

И. Н. СНЕДДОН и Д. С. БЕРРИ

# КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Перевод с английского

А. И. СМЕРНОВА

Под редакцией

Э. И. ГРИГОЛЮКА



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1961

HANDBUCH DER PHYSIK  
HERAUSGEGEBEN VON  
S. FLÜGGE  
BAND VI  
ELASTIZITÄT UND PLASTIZITÄT

---

J. N. SNEDDON AND D. S. BERRY  
THE CLASSICAL THEORY  
OF ELASTICITY

Springer-Verlag  
Berlin—Göttingen—Heidelberg  
1958

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	6
Классическая теория упругости . . . . .	7
1. Введение . . . . .	7
<b>А. Общая теория . . . . .</b>	<b>10</b>
<b>I. Теория деформации . . . . .</b>	<b>10</b>
2. Вектор перемещения . . . . .	10
3. Тензор деформации . . . . .	12
4. Физические компоненты вектора перемещения . . . . .	16
5. Инварианты деформации . . . . .	16
6. Бесконечно малые деформации . . . . .	17
7. Уравнения совместности . . . . .	18
<b>II. Теория напряжения . . . . .</b>	<b>21</b>
8. Тензор напряжения . . . . .	21
9. Уравнения движения и уравнения равновесия . . . . .	24
10. Упругий потенциал . . . . .	28
11. Вариационные принципы . . . . .	31
<b>III. Соотношения между напряжением и деформацией . . . . .</b>	<b>32</b>
12. Закон Гука . . . . .	32
13. Однородные изотропные тела . . . . .	35
14. Классическая теория . . . . .	39
15. Соотношения между упругими постоянными однородных упругих тел . . . . .	46
16. Обозначения Кармана . . . . .	49
<b>В. Кручение и изгиб . . . . .</b>	<b>51</b>
<b>I. Кручение . . . . .</b>	<b>51</b>
17. Кручение кругового цилиндра . . . . .	51
18. Кручение некруговых цилиндров . . . . .	53
19. Функция напряжения . . . . .	58
20. Кручение полых цилиндров . . . . .	60
21. Решение задачи кручения для некоторых частных случаев . . . . .	62
22. Конечные деформации при кручении кругового цилиндра . . . . .	67

II. Изгиб балок . . . . .	70
23. Элементарная теория изгиба . . . . .	70
24. Применимость элементарной теории . . . . .	71
C. Плоские статические задачи теории упругости . . . . .	74
I. Общая теория . . . . .	74
25. Плоская деформация . . . . .	75
26. Плоское напряженное состояние . . . . .	76
27. Обобщенное плоское напряженное состояние . . . . .	77
II. Функции напряжения Эри . . . . .	78
28. Бигармоническое уравнение . . . . .	78
29. Нагружение легкой балки . . . . .	81
30. Функция Эри в полярных координатах . . . . .	83
31. Деформация полого цилиндра . . . . .	84
III. Комплексные потенциалы . . . . .	87
32. Определение потенциалов . . . . .	87
33. Связь с функцией Эри . . . . .	90
34. Преобразования к ортогональным криволинейным координатам . . . . .	92
35. Ограничения, накладываемые на потенциалы . . . . .	95
36. Кольцо . . . . .	100
37. Случай эллиптического отверстия . . . . .	102
IV. Методы интеграла Коши . . . . .	104
38. Интегралы Коши . . . . .	105
39. Первый метод; области, отображаемые на круг . . . . .	111
40. Эллиптическое отверстие в бесконечной пластине . . . . .	114
41. Первый метод; полуплоскость . . . . .	117
42. Второй метод; полуплоскость . . . . .	121
43. Одиночный штамп с прямолинейным основанием . . . . .	126
V. Методы преобразования Фурье . . . . .	128
44. Бесконечное тело, нагруженное массовыми силами . . . . .	128
45. Полубесконечное тело с поверхностной нагрузкой . . . . .	130
46. Сосредоточенная нагрузка на полубесконечное тело . . . . .	133
47. Задачи о трещинах и штампе . . . . .	134
VI. Методы действительного потенциала . . . . .	137
48. Потенциальные функции Пейна . . . . .	137
49. Однородные краевые задачи . . . . .	140
50. Задачи со смешанными граничными условиями . . . . .	141
51. Задачи о бесконечной полосе . . . . .	147
D. Трехмерные статические задачи теории упругости . . . . .	148
I. Общая теория . . . . .	148
52. Ортогональные криволинейные координаты . . . . .	148
53. Векторная форма уравнений равновесия . . . . .	151
54. Решение уравнений равновесия в форме, данной Кельвином . . . . .	152
55. Сосредоточенная нагрузка в бесконечном теле . . . . .	154
56. Решение Буссинеска — Папковича . . . . .	155
57. Простые решения . . . . .	158

58. Использование потенциальных функций в теории упругости . . . . .	159
59. Осесимметричное давление на поверхность полубесконечного тела . . . . .	161
60. Свойство замкнутости решения Буссинеска—Папковича . . . . .	162
II. Метод Бетти . . . . .	163
61. Метод Бетти . . . . .	164
62. Формула для определения расширения . . . . .	165
63. Решение задачи о плоскости, предложенное Черруги . . . . .	168
III. Метод интегральных преобразований . . . . .	169
64. Напряжения в бесконечной среде, обусловленные массовыми силами . . . . .	170
65. Решение Терцава для полубесконечной среды . . . . .	171
66. Задачи со смешанными граничными условиями . . . . .	174
IV. Применение криволинейных координат . . . . .	176
67. Задача о сфере . . . . .	177
68. Симметричная деформация тела вращения . . . . .	180
69. Использование сплюснутых сфероидальных координат . . . . .	182
E. Динамические задачи . . . . .	185
I. Упругие волны . . . . .	185
70. <i>P</i> -волны и <i>S</i> -волны . . . . .	185
71. Волны Рэлея . . . . .	188
72. Волны Лява . . . . .	190
73. Распространение упругих волн в цилиндрах . . . . .	193
74. Возбуждение упругих волн массовыми силами . . . . .	199
II. Краевые задачи динамической теории упругости . . . . .	202
75. Введение . . . . .	202
76. Метод комплексного переменного . . . . .	203
77. Метод интегральных преобразований . . . . .	207
F. Термоупругость . . . . .	211
78. Основное уравнение термоупругости . . . . .	211
79. Безразмерная форма уравнений . . . . .	214
80. Задачи об установившихся состояниях . . . . .	214
Литература . . . . .	217

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая вниманию читателя книга И. Н. Снеддона и Д. С. Берри входит в состав шестого тома обширной (из 54 томов) «Физической энциклопедии», выпускаемой германским издательством Шпрингер (Handbuch der Physik, herausgegeben von S. Flügge, т. VI, Elastizität und Plastizität. Springer-Verlag, 1958).

В книге дано сжатое и четкое изложение основных проблем классической теории упругости: ее общей теории, кручения и изгиба, плоской и пространственной задачи. Кроме того, в книге рассмотрены вопросы динамической теории упругости и термоупругости. Особое внимание уделено методам исследования задач упругости.

Книга Снеддона и Берри будет интересна всем изучающим теорию упругости.

*Э. Григолюк*

## КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

**1. Введение.** Теория упругости изучает механику деформируемых тел, которые восстанавливают свою первоначальную форму, после того как удалены силы, вызывающие деформацию. Обсуждение явлений упругости встречается уже в работах Гука (1676 г.). Однако первые реальные попытки создания теории упругости, исходя из понятия сплошной среды, позволяющего игнорировать молекулярное строение тела и описывать макроскопические явления с помощью функций координат пространства, относятся к первой половине восемнадцатого столетия<sup>1)</sup>. С тех пор было приложено много усилий к изучению математической теории упругости и ее приложений к физике и инженерному делу. Судя по большому числу опубликованных работ по изучаемому предмету, исключается возможность с одинаковой полнотой изложить весь предмет в объеме одной книги. Настоящая работа имеет более ограниченную цель. В ней делается попытка дать краткий обзор некоторых разделов теории упругости и вместе с тем обсудить достаточное количество отдельных задач для того, чтобы дать некоторые представления относительно математического аппарата, необходимого для решения подобных задач. Даже в пределах этих ограниченных рамок в книге имеются значительные пробелы. В ней ничего, например, не говорится о такой важной теме как теория упругой устойчивости или о таком важном разделе как вычисление упругих постоянных кристаллов с помощью теории кристаллических решеток.

---

<sup>1)</sup> Описание раннего периода истории теории упругости читатель найдет в работе Todhunter I., Pearson K., *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*, 2 v., Cambridge, 1893.

Большая часть этих пробелов заполняется несколькими прекрасными, недавно появившимися учебниками: Грина и Церна (1954 г.), Сокольников (1956 г.) и изданием английского перевода первого издания книги классической работы Мухелишвили (1954 г.)<sup>1</sup>.

Первая часть настоящей работы (раздел А) посвящена основам общей теории. Несмотря на то, что в этом разделе рассматривается *классическая* теория упругости, в которой деформации считаются бесконечно малыми, мы следуем здесь теории конечных деформаций, развитой Грином и Церна, поскольку она освещает основные вопросы предмета.

В разделе В обсуждаются две очень несложные задачи: кручение цилиндров и изгиб балок. Эти задачи являются простыми иллюстрациями применения общей теории, и решение их имеет некоторое значение для инженерной практики.

Самый большой раздел работы (раздел С) посвящен плоским статическим задачам теории упругости. Этот раздел, естественно, во многом основан на важных, недавно появившихся, работах русских математиков по теории упругости, подробно изложенных в прекрасной книге Мухелишвили. Далее следует раздел (D), посвященный методам решения трехмерных задач.

В конце помещены небольшие разделы, в которых рассматриваются динамические задачи (E) и вопросы термоупругости (F). Физик, интересующийся физическими основами классической теории упругости, может сосредоточить свое внимание на этих разделах и на разделе А.

Библиографический указатель литературы ограничен наиболее известными книгами по исследуемому вопросу и в дополнении к математическим исследованиям содержит работы наиболее интересные в приложениях теории упругости к геофизике и инженерному делу. К другим фундаментальным вопросам, которые были опущены в этой работе, относятся следующие: решение специальных задач, в которых рассматриваются конечные деформации, обследованные Грином и Церна (1954 г.) и Марнаганом (1951 г.); теория оболочек, изложенная Тимошенко (1940 г.) и Голь-

---

<sup>1</sup>) Подробнее см. библиографию.



денвейзером (1953 г.) и теория упругой устойчивости, изложенная Тимошенко (1934 г.); подробное обсуждение вопросов использования вариационных методов, данное Лейбензоном (1943 г.) и Сокольниковым (1956 г.); применение функционального анализа к приближенному решению задач упругости, описанное Канторовичем (1952 г.) и Сингхом (1957 г.); использование метода аналогий (подобно, например, методу мыльной пленки) и уравнений в конечных разностях в упругости, обсуждавшееся Тимошенко и Гудиром (1951 г.). Прямые экспериментальные методы, подобные методам фотоупругости и тензометрии, являются предметом отдельных глав этой книги<sup>1</sup>).

---

<sup>1</sup> То есть шестого тома «Физической энциклопедии». (Прим. перев.)

---

## А. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

### 1. Теория деформации

В первой части раздела, посвященного общей теории, будет рассмотрена теория деформации и обсужден вопрос о построении тензора деформаций. Как уже указывалось во введении, исследование, излагаемое здесь, основано на работе Грина и Церна.

**2. Вектор перемещения.** Допустим, что в момент времени  $t = 0$  упругое тело находится в покое и имеет форму  $S$ ,

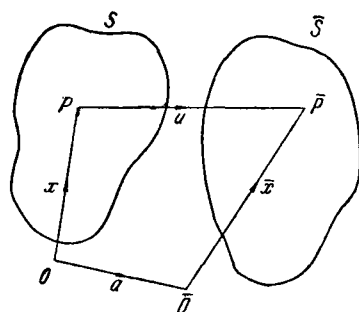


Рис. 1.

описываемую в системе неподвижных прямоугольных осей координат с началом в точке  $O$ . Координаты произвольной точки  $P$  тела равны при этом  $(x_1, x_2, x_3)$ . Обозначим через  $x$  вектор положения точки  $P$ . Допустим теперь, что упругое тело подверглось деформированию и приняло новую форму  $\bar{S}$  таким образом, что в момент времени  $t$  рассматриваемая точка  $P$  переместилась в точку  $\bar{P}$

с вектором положения  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ , отнесенным к новой системе осей с началом в точке  $\bar{O}$  (рис. 1). Радиус-вектор положения  $\bar{P}$  относительно точки  $P$  представляет перемещение точки  $P$  при движении тела от конфигурации  $S$  к конфигурации  $\bar{S}$  и по этой причине называется *вектором перемещения*. Если радиус-вектор точки  $\bar{O}$  относительно точки  $O$  обозначить через  $a$ , то согласно

векторной алгебре имеем

$$u = \bar{x} - x + a. \quad (2.1)$$

До сих пор не было сделано никакого предположения относительно природы материала, образующего упругое тело, кроме предположения о его непрерывности. Теперь мы сделаем дополнительное предположение, что природа материала тела такова, что координаты  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$  произвольной точки  $\bar{P}$  в состоянии  $\bar{S}$  являются однозначными функциями времени  $t$  и координат  $x_1, x_2, x_3$  положения соответствующей точки  $P$  в исходном состоянии  $S$ . Допустим также, что эти функции, за исключением, быть может, некоторых особых точек, линий или поверхностей, обладают непрерывными производными по  $x_1, x_2, x_3$  требуемого порядка. Пусть

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.2)$$

Допустим, что таким же образом и  $x_i$  можно представить в виде непрерывной функции от  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, t$ :

$$x_i = x_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, t) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.3)$$

Физические гипотезы, заключающиеся в утверждениях (2.2) и (2.3), следует рассматривать как аксиомы, на которых основана наша теория; оправдание этих аксиом заключается в том, что они приводят к теоретическим результатам, которые находятся в согласии с наблюдаемыми экспериментальными фактами. Примем также, что конфигурации  $S$  и  $\bar{S}$  расположены в трехмерном евклидовом пространстве.

Из соотношений (2.2) и (2.3) следует, что дифференциалы  $d\bar{x}^r$  в момент времени  $t$  связаны с дифференциалами  $dx^r$  с помощью равенств

$$\left. \begin{aligned} d\bar{x}^r &= \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} dx^s, \\ dx^r &= \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s} d\bar{x}^s. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Квадрат линейного элемента конфигурации  $S$  можно

записать в виде

$$ds^2 = dx^i dx^i, \quad (2.5)$$

а квадрат линейного элемента  $\bar{S}$  будет равен

$$\bar{ds}^2 = \bar{dx}^i \bar{dx}^i. \quad (2.6)$$

Исходную конфигурацию  $S$  можно характеризовать посредством системы криволинейных координат  $(q_1, q_2, q_3)$ ; будем считать, что эта система движется непрерывно вместе с телом при переходе из положения  $S$  в положение  $\bar{S}$  и может быть, таким образом, использована в качестве системы криволинейных координат для конфигурации  $\bar{S}$ . Поэтому можно написать

$$x_r = x_r(q_1, q_2, q_3), \quad \bar{x}_r = \bar{x}_r(q_1, q_2, q_3, t) \quad (r = 1, 2, 3). \quad (2.7)$$

Используя это соотношение, получим из формулы (2.1), что вектор перемещения  $u$  можно представить в форме

$$u = u(q_1, q_2, q_3, t). \quad (2.8)$$

**3. Тензор деформации.** Для квадратов линейных элементов в  $S$  и  $\bar{S}$  в соответствии с выражениями (2.7) получим

$$ds^2 = g_{rs} dq^r dq^s, \quad \bar{ds}^2 = \bar{g}_{rs} d\bar{q}^r d\bar{q}^s. \quad (3.1)$$

В этих формулах  $g_{ij}$ ,  $\bar{g}_{ij}$  являются соответственно ковариантными метрическими тензорами в  $S$  и  $\bar{S}$ ; величины  $\bar{g}_{ij}$  вычисляются для заданного момента времени  $t$  и являются поэтому функциями как  $t$ , так и  $q_1, q_2, q_3$ . Деформированное состояние упругого тела может быть, очевидно, охарактеризовано разностью  $\bar{ds}^2 - ds^2$ ; из выражений (3.1) следует, что

$$\bar{ds}^2 - ds^2 = 2\gamma_{rs} dq^r dq^s, \quad (3.2)$$

где

$$\gamma_{rs} = \frac{1}{2} (\bar{g}_{rs} - g_{rs}). \quad (3.3)$$

Величины  $\gamma_{rs}$  являются, очевидно, симметричными компонентами ковариантного тензора второго ранга; они образуют *тензор деформации*. Следует заметить, что когда

тензор деформации во всех точках тела равен нулю, то  $d\bar{s} = ds$ , и тело является недеформируемым.

Для того чтобы найти геометрическую интерпретацию тензора деформаций, рассмотрим сначала удлинение  $e_r$  линейного элемента  $ds_r$  вдоль координатной линии  $q_r$ . Поскольку  $ds_r = \sqrt{g_{rr}}dq^r$ ,  $d\bar{s}_r = \sqrt{\bar{g}_{rr}}dq^r$  (по  $r$  суммирования нет), то

$$e_r = \sqrt{\frac{\bar{g}_{rr}}{g_{rr}}} - 1 = \sqrt{\left(1 + \frac{2\gamma_{rr}}{g_{rr}}\right)} - 1.$$

Отсюда следует, что

$$\gamma_{rr} = g_{rr} \left[ e_r + \frac{1}{2} e_r^2 \right] \quad (3.4)$$

(по  $r$  суммирования нет). Допустим затем, что  $\vartheta_{rs}$  — угол между линейными элементами  $d\bar{s}_r$  и  $d\bar{s}_s$  в деформированном теле, тогда можно сразу показать, что

$$\cos \vartheta_{rs} = \frac{\bar{g}_{rs}}{\sqrt{\bar{g}_{rr}\bar{g}_{ss}}}$$

(по  $r$  и  $s$  суммирования нет) и, следовательно,

$$\cos \vartheta_{rs} = \frac{g_{rs} + 2\gamma_{rs}}{\sqrt{(g_{rr} + 2\gamma_{rr})(g_{ss} + 2\gamma_{ss})}}. \quad (3.5)$$

Таким образом, углы между линейными элементами определяются величинами  $\gamma_{rs}$ .

Выразим теперь компоненты тензора деформации через компоненты вектора перемещения  $\mathbf{u}$ . Заметим прежде, что если  $e_r$ ,  $\bar{e}_r$  являются соответственно базисными векторами в положениях  $S$  и  $\bar{S}$ , то

$$\bar{e}_r = \partial_r \bar{\mathbf{x}}, \quad e_r = \partial_r \mathbf{x}.$$

Здесь следует напомнить, что выражение  $\partial_r f$  обозначает производную  $\partial f / \partial q_r$ . Таким образом, из уравнения (2.1) следует, что

$$\bar{e}_r = \partial_r \mathbf{u} + e_r. \quad (3.6)$$

Так как  $\bar{g}_{rs} = \bar{e}_r \cdot \bar{e}_s$ , то

$$\begin{aligned}\bar{g}_{rs} &= (e_r + \partial_r u)(e_s + \partial_s u) = \\ &= g_{rs} + e_r \cdot \partial_s u + e_s \cdot \partial_r u + \partial_r u \cdot \partial_s u\end{aligned}$$

и поэтому

$$\gamma_{rs} = \frac{1}{2}(e_r \cdot \partial_s u + e_s \cdot \partial_r u + \partial_r u \cdot \partial_s u). \quad (3.7)$$

Теперь можно написать

$$u = u_m e^m = u^m e_m \quad (3.8)$$

и, следовательно,

$$\partial_r u = \nabla_r u_m e^m, \quad (3.9)$$

где  $\nabla_r u_m$  обозначает ковариантную производную

$$\nabla_r u_m = \partial_r u_m - \left\{ \begin{matrix} s \\ mr \end{matrix} \right\} u_s. \quad (3.10)$$

Знак  $\left\{ \begin{matrix} s \\ mr \end{matrix} \right\}$  является символом Кристоффеля второго рода, который вычисляется для конфигурации  $S$  по метрическим тензорам  $g_{rs}$ ,  $g^{rs}$ . Подставляя выражение (3.9) в уравнение (3.7) и используя соотношения

$$e_r \cdot e^m = g_r^m = \delta_r^m, \quad e^m \cdot e^n = q^{mn},$$

найдем, что

$$\gamma_{rs} = \frac{1}{2}(\nabla_s u_r + \nabla_r u_s + \nabla_r u^n \Delta_s u_n). \quad (3.11)$$

Это выражение дает компоненты тензора деформации в зависимости от компонентов вектора перемещения конфигурации  $S$ .

С другой стороны, можно написать уравнение (3.6) в форме

$$e_r = \bar{e}_r - \bar{\nabla}_r \bar{u}_m \bar{e}^m,$$

где вектор перемещения выражен через контрвариантные базисные векторы  $\bar{e}^r$  состояния  $\bar{S}$ , а  $\bar{\nabla}$  обозначает ковариантное дифференцирование по  $\bar{S}$ , т. е. дифференцирование по  $q_r$  и  $\bar{g}_{rs}$ . Отсюда

$$g_{rs} = e_r \cdot e_s = \bar{g}_{rs} - \bar{\nabla}_s \bar{u}_r - \bar{\nabla}_r \bar{u}_s + \bar{\nabla}_r \bar{u}^n \bar{\nabla}_s \bar{u}_n.$$

Таким образом, для состояния  $\bar{S}$  можно выразить компоненты тензора деформации через компоненты вектора перемещения  $u$  в виде

$$\gamma_{rs} = \frac{1}{2} (\bar{\nabla}_s \bar{u}_r + \bar{\nabla}_r \bar{u}_s - \bar{\nabla}_r \bar{u}^n \bar{\nabla}_s \bar{u}_n). \quad (3.12)$$

Используя, например, прямоугольную систему координат  $(x_1, x_2, x_3)$ , найдем для состояния  $S$

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right\}, \\ \gamma_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right), \end{aligned}$$

в то время как в системе прямоугольных координат  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  в состоянии  $\bar{S}$  будем иметь

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_1} \right)^2 \right\}, \\ \gamma_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2} \cdot \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2} \cdot \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_2} \cdot \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_3} \right). \end{aligned}$$

Из ковариантного тензора деформаций  $\gamma_{mn}$  второго рода можно образовать смешанный тензор любым из двух методов, сообразно с тем — используем ли мы метрический тензор  $g^{mn}$  исходного недеформированного состояния или метрический тензор  $\bar{g}^{mn}$  конечного деформированного состояния. Используя тензор  $g^{mn}$ , можно построить смешанный тензор

$$\gamma_n^m = g^{mp} \gamma_{pn} = \frac{1}{2} (g^{mp} \bar{g}_{pn} - \delta_n^m).$$

Точно таким же путем можно построить контрвариантный тензор

$$\epsilon^{mn} = g^{mp} \epsilon_p^n = \bar{g}^{nq} \gamma_q^m = g^{mp} \bar{g}^{nq} \gamma_{pq}.$$

Следует также заметить, что если  $g$  представляет собой детерминант с элементами  $g_{mn}$ , то  $\sqrt{g} dq^1 dq^2 dq^3$  представляет объем элемента в недеформированном состоянии. Если поэтому обозначить через  $\bar{\rho}$  плотность в недеформированном состоянии и через  $\rho$  плотность в

деформированном состоянии, то

$$\bar{q} \sqrt{\bar{g}} = q \sqrt{g}. \quad (3.13)$$

4. **Физические компоненты вектора перемещения.** Если  $\delta_m$  представляет единичный вектор в направлении  $e_m$ , то

$$\delta_m = \frac{e_m}{\sqrt{e_m \cdot e_m}} = \frac{e_m}{\sqrt{g_{mm}}}.$$

Таким образом, второе из уравнений (3.8) можно представить в форме

$$u = v^m \delta_m, \quad (4.1)$$

где

$$v^m = u^m \sqrt{g_{mm}}. \quad (4.2)$$

Величины  $v^m$  являются просто компонентами вектора  $u$ , отнесенными к косоугольной системе осей координат, направления которых совпадают с направлениями  $e_m$ . Они называются *физическими компонентами перемещения* вдоль координатной кривой  $q_m$  в состоянии  $S$ .

5. **Инварианты деформации.** Из тензорного исчисления хорошо известно, что из компонентов симметричного тензора второго ранга можно образовать три инварианта. Таким образом, инварианты деформации можно получить из смешанного тензора  $\gamma_n^m$ . Эти инварианты являются коэффициентами при различных степенях  $\lambda$  в разложении детерминанта

$$|\lambda \delta_n^m + \delta_n^m + 2\gamma_n^m| = |\lambda \delta_n^m + g^{mp} \bar{g}_{pn}|.$$

Таким образом, если  $I_1, I_2, I_3$  обозначают инварианты деформации, то

$$\lambda^3 + I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda + I_3 = \begin{vmatrix} \lambda + g^{1p} \bar{g}_{p1} & g^{1p} \bar{g}_{p2} & g^{1p} \bar{g}_{p3} \\ g^{2p} \bar{g}_{p1} & \lambda + g^{2p} \bar{g}_{p2} & g^{2p} \bar{g}_{p3} \\ g^{3p} \bar{g}_{p1} & g^{3p} \bar{g}_{p2} & \lambda + g^{3p} \bar{g}_{p3} \end{vmatrix}.$$

Раскрывая детерминант и приравнивая коэффициенты при  $\lambda$  в одинаковых степенях, получим после небольшого



преобразования

$$I_1 = g^{mn} \bar{g}_{mn}, \quad I_2 = \bar{g}^{mn} g_{mn} I_3, \quad I_3 = \frac{\bar{g}}{g}, \quad (5.1)$$

где  $\bar{g}$  и  $g$  обозначают соответственно детерминанты  $|\bar{g}_{mn}|$  и  $|g_{mn}|$ .

Если тело *несжимаемо*, то объем элементов остается неизменным и  $\bar{g} = g$ ; следовательно, для несжимаемого твердого тела

$$I_1 = g^{mn} \bar{g}_{mn}, \quad I_2 = \bar{g}^{mn} g_{mn}, \quad I_3 = 1. \quad (5.2)$$

Другой ряд инвариантов деформаций  $J_1, J_2, J_3$  можно определить через коэффициенты при различных степенях  $\lambda$  в разложении детерминанта

$$|\lambda \delta_n^m + \delta_n^m - 2\varepsilon_n^m| = |\lambda \delta_n^m + \bar{g}^{mp} g_{pn}|.$$

В общем случае найдем

$$J_1 = g_{mn} \bar{g}^{mn}, \quad J_2 = \frac{1}{2} (J_1^2 - \bar{g}^{mp} \bar{g}^{nq} g_{mn} g_{pq}), \quad J_3 = \frac{g}{\bar{g}}. \quad (5.3)$$

Из общей теории известно, что эти два ряда инвариантов деформации не являются независимыми. Действительно, легко показать, что

$$J_1 = \frac{I_2}{I_3}, \quad J_2 = \frac{I_1}{I_3}, \quad J_3 = \frac{1}{I_3}. \quad (5.4)$$

**6. Бесконечно малые деформации.** В классической теории упругости или в теории бесконечно малых упругих деформаций принимается, что компоненты вектора перемещения и их производные по  $q_m$  являются бесконечно малыми первого порядка, так что произведениями и квадратами этих величин мы пренебрегаем по сравнению с их первыми степенями. Если это приближение использовать в выражении (3.11), то найдем, что ковариантный тензор деформации примет вид

$$\gamma_{mn} = \frac{1}{2} (\nabla_m u_n + \nabla_n u_m). \quad (6.1)$$

Дифференциал вектора перемещения равен

$$du = \nabla_n u_m du^n u^m$$

и может быть записан в форме

$$d\mathbf{u} = (\gamma_{mn} + \omega_{mn}) dq^n \mathbf{g}^m, \quad (6.2)$$

где  $\omega_{mn}$  — кососимметричный тензор, определяемый выражением

$$\omega_{mn} = \frac{1}{2} (\nabla_n u_m - \nabla_m u_n). \quad (6.3)$$

Если тело не деформировано, т. е. если  $\gamma_{mn} = 0$ , то

$$d\mathbf{u} = \omega_{mn} dq^n \mathbf{g}^m, \quad (6.4)$$

откуда видно, что кососимметричный тензор  $\omega_{mn}$  представляет бесконечно малое перемещение твердого тела. Если найти ковариантную производную от обеих частей выражения (6.3), то получим соотношение

$$\begin{aligned} \nabla_p \omega_{mn} &= \frac{1}{2} (\nabla_{np} u_m - \nabla_{mp} u_n) = \\ &= \frac{1}{2} \nabla_n (\nabla_p u_m + \nabla_m u_p) - \frac{1}{2} \nabla_m (\nabla_p u_n + \nabla_n u_p), \end{aligned}$$

которое эквивалентно следующему:

$$\nabla_p \omega_{mn} = \nabla_n \gamma_{pm} - \nabla_m \gamma_{pn}. \quad (6.5)$$

**7. Уравнения совместности.** До сих пор мы не использовали предположения о том, что как исходное недеформированное состояние  $S$ , так и деформированное состояние  $\bar{S}$  расположены в трехмерном евклидовом пространстве. Как хорошо известно из геометрии Римана<sup>1)</sup>, тензор Римана — Кристоффеля для такого пространства должен равняться нулю. Таким образом, если обозначить тензор Римана — Кристоффеля для недеформированного состояния через  $R_{mnpq}$ , а для деформированного состояния через  $\bar{R}_{mnpq}$ , то

$$R_{mnpq} = 0, \quad \bar{R}_{mnpq} = 0. \quad (7.1)$$

Из определения тензора Римана — Кристоффеля имеем

$$\begin{aligned} \bar{R}_{mnpq} &= \frac{1}{2} (\partial_{np} \bar{g}_{mq} + \partial_{mq} \bar{g}_{np} - \partial_{nq} \bar{g}_{mp} - \partial_{mp} \bar{g}_{nq}) + \\ &+ \bar{g}^{ij} \{ \overline{[m, qi]} \overline{[n, pj]} - \overline{[m, pi]} \overline{[n, qj]} \}, \quad (7.2) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicists, p. 99, Oxford, 1951.

где  $\overline{[m, qi]}$  обозначает символ Кристоффеля первого рода, вычисленный для тела в состоянии  $\overline{S}$ . Используя соотношение

$$\overline{g}_{mn} = g_{mn} + 2\gamma_{mn}$$

в определении символа Кристоффеля для состояния  $\overline{S}$ , найдем, что он связан с символом для состояния  $S$  с помощью выражения

$$\overline{[m, np]} = \overline{[m, np]} + 2\gamma_{mnp}, \quad (7.3)$$

где символ  $\gamma_{mnp}$  обозначает выражение

$$\frac{1}{2} (\partial_n \gamma_{pm} + \partial_m \gamma_{pn} - \partial_p \gamma_{mn}).$$

Подставляя соотношение (7.3) в (7.2), найдем, что разность между тензорами Римана — Кристоффеля в деформированном и недеформированном состояниях равна

$$\begin{aligned} \overline{R}_{mnpq} - R_{mnpq} = & \\ = & \partial_{np} \gamma_{mq} + \partial_{mq} \gamma_{np} - \partial_{mp} \gamma_{nq} - \partial_{nq} \gamma_{mp} - \\ & - 2e^{ij} \{ [m, qi] [n, pj] - [m, pi] [n, qj] \} + \\ & + 2g^{ij} \{ [n, pj] \gamma_{mqi} + [m, qi] \gamma_{npj} - [n, qj] \gamma_{mpi} - [m, pi] \gamma_{nqj} \} - \\ & - 4e^{ij} \{ [n, pj] \gamma_{mqi} + [m, qi] \gamma_{nqj} - [n, qj] \gamma_{mpi} - \\ & - [m, pi] \gamma_{nqj} + 2\gamma_{mqi} \gamma_{npj} - 2\gamma_{mpi} \gamma_{nqj} \} + \\ & + 4g^{ij} (\gamma_{mqi} \gamma_{npj} - \gamma_{mpi} \gamma_{nqj}). \quad (7.4) \end{aligned}$$

Если использовать условие (7.1), то правая часть выражения (7.4) будет равна нулю. Так как имеется только шесть независимых компонентов тензора Римана — Кристоффеля, то отсюда следует, что тензор (7.4) сводится к шести независимым соотношениям. Эти шесть соотношений выражают тот факт, что компоненты  $\gamma_{mn}$  тензора деформаций не являются независимыми, однако должны быть такими, чтобы пространства  $S$  и  $\overline{S}$  были евклидовыми пространствами; эти уравнения известны под названием *уравнений совместности*.

Если деформации являются бесконечно малыми, то можно пренебречь членами второго порядка в уравнениях

совместности, и тогда они перейдут в следующие:

$$\begin{aligned} & \partial_{np}\gamma_{mq} + \partial_{mq}\gamma_{np} - \partial_{mp}\gamma_{nq} - \partial_{nq}\gamma_{mp} - \\ & - 2\varepsilon^{ij} \{ [m, qi] [n, pj] - [m, pi] [n, qj] \} + \\ & + 2g^{ij} \{ [n, pj] \gamma_{mqi} + [m, qi] \gamma_{npi} - \\ & - [n, qj] \gamma_{mpi} - [m, pi] \gamma_{nqj} \} = 0. \end{aligned}$$

Используя соотношения

$$[m, ns] = g_{rs} \left\{ \begin{matrix} r \\ mn \end{matrix} \right\}, \quad \varepsilon^{ij} = g^{ir} g^{js} \gamma_{rs},$$

получим, что эти уравнения могут быть представлены в форме

$$\begin{aligned} & \partial_{np}\gamma_{mq} + \partial_{mq}\gamma_{np} - \partial_{mp}\gamma_{nq} - \partial_{nq}\gamma_{mp} - \\ & - 2\gamma_{rs} \left( \left\{ \begin{matrix} r \\ qm \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} s \\ pn \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} r \\ mp \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} s \\ qn \end{matrix} \right\} \right) + \\ & + 2 \left\{ \begin{matrix} r \\ np \end{matrix} \right\} \gamma_{mqr} + 2 \left\{ \begin{matrix} r \\ qm \end{matrix} \right\} \gamma_{npr} - \\ & - 2 \left\{ \begin{matrix} r \\ nq \end{matrix} \right\} \gamma_{mpr} - 2 \left\{ \begin{matrix} r \\ mp \end{matrix} \right\} \gamma_{nqr} = 0. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Из определения ковариантного дифференцирования видно, что эти выражения можно записать в виде

$$\nabla_{np}\gamma_{mq} + \nabla_{mq}\gamma_{np} - \nabla_{mp}\gamma_{nq} - \nabla_{nq}\gamma_{mp} = 0. \quad (7.6)$$

Следует заметить, что уравнения совместности (7.6), которые справедливы для бесконечно малых деформаций, можно получить непосредственно из определения кососимметричного тензора  $\omega_{mn}$ . Из соотношения (6.5), записанного в форме

$$\nabla_n \gamma_{mq} - \nabla_m \gamma_{nq} = \omega_{mn},$$

видно, что

$$\nabla_{np}\gamma_{mq} - \nabla_{mp}\gamma_{nq} = \nabla_{qp}\omega_{mn} = \nabla_{pq}\omega_{mn} = \nabla_{nq}\gamma_{mp} - \nabla_{mq}\gamma_{np}.$$

Последнее соотношение идентично уравнению (7.6).

## II. Теория напряжения

8. **Тензор напряжения.** Для того чтобы определить напряженное состояние в точке  $P$  в деформированном теле  $S$ , рассмотрим элемент поверхности  $\Delta A$ , расположенный в  $S$  и содержащий точку  $P$ . Можно допустить, что сила, с которой части тела, находящиеся по одну сторону поверхности, действуют на другую, статически

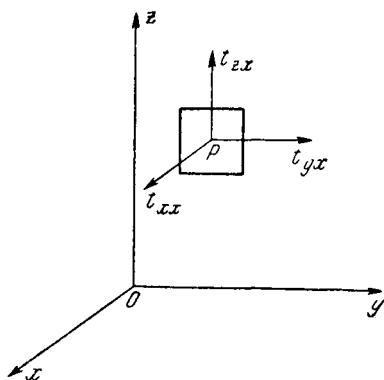


Рис. 2.

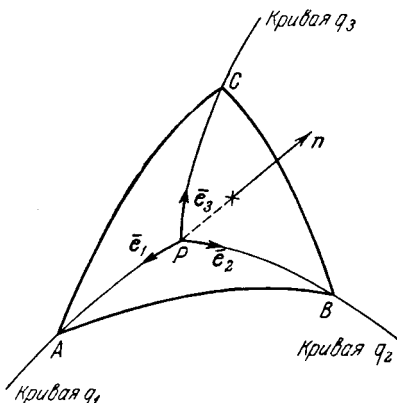


Рис. 3.

эквивалентна силе  $\Delta \mathbf{T}$  в точке  $P$  и паре  $\Delta \mathbf{G}$ . Далее можно показать, что когда  $\Delta A \rightarrow 0$ , то  $(\Delta \mathbf{G}/\Delta A) \rightarrow 0$  и  $\Delta \mathbf{T}/\Delta A$  стремится к вектору  $\mathbf{t}$ , называемому вектором напряжения и относящемуся к элементу площади; вектор напряжения представляет силу, действующую на единицу площади поверхности деформированного тела. Следует заметить, что напряжение, возникающее в элементе поверхности твердого тела, в общем случае, не направлено по нормали к этой поверхности и имеет как нормальные, так и тангенциальные компоненты. Если, например, выбрать  $\Delta A$  в виде квадрата, содержащего точку  $P$  и перпендикулярного к оси  $x$ , то получим картину, изображенную на рис. 2. Вектор напряжения этой поверхности, в общем случае, не будет параллелен оси  $Ox$  и может быть разложен на три компонента  $t_{xx}$ ,  $t_{yx}$ ,  $t_{zx}$  соответственно вдоль осей  $(x, y, z)$ . В общем случае,

в любой точке  $P$  деформированного состояния  $\bar{S}$ , можно построить тетраэдр  $PABC$ , ребра которого образованы координатными линиями  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$ , проходящими через точку  $P$  и имеющими соответственно длину  $ds_1$ ,  $ds_2$ ,  $ds_3$ . Рассматривая бесконечно малый треугольник  $PAB$  (рис. 3), видим, что

$$\vec{AB} = \vec{PB} - \vec{PA} = dq^1 \mathbf{e}_1 - dq^2 \mathbf{e}_2.$$

Площадь поверхности  $q_1 = \text{const}$  этого тетраэдра равна

$$dS_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\bar{g}^{11}} dq^2 dq^3$$

и может быть представлена в векторной форме

$$\frac{\mathbf{e}^1 dS_1}{\sqrt{\bar{g}^{11}}}.$$

Площади поверхностей  $g_2 = \text{const}$ ,  $g_3 = \text{const}$  выражаются с помощью аналогичных соотношений. Площадь  $ABC$  может быть представлена вектором

$$\mathbf{n} dS.$$

Поскольку площадь  $ABC$  равна сумме векторов площадей трех других граней тетраэдра, то имеем следующее равенство:

$$\mathbf{n} dS = \sum_{i=1}^3 \frac{\bar{\mathbf{e}}^i dS_i}{\sqrt{\bar{g}^{ii}}}. \quad (8.1)$$

Таким образом, если  $n_i$  являются ковариантными компонентами  $\mathbf{n}$ , т. е. если

$$\mathbf{n} = n_i \bar{\mathbf{e}}^i,$$

то

$$n_i \sqrt{\bar{g}^{ii}} dS = dS_i. \quad (8.2)$$

Рассматривая равновесие тетраэдра  $PABC$ , найдем, что

$$\mathbf{t} dS = \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}_i dS_i. \quad (8.3)$$

Подставляя в уравнение (8.3) величину  $dS_i$ , даваемую выражением (8.2), и разделив обе части получившегося уравнения на  $dS$ , получим, что

$$\mathbf{t} = \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{t}_i V \bar{g}^{ii}. \quad (8.4)$$

Величина  $\mathbf{t}$  является инвариантной по отношению к общим преобразованиям системы координат, а величины  $n_1, n_2, n_3$  образуют ковариантный вектор; таким образом, из выражения (8.4) следует, что

$$t_i V \bar{g}^{ii} = \tau^{ij} \bar{e}_j, \quad (8.5)$$

где  $\tau^{ij}$  представляет контрвариантный тензор второго ранга, называемый *контрвариантным тензором напряжения*. Смешанный и ковариантный тензоры напряжений могут быть определены с помощью соотношений<sup>1)</sup>

$$\tau_j^i = \bar{g}_{rj} \tau^{ir}, \quad \tau_{ij} = \bar{g}_{ir} \tau_j^r. \quad (8.6)$$

Если ввести контрвариантные и ковариантные компоненты  $t^i, t_i$  тензора напряжения  $\mathbf{t}$ , так что

$$\mathbf{t} = t^i \bar{\mathbf{e}}_i = t_i \bar{\mathbf{e}}^i, \quad (8.7)$$

то из формул (8.4) — (8.7) следует, что 223

$$t^i = \tau^{ij} n_j, \quad t_i = \tau_i^j n_j. \quad (8.8)$$

Точно таким же образом, как это было сделано для физических компонентов перемещения (ср. выше § 4), можно ввести *физические компоненты тензора напряжения*. Определим физические компоненты тензора напряжения с помощью соотношений

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{\bar{g}_{ij}}{\bar{g}^{ii}} \right)^{\frac{1}{2}} \tau^{ij}. \quad (8.9)$$

Подставляя выражение (8.9) в (8.5), найдем, что

$$\mathbf{t}_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \frac{\bar{\mathbf{e}}_j}{V \bar{g}_{ji}}. \quad (8.10)$$

<sup>1)</sup> Позднее будет видно (см. § 9 ниже), что  $\tau^{ij}$  является симметричным тензором.

9. Уравнения движения и уравнения равновесия. В дополнение к напряжениям, рассмотренным выше, могут существовать внешние нагрузки, действующие на тело, находящееся в деформированном состоянии  $\bar{S}$ . Эти

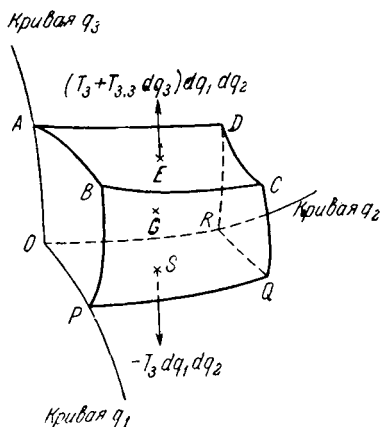


Рис. 4.

нагрузки могут быть нагрузками двух родов: 1) поверхностные силы, 2) массовые силы. Поверхностные силы можно представить вектором  $\Sigma$ , так что  $\Sigma dS$  представляет поверхностную силу, действующую на элемент поверхности площади  $dS$ . Массовые силы, типичным примером которых являются силы тяготения, пропорциональны массам частиц, на которые они действуют; массовые силы можно представить вектором  $P$  и, обозначив плот-

ность тела через  $\rho$ , считать, что массовая сила может быть представлена вектором поля  $P\rho dt$ , где  $dt$  обозначает элемент объема.

Выведем теперь уравнения движения малого параллелепипеда  $OPQRABCD$  в деформированном теле  $\bar{S}$ , ограниченного поверхностями  $q_i = \text{const}$ ,  $q_i + dq^i = \text{const}$  (рис. 4). Сила, действующая на грань  $OPQR$ , равна

$$-t_3 \sqrt{g g^{33}} dq^1 dq^2;$$

так как площадь  $OPQR$  равна  $\sqrt{g g^{33}} dq^1 dq^2$ , то эту силу можно представить в виде  $-T_3 dq^1 dq^2$ , где

$$T_3 = \sqrt{g g^{33}} t_3. \quad (9.1)$$

Сила, действующая на грань  $ABCD$ , равна

$$(T_3 + \partial_3 T_3 dq^3) dq^1 dq^2, \quad (9.2)$$



где  $\partial_3 \mathbf{T}_3$  обозначает  $\partial \mathbf{T}_3 / \partial q^3$ . Из выражений (9.1) и (9.2) следует, что сила, обусловленная напряжениями на противоположных гранях  $OPQR$ ,  $ABCD$ , равна

$$\partial_3 \mathbf{T}_3 dq^1 dq^2 dq^3. \quad (9.3)$$

Аналогичные соотношения будут иметь место для других граней. Суммируя эти силы, найдем, что результирующая сила, действующая на параллелепипед и обусловленная напряжениями, равна

$$\partial_i \mathbf{T}_i dq^1 dq^2 dq^3. \quad (9.4)$$

Объем параллелепипеда равен  $V \bar{g} dq^1 dq^2 dq^3$ , так что массовая сила, действующая на него, равна

$$\rho \mathbf{P} V \bar{g} dq^1 dq^2 dq^3, \quad (9.5)$$

где  $\rho$  — плотность тела в деформированном состоянии; скорость изменения количества движения параллелепипеда будет равна

$$\rho \mathbf{f} V \bar{g} dq^1 dq^2 dq^3, \quad (9.6)$$

где  $\mathbf{f}$  — ускорение параллелепипеда. Используя выражения (9.4) — (9.6) и применяя второй закон движения Ньютона, разделив обе части получающегося в результате соотношения на  $dq^1 dq^2 dq^3$ , найдем уравнение движения твердого тела

$$\partial_i \mathbf{T}_i + \bar{\rho} V \bar{g} \mathbf{P} = \bar{\rho} V \bar{g} \mathbf{f}. \quad (9.7)$$

Если тело находится в равновесии, то  $\mathbf{f} = 0$ , и уравнение (9.7) переходит в следующее:

$$\partial_i \mathbf{T}_i + \bar{\rho} V \bar{g} \mathbf{P} = 0. \quad (9.8)$$

Условия на границе тела заключаются в том, что поверхностные напряжения равны заданным поверхностным нагрузкам, т. е. на границе должно иметь место равенство

$$\mathbf{t} = \Sigma. \quad (9.9)$$

Поскольку  $\mathbf{T}_i = \sqrt{\bar{g}} \tau^{ij} \bar{\mathbf{e}}_j$ , то

$$\partial_i \mathbf{T}_i = \tau^{ij} \bar{\mathbf{e}}_j \partial_i \sqrt{\bar{g}} + \sqrt{\bar{g}} \bar{\mathbf{e}}_j \partial_i \tau^{ij} + \sqrt{\bar{g}} \tau^{ij} \partial_i \bar{\mathbf{e}}_j.$$

Из определения символа Кристоффеля второго рода<sup>1)</sup> легко видеть, что

$$\partial_i \sqrt{\bar{g}} = \overline{\left\{ \begin{matrix} r \\ ri \end{matrix} \right\}} \sqrt{\bar{g}}.$$

Просто показать, что

$$\partial_i \bar{e}_j = \overline{\left\{ \begin{matrix} r \\ ji \end{matrix} \right\}} e_r,$$

следовательно,

$$\tau^{ij} \partial_i \bar{e}_j = \overline{\left\{ \begin{matrix} r \\ ji \end{matrix} \right\}} \tau^{ij} e_r \equiv \overline{\left\{ \begin{matrix} j \\ ri \end{matrix} \right\}} \tau^{ir} e_j.$$

Поэтому найдем

$$\partial_i \mathbf{T}_i = \sqrt{\bar{g}} \bar{e}_j \left( \partial_i \tau^{ij} + \overline{\left\{ \begin{matrix} r \\ ri \end{matrix} \right\}} \tau^{ij} + \overline{\left\{ \begin{matrix} j \\ ri \end{matrix} \right\}} \tau^{ir} \right) = \sqrt{\bar{g}} \bar{e}_j \bar{\nabla}_i \tau^{ij}, \quad (9.10)$$

где  $\bar{\nabla}_i \tau^{ij}$  обозначает ковариантную производную от  $\tau^{ij}$  и деформированном состоянии  $\bar{S}$ .

Введем обозначения

$$\mathbf{P} = P^j e_j, \quad \mathbf{f} = f^j e_j \quad (9.11)$$

и подставим выражения (9.10) и (9.11) в уравнения (9.7) и (9.8). В результате найдем, что уравнение движения можно представить в виде

$$\bar{\nabla}_i \tau^{ij} + \bar{\rho} P^j = \bar{\rho} f^j, \quad (9.12)$$

а уравнение равновесия в форме

$$\bar{\nabla}_i \tau^{ij} + \bar{\rho} P^j = 0. \quad (9.13)$$

Аналогично, обозначив поверхностные нагрузки посредством

$$\Sigma = \Sigma^j \bar{e}_j, \quad (9.14)$$

найдем, что граничные условия (9.9) можно записать в форме

$$\tau^{ij} n_i = \Sigma^j, \quad (9.15)$$

<sup>1)</sup> Tietz H., Geometrie, см. Handbuch der Physik, т. II, p. 175, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955.

где  $n_i$  являются ковариантными компонентами единичного вектора  $\mathbf{n}$ , нормального к поверхности.

Если деформации бесконечно малы, то при анализе напряженного состояния можно использовать систему осей недеформированного состояния  $S$ . Таким образом, можно принять

$$\mathbf{t} = \tau^{ij} n_i \mathbf{e}_j, \quad (9.16)$$

и для физических компонентов напряжения будем иметь

$$\sigma_{ij} = \tau^{ij} \sqrt{\frac{g_{jj}}{g_{ii}}}. \quad (9.17)$$

Так как  $\bar{g} = g$ ,  $\bar{q} = q$ , то уравнения движения примут вид

$$\nabla_i \tau^{ij} + q P^j = q f^j, \quad (9.18)$$

тогда как уравнения равновесия перейдут в следующие:

$$\nabla_i \tau^{ij} + q P^j = 0. \quad (9.19)$$

Мы получили уравнения движения сплошной среды, рассматривая поступательное движение элемента тела. Проанализируем теперь равновесие такого элемента с тем, чтобы показать, что тензор напряжения  $\tau^{ij}$  является симметричным тензором. Если обозначить центр параллелепипеда через  $G$ , а центры граней  $ABCD$ ,  $OPQR$  соответственно через  $E$  и  $S$ , то легко показать, что  $\vec{GE} = \frac{1}{2} dq^3 \bar{\mathbf{e}}_3$ ,  $\vec{GS} = -\frac{1}{2} dq^3 \bar{\mathbf{e}}_3$ , так что с точностью до малых первого порядка момент сил, действующих на грани  $ABCD$ ,  $OPQR$ , равен  $\bar{\mathbf{e}}_3 \times \mathbf{T}_3 dq^1 dq^2 dq^3$ . Для других граней получим аналогичные выражения; складывая эти выражения и учитывая, что суммарный момент сил должен быть равен нулю, найдем (разделив на  $dq^1 dq^2 dq^3$ ), что

$$\bar{\mathbf{e}}_i \times \mathbf{T}_i = 0.$$

Подставляя сюда выражение для  $\mathbf{T}_i$

$$\mathbf{T}_i = \sqrt{\bar{g}} \tau^{ij} \bar{\mathbf{e}}_j,$$

имеем

$$\tau^{ij} (\bar{\mathbf{e}}_i \times \bar{\mathbf{e}}_j) = 0.$$

Раскрывая это выражение, получим

$$(\tau^{23} - \tau^{32}) \bar{e}_1 + (\tau^{31} - \tau^{13}) \bar{e}_2 + (\tau^{12} - \tau^{21}) \bar{e}_3 = 0,$$

отсюда следует, что

$$\tau^{ij} = \tau^{ji}. \quad (9.20)$$

Таким образом, тензор напряжения является симметричным тензором.

Согласно хорошо известной теореме тензорного исчисления имеем, что если тензор  $\tau^{ji}$  является симметричным тензором, то всегда можно найти такую систему координат (в  $\bar{S}$ ), в которой будут равны нулю все компоненты тензора, не стоящие на диагонали (т. е.  $\tau^{ij}$ ,  $i \neq j$ ). В такой системе прямые, совпадающие с направлением координатных кривых, называются *главными осями напряжения*, а компоненты, стоящие на диагонали тензора, называются *главными компонентами напряжения*.

**10. Упругий потенциал.** Допустим, что когда тело деформировано, точка  $P$  недеформированного состояния  $S$  переходит в точку  $\bar{P}$  деформированного состояния таким образом, что  $\overrightarrow{P\bar{P}} = \mathbf{v}(q_1, q_2, q_3, t)$  есть вектор перемещения. Допустим далее, что  $S'$  является любым другим геометрически возможным состоянием, при котором точка  $P$  переходит не в точку  $\bar{P}$ , а в соседнюю точку  $P'$ , причем  $\overrightarrow{P\bar{P}'} = \mathbf{v}'(q_1, q_2, q_3, t)$ . Разность

$$\delta \mathbf{v} = \mathbf{v}'(q_1, q_2, q_3, t) - \mathbf{v}(q_1, q_2, q_3, t) \quad (10.1)$$

называется *вариацией  $\mathbf{v}$* . Вариация  $\partial_i \mathbf{v}$  равна

$$\delta(d_i \mathbf{v}) = \partial_i(\delta \mathbf{v}). \quad (10.2)$$

Так как

$$\bar{e}_i = e_i + \partial_i \mathbf{v},$$

и  $e_i$  не зависит от  $\mathbf{v}$ , то

$$\delta \bar{e}_i = \partial_i(\delta \mathbf{v}). \quad (10.3)$$

Откуда тотчас же следует, что

$$\delta(\bar{g}_{ij}) = \bar{e}_i \cdot \partial_j(\delta \mathbf{v}) + \bar{e}_j \cdot \partial_i(\delta \mathbf{v}), \quad (10.4)$$

и поскольку  $\delta(g_{ij}) = 0$ , то, очевидно, что

$$2\delta(\gamma_{ij}) = \bar{e}_i \cdot \partial_j(\delta\mathbf{v}) + \bar{e}_j \cdot \partial_i(\delta\mathbf{v}). \quad (10.5)$$

Если умножить обе части уравнения (9.7) на  $dq^1, dq^2, dq^3$  и проинтегрировать по всему объему  $\bar{S}$ , то в результате получим

$$\int_{\bar{S}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \mathbf{T}_i \cdot \delta\mathbf{v} + \bar{q}(\mathbf{P} - \mathbf{f}) \cdot \delta\mathbf{v} \right\} d\tau = 0, \quad (10.6)$$

где  $d\tau = \sqrt{g} dq^1 dq^2 dq^3$ .

Первый член левой части уравнения (10.6) можно теперь записать в форме

$$\int_{\bar{S}} \frac{d\tau}{\sqrt{g}} \partial_i (\mathbf{T}_i \cdot \delta\mathbf{v}) - \int_{\bar{S}} \frac{d\tau}{\sqrt{g}} \mathbf{T}_i \cdot \partial_i (\delta\mathbf{v}).$$

Используя теорему Грина, найдем, что первый член этого выражения можно представить в виде

$$\int_{\bar{B}} (\mathbf{T}_i \cdot \delta\mathbf{v}) \frac{n_i dS}{\sqrt{g}},$$

где  $\bar{B}$  есть граница области  $\bar{S}$ . Кроме того, имеем

$$\frac{n_i \mathbf{T}_i}{\sqrt{g}} = \mathbf{t} = \Sigma \quad \text{на } \bar{B},$$

так что уравнение (10.6) можно записать в виде

$$\Delta A - \int_{\bar{S}} \bar{q} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{v} d\tau = \Delta U, \quad (10.7)$$

где

$$\Delta A = \int_{\bar{B}} (\Sigma \cdot \delta\mathbf{v}) dS + \int_{\bar{S}} \bar{q}(\mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{v}) d\tau \quad (10.8)$$

и

$$\Delta U = \int_{\bar{S}} \mathbf{T}_i \cdot \partial_i (\delta\mathbf{v}) \frac{d\tau}{\sqrt{g}}. \quad (10.9)$$

Теперь, поскольку  $\tau^{ij}$  есть симметричный тензор, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i \cdot \partial_i (\delta \mathbf{v}) &= \sqrt{\bar{g}} \cdot \tau^{ij} (\bar{\mathbf{e}}_j \cdot \partial_i (\delta \mathbf{v})) = \\ &= \frac{1}{2} \tau^{ij} \sqrt{\bar{g}} \{ \bar{\mathbf{e}}_j \cdot \partial_i (\delta \mathbf{v}) + \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \partial_j (\delta \mathbf{v}) \} = \tau^{ij} (\bar{g}) \delta (\gamma_{ij}), \end{aligned}$$

так что имеем

$$\Delta U = \int_{\bar{S}} \Delta E \bar{Q} d\tau, \quad (10.10)$$

где

$$\Delta E = \frac{\tau^{ij} \delta (\gamma_{ij})}{\bar{Q}}. \quad (10.11)$$

Определим теперь упругое тело  $\bar{S}$  таким образом, чтобы при всех возможных перемещениях  $\delta \mathbf{v}$  величина  $\Delta E$  была бы полным дифференциалом непрерывной однозначной функции, зависящей только от деформированного состояния  $\bar{S}$  в момент времени  $t$  и от тензоров, которые представляют состояние  $S$ .

При таких условиях можно написать

$$E = E (\gamma_{ij}). \quad (10.12)$$

Мы охарактеризовали упругое тело функцией  $E$ , обладающей указанным выше свойством. Можно задать вопрос, существует ли в действительности такая функция? На этот вопрос можно легко ответить (утвердительно) в двух простых физических случаях, когда изменение состояния от недеформированного состояния  $S$  к деформированному состоянию  $\bar{S}$  является обратимым и будет либо адиабатическим, либо изотермическим<sup>1)</sup>. Сравнивая уравнения (10.11) и (10.12) и используя симметрию тензора  $\tau^{ij}$ , найдем, что

$$\Delta E = \delta E = \frac{\partial E}{\partial \gamma_{ij}} \delta \gamma_{ij} \quad (10.13)$$

и

$$\tau^{ij} = \frac{1}{2} \bar{Q} \left( \frac{\partial E}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial E}{\partial \gamma_{ji}} \right). \quad (10.14)$$

<sup>1)</sup> Простое доказательство см. в работе Sokolnikoff I. S., *Mathematical theory of elasticity*, p. 83—87, New-York 1946.

Поскольку масса элементов сохраняется при возможном перемещении,  $\delta(\bar{\rho} d\tau) = 0$ , то

$$\delta U = \int_{\bar{S}} \bar{\rho} \delta E d\tau,$$

так что, если не учитывать постоянную интегрирования, получим

$$U = \int_{\bar{S}} \bar{\rho} E d\tau. \quad (10.15)$$

Функция  $U$  называется *полной упругой потенциальной энергией* деформированного состояния  $\bar{S}$ ;  $E$  называется *упругим потенциалом тела, отнесенным к единице массы*.

**11. Вариационные принципы.** Возвратимся теперь к уравнению (10.7) и допустим, что вариация  $\delta v$  такова, что она равна нулю в моменты времени  $t_0$  и  $t_1$ , так что

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\bar{S}} \bar{\rho} f \cdot \delta v d\tau dt = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\bar{S}} \bar{\rho} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial (\delta v)}{\partial t} d\tau dt = - \delta \int_{t_0}^{t_1} K dt,$$

где  $K$  — кинетическая энергия деформированного тела  $\bar{S}$ . Тогда очевидно, что уравнение (10.7) эквивалентно следующему:

$$\int_{t_0}^{t_1} \Delta A dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta(U - K) dt.$$

Величина  $\Delta A$  обозначает теперь возможную работу, произведенную массовыми и поверхностными силами, действующими на  $\bar{S}$  на возможном перемещении  $\delta v$ . Если эти внешние силы можно определить, исходя из функции потенциальной энергии  $V$ , тогда  $\Delta A = -\delta V$ , и видно, что уравнение (10.7) эквивалентно следующему:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0, \quad (11.1)$$

где  $L$  обозначает функцию Лагранжа

$$L = K - U - V. \quad (11.2)$$

В случае равновесия  $f = 0$ , так что уравнение (10.7) переходит в следующее:

$$\delta(U + V) = 0, \quad (11.3)$$

из которого вытекает, что величина полной потенциальной энергии в состоянии равновесия сохраняется постоянной.

### III. Соотношения между напряжением и деформацией

**12. Закон Гука.** До сих пор напряженное и деформированное состояния твердого тела рассматривались независимо. Теперь мы рассмотрим соотношения между напряжением и деформацией для определенного класса тел, которые мы будем называть упругими телами. Для того чтобы вывести такое соотношение, нужно проанализировать структуру твердого тела и затем, применяя аппарат статистической механики, определить механические свойства тела, исходя из природы атомов (или других составных элементов подобно цепочкам молекул, объединяющих их). Попытки осуществить подобную задачу<sup>1)</sup> делались в течение последних ста лет; до этих пор теория основывалась на эмпирических соотношениях, подобных, например, закону Гука, которым устанавливается, что если растягивать тонкий стержень или проволоку, имеющих длину  $l_0$  в недеформированном состоянии, то сила, необходимая для растяжения стержня до длины  $l$ , прямо пропорциональна удлинению  $l - l_0$ . Прежде чем приступить к обсуждению общей теории упругости, покажем, как, применяя законы термодинамики к очень простой системе, получить соотношение между напряжением и деформацией в форме закона Гука.

Мы рассмотрим только *обратимый* процесс, т. е. сосредоточим свое внимание на явлениях, в которых состояние системы однозначно определяется термодинамическими переменными. Из первого и второго законов термодинамики известно, что когда происходит какое-либо изменение состояния в *единице массы* твердого

<sup>1)</sup> См. статью Leibfried в энциклопедии Handbuch der Physik, т. VII, ч. I и статьи в т. X (Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958).



тела, то приращение  $de$  внутренней энергии, связанное с работой, сообщаемой телу, определяется уравнением

$$de = T ds + \Delta w, \quad (12.1)$$

где  $T$  означает абсолютную температуру и  $ds$  — изменение энтропии  $s$  в единице массы. При анализе равновесия простой системы этого рода часто удобно использовать понятие свободной энергии Гельмгольца  $f$ , определяемой уравнением

$$f = e - Ts. \quad (12.2)$$

Для изотермических процессов очевидно, что  $\Delta f = \Delta w$ , т. е. приращение свободной энергии Гельмгольца равно работе внешних сил.

Если рассмотреть образец длины  $l$ , на который действует растягивающее напряжение  $\sigma$  и гидростатическое давление  $p$ , то полная работа, произведенная этими силами, равна

$$\Delta w = \sigma dl - p dv, \quad (12.3)$$

где  $dv$  обозначает изменение удельного объема  $v$ . Объединяя выражения (12.1) — (12.3), найдем, что

$$df = \sigma dl - p dv - s dT. \quad (12.4)$$

Если рассмотреть деформацию резины при атмосферном давлении, то можно обнаружить, что в этом случае  $p dv$  меньше  $\sigma dl$  примерно в  $10^{-3}$  раз. Поэтому в этом случае можно написать<sup>1)</sup>

$$df = \sigma dl - s dT, \quad (12.5)$$

откуда следует

$$\sigma = \left( \frac{\partial f}{\partial l} \right)_T \quad (12.6)$$

и

$$s = - \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_l. \quad (12.7)$$

---

<sup>1)</sup> Более подробный термодинамический анализ, при котором учитывается изменение объема, см. G e e G., Trans. Faraday Soc. 42, 585 (1946).

Из уравнений (12.6) и (12.7) имеем

$$\left(\frac{\partial s}{\partial l}\right)_T = -\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_l. \quad (12.8)$$

Исключая  $f$  и  $s$  из уравнений (12.2) и (12.6), получим следующее соотношение:

$$\left(\frac{\partial e}{\partial l}\right)_T = \sigma - T\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_l. \quad (12.9)$$

Исследуем физическую сущность этих соотношений. На рис. 5 показана зависимость силы, необходимой для того, чтобы образец сохранял постоянную длину, от абсолютной температуры. Если  $P$  есть точка на кривой, соответствующая абсолютной температуре  $T$ , а  $PQ$  представляет касательную к кривой в точке  $P$ , то наклон прямой

$$PQ = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_l = -\left(\frac{\partial s}{\partial l}\right)_T, \quad (12.10)$$

тогда как согласно выражению (12.9) имеем

$$OQ = \sigma - T\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_l = \left(\frac{\partial e}{\partial l}\right)_T. \quad (12.11)$$

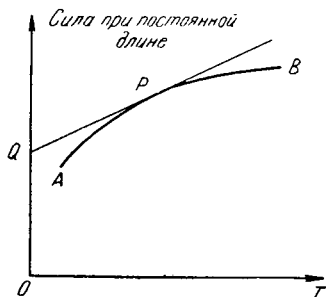


Рис. 5.

Уравнения (12.10) и (12.11) позволяют использовать экспериментальные кривые, подобные приведенной на рис. 5,

для вычисления изменения внутренней энергии и энтропии образца в процессе деформации. В некоторых случаях эти кривые переходят в прямые<sup>1)</sup>, что показывает, что для рассматриваемых материалов обе производные  $(\partial s/\partial l)_T$  и  $(\partial e/\partial l)_T$  не зависят от абсолютной температуры  $T$ . Если прямая проходит через начало координат, так что  $OQ = 0$ , то  $(\partial e/\partial l)_T = 0$ , и из уравнения (12.6) следует, что  $\sigma = -T(\partial s/\partial l)_T$ ; таким образом, в этом случае упругая сила увеличивается только за счет изменения энтропии тела.

<sup>1)</sup> Meyer, Ferri, *Helv. chim. Acta* 18, 570 (1935); Ant-hoone, Gaston, Guth, *J. Phys. chem.* 46, 826 (1942.)

Возвратимся к истолкованию уравнения (12.6). Для изотермических процессов, включающих малые изменения  $l - l_0$  от равновесного значения  $l_0$ , свободную энергию Гельмгольца можно представить в виде трех первых членов разложения ее в ряд Тейлора

$$f = f_0 + \left( \frac{\partial f}{\partial l_0} \right)_T (l - l_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial l_0^2} \right)_T (l - l_0)^2, \quad (12.12)$$

где  $f_0$ ,  $(\partial f / \partial l_0)_T$ ,  $(\partial^2 f_0 / \partial l_0^2)_T$  обозначают величины  $f$ ,  $(\partial f / \partial l)_T$  и  $(\partial^2 f / \partial l^2)_T$  для значения  $l = l_0$ . В состоянии равновесия  $l_0$  свободная энергия Гельмгольца минимальна, так что

$$\left( \frac{\partial f}{\partial l_0} \right)_T = 0, \quad \left( \frac{\partial^2 f}{\partial l_0^2} \right)_T > 0,$$

и выражение (12.12) переходит в следующее:

$$f = f_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial l_0^2} \right) (l - l_0)^2.$$

Подставляя это соотношение в формулу (12.6), найдем

$$\sigma = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial l_0^2} \right)_T (l - l_0). \quad (12.13)$$

Это выражение указывает на то, что для *малых* удлинений  $l - l_0$  напряжение в согласии с законом Гука прямо пропорционально удлинению. Если удлинения большие, то ряд Тейлора для  $f$  нельзя представлять тремя первыми членами, как это было сделано в выражении (12.12). Удерживая члены более высоких порядков, увидим, что зависимость  $\sigma$  от  $l - l_0$  уже не будет линейной.

**13. Однородные изотропные тела.** Вернемся теперь к обсуждению общей теории. Из уравнения (10.14) видно, что напряжения, возникающие в упругом теле, можно вычислить, если известен упругий потенциал  $E$  единицы массы тела. Поскольку в процессе деформации масса сохраняется, то  $\rho \sqrt{g} = \bar{\rho} \sqrt{\bar{g}}$ . Следовательно, если ввести упругий потенциал  $W = \rho E$  единицы объема недеформированного тела, то уравнение (10.14) может быть записано в форме

$$\sqrt{\bar{g}} \cdot \tau^{ij} = \frac{1}{2} \sqrt{\bar{g}} \left( \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ji}} \right). \quad (13.1)$$

Если поэтому желательно получить явное соотношение между напряжением и деформацией, то нужно вычислить функцию  $W$ , а это в свою очередь ведет к необходимости некоторых физических предположений относительно природы деформируемого тела. Мы ограничимся рассмотрением тел, которые имеют постоянную плотность в недеформированном состоянии, а упругий потенциал этих тел зависит только от трех инвариантов деформации  $I_1, I_2, I_3$ , определяемых выражениями (5.1), и от скалярных функций координат. Твердое тело, обладающее последним свойством, называется *изотропным*; если, далее, эти скалярные функции являются постоянными, можно сказать, что тело является *однородным*. Следовательно, для *однородного изотропного* тела величина  $W$  является функцией только  $I_1, I_2, I_3$ . В этой книге будут рассматриваться однородные изотропные тела.

Если подставить функцию  $W(I_1, I_2, I_3)$  в выражение (13.1), то в результате найдем

$$\tau^{ij} = \frac{1}{2} (g/\bar{g})^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\partial W}{\partial I_1} \left( \frac{\partial I_1}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial I_1}{\partial \gamma_{ji}} \right) + \frac{\partial W}{\partial I_2} \left( \frac{\partial I_2}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial I_2}{\partial \gamma_{ji}} \right) + \frac{\partial W}{\partial I_3} \left( \frac{\partial I_3}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial I_3}{\partial \gamma_{ji}} \right) \right\}. \quad (13.2)$$

При помощи уравнений (5.1) можно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial I_1}{\partial \gamma_{ji}} &= 4g^{ij}, \\ \frac{\partial I_2}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial I_2}{\partial \gamma_{ji}} &= 4(g^{ij}g^{rs} - g^{ir}g^{js})\bar{g}_{rs}, \\ \frac{\partial I_3}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial I_3}{\partial \gamma_{ji}} &= \frac{4\bar{g}\bar{g}^{ij}}{g} = 4I_3\bar{g}^{ij}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулы (13.2), получим соотношения между напряжением и деформацией

$$\tau^{ij} = \Phi g^{ij} + \Psi B^{ij} + p\bar{g}^{ij}, \quad (13.3)$$

где

$$B^{ij} = I_1 g^{ij} - g^{ir}g^{js}\bar{g}_{rs} \quad (13.4)$$

и

$$\Phi = \frac{2}{V I_3} \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \Psi = \frac{2}{V I_3} \frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad p = 2\sqrt{I_3} \frac{\partial W}{\partial I_3}. \quad (13.5)$$

В частном случае, когда недеформированное тело не только однородно и изотропно, но еще и несжимаемо,  $I_3 = 1$  и  $W$  будет функцией только  $I_1$  и  $I_2$ . Соотношения между напряжением и деформацией (13.3) имеют и в этом случае такую же форму, однако в случае несжимаемых тел

$$\Phi = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \Psi = 2 \frac{\partial W}{\partial I_2}. \quad (13.6)$$

Функцию  $p$ , входящую в соотношения между напряжением и деформацией для несжимаемого тела, нельзя определить из третьего уравнения (13.5); она является неизвестным инвариантом, представляющим равномерное гидростатическое давление, которое можно определить из уравнений равновесия и соответствующих граничных условий.

Задача теперь заключается в том, чтобы найти действительный вид функции  $W$  для упругого тела. Определение этой функции, исходя из структуры тела, выходит за рамки этой статьи. Например, для идеальных кристаллических решеток подробный анализ читатель может найти в главе III книги Борна и Хуанга (Born M., Huang K., *Dynamical theory of crystal lattices*, Oxford, 1954), а для тел, подобных резине, в главах III—VII книги Трелоара (Treloar L. R. G., *The physics of rubber elasticity*, Oxford, 1949<sup>1)</sup>). Здесь будут упомянуты только некоторые основные аспекты работ, относящихся к резиноподобным телам.

Кун<sup>2)</sup> определил форму функции  $W$  для вулканизированной резины, рассматривая тело как соединение длинных цепочек молекул, связанных в сравнительно небольшом числе точек, образующих нерегулярную трехмерную сетку. Основные предположения теории Куна — Трелоара заключаются в следующем:

а) цепочки, образующие сетку, все имеют одинаковую суммарную длину;

б) длина смещения цепочек (т. е. расстояние между концами по прямой) распределяется по закону Гаусса;

<sup>1)</sup> Русский перевод см. Трелоар, *Физика упругости каучука*, М.—Л., ИЛ. (*Прим. ред.*)

<sup>2)</sup> Kuhn W., *Kolloid-Z.* 76, 258 (1936); см. также Treloar L. R. G., *Trans. Faraday Soc.* 39, 36, 241 (1943).

с) среда является сплошной и несжимаемой;

д) деформация изменяет компоненты смещения каждой цепочки в том же отношении, в каком изменяются соответствующие размеры куска резины.

Трелоар использовал эти допущения при вычислении (по методу Куна) деформации кубика резины, первоначальная длина ребер которого была равна единице, в прямоугольный параллелепипед с ребрами  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ . Если  $N$  — число молекулярных цепочек на единицу объема, то

$$W = \frac{1}{2} G (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3), \quad (13.7)$$

где

$$G = \frac{1}{2} N k T, \quad (13.8)$$

и  $k$  — постоянная Больцмана. Для этой простой деформации инварианты деформации (если допустить несжимаемость материала) равны

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad I_2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2}, \quad I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1. \quad (13.9)$$

Таким образом, уравнение (13.7) можно записать в форме

$$W = \frac{1}{2} G (I_1 - 3). \quad (13.10)$$

Из экспериментов установлено, что формула (13.10) не выражает адекватно поведение куска резины. Разрыв между теорией и экспериментом до известной степени был сокращен Муни<sup>1)</sup>, который на основе очень простых предположений, независимых от конструктивной модели резины, показал, что если соотношение между напряжением и деформацией для одного типа деформации (например, простого сдвига) задано, то его можно вывести для другого рода деформации. Рассматривая случай, когда резина несжимаема и соотношение между напряжением и деформацией при простом сдвиге предполагается линейным, Муни показал, что для деформации

<sup>1)</sup> Mooney M., J. Appl. Phys. 11, 582 (1940).

единичного кубика упругий потенциал  $W$  имеет вид

$$W = C_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} - 3 \right), \quad (13.11)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — основные константы для данного резино-подобного материала. В терминах инвариантов деформации уравнение Муни может быть записано в форме

$$W = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3), \quad (13.12)$$

так что для такого тела соотношения между напряжением и деформацией имеют вид (13.3), где

$$\Phi = 2C_1, \quad \Psi = 2C_2, \quad (13.13)$$

т. е.  $\Phi$  и  $\Psi$  являются постоянными.

Муни получил более общую форму соотношения на основе нелинейного соотношения для сдвига. В случае деформации кубика он нашел соотношение следующего вида:

$$W = \sum_{r=1}^n \{ A_{2r} (\lambda_1^{2r} + \lambda_2^{2r} + \lambda_3^{2r} - 3) + B_{2r} (\lambda_1^{-2r} + \lambda_2^{-2r} + \lambda_3^{-2r} - 3) \},$$

включающее  $2n$  независимых параметров  $A_2, A_4, \dots, A_{2n}, B_2, B_4, \dots, B_{2n}$ . Выраженное через инварианты деформации это соотношение имеет вид

$$W = A_2 (I_1 - 3) + B_2 (I_2 - 3) + A_4 (I_1^2 - 2I_2 - 3) + B_4 (I_2^2 - 2I_1 - 3) + A_6 (I_1^3 - 3I_1 I_2) + B_6 (I_2^3 - 3I_1 I_2) + \dots,$$

так что для твердого тела этого рода величины  $\Phi$  и  $\Psi$ , встречающиеся в соотношениях между напряжением и деформацией (13.3), равны

$$\Phi = 2(A_2 - 2B_4) + 4A_4 I_1 - 6(A_6 + B_6) I_2 + 6A_6 I_1^2 + \dots$$

$$\Psi = 2(B_2 - 2A_4) - 6(A_6 + B_6) I_1 + 4B_4 I_2 + 6B_6 I_2^2 + \dots$$

**14. Классическая теория.** Когда деформации бесконечно малы, то  $\bar{g} = g$ , и выражение (13.1) сводится к следующему:

$$\tau^{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ji}} \right). \quad (14.1)$$

В этом параграфе будет выведено общее соотношение между напряжением и деформацией в случае классической теории (т. е. теории, соответствующей бесконечно малым деформациям), а затем будет обсуждена форма этого соотношения, которую оно принимает в определенных частных случаях. Поскольку упругий потенциал на единицу объема является инвариантом, то выражение

$$W = W_0 + C^{ij}\gamma_{ij} + \frac{1}{2}C^{ijrs}\gamma_{ij}\gamma_{rs} \quad (14.2)$$

при  $W_0$  постоянном и с величинами  $C$ , удовлетворяющими условиям симметрии

$$C^{ij} = C^{ji}, \quad C^{ijrs} = C^{jirs} = C^{ijsr} = C^{jisr}, \quad (14.3)$$

является совместимым с теми приближениями, которые были уже приняты в теории бесконечно малых деформаций. В выражении (14.2) величина  $C^{ij}$  представляет тензор второго ранга и  $C^{ijrs}$  — тензор четвертого ранга. Подставляя выражение (12.2) для  $W$  в формулу (14.1), найдем, что

$$\tau^{ij} = C^{ij} + C^{ijrs}\gamma_{rs}.$$

Если в начальном состоянии тело не деформировано и свободно от напряжений, то  $\gamma_{ij} = 0$  (для всех  $i$  и  $j$ ), и следовательно, будем иметь, что  $W = 0$ ,  $\tau^{ij} = 0$ . Отсюда сразу следует, что  $W_0 = 0$ ,  $C^{ij} = 0$  для всех  $i$  и  $j$  и поэтому

$$W = \frac{1}{2}C^{ijrs}\gamma_{ij}\gamma_{rs} \quad (14.4)$$

и

$$\tau^{ij} = C^{ijrs}\gamma_{rs}. \quad (14.5)$$

Из выражений (14.4) и (14.5) имеем

$$W = \frac{1}{2}\tau^{ij}\gamma_{ij}. \quad (14.6)$$

Если ввести смешанный тензор

$$C_{mn}^{ij} = C^{ijrs}g_{rm}g_{sn}, \quad (14.7)$$

то из соотношения (14.6) следует, что

$$\tau^{ij} = C_{mn}^{ij}\gamma^{mn}; \quad (14.8)$$



здесь с учетом выражений (14.3), имеем

$$C_{mn}^{ij} = C_{mn}^{ji} = C_{nm}^{ij} = C_{nm}^{ji}. \quad (14.9)$$

Если плотность тела  $\rho$  в недеформированном состоянии  $S$  постоянна и если все компоненты смешанного тензора  $C_{rs}^{ij}$  постоянны всюду в  $S$ , то можно сказать, что тело является *однородным*.

В соответствии с выражением (14.8) имеем

$$\tau_{ij} = C_{ij}^{mn} \gamma_{mn}. \quad (14.10)$$

В системе прямоугольных координат нет различия между ковариантным и контрвариантным смешанными тензорами, так что в этой системе

$$C_{mn}^{ij} = C_{ij}^{mn}. \quad (14.11)$$

В общем случае постоянные  $C_{mn}^{ij}$  зависят от ориентации осей координат. В частном случае, при котором форма  $W$  не зависит от направления этих осей, можно сказать, что тело является *изотропным*. Если  $W$  не обладает этим свойством, то тело называют *анизотропным* или *алотропным*.

Если учесть условия симметрии (14.9) и (14.4), то найдем, что число независимых упругих постоянных равно 21 и их можно представить в виде матриц

$$\begin{pmatrix} C_{11}^{11} & C_{22}^{11} & C_{33}^{11} & C_{23}^{11} & C_{13}^{11} & C_{12}^{11} \\ C_{22}^{11} & C_{22}^{22} & C_{33}^{22} & C_{23}^{22} & C_{13}^{22} & C_{12}^{22} \\ C_{33}^{11} & C_{33}^{22} & C_{33}^{33} & C_{23}^{33} & C_{13}^{33} & C_{12}^{33} \\ C_{23}^{11} & C_{23}^{22} & C_{23}^{33} & C_{23}^{23} & C_{13}^{23} & C_{12}^{23} \\ C_{13}^{11} & C_{13}^{22} & C_{13}^{33} & C_{13}^{23} & C_{13}^{13} & C_{12}^{13} \\ C_{12}^{11} & C_{12}^{22} & C_{12}^{33} & C_{12}^{23} & C_{12}^{13} & C_{12}^{12} \end{pmatrix}. \quad (14.12)$$

а) *Симметрия относительно плоскости*  $x_1x_2$ . Если сделать замену осей

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = -x_3,$$

то

$$\begin{aligned} \gamma'_{11} &= \gamma_{11}, & \gamma'_{12} &= \gamma_{12}, & \gamma'_{22} &= \gamma_{22}, & \gamma'_{33} &= \gamma_{33}, \\ \gamma'_{23} &= -\gamma_{23}, & \gamma'_{13} &= -\gamma_{13}, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned}\tau'_{11} &= C_{11}^{11}\gamma'_{11} + C_{11}^{22}\gamma'_{22} + C_{11}^{33}\gamma'_{33} + 2(C_{11}^{12}\gamma'_{12} + C_{11}^{13}\gamma'_{13} + C_{11}^{23}\gamma'_{23}) = \\ &= C_{11}^{11}\gamma_{11} + C_{11}^{22}\gamma_{22} + C_{11}^{33}\gamma_{33} + 2(C_{11}^{12}\gamma_{12} - C_{11}^{13}\gamma_{13} - C_{11}^{23}\gamma_{23}).\end{aligned}$$

Если имеется симметрия относительно плоскости  $x_1, x_2$ , то

$$\tau'_{11} = \tau_{11} = C_{11}^{11}\gamma_{11} + C_{11}^{22}\gamma_{22} + C_{11}^{33}\gamma_{33} + 2(C_{11}^{12}\gamma_{12} + C_{11}^{13}\gamma_{13} + C_{11}^{23}\gamma_{23}).$$

Сравнивая это выражение с предыдущим, видим, что

$$C_{11}^{13} = C_{11}^{23} = 0.$$

С помощью точно таких же рассуждений можно показать, что

$$C_{13}^{22} = C_{23}^{22} = C_{13}^{33} = C_{22}^{33} = C_{12}^{23} = C_{12}^{13} = 0,$$

так что в этом случае имеется 13 постоянных

$$\begin{pmatrix} C_{11}^{11} & C_{22}^{11} & C_{33}^{11} & 0 & 0 & C_{12}^{11} \\ C_{22}^{11} & C_{22}^{22} & C_{33}^{22} & 0 & 0 & C_{12}^{22} \\ C_{22}^{11} & C_{33}^{22} & C_{33}^{33} & 0 & 0 & C_{12}^{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{23}^{23} & C_{13}^{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{13}^{23} & C_{13}^{13} & 0 \\ C_{12}^{11} & C_{12}^{22} & C_{12}^{33} & 0 & 0 & C_{12}^{12} \end{pmatrix}. \quad (14.13)$$

в) *Ортотропия*. Если тело симметрично относительно плоскостей  $x_2x_3$  и  $x_1x_2$ , то согласно рассуждениям, аналогичным изложенным в (а), сверх 13 постоянных перечисленных выше, равны нулю  $C_{12}^{11}$ ,  $C_{12}^{22}$ ,  $C_{12}^{33}$  и  $C_{13}^{23}$ , таким образом, имеется только 9 не равных нулю постоянных

$$\begin{pmatrix} C_{11}^{11} & C_{22}^{11} & C_{33}^{11} & 0 & 0 & 0 \\ C_{22}^{11} & C_{22}^{22} & C_{33}^{22} & 0 & 0 & 0 \\ C_{33}^{11} & C_{33}^{22} & C_{33}^{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{23}^{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{13}^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{12}^{12} \end{pmatrix}. \quad (14.14)$$

Отсюда следует, что такое тело является также симметричным относительно плоскости  $x_1x_3$ . Подобное тело называется *ортотропным*.

γ) *Гексагональная система.* Система обладает гексагональной симметрией, если она не изменяется при использовании преобразования вида

$$x'_1 = x_1 \cos \vartheta + x_2 \sin \vartheta, \quad x'_2 = -x_1 \sin \vartheta + x_2 \cos \vartheta, \quad x'_3 = x_3,$$

где  $\vartheta$  — произвольный угол. При таком изменении осей имеем

$$\gamma'_{11} = \cos^2 \vartheta \gamma_{11} + 2 \cos \vartheta \sin \vartheta \gamma_{12} + \sin^2 \vartheta \gamma_{22},$$

$$\gamma'_{22} = \sin^2 \vartheta \gamma_{11} - 2 \cos \vartheta \sin \vartheta \gamma_{12} + \cos^2 \vartheta \gamma_{22},$$

$$\gamma'_{33} = \gamma_{33},$$

$$\gamma'_{23} = -\sin \vartheta \gamma_{13} + \cos \vartheta \gamma_{23},$$

$$\gamma'_{31} = \cos \vartheta \gamma_{13} + \sin \vartheta \gamma_{23},$$

$$\gamma'_{12} = (\gamma_{22} - \gamma_{11}) \cos \vartheta \sin \vartheta + \gamma_{12} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta).$$

Компоненты тензора напряжения преобразуются точно таким же образом. Например,

$$\tau'_{33} = \tau_{33};$$

это соотношение может быть записано в виде

$$\begin{aligned} C_{33}^{11} \gamma'_{11} + C_{33}^{22} \gamma'_{22} + C_{33}^{33} \gamma'_{33} + C_{33}^{12} \gamma'_{12} + C_{33}^{13} \gamma'_{13} + C_{33}^{23} \gamma'_{23} = \\ = C_{33}^{11} \gamma_{11} + C_{33}^{22} \gamma_{22} + C_{33}^{33} \gamma_{33} + C_{33}^{12} \gamma_{12} + C_{33}^{13} \gamma_{13} + C_{33}^{23} \gamma_{23}. \end{aligned}$$

Подставляя приведенные выше значения для  $\gamma'_{ij}$ , найдем, что

$$\begin{aligned} C_{33}^{11} (\cos^2 \vartheta \gamma_{11} + 2 \cos \vartheta \sin \vartheta \gamma_{12} + \sin^2 \vartheta \gamma_{22}) + \\ + C_{33}^{22} (\sin^2 \vartheta \gamma_{11} - 2 \cos \vartheta \sin \vartheta \gamma_{12} + \cos^2 \vartheta \gamma_{22}) + \\ + 2C_{33}^{12} \{(\gamma_{22} - \gamma_{11}) \cos \vartheta \sin \vartheta + \gamma_{12} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)\} + \\ + 2C_{33}^{13} (\cos \vartheta \gamma_{13} + \sin \vartheta \gamma_{23}) - 2C_{33}^{23} (\sin \vartheta \gamma_{13} - \cos \vartheta \gamma_{23}) = \\ = C_{33}^{11} \gamma_{11} + C_{33}^{22} \gamma_{22} + 2(C_{33}^{12} \gamma_{12} + C_{33}^{13} \gamma_{13} + C_{33}^{23} \gamma_{23}). \end{aligned}$$

Приравнявая нулю коэффициент при  $\gamma_{11}$  в этом соотношении, получим, что для всех значений  $\vartheta$

$$(C_{33}^{11} - C_{33}^{22}) \sin^2 \vartheta + 2 \sin \vartheta \cos \vartheta C_{33}^{12} = 0,$$

откуда следует, что

$$C_{33}^{22} = C_{33}^{11}, \quad C_{33}^{12} = 0. \quad (14.15)$$

Если приравнять нулю коэффициенты при  $\gamma_{22}$ ,  $\gamma_{12}$ , то получим точно такие же соотношения, а если приравнять нулю коэффициенты при  $\gamma_{13}$ ,  $\gamma_{23}$ , найдем, что

$$C_{33}^{13} = C_{33}^{23} = 0. \quad (14.16)$$

Если провести аналогичный анализ для  $\tau_{13}$  и  $\tau'_{13}$ , то, приравнявая коэффициенты при  $\gamma_{11}$  нулю, получим, что

$$C_{13}^{11} = C_{23}^{11} = C_{13}^{22} = C_{13}^{12} = 0. \quad (14.17)$$

Приравнявая нулю коэффициент при  $\gamma_{22}$ , придем опять к таким же соотношениям, а приравнявая нулю коэффициент при  $\gamma_{33}$ , придем к двум соотношениям (14.16). Приравнявая нулю коэффициент при  $\gamma_{12}$ , найдем, что

$$C_{13}^{11} = C_{13}^{22}, \quad C_{13}^{12} = C_{23}^{12} = 0, \quad (14.18)$$

тогда как если приравнять нулю коэффициент при  $\gamma_{13}$ , то придем к соотношению

$$C_{23}^{13} = 0. \quad (14.19)$$

Повторяя эти вычисления для  $\tau_{11}$ ,  $\tau'_{11}$ , найдем, приравнявая нулю коэффициенты при  $\gamma_{11}$ ,  $\gamma_{22}$  и  $\gamma_{33}$ ,

$$C_{12}^{11} = C_{12}^{33} = 0, \quad C_{11}^{33} = C_{22}^{33}, \quad C_{11}^{11} = C_{22}^{22}. \quad (14.20)$$

Приравнявая нулю коэффициент при  $\gamma_{12}$ , получим

$$C_{12}^{12} = \frac{1}{2} (C_{11}^{11} - C_{21}^{21}), \quad C_{22}^{12} = 0; \quad (14.21)$$

однако из условий для коэффициентов при  $\gamma_{23}$  и  $\gamma_{31}$  не получим никаких новых соотношений.

Если, наконец, рассмотреть коэффициент при  $\gamma_{13}$  в выражении для  $\tau_{23}$  и  $\tau'_{23}$ , то получим следующее равенство:

$$C_{23}^{23} = C_{13}^{13}. \quad (14.22)$$

Подставляя значения (14.15 — 14.22) в матрицу (14.12), найдем, что для системы, обладающей гексагональной симметрией, имеется пять независимых упругих постоян-

ных, которые определяются следующей матрицей:

$$\begin{pmatrix} C_{11}^{11} & C_{22}^{11} & C_{33}^{11} & 0 & 0 & 0 \\ C_{22}^{11} & C_{11}^{11} & C_{33}^{11} & 0 & 0 & 0 \\ C_{33}^{11} & C_{33}^{11} & C_{33}^{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{13}^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{13}^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}^{11} - C_{22}^{11}) \end{pmatrix}. \quad (14.23)$$

б) *Изотропные тела.* Изотропным телом называют такое, которое обладает гексагональной симметрией относительно двух любых перпендикулярных осей. Повторив рассуждения пункта γ, приведенного выше, получим, что упругие постоянные изотропного тела задаются матрицей типа (14.23), в которой

$$C_{13}^{13} = \frac{1}{2}(C_{11}^{11} - C_{22}^{11}), \quad C_{33}^{33} = C_{11}^{11}, \quad C_{33}^{11} = C_{22}^{11},$$

так что в действительности имеются только две независимые постоянные. Если обозначить

$$C_{22}^{11} = \lambda, \quad \frac{1}{2}(C_{11}^{11} - C_{22}^{11}) = \mu,$$

то найдем, что матрицей упругих постоянных для изотропного тела будет матрица вида

$$\begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (14.24)$$

Следует напомнить, что при выводе условия (14.11) и последующем обсуждении мы исходили из системы прямоугольных координат. Из матрицы (14.24) легко видеть, что в этой системе координат упругие постоянные однородного изотропного упругого тела могут быть записаны в форме

$$C_{rs}^{ij} = \lambda \delta^{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_r^i \delta_s^j + \delta_s^i \delta_r^j). \quad (14.25)$$

Поскольку величины  $C_{rs}^{ij}$  являются компонентами смешанного тензора четвертого ранга, то отсюда следует, что в произвольной системе координат упругими постоянными однородного изотропного тела будут

$$C_{rs}^{ij} = \lambda g^{ij} g_{rs} + \mu (\delta_r^i \delta_s^j + \delta_s^i \delta_r^j), \quad (14.26)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — постоянные.

Используя соотношения

$$\tau^{ij} = C_{rs}^{ij} \gamma^{rs}, \quad \gamma^{rs} = g^{rm} g^{ns} \gamma_{mn},$$

найдем, что компоненты напряжения однородного изотропного тела определяются выражением

$$\tau^{ij} = \{\lambda g^{ij} g^{mn} + \mu (g^{im} g^{jn} + g^{in} g^{jm})\} \gamma_{mn}. \quad (14.27)$$

Если обозначить *расширение*

$$\Delta = g^{mn} \gamma_{mn}, \quad (14.28)$$

то найдем, что

$$\tau^{ij} = \lambda \Delta g^{ij} + \mu (g^{im} g^{jn} + g^{in} g^{jm}) \gamma_{mn}. \quad (14.29)$$

В системе прямоугольных координат имеем

$$\tau^{ij} = \lambda \Delta \delta^{ij} + 2\mu \gamma_{ij}, \quad (14.30)$$

где расширение

$$\Delta = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} \quad (14.31)$$

равно изменению объема в процессе деформации, приходящемуся на единицу объема тела.

**15. Соотношения между упругими постоянными однородных упругих тел.** Постоянные  $\lambda$ ,  $\mu$ , входящие в соотношение между напряжением и деформацией (14.29), известны под названием упругих постоянных Ляме. Формулы (14.29) являются обобщением формулы (12.13), выражающей закон Гука.

В дополнение к этим постоянным обычно используется четыре других упругих постоянных, а именно:

- 1) модуль Юнга  $E$ ;
- 2) коэффициент Пуассона  $\nu$ ;

3) объемный модуль  $k$ ;

4) модуль сдвига  $n^*$ ).

Теперь мы покажем, как связаны эти постоянные с упругими постоянными Ляме.

а) *Модуль Юнга  $E$* . Когда длинный цилиндр, ось которого параллельна оси  $x$ , подвергается равномерному нагружению на его плоских концах, то отношение  $\tau_{xx}/\gamma_{xx}$  определяет модуль Юнга материала, из которого изготовлен цилиндр. Полагая в формулах (14.30)  $\tau_{xx} = E\gamma_{xx}$ ,  $\tau_{yy} = 0$ ,  $\tau_{zz} = 0$ , имеем:

$$\begin{aligned} E\gamma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)\gamma_{xx} + \lambda(\gamma_{yy} + \gamma_{zz}), \\ 0 &= (\lambda + 2\mu)\gamma_{yy} + \lambda(\gamma_{zz} + \gamma_{xx}), \\ 0 &= (\lambda + 2\mu)\gamma_{zz} + \lambda(\gamma_{xx} + \gamma_{yy}), \end{aligned} \quad (15.1)$$

откуда следует

$$E = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu}. \quad (15.2)$$

Эта формула определяет модуль Юнга через  $\lambda$  и  $\mu$ .

б) *Коэффициент Пуассона  $\nu$* . При растяжении описанного выше цилиндра коэффициент Пуассона  $\nu$  определяется как отношение бокового сжатия к продольному удлинению, т. е.

$$\nu = -\gamma_{yy}/\gamma_{xx}. \quad (15.3)$$

Если разрешить уравнения (15.1) относительно отношения  $\gamma_{yy}/\gamma_{xx}$ , то найдем, что

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (15.4)$$

Поскольку как  $\lambda$ , так и  $\mu$  являются положительными, то отсюда следует, что коэффициент Пуассона всегда меньше (или равен)  $1/2$ . Экспериментально установлено, что коэффициент Пуассона обычно лежит в диапазоне от  $1/4$  до  $1/2$ .

в) *Объемный модуль  $k$* . Когда к некоторому объему  $v$  упругого тела приложено равномерное гидростатическое

---

\*) Авторы называют этот модуль модулем жесткости. (Прим. ред.)

давление  $\delta p$ , под действием которого этот объем уменьшается на величину  $\delta v$ , то объемный модуль материала определяется уравнением

$$k = v \frac{\delta p}{\delta v}. \quad (15.5)$$

Как отмечено ранее, величина  $\Delta$  является мерой изменения объема, так что  $\Delta = -\delta v/v$ , и выражение (15.5) примет вид

$$k = -\frac{\delta p}{\Delta}. \quad (15.6)$$

Если в формулах (14.30) положить  $\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = -\delta p$ , то получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} -\delta p &= \lambda \Delta + 2\mu \gamma_{xx}, \\ -\delta p &= \lambda \Delta + 2\mu \gamma_{yy}, \\ -\delta p &= \lambda \Delta + 2\mu \gamma_{zz}. \end{aligned}$$

Суммируя эти три выражения и используя соотношения (14.30) и (15.6), найдем, что

$$k = \lambda + \frac{2\mu}{3}. \quad (15.7)$$

б) *Модуль сдвига  $n$* . Когда длинный прямоугольный параллелепипед квадратного поперечного сечения (длинная ось параллелепипеда параллельна оси  $Ox$ ) деформируется касательным усилием  $F$ , действующим на единицу площади грани  $CD$  (рис. 6), то модуль сдвига  $n$  определяется соотношением

$$n = \frac{F}{\varphi}, \quad (15.8)$$

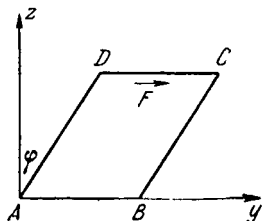


Рис. 6.

где  $\varphi$  — угол сдвига. При такой деформации точка  $(x, y, z)$  переходит в точку  $(x, y + \varphi z, z)$ , так что все компоненты деформации равны нулю, за исключением  $\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\varphi$ . Далее все компоненты напряжения равны нулю, исключая  $\tau_{yz} = F$ , так что формула (15.8) примет вид



$n = \tau_{yz}/2\gamma_{yz}$ . Из выражения (14.30) следует, что

$$n = \mu, \tag{15.9}$$

и таким образом модуль сдвига  $n$  идентичен со второй постоянной Ляме.

Очевидно, что между упругими постоянными существуют и другие соотношения. Любую пару из этих соотношений можно взять в качестве независимых соотношений и выразить через них все остальные. Результаты вычислений подобного рода приведены в следующей таблице.

Соотношения между упругими постоянными

Постоян- ные	Основная пара				
	( $\lambda, \mu$ )	( $k, n$ )	( $\mu, \nu$ )	( $E, \nu$ )	( $E, n$ )
$\lambda$	$\lambda$	$k - \frac{2}{3}n$	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{n(E-2n)}{3n-E}$
$\mu (n)$	$\mu$	$n$	$\mu$	$\frac{E}{2+2\nu}$	$n$
$k$	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	$k$	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{En}{3(3n-E)}$
$E$	$\frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda+\mu}$	$\frac{9kn}{3k+n}$	$2(1+\nu)\mu$	$E$	$E$
$\nu$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\frac{3k-2n}{6k+2n}$	$\nu$	$\nu$	$\frac{1}{2} \frac{E}{n} - 1$

**16. Обозначения Кармана.** При обсуждении специальных задач в трехмерной системе прямоугольных координат ( $x, y, z$ ) будем использовать обозначения Кармана и примем

$$\sigma_x = \tau_{xx}, \quad \sigma_y = \tau_{yy}, \quad \sigma_z = \tau_{zz},$$

таким образом тензор напряжения имеет вид

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Обозначим компоненты вектора перемещения  $\mathbf{v}$  через  $(u, v, w)$ .

В этих обозначениях уравнения движения (9.19) примут вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (16.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (16.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (16.3)$$

тогда как соотношения между напряжением и деформацией можно представить в форме

$$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = \lambda \Delta + 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (16.4)$$

$$(\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}) = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (16.5)$$

и

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (16.6)$$

Аналогичное обозначение применяется в случае ортогональных криволинейных координат  $(\xi, \eta, \zeta)$ ; при этом

$$\sigma_\xi = \tau_{\xi\xi}, \quad \sigma_\eta = \sigma_{\eta\eta}, \quad \sigma_\zeta = \tau_{\zeta\zeta}.$$


---

## В. КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ

Прежде чем переходить к обсуждению общих решений уравнений теории упругости, рассмотрим две очень простые задачи, имеющие большое техническое значение — кручение цилиндров и изгиб балок. Предполагается, что настоящая глава предназначена служить только очень кратким введением к этим задачам. Здесь не делается попытки обсудить большое число специальных задач, исследованных многими авторами. Для подобного, гораздо более полного обсуждения, читатель отсылается к книге Сокольниковика «Mathematical Theory of Elasticity», стр. 91—248. Здесь будут рассмотрены только некоторые типичные задачи.

### І. Кручение

**17. Кручение кругового цилиндра.** Рассмотрим сначала деформацию прямого кругового цилиндра радиуса  $a$ , обусловленную приложением пары сил, момент которой направлен вдоль оси цилиндра. Можно предположить, что один из торцов цилиндра лежит в плоскости  $xu$ , а другой — в плоскости  $z = l$ ; причем ось  $z$  выбирается так, чтобы она совпадала с осью цилиндра (рис. 7). Действие пары состоит в деформации образующих цилиндра по винтовым кривым. Если свободный конец цилиндра поворачивается на угол  $\tau l$  относительно неподвижного торца, то, допуская, что угол поворота сечения цилиндра пропорционален расстоянию сечения от неподвижного торца, получим, что сечение с центром  $O'$ , отстоящее на расстояние  $z$  от свободного конца, повернется на угол  $\tau z$  относительно неподвижного сечения. Если рассмотреть теперь перемещение характерной точки

$P$  этого сечения (рис. 8), то увидим, что точка  $P$  переместится в точку  $P'$ , где  $O'P = O'P'$  и  $\angle PO'P' = \tau z$ . Разумно предположить, что сечения цилиндра остаются плоскими после деформации, так что можно принять компонент перемещения  $w$  по оси  $z$  равным нулю. Если  $OP = r$  и  $\angle xO'P = \vartheta$ , то  $PP' = r\tau z$ , и перемещение точки  $P$  будет иметь компоненты  $(u, v, 0)$ , где

$$u = r\tau z \cos\left(\vartheta + \frac{1}{2}\pi\right) = -\tau zy,$$

$$v = r\tau z \sin\left(\vartheta + \frac{1}{2}\pi\right) = \tau zx.$$

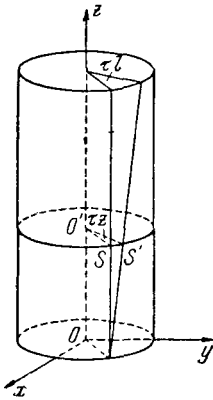


Рис. 7.

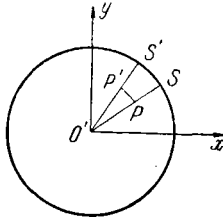


Рис. 8.

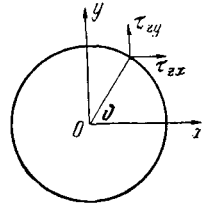


Рис. 9.

Следовательно, компоненты вектора перемещения характерной точки  $(x, y, z)$  цилиндра, отнесенные к неподвижной системе осей  $O(x, y, z)$ , будут:

$$u = -\tau zy, \quad v = \tau zx, \quad w = 0. \quad (17.1)$$

Из выражений (17.1) следует, что компоненты напряжения в точке  $(x, y, z)$  задаются следующими соотношениями:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \quad (17.2)$$

$$\tau_{zx} = -\mu\tau y, \quad \tau_{zy} = \mu\tau x, \quad (17.3)$$

из которых сразу становится очевидным, что уравнения движения удовлетворяются тождественно, если, конечно, нет объемных сил. На свободной поверхности цилиндра  $r = a$  найдем, что нормальный компонент напряжения равен (рис. 9)

$$\tau_{zx} \cos \vartheta + \tau_{zy} \sin \vartheta. \quad (17.4)$$

Это выражение равно нулю в каждой точке свободной поверхности, так как на этой поверхности  $\cos \vartheta = x/a$ ,  $\sin \vartheta = y/a$ .

Наиболее интересной для нас величиной является результирующая пара  $M$ , действующая на конец цилиндра. Очевидно, что  $M$  имеет вид  $(O, O, M)$ , где

$$M = \iint (x\tau_{zy} - y\tau_{zx}) dx dy, \quad (17.5)$$

причем интеграл берется по площади круга  $x^2 + y^2 = a^2$ . Подставляя соотношения (17.3) в последнее выражение, получим

$$M = D\tau, \quad (17.6)$$

где

$$D = \mu \iint (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{2} \pi \mu a^4. \quad (17.7)$$

Поэтому результирующая пара пропорциональна  $\tau$  — углу закручивания на единицу длины. Коэффициент пропорциональности  $D$  характеризует сопротивление балки кручению подобного рода; он известен под названием *крутильной жесткости* цилиндра.

**18. Кручение некруговых цилиндров.** Рассмотрим теперь кручение цилиндра произвольного поперечного сечения парой, момент которой направлен вдоль оси цилиндра. Предполагается, что объемные силы на цилиндр не действуют, а боковая поверхность свободна от внешних нагрузок. Так же, как в случае кругового цилиндра, допустим, что один конец цилиндра закреплен в плоскости  $z=0$ , тогда как другой конец в плоскости  $z=l$  скручивается парой  $M = (O, O, M)$ .

Поскольку цилиндр некруговой, теперь уже нельзя допустить, что сечения будут плоскими в процессе кручения. Если, однако, допустить, что каждое сечение деформируется одинаковым образом, то компоненты вектора перемещения характерной точки  $(x, y, z)$  можно представить в виде

$$u = -\tau zy, \quad v = \tau zx, \quad w = \tau \varphi(x, y), \quad (18.1)$$

где функция  $\varphi(x, y)$  зависит только от  $x$  и  $y$  и называется *функцией кручения*. Эти соотношения являются очевидным обобщением выражений (17.1).

Подставляя компоненты (18.1) в соотношения между напряжением и деформацией, найдем, что соответствующие компоненты тензора напряжения равны

$$\tau_{yz} = \mu\tau \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} + x \right), \quad \tau_{zx} = \mu\tau \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} - y \right), \quad (18.2)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0. \quad (18.3)$$

Уравнение равновесия

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = 0$$

будет удовлетворяться с помощью этих соотношений, если  $\varphi$  удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа

$$\nabla_1^2\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (18.4)$$

Два других уравнения равновесия удовлетворяются тождественно. Для того чтобы боковая поверхность цилиндра была свободна от напряжений, необходимо допустить, что функция кручения  $\varphi(x, y)$  такова, что уравнение

$$\tau_{xz} \cos\vartheta + \tau_{zy} \sin\vartheta = 0, \quad (18.5)$$

где  $\vartheta$  — угол между нормалью  $n$  к боковой поверхности и осью  $x$ , удовлетворяется в каждой точке границы сечения. Если в

это уравнение подставить функцию кручения, то на граничной кривой  $\Gamma$  цилиндра (рис. 10) оно примет вид

$$\cos\vartheta \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} - y \right) + \sin\vartheta \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} + x \right) = 0. \quad (18.6)$$

Это уравнение можно записать в форме

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = y \cos\vartheta - x \sin\vartheta, \quad (18.7)$$

где  $\partial/\partial n$  обозначает дифференцирование вдоль внешней нормали кривой  $\Gamma$ .

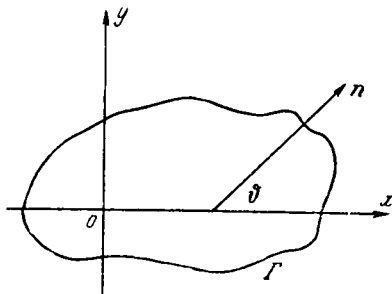


Рис. 10.

Решение задачи кручения некругового цилиндра сводится, таким образом, к решению уравнения Лапласа (18.4) с граничным условием (18.6) или (18.7), т. е. сводится к определению функции, гармонической в определенной области  $R$ ; нормальная производная функции принимает заданные значения на границе области  $\Gamma$ . В теории потенциала эта задача известна как *задача Неймана*; известно также, что если интеграл от нормальной производной функции вдоль границы  $\Gamma$  равен нулю, то функция  $\varphi$  определяется единственным образом с точностью до произвольной постоянной. С помощью выражения (18.7) легко проверить, что  $\int_{\Gamma} (\partial\varphi/\partial n) ds$  равен нулю,

так что уравнения (18.4) и (18.7) определяют функцию кручения с точностью до произвольной постоянной. Можно также показать, что изменение начала координат приводит к новой функции  $\varphi_1$ , отличающейся от исходной функции  $\varphi$  членами, которые ничего не добавляют к выражениям для компонентов напряжения. Отсюда следует, что два решения  $\varphi$  и  $\varphi_1$  приводят к векторам перемещения, которые отличаются на слагаемое, характеризующее перемещение жесткого тела, и таким образом выбор начала координат для задачи кручения не играет никакой роли.

Теперь необходимо найти систему сил, действующих на свободном конце цилиндра, которая статически эквивалентна системе напряжений (18.2). Так как  $\varphi$  является гармонической функцией, то

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} - y \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ x \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} + x \right) \right\}.$$

Согласно теореме Грина имеем

$$\iint_R \tau_{zx} dx dy = \mu\tau \int_{\Gamma} x \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial n} - y \cos \vartheta + x \sin \vartheta \right\} ds = 0.$$

Аналогично получим

$$\iint_R \tau_{zy} dx dy = 0.$$

Таким образом, равнодействующая сил, действующих на конец цилиндра, равна нулю. Суммарный момент внешних сил, приложенных на конце цилиндра, равен  $(0, 0, M)$ , где  $M$  вычисляется из выражения

$$M = \iint (x\tau_{zy} - y\tau_{zx}) dx dy. \quad (18.8)$$

Таким образом,

$$M = D\tau, \quad (18.9)$$

где  $D$  — крутильная жесткость — определяется с помощью соотношения

$$D = \mu \iint_R \left( x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy. \quad (18.10)$$

Выражение (18.10) можно представить в такой форме, из которой будет ясно, что величина  $D$  является положительной. Согласно теореме Грина имеем

$$\begin{aligned} \iint_R \left( x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy &= \iint_R \left\{ \frac{\partial (x\varphi)}{\partial y} - \frac{\partial (y\varphi)}{\partial x} \right\} dx dy = \\ &= - \int_{\Gamma} \varphi (y \cos \vartheta - x \sin \vartheta) ds = - \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \\ &= - \iint_R \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy. \end{aligned}$$

Таким образом, с помощью соотношения (18.10) найдем крутильную жесткость

$$D = \mu \iint_R \left\{ \left( x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( y - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy. \quad (18.11)$$

Из этого выражения видно, что  $D > 0$ <sup>1)</sup>.

*Функция кручения для эллиптического цилиндра.*  
В точке  $(x, y)$  на границе эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (18.12)$$

<sup>1)</sup>  $D=0$  только тогда, когда  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -x$ , а это невозможно, поскольку  $y dx - x dy$  не является полным дифференциалом.



имеем (в обозначениях (18.6))

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

Таким образом, необходимо найти функцию  $\varphi(xy)$ , которая удовлетворяет уравнению (18.4) и такова, что в каждой точке эллипса (18.12) справедливо соотношение

$$b^2 x \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) + a^2 y \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) = 0. \quad (18.13)$$

Функция  $\varphi = kxy$  удовлетворяет уравнению (18.4) для всех значений  $k$  и удовлетворяет уравнению (18.13), если  $k$  выбрано так, что

$$b^2(k-1) + a^2(k+1) = 0.$$

Разрешая это простое уравнение относительно  $k$ , получим функцию кручения

$$\varphi = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy. \quad (18.14)$$

Функция  $\varphi(x, y)$ , выраженная этим соотношением, определяет компонент  $z$  вектора перемещения в точке  $(x, y)$

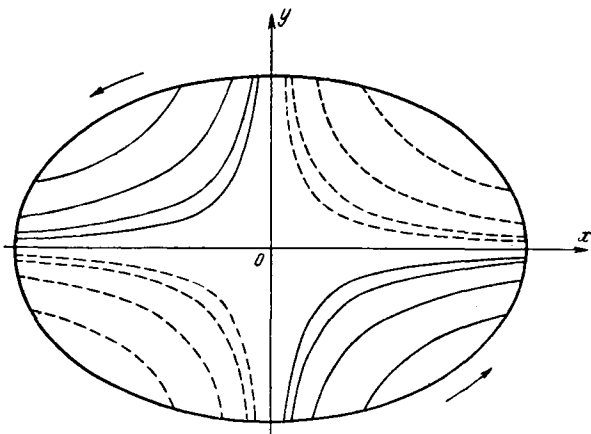


Рис. 11.

поперечного сечения так, что линии  $\varphi = \text{const}$  графически иллюстрируют искажение поперечных сечений эллиптического цилиндра. Эти линии показаны на рис. 11 для

случая, когда цилиндр скручивается парой, направление действия которой показано стрелками. Сплошные линии указывают на те области поперечного сечения, которые в процессе скручивания становятся выпуклыми; пунктирные линии указывают на те области поперечного сечения, которые становятся вогнутыми.

Крутильная жесткость эллиптического цилиндра определяется поэтому соотношением

$$D = \frac{2\mu}{a^2 + b^2} \iint_R (b^2x^2 + a^2y^2) dx dy = \frac{\pi\mu a^3b^3}{a^2 + b^2}. \quad (18.15)$$

Подставляя выражения (18.4) в формулы (18.2), найдем, что неравные нулю компоненты тензора напряжения определяются с помощью соотношений

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= \frac{2\mu\tau b^2x}{a^2 + b^2}, \\ \tau_{zx} &= -\frac{2\mu\tau a^2y}{a^2 + b^2}. \end{aligned} \right\} \quad (18.16)$$

Величина  $\bar{\tau}$  касательного напряжения в точке  $P(x, y)$  на границе дается выражением

$$\bar{\tau} = (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\mu\tau ab}{a^2 + b^2} \bar{r}, \quad (18.17)$$

где  $\bar{r} = (b^2x^2/a^2 + a^2y^2/b^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\bar{r}$  — радиус-вектор эллипса, сопряженный с радиусом  $OP$ . Выражение (18.17) показывает, что максимум напряжения имеет место на концах малой оси эллипса.

**19. Функция напряжения.** В последнем параграфе было показано, что функция кручения  $\varphi(x, y)$  является двумерной гармонической функцией в области  $R$  поперечного сечения цилиндра. Из теории же функций комплексного переменного известно, что существует также другая двумерная гармоническая функция  $\psi(x, y)$  такая, что функция  $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  является аналитической функцией комплексного переменного  $x + iy$ . Функции  $\varphi$  и  $\psi$  связаны друг с другом с помощью условий Коши — Римана

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (19.1)$$

Аналитическая функция  $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  называется комплексной функцией кручения.

Задачу кручения просто формулировать через функцию  $\psi(x, y)$ , сопряженную с функцией кручения. Подставляя выражения (19.1) в (18.2), найдем, что не равные нулю компоненты напряжения определяются соотношениями

$$\tau_{yz} = -\mu\tau \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} - x \right), \quad \tau_{xz} = \mu\tau \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} - y \right), \quad (19.2)$$

и граничное условие (18.6) примет вид

$$\cos \vartheta \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} - y \right) - \sin \vartheta \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} - x \right) = 0. \quad (19.3)$$

Если  $d/ds$  означает дифференцирование вдоль границы  $\Gamma$ , то

$$\cos \vartheta = \frac{dy}{ds}, \quad \sin \vartheta = -\frac{dx}{ds},$$

и таким образом уравнение (19.3) эквивалентно следующему:

$$\frac{d}{ds} \left\{ \psi - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right\} = 0.$$

Поэтому задача кручения будет решена, если можно найти функцию, которая удовлетворяет условиям:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_1^2 \psi &= 0 \quad \text{в области } R, \\ \psi - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) &= \text{const на } \Gamma. \end{aligned} \right\} \quad (19.4)$$

Крутильную жесткость цилиндра  $D$  можно выразить через эту функцию в виде

$$D = \mu \iint_R \left( x^2 + y^2 - x \frac{\partial\psi}{\partial x} - y \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) dx dy = \quad (19.5)$$

$$= \mu \iint_R \left\{ \left( x - \frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 + \left( y - \frac{\partial\psi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (19.6)$$

Краевая задача (19.4) является задачей Дирихле и таким образом решение ее является единственным.

Удобно ввести функцию напряжений  $\Psi(x, y)$ , с помощью которой можно представить граничное условие (2) соотношения (19.4) в особенно простой форме. Если принять, что

$$\Psi(x, y) = \psi(x, y) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

то отсюда следует, что задача кручения эквивалентна следующей краевой задаче:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \nabla_1^2 \Psi = -2 \text{ в области } R, \\ 2) \Psi = \text{const на } \Gamma. \end{array} \right\} \quad (19.7)$$

Компоненты напряжения примут тогда вид

$$\tau_{yz} = -\mu\tau \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \tau_{xz} = \mu\tau \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (19.8)$$

и крутильная жесткость равна

$$\begin{aligned} D &= -\mu \iint_R \left\{ x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right\} dx dy = \\ &= 2\mu \iint_R \Psi dx dy + \mu \int_{\Gamma} \Psi (y dx - x dy) \end{aligned} \quad (19.9)$$

или

$$D = \mu \iint_R \left\{ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy. \quad (19.10)$$

Функция  $\Psi(x, y)$  имеет простую геометрическую интерпретацию. Если  $P(x, y)$  — произвольная точка на одной кривой однопараметрического семейства кривых

$$\Psi(x, y) = \text{const}, \quad (19.11)$$

то тангенс угла наклона касательной в точке  $P$  равен  $dy/dx$  и имеет место следующее равенство:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \quad (19.12)$$

Исключая  $\partial \Psi / \partial x$  и  $\partial \Psi / \partial y$  из уравнений (19.8) и (19.12), найдем, что

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\tau_{zy}}{\tau_{zx}}.$$

Другими словами, в каждой точке кривой (19.11) вектор напряжения направлен вдоль касательной к кривой. По этой причине кривые (19.11) называются *линиями касательных напряжений*.

**20. Кручение полых цилиндров.** В обсуждении задачи кручения, приведенном выше, принималось, что закручи-

ваемый цилиндр имеет сплошное поперечное сечение. Случай наличия в цилиндре одного или большего числа отверстий имеет большое практическое значение и может быть проанализирован аналогичными методами. Цилиндр подобного рода показан на рис. 12; он состоит из области  $R$ , ограниченной внешним контуром  $\Gamma$  и рядом внутренних контуров  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Исходя из условий, аналогичных тем, которые были использованы при выводе уравнений (19.4) и (18.7), можно показать, что функция кручения  $\varphi$  должна удовлетворять в области  $R$  уравнению  $\nabla_1^2 \varphi = 0$ , и на каждом из контуров  $\Gamma, C_1, C_2, \dots, C_n$  должно выполняться условие

$$\frac{d\varphi}{dn} = y \cos \vartheta - x \sin \vartheta. \quad (20.1)$$

Отсюда следует, что функция  $\psi(x, y)$  будет удовлетворять уравнению  $\nabla_1^2 \psi = 0$  и что величина

$$\psi - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

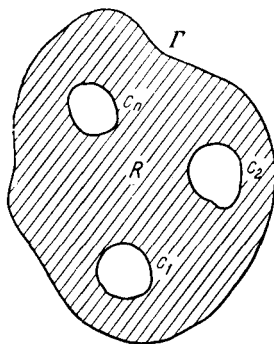


Рис. 12.

будет принимать значения  $\gamma, c_1, c_2, \dots, c_n$  на контурах  $\Gamma, C_1, C_2, \dots, C_n$ . В обычном случае функция  $\psi(x, y)$  будет многозначной, однако если последнее условие удовлетворяется, то  $\psi$  должна принимать первоначальное значение, после того как точка  $x + iy$  обошла контур  $C_k$ . Более того, поскольку  $\varphi$  определяется выражением (20.1) с точностью до произвольной постоянной, то соответствующая ей комплексная функция должна определяться аналогичным образом. Таким образом, только одну из постоянных  $\gamma, c_1, c_2, \dots, c_n$  можно выбрать произвольно. Оставшиеся  $n$  постоянных должны быть такими, чтобы функция  $\psi(x, y)$  была однозначной в области  $R$ .

Функция напряжения  $\Psi(x, y)$ , определяющая задачу, будет тогда удовлетворять условиям:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \nabla_1^2 \Psi = -2 \text{ в области } R, \\ 2) \Psi = \gamma \text{ на } \Gamma, \\ 3) \Psi = c_j \text{ на } C_j, \end{array} \right\} \quad (20.2)$$

где только одна из постоянных  $\gamma, c_1, c_2, \dots, c_n$  может быть выбрана произвольно. Если выбрать  $\gamma = 0$ , то крутильная жесткость определяется с помощью соотношения

$$D = 2\mu \iint_R \Psi \, dx \, dy + \sum_{i=1}^n \mu c_i \int_{C_i} (y \, dx - x \, dy) \quad (20.3)$$

(см. выше выражение (19.9)). Далее,

$$\int_{C_i} (y \, dx - x \, dy) = 2A_i,$$

где  $A_i$  — площадь, замкнутая кривой  $C_i$ . Следовательно,

$$D = 2\mu \iint_R \Psi \, dx \, dy + 2\mu \sum_{i=1}^n c_i A_i. \quad (20.4)$$

**21. Решение задачи кручения для некоторых частных случаев.**

а) *Эллиптический цилиндр.* Функция напряжения  $\Psi(x, y)$  должна быть постоянной вдоль кривой

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это наводит на мысль попытаться представить функцию в виде

$$\Psi = A \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right).$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\nabla_1^2 \Psi = -2,$$

если

$$-2 = 2A \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

Следовательно, условие (19.7) удовлетворяется функцией вида

$$\Psi = -\frac{b^2 x^2 + a^2 y^2}{a^2 + b^2},$$

откуда имеем

$$\psi = \Psi + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{(a^2 - b^2)(x^2 - y^2)}{2(a^2 + b^2)}.$$

Сопряженная функция кручения равна, как и было найдено раньше (уравнение (18.14)),

$$\varphi = -\frac{(a^2 - b^2)xy}{(a^2 + b^2)}.$$

Комплексная функция кручения имеет вид

$$\varphi + i\psi = \frac{(a^2 - b^2)iz^2}{2(a^2 + b^2)}.$$

б) *Равносторонний треугольник.* Допустим, что треугольник ограничен линиями  $y = c \pm mx$ ,  $y = 0$ . Тогда функция

$$\Psi = Ay \{(y - c)^2 - m^2x^2\}$$

равна нулю вдоль границы. Для этой функции

$$\nabla_1^2 \Psi = \{(6 - 2m^2)y - 4c\} A,$$

так что, для того чтобы  $\nabla_1^2 \Psi = -2$ , нужно положить  $m^2 = 3$ ,  $A = 1/(2c)$ . Поэтому функция напряжения для равностороннего треугольника, ограниченного линиями  $y = c \pm \sqrt{3}x$ ,  $y = 0$ , имеет вид

$$\Psi = \frac{y}{2c} \left\{ (y - c)^2 - 3x^2 \right\}.$$

Из выражения (19.9) получим, что крутильная жесткость равна

$$D = \frac{\mu}{c} \iint \left\{ y(y - c)^2 - 3x^2y \right\} dx dy = \frac{\sqrt{3}}{45} \mu c^4.$$

В соответствии с выражением для функции  $\Psi$  имеем функции

$$\varphi(x, y) = \frac{(3xy^2 - x^3 - 2cxy + c^2x)}{2c},$$

$$\psi(x, y) = \frac{(y^3 - 3x^2y + c^2y + cx^2 - cy^2)}{2c}.$$

Картина искажения поперечных сечений, рассчитанная согласно величине  $\varphi$ , показана на рис. 13.

γ) *Прямоугольник*. Рассмотрим прямоугольник, ограниченный линиями  $x = \pm a$ ,  $y = \pm b$ . Задача кручения

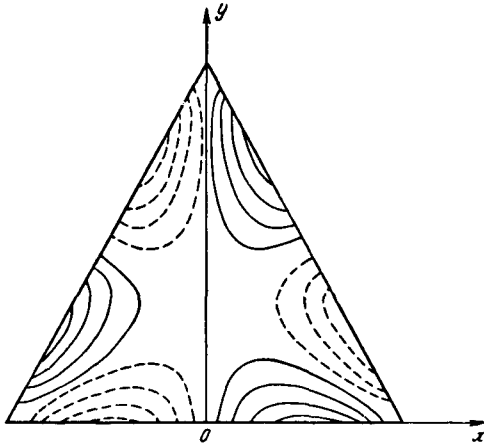


Рис. 13.

будет решена, если найти гармоническую функцию  $\psi(x, y)$ , которая на границе прямоугольника имеет вид  $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , т. е.

$$\psi(\pm a, y) = \frac{1}{2}(a^2 + y^2), \quad \psi(x, \pm b) = \frac{1}{2}(x^2 + b^2). \quad (21.1)$$

Если принять

$$\psi(x, y) = a^2 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + f(x, y), \quad (21.2)$$

то получим, что  $f$  должна быть гармонической функцией, удовлетворяющей граничным условиям

$$f(\pm a, y) = 0, \quad (21.3)$$

$$f(x, \pm b) = x^2 - a^2. \quad (21.4)$$

Гармоническая функция

$$f(x, y) = \sum_n c_n \operatorname{ch}(k_n y) \cos(k_n x) \quad (21.5)$$



будет удовлетворять условию (21.3) в том случае, если

$$k_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a} \quad (21.6)$$

и условию (21.4), если постоянные  $c_n$  выбраны таким образом, что

$$x^2 - a^2 = \sum_n c_n \operatorname{ch}(k_n b) \cos k_n x.$$

Поэтому эти постоянные будут

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{a \operatorname{ch}(k_n b)} \int_{-a}^a (x^2 - a^2) \cos(k_n x) dx = \\ &= -\frac{4}{a k_n^3} \cdot \frac{\sin(k_n a)}{\operatorname{ch}(k_n b)}, \end{aligned}$$

что позволит в результате представить функцию  $\psi(x, y)$  в виде ряда

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \\ &= a^2 + \frac{1}{2} (y^2 - x^2) - \frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cdot \frac{\operatorname{ch}(k_n y)}{\operatorname{ch}(k_n b)} \cos(k_n x), \end{aligned}$$

где величины  $k_n$  определяются формулой (21.6).

б) *Круглый вал с круговой выточкой.* Для того чтобы проиллюстрировать использование комплексной функции кручения, исследуем пример, проанализированный Вебером<sup>1)</sup>. Рассмотрим аналитическую функцию

$$\varphi + i\psi = -ia \left( z - \frac{b^2}{z} \right) - \frac{1}{2} ib^2. \quad (21.7)$$

Полагая  $z = r e^{i\vartheta}$  и отделяя действительную и мнимую части, найдем, что

$$\varphi = a \left( r + \frac{b^2}{r} \right) \sin \vartheta \quad (21.8)$$

и

$$\psi = ax \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2} b^2. \quad (21.9)$$

1) Weber C., Forschungsarbeiten, VDI 249, (1921).

Если положить  $r = b$ , то  $\psi = \frac{1}{2}b^2$  и  $\psi - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = 0$ . Когда  $r = 2a \cos \vartheta$ , то  $\psi = 2a^2 \cos^2 \vartheta$ , т. е.  $\psi - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = 0$ . Таким образом, выражение (21.7) представляет комплексную функцию кручения для сечения, ограниченного

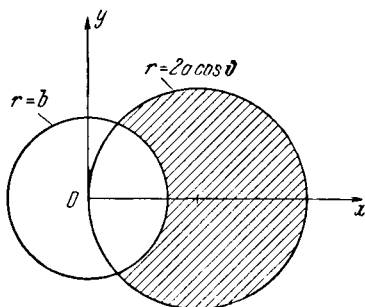


Рис. 14.

окружностями (рис. 14)  $r = b$ ,  $r = 2a \cos \vartheta$ . Дифференцируя (21.9), найдем

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = a \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) + \frac{2ab^2x^2}{r^4}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{2ab^2xy}{r^4}.$$

Таким образом, из формул (19.2) имеем

$$\tau_{xz} = \mu \tau y \left( \frac{2ab^2x}{r^4} - 1 \right),$$

$$\tau_{yz} = -\mu \tau \left\{ a \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) + \frac{2ab^2x^2}{r^4} - x \right\}.$$

Если в этих формулах положить  $r = b$ , то получим

$$\tau_{xz} = \mu \tau \sin \vartheta (2a \cos \vartheta - b), \quad \tau_{yz} = -\mu \tau \cos \vartheta (2a \cos \vartheta - b),$$

так что суммарное касательное напряжение на выточке определяется выражением

$$\bar{\tau} = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \mu \tau (2a \cos \vartheta - b)$$

и достигает максимальной величины, равной  $2\mu\tau a (1 - b/2a)$ . Если отношение  $b/a$  мало, эта максимальная величина

равна приблизительно  $2\mu t$ , т. е. удвоенному соответствующему значению максимального напряжения для круглого вала без выточки (см. выше § 17).

**22. Конечные деформации при кручении кругового цилиндра.** Для того чтобы проиллюстрировать метод, которому необходимо следовать в задачах, где рассматриваются конечные деформации, проанализируем деформацию чистого кручения цилиндра, т. е. деформацию, при которой плоскости, нормальные к оси в недеформированном состоянии, остаются плоскими и только поворачиваются на угол, пропорциональный их расстоянию от свободного конца цилиндра. Если принять, что длина и радиус цилиндра равны  $l$  и  $a$  в ненапряженном состоянии и если допустить, что материал цилиндра является несжимаемым, то тогда тело сохранит цилиндрическую форму в деформированном состоянии и будет иметь ту же длину и радиус.

Если для обозначения положения точки в деформированном состоянии использовать цилиндрические полярные координаты  $(\varrho, \varphi, z)$ , то

$$\bar{x}_1 = \varrho \cos \varphi, \quad \bar{x}_2 = \varrho \sin \varphi, \quad \bar{x}_3 = z \quad (22.1)$$

и, согласно приведенному выше допущению, координаты этой точки в недеформированном состоянии должны быть равны

$$x_1 = \varrho \cos(\varphi - \psi z), \quad x_2 = \varrho \sin(\varphi - \psi z), \quad x_3 = z \quad (22.2)$$

Легко показать, что

$$\bar{g}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho^2 & -\varrho^2 \psi \\ 0 & -\varrho^2 \psi & 1 + \varrho^2 \psi^2 \end{pmatrix}, \quad (22.3)$$

откуда следует, что  $\bar{g} = g = \varrho^2$ , так что  $I_3 = 1$ ; это показывает, что условие несжимаемости удовлетворено. Из соотношений (5.1) имеем, следовательно,

$$I_1 = I_2 = 3 + \varrho^2 \psi^2. \quad (22.4)$$

Величины  $\Phi$  и  $\Psi$  (§ 13) являются поэтому функциями единственной переменной  $\varrho$ . Из выражений (22.3) и (22.4)

и определения (13.4) имеем

$$\bar{g}^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \psi^2 + \varrho^{-2} & \psi \\ 0 & \psi & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^{ij} = \begin{pmatrix} 2 + \psi^2 \varrho^2 & 0 & 0 \\ 0 & \psi^2 + 2\varrho^{-2} & \psi \\ 0 & \psi & 2 \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти выражения в соотношения между напряжением и деформацией (13.3), получим следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \tau^{11} &= \Phi + (2 + \varrho^2 \psi^2) \Psi + p, \\ \tau^{22} &= (\varrho^{-2} + \psi^2) \Phi + (2\varrho^{-2} + \psi^2) \Psi + p\varrho^{-2}, \\ \tau^{33} &= \Phi + 2\Psi + p, \\ \tau^{23} &= (\Phi + \Psi) \psi, \\ \tau^{31} &= \tau^{12} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (22.5)$$

где для криволинейных координат приняты обозначения (см. выше, § 3)  $q_1 = \varrho$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = z$ .

Единственные, не равные нулю символы Римана — Кристоффеля, выведенные из метрики деформированного тела, имеют вид

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -\varrho, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \varrho^{-1}, \quad (22.6)$$

так что уравнения равновесия (9.19)

$$\partial_i \tau^{ij} + \left\{ \begin{matrix} i \\ ik \end{matrix} \right\} \tau^{kj} + \left\{ \begin{matrix} j \\ ik \end{matrix} \right\} \tau^{ik} = 0 \quad (22.7)$$

с учетом выражений (22.5) сводятся к простой системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} \{ \Phi + (2 + \varrho^2 \psi^2) \Psi + p \} - \psi^2 \varrho \Phi = 0, \quad (22.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (22.9)$$

Следует напомнить, что  $\Phi$  и  $\Psi$  являются функциями только  $\varrho$ , а из выражения (22.9) видно, что величина  $p$

тоже является функцией только  $\varrho$ ; таким образом, из уравнения (22.8) имеем

$$p = -\Phi - (2 + \varrho^2\psi^2)\Psi + \psi^2 \int_c^{\varrho} \varrho\Phi d\varrho, \quad (22.10)$$

где  $c$  — произвольная постоянная. Если подставить это выражение в первую из формул (22.5), найдем

$$\tau^{11} = \psi^2 \int_c^{\varrho} \varrho\Phi d\varrho. \quad (22.11)$$

Если криволинейная поверхность цилиндра  $\varrho = a$  свободна от напряжений, то  $\tau^{11} = \tau^{12} = \tau^{13} = 0$  при  $\varrho = a$ . Из формулы (22.11) следует, что  $\tau^{11} = 0$ , когда  $\varrho = a$ , если постоянную  $c$  положить равной  $a$ ; величины  $\tau^{12}$  и  $\tau^{13}$  тождественно равны нулю. Положив в уравнении (22.10)  $c = a$ , получим

$$p = -\Phi - (2 + \varrho^2\psi^2)\Psi + \psi^2 \int_a^{\varrho} \varrho\Phi d\varrho. \quad (22.12)$$

Физические компоненты напряжения равны (ср. выше § 9):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\varrho} &= \tau^{11} = \psi^2 \int_a^{\varrho} \varrho\Phi d\varrho, \\ \sigma_{\varphi} &= \varrho^2\tau^{22} = \psi^2 \left\{ \int_a^{\varrho} \varrho\Phi d\varrho + \varrho^2\Phi \right\}, \\ \sigma_z &= \tau^{33} = \psi^2 \left\{ \int_a^{\varrho} \varrho\Phi d\varrho - \varrho^2\Psi \right\}, \\ \tau_{\varphi z} &= \varrho\tau^{23} = \psi\varrho(\Phi + \Psi), \\ \tau_{\varrho\varphi} &= \tau_{\varrho z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (22.13)$$

На конце цилиндра  $z = l$  единичный вектор нормали параллелен  $\bar{g}^3$ , так что  $n = (0, 0, 1)$  и физические компоненты поверхностных нагрузок равны  $(0, \tau_{\varphi z}, \sigma_z)$ . Эти распределенные на поверхности силы статически эквивалентны паре с моментом относительно оси цилиндра,

равным

$$M = 2\pi \int_0^a \varrho^2 \tau_{\varphi z} d\varrho = 2\pi\psi \int_0^a \varrho^3 (\Phi + \Psi) d\varrho \quad (22.14)$$

и силе

$$F = 2\pi \int_0^a \varrho \sigma_z d\varrho = 2\pi\psi^2 \int_0^a \varrho d\varrho \left\{ \int_a^{\varrho} \varrho' \Phi(\varrho') d\varrho' - \varrho^2 \Psi \right\}, \quad (22.15)$$

параллельной оси цилиндра.

Например, для тела Муни, характеризуемого соотношениями (13.12), имеем

$$\Phi = 2C_1, \quad \Psi = 2C_2, \quad (22.16)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные. Подставляя эти величины в формулы (22.14) и (22.15), найдем, что для цилиндра, изготовленного из такого материала, эквивалентная пара и сила задаются следующими соотношениями:

$$M = (C_1 + C_2) \pi a^4 \psi, \quad F = -\frac{1}{2} (C_1 + 2C_2) \pi a^4 \psi^2. \quad (22.17)$$

## II. Изгиб балок

**23. Элементарная теория изгиба.** Рассмотрим балку, ограниченную цилиндрической поверхностью произвольного поперечного сечения и двумя плоскостями, нормальными к этой поверхности. Ось  $z$  принимается за *центральнойю ось*, проходящую через центры тяжести поперечных сечений балки, а плоскость  $xz$  совпадает с одним из концов балки. Балка изгибается двумя парами с моментами  $M$ , приложенными на концах и действующими в плоскости  $xz$ ; цилиндрическая поверхность свободна от внешних нагрузок. В элементарной теории изгиба балок допускается, что длина центральной оси не меняется и плоские сечения остаются плоскими и нормальными к деформированной центральной оси. Отсюда легко получим, что продольная деформация балки определяется выражением

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{x}{R}, \quad (23.1)$$

где  $R$  — радиус кривизны центральной оси. Если допустить, что единственный отличный от нуля компонент напряжений есть  $\sigma_z$ , то из уравнения (23.1) получим соотношение между напряжением и деформацией

$$\sigma_z = -\frac{E}{R} x. \quad (23.2)$$

Очевидно, это распределение напряжений удовлетворяет уравнениям равновесия, если массовые силы отсутствуют и граничные условия на цилиндрической поверхности удовлетворены. Изгибающий момент определяется соотношением

$$M = -\int_A x \sigma_z dA = \int_A \frac{E x^2}{R} dA = \frac{EI}{R}, \quad (23.3)$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения балки и  $I$  — момент инерции относительно оси  $y = 0$ . Тогда из выражений (23.2) и (23.3) имеем

$$\sigma_z = -\frac{M}{I} x. \quad (23.4)$$

**24. Применимость элементарной теории.** Более строгий анализ задачи исключает первоначальные допущения, касающиеся формы изогнутой оси балки, приводящие к тому, что единственный не равный нулю компонент напряжения определяется выражением (23.4). Подставляя соответствующие выражения в соотношения между напряжением и деформацией, найдем компоненты деформации

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\nu M}{EI} x, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\nu M}{EI} x, & \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{M}{EI} x, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Если считать, что движение типа движения твердого тела около или вокруг начала координат отсутствует, так что  $u = v = w = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$  около точки  $(0, 0, 0)$ , то эти уравнения после интегрирования дают компоненты

перемещения

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{M}{2EI} (z^2 + \nu x^2 - \nu y^2), \\ v &= \frac{\nu M}{EI} xy, \quad w = -\frac{M}{EI} xz. \end{aligned} \right\} \quad (24.1)$$

Используя обозначения

$$x' = x + u, \quad y' = y + v, \quad z' = z + w,$$

получим на центральной оси  $(0, 0, z)$

$$x' = \frac{M}{2EI} z^2, \quad y' = 0, \quad z' = z.$$

Отсюда сразу видно, что первое допущение элементарной теории, заключающееся в том, что длина центральной оси не меняется, остается еще справедливым. Наклон центральной оси определяется выражением

$$\frac{dx'}{dz'} = \frac{dx'}{dz} = \frac{Mz}{EI}, \quad x = y = 0, \quad (24.2)$$

и точка на плоскости  $z = \text{const}$  перемещается в точку

$$z' = z \left( 1 - \frac{Mx}{EI} \right). \quad (24.3)$$

Таким образом, второе допущение, заключающееся в том, что плоские сечения остаются плоскими и нормальными к центральной оси, сохраняется только тогда, когда  $u$  мало и вместо  $x'$  в уравнение (24.3) можно подставить  $x$ ; в таком случае это уравнение определяло бы плоскость в деформированной балке, нормаль которой задана уравнением (24.2). Радиус кривизны центральной оси определяется формулой

$$R = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dx'}{dz'} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x'}{dz'^2}}, \quad x = y = 0,$$

которая совпадает с формулой элементарной теории (23.3), если  $dx'/dz'$  достаточно мало.

Переход от задачи чистого изгиба, обусловленного парами на концах балки, к задаче о консольной балке,



один конец которой закреплен, а другой нагружен силой, перпендикулярной к оси балки, значительно осложняет решение. Продольное напряжение  $\sigma_z$  оказывается все еще пропорциональным изгибающему моменту, однако касательные напряжения  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  уже нельзя принимать равными нулю, и вследствие того, что эти напряжения должны быть равны нулю на боковой поверхности, важную роль начинает играть форма поперечного сечения. Изложение теории изгиба упругих балок можно найти в различных учебниках<sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Sokolnikoff I. S., *Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd ed., New York, McGraw-Hill, 1956; Timoshenko S., Goodier J. N., *Theory of Elasticity*, New York, McGraw-Hill, 1951. Chi-Teh Wang, *Applied Elasticity*, New York, McGraw-Hill, 1953.

## С. ПЛОСКИЕ СТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Следует напомнить, что в электростатике исследование «двумерных» задач является наиболее плодотворным, поскольку оно приводит к использованию мощного аппарата теории функций комплексного переменного. Аналогичное положение имеет место в теории упругости в случае статических задач, хотя по причине большой сложности основных уравнений теория функций в этих задачах гораздо позднее нашла себе применение. Это применение было обязано почти исключительно работам Колосова и Мухелишвили. В теории упругости возникают два рода плоских задач, однако математическая формулировка двух этих типов задач является идентичной и поэтому их можно исследовать одинаковыми методами.

### І. Общая теория

Встречаются два различных типа двумерных статических задач теории упругости. В первом случае деформируемое тело представляет собой длинный прямой цилиндр, подверженный воздействию внешних нагрузок таким образом, что компонент перемещения в направлении оси цилиндра равен нулю, а остальные компоненты остаются постоянными вдоль цилиндра; в этом случае говорят, что тело находится в состоянии *плоской деформации*. Во втором случае деформируемое тело представляет собой тонкую пластину, на которую действуют внешние нагрузки, распределенные таким образом, что нормальная компонента напряжения поперек пластины равна нулю; в этом случае пластина находится в *плоском напряженном состоянии*.

**25. Плоская деформация.** В состоянии плоской деформации ось цилиндра можно принять за ось  $z$ , так что  $w=0$  и  $u$  и  $v$  будут функциями только  $x$  и  $y$ . Таким образом, при плоской деформации можно написать, что

$$\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0, \quad w = 0, \quad (25.1)$$

поэтому

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \gamma_{zz} = 0.$$

Если подставить эти соотношения в уравнение (9.19), найдем, что уравнения равновесия сведутся к следующим:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho X = 0, \quad (25.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho Y = 0. \quad (25.3)$$

Аналогично соотношения между напряжениями и деформациями (14.30) примут вид

$$\sigma_x = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (25.4)$$

$$\sigma_y = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (25.5)$$

$$\sigma_z = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (25.6)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (25.7)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \quad (25.8)$$

Из формул (25.4), (25.5) и (25.6) тотчас же следует, что при плоском деформированном состоянии

$$\sigma_z = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\nu}{1-\nu} (\sigma_x + \sigma_y). \quad (25.9)$$

В некоторых задачах плоской деформации выгодно использовать полярные координаты  $r$  и  $\theta$  вместо системы прямоугольных координат  $x$  и  $y$ . В этих координатах

уравнения равновесия сведутся к следующим:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (25.10)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0, \quad (25.11)$$

а соотношения между напряжениями и деформациями примут вид

$$\sigma_r = \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad (25.12)$$

$$\sigma_\theta = \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + 2\mu \left( \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \quad (25.13)$$

$$\sigma_z = \frac{\nu}{1-\nu} (\sigma_r + \sigma_\theta), \quad (25.14)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right), \quad (25.15)$$

$$\tau_{zr} = \tau_{z\theta} = 0. \quad (25.16)$$

**26. Плоское напряженное состояние.** При плоском напряженном состоянии в плоскости, параллельной  $xy$ , компоненты напряжения  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\sigma_z$  равны нулю, однако компоненты  $u$ ,  $v$ ,  $w$  вектора перемещения в общем случае не являются независимыми от  $z$ . Поэтому отсюда следует, что уравнения равновесия принимают вид (25.2) и (25.3), и соотношения между напряжениями и деформациями сводятся к следующей системе:

$$\sigma_x = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (26.1)$$

$$\sigma_y = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (26.2)$$

$$0 = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (26.3)$$

$$0 = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (26.4)$$

$$0 = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (26.5)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (26.6)$$

Если исключить  $\partial\omega/\partial z$  из уравнений (26.1), (26.2) и (26.3) и ввести обозначение  $\lambda' = \frac{(1-2\nu)\lambda}{(1-\nu)}$ , то для неравных нулю компонентов тензора напряжения получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda' \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \sigma_y &= \lambda' \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (26.7)$$

Аналогично уравнения (26.3), (26.4) и (26.5) приводят к соотношениям

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial z} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (26.8)$$

которые позволяют определить  $\omega$  по  $u$  и  $v$  с точностью до постоянной величины.

**27. Обобщенное плоское напряженное состояние.** Задача о плоском напряженном состоянии не является в действительности двумерной задачей, поскольку переменная  $z$  появляется в качестве параметра в каждом из приведенных выше уравнений. Однако Файлон <sup>1)</sup> показал, что систему уравнений можно видоизменить, предполагая, что компонент напряжения  $\sigma_z$  равен нулю всюду на пластинке, а касательные напряжения  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yz}$  равны нулю только на гранях пластинки  $z = \mp h$ . Идея Файлона заключалась в следующем: если пластина тонкая, то знание *средних* величин компонентов вектора перемещения и тензора напряжений равноценно знанию их точных значений в каждой точке. По этой причине мы заменим каждую физическую величину  $f$  ее средним значением  $\bar{f}$ , определяемым по формуле

$$\bar{f} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f dz. \quad (27.1)$$

<sup>1)</sup> Filon L. N. G., Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Ser. A201, 63 (1903).

Если проинтегрировать уравнение

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y = 0$$

по толщине пластины и использовать тот факт, что  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  оба равны нулю на гранях пластины, то в результате получим, что компоненты среднего напряжения  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$ ,  $\bar{\sigma}_z$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \rho \bar{X} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \rho \bar{Y} = 0. \quad (27.2)$$

Так как  $\bar{\sigma}_z$  равно нулю тождественно, то найдем, что

$$\left( \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \right) = - \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \quad (27.3)$$

и

$$\bar{\sigma}_x = \lambda' \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad (27.4)$$

$$\bar{\sigma}_y = \lambda' \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \quad (27.5)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \mu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right), \quad (27.6)$$

при этом

$$\lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \lambda, \quad (27.7)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

## II. Функции напряжения Эри

28. Бигармоническое уравнение. Начало созданию плодотворного метода решения двумерных задач положил Эри <sup>1)</sup>. Если в уравнениях равновесия (25.2) — (25.3) положить, что компоненты объемных сил  $X$ ,  $Y$  определяют исходя из потенциальной функции  $V(x, y)$  в форме

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad (28.1)$$

<sup>1)</sup> Airy G. B., Brit. Assoc. Rep. 1862. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. 153, 49 (1863).

и что существует функция  $\chi$  такая, что

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y},$$

то уравнения равновесия примут вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma_x - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \rho V \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma_y - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \rho V \right) = 0.$$

Отсюда тотчас же следует, что уравнения равновесия удовлетворяются следующими соотношениями:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \rho V, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \rho V, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \quad (28.2)$$

где  $\chi$  — функция, известная под названием *функции напряжения Эри*.

Для того чтобы выражения (28.2) давали действительные решения задач теории упругости, они должны удовлетворять не только уравнениям равновесия, но и уравнениям совместности для напряжений. Это условие выражается в двух формах в зависимости от того, рассматривается ли плоская деформация или плоское напряженное состояние. Для плоской деформации условие сводится к следующему:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \sigma_x - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right] = 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (28.3)$$

а для плоского напряженного состояния имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (28.4)$$

Подставляя выражение (28.2) в эти уравнения, найдем, что в случае плоской деформации функция напряжения  $\chi$  должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных вида

$$\nabla_1^4 \chi + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \rho \nabla_1^2 V = 0, \quad (28.5)$$

а в случае плоского напряженного состояния — уравнению

$$\nabla_1^4 \chi + (1-\nu) \rho \nabla_1^2 V = 0, \quad (28.6)$$

где  $\nabla_1^2$  — двумерный оператор Лапласа  $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ . Когда компоненты массовых сил  $(X, Y)$  постоянны для всего материала, то

$$\nabla_1^2 V = 0,$$

и оба уравнения (28.5) и (28.6) сводятся к двумерному бигармоническому уравнению

$$\nabla_1^4 \chi = 0. \quad (28.7)$$

Несколько интересных решений уравнения (28.7) можно получить, постулируя вид функций в форме полиномов различных степеней, коэффициенты которых удовлетворяют различным условиям<sup>1)</sup>. Простейший случай получим, когда допустим, что  $V(x, y) = 0$ , и примем, что

$$\chi = \frac{1}{2} a_2 x^2 + b_2 xy + \frac{1}{2} c_2 y^2. \quad (28.8)$$

Тогда из уравнения (28.2) имеем

$$\sigma_x = c_2, \quad \sigma_y = a_2, \quad \tau_{xy} = -b_2. \quad (28.9)$$

Таким образом все три компонента напряжения постоянны и мы имеем комбинацию постоянных нормальных напряжений и постоянного касательного напряжения при отсутствии объемных сил. Рассмотрим теперь два других случая, когда функция напряжения задается в виде полиномов, и покажем, как их можно наложить для того, чтобы получить другие решения. Уравнение (28.7) удовлетворяется полиномом третьей степени

$$\chi = \frac{1}{6} a_3 x^3 + \frac{1}{2} b_3 x^2 y + \frac{1}{2} c_3 x y^2 + \frac{1}{6} d_3 y^3; \quad (28.10)$$

из уравнения же (28.2) видно, что в случае отсутствия массовых сил соответствующие напряжения равны

$$\sigma_x = c_3 x + d_3 y, \quad \sigma_y = a_3 x + b_3 y, \quad \tau_{xy} = -b_3 x - c_3 y. \quad (28.11)$$

Из этой системы напряжений можно получить различные случаи, приравнивая нулю некоторые из коэффициентов. Если, например, не равен нулю только коэффициент  $a_3$ , то

<sup>1)</sup> Mesnager A., C. R. Acad. Sci., Paris, 132, 1475 (1901); см. также Tупpe A., Z. Math. Phys. 52, 348 (1905).



$\sigma_y$  является единственным не равным нулю компонентом напряжения; если, однако, один из коэффициентов  $b_3, c_3$  является единственным не равным нулю коэффициентом, то в дополнение к нормальному напряжению появляется касательное напряжение. Когда используются полиномы более высокой степени, чем третья, то бигармоническое уравнение (28.7) удовлетворяется только в том случае, когда на коэффициенты наложены определенные условия. В случае полинома пятой степени, положим

$$\chi = \frac{1}{20} a_5 x^5 + \frac{1}{12} b_5 x^4 y + \frac{1}{6} c_5 x^3 y^2 + \frac{1}{6} d_5 x^2 y^3 + \frac{1}{12} e_5 x y^4 + \frac{1}{20} f_5 y^5. \quad (28.12)$$

Этот полином удовлетворяет уравнению (28.7), если

$$e_5 = -(2c_5 + 3a_5), \quad f_5 = -\frac{1}{3}(b_5 + 2d_5).$$

Из уравнений (28.2) найдем, что при отсутствии массовых сил компоненты напряжений определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{3} c_5 x^3 + d_5 x^2 y - (2c_5 + 3a_5) x y^2 - \frac{1}{3} (b_5 + 2d_5) y^3, \\ \sigma_y &= a_5 x^3 + b_5 x^2 y + c_5 x y^2 + \frac{1}{3} d_5 y^3, \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{3} b_5 x^3 - c_5 x^2 y - d_5 x y^2 + \frac{1}{3} (2c_5 + 3a_5) y^3. \end{aligned} \right\} \quad (28.13)$$

**29. Нагружение легкой балки.** Для того чтобы показать ценность изложенного метода, используем решения в напряжениях (28.13) для исследования напряжений в легкой балке, опертой на концах и нагруженной равномерной нагрузкой. Допустим, что балку, для которой  $-l \leq x \leq l, -c \leq y \leq c$ , можно рассматривать как тонкую пластину единичной толщины, нагруженную равномерной нагрузкой интенсивностью  $q$  на поверхности  $y = -c$ , действующей в направлении возрастания  $y$ . Тогда

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= 0 && \text{при } y = \pm c, \\ \sigma_y &= -q && \text{при } y = -c, \\ \sigma_y &= 0 && \text{при } y = +c, \end{aligned}$$

в то время как при  $x = \pm l$  имеем

$$\int_{-c}^c \tau_{xy} dy = \mp ql, \quad \int_{-c}^c \sigma_x dy = 0, \quad \int_{-c}^c \sigma_x y dy = 0.$$

Эти граничные условия могут быть удовлетворены комбинацией решений в напряжениях (28.9), (28.11) и (28.13). Поскольку в обычной элементарной теории изгиба компонент напряжения  $\sigma_x$  задается в виде выражения третьей степени относительно  $x$  и  $y$ , то в качестве основных выражений возьмем выражения (28.13), положив  $a_5 = b_5 = c_5 = 0$ , для того чтобы вдоль поверхности  $y = -c$  компонент  $\sigma_y$  был бы постоянен. Накладывая решение (28.9) при  $b_2 = c_2 = 0$  и решение (28.1) при  $a_3 = c_3 = d_3 = 0$ , можно удовлетворить остальным условиям при  $y = \pm c$ . Таким образом, имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= d_5 \left( x^2 y - \frac{3}{2} y^3 \right), \\ \sigma_y &= \frac{1}{3} d_5 y^3 + b_3 y + a_2, \\ \tau_{xy} &= -d_5 x y^2 - b_3 x, \end{aligned} \right\} \quad (29.1)$$

причем эти условия удовлетворяются, если

$$\begin{aligned} -d_5 c^2 - b_3 &= 0, \\ \frac{1}{3} d_5 c^3 + b_3 c + a_2 &= 0, \\ -\frac{1}{3} d_5 c^3 - b_3 c + a_2 &= -q, \end{aligned}$$

т. е. если

$$a_2 = -\frac{1}{2} q, \quad b_3 = \frac{3q}{4c}, \quad d_5 = -\frac{3q}{4c^3}.$$

Используя эти значения и подставляя вместо момента инерции поперечного сечения балки  $I$  при  $y = 0$  величину  $\frac{2}{3} c^3$ , найдем, что выражения (29.1) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{q}{2I} \left( x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right), \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2I} \left( \frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{q}{2I} (c^2 - y^2) x. \end{aligned} \right\} \quad (29.2)$$

Эти решения удовлетворяют первым двум условиям при  $x = \pm l$ . Для того чтобы изгибающие моменты, приложенные на концах балки, отсутствовали, добавим теперь напряжения чистого изгиба ( $\sigma_x = d_3 y$ ), описываемые выражениями (28.11), в которых отличен от нуля только коэффициент  $d_3$ . Тогда при  $x = \pm l$  будем иметь

$$\int_{-c}^c \sigma_x y dy = \int_{-c}^c \left\{ -\frac{q}{2I} \left( l^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + d_3 y \right\} y dy = 0,$$

откуда

$$d_3 = \frac{q}{2I} \left( l^2 - \frac{2}{5} c^2 \right),$$

так что вместо первого из выражений (29.2) получим

$$\sigma_x = \frac{q}{2I} \left\{ (l^2 - x^2) y + \frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right\}. \quad (29.3)$$

Первый член в этом выражении представляет решение, получаемое по элементарной теории изгиба. Очевидно, что нормальное напряжение  $\sigma_x$  не равно нулю при  $x = \pm l$ ; поскольку, однако, результирующая сила и результирующая пара равны нулю, то на значительных расстояниях от концов эффект будет практически тот же самый, как если бы  $\sigma_x$  равнялось нулю при  $x = \pm l$ .

**30. Функция Эри в полярных координатах.** Функцию напряжения можно использовать в системе полярных координат  $(r, \vartheta)$ . Когда объемные силы равны нулю, уравнения равновесия (25.10) и (25.11) удовлетворяются, если положить

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \vartheta^2}, \\ \sigma_\vartheta &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\vartheta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (30.1)$$

Эти выражения действительно являются решениями задачи в случае плоского деформированного или плоского напряженного состояний, если  $\chi$  рассматривается как функция  $r$  и  $\vartheta$  и удовлетворяет бигармоническому уравнению (28.7),

которое в системе полярных координат имеет вид

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \vartheta^2} \right) = 0. \quad (30.2)$$

Проанализируем случай симметричного распределения напряжений относительно оси  $r = 0$ . Поскольку распределение напряжений не зависит теперь от  $\vartheta$ , то уравнение (30.2) сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^4 \chi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \chi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \chi}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d\chi}{dr} = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\chi = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D. \quad (30.3)$$

Подставляя эту функцию в выражения (30.1), получим компоненты напряжения в случае осевой симметрии

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C, \\ \sigma_\vartheta &= -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C, \\ \tau_{r\vartheta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (30.4)$$

Если при  $r = 0$  отверстия нет, то постоянные  $A$  и  $B$  должны равняться нулю, а отсюда следует, что тогда существует только один тип осесимметричного распределения напряжений вида

$$\sigma_r = \sigma_\vartheta = \text{const.}$$

**31. Деформация полого цилиндра.** Задача о полом цилиндре, подверженном равномерному давлению на внутренней или внешней поверхности, является как раз такой задачей, которую можно быстро разрешить с помощью соотношений (30.4). Впервые решение было получено Ламе<sup>1)</sup>. Граничные условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -p_a, & \text{при } r &= a, \\ \sigma_r &= -p_b, & \text{при } r &= b, \end{aligned} \right\} \quad (31.1)$$

<sup>1)</sup> Leçons sur la théorie... d' élasticité, Paris, 1852.

где  $a < b$ . Поскольку в выражениях (30.4) имеются четыре независимых постоянных, а граничных условий только два, то оказывается, что напряжения являются неопределенными. Это положение обычно имеет место в случае многосвязного тела, и для того, чтобы полностью определить распределение напряжений, необходимо рассмотреть уравнения, характеризующие однозначность перемещений. Если, например, допустить, что при  $\vartheta = \alpha$  имеется разрез, так что осесимметричное распределение напряжений не обязательно приводит к симметричному перемещению, то указанное выше условие заключается в обязательной непрерывности перемещения при  $\vartheta = \alpha$ . Если  $u$ ,  $v$  — соответственно радиальный и тангенциальный компоненты перемещения, то тогда радиальный компонент деформации в случае плоского деформированного состояния определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1+\nu}{E} \left\{ (1-\nu) \sigma_r - \nu \sigma_\vartheta \right\} = \\ &= \frac{1+\nu}{E} \left\{ \frac{A}{r^2} + B \left[ (1-4\nu) + (2-4\nu) \ln r \right] + c(2-4\nu) \right\} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$u = \frac{1+\nu}{E} \left\{ -\frac{A}{r} - Br + B(2-4\nu)r \ln r + c(2-4\nu)r \right\} + f(\vartheta), \quad (31.2)$$

где  $f(\vartheta)$  — функция только  $\vartheta$ ; тангенциальный же компонент деформации равен

$$\begin{aligned} \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} &= \frac{1+\nu}{E} \left\{ -\nu \sigma_r + (1-\nu) \sigma_\vartheta \right\} = \\ &= \frac{1+\nu}{E} \left\{ -\frac{A}{r^2} + B \left[ (3-4\nu) \log r \right] + C(2-4\nu) \right\}. \end{aligned}$$

Используя затем выражение (31.2), найдем, что

$$v = \frac{4B(1-\nu^2)}{E} r\vartheta - \int f(\vartheta) d\vartheta + g(r), \quad (31.3)$$

где  $g(r)$  — функция только  $r$ . Поскольку

$$\tau_{r\vartheta} = 0, \quad \gamma_{r\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0,$$

то, подставляя сюда выражения (31.2) и (31.3), получим

$$\frac{1}{r} f'(\vartheta) + g'(r) = \frac{1}{r} \int f(\vartheta) d\vartheta + \frac{1}{r} g(r),$$

так что

$$g(r) = Fr, \quad f(\vartheta) = H \sin \vartheta + K \cos \vartheta,$$

где  $F$ ,  $H$  и  $K$  — постоянные, подлежащие определению. Подставляя эти функции в уравнение (31.3), найдем, что тангенциальное перемещение равно

$$v = \frac{4B(1-\nu^2)r\vartheta}{E} + Fr + H \cos \vartheta - K \sin \vartheta.$$

Ясно, что перемещение не является единственным до тех пор, пока не будет равно нулю  $B$ . Это и есть требуемое условие для того, чтобы распределение напряжений было определено однозначно.

Полагая в выражениях (30.4)  $B = 0$  и используя граничные условия (31.1), найдем, что

$$A = \frac{(p_b - p_a) a^2 b^2}{b^2 - a^2}, \quad C = \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{2(b^2 - a^2)}. \quad (31.4)$$

Используя эти соотношения, получим, что компоненты напряжения равны

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2 b^2 (p_b - p_a)}{(b^2 - a^2) r^2} + \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}, \\ \sigma_\vartheta &= -\frac{a^2 b^2 (p_b - p_a)}{(b^2 - a^2) r^2} + \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (31.5)$$

В настоящем случае перемещения должны быть осесимметричными, так что  $f(\vartheta) \equiv 0$ . Тогда, подставляя выражения (31.4) в (31.2) и (31.3), найдем, что компоненты перемещения должны быть равны

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1+\nu}{E(b^2-a^2)} \left\{ \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{r} + \right. \\ &\quad \left. + (1+2\nu)(a^2 p_a - b^2 p_b) r \right\}, \\ v &= Fr, \end{aligned} \right\} \quad (31.6)$$

где тангенциальный компонент перемещения  $v$  представляет собой только чистое вращение.

## III. Комплексные потенциалы

**32. Определение потенциалов.** Кажется очевидным, что двумерная теория упругости представляет собой ту область, где следует использовать методы функций комплексного переменного, однако первые работы Колосова<sup>1)</sup>, а позднее Мусхелишвили<sup>2)</sup>, до последних лет вне России оставались неизвестными. Основные уравнения независимо были выведены Стивенсоном<sup>3)</sup>, метод которого и использован здесь, поскольку он кажется более прямо ведущим к цели и, в отличие от работ Колосова и Мусхелишвили, здесь учитываются массовые силы.

Если переменные  $x$ ,  $y$  заменить сопряженными комплексными переменными

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy,$$

то

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right). \quad (32.1)$$

Массовые силы выражаются через потенциальную функцию  $V(x, y) = U(z, \bar{z})$  такую, что

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Таким образом, уравнения равновесия могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x - \rho V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (32.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y - \rho V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0. \quad (32.3)$$

Затем, умножая уравнение (32.3) на  $i$  и складывая

<sup>1)</sup> Колосов Г. В., С. R. Acad. Sci., Paris 146, 522 (1908); 148, 1242 (1909); Z. Math. Phys. 62, 384 (1914). Применение комплексного переменного к теории упругости, ОНТИ, Москва—Ленинград, 1935.

<sup>2)</sup> Мусхелишвили Н. И., Math. Ann. 107, 282 (1932); Доклады АН СССР 3, 7, 73, 141 (1934). Некоторые основные проблемы математической теории упругости.

<sup>3)</sup> Stevenson A. C., Proc. Roy. Soc. Lond., Ser A 184, 129 (1945); Phil. Mag., Ser VII, 34, 766 (1943).

с уравнением (32.2), получим, переходя к переменным  $z, \bar{z}$ , комплексное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_x + \sigma_y - 2qU) = 0, \quad (32.4)$$

которое, очевидно, удовлетворяется функцией  $F(z, \bar{z})$ , причем

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \sigma_x + \sigma_y - 2qU, \quad (32.5)$$

$$-\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}. \quad (32.6)$$

Комплексное перемещение  $D$  определяется выражением

$$D = u + iv.$$

Используя выражения (32.1), получим следующее уравнение:

$$2 \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Затем с помощью соотношений между деформациями и напряжениями (25.4), (25.5) и (25.7) найдем

$$4\mu \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}. \quad (32.7)$$

Из уравнений (32.6) и (32.7) имеем

$$4\mu \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial F}{\partial \bar{z}},$$

и, следовательно,

$$4\mu D = f(z) - F(z, \bar{z}), \quad (32.8)$$

где  $f(z)$  — функция одного  $z$ . Дифференцируя выражение для  $D$  по  $z$  и используя соотношения (32.1), найдем, что

$$2 \frac{\partial D}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

и, следовательно, в случае плоского деформированного состояния из уравнений (25.4) и (25.5) имеем

$$4(\lambda + \mu) \frac{\partial D}{\partial z} = \sigma_x + \sigma_y + 2i(\lambda + \mu) \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (32.9)$$



Дифференцируя уравнение (32.8) по  $z$  и подставляя вместо  $\frac{\partial F}{\partial z}$  выражение (32.5), получим уравнение

$$4\mu \frac{\partial D}{\partial z} = f'(z) - (\sigma_x + \sigma_y) + 2\rho U. \quad (32.10)$$

Исключая  $\partial D/\partial z$  из уравнений (32.9) и (32.10), придем к уравнению

$$\sigma_x + \sigma_y - \frac{\rho U}{1-\nu} - \frac{i\mu}{1-\nu} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 4\varphi'(z), \quad (32.11)$$

где

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{8(1-\nu)} \quad (32.12)$$

и  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Действительная часть уравнения (32.1) имеет вид

$$\sigma_x + \sigma_y - \frac{\rho U}{1-\nu} = 2[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})],$$

так что из уравнения (32.5) найдем

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] - \left( \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) \rho \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (32.13)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial z} W(z, \bar{z}) = U.$$

Интегрируя затем по  $z$ , получим

$$F(z, \bar{z}) = 2[\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z})] - \left( \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) \rho W(z, \bar{z}) + 2\bar{\psi}(\bar{z}), \quad (32.14)$$

где  $\bar{\psi}(\bar{z})$  — функция только  $\bar{z}$ .

Из уравнений (32.8), (32.12) и (32.14) определим комплексное перемещение

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}) + \frac{1}{2}c\rho W(z, \bar{z}), \quad (32.15)$$

причем

$$\kappa = 3 - 4\nu, \quad c = \frac{1-2\nu}{1-\nu};$$

вместе с тем из выражений (32.5), (32.6) и (32.14) получим

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] + (2-c) \varrho \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (32.16)$$

$$\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = -2[z\bar{\varphi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z})] + c\varrho \frac{\partial W}{\partial z}. \quad (32.17)$$

Таким образом, для заданной силовой функции  $W(z, \bar{z})$  распределение перемещений и напряжений полностью определяется комплексными потенциалами  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  с помощью уравнений (32.15), (32.16) и (32.17). В § 27 было показано, что решения, справедливые для плоского деформированного состояния, имеют место также и для обобщенного плоского напряженного состояния, если вместо коэффициента  $\nu$  ввести приведенный коэффициент Пуассона  $\sigma = \nu/(1 + \nu)$ . Здесь, как показывает Стивенсон<sup>1)</sup>, необходимо наложить дополнительное условие, а именно, что потенциал массовых сил  $V(x, y)$  должен удовлетворять бигармоническому уравнению

$$\nabla_1^4 V = 0.$$

**33. Связь с функцией Эри.** Приведенные выше уравнения Мухелишвили были выведены при условии отсутствия массовых сил, из рассмотрения функций напряжения Эри. В этом случае просто вывести соотношение между силовой функцией и комплексными потенциалами. Когда  $V(x, y) \equiv 0$ , то из уравнения (28.2) и выражений (32.1) имеем

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \frac{\partial^2 \chi}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = -\frac{4\partial^2 \chi}{\partial z^2},$$

где  $\chi$  — функция напряжений. Тогда из уравнений (32.16) и (32.17) получим

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial \chi}{\partial z \partial \bar{z}} &= \varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z}), \\ 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} &= z\bar{\varphi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z}). \end{aligned} \right\} \quad (33.1)$$

<sup>1)</sup> Phil. Mag., Ser VII 34, 766 (1943).

Сразу становится ясным, что  $\chi$  удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\nabla_1^4 \chi = \frac{\partial^4 \chi}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0.$$

Интегрируя уравнения (33.1), имеем

$$2 \frac{\partial \chi}{\partial z} = \varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + f_1(\bar{z}),$$

$$2 \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} = z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}) + f_2(z),$$

откуда

$$f_1(\bar{z}) = \bar{\psi}(\bar{z}),$$

$$f_2(z) = \varphi(z)$$

и, следовательно,

$$2 \frac{\partial \chi}{\partial z} = \varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})$$

и

$$2\chi = \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \int \bar{\psi}(\bar{z}) d\bar{z} + g(z), \quad (33.2)$$

где  $g(z)$  — функция только  $z$ . Поскольку все вторые производные функции  $\chi$  являются действительными величинами, то сама функция должна быть действительной величиной, исключая возможную комплексную константу. Тогда в уравнении (33.2) необходимо будет иметь

$$\bar{g}(\bar{z}) = \int \bar{\psi}(\bar{z}) d\bar{z} + c,$$

где  $c$  — произвольная комплексная постоянная, и соотношение между функцией напряжений и комплексными потенциалами определено с точностью до этой постоянной. Полагая  $c=0$ , получим

$$2\chi = x\varphi_1(x, y) + y\varphi_2(x, y) + g_1(x, y), \quad (33.3)$$

где

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2,$$

$$g = g_1 + ig_2;$$

поскольку же  $\varphi$  и  $g$  являются аналитическими функциями, то  $\varphi_1, \varphi_2, g_1, g_2$  будут гармоническими функциями. Мусхелишвили определил комплексные потенциалы, заметив, что каждая бигармоническая функция может быть представлена через гармонические функции в форме, подобной уравнению (33.3).

**34. Преобразования к ортогональным криволинейным координатам.** Во многих приложениях изложенной здесь теории необходимо иметь выражения для компонен-

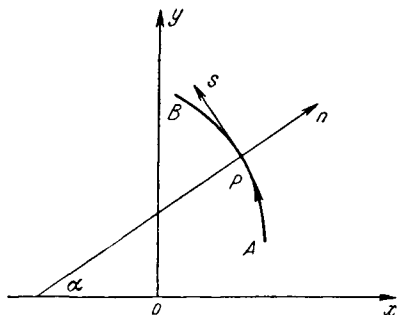


Рис. 15.

тов напряжений и перемещений в ортогональной криволинейной системе координат  $(\xi, \eta)$ , которую будем определять с помощью конформного преобразования  $z = w(\zeta)$ , где  $\zeta = \xi + i\eta$ . Рассмотрим сначала прямоугольные оси  $Pn, Ps$ , образованные нормалью  $n$  к кривой  $\eta = \text{const}$  в точке  $P(x, y)$  и нормалью  $s$  к кривой  $\xi = \text{const}$  в той же точке, направленные соот-

ветственно в стороны возрастания  $\xi$  и  $\eta$ . Поскольку компоненты напряжения образуют тензор, то отсюда следует, что если  $n$  составляет угол  $\alpha$  с осью  $x$  (рис. 15), то компоненты напряжения  $\sigma_n, \sigma_s, \tau_{ns}$  в системе координат  $n, s$  получаются с помощью преобразований

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\sigma_s = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\tau_{ns} = -\sigma_x \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

Легко видеть, что

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n + \sigma_s &= \sigma_x + \sigma_y, \\ \sigma_n - \sigma_s + 2i\tau_{ns} &= e^{-2i\alpha} (\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}), \\ \sigma_n - \sigma_s - 2i\tau_{ns} &= e^{2i\alpha} (\sigma_x - \sigma_y - 2i\tau_{xy}). \end{aligned} \right\} \quad (34.1)$$

Если теперь приращение  $dz_1$  взять в точке  $P$  вдоль кривой  $\eta = \text{const}$

$$dz_1 = J e^{i\alpha} d\xi,$$

где  $J$  — действительная величина, и так как  $z = w(\zeta)$  является аналитической функцией в точке  $P$ , то

$$J e^{i\alpha} = w'(\zeta).$$

Следовательно,

$$J^2 = |w'(\zeta)|^2 = w'(\zeta) \overline{w'(\zeta)} \quad (34.2)$$

и

$$e^{-2i\alpha} = \left[ \frac{\overline{w'(\zeta)}}{|w(\zeta)|} \right]^2 = \frac{\overline{w'(\zeta)}}{w'(\zeta)}. \quad (34.3)$$

Обозначив затем компоненты напряжения в системе координат  $\xi, \eta$  через  $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \tau_{\xi\eta}$  и используя выражение (34.3), получим, что формулы (34.1) для любой точки  $P(x, y)$  будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\xi + \sigma_\eta &= \sigma_x + \sigma_y, \\ \sigma_\xi - \sigma_\eta + 2i\tau_{\xi\eta} &= \frac{\overline{w'(\zeta)}}{w'(\zeta)} (\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}), \\ \sigma_\xi - \sigma_\eta - 2i\tau_{\xi\eta} &= \frac{w'(\zeta)}{\overline{w'(\zeta)}} (\sigma_x - \sigma_y - 2i\tau_{xy}). \end{aligned} \right\} \quad (34.4)$$

Здесь следует заметить, что важное значение величин

$$\sigma_x + \sigma_y, \quad \sigma_x - \sigma_y \pm 2i\tau_{xy}$$

заключается в том, что, как показали Грин и Церна<sup>1)</sup>, они являются контрвариантными компонентами  $T^{12}, T^{11}, T^{22}$  тензора напряжения в системе координат  $z, \bar{z}$ .

Если  $u_\xi, u_\eta$  обозначают компоненты перемещения в точке  $P(x, y)$ , направленные соответственно вдоль нормалей  $n$  и  $s$ , то тогда ясно, что

$$u_\xi + iu_\eta = e^{-i\alpha}(u + iv), \quad (34.5)$$

где  $e^{-i\alpha}$  определяется выражением (34.3). Полагая

$$\varphi(z) = \varphi_0(\zeta), \quad \psi(z) = \psi_0(\zeta),$$

<sup>1)</sup> Green A. E., Zerna W., Theoretical Elasticity, p. 193, London, Oxford University Press, 1954.

имеем из выражений (32.15), (34.3) и (34.5)

$$2\mu (u_{\xi} + iu_{\eta}) = \frac{\bar{w}'(\bar{\zeta})}{|w'(\zeta)|} \left[ \kappa\varphi_0(\zeta) - \frac{w(\zeta)}{\bar{w}'(\bar{\zeta})} \bar{\varphi}'_0(\bar{\zeta}) - \bar{\psi}_0(\bar{\zeta}) + \frac{1}{2} c\varrho W(z, \bar{z}) \right]. \quad (34.6)$$

Если принять, что

$$\varphi'(z) = \Phi(z) = \Phi_0(\zeta), \quad \psi'(z) = \Psi(z) = \Psi_0(\zeta),$$

то тогда из формул (32.16), (32.17) и (34.1) получим

$$\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} = 2[\Phi_0(\zeta) + \bar{\Phi}_0(\bar{\zeta})] + (2-c)\varrho \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (34.7)$$

$$\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta} + 2i\tau_{\xi\eta} = -\frac{2}{w'(\zeta)} [\omega(\zeta) \bar{\Phi}'_0(\bar{\zeta}) + \bar{w}'(\bar{\zeta}) \bar{\Psi}_0(\bar{\zeta})] + \frac{\bar{w}'(\bar{\zeta})}{w'(\zeta)} c\varrho \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (34.8)$$

$$\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi} + 2i\tau_{\xi\eta} = \frac{2}{\bar{w}'(\bar{\zeta})} [\bar{\omega}(\bar{\zeta}) \Phi'_0(\zeta) + w'(\zeta) \Psi_0(\zeta)] - \frac{w'(\zeta)}{\bar{w}'(\bar{\zeta})} c\varrho \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{z}}. \quad (34.9)$$

Переходя с помощью конформного отображения к круговым областям, Мусхелишвили полагает  $\zeta = \varrho e^{i\vartheta}$  и рассматривает криволинейную систему координат  $\varrho, \vartheta$ . Если приращение  $dz_1$  в точке  $P$  берется вдоль кривой  $\vartheta = \text{const}$  в направлении увеличения  $\varrho$ , то соответствующее приращение  $d\zeta$  будет направлено по радиусу. Тогда, если  $\beta$  обозначает угол между касательной к кривой  $\vartheta = \text{const}$  и осью  $Ox$ , то в точке  $P$  имеем

$$dz_1 = e^{i\beta} |dz_1|,$$

тогда как

$$d\zeta = e^{i\vartheta} |d\zeta|.$$

Отсюда следует, что

$$\left. \begin{aligned} e^{i\beta} &= \frac{dz_1}{|dz_1|} = \frac{w'(\zeta) d\zeta}{|w'(\zeta) d\zeta|} = e^{i\vartheta} \frac{w'(\zeta)}{|w'(\zeta)|} = \frac{\zeta w'(\zeta)}{\varrho |w'(\zeta)|} \\ \text{и} \\ e^{-i\beta} &= \frac{\bar{\zeta} \bar{w}'(\bar{\zeta})}{\varrho |w'(\zeta)|} \end{aligned} \right\} \quad (34.10)$$

Сравнивая выражения (34.3) и (34.10), получим следующее соотношение:

$$\beta = \alpha + \vartheta.$$

Соотношения, связывающие компоненты напряжения и перемещения в системе координат  $q, \vartheta$ , аналогичные соотношениям (34.6) — (34.9) в системе координат  $\xi, \eta$ , получим непосредственно, подставив в формулы (34.1) и (34.5) выражения (34.10) для  $e^{i\beta}$  вместо выражения (34.3) для  $e^{i\alpha}$ . Когда массовые силы отсутствуют, получим результаты Мухелишвили (в несколько измененных обозначениях):

$$2\mu (u_q + iu_\vartheta) = \frac{\bar{\xi} \bar{w}'(\bar{\xi})}{q |w'(\xi)|} \left[ \kappa \Phi_0(\xi) - \frac{w(\xi)}{w'(\xi)} \bar{\Phi}'_0(\bar{\xi}) - \bar{\Psi}_0(\bar{\xi}) \right], \quad (34.11)$$

$$\sigma_q + \sigma_\vartheta = 2 [\Phi_0(\xi) + \bar{\Phi}_0(\bar{\xi})], \quad (34.12)$$

$$\sigma_\vartheta - \sigma_q + 2i\tau_{q\vartheta} = \frac{2\xi^2}{q^2 \bar{w}'(\bar{\xi})} [\bar{w}(\bar{\xi}) \Phi'_0(\xi) + w'(\xi) \Psi_0(\xi)]. \quad (34.13)$$

Когда  $z = w(\xi) = \zeta$ , эти формулы переходят в формулы, соответствующие системе полярных координат:

$$2\mu (u_q + iu_\vartheta) = e^{-i\vartheta} [\kappa \Phi(z) - z \bar{\Phi}'(\bar{z}) - \bar{\Psi}(\bar{z})], \quad (34.14)$$

$$\sigma_q + \sigma_\vartheta = 2 [\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z})], \quad (34.15)$$

$$\sigma_\vartheta - \sigma_q + 2i\tau_{q\vartheta} = 2e^{2i\vartheta} [\bar{z} \Phi'(z) + \Psi(z)], \quad (34.16)$$

где  $z = qe^{i\vartheta}$  и согласно предыдущим обозначениям,  $\Psi(z) = \psi'(z)$ .  $\Phi(z) = \phi'(z)$ .

**35. Ограничения, накладываемые на потенциалы.** Если упругое тело занимает в плоскости односвязную область, то в этой области функции  $\phi(z)$ ,  $\psi(z)$ , вследствие их аналитичности, будут однозначными. Если, однако, область будет многосвязна, как например, в случае пластины с отверстиями, то тогда эти функции могут уже и не быть однозначными. Физически, однако, ясно, что компоненты напряжений должны быть однозначными и такое же условие мы будем накладывать и на перемещение, хотя многозначные перемещения физически могут быть истол-

кованы как *дислокации*<sup>1)</sup>. Обозначение  $[f]_A^B$  используется для того, чтобы указать на возрастание функции  $f$  вдоль пути  $AB$  в материале. Если точка  $B$  совпадает с точкой  $A$ , так что путь  $AB$  становится замкнутым контуром, то можно показать, что операцию вычисления приращения  $[f]_A^A$  можно переставить с операцией дифференцирования по  $z$  или  $\bar{z}$ . Когда массовые силы отсутствуют, то условия однозначности напряжений, согласно выражениям (32.16) и (32.17), имеют вид

$$[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})]_A^A = 0, \quad (35.1)$$

$$[z\bar{\varphi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z})]_A^A = 0, \quad (35.2)$$

где  $AA$  — произвольный замкнутый контур, проведенный в рассматриваемой области. Из этих уравнений следует, что

$$[\varphi''(z)]_A^A = [\bar{\varphi}''(\bar{z})]_A^A = [\bar{\psi}'(\bar{z})]_A^A = 0. \quad (35.3)$$

Если перемещения однозначны, то из уравнения (32.15) имеем

$$[\kappa\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z})]_A^A = 0.$$

Дифференцируя это выражение по  $z$ , получим

$$[\kappa\varphi'(z) - \bar{\varphi}'(\bar{z})]_A^A = 0;$$

сравнение с выражением (35.1) показывает, что

$$[\varphi'(z)]_A^A = [\bar{\varphi}'(\bar{z})]_A^A = 0. \quad (35.4)$$

Найдем теперь выражения для компонентов  $X$ ,  $Y$  результирующей силы и результирующей пары  $M$ , действующих на дугу  $AB$  внутри материала. Очевидно, что

$$X + iY = \int_{AB} (p_{xn} + ip_{yn}) ds, \quad (35.5)$$

где  $p_{xn}$ ,  $p_{yn}$  — компоненты напряжения, возникающего в элементе дуги  $ds$  соответственно в направлении  $Ox$  и  $Oy$ .

<sup>1)</sup> Coker, Filon, Photoelasticity, Cambridge, 1931.



Так как

$$\begin{aligned} p_{xn} &= \sigma_n \cos \alpha - \tau_{ns} \sin \alpha, \\ p_{yn} &= \sigma_n \sin \alpha + \tau_{ns} \cos \alpha, \end{aligned}$$

то, следовательно,

$$p_{xn} + ip_{yn} = e^{i\alpha} (\sigma_n + i\tau_{ns}).$$

Из формул (34.1) имеем

$$2(\sigma_n + i\tau_{ns}) = \sigma_x + \sigma_y + e^{-2\alpha i} (\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy})$$

и, таким образом, получим

$$2(p_{xn} + ip_{yn}) = e^{i\alpha} (\sigma_x + \sigma_y) + e^{-i\alpha} (\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}), \quad (35.6)$$

причем

$$\frac{dz}{ds} = ie^{i\alpha}, \quad \frac{\bar{z}}{ds} = -ie^{-i\alpha}. \quad (35.7)$$

Следовательно, из формул (32.16), (32.17), (35.5), (35.6) и (35.7) найдем

$$\begin{aligned} i(X + iY) &= \int_{AB} [\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] \frac{dz}{ds} ds + \int_{AB} [z\bar{\varphi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z})] \frac{d\bar{z}}{ds} ds = \\ &= \int_{AB} \frac{d}{ds} [\varphi(z) + \bar{\psi}(\bar{z}) + z\bar{\varphi}'(\bar{z})] ds, \end{aligned}$$

и поэтому

$$X + iY = -i[\varphi(z) + \bar{\psi}(\bar{z}) + z\bar{\varphi}'(\bar{z})]_A^B. \quad (35.8)$$

Момент  $M$  равен

$$\begin{aligned} M &= \int_{AB} (xp_{yn} - yp_{xn}) ds = \operatorname{Re} \left\{ -i \int_{AB} \bar{z} (p_{xn} + ip_{yn}) ds \right\} = \\ &= -\operatorname{Re} \left\{ \int_{AB} \bar{z} [\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] \frac{dz}{ds} ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_{AB} \bar{z} [z\bar{\varphi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z})] \frac{d\bar{z}}{ds} ds \right\} = \\ &= -\operatorname{Re} \left\{ \int_{AB} \frac{d}{ds} [z\bar{z}\bar{\varphi}'(\bar{z}) + z\bar{\psi}(\bar{z}) - \bar{\chi}(\bar{z})] ds \right\} \end{aligned}$$

и аналогично, учитывая, что

$$\chi'(z) = \psi(z),$$

имеем

$$M = \operatorname{Re} [\chi(z) - z\psi(z) - \bar{z}z\varphi'(z)]_A^B. \quad (35.9)$$

Если кривая  $AB$  представляет собой замкнутый контур  $AA$ , то, используя соотношения (35.4), получим

$$X + iY = -i[\varphi(z) + \bar{\psi}(\bar{z})]_A^A, \quad (35.10)$$

$$M = \operatorname{Re} [\chi(z) - z\psi(z)]_A^A. \quad (35.11)$$

Допустим, что область  $S$ , занятая телом, ограничена замкнутыми контурами  $L_1, L_2, \dots, L_m, L_{m+1}$ , причем контур  $L_{m+1}$  содержит остальные;  $z_1, z_2, \dots, z_m$  — произвольные фиксированные точки внутри соответствующих контуров, при этом  $X_k, Y_k$  — компоненты результирующего напряжения на контуре  $L_k$ . Тогда можно показать, что

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{k=1}^m (X_k + iY_k) \ln(z - z_k) + \varphi^*(z), \\ \psi(z) &= \frac{\kappa}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{k=1}^m (X_k - iY_k) \ln(z - z_k) + \psi^*(z), \end{aligned} \right\} \quad (35.12)$$

где  $\varphi^*(z)$  и  $\psi^*(z)$  — функции, голоморфные в области  $S$ . Когда контур  $L_{m+1}$  удаляется в бесконечность, так что область  $S$  становится бесконечной, эти результаты остаются все еще справедливыми. Обозначим через  $L_R$  окружность  $|z|=R$ , содержащую все конечные контуры  $L_k$ . Тогда для всех  $|z| \geq R$  для бесконечной области вместо выражений (35.12) можно написать

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \ln z + \varphi^{**}(z), \\ \psi(z) &= \frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)} \ln z + \psi^{**}(z), \end{aligned} \right\} \quad (35.13)$$

где

$$X = \sum_{k=1}^m X_k, \quad Y = \sum_{k=1}^m Y_k,$$

и  $\varphi^{**}(z)$ ,  $\psi^{**}(z)$  — функции, голоморфные в области  $|z| \geq R$ , за исключением, может быть, бесконечно удаленной точки. Вводя эти выражения в уравнения (32.16) и (32.17) и накладывая условие ограниченности компонентов напряжения во всей бесконечной области  $S$ , найдем, что

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{**}(z) &= \Gamma z + \varphi_1(z), \\ \psi^{**}(z) &= \Gamma' z + \psi_1(z), \end{aligned} \right\} \quad (35.14)$$

где  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$  — комплексные постоянные и  $\varphi_1(z)$ ,  $\psi_1(z)$  — функции, голоморфные в области  $|z| \geq R$ , включая бесконечно удаленную точку, и имеющие для достаточно больших  $|z|$  вид

$$a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \dots$$

Постоянные  $a_0$ ,  $a_1 \dots$  в этих разложениях, а также величину  $\text{Im}(\Gamma)$  можно, не изменяя напряженного состояния, принять равными нулю. Кроме того, используя уравнения (32.16) и (32.17) и равенство  $W = 0$ , можно тотчас же показать, что

$$\text{Re}(\Gamma) = \frac{1}{4}(N_1 + N_2), \quad \Gamma' = -\frac{1}{2}(N_1 - N_2)e^{-2i\alpha}, \quad (35.15)$$

где  $N_1$ ,  $N_2$  — главные напряжения на бесконечности и  $\alpha$  — угол между направлением  $N_1$  и осью  $Ox$ . Используя выражения (35.13) и (35.14) и соотношение (32.15), получим, что при отсутствии массовых сил комплексное перемещение для больших  $|z|$  равно

$$2\mu(u + iv) = -\frac{\kappa(X + iY)}{2\pi(1 + \kappa)} \ln(z\bar{z}) + (\kappa\Gamma - \bar{\Gamma})z - \Gamma'\bar{z} + \dots, \quad (35.16)$$

где отброшенные члены остаются ограниченными при  $|z| \rightarrow \infty$ . Очевидно, что перемещения на бесконечности не будут ограниченными до тех пор, пока не будут иметь место следующие равенства:

$$X = Y = 0, \quad \Gamma = \Gamma' = 0.$$

Такие условия приводят к тому, что равнодействующая напряжений, действующих на все контуры  $L_k$ , равна нулю; напряжения на бесконечности также равны нулю,

а разложения функций  $\varphi$  и  $\psi$  для достаточно больших  $|z|$  имеют вид

$$\varphi(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots,$$

$$\psi(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$$

**36. Кольцо.** Несколько частных случаев было решено Стивенсоном и другими исследователями, которые получили решение методами последовательных приближений, аналогичными тем, которые применяются при использовании функции напряжений Эри. Однако обычно процесс решения в этом случае гораздо проще. Прежде чем переходить к более сложным построениям Мухелишвили, приведем несколько примеров решения задач подобными методами.

Рассмотрим сначала равновесие кольца  $a \leq |z| \leq b$ , находящегося под действием

(1) равномерно распределенных касательных нагрузок, приложенных на границах, и

(2) постоянного давления на границах.

Вычитая выражение (34.16) из (34.15) и учитывая, что  $e^{2i\theta} = z/\bar{z}$ , придем к соотношению

$$\sigma_\theta - i\tau_{\theta\phi} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - z\varphi''(z) - \frac{z}{z} \psi'(z). \quad (36.1)$$

В том случае, когда результирующие напряжений  $X$ ,  $Y$  не равны нулю при  $|z| = a$ , из уравнений (35.12) следует, что функции

$$\varphi(z) = \varphi^*(z), \quad \psi(z) = \psi^*(z)$$

являются внутри кольца голоморфными функциями. Однако в случае (1) существует результирующий момент  $M$ , который определяется согласно (35.11) следующим выражением:

$$M = \operatorname{Re} [\chi(z)]_\gamma,$$

где  $\gamma$  — любой из контуров  $|z| = a$ ,  $|z| = b$ . Это уравнение удовлетворяется выражениями

$$\chi(z) = C \ln z, \quad C = C_1 + iC_2,$$

откуда следует, что

$$M = -2\pi C_2 \quad (36.2)$$

для всех замкнутых контуров  $\gamma$ , проведенных в кольце и содержащих начало координат; в свою очередь функция

$$\psi(z) = \chi'(z) = \frac{C}{z} \quad (36.3)$$

является голоморфной внутри кольца. Полагая

$$\varphi(z) = 0, \quad C_1 = 0,$$

полностью удовлетворим условию (1) и из выражений (36.2) и (36.3) получим

$$\psi(z) = -\frac{iM}{2\pi z}.$$

Подставляя эти функции в соотношение (35.15), имеем

$$\sigma_Q - i\tau_{Q\Phi} = -\frac{iM}{2\pi z z}.$$

Используя затем дополнительно уравнение (34.15), получим, что компоненты напряжений равны

$$\sigma_Q = \sigma_\Phi = 0, \quad \tau_{Q\Phi} = \frac{M}{2\pi Q^2}. \quad (36.4)$$

Из уравнения (34.14) имеем

$$2\mu(u_Q + iu_\Phi) = -\frac{Q}{z} \bar{\psi}(\bar{z}) = \frac{iM}{2\pi Q},$$

и, следовательно,

$$u_Q = 0, \quad u_\Phi = \frac{M}{4\pi\mu Q}. \quad (36.5)$$

Для того чтобы удовлетворить условиям (2), величина  $M$  так же, как величины  $X$  и  $Y$ , должна быть равна нулю. Функцию  $\psi(z)$  будем определять согласно уравнению (36.3), считая величину  $C$  действительной, так что

$$\psi(z) = \frac{C_1}{z}. \quad (36.6)$$

Вводя функцию

$$\varphi(z) = Az \quad (A - \text{действительная величина}), \quad (36.7)$$

мы не нарушаем указанных выше условий; в этом случае имеются две постоянные  $A$  и  $C_1$ , которые нужно выразить через  $p_a, p_b$  при  $|z| = a, |z| = b$ . Подставляя функции (36.6) и (36.7) в формулы (34.15) и (36.1), найдем, что

$$\sigma_\varrho = 2A + \frac{C_1}{\varrho^2}, \quad \sigma_\Phi = 2A - \frac{C_1}{\varrho^2}, \quad \tau_{\varrho\Phi} = 0. \quad (36.8)$$

Определяя  $A$  и  $C_1$  с помощью условий

$$\sigma_\varrho = -p_a \text{ при } \varrho = a; \quad \sigma_\varrho = -p_b \text{ при } \varrho = b$$

и подставляя в формулы (36.8), получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\varrho &= \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{(b^2 - a^2) \varrho^2}, \\ \sigma_\Phi &= \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 (p_b - p_a)}{(b^2 - a^2) \varrho^2}. \end{aligned} \right\} \quad (36.9)$$

Компоненты перемещения, соответствующие комплексным потенциалам (36.6) и (36.7), легко определяются из соотношения (34.14), и, выраженные через давление, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} u_\varrho &= \frac{(1-2\nu)(p_a a^2 - p_b b^2)}{2\mu(b^2 - a^2)} \varrho + \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{2\mu(b^2 - a^2) \varrho}, \\ u_\Phi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (36.10)$$

Легко видеть, что если бы величина  $A$  была комплексной, то компоненты напряжений и радиальный компонент перемещения не изменялись и имело бы место только чистое вращение. Эти результаты одинаковы с теми, которые следуют из соотношений (31.5) и (31.6), полученных методом функции напряжений.

**37. Случай эллиптического отверстия.** В качестве примера использования криволинейных координат рассмотрим случай ненапряженного эллиптического отверстия в бесконечной пластинке. Эллиптические координаты  $\xi, \eta$  определяются с помощью преобразования

$$z = w(\zeta) = c \operatorname{ch} \zeta, \quad \zeta = \xi + i\eta; \quad (37.1)$$

эллиптическая граница определяется в этих координатах выражением  $\xi = \alpha$ , где  $\alpha$  — постоянная величина. Допустим, что на бесконечности пластина находится в условиях всестороннего натяжения  $T$ ; в этом случае при отсутствии массовых сил из выражений (34.7) и (34.9) получим при  $|z| \rightarrow \infty$

$$\Phi_0(\zeta) + \bar{\Phi}_0(\bar{\zeta}) \rightarrow T, \quad \bar{\omega}(\bar{\zeta}) \Phi'_0(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi_0(\zeta) \rightarrow 0. \quad (37.2)$$

Стивенсон нашел, что для описания распределения напряжений достаточно представить комплексные потенциалы в виде

$$\varphi(z) = A c \operatorname{sh} \zeta, \quad \psi(z) = B c \operatorname{csh} \zeta, \quad (37.3)$$

где  $A, B$  — действительные величины. Легко проверить, что эти функции удовлетворяют условиям (35.3) и (35.4); из выражений (35.10) и (35.11) следует при этом, что результирующие напряжения и момент на контуре отверстия равны нулю. Из уравнения (37.1) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} = \omega'(\zeta) = c \operatorname{sh} \zeta, \quad (37.4)$$

а из уравнений (37.3), получим

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(\zeta) &= \varphi'(z) = A \operatorname{cth} \zeta, \\ \Psi_0(\zeta) &= \psi'(z) = -B \operatorname{csh}^2 \zeta \operatorname{cth} \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (37.5)$$

Из соотношений (37.2), (37.3) и (37.5) легко видеть, что они удовлетворяются при  $T = 2A$ . Подставляя указанные выше выражения в соотношения (34.7) и (34.9) и вычитая выражения (34.9) из (34.7), придем к следующему выражению:

$$\sigma_{\xi} - i\tau_{\xi\eta} = \operatorname{cth} \zeta (A + A \operatorname{cth} \bar{\zeta} \operatorname{cth} \zeta + B \operatorname{csh} \zeta \operatorname{csh} \bar{\zeta}). \quad (37.6)$$

Это выражение равно нулю на границе  $\zeta + \bar{\zeta} = 2\alpha$ , если

$$A [\operatorname{sh} \zeta \operatorname{sh} (2\alpha - \zeta) + \operatorname{ch} \zeta \operatorname{ch} (2\alpha - \zeta)] = -B,$$

т. е. если

$$B = -A \operatorname{ch} 2\alpha = -\frac{1}{2} T \operatorname{ch} 2\alpha.$$

В результате из выражения (37.3) получим комплексные потенциалы

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} T c \operatorname{sh} \zeta, \quad \psi(z) = -\frac{1}{2} T c \operatorname{ch} 2\alpha \operatorname{csh} \zeta. \quad (37.7)$$

Подобными методами Стивенсоном были решены различные задачи<sup>1)</sup>. Среди них задачи о кольцевых областях, ограниченных концентрическими и эксцентрическими окружностями, конечные и бесконечные пластинки, ограниченные эллипсами и правильными криволинейными многоугольниками, полубесконечные пластинки с трохойдальной границей или границей, заданной в полярных координатах и имеющей вид  $r = c(\sec \vartheta - \lambda \cos \vartheta)$  при  $\lambda \leq 1$ . В некоторых задачах учитывались массовые силы и рассматривались случаи «ядер» деформации. Аналогичные методы были использованы Ротманом<sup>2)</sup> для решения задач, в которых рассматривалось действие сосредоточенных нагрузок на границах отверстий в бесконечных пластинах или дисках определенной формы.

#### IV. Методы интеграла Коши

Из последнего параграфа было видно, что затруднения при отыскании решения, связанные с методом функции напряжений, облегчаются вследствие использования комплексного потенциала и соответствующего конформного преобразования; однако наибольшее преимущество от использования комплексного потенциала получено благодаря методам, развитым Мухелишвили<sup>3)</sup>, позволяющим определять потенциалы непосредственно по граничным условиям. Эти методы применимы к телу, занимающему в плоскости  $z$  односвязную область, конечную или бесконечную, которую можно отобразить с помощью конформного преобразования на круг или полуплоскость; исследование многосвязных областей значительно сложнее и обсуждаться здесь не будет. Области, отображенные на круг или на полуплоскость, можно исследовать двумя методами: первый основан на использовании обычных интегралов Коши, второй основан на более тонких свойствах интегралов Коши. Второй метод наиболее при-

---

<sup>1)</sup> Stevenson A. C., *Phil. Mag.*, Ser. VII 33, 639 (1942); 34, 105, 766 (1943); 36, 178 (1945); *Proc. Roy. Soc. London*, Ser. A184, 129, 218 (1945).

<sup>2)</sup> Rothman M., *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 3, 279, 469 (1950).

<sup>3)</sup> Мухелишвили Н. И., *Некоторые основные проблемы математической теории упругости*, 4 изд., Ленинград, 1954.



способен для *смешанных* краевых задач, т. е. таких задач, когда на одной части границы задано напряжение, а на другой — перемещение.

**38. Интегралы Коши.** Мы приведем без доказательства несколько результатов, относящихся к интегралам Коши, которые потребуются впоследствии. Под интегралом Коши понимается интеграл вида

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-z},$$

где  $L$  — простой гладкий контур, простая гладкая дуга или группа таких контуров или дуг;  $f(t)$  — заданная на контуре комплексная функция, которая считается конечной и интегрируемой. Сначала допустим, что точка  $z$  не лежит на  $L$ , и тогда  $F(z)$  пусть обозначает функцию, голоморфную в каждой части, на которые контур  $L$  делит рассматриваемую плоскость.

Допустим, что  $L$  является односвязным гладким контуром, который описывается в направлении против часовой стрелки таким образом, что он делит плоскость на конечную область  $S^+$  по левую сторону от него и на бесконечную область  $S^-$  по правую сторону. Пусть  $f(t)$  представляет функцию, заданную для всех точек  $t$  контура  $L$ , в которых она является непрерывной. В этом случае справедливы следующие теоремы.

*I. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция  $f(t)$  была равна значению на границе некоторой функции, голоморфной в  $S^+$ , имеет вид*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-z} = 0 \text{ для всех точек } z \text{ в области } S^-.$$

*II. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция  $f(t)$  была равна значению на границе некоторой функции, голоморфной в области  $S^-$ , включая бесконечно удаленную точку, имеет вид*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-z} = a \text{ для всех точек } z \text{ в области } S^+,$$

где  $a$  — постоянная, равная  $f(\infty)$ , т. е. значению функции  $f$  на бесконечности.

Когда контур  $L$  представляет собой единичную окружность, обозначенную через  $\gamma$ , то, используя свойства сопряженных комплексных функций и указанные выше теоремы, придем к следующим результатам:

Iа. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция  $f(\sigma)$ , непрерывная на контуре  $\gamma$ , была равна значению на границе некоторой функции, голоморфной вне  $\gamma$ , имеет вид*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{f(\sigma)} d\sigma}{\sigma - z} = 0 \text{ для всех } |z| > 1.$$

IIа. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция  $f(\sigma)$ , непрерывная на контуре  $\gamma$ , была равна значению на границе некоторой функции, голоморфной внутри  $\gamma$ , имеет вид*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{f(\sigma)} d\sigma}{\sigma - z} = \bar{a} \text{ для всех } |z| < 1,$$

где  $\bar{a}$  — постоянная, равная  $\overline{f(0)}$ .

Соответствующие предложения справедливы и в том случае, когда контур  $L$  представляет собой бесконечную прямую, рассматриваемую здесь в качестве действительной оси, до тех пор, пока функция  $f(t)$  в дополнении к свойству непрерывности на контуре  $L$  удовлетворяет для достаточно больших  $|t|$  условию

$$f(t) = a + O(|t|^{-\mu}), \quad \mu > 0.$$

Тогда, если принять  $S^+$  за верхнюю полуплоскость, имеет место следующая теорема.

III. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция  $f(t)$  была равна значению на границе функции, голоморфной в области  $S^+$  и непрерывной в  $S^+ + L$ , включая бесконечно удаленную точку, имеет вид*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t - z} = -\frac{1}{2} a \text{ для всех точек } z \text{ в области } S^-.$$

IV. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция  $f(t)$  была равна значению на границе функции, голоморфной в области  $S^-$  и непрерывной*

в  $S^- + L$ , включая бесконечно удаленную точку, имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-z} = \frac{1}{2} a \text{ для всех точек } z \text{ в области } S^+.$$

При некоторых условиях справедливы также следующие теоремы:

IIIa. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция  $f(t)$  была равна значению на границе функции, голоморфной в области  $S^-$ , имеет вид*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{f(t)} dt}{t-z} = -\frac{1}{2} \bar{a} \text{ для всех точек } z \text{ в области } S^-.$$

IVa. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция  $f(t)$  была равна значению на границе функции, голоморфной в области  $S^+$ , имеет вид*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{f(t)} dt}{t-z} = \frac{1}{2} \bar{a} \text{ для всех точек } z \text{ в области } S^+.$$

Когда точка  $z$  стремится, например, к точке  $t_0$  контура  $L$ , то необходимо различать пределы (если они существуют) интеграла Коши  $F(z)$ , когда  $z$  стремится к  $t_0$  с левой и с правой стороны от  $L$ . Если эти пределы существуют, то говорят, что функция  $F(z)$  непрерывна на контуре  $L$  слева и справа, а пределы обозначаются через  $F^+(t_0)$  и  $F^-(t_0)$ . Допустим, что функция  $f(t)$  удовлетворяет условиям Холдера, состоящим в том, что для каждой пары точек  $t_1, t_2$  контура  $L$  справедливы следующие неравенства:

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq A |t_1 - t_2|^\mu, \quad 0 \leq \mu \leq 1,$$

где  $A$  — положительная постоянная величина. Если это условие удовлетворяется в окрестности точки  $t_0$ , не лежащей на конце контура  $L$ , и если пределы  $F^+(t_0)$  и  $F^-(t_0)$  существуют, то тогда они определяются по формулам Племельи

$$\left. \begin{aligned} F^+(t_0) &= \frac{1}{2} f(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-t_0}, \\ F^-(t_0) &= -\frac{1}{2} f(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-t_0}, \end{aligned} \right\} \quad (38.1)$$

где интегралы вычисляются в смысле главных значений.

Обратимся теперь к решениям задачи с линейной зависимостью граничных условий для функции  $F(z)$ . Пусть  $L$  представляет систему конечного числа простых непересекающихся дуг и контуров в плоскости  $z$ . Функция  $F(z)$  будет кусочно голоморфной во всей плоскости, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) Функция  $F(z)$  голоморфна в плоскости (исключая  $L$ ), разрезанной вдоль  $L$ .

2) Функция  $F(z)$  непрерывна слева и справа во всех точках контура  $L$ , исключая концы дуг.

3) Вблизи концов дуг  $c_i$  справедливы неравенства

$$|F(z)| < A|z - c_i|^{-\mu}, \quad 0 \leq \mu \leq 1,$$

где  $A$  — положительная постоянная величина.

Задача заключается в том, чтобы найти кусочно голоморфную функцию  $F(z)$  с линейным разрывом  $L$ , на котором граничные значения функции удовлетворяют условию

$$F^+(t) - G(t)F^-(t) = f(t) \quad (38.2)$$

(исключая концы), где  $G(t)$  и  $f(t)$  — функции, заданные на  $L$  и  $G(t) \neq 0$  всюду на контуре  $L$ . Принимается, что функции  $G(t)$  и  $f(t)$  также удовлетворяют условию Хёльдера на  $L$ .

Мы главным образом будем иметь дело со случаем  $G(t) = g$ , где  $g$  является постоянной и контур  $L$ , соответствующий выражению (38.2), состоит из  $n$  простых дуг  $L_k$  с концами в точках  $a_k$ ,  $b_k$ . Тогда общее решение имеет вид

$$F(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{X_0^+(t)(t-z)} + X_0(z)P(z), \quad (38.3)$$

причем, когда величина  $g$  не является действительной и положительной, имеют место следующие соотношения:

$$X_0(z) = \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{-\gamma} (z - b_k)^{\gamma-1}, \quad (38.4)$$

$$\gamma = \frac{\ln g}{2\pi i}, \quad 0 < \arg g < 2\pi, \quad (38.5)$$

а  $P(z)$  — произвольный полином. Это решение имеет полюс в точке  $z = \infty$  до тех пор, пока степень  $P(z)$  не превышает  $n$ . В общем случае решение (38.3) неограниченно на концах  $a_1, b_1$ , однако решение, ограниченное на  $p$  любых концах, обозначаемых через  $c_1, c_2, \dots, c_p$ , получается с помощью подстановки вместо  $X_0(z)$  полинома  $X_p(z)$

$$X_p = X_0(z) (z - c_1) (z - c_2) \dots (z - c_p). \quad (38.6)$$

Это решение голоморфно при  $z = \infty$ , если  $p \leq n + 1$ , и степень  $P(z)$  не превышает  $n - p$ , или, в случае  $p = n + 1$ , когда  $P(z) = 0$ . Если  $P(z) \equiv 0$  и  $f(t)$  удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t^{k-1} f(t) dt}{X_p^*(t)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p - n - 1, \quad (38.7)$$

то решение является голоморфным при  $z = \infty$  для  $p > n + 1$ , тогда как  $F(\infty) = 0$ , если условие (38.7) выполняется также и для  $k = p - n$ .

Когда в уравнении (38.2)  $G(t) = g$  является действительной положительной постоянной, то решение будет аналогичным решению (38.3) с той лишь разницей, что всюду вместо  $X_0(z)$  нужно подставить величину  $X_*(z)$ , равную

$$X_*(z) = X_0(z) \prod_{k=1}^n (z - b_k) = \prod_{k=1}^n \left( \frac{z - b_k}{z - a_k} \right)^\nu. \quad (38.8)$$

Это решение является ограниченным на концах всех контуров и голоморфно при  $z = \infty$ , если  $P(z)$  является постоянным. В случае  $g = 1$  имеем  $\nu = 0$  и  $X_*(z) = 1$ , и решение сводится к выражению

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t - z} + P(z), \quad (38.9)$$

где  $L$  может включать не только дуги, но и целые контуры. Решение (38.9) можно использовать для получения более общих решений (в которых  $L$  состоит как из дуг, так и из контуров) уравнения

$$F^+(t) - gF^-(t) = f(t),$$

где  $g$  — некоторая комплексная постоянная величина. В случае, когда  $L$  состоит из одного контура, рассмотрим функцию  $F_*(z)$  такую, что

$$\begin{aligned} F_*(z) &= F(z) \text{ для точек } z \text{ в области } S^+, \\ F_*(z) &= g F(z) \text{ для точек } z \text{ в области } S^-. \end{aligned}$$

В этом случае граничное условие запишется в виде

$$F_*^+(t) - F_*^-(t) = f(t).$$

Используя уравнение (38.9), получим решение этой задачи в следующей форме:

$$F_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-z} + P(z).$$

Нетрудно распространить это решение на более общий случай.

Рассмотрим, наконец, случай, когда функция  $G(t)$ , входящая в уравнение (38.2), не является постоянной всюду на  $L$ , и в некоторых точках этого контура изменяется скачкообразно. Пусть  $L$  — простой контур, часть которого  $L'$  представляет систему  $n$  дуг  $L_n = a_n b_n$ , не имеющих общих концов, тогда как  $L''$  обозначает оставшуюся часть  $L$ , и допустим, что

$$G(t) = g \neq 1 \text{ на } L', \quad G(t) = 1 \text{ на } L''.$$

Тогда граничное условие (38.2) примет вид

$$\left. \begin{aligned} F^+(t) - gF^-(t) &= f(t) \text{ на } L', \\ F^+(t) - F^-(t) &= f(t) \text{ на } L''. \end{aligned} \right\} \quad (38.10)$$

До тех пор пока  $f(t)$  удовлетворяет условию Хёлдера, отдельно на  $L'$  и  $L''$ , общее решение, в случае когда величина  $g$  не является действительной и положительной, имеет вид

$$F(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{X_0(t)(t-z)} + X_0(z) P(z), \quad (38.11)$$

где функция  $X_0(z)$  определяется соотношением (38.4) и  $P(z)$  является произвольным полиномом. Свойства решения аналогичны свойствам решения (38.3). Когда  $g$  яв-

ляется положительной действительной величиной, вместо функции  $X_0(z)$  нужно подставить функцию  $X_*(z)$ , определяемую выражением (38.8).

**39. Первый метод; области, отображаемые на круг.** Допустим, что  $S$  представляет собой конечную или бесконечную область в плоскости  $z$ , ограниченную простым контуром  $L$ , которая отображается на единичный круг  $\gamma$  в плоскости  $\zeta$  с помощью функции

$$z = w(\zeta). \quad (39.1)$$

Примем, что для конечной области  $S$  точка  $\zeta = 0$  соответствует точке  $z = 0$ , а для бесконечной области  $S$  точка  $\zeta = 0$  соответствует точке  $\zeta = \infty$ . Сначала допустим, что, когда область  $S$  бесконечна, перемещения на бесконечности ограничены. Тогда величины  $X$ ,  $Y$ ,  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$  в уравнении (35.16) все равны нулю. Отсюда следует, что равны нулю не только суммарные напряжения на контуре  $L$ , но, как это вытекает из формул (32.16), (32.17), (35.13) и (35.14) (при отсутствии массовых сил), компоненты напряжений равны нулю на бесконечности. При этих условиях функции  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  являются голоморфными в области  $S$  (включая точку  $z = \infty$  в случае бесконечной области  $S$ ). Тогда, используя обозначения

$$\varphi(z) = \varphi_0(\zeta), \quad \psi(z) = \psi_0(\zeta),$$

получим, что функции  $\varphi_0(\zeta)$ ,  $\psi_0(\zeta)$  являются голоморфными в области  $|\zeta| < 1$ . Допустим, что функции  $\varphi_0(\zeta)$ ,  $\varphi_0'(\zeta)$ ,  $\psi_0(\zeta)$  являются непрерывными вплоть до окружности  $\gamma$  и без ущерба для общности положим  $\varphi_0(0) = 0$ .

В случае *первой краевой задачи* компоненты напряжений  $p_{x_n}$ ,  $p_{y_n}$  заданы всюду на  $L$ , и отсюда мы определим функцию дуговой координаты  $s$  такую, что

$$f(s) = f_1(s) + if_2(s) = i \int_0^s (p_{x_n} + ip_{y_n}) ds + \text{const}, \quad (39.2)$$

где постоянную величину и точку  $s = 0$  на контуре  $L$  можно выбрать произвольным образом. Тогда из выражений (35.5) и (35.8) получим, выбирая соответствующим образом постоянную величину,

$$\varphi(z) + \bar{\psi}(\bar{z}) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) = f \quad \text{на } L. \quad (39.3)$$

Применяя к выражению (39.3) преобразование (39.1), имеем

$$\varphi_0(\zeta) + \bar{\psi}_0(\bar{\zeta}) + \frac{w(\zeta)}{w'(\zeta)} \bar{\varphi}'_0(\bar{\zeta}) = f \text{ на } |\zeta| = 1, \quad (39.4)$$

это соотношение можно записать в виде

$$\varphi_0(\sigma) + \bar{\psi}_0(\bar{\sigma}) + \frac{w(\sigma)}{w'(\sigma)} \bar{\varphi}'_0(\bar{\sigma}) = f, \quad (39.5)$$

где  $\sigma = e^{i\vartheta}$  — произвольная точка  $\gamma$  и  $f$  — известная функция  $\sigma$  или  $\vartheta$ . Примем, что функция  $f$  является не только однозначной и непрерывной, но что и ее производная по  $\vartheta$  непрерывна и удовлетворяет условию Хэйдера. Это справедливо, если  $p_{xn}$  и  $p_{yn}$  удовлетворяют условию Хэйдера.

Согласно теореме Коши имеем

$$\psi_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\psi_0(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta};$$

тогда как согласно теореме Па

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\varphi}_0(\bar{\sigma}) d\sigma}{\sigma - \zeta} = \bar{\varphi}_0(0) = 0.$$

Следовательно, используя функции, сопряженные с функциями, входящими в выражение (39.5), найдем

$$\psi_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f} d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{w}(\bar{\sigma}) \bar{\varphi}'_0(\bar{\sigma}) d\sigma}{w'(\sigma)(\sigma - \zeta)}. \quad (39.6)$$

Функциональное уравнение для  $\varphi_0(\zeta)$  получим теперь из выражения (39.5), которое представим в форме

$$\bar{\psi}_0(\bar{\sigma}) = f - \varphi_0(\sigma) - \frac{w(\sigma)}{w'(\sigma)} \bar{\varphi}'_0(\bar{\sigma}).$$

Тогда, согласно теореме Па,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\psi}_0(\bar{\sigma})}{\sigma - \zeta} d\sigma = \bar{\psi}_0(0) = a,$$



иначе отсюда следует, что для всех  $|\xi| < 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f d\sigma}{\sigma - \xi} - \varphi_0(\xi) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma) \bar{\varphi}'_0(\bar{\sigma}) d\sigma}{\bar{\omega}'(\bar{\sigma})(\sigma - \xi)} = \bar{a}. \quad (39.7)$$

На первых порах постоянная  $a$  остается произвольной, но впоследствии ее можно определить из условия  $\varphi_0(0) = 0$ . В принципе уравнений (39.6) и (39.7) достаточно для того, чтобы определить  $\varphi_0(\xi)$  и  $\psi_0(\xi)$  и, таким образом, решить задачу.

Если в случае бесконечной области  $S$  результирующие напряжения  $(X, Y)$  на  $L$  не равны все нулю, то функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  согласно выражениям (35.13) и (35.14) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \ln z + \Gamma z + \varphi_1(z), \\ \psi(z) &= \frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)} \ln z + \Gamma' z + \psi_1(z), \end{aligned} \right\} \quad (39.8)$$

где  $\varphi_1(z)$  и  $\psi_1(z)$  голоморфны в области  $S$ , включая бесконечно удаленную точку. По определению функция  $\omega(\xi)$  должна иметь вид

$$\omega(\xi) = \frac{c}{\xi} + \text{голоморфная функция,}$$

откуда следует

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(\xi) &= \frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \ln \xi + \frac{\Gamma c}{\xi} + \varphi_{1,0}(\xi), \\ \psi_0(\xi) &= -\frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)} \ln \xi + \frac{\Gamma' c}{\xi} + \psi_{1,0}(\xi), \end{aligned} \right\} \quad (39.9)$$

где  $\varphi_{1,0}(\xi)$  и  $\psi_{1,0}(\xi)$  — функции, голоморфные внутри круга и непрерывные вплоть до границы круга  $\gamma$ . Подставив функции (39.9) в уравнение (39.5), легко видеть, что функции  $\varphi_{1,0}(\xi)$  и  $\psi_{1,0}(\xi)$  должны удовлетворять тем же уравнениям, которым прежде удовлетворяли функции  $\varphi_0(\xi)$  и  $\psi_0(\xi)$ . если всюду функцию  $f$  заменить функцией  $f_0$ , причем

$$\begin{aligned} f_0 &= f - \frac{X+iY}{2\pi} \ln \sigma - \frac{\Gamma c}{\sigma} - \\ &\quad - \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(\bar{\sigma})} \left\{ \frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)} \sigma - \Gamma \bar{c} \sigma^2 \right\} - \Gamma' \bar{c} \sigma. \end{aligned} \quad (39.10)$$

Поскольку  $\ln \sigma = i\theta$  и согласно выражениям (35.5) и (39.2) функция  $f$  увеличивается при обходе замкнутого контура  $L$  на  $i(X + iY)$ , то функция  $f_0$  является однозначной и непрерывной функцией на контуре  $\gamma$ .

Для второй краевой задачи перемещения

$$u = g_1, \quad v = g_2 \quad (39.11)$$

заданы на контуре  $L$  и тогда из уравнения (32.15) при  $W = 0$  имеем

$$\kappa \varphi_0(\sigma) - \frac{w(\sigma)}{w'(\bar{\sigma})} \bar{\varphi}'_0(\bar{\sigma}) - \bar{\psi}(\bar{\sigma}) = 2\mu (g_1 + ig_2) = 2\mu g. \quad (39.12)$$

Допустив, что  $X = Y = \Gamma = \Gamma' = 0$ , можно с помощью методов, использовавшихся в первой задаче, получить для всех  $|\zeta| < 1$  следующие уравнения для  $\varphi_0(\zeta)$  и  $\psi_0(\zeta)$ :

$$\kappa \varphi(\zeta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{w(\sigma) \bar{\varphi}'(\bar{\sigma})}{w'(\bar{\sigma})(\sigma - \zeta)} d\sigma - \frac{\mu}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{g d\sigma}{\sigma - \zeta} = \bar{a}, \quad (39.13)$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{\mu}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{g} d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{w}(\bar{\sigma}) \varphi'(\sigma) d\sigma}{w'(\sigma)(\sigma - \zeta)}. \quad (39.14)$$

Когда область  $S$  бесконечна и  $X$ ,  $Y$ ,  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  не все равны нулю, то задача может быть сведена к предыдущему случаю таким же путем, который был указан выше; таким образом вместо уравнения (39.12) мы получим уравнение, куда будут входить соответствующие функции  $\varphi_{1,0}(\sigma)$ ,  $\bar{\varphi}'_{1,0}(\bar{\sigma})$ ,  $\bar{\psi}_{1,0}(\bar{\sigma})$  и  $g_0$ .

**40. Эллиптическое отверстие в бесконечной пластине.** В качестве приложения этого метода рассмотрим еще раз случай ненагруженного эллиптического отверстия в бесконечной пластине, подверженной «всестороннему» растяжению  $T$  на бесконечности. Иными словами, главные напряжения на бесконечности заданы в виде

$$N_1 = N_2 = T;$$

допуская, что  $\text{Im}(\Gamma) = 0$  (поскольку это не влияет на распределение напряжений), получим из выражений (35.15), что

$$\Gamma = \frac{1}{2} T, \quad \Gamma' = 0. \quad (40.1)$$

Внешняя область по отношению к эллипсу (с центром в точке  $z=0$ ) с полуосями  $R(1+m)$ ,  $R(1-m)$  отображается на единичный круг  $|\zeta| < 1$  с помощью преобразования

$$z = \omega(\zeta) = R\left(m\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \quad R > 0, \quad 0 \leq m < 1, \quad (40.2)$$

которое будет однозначным, если взять ту ветвь, для которой точка  $z$  при  $|\zeta| < 1$  находится вне эллипса. Поскольку отверстие не нагружено,  $X=Y=f=0$  и  $c=R$ , то из уравнений (39.9), (39.10) и (40.1) получим

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{TR}{2\zeta} + \varphi_{1,0}(\zeta), \quad (40.3)$$

$$\psi_0(\zeta) = \psi_{1,0}(\zeta), \quad (40.4)$$

$$f_0 = -\frac{1}{2}TR \left[ \frac{1}{\sigma} + \frac{\sigma(1+m\sigma^2)}{\sigma^2-m} \right]. \quad (40.5)$$

В последнем уравнении использовано соотношение  $\bar{\sigma} = 1$ . В уравнениях (39.6) и (39.7), к решению которых (при условии  $\varphi_{1,0}(0) = 0$ ) мы теперь переходим, место функций  $\varphi_0(\zeta)$ ,  $\psi_0(\zeta)$ ,  $f$  занимают функции  $\varphi_{1,0}(\zeta)$ ,  $\psi_{1,0}(\zeta)$  и  $f_0$ . Подставляя эти функции в уравнение (39.7), имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{1,0}(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(1+m\sigma^2)\varphi'_{1,0}(\sigma) d\sigma}{\sigma(m-\sigma^2)(\sigma-\zeta)} = \\ = -\bar{a} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{TR}{2(\sigma-\zeta)} \left\{ \frac{1}{\sigma} + \frac{\sigma(1+m\sigma^2)}{\sigma^2-m} \right\} d\sigma. \end{aligned} \quad (40.6)$$

Величина

$$\frac{1+m\sigma^2}{\sigma(m-\sigma^2)} \varphi'_{1,0}(\sigma)$$

является граничным значением функции

$$F(\zeta) = \frac{1+m\zeta^2}{\zeta(m-\zeta^2)} \varphi'_{1,0}\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

которая, как легко показать, является голоморфной при  $|\zeta| > 1$ , и, таким образом, согласно теореме II

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\sigma)}{\sigma-\zeta} d\sigma = F(\infty) = 0, \quad |\zeta| < 1.$$

Подставляя это выражение в уравнение (40.6) и вычисля оставшийся интеграл с помощью теоремы о вычетах Коши, найдем, что

$$\varphi_{1,0}(\zeta) = -\bar{a} - \frac{1}{2} TRm\zeta. \quad (40.7)$$

Подставляя выражения (40.2), (40.5) и (40.7) в формулу (39.6), имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{1,0}(\zeta) = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{2} TR \left\{ \sigma + \frac{\sigma^2 + m}{\sigma(1 - m\sigma^2)} \right\} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sigma(\sigma^2 + m) TRm d\sigma}{2(1 - m\sigma^2)(\sigma - \zeta)}. \end{aligned} \quad (40.8)$$

Вычисляя эти интегралы по теореме о вычетах, найдем

$$\psi_0(\zeta) = \varphi_{1,0}(\zeta) = -\frac{TR(1+m^2)\zeta}{1-m\zeta^2}, \quad |\zeta| < 1. \quad (40.9)$$

Следовательно,  $a = \varphi_{1,0}(0) = 0$ , и тогда из выражений (40.3) и (40.7) получим

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{1}{2} TR \left( \frac{1}{\zeta} - m\zeta \right), \quad |\zeta| < 1. \quad (40.10)$$

Если теперь представить  $\varphi_0(\zeta)$  и  $\psi_0(\zeta)$  как функции  $z$ ,  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  с помощью уравнения (40.2), то компоненты перемещения  $u$ ,  $v$  и компоненты напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  можно найти из уравнений (32.15), (32.16) и (32.17). Используя выражения (34.11) — (34.13), можно определить компоненты напряжений и перемещения в касательном и нормальном направлениях к эллипсу  $|\zeta| = \text{const} < 1$ .

Легко установить зависимость между потенциалами, определяемыми соотношениями (40.9) и (40.10), и потенциалами, определяемыми соотношениями (37.7), выведенными Стивенсоном. Преобразование

$$\zeta = m^{-\frac{1}{2}} e^{-t} \quad (40.11)$$

отображает круг  $|\zeta| \leq 1$  на область  $\text{Re}(t) > \ln m^{-\frac{1}{2}}$ . В случае однозначного отображения необходимо наложить следующее ограничение:  $0 \leq \text{Im}(t) \leq 2\pi$ . Если  $m =$

$= e^{-2\alpha}$ , то комбинация преобразований (40.2) и (40.11) отображает внешность исходного эллипса на область  $\operatorname{Re}(t) > \alpha$ ; в работе Стивенсона это отображение было осуществлено при помощи одного преобразования (37.1), где  $\xi$  играло роль переменного  $t$ . Подставляя выражение (40.11) в (40.2), имеем

$$z = 2Rm^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} t, \quad (40.12)$$

и если  $2Rm^{\frac{1}{2}} = c$ , то получим полное соответствие с выражением (37.1); функции (40.10) и (40.9) в соответствии с формулой (37.7) примут тогда следующий вид:

$$\varphi_0(\xi) = \frac{1}{2} Tc \operatorname{sh} t, \quad \psi_0(\xi) = -\frac{1}{2} Tc \operatorname{ch} 2\alpha \operatorname{csh} t.$$

Этим методом Мухелишвили (см. выше) решает несколько других задач для эллиптического отверстия и исследует также задачу о воздействии сосредоточенных усилий и моментов на круговой диск. Для областей, отображаемых на единичный круг с помощью рациональных функций, разработана общая теория, а для областей, подобных равностороннему треугольнику или квадрату, построены приближенные методы решений.

**41. Первый метод; полуплоскость.** Основные идеи метода, применяемого для области, отображаемой на единичный круг, можно применить в том случае, когда область отображается на полуплоскость. Однако здесь не будет описываться общий метод, а будет изложено только его применение к случаю полубесконечной области, расположенной в плоскости  $z$ .

Рассмотрим тело, занимающее нижнюю полуплоскость,  $\operatorname{Im}(z) \leq 0$ , обозначаемую через  $S$ , и допустим, что в этой области для больших  $z$  имеют место следующие разложения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \gamma \ln z + O(1) + \operatorname{const}, \\ \psi(z) &= \gamma' \ln z + O(1) + \operatorname{const}, \end{aligned} \right\} \quad (41.1)$$

где  $\gamma$ ,  $\gamma'$  — постоянные величины. При этих условиях компоненты напряжений на бесконечности равны нулю.

Если  $(X', Y')$  представляет собой вектор результирующей внешних усилий, действующих на сегмент  $AB$  ( $\text{Im}(z) = 0$ ), то из формулы (35.8) имеем

$$X' + iY' = i[\varphi(z) + \bar{\psi}(\bar{z}) + z\bar{\varphi}'(\bar{z})]_A^B. \quad (41.2)$$

Поскольку область  $S$  расположена по правую сторону от границы, в формуле (35.8) был изменен знак. Подставляя функции (41.1) в выражение (40.2), найдем, что когда  $A \rightarrow -\infty$ ,  $B \rightarrow -\infty$  независимо друг от друга,

$$X' + iY' = \gamma \ln \frac{r''}{r'} + \gamma li + \bar{\gamma}' \ln \frac{r''}{r'} - \bar{\gamma}' li + \varepsilon, \quad (41.3)$$

где  $r'$ ,  $r''$  — расстояния точек  $A$ ,  $B$  от начала координат и  $\varepsilon$  — величина, стремящаяся к нулю по мере того, как  $r'$  и  $r'' \rightarrow \infty$ . Для того чтобы величины  $X'$ ,  $Y'$  оставались конечными, когда  $r'$  и  $r'' \rightarrow \infty$  независимо друг от друга, необходимо и достаточно, чтобы

$$\gamma + \bar{\gamma}' = 0.$$

Отсюда следует, что равнодействующая сил, действующих на всю границу, равна

$$X + iY = \pi(\bar{\gamma}' - \gamma)$$

и

$$\gamma = -\frac{1}{2\pi}(X + iY), \quad \gamma' = \frac{X - iY}{2\pi}.$$

Теперь из разложений (41.1) можно вывести следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{X+iY}{2\pi} \ln z + O(1) + \text{const}, \\ \psi(z) &= \frac{X-iY}{2\pi} \ln z + O(1) + \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (41.4)$$

В первой краевой задаче мы полагаем, что на контуре  $\text{Im}(z) = 0$  заданы компоненты напряжения как функции абсциссы  $t$ :

$$\sigma_y = N(t), \quad \tau_{xy} = T(t).$$

Затем из соотношений (32.16) и (32.17) имеем

$$N - iT = \varphi'(t) + \bar{\varphi}'(t) + t\bar{\varphi}''(t) + \bar{\psi}'(t); \quad (41.5)$$

сопряженное выражение примет вид

$$N + iT = \varphi'(t) + \bar{\varphi}'(t) + t\varphi''(t) + \psi'(t). \quad (41.6)$$

Здесь предполагается, что для больших значений  $t$  величины  $N$  и  $T$  будут порядка  $O(t^{-1})$ . Теперь  $\psi'(t)$  определяется согласно выражению (41.4); функция  $\psi'(z)$  на границе является голоморфной в области  $\text{Im}(z) < 0$  и равна нулю на бесконечности, так что согласно теореме IVa имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\psi}'(t) dt}{t-z} = 0, \quad \text{Im}(z) < 0.$$

Тогда из уравнения (41.5) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N-iT}{t-z} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi'(t)}{t-z} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}'(t)}{t-z} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\bar{\varphi}''(t)}{t-z} dt = 0. \quad (41.7)$$

Два последних интеграла этого уравнения равны нулю согласно теореме IVa, а поскольку  $\varphi'(\infty) = 0$ , то второй интеграл легко вычисляется с помощью интегрирования по контуру; в результате этого интегрирования получим

$$\Phi(z) = \varphi'(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N-iT}{t-z} dt. \quad (41.8)$$

Аналогично

$$\Psi(z) = \psi'(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi'(t) dt}{t-z},$$

и, используя соотношения (41.6) и (41.8), найдем окончательно, что

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N-iT}{(t-z)^2} t dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N+iT}{(t-z)} dt. \quad (41.9)$$

Достаточные условия для того, чтобы выражения (41.8) и (41.9) удовлетворяли поставленным требованиям, состоят

в том, что функции  $N(t)$ ,  $T(t)$ ,  $N'(t)$ ,  $T'(t)$  должны удовлетворять условию Хёлдера во всех точках, лежащих на конечном расстоянии от начала координат, а вблизи бесконечно удаленной точки этому условию должны удовлетворять функции  $tN(t)$ ,  $tT(t)$ ,  $t^2N'(t)$ ,  $t^2T'(t)$ . Нижеследующий пример является таким, когда выполняются не все перечисленные выше условия, но тем не менее поведение функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  оказывается удовлетворительным. Рассмотрим граничные условия  $T=0$ ,  $N=-p$  для  $-a \leq t \leq a$ . Вне этого интервала  $N$  всюду равны нулю. Тогда из выражений (41.8) и (41.9) получим

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{p}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{dt}{t-z} = \frac{p}{2\pi i} \ln \frac{z-a}{z+a}, \\ \Psi(z) &= -\frac{zp}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{dt}{(t-z)^2} = -\frac{paz}{\pi i (z^2-a^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (41.10)$$

Для второй краевой задачи имеем из соотношения (32.15) следующее условие:

$$\kappa\varphi(t) - t\bar{\varphi}'(t) - \bar{\psi}(t) = 2\mu(g_1 + ig_2) = 2\mu g, \quad (41.11)$$

где  $g_1, g_2$  — компоненты перемещения на границе  $\text{Im}(z) = 0$ . Задача решается методами, аналогичными тем, которые были использованы в первой краевой задаче, но здесь накладывается дополнительное условие на комплексные потенциалы, а именно, что  $X=Y=0$ . Однако это условие можно ослабить, рассматривая, как и раньше, уравнение (41.1), как уравнение для граничных значений голоморфных составляющих функций  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  и изменяя соответствующим образом функцию  $g$ . Решение (для  $X=Y=0$ ) описывается уравнениями

$$\kappa\varphi(z) = -\frac{\mu}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g dt}{t-z} - \mu G, \quad (41.12)$$

$$\psi(z) = \frac{\mu}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g dt}{t-z} - z\varphi'(z) - \mu\bar{G}, \quad (41.13)$$



где  $G$  определяется уравнением  $g = G + O(1)$  для больших значений  $|t|$ .

**42. Второй метод; полуплоскость.** Допустим опять, что тело занимает полуплоскость  $\text{Im}(z) \leq 0$ , обозначенную через  $S^-$ ; в этой полуплоскости определены комплексные потенциалы. Первый шаг состоит в том, чтобы построить аналитическое продолжение функции  $\Phi(z) = \varphi'(z)$  в верхнюю полуплоскость  $S^+$  через ненагруженные отрезки границы  $L$ . Из формул (32.16) и (32.17) имеем

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) + z\bar{\Phi}'(\bar{z}) + \bar{\Psi}(\bar{z}). \quad (42.1)$$

Теперь уравнение

$$\Phi(z) = -\bar{\Phi}(\bar{z}) - z\bar{\Phi}'(\bar{z}) - \bar{\Psi}(\bar{z}), \quad z \text{ в полуплоскости } S^+ \quad (42.2)$$

определяет  $\Phi(z)$  как функцию  $z$ , голоморфную в области  $S^+$ , поскольку та же самая функция от  $\bar{z}$  является голоморфной в области  $S^-$ . На границе  $L$  выражение (42.2) примет вид

$$\Phi^+(t) = -\bar{\Phi}^+(t) - t\bar{\Phi}'^+(t) - \bar{\Psi}^+(t); \quad (42.3)$$

вычисляя значение выражения (42.1) на границе и сравнивая его с выражением (42.3), увидим, что на тех участках границы  $L$ , где  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  равны нулю, имеет место следующее равенство:

$$\Phi^+(t) = \Phi^-(t).$$

Таким образом, вследствие определения (42.2)  $\Phi(z)$  является кусочно голоморфной функцией во всей плоскости, разрезанной вдоль нагруженных участков границы  $L$ . Следует заметить, что метод определения функции  $\Phi(z)$  в области  $S^+$  является совершенно произвольным, и настоящий метод был выбран вследствие удобства использования на практике.

Заменяя в уравнении (42.2) переменную  $z$  на  $\bar{z}$  и учитывая, что оно будет в этом случае справедливо для  $z$  в области  $S^-$ , найдем, определяя сопряженную комплексную функцию,

$$\Psi(z) = -\Phi(z) - \bar{\Phi}(\bar{z}) - z\bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad z \text{ в полуплоскости } S^-. \quad (42.4)$$

Это выражение определяет функцию  $\Psi(z)$  во всей плоскости через функцию  $\Phi(z)$ . Подставляя соотношение (42.4) в формулу (42.1), имеем

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\bar{\Phi}'(\bar{z}). \quad (42.5)$$

Продолжая функцию  $\varphi(z)$  в область  $S^+$  и принимая, что в этой области  $\varphi'(z) = \Phi(z)$ , найдем, что уравнение (32.15) перейдет в следующее:

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) + \varphi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \text{const.} \quad (42.6)$$

Здесь принимается, что в области  $S^-$  функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  имеют вид (41.4); в этом случае нетрудно показать, что функция  $\varphi(z)$  имеет в области  $S^+$  такой же вид, как и в области  $S^-$ . Допустим также, что, исключая, может быть, конечное число точек  $t_j$ , функция  $\Phi(z)$  на контуре  $L$  является непрерывной слева и справа и что

$$\lim_{y \rightarrow 0} y\Phi'(z) = 0, \quad (42.7)$$

тогда как в точках  $t_j$  справедливо неравенство

$$|\Phi(z)| < A|z - t_j|^\alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1. \quad (42.8)$$

В первой краевой задаче напряжения на контуре  $L$  задаются в форме

$$\sigma_y^- = -P(t), \quad \tau_{xy}^- = T(t),$$

где считается, что функции  $P$  и  $T$  удовлетворяют условию Хёлдера и равны нулю при  $|t| = \infty$ . Тогда, согласно формуле (42.5), граничное условие примет вид

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = P(t) + iT(t). \quad (42.9)$$

Решение этой задачи, которое можно получить немедленно из выражения (38.9), таково:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{P(t) + iT(t)}{t - z} dt, \quad (42.10)$$

причем полином  $\Phi(z)$  был опущен, поскольку  $\Phi(z)$  равно нулю на бесконечности.

Для того чтобы решить вторую граничную задачу, продифференцируем уравнение (42.6) по  $x$ ; в этом случае граничное условие примет вид

$$\Phi^+(t) + \kappa \Phi^-(t) = 2\mu [g_1'(t) + ig_2'(t)], \quad (42.11)$$

где  $g_1$  и  $g_2$  — компоненты перемещения на контуре  $L$ . Положим

$$\Omega(z) = \Phi(z) \text{ в } S^-, \quad \Omega(z) = -\frac{1}{\kappa} \Phi(z) \text{ в } S^+, \quad (42.12)$$

тогда уравнение (42.11) перейдет в следующее:

$$\Omega^+(t) - \Omega^-(t) = -\frac{2\mu}{\kappa} (g_1' + ig_2'), \quad (42.13)$$

и решение примет вид

$$\Omega(z) = -\frac{\mu}{\kappa \pi i} \int_L \frac{g_1'(t) + ig_2'(t)}{t-z} dt. \quad (42.14)$$

Если вместо функции  $\Omega(z)$  подставить функцию  $\Phi(z)$ , то соотношения (42.12) можно рассматривать как соотношения, определяющие новое продолжение функции  $\Phi(z)$  в область  $S^+$ ; в этом случае вместо соотношения (42.2) имеем следующее выражение:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\kappa} [\bar{\Phi}(z) + z\bar{\Phi}'(z) - \bar{\Psi}(z)], \quad z \text{ в области } S^+. \quad (42.15)$$

Согласно выражению (42.13) это соотношение определяет аналитическое продолжение функции  $\Phi(z)$  в область  $S^+$  через те отрезки  $L$ , где  $du/dx$  и  $dv/dx$  равны нулю.

Краевая задача со смешанными граничными условиями включает задачи, связанные с *расчетом штампа*. Пусть контур  $L'$  представляет собой соединение  $n$  отрезков  $L_i$  ( $a_i, b_i$ ) действительной оси, на которых заданы компоненты перемещения, тогда как внешние нагрузки заданы на остальной части контура  $L''$ . Поскольку решение первой краевой задачи известно, то влияние внешних нагрузок на  $L''$  можно вычислить отдельно и сложить с указанным решением для того, чтобы получить окончательный результат. В соответствии с этим полагаем

$$\sigma_y^- = \tau_{xy}^- = 0 \quad \text{на } L''. \quad (42.16)$$

Рассмотрим сначала граничное условие

$$u^- + iv^- = g(t) + c \quad \text{на } L', \quad (42.17)$$

где  $c$  — постоянная, которую без ущерба для общности можно положить равной нулю, поскольку это приведет только к возникновению формы движения твердого тела, не влияющего на распределение напряжений. Суммарный вектор  $(X, Y)$  внешних сил, действующих на  $L'$ , предполагается заданным. Эти условия, соответствующие случаю  $n$  жестко соединенных штампов, определяют задачу  $A$  в отличие от задачи  $B$ , являющейся видоизменением основной задачи, при которой штампы могут независимо совершать вертикальные перемещения. В задаче  $B$  суммарные нагрузки  $(X_k, Y_k)$  заданы на каждом отрезке  $L_k$ , а граничное условие имеет вид

$$u^- + iv^- = g(t) + c(t), \quad (42.18)$$

где  $c(t) = c_k$  на  $L_k$  и постоянные  $c_k$  неизвестны, хотя одной постоянной можно задать без ущерба для общности задачи произвольное значение, например, можно положить  $c_1 = 0$ . Считается, что комплексные потенциалы удовлетворяют условиям, указанным выше, причем точки  $t_j$  в условии (42.8) заменяются точками  $a_i, b_k$ . В дополнение к этому принимается, что функция  $g'(t)$  существует и удовлетворяет условию Хёлдера на контуре  $L'$ .

В обеих задачах  $A$  и  $B$  граничные условия (42.17) и (42.18) приводят к уравнению, эквивалентному уравнению (42.11) (которое, однако, справедливо на всем контуре  $L$ ), а именно:

$$\Phi^+(t) + \kappa\Phi^-(t) = 2\mu g't \quad \text{на контуре } L'. \quad (42.19)$$

Из граничного условия (42.16) вытекает, что  $\Phi^+(t) = \Phi^-(t)$  на  $L''$ , откуда следует, что функция  $\Phi(z)$  является голоморфной во всей плоскости, разрезанной вдоль  $L'$ . Решение краевой задачи для уравнения (42.19) имеет тогда вид (38.3), где величина  $X_0(z)$  определяется соотношением (38.4), и  $\gamma$  дается выражением (38.5) при  $g = -\kappa$ ; иными словами:

$$\gamma = \frac{\ln \kappa}{2\pi i} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - i\beta. \quad (42.20)$$

Тогда

$$X_0(z) = \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{-\frac{1}{2} + i\beta} (z - b_k)^{-\frac{1}{2} - i\beta}, \quad (42.21)$$

и решение может быть записано в форме

$$\Phi(z) = \frac{\mu X_0(z)}{\pi i} \int_{L'} \frac{g'(t) dt}{X_0^+(t)(t-z)} + X_0(z) P_{n-1}(z), \quad (42.22)$$

где в силу того, что  $\Phi(z)$  должна быть равна нулю на бесконечности, полином  $P_{n-1}(z)$  имеет вид

$$P_{n-1}(z) = C_0 z^{n-1} + C_1 z^{n-2} + \dots + C_{n-1}.$$

Оставшиеся условия используются теперь для определения коэффициентов  $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$ .

В задаче *B* необходимо использовать заданные результирующие внешние усилия ( $X_k, Y_k$ ). Если на контуре  $L'$   $\sigma_{\bar{y}} = -P, \tau_{\bar{x}y} = T$ , то согласно выражению (42.5) имеем

$$P(t_0) + iT(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0), \quad t_0 \text{ на } L' \quad (42.23)$$

или, согласно уравнению (42.18), получим

$$P(t_0) + iT(t_0) = \frac{1+\kappa}{\kappa} \Phi^+(t_0) - \frac{2\mu}{\kappa} g'(t_0) \text{ на } L'. \quad (42.24)$$

Применяя первую формулу Племели (38.4) к выражению (42.22), имеем

$$\Phi^+(t_0) = \mu g'(t_0) + \frac{\mu X_0^+(t_0)}{\pi i} \int_{L'} \frac{g'(t) dt}{X_0^+(t)(t-t_0)} + X_0^+(t_0) P_{n-1}(t_0). \quad (42.25)$$

Подставляя это выражение для  $\Phi^+(t_0)$  в уравнение (42.24), приходим к формуле для определения внешних усилий, приложенных в любой точке контура  $L'$ . Кроме того,

$$\int_{L_k} [P(t_0) + iT(t_0)] dt_0 = -Y_k + iX_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (42.26)$$

где ( $X_k, Y_k$ ) заданы; таким образом, имеем  $n$  линейных уравнений для определения постоянных  $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$ .

Для того чтобы решить задачу  $A$ , необходимо использовать условие  $c_k = c$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Так как  $\Phi(z)$  непрерывна на ненагруженных отрезках границы  $L''$ , то согласно выражениям (42.16) и (42.22) получим для точки  $t_0$  на  $L''$

$$\begin{aligned} 2\mu(u' + iv')^- &= (\kappa + 1)\Phi(t_0) = \\ &= \frac{(\kappa + 1)\mu X_0^+(t_0)}{\pi i} \int_{L'} \frac{g'(t) dt}{X_0^+(t)(t - t_0)} + (\kappa + 1)X_0^+(t_0)P_{n-1}(t_0), \end{aligned} \quad (42.27)$$

где  $u'$ ,  $v'$  — производные от  $u$ ,  $v$  по  $x$ . Очевидно также, что

$$\int_{b_k}^{a_{k+1}} (u' + iv')^- dt_0 = g(a_{k+1}) - g(b_k), \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (42.28)$$

Подставляя соотношение (42.27) в (42.28), придем к  $(n-1)$  линейным уравнениям, служащим для определения  $C_j$ . Дополнительное уравнение получим, используя известную величину равнодействующей внешних нагрузок  $(X, Y)$ ; таким образом, из выражений (42.22) и (41.4) имеем

$$C_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} z\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi}(X + iY). \quad (42.29)$$

### 43. Одиночный штамп с прямолинейным основанием.

Простейшим примером задачи со смешанными граничными условиями является случай простого штампа с линейным профилем, прижатого вертикальной силой к горизонтальной стенке  $\text{Im}(z) = 0$ . Допустим, что поверхность тела ограничена в своем движении таким образом, что остается в соприкосновении со штампом, покрывающим интервал  $-l \leq t \leq l$ , образующий отрезок  $L'$  действительной оси. Тогда

$$g'(t) = 0 \quad \text{на } L'. \quad (43.1)$$

Допустим при этом, что для равнодействующей внешних усилий, действующих на  $L'$ , справедливы соотношения

$$X = 0, \quad Y = -P_0. \quad (43.2)$$

Из разложения (42.21) имеем

$$X_0(z) = (z+l)^{-\frac{1}{2}+i\beta} (z-l)^{-\frac{1}{2}-i\beta}, \quad (43.3)$$

и согласно уравнению (42.22) получим

$$\Phi(z) = C_0 X_0(z). \quad (43.4)$$

Тогда из соотношений (42.29), (43.3) и (43.4) следует, что

$$\Phi(z) = \frac{iP_0}{2\pi} (z+l)^{-\frac{1}{2}+i\beta} (z-l)^{-\frac{1}{2}-i\beta}. \quad (43.5)$$

Используя уравнения (42.24) и (42.25), найдем после небольшого преобразования, что нормальное и касательное усилия, действующие на основание штампа, равны

$$\left. \begin{aligned} P(t) &= \frac{P_0}{\pi(l^2-t^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1-\kappa}{\sqrt{\kappa}} \cos\left(\frac{\ln \kappa}{2\pi} \ln \frac{l+t}{l-t}\right), \\ T(t) &= \frac{P_0}{\pi(l^2-t^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1+\kappa}{\sqrt{\kappa}} \sin\left(\frac{\ln \kappa}{2\pi} \ln \frac{l+t}{l-t}\right). \end{aligned} \right\} \quad (43.6)$$

Нетрудно показать, что  $P(t)$  остается положительным для всех значений  $t$  таких, что

$$\left| \frac{t}{l} \right| < 0,9997.$$

Для больших значений  $|t|$  напряжения становятся столь большими, что классическая теория упругости уже неприменима.

Более трудные задачи возникают в том случае, когда действительные перемещения на  $L$  неизвестны, а известны только профили штампов, которые могут полностью и не соприкасаться с поверхностью или могут скользить по ней без трения. Различные задачи подобного рода были разобраны Мусхелишвили<sup>1)</sup>, включая задачу контакта двух упругих тел. «Метод линейной связи» применим также к случаям, когда тело занимает всю плоскость, но разрезано вдоль одной или более дуг.

<sup>1)</sup> Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные проблемы математической теории упругости, 4 изд. АН СССР, Ленинград, 1954.

Аналогичным образом можно развить соответствующие методы для случая круга; кроме того, возможно, очевидно, обобщить этот метод на области, которые могут быть отображены на полуплоскость или круг. Для детального ознакомления читатель отсылается к книге Мухелишвили и другим работам, преимущественно русским, где разобраны различные примеры и даны соответствующие ссылки.

## V. Методы преобразования Фурье

Когда тело является бесконечным, полубесконечным или представляет собой бесконечную полосу с параллельными границами, то преобразование Фурье дает эффективный метод решения задач. Задачи о бесконечных клиньях могут быть решены аналогичными методами, использующими преобразование Меллина<sup>1)</sup>.

**44. Бесконечное тело, нагруженное массовыми силами.** Двумерное преобразование Фурье функции  $f(x, y)$  определяется соотношением

$$\bar{f}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i(\xi x + \eta y)} dx dy.$$

Допустим, что компоненты перемещения и напряжения стремятся к нулю по мере того, как  $|x|, |y| \rightarrow \infty$ . Умножая уравнения равновесия (25.2) и (25.3) на  $e^{i(\xi x + \eta y)}$  и интегрируя по всей плоскости, придем к следующим соотношениям:

$$\bar{\xi} \bar{\sigma}_x + \eta \bar{\tau}_{xy} + i \rho \bar{X} = 0, \quad \bar{\xi} \bar{\tau}_{xy} + \eta \bar{\sigma}_y + i \rho \bar{Y} = 0.$$

Аналогично, из условия совместности (28.3) для случая плоской деформации имеем

$$\bar{\sigma}_x [(1 - \nu) \eta^2 - \nu \xi^2] + \bar{\sigma}_y [(1 - \nu) \xi^2 - \nu \eta^2] = 2 \xi \eta \bar{\tau}_{xy}.$$

---

<sup>1)</sup> Sneddon I. N., *Fourier Transforms*, стр. 439, New York, McGraw-Hill, 1951, см. русский перевод: Снеддон И. Н., Преобразования Фурье, ИЛ, 1957 (*Прим. ред.*)



Решая эти алгебраические уравнения, найдем

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y &= -\frac{\varrho}{1-\nu} \cdot \frac{i\xi\bar{X} + i\eta\bar{Y}}{\xi^2 + \eta^2}, \\ \bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y &= -\frac{\varrho(1-2\nu)}{(1-\nu)} \cdot \frac{(\xi^2 - \eta^2)}{(\xi^2 + \eta^2)} (i\xi\bar{X} + i\eta\bar{Y}) - 4\varrho \frac{\xi\eta(i\xi\bar{X} - i\eta\bar{Y})}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, \\ \bar{\tau}_{xy} &= -\frac{\varrho(\xi^2 - \eta^2)}{(\xi^2 + \eta^2)^2} (i\xi\bar{Y} - i\eta\bar{X}) - \varrho \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \cdot \frac{\xi\eta(i\eta\bar{X} + i\xi\bar{Y})}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, \end{aligned}$$

где функции  $\bar{X}(\xi, \eta)$ ,  $\bar{Y}(\xi, \eta)$  известны, поскольку известно распределение массовых сил. Используя формулу обращения

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi, \eta) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta$$

и теорему Фалтинга<sup>1)</sup> для интегралов Фурье, придем к следующим результатам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= -\frac{\varrho}{2\pi(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha)X(\alpha, \beta) + (y-\beta)Y(\alpha, \beta)}{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} d\alpha d\beta, \\ \sigma_x - \sigma_y &= -\frac{\varrho(1-2\nu)}{\pi(1-\nu)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha)(y-\beta)[(y-\beta)X(\alpha, \beta) - (x-\alpha)Y(\alpha, \beta)]}{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]^2} d\alpha d\beta - \\ &- \frac{\varrho}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[(x-\alpha)^2 - (y-\beta)^2]}{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]^2} [(x-\alpha)X(\alpha, \beta) + (y-\beta)Y(\alpha, \beta)] d\alpha d\beta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\varrho(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[(y-\beta)^2 - (x-\alpha)^2]}{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]^2} [(y-\beta)X(\alpha, \beta) - (x-\alpha)Y(\alpha, \beta)] d\alpha d\beta - \\ &- \frac{\varrho}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha)(y-\beta)[(x-\alpha)X(\alpha, \beta) + (y-\beta)Y(\alpha, \beta)]}{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]^2} d\alpha d\beta. \end{aligned} \right\} (44.1)$$

Особенно простым случаем является случай сосредоточенной нагрузки  $F$ , действующей в точке  $x = y = 0$  в направлении уменьшения  $x$ . Нагрузка может быть пред-

1) См. цитированную выше работу Снеддона.

ставлена в виде

$$X(x, y) = -\frac{F}{q} \delta(x) \delta(y), \quad Y(x, y) = 0,$$

где  $\delta(x)$  — функция дельта Дирака, обладающая свойствами

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0).$$

Тогда из формулы (44.1) имеем компоненты напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Fx}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (1-2\nu) + \frac{2x^2}{r^2} \right\}, \\ \sigma_y &= \frac{Fx}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (1+2\nu) - \frac{2x^2}{r^2} \right\}, \\ \tau_{xy} &= \frac{Fy}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (1-2\nu) + \frac{2x^2}{r^2} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (44.2)$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

**45. Полубесконечное тело с поверхностной нагрузкой.** Рассмотрим тело, не подверженное действию массовых сил и занимающее верхнюю полуплоскость  $x \geq 0$ , и допустим, что компоненты напряжения и перемещения стремятся к нулю по мере того, как  $x \rightarrow \infty$ . Считается, что на границе  $x = 0$  касательное напряжение  $\tau_{xy}$  равно нулю и известно либо давление, либо перемещение. Здесь для обозначения *одномерного преобразования* по  $y$  мы используем черту сверху знака функции; таким образом,

$$\bar{f}(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i\xi y} dy;$$

этой формуле соответствует формула обращения

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x, \xi) e^{-i\xi y} d\xi.$$

Умножая уравнения равновесия (25.2) и (25.3) и соотношения между напряжениями и деформациями

(25.4) — (25.7) для плоской деформации на  $e^{i\xi y}$  и интегрируя вдоль всей оси  $y$ , получим следующую систему пяти обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} D\bar{\sigma}_x - i\xi\bar{\tau}_{xy} &= 0, \\ D\bar{\tau}_{xy} - i\xi\bar{\sigma}_y &= 0, \\ \bar{\sigma}_x &= \lambda(D\bar{u} - i\xi\bar{v}) + 2\mu D\bar{u}, \\ \bar{\sigma}_y &= \lambda(D\bar{u} - i\xi\bar{v}) - 2i\mu\xi\bar{v}, \\ \bar{\tau}_{xy} &= \mu(D\bar{v} - i\xi\bar{u}), \end{aligned} \right\} \quad (45.1)$$

где  $D$  обозначает оператор  $d/dx$ . Для того чтобы уравнения (45.1) были совместны, их элиминант относительно любого зависимого переменного должен быть равен нулю. Это условие сводится к следующему:

$$(D^2 - \xi^2)\bar{g}(x, \xi) = 0, \quad (45.2)$$

где  $\bar{g}(x, \xi)$  — любая из величин  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$ ,  $\bar{\tau}_{xy}$ ,  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ . Решение уравнения (45.2), стремящееся к нулю при  $x \rightarrow \infty$ , имеет вид

$$\bar{g} = (A + Bx)e^{-|\xi|x}, \quad (45.3)$$

где  $A, B$  — функции  $\xi$ , зависящие от граничных условий и, в общем случае, различные для каждого решения.

Возьмем случай, когда внешнее давление  $p$  задано, т. е.

$$\sigma_x = -p(y) \text{ при } x = 0,$$

или в символах преобразования Фурье

$$\bar{\sigma}_x = -\bar{p}(\xi) \text{ при } x = 0.$$

Кроме того, поскольку  $\tau_{xy} = 0$  на линии  $x = 0$ , то первое из уравнений (45.1) приводит к условию

$$D\bar{\sigma}_x = 0 \text{ при } x = 0.$$

Если в уравнении (45.3) принять величину  $\bar{g}$  за решение для  $\bar{\sigma}_x$ , то из этих условий найдем

$$A = -\bar{p}(\xi), \quad B = -|\xi|\bar{p}(\xi).$$

Оставшиеся решения легко найти, подставляя результат в формулы (45.1); после применения преобразования получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\xi) \{1 + |\xi|x\} e^{-|\xi|x - i\xi y} d\xi, \\ \sigma_y &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\xi) \{1 - |\xi|x\} e^{-|\xi|x - i\xi y} d\xi, \\ \tau_{xy} &= -\frac{ix}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\xi) \xi e^{-|\xi|x - i\xi y} d\xi, \\ u &= \frac{1+\nu}{E\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}(\xi)}{|\xi|} \{2(1-\nu) + |\xi|x\} e^{-|\xi|x - i\xi y} d\xi, \\ v &= -\frac{i(1+\nu)}{E\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}(\xi)}{|\xi|} \{(1-2\nu) - |\xi|x\} e^{-|\xi|x - i\xi y} d\xi. \end{aligned} \right\} (45.4)$$

В качестве примера допустим, что равномерное давление  $p_0$  действует на участок  $-a \leq y \leq a$  границы  $x = 0$ . Тогда

$$\bar{p}(\xi) = \frac{p_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{i\xi y} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} p_0 \frac{\sin(\xi a)}{\xi},$$

и поскольку эта функция является нечетной относительно  $\xi$ , то, подставляя ее в уравнения (45.4), найдем компоненты напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2p_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1+\xi x}{\xi} e^{-\xi x} \sin(\xi a) \cos(\xi y) d\xi, \\ \sigma_y &= -\frac{2p_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1-\xi x}{\xi} e^{-\xi x} \sin(\xi a) \cos(\xi y) d\xi, \\ \tau_{xy} &= -\frac{2p_0 x}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\xi x} \sin(\xi a) \sin(\xi y) d\xi. \end{aligned}$$

Вычисляя эти интегралы, получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P_0}{2\pi} \{2(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \sin 2\vartheta_1 - \sin 2\vartheta_2\}, \\ \sigma_y &= \frac{P}{2\pi} \{2(\vartheta_1 - \vartheta_2) - \sin 2\vartheta_1 + \sin 2\vartheta_2\}, \\ \tau_{xy} &= \frac{P_0}{2\pi} (\cos 2\vartheta_2 - \cos 2\vartheta_1), \end{aligned} \right\} (45.5)$$

где

$$\vartheta_1 = \arctg \frac{y-a}{x}, \quad \vartheta_2 = \arctg \frac{y+a}{x}.$$

Аналогичные методы можно использовать для случая бесконечной полосы с параллельными сторонами<sup>1)</sup>.

**46. Сосредоточенная нагрузка на полубесконечное тело.** Результаты, полученные для сосредоточенной нагрузки на бесконечное тело, и общие решения для полубесконечного тела можно использовать для того, чтобы найти напряжения в полубесконечном теле, обусловленные сосредоточенной нагрузкой, приложенной в точке  $(h, 0)$  и действующей в направлении уменьшения  $x$ . Граница  $x=0$  считается свободной от напряжений, так что

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0 \text{ при } x=0.$$

Запишем сначала, согласно формулам (44.2), компоненты напряжений для бесконечного тела, когда в дополнение к сосредоточенной нагрузке  $F$  в точке  $(h, 0)$  имеется равная и противоположно направленная воображаемая нагрузка в точке  $(-h, 0)$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{F}{2\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) \left( \frac{x-h}{\varrho_1^2} - \frac{x+h}{\varrho_2^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(x-h)^3}{\varrho_1^4} - \frac{2(x+h)^3}{\varrho_2^4} \right\}, \\ \sigma_y &= \frac{F}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1+2\nu) \left( \frac{x-h}{\varrho_1^2} - \frac{x+h}{\varrho_2^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(x-h)^3}{\varrho_1^4} + \frac{2(x+h)^3}{\varrho_2^4} \right\}, \\ \tau_{xy} &= \frac{Fy}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) \left( \frac{1}{\varrho_1^2} - \frac{1}{\varrho_2^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(x-h)^2}{\varrho_1^4} - \frac{2(x+h)^2}{\varrho_2^4} \right\}, \end{aligned} \right\} (46.1)$$

<sup>1)</sup> См. Снеддон И. Н., Преобразования Фурье, ИЛ, 1957.

где

$$\varrho_1^2 = (x - h)^2 + y^2, \quad \varrho_2^2 = (x + h)^2 + y^2.$$

Воображаемая нагрузка добавляется для того, чтобы компонент касательного напряжения  $\tau_{xy}$  сделать равным нулю на линии  $x = 0$  и решать задачу с помощью наложения на эти решения решений для полубесконечного тела, которые позволяют обратить в нуль компонент нормального напряжения  $\sigma_x$  на линии  $x = 0$ . Другими словами, к выражениям (46.1) нужно добавить решения, полученные для случая полубесконечного тела, полагая в уравнении (45.4)

$$-p(y) = \frac{Fh}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{1-2\nu}{h^2+y^2} + \frac{2h^2}{(h^2+y^2)^2} \right\}$$

или

$$\bar{p}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} p(y) \cos(\xi y) dy = -\frac{F}{\sqrt{2\pi}} \left\{ 1 + \frac{h\xi}{2(1-\nu)} \right\} e^{-h\xi}.$$

**47. Задачи о трещинах и штампе.** Когда граничные условия в случае полубесконечного тела являются смешанными, то применение интегралов Фурье<sup>1)</sup> приводит к интегральным уравнениям с двойными интегралами. Рассмотрим трещину Гриффитса<sup>2)</sup>, образовавшуюся под действием переменного внешнего давления. Если в бесконечном двумерном теле трещина занимает участок  $-c \leq y \leq c$ ,  $x = 0$ , то из условий симметрии относительно оси  $y$  ясно, что задача эквивалентна задаче о полубесконечном теле, когда граничные условия на линии  $x = 0$  имеют вид

$$\begin{aligned} u &= 0 & |y| > c; \\ \sigma_x &= -p_0(y) & |y| < c; \\ \tau_{xy} &= 0 & \text{для всех значений } y; \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Sneddon I. N., Elliott H. A., Quart. Appl. Math. 4, 262 (1946); Sneddon I. N., Fourier Transforms, New York, McGraw-Hill, 1951 (имеется русский перевод: Снеддон И. Н., Преобразования Фурье, ИЛ, 1957).

<sup>2)</sup> Griffith A. A., Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Ser. A221, 180 (1921); Proc. Internat. Congr. Applied Mech. (Delft), 1924, p. 55.

давление  $p_0(y)$  является четной функцией  $y$ , которая предполагается известной. Если допустить, что компоненты напряжения и перемещения равны нулю на бесконечности, то можно применить теорию, развитую в § 45; используя приведенные выше условия, при  $x=0$  имеем из первого и четвертого уравнений (45.4)

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{p}(\xi) \cos(\xi y) d\xi &= p_0(y), & 0 \leq y \leq c, \\ \int_0^{\infty} \bar{p}(\xi) \frac{\cos(\xi y)}{\xi} d\xi &= 0, & y \geq c, \end{aligned} \right\} \quad (47.1)$$

где

$$\bar{p}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} p(y) \cos(\xi y) dy$$

и  $-p(y)$  представляет значение  $\sigma_x$  на линии  $x=0$ . Используя подстановки

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varrho/c, & y &= c\eta, \\ \bar{p}\left(\frac{\varrho}{c}\right) &= \varrho^{\frac{1}{2}} F(\varrho), & g(\eta) &= cp_0(c\eta) \end{aligned} \right\} \quad (47.2)$$

и учитывая, что

$$\cos z = \left(\frac{1}{2} \pi z\right)^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(z),$$

можно представить уравнения (47.1) в стандартной форме

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \varrho F(\varrho) J_{-\frac{1}{2}}(\varrho\eta) d\varrho &= g(\eta), & 0 \leq \eta \leq 1, \\ \int_0^{\infty} F(\varrho) J_{-\frac{1}{2}}(\varrho\eta) d\varrho &= 0, & \eta > 1. \end{aligned} \right\} \quad (47.3)$$

Эта пара уравнений соответствует случаю  $\alpha = 1, \nu = -\frac{1}{2}$

для уравнений

$$\int_0^{\infty} y^{\alpha} f(y) J_{\nu}(xy) dy = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\int_0^{\infty} f(y) J_{\nu}(xy) dy = 0, \quad x > 0,$$

которые имеют согласно Басбриджу<sup>1)</sup> решения вида

$$f(x) = \frac{2^{-\frac{1}{2}\alpha} x^{-\alpha}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\alpha\right)} \left\{ x^{1+\frac{1}{2}\alpha} J_{\nu+\frac{1}{2}\alpha}(x) \int_0^1 y^{\nu+1} (1-y^2)^{\frac{1}{2}\alpha} g(y) dy + \right. \\ \left. + \int_0^1 u^{\nu+1} (1-u^2)^{\frac{1}{2}\alpha} du \int_0^1 g(yu) (xy)^{2+\frac{1}{2}\alpha} J_{\nu+\frac{1}{2}\alpha}(xy) dy \right\}$$

до тех пор, пока функция  $g(y)$  является интегрируемой в интервале  $(0,1)$  и  $\alpha$  удовлетворяет условиям  $\alpha > -2$ ,  $-\nu-1 < \alpha - \frac{1}{2} < \nu+1$ . Используя этот результат, найдем решение уравнения (47.3)

$$F(\varrho) = \left(\frac{2\varrho}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ J_0(\varrho) \int_0^1 y^{\frac{1}{2}} (1-y^2)^{\frac{1}{2}} g(y) dy + \right. \\ \left. + \varrho \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} (1-u^2)^{\frac{1}{2}} du \int_0^1 g(yu) y^{\frac{5}{2}} J_1(\varrho y) dy \right\}. \quad (47.4)$$

Когда  $p_0(y)$  представляет постоянное давление  $p_0$ , это выражение можно преобразовать, используя соотношения (47.2), и получить следующее уравнение:

$$\bar{p}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} p_0 c J_1(c\xi).$$

Тогда с помощью уравнений (45.4) можно найти явные выражения для компонентов напряжения и перемещения.

<sup>1)</sup> Busbridge I. W., Proc. Lond. Math. Soc. 44, 115 (1938).



В частности, найдем, что

$$u = \frac{2(1-\nu^2)p_0}{E} (c^2 - y^2)^{\frac{1}{2}};$$

это выражение показывает, что трещина деформируется в эллипс с полуосями  $2(1-\nu^2)p_0c/E$  и  $c$ .

Если штамп без трения заданным образом вдавли-  
вается на части поверхности полубесконечного тела,  
и остальная часть тела свободна от внешних нагрузок,  
то задача имеет аналогичный характер. Граничные усло-  
вия на линии  $x=0$  имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= 0 \quad \text{для всех значений } y, \\ u &= u_0(y), \quad |y| \leq c; \quad \sigma_x = 0, \quad |y| > c. \end{aligned}$$

Если штамп симметричный, так что  $u_0(y)$  является четной функцией  $y$ , то из первого и четвертого уравнений (45.4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{2(1-\nu^2)}{E} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\bar{p}(\xi)}{\xi} \cos(\xi y) d\xi &= u_0(y), \quad 0 \leq y \leq c, \\ \int_0^{\infty} \bar{p}(\xi) \cos(\xi y) d\xi &= 0, \quad y > c. \end{aligned}$$

Эти уравнения могут быть разрешены относительно  $\bar{p}(\xi)$  с помощью указанного выше метода. Полное описание метода с расчетами частных случаев дано Снеддоном<sup>1)</sup>.

## VI. Методы действительного потенциала

48. Потенциальные функции Пейна. Пейн<sup>2)</sup> использовал разложение функции напряжения Эри на потенциальные функции действительного переменного. Метод можно непосредственно применить к задачам о полубесконечных телах или бесконечных полосах, а также к расчету некоторых анизотропных тел и трехмерным

<sup>1)</sup> См. цитированную выше работу, стр. 431—439.

<sup>2)</sup> Payne L. E., University Maryland, Technical Note, BN-66, 1955.

осесимметричным задачам. Обсуждение, которое здесь проводится, касается главным образом полубесконечных, двумерных, изотропных тел, занимающих полуплоскость  $x \geq 0$ ,  $-\infty < y < \infty$ .

Легко показать, что функцию напряжения Эри  $\chi(x, y)$ , удовлетворяющую бигармоническому уравнению (28.7), можно представить в виде

$$\chi = \varphi'_1 - x \frac{\partial \varphi'_2}{\partial x}, \quad (48.1)$$

где  $\varphi'_1$  и  $\varphi'_2$  — любые гармонические функции. Подставляя выражение для  $\chi$  в формулы (28.2), найдем, что при отсутствии массовых сил компоненты напряжений определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi'_1}{\partial y^2} - x \frac{\partial^3 \varphi'_2}{\partial x \partial y^2} = -\frac{\partial^2 \varphi'_1}{\partial x^2} + x \frac{\partial^3 \varphi'_2}{\partial x^3}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi'_1}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi'_2}{\partial x^2} - x \frac{\partial^3 \varphi'_2}{\partial x^3}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi'_2}{\partial x} - x \frac{\partial^2 \varphi'_2}{\partial x^2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (48.2)$$

Используя затем эти выражения в соотношениях между напряжением и деформацией для случая плоской деформации и интегрируя их, получим для компонентов перемещения следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} 2\mu u &= -\frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} + x \frac{\partial^2 \varphi'_2}{\partial x^2} - (1 - 2\nu) \frac{\partial \varphi'_2}{\partial x}, \\ 2\mu v &= -\frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} + 2(1 - \nu) \frac{\partial \varphi'_2}{\partial y} + x \frac{\partial^2 \varphi'_2}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (48.3)$$

Введем теперь гармонические функции  $\psi'_1$  и  $\psi'_2$ , сопряженные с функциями  $\varphi'_1$  и  $\varphi'_2$  соответственно, так что

$$\frac{\partial \varphi'_i}{\partial x} = \frac{\partial \psi'_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi'_i}{\partial y} = -\frac{\partial \psi'_i}{\partial x}, \quad i = 1, 2,$$

и получим

$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi'_i}{\partial x}, \quad \psi_i = \frac{\partial \psi'_i}{\partial x}, \quad i = 1, 2,$$

где, конечно, функции  $\varphi_i$ ,  $\psi_i$  опять являются гармоническими функциями. Формулы (48.2) и (48.3) перейдут

тогда в следующие:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + x \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - 2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} - x \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi_1 - \varphi_2 - x \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \right), \\ 2\mu u &= -\varphi_1 + x \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} - (1-2\nu)\varphi_2, \\ 2\mu v &= \psi_1 - 2(1-\nu)\psi_2 + x \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (48.4)$$

Теперь, подбирая соответствующее линейное соотношение между  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , любой из компонентов напряжения или перемещения можно сделать равным нулю всюду на линии  $x=0$ . Действительно, на линии  $x=0$  имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0, & \text{если } \varphi_1 &\equiv 0, \\ \sigma_y &= 0, & \text{если } \varphi_1 &\equiv 2\varphi_2, \\ \tau_{xy} &= 0, & \text{если } \varphi_1 &\equiv \varphi_2, \\ u &= 0, & \text{если } \varphi_1 &\equiv -(1-2\nu)\varphi_2, \\ v &= 0, & \text{если } \varphi_1 &\equiv 2(1-\nu)\varphi_2. \end{aligned}$$

Метод решения в основном одинаков для любого из этих случаев, но поскольку обычно имеется поверхность, свободная от касательных напряжений, то остальная часть рассуждений будет относиться к этому случаю. Если  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ , то  $\psi_1 = \psi_2 = \psi$  и формулы (48.4) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + x \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \\ \sigma_y &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - x \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} &= x \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}, \\ 2\mu u &= -2(1-\nu)\varphi + x \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ 2\mu v &= -(1-2\nu)\psi + x \frac{\partial\varphi}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (48.5)$$

Компоненты напряжения считаются непрерывными в верхней полуплоскости и равными нулю на бесконечности, однако на бесконечности перемещения не обязательно ограничены, как можно видеть по форме комплексных потенциалов (41.4) для той же самой задачи.

**49. Однородные краевые задачи.** Методы преобразования Фурье используются для решения первой и второй краевых задач. Во второй краевой задаче необходимо допустить, что перемещение равно нулю на бесконечности, тогда как перемещение на границе задается в виде

$$\mu u = -(1 - \nu) f(y) \quad \text{при } x = 0.$$

Положим

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi e^{i\alpha y} dy; \quad (49.1)$$

тогда  $\bar{\varphi}$  удовлетворяет преобразованному уравнению Лапласа

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}}{dx^2} - \alpha^2 \bar{\varphi} = 0.$$

Используя четвертую из формул (48.5) и граничные условия, найдем решение

$$\bar{\varphi} = \bar{f}(\alpha) e^{-|\alpha|x}. \quad (49.2)$$

Две потенциальные функции можно записать теперь в форме:

а) для четной функции  $f(y)$

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos \alpha y \, d\alpha \int_0^{\infty} f(y') \cos \alpha y' \, dy', \\ \psi &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin \alpha y \, d\alpha \int_0^{\infty} f(y') \cos \alpha y' \, dy'; \end{aligned} \right\} \quad (49.3)$$

б) для нечетной функции  $f(y)$

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin \alpha y \, d\alpha \int_0^{\infty} f(y') \sin \alpha y' \, dy', \\ \psi &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos \alpha y \, d\alpha \int_0^{\infty} f(y') \sin \alpha y' \, dy'. \end{aligned} \right\} \quad (49.4)$$

Для того чтобы решить первую граничную задачу, заметим, во-первых, что  $\partial\varphi/\partial x$  тоже удовлетворяет уравнению Лапласа. В дополнение к условию, что  $\sigma_x$  равно нулю на бесконечности, имеем условие

$$\sigma_x = -g(y), \quad x = 0.$$

Эти условия используются затем вместе с первым из уравнений (48.5) для получения решений методом, аналогичным вышеизложенному.

а) для четной функции  $g(y)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos \alpha y \, d\alpha \int_0^{\infty} g(y') \cos \alpha y' \, dy', \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin \alpha y \, d\alpha \int_0^{\infty} g(y') \cos \alpha y' \, dy'; \end{aligned} \right\} \quad (49.5)$$

б) для нечетной функции  $g(y)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin \alpha y \, d\alpha \int_0^{\infty} g(y') \sin \alpha y' \, dy', \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos \alpha y \, d\alpha \int_0^{\infty} g(y') \sin \alpha y' \, dy'. \end{aligned} \right\} \quad (49.6)$$

### 50. Задачи со смешанными граничными условиями.

Рассмотрим теперь задачу об одиночном штампе; пусть компонент перемещения  $u$  задан всюду при  $x = 0$ ,  $|y| < b$ , оставшаяся часть границы свободна от напряжений. Для того чтобы решить эту задачу, вводятся два типа конформного преобразования. Преобразование

$$x + iy = b \operatorname{sh}(\xi + i\eta)$$

определяет эллиптическую систему координат  $(\xi, \eta)$ , для которой

$$\left. \begin{aligned} x &= b \operatorname{sh} \xi \cos \eta, \\ y &= b \operatorname{ch} \xi \sin \eta. \end{aligned} \right\} \quad (50.1)$$

В этом случае полуплоскость  $x > 0$  отображается на *полу-бесконечную* полосу  $\xi > 0$ ,  $|\eta| < \frac{\pi}{2}$ ; отрезок  $x = 0$ ,  $|y| < b$

соответствует области  $\xi = 0$ ,  $|\eta| < \frac{\pi}{2}$  и область  $x = 0$ ,  $y > b$ ,  $y < -b$  соответствует области  $\xi > 0$ ,  $\eta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\eta = -\frac{\pi}{2}$ .

Биполярные координаты  $(\xi, \eta)$  определяются формулами

$$x + iy = -b \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\xi + i\eta)$$

или

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{b \sin \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \\ y &= \frac{b \operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}. \end{aligned} \right\} \quad (50.2)$$

Это преобразование отображает полуплоскость  $x > 0$  на бесконечную полосу  $-\pi < \xi < 0$ ,  $-\infty < \eta < \infty$ . Интервал  $x = 0$ ,  $|y| < b$  соответствует линии  $\xi = -\pi$ , а интервалы  $x = 0$ ,  $y > b$ ,  $y < -b$  — линии  $\xi = 0$ ,  $\eta > 0$ ,  $\eta < 0$ . Следует заметить, что при любом конформном преобразовании гармонические функции  $\varphi$ ,  $\psi$  становятся гармоническими функциями новых переменных  $\xi$  и  $\eta$ .

Граничные условия на линии  $x = 0$  согласно выражению (49.1) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\mu}{1-\nu} u &= \varphi = f(y), & -b < y < b, \\ -\sigma_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, & y < -b, \quad y > b. \end{aligned} \right\} \quad (50.3)$$

В эллиптических координатах  $\xi$  и  $\eta$ , определяемых соотношениями (50.1), эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi &= f_1(\eta), & \xi = 0, & \quad -\frac{\pi}{2} < \eta < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0, & \xi > 0, & \quad \eta = \pm \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Если  $f(y)$  является четной функцией, имеющей вид одной из следующих функций:

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b^{-2n} (b^2 - y^2)^n, \quad (50.4)$$

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} y^{2n}, \quad (50.5)$$

то она может быть представлена рядом следующего вида:

$$f_1(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \cos(2n\eta).$$

В свою очередь

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} e^{-2n\xi} \cos(2n\eta), \quad (50.6)$$

поскольку эта функция гармоническая, удовлетворяющая граничным условиям. Аналогично, если  $f(y)$  — нечетная функция, представляемая одним из следующих рядов:

$$f(y) = y \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n b^{-2n} (b^2 - y^2)^n, \quad (50.7)$$

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{2n+1} y^{2n+1}, \quad (50.8)$$

то функцию  $\varphi$  можно представить в форме

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} e^{-(2n+1)\xi} \sin\{(2n+1)\eta\}. \quad (50.9)$$

Компоненты напряжения становятся бесконечными на концах  $y = \pm b$  профиля штампа, если граничные условия таковы, что на концах деформированной граничной линии нет закруглений. Когда перемещение на линии  $x=0$  является симметричным, и  $f(y)$  имеет вид (50.4) или (50.5), бесконечных значений напряжения в точках  $y = \pm b$  можно избежать, прибавляя к потенциальной функции (50.6) величину  $A\xi$ , где  $A$  — постоянная, подлежащая определению. Очевидно, что  $\xi$  является гармонической функцией и добавление этой функции не нарушает граничных условий; однако компонент перемещения  $u$  уже не будет ограниченным и будет увеличиваться по логарифмическому закону, по мере того как  $x, |y| \rightarrow \infty$ . Когда функция  $f(y)$  имеет вид (50.4), то преобразование (50.1) запишется в форме

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \cos(2n\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos 2^m \eta,$$

где согласно теории рядов Фурье

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{\Gamma(2m+1)}{2^{2m-1} \{\Gamma(m+1)\}^2}, \\ A_{2n} &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{\Gamma(2m+1)}{2^{2m-1} \Gamma(m+n+1) \Gamma(m-n+1)}. \end{aligned} \right\} (50.10)$$

Подставляя коэффициенты (50.10) в выражение (50.6) и изменяя порядок суммирования, придем к соотношению

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum'_{n=0}^m a_m \frac{\Gamma(2m+1) e^{-2n\xi} \cos(2n\eta)}{2^{2m-1} \Gamma(m+n+1) \Gamma(m-n+1)}, \quad (50.11)$$

где штрих указывает на то, что член  $n=0$  опущен. На линии  $\xi=0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{b \cos \eta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}.$$

Эта производная стремится к бесконечному значению и, следовательно,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  также становятся бесконечными, по мере того как  $\eta \rightarrow \pm \frac{1}{2} \pi$ , т. е. стремится к точкам на концах штампа. Добавляя к функции  $\varphi$  множитель  $\xi$ , образуем новую функцию

$$\varphi' = \sum_{m=0}^{\infty} \sum'_{n=0}^m a_m \frac{\Gamma(2m+1) \{e^{-2n\xi} \cos(2n\eta) + 2(-1)^{n\xi} \xi\}}{2^{2m-1} \Gamma(m+n+1) \Gamma(m-n+1)} \quad (50.12)$$

и исключаем, таким образом, бесконечное напряжение, а следовательно, и разрыв непрерывности функции  $(\partial u / \partial y)_{x=0}$  в конечных точках  $y = \pm b$ . Следует заметить, что аналогичный метод, предложенный в оригинальной работе<sup>1)</sup> с целью устранения бесконечных значений напряжений в случае нечетной функции  $f(y)$ , нарушает граничные условия.

В качестве простого примера применения метода отыскания решения в эллиптических координатах рассмот-

1) Имеется в виду работа Пейна. (Прим. ред.)



рим случай

$$f(y) = k(b^2 - y^2), \quad -b < y < b,$$

который представляет собой случай (50.4), когда единственный не равный нулю коэффициент  $a_1 = kb^2$ . Подставляя это выражение в разложение (50.12), получим потенциальную функцию

$$\varphi' = \frac{1}{2} kb^2 \{1 + e^{-2\xi} \cos(2\eta) - 2\xi\}, \quad (50.13)$$

где последний член служит для того, чтобы исключить бесконечные значения напряжения при  $x=0$ ,  $y = \pm b$ . Легко видеть, что если не принимать во внимание произвольную постоянную, представляющую собой перемещение твердого тела, то сопряженная функция будет равна

$$\psi' = -\frac{1}{2} kb^2 \{e^{-2\xi} \sin(2\eta) + 2\eta\}. \quad (50.14)$$

В биполярной системе координат  $\xi$ ,  $\eta$ , заданной соотношениями (50.2), граничные условия (50.3) примут вид

$$\begin{aligned} \varphi &= f_2(\eta) \quad \text{при} \quad \xi = -\pi; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0. \end{aligned}$$

Поскольку  $f(y)$  равна нулю в точках  $y = \pm b$ , так что  $f_2(\eta) \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow \pm \infty$ , то гармоническую функцию  $\varphi$  можно найти из решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0$$

с помощью преобразования Фурье относительно  $\eta$ . В случае четной функции  $f(y)$  результат имеет вид

$$\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \alpha \xi \cos \alpha \eta \, d\alpha}{\operatorname{ch} \alpha \pi} \int_0^{\infty} f_2(\eta') \cos \alpha \eta' \, d\eta'; \quad (50.15)$$

для нечетной функции имеем

$$\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \alpha \xi \sin \alpha \eta \, d\alpha}{\operatorname{ch} \alpha \pi} \int_0^{\infty} f_2(\eta') \sin \alpha \eta' \, d\eta'. \quad (50.16)$$

Член, который необходимо добавить к правой части уравнения (50.15) для того, чтобы избежать бесконечных напряжений в углах штампа в рассматриваемых координатах, примет вид

$$A \ln \left( \frac{\operatorname{ch} \frac{1}{2} \eta + \cos \frac{1}{2} \xi}{\operatorname{ch} \frac{1}{2} \eta - \cos \frac{1}{2} \xi} \right).$$

Этот метод эффективен тогда, когда функция  $f(y)$  имеет вид (50.4) или (50.5), однако он не является универсальным, как предполагалось в оригинальной работе; пример, приведенный ниже, представляет собой одно из исключений. Член, предложенный Пейном для этой цели в случае нечетной функции  $f(y)$ , опять нарушает граничные условия.

Разберем элементарный пример для случая эллиптической деформации, задаваемой функцией вида

$$f(y) = k(b^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad -b < y < b.$$

Согласно преобразованию (50.2) имеем

$$f_2(\eta) = kb \operatorname{sch} \left( \frac{1}{2} \eta \right), \quad \xi = -\pi;$$

Подставляя это выражение в соотношение (50.15), найдем

$$\varphi = \frac{2kb}{\pi} \left\{ \frac{\xi \sin \frac{1}{2} \xi \operatorname{ch} \frac{1}{2} \eta + \eta \cos \frac{1}{2} \xi \operatorname{sh} \frac{1}{2} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi} \right\}.$$

На линии  $x = 0$ ,  $|y| < b$  получим

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y &= -\frac{1 + \operatorname{ch} \eta}{b} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_{\xi = -\pi} = \\ &= \frac{2k}{\pi} \left\{ \operatorname{ch} \frac{1}{2} \eta - \frac{1}{2} \eta \operatorname{sh} \frac{1}{2} \eta \right\} = \frac{2k}{\pi \sqrt{(b^2 - y^2)}} \left\{ b - y \operatorname{Arth} \frac{y}{b} \right\}. \end{aligned}$$

Другие задачи со смешанными граничными условиями легко сводятся к задачам, аналогичным рассмотренным выше.

**51. Задачи о бесконечной полосе.** Когда тело занимает бесконечную полосу  $0 < x < b$ ,  $-\infty < y < \infty$ , задача может быть решена применением метода интегралов Фурье, пока граничные условия являются однородными на каждой границе  $x=0$ ,  $x=d$ . Допустим, что потенциальные функции  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  в формулах (48.4) заданы в виде

$$\varphi_1 = k_1\varphi + \varphi'_1,$$

$$\varphi_2 = k_2\varphi + \varphi_2,$$

где  $\varphi'_1$  и  $\varphi'_2$  — гармонические функции, ничего не добавляющие к граничным условиям на линии  $x=0$  и  $k_1$ ,  $k_2$  выбираются так же, как и для полубесконечной полосы, согласно граничным условиям на линии  $x=0$ . Функция  $\varphi$  будет тогда такой же самой, как и в случае полубесконечной полосы, с теми же самыми граничными условиями на линии  $x=0$ . Можно найти функции  $\varphi'_1$ ,  $\varphi'_2$  такие, что граничные условия на линии  $x=d$  будут выполняться, и таким образом задача будет решена.

---

## D. ТРЕХМЕРНЫЕ СТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассмотрим теперь решение пространственных статических задач теории упругости. Здесь не существует такого эффективного аналитического аппарата, как в теории двумерных задач, однако метод Бетти позволяет построить общую теорию, а теория интегральных преобразований и применение криволинейных координат позволяют создать полезные методы для исследования ограниченного круга частных задач.

Начнем с вывода формул, с помощью которых уравнения упругого равновесия могут быть выражены в криволинейных координатах.

### I. Общая теория

**52. Ортогональные криволинейные координаты.** Когда координатные кривые являются ортогональными, то справедлива следующая формула:

$$ds^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2; \quad (52.1)$$

это выражение представляет фундаментальную квадратичную форму, так что  $g_{mn} = h_m^2 \delta_{mn}$  и  $g^{mn} = \delta_{mn}/h_m^2$ , где  $\delta_{mn}$  означает дельту Кронекера. Из определения символа Кристоффеля первого рода

$$[m, np] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{mn}}{\partial q_p} + \frac{\partial g_{mp}}{\partial q_n} - \frac{\partial g_{np}}{\partial q_m} \right)$$

найдем, что для метрики (52.1)

$$[m, np] = h_m \frac{\partial h_m}{\partial q_p} \delta_{mn} + h_m \frac{\partial h_m}{\partial q_n} \delta_{mp} - h_n \frac{\partial h_n}{\partial q_m} \delta_{np}.$$

Если поэтому принять, что  $m, n, p$  все различны, то найдем (повторяющиеся индексы не суммируются)

$$\left. \begin{aligned} [m, np] &= 0, \\ [m, nm] &= [m, mn] = -[n, mm] = h_m \frac{\partial h_m}{\partial q_n}, \\ [m, mm] &= h_m \frac{\partial h_m}{\partial q_m}. \end{aligned} \right\} \quad (52.2)$$

В тех же обозначениях согласно выражению

$$\left\{ \begin{matrix} m \\ np \end{matrix} \right\} = g^{im} [i, np]$$

найдем

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} m \\ np \end{matrix} \right\} &= 0, \quad \left\{ \begin{matrix} m \\ mm \end{matrix} \right\} = \frac{1}{h_m} \frac{\partial h_m}{\partial q_m}, \\ \left\{ \begin{matrix} m \\ mn \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} m \\ nm \end{matrix} \right\} = \frac{1}{h_m} \frac{\partial h_m}{\partial q_n}, \quad \left\{ \begin{matrix} n \\ mm \end{matrix} \right\} = -\frac{h_m}{h_n^2} \frac{\partial h_m}{\partial q_n}. \end{aligned} \right\} \quad (52.3)$$

Если обозначить физические компоненты перемещения вдоль координатных кривых  $q_m$  через  $(u_{q_1}, u_{q_2}, u_{q_3})$ , то из соотношения (4.2) получим

$$u_{q_1} = h_1 u^1, \quad u_{q_2} = h_2 u^2, \quad u_{q_3} = h_3 u^3. \quad (52.4)$$

Аналогично из формулы (9.17) видно, что физические компоненты тензора напряжений, отнесенные к прямоугольной системе координат, заданы вдоль координатных кривых  $q_m$  в виде

$$\sigma_{mn} = h_m h_n \tau^{mn}. \quad (52.5)$$

Из выражения для расширения

$$\Delta = \nabla_s u^s$$

найдем, что

$$\Delta = \sum_s \frac{\partial}{\partial q_s} \left( \frac{u_{q_s}}{h_s} \right) + \sum_{i,s} \left\{ \begin{matrix} s \\ is \end{matrix} \right\} \frac{u_{q_i}}{h_i},$$

так что согласно выражению (52.3) имеем

$$\Delta = \sum_s \frac{\partial}{\partial q_s} \left( \frac{u_{q_s}}{h_s} \right) + \sum_{i,s} \frac{u_{q_i}}{h_i h_s} \cdot \frac{\partial h_i}{\partial q_i}. \quad (52.6)$$

а) *Цилиндрические полярные координаты.* Если принять  $q_1 = \varrho$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = z$ , где  $\varrho$ ,  $\varphi$ ,  $z$  — цилиндрические координаты точки, то поскольку

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

имеем

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \varrho, \quad h_3 = 1,$$

и отсюда следует, что все символы Кристоффеля равны нулю, исключая

$$[2, 12] = [2, 21] = -[1, 22] = \varrho, \quad (52.7)$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\varrho}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -\varrho. \quad (52.8)$$

Обозначив физические компоненты перемещения через  $u_\varrho$ ,  $u_\varphi$ ,  $u_z$ , получим из формулы (52.4)

$$u_\varrho = u^1, \quad u_\varphi = \varrho u^2, \quad u_z = u^3. \quad (52.9)$$

Аналогично из формул (52.5) для физических компонент напряжения имеем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\varrho &= \tau^{11}, & \sigma_\varphi &= \varrho^2 \tau^{22}, & \sigma_z &= \tau^{33}, \\ \tau_{\varphi z} &= \varrho \tau^{23}, & \tau_{\varrho z} &= \tau^{13}, & \tau_{\varrho\varphi} &= \varrho \tau^{12}. \end{aligned} \right\} \quad (52.10)$$

Все величины  $\partial h_s / \partial q_i$  равны нулю, исключая случай  $s = 2$ ,  $i = 1$ , так что выражение (52.6) перейдет в следующее:

$$\Delta = \sum_s \frac{1}{h_s} \frac{\partial u_{q_s}}{\partial q_s} + \frac{u_\varrho}{h_1 h_2},$$

т. е. сведется к

$$\Delta = \frac{\partial u_\varrho}{\partial \varrho} + \frac{u_\varrho}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (52.11)$$

б) *Сферические координаты.* Если принять  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \vartheta$ ,  $q_3 = \varphi$ , где  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  — сферические координаты точки, тогда, поскольку

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2,$$

имеем

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin \vartheta;$$

отсюда следует, что все символы Кристоффеля равны нулю, исключая

$$\left. \begin{aligned} [2, 12] = [2, 21] = -[1, 22] = r, \\ [3, 13] = [3, 31] = -[1, 33] = r \sin^2 \vartheta, \\ [3, 23] = [3, 32] = -[2, 33] = r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \end{aligned} \right\} (52.12)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -r, \\ \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 13 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 31 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} \right\} = -r \sin^2 \vartheta, \\ \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 23 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 32 \end{matrix} \right\} = \operatorname{ctg} \vartheta, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} \right\} = -\sin \vartheta \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} (52.13)$$

Физические компоненты перемещения равны

$$u_r = u^1, \quad u_\vartheta = ru^2, \quad u_\varphi = r \sin \vartheta u^3, \quad (52.14)$$

тогда как физические компоненты напряжения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r = \tau^{11}, \quad \sigma_\vartheta = r^2 \tau^{22}, \quad \sigma_\varphi = r^2 \sin^2 \vartheta \tau^{33}, \\ \tau_{\vartheta\varphi} = r^2 \sin \vartheta \tau^{23}, \quad \tau_{r\varphi} = r \sin \vartheta \tau^{13}, \quad \sigma_{r\vartheta} = r \tau^{12}. \end{aligned} \right\} (52.15)$$

Величины  $\partial h_s / \partial q_i$  все равны нулю, исключая

$$\frac{\partial h_2}{\partial q_1} = 1, \quad \frac{\partial h_3}{\partial q_1} = \sin \vartheta, \quad \frac{\partial h_3}{\partial q_2} = r \cos \vartheta,$$

так что из уравнения (52.6) имеем

$$\Delta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2u_r}{r} + \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{r} u_\vartheta. \quad (52.16)$$

**53. Векторная форма уравнений равновесия.** Для того чтобы облегчить вывод общих решений уравнений равновесия, представим эти уравнения в векторной форме.

Если записать уравнения (9.19) и (14.29) в прямоугольной системе координат  $x_j$  ( $j=1, 2, 3$ ), то найдем, что уравнения равновесия упругого тела можно представить в форме

$$\partial_i \tau^{ij} + \rho P^j = 0, \quad (53.1)$$

где

$$\tau^{ij} = \lambda \Delta \delta^{ij} + \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i). \quad (53.2)$$

Подставляя соотношения (53.2) в уравнение (53.1), получим

$$\lambda \partial_j \Delta + \mu \partial_{ii} u_j + \mu \partial_{ij} u_i + \varrho P^j = 0.$$

Замечая, что

$$\partial_{ij} u_i = \partial_j (\partial_i u_i) = \partial_j \Delta,$$

видим, что это выражение эквивалентно следующему:

$$(\lambda + \mu) \partial_j \Delta + \mu \partial_{ii} u_j + \varrho P^j = 0,$$

которое можно записать в векторной форме

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad } \Delta + \varrho \mathbf{P} = 0. \quad (53.3)$$

В случае отсутствия массовых сил вектор  $\mathbf{P} = 0$ , и это уравнение можно представить в виде

$$(1 - 2\nu) \nabla^2 \mathbf{u} + \text{grad } \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (53.4)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

С другой стороны, можно использовать векторное тождество

$$\text{curl } \text{curl } \mathbf{u} = \text{grad } \text{div } \mathbf{u} - \nabla^2 \mathbf{u}; \quad (53.5)$$

подставляя в уравнение (53.3) вместо  $\nabla^2 \mathbf{u}$  выражение

$$\text{grad } \Delta - \text{curl } \text{curl } \mathbf{u},$$

придем к уравнению

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad } \text{div } \mathbf{u} - \mu \text{curl } \text{curl } \mathbf{u} + \varrho \mathbf{P} = 0. \quad (53.6)$$

**54. Решение уравнений равновесия в форме, данной Кельвином.** В этом параграфе будет выведена общая форма частного решения векторного уравнения упругого равновесия. С этой целью разложим вектор перемещения по методу Кельвина<sup>1)</sup>. Выразим перемещение через скалярный потенциал  $\varphi$  и векторный потенциал  $\mathbf{f}$  по формуле

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{curl } \mathbf{f}, \quad (54.1)$$

и допустим, что массовые силы таковы, что они могут быть выражены в виде

$$\mathbf{P} = \text{grad } \Phi + \text{curl } \mathbf{F}. \quad (54.2)$$

<sup>1)</sup> Thomson W., Camb. and Dublin Math. J., 1848, перепечатано в Math. and Phys. Papers 1, 97.



Поскольку

$$\text{grad div } \mathbf{u} = \text{grad } \nabla^2 \varphi$$

и

$$\text{curl curl } \mathbf{u} = -\text{curl } \nabla^2 \mathbf{f},$$

то из уравнения (53.6) следует, что уравнение равновесия можно записать в векторной форме

$$\text{grad} [(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi + \rho \Phi] + \text{curl} [\mu \nabla^2 \mathbf{f} + \rho \mathbf{F}] = 0.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что частные решения уравнений равновесия можно получить на основе частных решений скалярного уравнения

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi + \rho \Phi = 0 \quad (54.3)$$

и векторного уравнения

$$\mu \nabla^2 \mathbf{f} + \rho \mathbf{F} = 0. \quad (54.4)$$

Массовую силу  $\mathbf{P}$  можно представить теперь формулой вида (54.2), положив

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\tau',$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\tau,$$

где интегрирование распространяется на объем  $V$ , вне которого массовые силы равны нулю. Используя соотношение

$$\text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

имеем

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau', \quad (54.5)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau'. \quad (54.6)$$

Если скалярная величина  $\Phi$  и вектор  $\mathbf{F}$  определены с помощью этих соотношений, то уже легко получить частные решения уравнений (54.3) и (54.4). Из теории потенциала известно, что частные решения этих уравне-

ний имеют вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi(\lambda+2\mu)} \int \frac{\Phi(r') d\tau'}{|r-r'|}, \quad (54.7)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\mu} \int \frac{\mathbf{F}'(r') d\tau'}{|r-r'|}. \quad (54.8)$$

**55. Сосредоточенная нагрузка в бесконечном теле.** В качестве частного примера решения Кельвина рассмотрим случай сосредоточенной нагрузки  $Z$ , приложенной в начале координат к упругому бесконечному телу и действующей в направлении, параллельном оси  $z$ . В обозначениях последнего параграфа можно принять  $V$  за объем тела, ограниченный плоскостями  $x = \pm \frac{1}{2}\epsilon$ ,  $y = \pm \frac{1}{2}\epsilon$ ,  $z = \pm \frac{1}{2}\epsilon$  и положить

$$\mathbf{P} = \left(0, 0, \frac{Z}{\rho\epsilon^3}\right),$$

где  $\epsilon$  — бесконечно малая величина. Подставляя эти соотношения в выражения (54.5) и (54.6), получим для функций, соответствующих сосредоточенному усилию, выражения

$$\Phi = \frac{Z}{4\pi\rho} \left(\frac{z}{r^3}\right), \quad \mathbf{F} = \frac{Z}{4\pi\rho} \left(-\frac{y}{r^3}, \frac{x}{r^3}, 0\right). \quad (55.1)$$

Следовательно, необходимо найти частные решения уравнений

$$\nabla^2\Phi + \frac{Z}{4\pi(\lambda+2\mu)} \left(\frac{z}{r^3}\right) = 0 \quad (55.2)$$

и

$$\nabla^2\mathbf{f} + \frac{Z}{4\pi\mu} \left(-\frac{y}{r^3}, \frac{x}{r^3}, 0\right) = 0. \quad (55.3)$$

Так как

$$\nabla^2 \left(\frac{x}{r}\right) = \frac{2x}{r^3}$$

и т. д., то эти уравнения можно записать в форме

$$\nabla^2 \left\{ \Phi - \frac{zZ}{8\pi(\lambda+2\mu)r} \right\} = 0,$$

$$\nabla^2 \left\{ \mathbf{f} + \frac{Z}{8\pi\mu} \left(\frac{y}{r}, -\frac{x}{r}, 0\right) \right\} = 0,$$

откуда немедленно следует

$$\varphi = \frac{Z}{8\pi(\lambda+2\mu)} \left( \frac{z}{r} \right), \quad (55.4)$$

$$\mathbf{f} = \frac{Z}{8\pi\mu} \left( -\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, 0 \right). \quad (55.5)$$

Из выражения (55.4) имеем

$$\text{grad } \varphi = \frac{Z}{8\pi(\lambda+2\mu)} \left( -\frac{xz}{r^3}, \frac{-yz}{r^3}, \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \right)$$

и из (55.5) получим

$$\text{curl } \mathbf{f} = \frac{Z}{8\pi\mu} \left( \frac{xz}{r^3}, \frac{yz}{r^3}, \frac{1}{r} + \frac{z^2}{r^3} \right).$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (54.1), найдем, что вектор перемещения определяется выражением

$$\mathbf{u} = \frac{(\lambda+\mu)Z}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \left( \frac{xz}{r^3}, \frac{yz}{r^3}, \frac{z^2}{r^3} + \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{1}{r} \right). \quad (55.6)$$

В более общей формулировке получим, что перемещение, обусловленное силой  $\mathbf{P}$ , действующей в точке с радиус-вектором  $\mathbf{a}$ , определяется соотношением

$$\mathbf{u} = \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \left\{ (\mathbf{r}-\mathbf{a}) \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{a}) \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} + \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \right\}. \quad (55.7)$$

Применяя к этому соотношению принцип наложения, видим, что в том случае, когда силы  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  действуют в конечном объеме  $V$ , частные интегралы уравнений равновесия можно записать в форме

$$\mathbf{u} = \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \int_V \left\{ (\mathbf{r}-\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right\} d\tau'. \quad (55.8)$$

Это решение, эквивалентное решению Кельвина из последнего параграфа, было впервые выведено Буссинеском.

**56. Решение Буссинеска — Папковича.** В этом параграфе будет получено общее решение уравнений равновесия через скалярную и векторную функции; в последующих параграфах 57 и 58 будет проиллюстрировано применение этого решения при исследовании частных задач.

Пусть

$$\mathbf{u} = A \operatorname{grad} (\varphi + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\psi}) + B \boldsymbol{\psi}, \quad (56.1)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки поля,  $A$  и  $B$  — постоянные величины, которые подлежат определению. Используя векторное тождество (53.5) и тот факт, что оператор  $\operatorname{curl} \operatorname{grad}$  является нулевым оператором, найдем

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{u} = B (\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} - \nabla^2 \boldsymbol{\psi}). \quad (56.2)$$

С другой стороны, поскольку

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} = \nabla^2$$

и

$$\nabla^2 (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\psi}) = \mathbf{r} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{\psi} + 2 \operatorname{div} \boldsymbol{\psi},$$

найдем

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = A \nabla^2 \varphi + A \mathbf{r} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{\psi} + (2A + B) \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}. \quad (56.3)$$

Подставляя соотношения (56.2) и (56.3) в уравнение (53.6), найдем векторное соотношение

$$(\lambda + 2\mu) A \operatorname{grad} (\nabla^2 \varphi + \mathbf{r} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{\psi}) + [(\lambda + 2\mu)(B + 2A) - \mu B] \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} + B \nabla^2 \boldsymbol{\psi} + \frac{\rho}{\mu} \mathbf{P} = 0,$$

которое, очевидно, удовлетворяется, если выбрать  $A$ ,  $B$ ,  $\varphi$ ,  $\boldsymbol{\psi}$  так, что

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi + \mathbf{r} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{\psi} &= 0, \\ (\lambda + 2\mu)(B + 2A) - \mu B &= 0, \\ B \nabla^2 \boldsymbol{\psi} + \frac{\rho}{\mu} \mathbf{P} &= 0. \end{aligned}$$

Второе из этих уравнений удовлетворяется, если принять  $A = 1$  и

$$B = -\frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = -4(1 - \nu).$$

Подставляя эти значения в соотношения (56.1), получим, что

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} (\varphi + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\psi}) - 4(1 - \nu) \boldsymbol{\psi} \quad (56.4)$$

является решением векторного уравнения равновесия (53.6) в том случае, если  $\varphi$  и  $\boldsymbol{\psi}$  являются решениями

уравнений

$$4(1-\nu)\nabla^2\varphi + \frac{\rho}{\mu}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{P}) = 0, \quad 4(1-\nu)\nabla^2\psi = \frac{\rho}{\mu}P. \quad (56.5)$$

Общее решение (56.4) было получено Папковичем<sup>1)</sup> и позднее независимо Нейбером<sup>2)</sup>; элементы этого решения были известны Буссинеску<sup>3)</sup>.

Когда объемные силы отсутствуют, то уравнения (56.5) сводятся к уравнениям

$$\nabla^2\varphi = 0, \quad \nabla^2\psi = 0, \quad (56.6)$$

которые показывают, что выражение (56.4) представляет решение в том случае, если  $\varphi$  и каждый компонент функции  $\psi$  являются гармоническими функциями.

Случай отсутствия массовых сил является сравнительно частным случаем, который однако приводит к интересным частным результатам. Если вычислить величину дивергенции от обеих частей выражения (56.4), то найдем, что

$$\nabla^2(\operatorname{div} \mathbf{u}) = 0;$$

это показывает, что функция  $\Delta = \operatorname{div} \mathbf{u}$  является гармонической функцией. Аналогично, если выполнить операцию  $\operatorname{curl}$  над обеими частями выражения (56.4) и учесть, что оператор  $\operatorname{grad}$  является нулевым оператором, то увидим, что

$$\nabla^2(\operatorname{curl} \mathbf{u}) = 0;$$

это выражение показывает, что каждый из компонентов вращения

$$\omega = \frac{1}{2} \operatorname{curl} \mathbf{u}$$

является гармонической функцией.

Другим частным случаем будет случай, когда массовая сила постоянна и равна, например,  $\mathbf{F}$ . Легко показать, что

$$\nabla^2(r^2\mathbf{F}) = 6\mathbf{F}, \quad \nabla^2(\mathbf{R}\cdot\mathbf{F}) = 6(\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}),$$

<sup>1)</sup> Папкович П. Ф., Изв. Акад. наук СССР, физ. матем. серия 10, 1425 (1932).

<sup>2)</sup> Neuber H. Z., angew. Math. Mech. 14, 203 (1934).

<sup>3)</sup> Boussinesq M. J., Application des Potentials a l' Etude de l' Equilibre et du Movement des Solides Elastiques. Paris, Gauthier Villars, 1885.

где  $\mathbf{R}$  обозначает вектор с компонентами  $(x^3, y^3, z^3)$ ; таким образом, если массовая сила постоянна, то уравнения равновесия (56.5) имеют следующее решение:

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{q}{24(1-\nu)\mu} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{F}), \quad \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_1 + \frac{qr^2 \mathbf{F}'}{24(1-\nu)\mu}, \quad (56.7)$$

где  $\varphi_1$  и каждый из компонентов  $\boldsymbol{\psi}_1$  являются гармоническими функциями.

**57. Простые решения.** Некоторые очень простые решения уравнений теории упругости содержатся в решении Буссинеска — Палковича.

Если, например, положить в уравнении (56.1)  $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}$ , получим простое решение

$$\mathbf{u} = A \operatorname{grad} \varphi, \quad (57.1)$$

где  $A$  — постоянная и  $\varphi$  — гармоническая функция. Для такого поля перемещений

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = A \nabla^2 \varphi = 0, \quad (57.2)$$

так что расширение везде равно нулю. Компоненты напряжения задаются простыми уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, & \sigma_y &= 2\mu A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, & \sigma_z &= 2\mu A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \\ \tau_{yz} &= 2\mu A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}, & \tau_{zx} &= 2\mu A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}, & \tau_{xy} &= 2\mu A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (57.3)$$

В качестве примера положим

$$\varphi = \ln(z+r); \quad (57.4)$$

тогда

$$\mathbf{u} = A \left\{ \frac{x}{r(z+r)}, \frac{y}{r(z+r)}, \frac{1}{r} \right\} \quad (57.5)$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu A \left\{ \frac{y^2 + z^2}{r^3(z+r)} - \frac{x^2}{r^2(z+r)^2} \right\}, & \tau_{yz} &= -2\mu A \frac{y}{r^3}, \\ \sigma_y &= 2\mu A \left\{ \frac{z^2 + x^2}{r^3(z+r)} - \frac{y^2}{r^2(z+r)^2} \right\}, & \tau_{zx} &= -2\mu A \frac{x}{r^3}, \\ \sigma_z &= -2\mu A \frac{z}{r^3}, & \tau_{xy} &= -2\mu A \frac{xy(z+2r)}{r^3(z+r)^2}. \end{aligned}$$

Это решение известно под названием *простого решения Буссинеска второго рода*.

**58. Использование потенциальных функций в теории упругости.** Из решения Буссинеска — Папковича легко вывести более простое решение, включающее только одну гармоническую функцию, и при этом такую, что касательное напряжение равно нулю на плоскости, которую можно выбрать так, чтобы  $z = 0$ .

При исследовании будем применять прямоугольную систему координат  $x, y, z$ ; в этой системе компоненты  $u$  будем обозначать через  $u, v, w$ . Если положить в выражении (56.4)

$$\varphi = (1 - 2\nu)\chi, \quad \psi = \left(0, 0, \frac{\partial\chi}{\partial z}\right),$$

где  $\chi$  — гармоническая функция, то решение получим в виде

$$u = z \frac{\partial^2\chi}{\partial x \partial z} + (1 - 2\nu) \frac{\partial\chi}{\partial x}, \quad (58.1)$$

$$v = z \frac{\partial^2\chi}{\partial y \partial z} + (1 - 2\nu) \frac{\partial\chi}{\partial y}, \quad (58.2)$$

$$w = z \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} - 2(1 - \nu) \frac{\partial\chi}{\partial z}. \quad (58.3)$$

Эти соотношения приводят в свою очередь к следующим выражениям для компонентов тензора:

$$\sigma_x = 2\mu \left\{ z \frac{\partial^3\chi}{\partial x^2 \partial z} + (1 - 2\nu) \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} - 2\nu \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} \right\}, \quad (58.4)$$

$$\sigma_y = 2\mu \left\{ z \frac{\partial^3\chi}{\partial y^2 \partial z} + (1 - 2\nu) \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} - 2\nu \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} \right\}, \quad (58.5)$$

$$\sigma_z = 2\mu \left( z \frac{\partial^3\chi}{\partial z^3} - \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} \right), \quad (58.6)$$

$$\tau_{yz} = 2\mu z \frac{\partial^3\chi}{\partial y \partial z^2}, \quad (58.7)$$

$$\tau_{zx} = 2\mu z \frac{\partial^3\chi}{\partial x \partial z^2}, \quad (58.8)$$

$$\tau_{xy} = 2\mu \left\{ z \frac{\partial^3\chi}{\partial x \partial y \partial z} + (1 - 2\nu) \frac{\partial^2\chi}{\partial x \partial y} \right\}. \quad (58.9)$$

Из формул (58.7) и (58.8) следует, что если производные  $\partial^3\chi/\partial x \partial z^2$  и  $\partial^3\chi/\partial y \partial z^2$  обе остаются конечными при  $z \rightarrow 0$ , то

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ на линии } z = 0. \quad (58.10)$$

Аналогично, если производные  $\partial^2\chi/\partial z^2$  и  $\partial^3\chi/\partial z^3$  не стремятся к бесконечности при  $z \rightarrow 0$ , то нормальное напряжение и перемещение на границе  $z=0$  определяются следующими уравнениями:

$$\sigma_z = -2\mu \left( \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} \right)_{z=0} \quad (58.11)$$

и

$$w = -2(1-\nu) \left( \frac{\partial\chi}{\partial z} \right)_{z=0}. \quad (58.12)$$

В цилиндрической системе координат  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$  решение будет иметь вид

$$u_\rho = z \frac{\partial^2\chi}{\partial \rho \partial z} + (1-2\nu) \frac{\partial\chi}{\partial \rho}, \quad (58.13)$$

$$u_\varphi = \frac{z}{\rho} \frac{\partial^2\chi}{\partial \varphi \partial z} + (1-2\nu) \frac{1}{\rho} \frac{\partial\chi}{\partial \varphi}, \quad (58.14)$$

$$u_z = z \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} - 2(1-\nu) \frac{\partial\chi}{\partial z}. \quad (58.15)$$

Компоненты напряжений определяются в этом случае следующими соотношениями:

$$\sigma_\rho = 2\mu \left\{ z \frac{\partial^3\chi}{\partial \rho^2 \partial z} + \frac{\partial^2\chi}{\partial \rho^2} - 2\nu \left( \frac{\partial^2\chi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} \right) \right\}, \quad (58.16)$$

$$\sigma_\varphi = -2\mu \left\{ z \frac{\partial^3\chi}{\partial \rho^2 \partial z} + z \frac{\partial^3\chi}{\partial z^3} + \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} - (1-2\nu) \frac{\partial^2\chi}{\partial \rho^2} \right\}, \quad (58.17)$$

$$\sigma_z = 2\mu \left\{ z \frac{\partial^3\chi}{\partial z^3} - \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} \right\}, \quad (58.18)$$

$$\tau_{\rho\varphi} = \mu \left\{ \frac{2z}{\rho} \frac{\partial^3\chi}{\partial \rho \partial \varphi \partial z} - \frac{z}{\rho^2} \frac{\partial^2\chi}{\partial \varphi \partial z} - \frac{(1-2\nu)}{\rho^2} \frac{\partial\chi}{\partial \varphi} \right\}, \quad (58.19)$$

$$\tau_{\rho z} = 2\mu z \frac{\partial^3\chi}{\partial \rho \partial z^2}, \quad (58.20)$$

$$\tau_{\varphi z} = \frac{2\mu z}{\rho} \frac{\partial^3\chi}{\partial \varphi \partial z^2}, \quad (58.21)$$

где

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\chi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\chi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} = 0. \quad (58.22)$$

В задачах с осевой симметрией  $\partial\chi/\partial\varphi \equiv 0$ .



59. Осесимметричное давление на поверхность полубесконечного тела. Для того чтобы проиллюстрировать применение результатов, полученных в последнем параграфе, рассмотрим распределение напряжений в полубесконечном теле  $z \geq 0$ , подверженном воздействию радиально симметричного давления, нормального к его поверхности. Вследствие симметрии положим в уравнениях последнего параграфа

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0. \quad (59.1)$$

Если подставить в выражения (58.13) и (58.15)

$$\chi = -\frac{F}{4\pi\mu} \ln (r_1 + z + a), \quad (59.2)$$

где

$$r_1^2 = \varrho^2 + (z + a)^2, \quad (59.3)$$

то в результате найдем

$$u_\varrho = \frac{F}{4\pi\mu} \left\{ \frac{z\varrho}{r_1^3} - (1 - 2\nu) \left[ \frac{1}{\varrho} - \frac{z+a}{r_1\varrho} \right] \right\}, \quad (59.4)$$

$$u_z = \frac{F}{4\pi\mu} \left\{ \frac{z(z+a)}{r_1^3} + \frac{2(1-\nu)}{r_1} \right\}. \quad (59.5)$$

Аналогично, подставляя соотношение (59.2) в (58.18), найдем, что

$$\sigma_z = -\frac{F}{2\pi} \left[ \frac{z+a}{r_1^3} - z \left\{ \frac{1}{r_1^3} - \frac{3(z+a)^2}{r_1^5} \right\} \right]. \quad (59.6)$$

Отсюда тотчас же следует, что поле перемещений, задаваемое соотношениями (59.4) и (59.5), определяется нормальным давлением

$$p(\varrho) = -(\sigma_z)_{z=0} = \frac{Fa}{3} \cdot \frac{1}{2\pi(a^2 + \varrho^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (59.7)$$

Это поверхностное давление обладает следующим свойством:

$$2\pi \int_0^\infty \varrho p(\varrho) d\varrho = F \int_0^\infty \frac{\varrho a d\varrho}{(a^2 + \varrho^2)^{\frac{3}{2}}} = F, \quad (59.8)$$

которое указывает, что величина суммарного усилия,

приложенного нормально к поверхности, равна  $F$ . Изменение  $p(\rho)$  в зависимости от  $\rho$  показано на рис. 16. Из этого рисунка и из условия (59.8) очевидно, что если в этом

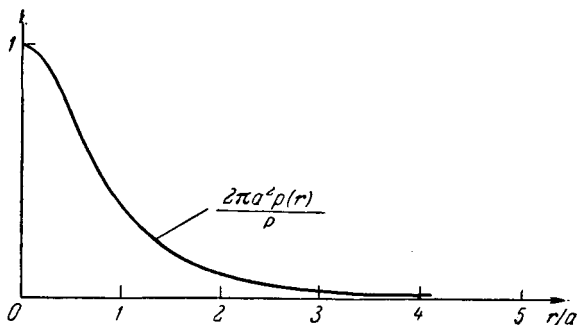


Рис. 16.

решении положить  $a \rightarrow 0$ , то получим решение, соответствующее сосредоточенной нагрузке величиной  $F$ , действующей по нормали к поверхности в начале координат. В этом случае компоненты вектора перемещения равны

$$u_0 = \frac{F}{4\pi\mu} \left\{ \frac{zQ}{r^3} - (1-2\nu) \left[ \frac{1}{Q} - \frac{z}{rQ} \right] \right\}, \quad (59.9)$$

$$u_z = \frac{F}{4\pi\mu} \left\{ \frac{z^2}{r^3} + \frac{2(1-\nu)}{r} \right\}, \quad (59.10)$$

где

$$r^2 = \rho^2 + z^2.$$

60. Свойство замкнутости решения Буссинеска — Папковича. Решение Буссинеска — Папковича (56.4) включает четыре скалярных функции, а именно  $\phi$  и три скалярных компонента вектора  $\psi$  в прямоугольной системе координат. Выше мы видели, что некоторые задачи можно решить, не используя этого количества функций. В связи с этим встает вопрос: необходимо ли использовать все четыре функции, для того чтобы получить замкнутое решение? Папкович в результате ошибочных рассуждений утверждал, что без ущерба для общности функцию  $\phi$  можно положить равной нулю. Позже Слободянский<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Слободянский М. Г., ПММ 18, 55 (1954).

показал, что  $\varphi$  можно принять равной нулю без ущерба для общности только в том случае, если область, занятая упругим материалом, ограничена и односвязна или является внешней областью по отношению к замкнутой поверхности. Более того, поскольку доказательство теряет силу, когда  $4\nu$  есть целое число, Слободянский делает заключение (без доказательства), что в этом случае теорема несправедлива. Вторая теорема Слободянского утверждает, что любой из компонентов  $\varphi$  можно приравнять нулю. Как было указано Сокольниковым, доказательство первой из этих теорем справедливо только в том случае, если рассматриваемая область является внутренней или внешней областью сферы, а вторая теорема справедлива только для внутренней области сферы.

Юбанкс и Штернберг<sup>1)</sup> исследовали недавно вопрос о точных условиях, при которых была установлена замкнутость решения Буссинеска — Папковича, выраженного через четыре гармонические функции. Они доказали, что без ущерба для общности любую из этих функций можно положить равной нулю в том случае, если упругое тело занимает незамкнутую область пространства, которая является «звездообразной» по отношению к одной из его точек<sup>2)</sup>, и если система координат выбрана соответствующим образом и величина  $4\nu$  не является целым числом. В дополнение Юбанкс и Штернберг показали с помощью контр-примера, что предположение Слободянского справедливо и что решение Буссинеска — Папковича при  $\varphi = 0$  не является *замкнутым*, если  $4\nu$  является целым числом.

## II. Метод Бетти

Основная задача математической теории упругости состоит в отыскании решения уравнений равновесия упругого тела заданной формы, когда заданы либо перемещения поверхности, либо поверхностные нагрузки. Известны

<sup>1)</sup> Eubanks R. A., Sternberg E. J., *Rat. Mech. and Analysis* 5, 735 (1956).

<sup>2)</sup> Область  $D$  называется «звездообразной» по отношению к одной из своих точек  $P$ , если любой прямолинейный отрезок, соединяющий точку  $P$  с другой точкой этой области, целиком лежит в области  $D$ . Область является звездообразной по отношению ко всем ее точкам, если ее граница является выпуклой кривой.

соответствующие задачи в теории электростатики (или классической гидродинамики) и известно, что имеется два основных метода решения: для простых границ основной метод состоит в использовании криволинейных координат, а для границ более общего типа была разработана теория функций Грина. Оба эти метода используются в теории упругости, однако окончательные формулы гораздо сложнее выведенных выше формул. Использование криволинейных координат будет показано ниже в главе IV. В настоящей главе будет описан метод Бетти, являющийся аналогом методов функций Грина в теории потенциала.

**61. Метод Бетти.** Метод Бетти<sup>1)</sup> основан на факте, установленном выше в параграфе 56, заключающемся в том, что расширение  $\Delta$  является гармонической функцией. Отсюда следует, что

$$\nabla^2(r\Delta) = 2 \operatorname{grad} \Delta,$$

так что уравнение движения (53.4) можно записать в форме

$$(1 - 2\nu) \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla^2 (r\Delta) = 0,$$

которая эквивалентна следующей:

$$\nabla^2 \left( \mathbf{u} + \frac{1}{2(1-2\nu)} r\Delta \right) = 0. \quad (61.1)$$

Таким образом, когда повсюду в теле  $\Delta$  известно, и значения вектора  $\mathbf{u}$  на поверхности заданы, то определение поля перемещений сводится к задаче теории потенциала.

Основная задача состоит поэтому в определении  $\Delta$ , когда на поверхности тела известны либо перемещения, либо приложенные нагрузки. Эта задача будет подробно рассмотрена в следующем параграфе. Подобно тому как в теории потенциала общая теория задач Дирихле и Неймана основывается на теореме Грина, в теории упругости основным инструментом является теорема взаимности Бетти<sup>2)</sup>,

<sup>1)</sup> Betti E., Nuovo Cim., Ser. II, 6—10 (1872 и след.).

<sup>2)</sup> Betti E., Nuovo Cim., Ser. II, 7, 8 (1872); Rayleigh Proc. Lond. Math. Soc. 4 (1873).

которая утверждает, что если в области, ограниченной поверхностью  $S$ , нет массовых сил, то

$$\int_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}') dS = \int_S (\mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}) dS, \quad (61.2)$$

где  $\mathbf{u}$  — перемещение, удовлетворяющее уравнениям равновесия, и  $\mathbf{F}$  — соответствующая поверхностная нагрузка,  $\mathbf{u}'$  — другое перемещение и  $\mathbf{F}'$  — соответствующая ему поверхностная нагрузка.

**62. Формула для определения расширения.** Задача, которая рассматривается здесь, заключается в определении величины расширения в точке внутри тела, ограниченного поверхностью  $S$ , когда на поверхности заданы либо компоненты перемещения, либо поверхностные нагрузки. Для удобства можно рассматривать точку в начале координат. Окружим эту точку сферой  $\Sigma$  бесконечно малого радиуса и перейдем к пределу, устремляя этот радиус к нулю. Формула (61.2) примет при этом вид

$$\int_{\Sigma} (X_i u'_i - X'_i u_i) dS = \int_{\Sigma} (X'_i u_i - X_i u'_i) dS, \quad (62.1)$$

где  $\mathbf{F} = (X_1, X_2, X_3)$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  и т. д.

Если принять

$$u'_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{r} \right), \quad (62.2)$$

то легко показать, что

$$X'_i = 2\mu n_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{1}{r} \right), \quad (62.3)$$

где  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  — нормаль к поверхности. На сфере  $\Sigma$

$$n_j = -\frac{x_j}{r}, \quad (62.4)$$

так что

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} X_i u'_i dS &= - \int_{\Sigma} \frac{x_j}{r} (\lambda \Delta \delta_{ij} + \mu \partial_j u_i + \mu \partial_i u_j) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{r} \right) dS = \\ &= \int_{\Sigma} \frac{x_i x_j}{r^4} (\lambda \Delta \delta_{ij} + \mu \partial_j u_i + \mu \partial_i u_j) dS. \end{aligned}$$

Каждый интеграл вида  $\int_{\Sigma} x_1 x_2 dS$  равен нулю, а каждый интеграл вида  $\int_{\Sigma} x_1^2 dS$  равен  $\frac{4}{3} \pi r^4$  и таким образом в пределе, когда радиус  $\Sigma$  стремится к нулю, получим

$$\int_{\Sigma} X_i u'_i dS = 4\pi \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \Delta_0,$$

где  $\Delta_0$  обозначает величину  $\Delta$  в начале координат.

Аналогично из формулы (62.3) получим

$$\int_{\Sigma} u_i X'_i dS = -4\mu \int_{\Sigma} \frac{x_i u_i}{r^4} dS.$$

Разлагая  $u_i$  согласно теореме Маклорена

$$u_i = (u_i)_0 + x_j (\partial_j u_i)_0 + \dots,$$

имеем

$$\int_{\Sigma} u_i X'_i dS = -4\mu \int_{\Sigma} \frac{x_i (u_i)_0 + x_i x_j (\partial_j u_i)_0}{r^4} dS,$$

и в пределе, когда радиус  $\Sigma$  стремится к нулю, найдем, что интеграл в правой части равен

$$-\frac{16}{3} \pi \mu (\partial_i u_i)_0 = -\frac{16}{3} \pi \mu \Delta_0.$$

Подставляя эту величину в выражение (62.1), придем к формуле

$$\Delta_0 = \frac{1}{4\pi (\lambda + 2\mu)} \int_S (X'_i u_i - X_i u'_i) dS. \quad (62.5)$$

Для того чтобы вычислить интеграл в правой части выражения (62.5), необходимо знать величины перемещений и приложенных нагрузок на поверхности. Необходимо продолжить исследование для того, чтобы полученную формулу преобразовать таким образом, чтобы в нее входили значения на поверхности одной или другой из этих величин. Рассмотрим эти два случая отдельно.

а) *Заданы перемещения на поверхности.* Допустим, что можно найти вектор перемещения  $u''$ , который удов-

летворяет векторному уравнению равновесия во всех точках внутри  $S$  и который идентичен вектору  $\mathbf{u}'$  во всех точках на поверхности  $S$ . Обозначим соответствующие поверхностные нагрузки через  $X_i^*$  ( $i = 1, 2, 3$ ). По теореме взаимности (61.2) имеем

$$\int X_i^* u_i dS = \int X_i u_i dS = \int X_i u_i' dS. \quad (62.6)$$

Объединяя выражения (62.5) и (62.6), получим решение

$$\Delta_0 = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \int_S (X_i' - X_i^*) u_i dS. \quad (62.7)$$

Согласно определению величин  $X_i'$  и  $X_i^*$  разности  $X_i' - X_i^*$  являются компонентами поверхностной нагрузки, необходимой для фиксирования поверхности при наличии «центра сжатия» в начале координат. Таким образом, для того чтобы найти расширение в произвольной точке, необходимо найти перемещение, которое: а) удовлетворяет обычным условиям непрерывности и уравнениям равновесия повсюду, исключая рассматриваемую точку, б) в окрестности рассматриваемой точки стремится к бесконечности, так как если бы центр сжатия был в этой точке, в) равно нулю на поверхности. Такое перемещение является аналогом функции Грина в теории потенциала.

β) *Заданы поверхностные нагрузки.* Компоненты  $X_i'$  образуют систему поверхностных нагрузок, которые удовлетворяют условиям равновесия жесткого тела. Допустим, что  $u_i'$  представляют собой компоненты перемещения тела, обусловленные приложением этих поверхностных нагрузок. К перемещениям  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}''$ , которые не имеют особенностей внутри поверхности  $S$ , можно применить теорему взаимности и получить следующее соотношение:

$$\int X_i' u_i dS = \int X_i u_i' dS. \quad (62.8)$$

Объединяя выражения (62.8) и (62.5), получим решение

$$\Delta_0 = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \int_S X_i (u_i' - u_i) dS. \quad (62.9)$$

Поэтому, для того чтобы найти расширение в каждой точке, необходимо найти поле перемещений в случае, когда поверхность тела свободна от напряжений, а в некоторой точке тела имеется центр расширения. Это перемещение является аналогом функции Грина.

**63. Решение задачи о плоскости, предложенное Черрути.** Для того чтобы проиллюстрировать применение метода Бетти, рассмотрим случай полубесконечного тела  $z > 0$ , ограниченного плоскостью  $z = 0$ , и примем, что перемещения на поверхности известны<sup>1)</sup>. Пусть  $x', y', z'$  — произвольная точка тела,  $x', y', -z'$  — ее зеркальное отображение относительно границы и пусть

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \\ R^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2. \end{aligned} \right\} \quad (63.1)$$

Таким образом,  $r$  и  $R$  представляют собой соответственно расстояния произвольной точки  $x, y, z$  от некоторой точки  $x', y', z'$  и ее отображения. Для того чтобы вычислить расширение для случая заданных перемещений на поверхности, необходимо знать перемещение  $u''$ , которое на плоскости  $z = 0$  переходит в перемещение

$$u' = \text{grad}(r^{-1}) \equiv (\partial R^{-1}/\partial x, \quad \partial R^{-1}/\partial y, \quad -\partial R^{-1}/\partial z).$$

Легко показать, что

$$u'' = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2(\lambda + \mu)z}{\lambda + 3\mu} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2(\lambda + \mu)z}{(\lambda + 3\mu)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}, \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial z} + \frac{2(\lambda + \mu)z}{(\lambda + 3\mu)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{1}{R}. \quad (63.2)$$

Из этого выражения и из условия для  $u'$  на плоскости  $z = 0$  тотчас же следует

$$X' = 2\mu \text{grad} \left( \frac{\partial r^{-1}}{\partial z} \right), \quad X'' = -\frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu} \text{grad} \left( \frac{\partial r^{-1}}{\partial z} \right),$$

так что

$$X' - X'' = \frac{4\mu(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu} \text{grad} \left( \frac{\partial r^{-1}}{\partial z} \right). \quad (63.3)$$

<sup>1)</sup> Cerruti V., Mem. fis. mat., Acad. Lincei (Roma) 1882.



Подставляя это выражение в формулу (62.7), найдем

$$\Delta = -\frac{\mu}{\pi(\lambda+3\mu)} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z'}, \quad (63.4)$$

где

$$\varphi = \operatorname{div}' L = \frac{\partial L_1}{\partial x'} + \frac{\partial L_2}{\partial y'} + \frac{\partial L_3}{\partial z'}$$

и

$$L = \int \mathbf{u} r^{-1} dx dy.$$

Функции  $L_i$  являются гармоническими функциями по обе стороны плоскости  $z' = 0$ , а на самой плоскости имеет место равенство

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2\pi} \lim_{z' \rightarrow +0} \frac{\partial L}{\partial z'}. \quad (63.5)$$

Поэтому необходимо решить уравнение (61.1), которое можно представить в форме

$$\nabla'^2 \left( \mathbf{u} - \frac{\lambda + \mu}{2\pi(\lambda + 3\mu)} z' \operatorname{grad}' \varphi \right) = 0. \quad (63.6)$$

Три функции  $\partial L / \partial z'$  являются гармоническими в рассматриваемой области, и величина  $\mathbf{u}$  при  $z' \rightarrow +0$  определяется выражением (63.5); таким образом искомое решение уравнения (63.6) имеет вид

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial L}{\partial z'} + \frac{(\lambda + \mu) z'}{2\pi(\lambda + 3\mu)} \operatorname{grad}' \varphi. \quad (63.7)$$

Соответствующее решение для случая заданных поверхностных нагрузок можно вывести аналогичным образом. Подробные выкладки можно найти на стр. 239—241 книги Лява<sup>1)</sup> «A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity» (Cambridge, 1934).

### III. Метод интегральных преобразований

В этой главе будет рассмотрено применение теории интегральных преобразований к решению частных трехмерных задач.

<sup>1)</sup> См. Ляв А., Математическая теория упругости, М.—Л., ОНТИ, 1935 г. (Прим. ред.)

64. Напряжения в бесконечной среде, обусловленные массовыми силами. Используем сначала теорию многократных преобразований Фурье для отыскания решения уравнений равновесия бесконечной упругой среды, внутри которой действуют заданные по величине массовые силы. Если выбрать прямоугольную систему координат, то тогда уравнения, которые необходимо решить, примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (64.1)$$

где компоненты вектора перемещения связаны с компонентами напряжения следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\ &+ 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (64.2)$$

$$(\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}) = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (64.3)$$

Для того чтобы решить эти уравнения, вводим преобразование Фурье  $\bar{f}$  каждой функции  $f$ , входящей в уравнения и определяемой выражением

$$\bar{f} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f e^{i(\xi x + \eta y + \zeta z)} dx dy dz. \quad (64.4)$$

Если обе части каждого из уравнений системы (64.1), (64.2), (64.3) умножить на  $e^{i(\xi x + \eta y + \zeta z)}$  и проинтегрировать по всему пространству, то в результате получим

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x} e^{i(\xi x + \eta y + \zeta z)} dx dy dz = -i\xi \bar{f} \text{ и т. д.}$$

Отсюда видно, что рассматриваемые дифференциальные уравнения в частных производных эквивалентны системе

алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi}\bar{\sigma}_x + \eta\bar{\tau}_{xy} + \zeta\bar{\tau}_{xz} &= -i\rho\bar{X}, \\ \bar{\xi}\bar{\tau}_{xy} + \eta\bar{\sigma}_y + \zeta\bar{\tau}_{yz} &= -i\rho\bar{Y}, \\ \bar{\xi}\bar{\tau}_{xz} + \eta\bar{\tau}_{yz} + \zeta\bar{\sigma}_z &= -i\rho\bar{Z}, \end{aligned} \right\} \quad (64.5)$$

$$i(\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z) = \lambda(\bar{\xi}\bar{u} + \eta\bar{v} + \zeta\bar{w}) + 2\mu(\bar{\xi}\bar{u}, \eta\bar{v}, \zeta\bar{w}), \quad (64.6)$$

$$i(\bar{\tau}_{yz}, \bar{\tau}_{zx}, \bar{\tau}_{xy}) = \mu(\zeta\bar{v} + \eta\bar{w}, \bar{\xi}\bar{w} + \zeta\bar{u}, \eta\bar{u} + \xi\bar{v}). \quad (64.7)$$

Если подставить выражения (64.6), (64.7) в уравнения (64.5), то получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} [\xi^2 + (1-2\nu)\xi^2]\bar{u} + \xi\eta\bar{v} + \xi\zeta\bar{w} - (1-2\nu)(\rho\bar{X}/\mu) &= 0, \\ \xi\eta\bar{u} + [\eta^2 + (1-2\nu)\xi^2]\bar{v} + \eta\zeta\bar{w} - (1-2\nu)(\rho\bar{Y}/\mu) &= 0, \\ \xi\zeta\bar{u} + \eta\zeta\bar{v} + [\zeta^2 + (1-2\nu)\xi^2]\bar{w} - (1-2\nu)(\rho\bar{Z}/\mu) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (64.8)$$

где

$$\xi^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2. \quad (64.9)$$

Решая эти уравнения, придем к следующим выражениям для преобразований Фурье компонентов вектора перемещения:

$$\bar{u} = \frac{\rho}{2(1-\nu)\mu\xi^4} [2(1-\nu)\xi^2\bar{X} + \xi(\xi\bar{X} + \eta\bar{Y} + \zeta\bar{Z})], \quad (64.10)$$

$$\bar{v} = \frac{\rho}{2(1-\nu)\mu\xi^4} [2(1-\nu)\xi^2\bar{Y} - \eta(\xi\bar{X} + \eta\bar{Y} + \zeta\bar{Z})], \quad (64.11)$$

$$\bar{w} = \frac{\rho}{2(1-\nu)\mu\xi^4} [2(1-\nu)\xi^2\bar{Z} - \zeta(\xi\bar{X} + \eta\bar{Y} + \zeta\bar{Z})]. \quad (64.12)$$

**65. Решение Терецава для полубесконечной среды.** Если в выражениях (58.13) и (58.15) положить

$$\chi = J_0(\xi\rho) e^{-\xi z}, \quad (65.1)$$

то в результате придем к соотношениям

$$u_\rho = -\xi [(1-2\nu) - \xi z] J_1(\xi\rho) e^{-\xi z}, \quad (65.2)$$

$$u_z = \xi [2(1-\nu) + \xi z] J_0(\xi\rho) e^{-\xi z}, \quad (65.3)$$

которые дают решение уравнений равновесия в случае осевой симметрии. Из выражения (58.18) вытекает, что при  $z = 0$

$$\sigma_z = -2\mu\xi^2 J_0(\xi\varrho). \quad (65.4)$$

Следует напомнить, что для решения этого типа касательное напряжение  $\tau_{\varrho z} = 0$  при  $z = 0$ . Из этих уравнений тотчас же следует, что решение уравнений равновесия, удовлетворяющее граничным условиям

$$\sigma_z = -p(\varrho), \quad \tau_{z\varrho} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (65.5)$$

задается двумя соотношениями вида

$$u_\varrho = -\frac{1}{2\mu} \int_0^\infty (1 - 2\nu - \xi z) f(\xi) e^{-\xi z} J_1(\xi\varrho) d\xi, \quad (65.6)$$

$$u_z = \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty [2(1 - \nu) + \xi z] f(\xi) e^{-\xi z} J_0(\xi\varrho) d\xi, \quad (65.7)$$

если  $f(\xi)$  выбрано таким образом, что

$$p(\varrho) = \int_0^\infty \xi f(\xi) J_0(\varrho\xi) d\xi. \quad (65.8)$$

Таким образом, задачу об определении распределения напряжений и перемещений в полубесконечном теле можно решить в том случае, если интегральное уравнение (65.8) можно разрешить относительно  $f(\xi)$ . Решение этого уравнения хорошо известно<sup>1)</sup>, оно имеет вид

$$f(\xi) = \int_0^\infty \varrho p(\varrho) J_0(\varrho\xi) d\varrho. \quad (65.9)$$

<sup>1)</sup> Это теорема обратимости Ганкеля, см. Sneddon I. N., Fourier Transforms, стр. 48, New York, 1951; русский перевод: Снеддон И. Н., Преобразования Фурье, стр. 62, ИЛ, 1957.

Если из уравнений (58.16) — (58.20) вычислить компоненты напряжения, то в результате найдем

$$\sigma_z = - \int_0^{\infty} \xi (1 + \xi z) f(\xi) J_0(\xi \varrho) e^{-\xi z} d\xi, \quad (65.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varrho = & - \int_0^{\infty} \xi (1 - \xi z) f(\xi) J_0(\xi \varrho) e^{-\xi z} d\xi - \\ & - \frac{1}{\varrho} \int_0^{\infty} f(\xi) [\xi z - (1 - 2\nu)] J_1(\xi \varrho) e^{-\xi z} \frac{d\xi}{\xi}, \quad (65.11) \end{aligned}$$

$$\sigma_\varrho + \sigma_\varphi + \sigma_z = -2(1 + \nu) \int_0^{\infty} \xi f(\xi) J_0(\xi \varrho) e^{-\xi z} d\xi, \quad (65.12)$$

$$\tau_{\varrho z} = -z \int_0^{\infty} \xi^2 f(\xi) J_1(\xi \varrho) e^{-\xi z} d\xi. \quad (65.13)$$

Решение, определяемое выражениями (65.10) — (65.13), эквивалентно решению, полученному Терецава<sup>1)</sup>.

В качестве частного примера рассмотрим случай сосредоточенной нагрузки величиной  $F$ , действующей нормально к поверхности. В этом случае можно принять

$$p(\varrho) = \frac{F \delta(\varrho)}{2\pi \varrho},$$

где  $\delta(\varrho)$  — функция дельта<sup>2)</sup> Дирака; таким образом,

$$f(\xi) = \frac{F}{2\pi}.$$

Подставляя это значение в формулы (65.6) и (65.7), найдем, что соответствующие выражения для компонен-

<sup>1)</sup> Terezawa K. J., Coll. Sci. Imp. Univ. Tokyo 37, Art. 7 (1916).

<sup>2)</sup> Sneddon I. N., Functional Analysis, том II, Handbuch der Physik, Bd II, Springer J., Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955.

тов вектора перемещения имеют вид

$$u_{\rho} = \frac{F}{4\pi\mu} \int_0^{\infty} [1 - (1 - 2\nu) \xi z] J_1(\xi\rho) e^{-\xi z} d\xi,$$

$$u_z = \frac{F}{4\pi\mu} \int_0^{\infty} [2(1 - \nu) + \xi z] J_0(\xi\rho) e^{-\xi z} d\xi.$$

Эти интегралы вычисляются в элементарных функциях<sup>1)</sup>; в результате вычислений имеем

$$u_{\rho} = \frac{F}{4\pi\mu} \left\{ \frac{\rho z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - (1 - 2\nu) \left[ \frac{1}{\rho} - \frac{z}{\rho(\rho^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \right\},$$

$$u_z = \frac{F}{4\pi\mu} \left\{ \frac{2(1 - \nu)}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{z^2}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right\},$$

что согласуется с полученными выше выражениями (59.9) и (59.10).

Если вместо выражения (65.1) взять выражение

$$\chi = J_0(\xi\rho) (A \operatorname{ch} \xi z + B \operatorname{sh} \xi z),$$

то с помощью аналогичного процесса<sup>2)</sup> можно определить распределение напряжений в толстой упругой плите, когда давления на поверхностях плиты распределены осесимметрично.

**66. Задачи со смешанными граничными условиями.** Метод преобразований Ганкеля, использованный в предыдущем параграфе, можно обобщить на решения задач со смешанными граничными условиями.

а) *Задачи о вдавливании штампа.* Рассмотрим осесимметричную задачу для идеально жесткого тела вращения заданной формы, ось симметрии которого совпадает с осью  $z$ , вдавливаемого нормально к границе  $z=0$  полубесконечной упругой среды  $z \geq 0$ . Поверхность тела

<sup>1)</sup> Sneddon I. N., The Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry, p. 112, Edinburg, Oliver a. Boyd. 1956.

<sup>2)</sup> Sneddon I. N., Proc. Cambridge Phil. Soc. 42, 260 (1946); см. также Снеддон, Преобразования Фурье, ИЛ, 1957.

образует абсолютно жесткий штамп между началом и определенным круговым сечением радиуса  $a$ . Допустим, что касательные напряжения равны нулю в каждой точке на границе, нормальный компонент перемещения задан в области  $\rho \leq a$ , и нормальное напряжение равно нулю для  $\rho > a$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} u_z &= g(\rho) \text{ для } \rho \leq a, \\ \sigma_z &= 0 \text{ для } \rho > a, \\ \tau_{z\rho} &= 0 \text{ для всех значений } \rho \end{aligned} \right\} \text{ на } z = 0. \quad (66.1)$$

Решение, представленное выражениями (65.6), (65.7) и (65.10) — (65.13), будет поэтому решением задачи в том случае, если можно найти функцию  $f(\xi)$  такую, что

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty f(\xi) J_0(\xi\rho) d\xi &= G(\rho) \text{ для } \rho \leq a, \\ \int_0^\infty \xi f(\xi) J_0(\xi\rho) d\xi &= 0 \text{ для } \rho > a, \end{aligned} \right\} \quad (66.2)$$

где

$$G(\rho) = \frac{\mu}{1-\nu} g(\rho).$$

Таким образом, задача сведена к решению двух интегральных уравнений (66.2). Решение этих уравнений и обсуждение распределения напряжений, даваемое этими решениями в определенных частных случаях, подробно изложено на стр. 455—468 книги Снеддона<sup>1)</sup> «Fourier Transforms» (McGraw-Hill, New York, 1951), к которой и отсылается читатель.

β) *Круговая трещина*. Теория преобразований Ганкеля может быть использована также для определения распределения напряжений в окрестности круговой трещины. Допустим, что трещина образовалась внутри бесконечной среды и что она имеет форму круга радиуса  $\rho^2 = x^2 + y^2 \leq c^2$ , расположенного в плоскости  $z = 0$ . Если допустить, что трещина деформируется в резуль-

<sup>1)</sup> См. Снеддон, Преобразования Фурье, стр. 504—523, М., ИЛ, 1957 г.

тате приложения к телу осесимметричного давления, то, когда  $z=0$ ,

$$\sigma_z = -p(\varrho), \quad \varrho < c.$$

Здесь, так же как и в случае двумерной задачи (§ 47), можно допустить, что распределение напряжений в окрестности трещины такое же, какое имеет место в полубесконечной упругой среде  $z \geq 0$ , когда на свободной поверхности  $z=0$  имеют место следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\varrho z} &= 0 && \text{для всех значений } \varrho, \\ \sigma_z &= -p(\varrho) && \text{для } \varrho < c, \\ u_z &= 0 && \text{для } \varrho > c. \end{aligned} \right\} \quad (66.3)$$

Соотношения (65.6), (65.7) и (65.10) — (65.13) будут поэтому являться решением задачи в том случае, когда можно найти функцию  $f(\xi)$ , которая удовлетворяет двум интегральным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \xi f(\xi) J_0(\xi \varrho) d\xi &= p(\varrho) && \text{для } \varrho \leq c, \\ \int_0^{\infty} f(\xi) J_0(\xi \varrho) d\xi &= 0 && \text{для } \varrho > c. \end{aligned} \right\} \quad (66.4)$$

Эту пару интегральных уравнений можно решить и определить распределение суммарных напряжений. Подробное изложение читатель может найти на стр. 486—500 книги Снеддона<sup>1)</sup> «Fourier Transforms» (McGraw-Hill, New York, 1951).

#### IV. Применение криволинейных координат

В этой главе будут рассмотрены решения уравнений упругого равновесия изотропного упругого тела в криволинейной системе координат. Мы не ставим себе целью развитие общей теории, а разберем две или три типичные задачи, посредством которых проиллюстрируем метод решения.

<sup>1)</sup> См. Снеддон, Преобразования Фурье, стр. 542—557, М., ИЛ, 1957.



**67. Задача о сфере.** Для того чтобы показать, как использовать сферические координаты, рассмотрим «задачу о сфере», т. е. задачу об определении распределения напряжений внутри сплошной сферы. Общее решение этой задачи, выраженное через сферические функции, которые рассматривались как функции прямоугольных координат, было получено Кельвином<sup>1)</sup> в его рассуждениях о жесткости Земли. Для того чтобы упростить решение, допустим, что распределение приложенного давления является осесимметричным, так что мы примем, что нормальное давление на поверхности сферы  $r = a$  равно  $\mu f(\vartheta)$  и что поверхность свободна от касательных напряжений.

В сферической системе координат  $r, \vartheta, \varphi$  физические компоненты перемещения можно обозначить в виде

$$\mathbf{u} = (u_r, u_\vartheta, u_\varphi),$$

а физические компоненты напряжения через

$$\begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{r\vartheta} & \tau_{r\varphi} \\ \tau_{r\vartheta} & \sigma_\vartheta & \tau_{\vartheta\varphi} \\ \tau_{r\varphi} & \tau_{\vartheta\varphi} & \sigma_\varphi \end{pmatrix}.$$

Таким образом, граничные условия имеют вид

$$\sigma_r = -\mu f(\vartheta), \quad \tau_{r\vartheta} = 0 \quad \text{на } r = a.$$

Если допустить, что вектор перемещения симметричен относительно оси  $z$ , то

$$u_\varphi = 0, \quad \tau_{\vartheta\varphi} = \tau_{r\varphi} = 0,$$

и легко показать, что (ср. выражение (52.16))

$$\Delta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\text{ctg } \vartheta}{r} u_\vartheta \quad (67.1)$$

и

$$\text{curl } \mathbf{u} = (0, 0, \omega), \quad (67.2)$$

где

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\vartheta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta}. \quad (67.3)$$

<sup>1)</sup> Thomson W., Phil Trans. Roy. Soc. London 153 (1863).

Кроме того,

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{u} = \left\{ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\omega \sin \vartheta), -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\omega r), 0 \right\}. \quad (67.4)$$

Для компонентов перемещения получим следующие выражения:

$$u_r = -\frac{af_0}{3\beta^2-4} \left(\frac{r}{a}\right) - \frac{af_1 \cos \vartheta}{2(3\beta^2-4)} \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{1}{2} a \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left\{ \frac{\beta^2 n^2 (n+2) - n(n+1)^2}{n^2-1} - [(\beta^2-1)n-2] \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right\} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} P_n(\cos \vartheta), \quad (67.5)$$

$$u_\vartheta = -\frac{af_1 \sin \vartheta}{2(3\beta^2-4)} \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{1}{2} a \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left\{ \frac{(n+1)^2 - \beta^2 n(n+2)}{n^2-1} + \left[ \frac{\beta^2(n+3)}{n+1} - 1 \right] \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right\} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \sin \vartheta P_n(\cos \vartheta), \quad (67.6)$$

где  $\beta^2 = (\lambda + 2\mu)/\mu$ ,  $f_0, f_1, c_2, \dots, c_n, \dots$  — постоянные. Из выражений (67.1) и (67.3) найдем

$$\Delta = -\frac{3f_0}{3\beta^2-4} - \frac{3f_1 \cos \vartheta}{3\beta^2-4} \left(\frac{r}{a}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} (2n+3) c_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos \vartheta) \quad (67.7)$$

и

$$\omega = -\frac{2f_1 \sin \vartheta}{3\beta^2-4} \left(\frac{r}{a}\right) + \beta^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+3}{n+1} c_n \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin \vartheta P'_n(\cos \vartheta). \quad (67.8)$$

Из этих соотношений получим

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \Delta - \mu \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{u} = \frac{\mu f_1}{a} (-\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0). \quad (67.9)$$

Из векторного уравнения движения (53.6) следует, что вектору перемещения, определяемому соотношениями

(67.5) и (67.6), должна соответствовать сила  $\mathbf{P}$  такая, что в этой системе координат

$$\mathbf{P} = \frac{\mu f_1}{qa} (\cos \vartheta, -\sin \vartheta, 0). \quad (67.10)$$

По величине эта массовая сила равна  $\mu f_1/qa$  и направлена в положительном направлении оси  $z$ .

Радиальное напряжение определяется формулой

$$\sigma_r = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}.$$

Таким образом, подставляя сюда выражения (67.5) и (67.7), найдем

$$\begin{aligned} \sigma_r = & -\mu f_0 - \mu f_1 \left(\frac{r}{a}\right) \cos \vartheta + \\ & + \mu \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left[ \frac{n^2(n+2)\beta^2 - n(n+1)^2}{n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2} - \right. \\ & \left. - \{n(n-1)(\beta^2-1) - (3\beta^2-4)\} \left(\frac{r}{a}\right)^n \right] P_n(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

На поверхности сферы  $r=a$  имеем

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=a} = & -\mu f_0 - \mu f_1 \cos \vartheta + \\ & + \mu \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left[ \frac{(2n^2+4n+3)\beta^2}{n+1} - 2(n+2) \right] P_n(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

Если разложение Фурье — Лежандра функции  $f(\vartheta)$  имеет вид

$$f_0 + f_1 \cos \vartheta + \sum_{n=2}^{\infty} f_n P_n(\cos \vartheta),$$

то при  $(\sigma_r)_{r=a} = -\mu f(\vartheta)$  получим, что

$$c_n = -\frac{(n+1)f_n}{2(\beta^2-1)n^2 + 2(2\beta^2-3)n + (3\beta^2-4)}. \quad (67.11)$$

Отличное от нуля касательное напряжение  $\tau_{r\vartheta}$  определяется тогда формулой

$$\tau_{r\vartheta} = \mu \left( \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} \right),$$

где  $u_r$  и  $u_\vartheta$  задаются выражениями (67.5) и (67.6).

В результате найдем, что

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left\{ \frac{n(n+2)(\beta^2-1)-1}{n+1} \right\} \times \\ \times \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin \theta P'_n(\cos \theta). \quad (67.12)$$

Отсюда очевидно, что  $\tau_{r\theta} = 0$  на поверхности сферы  $r = a$ .

Система нагрузок на сферической поверхности не находится в статическом равновесии; равнодействующая этих нагрузок представляет собой силу, действующую в направлении отрицательной оси  $z$  и равную по величине

$$2\pi^2\mu \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta f(\theta) d\theta = \frac{4}{3} \pi a^2 \mu f_1.$$

Таким образом, сфера плотности  $\rho$  получила бы ускорение  $\mu f_1 / \rho a$ .

Вычисления в случае постоянного давления, приложенного к части поверхности сферы  $0 \leq \theta \leq \alpha$ , были проведены Дином, Снеддоном и Парсоном<sup>1)</sup>, к работе этих авторов мы и отсылаем читателя.

**68. Симметричная деформация тела вращения.** Когда тело вращения в результате приложения поверхностных нагрузок деформируется симметрично, то удобно использовать цилиндрические координаты  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$ . Если вектор перемещения обозначить через  $\mathbf{u} = (u_\rho, u_\varphi, u_z)$ , то тогда в случае симметричной деформации  $u_\varphi = 0$  и

$$\mathbf{u} = (u_\rho, 0, u_z). \quad (68.1)$$

Компоненты деформации равны

$$\gamma_{\rho\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \gamma_{\varphi\varphi} = \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \gamma_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \gamma_{\rho z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right), \quad (68.2)$$

остальные компоненты  $\gamma_{\rho\varphi}$ ,  $\gamma_{z\varphi}$  равны нулю. Отсюда сразу следует, что если  $E$  и  $\nu$  обозначают соответствен-

<sup>1)</sup> Dean W. R., Sneddon I. N., Parsons H. W., Selected Government Research Reports, vol. 6; Strength and Testing of Materials, Report 29, London H. M. S. O. 1952.

но модуль Юнга и коэффициент Пуассона, то

$$\sigma_Q = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \frac{2(1-\nu)}{\nu} \frac{\partial u_Q}{\partial Q} + \frac{u_Q}{Q} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right], \quad (68.3)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \frac{\partial u_Q}{\partial Q} + \frac{2(1-\nu)}{\nu} \frac{u_Q}{Q} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right], \quad (68.4)$$

$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \frac{\partial u_Q}{\partial Q} + \frac{u_Q}{Q} + \frac{2(1-\nu)}{\nu} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right], \quad (68.5)$$

$$\tau_{Qz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial u_Q}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial Q} \right], \quad (68.6)$$

и уравнения равновесия (при отсутствии массовых сил) примут вид

$$\frac{\partial \sigma_Q}{\partial Q} + \frac{\partial \tau_{Qz}}{\partial z} + \frac{\sigma_Q - \sigma_\varphi}{Q} = 0, \quad (68.7)$$

$$\frac{\partial \tau_{Qz}}{\partial Q} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{Qz}}{Q} = 0. \quad (68.8)$$

Если положить теперь в уравнениях (68.3)–(68.6)

$$u_Q = -\frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \chi}{\partial Q \partial z}, \quad (68.9)$$

$$u_z = \frac{1+\nu}{E} \left\{ (1-2\nu) \nabla^2 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial Q^2} + \frac{1}{Q} \frac{\partial \chi}{\partial Q} \right\}, \quad (68.10)$$

то найдем

$$\sigma_Q = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \nu \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial Q^2} \right\}, \quad (68.11)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \nu \nabla^2 \chi - \frac{1}{Q} \frac{\partial \chi}{\partial Q} \right\}, \quad (68.12)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (2-\nu) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right\}, \quad (68.13)$$

$$\tau_{Qz} = \frac{\partial}{\partial Q} \left\{ (1-\nu) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right\}. \quad (68.14)$$

Если подставить эти соотношения в уравнение (68.7), то увидим, что оно удовлетворяется тождественно, в то время как, подставив их в уравнение (68.8), найдем, что

$$\nabla^4 \chi = 0. \quad (68.15)$$

Таким путем задача определения распределения напряжений в теле вращения сводится к задаче о нахождении решений бигармонического уравнения (68.15), удовлетворяющего соответствующим граничным условиям. Обсуждение ряда частных задач, рассмотренных этим методом, читатель может найти в главе 13 «Theory of Elasticity» Тимошенко и Гудьера.

**69. Использование сплюснутых сфероидальных координат.** Для того чтобы проиллюстрировать использование сплюснутых сфероидальных координат, рассмотрим решение Сака <sup>1)</sup> задачи об определении распределения напряжений в окрестности кольцевой трещины в однородном изотропном теле.

Для задач, связанных с плоским круговым диском или с бесконечно тонкой трещиной, подходящими координатами являются сплюснутые сфероидальные координаты  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$ , причем

$$\left. \begin{aligned} x &= c \operatorname{sh} \psi \cos \vartheta, \\ y &= c \operatorname{ch} \psi \sin \vartheta \cos \varphi, \\ z &= c \operatorname{ch} \psi \sin \vartheta \sin \varphi; \end{aligned} \right\} \quad (69.1)$$

таким образом поверхности  $\psi = \operatorname{const}$  представляют сплюснутые сфероиды;  $\vartheta = \operatorname{const}$  — однополостные гиперболоиды вращения;  $\varphi = \operatorname{const}$  — плоскости, проходящие через ось  $x$ . Поверхность  $\psi = 0$  соответствует круговому диску

$$x = 0, \quad y^2 + z^2 \leq c^2, \quad (69.2)$$

причем каждая точка круга является двойной точкой, соответствующей двум сторонам диска. Фундаментальная дифференциальная форма равна

$$ds^2 = h_\psi^2 d\psi^2 + h_\vartheta^2 d\vartheta^2 + h_\varphi^2 d\varphi^2, \quad (69.3)$$

где

$$h_\psi^2 = h_\vartheta^2 = c^2 (\operatorname{sh}^2 \psi + \cos^2 \vartheta) = c^2 h^2 \quad (69.4)$$

и

$$h_\varphi = c \operatorname{ch} \psi \sin \vartheta. \quad (69.5)$$

<sup>1)</sup> Sack R. A., Proc. Phys. Soc., London 58, 729 (1946).

Таким образом, оператор Лапласа примет вид

$$\nabla^2 = \frac{1}{c^2 h^2 \operatorname{ch} \psi \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \psi} \operatorname{ch} \psi \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \operatorname{ch} \psi \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right] + \frac{\partial^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 \psi \sin^2 \vartheta \partial \varphi^2} \quad (69.6)$$

Нормальные решения уравнения Лапласа

$$\nabla^2 V = 0 \quad (69.7)$$

имеют вид

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} & \Pi_n^m(\operatorname{sh} \psi) P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \\ & T_n^m(\operatorname{sh} \psi) P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (69.8)$$

где функции  $P_n^m$  являются присоединенными полиномами Лежандра, и  $\Pi_n^m$ ,  $T_n^m$  представляют соответственно функции Лежандра первого и второго рода аргумента  $ix$ :

$$P_n^m(x) = \operatorname{const} (1-x^2)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (1-x^2)^n,$$

$$\Pi_n^m(x) = \operatorname{const} (1+x^2)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (1+x^2)^n,$$

$$T_n^m(x) = \operatorname{const} \cdot \Pi_n^m(x) \int_x^\infty \frac{d\xi}{[\Pi_n^m(\xi)]^2 (1+\xi^2)}.$$

Если одно из главных напряжений внешней системы нагрузок нормально к трещине, то касательные напряжения на поверхности трещины будут равны нулю; кроме того, присутствие трещины не будет оказывать влияния на два других главных напряжения, однако нормальный компонент  $\sigma_\psi$  должен быть компенсирован, поскольку нагрузки на внутренней поверхности трещины должны быть равны нулю. Это распределение напряжений будет осесимметричным и будет убывать с увеличением расстояния. Таким образом, единственными членами, которые необходимо рассмотреть, будут члены, содержащие функции  $T_n^0$ . Члены с  $m \neq 0$  или с  $\Pi_n^0$  можно не рассматривать.

Первые три функции  $T_n^0$  равны

$$\left. \begin{aligned} T_0^0(\operatorname{sh} \psi) &= \operatorname{arc} \operatorname{ctg}(\operatorname{sh} \psi), \\ T_1^0(\operatorname{sh} \psi) &= T_0^0(\operatorname{sh} \psi) \operatorname{sh} \psi - 1, \\ T_2^0(\operatorname{sh} \psi) &= T_0^0(\operatorname{sh} \psi)(3 \operatorname{sh}^2 \psi + 1) - 3 \operatorname{sh} \psi. \end{aligned} \right\} \quad (69.9)$$

Можно тотчас же показать, что если  $U$  и  $V$  являются решениями уравнения Лапласа, то перемещения  $u_\psi$ ,  $u_\vartheta$  определяются выражениями

$$u_\psi = \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial \psi} + (3 - 4\nu) \operatorname{ch} \psi \cos \vartheta \cdot V - \operatorname{sh} \psi \cos \vartheta \frac{\partial V}{\partial \psi} \right], \quad (69.10)$$

$$u_\vartheta = \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} - (3 - 4\nu) \operatorname{sh} \psi \sin \vartheta \cdot V - \operatorname{sh} \psi \cos \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right], \quad (69.11)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Из этих выражений следует

$$(\sigma_\psi)_{\psi=0} = \frac{2\mu}{c^2 \cos^2 \vartheta} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} \operatorname{tg} \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} + 2(1-\nu) c \cos \vartheta \frac{\partial V}{\partial \psi} \right]_{\psi=0}$$

$$(\tau_{\psi\vartheta})_{\psi=0} = \frac{2\mu}{c^2 \cos^2 \vartheta} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial \psi \partial \vartheta} + \operatorname{tg} \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} + (1-2\nu) c \cos \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right]_{\psi=0}.$$

Если в этих выражениях принять

$$U = -\frac{(1-2\nu)c^2 A}{3\pi\mu} \left[ T_0^0(\operatorname{sh} \psi) + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) T_2^0(\operatorname{sh} \psi) \right], \quad (69.12)$$

$$V = \frac{cA}{\pi\mu} T_1^0(\operatorname{sh} \psi) \cos \vartheta, \quad (69.13)$$

то для  $\psi=0$  найдем

$$\sigma_\psi = A, \quad \tau_{\psi\vartheta} = 0. \quad (69.14)$$

Таким образом, выражения (69.10) — (69.13) представляют решение уравнений упругого равновесия, соответствующего условиям (69.14) на поверхности круговой трещины.



## Е. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

До сих пор при обсуждении частных задач математической теории упругости принималось, что нагрузки, действующие на упругое тело, являются статическими нагрузками. Теперь кратко будут рассмотрены некоторые задачи, в которых приложенные нагрузки изменяются со временем, так что в теле возникают динамические напряжения. Основная работа в этой области была проделана в теории распространения упругих волн. Будут кратко обсуждены только такие задачи, которые до настоящего времени считаются задачами, относящимися больше к теоретической геофизике. Более подробно они обсуждаются, например, в статьях Бюллена, Эвинга и Якоби в томе XLVII энциклопедии физики<sup>1)</sup>.

### 1. Упругие волны

70. *P*-волны и *S*-волны. Из уравнения (53.3) следует, что уравнения движения упругого тела можно записать в векторной форме

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad} (\text{div} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{P} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (70.1)$$

где  $\mathbf{u}$  — вектор перемещения,  $\mathbf{P}$  — массовая сила,  $\rho$  — плотность,  $\lambda$  и  $\mu$  — упругие постоянные Ламе. Если записать массовую силу  $\mathbf{P}$  в виде

$$\mathbf{P} = \text{grad} \Phi + \text{curl} \Psi, \quad (70.2)$$

---

<sup>1)</sup> Handbuch der Physik, Springer Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg.

то, вводя скалярную функцию  $\varphi$  и вектор  $\psi$ , можем написать

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{curl } \psi. \quad (70.3)$$

Для такого представления вектора перемещения имеем

$$\text{div } \mathbf{u} = \nabla^2 \varphi. \quad (70.4)$$

Подставляя выражения (70.2), (70.3) и (70.4) в уравнение (70.1), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 (\text{grad } \varphi + \text{curl } \psi) + (\lambda + \mu) \text{grad } (\nabla^2 \varphi) + \\ + \varrho \text{grad } \Phi + \varrho \text{curl } \Psi = \varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{grad } \varphi) + \varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{curl } \psi), \end{aligned}$$

которое можно записать в форме

$$\begin{aligned} \text{grad} \left[ (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi + \varrho \Phi - \varrho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] + \\ + \text{curl} \left[ \mu \nabla^2 \psi + \varrho \Psi - \varrho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

Это выражение показывает, что векторное выражение (70.3) представляет решение уравнений движения в том случае, если  $\varphi$  и  $\psi$  выбраны таким образом, что они являются решениями уравнений

$$c_1^2 \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\Phi \quad (70.5)$$

и

$$c_2^2 \nabla^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\Psi \quad (70.6)$$

соответственно, причем

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\varrho}. \quad (70.7)$$

Уравнение (70.5) является неоднородным волновым уравнением со скоростью распространения волны  $c_1$ , показывающей, что часть перемещения, соответствующая функции  $\varphi$ , переносится со скоростью  $c_1$ . Из уравнения (70.4) следует, что расширение  $\Delta = \text{div } \mathbf{u}$  удовлетворяет волновому уравнению с той же самой скоростью. В сейсмологии эта волна называется *первичной волной*

или просто волной  $P$ ; это волна уплотнения — разрежения, обуславливающая изменение объема. С другой стороны, уравнение (70.6) показывает, что часть перемещения, соответствующая функции  $\psi$ , переносится с меньшей скоростью  $c_2$ . Из условия  $\text{curl } \mathbf{u} = \text{curl } \text{curl } \psi$  следует, что вращение  $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{curl } \mathbf{u}$  удовлетворяет волновому уравнению со скоростью  $c_2$ . В сейсмологии эта волна называется *вторичной волной* или *S-волной*; это волна сдвига, обуславливающая искажение элемента без изменения его объема. В том случае, когда модуль сдвига  $\mu$  равен нулю, скорость  $c_2$  равна нулю; это показывает, что волны сдвига не могут распространяться в среде с нулевой жесткостью. В некоторых исследованиях полезно вводить постоянную  $\beta$ , представляющую отношение двух скоростей распространения волн, т. е.

$$\beta = \frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} \quad (70.8)$$

или, вводя коэффициент Пуассона,

$$\beta = \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu}} \quad (70.9)$$

Отсюда следует, что  $\beta = \sqrt{3}$ , когда  $\nu = \frac{1}{4}$ . Следует отметить, что отношение  $\beta$  не зависит от плотности  $\rho$  и модуля Юнга материала.

Отражение и преломление плоских сейсмических волн могут быть изучены точно таким же образом, как это делается в электромагнитной теории света, хотя в общем случае в теории упругости эта задача более сложная, поскольку волна одного типа, падающая на плоскую поверхность, может породить отраженные и преломленные волны обоих типов. Краткое изложение теории читатель может найти в статье Бюллена в XLVII томе энциклопедии физики<sup>1)</sup>; более полное изложение расчетов и их приложения к задачам сейсмологии читатель найдет в книге Каньяра «*Reflexion et Réfraction des Ondes Sismiques Progressives*» (Paris, 1939).

<sup>1)</sup> Handbuch der Physik, Springer — Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg, Bd. XLVII, 195.

В бесконечном, однородном, изотропном теле любое возмущение может быть представлено с помощью наложения  $P$ -волн и  $S$ -волн, однако если среда неоднородна или ограничена, то возникают другие типы волн; наиболее важными из них являются поверхностные волны, которые могут распространяться в окрестности границы упругого тела. Подобные поверхностные волны будут рассмотрены в следующих двух параграфах.

**71. Волны Рэлея.** Рассмотрим теперь полубесконечное тело  $z \geq 0$ , единственная граница которого  $z$  свободна от напряжений, а волны, амплитуда которых уменьшается по экспоненциальному закону с изменением  $z$ , распространяются вдоль оси  $x$ . Другими словами, решение уравнений (70.1), которые можно записать в форме

$$c_2^2 \nabla^2 \mathbf{u} + (c_1^2 - c_2^2) \text{grad div } \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (71.1)$$

будем искать в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} e^{-\alpha z + iq(x-ct)}. \quad (71.2)$$

Для решения (71.2) имеем

$$\nabla^2 \mathbf{u} = (\alpha^2 - q^2) (a_1, a_2, a_3) e^{-\alpha z + iq(x-ct)}, \quad (71.3)$$

$$\text{grad div } \mathbf{u} = -(q^2 a_1 + i \alpha q a_3, 0, i \alpha q a_1 - \alpha^2 a_3) e^{-\alpha z + iq(x-ct)}, \quad (71.4)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -c^2 q^2 (a_1, a_2, a_3) e^{-\alpha z + iq(x-ct)}. \quad (71.5)$$

Подставляя эти выражения в векторное уравнение движения (71.1) и записывая его в форме компонентов, получим следующие соотношения:

$$[c_2^2 \alpha^2 - (c_1^2 - c_2^2) q^2] a_1 - i (c_1^2 - c_2^2) \alpha q a_3 = 0, \quad (71.6)$$

$$[c_2^2 \alpha^2 + (c^2 - c_2^2) q^2] a_2 = 0, \quad (71.7)$$

$$-i (c^2 - c_2^2) \alpha q a_1 + [c_1^2 \alpha^2 + (c^2 - c_2^2) q^2] a_3 = 0. \quad (71.8)$$

Из второго из этих выражений имеем

$$a_2 = 0.$$

Исключая  $a_1$  и  $a_3$  из первого и третьего соотношений, найдем

$$\alpha^4 - \left( 2 - \frac{c^2}{c_1^2} - \frac{c^2}{c_2^2} \right) \alpha^2 q^2 + \left( 1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right) \left( 1 - \frac{c^2}{c_2^2} \right) q^4 = 0.$$

Таким образом, для заданного значения  $q$  имеются два значения  $\alpha$ , равные  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , причем

$$\alpha_1^2 = \left(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2}\right) q^2, \quad \alpha_2^2 = \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right) q^2. \quad (71.9)$$

Полагая в выражении (71.8)  $\alpha = \alpha_1$ , найдем, что

$$qa_3 = i\alpha_1 a_1$$

и, таким образом, имеем решение

$$u_1 = (-iqC_1, 0, \alpha_1 C_1) e^{-\alpha_1 z + iq(x-ct)}. \quad (71.10)$$

Полагая в выражении (71.6)  $\alpha = \alpha_2$ , найдем, что  $qa_1 = -i\alpha_2 a_3$  и, следовательно,

$$u_2 = (-i\alpha_2 C_2, 0, qC_2) e^{-\alpha_2 z + iq(x-ct)}. \quad (71.11)$$

Объединяя выражения (71.10) и (71.11), получим общее решение  $u = (u, 0, w)$ , где

$$u = -i(qC_1 e^{-\alpha_1 z} + \alpha_2 C_2 e^{-\alpha_2 z}) e^{iq(x-ct)}, \quad (71.12)$$

$$w = (\alpha_1 C_1 e^{-\alpha_1 z} + qC_2 e^{-\alpha_2 z}) e^{iq(x-ct)}. \quad (71.13)$$

Для этого вектора перемещения имеем  $\tau_{yz} = 0$  и

$$\tau_{xz} = i\mu q \left\{ 2\alpha_1 C_1 e^{-\alpha_1 z} - \left(\frac{c^2}{c_2^2} - 2\right) qC_2 e^{-\alpha_2 z} \right\} e^{iq(x-ct)}, \quad (71.14)$$

$$\sigma_z = \mu q \left\{ \left(\frac{c^2}{c_2^2} - 2\right) qC_1 e^{-\alpha_1 z} - 2\alpha_2 C_2 e^{-\alpha_2 z} \right\} e^{iq(x-ct)}. \quad (71.15)$$

Если поверхность  $z=0$  свободна от напряжений, то  $\tau_{xz} = \sigma_z = 0$ , когда  $z=0$ , так что

$$2\alpha_1 C_1 - \left(\frac{c^2}{c_2^2} - 2\right) qC_2 = 0,$$

$$\left(\frac{c^2}{c_2^2} - 2\right) qC_1 - 2\alpha_2 C_2 = 0.$$

Исключая из этих выражений  $C_1$  и  $C_2$ , получим следующее соотношение:

$$\left(\frac{c^2}{c_2^2} - 2\right)^2 q^2 = 4\alpha_1 \alpha_2,$$

которое с помощью выражений (71.9) можно представить в виде

$$\left(2 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^2 = 4\left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

или

$$\left(\frac{c}{c_2}\right)^6 - 8\left(\frac{c}{c_2}\right)^4 + \frac{8(3\beta^2 - 2)}{\beta^2}\left(\frac{c}{c_2}\right)^2 - \frac{16(\beta^2 - 1)}{\beta^2} = 0, \quad (71.16)$$

где  $\beta$  определяется формулой (70.8). Уравнение (71.16) является уравнением для определения скорости волн. Если левую часть этого уравнения заменить через  $f(c/c_2)$ , то  $f(0) = -16(\beta^2 - 1)/\beta^2$  и  $f(1) = 1$ . Отсюда следует, что корень уравнения (71.6) лежит между 0 и  $c_2$ . Если, например, коэффициент Пуассона равен  $1/4$ , то  $\beta^2 = 3$  и уравнение (71.16) примет вид

$$3\xi^3 - 24\xi^2 + 56\xi - 32 = 0, \quad \xi = c^2/c_2^2.$$

Легко видеть, что корни этого уравнения равны  $4$ ,  $2 \pm 2/\sqrt{3}$ . Значение  $c$ , меньшее чем  $c_2$ , равно поэтому

$$c_2\sqrt{2 - 2/\sqrt{3}} = 0,9194c_2,$$

а соответствующие значения  $\alpha$  равны

$$\alpha_1 = 0,8475q, \quad \alpha_2 = 0,3933q.$$

В результате имеем решение

$$u = A(e^{-\alpha_1 z} - 0,5773e^{-\alpha_2 z}) \sin q(x - ct),$$

$$w = A(0,8475e^{-\alpha_1 z} - 1,4679e^{-\alpha_2 z}) \cos q(x - ct).$$

Другие корни приводят к чисто мнимым значениям  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , и поэтому не дают поверхностных волн.

Поверхностные волны этого типа впервые были обнаружены Рэлеем<sup>1)</sup> и по этой причине называются *волнами Рэлея*.

**72. Волны Лява.** Были предсказаны и обнаружены другие простые типы волн. Если тело является сложным,

<sup>1)</sup> Lord Reyleigh (Strutt J. W.), Proc. Lond. Math. Soc. 17, 4 (1885).

так что области  $z > 0$  и  $-h < z < 0$  составлены из различных материалов, то появляется другой тип волн, называемых *волнами Лява*<sup>1)</sup>. Ляв принимает, что перемещения имеют вид

$$\mathbf{u} = (0, V, 0) e^{iq(x-ct)} \quad (-h < z < 0) \quad (72.1)$$

и

$$\mathbf{u} = (0, V', 0) e^{iq(x-ct)} \quad (z > 0), \quad (72.2)$$

где  $V$  и  $V'$  — функции только  $z$ . Причем буквы без штрихов будут относиться к верхнему слою, а со штрихами — к нижнему слою.

Для вектора перемещения (72.1) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \nabla^2 \mathbf{u} &= \left( 0, \frac{d^2V}{dz^2} - q^2V, 0 \right) e^{iq(x-ct)}. \end{aligned}$$

Таким образом, подставляя эти соотношения в векторное уравнение (71.1), найдем

$$c_2^2 \left( \frac{d^2V}{dz^2} - q^2V \right) = -c^2 q^2 V,$$

т. е.

$$\frac{d^2V}{dz^2} + \sigma^2 q^2 V = 0,$$

где

$$\sigma^2 = \frac{c^2}{c_2^2} - 1. \quad (72.3)$$

Следовательно, в области  $-h \leq z \leq 0$  имеем

$$V = A \sin \sigma q z + B \cos \sigma q z. \quad (72.4)$$

Аналогично в области  $z > 0$  найдем

$$V = C e^{-\sigma' q z}, \quad (72.5)$$

где

$$\sigma'^2 = 1 - \frac{c^2}{c_2'^2}. \quad (72.6)$$

---

<sup>1)</sup> Love A. E. H., Some Problems in Geodynamics. Cambridge, 1911.

Из физических соображений следует, что  $V$  и  $\tau_{zy}$  должны быть непрерывны поперек плоскости  $z = 0$  и  $\tau_{zy} = 0$  при  $z = -h$ . Следовательно, функции  $V$  и  $\mu(dV/dz)$  должны быть непрерывны поперек  $z = 0$  и  $dV/dz = 0$  при  $z = -h$ ; таким образом, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} B &= C, \\ \mu A \sigma &= -\mu' C \sigma', \\ A \cos \sigma q h + B \sin \sigma q h &= 0. \end{aligned}$$

Исключая  $A$ ,  $B$ ,  $C$  из этих соотношений, найдем, что величина  $C$  должна быть такой, чтобы

$$\begin{vmatrix} \cos \sigma q h & \sin \sigma q h & 0 \\ \mu \sigma & 0 & -\mu' \sigma' \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это равенство сводится к следующему:

$$\mu' \sigma' = \mu \sigma \operatorname{tg}(\sigma q h).$$

Уравнение для  $c$  имеет поэтому вид

$$\mu' \left(1 - \frac{c^2}{c_2'^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \mu \left(-1 + \frac{c^2}{c_2^2}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \left\{ \left(\frac{c^2}{c_2^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} q h \right\}, \quad (72.7)$$

где

$$c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad c_2'^2 = \frac{\mu'}{\rho'}.$$

Из этого уравнения видно, что этот тип волн существует только в том случае, если скорость волн  $S$  в нижней области больше, нежели скорость этих волн в верхнем слое. Если  $c$  является действительным корнем этого уравнения, то решение задачи дается соотношениями

$$\left. \begin{aligned} V &= V_0 \cos \{\sigma q (z + h)\} \quad (-h < z < 0), \\ V &= V_0 \cos(\sigma q h) e^{-\sigma' q z} \quad (z > 0), \end{aligned} \right\} \quad (72.8)$$

где  $V_0$  — произвольная постоянная и  $\sigma$ ,  $\sigma'$  определены соответственно выражениями (72.3) и (72.6).

Изучение таких волн в слоистых телах представляет значительный интерес в геофизических приложениях тео-



рии упругости, поскольку обнаруживается довольно резкое изменение физических свойств Земли в начале ее коры (около 33 км ниже поверхности).

Из уравнения (72.7) видно, что (в отличие от волн Рэлея) скорость распространения волн Лява зависит от длины волны ( $2\pi/q$ ) и, таким образом, будет иметь место дисперсия волн.

**73. Распространение упругих волн в цилиндрах.** В цилиндрических координатах ( $r, \varphi, z$ ) физические компоненты перемещения можно записать в виде

$$\mathbf{u} = (u_r, u_\varphi, u_z).$$

Легко показать, что

$$\begin{aligned} 2\omega &= \text{curl } \mathbf{u} = \\ &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \quad (73.1)$$

и

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (73.2)$$

Записав уравнения движения в форме (сравни уравнение (53.6))

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad } \Delta - \mu \text{curl curl } \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (73.3)$$

видим, что в этих координатах уравнения примут вид

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial \varphi} + 2\mu \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (73.4)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} - 2\mu \frac{\partial \omega_r}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial \omega_z}{\partial r} = \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}, \quad (73.5)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\omega_\varphi) + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \quad (73.6)$$

Обсудим теперь кратко три типа упругих волн, которые могут распространяться в цилиндрах, а именно волны кручения, продольные волны и волны изгиба.

а) *Волны кручения.* Если допустить, что  $u_r = u_z = 0$  и  $u_\varphi$  не зависит от  $\varphi$ , то из выражения (73.1) следует, что

$$\omega_r = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad \omega_\varphi = 0, \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad (73.7)$$

а из соотношения (73.2) имеем  $\Delta = 0$ . Подставляя эти выражения в уравнения (73.4) и (73.6), найдем, что они удовлетворяются тождественно, тогда как уравнение (73.5) примет вид

$$\frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u_\Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\Phi}{\partial r} - \frac{u_\Phi}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\Phi}{\partial z^2}, \quad (73.8)$$

где  $c_2^2 = \mu/\rho$ . Если рассмотреть теперь гармонические волны вида

$$u_\Phi = \Phi(r) e^{i(qz+pt)}, \quad (73.9)$$

то найдем, что функция  $\Phi(r)$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + \left( \kappa_1^2 - \frac{1}{r^2} \right) \Phi = 0, \quad (73.10)$$

в котором

$$\kappa_1^2 = \frac{p^2}{c_2^2} - q^2. \quad (73.11)$$

Так как  $\Phi$  не становится бесконечной при  $r=0$ , то отсюда следует, что имеющее физический смысл решение уравнения (73.10) для  $\kappa_1 \neq 0$  будет иметь следующий вид:

$$\Phi(r) = AJ_1(\kappa_1 r), \quad (73.12)$$

где  $A$  — постоянная, так что

$$u_\Phi = AJ_1(\kappa_1 r) e^{i(qz+pt)}. \quad (73.13)$$

Для такого перемещения напряжения  $\sigma_r$  и  $\tau_{rz}$  повсюду равны нулю и

$$\begin{aligned} \tau_{r\Phi} &= \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\Phi}{\partial r} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\Phi}{r} \right) \right\} = \\ &= \mu A r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{J_1(\kappa_1 r)}{r} \right) e^{i(qz+pt)}. \end{aligned}$$

Следовательно, если  $\tau_{r\Phi}$  должно быть равно нулю на граничной поверхности цилиндра  $r=a$ , то тогда величина  $\kappa_1$  должна быть такой, чтобы имело место равенство

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{J_1(\kappa_1 a)}{a} \right] = 0,$$

которое, как легко показать, эквивалентно равенству  $\kappa_1 a = \xi$ , где  $\xi$  — корень уравнения

$$\xi J_0(\xi) = 2J_1(\xi). \quad (73.14)$$

Вводя длину волны  $\Lambda = 2\pi/q$  и фазовую скорость волн кручения  $c = p/q$ , найдем, что уравнения (73.11) и (73.14) эквивалентны соотношению

$$c = c_2 \left[ \xi^2 \left( \frac{\Lambda}{2\pi a} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (73.15)$$

из которого следует что групповая скорость волн кручения равна  $c_2^2/c$ .

β) *Продольные волны.* Если принять, что  $u_\varphi = 0$  и допустить, что  $u_r$  и  $u_z$  независимы от  $\varphi$ , то из формулы (73.1) следует, что  $\omega_r = \omega_z = 0$  и что уравнение (73.5) удовлетворяется тождественно, а уравнения (73.4) и (73.6) сведутся к следующим:

$$c_1^2 \frac{\partial \Delta}{\partial r} + 2c_2^2 \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (73.16)$$

и

$$c_1^2 \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{2c_2^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\omega_\varphi) = \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \quad (73.17)$$

Если теперь положить

$$u_r = R(r) e^{i(qz+pt)}, \quad u_z = Z(r) e^{i(qz+pt)}, \quad (73.18)$$

где  $R$  и  $Z$  являются функциями только  $r$ , то тогда из уравнения (73.2) получим следующие выражения:

$$\Delta = \left( R' + \frac{1}{r} R + iqZ \right) e^{i(qz+pt)}, \quad (73.19)$$

$$2\omega_\varphi = (iqR - Z') e^{i(qz+pt)}. \quad (73.20)$$

Если подставить эти выражения в уравнения (73.16) и (73.17), то найдем, что эти последние уравнения удовлетворяются выражениями вида

$$R = A\kappa_2 J'_0(\kappa_2 r) + BqJ_1(\kappa_3 r), \quad (73.21)$$

$$Z = AiqJ_0(\kappa_2 r) + \frac{Bi}{r} [J_1(\kappa_3 r) + \kappa_3 r J'_1(\kappa_3 r)], \quad (73.22)$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные величины, а  $\kappa_2$  и  $\kappa_3$  определяются соотношениями

$$\kappa_2^2 = \frac{p^2}{c_1^2} - q^2, \quad \kappa_3^2 = \frac{p^2}{c_2^2} - q^2. \quad (73.23)$$

Для того чтобы удовлетворить условиям  $\sigma_r = \tau_{rz} = 0$  при  $r = a$ , необходимо, чтобы имели место условия

$$\lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0.$$

Легко показать, что эти уравнения приводят к соотношениям

$$A [2c_2^2 \kappa_2^2 J_0''(\kappa_2 a) - p^2 c_1^2 J_0(\kappa_2 a)] + 2B c_2^2 q \kappa_3 J_1'(\kappa_3 a) = 0,$$

$$2A \kappa_2 q J_0'(\kappa_2 a) + B \left( 2q^2 - \frac{p^2}{c_2^2} \right) J_1(\kappa_3 a) = 0.$$

Исключив из этих выражений  $A$  и  $B$ , получим следующую зависимость:

$$\left( 2q^2 - \frac{p^2}{c_2^2} \right) J_1(\kappa_3 a) [2c_2^2 \kappa_2^2 J_0''(\kappa_2 a) - c_1^2 p^2 J_0(\kappa_2 a)] =$$

$$= 4c_2^2 q^2 \kappa_2 \kappa_3 J_0'(\kappa_2 a) J_1'(\kappa_3 a), \quad (73.24)$$

куда входит частота и длина волны колебаний, радиус  $a$  цилиндра и скорости распространения упругих волн в теле.

В случае, когда  $\kappa_2 a$ ,  $\kappa_3 a$  малы по сравнению с единицей, функции Бесселя могут быть представлены двумя членами соответствующих разложений и выражение (73.24) сведется к следующему:

$$c = c_0 \left( 1 - \frac{1}{4} v^2 q^2 a^2 \right), \quad (73.25)$$

где  $c_0^2 = E/\rho$  и  $v$  — коэффициент Пуассона.

Уравнение (73.24) впервые было выведено Покхаммером и Кри<sup>1)</sup>. В приближенном виде уравнение (73.25) было выведено также Рэлеем<sup>2)</sup> из энергетических сооб-

<sup>1)</sup> Pochhammer L., J. reine angew. Math. 81, 324 (1876); Chree C., Quart. J. Pure and Appl. Math. 23, 335 (1889).

<sup>2)</sup> Lord Rayleigh (Strutt J. W.), Theory of Sound 2nd. edit., vol I, p. 252, London, 1894; см также Рэлей, Теория звука, Гостехиздат, 1955, стр. 264.

ражений. Однако только недавно из уравнения частот (73.24) были получены численные результаты. Обсуждение численных результатов читатель найдет в оригинальных работах <sup>1)</sup> или на стр. 59 — 65 книги Кольского <sup>2)</sup>.

γ) *Изгибные волны.* В случае изгибных волн все три компонента вектора перемещения отличны от нуля и каждый из них зависит от угловой координаты φ. Если принять

$$u = (U \cos \varphi, V \sin \varphi, W \cos \varphi) e^{i(qz+pt)}, \quad (73.26)$$

где  $U, V, W$  — функции одного  $r$ , то в результате найдем, что

$$\Delta = \left( U' + \frac{1}{r} U + \frac{1}{r} V + iqW \right) \cos \varphi e^{i(qz+pt)} \quad (73.27)$$

и

$$2\omega = \left\{ \sin \varphi \left( -\frac{W}{r} + iqV \right), \cos \varphi (iqU - W'), \right. \\ \left. \sin \varphi \left( V' + \frac{1}{r} V + \frac{1}{r} U \right) \right\} e^{i(qz+pt)}. \quad (73.28)$$

Теперь из уравнений (73.4) — (73.6) имеем

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{\Delta}{r^2} + \kappa_2^2 \Delta = 0, \quad (73.29)$$

где  $\kappa_2$  определяется первым из соотношений (73.23); таким образом, можно принять

$$\Delta = -\frac{p^2}{c_1^2} A J_1(\kappa_2 r) \cos \varphi e^{i(qz+pt)}, \quad (73.30)$$

где  $A$  — постоянная интегрирования. Аналогичным образом можно показать, что

$$\omega_r = \frac{1}{2} \left\{ iq\kappa_3 C J_1'(\kappa_3 r) + \frac{i p^2 B}{c_3^2} \frac{J_1(\kappa_3 r)}{r} \right\} \sin \varphi e^{i(qz+pt)}, \quad (73.31)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \kappa_3^2 C J_1(\kappa_3 r) \sin \varphi e^{i(qz+pt)}, \quad (73.32)$$

<sup>1)</sup> Field G. S., *Canad. J. Res.* 5, 619 (1931); Bancroft D., *Phys. Rev.* 59, 588 (1941); Szerlinsky E. V., *Akust. Z.* 7, 12 (1942); Миндлин Д. Ф., *Доклады АН СССР* 1, 11 (1946); Davies R. M., *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Ser. A240*, 375 (1948).

<sup>2)</sup> Kolsky H., *Stress Waves in Solids*, Oxford, 1953.



Здесь следует заметить, что в случае продольных волн решения для свободных колебаний цилиндра конечной длины не будут точными, поскольку не было наложено дополнительного условия об отсутствии поверхностных нагрузок на плоских торцах цилиндра. Однако можно ожидать, что указанное выше решение будет достаточно точным для цилиндров, длина которых значительно превышает их радиус.

Уравнение частот (73.29) было впервые выведено Банкрофтом<sup>1)</sup>, хотя приближенное уравнение

$$p^2 = \frac{1}{4} a^2 q^2 c_0^2 \quad (73.40)$$

( $c_0^2 = E/\rho$ ), полученное при удержании нескольких первых членов каждой функции Бесселя, входящей в уравнение, было выведено ранее Рэлеем. Ряд численных расчетов, основанных на исследовании Банкрофта, опубликовал Гудсон<sup>2)</sup>.

**74. Возбуждение упругих волн массовыми силами.** Рассмотрим задачу о вычислении динамических напряжений в упругой бесконечно простирающейся среде, обусловленных зависимыми от времени массовыми силами<sup>3)</sup>. Если ввести пространственную координату

$$\tau = c_1 t, \quad (74.1)$$

связанную со временем  $t$ , где  $c_1$  — скорость распространения  $P$ -волн в теле, определяемая первым из соотношений (70.7), то можно записать уравнения движения (9.12) в форме

$$\partial_r \tau^{kj} + \rho P^j = \rho c^2 \frac{\partial^2 u^j}{\partial \tau^2} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (74.2)$$

где, для того чтобы определить положение характерной точки тела, выбрана прямоугольная система координат  $x_1, x_2, x_3$ , и  $\partial_i$  обозначает  $\partial/\partial x_i$ . Напомним, что из соотношения (14.30) имеем для однородного изотропного тела

$$\tau^{kj} = \lambda \Delta \delta^{kj} + \mu (\partial_k u_j + \partial_j u_k), \quad (74.3)$$

<sup>1)</sup> Bankcroft D., Phys. Rev. 59, 588 (1941).

<sup>2)</sup> Hudson G. E., Phys. Rev. 63, 46 (1943).

<sup>3)</sup> Eason G., Fulton J., Sneddon I. N., Phil. Trans. Roy Soc. Lond. A248, 575 (1956).

причем

$$\Delta = \partial_m u_m. \quad (74.4)$$

Задача, которая здесь рассматривается, заключается в решении системы уравнений (74.2) — (74.4) при заданной форме изменения компонентов  $P^j$  массовой силы во всем теле. Для того чтобы решить эти уравнения, введем четырехмерное преобразование Фурье каждого из компонентов напряжения и перемещения. Обозначим преобразование Фурье функции  $f$  с помощью черточки сверху знака функции, т. е. через  $\bar{f}$ ; другими словами,

$$\begin{aligned} \bar{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \omega) &= \\ &= \frac{1}{4\pi^3} \int_{E_4} f(x_1, x_2, x_3, \tau) \exp\{i(\xi_1 x_1 + \omega \tau)\} dV, \end{aligned} \quad (74.5)$$

где  $dV = dx_1 dx_2 dx_3 d\tau$  и  $E_4$  обозначает все пространство  $x_1 x_2 x_3 \tau$ . Если умножим обе части уравнений (74.2) — (74.4) на  $\exp\{i(x_p \xi_p + \omega \tau)\}$ , проинтегрируем по  $E_4$  и используем формулы<sup>1)</sup>

$$\frac{1}{4\pi^3} \int_{E_4} \left( \partial_q f, \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} \right) \exp\{i(x_p \xi_p + \omega \tau)\} dV = -(i\xi_q, \omega^2) \bar{f},$$

то найдем, что уравнения (74.2) — (74.4) эквивалентны алгебраическим уравнениям

$$-i\xi_k \bar{\tau}^{kj} + \rho \bar{P}^j = -\rho c^2 \omega^2 \bar{u}_j, \quad (74.6)$$

$$\bar{\tau}^{kj} = \lambda \bar{\Delta} \delta^{kj} - i\mu (\xi_k \bar{u}_j + \xi_j \bar{u}_k), \quad (74.7)$$

$$\bar{\Delta} = -i\xi_m u_m. \quad (74.8)$$

С помощью этих уравнений преобразования Фурье  $\bar{\tau}^{kj}$ ,  $\bar{v}^j$  для компонентов напряжения и перемещения могут быть определены через преобразования Фурье компонентов массовой силы  $\bar{P}^j$ .

Решая эти уравнения, найдем, что преобразования Фурье компонентов вектора перемещения определяются

<sup>1)</sup> Sneddon I. N., Functional Analysis, Handbuch der Physik, Bd. II, J. Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, стр. 279, 1955.



выражениями

$$\bar{u}_j = \frac{\beta^2 (\gamma^2 - \omega^2) \bar{P}^j - (\beta^2 - 1) \xi_j (\xi_k \bar{P}^k)}{c_1^2 (\gamma^2 - \omega^2) (\gamma^2 - \beta^2 \omega^2)}, \quad (74.9)$$

где  $\beta$  определяется формулой (70.8) и

$$\gamma^2 = \xi_m \xi_m. \quad (74.10)$$

Аналогично, преобразования Фурье компонентов напряжения определяются формулами

$$\begin{aligned} \bar{\tau}^{kj} = & -\frac{\lambda i \xi_r \bar{P}^r \delta^{kj}}{c_1^2 (\gamma^2 - \omega^2)} - \\ & -\frac{\mu i}{c_1^2} \left\{ \frac{\beta^2 (\gamma^2 - \omega^2) (\xi_k \bar{P}^j + \xi_j \bar{P}^k) - 2 (\beta^2 - 1) \xi_k \xi_j (\xi_r \bar{P}^r)}{(\gamma^2 - \omega^2) (\gamma^2 - \beta^2 \omega^2)} \right\}. \quad (74.11) \end{aligned}$$

Для того чтобы получить соответствующие выражения для компонентов вектора перемещения, используем интегральную теорему Фурье для четырехмерного преобразования, которая утверждает следующее: если функция  $\bar{\varphi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \omega)$  определяется через функцию  $\varphi(x_1, x_2, x_3, \tau)$  с помощью выражения (74.5), то

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, \tau) = \\ = \frac{1}{4\pi^2} \int_{W_4} \bar{\varphi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \omega) \exp\{-i(\xi_r x_r + \omega\tau)\} dW, \quad (74.12) \end{aligned}$$

где  $dW = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\omega$ , а  $W_4$  обозначает все пространство  $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \omega$ .

Обращая с помощью этого правила выражение (74.9), найдем компоненты вектора перемещения

$$\begin{aligned} u_j = 4\pi^4 \int_{W_4} \frac{\beta^2 (\gamma^2 - \omega^2) \bar{P}^j - (\beta^2 - 1) \xi_j (\xi_k \bar{P}^k)}{c_1^2 (\gamma^2 - \omega^2) (\gamma^2 - \beta^2 \omega^2)} \times \\ \times \exp\{-i(\xi_r x_r + \omega\tau)\} dW. \quad (74.13) \end{aligned}$$

Обращая выражение (74.11) посредством интегральной теоремы Фурье, найдем, что компоненты тензора напря-

жений определяются интегральной формулой

$$\begin{aligned} \tau^{kj} = & -\frac{\varrho(\beta^2-2)}{4\pi^2\beta^2} \delta^{kj} \int_{W_4} \frac{i\xi_r \bar{P}^r}{\gamma^2-\omega^2} \exp\{-i(x_s \xi_s + \omega\tau)\} dW - \\ & -\frac{\varrho}{4\pi^2\beta^2} \int_{W_4} \frac{\beta^2(\gamma^2-\omega^2)(\xi_k \bar{P}^j + \xi_j \bar{P}^k) - 2(\beta^2-1)\xi_j \xi_k (\xi_r \bar{P}^r)}{(\gamma^2-\omega^2)(\gamma^2-\beta^2\omega^2)} \times \\ & \times \exp\{-i(x_s \xi_s + \omega\tau)\} dW. \end{aligned} \quad (74.14)$$

Из общего решения, даваемого формулами (74.13) и (74.14), возможно вывести общие решения для статической и двумерной задачи. Аналогично посредством многократных интегральных преобразований с ядрами вида  $\frac{r}{2\pi} J_\nu(\xi r) e^{i(\xi z + \omega\tau)}$  можно получить решение уравнений движения для случая осесимметричного распределения массовых сил. За подробным изложением этих решений и частных форм, которые они принимают для некоторых простых случаев массовых сил  $P^j$ , читатель отсылается к цитированной выше работе Исона, Фултона и Снеддона.

## II. Краевые задачи динамической теории упругости

**75. Введение.** Рассмотрим теперь решение краевых задач в динамической теории упругости. Решения подобных задач были получены лишь в последнее время. Основные методы получения решения подобных задач базируются на теории функций комплексного переменного и теории интегральных преобразований. Метод комплексного переменного применим только для двумерных задач, а метод интегральных преобразований, применимый и к трехмерным задачам, в случае двумерных задач приводит к более простым результатам. По этим причинам мы ограничимся случаем плоской деформации, для которой уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (75.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y}, & \sigma_y &= \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (75.2)$$

Далее, уравнение совместности примет вид

$$\nabla_1^2 (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (75.3)$$

Используя тот факт, что

$$2(\lambda + \mu) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \sigma_x + \sigma_y,$$

видим, что уравнение (75.3) может быть записано в виде

$$\left( \nabla_1^2 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (75.4)$$

где  $c_1^2$  — скорость  $P$ -волн (см. выше формулу (70.7)).

Дифференцируя первое из уравнений (75.1) по  $x$ , второе по  $y$  и вычитая один результат из другого, найдем

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = \frac{1}{2c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\sigma_x - \sigma_y). \quad (75.5)$$

Складывая результаты дифференцирования, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_x + \sigma_y) + \left( \nabla_1^2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tau_{xy} = 0. \quad (75.6)$$

**76. Метод комплексного переменного<sup>1)</sup>.** В этом параграфе будет рассмотрено применение методов комплексного переменного к решению плоской задачи динамической теории упругости. Если переписать уравнение (75.5) в виде

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma_x = \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma_y, \quad (76.1)$$

то можно видеть, что оно будет тождественно удовлетворяться, если выразить  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  через функцию  $U$  с помощью следующих соотношений:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\rho}{2\mu} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\rho}{2\mu} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (76.2)$$

Из этих уравнений получим

$$\sigma_x + \sigma_y = \nabla_1^2 U - \frac{1}{c_2^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (76.3)$$

<sup>1)</sup> Radok J. R., Quart. Appl. Math. 14, 289 (1956).

Подставляя это выражение в уравнение (75.6), найдем

$$\left(\nabla_1^2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(\tau_{xy} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right) = 0. \quad (76.4)$$

Уравнение, которому удовлетворяет  $U$ , получим, объединяя уравнения (76.3) и (76.4):

$$\left(\nabla_1^2 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(\nabla_1^2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) U = 0. \quad (76.5)$$

Из этого уравнения видно, что функция  $U$  является динамическим аналогом функции Эри.

Если сосредоточить внимание на задачах, в которых возмущения перемещаются со скоростью  $c$  параллельно оси  $x$ , то можно использовать преобразования

$$\xi = x - ct, \quad \eta = y. \quad (76.6)$$

Преобразуя уравнение (76.5) к новым переменным  $\xi$  и  $\eta$ , найдем, что оно может быть записано в форме

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{s_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{s_2^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) U = 0, \quad (76.7)$$

где

$$s_1 = i\beta_1 = i \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad s_2 = i\beta_2 = i \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (76.8)$$

Формулы (76.2) и (76.3) могут быть также выражены через эти переменные в виде

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \frac{c^2}{2c_1^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, \quad \sigma_y = \frac{1}{2} (1 + \beta_2^2) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \quad (76.9)$$

и

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{i\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \beta_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}. \quad (76.10)$$

Если теперь положить

$$z_1 = \xi + s_1 \eta, \quad z_2 = \xi + s_2 \eta, \quad (76.11)$$

то найдем, что уравнение (76.7) имеет действительное решение

$$\begin{aligned} U &= F_1(z_1) + \bar{F}_1(\bar{z}_1) + F_2(z_2) + \bar{F}_2(\bar{z}_2) = \\ &= 2 \operatorname{Re} [F_1(z_1) + F_2(z_2)], \end{aligned} \quad (76.12)$$

где  $F_1(z_1)$ ,  $F_2(z_2)$  — аналитические функции комплексных переменных  $z_1$ ,  $z_2$  и  $\bar{F}_1(\bar{z}_1)$ ,  $\bar{F}_2(\bar{z}_2)$  — соответствующие сопряженные функции. Если подставить выражение (76.12) для  $U$  в формулы (76.9) и (76.10), то в результате найдем

$$\sigma_x = -2 \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{1}{2} + \beta_1^2 - \frac{1}{2} \beta_2^2 \right) F_1''(z_1) + \frac{1}{2} (1 + \beta_2^2) F_2''(z_2) \right], \quad (76.13)$$

$$\sigma_y = (1 + \beta_2^2) \operatorname{Re} [F_1''(z_1) + F_2''(z_2)], \quad (76.14)$$

$$\sigma_x + \sigma_y = -2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) \operatorname{Re} [F_1''(z_1)]. \quad (76.15)$$

Подставляя эти выражения в формулы (75.2) и интегрируя, получим не равные нулю компоненты вектора перемещения

$$\mu u = -\operatorname{Re} \left[ F_1'(z_1) + \frac{1}{2} (1 + \beta_2^2) F_2'(z_2) \right], \quad (76.16)$$

$$\mu v = \operatorname{Im} \left[ \beta_1 F_1'(z_1) + \frac{1 + \beta_2^2}{2\beta_2} F_2'(z_2) \right]. \quad (76.17)$$

Вводя эти выражения в третью формулу (75.2), найдем

$$\tau_{xy} = 2 \operatorname{Im} \left\{ \beta_1 F_1''(z_1) + \frac{(1 + \beta_2^2)^2}{4\beta_2} F_2''(z_2) \right\}. \quad (76.18)$$

Выражения (76.13)–(76.18) представляют решение Радока, опубликованное впервые в 1956 г. Следует, однако, заметить, что, не считая небольшой разницы в обозначении, это решение идентично с решением, полученным ранее Снеддоном<sup>1)</sup>. Если в решении Радока положить

$$F_1'(z_1) = -\mu f'(z_1),$$

$$F_2'(z_2) = -\frac{2i\mu\beta_2}{1 + \beta_2^2} g'(z_2),$$

то получим решение Снеддона.

Для иллюстрации метода рассмотрим две очень простые задачи.

а) *Импульс давления, движущийся вдоль поверхности полубесконечного тела.* Рассмотрим распределение напря-

<sup>1)</sup> Sneddon I. N., Rend. Circ. Mat. Palermo (ii) 4, 57 (1952).

жений в полубесконечной двумерной упругой среде  $y \geq 0$ , когда к границе  $y = 0$  приложен движущийся импульс давления. Направив ось  $x$  вдоль границы, можно принять, что граничное условие имеет вид

$$\sigma_y = -\frac{1}{2} \{P''(x-vt) + \bar{P}''(x-vt)\} \quad \text{на } y = 0 \quad (76.19)$$

и

$$\tau_{xy} = 0 \quad \text{на } y = 0. \quad (76.20)$$

Полагая в выражении (76.18)  $\eta = 0$ , найдем, что уравнение (76.20) будет удовлетворено, если принять

$$\beta_1 F_1''(\xi) + \frac{(1+\beta_2^2)^2}{4\beta_2} F_2''(\xi) = 0,$$

так что

$$F_2''(z_2) = -\frac{4\beta_1\beta_2}{(1+\beta_2^2)^2} F_1''(z_2).$$

Подставляя это соотношение в формулу (76.14), получим для нормального напряжения  $\sigma_y$  следующее выражение:

$$\sigma_y = (1+\beta_2^2)^{-1} \operatorname{Re} [(1+\beta_2^2)^2 F_1''(z_1) - 4\beta_1\beta_2 F_1''(z_2)].$$

Таким образом, граничное условие (76.19) будет удовлетворено, если принять

$$F_1(\xi) = -\frac{(1+\beta_2^2)P(\xi)}{(1+\beta_2^2)^2 - 4\beta_1\beta_2}.$$

Следовательно, из выражений (76.16) и (76.17) получим решение

$$u = \frac{1+\beta_2^2}{\mu [(1+\beta_2^2)^2 - 4\beta_1\beta_2]} \operatorname{Re} \left[ P'(z_1) - \frac{2\beta_1\beta_2}{(1+\beta_2^2)^2} P'(z_2) \right],$$

$$v = \frac{-\beta_1}{\mu [(1+\beta_2^2)^2 - 4\beta_1\beta_2]} \operatorname{Im} [(1+\beta_2^2)P'(z_1) - 2P'(z_2)],$$

которое, не считая разницы в обозначениях, является решением Снеддона<sup>1)</sup>.

б) *Движущаяся дислокация.* В задаче с движущейся дислокацией мы ищем решение уравнений движения,

<sup>1)</sup> См. цитированную выше работу Снеддона, уравнения (11) и (12).

удовлетворяющее условиям

$$\sigma_y = 0, \quad [u]_L = \text{const} \quad \text{на} \quad y = 0, \quad (76.21)$$

где  $[u]_L$  обозначает изменение величины  $u$  при одном обходе  $L$ . Из формулы (76.14) тотчас же следует, что первые из этих условий удовлетворяются, если принять

$$F_2''(z_2) = -F_1''(z_2), \quad (76.22)$$

а из формул (76.16), (76.22) видно, что второе условие будет удовлетворено, если допустить

$$F_1'(z_1) = b \ln z_1, \quad F_2'(z_2) = -b \ln z_2. \quad (76.23)$$

Подставляя выражения (76.23) в формулы (76.16) и (76.17), получим решение, эквивалентное решению Эшелби<sup>1)</sup>:

$$u = -\frac{1}{\mu} \operatorname{Re} \left\{ b \ln z_1 - \frac{1}{2} b (1 + \beta_2^2) \ln z_2 \right\}, \quad (76.24)$$

$$v = \frac{1}{\mu} \operatorname{Im} \left\{ b \ln z_1 - \frac{1}{2} b \frac{(1 + \beta_2^2)^2}{\beta_2} \ln z_2 \right\}. \quad (76.25)$$

В цитированной выше работе Радок получил этим методом решение Иоффе<sup>2)</sup> задачи о движущейся трещине Гриффитса и решение Галина<sup>3)</sup> задачи о движущемся штампе; в работе Снеддона этот метод применен к решению краевой задачи:

$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{1}{2} \{G''(x - vt) + \overline{G''}(x - vt)\} \quad \text{на} \quad y = 0.$$

**77. Метод интегральных преобразований.** Для того чтобы проиллюстрировать применение метода интегральных преобразований, рассмотрим распределение напряжений в полубесконечной упругой среде  $y \geq 0$ , когда к границе  $y = 0$  приложено переменное давление  $p(x, t)$ <sup>4)</sup>.

<sup>1)</sup> Eshelby J. D., Proc. Phys. Soc. Lond. 62, 307 (1949).

<sup>2)</sup> Yoffe E., Phil. Mag. 42, 739 (1951).

<sup>3)</sup> Галин Л. А., Контактные задачи теории упругости, М., Гостехиздат, 1953.

<sup>4)</sup> Решение этой задачи методом интегральных преобразований, отличным от предложенного здесь (в котором используются «потенциальные функции»), приведено на стр. 445—447 книги I. N. Sneddon'a «Fourier Transforms» (New York, 1951); русский перевод: Снеддон, Преобразования Фурье, стр. 499—501, ИЛ, 1956. (Прим. ред.)

Если заменить переменную времени пространственно-подобной переменной  $\tau$ , определяемой формулой  $\tau = c_1 t$ , то граничные условия задачи можно записать в форме

$$\sigma_y = -p(x, \tau), \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0. \quad (77.1)$$

Для решения динамической краевой задачи для всех величин, входящих в выражения (75.1), (75.2), вводим двумерное преобразование Фурье, определяемое соотношением

$$\bar{f}(\xi, y, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, \tau) e^{i(\xi x + \omega \tau)} dx d\tau. \quad (77.2)$$

Если обе части каждого из уравнений в системах (75.1) и (75.2) умножить на  $\exp\{i(\xi x + \omega \tau)\}$  и проинтегрировать по каждому из переменных  $x$  и  $\tau$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то получим систему совместных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$i\xi \bar{\sigma}_x - D \bar{\tau}_{xy} = (\lambda + 2\mu) \omega^2 \bar{u}, \quad (77.3)$$

$$i\xi \bar{\tau}_{xy} - D \bar{\sigma}_y = (\lambda + 2\mu) \omega^2 \bar{v}, \quad (77.4)$$

$$\bar{\sigma}_x = -i\xi (\lambda + 2\mu) \bar{u} + \lambda D \bar{v}, \quad (77.5)$$

$$\bar{\sigma}_y = -i\xi \lambda \bar{u} + (\lambda + 2\mu) D \bar{v}, \quad (77.6)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \mu (D \bar{u} - i\xi \bar{v}), \quad (77.7)$$

где

$$D = \frac{d}{dy}.$$

Если выражения (77.5)–(77.7) подставить в уравнения (77.3) и (77.4), то для определения преобразований Фурье компонентов вектора перемещения получим два совместных обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$[\beta^2 (\xi^2 - \omega^2) - D^2] \bar{u} + (\beta^2 - 1) i\xi D \bar{v} = 0, \quad (77.8)$$

$$(\beta^2 - 1) i\xi D \bar{u} + [\xi^2 - \beta^2 (\omega^2 + D^2)] \bar{v} = 0. \quad (77.9)$$

В этих уравнениях, как и ранее, принято  $\beta^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}$ . Простым исключением членов эти уравнения можно при-



вести к простому виду

$$(D^2 - n_1^2) (D^2 - n_2^2) (\bar{u}, \bar{v}) = 0, \quad (77.10)$$

где

$$n_1^2 = \xi^2 - \omega^2, \quad n_2^2 = \xi^2 - \beta^2 \omega^2. \quad (77.11)$$

Решения уравнения (77.10) элементарны и имеют вид

$$\bar{u} = A_1 e^{-n_1 y} + A_2 e^{-n_2 y}, \quad \bar{v} = B_1 e^{-n_1 y} + B_2 e^{-n_2 y}, \quad (77.12)$$

где постоянные интегрирования  $A_1, A_2, B_1, B_2$  независимы от  $y$ , однако они могут, конечно, зависеть от  $\xi$  и  $\omega$ . При выводе этого решения было принято, что компоненты вектора перемещения и компоненты тензора напряжений стремятся к нулю, когда величина  $\sqrt{x^2 + y^2}$  стремится к бесконечности. Если подставить выражения (77.12) в уравнения (77.8) и (77.9), то получим следующие соотношения между постоянными интегрирования:

$$n_1 A_1 = i \xi B_1, \quad \xi A_2 = i n_2 B_2. \quad (77.13)$$

Дополнительные соотношения для этих постоянных получим из граничных условий (77.1), которые в преобразованном виде эквивалентны следующим:

$$\mu [(\beta^2 - 2) D \bar{v} - i \xi \beta^2 \bar{u}]_{y=0} = -\bar{p}(\xi, \omega), \quad (77.14)$$

$$[D \bar{u} - i \xi \bar{v}]_{y=0} = 0. \quad (77.15)$$

Система уравнений (77.13) — (77.15) представляет систему четырех алгебраических уравнений относительно четырех постоянных интегрирования. Решая эту систему уравнений, найдем

$$A_1 = \frac{i \xi \bar{p} \left( \xi^2 - \frac{1}{2} \beta^2 \omega^2 \right)}{2 \mu G}, \quad A_2 = -\frac{i \xi n_1 n_2 \bar{p}}{2 \mu G},$$

$$B_1 = \frac{n_1 \bar{p} \left( \xi^2 - \frac{1}{2} \beta^2 \omega^2 \right)}{2 \mu G}, \quad B_2 = -\frac{\xi^2 n_1 \bar{p}}{2 \mu G},$$

где

$$G(\xi, \omega) = \left( \xi^2 - \frac{1}{2} \beta^2 \omega^2 \right)^2 - n_1 n_2 \xi^2. \quad (77.16)$$

Подставляя эти постоянные в уравнения (77.12) и обращая полученные таким образом выражения посредством двумерной интегральной теоремы Фурье, получим, наконец, для компонентов вектора перемещения следующие выражения:

$$u = \frac{1}{4\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}}{G} \left\{ i\xi \left( \xi^2 - \frac{1}{2} \beta^2 \omega^2 \right) e^{-n_1 y} - i\xi n_1 n_2 e^{-n_2 y} \right\} \times \\ \times e^{-i(\xi x + \omega \tau)} d\xi d\omega,$$

$$v = \frac{1}{4\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}}{G} \left\{ n_1 \left( \xi^2 - \frac{1}{2} \beta^2 \omega^2 \right) e^{-n_1 y} - \xi^2 n_1 e^{-n_2 y} \right\} \times \\ \times e^{-i(\xi x + \omega \tau)} d\xi d\omega.$$


---

## Г. ТЕРМОУПРУГОСТЬ

В предыдущих главах допускалось, что температура деформируемого упругого тела остается постоянной. В этой главе будут рассмотрены напряжения, возникающие в упругом теле, подверженном тепловым изменениям.

**78. Основное уравнение термоупругости.** При термическом расширении изотропное тело деформируется таким образом, что компоненты деформации  $\gamma_{ij}^{(1)}$ , отнесенные к системе прямоугольных осей  $x_1, x_2, x_3$ , определяются выражением

$$\gamma_{ij}^{(1)} = \alpha \vartheta \delta_{ij}, \quad (78.1)$$

где  $\vartheta$  обозначает отклонение температуры от температуры  $T$  тела, когда деформации и напряжения равны нулю,  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения тела. Допускается, что  $\vartheta$  достаточно мало для того, чтобы термические свойства тела оставались постоянными на том отрезке времени, который нас интересует. Суммарная деформация тела выражается через компоненты вектора перемещения  $u_i$  следующим уравнением:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad (78.2)$$

где  $\partial_j u_i$  обозначает частную производную  $\partial u_i / \partial x_j$ . Эта суммарная деформация состоит из термической деформации и упругой деформации, компоненты которой  $\gamma_{ij}^{(2)}$  определяются соотношением

$$\gamma_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2\mu} \tau_{ij} - \frac{\lambda \theta \delta_{ij}}{2\mu (3\lambda + 2\mu)}, \quad (78.3)$$

где  $\tau_{ij}$  — компоненты тензора напряжений; величина

$$\theta = \tau_{ii} \quad (78.4)$$

является суммой главных напряжений;  $\lambda$  и  $\mu$  — упругие постоянные Ламе для тела. Подставляя соотношения (78.1) — (78.3) — в уравнение

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^{(1)} + \gamma_{ij}^{(2)},$$

получим тензорное уравнение

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2\mu} \tau_{ij} - \left\{ \frac{\lambda\theta}{2\mu(3\lambda+2\mu)} - \alpha\vartheta \right\} \delta_{ij}. \quad (78.5)$$

Решая это тензорное уравнение относительно компонентов тензора напряжений, найдем

$$\tau_{ij} = (\lambda\Delta - \gamma\vartheta) \delta_{ij} + 2\mu\gamma_{ij}, \quad (78.6)$$

где

$$\Delta = \gamma_{ii} = \partial_i u_i \quad (78.7)$$

обозначает расширение тела и

$$\gamma = \alpha(3\lambda + 2\mu). \quad (78.8)$$

Физический закон, выраженный тензорным соотношением (78.6), называется *законом Дюамеля — Неймана*.

Термодинамическими переменными, описывающими состояние упругого тела, являются компоненты деформации (78.2) и абсолютная температура  $T + \vartheta$ .

Используя методы термодинамики обратимых процессов, Био<sup>1)</sup> показал, что энтропия  $s$  единицы объема тела определяется соотношением

$$s = c\varrho \ln \left( 1 + \frac{\vartheta}{T} \right) + \gamma\Delta, \quad (78.9)$$

где аддитивная постоянная, входящая в определение энтропии, была выбрана таким образом, что энтропия была равна нулю в начальном состоянии. В этом уравнении  $\varrho$  — плотность тела,  $c$  — удельная теплоемкость единицы массы (принимаемая независимой от температуры вблизи равновесной температуры  $T$ ), и  $\gamma$  определяется формулой (78.8). Если  $\vartheta$  мало по сравнению с  $T$ , то соотношение (78.9) сводится к простому выражению для энтро-

<sup>1)</sup> Biot M. A., J. Appl. Phys. 27, 240 (1956).

нии единицы объема

$$s = \frac{\rho c \vartheta}{T} + \gamma \Delta. \quad (78.10)$$

Таким образом, количество тепла, поглощаемое единицей объема в процессе малых деформаций и малых изменений температуры, определяется формулой

$$h = Ts = \rho c \vartheta + \gamma T \Delta. \quad (78.11)$$

Из теории теплопроводности в твердых телах известно <sup>1)</sup>, что изменение температуры внутри изотропного тела подчиняется уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = k \Delta^2 \vartheta + q, \quad (78.12)$$

где  $k$  — коэффициент теплопроводности тела, и  $q$  — количество тепла, выделяемого в единице объема тела. Подставляя выражение (78.10) в соотношение (78.11), найдем

$$\rho c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \gamma T \frac{\partial \Delta}{\partial t} = k \nabla^2 \vartheta + q. \quad (78.13)$$

Если ввести коэффициент температуропроводности

$$\kappa = \frac{k}{\rho c},$$

то последнее уравнение можно записать в форме

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \kappa \nabla^2 \vartheta + Q - \gamma' \frac{\partial \Delta}{\partial t}, \quad (78.14)$$

где

$$Q = \frac{q}{\rho c}, \quad \gamma' = \frac{\gamma T}{\rho c}.$$

Для того чтобы дополнить систему основных уравнений, присоединим к ней уравнения движения в виде

$$\tau_{ij, j} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (78.15)$$

где  $(F_1, F_2, F_3)$  обозначает массовую силу в точке  $(x_1, x_2, x_3)$  и  $\ddot{u}_i$  —  $i$ -й компонент ускорения  $\partial^2 u_i / \partial t^2$  бес-

<sup>1)</sup> Carslaw H. S., Jaeger J. C., The Conduction of Heat in Solids, Oxford, 1947.

конечно малого элемента, сосредоточенного около этой точки.

Система шестнадцати уравнений (78.2), (78.6), (78.14) и (78.15) вместе с соответствующими граничными условиями достаточна для определения изменения температуры и компонентов напряжений и перемещения в случае, когда источники тепла и массовые силы заданы.

**79. Безразмерная форма уравнений.** Основные уравнения термоупругости удобно записать в безразмерной форме. Если характерный линейный размер  $l$  принять в качестве единицы длины, время  $\tau$  в качестве единицы времени, температуру начала отсчета  $T$  за единицу измерения температуры и модуль сдвига  $\mu$  принять в качестве единицы измерения напряжения, то в результате найдем, что уравнения (78.6), (78.14) и (78.15) примут соответственно следующую безразмерную форму:

$$\sigma_{ij, j} + X_i = a\ddot{u}_i, \quad (79.1)$$

$$\sigma_{ij} = [(\beta^2 - 2)\Delta - b\theta] \delta_{ij} + 2\gamma_{ij}, \quad (79.2)$$

$$\nabla^2\theta + \bar{\theta} = f \frac{\partial\theta}{\partial t} + g \frac{\partial\Delta}{\partial t}, \quad (79.3)$$

где

$$X_i = \frac{lQ}{\mu} F_i, \quad \bar{\theta} = \frac{Ql^2}{kT} \quad (79.4)$$

обозначают новые функции и

$$a = \left(\frac{l}{c^2\tau}\right)^2, \quad b = \frac{\gamma T}{\mu}, \quad f = \frac{Qcl^2}{k\tau}, \quad g = \frac{\gamma l^2}{k\tau}. \quad (79.5)$$

При определении  $a$  величина  $(\mu/Q)^{\frac{1}{2}}$  была заменена скоростью  $c_2$  распространения  $S$ -волн в теле. Величина  $\beta^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}$  представляет квадрат отношения скорости  $P$ -волн к скорости  $S$ -волн. В зависимости от коэффициента Пуассона величину  $\beta$  можно записать в виде  $\beta^2 = 2(1 + \nu)/(1 - 2\nu)$ .

**80. Задачи об установившихся состояниях.** Если массовые силы и источники тепла не зависят от времени и если поверхностные нагрузки являются статическими

нагрузками, то тогда основная система уравнений (78.6), (78.14) и (78.15) примет вид

$$\tau_{ij} = (\lambda \Delta - \gamma \vartheta) \delta_{ij} + 2\mu \gamma_{ij}, \quad (80.1)$$

$$\kappa \nabla^2 \vartheta + Q = 0, \quad (80.2)$$

$$\tau_{ij,j} + \rho F_i = 0. \quad (80.3)$$

Подставив в уравнение (80.1) модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ , получим следующее уравнение:

$$\tau_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \gamma_{ij} + \frac{1}{1-2\nu} \{ \nu \Delta - (1+\nu) \alpha \vartheta \} \delta_{ij} \right]. \quad (80.4)$$

Для упругого тела, свободного от массовых сил, полагая  $F_i = 0$  и используя формулу

$$\gamma_{ij,j} = \frac{1}{2} \nabla^2 u_i + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta}{\partial x_i},$$

найдем, подставляя соотношение (80.4) в уравнение (80.3):

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_i} + (1-2\nu) \nabla^2 u_i = 2(1+\nu) \alpha \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}. \quad (80.5)$$

Для того чтобы решить это уравнение, Гудьер<sup>1)</sup> вводит термоупругий потенциал  $\varphi$ , с помощью которого вектор перемещения  $u_1, u_2, u_3$  определяется в виде

$$u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \quad (80.6)$$

Подставляя выражение (80.6) в уравнение (80.5), получаем условие, накладываемое на  $\varphi$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [2(1-\nu) \nabla^2 \varphi - 2(1+\nu) \alpha \vartheta] = 0.$$

Таким образом, если выбрать  $\varphi$  так, что

$$\nabla^2 \varphi = m \vartheta(\mathbf{r}), \quad (80.7)$$

где

$$m = \frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu},$$

то вектор перемещения, определяемый уравнением (80.6), является решением уравнений, описывающих установившийся процесс термоупругости.

<sup>1)</sup> Goodier J. N., Phil. Mag. (vii) 23, 1017 (1937).

Уравнение (80.7) в точности соответствует уравнению Пуассона и хорошо известно, что частный интеграл этого уравнения имеет вид

$$\varphi(r) = \frac{m}{-4\pi} \int \frac{\vartheta(r')}{|r-r'|}, \quad (80.8)$$

где интегрирование распространяется на все тело.

Напряженное и деформированное состояния, представляемые частным интегралом (80.8), требуют не только заданного распределения температуры, но также и определенных поверхностных нагрузок, которые могут быть вычислены посредством выражения (80.4) и условий равновесия на границе. Для полного решения задачи требуется лишь определить распределение дополнительных напряжений, обусловленных равными и прямо противоположными нагрузками на границе, что представляет собой задачу теории упругости при заданных нагрузках на границе. Тот факт, что тело нагрето, не играет роли до тех пор, пока упругие постоянные остаются неизменными. Интегралы типа (80.8) были использованы Борхардтом<sup>1)</sup> при общем анализе теории термоупругости и при решении некоторых частных задач в случае несимметричных распределений температуры в теле со сферическими или цилиндрическими границами. Распределение напряжений, обусловленное специальным распределением температуры в бесконечном и полубесконечном телах, обсуждалось различными авторами<sup>2)</sup>. Имеется очень мало *точных* решений даже этих уравнений, описывающих установившееся состояние, а те, которые имеются, относятся к сферами и цилиндрам<sup>3)</sup>, однако в главе 14 книги Тимошенко и Гудьера «Theory of Elasticity» (New York, 1951) рассматривается несколько *приближенных* решений инженерных задач, касающихся термических напряжений в пластинах и стержнях

<sup>1)</sup> Borchardt C. W., Monogr. Akad. Wiss., Berlin, 1873, 9.

<sup>2)</sup> Mindlin R. D., Cheng D. H., J. Appl. Phys. 21, 926 (1950); Myklestad No O. J. Appl. Mech. A1942, 131.

<sup>3)</sup> См., например, стр. 362—367 второго издания книги Сокольникова «Mathematical Theory of Elasticity» (New York, 1956) и оригинальные работы, цитируемые там.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Auerbach F. and Hort W., (редакторы): Handbuch der Physikalischen und Technischen Mechanik, Leipzig, Bd. 3, 1927; Bd. 4, 1931.
2. Bartels J. (редактор): Handbuch der Physik, Bd. XLVII, Geophysik I, Berlin, 1956.
3. Biezeno C. B. and Grammel R., Technische Dynamik, 1939; русский перевод: Бицено С. Б., Граммель Р., Техническая динамика, т. I, М., Гостехиздат, 1950.
4. Brillouin L., Les Tenseurs en Mécanique et en Élasticité, Paris, 1938.
5. Bullen K. E., An Introduction to the Theory of Seismology, Cambridge, 1947.
6. Bullen K. E., Seismology, London, 1954.
7. Butty E., Tratado de elasticidad teoricotecnica (Elastotecnica), vol. 1, Buenos Aires, 1946.
8. Cagniard L., Réflexion et Réfraction des Ondes Séismiques, Paris, 1939.
9. Динник А. Н., Кручение. Теория и приложения, Москва, ОНТИ, 1938.
10. Förpl A. u. L., Drang und Zwang, 2. Aufl., Berlin, Bd. 1, 1924; Bd. 2, 1928; русский перевод: Фёппль А., Фёппль Л., Сила и деформация, т. I, М.—Л., Гостехиздат, 1933.
11. Гольденвейзер А. Л., Теория тонких упругих оболочек, М., Гостехиздат, 1953.
12. Green A. E. and Zerna W., Theoretical Elasticity, Oxford, 1954.
13. Jaeger J. C., Elasticity, Fracture and Flow., London, 1956.
14. Jeffreys H., Cartesian Tensors, Cambridge, 1931.
15. Jeffreys H., The Earth, 3rd ed., Cambridge, 1952.
16. Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика, М., Гостехиздат, 1952.

17. Klitchieff G., Poglavlja iz Teorije Elastičnosti sa Prime-nama, Belgrade, 1950.
18. Колосов Г. В., Применение комплексных диаграмм и тео-рии функций комплексной переменной к теории упругости, ОНТИ, М., 1935.
19. Kolsky H., Strees Waves in Solids, Oxford, 1953.; русский пе-ревод: Волны напряжения в твердых телах, ИЛ., М., 1955.
20. Lesognu L., Théorie Mathématique de l'Élasticité, Paris, 1938.
21. Лейбензон Л. С., Вариационные методы решения задач в теории упругости, М., Гостехиздат, 1943.
22. Lorenz H., Technische Elastizitätslehre, Berlin, 1913.
23. Love A. E. H., Some Problems of Geodynamics, Cambridge, 1911. The Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed., Cam-bridge, 1927; русский перевод: Ляв А., Математическая теория упругости, М.—Л., ОНТИ, 1935.
24. Macelwane J. B., An Introduction to Theoretical Seismo-logy. Part I, Geodynamics, New York, 1936.
25. Murnaghan F. D., Finite Deformations of an Elastic So-lid, New York, 1951.
26. Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи ма-тематической теории упругости, 4 изд., Изд. АН СССР, М., 1954.
27. Новожилов В. В., Основы нелинейной теории упругости, Гос-техиздат, М., 1953.
28. Pippard A. J. S., Strain Energy Methods of Stress Analy-sis, London, 1928.
29. Prescott J., Applied Elasticity, London, 1924.
30. Searle G. F. C., Experimental Elasticity, 2nd ed., Cam-bridge, 1933.
31. Sokolnikoff I. S., Mathematical Theory of Elasticity, 2nd ed., New York, 1956; русский перевод: Сокольников И. С., Математическая теория упругости.
32. Southwell R. V., An Introduction to the Theory of Ela-sticity for Engineers and Physicists, Oxford, 1936; русский перевод: Саутвелл Р. В., Введение в теорию упругости для инженеров и физиков, ИЛ., М., 1948.
33. Synge J. L., The Hupercircle in Mathematical Physics, Cam-bridge, 1957.
34. Timoshenko S. P., Theory of Elastic Stability, New York, 1934; русский перевод: Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М., Гостехиздат, 1955.

35. Timoshenko S. P., Theory of Plates and Shells, New York, 1940; русский перевод: Тимошенко С. П., Пластины и оболочки, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
  36. Timoshenko S. P. and Goodier J. N., Theory of Elasticity, 2nd ed., New York, 1951.
  37. Treloar L. R. G., The Physics of Rubber Elasticity, Oxford, 1949; русский перевод: Трелоар Л., Физика упругости каучука, М., ИЛ, 1953.
  38. Westergaard H. M., Theory of Elasticity and Plasticity, Harvard, 1952.
-

*И. Н. Снеддон, Д. С. Берри*  
Классическая теория упругости

Редактор *И. К. Снитко.*  
Техн. редактор *Л. Ю. Плакше.*  
Корректор *Л. О. Сечейко.*

•  
Сдано в набор 4/V 1961 г. Подписано  
к печати 27/VI 1961 г. Бумага  
84×108<sup>1/2</sup>. Физ. печ. л. 6,875 Усл.  
печ. л. 11,28 Уч.-изд. л. 9,52  
Тираж 10 000 экз. Цена книги 68 коп.  
Заказ № 1029

•  
Государственное издательство физико-  
математической литературы.  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

•  
Московская типография № 5 Мосгор-  
совнархоза. Москва, Трехпрудный  
пер., 9.