ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 10 (1946), 277—279 Série mathématique

А. А. ЛЯПУНОВ

О ВПОЛНЕ АДДИТИВНЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЯХ. II

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Дается пример вполне аддитивной вектор-функции, лишенной скачков, определенной на всех измеримых множествах отрезка $[0, 2\pi]$, принимающей значения из компактного параллелепипеда пространства l_1 и имеющей невыпуклое множество значений.

В работе под таким же названием ([1]) нами было показано, что вполне аддитивная вектор-функция, лишенная скачков, определенная на системе подмножеств некоторого множества, инвариантной относительно счетных сумм и пересечений и взятия дополнений, и принимающая значения из n-мерного эвклидова пространства, имеет выпуклое множество значений. Мы покажем, что это свойство теряется, если вместо конечномерного пространства взять бесконечномерное, хотя бы даже компактное пространство.

Рассмотрим последовательность функций $\chi_0(x), \chi_1(x), \ldots, \chi_n(x), \ldots$, определенных на отрезке $[0, 2\pi] = R$, принимающих значения $+1$ и -1, образующих полную ортогональную систему функций на этом отрезке и таких, что

$$\chi_0(x) = +1, \quad \int_0^{2\pi} \chi_n(x)\, dx = 0$$

при $n = 1, 2, 3, \ldots$*

Обозначим

$$U_n = [\varphi_n(x) = +1].$$

Тогда

$$\operatorname{mes} U_n = \operatorname{mes} CU_n = \pi \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

Определим вполне аддитивную вектор-функцию $F(E)$ для всех измеримых множеств отрезка $[0, 2\pi]$. Значение функции $F(E)$ есть вектор, лежащий в компактном параллелепипеде пространства l_1 и имеющий координаты:

$$I_n(E) = \frac{1}{2^n} \int_E \frac{1 + \chi_n(x)}{2}\, dx,$$

$$F(E) = \{y_0(E), y_1(E), \ldots, y_n(E), \ldots\}.$$

* Пример такой системы можно найти в книге Зигмунда ([2]).

Очевидно, функция $F(E)$ вполне аддитивна и лишена скачков; легко видеть, что

$$F(R)=\left\{2\pi,\ \pi,\ \frac{\pi}{2},\ \ldots,\ \frac{\pi}{2^n},\ \ldots\right\},$$

так как

$$\int_0^{2\pi}\frac{1+\chi_0(x)}{2}\,dx=2\pi \quad \text{и} \quad \frac{1}{2^n}\int_0^{2\pi}\frac{1+\chi_n(x)}{2}\,dx=\frac{\operatorname{mes}U_n}{2^n}=\frac{\pi}{2^n}.$$

Если бы множество значений функции $F(E)$ было выпукло, то оно содержало бы все точки вида $\lambda F(R)$, где $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, так как оно содержит точки $(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ и $F(R)$. Мы покажем, однако, что оно не содержит точки $\frac{1}{2}F(R)$. Допустим, что $F(E)=\frac{1}{2}F(R)$, т. е.

$$\pi=y_0(E)=\int_E\frac{1+\chi_0(x)}{2}\,dx=\int_E dx=\operatorname{mes}E$$

и

$$\frac{\pi}{2^{n+1}}=y_n(E)=\frac{1}{2^n}\int_E\frac{1+\chi_n(x)}{2}\,dx=\frac{1}{2^n}\int_{EU_n}dx=\frac{\operatorname{mes}(EU_n)}{2} \quad \text{при} \quad n>0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{mes}E=\pi \quad \text{и} \quad \operatorname{mes}(EU_n)=\frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad n>0.$$

Но тогда

$$\operatorname{mes}CE=\pi \quad \text{и} \quad \operatorname{mes}(U_nCE)=\frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad n>0.$$

Положим $\omega(x)=+1$, если $x\in E$ и $\omega(x)=-1$, если $x\in CE$; тогда

$$\int_0^{2\pi}\chi_0(x)\,\omega(x)\,dx=\operatorname{mes}E-\operatorname{mes}CE=0,$$

$$\int_0^{2\pi}\chi_n(x)\,\omega(x)\,dx=\operatorname{mes}U_nE-\operatorname{mes}U_nCE=0,$$

т. е. функция $\omega(x)$ оказывается ортогональной ко всем функциям системы $\chi_0(x)$, $\chi_1(x)$, $\ldots$, $\chi_n(x)$, $\ldots$, что противоречит полноте этой системы. Полученное противоречие доказывает, что точка $\frac{1}{2}F(R)$ не принадлежит множеству значений функции $F(E)$ *.

Поступило
29. I. 1945

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ляпунов А. А., О вполне аддитивных вектор-функциях, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., 4, 1940.

[2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.

* Настоящее сообщение в несколько иной редакции было направлено в Труды Педагогического ин-та им. Либкнехта, но ввиду военного времени не было напечатано.

A. LIAPOUNOFF. SUR LES FONCTIONS-VECTEURS COMPLÈTEMENT ADDITIVES

RÉSUMÉ

Nous donnons un exemple d'une fonction-vecteur complètement additive, définie sur tous les ensembles mesurable du segment $[0, 2\pi]$, dont les valeurs appartiennent au parallélépipède compacte de l'espace l_1 et dont l'ensemble de valeurs n'est pas convexe (cf. [1]).