \frac{v_j^S(t)}{d_{js}}. \qquad (6.37)$$

Определим $y_j^*(t) = \lambda x_j^*(t)$, где $t \in [t_0, T]$, $\lambda = 1 - 1/\sum_j (x_j^*(t)/A_j)$.

Так же, как в (6.34), можно показать, что $y_j^*(t)$ — часть сахарного тростника, которая не может быть переработана без расширения сахарных заводов при развитии производства сахарного тростника согласно опорному плану. Вычислим приращение величины $y_j^*(t)$:

$$\Delta y_j^*(t) = y_j^*(t+1) - y_j^*(t) = \lambda x_j^*(t+1) - \lambda x_j^*(t) = x_i^*(t+1) -$$
$$- x_i(t) + x_j \Big/ \sum_j (x_j/A_j) - x_j \Big/ \sum_j (x_j/A_j) = \Delta \bar{x}_j^*(t).$$

Однако $\Delta x_j^*(t) = \sum_i \Delta x_{ij}^*(t) = \sum_i \lambda_{ij}\bar{u}_{ij}(t)$, где $\bar{u}_{ij}(t)$ определяется по формуле (6.27). Аналогично покажем, что $\Delta y_{ij}^* = \Delta x_{ij}^*$ для всех i, j, $t \in [t_0, T]$.

Поэтому

$$\Delta y_j^*(N_s) = \sum_{i \in N_s} \Delta y_{ij}^* = \sum_{i \in N_s} \Delta x_{ij}^* = \sum_{i \in N_s} \lambda_{ij}\bar{u}_{ij}(t).$$

Очевидно далее, что

$$\Delta z_{ij}(t) = \Delta y_j^*(N_s) = \sum_{i \in N_s} \lambda_{ij}\bar{u}_{ij}(t),\ t \in [t_0, T]. \qquad (6.38)$$

Подставляя (6.27) в (6.38) и используя (6.36) и (6.37), получаем

$$\frac{\tilde{y}_j(N_s)}{\sum_j \sum_S \tilde{y}_j(N_s)d_{js}} Д(t) = \frac{\sum_{i \in N_s} [\bar{x}_{ij} - x_{ij}^*(t)]}{\sum_i \sum_j [\bar{x}_{ij} - x_{ij}^*(t)]/\lambda_{ij}} C(t),$$

что дает нам

$$Д(t) = \frac{\sum_i \sum_S \tilde{y}_j(N_s)d_{js} \sum_{i \in N_s} [\bar{x}_{ij} - x_j^*(t)]}{\tilde{y}_j(N_s) \sum_i \sum_j [\bar{x}_{ij} - x_{ij}^*(t)]/\lambda_{ij}} C(t). \qquad (6.39)$$

Формула (6.39) определяет ежегодное капиталовложение, направляемое на развитие сахарных заводов и гарантирующее полную переработку всего сахарного тростника. Подставляя $Д(t)$ в (6.36), получаем формулу для плана распределения капиталовложений по заводам и типам сахарного тростника, гарантирующего выполнение балансовых соотношений между развитием производства сахарного тростника и увеличением мощностей сахарных заводов в годы $t \in [t_1, T]$.

§ 5. ЗАДАЧА ОПЕРАТИВНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ УБОРКИ САХАРНОГО ТРОСТНИКА

Предлагаемая ниже математическая модель без серьезных изменений может быть использована при оперативном планировании уборки любой массовой монокультуры (зерно, хлопок, лен, картофель и т. д.). При уборке сахарного тростника возникает проблема правильного распределения различных видов техники и рабочей силы с учетом следующих факторов: высокая продуктивность тростникоуборочных комбайнов; существование полей, на которых использование комбайнов малоэффективно (из-за рельефа местности и по другим причинам); необходимость использования рабочей силы для обслуживания техники, необходимость создания условий для ремонта техники, затраты на уборку сахарного тростника и др. Основной задачей является уборка сахарного тростника в кратчайшие сроки. Так же, как и раньше, для упрощения математических формулировок под блоком будем понимать (см. § 4 настоящей главы) совокупность полей сахарного тростника с одинаковыми условиями уборки. Будем также считать, что блок включает в себя максимальное количество однотипных полей. Ограничимся рассмотрением задачи в пределах одной гранхи, поскольку практическое применение результатов для более крупной агропромышленной единицы представляет трудности.

Введем следующие обозначения: i — номер блока в гранхе; λ_i — продуктивность труда одного мачетеро в зависимости от блока; μ_i — производительность одного тростниково-уборочного комбайна; α — количество рабочей силы, участвующей в уборке сахарного тростника (сюда включается также рабочая сила, необходимая для ремонта уборочной техники); β — количество тростниково-уборочных комбайнов, участвующих в уборке; x_i — число мачетеро, направляемых на работу в блок i; w — количество персонала, необходимого для поддержания бесперебойной работы одного тростниково-уборочного комбайна в течение сафры, y_i — число комбайнов, направляемых в блок i.

В указанных обозначениях суммарная продуктивность мачетеро и тростниково-уборочных комбайнов при их распределении по блокам в количествах x_i, y_i, $i = 1, \ldots, m$, будет равна $\sum\limits_{i=1}^{m} x_j\lambda_i +$

$+\sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i$, при этом переменные x_i, y_i должны удовлетворять ограничениям

$$\sum_i x_i + w \sum_i y_i \leqslant \alpha, \quad \sum_i y_i \leqslant \beta, \; x_i \geqslant 0, \; y_i \geqslant 0, \; i=1, \ldots, m,$$

x_i, y_i целочисленны.

Следовательно, для определения наилучшего распределения мачетеро и комбайнов по блокам необходимо решить следующую задачу целочисленного линейного программирования:

$$\max \left(\sum_i x_i \lambda_i + \sum_i y_i \mu_i \right) \tag{6.40}$$

при условиях

$$\sum_i x_i + w \sum_i y_i \leqslant \alpha, \quad \sum_i y_i \leqslant \beta, \; x_i \geqslant 0, \; y_i \geqslant 0, \; i=1, \ldots, m, \tag{6.41}$$

x_i, y_i целочисленны.

Заметим, что решение задачи (6.40) имеет локальное значение, поскольку уборка сахарного тростника проходит по блокам неравномерно, а размеры блоков отличаются друг от друга. Поэтому работы в одних блоках могут заканчиваться раньше, чем в других. Возникает задача корректировки решения в связи с необходимостью использования освободившихся мачетеро и комбайнов на блоках, на которых работа еще не завершена.

Предположим, что сафра начинается в момент $t_0 = 0$. Решим в этот момент задачу (6.40) и определим оптимальное распределение мачетеро и тростниково-уборочных комбайнов по блокам $\{x_i^* (t_0), y_i^* (t_0)\}$, $i=1, \ldots, m$. Заметим, что время полного выполнения работ в данном блоке существенно зависит также от рельефа местности в блоке и типа сахарного тростника.

Пусть $t_i(x_i^* (t_0), y_i(t_0))$ — время, необходимое для завершения работ в блоке i при условии, что в момент t_0 туда направлено $x_i^* (t_0)$ мачетеро и $y_i^* (t_0)$ тростниково-уборочных комбайнов. Определим величину $t_1 = t_{i_0}$ из условия

$$t_{i_0} (x_{i_0}^* (t_0), y_{i_0}^* (t\ )) = \min_i t_i(x_i^* (t_0), y_i^* (t_0)). \tag{6.42}$$

В выражении (6.42) i_0 есть номер блока, на котором работы заканчиваются в первую очередь. В общем случае число блоков типа i_0 (удовлетворяющих условию (6.42)) может быть достаточно велико, т. е. работы могут быть закончены одновременно в нескольких блоках. Обозначим через Γ_0 множество всех блоков типа i_0, удовлетворяющих условию (6.42). В момент t_1 освобождаются $\sum_{i \in \Gamma_0} x_i^* (t_0)$ мачетеро и $\sum_{i \in \Gamma_0} y_i^* (t_0)$ тростниково-уборочных комбайнов, которые могут быть использованы в других блоках. С этой целью решается заново задача (6.40) без учета блоков $i \in \Gamma_0$:

$$\max_{i \overline{\in} \Gamma_0} \sum_i (x_i\lambda_i + y_i\mu_i) \tag{6.43}$$

при условиях

$$\sum_{i \overline{\in} \Gamma_0} x_i + \omega y_i \leqslant b, \quad \sum_{i \overline{\in} \Gamma_0} y_i \leqslant \beta, \ x_i \geqslant 0, \ y_i \geqslant 0, \quad i \overline{\in} \Gamma_0,$$

x_i, y_i — целочисленные.

Пусть $\{x_i^*(t_1), y_i^*(t_1)\}$ есть решение задачи (6.43). Определим новое время $t_i^1\{x_i^*(t_1), y_i^*(t_1)\}$, необходимое для завершения работ в каждом блоке, как время, которое необходимо для завершения работ после момента t_1 при условии, что начиная с момента t_1 и до конца сафры на блоке i будут работать $x_i^*(t_1)$ мачетеро и $y_i^*(t_1)$ тростниково-уборочных комбайнов. Тогда суммарное время уборки в блоке i ($i \overline{\in} \Gamma_0$) будет равно $t_1 + t_i^1\{x_i^*(t_1), y_i^*(t_1)\}$.

Определим

$$t_2 = t_1 + t_{i_1}^1\{x_i^*(t_1), y_i^*(t_1)\} = t_1 +$$

$$+ \min_i t_i^1\{x_i^*(t_1), y_i^*(t_1)\}. \tag{6.44}$$

Так же, как и в предыдущем случае, рассмотрим множество блоков Γ_1, на котором достигается минимум выражения (6.44) (т. е. множество блоков, на которых одновременно заканчиваются работы). В момент t_2 освобождаются $\sum_{i \in \Gamma_1} x_i^*(t_1)$ мачетеро и $\sum_{i \in \Gamma_1} y_i^*(t_1)$ тростниково-уборочных комбайнов. Для определения оптимального порядка их использования решим снова задачу (6.43), (6.41), исключая блоки $i_0 \in \Gamma_0$, $i_1 \in \Gamma_1$. Продолжая таким же образом, получим последовательность моментов времени $t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}$, последовательность оптимальных распределений усилий по блокам $\{x_i^*(t_0), y_i^*(t_0)\}$, $\{x_i^*(t_1), y_i^*(t_1)\}, \ldots,$ $\{x_i^*(t_{k-2}), y_i^*(t_{k-2})\}$ и последовательность множеств $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots,$ Γ_{k-2}. Это означает, что в момент t_{k-1} освобождаются $\sum_{i \in \Gamma_{k-2}} x_i^*(t_{k-2})$ мачетеро и $\sum_{i \in \Gamma_{k-2}} y_i^*(t_{k-2})$ тростниково-уборочных комбайнов. Для определения порядка использования их по блокам заново решаем задачу (6.40), (6.41), исключая блоки $i_0 \in \Gamma_0$, $i_1 \in \Gamma_1, \ldots,$ $i_{k-2} \in \Gamma_{k-2}$, т. е. следующую задачу:

$$\max_{i \in \bigcup_{l=0}^{k-2} \Gamma_l} \left(\sum x_i \lambda_i + y_i \mu_i\right) \tag{6.45}$$

при условиях

$$\sum_{i \in \bigcup_{l=0}^{k-2} \Gamma_l} x_i + \sum_{i \in \bigcup_{l=0}^{k-2} \Gamma_l} y_i w \leqslant \alpha, \quad \sum_{i \in \bigcup_{l=0}^{k-2} \Gamma_l} y_i \leqslant \beta, \quad x_i \geqslant 0, \quad y_i \geqslant 0, \quad i \in \bigcup_{l=0}^{k-2} \Gamma_l,$$

x_i, y_i — целые числа.

Пусть $\{x_i^* (t_{k-1}),\ y_i^* (t_{k-1})\}$ — решение задачи (6.45). Определим новое время работ в каждом блоке. С этой целью рассмотрим $t_i^{k-1} \{x_i^* (t_{k-1}),\ y_i^* (t_{k-1})\}$ — время, необходимое для завершения работ после момента t_{k-1} при условии, что начиная с этого момента на блоке i будут работать $x_i^* (t_{k-1})$ мачетеро и $x_i^* (t_{k-1})$ тростниково-уборочных комбайнов. Таким образом, суммарное время уборки тростника в блоке $i \in \bigcup_{l=0}^{k-2} \Gamma_l$ равно

$$t_{k-1} + t_i^{k-1} \{x_i^* (t_{k-1}),\ y_i(t_{k-1})\}.$$

Обозначим

$$t_k = \{t_{k-1} + t_{i_{k-1}}^{k-1} [x_i^* (t_{k-1}),\ y_i^* (t_{k-1})]\} = \min_i \{t_{k-1} + $$

$$+ t_i^{k-1} [x_i^* (t_{k-1}),\ y_i^* (t_{k-1})]\}. \tag{6.46}$$

Так же, как и раньше, заметим, что min в (6.46) может достигаться в нескольких точках (т. е. работы могут заканчиваться одновременно в нескольких блоках).

Обозначим далее через Γ_{k-1} множество всех блоков типа i_{k-1}, удовлетворяющих условию (6.46). Продолжая аналогичным способом, мы дойдем до такого момента t_m, когда число элементов множества $\bigcup_{l=0}^{m-1} \Gamma_l$ будет в точности равно n (т. е. общему количеству блоков). Это означает, что работы во всех блоках данной гранхи закончены.

Сделаем некоторые замечания. На каждом шаге процесса t_{k-1}, $k=0, \ldots, m$, мы заново решали задачу (6.40), (6.41), или, точнее говоря, ее модификацию (6.45). Поэтому для достижения максимальной производительности на отрезке времени $[t_{k-1}, t_k]$ нам было необходимо заново пересматривать весь порядок использования рабочей силы и техники. Это могло привести к перераспределению сил между блоками, на которых работы еще не закончены. На самом деле такую возможность следует рассматривать как чисто теоретическую, и на практике для нахождения приближенно-оптимального решения достаточно ограничиваться распределением лишь освободившейся рабочей силы и техники. С этой целью необходимо решать модифицированную задачу (6.45), в которой вместо констант α, β будут фигурировать лишь освободившиеся ресурсы. Пусть $\{x_i^*(t_{k-2}),\ y_i^*(t_{k-2})\}$ — распределение рабочей силы и техники по блокам к моменту t_{k-2}. Тогда задача определения оптимального использования освободившейся рабочей силы и техники на отрезке времени $[t_{k-1}, t_k]$ сводится к нахождению

$$\max \sum_{i \in \Gamma_{k-2}} (x_i\lambda_i + y_i\mu_i) \tag{6.47}$$

при условиях

$$\begin{gathered} \sum_{i \in \bigcup\limits_{l=0}^{k-2} \Gamma_l} x_i + w y_i \leqslant \sum_{i \in \Gamma_{k-2}} [x_i^*(t_{k-2}) + w y_i^*(t_{k-2})], \\ \sum_{i \in \bigcup\limits_{l=0}^{k-2} \Gamma_l} y_i \leqslant \sum_{i \in \Gamma_{k-2}} y_i^*(t_{k-2}),\ x_i \geqslant 0,\ y_i \geqslant 0, \end{gathered} \tag{6.48}$$

x_i, y_i — целые числа, $i \in \bigcup\limits_{l=0}^{k-2} \Gamma_l$. Система ограничений (6.48) достаточно просто получается из (6.45). Заметим, что в правых частях стоят ресурсы, освободившиеся после завершения работ в блоках $i \in \bigcup\limits_{l=0}^{k-2} \Gamma_l$. Пусть $\{\bar{x}_i(t_{k-1}),\ \bar{y}_i(t_{k-1})\}$ — решение задачи (6.47), (6.48). Положим

$$\begin{aligned} x_i^*(t_{k-1}) &= x_i^*(t_{k-2}) + \bar{x}_i(t_{k-1}), \\ y_i^*(t_{k-1}) &= y_i^*(t_{k-2}) + \bar{y}_i(t_{k-1}). \end{aligned} \tag{6.49}$$

Формула (6.49) и определяет распределение усилий по блокам на отрезке времени $[t_{k-1}, t_k]$.

§ 6. ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАДАЧИ ПЕРСПЕКТИВНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

При решении задач перспективного планирования по конечному результату сам конечный результат зачастую выбирается исходя из решения некоторой оптимизационной задачи. В процессе реализации плана естественным образом может возникнуть потребность повторной проверки оптимальности этого конечного результата. В общем случае проверка необязательно будет приводить к тому же решению, что и первоначальная оптимизационная задача. Это обстоятельство ставит под сомнение выбор целей развития, что, в свою очередь, нарушает устойчивость процесса планирования.

Перейдем к строгой формулировке проблемы. Предположим, что состояние отраслей определяется вектором $x \in R^n$ и в начальный момент отрасли находятся в состоянии $x_0 \in R^n$. Для каждого состояния x_0 определим вещественную функцию $f(x_0, x)$ (функция f зависит от x_0 как от параметра), которая определяет качество состояния x относительно начального состояния x_0. Обозначим через $A(x_0) \subset R^n$ множество состояний отраслей, которые достижимы из состояния x_0. Если пользоваться терминологией предыдущих параграфов, то $A(x_0)$ — множество состояний отраслей x сельского хозяйства, для которых существует план распределения капиталовложений u, такой, что состояние x достигается из x_0 в некоторый момент t_1, зависящий от x_0 и плана u. Предположим, что для каждой точки $x_0 \in R^n$ достигается

$$\max_{x \in A(x_0)} f(x_0, x) = f(x_0, \bar{x}(x_0)). \tag{6.50}$$

Точка $x(x_0)$ может быть интерпретирована как наиболее предпочтительное состояние отраслей относительно состояния x_0 по критерию f. Для простоты мы будем предполагать, что max в (6.50) достигается в одной единственной точке $x(x_0)$. Предположим, что управляемая система $x = g(x, u)$, $x_0 = x(0)$, $u \in U \subset R^l$ описывает развитие отраслей при различных управляющих воздействиях $u \in U$. Предположим далее, что существуют кусочно-непрерывное программное управление $u(t)$ и соответствующая траектория $x(t)$, такие, что

$$x(t) = f(x(t), u(t)), \; x(0) = x_0, \; x(t_1) = \bar{x}(x_0)$$

в некоторый момент $t_1 > 0$. Такое управление $u(t)$ будем называть допустимым. Допустимых управлений может быть достаточно много (заметим, что момент t_1 здесь не фиксируется). Множество всех допустимых управлений обозначим через W. Естественно поставить вспомогательную оптимизационную задачу на множестве W. Например, можно потребовать, чтобы развитие происходило в соответствии с программным управлением $u^*(t)$, минимизирующим время перехода из состояния x_0 в $\bar{x}(x_0)$. Можно ставить задачу отыскания управления $u^*(t)$, используя и другие критерии.

Предположим для простоты, что существуют единственное кусочно-программное управление $u^*(t)$ и соответствующая ему оптимальная траектория $x^*(t)$, переводящая точку x_0 в точку $\bar{x}(x_0)$ за минимальное время, и что развитие происходит в соответствии с траекторией $x^*(t)$. Пусть τ, $0 \leqslant \tau \leqslant \bar{t}_1$ ($\bar{t}_1$ — первый момент попадания траектории $x^*(\tau)$ в точку $\bar{x}(x_0)$),— некоторый промежуточный момент, в который мы проверяем оптимальность «конечного результата» $\bar{x}(x_0)$ относительно текущего состояния $x^*(\tau)$. Если не делать никаких дополнительных предположений, то, вообще говоря, точка $\overline{x}(x_0)$ не будет оптимальной относительно $x^*(\tau)$.

Определение. Задача перспективного планирования называется динамически устойчивой, если для всех $x_0 \leqslant \tau \leqslant \overline{t_1}$ имеет место

$$\max_{x \in A(x^*(\tau))} f(x^*(\tau), x) = f(x^*(\tau), \overline{x}(x^*(\tau))), = f(x_0, \overline{x}(x_0)), \qquad (6.51)$$

т. е. если max в (6.51) достигается в той же точке $\overline{x}(x_0) = x(\overline{x}^*(\tau))$.

Выполнение условия (6.51) гарантирует динамическую стабильность развития, при его выполнении отпадает необходимость пересмотра первоначальных целей (выбранного в начале процесса конечного результата развития).

Очевидно, что в конкретных задачах динамическая устойчивость существенно зависит от вида функции f и характера изменения множеств $A(x^*(\tau))$, где $0 \leqslant \tau \leqslant \overline{t_1}$. В задачах, так часто встречающихся на практике при составлении перспективных планов развития по конечному результату, далеко не всегда учитывается необходимость динамической устойчивости процессов планирования. Это приводит к бессистемному блужданию от цели к цели и, как следствие, к невыполнению плановых заданий.

Рассмотрим в качестве примера задачу планирования производства сахарного тростника по регионам и видам из § 1, 2 настоящей главы.

Для определения перспективного плана $\{\overline{x_{ij}}\}$, $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n$, производства сахара по регионам и видам сахарного тростника решалась следующая задача:

$$\min_{\{\overline{x_{ij}}\}} \sum_i \sum_j [\overline{x_{ij}} - x_{ij}(t_0)] c_{ij} \qquad (6.52)$$

при условиях

$$\sum_i \sum_j \overline{x_{ij}} = A, \quad \overline{x_{ij}} \geqslant x_{ij}(t_0), \quad a_{ij} \leqslant \overline{x_{ij}} \leqslant b_{ij},$$

$$\overline{x_{ij}} \geqslant 0, \quad i=1, \ldots, m, \quad j=1, \ldots, n \qquad (6.53)$$

(функционал (6.52) имеет смысл затрат на переход из состояния $\{x_{ij}(t_0)\}$ в состояние $\{\overline{x_{ij}}\}$). Здесь t_0 — момент начала перспективного планирования; $f(x_{ij}(t_0), x) = -\sum_i \sum_j (x_{ij} - x_{ij}(t_0)) \times \times c_{ij}$; множество $A(x_{ij}(t_0))$ определяется системой ограничений (6.53) в задаче (6.52), (6.53); величины t_{ij}, A, a_{ij}, $x_{ij}(t_0)$ являются константами задачи.

Пусть $\{\overline{x_{ij}}\}$ — перспективный план производства сахара по регионам и видам сахарного тростника, получаемый из решения задачи (6.52), (6.53). Перспективный план $\{\overline{x}_{ij}\}$ существенно используется для формирования опорного плана распределения капиталовложений по регионам и видам сахарного тростника по годам. При этом имеет место соотношение

$$x^*_{ij}(t+1) = x^*_{ij}(t) + \lambda_{ij}\overline{u}_{ij}(t),$$

где

$$\overline{u}_{ij}(t) = \frac{[\overline{x}_{ij} - x^*_{ij}(t)]/\lambda_{ij}}{\sum_i \sum_i [\overline{\mathbf{x}}_{ij} - \mathbf{x}^*(t_0)]/\lambda_{ij}} c(t),$$

Предположим, что при развитии вдоль траектории $x^*_{ij}(t)$ точка $\overline{x}_{ij}$ достигается в момент $\overline{t}_1$. Предположим также, что в момент t', $t_0 < t' < \overline{t}_1$, возникла потребность пересмотра целей развития, и поставим задачу нахождения нового перспективного плана $\{\overline{\overline{x}}_{ij}\}$ относительно состояния $\{x^*_{ij}(t')\}$, $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n$. С этой целью рассмотрим промежуточную оптимизационную задачу

$$\min_{x_{ij}} \sum_i \sum_j [x_{ij} - x^*_{ij}(t')] c_{ij} \tag{6.54}$$

при условиях

$$\sum_i \sum_j x_{ij} = A, \; x_{ij} \geqslant x^*_{ij}(t'), \; a_{ij} \leqslant x_{ij} \leqslant b_{ij}, \; x_{ij} \geqslant 0, \; i=1, \ldots, m, \; j=1, \ldots, n. \tag{6.55}$$

Здесь

$$\begin{aligned} x^*_{ij}(t_1) &= x_{ij}(t_0) + \sum_{t_k=0}^{t_1-1} \Delta x^*_{ij}(t_k) = x^*_{ij}(t_0) + \\ &+ \sum_{t_k=0}^{t_1-1} \lambda_{ij}\overline{u}_{ij}(t_k) = x_{ij}(t_0) + \\ &+ \sum_{t_k=0}^{t_1-1} \frac{[\overline{x}_{ji} - x^*_{ij}(t_k)] C(t_k)}{\sum_i \sum_j [\overline{x}_{ij} - x^*_{ij}(t_k)]/\lambda_{ij}} \end{aligned} \tag{6.56}$$

Подставляя выражение (6.56) в (6.54), получаем

$$\begin{aligned} &\sum_i \sum_j \left\{ x_{ij} - x_{ij}(t_0) - \sum_{t_k=0}^{t_1-1} \frac{[\overline{x}_{ij} - x^*_{ij}(t_k)] C(t_k)}{\sum_i \sum_i [\overline{x}_{ij} - x^*_{ij}(t_k)]/\lambda_{ij}} \right\} c_{ij} = \\ &= \sum_i \sum_j [x_{ij} - x_{ij}(t_0)] c_{ij} - \\ &- \sum_i \sum_j \sum_{t_k=0}^{t_1-1} \frac{-[\overline{x}_{ji} - x^*_{ij}(t_k)] C(t_k)}{\sum_i \sum_j [\overline{x}_{ij} - x^*_{ij}(t_k)]/\lambda_{ij}} c_{ij}. \end{aligned} \tag{6.57}$$

Заметим, что вычитаемое в правой части (6.57) не зависит от переменных x_{ij}, по которым берется min в (6.54). Поэтому оно может рассматриваться как некоторая константа B. Задача таким образом сводится к нахождению минимума выражения $\sum_i \sum_j [x_{ij}-x_{ij}(t_0)]c_{ij}+B$ при условиях (6.55).

Мы видим, что целевая функция в задаче (6.54) при опорном плане развития отличается от целевой функции задачи (6.52) лишь постоянным слагаемым. Заметим также, что с возрастанием t' в интервале $[t_0, t_1]$ функции $x^*_{ij}(t')$ возрастают. Следовательно, множества $A(x^*_{ij}(t'))$ убывают по включению.

При этом для всех $t' \in [t_0, \overline{t_1}]$ $\{\overline{x_{ij}}\} \in A(x^*_{ij}(t'))$. Отсюда следует, что точка минимума функции (6.54) при ограничениях (6.55) $\overline{\overline{x}}_{ij}=\overline{x}_{ij}(x^*_{ij}(t'))$ не зависит от t'. Тем самым динамическая устойчивость процесса планирования доказана.

Это означает, что в процессе развития производства сахарного тростника по регионам и видам согласно опорному плану директивные органы не будут иметь основания для отклонений от выбранных в начале заданий $x_{ij}(x_0)$, определенных на конец периода длительного планирования.

Мы привели простейшие математические модели развития сельскохозяйственного производства, учитывающие основные балансовые соотношения между отраслями. Целью развития являлось достижение конечного результата — запланированных количественных показателей, задаваемых на конец периода длительного планирования по всем отраслям сельскохозяйственного производства. В основе рассмотренных математических моделей лежит опорный план развития, для построения которого требуется сравнительно небольшой объем исходных данных. Из свойств опорного плана и линейности рассматриваемых моделей следует, что в процессе движения к намеченному конечному результату балансовые соотношения между отраслями сохраняются. Некоторое видоизменение первоначальной постановки позволяет решать задачи регионального планирования производства сельскохозяйственной продукции.

Важным аспектом долгосрочного планирования является динамическая устойчивость процесса развития. В общем случае из-за зависимости принципа оптимальности от начальных условий она может нарушаться, однако нами показано, что при развитии отраслей согласно опорному плану она всегда имеет место.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В. Б., Крышев И. И. Кинетические уравнения для описания биоценозов.— Биофизика, 1974, т. 19, № 4, с. 754—759.

2. Берлянд М. Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. Л., 1975. 48 с.

3. Берж К. Теория графов и ее приложения. М., 1962. 319 с.

4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М., 1976. 288 с.

5. Воробьев Н. Н. Теория игр: Лекции для экономистов-кибернетиков. Л., 1973. 160 с.

6. Горелик В. А., Кононенко А Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. М., 1982. 144 с.

7. Данилов Н. Н. Множество Парето в одной дифференциальной игре n лиц с нестрогим соперничеством.— В кн.: Некоторые вопросы дифференциальных и интегральных уравнений и их приложения. Вып. 2. Якутск, 1977, с. 25—35.

8. Дюбин Г. Н., Суздаль В. Г. Введение в прикладную теорию игр. М., 1981. 336 с.

9. Захаров В. В. Одна теоретико-игровая модель охраны окружающей среды.— В кн.: Некоторые вопросы дифференциальных и интегральных уравнений и их приложения. Вып. 3. Якутск, 1978, с. 32—37.

10. Захаров В. В. К вопросу о применении теории игр к проблеме охраны окружающей среды.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1981, № 1, вып. 1, с. 111—113.

11. Захаров В. В. Динамическая теоретико-игровая модель охраны окружающей среды.— В кн.: Многошаговые, дифференциальные, бескоалиционные и кооперативные игры и их приложения. Калинин, 1982, с. 126—134.

12. Захаров В. В. Игры с разрывом на гиперплоскости.— В кн.: Теория игр и ее приложения. Кемерово, 1983, с. 22—32.

13. Захаров В. В., Петросян Л. А. Теоретико-игровой подход к проблеме охраны окружающей среды.—Вестн. Ленингр. ун-та, 1981, № 1, вып. 1, с. 26—32.

14. Зубов В. И. Устойчивость движения. Методы Ляпунова и их применение. М., 1973. 272 с.

15. Зубов В. И. Моделирование биологических процессов при помощи дифференциальных уравнений.— Вопросы кибернетики, 1975, вып. 25, с. 3—9.

16. Зубов В. И. Динамика управляемых систем. М., 1982. 286 с.

17. Зубов В. И., Петросян Л. А. Задача оптимального распределения капиталовложений. Л., 1971. 21 с.
18. Зубов В. И., Петросян Л. А. Математические методы в планировании. Л., 1982. 112 с.
19. Кини Р. П., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М., 1981. 560 с.
20. Колмогоров А. Н. Качественное изучение математических моделей динамики популяций.— В кн.: Проблемы кибернетики. Вып. 25. М., 1972, с. 100—106.
21. Кондратьев К. Я. Космические исследования окружающей среды и природных ресурсов. М., 1982, с. 63.
22. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М., 1985. 518 с.
23. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М., 1974. 456 с.
24. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М., 1973, с. 146—180.
25. Марчук Г. И. Применение сопряженных уравнений к решению задач математической физики.— Успехи механики, 1981, № 1, с. 7—12.
26. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М., 1982. 320 с.
27. Модели управления природными ресурсами /Под ред. В. И. Гурмана. М., 1981. 264 с.
28. Моисеев Н. Н. Информационная теория иерархических систем.— Труды I Всесоюз. конф. по исследованию операций. Минск, 1972, с. 95—99.
29. Моисеев Н. Н. Иерархические структуры и теория игр.— Изв АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 6, с. 1—11.
30. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа. М., 1981. 487 с.
31. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидродинамика. Т. 1. М., 1965. 638 с.
32. Одум Ю. Основы экологии. М., 1975. 321 с.
33. Оуэн Г. Теория игр. М., 1971. 230 с.
34. Петросян Л. А. Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1977, № 19, вып. 4, с. 46—52.
35. Петросян Л. А. Дифференциальные игры преследования. Л., 1977. 224 с.
36. Петросян Л. А., Данилов Н. Н. Устойчивость решений в неантагонистических дифференциальных играх с транферабельными выигрышами.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1979, № 1, с. 46—54.
37. Петросян Л. А., Захаров В. В. Динамическая игровая модель планирования развития региона.— В кн.: Многошаговые, дифференциальные, бескоалиционные и кооперативные игры. Калинин, 1983, с. 31—39.
38. Петросян Л. А., Тихонова И. Ф. Оптимизация распределения капиталовложений по отраслям сельскохозяйственного производства.— В кн.: Математические методы оптимизации и структурирования систем. Калинин, 1979, с. 53—65.
39. Петросян Л. А., Томский Г. В. Динамические игры и их приложения. Л., 1982. 252 с.
40. Петросян Л. А., Родригес Р. Математическая модель управления развитием сахарного комплекса.— В кн.: Математические методы оптимизации и управления в сложных системах. Калинин, 1982, с. 54—60.
41. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982. 255 с.
42. Полуэктов Р. А., Пых Ю. А., Швытов И. А. Динамические модели экологических систем. Л., 1980. 289 с.
43. Пых Ю. А. Устойчивость решений дифференциальных уравнений Лотки — Вольтерра.— Прикл. мат. и мех., 1977, т. 41, вып. 2, с. 262—270.

44. Пых Ю. А. Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. М., 1983. 184 с.
45. Свирежев Ю. М., Елизаров Е. Я. Математическое моделирование биологических систем. М., 1972. 159 с.
46. Свирежев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. М., 1978. 352 с.
47. Тимофеев Н. Н., Свирежев Ю. М. Теория трофических цепей и связанные с ней задачи оптимизации.— Вопросы кибернетики, 1979, вып. 52, с. 5—18.
48. Тихонова И. Ф. Одна математическая модель регионального планирования.— В кн.: Математические методы оптимизации и управления в сложных системах. Калинин, 1982, с. 14—18.
49. Экологические системы. Адаптивная оценка и управление/Под ред. К. С. Холинга. М., 1981. 396 с.
50. Csanady G. Turbulent diffusion in the environment.— Dordrecht, 1973. 248 p.
51. Holling C. S. The functional response of predetory to prey density and its role in mimcry and pulution regulation.— Mem. Entomol. Soc. Canada, 1965, N 45, p. 1—60.
52. Imbert I, Petrosjan L. Aplicaciones de la teoría de los yuegos con N participantes.— Invest. oper., 1979, N 28, p. 3—29.
53. Imbert I., Petrosjan L. Un modelo teórico de yuego con estructura romboidal de direction.— Invest. oper., 1980, N 29, p. 3—20.
54. Lotka A. J. Elements of physical biology.— Baltimor, 1925. 460 p.
55. Malthus T. R. An essay on the principle of population.— London, 1803. 610 p.
56. Petrosjan L., Rodriges R. Modelo económico-matemático para la planficatión del desarrollo del complejo azucarero.— Economía y desarr., 1982, N 67, p. 191—206.
57. Resigno A. The straggle for life: 1 Two species.— Bull. Math. Biophys., 1967, vol. 29, N 2, p. 377—388.
58. Rosenzweig M. L., Mac Artur R. H. Grafical representation and stability conditions of predetory — prey interactions.— Amer. Natur., 1963, vol. 97, N 893, p. 209—223.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
В 1986 г. ВЫПУСКАЕТ В СВЕТ

Вопросы экологии и охраны природы. Вып. 2: Сб. статей/Под ред. Барабанова В. Ф.— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.— 10 л.— 1 р. 50 к.

В статьях сборника рассматриваются вопросы интенсификации сельского хозяйства, рекультивации земель Северо-Запада РСФСР, действия пестицидов и гербицидов на растения, воспроизводства и рационального использования лесных ресурсов и др. Приводится аннотированный указатель работ по вопросам экологии и охраны природы, опубликованных учеными ЛГУ.

Для специалистов в области экологии и охраны природы.

Алешков Ю. З., Смышляев П. П. **Теория комплексного переменного и ее приложения:** Учеб. пособие.— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.— 15 л.— 50 к.

В учебном пособии изложены вопросы построения теории функций комплексного переменного и методы ее применения. Освещены основные принципы теории конформных отображений. Для построения решения краевых задач Римана и Гильберта использован аппарат теории интеграла типа Коши. Сформулированы и решены основные плоские задачи аэродинамики и теории волновых движений идеальной несжимаемой жидкости.

Для студентов и аспирантов математико-механических факультетов и факультетов прикладной математики вузов и втузов; может быть полезно инженерам-механикам.

ЗАКАЗЫ НА КНИГИ НАПРАВЛЯЙТЕ ПО АДРЕСУ: 191186, ЛЕНИНГРАД, НЕВСКИЙ ПРОСПЕКТ, д. 28. МАГАЗИН № 1, «ДОМ КНИГИ». ОТДЕЛ «КНИГА — ПОЧТОЙ».

ИБ № 2218

Леон Аганезович Петросян, Виктор Васильевич Захаров

Введение
в математическую экологию

Редактор *И. Н. Рязанова*
Обложка художника *П. П. Николаева*
Художественный редактор *О. Н. Советникова*
Технический редактор *А. В. Борщева*
Корректоры *Е. К. Терентьева, К. Я. Евнина*

Сдано в набор 23.07.85. Подписано в печать 14.05.86. М.-17117. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 14,0. Усл. кр.-отт. 14,25. Уч.-изд. л. 12,56. Тираж 1651 экз. Заказ 2169.
Цена 1 р. 90 к.

Издательство ЛГУ имени А. А. Жданова. 199164, Ленинград, Университетская наб., 7/9.

426057, г. Устинов, ул. Пастухова, д. 13. Республиканская типография Госкомиздата Удмуртской АССР.