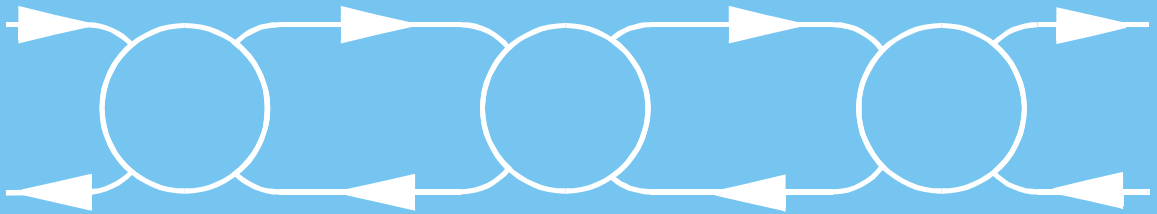


**Б.С.Лившиц,  
А.П.Пшеничников,  
А.Д.Харкевич**

# **ТЕОРИЯ ТЕЛЕТРАФИКА**





Б.Слившиц, А.П.Пшеничников, А.Д.Харкевич

# ТЕОРИЯ ТЕЛЕТРАФИКА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством связи СССР  
в качестве учебника для студентов электротехнических институтов связи



МОСКВА «СВЯЗЬ» 1979

ББК 32.88  
Л55  
УДК 621.391

РЕЦЕНЗЕНТЫ: Ю. Н. КОРНЫШЕВ, О. С. ШИЛОВ, М. А. ШНЕПС

**Лившиц Б. С. и др.**

Л55 Теория телетрафика/Лившиц Б. С., Пшеничников А. П., Харкевич А. Д.  
Учебник для вузов.—  
2-е изд., перераб. и доп. — М.: Связь, 1979.—224 с., ил.

Рассматривается теория обслуживания телефонно-телеграфных сообщений. Описываются системы связи как системы массового обслуживания, неблокирующие коммутационные схемы (с потерями и ожиданием) и блокирующие (двух- и многозвеньевые). Приведены задачи с решениями и указаниями к решениям, а также вопросы для самопроверки.  
Учебник предназначен для студентов вузов связи.

Л  $\frac{30602-176}{045(01)-79}$  46-79 2402040000  $\frac{ББК 32,88}{6Ф1}$

© Издательство «Связь», 1979 г,

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ.....	5
Предисловие .....	7
Основные обозначения .....	8
ГЛАВА ПЕРВАЯ .....	10
Предмет и задачи теории телетрафика.....	10
1.1. Теория телетрафика – одна из ветвей теории массового обслуживания.....	10
1.2. Математические модели систем распределения информации .....	10
1.3. Основные задачи теории телетрафика .....	11
1.4. Общие сведения о методах решения задач теории телетрафика .....	12
1.5. Краткий исторический обзор развития теории телетрафика.....	13
ГЛАВА ВТОРАЯ.....	16
Потоки вызовов .....	16
2.1. Основные понятия.....	16
2.2. Принципы классификации потоков вызовов .....	17
2.3. Характеристики потоков вызовов.....	18
2.4. Простейший поток вызовов.....	19
2.5. Нестационарный и неординарный пуассоновские потоки .....	23
2.6. Потоки с простым последствием .....	24
2.7. Симметричный и примитивный потоки.....	25
2.8. Поток с повторными вызовами .....	26
2.9. Поток с ограниченным последствием. Поток Пальма .....	26
2.10. Просеивание потоков. Потоки Эрланга .....	27
2.11. Длительность обслуживания .....	28
2.12. Поток освобождений.....	28
ГЛАВА ТРЕТЬЯ.....	31
Нагрузка. Характеристики качества обслуживания.....	31
3.1. Поступающая, обслуженная, потерянная нагрузки .....	31
3.2. Концентрация нагрузки .....	33
3.3. Основные параметры и расчет интенсивности нагрузки.....	34
3.4. Характеристики качества обслуживания потоков вызовов.....	37
3.5. Пропускная способность коммутационных систем .....	39
ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.....	42
Полнодоступный пучок. Система с потерями.....	42
4.1. Обслуживание вызовов симметричного потока с простым последствием .....	42
4.2. Обслуживание вызовов простейшего потока .....	47
4.3. Обслуживание вызовов примитивного потока .....	54
ГЛАВА ПЯТАЯ.....	62
Полнодоступный пучок. Система с ожиданием .....	62
5.1. Обслуживание вызовов простейшего потока при показательном законе распределения длительности занятия.....	62
5.2. Обслуживание вызовов простейшего потока при постоянной длительности занятия .....	68
5.3. Область применения систем с ожиданием.....	72
ГЛАВА ШЕСТАЯ.....	76
Полнодоступный пучок. Система с повторными вызовами.....	76
6.1. Постановка задачи.....	76
6.2. Предельная величина интенсивности поступающей нагрузки .....	77
6.3. Уравнения вероятностей состояний системы с повторными вызовами.....	78
6.4. Основные характеристики качества работы системы с повторными вызовами.....	79
ГЛАВА СЕДЬМАЯ.....	82
Метод статистического моделирования в задачах теории телетрафика .....	82
7.1. Общие сведения.....	82
7.2. Моделирование случайных величин .....	82
7.3. Моделирование коммутационных систем на универсальных вычислительных машинах.....	85
7.4. Точность и достоверность результатов моделирования .....	87
ГЛАВА ВОСЬМАЯ.....	89
Неполнодоступное включение. Системы с потерями.....	89
8.1. Общие сведения.....	89
8.2. Некоторые характеристики неполнодоступных схем .....	90
8.3. Выбор структуры ступенчатой неполнодоступной схемы .....	92
8.4. Выбор структуры равномерной неполнодоступной схемы .....	94
8.5. Построение цилиндров .....	95
8.6. Идеально симметричная неполнодоступная схема .....	96
8.7. Формула Эрланга для идеально симметричной неполнодоступной схемы.....	98

8.8. Априорные методы определения потерь в неполнодоступных схемах.....	100
8.9. Инженерный расчет неполнодоступных схем.....	103
ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.....	106
Звеньевые коммутационные системы.....	106
9.1. Общие сведения.....	106
9.2. Комбинаторный метод. Полнодоступное включение выходов.....	107
9.3. Потери в двухзвеньевых схемах при отсутствии сжатия и расширения.....	109
9.4. Потери в двухзвеньевых схемах при наличии сжатия или расширения.....	110
9.5. Двухзвеньевые неполнодоступные схемы.....	112
9.6. Метод эффективной доступности.....	114
9.7. Структура многозвеньевых коммутационных схем.....	117
9.8. Способы межзвеньевых соединений и методы искания в многозвеньевых схемах.....	119
9.9. Расчет многозвеньевых коммутационных схем в режиме группового искания. Метод КЛИГС.....	119
9.10. Метод вероятностных графов.....	122
9.11. Оптимизация многозвеньевых коммутационных схем.....	125
ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.....	128
Распределение нагрузки и потерь на сетях связи.....	128
10.1. Качество обслуживания на автоматически коммутируемых сетях связи.....	128
10.2. Расчет нагрузок на входах и выходах ступеней искания коммутационных узлов.....	130
10.3. Расчет нагрузок, поступающих на регистры и маркеры.....	132
10.4. Способы распределения нагрузки.....	132
10.5. Колебания нагрузки. Расчетная интенсивность нагрузки.....	137
ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ.....	141
Управляемые элементы сети связи и методы определения ее характеристик.....	141
11.1. Общие сведения.....	141
11.2. Обходные направления и использование метода эквивалентных замен при расчете числа линий в обходных пучках.....	142
11.3. Динамическое управление. Характер задач, возникающих при управлении потоками.....	144
11.4. Кроссовая коммутация как управление структурой сети.....	145
11.5. Метод укрупнения состояний пучков при определении характеристик управляющей информации.....	146
ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ.....	151
Измерения параметров нагрузки и потерь.....	151
12.1. Цели и задачи измерений.....	151
12.2. Принципы измерений параметров нагрузки и потерь.....	151
12.3. Обработка результатов измерений.....	152
12.4. Определение объема измерений.....	156

## Предисловие

Книга «Теория телетрафика» предназначена в качестве учебника по одноименному курсу для студентов электротехнических институтов связи специальности 0702 «Автоматическая электросвязь». Этот курс включен в учебный план, утвержденный в 1974 г., вместо курса «Теория телефонных и телеграфных сообщений», который читался на шестом семестре. Первый учебник «Теория телефонных и телеграфных сообщений» был издан в 1971 г. Так как по новому учебному плану на шестом семестре в курсе «Автоматические системы коммутации» изучаются принципы построения коммутационных систем, то из курса «Теория телетрафика» данный раздел исключен. Уточнено также распределение материала между курсами «Теория телетрафика», «Автоматические системы коммутации» и «Теория сетей связи» в части, относящейся к конкретному проектированию станций и сетей связи. Учтены замечания по содержанию первого издания учебника, а также опыт преподавания курса в вузах связи.

При отборе материала, в соответствии с утвержденной в 1974г. программой, ставилась задача изложить наиболее важные проблемы теории телетрафика на современном научном уровне, базируясь на теории вероятностей и других разделах математики в объеме вузовской программы. При этом значительное внимание уделялось изложению физической сущности изучаемых процессов, развитию навыков использования полученных знаний при решении практических задач, созданию достаточно прочной базы для дальнейшей самостоятельной работы в этой области. Большинство глав снабжено задачами с решениями, контрольными вопросами, большим иллюстративным материалом.

Авторы выражают искреннюю признательность Я. В. Фидлину за большой вклад в создание первого издания учебника, который сыграл важную роль в формировании данной книги, Ю. Н. Корнышеву, О. С. Шилову, М. А. Шнепсу за большую и полезную работу, выполненную ими при рецензировании рукописи книги, Г. Б. Метельскому, Н. П. Мамонтовой, Э. И. Мелик-Гайказовой за многочисленные советы, рекомендации и помощь при подготовке рукописи учебника. Параграф 11.5 написан М. Ф. Шимко. Глава 12 написана А. П. Пшеничниковым. Им же переработаны гл. 3 и 10 первого издания учебника и совместно с другими авторами составлена гл. 1. Остальные главы написаны Б. С. Лившицем и А. Д. Харкевичем. Все замечания и пожелания по книге следует направлять в издательство «Связь» по адресу: 101000, Москва, Чистопрудный бульвар, д. 2.

*Авторы*

## Основные обозначения

- $B_{v,d}(y)$  – третья формула Эрланга  
 $C$  – число точек коммутации  
 $\bar{c}$  – среднее число вызовов, поступающих от одного источника нагрузки в единицу времени  
 $C_n^m$  – число сочетаний из  $n$  по  $m$   
 $D(X)$  – дисперсия случайной величины  $X$   
 $D_v(y)$  – вторая формула Эрланга  
 $d$  – доступность  
 $E$  – эрланговское распределение  
 $E_v(y)$  – первая формула Эрланга  
 $F(x)$  – функция распределения вероятностей случайной величины  $X$   
 $f(x)$  – плотность распределения вероятностей случайной величины  $X$   
 $f$  – связность в многозвеневой коммутационной системе  
 $f_{ij}$  – коэффициент тяготения от АТС <sub>$i$</sub>  к АТС <sub>$j$</sub>   
 $g$  – число нагрузочных групп в неполнодоступной схеме  
 $H_i$  – вероятность занятия  $i$  фиксированных линий в пучке  
 $h$  – постоянная длительность занятия  
 $M(X)$  – математическое ожидание случайной величины  $X$   
 $N_j$  – численность  $j$ -й группы элементов в генеральной совокупности  
 $n_{ij}$  – нормированный коэффициент тяготения  
 $p$  – вероятность  
 $p_b, p_v, p_n$  – соответственно потери по времени, вызовам, нагрузке  
 $q$  – число выходов из одного коммутатора в направлении искания  
 $q_t$  – выравнивающий коэффициент  
 $R$  – среднее значение интенсивности избыточной нагрузки  
 $s(t)$  – состояние коммутационной системы в момент времени  $t$   
 $T$  – средняя длительность разговора  
 $\bar{t}$  – средняя длительность занятия  
 $V$  – коэффициент вариации  
 $v$  – число линий (приборов) в пучке  
 $W_i$  – вероятность занятия  $i$  любых линий пучка  
 $\omega$  – вероятность занятия дуги графа  
 $X$  – случайная величина  
 $x$  – реализация случайной величины  
 $Y_{ij}$  – вектор нагрузки от АТС <sub>$i$</sub>  к АТС <sub>$j$</sub>   
 $y(t_1, t_2)$ , – соответственно поступающая, обслуженная и потерянная, нагрузки за промежуток  
 $y_o(t_1, t_2)$  ток времени  $[t_1, t_2]$   
 $y_n(t_1, t_2)$   
 $y, y_o, y_n$  – соответственно интенсивности поступающей, обслуженной и потерянной нагрузок  
 $Z$  – коэффициент сгущенности нагрузки  
 $z_i$  – промежуток времени между  $(i-1)$  и  $i$ -м вызывающими моментами  
 $\Delta$  (дельта) – предельная ошибка выборки  
 $\eta$  (эта) – средняя интенсивность обслуженной нагрузки одной линией пучка  
 $\chi$  (каппа) – средняя интенсивность поступающей нагрузки на одну линию пучка  
 $\lambda$  (лямбда) – параметр стационарного потока вызовов  
 $\mu$  (мю) – интенсивность стационарного потока вызовов  
 $\nu$  (ню) – параметр стационарного потока освобождений  
 $\Xi$  (кси) – случайная величина  
 $\xi$  (кси) – реализация случайной величины  
 $\pi_k(t, t+\tau)$  – вероятность поступления  $k$  и более вызовов за промежуток  
(пи) времени  $[t, t+\tau]$



$\sigma(X)$  (сигма) – среднее квадратическое отклонение случайной величины  $X$   
 $\tau$  (тау) – интервал времени

## Предмет и задачи теории телетрафика

### 1.1. Теория телетрафика – одна из ветвей теории массового обслуживания

В повседневной жизни приходится постоянно сталкиваться с обслуживанием, т. е. удовлетворением некоторых потребностей, и очень часто с очередями, когда обслуживание является массовым. Примерами процессов массового обслуживания могут служить продажа билетов в железнодорожных, театральных и других кассах, обслуживание бригадой рабочих группы станков, осуществление телефонной связи и т. д. Естественно, что во всех случаях большое значение имеет степень удовлетворения потребности в обслуживании, или качество обслуживания. Так, при осуществлении телефонной связи важно знать, как долго придется ожидать соединения с требуемым абонентом после заказа междугородного разговора при ручном способе установления соединений или сколько в среднем попыток необходимо сделать для установления соединения при автоматическом способе.

Количественная сторона процессов массового обслуживания является предметом раздела прикладной математики, которую советский математик А. Я. Хинчин (1894–1959 гг.) назвал *теорией массового обслуживания*. Родилась теория массового обслуживания в первой четверти XX века вследствие возникновения потребностей разработки математических методов для оценки качества функционирования телефонных систем. Основателем теории телетрафика, из которой «выросла» теория массового обслуживания, является датский ученый А. К. Эрланг (1878–1929 гг.) – сотрудник Копенгагенской телефонной компании.

В теории массового обслуживания все рассматриваемые объекты объединяются под общим названием «системы массового обслуживания». Одним из классов систем массового обслуживания являются *системы распределения информации* (системы телетрафика). Системой распределения информации могут быть совокупность коммутационных приборов, часть или весь коммутационный узел либо сеть связи, которые обслуживают по определенному алгоритму телефонные, телеграфные и другие сообщения.

В настоящее время методы теории массового обслуживания используются для решения самого широкого круга задач – от бытового обслуживания до космических исследований, однако определяющую роль в развитии теории массового обслуживания продолжает играть одна из ее ветвей – теория телетрафика.

*Предметом* теории телетрафика является количественная, сторона процессов обслуживания потоков сообщений в системах распределения информации.

### 1.2. Математические модели систем распределения информации

Как и любая другая математическая теория, теория телетрафика оперирует не с самими системами распределения информации, а с их математическими моделями. *Математическая модель* системы распределения информации включает следующие три основных элемента: *входящий поток вызовов* (требований на обслуживание), *схему* системы распределения информации, *дисциплину обслуживания* потока вызовов.

В гл. 2 и 3 учебника подробно изучаются свойства и параметры случайных потоков вызовов и нагрузки. Колеблемость интенсивности нагрузки, распределение ее во времени и по направлениям рассмотрены в гл. 10, а измерение параметров нагрузки на действующих системах распределения информации – в гл. 12.

Схемы систем распределения информации подробно изучаются в курсе «Автоматические системы коммутации». Простейшей схемой является однозвеньевая полнодоступная схема. Процессы ее взаимодействия с различными потоками сообщений при обслуживании с потерями и с ожиданием подробно рассматриваются в гл. 4, 5 и 6. Методы расчета пропускной способности однозвеньевых неполнодоступных схем описаны в гл. 8, а полнодоступных и не-полнодоступных многозвеньевых схем – в гл. 9.

Дисциплина обслуживания характеризует взаимодействие потока вызовов с системой распределения информации. В теории телетрафика дисциплина обслуживания в основном описывается следующими характеристиками:

способами обслуживания вызовов (с потерями, с ожиданием, комбинированное обслуживание);

порядком обслуживания вызовов (в порядке очередности, в случайном порядке, обслуживание пакетами и др.);

режимами искания выходов схемы (свободное, групповое, индивидуальное);

законами распределения длительности обслуживания вызовов (показательный закон, постоянная или произвольная длительность обслуживания);

наличием преимуществ (приоритетов) в обслуживании некоторых категорий вызовов;

наличием ограничений при обслуживании всех или некоторых категорий вызовов (по длительности ожидания, числу ожидающих вызовов, длительности обслуживания);

законами распределения вероятностей выхода из строя элементов схемы.

Некоторые из перечисленных характеристик могут быть связаны с потоком вызовов и (или) схемой, другие характеристики могут не зависеть ни от потока, ни от схемы. Например, закон распределения длительности обслуживания может быть связан с потоком вызовов, порядок обслуживания вызовов может зависеть и от потока вызовов и от схемы, а способ обслуживания вызовов, как правило, не зависит ни от потока, ни от схемы.

В научной литературе для компактной записи математических моделей часто пользуются обозначениями, предложенными Д. Кендаллом, и модифицированными – Г. П. Башариным. Математическую модель обозначают последовательностью символов. Первый символ обозначает функцию распределения промежутков между вызовами, второй – функцию распределения длительности обслуживания, третий и последующие символы – схему и дисциплину обслуживания. Для обозначения распределений введены следующие символы:  $M$  – показательное,  $E$  – эрланговское,  $D$  – равномерной плотности,  $G$  – произвольное. Для многомерного случая над символами ставятся стрелки. Схема системы телетрафика обозначается символом  $S$ . Если схема представляет собой полнодоступный пучок линий, то вместо  $S$  пишется  $\nu$ , где  $\nu$  – число линий. Если вызовы обслуживаются с ожиданием, то число мест для ожидания обозначают символом  $r$ . Символ  $f$  с индексами вводится для обозначений приоритетов в обслуживании.

Приведем несколько примеров. Так,  $M/M/S$  обозначает схему  $S$ , на которую поступает поток с показательной функцией распределения промежутков между вызовами и показательной функцией распределения длительности обслуживания (простейший поток вызовов). Запись  $M/M/\nu < \infty$  обозначает полнодоступный пучок с конечным числом линий, который обслуживает с потерями простейший поток вызовов. Запись  $\vec{M}_k / \vec{G}_k / \nu / r < \infty / f_0^0$  обозначает полнодоступный пучок из  $\nu$  линий, который обслуживает с ожиданием  $k$  потоков с показательными функциями распределения промежутков между вызовами; каждый поток имеет произвольную функцию распределения длительности обслуживания; число мест для ожидания  $r < \infty$ ; постановка вызовов в очередь осуществляется без приоритетов –  $f^0$ , выборка из очереди – также без приоритетов –  $f_0$ .

Построение математической модели, адекватно отображающей реальную систему распределения информации, во многих случаях является нетривиальной задачей. От правильного выбора модели в конечном счете зависит успех решения всей задачи.

### 1.3. Основные задачи теории телетрафика

Основная цель теории телетрафика заключается в разработке методов оценки качества функционирования систем распределения информации. В соответствии с этим на первом месте в теории телетрафика стоят задачи анализа, т. е. отыскание зависимостей и значений величин, характеризующих качество обслуживания, от характеристик и параметров входящего потока вызовов, схемы и дисциплины обслуживания. Эти задачи в начальный период развития телефонной техники были более актуальными, чем задачи синтеза, и решались, как правило, с помощью теории вероятностей.

Поэтому наиболее значительные результаты на сегодняшний день получены при решении задач анализа.

Развитие координатной и особенно квазиэлектронной и электронной коммутационной техники поставило перед теорией телетрафика сложные вероятностно-комбинаторные задачи синтеза, в которых требуется определить структурные параметры коммутационных систем при заданных потоках, дисциплине и качестве обслуживания.

Близкими к задачам анализа и синтеза являются задачи оптимизации. Эти задачи при проектировании систем распределения информации формулируются следующим образом: определить такие значения структурных параметров коммутационной системы (алгоритмы функционирования), для которых: 1) при заданных потоках, качестве и дисциплине обслуживания стоимость или объем оборудования системы распределения информации минимальны и 2) при заданных потоках, дисциплине обслуживания и стоимости качественные показатели функционирования системы распределения информации оптимальны.

При эксплуатации систем распределения информации задача оптимизации формулируется как задача управления потоками вызовов или структурой системы для достижения наилучших показателей качества функционирования. Из-за больших вычислительных трудностей задачи оптимизации систем распределения информации начали ставиться и решаться в последние два десятилетия после появления быстродействующих ЭВМ. Некоторые результаты решения задач этого класса для станций и узлов автоматической коммутации излагаются в курсе «Автоматические системы коммутации», а для сетей связи – в курсе «Теория сетей связи».

#### **1.4. Общие сведения о методах решения задач теории телетрафика**

Основным математическим аппаратом теории телетрафика являются теория вероятностей, математическая статистика и комбинаторика.

Значительные результаты теории телетрафика получены благодаря сформулированному А. К. Эрлангом понятию *статистического равновесия*, вероятностный процесс находится в состоянии статистического равновесия, если его вероятностные характеристики не зависят от времени. Понятие статистического равновесия не только стимулировало развитие теории телетрафика, но и способствовало практическому применению и дальнейшему развитию теории вероятностей.

Методы математической статистики применяются при оценке результатов наблюдений за параметрами потоков вызовов и показателями качества обслуживания в действующих системах распределения информации, а также при моделировании таких систем.

При анализе, синтезе и оптимизации структурно-сложных систем распределения информации кроме вероятностных методов используются комбинаторные и алгебраические методы, теория множеств, принципы системного подхода (системотехники). Основными методами решения задач в теории телетрафика являются аналитические, численные и метод статистического моделирования.

*Аналитические методы* позволяют решать задачи теории телетрафика в тех случаях, когда структура системы, характеристики потока и дисциплина обслуживания относительно просты. При этом рассматриваются все возможные состояния системы, определяемые положением каждой точки коммутации или другого элемента системы при наиболее подробном ее описании. Такие состояния называются *микросостояниями* системы. Каждый раз, когда поступает новый вызов, заканчивается какая-либо фаза работы управляющего устройства по установлению соединения или заканчивается соединение, система меняет свое микросостояние. Для каждого микросостояния записывается уравнение статистического равновесия. Решая систему таких уравнений, находят точное решение задачи в пределах принятой модели.

Для сложных систем число микросостояний так велико, что решить систему уравнений статистического равновесия не представляется возможным даже с помощью самых быстродействующих ЭВМ. Более перспективным является так называемый макроподход. В сложной системе с очень большим числом микросостояний имеется тот или иной признак, по

которому микросостояния объединяются в *классы-макросостояния*. Путем усреднения определяются интенсивности переходов из одних макросостояний в другие. Для каждого макросостояния записывается уравнение статистического равновесия. В результате решения системы таких уравнений выводятся точные или приближенные формулы для вероятностей макросостояний. Чтобы представить трудности, связанные с использованием аналитических методов, достаточно указать, что число микросостояний недоступного пучка из  $\nu$  линий оценивается как  $2^\nu$ . Например, при  $\nu = 20$  число состояний более  $10^6$ . Для решения задач такой размерности с помощью ЭВМ используются специальные алгоритмы, позволяющие находить приближенные решения итерационными или другими *численными методами*. Изложение этих методов дано в монографии М. А. Шнепса [57].

Наиболее универсальным методом, который пригоден для решения задач практически любой сложности, является *метод статистического моделирования*. Метод заключается в построении математической модели системы, реализация которой осуществляется в виде программы для ЭВМ. Моделирование позволяет получить численные результаты, характеризующие качество обслуживания при заданных параметрах потока, схемы и дисциплины обслуживания. Однако в силу специфики метода он менее удобен по сравнению с аналитическим и численным методами при определении скрытых закономерностей функционирования или зависимостей между отдельными характеристиками системы. Метод статистического моделирования как наиболее универсальный метод решения сложных задач подробно рассматривается в гл. 7.

Во многих случаях разумное сочетание аналитических и численных методов с методом статистического моделирования позволяет детально проанализировать исследуемую систему. При малых значениях параметров системы удается получить решение точными аналитическими методами и проанализировать предельные случаи при асимптотическом поведении характеристик изучаемой системы. Полученные сведения дополняются результатами статистического моделирования в области реальных значений параметров системы.

Оценивая результаты исследований систем распределения информации любыми математическими методами, следует помнить, что математика оперирует не с реальными системами, а с их математическими моделями. Так как математические модели всегда лишь приближенно описывают реальные системы, то никакие математические методы не могут заменить исследований, проводимых на реально функционирующих системах.

### **1.5. Краткий исторический обзор развития теории телетрафика**

Основы теории телетрафика были заложены в работах А. К. Эрланга в 1908–1918 гг. по исследованию пропускной способности полнодоступного пучка линий, обслуживающего простейший поток вызовов с потерями и с ожиданием. По-видимому, под влиянием статистической механики А. К. Эрланг ввел понятие статистического равновесия и использовал его как теоретическую основу для получения своих широко известных формул для вероятности потерь и ожидания. Он рассматривал входящий поток вызовов от бесконечного числа источников при показателем и постоянном времени обслуживания.

Труды А. К. Эрланга послужили толчком для других работ, которые были связаны с подтверждением, развитием или опровержением его результатов. В 1918 г. Т. Энгсет обобщил результаты А. К. Эрланга на случай обслуживания полнодоступным пучком потока вызовов от конечного числа источников нагрузки, в 1927 г. Г. О'Делл опубликовал результаты исследований по недоступным ступенчатым включениям, Э. Молина – по теории группо-образования, в 1928 г. Т. Фрай написал первую книгу по теории вероятностей, в которой одна из глав была посвящена теории телетрафика. В 1933 г. советский математик А. Н. Колмогоров выполнил свою классическую работу по аксиоматическому обоснованию теории вероятностей, в которой идея А. К. Эрланга о статистическом равновесии была отождествлена со стационарной мерой марковского процесса. В этот период появились первые работы А. Я. Хинчина по исследованию систем с ожиданием.

В 1943 г. шведский ученый К. Пальм обобщил результаты А. К. Эрланга на случай обслуживания потока с ограниченным последствием, получил важные результаты по

изучению колеблемости телефонной нагрузки. К этому времени в связи с разработкой координатных АТС появилась необходимость в методах расчета пропускной способности многозвеньевых коммутационных систем. Первое большое исследование в этом направлении было выполнено в 1950 г. К. Якобеусом и основывалось на априорных распределениях вероятностей состояний системы. Другой метод расчета потерь в таких системах – метод вероятностных графов – был предложен К. Ли в 1955 г.

Обобщение и развитие методов теории телетрафика и, в первую очередь, работ А. К. Эрланга и К. Пальма были выполнены А. Я. Хинчиным в 1955 г. В виде отдельной книги работа издана в 1963 г. [56].

Автоматизация междугородной телефонной связи поставила перед теорией телетрафика задачу расчета пропускной способности сетей с обходными направлениями. Первые работы по этому вопросу были опубликованы в 1956 г. Р. Вилкинсоном и независима Г. Бретшнайдером. Исследование параметров избыточной нагрузки на таких сетях выполнено Д. Риорданом [51]. С автоматизацией междугородной связи тесно связана проблема повторных вызовов. Этой проблемой занимались ученые многих стран: Л. Костен, Ж. Коэн (Нидерланды), А. Эллдин (Швеция), П. Ле-Галль (Франция), М. А. Шнепс, Г. Л. Ионин, Ю. Н. Корнышев (СССР).

Развитие квазиэлектронной техники поставило перед теорией телетрафика проблему синтеза многозвеньевых коммутационных систем. В 1953 г. Ч. Клоз опубликовал первую работу по многозвеньевым неблокирующим коммутационным схемам, а в начале 60-х годов серию работ по анализу и синтезу многозвеньевых схем выполнил В. Бенеш. Результаты этой работы изложены в его монографии [37].

В перечисленных выше работах исследования выполнялись аналитическими или численными методами. Первые попытки статистического моделирования систем распределения информации относятся к 20-м годам. Для этих целей использовались специальные машины искусственной телефонной нагрузки. Основным недостатком таких машин по сравнению с ЭВМ является их узкая специализация. Машины искусственной телефонной нагрузки создавались годами, в то время как написание программ моделирования на ЭВМ занимает от нескольких недель до нескольких месяцев и программы сравнительно легко поддаются изменению. Впервые системы телетрафика на ЭВМ начали изучать в Швеции Г. Неовиус (1955 г.) и Б. Валлстрем (1958 г.), а в СССР в начале 60-х годов Г. П. Башарин в Москве, Б. С. Лившиц в Ленинграде, М. А. Шнепс в Риге. В настоящее время во всех странах, где ведутся работы по теории телетрафика, используется и метод статического моделирования.

Большое влияние на развитие теории телетрафика оказывают организованные в 1955 г. и проводимые каждые три года Международные конгрессы по телетрафику. Восьмой конгресс состоялся в 1976 г. в Австралии, очередной, девятый конгресс состоится в 1979 г. в Испании.

Последнее десятилетие в развитии теории телетрафика характеризуется стремлением к обобщению накопленных результатов. Кроме названных выше монографий А. Я. Хинчина, В. Бенеша, Д. Риордана на русском языке по теории телетрафика изданы книги [42–45, 54, 57, 58]. Многие вопросы теории телетрафика рассмотрены в книгах по теории массового обслуживания [36, 39, 46]. Обширная библиография по теории массового обслуживания и теории телетрафика (1289 наименований) содержится в монографии Т. Л. Саати [52].

Из большого числа нерешенных проблем, которыми занимается в настоящее время теория телетрафика, остановимся здесь лишь на двух, которые представляются нам наиболее важными.

1. Разработка методов анализа, синтеза и оптимизации систем распределения информации в целом. Необходимость решения данной проблемы диктуется введением программного управления в системы распределения информации, интеграцией систем распределения, передачи информации и ЭВМ. Будущие системы электросвязи будут совмещать в себе функции обработки, распределения и передачи информации. Ясно, что при разработке методов анализа, синтеза и оптимизации таких систем должен использоваться системный подход.

2. Разработка методов анализа, синтеза, управления и оптимизации сетей электросвязи.

Трудности решения задачи связаны со сложной структурой сетей, передачей различных видов информации, непрерывным развитием сетей, неопределенностью многих исходных данных, большой размерностью задачи.

При решении указанных задач приходится использовать не только методы теории телетрафика, но и других областей знаний и, в первую очередь, общей теории систем.

Приведенный краткий обзор развития теории телетрафика далеко не охватывает всех направлений, по которым получены результаты или выполняются исследования, однако позволяет проследить общую тенденцию развития теории от решения частных задач к разработке все более общих методов.

### **Контрольные вопросы**

1. Назовите основные элементы математических моделей систем распределения информации.
2. Назовите основные характеристики дисциплин обслуживания.
3. Сформулируйте задачи анализа, синтеза и оптимизации в теории телетрафика.
4. Поясните способ записи математических моделей систем телетрафика, предложенный Д. Кендаллом.
5. Назовите основные методы решения задач в теории телетрафика.
6. Что такое микро- и макросостояния систем распределения информации?
7. Назовите основные недостатки метода исследования с помощью машин искусственной телефонной нагрузки.

# Г Л А В А   В Т О Р А Я

## П О Т О К И   В Ы З О В О В

### 2.1. Основные понятия

Потоком вызовов (в общем случае – событий) называется последовательность вызовов, поступающих через какие-либо интервалы или в какие-либо моменты времени. В теории массового обслуживания под потоком вызовов принято понимать не только последовательность вызовов, поступающих от группы абонентов или группы устройств телефонной сети, но и другие последовательности событий, например поток телеграмм, поток писем, поток неисправностей отдельных коммутационных устройств или телефонных сооружений в целом, поток информации, поступающей на ЭВМ, поток неисправностей в станках и т. п. Рассматриваемые в настоящей главе свойства, характеристики, закономерности потоков вызовов не ограничиваются узкими рамками изучения потоков телефонных вызовов, а имеют более широкую область применения.

Следует различать детерминированный и случайный потоки вызовов. Детерминированный поток вызовов – последовательность вызовов, в которой вызовы поступают в определенные, строго фиксированные неслучайные моменты или через определенные, строго фиксированные, неслучайные промежутки времени. Случайный поток вызовов отличается от детерминированного тем и только тем, что моменты поступления вызовов и промежутки времени между вызовами являются не строго фиксированными, а случайными величинами. Детерминированные потоки являются частным случаем случайных потоков и на практике встречаются редко. Примерами их могут служить: поток сеансов связи с искусственными спутниками Земли, поток поступления деталей и выхода изделий ритмично работающего завода и т. п. Строго говоря, даже в таких потоках часто имеют место случайности. В связи с этим в теории телетрафика основное внимание уделяется рассмотрению случайных потоков вызовов.

Условимся в дальнейшем случайные величины обозначать прописными (большими) буквами, а их возможные значения – соответствующими строчными (малыми) буквами.

Поток вызовов может быть определен тремя эквивалентными способами: последовательностью вызывающих моментов  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , последовательностью промежутков времени между вызывающими моментами  $z_1, z_2, \dots, z_n$  и последовательностью чисел  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , определяющих количество вызовов, поступающих в течение заданных отрезков времени  $[t_0, t_1)$ ,  $[t_0, t_2)$ , ...,  $[t_0, t_n)$ . При этом под вызывающим моментом понимается момент одновременного поступления одного, двух и более вызовов; для вызывающих моментов всегда, если  $t_i > t_{i-1}$ , то  $z_i > 0$ , в то время как для момента поступления вызова  $t_i \geq t_{i-1}$  и  $z_i \geq 0$ .

Определение случайного потока вызовов связано с определением в вероятностном смысле либо последовательности вызывающих моментов, либо последовательности промежутков между вызывающими моментами, либо последовательности чисел вызовов, поступающих в течение отрезков времени  $[t_0, t_1)$ ,  $[t_0, t_2)$ , ...,  $[t_0, t_n)$ .

Для задания случайных потоков вызовов, как и любых других случайных величин и процессов, используются функции распределения. *Функцией распределения вероятностей некоторой случайной величины  $X$  называется функция*

$$F(x) = P\{X < x\}, \quad (2.1)$$

*определяющая вероятность того, что  $X < x$ , где  $x$  – определенная, заданная величина.* С учетом изложенного, для задания случайного потока вызовов могут быть использованы следующие эквивалентные способы:

- 1) совместный закон распределения  $n$  случайных вызывающих моментов

$$P\{T_i < t_i, i = 1, 2, \dots, n\} = P\{T_1 < t_1, T_2 < t_2, \dots, T_n < t_n\}, \quad (2.2)$$

где  $T_i$  –  $i$ -й вызывающий момент;  $n$  может принимать любое значение;

- 2) совместный закон распределения  $n$  случайных промежутков времени между



вызывающими моментами

$$P\{Z_i < z_i, i = 1, 2, \dots, n\} = P\{Z_1 < z_1, Z_2 < z_2, \dots, Z_n < z_n\}, \quad (2.3)$$

где  $Z_i$  – промежуток времени между  $(i-1)$ - и  $i$ -м вызывающими моментами;  $n$  может принимать любое значение;

3) совместный закон распределения числа вызовов  $K$  на  $n$  отрезках времени  $[t_0, t_1), [t_0, t_2), \dots, [t_0, t_n)$ :

$$P\{K(t_0, t_i) = k_i, i = 1, 2, \dots, n\} = P\{K(t_0, t_1) = k_1, K(t_0, t_2) = k_2, \dots, K(t_0, t_n) = k_n\}, \quad (2.4)$$

где  $n$  может принимать любое значение;  $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$ ;  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ .

Введем некоторые ограничения на рассматриваемые случайные потоки вызовов.

Потоки вызовов подразделяются на неоднородные и однородные. В *неоднородном* потоке вызовов каждый вызов имеет две и более характеристики. Например, вызовы, поступающие от абонентов телефонной сети, определяются моментами их поступления, направлениями установления соединений, длительностью их обслуживания и другими характеристиками. Аналогично телеграммы, поступающие на телеграф, характеризуются моментами их поступления, направлениями их передачи, количеством слов в телеграмме и т. д.

*Однородный* поток вызовов характеризуется последовательностью, определяющей только закономерность поступления вызовов, т. е. последовательностью моментов поступления вызовов или промежутков времени между вызовами, либо иным способом задания потока вызовов.

На практике потоки вызовов, как правило, являются неоднородными. Несмотря на это, целесообразно отдельно от других характеристик потоков вызовов изучить последовательности моментов поступления вызовов. Поэтому в дальнейшем под потоком вызовов будем понимать однородный поток вызовов.

Ограничимся рассмотрением потоков, в которых на любом конечном отрезке времени поступает конечное число вызовов и математическое ожидание числа поступающих вызовов также является конечной величиной. Такие потоки называются *финитными*.

*Математическое ожидание числа вызовов, поступающих в интервале времени  $[0, t)$ , называется ведущей функцией потока.* Обозначим эту функцию  $\Delta(0, t)$ . Функция  $\Delta(0, t)$  – неотрицательная, неубывающая и в практических задачах принимает конечное значение. *Потоки с непрерывной ведущей функцией называются регулярными, а со ступенчатой – сингулярными.* Вероятность поступления хотя бы одного вызова в определенный момент времени для регулярного потока равна нулю, а для сингулярного потока в моменты разрыва ведущей функции отлична от нуля. Нас интересуют только потоки вызовов с непрерывной ведущей функцией, т. е. регулярные потоки.

Таким образом, в дальнейшем рассматриваются случайные однородные финитные регулярные потоки.

## 2.2. Принципы классификации потоков вызовов

Потоки вызовов классифицируются с точки зрения *стационарности, ординарности и последствия.*

**Стационарность потока.** Поток вызовов является стационарным, если при любом  $n$  совместный закон распределения числа вызовов за промежутки времени  $[t_0, t_1), [t_0, t_2), \dots, [t_0, t_n)$

$$P\{K(t_0, t_i), i = 1, 2, \dots, n\}, \quad (2.5)$$

зависит только от длины промежутков времени и не зависит от момента  $t_0$ . Иными словами, независимо от того, где на оси времени расположен промежуток времени  $[t_0, t_1)$ , вероятность поступления  $K(t_0, t_1)$  вызовов одна и та же. Это значит, что для стационарного потока вероятность поступления некоторого числа вызовов за какой-то промежуток времени зависит от длины этого промежутка и не зависит от его начала. В противном случае поток

является нестационарным.

Интенсивности потоков вызовов на телефонных сетях резко колеблются в зависимости от времени суток: количество вызовов за единицу времени в определенные дневные и вечерние часы достигает максимальной величины, а в ночные часы уменьшается почти до нуля. Это значит, что вероятность поступления какого-либо числа вызовов в определенный промежуток времени зависит от местонахождения на оси времени этого промежутка и, следовательно, поток поступающих в течение суток вызовов от любой абонентской группы на телефонную станцию является нестационарным. Заметим, что внутри ограниченного отрезка суток, например часа, нестационарность телефонного потока вызовов малоощутима, что позволяет для практических задач полагать стационарным поток телефонных вызовов, поступающих от большой абонентской группы (100 и более абонентов) за небольшой отрезок суток, исчисляемый одним-тремя часами.

**Ординарность потока.** Обозначим через  $\pi_k(t, t+\tau)$  вероятность поступления  $k$  и более вызовов за промежуток  $[t, t+\tau)$ . Поток вызовов является ординарным, если при  $\tau \rightarrow 0$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\pi_2(t, t+\tau)}{\tau} = 0, \quad (2.6)$$

т. е.  $\pi_2(t, t+\tau) = o(\tau)$ , где  $o(\tau)$  – величина более высокого порядка малости по отношению к  $\tau$ .

Ординарность потока выражает практическую невозможность одновременного поступления двух и более вызовов в любой момент времени  $t$ . Примером ординарного потока является поток вызовов, поступающий на телефонную станцию от абонентской группы любой емкости. Потоки телефонных вызовов к абонентам диспетчерской или конференц-связи, потоки телеграмм в несколько адресов являются неординарными.

**Последствие потока.** Поток вызовов является потоком без последствия, если вероятность поступления  $K(t_0, t_i)$  вызовов за промежутки  $[t_0, t_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$

$$P\{K(0, t_i) - K(0, t_0) = K(t_0, t_i), i = 1, 2, \dots, n\} \quad (2.7)$$

не зависит от вероятностного процесса поступления вызовов до момента  $t_0$ . Иными словами, отсутствие последствия потока означает независимость течения случайного потока вызовов после какого-либо момента времени от его течения до этого момента. Примером потока без последствия может служить поток телефонных вызовов, поступающих от большой группы источников. Действительно, лишь небольшая часть (10–20%) абонентской группы одновременно участвует в телефонных соединениях. Поэтому вероятность поступления какого-либо числа вызовов от большой группы источников на любом отрезке времени практически не зависит от процесса поступления вызовов до начала данного отрезка. Заметим, что эта вероятность, как и вероятность (2.7), может зависеть от момента  $t_0$  начала этого отрезка времени. Так, различные значения принимает вероятность поступления некоторого числа телефонных вызовов за равные промежутки времени в различные часы суток в силу нестационарности потока телефонных вызовов в течение суток.

Поток вызовов является потоком с последствием, если вероятность поступления того или иного числа вызовов за некоторый промежуток времени зависит от процесса поступления вызовов до начала этого промежутка. Потоки вызовов от спаренных телефонных аппаратов, от малых абонентских групп, в направлениях коммутационной системы, не обеспечивающих удовлетворительного качества обслуживания абонентов телефонной связью, к интенсивно загруженным абонентам являются потоками с последствием.

### 2.3. Характеристики потоков вызовов

К основным характеристикам потока вызовов следует отнести *ведущую функцию* потока, его *параметр* и *интенсивность*.

Под *параметром* потока  $\lambda(t)$  в момент времени  $t$  понимается предел отношения вероятности поступления хотя бы одного вызова за время  $[t, t + \tau)$  к длине этого отрезка времени  $\tau$  при  $\tau \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\pi_1(t, t + \tau)}{\tau} = \lambda(t), \quad (2.8)$$

т. е. параметр потока есть плотность вероятности наступления вызывающего момента в момент  $t$ . Исходя из (2.8), находим вероятность поступления одного и более вызовов за время  $[t, t + \tau)$ :

$$\pi_1(t, t + \tau) = \lambda(t) \tau + o(\tau), \quad \tau \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

Согласно определению стационарного потока, вероятность поступления определенного числа вызовов за некоторый промежуток времени одна и та же и не зависит от месторасположения на оси времени этого промежутка. Следовательно, и плотность вероятности поступления вызовов стационарного потока, т. е. его параметр  $\lambda(t)$ , есть величина постоянная, не зависящая от момента  $t$ , т. е.  $\lambda(t) = \lambda$ . Отсюда для стационарных потоков

$$\pi_1(t, t + \tau) = \lambda \tau + o(\tau), \quad \tau \rightarrow 0. \quad (2.10)$$

В отличие от ведущей функции потока  $\Lambda(0, t)$ , определяющей математическое ожидание числа вызовов, поступающих в промежутке времени  $[0, t)$ , параметр потока  $\lambda(t)$  характеризует не поток вызовов, а поток вызывающих моментов, и эта характеристика относится не ко всему отрезку  $[0, t)$ , а лишь к фиксированному моменту  $t$ .

*Интенсивностью стационарного потока  $\mu$  называется математическое ожидание числа вызовов, поступающих в единицу времени.* Единица времени может быть выбрана произвольно, однако в теории телеграфика в качестве такой единицы большей частью принимают среднюю длительность одного занятия. Вследствие аддитивности математического ожидания для стационарного потока ведущая функция за промежуток времени  $[0, t)$  равна  $\Lambda(0, t) = \mu t$ .

Для нестационарных потоков используются понятия средней и мгновенной интенсивностей. *Средняя интенсивность потока на отрезке времени  $[t_1, t_2)$  есть*

$$\bar{\mu}(t_1, t_2) = [\Lambda(0, t_2) - \Lambda(0, t_1)] / (t_2 - t_1), \quad (2.11)$$

а мгновенная интенсивность потока в момент  $t$

$$\mu(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Lambda(0, t + \tau) - \Lambda(0, t)}{\tau}. \quad (2.12)$$

Согласно определению (2.12) мгновенная интенсивность потока представляет производную ведущей функции потока. Так же как и параметр потока  $\lambda(t)$ , мгновенная интенсивность потока  $\mu(t)$  относится не к отрезку времени поступления вызовов, а только к моменту  $t$ . В то же время, в отличие от параметра потока, характеризующего поток вызывающих моментов, мгновенная интенсивность потока характеризует поток поступления вызовов.

Для любых потоков вызовов  $\mu(t) \geq \lambda(t)$ , причем для ординарных потоков  $\mu(t) = \lambda(t)$ . Для стационарных потоков интенсивность и параметр постоянны:  $\mu(t) = \mu$ ,  $\lambda(t) = \lambda$ . Следовательно, для любых стационарных потоков  $\mu \geq \lambda$ , а для стационарных ординарных  $\mu = \lambda$ .

Классификацию потоков удобно осуществлять, принимая за основной признак последствие потока. С точки зрения последствий различают три класса потоков: *без последствий, с простым последствием и с ограниченным последствием.*

Начнем рассмотрение этих классов с потоков без последствия. К этому классу относятся: стационарный ординарный поток, называемый простейшим (его также называют стационарным пуассоновским), нестационарный ординарный поток, называемый нестационарным пуассоновским, и стационарный неординарный поток, называемый неординарным пуассоновским.

## 2.4. Простейший поток вызовов

**Определение.** *Простейшим потоком называется стационарный ординарный поток без*

последствия. Простейший поток вызовов является наиболее распространенной моделью реального потока вызовов, применяемой в системах массового обслуживания, в том числе в теории телетрафика. Действительно, как отмечалось при рассмотрении принципов классификации потоков вызовов, поток телефонных вызовов от большой группы абонентов характеризуется отсутствием последствия. Его можно считать ординарным, а при ограничении исследуемого промежутка времени 1–3 ч и стационарным. Аналогичные случайные потоки событий характерны для многих отраслей народного хозяйства.

**Математическая модель простейшего потока.** Определим вероятности поступления точно  $k(k=0, 1, 2, \dots)$  вызовов на отрезке времени  $[t_0, t_0+t)$ :  $p_k(t_0, t_0+t)$ . Исследования будем проводить на отрезке времени  $[t_0, t_0+t+\tau)$ , который можно представить состоящим из двух примыкающих друг к другу отрезков:  $[t_0, t_0+t+\tau)=[t_0, t_0+t)+[t, t+\tau)$ .

Для того чтобы в течение отрезка  $[t_0, t_0+t+\tau)$  поступило точно  $k$  вызовов, необходимо, чтобы за первый промежуток времени  $[t_0, t_0+t)$  поступило  $k$ , или  $k-1, \dots$ , или  $k-i, \dots$ , или 0 вызовов и соответственно за второй промежуток 0, или 1, ..., или  $i, \dots$ , или  $k$  вызовов.

Введем обозначения:  $p_k(t_0, t_0+t+\tau)$  – вероятность поступления точно  $k$  вызовов за отрезок времени  $[t_0, t_0+t+\tau)$ ;  $p_{k-i}(t_0, t_0+t)$  – вероятность поступления точно  $k-i$  вызовов за первый отрезок времени  $[t_0, t_0+t)$ ;  $p_i(t, t+\tau)$  – вероятность поступления точно  $i$  вызовов за второй отрезок времени  $[t, t+\tau)$ . Согласно определению простейший поток является стационарным. Из этого следует, что вероятности поступления того или иного числа вызовов за отрезки времени  $[t_0, t_0+t+\tau)$ ,  $[t_0, t_0+t)$ ,  $[t, t+\tau)$  не зависят от моментов начала отсчета времени, а зависят только от длины отрезков времени. Поэтому упростим обозначения как отрезков времени, так и вероятностей:  $[t_0, t_0+t+\tau)$  будем обозначать  $[t+\tau)$ ;  $[t_0, t_0+t)$  –  $[t)$ ;  $[t, t+\tau)$  –  $[\tau)$  и соответственно  $p_k(t_0, t_0+t+\tau) = p_k(t+\tau)$ ;  $p_{k-i}(t_0, t_0+t) = p_{k-i}(t)$ ;  $p_i(t, t+\tau) = p_i(\tau)$ .

Простейший поток является потоком без последствия. Поэтому независимыми являются события, заключающиеся в поступлении какого-либо числа вызовов за первый и второй промежутки времени, и вероятность поступления точно  $k$  вызовов за время  $[t+\tau)$  для каждой реализации  $i=0, 1, \dots, k$  составляет  $p_k(t+\tau)_i = p_{k-i}(t)p_i(\tau)$ ,  $i=0, 1, \dots, k$ . Поскольку реализации с  $i=0, 1, \dots, k$  представляют несовместимые события, то согласно формуле полной вероятности имеем

$$p_k(t+\tau) = \sum_{i=0}^k p_k(t+\tau)_i = \sum_{i=0}^k p_{k-i}(t)p_i(\tau), k=0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

Выражение (2.13) представляет собой систему, состоящую из бесконечного числа уравнений. Устремим отрезок времени  $\tau$  к нулю. Вследствие ординарности простейшего потока  $\pi_2(t, t+\tau) = o(\tau)$ ,  $\tau \rightarrow 0$ . Тем более вероятности поступления точно 2, 3, ... вызовов –  $p_2(\tau)$ ,  $p_3(\tau)$ , ... – есть бесконечно малые более высокого порядка по отношению к  $\tau$ . Следовательно, в системе уравнений (2.13) вероятности  $p_i$  имеют конечные значения только при  $i$ , равном 0 и 1. На основании этого (2.13) преобразуются к виду

$$p_k(t+\tau) = p_{k-1}(t)p_1(\tau) + p_k(t)p_0(\tau) + o(\tau), k=0, 1, \dots, \tau \rightarrow 0. \quad (2.14)$$

Определяем вероятности  $p_1(\tau)$  и  $p_0(\tau)$ :

$$p_1(\tau) = \pi_1(\tau) - \pi_2(\tau); \quad p_0(\tau) = \pi_0(\tau) - \pi_1(\tau).$$

С учетом (2.10) и (2.6)

$$p_1(\tau) = \lambda\tau + o(\tau); \quad p_0(\tau) = 1 - \lambda\tau + o(\tau) \quad (2.15)$$

( $\pi_0(\tau)$  – вероятность поступления 0 и более вызовов, т. е. вероятность достоверного события, она равна 1).

Подставим в систему уравнений (2.14) полученные значения вероятностей  $p_1(\tau)$  и  $p_0(\tau)$ . Затем, перенеся в левую часть уравнений  $p_k(t)$ , поделим левые и правые части уравнений на  $\tau$ . Переходя к пределу, получим

$$\frac{d}{dt} p_k(t) = \lambda p_{k-1}(t) - \lambda p_k(t), k=0, 1, \dots \quad (2.16)$$

Решив систему дифференциальных уравнений (2.16), получим формулу Пуассона

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \quad (2.17)$$

Таким образом, вероятность поступления точно  $k$  вызовов простейшего потока за отрезок времени  $t$  определяется формулой Пуассона. По этой причине простейший поток также называют стационарным пуассоновским потоком.

**Основные характеристики простейшего потока.** При объединении  $n$  независимых простейших потоков с параметрами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  образуется общий простейший поток с параметром  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ . Вероятность поступления точно  $k$  вызовов за отрезок времени  $t$  определяется формулой Пуассона

$$p_k(t) = \frac{[(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) t]^k}{k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) t}. \quad (2.18)$$

Можно также показать, что объединение большого числа независимых стационарных ординарных потоков с практически любым последствием при малых значениях параметров этих потоков создает общий поток, близкий к простейшему. Если каждый из потоков поступает от отдельных источников вызовов, то простейший поток можно представить как поток от бесконечного числа источников, параметр каждого из которых стремится к нулю.

Сумма вероятностей всех возможных значений числа поступающих вызовов за рассматриваемый промежуток времени  $t$  равна 1. Действительно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = 1.$$

При  $t=1$  получаем

$$p_k(1) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (2.19)$$

Функция  $p_k(t)$  есть функция распределения дискретной случайной величины  $K$ . Из (2.17) следует, что она зависит от  $\lambda t$  и  $k$ , а при  $t=1$  – от  $\lambda$  и  $k$ .

Как и для любой дискретной случайной величины, распределенной по закону Пуассона, математическое ожидание  $M(K)$ , дисперсия  $D(K)$  и среднеквадратическое отклонение  $\sigma(K)$  числа вызовов простейшего потока, поступающих за отрезок времени  $t$ , равны

$$M(K) = D(K) = \lambda t; \quad \sigma(K) = \sqrt{\lambda t}. \quad (2.20)$$

$$\text{При } t=1 \quad M(K) = D(K) = \lambda, \quad \sigma(K) = \sqrt{\lambda}.$$

Из этого следует, что интенсивность простейшего потока равна его параметру  $\mu = M(K) = \lambda$ . Равенство  $\mu = \lambda$  справедливо не только для простейшего потока, но и для любого стационарного ординарного потока.

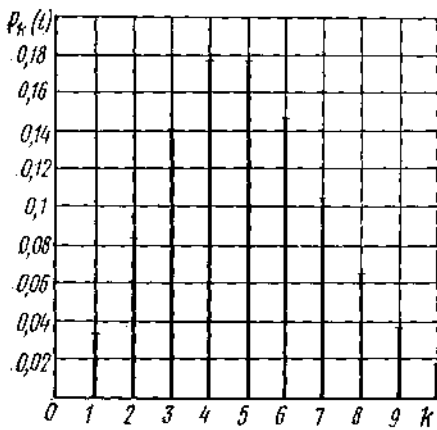


Рис. 2.1. Характер зависимости  $p_k(t)$  от  $k$  при  $\lambda t = 5$

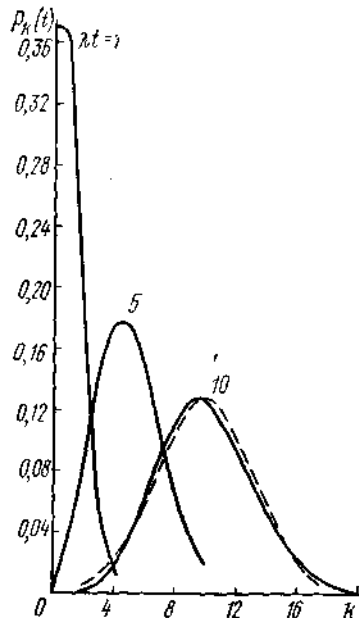


Рис. 2.2. Огибающие кривые значений функции  $p_k(t)$  от  $k$  при  $\lambda t = 1$ ; 5 и 10

Характер зависимости  $p_k(t)$  от  $k$  при  $\lambda t = \text{const}$  ( $\lambda t = 5$ ) показан на рис. 2.1. Влияние  $\lambda t$  на характер этой зависимости иллюстрируется рис. 2.2. На нем приведены огибающие значений функции  $p_k(t)$  при  $\lambda t = 1, 5$  и 10. С возрастанием величины  $\lambda t$  (при  $t=1$  с возрастанием параметра потока) огибающие кривые принимают все более симметричный вид, приближаясь к нормальному закону распределения непрерывной случайной величины. При  $\lambda t = 10$  имеет место хорошее совпадение огибающей значений  $p_k(t)$  с нормальным законом распределения (пунктирная кривая).

Вероятность поступления  $k$  и более вызовов определяется по формуле

$$p_{i \geq k}(t) = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}. \quad (2.21)$$

Вероятности  $p_k(t)$  и  $p_{i \geq k}(t)$  для различных значений  $k$  и  $\lambda t$  табулированы [29]. Представляет практический интерес также зависимость  $p_{i \leq k}(t)$  от  $k$  при  $\lambda t = \text{const}$ . Огибающие кривые значений  $p_{i \leq k}(t)$  такой зависимости представлены на рис. 2.3 при  $\lambda t = 1, 5$  и 10. При этом  $p_{i \leq k}(t)$  определяется по таблицам  $p_{i \geq k}(t)$  с учетом того, что  $p_{i \leq k}(t) = 1 - p_{i \geq k}(t)$ .

**Функция  $F(z)$  распределения вероятностей промежутков времени между вызовами.** Согласно определению функция  $F(z)$  равна вероятности того, что промежуток времени между вызовами  $Z$  будет меньше заданного промежутка  $z$ , что равносильно вероятности  $\pi_1(z)$  того, что за промежуток  $z$  поступит один и более вызовов. Используя (2.17), получим

$$F(z) = P(Z < z) = \pi_1(z) = \pi_0(z) - p_0(z) = 1 - e^{-\lambda z}, \quad z \geq 0. \quad (2.22)$$

а плотность распределения вероятностей промежутков времени между вызовами

$$f(z) = \frac{dF(z)}{dz} = \lambda e^{-\lambda z}. \quad (2.23)$$

Таким образом, распределение промежутков времени между вызовами простейшего потока подчиняется показательному (отрицательному экспоненциальному) закону. Функция  $F(z)$  зависит от параметра потока  $\lambda$ .

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение промежутка времени между вызовами  $z$  составляют:

$$M(Z) = \int_0^{\infty} z f(z) dz = 1/\lambda; \quad (2.24)$$

$$D(Z) = \int_0^{\infty} z^2 f(z) dz - M^2(Z) = 1/\lambda^2; \quad \sigma(Z) = \sqrt{D(Z)} = 1/\lambda. \quad (2.25); (2.26)$$

Из (2.24) и (2.26) следует равенство  $M(Z)=\sigma(Z)$ . Такое равенство характерно при показательном законе распределения любой случайной величины. Формула (2.24)

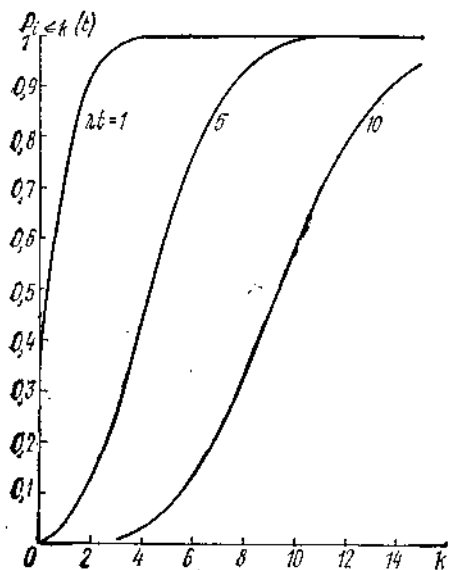


Рис. 2.3. Огибающие кривые значений функции  $P_i \leq t(t)$  при  $\lambda t = 1; 5$  и  $10$

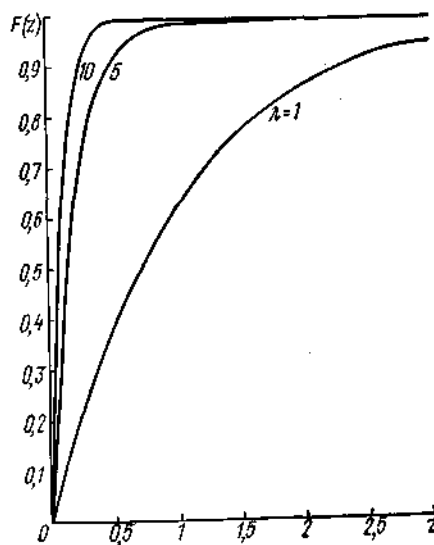


Рис. 2.4. Характер зависимости  $F(z)$  от  $z$  при  $\lambda = 1; 5$  и  $10$

показывает, что с увеличением параметра потока  $\lambda$  уменьшается математическое ожидание промежутка времени между вызовами  $M(Z)$ .

Указанное иллюстрируется рис. 2.4, на котором приведены зависимости  $F(z)$  от  $z$  при  $\lambda = 1, 5$  и  $10$ . Из этих кривых видно, что с возрастанием  $\lambda$  увеличивается вероятность того, что промежутки между вызовами меньше заданного отрезка

времени  $z$ .

Распределение промежутков времени между вызовами по показательному закону (2.22) является не только необходимым, но и достаточным условием простейшего потока. Можно показать (доказательство не приводится), что поток с независимыми промежутками между вызовами, распределенными по одинаковому показательному закону (2.22), является простейшим потоком.

Показательный закон обладает следующим свойством: если промежуток времени, распределенный по показательному закону, уже длился некоторое время, то это никак не влияет на закон распределения оставшейся части промежутка: он будет таким же, как и закон распределения всего промежутка. Для доказательства предположим, что промежуток времени между вызовами равен  $t$ . Найдем условную вероятность того, что он будет продолжаться еще не менее времени  $\tau$ . На основании теоремы умножения вероятностей можно записать  $P(Z > t + \tau) = P(Z > t)P(Z > \tau / Z > t)$ . С учетом (2.22)  $e^{-\lambda(t+\tau)} = e^{-\lambda t}P(Z > \tau / Z > t)$ , откуда условная вероятность  $P(Z > \tau / Z > t) = e^{-\lambda \tau} = P(Z > \tau)$ , т. е. она не зависит от уже длившейся части времени обслуживания и равна безусловной вероятности  $P(Z > \tau)$ , что и требовалось доказать.

Показательный закон – единственный, обладающий таким свойством. Это свойство показательного закона представляет собой, в сущности, другую формулировку основного свойства простейшего потока вызовов – отсутствия последействия. Такое замечательное свойство показательного распределения позволяет упростить математические преобразования, в частности, при анализе процессов поступления потоков вызовов и их обслуживания.

## 2.5. Нестационарный и неординарный пуассоновские потоки

Нестационарный пуассоновский поток (который также называется потоком с переменным параметром или нестационарным простейшим потоком) есть ординарный поток без последействия, для которого в любой момент времени  $t$  существует конечный параметр  $\lambda(t)$ , зависящий от момента  $t$ . По аналогии с простейшим потоком в качестве математической модели нестационарного пуассоновского потока выбирается вероятность  $p_k(t_0, t)$  поступления точно  $k$  вызовов за заданный промежуток времени  $[t_0, t]$ . В силу нестационарности потока эта вероятность зависит не только от длины промежутка времени  $[t_0, t]$ , но и от начального момента  $t_0$ :

$$p_k(t_0, t) = \frac{\left[ \int_{t_0}^t \lambda(u) du \right]^k}{k!} e^{-\int_{t_0}^t \lambda(u) du}, \quad k=0, 1, \dots \quad (2.27)$$

Заметим, что для стационарного потока  $\lambda(u) = \lambda$ ,  $\int_{t_0}^t \lambda(u) du = \lambda(t-t_0) = \lambda t$  ( $[t_0, t) = t$ ) и ф-ла (2.27) преобразуется к (2.17).

Для неординарного пуассоновского потока, т. е. для стационарного неординарного потока без последствия, следует различать поток вызывающих моментов и поток вызовов. Поток вызывающих моментов характеризуется вероятностью появления точно  $i$  вызывающих моментов в промежутке времени  $t$ . Эта вероятность  $p_i(t)$  определяется формулой Пуассона (2.17).

В каждый вызывающий момент поступает  $l$  ( $1 \leq l \leq r$ ) вызовов. Величина  $l$ , называемая *характеристикой неординарности* потока, может быть постоянной и переменной. Если  $l$  является постоянной величиной, то с вероятностью  $p_i(t)$  суммарное число вызовов, поступающих за отрезок времени  $t$ , составляет  $k=li$ .

Для неординарного пуассоновского потока с переменной величиной  $l$ , в котором в каждый вызывающий момент с вероятностью  $\omega_l$  поступает  $l$  вызовов ( $\sum_{l=1}^r \omega_l = 1$ ), также получена формула, определяющая вероятность  $p_k(t)$  поступления точно  $k$  вызовов за промежутки времени  $t$ . Ввиду громоздкости эта формула не приводится. Параметр такого потока для каждого значения  $l$  равен  $\lambda\omega_l$ . Отсюда общий параметр потока ( $\sum_{l=1}^r \lambda\omega_l = 1$ ) такой же, как и для потока вызывающих моментов, т. е. для простейшего потока. Интенсивность  $\mu$  неординарного пуассоновского потока, как и любого стационарного неординарного потока, больше его параметра  $\lambda$ . Действительно,  $\mu = \sum_{l=1}^r l\lambda\omega_l = \lambda \sum_{l=1}^r l\omega_l > \lambda$ .

## 2.6. Потoki с простым последствием

Основной характеристикой потока с простым последствием является зависимость параметра потока от состояния коммутационной системы в любой момент времени  $t$ .

Коммутационная система имеет множество состояний  $s$ , которые различаются числом занятых входов, выходов и соединительных путей между входами и выходами коммутационной системы, номерами занятых входов и выходов, номерами соединительных путей между входом и выходом, числом занятых или свободных источников вызовов и т. д. Так как коммутационная система всегда имеет конечное число входов, выходов, соединительных путей, то конечным является и число возможных состояний системы обслуживания (хотя оно может быть и очень велико). Такие состояния коммутационной системы будем называть *микросостояниями*. Состояния коммутационной системы, различающиеся только числом занятых входов (или выходов), называются *макросостояниями*.

Исследования процесса обслуживания коммутационной системой поступающего потока вызовов следует производить с учетом микросостояний системы в тех случаях, когда структура рассматриваемой коммутационной системы такова, что вероятность ее состояния в любой произвольный момент времени  $t$  зависит как от числа занятых входов (или выходов), так и от того, какие именно входы (или выходы) заняты и по каким соединительным путям осуществляются соединения между каждым входом и выходом. Если же структура рассматриваемой коммутационной системы такова, что вероятности ее состояний в любой произвольный момент  $t$  зависят только от числа занятых входов (или выходов), то исследования процесса обслуживания коммутационной системой поступающих вызовов можно производить только с учетом макросостояний системы.



Под параметром потока в состоянии  $s(t)$  будем понимать предел

$$\lambda_{s(t)} = \lim_{\tau \rightarrow 0} = \frac{\pi_1(t, t + \tau/s(t))}{\tau}, \quad (2.28)$$

где  $\pi_1(t, t + \tau/s(t))$  – вероятность поступления за промежуток  $[t, t + \tau)$  одного и более вызовов, если в момент  $t$  коммутационная система находится в состоянии  $s(t)$ . Это определение позволяет сформулировать понятие потока с простым последствием. *Под потоком с простым последствием понимается ординарный поток, для которого в любой момент времени  $t$  существует конечный параметр потока в состоянии  $s(t)$  (2.28), зависящий только от состояния  $s(t)$  коммутационной системы в момент  $t$  и не зависящий от процесса обслуживания вызовов до момента  $t$ .*

(Параметр потока с простым последствием в любой момент времени  $t$  зависит от состояния системы в этот момент времени, а состояние системы  $s(t)$ , в свою очередь, зависит от процесса, поступления и обслуживания вызовов до момента  $t$ . Такое последствие принято называть простым, поскольку для определения; параметра потока в момент  $t$  достаточно ограничиться знанием; состояния системы  $s(t)$  в этот момент. Поток с простым последствием является нестационарным, так как его параметр зависит от момента  $t$ . Заметим, что эта зависимость проявляется через состояние  $s(t)$ . Для каждого конкретного состояния параметр; потока с простым последствием является постоянной величиной.

Понятие потока с простым последствием является одним из самых общих в теории потоков. Практически любой поток вызовов можно считать потоком с простым последствием, поскольку коммутационная система всегда влияет на процесс поступления вызовов. К частным случаям потока с простым последствием относятся симметричный поток, примитивный поток и поток с повторными вызовами.

## 2.7. Симметричный и примитивный потоки

Симметричным потоком называется поток с простым последствием, параметр которого  $\lambda_{s(t)}$  в любой момент времени  $t$  зависит только от числа  $i$  обслуживаемых в этот момент вызовов и не зависит от других характеристик, определяющих состояние  $s(t)$  коммутационной системы. При этом зависимость параметра от числа обслуживаемых вызовов может быть подчинена любому закону. Поэтому в любом состоянии  $s(t)$  с  $i$  обслуживаемыми вызовами параметр симметричного потока один и тот же, он зависит только от  $i$ , т. е.  $\lambda_{s(t)} = \lambda_i$ .

Примитивным называется такой симметричный поток, параметр которого  $\lambda_i$  прямо пропорционален числу свободных в данный момент источников:

$$\lambda_i = (n - i) \alpha, \quad (2.29)$$

где  $n$  – общее число источников вызовов;  $i$  – число занятых источников;  $\alpha$  – параметр потока источника в свободном состоянии (при этом имеет место естественное предположение – занятый источник не может производить вызовы). В модели примитивного потока параметр  $\alpha$  источника в свободном состоянии является постоянной величиной, а параметр примитивного потока  $\lambda_i$  убывает с увеличением числа занятых источников  $i$ . Математическое

ожидание параметра примитивного потока  $\lambda$  определяется по формуле  $\lambda = \sum_{i=0}^n \lambda_i p_i$ , где  $p_i$  – вероятность того, что в системе занято  $i$  источников. Заметим, что в обслуживающей примитивный поток коммутационной системе не требуется соединительных устройств более  $n$ , так как занятый источник не может производить вызовы.

Можно показать, что функция распределения вероятностей длительности свободного состояния источника (промежутка времени между моментом окончания одного занятия и моментом поступления от источника нового вызова)

$$F(x) = p_{св}(< x) = 1 - e^{-\alpha x}, \quad (2.30)$$

Таким образом, промежуток времени между моментами окончания одного занятия и

поступления от источника нового вызова распределен по показательному закону. Следовательно, поток вызовов от свободного источника является простейшим.

Поток с простым последствием является более общим по сравнению с простейшим потоком вызовов. Простейший поток можно представить частным случаем потока с простым последствием, в том числе симметричного и примитивного потоков. С увеличением числа источников  $n$  и уменьшением параметра  $\alpha$  последствие потока уменьшается. В предельном случае при  $n \rightarrow \infty$  и  $\alpha \rightarrow 0$  так, что  $n\alpha$  есть конечная величина и  $i$  принимает ограниченные значения, параметр потока  $\lambda = n\alpha$  не зависит от состояния системы, т. е. модель примитивного потока переходит в модель простейшего потока вызовов.

### 2.8. Поток с повторными вызовами

Система, на которую поступает поток вызовов, обслуживает не все поступающие вызовы. Часть из них не обслуживается (теряется) по ряду причин. Так, например, на телефонных сетях часть вызовов не обслуживается по причине занятости или неответа вызываемого абонента, ошибок вызывающего абонента в процессе набора номера, занятости всех соединительных устройств, способных обслужить поступивший вызов, неустановления соединения коммутационной системой по техническим причинам. Все или часть источников необслуженных вызовов осуществляют повторные вызовы.

Поток с повторными вызовами состоит из первичных и повторных вызовов. Поскольку параметр потока повторных вызовов зависит от состояния коммутационной системы, то и поток с повторными вызовами относится к классу потоков с простым последствием.

Параметр потока повторных вызовов можно определить как произведение числа источников повторных вызовов  $j$  на параметр одного источника  $\beta$ . В качестве модели потока первичных вызовов принимается простейший с параметром  $\lambda$  или примитивный с параметром  $\lambda_i$  поток. Параметр суммарного потока равен сумме параметров потоков первичных и повторных вызовов. Для простейшего и примитивного потоков он соответственно составляет

$$\lambda_2 = \lambda + j\beta; \lambda_2 = (n - i - j)\alpha + j\beta. \quad (2.31)$$

### 2.9. Поток с ограниченным последствием. Поток Пальма

Под потоком с ограниченным последствием понимается поток вызовов, у которого последовательность промежутков времени между вызовами  $z_1, z_2, \dots$  представляет последовательность взаимно независимых случайных величин, имеющих любые функции распределения. Такой поток вызовов описывается последовательностью функций распределения промежутков между вызовами:

$$F_k(z) = P(z_k < z), k = 1, 2, \dots \quad (2.32)$$

Как следует из приведенного определения потока с ограниченным последствием, свойство ограниченности последствия заключается в независимости промежутков между вызовами. Введенное ранее понятие «отсутствие последствия» потока заключается в независимости количества вызовов, поступающих в непересекающиеся отрезки времени. Таким образом, свойства «ограниченность последствия» и «отсутствие последствия» являются различными характеристиками потока.

Частным случаем потока с ограниченным последствием является *рекуррентный* поток, который характеризуется одинаково распределенными промежутками времени между вызовами:

$$F_1(z) = F_2(z) = \dots = F(z). \quad (2.33)$$

Некоторым обобщением рекуррентного потока является *рекуррентный поток с запаздыванием* – поток с ограниченным последствием, для которого

$$F_2(z) = F_3(z) = \dots = F(z), F_1(z) \neq F(z). \quad (2.34)$$

Стационарный ординарный рекуррентный поток с запаздыванием называется потоком Пальма. Для потока Пальма, как и для любого другого стационарного ординарного потока,  $\mu = \lambda / M(Z)$ . Распределение промежутков времени между вызовами для потока Пальма задается следующими соотношениями:

$$F_1(z) = P(Z_1 < z) = \lambda \int_0^z \omega_0(u) du; F_k(z) = P(Z_k < z) = 1 - \omega_0(z), k = 2, 3, \dots, \quad (2.35)$$

где  $\omega_0(z)$  – вероятность отсутствия вызовов на промежутке времени длиной  $z$ .

Весьма важной является следующая теорема Пальма (доказательство этой теоремы не приводится): *если на коммутационную систему с потерями и с показательным распределением длительности обслуживания поступают вызовы, образующие поток Пальма, то поток необслуженных вызовов является также потоком Пальма.* В частности, если поток поступающих вызовов будет простейшим, то поток потерянных вызовов будет потоком

Пальма. Это справедливо и для потоков, теряемых каждой линией полнодоступного пучка, работающего в режиме упорядоченного искания: если на первую линию пучка поступает поток Пальма или простейший поток вызовов, то поток потерянных вызовов любым количеством первых линий пучка будет потоком Пальма.

Простейший поток является частным случаем потока Пальма, у которого все промежутки времени между вызовами, включая первый, распределены по показательному закону. При вероятности  $\omega_0(z) = e^{-\lambda z}$  соотношения (2.35) преобразуются к соотношению (2.22).

Рекуррентный поток без запаздывания является ординарным потоком. Рекуррентные потоки с запаздыванием могут быть и неординарными. Доказано, что стационарный рекуррентный поток, является простейшим.

## 2.10. Просеивание потоков. Потоки Эрланга

Пусть имеется поток вызовов, для которого  $t_1, t_2, \dots$  есть моменты поступления вызовов. Выберем из этого потока часть вызовов, применив следующую операцию: вызов, поступающий в момент  $t_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ), с вероятностью  $p$  остается в новом потоке и с вероятностью  $(1-p)$  теряется. Новый поток вызовов называется *просеянным*. Таким образом, просеянный поток образуется из заданного потока, в котором случайное число вызовов теряется, следующий вызов остается (просеивается), затем снова случайное число вызовов, имеющее тот же закон распределения, теряется, следующий вызов заданного потока остается и т. д. Операция, с помощью которой получен просеянный поток, называется *рекуррентной операцией просеивания*. Поток, получаемый из рекуррентного потока с помощью рекуррентной операции просеивания, также является рекуррентным.

Если основной поток – простейший с параметром  $\lambda$  и каждый вызов этого потока просеивается с вероятностью  $p$  и теряется с вероятностью  $(1-p)$ , то просеянный поток будет также простейшим с параметром  $\lambda p$ . Из этого следует весьма важный для практики вывод: *если поступающий на коммутационную систему простейший поток с параметром  $\lambda$  разделяется на  $h$  направлений и вероятность того, что вызов входящего потока поступает на  $i$ -е направление ( $i=1, 2, \dots, h$ ), равна  $p_i$ , то поток  $i$ -го направления является также простейшим с параметром  $\lambda p_i$ .*

Используем отличную от рекуррентной операцию просеивания, при которой точно  $m$  вызовов потока теряются,  $(m+1)$ -й вызов просеивается, затем снова точно  $m$  вызовов теряются и  $(m+1)$ -й просеивается и т. д. В результате такой операции просеивания простейшего потока образуется так называемый *поток Эрланга  $m$ -го порядка*. Если в простейшем потоке сохранить (просеять) каждый третий вызов, то образуется поток Эрланга 2-го порядка, каждый второй вызов – поток Эрланга 1-го порядка. Естественно, простейший поток можно рассматривать как поток Эрланга нулевого порядка.

В потоках Эрланга любого порядка промежутки времени между вызовами независимы и распределены по одному и тому же закону, так как эти промежутки представляют собой

сумму одинакового числа промежутков простейшего потока. В связи с этим потоки Эрланга являются рекуррентными.

Математическое ожидание  $M(Z_m)$ , дисперсия  $D(Z_m)$  и среднеквадратическое отклонение  $\sigma(Z_m)$  промежутка времени между вызовами в потоке Эрланга  $m$ -го порядка равны соответственно

$$M(Z_m) = (m + 1)/\lambda; D(Z_m) = (m + 1)/\lambda^2; \sigma(Z_m) = \sqrt{m + 1}/\lambda. \quad (2.36)$$

Параметр этого потока

$$\lambda_m = \lambda/(m + 1). \quad (2.37)$$

Из (2.36) и (2.37) следует, что с увеличением порядка потока Эрланга увеличиваются математическое ожидание и дисперсия промежутка времени между вызовами и одновременно уменьшается параметр потока. Потоки Эрланга  $m$ -го порядка при разных  $m$  создают потоки с различной степенью случайности: от простейшего ( $m=0$ ) до детерминированного ( $m=\infty$ ).

### 2.11. Длительность обслуживания

В теории телетрафика длительность обслуживания поступивших вызовов обычно принимается либо постоянной, либо случайной величиной. Постоянная длительность принимается, например, в моделях обслуживания вызовов управляющими устройствами систем распределения информации. Случайная длительность обслуживания задается функцией распределения вероятностей  $F(t) = P(T < t)$ ,  $t \geq 0$ .

Наиболее простой и распространенной функцией распределения вероятности случайной длительности обслуживания является показательная:

$$F(t) = 1 - e^{-\beta t}, \quad (2.38)$$

где  $\beta = 1/M(T)$  – параметр длительности обслуживания;  $M(T)$  – математическое ожидание длительности обслуживания.

Дифференцируя (2.38) по  $t$ , найдем плотность распределения вероятностей

$$f(t) = \beta e^{-\beta t}, t \geq 0. \quad (2.39)$$

Закон распределения вероятностей с такой плотностью называется показательным законом (отрицательным экспоненциальным). Основные числовые характеристики случайной длительности обслуживания, распределенной по показательному закону, по аналогии с (2.24)-(2.26):  $M(T) = 1/\beta$ ;  $D(T) = 1/\beta^2$ ;  $\sigma(T) = 1/\beta$ . С целью упрощения математических выражений часто за единицу измерения длительности обслуживания принимается математическое ожидание длительности обслуживания, т. е.  $M(T) = 1$  и, следовательно,  $\beta = 1$ .

Во многих случаях показательный закон хорошо описывает реальные законы распределения длительности обслуживания. Так, наблюдениями установлено, что длительность разговора на телефонных сетях достаточно хорошо описывается показательным распределением.

### 2.12. Поток освобождений

*Потоком освобождений называется последовательность моментов окончания обслуживания вызовов.* В общем случае свойства и характеристики потока освобождений зависят от поступающего потока вызовов, качества обслуживания этих вызовов, закона распределения длительности обслуживания. При обслуживании поступающего потока вызовов без потерь при постоянной длительности обслуживания  $h$  свойства потока освобождений совпадают со свойствами поступающего потока вызовов. Происходит только сдвиг по времени на величину  $h$  между моментом поступления вызова и моментом окончания его обслуживания.

При показательном законе распределения длительности обслуживания в силу свойства этого распределения моменты окончания обслуживания не зависят от моментов поступления

вызовов. Покажем, что в момент времени  $t$  параметр потока освобождений  $\nu(t)$  зависит только от параметра показательного закона распределения длительности обслуживания и числа вызовов, которые находятся «а обслуживании в данный момент времени. Пусть в коммутационной системе в момент  $t$  занято  $k$  приборов ( $k$  вызовов находятся на обслуживании). Вероятность освобождения  $i$  устройств за промежуток времени  $\tau$  можно рассматривать как  $i$  успешных испытаний при общем числе  $k$  независимых испытаний и по теореме о повторении опытов записать

$$P_i(k, \tau) = C_k^i p^i (1-p)^{k-i}, \quad (2.40)$$

где  $p$  – вероятность освобождения одного прибора за промежуток времени  $\tau$ .

При показательном законе распределения длительности обслуживания

$$p = P(T < \tau) = 1 - e^{-\beta\tau}. \quad (2.41)$$

Подставляя (2.41) в (2.40), получим

$$P_i(k, \tau) = C_k^i (1 - e^{-\beta\tau})^i e^{-(k-i)\beta\tau}. \quad (2.42)$$

Вероятность того, что за промежуток времени  $\tau$  не освободится ни один из  $k$  занятых приборов,  $P_0(k, \tau) = e^{-k\beta\tau}$ , а вероятность того, что освободится хотя бы один прибор, равна

$$\pi_1(\tau) = 1 - P_0(k, \tau) = 1 - e^{-k\beta\tau}. \quad (2.43)$$

По определению параметра потока

$$\nu(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\pi_1(\tau)}{\tau}. \quad (2.44)$$

Вероятность  $\pi_1(\tau)$  запишем с учетом разложения функции  $e^{-k\beta\tau}$  в ряд:

$$\pi_1(\tau) = 1 - e^{-k\beta\tau} = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (k\beta\tau)^j \frac{1}{j!} = k\beta\tau + o(\tau). \quad (2.45)$$

Подставляя (2.45) в (2.44), получим  $\nu(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left( k\beta + \frac{o(\tau)}{\tau} \right) = k\beta$ , что и требовалось доказать.

Можно показать, что в рассматриваемом случае поток освобождений обладает свойством ординарности.

### Задача.

*Определить:* 1. Вероятность  $p_k(t)$  поступления точно  $k=6$  вызовов и вероятность  $p_{i \leq k}(t)$  поступления не более  $k=6$  вызовов простейшего потока с интенсивностью  $\mu=250$  вызовов в час за промежуток времени  $t=72$  с. 2. При каком значении  $k$  имеет место наибольшее значение вероятности  $p_k(t)$ ?

*Решение.* 1. Для простейшего потока  $\lambda=\mu=250$ ;  $\lambda t=(250 \times 72)/3600=5$ . При наличии только таблицы для определения вероятностей  $p_{i \geq k}(t)$  отыскиваем в таблице значения этих вероятностей для  $k=6$  и  $k=7$ :  $p_{i \geq 6}=0,3840$ ,  $p_{i \geq 7}=0,2378$ . Отсюда вероятность  $p_6(t)=p_{i \geq 6}(t)-p_{i \geq 7}(t)=0,1462$ . Вероятность  $p_{i \leq 6}(t)=1-p_{i \geq 7}(t)=0,7622$ .

2. Для определения наибольшего значения вероятности  $p_k(t)$  получим рекуррентное соотношение формулы Пуассона (2.17):  $p_k(t)/p_{k-1}(t)=\lambda t/k$ . В области  $\lambda t > k$  с возрастанием  $k$  вероятности  $p_k(t)$  увеличиваются, так как  $p_k(t)=p_{k-1}(t) (\lambda t/k)$ , а последний множитель больше единицы. И, наоборот, в области  $\lambda t < k$  с возрастанием  $k$  вероятности  $p_k(t)$  уменьшаются. Отсюда согласно рекуррентному соотношению рассматриваемая вероятность имеет наибольшие значения:  $p_{k-1}(t)=p_k(t)$  при  $k=\lambda t$ , если  $\lambda t$  – целое число;  $p_k(t)$  при  $k=[\lambda t]$ , где  $[\lambda t]$  – наибольшее целое число, меньшее  $\lambda t$ , если  $\lambda t$  – нецелое число.

В нашей задаче  $\lambda t=5$ , поэтому наибольшее значение вероятности  $p_k(t)$  имеют при  $k=4$  и  $k=5$ . В этом легко убедиться, определив значения вероятностей с помощью таблиц [29]:  $p_4(t)=p_5(t)=0,1755$ ;  $p_3(t)=0,1403$ ;  $p_6(t)=0,1462$  (значения вероятностей  $p_3(t)$  и  $p_6(t)$  меньше  $p_4(t)=p_5(t)$ ).

### Контрольные вопросы

1. Дайте определения понятиям следующих потоков вызовов: детерминированному и случайному, однородному и неоднородному, финитному, регулярному и сингулярному.
2. Приведите основные способы определения потоков вызовов.
3. Каковы основные характеристики потоков вызовов? Дайте определения понятиям: интенсивность и параметр потока.
4. Каковы принципы классификации потоков вызовов? Дайте определения понятиям: стационарность потока, ординарность потока, поток без последствия, поток с последствием.
5. Дайте определение понятию простейшего потока вызовов. Покажите математическую модель такого потока.
6. Каковы основные характеристики простейшего потока? Покажите характер зависимости вероятности  $p_k(t)$  от  $k$  при различных значениях параметра потока  $\lambda$ .
7. Какому закону следует функция распределения промежутков между вызовами простейшего потока? Покажите характер зависимости этой функции от параметра потока и заданных длин промежутков. В чем заключается основное свойство показательного закона распределения промежутков между вызовами?
8. Дайте определение понятию «нестационарный пуассоновский поток».
9. Дайте определение понятию «неординарный пуассоновский поток».
10. Дайте определение понятию «поток с простым последствием». Каковы особенности симметричного и примитивного потоков?
11. Каковы особенности потока с повторными вызовами?
12. Дайте определение понятию «поток с ограниченным последствием». Какие частные случаи такого потока рассматриваются, каковы их основные особенности?
13. В чем заключаются основные свойства потока Пальма?
14. Дайте определение понятию «поток Эрланга  $m$ -го порядка». В чем различие операции просеивания простейшего потока, в результате которой образуется поток Эрланга  $m$ -го порядка, и рекуррентной операции просеивания?

Нагрузка. Характеристики качества  
обслуживания

**3.1. Поступающая, обслуженная, потерянная нагрузки**

При обслуживании потока вызовов коммутационной системой каждый вызов занимает выход системы на некоторый промежуток времени. Если например, выход одновременно обслуживает только один вызов, то нагрузка выхода может характеризоваться суммарным временем обслуживания всех вызовов, а коэффициент полезного действия или использование выхода можно оценивать отношением суммарного времени обслуживания всех вызовов ко времени действия выхода. В теории телетрафика суммарное время обслуживания вызовов принято называть *нагрузкой*.

Следует различать нагрузки: *поступающую, обслуженную и потерянную*.

*Обслуженная коммутационной системой за промежуток времени  $[t_1, t_2]$  нагрузка  $y_0(t_1, t_2)$  представляет собой сумму времен занятия всех выходов коммутационной системы, обслуживающей поступающий на ее входы поток вызовов за рассматриваемый промежуток времени.*

Пусть на входы коммутационной системы, имеющей  $\nu$  выходов, поступает поток вызовов. Будем наблюдать за каждым из выходов в течение промежутка времени  $[t_1, t_2]$ . Обозначим через  $\tau_i$  сумму отрезков времени, в течение которых  $i$ -й выход был занят за время  $[t_1, t_2]$ .

Тогда  $y_0(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{\nu} \tau_i$ .

Из определения обслуженной нагрузки следует свойство аддитивности нагрузки: *обслуженная за некоторый промежуток времени нагрузка равна сумме нагрузок, обслуженных на отдельных непересекающихся отрезках времени, составляющих этот промежуток:*

$$y_0(0, t_1 + t_2) = y_0(0, t_1) + y_0(t_1, t_2).$$

За единицу измерения нагрузки принято одно часо-занятие (1 ч-зан.). Одно часо-занятие – это такая нагрузка, которая может быть обслужена одним выходом в течение часа при непрерывном занятии этого выхода.

По аналогии с понятиями мгновенной и средней интенсивностей потоков вызовов можно рассматривать мгновенную и среднюю интенсивности нагрузки. Однако в теории и практике расчета пропускной способности коммутационных систем обычно используется средняя интенсивность нагрузки, которую для краткости будем называть интенсивностью нагрузки. *Под интенсивностью нагрузки понимается нагрузка за единицу времени, обычно за 1 ч. За единицу измерения интенсивности нагрузки принят эрланг (Эрл) по имени А. К. Эрланга. Один эрланг представляет собой нагрузку в одно часо-занятие за 1 ч.*

В практике измерения обслуженной нагрузки широкое применение находит следующая теорема о количественной оценке интенсивности обслуженной нагрузки: *интенсивность обслуженной нагрузки, выраженная в эрлангах, количественно равна среднему числу одновременно занятых выходов, обслуживающих эту нагрузку.* Пусть в течение  $\theta$  часов непрерывно регистрируется число одновременно занятых выходов коммутационной системы на входы которой поступает стационарный поток вызовов. Пусть в результате наблюдений оказалось, что в течение времени  $t_1$  было занято  $\nu_1$  выходов, в течение времени  $t_2$  –  $\nu_2$  выходов и т. д. В общем виде можно представить, что в течение времени  $t_i$  была занята  $\nu_i$  выходов, причем

$$\sum_{i=1}^k t_i = \theta. \tag{3.1}$$

где  $k$  – число значений, которые принимала величина  $v$  в течение  $\theta$  часов. Суммарное время занятия всех выходов коммутационной системы за время  $t_i$  выразится произведением  $v_i t_i$ . За промежуток времени  $\theta$  суммарное время занятия всех выходов выразится суммой  $\sum_{i=1}^k v_i t_i$ . Эта сумма по определению является нагрузкой, обслуженной всеми выходами коммутационной системы за время  $\theta$ . Интенсивность обслуженной нагрузки будет равна

$$y_0 = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^k v_i t_i. \quad (3.2)$$

С другой стороны, доля времени  $t_i/\theta = \omega_i$ , в течение которого было занято  $v_i$  выходов, является частотой появления значения  $v_i$ . Среднее число одновременно занятых выходов может быть рассчитано как средневзвешенное по весам  $\omega_i (i=1, 2, \dots, k)$ :

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^k v_i \omega_i. \quad (3.3)$$

Подставляя в (3.3)  $\omega_i = t_i/\theta$  и учитывая (3.1), получим

$$\bar{v} = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^k v_i t_i. \quad (3.4)$$

Из (3.2) и (3.4) следует  $y_0 = \bar{v}$ , что и требовалось доказать.

*Под поступающей на коммутационную систему за промежуток времени  $[t_1, t_2)$  нагрузкой  $y(t_1, t_2)$  понимается такая нагрузка, которая была бы обслужена коммутационной системой за рассматриваемый промежуток времени, если бы каждому поступающему вызову тотчас было предоставлено соединение со свободным выходом.*

За единицы измерения поступающей нагрузки принято одно часо-занятие, интенсивности поступающей нагрузки – один эрланг. Для количественной оценки интенсивности поступающей нагрузки можно воспользоваться следующей теоремой: *интенсивность поступающей нагрузки, создаваемой простейшим потоком вызовов, количественно равна математическому ожиданию числа вызовов, поступающих за время, равное средней длительности одного занятия.*

Пусть на входы коммутационной системы поступает простейший поток вызовов с интенсивностью  $\mu$ . Будем считать, что длительность занятия  $T$  – конечная случайная величина  $0 \leq T \leq T_{max}$ , не зависящая от потока вызовов, со средним значением  $\bar{t}$ . Рассмотрим промежуток времени  $[t_1, t_2)$  такой, что  $t_2 - t_1 > T_{max}$ . Математическое ожидание числа вызовов, поступивших на коммутационную систему за промежуток времени  $[t_1, t_2)$ , определится как  $\Lambda(t_1, t_2) = \mu(t_2 - t_1)$ . Часть этих вызовов оканчивается к моменту  $t_2$  (рис. 3.1а), а другая часть – не



Рис. 3.1. Диаграмма различных случаев занятия выходов коммутационной системы за промежуток времени  $[t_1, t_2)$

оканчивается (рис. 3.1б). Обозначим математическое ожидание числа вызовов, поступивших за промежуток времени  $[t_1, t_2)$  и не окончившихся к моменту  $t_2$ , через  $\rho$ . Кроме вызовов  $\Lambda(t_1, t_2)$ , на коммутационную систему за промежуток времени  $[t_1, t_2)$  создают

нагрузку вызовы, которые поступили до момента  $t_1$  и к моменту  $t_1$  не окончились. Обозначим математическое ожидание числа вызовов, которые начались до момента  $t_1$  и окончились в промежуток времени  $[t_1, t_2)$ , через  $\varepsilon$  (рис. 3.1в), а математическое ожидание числа вызовов, которые начались до момента  $t_1$  и окончились после момента  $t_2$ , – через  $\zeta$  (рис. 3.1г). Так как  $t_2 - t_1 > T_{max}$ , то  $\zeta = 0$ . Для простейшего потока вызовов  $\rho = \varepsilon$ .

По определению математическое ожидание нагрузки, поступающей на коммутационную систему за промежуток времени  $[t_1, t_2)$ ,



$$y(t_1, t_2) = [\mu(t_2 - t_1) - \rho + \varepsilon] \bar{t} = \mu \bar{t} (t_2 - t_1),$$

а интенсивность поступающей нагрузки

$$y = \frac{y(t_1, t_2)}{(t_2 - t_1)} = \mu \bar{t}. \quad (3.5)$$

Произведение  $\mu \bar{t}$  представляет собой математическое ожидание числа вызовов, поступающих за среднюю длительность одного занятия. Теорема доказана.

Потерянная коммутационной системой в течение промежутка времени  $[t_1, t_2)$  нагрузка  $y_{\text{п}}(t_1, t_2)$  представляет собой разность между поступающей и обслуженной нагрузками за рассматриваемый промежуток времени.

В теории телетрафика в большинстве случаев рассматривается обслуживание случайных потоков вызовов. При этом поступающая, обслуженная и потерянная нагрузки являются случайными величинами. Из определений указанных нагрузок следует, что обслуженные, поступающие и потерянные вызовы имеют одну и ту же среднюю длительность занятия. На практике данное условие часто не выполняется, поэтому при прогнозировании нагрузки и расчете объема оборудования это необходимо учитывать.

### 3.2. Концентрация нагрузки

Интенсивность нагрузки в общем случае различна в разные часы суток или в одни и те же часы суток, но в разные дни. Наблюдениями установлено, что наряду со случайными колебаниями интенсивности нагрузки по часам суток, дням недели и месяца года существуют и периодические, относительно регулярные колебания, которые необходимо учитывать при прогнозировании нагрузки. Некоторые закономерности этих колебаний

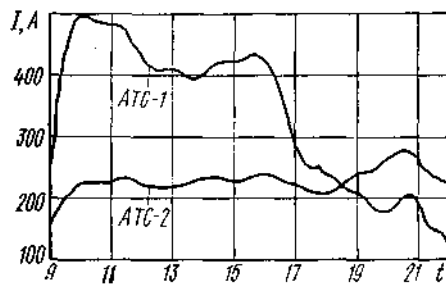


Рис. 3.2. Зависимости расхода тока по часам суток на двух АТС с различным структурным составом абонентов

Из регулярных колебаний интенсивности нагрузки наиболее значительными являются колебания по часам суток. В значительной степени они зависят от распорядка жизни в городе и структурного состава абонентов, включенных в АТС. На рис. 3.2 показаны кривые расхода тока по часам суток на двух АТС, имеющих различный структурный состав абонентов. В АТС-1 включено 70% телефонных аппаратов народнохозяйственного сектора и 30% квартирных телефонных аппаратов, в АТС-2 – 30% телефонных аппаратов народнохозяйственного сектора и 70% квартирных телефонных аппаратов. Для АТС-1 явно

выражен утренний пик нагрузки, а для АТС-2 – вечерний.

Для удовлетворительного качества обслуживания абонентов в любое время суток расчет объема оборудования необходимо выполнять исходя из значения интенсивности нагрузки в тот час, когда она является наибольшей. Этот час называется часом наибольшей нагрузки и

ТАБЛИЦА 3.1

День	Величина нагрузки, измеренная в промежутки времени в четверть часа				
	9.00–9.15	9.15–9.30	9.30–9.45	9.45–10.00	10.00–10.15
Первый	$a_1$	$b_1$	$c_1$	$d_1$	$e_1$
Второй	$a_2$	$b_2$	$c_2$	$d_2$	$e_2$
...	...	...	...	...	...
$k$ -й	$a_k$	$b_k$	$c_k$	$d_k$	$e_k$
Средняя величина нагрузки за $k$ дней	$a = \frac{\sum_{i=1}^k a_i}{k}$	$b = \frac{\sum_{i=1}^k b_i}{k}$	$c = \frac{\sum_{i=1}^k c_i}{k}$	$d = \frac{\sum_{i=1}^k d_i}{k}$	$e = \frac{\sum_{i=1}^k e_i}{k}$

сокращенно обозначается ЧНН.

Час наибольшей нагрузки – это непрерывный интервал времени в 60 мин, в течение которого средняя интенсивность нагрузки является наибольшей.

Международным консультативным комитетом по телефонии

и телеграфии (МККТТ) измерения рекомендовано проводить в рабочие дни двух последовательных недель 2 раза в год в месяцы наибольшей нагрузки. Ежедневно (например, с 9 и до 22 час.) нагрузка измеряется по периодам в четверть часа. Результаты измерений за каждый день записываются в горизонтальные строки табл. 3.1. В последней строке указывается частное от деления суммы данных, полученных в течение различных дней за один и тот же период, на число дней наблюдений. Затем складываются последовательно по четыре числа  $(a+b+c+d)$  и т. д. и определяется максимальная величина из этих сумм, которая и будет интенсивностью нагрузки в ЧНН, а непрерывный интервал времени в 60 мин, которому она соответствует, – часом наибольшей нагрузки.

Степень концентрации нагрузки в ЧНН оценивается *коэффициентом концентрации нагрузки*  $k_{\text{ЧНН}} = u_{\text{ЧНН}} / u_{\text{сут}}$ , где  $u_{\text{ЧНН}}$  – величина нагрузки за ЧНН;  $u_{\text{сут}}$  – величина нагрузки за сутки.

Величина коэффициента концентрации в основном зависит от структурного состава абонентов АТС и лежит в пределах 0,09–0,15. Чтобы объем оборудования был минимальным и нагрузка его равномерной, величина коэффициента концентрации должна быть минимальной. По данным Московской ГТС коэффициент концентрации телефонной нагрузки имеет минимальную величину при доле абонентов народнохозяйственного сектора в емкости АТС порядка 20–30%.

Наблюдениями установлено, что нагрузка в ЧНН в разные дни неодинакова, причем кроме случайных колебаний имеют место и регулярные колебания нагрузки по дням недели. В субботу и воскресенье нагрузка значительно ниже, чем в рабочие дни недели. В рабочие дни наибольшее значение нагрузки на АТС наблюдается в пятницу. Регулярные колебания нагрузки наблюдаются и по месяцам года. Минимальная нагрузка на АТС в городах, исключая курортные, наблюдается в летние месяцы – июнь, июль, август. Наибольшая нагрузка имеет место в феврале, марте и ноябре, декабре, в эти месяцы и должны проводиться измерения нагрузки.

### 3.3. Основные параметры и расчет интенсивности нагрузки

Основными параметрами нагрузки являются: число источников нагрузки –  $n$ ;  
 $\bar{c}$  – среднее число вызовов, поступающих от одного источника нагрузки в единицу времени, –  
 $\bar{t}$  – средняя длительность занятия коммутационной системы при обслуживании одного вызова –  $t$ .

Принципы проектирования основных параметров нагрузки рассмотрим на примере их проектирования для местных телефонных сетей.

**Число источников нагрузки  $n$ .** По среднему числу вызовов и средней длительности занятия на ГТС различают следующие *категории источников* телефонной нагрузки: телефонные аппараты народнохозяйственного сектора –  $n_{\text{нх}}$ ; квартирные телефонные аппараты, которые делятся на квартирные аппараты индивидуального пользования –  $n_{\text{к.и}}$  и квартирные аппараты коллективного пользования –  $n_{\text{к.к}}$ ; таксофоны –  $n_{\text{т}}$ ; соединительные линии от учрежденческих телефонных станций –  $n_{\text{сл}}$ . Таким образом,

$$n = n_{\text{нх}} + n_{\text{к.и}} + n_{\text{к.к}} + n_{\text{т}} + n_{\text{сл}}. \quad (3.6)$$

При проектировании количества источников телефонной нагрузки на ГТС в нашей стране учитываются: существующий уровень развития связи, потребности в телефонной связи различных отраслей народного хозяйства и населения, возможности удовлетворения этих потребностей на различных этапах развития народного хозяйства. С учетом этих факторов разрабатываются нормы телефонной плотности на различные этапы проектирования ГТС. *Телефонная плотность* в народном хозяйстве выражается количеством телефонных аппаратов, приходящихся на 100 рабочих и служащих, а у населения – на 100 человек населения. Число таксофонов проектируется также на 100 человек населения.

**Среднее число вызовов от одного источника в единицу времени  $c$ .** В соответствии с имеющимися категориями источников нагрузки среднее число вызовов в единицу времени от

одного телефонного аппарата народнохозяйственного сектора обозначается через  $\bar{c}_{\text{нх}}$ , от квартирного аппарата индивидуального пользования –  $\bar{c}_{\text{к.и}}$ , коллективного пользования –  $\bar{c}_{\text{к.к}}$ , от таксофона –  $\bar{c}_{\text{т}}$ , от соединительной линии –  $\bar{c}_{\text{сл}}$ . Обозначим в общем виде через  $\bar{c}_i$  среднее число вызовов от источников  $i$ -й категории,  $n_i$  – число источников  $i$ -й категории. Тогда при  $k$  категориях источников нагрузки на АТС средневзвешенное число вызовов от одного источника определится из выражения

$$\bar{c} = \left( \sum_{i=1}^k \bar{c}_i n_i \right) / \left( \sum_{i=1}^k n_i \right). \quad (3.7)$$

Проектирование среднего числа вызовов от одного источника соответствующих категорий основывается на результатах наблюдений на действующих сетях. По данным измерений, на некоторых ГТС нашей страны среднее число вызовов в ЧНН от одного источника соответствующих категорий находилось в следующих пределах:  $\bar{c}_{\text{нх}}=1,9 \div 3,4$ ;  $\bar{c}_{\text{к.и}}=0,7 \div 1,0$ ;  $\bar{c}_{\text{к.к}}=1,0 \div 1,5$ ;  $\bar{c}_{\text{т}}=6 \div 10$ ;  $\bar{c}_{\text{сл}}=6 \div 10$ .

Вызов, поступающий на АТС, в зависимости от состояния коммутационного оборудования, линий межстанционной связи и линии вызываемого абонента может либо окончиться разговором (доля таких вызовов в общем числе поступивших вызовов выражается коэффициентом  $p_p$ ), либо не окончиться разговором из-за: занятости линии вызываемого абонента ( $p_{\text{зн}}$ ); неответа вызываемого абонента ( $p_{\text{но}}$ ); ошибки вызывающего абонента – недобора части знаков абонентского номера, набора несуществующего номера и т. д. ( $p_{\text{ош}}$ ); отсутствия свободных соединительных устройств на какой-то ступени искания и по техническим причинам ( $p_{\text{тех}}$ ). Очевидно, что  $p_p + p_{\text{зн}} + p_{\text{но}} + p_{\text{ош}} + p_{\text{тех}} = 1$ , так как эти случаи составляют полную группу событий.

По результатам наблюдений, на некоторых ГТС нашей страны эти коэффициенты имели следующие значения:  $p_p=0,5 \div 0,6$ ;  $p_{\text{зн}}=0,2 \div 0,3$ ;  $p_{\text{но}}=0,08 \div 0,12$ ;  $p_{\text{ош}}=0,04 \div 0,1$ ;  $p_{\text{тех}}=0,03 \div 0,05$ .

Такое соотношение отдельных видов занятий нельзя считать перспективным из-за слишком малого процента состоявшихся разговоров. Повысить процент состоявшихся разговоров можно, в первую очередь, за счет снижения удельного веса вызовов, не окончившихся разговором по причине занятости линий вызываемых абонентов. Для этой цели в процессе эксплуатации необходимо выявлять перегруженные абонентские линии и при проектировании предусматривать часть добавляемой емкости для разгрузки таких линий.

При хорошо поставленной информации абонентов о правилах пользования телефонной связью и изменениях в нумерации на сети значение коэффициента  $p_{\text{ош}}$  можно снизить до 0,02–0,05. Доля вызовов, не окончившихся разговором из-за отсутствия свободных и исправных соединительных устройств, нормируется и должна быть не более 0,025–0,03. Таким образом, при эксплуатации и проектировании городских телефонных сетей удовлетворительным соотношением отдельных видов занятий можно считать:  $p_p=0,6 \div 0,7$ ;  $p_{\text{зн}}=0,15 \div 0,2$ ;  $p_{\text{но}}=0,08 \div 0,12$ ;  $p_{\text{ош}}=0,02 \div 0,05$ ;  $p_{\text{тех}}=0,025 \div 0,03$ .

**Средняя длительность занятия  $\bar{t}$ .** Под длительностью одного занятия понимается промежуток времени с момента снятия абонентом микрофона (замыкание шлейфа абонентской линии) до момента возвращения приборов станции, занятых в обслуживании вызова, в исходное состояние.

Длительность занятия зависит в основном от действий абонентов и частично от систем АТС. Следовательно, длительность занятия является случайной величиной и ее среднее значение может быть определено только на основании результатов наблюдений на действующих сетях.

Рассмотрим составляющие средней длительности различных видов занятий.

1. Разговор состоялся. Средняя длительность этого вида занятия может быть рассчитана по формуле

$$\bar{t}_p = \bar{t}_{\text{с.о}} + \bar{t}_{\text{с}} + \bar{t}_{\text{п.в}} + \bar{T} + \bar{t}_0, \quad (3.8)$$

где  $\bar{t}_{\text{с.о}}$ ,  $\bar{t}_{\text{с}}$ ,  $\bar{t}_{\text{п.в}}$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{t}_0$  – средние продолжительности соответственно слушания абонентом сигнала ответа станции, установления соединения, посылки вызова вызываемому

абоненту, разговора, возвращения приборов в исходное состояние после отбоя.

По данным наблюдений, на действующих сетях  $\bar{t}_{c,0}=3$  с;  $\bar{t}_{п.в}=7\div 8$  с. Значения  $\bar{t}_c$  и  $\bar{t}_o$  зависят от системы АТС, в которую включены абонентские линии. В АТС декадно-шаговой системы соединение устанавливается одновременно с набором номера и величина  $\bar{t}_c$  рассчитывается по формуле  $\bar{t}_c=1,5m$ , где  $m$  – число знаков абонентского номера; 1,5 – средняя продолжительность набора одной цифры номера с помощью дискового номеронабирателя, с. Для декадно-шаговой АТС  $\bar{t}_o=1$  с.

В АТС координатной системы соединения устанавливаются после приема регистром информации об абонентском номере. В этом случае  $\bar{t}_c=1,5m+2,5$  с, где 2,5 с – средняя продолжительность работы маркеров при установлении соединения через две ступени группового искания. Время освобождения приборов в АТС координатной системы мало, и можно принять  $\bar{t}_o=0$ .

Продолжительность разговора составляет значительную часть величины  $\bar{t}_p$  и поэтому должна определяться с возможно большей точностью. Средняя продолжительность разговора различна для источников разных категорий и существенно зависит от времени суток: вечером для источников всех категорий она больше, чем днем.

По данным наблюдений, на ГТС нашей страны средняя продолжительность разговора для источников разных категорий в дневной ЧНН составляла: телефонных аппаратов народнохозяйственного сектора –  $\bar{T}_{нх}=100\div 110$  с; квартирных индивидуальных телефонных аппаратов –  $\bar{T}_{к.и}=130\div 140$  с; квартирных телефонных аппаратов коллективного пользования –  $\bar{T}_{к.к}=120\div 130$  с; таксофонов –  $\bar{T}_T=100\div 110$  с; соединительных линий от учрежденческих телефонных станций –  $\bar{T}_{сл}=100\div 110$  с; в вечерний ЧНН соответственно:  $\bar{T}_{нх}=125\div 130$  с;  $\bar{T}_{к.и}=220\div 230$  с;  $\bar{T}_{к.к}=205\div 210$  с;  $\bar{T}_T=160\div 165$  с;  $\bar{T}_{сл}=125\div 130$  с.

Средняя продолжительность разговора по АТС в целом определяется как средняя взвешенная длительностей  $T_i$  по числу разговоров источников соответствующих категорий  $n_i$  с  $p_{pi}$ , т. е. по формуле

$$\bar{T} = \left( \sum_{i=1}^k n_i \bar{c}_i p_{pi} \bar{T}_i \right) / \left( \sum_{i=1}^k n_i \bar{c}_i p_{pi} \right), \quad (3.9)$$

где  $n_i$  – число источников  $i$ -й категории;  $\bar{c}_i$  – среднее число вызовов от одного источника  $i$ -й категории;  $p_{pi}$  – доля вызовов от источников  $i$ -й категории, закончившихся разговором;  $k$  – число категорий источников, включенных в АТС.

2. Разговор не состоялся из-за занятости линии вызываемого абонента. Средняя длительность занятия этого вида может быть рассчитана по формуле

$$\bar{t}_{зи} = \bar{t}_{c,0} + \bar{t}_c + \bar{t}_{c,3} + \bar{t}_o, \quad (3.10)$$

где  $\bar{t}_{c,3}$  – средняя продолжительность слушания вызывающим абонентом сигнала «занято» при занятости линии вызываемого абонента другим соединением. Остальные составляющие времени  $\bar{t}_{zi}$ , такие же, как в (3.8).

При включении абонентских линий в АТС декадно-шаговой системы, по данным наблюдений, величина  $\bar{t}_{c,3}$  составляла 4–5 с. Для АТС координатной системы продолжительность  $\bar{t}_{c,3}=0$ , так как при занятости абонентской линии все групповые приборы, участвующие в соединении, освобождаются, а сигнал «занято» посылается из абонентского комплекта.

3. Разговор не состоялся из-за неответа вызываемого абонента. Средняя длительность занятия этого вида  $\bar{t}_{но}$  может быть рассчитана по формуле (3.10), если заменить среднюю продолжительность слушания сигнала «занято» ( $\bar{t}_{c,3}$ ) средней продолжительностью слушания сигнала посылки вызова при неответе абонента –  $\bar{t}_{c.н}$ . По результатам наблюдений,  $\bar{t}_{c.н}=30$  с.

4. Разговор не состоялся из-за ошибки вызывающего абонента. Средняя длительность занятий этого вида, по результатам наблюдений на действующих сетях, может быть принята равной  $\bar{t}_{ош}=18\div 20$  с.

5. Разговор не состоялся по техническим причинам. Средняя длительность этого вида занятий может быть принята равной  $\bar{t}_{\text{тех}}=10\div 15$  с.

Средняя длительность одного занятия на АТС в целом может быть рассчитана по формуле

$$\bar{t} = \bar{t}_p \rho_p + \bar{t}_{\text{зн}} \rho_{\text{зн}} + \bar{t}_{\text{но}} \rho_{\text{но}} + \bar{t}_{\text{ош}} \rho_{\text{ош}} + \bar{t}_{\text{тех}} \rho_{\text{тех}}. \quad (3.11)$$

При проектировании параметров нагрузки следует учитывать, что значения среднего числа вызовов и средней продолжительности разговора существенно зависят от системы тарифов за пользование телефонной связью. Приведенные выше значения этих параметров измерялись при существующей на городских телефонных сетях в нашей стране абонентной оплате, которая не оказывает регулирующего действия на значения параметров телефонной нагрузки.

**Средняя интенсивность поступающей нагрузки.** Проектирование средней интенсивности поступающей нагрузки основывается на результатах наблюдений за параметрами нагрузки на действующих АТС и предположении о тенденции изменения этих параметров с развитием ГТС.

Величина интенсивности нагрузки может быть рассчитана по формуле

$$y = n \bar{c} \bar{t}. \quad (3.12)$$

Для сокращения объема вычислений иногда пользуются приближенной формулой, которая получается путем подстановки в (3.12) выражения для  $t$  из (3.11) и следующих простых преобразований:

$$y = n \bar{c} \bar{t} = n \bar{c} \bar{t}_p \rho_p \left( 1 + \frac{\bar{t}_{\text{зн}} \rho_{\text{зн}} + \bar{t}_{\text{но}} \rho_{\text{но}} + \bar{t}_{\text{ош}} \rho_{\text{ош}} + \bar{t}_{\text{тех}} \rho_{\text{тех}}}{\bar{t}_p \rho_p} \right) = \\ = \alpha n \bar{c} \bar{t}_p \rho_p. \quad (3.13)$$

Коэффициент  $\alpha$  учитывает непроизводительную нагрузку при занятиях, не окончившихся разговором. Величина  $\alpha$  зависит от средней продолжительности разговора  $\bar{T}$ , доли вызовов, закончившихся разговором,  $\rho_p$ , значности нумерации на сети, системы АТС.

На рис. 3.3 приведены зависимости значений  $\alpha$  от  $\bar{T}$  при фиксированных  $\rho_p$  для АТСК при

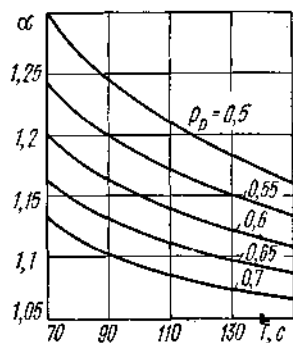


Рис. 3.3. Зависимость коэффициента  $\alpha$  от средней продолжительности разговора  $\bar{T}$

Расчет интенсивности нагрузки можно выполнять для источников каждой категории отдельно. Пусть доли вызовов, закончившихся разговором, для источников всех категорий одинаковы и равны  $\rho_p$ . Величина  $\bar{t}_p$  по аналогии с (3.9) может быть вычислена из выражения

$$\bar{t}_p = \left( \sum_{i=1}^k n_i \bar{c}_i \rho_p \bar{t}_{pi} \right) / \left( \sum_{i=1}^k n_i \bar{c}_i \rho_p \right) = \\ = \left( \sum_{i=1}^k n_i \bar{c}_i \bar{t}_{pi} \right) / \left( \sum_{i=1}^k n_i \bar{c}_i \right). \quad (3.14)$$

Подставляя в (3.13) вместо  $\bar{t}_p$  выражение (3.14) и вместо  $\bar{c}$  выражение (3.7), получаем

$$y = \alpha \rho_p \sum_{i=1}^k n_i \bar{c}_i \bar{t}_{pi} = \sum_{i=1}^k y_i. \quad (3.15)$$

Если в (3.15) среднюю длительность занятий выразить в часах, то интенсивность нагрузки будет рассчитана в эрлангах.

### 3.4. Характеристики качества обслуживания потоков вызовов

В теории телетрафика качество обслуживания поступающих вызовов характеризуется возможностью соединений или длительностью ожидания предоставления соединений. Различают два основных способа, две дисциплины обслуживания поступающих вызовов: без

потерь и с потерями.

*Дисциплиной обслуживания без потерь называется такая, при которой поступающий вызов немедленно обслуживается, и с потерями, если поступающий вызов либо получает отказ в обслуживании, либо обслуживание его задерживается на некоторое время.*

По экономическим соображениям реальные коммутационные системы обычно проектируются с потерями. Различают следующие виды потерь: явные, условные и комбинированные.

*Дисциплиной обслуживания с явными потерями называется такая, при которой поступающий на коммутационную систему вызов, получая отказ в обслуживании, покидает систему и в дальнейшем не оказывает на систему никакого влияния. При такой дисциплине обслуживания абонент, получив сигнал «занято», отказывается от дальнейших попыток установить соединение.*

Для количественной оценки качества обслуживания с явными потерями рассчитываются следующие величины: потери по вызовам –  $p_v$ ; потери по нагрузке –  $p_n$ ; потери по времени –  $p_t$ .

*Потери по вызовам на отрезке времени  $[t_1, t_2]$  – это отношение числа потерянных за этот отрезок времени вызовов  $c_n(t_1, t_2)$  к числу поступивших за то же время вызовов  $c(t_1, t_2)$ :*

$$p_v(t_1, t_2) = c_n(t_1, t_2) / c(t_1, t_2). \quad (3.16)$$

*Потери по нагрузке на отрезке времени  $[t_1, t_2]$  – это отношение потерянной за этот отрезок времени нагрузки  $y_n(t_1, t_2)$  к поступающей за то же время нагрузке  $y(t_1, t_2)$ :*

$$p_n(t_1, t_2) = y_n(t_1, t_2) / y(t_1, t_2). \quad (3.17)$$

*Потери по времени за отрезок времени  $[t_1, t_2]$  – это доля времени, в течение которого все соединительные пути, доступные группе источников, заняты.*

Если в выражения для потерь по вызовам, нагрузке и времени подставить математические ожидания соответствующих случайных величин, то можно говорить о вероятности потерь по вызовам, нагрузке и времени.

*Дисциплиной обслуживания с условными потерями называется такая, при которой поступающий на коммутационную систему в момент отсутствия соединительных путей вызов не теряется, а обслуживается с ожиданием (дисциплина обслуживания с ожиданием). Если вызов обслуживается после многократных повторений попыток установить соединение, то имеет место дисциплина обслуживания с повторением.*

Для количественной оценки качества обслуживания с ожиданием рассчитываются следующие характеристики: вероятность ожидания для поступившего вызова –  $p(\gamma > 0)$ ; вероятность ожидания для любого поступившего вызова свыше времени  $t$  –  $p(\gamma > t)$ ; вероятность ожидания задержанного вызова свыше времени  $t$  –  $p_3(\gamma > t)$ ; среднее время ожидания по отношению ко всем поступившим вызовам –  $\bar{\gamma}$  и по отношению только к задержанным вызовам –  $\bar{\gamma}_3$ ; вероятность того, что длина очереди превышает заданную величину  $r$  –  $p(R > r)$ ; средняя длина очереди –  $\bar{r}$ . Основными характеристиками являются  $p(\gamma > 0)$  и  $p(\gamma > t)$ .

*Вероятность ожидания для поступившего вызова – это отношение математических ожиданий числа задержанных в обслуживании за отрезок времени  $[t_1, t_2]$  вызовов  $M(c_3)$  к числу поступивших за рассматриваемый промежуток времени вызовов  $M(c)$ :*

$$p(\gamma > 0) = M(c_3) / M(c). \quad (3.18)$$

*Вероятность ожидания для любого поступившего вызова свыше времени  $t$  – это отношение математических ожиданий числа задержанных свыше времени  $t$  вызовов  $M(c_3(\gamma > t))$  к числу поступивших за рассматриваемый промежуток времени вызовов  $M(c)$ :*

$$p(\gamma > t) = M(c_3(\gamma > t)) / M(c). \quad (3.19)$$

Для количественной оценки качества обслуживания с повторением вызовов рассчитываются: среднее число повторных вызовов на один первичный вызов –  $\bar{c}_0$ ;

вероятность потери поступившего первичного вызова –  $p$ ; вероятность потери поступившего повторного вызова –  $p_{п}$ ; вероятность потери любого поступившего вызова –  $p_{в}$ ; вероятность потерь по времени –  $p_i$ ; вероятность потерь по нагрузке –  $p_{н}$ . Эти характеристики определяются аналогично рассмотренным выше.

На практике кроме дисциплин обслуживания с явными и условными потерями встречаются различные их комбинации.

*Дисциплиной обслуживания с комбинированными потерями называется такая, при которой часть поступающих вызовов обслуживается с явными потерями, а другая часть – с условными или все вызовы обслуживаются с условными потерями, ограниченными по какому-либо признаку.* Например, ограничивается число вызовов, находящихся на ожидании, или ограничивается время ожидания начала обслуживания (если вызов находится на ожидании сверх допустимого времени ожидания, то ему отказывается в обслуживании). Другой пример. Абонент, получивший отказ в соединении, повторяет попытки установления соединения. После нескольких повторных вызовов абонент может отказаться от дальнейших попыток установления соединения (вызов теряется). Для оценки качества обслуживания с комбинированными потерями используются характеристики дисциплин обслуживания с явными и условными потерями.

Дисциплины обслуживания с потерями бывают без приоритетов и с приоритетами.

*Дисциплиной обслуживания с приоритетами называется такая, при которой поступающие вызовы делятся на категории и вызовы более высокой категории при обслуживании имеют какие-либо преимущества (приоритеты) перед вызовами более низкой категории, и без приоритетов, если ни один из поступающих вызовов не имеет каких-либо преимуществ в обслуживании перед другими.*

Примером дисциплины обслуживания с приоритетом может служить установление местных и междугородных соединений на АТС. При занятости абонентской линии местным соединением другое местное соединение с этой линией установлено быть не может, однако телефонистка междугородной станции может подключиться к абонентской линии, занятой местным соединением, и прервать последнее в пользу междугородного. Другой пример. При автоматической междугородной связи все вызовы делятся на обычные и приоритетные. На автоматической междугородной станции в случае занятости всех каналов в прямых и обходных направлениях обычному вызову отказывается в соединении (вызов теряется), а приоритетный вызов устанавливается на ожидание одновременно по двум направлениям. Ясно, что качество обслуживания обычных и приоритетных вызовов различно.

Дисциплины обслуживания с комбинированными потерями и с приоритетами имеют большое количество разновидностей и подробно рассматриваются в теории массового обслуживания. Библиографию по этому вопросу можно найти, например, в [52].

### **3.5. Пропускная способность коммутационных систем**

Одной из важнейших характеристик коммутационных систем является их эффективность. В качестве показателей эффективности наряду с экономическими (капитальными затратами, эксплуатационными расходами) широко используется и такой технический показатель, как пропускная способность.

*Под пропускной способностью коммутационной системы понимается интенсивность обслуженной коммутационной системой нагрузки при заданном качестве обслуживания.* Пропускная способность коммутационной системы зависит от величины потерь, емкости пучков линий, включенных в выходы коммутационной системы, от способа (схемы) объединения этих выходов, класса потока вызовов, структуры коммутационной системы, распределения длительности обслуживания и дисциплины обслуживания.

Величина потерь нормируется или на коммутационную систему в целом, или для каждого направления связи, или для источников каждой категории. Чем больше допустимая норма потерь, тем больше пропускная способность коммутационной системы и хуже качество связи.

Поток вызовов в математических моделях чаще всего принимается простейшим, потоком Пальма или примитивным. В этих случаях удается относительно просто получить решение

задачи аналитическим методом. Реальные потоки вызовов, например, при большой величине потерь имеют более сложную структуру, и решение задач осуществляется методом статистического моделирования.

Схемы объединения выходов коммутационной системы могут быть полноступенчатыми и неполноступенчатыми – ступенчатыми, равномерными и т. д.

Структура коммутационной системы характеризуется большим числом параметров: числом звеньев, числом, емкостью и способами связи коммутаторов и т. д.

Наиболее удобной функцией распределения длительности обслуживания с точки зрения аналитического описания и анализа пропускной способности коммутационных систем является показательное распределение, так как оно не обладает последствием. Практическое применение находит распределение равномерной плотности, распределение Эрланга и др. Дисциплина обслуживания оказывает существенное влияние на математическую модель коммутационной системы, поэтому ее необходимо описывать самым детальным образом. Например, в системе с ожиданием вызовы могут обслуживаться в порядке поступления; в порядке, обратном порядку поступления; в случайном порядке; с различными видами приоритетов.

Пропускная способность пучка линий оценивается отношением интенсивности обслуженной нагрузки  $y_0$  к числу линий  $\nu - \eta = y_0/\nu$ , а в некоторых случаях – отношением

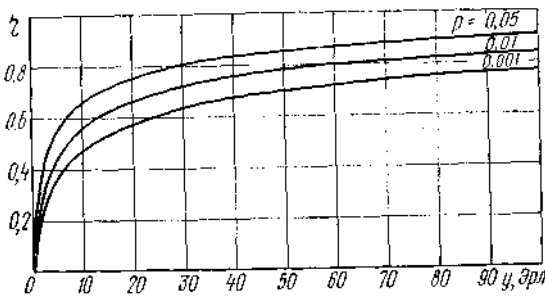


Рис. 3.4. Зависимости средней пропускной способности одной линии полноступенчатого пучка от интенсивности поступающей нагрузки при фиксированных значениях потерь

Пропускная способность пучка линий коммутационной системы часто представляется в виде зависимости  $\eta = y_0/\nu = f(y)$  или  $\eta = f(\nu)$  при фиксированных значениях остальных параметров. Величина  $\eta$  называется *средней пропускной способностью*, или *средним использованием одной линии пучка*. Характер зависимостей  $\eta = f(y)$  при обслуживании полноступенчатым пучком линий простейшего потока вызовов при фиксированных значениях потерь показан на рис. 3.4. Величина  $\eta$  при увеличении интенсивности поступающей нагрузки асимптотически приближается к единице.

Это объясняется уменьшением относительной колеблемости простейшего потока вызовов при увеличении математического ожидания интенсивности потока. Относительная колеблемость потока вызовов оценивается отношением среднеквадратического отклонения числа вызовов  $\sigma(c) = \sqrt{D(c)}$  к математическому ожиданию интенсивности потока вызовов  $M(c)$  (коэффициентом вариации):

$$V = \sqrt{D(c)} / M(c).$$

Для простейшего потока вызовов  $M(c)=D(c)$  и

$$\lim_{M(c) \rightarrow \infty} V = \lim_{M(c) \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{D(c)}}{M(c)} = 0.$$

Последнее означает, что в системе в каждый момент времени на обслуживании находится постоянное число вызовов  $M(c)$ . Интенсивность поступающей нагрузки будет равна  $M(c)$ . Если число линий положить равным  $M(c)$ , то вызовы будут обслуживаться без потерь, интенсивность обслуженной нагрузки будет равна интенсивности поступающей нагрузки, а среднее использование одной линии пучка  $\eta=1$ .

Чем больше относительная колеблемость потока вызовов при прочих равных условиях, тем меньше среднее использование одной линии пучка. Для простейшего потока вызовов с уменьшением  $M(c)$  относительная колеблемость возрастает и в пределе

$$\lim_{M(c) \rightarrow 0} V = \lim_{M(c) \rightarrow 0} \frac{\sqrt{D(c)}}{M(c)} = \infty,$$



а среднее использование одной линии пучка  $\eta=0$ .

Зависимости пропускной способности от других параметров рассматриваются в последующих главах учебника.

### **Задача.**

*Задано:* Структурный состав абонентов проектируемой АТС на городской телефонной сети с шестизначной нумерацией –  $n_{\text{нх}}=4000$ ;  $n_{\text{к.и}}=4000$ ;  $n_{\text{к.к}}=1000$ ;  $n_{\text{т}}=300$ ;  $n_{\text{сл}}=100$ ; среднее число вызовов от одного абонента каждой категории в ЧНН –  $\bar{c}_{\text{нх}}=3,4$ ;  $\bar{c}_{\text{к.и}}=0,7$ ;  $\bar{c}_{\text{к.к}}=1,0$ ;  $\bar{c}_{\text{т}}=10$ ;  $\bar{c}_{\text{сл}}=10$ ; средняя длительность разговора для абонентов разных категорий –  $\bar{T}_{\text{нх}}=100$  с;  $\bar{T}_{\text{к.и}}=130$  с;  $\bar{T}_{\text{к.к}}=120$  с;  $\bar{T}_{\text{т}}=100$  с;  $\bar{T}_{\text{сл}}=100$  с; доли различных видов занятий –  $p_{\text{р}}=0,6$ ;  $p_{\text{зн}}=0,2$ ;  $p_{\text{но}}=0,1$ ;  $p_{\text{ош}}=0,05$ ;  $p_{\text{тех}}=0,05$ .

*Рассчитать:* интенсивности нагрузок, поступающих на АТС от абонентов всех категорий в ЧНН.

*Решение.* Средние длительности занятий, окончившихся разговором, для абонентов всех категорий рассчитываются по (3.8):

$$\bar{t}_{\text{р.нх}} = \bar{t}_{\text{с.о}} + \bar{t}_{\text{с}} + \bar{t}_{\text{п.в}} + \bar{T}_{\text{нх}} + \bar{t}_{\text{о}} = 3 + 1,5 \times 6 + 2,5 + 7 + 100 + 0 = 121,5 \text{ с;}$$

$\bar{t}_{\text{р.к.и}}=151,5$  с;  $\bar{t}_{\text{р.к.к}}=141,5$  с;  $\bar{t}_{\text{р.т}}=121,5$  с;  $\bar{t}_{\text{р.сл}}=121,5$  с. Средняя длительность занятия, не окончившихся разговором из-за занятости линии вызываемого абонента, рассчитывается по (3.10):

$$\bar{t}_{\text{зн}} = \bar{t}_{\text{с.о}} + \bar{t}_{\text{с}} + \bar{t}_{\text{с.н}} + \bar{t}_{\text{о}} = 3 + 1,5 \times 6 + 2,5 + 0 + 0 = 14,5 \text{ с.}$$

Средняя длительность занятий, не окончившихся разговором из-за неответа вызываемого абонента:

$$\bar{t}_{\text{но}} = \bar{t}_{\text{с.о}} + \bar{t}_{\text{с}} + \bar{t}_{\text{с.н}} + \bar{t}_{\text{о}} = 3 + 1,5 \times 6 + 2,5 + 30 + 0 = 44,5 \text{ с.}$$

Средняя длительность занятий, не окончившихся разговором из-за ошибок вызывающего абонента,  $\bar{t}_{\text{ош}}=20$  с. Средняя длительность занятий, не окончившихся разговором по техническим причинам,  $\bar{t}_{\text{тех}}=15$  с.

Средняя длительность занятий для абонентов всех категорий рассчитывается по (3.11):

$$\bar{t}_{\text{нх}} = \bar{t}_{\text{р.нх}} p_{\text{р}} + \bar{t}_{\text{зн}} p_{\text{зн}} + \bar{t}_{\text{но}} p_{\text{но}} + \bar{t}_{\text{ош}} p_{\text{ош}} + \bar{t}_{\text{тех}} p_{\text{тех}} =$$
$$= 121,5 \times 0,6 + 14,5 \times 0,2 + 44,5 \times 0,1 + 20 \times 0,05 + 15 \times 0,05 = 82 \text{ с.}$$

$$\bar{t}_{\text{к.и}}=100 \text{ с; } \bar{t}_{\text{к.к}}=94 \text{ с; } \bar{t}_{\text{т}}=82 \text{ с; } \bar{t}_{\text{сл}}=82 \text{ с.}$$

Интенсивность нагрузки, поступающей от абонентов разных категорий, рассчитывается по (3.12):

$$y_{\text{нх}} = n_{\text{нх}} \times \bar{c}_{\text{нх}} \times \bar{t}_{\text{нх}} = 4000 \times 3,4 \times (82/3600) = 309,8 \text{ Эрл;}$$

$$y_{\text{к.и}} = 77,7 \text{ Эрл; } y_{\text{к.к}} = 26,1 \text{ Эрл; } y_{\text{т}} = 68,3 \text{ Эрл; } y_{\text{сл}} = 22,7 \text{ Эрл.}$$

Интенсивность нагрузки, поступающей на АТС от абонентов всех категорий:

$$y_{\text{АТС}} = y_{\text{нх}} + y_{\text{к.и}} + y_{\text{к.к}} + y_{\text{т}} + y_{\text{сл}} = 504,6 \text{ Эрл.}$$

### **Контрольные вопросы**

1. В каких единицах измеряются нагрузка и интенсивность нагрузки?
2. Сформулируйте теорему о количественной оценке интенсивности обслуженной нагрузки.
3. Сформулируйте теорему о количественной оценке интенсивности поступающей нагрузки.
4. Дайте определение часа наибольшей нагрузки, поясните способ определения интенсивности нагрузки в ЧНН.
5. Что такое коэффициент концентрации нагрузки?
6. По каким признакам различают категории источников телефонной нагрузки?
7. Каким параметром оценивается уровень удовлетворения потребностей в телефонной связи?
8. Какими результатами может окончиться поступающий на АТС вызов?
9. Какое отношение числа состоявшихся разговоров к числу поступивших на АТС вызовов следует считать удовлетворительным?
10. Какие показатели используются для количественной оценки качества обслуживания с явными потерями и с ожиданием?
11. Дайте простейшую классификацию дисциплин обслуживания поступающих вызовов.
12. От каких параметров зависит пропускная способность коммутационной системы?
13. Почему при фиксированной величине потерь с ростом интенсивности поступающей на пучок линий нагрузки, создаваемой простейшим потоком вызовов, возрастает среднее использование одной линии пучка?

## Полнодоступный пучок. Система с потерями

### 4.1. Обслуживание вызовов симметричного потока с простым последствием

Постановка задачи. Исходными данными модели являются: неблокирующая коммутационная система (никаких других ограничений на структуру системы не накладывается – она может быть однозвеневой или многозвеневой);

в выходы коммутационной системы включен полнодоступный пучок емкостью  $\nu$  ( $1 \leq \nu < \infty$ ) линий (приборов);

вызовы, поступающие на входы коммутационной системы, образуют симметричный поток с простым последствием с параметром  $\lambda_i$ ;

дисциплина обслуживания коммутационной системой поступающего потока вызовов – с потерями;

длительность обслуживания  $T$  коммутационной системой вызова является случайной величиной, распределенной по показательному закону, т. е. функция распределения длительности занятия

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\beta t},$$

где  $\beta$  – параметр длительности занятия. Обычно за единицу времени принимается средняя длительность занятия –  $1/\beta=1$ , следовательно, и  $\beta=1$ .

Задача формулируется следующим образом. Полнодоступный пучок емкостью  $\nu$  линий, включенных в выходы неблокирующей коммутационной системы с потерями, обслуживает вызовы, образующие симметричный поток с простым последствием с параметром  $\lambda_i$ . Длительность обслуживания вызова коммутационной системой распределена по показательному закону. Требуется определить вероятности различных состояний полнодоступного пучка в процессе обслуживания поступающих вызовов.

В этой задаче достаточно исследовать макросостояния системы, т. е. состояния, различающиеся числом  $i$  одновременно занятых линий в любой момент времени ( $i = 0, 1, 2, \dots, \nu$ ), независимо от того, какие именно линии заняты. Это объясняется следующими соображениями.

1. При любом состоянии полнодоступного пучка линий, включенных в выходы неблокирующей коммутационной системы, т. е. при любом числе занятых линий, независимо от того, какие именно линии заняты, любой поступивший вызов может быть обслужен любой из свободных в данный момент линий пучка. Поступивший вызов получает отказ в обслуживании (теряется) только в тех случаях, когда в момент поступления вызова все  $\nu$  линий пучка заняты. Указанное свойство полнодоступного пучка не зависит ни от структуры полнодоступного пучка (прямое или сдвинутое включение линий пучка в объединяемые выходы коммутационной системы), ни от способа искания свободной линии пучка (с исходного положения, в случайном или любом другом порядке).

2. Пучок линий обслуживает вызовы симметричного потока, параметр которого  $\lambda_i$ , зависит в любой момент времени только от состояния данного пучка. Параметр  $\lambda_i$  задается какой-либо зависимостью лишь от числа занятых (или от числа свободных) линий и не зависит от того, какие именно линии пучка заняты.

Из этих соображений следует, что вероятности занятости фиксированного числа линий не зависят от того, какие именно линии заняты, а зависят только от числа занятых линий. Определим вероятности различных макросостояний системы – вероятности того, что в системе в момент времени  $t$  занято точно  $i$  линий пучка ( $i=0, 1, 2, \dots, \nu$ ) –  $p_i(t)$ . Помимо того, определим вероятности потерь по времени  $p_t$  и по вызовам  $p_v$ .

Число занятых линий  $i$  в момент  $t$  является случайным. Поэтому процесс изменения числа занятых линий во времени является случайным процессом. Если известно, что в момент  $t$

занято  $i$  линий, то последующее течение процесса изменения числа занятых линий в вероятностном смысле зависит только от моментов появления новых вызовов и от моментов окончания занятий линий как вызовами, поступившими до момента  $t$ , так и новыми вызовами.

Моменты появления новых вызовов не зависят от рассматриваемого случайного процесса до момента  $t$ , так как параметр  $\lambda_i$  поступающего на систему симметричного потока вызовов зависит только от числа  $i$  занятых линий в рассматриваемый момент  $t$ . Также от течения процесса до момента  $t$  не зависят и моменты окончания занятий линий. Последнее следует из показательного распределения длительности занятий, при котором время оставшейся части занятия не зависит от того, сколько времени оно уже продолжается (основное свойство показательного распределения).

Отсюда рассматриваемый случайный процесс обладает следующим свойством: если известно число занятых линий в момент времени  $t$ , то процесс изменения состояний системы после момента  $t$  в вероятностном смысле не зависит от течения процесса до этого момента, т. е. рассматриваемый процесс является *марковским*.

**Понятие о марковских процессах.** Для марковских процессов, названных в честь выдающегося русского математика А. А. Маркова (1856–1922 гг.), будущее определяется известным настоящим и не зависит от прошлого.

Пусть  $V(t)$  – число занятых линий в момент времени  $t$ . Если в некоторый момент  $t$  в системе занято  $i$  линий (система находится в состоянии  $i$ ), то  $V(t)=i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, v$ . Система имеет конечное число  $(v+1)$  состояний, и рассматриваемый марковский процесс является процессом с конечным числом состояний. Обозначим через  $p_{ji}(t_1, t_2)$  вероятность того, что система, находившаяся в момент  $t_1$  в состоянии  $j$ , за время  $[t_1, t_2)$  перейдет в состояние  $i$ . Рассматриваемый случайный процесс, т. е. процесс поступления вызовов и освобождений, зависит лишь от числа занятых линий  $j$  в начальный момент  $t_1$  и от длины отрезка времени  $[t_1, t_2)$ . Этот процесс не зависит от моментов  $t_1$  и  $t_2$ . Поэтому и вероятность  $p_{ji}(t_1, t_2)$  зависит только от длины отрезка времени  $[t_1, t_2)$  и значений  $j$  и  $i$ . Процессы Маркова, обладающие таким свойством, называются *однородными*.

Выделим на отрезке времени  $[t_1, t_2)$  момент  $t_c (t_1 < t_c < t_2)$ . Для того чтобы за промежуток времени  $[t_1, t_2)$  система перешла из состояния  $j$ , в котором она находилась в момент  $t_1$ , в состояние  $i$  в момент  $t_2$ , система должна за отрезок времени  $[t_1, t_c)$  перейти в некоторое состояние  $r (0 \leq r \leq v)$ , а потом за оставшийся отрезок времени  $[t_c, t_2)$  – из состояния  $r$  в состояние  $i$ . По формуле полной вероятности получаем

$$p_{ji}(t_1, t_2) = \sum_{r=0}^v p_{jr}(t_1, t_c) p_{ri}(t_c, t_2). \quad (4.1)$$

Формула (4.1) называется *уравнением Колмогорова–Чепмена*. В силу свойства процесса Маркова вероятность  $p_{ri}(t_c, t_2)$  является безусловной, не зависящей от процесса, протекающего на отрезке времени  $[t_1, t_c)$ , так как известно, что в момент  $t_c$  система находится в состоянии  $r$ .

В формуле (4.1) изменим обозначения отрезков времени:  $[t_1, t_2)$  обозначим через  $[0, t+\tau)$ , тогда  $[t_1, t)$  будет  $[0, t)$  и  $[t_1, t_2) - [t, t+\tau)$ . При этом (4.1) преобразуется к виду

$$p_{ji}(0, t+\tau) = \sum_{r=0}^v p_{jr}(0, t) p_{ri}(t, t+\tau), \quad 0 \leq j \leq v, \quad 0 \leq i \leq v. \quad (4.2)$$

Для решения задачи обслуживания полностью доступным пучком вызовов симметричного потока удобно воспользоваться частным случаем процесса Маркова – *процессом рождения и гибели*.

*Процесс рождения и гибели* – это марковский процесс с непрерывным параметром  $t$ , имеющий конечное  $(0, 1, 2, \dots, i, \dots, v)$  или счетное  $(0, 1, 2, \dots, i, \dots)$  множество состояний, в каждом из которых за бесконечно малый промежуток времени  $[t, t+\tau)$  с вероятностью более нуля возможен непосредственный переход системы только в соседнее состояние, иными словами, из состояния  $i$  возможен либо непосредственный переход в состояние  $i-1$  или  $i+1$ ,

либо система остается в состоянии  $i$ . При этом вероятность того, что за время  $\tau \rightarrow 0$  произойдет более одного изменения состояния, равна  $o(\tau)$ .

**Определение вероятностей состояния полностью доступного пучка.** Не ограничивая пока

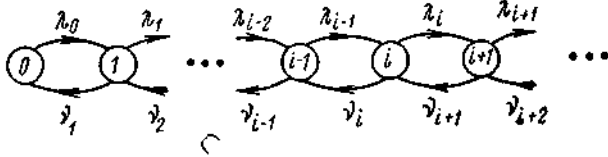


Рис. 4.1. Диаграмма состояний и переходов в полностью доступном пучке емкостью  $v$  линий

емкости пучка линий ( $v=\infty$ ), определим вероятности  $p_i(t+\tau)$  того, что в момент  $(t+\tau)$  пучок находится в состоянии  $i$ .

Так как симметричный поток является ординарным и параметр его в момент  $t$  не зависит от процесса обслуживания вызовов до момента  $t$ , то процесс обслуживания вызовов данного потока полностью доступным

пучком линий представляет собой процесс рождения и гибели. Диаграмма состояний и переходов этого процесса приведена на рис. 4.1.

Процесс рождения в рассматриваемой задаче отождествляется с процессом занятий, а процесс гибели – с процессом освобождений линий пучка. Параметры потоков занятий и освобождений обозначены соответственно  $\lambda_i$  и  $\nu_i$ ,  $i=0, 1, 2, \dots$ . Согласно процессу рождения и гибели, при  $\tau \rightarrow 0$  пучок в момент  $(t+\tau)$  может находиться в состоянии  $i$  только при наличии следующих условий.

1. В момент  $t$  пучок находится в состоянии  $i-1$  (вероятность этого события  $p_{i-1}(t)$ ), и за время  $\tau$  на обслуживание поступит точно один вызов (вероятность данного события  $p_B(\tau)$ ). Тогда вероятность перехода пучка за промежуток времени  $[t, t+\tau)$  из состояния  $i-1$  в состояние  $i$  составляет  $p_{i-1,i}(\tau) = p_{i-1}(t)p_B(\tau)$ . При этом вероятность  $p_B(\tau)$  является условной. Она определяется с учетом того, что в момент  $t$  пучок находился в состоянии  $i-1$ .

2. В момент  $t$  пучок находится в состоянии  $i+1$  (вероятность этого события  $p_{i+1}(t)$ ), и за время  $\tau$  освободится точно одна из  $i+1$  занятых линий (вероятность этого события  $p_{oc\ i+1}(\tau)$ ). Вероятность перехода пучка за промежуток времени  $[t, t+\tau)$  из состояния  $i+1$  в состояние  $i$  составляет  $p_{i+1,i}(\tau) = p_{i+1}(t)p_{oc\ i+1}(\tau)$ . Вероятность  $p_{oc\ i+1}(\tau)$  является условной, она определяется с учетом того, что в момент  $t$  пучок находился в состоянии  $i+1$ .

3. В момент  $t$  пучок находится в состоянии  $i$  (вероятность этого события  $p_i(t)$ ). За время  $\tau$  пучок не изменяет своего состояния, он остается в состоянии  $i$ , т. е. на пучок не поступает вызова и в нем не освобождается ни одна из занятых линий [вероятность этого события  $(1 - p_B(\tau) - p_{oc\ i}(\tau))$ ]. Вероятность перехода пучка из состояния  $i$  в состояние  $i$  составляет  $p_{ii}(\tau) = p_i(t)(1 - p_B(\tau) - p_{oc\ i}(\tau))$ .

4. За время  $[t, t+\tau)$  в пучке происходят два и более переходов в результате поступления двух и более вызовов, либо освобождения двух и более линий, либо поступления одного и более вызовов и одновременно освобождения одной и более линий. Вероятность таких событий составляет  $o(\tau)$ .

Условия 1–4 взаимно исключают друг друга, поэтому искомые вероятности  $p_i(t+\tau)$ , ( $i=0, 1, 2, \dots$ ), определяются как сумма приведенных выше четырех вероятностей:

$$p_i(t+\tau) = p_{i-1,i}(\tau) + p_{i+1,i}(\tau) + p_{ii}(\tau) + o(\tau) = p_{i-1}(t)p_B(\tau) + p_{i+1}(t)p_{oc\ i+1}(\tau) + p_i(t)(1 - p_B(\tau) - p_{oc\ i}(\tau)) + o(\tau); i \geq 1. \quad (4.3)$$

Найдем вероятность поступления точно одного вызова  $p_B(\tau)$  за отрезок времени  $[t, t+\tau)$  и вероятность освобождения точно одной из  $r$  занятых линий за тот же отрезок времени –  $p_{oc\ r}(\tau)$ .

**Вероятность  $p_B(\tau)$ .** Из определения параметра потока в произвольный момент  $t$  (см. гл. 2)  $\lambda(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\pi_1(t, t+\tau)}{\tau}$  следует, что вероятность поступления одного и более вызовов за отрезок времени  $[t, t+\tau)$  составляет  $\pi_1(t, t+\tau) = \lambda(t)\tau + o(\tau)$ . Для симметричного потока, параметр которого  $\lambda_r$  зависит только от числа занятых в момент  $t$  линий,  $\pi_1(t, t+\tau) = \lambda_r\tau + o_1(\tau)$ . Так как симметричный

поток является ординарным, то вероятность поступления двух и более вызовов за бесконечно малый отрезок времени  $[t, t+\tau)$  составляет  $\pi_2(t, t+\tau) = o_2(\tau)$ . Отсюда  $p_B(\tau) = p_1(t,$

$t+\tau)-\pi_2(t, t+\tau)=\lambda_r\tau+o_1(\tau)-o_2(\tau)$ . Учитывая, что  $o_1(\tau)$  и  $o_2(\tau)$ —бесконечно малые одного порядка, получим

$$p_b(\tau) = \lambda_r \tau + o(\tau). \quad (4.4)$$

**Вероятность  $p_{oc\ r}(\tau)$ .** Вероятность освобождения за время  $\tau \rightarrow 0$  одной из  $r$  занятых линий не зависит от характера поступающего потока вызовов. Вероятность  $p_{oc\ r}(\tau)$  зависит только от состояния  $r$  пучка в момент  $t$  и от закона распределения длительности обслуживания, который задан показательным. Вероятность освобождения хотя бы одной из  $r$  занятых линий за промежуток времени  $\tau$  в соответствии с (2.45) равна

$$\pi_1(\tau) = r \tau \beta + o(\tau). \quad (4.5)$$

Так как в рассматриваемой задаче за единицу времени принята средняя длительность занятия, то  $\beta=1$ . Поток освобождений является ординарным. Отсюда вероятность освобождения точно одной из  $r$  занятых линий за отрезок времени  $[t, t+\tau)$  при  $\tau \rightarrow 0$  равна

$$p_{oc\ r}(\tau) = r \tau + o(\tau). \quad (4.6)$$

Заметим, что вероятности  $p_b(\tau)$ , определяемые (4.1), так же как и вероятности  $p_{oc\ r}(\tau)$ , определяемые (4.6), пропорциональны  $\tau$ . Следовательно, вероятности поступления за время  $\tau$  любых двух и более событий (двух и более вызовов, или двух и более освобождений, или вызова и освобождения и т. д.) есть величины порядка  $o(\tau)$ . Из этого следует, что вероятности  $p_{ri}(t, t+\tau)$  перехода системы за отрезок времени  $[t, t+\tau)$  из состояния  $r$  в состояние  $i$  при  $|r-i| \geq 2$  равны  $p_{ri}(t, t+\tau) = o(\tau)$ ,  $|r-i| \geq 2$ .

Подставим в систему ур-ний (4.3) полученные значения вероятностей  $p_b(\tau)$  и  $p_{oc}(\tau)$ , перенесем из правой части уравнений в левую  $p_i(t)$ , просуммируем все бесконечно малые слагаемые  $o(\tau)$  и разделим обе части уравнений на  $\tau$ . В результате получим

$$\frac{p_i(t+\tau) - p_i(t)}{\tau} = \lambda_{i-1} p_{i-1}(t) - (\lambda_i + i) p_i(t) + (i+1) p_{i+1}(t) + \frac{o(\tau)}{\tau}, \quad i \geq 1.$$

Переходя к пределу при  $\tau \rightarrow 0$ , найдем

$$\frac{d}{dt} p_i(t) = \lambda_{i-1} p_{i-1}(t) - (\lambda_i + i) p_i(t) + (i+1) p_{i+1}(t), \quad i \geq 1.$$

При  $i=0$  переход системы из состояния  $i-1$  в состояние  $i$  не имеет места. Поэтому

$$\frac{d}{dt} p_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + p_1(t).$$

Получаем для определения вероятностей  $p_i(t)$ ,  $i=0, 1, 2, \dots$ , систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} p_0(t) &= -\lambda_0 p_0(t) + p_1(t); \\ \frac{d}{dt} p_i(t) &= \lambda_{i-1} p_{i-1}(t) - (\lambda_i + i) p_i(t) + (i+1) p_{i+1}(t), i \geq 1. \end{aligned} \right\} (4.7)$$

Допускаем, что при  $t \rightarrow \infty$  для вероятностей  $p_i(t)$  существуют конечные пределы (стационарные вероятности) —  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i$ .

Тогда  $\frac{d}{dt} p_i(t) = 0$ . Полагая в системе уравнений (4.7)  $t \rightarrow \infty$ , получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} -\lambda_0 p_0 + p_1 &= 0; \\ \lambda_{i-1} p_{i-1} - (\lambda_i + i) p_i + (i+1) p_{i+1} &= 0, i \geq 1. \end{aligned} \right\} (4.8)$$

Обозначим в (4.8)  $\lambda_{i-1} p_{i-1} - i p_i = z_i$ , получим

$$z_1 = 0; z_i - z_{i+1} = 0, i \geq 1.$$

Отсюда  $z_i = 0, i \geq 1$ , и, следовательно,  $p_i = (\lambda_{i-1}/i) p_{i-1}, i \geq 1$ .

Выражая вероятности  $p_i$  через  $p_0$ , получим

$$p_i = \left( \prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k / i! \right) p_0, i \geq 1; \sum_{i=0}^{\infty} p_i = p_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left( \prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k \right) / i!. \quad (4.9); (4.10)$$

В (4.10) принято обозначение  $\prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k \equiv 1$ . Если ряд  $\sum_{i=0}^{\infty} \left( \prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k \right) / i!$

расходится, то вызовы поступают настолько чаще по сравнению с освобождениями занятых линий, что, начиная с некоторого момента времени, окажется невозможным обслуживание коммутационной системой поступающего потока вызовов. Для сходимости ряда необходимо, чтобы параметр потока вызовов  $\lambda_i$  существенно не отличался от параметра потока освобождений. Это условие выполняется в рассматриваемой задаче обслуживания полнодоступным пучком линий симметричного потока вызовов. Доказано, что при любом  $t$  (доказательство не приводится), если ряд сходится, то

$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) = 1$ . Исходя из этого, при  $t \rightarrow \infty$ , используя «нормировочное» условие  $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$ , из (4.10) и (4.9) получим

$$p_0 = \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k}{i!} \right]^{-1}; p_i = \frac{\left( \prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k \right) / i!}{\sum_{j=0}^{\infty} \left( \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k \right) / j!}, i \geq 1. \quad (4.11)$$

В общем случае для процесса рождения и гибели со счетным множеством состояний с параметрами  $\lambda_i$  и  $\nu_i, i=0, 1, 2, \dots$ , стационарные вероятности состояний определяются следующими выражениями:

$$p_0 = \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k}{\prod_{k=1}^i \nu_k} \right]^{-1}; p_i = \frac{\prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k}{\prod_{k=1}^i \nu_k} p_0, i \geq 1. \quad (4.12)$$

В рассматриваемой задаче обслуживания полнодоступным пучком емкостью  $\nu$  линий симметричного потока вызовов параметр потока вызовов  $\lambda_i$  и параметр потока освобождений  $\nu_i = i$  конечны; число состояний также является величиной конечной, оно равно

$$\nu + 1, \text{ так что } \sum_{i=0}^{\nu} p_i = 1.$$

При этом, если система находится в состоянии  $v$  (все линии заняты), то поступающие вызовы не могут производить новых занятий и, следовательно, для  $i \geq v$  параметр потока занятий  $\lambda_i = 0$ . В состоянии  $i=0$  все линии свободны и параметр потока освобождений  $\nu_0 = 0$ . С учетом этого вероятности  $p_0$  и  $p_i (1 \leq i \leq v)$  определяются формулами

$$p_0 = \left[ \sum_{i=0}^v \frac{\prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k}{i!} \right]^{-1}; \quad p_i = \frac{\left( \prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k \right) / i!}{\sum_{j=0}^v \left( \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k \right) / j!}. \quad (4.13)$$

**Определение вероятностей потерь по времени и потерь по вызовам.** Вероятность  $p_i$  можно рассматривать как долю времени (на промежутке  $T \rightarrow \infty$ ), в течение которого в пучке занято точно  $i$  линий. В частности, доля времени (на промежутке  $T \rightarrow \infty$ ), в течение которого заняты все  $v$  линий полностью доступного пучка, равна вероятности  $p_v$ . Применительно к полностью доступному пучку линий, включенных в выходы неблокирующей коммутационной системы, вероятность потерь по времени  $p_t$  представляет собой долю времени (на промежутке  $T \rightarrow \infty$ ), в течение которого заняты все  $v$  линий пучка, и определяется соотношением

$$p_t = p_v = \frac{\left( \prod_{k=0}^{v-1} \lambda_k \right) / v!}{\sum_{j=0}^v \left( \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k \right) / j!}. \quad (4.14)$$

Определим вероятность потерь по вызовам  $p_b$ . Согласно определению  $p_b$  есть отношение интенсивности потерянному  $\mu_n$  к интенсивности поступающего  $\mu$  потоков вызовов:  $p_b = \mu_n / \mu$ . Здесь

$$\mu = \sum_{i=0}^v \lambda_i p_i = \frac{\sum_{i=0}^v \left( \prod_{k=0}^i \lambda_k \right) / i!}{\sum_{j=0}^v \left( \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k \right) / j!}; \quad \mu_n = \lambda_v p_v = \frac{\left( \prod_{k=0}^v \lambda_k \right) / v!}{\sum_{j=0}^v \left( \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k \right) / j!}.$$

Следовательно,

$$p_b = \frac{\left( \prod_{k=0}^v \lambda_k \right) / v!}{\sum_{j=0}^v \left( \prod_{k=0}^j \lambda_k \right) / j!} \quad (4.15)$$

(в целях идентичности с формулами  $p_i$  и  $p_t$  в (4.15) индекс суммирования  $i$  заменен на  $j$ ).

## 4.2. Обслуживание вызовов простейшего потока

### Определение вероятностей состояния полностью доступного пучка.

Полностью доступный пучок емкостью  $v (1 \leq v \leq \infty)$  линий, который включен в неблокирующую коммутационную систему с потерями, обслуживает вызовы, образующие простейший поток с параметром  $\lambda$ . Длительность обслуживания вызова коммутационной системой распределена по показательному закону ( $F(t) = 1 - e^{-t}$ ,  $\beta = 1$ ). Требуется определить вероятности различных состояний полностью доступного пучка в процессе обслуживания поступающих вызовов и вероятности потерь по времени  $p_t$ , по вызовам  $p_b$  и по нагрузке  $p_n$ .

Параметр простейшего потока  $\lambda$  является постоянной величиной, не зависящей от состояния коммутационной системы. Поэтому в (4.13) – (4.15) при любых значениях  $k$  вместо  $\lambda_k$  используется величина  $\lambda$ , и эти формулы преобразуются к виду:

$$p_i = \frac{\lambda^i / i!}{\sum_{j=0}^v (\lambda^j / j!)} ; p_i = p_v = \frac{\lambda^v / v!}{\sum_{j=0}^v (\lambda^j / j!)} ; \quad (4.16)(4.17)$$

$$p_v = \frac{\lambda^{v+1} / v!}{\sum_{j=0}^v (\lambda^{j+1} / j!)} . \quad (4.18)$$

Сокращая числитель и знаменатель на  $\lambda$ , получим

$$p_v = \frac{\lambda^v / v!}{\sum_{j=0}^v (\lambda^j / j!)} . \quad (4.18')$$

Формула (4.16) называется *распределением Эрланга*. Она показывает, что вероятность  $p_i$  зависит только от числа занятых линий  $i$ , емкости пучка  $v$  и величины параметра потока вызовов  $\lambda$ . По этим соображениям вероятность  $p_i$  принято обозначать  $E_{i,v}(\lambda)$ , а вероятность  $p_v$  — через  $E_{v,v}(\lambda)$  или  $E_v(\lambda)$ .

Из (4.17) и (4.18) следует, что

$$p_v = p_i = p_v = E_v(\lambda) . \quad (4.19)$$

При выводе (4.13) – (4.15), а следовательно, и (4.16) – (4.18') средняя длительность занятия принята равной единице; отсюда и параметр длительности занятий при показательном законе распределения  $\beta=1$ . В общем случае при измерении длительности занятий в любых единицах времени ( $\beta \neq 1$ ) распределение Эрланга имеет следующий вид:

$$p_i = E_{i,v}(\lambda/\beta) = \frac{(\lambda/\beta)^i / i!}{\sum_{j=0}^v (\lambda/\beta)^j / j!} . \quad (4.20)$$

Установим зависимость вероятностей  $p_i$  от интенсивности поступающей нагрузки  $y$ :  $y = \mu \bar{t} = \mu / \beta = \lambda / \beta$ , где  $\mu$  — интенсивность потока вызовов;  $\bar{t}$  — средняя длительность занятия. Для простейшего потока, который является ординарным и стационарным,  $\mu = \lambda$ . Тогда распределение Эрланга имеет вид

$$p_i = E_{i,v}(y) = \frac{y^i / i!}{\sum_{j=0}^v (y^j / j!)} , \quad (4.21)$$

и, в частности, вероятность того, что в полнодоступном пучке заняты все  $v$  линий ( $i=v$ ), равна

$$p_v = E_v(y) = \frac{y^v / v!}{\sum_{j=0}^v (y^j / j!)} . \quad (4.22)$$

При  $v \rightarrow \infty$   $\left( \sum_{j=0}^{\infty} (y^j / j!) = e^y \right)$  распределение Эрланга (4.21) преобразуется в распределение Пуассона:

$$p_i = (y^i / i!) e^{-y} . \quad (4.23)$$

В (4.23)  $p_i$  есть вероятность того, что в произвольный момент  $t$  бесконечный пучок находится в состоянии  $i$ .

Распределение Эрланга определено в предположении показательного распределения длительности занятий. Б. А. Севастьянов показал, что полученная формула справедлива при



произвольном (а не только показательном) распределении длительности занятий, если средняя длительность занятий является конечной величиной.

**Логический анализ вероятностей  $E_{i,v}(y)$ .** 1. Вероятность  $p_i = E_{i,v}(y)$  – вероятность того, что в произвольный момент времени  $t$  стационарного режима в полностью доступном пучке емкостью  $v$  линий, который работает в режиме с потерями и обслуживает поступающую нагрузку интенсивностью  $y$ , создаваемую простейшим потоком вызовов, занято точно  $i$  линий.

2. Пусть имеется  $n(n \rightarrow \infty)$  полностью доступных пучков одной и той же емкости  $v$ , на каждый из которых поступает нагрузка интенсивностью  $y$ . Тогда вероятность  $E_{i,v}(y)$  – доля пучков, в которых в произвольный момент  $t$  занято точно  $i$  линий, т. е.

$$E_{i,v}(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n_i(t) / n,$$

где  $n_i(t)$  – число пучков, которые в момент  $t$  находятся в состоянии  $i$ .

3. Если фиксировать состояния определенного полностью доступного пучка в  $m(m \rightarrow \infty)$  произвольных моментов времени  $t$ , то  $E_{i,v}(y)$  есть доля моментов  $t$ , в которые пучок находится в состоянии  $i$ , т. е.  $E_{i,v}(y) = \lim_{m \rightarrow \infty} (m_i / m)$ , где  $m_i$  – число произвольных моментов  $t$ , в которые в пучке занято точно  $i$  линий.

4. Вероятность  $E_{i,v}(y)$  – доля времени (на промежутке  $T \rightarrow \infty$ ), в течение которого в полностью доступном пучке занято точно  $i$  линий (пучок емкостью  $v$  линий обслуживает поступающую нагрузку  $y$ ). В частности, доля времени (на промежутке  $T \rightarrow \infty$ ), в течение которого заняты все  $v$  линий полностью доступного пучка, равна вероятности  $p_v$ , определяемой по (4.22).

**Вероятность потерь по нагрузке. Математическое ожидание и дисперсия нагрузки.** Вероятность потерь по нагрузке  $p_n$  найдем из соотношения

$$p_n = y_n / y, \quad (4.24)$$

где  $y_n$  – интенсивность потерянной  $y$  – интенсивность поступающей нагрузок. Учитывая, что  $y_n = y - y_0$ , определим интенсивность обслуженной полностью доступным пучком нагрузки  $y_0$ , которая равна математическому ожиданию нагрузки, обслуженной в единицу времени. По теореме о количественной оценке обслуженной нагрузки

$$y_0 = \sum_{i=1}^v i p_i, \quad (4.25)$$

где  $i$  – число занятых линий в пучке;  $p_i$  – вероятность нахождения пучка в произвольный момент времени в состоянии  $i$ . Правая часть выражения (4.25) соответствует математическому ожиданию числа одновременно занятых линий, т. е. интенсивность обслуженной нагрузки равна математическому ожиданию числа одновременно занятых линий пучка.

Подставляя в (4.25) значение  $p_i$ , определяемое (4.21), получим

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^v i \frac{y^i}{i!}}{\sum_{j=0}^v \frac{y^j}{j!}} = y \frac{\sum_{j=0}^{v-1} \frac{y^j}{j!}}{\sum_{j=0}^v \frac{y^j}{j!}} = y \frac{\sum_{j=0}^v \frac{y^j}{j!} - \frac{y^v}{v!}}{\sum_{j=0}^v \frac{y^j}{j!}} = y(1 - p_v).$$

Таким образом, интенсивность обслуженной нагрузки равна произведению интенсивности поступающей нагрузки  $y$  на вероятность того, что в пучке имеется хотя бы одна свободная линия  $(1 - p_v) = \sum_{i=0}^{v-1} p_i$ :

$$y_0 = y(1 - p_v) = y(1 - E_v(y)). \quad (4.26)$$

Из (4.26) также следует, что если  $v \rightarrow \infty$ , то  $p_v \rightarrow 0$ , т. е. интенсивность обслуженной нагрузки в системе без потерь равна интенсивности поступающей нагрузки. Действительно, используя (4.23), получаем

$$y_0 = \sum_{i=1}^{\infty} i p_i = \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{y^i}{i!} e^{-y} = y e^{-y} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y^{i-1}}{(i-1)!} = y e^{-y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = y e^{-y} e^y = y.$$

Из соотношений (4.24) и (4.26) получаем значение интенсивности потерянной нагрузки:

$$y_n = y - y_0 = y p_v = y p_n. \quad (4.27)$$

Отсюда  $p_n = p_v$ . Следовательно, при обслуживании с потерями вызовов простейшего потока линиями полнодоступного пучка, которые включены в выходы неблокирующей коммутационной системы, вероятности потерь по времени, вызовам и нагрузке равны между собой и равны вероятности того, что пучок находится в состоянии  $v$ :

$$p_i = p_v = p_n = p_v = E_v(y) = \frac{y^v/v!}{\sum_{j=0}^v (y^j/j!)} \quad (4.28)$$

Формула потерь в полнодоступном пучке (4.28) называется *первой формулой Эрланга*. Функция  $E_v(y)$  (или, что то же, функция  $E_v(\lambda)$  при средней длительности занятия, равной единице) табулирована. Таблицы первой формулы Эрланга построены так, что по числу линий  $v$  и интенсивности поступающей нагрузки  $y$  (или параметру потока  $\lambda$ ) отыскиваются потери  $E_v(y)$ . Эти таблицы позволяют по двум любым заданным величинам из  $v$ ,  $y$  и  $E_v(y)$  находить третью.

Определим дисперсию обслуженной  $D(y_0)$  и поступающей  $D(y)$  нагрузок;

$$\begin{aligned} D(y_0) &= \sum_{i=0}^v i^2 p_i - y_0^2 = \\ &= \sum_{i=0}^v \frac{i^2 \frac{y^i}{i!}}{\sum_{j=0}^v \frac{y^j}{j!}} - y_0^2 = y \frac{\sum_{i=1}^v \frac{y^{i-1}}{(i-1)!} + y \sum_{i=2}^v \frac{y^{i-2}}{(i-2)!}}{\sum_{j=0}^v \frac{y^j}{j!}} - y_0^2 = \\ &= y [1 - E_v(y) + y(1 - E_v(y) - E_v(y) \frac{v}{y})] - y_0^2 = y_0 + y y_0 - \\ &\quad - y v E_v(y) - y_0^2 = y_0 - y E_v(y) (v - y_0); \quad (4.29) \\ D(y) &= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 p_i - y^2 = y e^{-y} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y^{i-1}}{(i-1)!} + y \sum_{i=2}^{\infty} \frac{y^{i-2}}{(i-2)!} \right) - y^2 = \\ &= y e^{-y} (e^y + y e^y) - y^2 = y. \quad (4.30) \end{aligned}$$

Из (4.30) следует, что дисперсия поступающей нагрузки равна ее математическому ожиданию. Сопоставление (4.29) с (4.26) показывает, что дисперсия обслуженной нагрузки меньше ее математического ожидания. Таким образом, обслуженная нагрузка имеет меньший диапазон колебаний, т. е. имеет более выровненный характер по сравнению с поступающей нагрузкой. Отсюда дисперсия потерянной нагрузки больше ее математического ожидания (4.27), т. е. потерянная нагрузка имеет менее равномерный характер по сравнению с поступающей нагрузкой.

**Рекуррентное соотношение функции Эрланга.** Используя (4.21), получаем, что  $p_i/p_{i-1} = y/i$ , откуда

$$p_i = p_{i-1} (y/i). \quad (4.31)$$

Рекуррентное соотношение (4.31) показывает, что в области значений  $i < y$  отношение  $(y/i) > 1$  и вероятности  $p_i > p_{i-1}$ , а в области  $i > y$  отношение  $(y/i) < 1$  и  $p_i < p_{i-1}$ . Таким образом, до значения  $i-1 = y$  вероятности  $p_i$  с увеличением  $i$  возрастают. При этом наибольших значений

достигают рассматриваемые вероятности  $p_i = p_{i-1}$  при  $i=y$ , если  $y$  – целое число, и  $p_i$  при  $i-1=[y]$ , если  $y$  – нецелое число. Затем по мере увеличения  $i$  происходит уменьшение значений  $p_i$ . Характер зависимости  $p_i=f(i)$  при  $y=12$  Эрл и  $v=20$  показан на рис. 4.2. Огибающие кривые дискретных значений функции  $p_i$  для  $y=6, 12, 18$  Эрл и  $v=12$  приведены на рис. 4.3а и

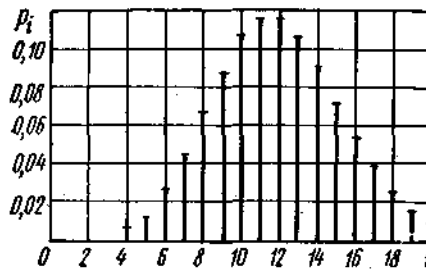


Рис. 4.2. Распределение вероятности  $p_i$  того, что в полнодоступном пучке емкостью  $v$  занято точно  $i$  линий при  $y=12$  Эрл,  $v=20$

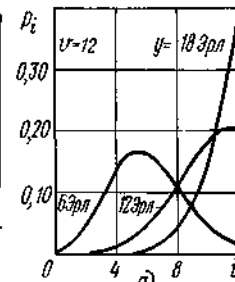
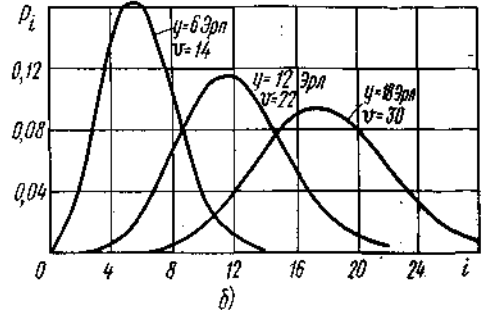


Рис. 4.3. Огибающие кривые значений функции  $p_i$  от  $i$  при  $y=const$  и  $v=const$



для тех же значений  $y$  и соответственно  $v=14, 22$  и  $30$  – на рис. 4.3б. Огибающие  $p_i=f(i)$  по своему характеру близки к огибающим кривым дискретных значений вероятности поступления точно  $k$  вызовов простейшего потока (распределение Пуассона –  $p_k(t)=f(k)$ ).

Нагрузка, обслуживаемая каждой линией полнодоступного пучка. Обслуживание потока Пальма. На полнодоступный пучок любой емкости поступает нагрузка интенсивностью  $y$ . Искание свободных линий в пучке – упорядоченное с исходным положением: каждый поступающий вызов обслуживается свободной линией с наименьшим номером и теряется, если в момент поступления вызова заняты все линии пучка. Определим величину нагрузки, обслуживаемой каждой линией пучка.

Согласно (4.26) пучки емкостью  $i$  и  $i-1$  линий обслуживают соответственно нагрузки  $y_0(i)$  и  $y_0(i-1)$ :

$$y_0(i) = y(1 - E_i(y)); y_0(i-1) = y(1 - E_{i-1}(y)).$$

Разность этих соотношений и определяет нагрузку  $\eta_{0i}$ , обслуживаемую  $i$ -й линией пучка любой емкости, если на этот пучок поступает нагрузка интенсивностью  $y$ :

$$\eta_{0i} = y_0(i) - y_0(i-1) = y(E_{i-1}(y) - E_i(y)), i = 1, 2, \dots, v. \quad (4.32)$$

Обратим внимание на высокое использование первой линии пучка при обслуживании им даже небольшой по величине нагрузки. По (4.32)  $\eta_{01} = y(E_0(y) - E_1(y))$ . Согласно формуле Эрланга (4.22)  $E_0(y) = 1, E_1(y) = y/(1+y)$ . Отсюда  $\eta_{01} = y/(1+y)$ .

Значение  $E_0(y) = 1$  можно получить и не пользуясь формулой Эрланга. Действительно, при  $v=0$  ни один из поступающих вызовов не обслуживается, вся поступающая нагрузка теряется и потери равны единице.

При  $y=100, 50$  и  $10$  Эрл первая линия пучка соответственно пропускает нагрузки  $\eta_{01}=0,99; 0,98$  и  $0,91$  Эрл. Средняя интенсивность нагрузки, обслуживаемой одной линией пучка,  $\eta = y_0/v$  тем больше, чем больше емкость пучка. В пучках большой емкости ( $v > 50$ ) даже в области малых потерь ( $p_0 \leq 0,01$ ) достигается высокое использование линий пучка  $v$ , только на 15–20% ниже  $\eta_{01}$ . Естественно, что высокое качество обслуживания – малая величина потерь – приводит к небольшому использованию последних линий пучка. Приведенные утверждения иллюстрируются следующим численным примером.

Полнодоступными пучками емкостью  $v_1=121, v_2=66$  и  $v_3=19$  обслуживаются соответственно поступающие нагрузки  $y_1=100, y_2=50$  и  $y_3=10$  Эрл при заданных потерях  $E_0(y)=0,005$ . Значения  $\eta, \eta_{01}$  и  $\eta_{0v}$  в эрлангах указаны в табл. 4.1.

ТАБЛИЦА 4.1

$y$ , Эрл	$\nu$	$\eta$	$\eta_{oi}$	$\eta_{ov}$
100	121	0,83	0,99	0,101
50	66	0,76	0,98	0,079
10	19	0,53	0,91	0,034

Упорядоченное искание свободных линий полнодоступного пучка приводит к тому, что первая линия пучка обладает наибольшей пропускной способностью. С увеличением номера линии уменьшается обслуживаемая ею нагрузка –  $\eta_{o1} > \eta_{o2} > \dots > \eta_{ov}$ . Указанное является

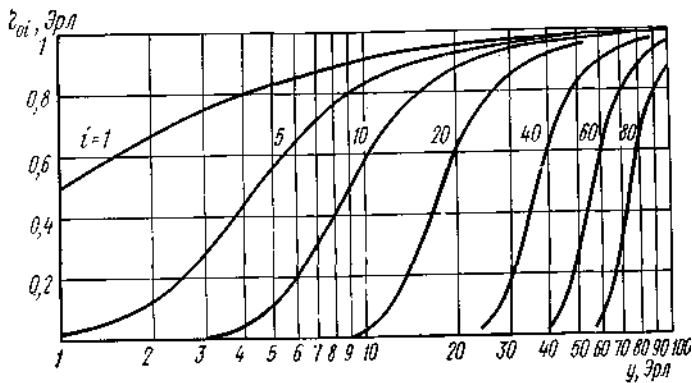


Рис. 4.4. Нагрузка  $\eta_{oi}$ , обслуживаемая  $i$ -й линией пучка, в зависимости от величины интенсивности нагрузки  $y$ , поступающей на первую линию этого пучка

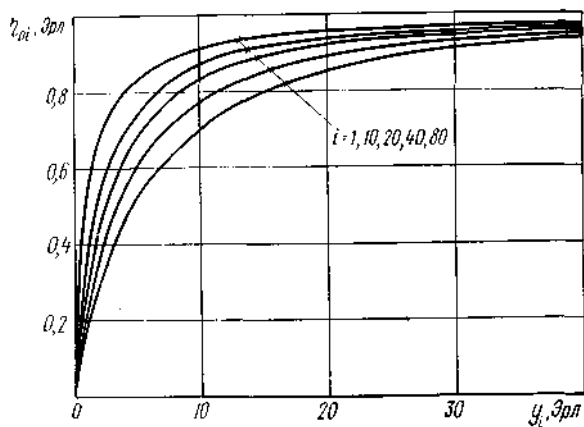


Рис. 4.5. Нагрузка  $\eta_{oi}$ , обслуживаемая  $i$ -й линией пучка, в зависимости от нагрузки  $y_i$ , поступающей на  $i$ -ю линию пучка

линия с большим номером обладает меньшей пропускной способностью по сравнению с линией, имеющей меньший номер. Изложенное иллюстрируется рис. 4.4 и 4.5.

На рис. 4.4 показаны зависимости интенсивности- нагрузки  $\eta_{oi}$ , обслуживаемой  $i$ -й линией пучка, от интенсивности нагрузки  $y$ , поступающей на первую линию этого пучка, т. е.  $\eta_{oi} = f(y)$ , где  $\eta_{oi}$  определяется по (4.32). Кривые  $\eta_{oi} = f(y_i)$ , где  $y_i$  – интенсивность поступающей на  $i$ -ю линию нагрузки, показаны на рис. 4.5. Последнее семейство кривых наглядно иллюстрирует и позволяет получить количественную оценку пропускной способности разных линий полнодоступного пучка при упорядоченном искании линий, на которые поступают потоки Пальма равной интенсивности. Так, например, если на  $i$ -ю линию пучка поступает нагрузка интенсивностью  $y_i = 2$  Эрл, то при  $i=1$  получаем  $\eta_{oi} = 0,67$  Эрл, а при  $i=10, 20, 40, 80$  нагрузка, обслуживаемая  $i$ -й линией, снижается с увеличением номера этой линии по сравнению с первой линией пучка соответственно на 24, 36, 46 и 55%.

Приведенный пример показывает, что неравномерность промежутков между вызовами потока Пальма приводит к существенному уменьшению пропускной способности разных линий пучка по сравнению с обслуживанием этими линиями простейшего потока равной интенсивности. Из рис. 4.5 также следует, что с повышением величины  $y_i$  пропускная

способность разных линий пучка снижается менее интенсивно.

**Характер зависимостей между  $y$ ,  $v$  и  $E_v(y)$ .** Принимая во внимание, что  $p_t = p_v = p_n = p_o$ , используем для вероятности потерь обозначение  $p$ , т. е.  $p_o = E_v(y) = p$ .

Зависимость  $y=f(v)$  при  $p=\text{const}$  ( $p_1=0,005$ ;  $p_2=0,02$ ;  $p_3=0,05$ ) приведена на рис. 4.6. Из

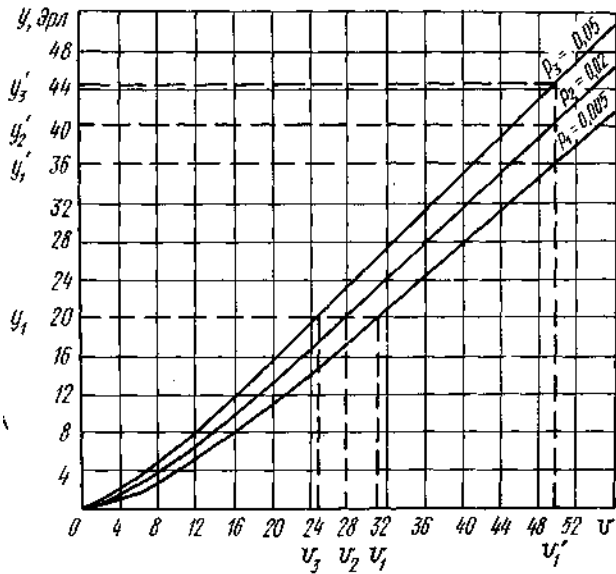


Рис. 4.6. Зависимость поступающей нагрузки  $y$  от емкости  $v$  полнодоступного пучка при постоянном значении вероятности потерь

большой пропускной способностью обладает пучок, т. е. если  $p_3 > p_2 > p_1$ , то при  $y=y_1=\text{const}$   $v_3 < v_2 < v_1$ .  
 $y_3' > y_2' > y_1'$ .

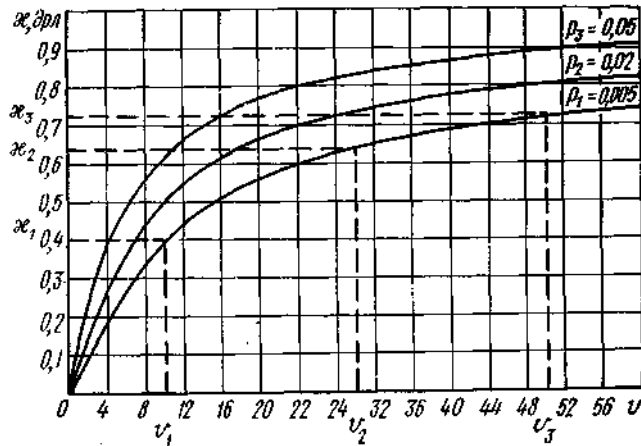


Рис. 4.7. Зависимость удельной поступающей нагрузки  $\chi$  от емкости  $v$  полнодоступного пучка при постоянном значении вероятности потерь

1. При заданном качестве обслуживания поступающих вызовов ( $p=\text{const}$ ) с увеличением емкости пучка  $v$  повышается его пропускная способность. Так, при  $p=0,005$  пучок  $v=20$  линий обслуживает поступающую нагрузку  $y=11,1$  Эрл, а пучок  $v=40$  линий —  $y=27,4$  Эрл, т. е. при увеличении емкости полнодоступного пучка с  $v=20$  до  $v=40$  (в 2 раза) интенсивность поступающей нагрузки повышается в 2,47 раза.

2. При заданной величине интенсивности поступающей нагрузки ( $y=\text{const}$ ) чем больше допустимые потери  $p$ , тем меньше требуется линий в пучке для обслуживания поступающей нагрузки, т. е. если  $p_3 > p_2 > p_1$ , то при  $y=y_1=\text{const}$   $v_3 < v_2 < v_1$ .

3. При заданной емкости пучка линий ( $v=\text{const}$ ) чем больше величина потерь  $p$ , тем большей пропускной способностью обладает пучок, т. е. если  $p_3 > p_2 > p_1$ , то при  $v=v_1=\text{const}$

Нагляднее рассматриваемая зависимость иллюстрируется интенсивностью поступающей нагрузки, отнесенной к одной линии пучка —  $\chi=y/v$ . На рис. 4.7 приведено семейство кривых, характеризующих зависимость  $\chi=f(v)$  при  $p=\text{const}$  ( $p_1=0,005$ ;  $p_2=0,02$ ;  $p_3=0,05$ ). По аналогии с рис. 4.6 рассматриваемая зависимость показывает, что при:

- а)  $\chi=\text{const}$ , если  $p_1 < p_2 < p_3$ , то  $v_1 > v_2 > v_3$ ;
- б)  $v=\text{const}$ , если  $p_1 < p_2 < p_3$ , то  $\chi_1 < \chi_2 < \chi_3$ ;
- в)  $p=\text{const}$ , если  $v_3 > v_2 > v_1$ , то  $\chi_3 > \chi_2 > \chi_1$ .

В случае  $p=\text{const}$  увеличение емкости пучка линий сказывается на повышении его пропускной способности тем существеннее,

чем меньше емкость пучка: при  $v_3 > v_2 > v_1$  имеет место неравенство

$$\frac{\chi_3 - \chi_2}{v_3 - v_2} < \frac{\chi_2 - \chi_1}{v_2 - v_1} \quad (4.33)$$

Таким образом, при  $p=\text{const}$  с увеличением емкости пучка линий пропускная способность пучка всегда повышается, однако скорость увеличения пропускной способности снижается (это утверждение справедливо в области малых и средних потерь).

Характер рассматриваемых зависимостей дополним семейством кривых (сплошные линии)  $\chi=f(p)$  и  $\eta=f(p)$  (пунктирные линии) при  $v=\text{const}$  (рис. 4.8). Из рисунка видно, что при  $v=\text{const}$  с ростом потерь увеличивается пропускная способность пучка: при  $v=\text{const}$ , если  $p_3 > p_2 > p_1$ , то  $\chi_3 > \chi_2 > \chi_1$  и  $\eta_3 > \eta_2 > \eta_1$ . В области малых и средних потерь справедливо следующее неравенство:

$$\frac{\chi_3 - \chi_2}{\rho_3 - \rho_2} < \frac{\chi_2 - \chi_1}{\rho_2 - \rho_1} \quad (4.34)$$

Повышение величины потерь приводит к увеличению пропускной способности полнодоступного пучка линий, однако скорость увеличения удельной поступающей нагрузки снижается с возрастанием потерь.

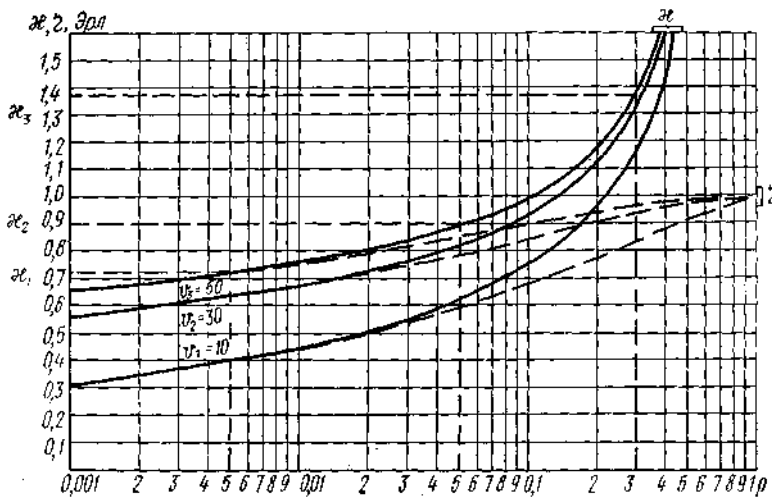


Рис. 4.8. Зависимость удельной поступающей нагрузки  $\chi$  и удельной обслуженной нагрузки  $\eta$  от вероятности потерь  $\rho$  при постоянной емкости  $v$  полнодоступного пучка

поступающих вызовов не обслуживается, а теряется. Поэтому пропускную способность пучка линий обычно характеризуют не величиной  $\chi$ , а величиной  $\eta$ .

Для средней пропускной способности одной линии пучка во всей области потерь ( $0 \leq \rho \leq 1$ ) справедливо соотношение

$$\frac{\eta_3 - \eta_2}{\rho_3 - \rho_2} < \frac{\eta_2 - \eta_1}{\rho_2 - \rho_1}, \text{ если } \rho_3 > \rho_2 > \rho_1. \quad (4.36)$$

Отметим, что  $\chi$  и  $\eta$  могут принимать любые значения в областях  $0 \leq \chi \leq \infty$ ,  $0 \leq \eta < 1$  и при  $\rho \rightarrow 1$   $\chi \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow 1$ .

### 4.3. Обслуживание вызовов примитивного потока

#### Определение вероятностей состояния полнодоступного пучка.

Полнодоступный пучок емкостью  $v$  ( $1 \leq v < \infty$ ) линий, включенных в выходы неблокирующей коммутационной системы с потерями, обслуживает вызовы, которые образуют примитивный поток с параметром  $\lambda_i$ . Длительность обслуживания вызова коммутационной системой распределена по показательному закону  $F(t) = 1 - e^{-t}$ ,  $\beta = 1$ . Требуется определить вероятности различных состояний полнодоступного пучка в процессе обслуживания поступающих вызовов и вероятности потерь по времени  $\rho_i$ , вызовам  $\rho_v$  и нагрузке  $\rho_n$ .

Примитивный поток является частным случаем симметричного потока с простым последствием. Его параметр  $\lambda_i$  определяется соотношением

$$\lambda_i = (n - i) \alpha, \quad 0 \leq i \leq v, \quad (4.37)$$

где  $\alpha$  – параметр потока вызовов свободного источника;  $n$  – число источников вызовов, каждый из которых создает поток с одним и тем же значением параметра  $\alpha$ . Из (4.37) следует, что параметр примитивного потока  $\lambda_i$  пропорционален числу свободных источников, он зависит лишь от числа занятых линий пучка  $i$ .

Подставляя в (4.13) соотношение  $\lambda_k = (n - k)\alpha$ , получим

В области больших потерь, наоборот, с увеличением вероятности потерь скорость увеличения удельной поступающей нагрузки повышается:

$$\frac{\chi_3 - \chi_2}{\rho_3 - \rho_2} > \frac{\chi_2 - \chi_1}{\rho_2 - \rho_1} \quad (4.35)$$

Однако в области больших потерь допустимое значение интенсивности поступающей нагрузки  $\chi$  не дает наглядной характеристики качества обслуживания коммутационной системой поступающего потока вызовов, так как основная часть

$$p_i = \left[ \frac{n(n-1) \dots (n-i+1)}{i!} \alpha^i \right] / \left[ \sum_{j=0}^v \frac{n(n-1) \dots (n-j+1)}{j!} \alpha^j \right],$$

откуда  $p_i = (C_n^i \alpha^i) / \left( \sum_{j=0}^v C_n^j \alpha^j \right), i = 0, 1, 2, \dots, v.$  (4.38)

Последняя формула называется *формулой Энгсета*. Она определяет вероятность  $p_i$  того, что в полностью доступном пучке емкостью  $v$  линий, который включен в неблокирующую коммутационную систему с потерями и обслуживает вызовы примитивного потока, в любой произвольный момент времени занято точно  $i$  линий, или, иными словами, вероятность того, что этот пучок находится в состоянии  $i$ .

В гл. 2 было показано, что простейший поток можно рассматривать как предельный частный случай примитивного потока. Естественно, что формула Энгсета (4.38) является более общей, чем формула Эрланга (4.16), и последняя может быть непосредственно получена из (4.38). Покажем это.

Число источников вызовов устремим к бесконечности ( $n \rightarrow \infty$ ), одновременно устремив к нулю параметр одного свободного источника ( $\alpha \rightarrow \infty$ ). При этом параметр потока вызовов всех свободных источников  $n\alpha$  сохраняем величиной конечной и постоянной –  $\lambda = n\alpha = \text{const}$ . Тогда при любом конечном значении  $i$  ( $i=0, 1, \dots, v$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^i \alpha^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-i+1)}{i!} \alpha^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^i \alpha^i}{i!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n\alpha)^i}{i!} = \frac{\lambda^i}{i!}.$$

Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n^i \alpha^i}{\sum_{j=0}^v C_n^j \alpha^j} = \frac{\lambda^i / i!}{\sum_{j=0}^v (\lambda^j / j!)}.$$

Таким образом, при  $n \rightarrow \infty$  из формулы Энгсета получается формула Эрланга.

**Соотношения между параметром потока  $a$  и нагрузкой, поступающей от одного источника.** Рассмотрим систему без потерь, т. е. систему, в которой число линий равно числу источников ( $v=n$ ). В такой системе каждый источник может обслуживаться независимо от состояния других источников. Поэтому достаточно рассмотреть случай  $n=v=1$ . При этом по (4.38) получаем:  $p_0=1/(1+\alpha)$ ;  $p_1=\alpha/(1+\alpha)$ . Вероятность  $p_1$  в рассматриваемом случае есть доля времени, в течение которого источник занят в системе без потерь, что численно соответствует интенсивности нагрузки  $a$ , поступающей от одного источника –  $p_1=a$ . Отсюда

$$a = \alpha / (1 + \alpha), \quad \alpha = a / (1 - a). \quad (4.39)$$

Установим соотношение между параметром потока вызовов, поступающих от одного источника в системе без потерь, и параметром потока  $a$  одного свободного источника.

Согласно определению параметр потока есть  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\pi_1(t, t+\tau)}{\tau}$ . Вероятность  $\pi_1(t, t+\tau)$  того, что за промежуток времени  $[t, t+\tau)$ ,  $\tau \rightarrow 0$ , от рассматриваемого источника поступит один и более вызовов, определяется произведением вероятности  $p_0$  того, что в момент  $t$  источник свободен, на сумму, состоящую из вероятности того, что за промежуток времени  $[t, t+t)$  от свободного источника поступит точно один вызов (эта вероятность равна  $\alpha\tau + o(\tau)$ ), и вероятности поступления за этот промежуток более одного вызова (вероятность равна  $o(\tau)$ ). Поэтому  $\pi_1(t, t+\tau) = p_0(\alpha\tau + o(\tau))$ , и параметр потока вызовов одного источника равен

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p_0(\alpha\tau + o(\tau))}{\tau} = p_0 \alpha = \alpha / (1 + \alpha) = a. \quad (4.40)$$

Таким образом, параметр потока вызовов одного источника численно равен интенсивности поступающей нагрузки от одного источника.

Заменим в (4.38) параметр  $a$  соотношением (4.39) и получим формулу Энгсета, выраженную через величину интенсивности поступающей от одного источника нагрузки  $a$ :

$$p_i = \frac{C_n^i \left(\frac{a}{1-a}\right)^i}{\sum_{j=0}^v C_n^j \left(\frac{a}{1-a}\right)^j}, 0 \leq i \leq v. \quad (4.41)$$

Последнюю формулу часто приводят и в другом виде:

$$p_i = \frac{C_n^i \left(\frac{a}{1-a}\right)^i (1-a)^n}{\sum_{j=0}^v C_n^j \left(\frac{a}{1-a}\right)^j (1-a)^n} = \frac{C_n^i a^i (1-a)^{n-i}}{\sum_{j=0}^v C_n^j a^j (1-a)^{n-j}}. \quad (4.41')$$

Если емкость пучка линий  $v$  равна числу источников  $n (v=n)$ , то из (4.41'), в которой согласно биному Ньютона знаменатель  $\sum_{j=0}^v C_n^j a^j (1-a)^{n-j} = (a+1-a)^n = 1$ , получаем

$$p_i = C_n^i a^i (1-a)^{n-i}, \quad (4.42)$$

т. е. вероятность того, что в произвольный момент времени из  $n$  источников занято точно  $i$  источников, определяется распределением Бернулли.

**Определение вероятностей потерь по времени, вызовам и нагрузке.** Потери по времени  $p_t$  численно равны вероятности занятости всех  $v$  линий пучка:

$$p_t = p_v = \frac{C_n^v \left(\frac{a}{1-a}\right)^v}{\sum_{j=0}^v C_n^j \left(\frac{a}{1-a}\right)^j} = \frac{C_n^v a^v (1-a)^{n-v}}{\sum_{j=0}^v C_n^j a^j (1-a)^{n-j}}. \quad (4.43)$$

Формулу для вычисления потерь по вызовам получим из соотношения (4.15), подставив в него значения параметра примитивного потока вызовов:

$$p_B = \frac{\frac{n(n-1)\dots(n-v)}{v!} \alpha^{v+1}}{\sum_{j=0}^v \frac{n(n-1)\dots(n-j)}{j!} \alpha^{j+1}} = \frac{n \alpha C_{n-1}^v \alpha^v}{n \alpha \sum_{j=0}^v C_{n-1}^j \alpha^j};$$

$$p_B = \frac{C_{n-1}^v \alpha^v}{\sum_{j=0}^v C_{n-1}^j \alpha^j} = \frac{C_{n-1}^v \left(\frac{a}{1-a}\right)^v}{\sum_{j=0}^v C_{n-1}^j \left(\frac{a}{1-a}\right)^j} = \frac{C_{n-1}^v a^v (1-a)^{n-1-v}}{\sum_{j=0}^v C_{n-1}^j a^j (1-a)^{n-1-j}}. \quad (4.44)$$

Соотношения (4.38), (4.41) и (4.44) показывают, что вероятности  $p_i$  состояний полнодоступного пучка линий в процессе обслуживания примитивного потока вызовов, а также потери  $p_t, p_B$  зависят от числа источников вызовов  $n$ , величины поступающей от одного источника нагрузки  $a$  (или параметра потока вызовов одного свободного источника  $\alpha$ ) и емкости пучка линий  $v$ .

Из сопоставления (4.44) и (4.43) следует, что в полнодоступном пучке емкостью  $v$  линий, на который поступает примитивный поток вызовов, потери по вызовам при наличии  $n$  источников равны потерям по времени при наличии  $n-1$  источников, т. е.  $p_B(n, a, v) = p_t(n-1, a, v)$ . Отсюда следует, что  $p_B(n, a, v) < p_t(n, a, v)$ , или  $p_B < p(t)$ .

Формула (4.44), определяющая потери по вызовам  $p_B(n, a, v)$ , табулирована для широкого диапазона значений  $n, a, v$ . По этим же таблицам определяют потери по времени, исходя из равенства  $p_t(n, a, v) = p_B(n+1, a, v)$ .

Согласно определению, вероятность потерь по нагрузке  $p_n$  равна отношению интенсивности потерянной  $y_n$  к интенсивности поступающей  $y$  нагрузок:  $p_n = y_n/y$ .

Интенсивность потерянной нагрузки  $y_n$  есть разность интенсивностей поступающей  $y$  и обслуженной  $y_0$  нагрузок:  $y_n = y - y_0$ . Интенсивность обслуженной нагрузки  $y_0$  равна математическому ожиданию числа одновременно занятых линий пучка емкостью  $v$ :



$$y_0 = \sum_{i=0}^v i p_i. \quad (4.45)$$

Аналогично интенсивность поступающей нагрузки  $y$  равна математическому ожиданию числа занятых линий в пучке емкостью  $n$  (в системе без потерь):

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=0}^n i p_i = \sum_{i=0}^n i \frac{C_n^i a^i (1-a)^{n-i}}{\sum_{j=0}^n C_n^j a^j (1-a)^{n-j}} = \sum_{i=0}^n i C_n^i a^i (1-a)^{n-i} = \\ &= n a \sum_{i=1}^n C_{n-1}^{i-1} a^{i-1} (1-a)^{n-i} = n a \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j a^j (1-a)^{n-1-j}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$y = n a = n \alpha / (1 + \alpha). \quad (4.46)$$

Таким образом, интенсивность поступающей нагрузки равна произведению числа источников  $n$ , создающих эту нагрузку, на интенсивность нагрузки  $a$  одного источника. Из соотношения (4.46) также следует, что математическое ожидание числа занятых линий  $M(i)$  в системе без потерь составляет  $M(i) = na$ .

Используя соотношение (4.45) и (4.46), находим

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{\frac{n \alpha}{1 + \alpha} - \sum_{i=0}^v i p_i}{n \alpha / (1 + \alpha)} = \frac{n \alpha - (1 + \alpha) \sum_{i=0}^v i C_n^i \alpha^i}{n \alpha} = \\ &= \frac{n \alpha \sum_{j=0}^v C_n^j \alpha^j - (1 + \alpha) \sum_{i=0}^v i C_n^i \alpha^i}{n \alpha \sum_{j=0}^v C_n^j \alpha^j}. \end{aligned}$$

Упростим числитель последней дроби; развернем значения приведенных в числителе рядов и сгруппируем все коэффициенты, относящиеся к параметру  $\alpha$ , имеющему одну и ту же степень. В

результате этого числитель преобразуется к виду  $\sum_{i=2}^v (nC_n^{i-1} - iC_n^i - (i-1)C_n^{i-1})\alpha^i + (n-v)C_n^v\alpha^{v+1}$ . Так как  $nC_n^{i-1} - iC_n^i - (i-1)C_n^{i-1} = (n-i+1)C_n^{i-1} - iC_n^i = 0$ , то рассматриваемый числитель равен  $(n-v)C_n^v\alpha^{v+1} = nC_{n-1}^v\alpha^{v+1}$ . Тогда

$$p_n = \frac{nC_{n-1}^v\alpha^{v+1}}{n\alpha \sum_{j=0}^v C_n^j \alpha^j} = \frac{C_{n-1}^v\alpha^v}{\sum_{j=0}^v C_n^j \alpha^j} \frac{n(n-v)}{n(n-v)} = \frac{n-v}{n} \frac{C_n^v\alpha^v}{\sum_{j=0}^v C_n^j \alpha^j}.$$

С учетом (4.43) получаем формулу, определяющую потери по нагрузке:

$$p_n = (1 - v/n) p_v. \quad (4.47)$$

Из этой формулы следует, что потери по нагрузке  $p_n$  меньше потерь по времени  $p_i (p_n < p_i)$  и даже в предельном случае, когда  $v=n$ , потери по нагрузке  $p_n = 0$ , а потери по времени (4.43)  $p_i = a_n$ . Можно показать, что потери по нагрузке  $p_n$  всегда меньше и потерь по вызовам  $p_v$ .

Таким образом, при обслуживании примитивного потока вызовов полностью доступным пучком, включенным в неблокирующую коммутационную систему, потери по нагрузке меньше потерь по вызовам, а последние меньше потерь по времени, т. е. имеет место неравенство

$$p_n < p_v < p_t = p_v. \quad (4.48)$$

При обслуживании же таким пучком простейшего потока вызовов, как было показано (4.28), между этими потерями имеет место равенство

$$p_n = p_v = p_t = p_v = E_v(y). \quad (4.49)$$

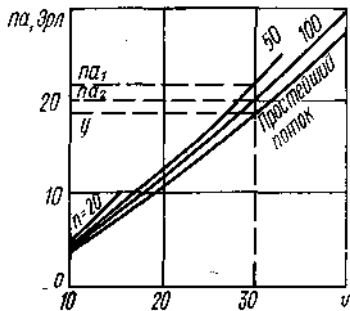


Рис. 4.9. Семейство кривых, характеризующих зависимость  $na=f(v)$  при  $n=20; 50; 100$  и  $p_v=0,005$

**Сравнение пропускной способности полнодоступного пучка, обслуживающего вызовы примитивного и простейшего потоков.** Характер зависимости величины поступающей нагрузки  $na$  от емкости пучка линий  $v$ , который обслуживает вызовы примитивного потока, поступающие от фиксированного числа источников  $n$ , такой же, как и при обслуживании вызовов простейшего потока. Однако на пропускную способность пучка влияет число источников вызовов  $n$ : в области малых потерь с уменьшением  $n$  увеличивается пропускная способность пучка. Это иллюстрируется семейством кривых  $na=f(v)$  при  $p_v=0,005$ , приведенном на рис. 4.9. Эти кривые одновременно показывают, что при заданном качестве

обслуживания поступающая на  $v$  линий пучка нагрузка  $na$ , создаваемая вызовами примитивного потока от любого числа источников, имеет большую величину по сравнению с нагрузкой  $y$ , создаваемой вызовами простейшего потока. Так, при  $v=30$  нагрузки, поступающие от  $n_1=50$  и  $n_2=100$ , могут достигать соответственно значений  $na_1=21,65$  Эрл и  $na_2=20$  Эрл, а нагрузка, которая создается вызовами простейшего потока,  $y=18,7$  Эрл, т. е. нагрузка от  $n=50$  на 8,2% больше нагрузки, поступающей от  $n=100$ , и на 16% больше нагрузки, создаваемой вызовами простейшего потока. Заметим, что с увеличением потерь  $p_v$ : а) существенно уменьшается влияние  $n$  на пропускную способность пучка; б) сокращается различие между пропускной способностью пучков, обслуживающих вызовы примитивного и простейшего потоков. В то же время нагрузка  $na_0$ , обслуживаемая полнодоступным пучком  $v$  в области любых потерь, выше при обслуживании вызовов примитивного потока ( $na_0=na(1-p_n)$ ), а  $p_n$  всегда меньше  $E_v(na)$ . Так, например, обслуженная нагрузка, создаваемая примитивным потоком от  $n=50$ , при  $p_n=E_v(na)=0,01$  на 12% и при  $p_n=E_v(na)=0,2$  на 6% выше обслуженной нагрузки, создаваемой простейшим потоком вызовов. Таким образом, с точки зрения величины обслуживаемой нагрузки примитивный поток всегда «лучше» простейшего потока вызовов.

**Обслуживание вызовов, поступающих от источников с различной интенсивностью.** В модели примитивного потока принято, что параметр потока вызовов от любого свободного источника один и тот же —  $\alpha$ . Поэтому параметр потока вызовов  $\lambda_i$  от группы из  $n$  источников в каждый момент времени зависит только от числа свободных в этой группе источников —  $\lambda_i=\alpha(n-i)$ , где  $i$  — число занятых источников. Вероятность потери вызова для каждого источника одна и та же. В реальных условиях свободные источники имеют различные параметры потоков —  $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_n$ . В связи с этим параметр потока вызовов от группы источников в каждый момент времени зависит не только от числа свободных в группе источников, но и от того, какие именно источники в данный момент свободны. Каждое состояние такой системы с  $(n-i)$  свободными источниками характеризуется строго определенным набором  $i$  занятых источников. Вероятность потери вызова для каждого источника имеет различное значение.

Если качество обслуживания вызовов примитивного потока характеризуется одним параметром — вероятностью потерь по вызовам  $p_v$ , определяемой для полнодоступного пучка формулой Энгсета (4.44), то качество обслуживания вызовов при неодинаковой интенсивности источников характеризуется двумя величинами — вероятностью  $\pi_0$  потери вызова потока, общего для всей группы источников, и вероятностями  $\pi_j (j=1, 2, \dots, n)$  потери вызова каждого из  $n$  источников. Исследованиями установлено следующее.

1. Полнодоступный пучок емкостью  $v$  линий всегда обладает более высокой пропускной

способностью при обслуживании вызовов, создаваемых группой в  $n$  источников с  $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_n$ , по сравнению с обслуживанием этим пучком вызовов примитивного потока также от группы в  $n$  источников. Иными словами, при условии  $y = \sum_{j=1}^n a_j = na$  при одной и

той же емкости пучка  $\nu$  вероятность  $\pi_0$  всегда меньше  $p_B$ .

2. Значения вероятностей потери вызова  $\pi_j (j=1, \dots, n)$  находятся в широком диапазоне: у источников с большей интенсивностью значение  $\pi_j$  меньше, чем у источников с меньшей интенсивностью; у ряда источников  $\pi_j$  может превышать вероятность  $\pi_0$  и даже вероятность  $p_B$ .

### Задача 4.1.

Полнодоступные пучки емкостью  $\nu_1=20$ ,  $\nu_2=40$  и  $\nu_3=60$  линий обслуживают простейшие потоки вызовов. На пучок  $\nu_1$  в утренний и вечерний ЧНН поступают нагрузки интенсивностью  $y_{1V}=12,4$  Эрл,  $y_{1B}=11,1$  Эрл, на пучок  $\nu_2$   $y_{2V}=30,0$  Эрл,  $y_{2B}=27,5$  Эрл, на пучок  $\nu_3$   $y_{3V}=49,0$  Эрл,  $y_{3B}=45,0$  Эрл.

*Определить:* а) потери  $p_i$ ,  $p_B$  и  $p_H$  в пучках  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  и  $\nu_3$ ; б) соотношения между относительными величинами изменения потерь и поступающей нагрузки в каждом из этих пучков.

*Решение.* а) Согласно (4.28)  $p_i = p_B = p_H = E_\nu(y)$ . По таблицам первой формулы Эрланга находим:

$$E_{\nu_1}(y_{1B}) = E_{20}(11,1) = 0,0050; E_{\nu_1}(y_{1V}) = E_{20}(12,4) = 0,0127;$$

$$E_{\nu_2}(y_{2B}) = E_{40}(27,5) = 0,0053; E_{\nu_2}(y_{2V}) = E_{40}(30,0) = 0,0144;$$

$$E_{\nu_3}(y_{3B}) = E_{60}(45,0) = 0,0054; E_{\nu_3}(y_{3V}) = E_{60}(49,0) = 0,0172.$$

б) Относительные величины изменения потерь  $\delta_\pi$  и изменения нагрузки  $\delta_n$  определяются из соотношений

$$\delta_\pi = \frac{E_\nu(y_V) - E_\nu(y_B)}{E_\nu(y_B)} \cdot 100\%; \delta_n = \frac{y_V - y_B}{y_B} \cdot 100\%.$$

$$\text{При } \nu_1 = 20 \quad \delta_{\pi 1} = \frac{E_{20}(12,4) - E_{20}(11,1)}{E_{20}(11,1)} \cdot 100 = 154\% \text{ и}$$

$$\delta_{n 1} = \frac{12,4 - 11,1}{11,1} \cdot 100 = 11,7\%.$$

Аналогично определяем: при  $\nu_2=40$   $\delta_{\pi 2}=172\%$ ,  $\delta_{n 2}=9,1\%$  и при  $\nu_3=60$   $\delta_{\pi 3}=219\%$ ,  $\delta_{n 3}=8,9\%$ .

Соотношения между  $\delta_\pi$  и  $\delta_n$  для пучков  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  и  $\nu_3$  соответственно составляют:  $\delta_{\pi 1}/\delta_{n 1}=13,2$ ;  $\delta_{\pi 2}/\delta_{n 2}=18,9$ ;  $\delta_{\pi 3}/\delta_{n 3}=24,6$ .

Следует подчеркнуть, что при рассмотренных в этой задаче значениях потерь, которые соответствуют реальным потерям на городских телефонных сетях, увеличение поступающей нагрузки примерно на 10% приводит к увеличению потерь в 2,5–3 раза, т. е. потери возрастают в 10–25 раз быстрее по сравнению с величиной интенсивности поступающей нагрузки.

### Задача 4.2.

От трех групп источников поступают вызовы, образующие простейшие потоки и создающие нагрузки, интенсивности которых составляют  $y_1=10$ ,  $y_2=20$  и  $y_3=40$  Эрл. Эти вызовы обслуживаются полнодоступными пучками.

*Определить:* а) требуемые емкости пучков, если потери не должны превышать  $E_\nu(y)_1 \leq 0,005$  и  $E_\nu(y)_2 \leq 0,02$ ; б) соотношения между относительными величинами приращения емкости пучков линий и увеличения интенсивности поступающей нагрузки при заданном качестве обслуживания.

*Решение:* а) По таблицам формулы Эрланга при заданных величинах интенсивности поступающей нагрузки  $y$  и заданных значениях потерь  $E_\nu(y)$  определяются требуемые емкости пучков линий:

Допустимая величина потерь	Емкость пучков линий, при интенсивности поступающей, нагрузки, Эрл		
	$y_1=10$	$y_2=20$	$y_3=40$
$E_\nu(y)_1 \leq 0,005$	$\nu_1=19$	$\nu_2=31$	$\nu_3=55$
$E_\nu(y)_2 \leq 0,02$	$\nu_1=17$	$\nu_2=28$	$\nu_3=50$

б) Относительные величины приращения емкости пучков линий  $\delta_\nu$  и увеличения интенсивности поступающей нагрузки  $\delta_n$  определяются из соотношений:

$$\delta_v = \frac{v_i - v_{i-1}}{v_{i-1}} \cdot 100\%; \delta_n = \frac{y_i - y_{i-1}}{y_{i-1}} \cdot 100\%, i = 2, 3;$$

$$\delta_{n1} = \frac{y_2 - y_1}{y_1} \cdot 100 = 100\%, \delta_{n2} = \frac{y_3 - y_2}{y_2} \cdot 100 = 100\% .$$

$$\text{При } E_v(y)_1 \leq 0,005 \delta_{v1} = \frac{v_2 - v_1}{v_1} \cdot 100 = 68,4\%; \delta_{v2} = \frac{v_3 - v_2}{v_2} \cdot 100 = 77,4\% .$$

$$\text{При } E_v(y)_2 \leq 0,02 \delta_{v1} = 64,7\%; \delta_{v2} = 78,6\% .$$

Соотношения между  $\delta_v$  и  $\delta_n$  составляют:

$$\text{при } E_v(y)_1 \leq 0,005 \delta_{v1}/\delta_{n1} = 0,684, \delta_{v2}/\delta_{n2} = 0,774;$$

$$\text{при } E_v(y)_2 \leq 0,02 \delta_{v1}/\delta_{n1} = 0,647, \delta_{v2}/\delta_{n2} = 0,786.$$

Решение этой задачи показывает, что: а) если на полнодоступный пучок поступают нагрузки интенсивностью  $y=10 \div 40$  Эрл, то в области малых потерь увеличение потерь с  $E_v(y)_1 \leq 0,005$  до  $E_v(y)_2 \leq 0,02$  (в 4 раза) позволяет уменьшить требуемые емкости пучков линий только примерно на 10%; б) в области малых потерь (реальных потерь, имеющих место на ГТС) и относительно небольших значений интенсивности поступающей нагрузки ( $y=10 \div 40$  Эрл) емкости требуемых пучков возрастают медленнее по сравнению с величиной поступающей нагрузки. При фиксированной величине потерь увеличение интенсивности поступающей нагрузки в 2 раза приводит к увеличению емкости пучка только на 65–80 %.

### **Задача 4.3.**

*Определить:* требуемые емкости  $v$  полнодоступного пучка при обслуживании поступающей нагрузки интенсивностью  $na=10$  Эрл, создаваемой вызовами примитивного потока от  $n=100, 50$  и  $25$  источников; допустимые потери  $p_b \leq 0,005$ . Сопоставить найденные емкости пучков  $v$  с емкостью  $v_0$  полнодоступного пучка, обслуживающего ту же нагрузку, создаваемую вызовами простейшего потока.

*Решение.* Определяем значения нагрузки  $a$ , поступающей от одного источника, для групп источников емкостью  $n=100, 50$  и  $25$  и по таблицам формулы Энгсета отыскиваем при  $p_b \leq 0,005$  соответственно требуемые емкости пучков  $v_1, v_2, v_3$ :  $a_1=0,1$  Эрл;  $a_2=0,2$  Эрл;  $a_3=0,4$  Эрл;  $v_1=18$ ;  $v_2=18$ ;  $v_3=16$ .

По таблицам формулы Эрланга отыскиваем емкость пучка  $v_0$  при  $y=10$  Эрл и потерях  $E_{v0}(10) \leq 0,005 - v_0=19$ .

Таким образом, по сравнению с обслуживанием простейшего потока вызовов обслуживание примитивного потока, создаваемого  $n=100$  и  $50$  источниками вызовов, при высоком качестве обслуживания ( $p \leq 0,005$ ) позволяет сократить емкость полнодоступного пучка только на одну линию (на 5%), а при  $n=25$ —на три линии (на 16%).

### **Задача 4.4.**

Полнодоступный пучок емкостью  $v=8$  линий обслуживает вызовы примитивного потока от  $n=30$  источников с  $a=0,1; 0,3; 0,5$  Эрл.

*Определить:* а) величины обслуженных нагрузок  $an_0$ ; б) соотношения между потерями по вызовам и обслуженными нагрузками и сопоставить полученные результаты с аналогичными характеристиками полнодоступного пучка той же емкости при обслуживании им вызовов простейшего потока, создающими нагрузку  $y=na$ .

*Решение.* По таблицам Энгсета отыскиваем значения потерь по вызовам  $p_b=p(n, a, v)$  и потерь по времени  $p_r=p(n+1, a, v)$  для заданных значений

$$p_b=p(30; 0,1; 8)=0,0047; p_r=p(31; 0,1; 8)=0,0058;$$

$$p_b=p(30; 0,3; 8)=0,3286; p_r=p(31; 0,3; 8)=0,3479;$$

$$p_b=p(30; 0,5; 8)=0,6629; p_r=p(31; 0,5; 8)=0,6761.$$

Рассчитываем по (4.47) потери по нагрузке  $p_n$  и величины обслуженных нагрузок  $na_0=na(1-p_n)$  при:

$$a=0,1 \text{ Эрл} - p_n=0,0043; na_0=2,9871 \text{ Эрл};$$

$$a=0,3 \text{ Эрл} - p_n=0,2551; na_0=6,7041 \text{ Эрл};$$

$$a=0,5 \text{ Эрл} - p_n=0,4958; na_0=7,5630 \text{ Эрл}.$$

Затем определяем значения нагрузок  $y$ , создаваемых вызовами простейшего потока, и по таблицам первой формулы Эрланга отыскиваем значения потерь  $E_v(y)$  и обслуженных нагрузок  $y_0=y(1-E_v(y))$ :

$$a=0,1 \text{ Эрл} - y=3 \text{ Эрл}; E_8(3)=0,0081; y_0=2,9757 \text{ Эрл};$$

$$a=0,3 \text{ Эрл} - y=9 \text{ Эрл}; E_8(9)=0,2892; y_0=6,3972 \text{ Эрл};$$

$$a=0,5 \text{ Эрл} - y=15 \text{ Эрл}; E_8(15)=0,5193; y_0=7,2105 \text{ Эрл}.$$

Наконец, определяем требуемые соотношения при:

$$a=0,1 \text{ Эрл} - p_b/na_0=0,0016; E_8(3)/y_0=0,0027;$$

$$a=0,3 \text{ Эрл} - p_b/na_0=0,049; E_8(9)/y_0=0,045;$$

$$a=0,5 \text{ Эрл} - p_b/na_0=0,088; E_8(15)/y_0=0,072.$$

Эта задача иллюстрирует следующие закономерности: 1) при любых потерях по вызовам обслуживаемая полнодоступным пучком нагрузка выше, если на пучок поступают вызовы примитивного потока; 2) при малых потерях вызовы примитивного потока обслуживаются с более высоким качеством по сравнению с вызовами простейшего потока ( $p_b/na_0 < E_v(y)/y_0$ ), а при больших потерях, наоборот, вызовы примитивного потока

обслуживаются хуже вызовов простейшего потока ( $p_s/na_0 > E_v(y)/y_0$ ).

### Контрольные вопросы

1. Почему при рассмотрении процесса обслуживания полнодоступным пучком вызовов симметричного потока можно ограничиться исследованием макросостояний пучка?
2. По каким соображениям случайный процесс обслуживания полнодоступным пучком вызовов симметричного потока является марковским процессом и может быть описан процессом рождения и гибели?
3. Каково назначение формулы Колмогорова–Чепмена?
4. Поясните диаграмму состояний и вероятностей переходов в полнодоступном пучке, обслуживающем вызовы симметричного потока.
5. Каковы формулы для определения вероятности поступления точно одного вызова за время  $\tau$  и вероятности освобождения точно одной из  $r$  занятых линий за время  $\tau$ ?
6. Как определяется вероятность того, что в полнодоступном пучке, обслуживающем вызовы симметричного потока, в произвольный момент времени занято точно  $i$  линий?
7. Запишите формулу Эрланга для определения вероятности того, что в полнодоступном пучке, обслуживающем вызовы простейшего потока, занято точно  $i$  линий.
8. Проведите логический анализ функции Эрланга  $E_{i,v}(y)$ .
9. Приведите первую формулу Эрланга для определения вероятностей потерь по времени, вызовам, нагрузке.
10. Как определяется рекуррентное соотношение первой формулы Эрланга?
11. Запишите формулу, определяющую величину нагрузки, обслуживаемой каждой линией полнодоступного пучка, на который поступают вызовы простейшего потока.
12. Определите математические ожидания и дисперсии обслуженной, поступающей и потерянной нагрузок при обслуживании полнодоступным пучком линий вызовов простейшего потока.
13. Поясните характер зависимости величины поступающей нагрузки от емкости полнодоступного пучка линий при заданном качестве обслуживания. Проиллюстрируйте это численными примерами.
14. Поясните характер зависимости удельной поступающей нагрузки от потерь при постоянной емкости полнодоступного пучка линий. Приведите количественные оценки.
15. Каково влияние емкости полнодоступных пучков на пропускную способность этих пучков?
16. Каково влияние величины потерь на пропускную способность полнодоступных пучков линий?
17. Приведены формулы Энгсета для определения вероятностей  $p_s, p_r, p_v, p_n$ .
18. Покажите, как из формулы Энгсета можно получить формулы Эрланга и Бернулли.
19. Приведите для примитивного потока соотношения между параметром одного свободного источника и интенсивностью нагрузки, поступающей от одного источника.
20. Проведите логический анализ формул Энгсета.
21. Каковы соотношения между  $p_n, p_r, p_v$  и  $p_v$  в полнодоступном пучке, обслуживающем вызовы примитивного потока?
22. Поясните характер зависимостей между величиной интенсивности поступающей нагрузки, емкостью пучка линий, числом источников и качеством обслуживания. Приведите количественные оценки.
23. Сопоставьте пропускную способность полнодоступного пучка, обслуживающего вызовы примитивного и простейшего потоков. Проиллюстрируйте численными примерами.

Полнодоступный пучок. Система с ожиданием

**5.1. Обслуживание вызовов простейшего потока при показательном законе распределения длительности занятия**

**Постановка задачи.** Полнодоступный пучок емкостью  $\nu$  ( $1 \leq \nu < \infty$ ) линий, включенный в неблокирующую коммутационную систему с ожиданием, обслуживает поступающий простейший поток вызовов с параметром  $\lambda$ . Каждый поступивший вызов для обслуживания занимает любую свободную линию пучка. Если все  $\nu$  линий заняты в момент поступления вызова, то последний становится в очередь на ожидание до освобождения занятых другими вызовами линий пучка. Поступающие на ожидание вызовы могут образовать очередь различной конечной длины. Вызовы, находящиеся на ожидании, обслуживаются в порядке очереди.

Длительность занятия линии обслуживанием вызова полагаем случайной величиной, распределенной по показательному закону с параметром  $\beta$ :  $F(t) = 1 - e^{-\beta t}$ .

Определим вероятности различных состояний полнодоступного пучка и длины очереди вызовов, находящихся на ожидании, функцию распределения времени ожидания вызовом начала обслуживания, математические ожидания времени ожидания и длины очереди.

Обозначим через  $i$  состояние системы в произвольный момент времени  $t$ . Это значит, что в системе на обслуживании и ожидании находится  $i = 0, 1, 2, \dots$  вызовов. Если в момент  $t$  в системе находится  $i < \nu$  вызовов, то все они находятся на обслуживании. При  $i = \nu + r$  вызовов находятся на обслуживании (заняты все  $\nu$  линий пучка), а остальные  $r = i - \nu$  вызовов находятся на ожидании ( $r$  – длина очереди).

Рассматриваемая коммутационная система имеет счетное множество ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) состояний. Для исследования процесса обслуживания вызовов можно ограничиться рассмотрением макросостояний системы. Объясняется это тем, что, во-первых, нас интересуют число занятых линий пучка и длина очереди, а не какие именно линии пучка заняты и какие именно вызовы находятся на ожидании в очереди, и, во-вторых, коммутационной системой обслуживается простейший поток вызовов, параметр  $\lambda$  которого не зависит от состояния этой системы.

**Определение вероятностей состояния системы.** Процесс изменения состояний ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) рассматриваемой коммутационной системы можно рассматривать как марковский процесс рождения и гибели со счетным множеством состояний, так как за бесконечно малый промежуток времени  $[t, t + \tau)$  с вероятностью более нуля в состояние  $i$  возможен только непосредственный переход системы из состояний  $i - 1, i, i + 1$ .

Для процесса рождения и гибели (занятий и освобождений) со счетным множеством состояний стационарные вероятности состояний определяются, выражениями (4.12). Поскольку в рассматриваемой задаче на обслуживание поступают вызовы простейшего потока, то параметр потока занятий  $\lambda_i = \lambda, i = 0, 1, 2, \dots$ . Параметр потока освобождений

$$\nu_i = \begin{cases} \beta i, & 0 \leq i \leq \nu; \\ \beta \nu, & i > \nu. \end{cases}$$

Подставляя  $\lambda_i$  и  $\nu_i$  в (4.12) и учитывая, что  $\lambda/\beta = y$ , получим

$$p_i = \begin{cases} \frac{y^i}{i!} p_0, & 0 \leq i \leq \nu; \\ \frac{y^\nu}{\nu!} \left(\frac{y}{\nu}\right)^{i-\nu} p_0, & i > \nu; \end{cases} \quad (5.1)$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} p_i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\nu} \frac{y^i}{i!} + \frac{y^\nu}{\nu!} \sum_{i=\nu+1}^{\infty} \left(\frac{y}{\nu}\right)^{i-\nu}}. \quad (5.2)$$

Практический интерес представляет случай с конечной очередью, т. е.  $\lambda_i < \nu_i$ ,  $i > \nu$ . Отсюда  $\lambda < \nu\beta$  и  $\gamma < \nu$ . Учитывая это и используя выражения для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, преобразуем (5.2) к виду

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\nu} \frac{\gamma^j}{j!} + \frac{\gamma^{\nu}}{\nu!} \frac{\gamma}{\nu - \gamma}} \quad (5.3)$$

Стационарные вероятности состояний (5.1) с учетом (5.3) запишутся в следующем виде:

$$p_i = \begin{cases} \frac{\frac{\gamma^i}{i!}}{\sum_{j=0}^{\nu} \frac{\gamma^j}{j!} + \frac{\gamma^{\nu}}{\nu!} \frac{\gamma}{\nu - \gamma}}, & 0 \leq i \leq \nu; \\ \frac{\frac{\gamma^{\nu}}{\nu!} \left(\frac{\gamma}{\nu}\right)^{i-\nu}}{\sum_{j=0}^{\nu} \frac{\gamma^j}{j!} + \frac{\gamma^{\nu}}{\nu!} \frac{\gamma}{\nu - \gamma}}, & i > \nu. \end{cases} \quad (5.4)$$

Заметим, что при ограничении числа состояний коммутационной системы  $0 \leq i \leq \nu$ , т. е. при переходе к системе с потерями ф-ла (5.4) для определения вероятности  $p_i$  приводится к первой формуле Эрланга (4.21)  $-E_{i,\nu}(\gamma)$ .

Сопоставим значения вероятности состояний  $p_i$  в системе с ожиданием и вероятности состояний  $E_{i,\nu}(\gamma)$  в системе с потерями. С этой целью разделим числитель и знаменатель соотношения

(5.4) на  $\sum_{j=0}^{\nu} (\gamma^j/j!)$ . Тогда это соотношение преобразуется к виду

$$p_i = \begin{cases} \frac{E_{i,\nu}(\gamma)}{1 + E_{\nu}(\gamma) \frac{\gamma}{\nu - \gamma}}, & 0 \leq i \leq \nu; \\ \frac{E_{\nu}(\gamma) \left(\frac{\gamma}{\nu}\right)^{i-\nu}}{1 + E_{\nu}(\gamma) \frac{\gamma}{\nu - \gamma}}, & i > \nu. \end{cases} \quad (5.5)$$

Так как в (5.5) знаменатель больше 1, то  $p_i < E_{i,\nu}(\gamma)$  для всех значений  $i$  ( $0 \leq i \leq \nu$ ). Следовательно,

$$\sum_{i=0}^{\nu-1} p_i < \sum_{i=0}^{\nu-1} E_{i,\nu}(\gamma), \quad (5.6)$$

т. е. для систем с ожиданием время нахождения в состояниях, когда поступающие вызовы немедленно обслуживаются, меньше, чем для систем с потерями.

Рекуррентное соотношение (4.31)  $p_i = p_{i-1}(\gamma/i)$ , полученное для систем с потерями, сохраняется и для систем с ожиданием при  $i \leq \nu$ . Несколько иной характер имеет рекуррентное соотношение для вероятности того, что на ожидании находится точно  $r+1$  вызовов:

$$p_{\nu+r+1} = \omega_{r+1} = \frac{\gamma}{\nu} \omega_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

Из этого соотношения, имея в виду, что  $\gamma < \nu$ , следует  $\omega_0 > \omega_1 > \omega_2 > \dots$ , т. е. вероятность того, что в пучке заняты все линии и на ожидании нет вызовов, больше, чем вероятность того, что на ожидании находится точно один вызов, а последняя вероятность больше, чем вероятность того, что на ожидании находятся точно два вызова, и т. д.

В системах с ожиданием потери по времени  $p_i$  есть доля времени, в течение которой все  $\nu$  линий пучка заняты и на ожидании находится  $r=0, 1, 2, \dots$  вызовов. Исходя из этого, потери по

времени равны вероятности  $p(\gamma > 0)$  того, что поступивший вызов не будет немедленно обслужен, а будет ожидать начала обслуживания в течение времени  $\gamma$  больше нуля. Эта вероятность равна

$$p_t = p(\gamma > 0) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i = \sum_{r=0}^{\infty} \omega_r.$$

Используя соотношение (5.5), получаем

$$p_t = p(\gamma > 0) = \frac{E_v(y)}{1 - \frac{y}{v}(1 - E_v(y))} = D_v(y). \quad (5.8)$$

Выражение (5.8) называется *второй формулой Эрланга*. Формула табулирована. Таблицы позволяют по любым двум из трех параметров  $y$ ,  $v$ ,  $p_t$  – определить третий.

Выражение (5.8) показывает, что потери по времени  $p_t$ , численно равные условным потерям  $p(\gamma > 0)$ , могут быть определены и с помощью таблиц первой формулы Эрланга. Используя эти таблицы,  $p_t$  можем определить из следующего соотношения:

$$p_t = D_v(y) = \frac{1}{\frac{1}{E_v(y)} - \frac{1}{E_{v-1}(y)}(1 - E_v(y))}. \quad (5.9)$$

Из (5.8), знаменатель которой меньше 1, следует, что в системах с ожиданием потери по времени больше, чем в системах с потерями. Такой вывод находится в полном соответствии и с соотношением (5.6).

В системах с ожиданием, как и в системах с потерями, при обслуживании полнодоступным пучком вызовов простейшего потока вероятность потерь по времени и вероятности состояний системы, определяемые по (5.4), зависят только от интенсивности поступающей нагрузки  $y$  и емкости пучка линий  $v$ .

**Характер зависимостей между  $y$ ,  $v$  и  $p_t$ .** Зависимости  $y=f(v)$  при  $p_t=\text{const}$  и  $y=f(p_t)$  при  $v=\text{const}$  (и соответственно  $\chi=f(v)$  и  $\chi=f(p_t)$ , где  $\chi=y/v$ ) для систем с ожиданием имеют точно такой же характер, как и для систем с потерями (см. рис. 4.4–4.7). Однако количественные оценки этих зависимостей существенно различаются. При заданных потерях  $p_t$  величина поступающей нагрузки в системах с ожиданием должна быть меньше, чем в системах с потерями. Так, например, при потерях  $p_t = 0,02; 0,05; 0,1$  в пучках емкостью  $v=10 \div 30$  линий удельная поступающая нагрузка  $\chi$  в системах с ожиданием соответственно на 10, 15, 20% меньше, чем в системах с потерями.

Влияние величины допустимых потерь  $p_t$  на снижение пропускной способности систем с ожиданием более наглядно показывает зависимость  $\eta=f(p_t)$  при  $v=\text{const}$ , где  $\eta$  – удельная обслуженная нагрузка. В системах с ожиданием  $\eta=\chi$ , а в системах с потерями  $\eta=\chi(1-p_t)=\chi(1-E_v(y))$ . Несмотря на это, при одних и тех же значениях потерь обслуженная нагрузка в системах с потерями выше, чем в системах с ожиданием. Так, при потерях  $p_t=0,2$  в пучках емкостью  $v=4, 10$  и  $20$  линий в системах с потерями  $\eta$  на 10–12% больше, чем в системах с ожиданием.

На первый взгляд кажется парадоксальным тот факт, что системы с потерями обладают более высокой пропускной способностью. Ведь с точки зрения использования коммутационных устройств (пучка линий) система с ожиданием создает более благоприятные условия – вызовы в очереди ожидают начала обслуживания и после освобождения каждая линия пучка немедленно занимается для обслуживания очередного ожидающего вызова. В системах же с потерями освободившаяся линия может некоторое время оставаться свободной и занимается только после поступления нового вызова.

Однако эти рассуждения не в полной мере отражают процессы обслуживания поступающего потока вызовов системой с ожиданием и системой с потерями. Следует учитывать также следующие два обстоятельства:

1. Соотношение (5.6) показывает, что время, в течение которого коммутационная система



находится в состояниях, когда вызовы немедленно обслуживаются, больше для систем с потерями, чем для систем с ожиданием. Отсюда нагрузка, обслуженная системой с потерями, больше нагрузки, которая обслуживается немедленно системой с ожиданием (т. е. без учета обслуженной нагрузки, создаваемой ожидающими вызовами).

2. Величина поступающей нагрузки в системах с ожиданием ограничена ( $\rho < 1$  или  $\chi < 1$  Эрл), а в системах с потерями такого ограничения нет. Поэтому, особенно в области больших потерь, в системах с потерями удельная поступающая нагрузка  $k$  может принимать значения значительно больше  $1(\chi = \eta / (1 - p))$ , что обеспечивает и большую величину  $\eta$ .

Таким образом, следует констатировать, что в области любых потерь при заданной величине потерь  $p_i$  не только поступающая, но обслуженная нагрузка в системах с потерями больше, чем в системах с ожиданием.

Естественно возникает вопрос: какие особенности систем с ожиданием обуславливают их практическое применение и в какой области коммутационной техники такие системы целесообразно использовать? В связи с этим необходимо, прежде всего, отметить различный качественный характер явных и условных потерь. В системах с потерями часть вызовов теряется (не обслуживается), в системах с ожиданием обслуживаются все поступающие вызовы, при этом часть из них с некоторой задержкой. При малых величинах потерь, исчисляемых промилле и даже несколькими процентами, абонент не ощущает неудобств. Поэтому в области малых потерь предпочтительнее система с потерями, обладающая более высокой пропускной способностью. При больших значениях потерь система с потерями не обеспечивает должного качества обслуживания абонентов и непригодна для применения.

В случае больших потерь нельзя однозначно дать оценку системам с ожиданием. Все зависит от времени задержки обслуживания вызовов, находящихся на ожидании. Необходимо, чтобы время ожидания начала обслуживания для подавляющего большинства вызовов не вызывало неудобств у абонентов. Иными словами, системы с ожиданием следует применять в тех случаях, когда для повышения использования коммутационных устройств целесообразно допускать большие условные потери (исчисляемые десятками процентов), если возможно при этом обеспечить мало ощутимое для абонентов время задержки начала обслуживания. В технике телефонной связи с ожиданием вызовы обслуживаются управляющими устройствами. Область применения систем с ожиданием подробно рассмотрена во второй части этой главы.

**Функция распределения времени ожидания.** Потери по времени  $p_i$ , или, что то же самое, вероятность  $p(\gamma > 0)$  того, что поступивший вызов будет обслужен лишь после некоторого времени ожидания, не позволяют в достаточной мере характеризовать качество обслуживания коммутационной системой с ожиданием поступающего потока вызовов. Полученная характеристика  $p_i = p(\gamma > 0) = D_v(\gamma)$  определяет долю вызовов, обслуживание которых происходит после некоторого времени ожидания, однако не дает ответа на весьма важный с точки зрения обеспечения качества обслуживания вопрос – как распределяется время ожидания начала обслуживания для вызовов, которые попадают на ожидание. В связи с этим определим функцию распределения длительности ожидания начала обслуживания при исходных предположениях рассматриваемой задачи: показательное распределение длительности занятия, ожидающие вызовы обслуживаются в порядке очереди.

Обозначим через  $p(\gamma > t)$  вероятность того, что вызов, поступивший в произвольный момент времени, попадет на ожидание и время ожидания будет больше  $t$ ; через  $p_i(\gamma > t)$  условную вероятность того же неравенства в предположении, что вызов поступит в момент времени, когда система находится в состоянии  $i$ , и через  $p_i$  вероятность того, что система находится в этом состоянии, т. е. в системе имеется точно  $i$  обслуживаемых и ожидающих вызовов.

Имея в виду, что в рассматриваемой коммутационной системе поступивший вызов попадает на ожидание лишь в случае, когда в момент поступления вызова в системе заняты все линии пучка и на ожидании находится  $r = 0, 1, 2, \dots$  вызовов, т. е. система находится в одном из состояний  $i = v, v + 1, v + 2, \dots$ , по формуле полной вероятности получим

$$p(\gamma > t) = \sum_{i=v}^{\infty} p_i p_i(\gamma > t). \quad (5.10)$$

Найдем вероятность  $p_i(\gamma > t)$ . Если система находится в состоянии  $i (i \geq \nu)$ , то непосредственно перед моментом поступления вызова в системе на ожидании находится  $(i - \nu)$  вызовов. Поступивший вызов становится в очередь и является в очереди  $(i - \nu + 1)$ -м. Поскольку вызовы снимаются с очереди для обслуживания в порядке поступления («первым пришел – первым обслуживается»), то вероятность  $p_i(\gamma > t)$  есть вероятность того, что за время  $t$  после момента поступления рассматриваемого вызова будет снято с ожидания и переведено на обслуживание не более  $(i - \nu)$  вызовов. Исходя из этого, вероятность  $p_i(\gamma > t)$  соответствует вероятности того, что за время  $t$  произойдет освобождение (закончится обслуживание) не более  $(i - \nu)$  вызовов.

Длительность обслуживания одного вызова  $T$  (без учета времени ожидания) распределена по показательному закону

$$F(t) = p(T < t) = 1 - e^{-\beta t}.$$

Функция распределения промежутков между моментами освобождения линий пучка при условии занятости в пучке всех  $\nu$  линий есть  $F_{oc}(t) = \pi_i(t) = 1 - e^{-\beta \nu t}$ . Эта функция распределена по показательному закону, что определяет поток освобождений как простейший поток, параметр которого  $\lambda = \beta \nu$ . В соответствии с этим вероятность  $p_j$  того, что за время  $t$  произойдет освобождение точно  $j$  линий, согласно формуле Пуассона составляет

$p_j = \frac{(\beta \nu t)^j}{j!} e^{-\beta \nu t}$ , а вероятность того, что за время  $t$  произойдет не более  $(i - \nu)$  освобождений, если система находится в состоянии  $i$ , –

$$p_i(\gamma > t) = \sum_{j=0}^{i-\nu} p_j = \sum_{j=0}^{i-\nu} \frac{(\beta \nu t)^j}{j!} e^{-\beta \nu t}. \quad (5.11)$$

Подставив соотношения (5.5) и (5.11) в (5.10) и произведя некоторые преобразования, получим

$$p(\gamma > t) = p(\gamma > 0) e^{-\beta(\nu - \mu)t}, \quad (5.12)$$

где  $p(\gamma > 0)$  определяется по ф-ле (5.8). Если за единицу измерения времени  $\gamma$  и  $t$  принять среднюю длительность занятия, то  $\beta = 1$  и

$$p(\gamma > t) = p(\gamma > 0) e^{-(\nu - \mu)t}. \quad (5.13)$$

Последняя формула позволяет строить универсальные семейства кривых  $p(\gamma > t) = f(t)$  (и получить универсальные таблицы) для любых значений средней длительности занятия.

**Характеристики качества обслуживания вызовов системами с ожиданием.** Характер зависимости  $p(\gamma > t) = f(t)$  при  $\beta = 1$  показан на рис. 5.1 для пучка  $\nu = 5$ . Кривые построены для значений удельной поступающей нагрузки  $\chi = \mu/\nu = 0,5$  и  $0,7$  Эрл (пунктирные кривые).

Семейства кривых иллюстрируют следующие закономерности:

1. С увеличением удельной поступающей нагрузки  $\chi$  при фиксированной емкости пучка  $\nu$  качество обслуживания ухудшается, т. е. увеличивается  $p(\gamma > t)$  – доля вызовов, ожидающих начала обслуживания свыше заданного времени  $t$ , или для заданной величины  $p(\gamma > t)$  увеличивается время ожидания начала обслуживания. Так, например, в пучке  $\nu = 5$  увеличение  $\chi$  с  $0,5$  до  $0,7$  Эрл при  $t = 1$  приводит к увеличению  $p(\gamma > 1)$  с  $0,01$  до  $0,085$  (в  $8,5$  раза) или при  $p(\gamma > t) = 0,01$  – к увеличению  $t$  с  $1$  до  $2,4$  (в  $2,4$  раза).
2. С увеличением  $p(\gamma > t)$  уменьшается время ожидания свыше

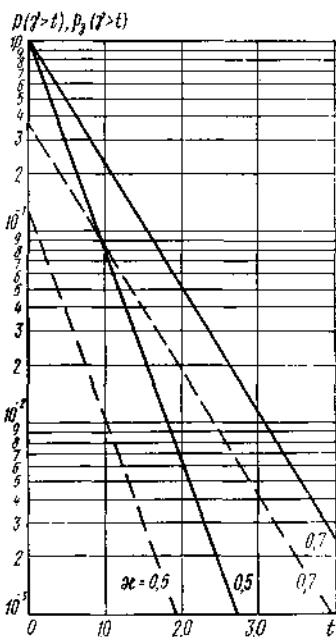


Рис. 5.1. Зависимости  $p(\gamma > t) = f(t)$  и  $p_0(\gamma > t) = f(t)$  при  $\nu = 5$  и показательном распределении длительности занятия

заданного  $t$  при любых значениях  $\nu$  и  $\chi$ . Так, в пучке  $\nu=5$  при  $\chi=0,7$  Эрл увеличение  $p(\gamma>t)$  с 0,01 до 0,1 приводит к уменьшению  $t$  с 2,4 до 0,85 (почти в 3 раза).

Заметим, что с увеличением  $\nu$  при любых значениях  $\chi$  и  $p(\gamma>t)$  уменьшается значение времени  $t$  или при любых значениях  $\chi$  и  $t$  уменьшается вероятность  $p(\gamma>t)$ . Например, при  $\chi=0,5$  Эрл и  $p(\gamma>t)=0,01$  увеличение  $\nu$  с 5 до 10 приводит, к уменьшению времени  $t$  с 1 до 0,25 (в 4 раза).

Качество обслуживания поступающего потока вызовов в системах с ожиданием также характеризуют вероятности  $p_3(\gamma>t)$  того, что время ожидания начала обслуживания  $\gamma$  для вызова, попадающего на ожидание, будет больше  $t$ , т. е. для вызовов, попадающих на ожидание,

$$p_3(\gamma > t) = \frac{p(\gamma \geq t)}{p(\gamma > 0)} = e^{-\beta(\nu-y)t}. \quad (5.14)$$

На рис. 5.1 сплошными линиями приведены кривые зависимости  $p_3(\gamma>t)=f(t)$ . Вероятности  $p_3(\gamma>t)$  существенно превышают вероятности  $p(\gamma>t)$ . Так, например, при  $\nu=5$  и  $\chi=0,5$  Эрл вероятность  $p_3(\gamma>1)$  в 8,5 раза превышает вероятность  $p(\gamma>1)$ .

Ранее было установлено, что при любых значениях  $y$  и  $\nu$  имеет место неравенство  $p(\gamma>0)>E_\nu(y)$ , т. е. вероятность того, что в системе с ожиданием поступающий вызов поступает на ожидание, больше вероятности того, что в системе с потерями этот вызов будет потерян. Одной из качественных характеристик сравнения систем с ожиданием и систем с потерями является значение времени  $t$ , при котором вероятность  $p(\gamma>t)$  численно равна  $E_\nu(y)$ . Обозначим такое значение  $t$  через  $t^*$ .

Формула (5.12) и рассмотренная зависимость  $p(\gamma>t)=f(t)$  показывают, что с увеличением  $t$  вероятность  $p(\gamma>t)$  уменьшается и  $p(\gamma>t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Имея также в виду, что  $p(\gamma>t) > E_\nu(y)$ , можно утверждать, что при некотором значении  $t^*$  имеет место равенство  $p(\gamma>t^*)=E_\nu(y)$ , откуда  $p(\gamma>t) > E_\nu(y)$  при  $t < t^*$  и, наоборот,  $p(\gamma>t) < E_\nu(y)$  при  $t > t^*$ . Используя (5.12), определяем значение  $t^*$ :

$$p(\gamma > t^*) = p(\gamma > 0) e^{-\beta(\nu-y)t^*} = E_\nu(y); \quad (5.15)$$

$$t^* = \frac{-\ln\left(1 - \frac{y}{\nu}(1 - E_\nu(y))\right)}{\beta(\nu - y)}. \quad (5.16)$$

Количественная оценка величины  $t^*$  иллюстрируется семейством кривых, приведенных на рис. 5.2. Эти кривые показывают характер изменения величины  $t^*$  в зависимости от удельной поступающей нагрузки  $t^*=f(\chi)$  при  $\nu=1, 2, 5, 10, 20, 30$ . Для этого семейства кривых за единицу времени принята средняя длительность одного занятия, т. е.  $\beta=1$ . Рисунок 5.2 показывает также, что с уменьшением емкости пучка линий  $\nu$  и с увеличением интенсивности удельной поступающей нагрузки  $\chi$  повышается значение  $t^*$ , при котором  $p(\gamma>t^*)=E_\nu(y)$ .

Рассмотрим численный пример, который позволит сделать весьма важный вывод. При  $t^* = 1$  интенсивности нагрузок  $y$ , поступающих на пучки емкостью  $\nu=1, 2, 5, 10$  линий, соответственно составляют 0,53; 1,34; 3,95; 8,7 Эрл. Для этих значений  $y$  по таблицам первой формулы Эрланга отыскиваем соответствующие значения  $E_\nu(y)=p(\gamma>1)=0,34; 0,275; 0,195; 0,154$ . Из этого примера следует, что с увеличением  $\nu$  и  $\chi$  при определенном значении  $t^*$  качество обслуживания улучшается – уменьшаются значения  $p(\gamma>t^*)=E_\nu(y)$ . Однако основной вывод заключается в том, что все приведенные значения потерь в системах с потерями указывают на неудовлетворительное качество обслуживания, в то время как в системах с ожиданием при относительно малой величине среднего времени

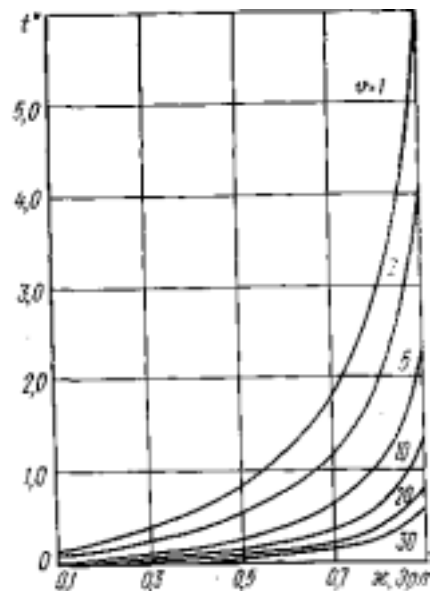


Рис. 5.2. Семейство кривых, показывающих характер изменения величины  $t^*$  в зависимости от удельной поступающей нагрузки при  $\nu = \text{const} = 1; 2; 5; 10; 20; 30$

обслуживания вызова такие значения  $p(\gamma > 1)$ . по существу, обеспечивают высокое качество обслуживания даже в пучке емкостью  $\nu=1$  – абоненты не замечают малые по времени задержки в установлении соединений.

К характеристикам процесса обслуживания поступающего потока вызовов в системах с ожиданием, кроме  $p(\gamma > 0)$  и  $p(\gamma > t)$ , относятся: среднее время ожидания начала обслуживания  $\bar{\gamma}$ , отнесенное ко всем поступающим вызовам; среднее время ожидания начала обслуживания  $\bar{\gamma}_3$  отнесенное к вызовам, попадающим на ожидание (задержанным с обслуживанием); средняя длина очереди  $\bar{r}$ . Определим эти величины:

$$\bar{\gamma} = \int_0^{\infty} t \frac{d}{dt} p(\gamma < t) dt = - \int_0^{\infty} t \frac{d}{dt} p(\gamma > t) dt = \frac{p(\gamma > 0)}{\beta(\nu - y)}, \quad (5.17)$$

$$\text{при } \beta = 1 \quad \bar{\gamma} = [p(\gamma > 0)]/(\nu - y); \quad (5.18)$$

$$\bar{\gamma}_3 = 1/[\beta(\nu - y)], \quad (5.19)$$

$$\text{при } \beta = 1 \quad \bar{\gamma}_3 = 1/(\nu - y). \quad (5.20)$$

Используя (5.5) для вероятности  $p_{\nu+r} = \omega_r$ ,  $r=0, 1, 2, \dots$ , получаем формулы, определяющие среднюю длину очереди:

$$\bar{r} = \sum_{r=0}^{\infty} r \omega_r = p(\gamma > 0) \frac{y}{\nu - y}, \text{ или } \bar{r} = \bar{\gamma} y. \quad (5.21), (5.22)$$

Из (5.22) следует, что средняя длина очереди определяется как среднее время ожидания начала обслуживания вызова, отнесенное ко всем поступающим вызовам, умноженное на интенсивность поступающей нагрузки.

Анализ полученных соотношений показывает, что с увеличением  $\chi$  и уменьшением  $\nu$  повышаются значения  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{\gamma}_3$  и  $\bar{r}$ . Так, например, при  $\chi=0,6$  Эрл в пучке емкостью  $\nu=10$  линий рассматриваемые характеристики принимают значения  $\bar{\gamma}=0,02$ ,  $\bar{\gamma}_3=0,25$  и  $\bar{r}=0,15$ , а в пучке  $\nu=5$  линий значения этих характеристик возрастают до  $\bar{\gamma}=0,12$ ,  $\bar{\gamma}_3=0,5$  и  $\bar{r}=0,35$ .

## 5.2. Обслуживание вызовов простейшего потока при постоянной длительности занятия

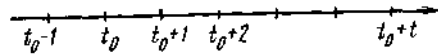
**Теория Кроммелина.** Исходные данные задачи такие же, как и задачи, подробно рассмотренной в парагр. 5.1. На полностью доступный пучок емкостью  $\nu(1 \leq \nu \leq \infty)$  линий, работающий по системе с ожиданием, поступает простейший поток вызовов с параметром  $\lambda$ . Сохраняются предположения предыдущей задачи: вызовы, находящиеся на ожидании, обслуживаются в порядке очереди; поступающая на пучок из  $\nu$  линий нагрузка  $y$  должна иметь значение, меньшее емкости пучка –  $y < \nu$ . Отличие заключается только в законе распределения длительности обслуживания: вместо показательного распределения полагаем длительность обслуживания каждого вызова постоянной и равной  $h$ . Длительность занятия  $h$  примем за единицу времени –  $h=1$ . Требуется определить функцию распределения длительности ожидания начала обслуживания для любого поступающего вызова  $p(\gamma > t)$ .

Определим вначале вероятность  $p(\gamma < t)$ . имея в виду, что  $p(\gamma > t) = 1 - p(\gamma < t)$ . Пусть в момент  $t_0$  система находится в состоянии  $k$ , т. е. в таком состоянии, при котором в системе на обслуживании и ожидании находится точно  $k$  вызовов. Если  $k < \nu$ , то за единицу времени, равную  $h$ , коммутационная система обслужит все эти вызовы, т. е. все вызовы, находящиеся в системе в момент  $t_0$ , к моменту  $(t_0+1)$  покинут систему. Если же  $k > \nu$ , то за каждую единицу времени (рис. 5.3) коммутационная система обслуживает точно  $\nu$  вызовов; за время  $[t_0, t_0+1)$  будет обслужено  $\nu$  вызовов, за время  $[t_0, t_0+2)$  –  $2\nu$  вызовов, ..., за время  $[t_0, t_0+t)$  –  $t\nu$  вызовов (в данном случае  $t$  – целое число).

Нас интересует вероятность того, что вызов, поступивший в момент  $t_0$ , попадет на обслуживание в течение времени  $\gamma$ , меньшего  $t$ . В момент  $t_0$  система находится в состоянии  $k$ , рассматриваемый вызов переводит систему в состояние  $(k+1)$ . Значит для того, чтобы  $\gamma < t$  необходимо выполнение условия  $k+1 \leq t\nu + \nu$ , при этом имеется в виду, что из всех  $(k+1)$

вызовов, находящихся в системе непосредственно после момента  $t_0$ ,  $t_0$  вызовов за время  $t$

Р и с. 5.3. Ось времени, на которой указаны фиксированные моменты  $t_0-1, t_0, t_0+1, \dots, t_0+t$



окажутся обслуженными и покинут систему, а остальные  $v$  вызовов к моменту  $(t_0+t)$  попадут на обслуживание. Отсюда  $k \leq t_0 + v - 1$ .

Введем обозначения:  $p_i(t_0)$  – вероятность того, что в момент  $t_0$  система находится в состоянии  $i$  и  $a_k(t_0)$  – вероятность того, что в момент  $t_0$  система находится в состоянии, не превышающем  $k$ :

$a_k(t_0) = \sum_{i=0}^k p_i(t_0)$ . Тогда вероятность  $p(\gamma < t)$  равна вероятности  $a_k(t_0)$ , где  $k = t_0 + v - 1$ , т. е.

$$p(\gamma < t) = a_{t_0+v-1}(t_0) = \sum_{k=0}^{t_0+v-1} p_k(t_0). \quad (5.23)$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что ф-ла (5.23) справедлива и в случае, если  $t$  – нецелое число.

Определим вероятность  $p_k(t_0)$  того, что в момент  $t_0$  система находится в состоянии  $k$ . Искомую вероятность можно представить состоящей из двух слагаемых: из вероятности  $p_k(t_0)_1$  того, что в моменты  $t_0$  система находится в состоянии  $k$ , если в момент  $(t_0-1)$  в системе нет очереди ( $k \leq v$ ), и из вероятности  $p_k(t_0)_2$  того, что в момент  $t_0$  система находится в состоянии  $k$ , если в момент  $(t_0-1)$  в системе на обслуживании находятся и на ожидании  $r$  вызовов ( $k = v + r$ ). Рассматриваемые в момент  $t_0$  события взаимно независимы. Поэтому  $p_k(t_0) = p_k(t_0)_1 + p_k(t_0)_2$ .

Определяем вероятность  $p_k(t_0)_1$ . В момент  $(t_0-1)$  в системе находится не более  $v$  вызовов, вероятность этого события  $a_v(t_0-1)$ . Так как длительность обслуживания каждого вызова  $h=1$ , то к моменту  $t_0$  все эти вызовы будут обслужены и покинут систему. Ни один из вызовов, поступивших, в систему после момента  $(t_0-1)$ , к моменту  $t_0$  не завершится обслуживанием и останется в системе. Для того чтобы в момент  $t_0$  система находилась в состоянии  $k$ , необходимо поступление за время  $[t_0-1, t_0)$  точно  $k$  вызовов. Согласно формуле Пуассона

вероятность этого есть  $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ .

Тогда

$$p_k(t_0)_1 = a_v(t_0-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Аналогично определяем вероятность  $p_k(t_0)_2$ . В момент  $(t_0-1)$  в системе находится  $v+r$  вызовов; вероятность этого  $p_{v+r}(t_0-1)$ . К моменту  $t_0$  за единицу времени систему покинут  $v$  обслуженных вызовов. Для того чтобы в момент  $t_0$  система оказалась в состоя-

нии  $k$ , в систему за время  $[t_0-1, t_0)$  должно поступить новых точно  $k-r$  вызовов. Вероятность этого  $\frac{\lambda^{k-r}}{(k-r)!} e^{-\lambda}$ . При этом  $r$  может принимать значения от 1 до  $k$ . Поэтому

$$p_k(t_0)_2 = \sum_{r=1}^k p_{v+r}(t_0-1) \frac{\lambda^{k-r}}{(k-r)!} e^{-\lambda}.$$

Отсюда

$$p_k(t_0) = a_v(t_0-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{r=1}^k p_{v+r}(t_0-1) \frac{\lambda^{k-r}}{(k-r)!} e^{-\lambda}.$$

Так как в стационарном режиме функции  $p_k(t_0)$ ,  $a_k(t_0)$  не зависят от  $t_0$  и  $p_k(t_0) = p_k$ ,  $a_k(t_0) = a_k$ , то

$$p_k = a_v \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{r=1}^k p_{v+r} \frac{\lambda^{k-r}}{(k-r)!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.24)$$

Используя (5.23), находим вероятность того, что любой поступивший вызов попадет на ожидание и будет ожидать начала обслуживания больше времени  $t$ :

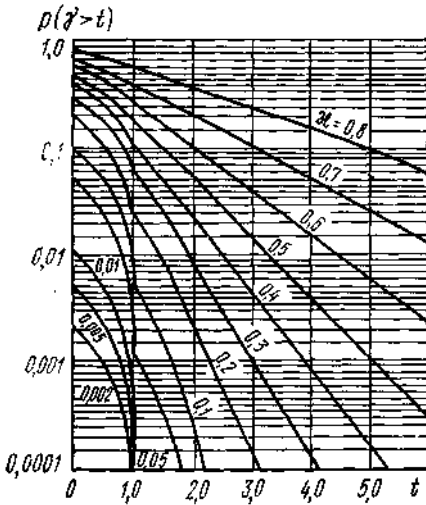


Рис. 5.4. Распределение времени ожидания начала обслуживания ( $p(\gamma > t) = f(t)$ ) при  $v=1$ , постоянной длительности занятия и обслуживании вызовов в порядке очереди

$$p(\gamma > t) = 1 - \sum_{k=0}^{t+v-1} p_k. \quad (5.25)$$

Система (5.24) решается методом производящих функций. Формула (5.25) для практических расчетов трудоемка. Поэтому на практике используются построенные Кроммелином семейства кривых  $p(\gamma > t) = f(t)$  для ряда значений  $v$  и  $\chi$  ( $\chi = v/\nu = \lambda/\nu$ ). На рис. 5.4 приведено семейство кривых для  $v=1$ . Эти кривые показывают, что характер зависимости  $p(\gamma > t) = f(t)$  такой же, как и при показательном распределении длительности занятия: с увеличением времени ожидания  $\gamma$  выше заданного  $t$  уменьшается вероятность  $p(\gamma > t)$ . Однако количественные оценки рассматриваемой зависимости при постоянной и показательно распределенной длительностях занятия существенно отличаются.

**Однолинейная система; произвольное распределение длительности занятия.** Полячек и Хинчин, независимо друг от друга, исследовали однолинейную систему с ожиданием, на которую поступают вызовы простейшего потока с параметром  $\lambda$ , и произвольным распределением длительности занятия. Вызовы обслуживаются в порядке очереди. Формула Полячека – Хинчина для среднего времени ожидания начала обслуживания любого вызова имеет следующий вид:

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{\lambda} \frac{y^2}{2(1-y)} \left( 1 + \left( \frac{\sigma_t}{\bar{t}} \right)^2 \right), \quad (5.26)$$

где  $\bar{t}$  – среднее значение длительности занятия;  $\sigma_t$  – среднеквадратическое отклонение длительности занятия;  $y$  – интенсивность нагрузки, поступающей на однолинейную систему:  $y = \lambda \bar{t} < 1$ . Принимая значение  $t$  за единицу времени ( $\bar{t} = 1$ ), получаем

$$\bar{\gamma} = [y(1 + \sigma^2)] / [2(1-y)]; \quad \bar{\gamma}_s = (1 + \sigma^2) / [2(1-y)], \quad (5.27); (5.28)$$

где  $\sigma$  – среднеквадратическое отклонение длительности занятия в условных единицах. За единицу времени принята средняя длительность занятия  $\bar{t}$ .

При показательном распределении времени

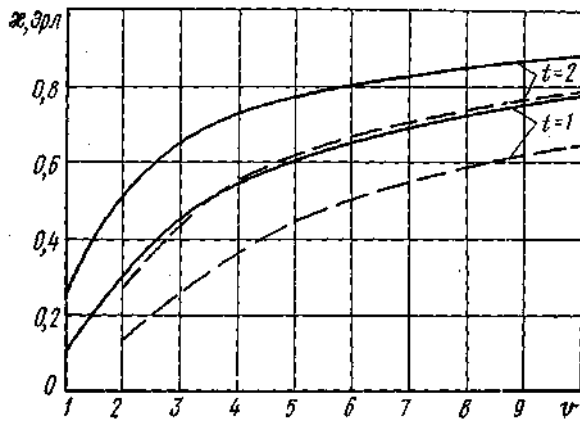


Рис. 5.5. Сравнение пропускной способности систем с ожиданием при постоянной длительности и показательном распределении длительности занятия и обслуживании вызовов в порядке очереди —  $\chi = f(v)$  при  $p(\gamma > t) = 0,005$ :  
 ————— постоянная длительность занятия;  
 - - - - - показательно распределенная длительность занятия

постоянной длительности занятия  $\sigma=0$

$$\bar{\gamma} = \gamma / [2(1 - \gamma)]; \bar{\gamma}_3 = 1 / [2(1 - \gamma)]. \quad (5.29)$$

Таким образом, при постоянной длительности занятия среднее время ожидания в очереди любого вызова  $\bar{\gamma}$  и задержанного вызова  $\bar{\gamma}_3$  вдвое меньше, чем при показательно распределенной длительности занятия.

**Сравнение систем с ожиданием при постоянной и показательно распределенной длительностях занятия.** При постоянной длительности занятия время ожидания начала обслуживания существенно меньше. Так,

например, с вероятностью  $p(\gamma > t) = 0,005$  при  $\chi = 0,5$  Эрл и  $v = 5$  время  $t$  принимает значения 0,73 и 1,33, соответствующие постоянной и показательно распределенной длительностям занятия, т. е. время ожидания сокращается почти в 2 раза.

Среднее время ожидания начала обслуживания для любого поступающего вызова при постоянной длительности занятия также меньше, чем при показательном распределении длительности занятия. Формула Полячека – Хинчина показывает, что в однолинейной системе среднее время пребывания вызова в очереди при постоянной длительности занятия в 2 раза меньше. С увеличением емкости пучка  $v$  это соотношение уменьшается, но оно всегда больше единицы. Так, при  $v = 1$  и  $\chi = 0,9$  Эрл отношение среднего времени пребывания в очереди при показательно распределенной и постоянной длительностях занятия составляет 1,74.

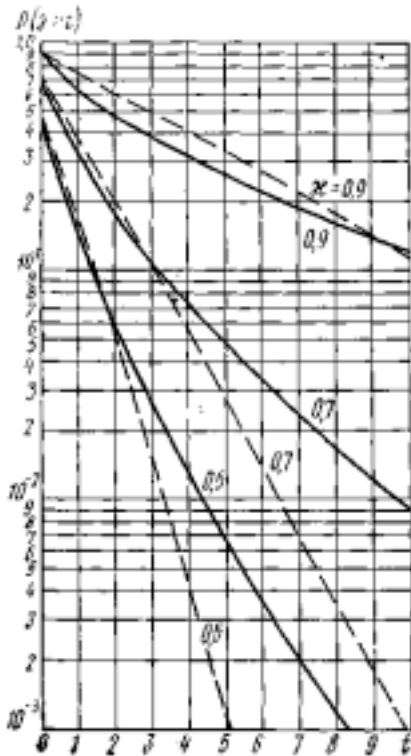


Рис. 5.6. Распределение времени ожидания ( $p(\gamma > t) = f(t)$ ) в однолинейной системе при случайном выборе ожидающих вызовов из очереди и выборе ожидающих вызовов в порядке поступления (постоянная длительность занятия):  
 $\chi = 0,5; 0,7$  и  $0,9$  Эрл; — случайный выбор из очереди; - - - выбор из очереди в порядке поступления

Пропускная способность систем с ожиданием при рассматриваемых распределениях длительности занятия иллюстрируется рис. 5.5, на котором показаны кривые  $\chi = f(v)$  при  $p(\gamma > t) = 0,005$  для значений  $t = 1; 2$ . Сплошными линиями показаны кривые, соответствующие постоянной, и пунктирными — показательно распределенной длительностям занятия. Из рисунка видно, что системы с ожиданием при постоянной длительности занятия обладают более высокой пропускной способностью — использование приборов значительно выше. Так, задаваясь вероятностью  $p(\gamma > t) = 0,005$  того, что время ожидания начала обслуживания превышает  $t = 1$ , интенсивность удельной поступающей нагрузки при  $v = 3$  повышается с  $\chi_1 = 0,25$  Эрл при показательно распределенной до  $\chi_2 = 0,45$  Эрл при постоянной длительности занятия, т. е. на 80%, и при  $t = 2$  — с  $\chi_1 = 0,43$  Эрл до  $\chi_2 = 0,65$  Эрл, т. е. на 50%.

**Однолинейная система; обслуживание ожидающих вызовов в случайном порядке.** Выше были рассмотрены системы с ожиданием, в которых обслуживание ожидающих вызовов производится в порядке очереди. В автоматических системах коммутации находят более широкое применение системы с ожиданием, в которых обслуживание ожидающих вызовов производится при случайном выборе их из очереди.

Однолинейная система с постоянной длительностью занятия и случайным выбором из очереди ожидающих вызовов исследована Берком. Распределение времени ожидания  $p(\gamma > t) = f(t)$  в такой системе при  $\chi = 0,5; 0,7$  и  $0,9$  Эрл приведено на рис. 5.6. Эти кривые показаны сплошными линиями. Для сравнения пунктирными линиями для тех же значений интенсивности поступающей нагрузки  $\chi$  показано распределение времени ожидания в однолинейной системе с постоянной длительностью занятия и обслуживанием ожидающих вызовов в порядке очереди. Из рисунка видно, что для небольших значений  $t$  качественные характеристики обслуживания ожидающих вызовов выше при случайном выборе их из очереди – при заданном времени  $t$  вероятность  $p(\gamma > 1)$  меньше или при заданной вероятности  $p(\gamma > t)$  значение  $t$  меньше. Так, например, при  $\chi = 0,9$  Эрл и  $t = 5$  случайный выбор из очереди обеспечивает вероятность  $p(\gamma > 5) = 0,26$ , а обслуживание в порядке очереди увеличивает эту вероятность до  $p_2(\gamma > 5) = 0,33$ .

Отмеченные закономерности справедливы для небольших значений  $t$ . Заметим, что именно эта область значений  $t$  имеет практический интерес для существующих систем коммутации, в которых используются релейные и электронные управляющие устройства (маркеры) с близкой к постоянной длительностью обслуживания и значениями этой длительности в пределах  $h = 0,05 \div 1$  с.

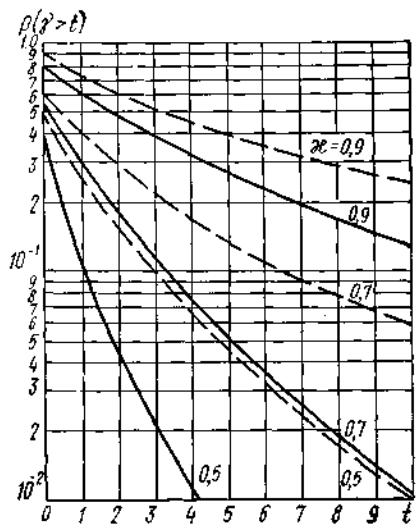


Рис. 5.7. Сравнение распределения времени ожидания ( $p(\gamma > t) = f(t)$ ) в однолинейной системе при постоянной длительности и показательном распределении длительности занятия (случайный выбор ожидающих вызовов из очереди):  $\chi = 0,5; 0,7$  и  $0,9$  Эрл; ——— постоянная длительность занятия; - - - показательное распределение длительности занятия

постоянной и показательно распределенной длительностями занятия и случайном выборе ожидающих вызовов из очереди ( $\chi = 0,5; 0,7$  и  $0,9$  Эрл) приведено на рис. 5.7.

### 5.3. Область применения систем с ожиданием

Системы распределения информации можно разделить на два класса: системы коммутации каналов и системы коммутации сообщений. Системы коммутации сообщений по дисциплине обслуживания вызовов являются системами с ожиданием. В автоматических системах коммутации каналов используются дисциплины обслуживания с потерями и с ожиданием.

Автоматические системы коммутации содержат две основные группы устройств: устройства, образующие разговорный тракт (коммутационные приборы, шнуровые комплекты, комплекты соединительных линий), и управляющие устройства. Указанные

При больших значениях  $t$  значения вероятностей  $p(\gamma > t)$  при случайном выборе из очереди существенно превышают соответствующие значения при обслуживании ожидающих вызовов в порядке очереди – с увеличением  $t$  по сравнению с обслуживанием в порядке очереди случайный выбор приводит к росту вероятности длительного ожидания. В перспективных системах коммутации (квазиэлектронных и электронных) длительности занятия управляющих устройств значительно уменьшаются ( $h < 0,005$  с), что позволяет без заметного ухудшения качества обслуживания вызовов допускать для некоторой доли вызовов ожидание до  $t = 100$  и более. В таких системах коммутации также сохраняется дисциплина выбора из очереди, близкая к случайной. В связи с этим важным является тот факт, что дисциплина выбора из очереди (в порядке поступления, в случайном порядке или любая другая дисциплина) не влияет на среднее время пребывания вызова на ожидании.

Дисциплина выбора из очереди в случайном порядке в области небольших значений  $t$ , как и дисциплина обслуживания вызовов в порядке очереди, приводит к более высоким качественным показателям обслуживания вызовов в системах с ожиданием при постоянной длительности занятия. Сравнение распределения времени ожидания ( $p(\gamma > t) = f(t)$ ) в однолинейной системе при



группы устройств существенно различаются по закону распределения длительности занятия, среднему значению длительности занятия и емкости пучка приборов (линий). Для устройств разговорного тракта можно полагать, что длительность занятия распределена по показательному закону со средним значением  $\bar{t} > 70 \div 80$  с, для этих устройств применяются большие емкости пучков ( $\nu = 10 \div 100$  и более линий).

Как отмечалось выше, с ростом емкости пучка линий увеличивается соотношение между условными потерями ( $p(\gamma > 0)$ ) в системах с ожиданием и явными потерями ( $E_\nu(\gamma)$ ) в системах с потерями. Для устройств разговорного тракта нормы допустимых потерь не превышают 2–3%. При такой области потерь система с потерями обладает существенно большей пропускной способностью по сравнению с системой с ожиданием. Поэтому в устройствах разговорного тракта рациональнее использовать в качестве дисциплины обслуживания систему с потерями. На практике в подавляющем большинстве автоматических коммутационных систем устройства разговорного тракта строятся как системы с потерями. Имеются и исключения. Так, например, в машинной системе АТС Эриксона (Швеция) устройства разговорного тракта работают по системе с ожиданием. Следует заметить, что недостатки системы с ожиданием в устройствах разговорного тракта особенно проявляются при увеличении поступающей нагрузки. В условиях перегрузки такая система приводит к большому количеству ожидающих вызовов с временем ожидания свыше 1–2 мин, в то время как в системе с потерями такие перегрузки лишь в несколько раз увеличивают заданные, очень малые потери, что для источников вызовов практически неощутимо.

Управляющие устройства характеризуются длительностью занятия, близкой к постоянной; значения этой длительности на два-три порядка меньше по сравнению с устройствами разговорного тракта, при этом емкость пучков в большинстве случаев не превышает пяти линий.

Совершенно иные выводы следуют из рассмотрения целесообразности использования дисциплин обслуживания с ожиданием в управляющих устройствах. Постоянная длительность занятия и, главное, малое ее значение позволяют устанавливать большие значения условной вероятности потерь – вероятности  $p(\gamma > 0)$ . Это объясняется тем, что в данном случае вероятность  $p(\gamma > t)$  при относительно больших значениях  $t$  оказывается очень малой величиной и одновременно допустимое время ожидания вызовом начала обслуживания имеет небольшое значение, не оощутимое источником вызова. Так, в однолинейной системе (которая в управляющих устройствах имеет наибольшее применение) при  $h = 0,1$  с можно допустить пропускную способность  $\chi = 0,9$  Эрл. При этом условные потери  $p(\gamma > 0) = 0,9$ . Если полагать, что вызовы обслуживаются в порядке очереди, то согласно кривым Кроммелина  $p(\gamma > 5) = 0,33$  и  $p(\gamma > 20) = 0,04$ , т. е. лишь 33% вызовов будут ждать начала обслуживания более 0,5 с и 4% вызовов – более 2 с. В то же время при использовании системы с потерями и задания достаточно больших потерь  $p = E_\nu(0,9) = 0,05$  требуется пучок линий  $\nu = 3$  вместо  $\nu = 1$  в системе с ожиданием. Следует учесть сложность и высокую стоимость управляющих устройств. Все эти соображения приводят к однозначному выводу – в управляющих устройствах целесообразно применять дисциплину обслуживания с ожиданием. Такая рекомендация не расходится с практикой – управляющие устройства всех автоматических систем коммутации обслуживают вызовы по системе с ожиданием.

В существующих координатных АТС к управляющим устройствам относятся регистры, маркеры, кодовые приемники. На станциях типа АТСКУ абонентские регистры подключаются к исходящим шнуровым комплектам (ИШК и ИШКТ) с помощью двухзвеневой коммутационной системы. При этом время занятия регистров (на основе экспериментов) имеет распределение, близкое к нормальному, поток вызовов образуется конечным числом источников, а порядок обслуживания вызовов, находящихся в очереди, случайный. И хотя указанные условия обслуживания существенно отличаются от модели Кроммелина, для практических расчетов пользуются этой моделью.

Подобным же образом используют модель Кроммелина при определении качественных показателей обслуживания вызовов кодовыми приемниками. В координатных АТС по два кодовых приемника подключаются к группе регистров, образуя таким образом двухлинейную

систему обслуживания. Условия работы кодовых приемников отличаются от условий модели Кроммелина как по характеру, так и по очередности обслуживания, однако при инженерных расчетах в области малых вероятностей ожидания (высокого качества обслуживания) и малой емкости полнодоступного пучка (только два прибора) считают допустимым использование этой модели.

Маркеры в отечественных координатных АТС являются однолинейными системами обслуживания со случайным выбором из очереди. Если считать поток вызовов простейшим, а длительность обслуживания постоянной, то модель Бёрка наиболее близко соответствует условиям работы маркера и может с успехом использоваться при расчетах.

### **Задача 5.1.**

*Определить:* соотношение потерь в полнодоступных пучках емкостью  $\nu=50$  и  $100$  линий, работающих по системе с ожиданием при показательном распределении длительности занятия и по системе с потерями при заданном значении потерь  $E_0(y)=0,02$ . Рассчитать время ожидания любого вызова  $\bar{\gamma}$ , среднее время ожидания вызовов, находящихся в очереди,  $\bar{\gamma}_3$  и среднюю длину очереди  $\bar{r}$ .

*Решение.* По таблицам первой формулы Эрланга при заданных величинах  $\nu=50$  и  $100$  и  $E_0(y)=0,02$  отыскиваем значения поступающей нагрузки  $y$ : при  $\nu_1=50$   $y_1=40,2$  Эрл; при  $\nu_2=100$   $y_2=88$  Эрл.

Используя (5.8) и полученные значения  $y$ , рассчитываем условные потери  $p(\gamma > 0)$ :

$$\text{для } \nu_1=50 \quad p(\gamma > 0) = \frac{0,02}{1 - \frac{40,2}{50}(1-0,02)} = 0,094;$$

$$\text{для } \nu_2=100 \quad p(\gamma > 0) = \frac{0,02}{1 - \frac{88}{100}(1-0,02)} = 0,145.$$

Соотношения между потерями составляют:

$$\text{для } \nu_1 = 50 \quad \frac{p(\gamma > 0)}{E_{50}(40,2)} = 4,7;$$

$$\text{для } \nu_2 = 100 \quad \frac{p(\gamma > 0)}{E_{100}(88)} = 7,2.$$

Для определения  $y$  воспользуемся  $\bar{p}$ -лой (5.18), для  $\bar{\gamma}_3$  (5.20) и для  $\bar{r}$  (5.22):

при  $\nu=50$   $\bar{p}=[p(\gamma > 0)]/(\nu-y)=0,0096$ ;  $\bar{\gamma}_3=1/(\nu-y)=0,102$ ,  $\bar{r}=y \bar{\gamma}=0,4$ ;

при  $\nu=100$   $\bar{p}=0,012$ ;  $\bar{\gamma}_3=0,083$ ;  $\bar{r}=1,06$ .

Приведенная задача показывает, что: 1) дисциплина обслуживания по системе с ожиданием приводит к условным потерям, которые в несколько раз превышают явные потери, имеющие место при дисциплине обслуживания по системе с потерями; 2) с увеличением емкости пучка линий при прочих равных условиях повышается отношение  $p(\gamma > 0)/E_0(y)$  и ухудшаются показатели качества работы системы  $\bar{\gamma}$  и  $\bar{r}$ .

### **Задача 5.2.**

*Определить:* пропускную способность пучков линий емкостью  $\nu=1, 2$  и  $5$ , работающих по системе с ожиданием при постоянной длительности занятия и обслуживании ожидающих вызовов в порядке очереди, если длительность занятия  $h=0,3$  с и вероятность ожидания обслуживания вызова свыше допустимого времени  $t_d=0,6$  с не должна быть более  $p(\gamma > 0,6 \text{ с})=0,01$ .

*Решение.* Используем кривые Кроммелина. При  $t=t_d/h=2$  и вероятности  $p(\gamma > 2)=0,01$  отыскиваем для  $\nu=1, 2$  и  $5$  значения пропускной способности  $\chi$ :  $\chi=0,31; 0,58$  и  $0,81$  Эрл соответственно.

Эта задача иллюстрирует существенное влияние емкости пучка линий на его пропускную способность: при увеличении емкости пучка с  $\nu=1$  до  $\nu=2$  пропускная способность увеличивается на 87% и с  $\nu=2$  до  $\nu=5$  лишь на 42%.

## **Контрольные вопросы**

1. Определите вероятности состояния полнодоступного пучка линий, работающего по системе с ожиданием при показательном распределении длительности занятия.

2. Напишите вторую формулу Эрланга. От каких параметров согласно этой формуле зависят условные потери  $p_i$ ?

3. Каков характер зависимостей между величиной интенсивности поступающей нагрузки  $y$ , емкостью полнодоступного пучка линий  $\nu$  и условными потерями  $p_i$  в системе с ожиданием? Сопоставьте характер и

количественные оценки этих зависимостей в системе с ожиданием и в системе с потерями.

5. Каков характер зависимости  $p(\gamma > t) = f(t)$  для значений  $\chi_1 > \chi_2 > \chi_3$  при  $\nu = \text{const}$ ? Сопоставьте эти зависимости с зависимостями  $p_s(\gamma > t) = f(t)$  для тех же значений  $\chi$  и  $\nu$ .

6. В чем сущность величины  $t^*$ ? Покажите характер зависимости  $t^* = f(\chi)$  при  $\nu = \text{const}$ . Приведите логический анализ и количественные оценки рассматриваемой зависимости.

7. Выведите формулы, определяющие математические ожидания времени, ожидания начала обслуживания для любого вызова  $\bar{t}_i$  и вызова, поступающего на ожидание  $\bar{t}_3$ . Приведите количественные оценки этих характеристик.

8. В чем заключается сущность теории Кроммелина?

9. Сопоставьте характер распределения времени ожидания и пропускную способность систем с ожиданием при обслуживании ожидающих вызовов в порядке поступления для двух распределений длительности занятия: постоянного и показательного распределенного.

10. Приведите формулу Полячека – Хинчина для среднего времени ожидания начала обслуживания в однолинейной системе с произвольным распределением длительности занятия. Какой вид получает эта формула при постоянной и показательно распределенной длительностях занятия?

11. Сопоставьте распределение времени ожидания начала обслуживания при постоянной и показательно распределенной длительностях занятия для двух дисциплин выбора ожидающих вызовов из очереди: в случайном порядке и порядке поступления.

12. Укажите рациональную область применения систем с ожиданием.

## Г Л А В А Ш Е С Т А Я

### Полнодоступный пучок. Система с повторными вызовами

#### 6.1. Постановка задачи

В моделях систем с потерями вызовов, поступивший в момент занятости всех линий пучка, теряется и в последующем никакого воздействия на коммутационную систему не оказывает. Такая модель процесса обслуживания коммутационной системой поступающего потока вызовов существенно отличается от реальных условий. В реальных коммутационных системах с потерями вызовов теряется, если он поступает в момент занятости всех линий пучка, способных обслужить этот вызов, но источник этого первичного вызова, как правило, не отказывается от обслуживания, а осуществляет повторные вызовы (попытки) с целью добиться требуемого обслуживания. По существу, сообщения между вызывающими и вызываемыми абонентами в большинстве случаев не теряются, происходит лишь задержка в обслуживании, т. е. по аналогии с системами с ожиданием в таких случаях возникают условные потери.

Повторные вызовы, поступающие на коммутационную систему, вызваны не только потерей первичных вызовов из-за отсутствия свободных соединительных путей в моменты поступления вызовов. Более существенными являются другие причины, из-за которых устанавливаемые для обслуживания поступающих вызовов соединения не завершаются передачей сообщения (разговорным состоянием). Этими причинами являются: занятость линии вызываемого абонента, неотчет вызываемого абонента, ошибки вызывающего абонента в процессе набора номера, неустановление соединения по техническим причинам (из-за попадания на неисправный прибор). Если на городских телефонных сетях из-за отсутствия свободных соединительных путей теряется 0,02–0,03 всех поступающих вызовов, то по другим перечисленным причинам не завершаются разговором 0,35–0,5 и более всех поступающих вызовов.

Исследованию системы с повторными вызовами в последнее время уделяется значительное внимание, однако полученные результаты по причине различных исходных позиций не нашли еще общего признания. Вместе с тем система с повторными вызовами более, чем любая другая изученная модель процесса обслуживания коммутационными системами поступающих вызовов, близка к реальным условиям функционирования системы. По этой причине в настоящей главе кратко излагается одно из решений рассматриваемой задачи.

В модели системы с повторными вызовами различаются два этапа обслуживания вызова. Первый этап обслуживания характеризуется занятием коммутационной системы (линии пучка), процессом установления соединения и его разъединения независимо от того, чем завершается это соединение – разговором, занятостью линии вызываемого абонента, неотчетом вызываемого абонента и т. д. Второй этап обслуживания характеризуется разговорным состоянием соединения. Вызов считается обслуженным, если он завершился вторым этапом – разговором. Вызов считается необслуженным, если обслуживание его завершается первым этапом. Источник такого вызова с заданной вероятностью осуществляет повторный вызов.

На полнодоступный пучок емкостью  $\nu$  линий поступают первичные вызовы, образующие простейший поток с параметром  $\lambda$ . Вызов, поступивший в момент отсутствия в пучке свободных линий, не обслуживается. Если в пучке имеется хотя бы одна свободная линия, то происходит первый этап обслуживания источника, осуществившего этот вызов. После окончания первого этапа обслуживания либо по этой линии происходит второй этап обслуживания (разговор), либо линия освобождается и вызов остается необслуженным. Вероятность того, что вызов останется необслуженным, обозначим  $\varphi$ , а вероятность того, что вызов будет полностью обслужен, –  $\psi=1-\varphi$ .

Длительность занятия линии первым и вторым этапами обслуживания вызова распределена по показательному закону с параметрами соответственно  $\alpha$  и  $\beta$ , и, следовательно, средние значения времени обслуживания первым и вторым этапами равны  $\bar{t}_\alpha = 1/\alpha$  и  $\bar{t}_\beta = 1/\beta$ .

Абоненты, вызовы которых не обслуживаются по причине отсутствия свободных линий в пучке или завершились только первым этапом обслуживания, являются источниками повторных вызовов. От каждого такого источника поступают повторные вызовы, образующие простейший поток с параметром  $\rho$ . Если в течение заданного времени источник не производит повторного вызова, то рассматриваемый вызов теряется окончательно. Это время примем распределенным по показательному закону с параметром  $\gamma$ .

Таким образом, время, в течение которого источник принимает решение произвести повторный вызов или окончательно отказаться от обслуживания неудачно сделанного им вызова, распределено, по показательному закону с параметром  $\rho + \gamma$ . Отсюда среднее время существования источника повторных вызовов, равное среднему времени между двумя соседними попытками источника добиться обслуживания своего вызова, составляет  $\bar{z} = 1/(\rho + \gamma)$ . При этом с вероятностью  $H = \rho/(\rho + \gamma)$  источник производит повторный вызов и с вероятностью  $1 - H = \gamma/(\rho + \gamma)$  отказывается окончательно от обслуживания. Вероятность  $H$  определяет меру настойчивости источника добиться полного обслуживания вызова.

Требуется определить вероятности состояний коммутационной системы.

## 6.2. Предельная величина интенсивности поступающей нагрузки

В отличие от системы с потерями, в системе с повторными вызовами на коммутационную систему может поступать только такой поток вызовов, который с учетом повторных вызовов может быть обслужен. Иными словами, чтобы не создавалось неограниченного количества необслуженных первичных и повторных вызовов, необходимо, как и в системе с ожиданием, ввести следующее ограничение:

$$\kappa = (y/v) < 1 \text{ Эрл.} \quad (6.1)$$

Величина  $\chi$  определяется из соотношения

$$\kappa = (c/v) \bar{t}, \quad (6.2)$$

где  $\bar{t}$  – средняя суммарная длительность занятия линий пучка полным обслуживанием одного вызова с учетом того, что для его обслуживания источник может производить и повторные вызовы (величина  $t$  должна учитывать также вызовы, которые остаются не полностью обслуженными, т. е. не завершаются вторым этапом обслуживания – разговором), а  $c$  – интенсивность потока первичных вызовов в течение 1 ч.

Первичные и повторные вызовы, поступающие в моменты занятости всех  $v$  линий пучка, не занимают линий пучка. Поэтому на величину  $t$  влияют только вызовы, попадающие, по крайней мере, на первый этап обслуживания. При первом этапе обслуживания одного вызова среднее время занятия линии пучка равно  $\bar{t}_\alpha$ , а при втором этапе обслуживания с вероятностью  $\psi = \bar{t}_\beta$ . Среднее время занятия линии для обслуживания каждой такой попытки составляет  $\bar{t}_\alpha + \psi \bar{t}_\beta$ .

Если обозначить через  $L$  среднее число попыток на первом этапе обслуживания с целью полного обслуживания одного вызова, то величина  $t$  составит

$$\bar{t} = L (\bar{t}_\alpha + \psi \bar{t}_\beta). \quad (6.3)$$

Определим величину  $L$ . Вызов первый раз поступает на первый этап обслуживания. С вероятностью  $\phi$  данный вызов не попадает на второй этап обслуживания. При этом вероятность того, что источник указанного вызова осуществляет повторный вызов, равна  $H$ . Следовательно, с вероятностью  $\phi H$  поступает повторный вызов.

Снова с вероятностью  $\phi$  этот повторный вызов не поступает на второй этап обслуживания

и с вероятностью  $H$  источник производит новый повторный вызов, т. е. с вероятностью  $(\varphi H)^2$  источник производит новый повторный вызов и т. д. Таким образом,

$$L = 1 + \varphi H + (\varphi H)^2 + \dots = 1/(1 - \varphi H) = (\rho + \gamma)/(\psi\rho + \gamma). \quad (6.4)$$

Заметим, что, если мера настойчивости источника  $H=1$  ( $\gamma=0$ ), то

$$L = 1/(1 - \varphi) = 1/\psi. \quad (6.5)$$

Из этого следует, что среднее число попыток на первом этапе обслуживания, которые производит источник до полного обслуживания вызова, зависит только от вероятности  $\psi$  и не зависит от параметра  $\rho$  потока повторных вызовов.

Используя (6.3) и (6.4) либо (6.5), ф-лу (6.2) можно привести к виду

$$\kappa = \frac{c}{v} \frac{\bar{t}_\alpha + \psi \bar{t}_\beta}{1 - \varphi H} < 1 \text{ Эрл, если } H < 1; \quad (6.6)$$

$$\kappa = \frac{c}{v} \left( \frac{\bar{t}_\alpha}{\psi} + \bar{t}_\beta \right) < 1 \text{ Эрл, если } H = 1. \quad (6.7)$$

Принимая за единицу времени именно среднее суммарное время занятия линий пучка полным обслуживанием одного вызова  $\bar{t}$ , находим, что интенсивность потока за такую единицу времени  $\mu = c \bar{t}$ . Для простейшего потока интенсивность  $\mu$  равна его параметру  $\lambda$ , что позволяет величину  $\chi$  определять отношением

$$\kappa = (\lambda/v) < 1. \quad (6.8)$$

### 6.3. Уравнения вероятностей состояний системы с повторными вызовами

Процесс обслуживания коммутационной системой первичных и повторных вызовов является марковским процессом. Используя его частный случай – процесс рождения и гибели, исходим из того, что за время  $\tau \rightarrow 0$  с конечной вероятностью в системе не может произойти более одного из следующих событий: поступления одного первичного или одного повторного вызова; окончания первого или второго этапа обслуживания одной линией пучка; прекращения одним из источников попыток добиться второго этапа обслуживания.

Вероятность поступления за время  $\tau$  точно одного первичного вызова определена в гл. 4 и составляет  $\lambda\tau + o(\tau)$ ,  $\tau \rightarrow 0$ ; аналогично этому вероятность поступления за время  $\tau$  точно одного повторного вызова при наличии  $k$  источников повторных вызовов равна  $k\rho\tau + o(\tau)$ ,  $\tau \rightarrow 0$ . Вероятность окончания за время  $\tau$  первого этапа обслуживания одной из  $i$  занятых таким обслуживанием линий есть  $i\alpha\tau + o(\tau)$ ,  $\tau \rightarrow 0$ ; аналогично этому вероятность окончания второго этапа обслуживания одной из  $(j-i)$  занятых таким обслуживанием линий равна  $(j-i)\beta\tau + o(\tau)$ ,  $\tau \rightarrow 0$ . Вероятность прекращения одним из  $k$  источников повторных вызовов попыток добиться второго этапа обслуживания составляет  $k\gamma\tau + o(\tau)$ ,  $\tau \rightarrow 0$ .

Пусть коммутационная система в

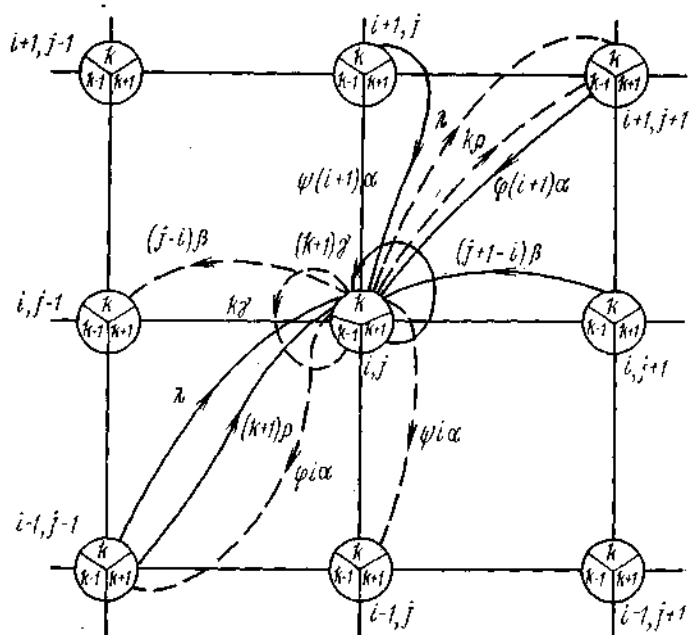


Рис. 6.1. Диаграмма состояний и переходов процесса обслуживания

произвольный момент  $(t+\tau)$  должна находиться в состоянии  $(i, j, k)$ , в котором в пучке занято  $i$  линий первым и  $j$  линий первым и вторым этапами обслуживания и в системе находится  $k$  источников повторных вызовов. Диаграмма состояний и переходов процесса обслуживания приведена на рис. 6.1. Обозначим через  $p_{i,j,k}(t+\tau)$  и  $p_{i,j,k}(t)$  вероятности того, что система соответственно в моменты  $(t+\tau)$  и  $t$  находится в состоянии  $(i, j, k)$ . Для значений  $i=0, 1, \dots, j$ ;  $j=0, 1, \dots, v-1$ ;  $k=0, 1, 2, \dots$  коммутационная система к моменту  $(t+\tau)$  может перейти в состояние  $(i, j, k)$  за время  $(t, t+\tau)$ ,  $\tau \rightarrow 0$ , с конечным значением вероятности из следующих состояний системы в момент  $t$ :

1. Система в момент  $t$  находится в состоянии  $(i-1, j-1, k)$  и за время  $\tau$  на систему поступает первичный вызов. Вероятность такого события  $p_{i,j,k}(t+\tau)_1 = p_{i-1,j-1,k}(t)\lambda\tau + o(\tau)$ .

2. Система в момент  $t$  находится в состоянии  $(i-1, j-1, k+1)$  и за время  $\tau$  от одного из  $(k+1)$  источника повторных вызовов поступает повторный вызов. Вероятность такого события  $p_{i,j,k}(t+\tau)_2 = p_{i-1,j-1,k+1}(t)(k+1)\rho\tau + o(\tau)$ .

3. Система в момент  $t$  находится в состоянии  $(i, j, k+1)$  и за время  $\tau$  один из  $(k+1)$  источника повторных вызовов покидает систему, не добившись второго этапа обслуживания вызова. Вероятность такого события  $p_{i,j,k}(t+\tau)_3 = p_{i,j,k+1}(t)(k+1)\gamma\tau + o(\tau)$ .

4. Система в момент  $t$  находится в состоянии  $(i+1, j, k)$  и за время  $\tau$  один из  $(i+1)$  вызовов перейдет с первого ко второму этапу обслуживания. Вероятность такого события  $p_{i,j,k}(t+\tau)_4 = p_{i+1,j,k}(t)\psi(i+1)\alpha\tau + o(\tau)$ .

5. Система в момент  $t$  находится в состоянии  $(i+1, j+1, k-1)$  и за время  $\tau$  после первого этапа обслуживания освобождается одна из  $(i+1)$  линий. Вероятность такого события  $p_{i,j,k}(t+\tau)_5 = p_{i+1,j+1,k-1}(t)\phi(i+1)\alpha\tau + o(\tau)$ .

6. Система в момент  $t$  находится в состоянии  $(i, j+1, k)$  и за время  $\tau$  освободится одна из  $(j+1-i)$  линий, занятых вторым этапом обслуживания. Вероятность такого события  $p_{i,j,k}(t+\tau)_6 = p_{i,j+1,k}(t)(j+1-i)\beta\tau + o(\tau)$ .

7. Система в момент  $t$  находится в состоянии  $(i, j, k)$  и за время  $\tau$  не происходит изменения состояния системы, т. е. за время  $\tau$  не поступает ни одного первичного и ни одного повторного вызова, не изменяется состояние ни одной из линий, занятых первым этапом обслуживания, и ни одной из  $(j-i)$  линий, занятых вторым этапом обслуживания, а также ни один из  $k$  источников повторных вызовов не покидает систему. Вероятность такого события  $p_{i,j,k}(t+\tau)_7 = p_{i,j,k}(t)[1 - \lambda\tau - k\rho\tau - i\alpha\tau - (j-i)\beta\tau - k\gamma\tau] + o(\tau)$ .

Имея в виду, что перечисленные события, приводящие коммутационную систему к моменту  $(t+\tau)$  в состояние  $(i, j, k)$ , взаимно независимы, можно записать

$$p_{i,j,k}(t+\tau) = \sum_{i=1}^7 p_{i,j,k}(t+\tau)_i + o(\tau); \quad i=0, 1, \dots, j; \\ j=0, 1, \dots, v-1; \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (6.9)$$

Систему уравнений вероятностей состояний модели (6.9) необходимо дополнить уравнениями, в которых состояния коммутационной системы в момент  $(t+\tau)$  характеризуются занятостью всех  $v$  линий пучка первым и вторым этапами обслуживания вызовов, т. е. состояниями  $(i, v, k)$ , в которых  $j=v$  и соответственно вероятность которых есть  $p_{i,v,k}(t+\tau)$ .

Производя над общей системой уравнений  $p_{i,j,k}(t+\tau)$  и  $p_{i,v,k}(t+\tau)$  точно такие же преобразования, которые произведены в гл. 4 над системой уравнений вероятностей состояний полнодоступного пучка, обслуживающего симметричный поток вызовов, получаем систему алгебраических уравнений для определения вероятностей состояний коммутационной системы  $p_{i,j,k}$  и  $p_{i,v,k}$ .

#### 6.4. Основные характеристики качества работы системы с повторными вызовами

В качестве основных характеристик работы рассматриваемой системы примем: вероятность потери первичного вызова  $p$  и среднее число повторных вызовов, приходящихся

на один первичный вызов  $\bar{c}_0$ .

Вероятность потери первичного вызова  $p$  определяется отношением интенсивности  $\mu_n$  потерянных первичных вызовов по причине отсутствия свободных линий в пучке в момент поступления первичного вызова к интенсивности  $\mu$  поступивших первичных вызовов:  $p = \mu_n / \mu = \lambda_n / \lambda$ . Поскольку поток первичных вызовов яв-

ляется простейшим, то  $\lambda_n = \lambda \sum_{i=0}^v \sum_{k=0}^{\infty} p_{i, v, k}$ . Отсюда

$$p = \sum_{i=0}^v \sum_{k=0}^{\infty} p_{i, v, k} \quad (6.10)$$

При определении  $\bar{c}_0$  следует учитывать, что повторные вызовы источника вызваны как отсутствием свободных линий в пучке в момент поступления первичного и повторных вызовов, так и только первым этапом обслуживания части вызовов. Обозначим через  $\bar{c}_1$  среднее число повторных вызовов, приходящихся на один первичный или повторный вызов, которые происходят по причине отсутствия свободных линий в пучке в момент поступления вызова, и через  $\bar{c}_2$  – среднее число повторных вызовов на первом этапе обслуживания. Тогда

общее среднее число повторных вызовов  $\bar{c}_0$ , осуществляемых абонентом для обслуживания одного вызова (независимо от того, закончилось ли обслуживание вызова вторым этапом либо источник отказался от дальнейших попыток добиться полного обслуживания), составляет  $\bar{c}_0 = \bar{c}_2 + (1 + \bar{c}_2) \bar{c}_1 = \bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \bar{c}_1 \bar{c}_2$ .

Величина  $\bar{c}_2$  может быть определена из ф-лы (6.4), по которой рассчитывается среднее число попыток на первом этапе обслуживания  $L$ :  $\bar{c}_2 = L - 1$ . Тогда

$$\bar{c}_0 = L + \bar{c}_1 L - 1. \quad (6.11)$$

Для определения  $p$  и  $\bar{c}_1$  могут быть использованы таблицы [24]. В этих таблицах приводятся значения  $p$  и  $\bar{c}_1$  для модели обслуживания потока вызовов, в которой учитываются повторные вызовы, появляющиеся только по причине отсутствия свободных линий в пучке в моменты поступления первичных вызовов. Значения  $p$  и  $\bar{c}_1$  даны в зависимости от емкости пучка  $v$  при фиксированных значениях  $\chi = \lambda/v$ ,  $T = 1/\rho$  и  $u = \gamma/\rho$ . Значения  $p$  и  $\bar{c}_1$  справедливы для значений среднего времени  $z$  между двумя соседними повторными вызовами, осуществляемыми источником, и вероятности  $H$  того, что источник производит повторный вызов, которые связаны с  $T$  и  $u$  следующими зависимостями:

$$z = T/(1 + u); H = 1/(1 + u); T = z/H; u = (1 - H)/H. \quad (6.12)$$

На характеристики  $p$  и  $\bar{c}_0$  работы системы с повторными вызовами, как и других коммутационных систем, существенное влияние оказывают величина интенсивности поступающей нагрузки  $\gamma$  и емкость пучка линий  $v$ . Помимо того,  $p$  и  $\bar{c}_0$  зависят от ряда других параметров: вероятности  $\phi$  того, что поступивший вызов не будет полностью обслужен; вероятности  $H$ , того, что источник производит повторный вызов; среднего времени  $z$  между двумя

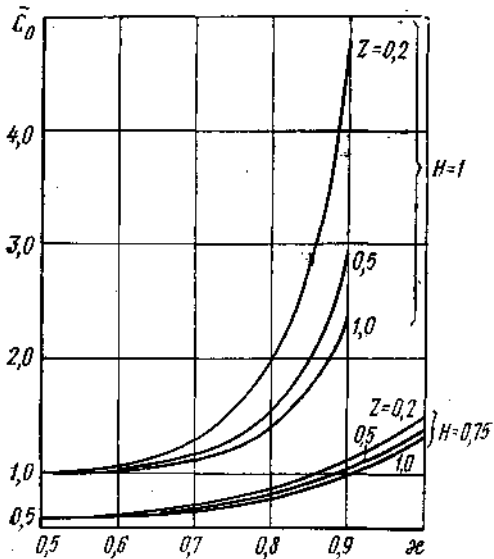


Рис. 6.2. Зависимости среднего числа повторных вызовов  $\bar{c}_0$  от удельной поступающей нагрузки на одну линию пучка  $x$  при  $v=20$

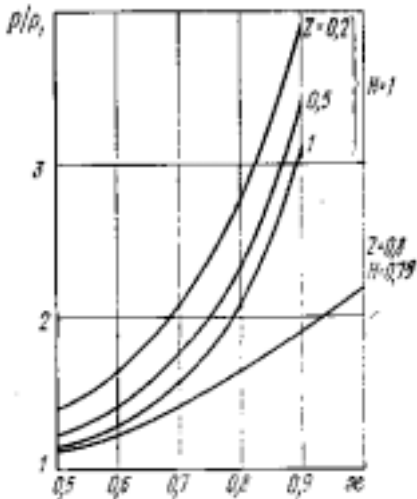


Рис. 6.3. Зависимости отношения потерь  $p$  в системе с повторными вызовами к потерям  $p_1$  в системе, обслуживающей вызовы простейшего потока, от удельной поступающей нагрузки  $x$  при  $v=20$



соседними попытками источника добиться обслуживания своего вызова.

Рассматриваемые зависимости характеризуются семействами кривых  $\bar{c}_0=f(\chi)$  и  $p/p_1=f(\chi)$  при определенных значениях  $\psi$ ,  $\phi$ ,  $H$  и  $z$ , где  $\chi$  – удельная поступающая нагрузка на одну линию пучка,  $p_1$  – потери в системе, обслуживающей простейший поток вызовов. Указанные семейства кривых приведены на рис. 6.2 и 6.3 для значений  $\psi=20$ ;  $\phi=0,5$ ;  $H=1$  и  $0,75$ ;  $z=0,2$ ;  $0,5$ ;  $1,0$ . За единицу времени величины  $z$  принята средняя длительность одного занятия  $t$ . Задаваясь средними длительностями первого и второго этапов обслуживания  $\bar{t}=25$  с и  $\bar{t}=120$  с, получаем при  $H_1=1$  и  $H_2=0,75$  соответственно  $t_1=170$  с и  $t_2=136$  с.

Из рисунков следует, что значения  $\bar{c}_0$  и  $p/p_1$  увеличиваются с возрастанием  $\chi$ ,  $H$  и уменьшением  $z$ . При этом  $\bar{c}_0$  увеличивается более интенсивно в области больших значений  $\chi$ . Так, при  $z=0,2$  и  $H=0,75$  увеличение  $\chi$  с  $0,6$  до  $0,9$  Эрл приводит к увеличению  $\bar{c}_0$  с  $0,6$  до  $1,1$ , т. е. в  $1,8$  раза. Еще более ощутимо влияет на  $\bar{c}_0$  вероятность  $H$ . При  $\chi=0,9$  Эрл и  $z=0,2$  увеличение  $H$  с  $0,75$  до  $1,0$  приводит к увеличению  $\bar{c}_0$  в  $4,3$  раза.

Влияние среднего времени  $z$  на величину  $\bar{c}_0$  ощутимо только в области больших значений  $\chi$  ( $\chi > 0,6$  Эрл) и значений вероятности  $H$ , близких к единице. Так, при  $\chi=0,8$  Эрл и  $H=0,75$  значениям  $z=1,0$ ;  $0,5$ ;  $0,2$  соответствуют значения  $\bar{c}_0 = 0,75$ ;  $0,8$ ;  $0,9$ , а при  $H=1$  –  $\bar{c}_0=1,4$ ;  $1,55$ ;  $2,0$ .

На величину потерь  $p$  помимо величины удельной поступающей нагрузки  $\chi$  существенно влияет вероятность  $H$ , в то время как величина  $z$  оказывает малое влияние, которое практически можно не учитывать. Так, если  $H=1$ , и  $z=0,5$ , то при  $\chi=0,5$  Эрл отношение  $p/p_1 \approx 1,2$ , а при  $\chi=0,9$  Эрл –  $p/p_1=3,5$ .

### **Задача.**

*Определить:* качественные характеристики  $p$  и  $\bar{c}_0$  полнодоступного пучка емкостью  $\psi=30$  линий при следующих исходных данных:  $\bar{t}_a=20$  с;  $\bar{t}_b=140$  с;  $\chi=0,6$  Эрл;  $\phi=0,4$ ;  $H=0,9$ ;  $z=0,09$ .

*Решение.* Определяем среднюю суммарную длительность занятия линий пучка полным обслуживанием одного вызова:  $t=(\bar{t}_a+\psi \bar{t}_b)/(1-\phi H)=162$  с  $\approx 0,045$  ч. Значения  $p$  и  $\bar{c}_1$  определяем по таблицам вероятностных характеристик полнодоступного пучка при повторных вызовах. Для этой цели вычисляем вспомогательные величины  $T$  и  $u$ :  $T=z/H=0,1$ ;  $u=(1-H)/H \approx 0,1$ .

При полученных значениях  $T$  и  $u$ ,  $\chi=0,6$  Эрл и  $\psi=30$  выписываем из таблиц значения  $p$  и  $\bar{c}_1$ :  $p=0,004$ ;  $\bar{c}_1=0,00645$ . При  $L=1/(1-\phi H)=1,56$  находим  $\bar{c}_0=L+\bar{c}_1 L-1=0,57$ .

### **Контрольные вопросы**

1. В чем заключаются основные отличия работы системы с повторными вызовами от работы систем, обслуживающих простейший и примитивный потоки вызовов?
2. Почему в системе с повторными вызовами необходимо ограничивать величину поступающей нагрузки?
3. Каковы основные параметры, влияющие на работу системы с повторными вызовами?
4. Каковы особенности составления системы уравнений вероятностей состояний системы с повторными вызовами?
5. Каковы характеристики качества работы системы с повторными вызовами, способы их определения?
6. Каковы закономерности изменения характеристик качества обслуживания  $p$  и  $\bar{c}_0$  в зависимости от изменения  $\chi$ ,  $H$ ,  $z$ ?

## Г Л А В А   С Е Д Ь М А Я

### Метод статистического моделирования в задачах теории телетрафика

#### 7.1. Общие сведения

Большое число задач теории телетрафика, связанных с изучением процессов обслуживания коммутационными системами поступающих потоков вызовов, требуют исследования микросостояний коммутационных систем. К таким системам, в первую очередь, относятся неполнодоступные коммутационные системы, блокирующие звеньевые коммутационные системы, использующие ряд режимов искания и алгоритмов установления соединений. Марковские процессы позволяют достаточно просто составить системы уравнений, описывающие исследуемые процессы. Однако решение указанных систем уравнений наталкивается на большие вычислительные трудности. В качестве примера достаточно указать на наиболее простые по структуре неполнодоступные схемы. Последние имеют  $s=2^v$  микросостояний, где  $v$  – емкость пучка линий, включаемого в выходы такой системы. Напомним, что в реальных коммутационных системах  $v \geq 50$  и соответственно  $s \geq 2^{50} > 10^{15}$ . Решение системы с таким числом уравнений невозможно осуществить не только на существующих ЭВМ, но и на ЭВМ ближайшего будущего. Наиболее эффективным средством решения указанных задач теории телетрафика является метод статистического моделирования.

Использование универсальных и специализированных электронных машин для решения задач теории телетрафика за последние два десятилетия нашло широкое распространение. Если на первом этапе для этих целей преимущественно создавались специализированные машины, то в последнее десятилетие, характерное бурным развитием вычислительной техники, основное применение имеют универсальные ЭВМ.

Метод статистического моделирования сложных коммутационных систем на универсальных ЭВМ или специализированных машинах сводится к имитации процесса обслуживания коммутационной системой поступающего потока вызовов, в результате которой можно получить задаваемые статистические характеристики исследуемого процесса. В машине (или в приставке к ней) вырабатывается требуемого типа случайный поток вызовов, в памяти машины отображается структура моделирования коммутационной системы, моделирование производится по разработанной программе управления процессом установления соединений и их разъединения. При статистическом моделировании возможно с любой степенью точности воспроизвести весь исследуемый процесс и получить интересные статистические характеристики. Естественно, чем выше требуется точность результатов исследуемого процесса, тем в большем объеме необходимо провести статистические испытания и, следовательно, требуется больше машинного времени.

Для экономного расходования машинного времени с сохранением высокой точности результатов моделирования непосредственное статистическое моделирование истинного процесса обслуживания коммутационной системой поступающего потока вызовов заменяется моделированием искусственных вероятностных моделей. В качестве такой модели широко используется моделирование марковской цепью.

Необходимо отметить, что в курсе «Теория телетрафика» предусматривается лишь ознакомление с основными принципами статистического моделирования. Изучение вопросов программирования и статистического моделирования – задача специального курса.

#### 7.2. Моделирование случайных величин

**Метод Монте-Карло.** Моделирование случайных процессов, в том числе и систем массового обслуживания, осуществляется с помощью моделирования случайных величин, подчиняющихся различным распределениям: равномерному, показательному, нормальному и др. Для получения таких случайных величин используется случайная величина  $X$ ,

равномерно распределенная на отрезке  $[0,1]$ , из которой различными преобразованиями получают случайную величину, подчиняющуюся требуемому закону распределения.

Случайная величина  $X$  называется равномерно распределенной на отрезке  $[0,1]$ , если ее плотность  $f(x)$  на этом отрезке постоянна и равна единице:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x < 1; \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } x > 1. \end{cases} \quad (7.1)$$

Функция распределения такой случайной величины  $X$  имеет значения

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ x & \text{при } 0 \leq x < 1; \\ 1 & \text{при } x \geq 1. \end{cases} \quad (7.2)$$

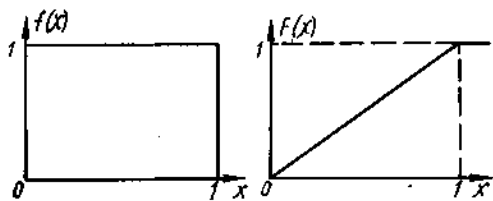


Рис. 7.1. Плотность  $f(x)$  и функция распределения  $F(x)$  случайной величины, равномерно распределенной на отрезке  $[0,1]$

Плотность  $f(x)$  и функция распределения  $F(x)$  случайной величины  $X$ , равномерно распределенной на отрезке  $[0,1]$ , показаны на рис. 7.1.

Случайную величину  $X$ , равномерно распределенную на отрезке  $[0,1]$ , можно получить из дискретной случайной величины, равновероятно принимающей значения 0 и 1. Действительно, двоичная дробь  $X=0, a_{-1}a_{-2}...$ , где  $a_{-1}a_{-2}...$  есть последовательность независимых случайных величин,

представляет случайную величину, равновероятно распределенную на отрезке  $[0, 1]$ .

Для того чтобы промежутки между соседними значениями равномерно распределенной случайной величины  $X$  стремились к нулю, необходимо иметь бесконечную последовательность независимых случайных величин  $\{a_i, i = -1, -2, \dots\}$ , равновероятно принимающих значения 0 и 1. На практике непрерывно распределенная случайная величина моделируется приближенно. При этом может быть обеспечена сколь угодно высокая точность за счет выбора числа  $k$  двоичных разрядов в ЭВМ, определяющих двоичную дробь  $0, a_{-1}a_{-2}...a_{-k}$ . Таким образом, вместо непрерывной случайной величины, равномерно распределенной на отрезке  $[0,1]$ , моделируется дискретная случайная величина, равновероятно принимающая значения  $0, 1/2^k, 2/2^k, \dots, 2^k-1/2^k$  с промежутками между соседними значениями  $1/2^k$ .

Представим отрезок  $[0,1]$  линией, образующей окружность. Тогда случайная величина  $X$ , равномерно распределенная на отрезке  $[0,1]$ , окажется равномерно распределенной по длине окружности. Получаем аналогию с игрой в рулетку. В связи с этим разнообразные модели равномерно распределенной случайной величины часто называют рулеткой, а метод статистических испытаний получил название метода Монте-Карло (по названию курорта в княжестве Монако на берегу Средиземного моря, в игорных домах которого распространена игра в рулетку).

Случайные величины  $X$ , равномерно распределенные на отрезке  $[0,1]$ , можно получить тремя способами: 1) используя таблицы случайных чисел; 2) с помощью генераторов (датчиков) случайных чисел; 3) программным путем с помощью ЭВМ (псевдослучайные числа).

Псевдослучайные числа (точнее, псевдослучайная последовательность чисел) вырабатываются рекуррентным способом по специальным алгоритмам, в которых каждое последующее число получается из предыдущих в результате применения некоторых арифметических и логических операций. Эти числа называются *псевдослучайными*, а не случайными, так как последовательности чисел, получаемых с помощью рекуррентных соотношений, являются периодическими. Однако период может быть выбран столь большим, что практически этот недостаток можно не учитывать.

На универсальных ЭВМ используется много различных алгоритмов получения псевдослучайных последовательностей чисел, равномерно распределенных на интервале

[0,1]. В них предусматривается сдвиг исходного числа на несколько разрядов влево, затем сдвиг исходного числа на несколько разрядов вправо, сложение двух новых чисел, взятие какой-либо части нового числа и другие арифметические и логические операции для получения следующего случайного числа, равномерно распределенного на отрезке [0,1].

Для увеличения периода в качестве исходных выбирается не одно, а несколько случайных чисел, используется не одно, а несколько различных рекуррентных соотношений.

**Принцип моделирования непрерывной случайной величины, распределенной по любому закону.** Возможность моделирования случайной величины  $X$ , равномерно распределенной на отрезке [0,1], позволяет моделировать и непрерывную случайную величину  $Z$ , распределенную по любому закону  $F(\xi)=P(\Xi<\xi)$ . Функция распределения случайной величины  $\Xi$  монотонно возрастает от 0 до 1. Можно показать, что значения случайной величины  $\Xi$ , распределенной по любому закону в интервале  $[a, b)$  с плотностью  $f(\xi)$ , определяется из уравнения

$$\chi = \int_a^{\xi_1} f(\xi) d\xi. \tag{7.3}$$

Для каждой реализации величины  $X$  решается последнее уравнение относительно  $\xi_1$ , т. е. определяется реализация величины  $\Xi$ .

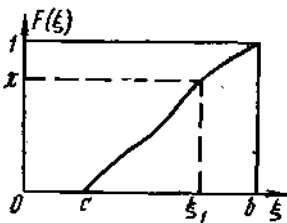


Рис. 7.2. Процедура определения случайной величины  $\xi$

Процедура получения случайной величины  $\xi$  по некоторой реализации величины  $X$  показана на рис. 7.2, на котором приведена функция распределения  $F(\xi)$  случайной величины  $\Xi$ . Для каждой конкретной реализации равномерно распределенной случайной величины  $X$  прямая  $f(\xi)=\chi$  пересекает кривую функции распределения только в одной точке, абсцисса которой  $\xi_1$  и определяет значение  $\Xi$  в этой реализации.

Покажем принцип моделирования случайной величины  $\Xi$ , равномерно распределенной в интервале  $[a, b)$ , и случайной величины  $\Xi$ , распределенной по показательному закону.

Равномерно распределенная в интервале  $[a, b)$  случайная величина  $\Xi$  имеет в этом интервале постоянную плотность, равную

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a < \xi < b; \\ 0 & \text{при } a > \xi \geq b. \end{cases} \tag{7.4}$$

Согласно (7.3)  $\chi = \int_a^{\xi_1} \frac{d\xi}{b-a} = \frac{\xi_1 - a}{b-a}$ , откуда

$$\xi_1 = a + \chi(b-a). \tag{7.5}$$

Используя в процессе моделирования каждую реализацию случайной величины  $X$  и преобразование (7.5), получаем последовательность случайных величин  $\xi$ , равномерно распределенных в интервале  $[a, b)$ .

Случайная величина  $\Xi$ , распределенная в интервале  $[0, \infty)$  по показательному закону с параметром  $\lambda$ , имеет плотность распределения

$$f(\xi) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\xi} & \text{при } \xi \geq 0; \\ 0 & \text{при } \xi < 0. \end{cases}$$

Согласно (7.3)  $\chi = \int_0^{\xi_1} \lambda e^{-\lambda\xi} d\xi = 1 - e^{-\lambda\xi_1}$ ,  $1 - \chi = e^{-\lambda\xi_1}$ , откуда

$\xi_1 = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-\chi)$ . Величина  $(1-\chi)$  точно так же, как и  $\chi$ , является равномерно распределенной на отрезке [0,1]. Поэтому

$$\xi_1 = -\frac{1}{\lambda} \ln \chi. \tag{7.6}$$

Таким образом, в процессе моделирования на основе многократной реализации случайной величины  $X$  и преобразования (7.6) получаем последовательность случайных величин  $\xi$  распределенных по показательному закону с заданным параметром  $\lambda$ .

Умение моделировать непрерывные случайные величины  $\xi$  дает возможность моделировать и любой поток вызовов, заданный последовательностью функций распределения промежутков между вызовами. Так, при моделировании простейшего потока вызовов последовательность случайных величин  $z_i$  можно получить, используя преобразование (7.6).

### 7.3. Моделирование коммутационных систем на универсальных вычислительных машинах

**Моделирование на основе цепи Маркова процесса обслуживания потока вызовов коммутационной системой.** При моделировании процесса обслуживания потока вызовов коммутационной системой, как и при моделировании любой системы массового обслуживания, нет необходимости полностью имитировать реальный процесс. Достаточно, чтобы различные состояния искусственного и реального процессов совпадали либо находились во взаимно однозначном соответствии, иными словами, достаточно, чтобы моделируемый искусственный процесс и получаемые при этом характеристики соответствовали в статистическом смысле реальному процессу и исследуемым вероятностным характеристикам.

Ранее было показано, что процесс функционирования любой коммутационной системы при обслуживании потока с простым последствием (в том числе и простейшего потока вызовов) при показательном распределении длительности занятия является марковским процессом. Поэтому вместо моделирования реального процесса обслуживания потока вызовов коммутационной системой можно моделировать марковский процесс, т. е. моделировать искусственный процесс с вероятностными свойствами реального процесса. При этом модель описывается системой уравнений различных состояний обслуживающей коммутационной системы. Замена моделирования реального процесса моделированием марковского процесса приводит к существенной экономии в оперативной и постоянной памяти вычислительной машины.

При имитации моделирования реального процесса обслуживающей коммутационной системы марковским процессом требуется учитывать случайные отрезки времени пребывания системы в различных состояниях. Существенное дальнейшее упрощение статистического моделирования обслуживающей коммутационной системы достигается заменой моделирования марковского процесса моделированием цепи Маркова. При этом переход модели из одного состояния в другое происходит в дискретные моменты времени, в каждый из которых реализация случайной величины имитирует либо поступление нового вызова, либо окончание находящегося на обслуживании какого-либо вызова. Между всеми состояниями коммутационной системы и моделируемой цепи Маркова устанавливается взаимно однозначное соответствие. Это означает, что под воздействием поступившего в дискретный момент времени вызова (или окончания соединения) переход моделируемой цепи Маркова из какого-либо определенного состояния в новое соответствует переходу реальной коммутационной системы в такое же новое состояние, если до этого коммутационная система находилась в однозначном состоянии с моделируемой цепью Маркова.

При моделировании цепи Маркова каждое изменение цепи происходит за один цикл работы машины, в течение которого реализуется случайная величина, имитирующая поступление нового вызова или окончание обслуживания какого-либо ранее поступившего вызова, а также происходит переход цепи в другое состояние. Не требуется в явном виде учитывать время пребывания системы в различных состояниях. В результате уменьшаются объемы информации, которые должны храниться в памяти машины, на каждое изменение состояния обслуживающей системы требуется меньшее число операций машины – сокращается время цикла работы машины. Поэтому имеется возможность осуществлять на мутационная система произвольной структуры

ЭВМ статистическое моделирование обслуживающих коммутационных параметров, получать значительные по объему статистические характеристики исследуемых систем и одновременно сокращать время моделирования. Для реализации каждого из событий, поступающих в дискретные моменты времени (поступления нового вызова, освобождения какого-либо соединительного пути), необходимо знать вероятности их поступления. С этой целью определим указанные вероятности и способ их реализации при моделировании на ЭВМ цепи Маркова, имитирующей обслуживающую коммутационную систему при достаточно общих предположениях.

Коммутационная система произвольной структуры (рис. 7.3) содержит  $s$  групп входов и  $h$  групп (направлений) выходов. На каждую группу входов поступает поток с простым последствием.

Параметр потока вызовов –  $\lambda(i, j, k)$ , где  $i$  – номер группы входов;  $j$  – номер выбираемого направления;  $k$  – номер состояния коммутационной системы в момент поступления вызова. Параметр потока освобождений соединительного пути между  $i$ -й группой входов и  $j$ -м направлением при  $k$ -м состоянии системы –  $\nu(i, j, k)$ . Суммарный параметр потоков вызовов  $a_k$  и суммарный параметр потоков освобождений  $b_k$  в промежутки времени, в которые коммутационная система находится в состоянии  $k$ , составляют

$$a_k = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^h \lambda(i, j, k);$$

$$b_k = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^h \nu(i, j, k).$$

При  $k$ -м состоянии цепи Маркова моделируется случайная величина  $\xi$ , равномерно распределенная на отрезке  $[0, a_k + b_k)$ . Если в рассматриваемом цикле работы ЭВМ случайная величина  $\xi$  реализуется на участке равномерно распределенного отрезка  $[0, a_k + b_k)$ , соответствующем

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \lambda(i, j, k) < \xi < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda(i, j, k), \quad (7.7)$$

то полагаем, что эта случайная величина определяет поступление вызова на  $n$ -ю группу входов и соединение требуется установить в  $m$ -м направлении. Если  $\xi$  реализуется на участке

$$a_k + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \nu(i, j, k) < \xi < a_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \nu(i, j, k), \quad (7.8)$$

то величина  $\xi$  определяет освобождение соединительного пути между  $n$ -й группой входов и  $m$ -й группой выходов. Заметим, что при этом может освободиться любой из установленных соединительных путей между указанными группами входов и выходов.

**Статистические характеристики моделирования.** Целью моделирования является получение статистических оценок вероятностных характеристик процессов обслуживания коммутационными системами поступающих потоков вызовов при заданных дисциплинах обслуживания. Эти оценки принято называть *статистическими характеристиками*. К таким характеристикам относятся: в системах с потерями – вероятность потерь, вероятности различных состояний коммутационной системы; в системах с ожиданием – распределение времени ожидания начала обслуживания, среднее время ожидания, средняя длина очереди и другие характеристики.

Моделирование исследуемого процесса разбивается на группу  $n$  экспериментов (серий), в каждом из которых производится равное число  $m$  испытаний (например, число поступающих вызовов).

Число испытаний в каждом эксперименте выбирается таким, чтобы измеряемые статистические характеристики исследуемых вероятностных величин были бы достаточно представительны. Так, при определении вероятности потерь (ожидаемая величина которых

составляет порядка 5%) необходимо в каждом эксперименте предусмотреть десять и более тысяч испытаний, с тем чтобы число потерянных вызовов достигало нескольких десятков и даже сотен. В конце моделирования исследуемого процесса определяются средние значения, дисперсии и доверительные интервалы измеряемых статистических характеристик.

Перед моделированием первого эксперимента необходимо осуществить нулевую серию моделирования для приведения исследуемой системы в стационарный режим.

#### 7.4. Точность и достоверность результатов моделирования

При моделировании коммутационных систем, как отмечалось выше, общее время моделирования разбивается на  $n$  равных отрезков, т. е. разбивается на  $n$  экспериментов (серий). В каждом эксперименте производится равное число  $m$  испытаний (как правило,  $m$  поступающих вызовов). Для каждой серии определяется экспериментальное значение исследуемой статистической характеристики, например потерь, по формуле

$$x_i = r_i/m, \quad (7.9)$$

где  $r_i$  – число появлений исследуемого события (число потерянных вызовов) в  $i$ -й серии;  $x_i$  – экспериментальное значение статистической характеристики (потерь) в той же серии.

После завершения процесса моделирования определяются статистические оценки среднего значения  $\bar{x}$ , дисперсии  $\sigma^2$  и среднеквадратического отклонения  $\sigma$  по формулам

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}; \quad \sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2; \\ \sigma &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Оценка точности и достоверности результатов моделирования может быть произведена на основе применения центральной предельной теоремы для стационарных последовательностей, согласно которой исследуемые статистические характеристики сходятся к нормальному закону. При этом оценка точности и достоверности результатов моделирования производится по критерию Стьюдента:

$$p(z_{n-1}^*) = p\{\bar{x} - \varepsilon < x < x + \varepsilon\} = 2 S_{n-1}(z_{n-1}^*) - 1, \quad (7.11)$$

где  $p(z_{n-1}^*)$  – доверительная вероятность или надежность статистической оценки, т. е. вероятность того, что случайный доверительный интервал  $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$  содержит в себе теоретическую (достоверную) характеристику  $x$ ;  $S_{n-1}(z_{n-1}^*)$  – коэффициент, определяемый распределением Стьюдента при  $(n-1)$ -й степени свободы. Величина  $\varepsilon$  определяет точность статистической оценки, или доверительную границу статистической оценки.

При числе степеней свободы  $(n-1) \leq 19$  и  $z_{n-1}^* = (\varepsilon\sqrt{n})/\sigma \leq 6$  величина  $S_{n-1}(z_{n-1}^*)$  определяется по таблицам распределения Стьюдента.

Если число степеней свободы  $(n-1) > 19$  (т. е. число экспериментов  $n > 20$ ), то величину  $S_{n-1}(z_{n-1}^*)$  можно определять по приближенной формуле

$$S_{n-1}(z_{n-1}^*) = 0,5 + \Phi_0(z), \quad (7.12)$$

где  $\Phi_0(z)$  – интегральная форма функции, предназначенная для вычисления значений функции нормального распределения и определяемая по формуле

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-u^2/2} du.$$

Функция  $\Phi_0(z)$  табулирована. В (7.11)  $\varepsilon = z_{n-1}^* \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , и при заданной доверительной

вероятности  $p(z^*_{n-1})$  с увеличением числа экспериментов  $n$  повышается точность статистической оценки, т. е. уменьшается доверительная граница статистической оценки  $\epsilon$ , а следовательно, сокращается доверительный интервал  $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ . Поэтому рекомендуется, чтобы количество серий  $n$  при моделировании исследуемой коммутационной системы было достаточно большим – желательно, чтобы  $n \geq 50$ . Расчетами установлено, что при таких значениях  $n$  достигается и достаточно устойчивое значение статистической оценки среднеквадратического отклонения  $\sigma$ .

### **Задача.**

Исследуется коммутационная система с потерями, в которой необходимо определить вероятность потерь  $p$  при определенных параметрах системы и заданной величине интенсивности поступающей нагрузки. Моделирование коммутационной системы проведено 3 раза с различным числом экспериментов (серий):  $n_1=16$ ,  $n_2=25$ ,  $n_3=49$ . В результате каждого процесса моделирования получены одинаковые статистические оценки среднего значения потерь  $p$  и среднеквадратического отклонения  $\sigma$ , а именно:  $p=0,005$  и  $\sigma=0,01$ .

*Определить:* доверительные интервалы вероятности потерь  $p$  для трех процессов моделирования при доверительной вероятности  $p(z^*_{n-1})=0,95$ .

*Решение.* Значения коэффициента  $z^*_{n-1}$  табулированы в зависимости от доверительной вероятности  $p(z^*_{n-1})$  и числа степеней свободы  $n-1$  [29]. Для  $p(z^*_{n-1})=0,95$  и  $n-1=15$  значение коэффициента  $z^*_{n-1}=2,13$ . Из

соотношения  $\epsilon = z^*_{n-1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , определяем  $\epsilon_1=0,0053$ . Доверительный интервал составит  $(\bar{p}-\epsilon_1 < p < \bar{p}+\epsilon_1) = (0,0003 < p < 0,0103)$ .

Для  $n_2=25$  и  $n_3=49$  коэффициент  $z$  можно определять в предположении, что величина  $p$  распределена по нормальному закону. В этом случае при  $p(z^*_{n-1})=0,95$  значение  $z=1,96$ . Тогда при  $n_2=25$  и  $n_3=49$  соответственно  $\epsilon_2=0,004$  и  $\epsilon_3=0,0028$  и доверительные интервалы  $(0,001 < p < 0,009)$  и  $(0,0012 < p < 0,0078)$ .

Таким образом, рассмотренная задача показывает, что при определенной доверительной вероятности  $p(z^*_{n-1})$  с увеличением числа экспериментов  $n$  сокращается доверительный интервал.

### **Контрольные вопросы**

1. Как формируется непрерывная случайная величина, равномерно распределенная на отрезке  $[0,1]$  с помощью моделирования дискретной случайной величины?
2. В чем заключается принцип моделирования непрерывной случайной величины, распределенной по любому закону?
3. В чем сущность и каковы достоинства моделирования цепью Маркова процесса обслуживания потока вызовов коммутационной системой?
4. Что представляют собой статистические характеристики моделирования?
5. Как определяются точность и достоверность результатов моделирования?



## Неполнодоступное включение. Системы с потерями

### 8.1. Общие сведения

Неполнодоступная коммутационная схема (НС) – это схема с таким включением выходов, при котором каждому входу доступны не все, а лишь некоторая часть выходов, хотя в совокупности все входы могут использовать все выходы.

Совокупность входов НС, каждому из которых доступны одни и те же  $d$  выходов, называется *нагрузочной группой*. Число нагрузочных групп обозначается  $g$ . Число выходов  $d$  НС, каждый из которых доступен каждому входу одной нагрузочной группы, называется *доступностью*. Чаще всего применяются такие НС, у которых доступность для всех нагрузочных групп одинакова.

На рис. 8.1а приведена четырехгрупповая схема неполнодоступного включения. Схема характеризуется следующими параметрами: число нагрузочных групп  $g=4$ ; число выходов  $v=4k_1+2k_2+k_4=16$ ; доступность выходов  $d=k_1+k_2+k_4=10$ ; число индивидуальных выходов в каждой группе  $k_1=1$ ; число выходов, общих для двух групп,  $k_2=3$ ; число выходов, общих для четырех групп,  $k_4=6$ .

В схеме, приведенной на рис. 8.1а, число объединяемых точек коммутации монотонно возрастает с увеличением порядкового номера точки в ряду, относящемуся к одной группе. Такие неполнодоступные схемы называют схемами *ступенчатого* включения.

В схемах ступенчатого включения могут объединяться точки коммутации несоседних групп (*перехваченные* включения) и точки коммутации с разными номерами (*сдвинутые* включения). На рис. 8.1б приведена схема ступенчатого включения с теми же параметрами, что и схема на рис. 8.1 а. Коммутационные точки с порядковыми номерами 3 и 4 здесь

Другой разновидностью неполнодоступных схем являются *равномерные* схемы неполнодоступного включения. На рис. 8.1 в приведена четырехгрупповая схема с теми же параметрами, что и две предыдущие. В отличие от ступенчатой схемы, равномерная схема строится по принципу объединения точек коммутации у одинакового числа групп при образовании любого общего выхода. На рис. 8.1в видно, как объединяются по две или три точки коммутации, принадлежащие разным группам. Здесь применяются также сдвинутое и перехваченное включения.

Равномерная схема рис. 8.1в состоит из четырех элементарных подсхем, каждая с одинаковым сдвигом между соседними шагами искания. Такие элементарные подсхемы называются *цилиндрами*.

Для заданных значений

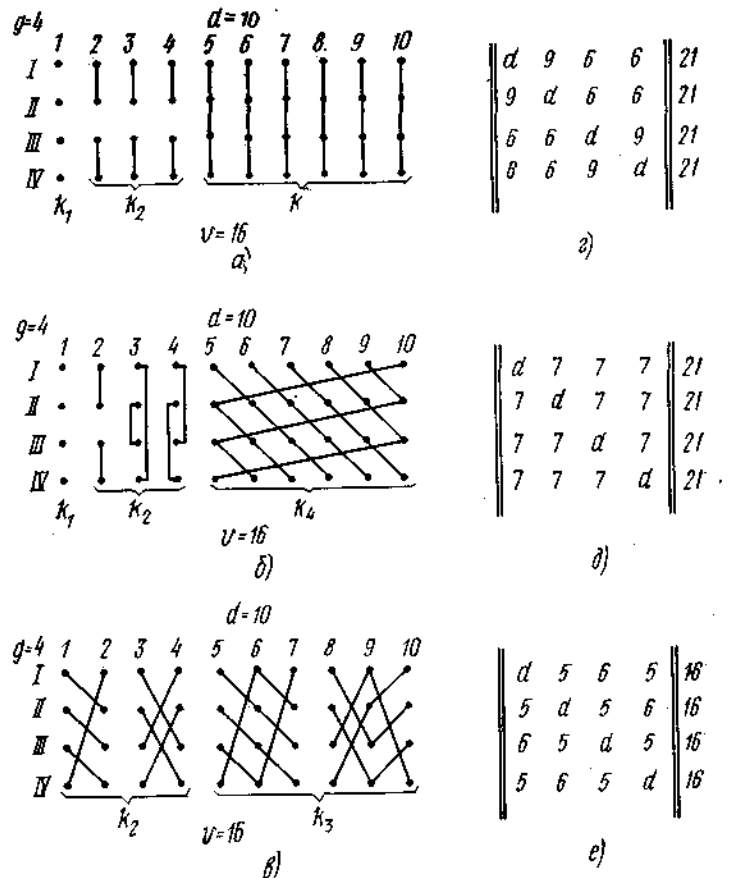


Рис. 8.1. Неполнодоступные схемы и матрицы связности для них

параметров  $d$  и  $\nu$  в случае двухгруппового включения ( $g=2$ ) существует лишь один вариант структуры неполнодоступного включения (один набор значений структурных параметров  $k_1$  и  $k_2$ ). Для многогруппового включения ( $g>2$ ) каждому значению параметров  $d$  и  $\nu$  может соответствовать несколько вариантов структуры, и при достаточно больших  $g$ ,  $d$  и  $\nu$  число вариантов может быть велико.

Неполнодоступная схема имеет существенные отличия от полнодоступной. В полнодоступной схеме (ПС)  $d \geq \nu$ , в неполнодоступной схеме  $d < \nu$ . Кроме того, в полнодоступной схеме (см. гл.4) характер включения выходов в точки коммутации и порядок искания свободного выхода не влияют на вероятность потерь при заданной интенсивности поступающей нагрузки, учитываются только макросостояния. В неполнодоступной схеме характер включения выходов и порядок искания существенно влияют на пропускную способность НС, так как вероятность потери поступающего вызова в общем случае зависит не только от числа выходов, но и от того, какие выходы заняты, т. е. необходимо учитывать микросостояния.

В связи с этим метод исследования полнодоступной схемы с помощью системы уравнений для вероятностей состояний, как правило, непригоден для НС из-за большого числа уравнений в системе, которая не может быть решена в хоть сколько-нибудь приемлемое время даже с помощью быстродействующих ЭВМ. Решение системы уравнений для вероятностей состояний НС возможно лишь для неполнодоступных схем, рассчитанных на небольшое число линий или схем, обладающих свойствами симметрии, как это имеет место в случае идеально симметричного неполнодоступного включения, для которого можно ограничиться рассмотрением только макросостояний, а следовательно, и число уравнений сравнительно мало. К сожалению, эти случаи не имеют существенного практического значения и представляют лишь теоретический интерес для получения оценок вероятности потерь.

В практике проектирования обычно пользуются приближенными инженерными методами, которые основаны на априорных предположениях не о поступающем потоке вызовов, а о промежуточных или конечных результатах его воздействия на НС, т. е. о характере распределения числа занятых выходов схемы или о средней нагрузке, обслуженной каждым выходом НС. К таким методам можно отнести известные методы О'Делла, Бабицкого, Лотце (модифицированная формула Пальма–Якобеуса) и другие.

В некоторых приближенных инженерных методах используются свойства определенных видов НС с тем, чтобы отдельные части такой НС представить в виде полнодоступной схемы и воспользоваться сравнением НС с некоторой эквивалентной ПС (метод эквивалентных замен).

Основные цели, преследуемые при теоретическом анализе НС, заключаются в том, чтобы при заданной доступности определить число выходов НС, требуемых для обслуживания заданной нагрузки при установленном качестве обслуживания (вероятности потерь для систем с потерями), и определить оптимальную структуру НС (способ включения выходов в точки коммутации схемы при заданном порядке искания свободного выхода).

## 8.2. Некоторые характеристики неполнодоступных схем

**Матрица связности.** Одной из характеристик неполнодоступной схемы является число связей, т. е. число соединений между точками коммутации (контактами) отдельных нагрузочных групп НС. Так, на рис. 8.1а первая группа имеет девять связей со второй группой (на 2–10-м шагах искания), вторая группа – шесть связей с третьей, третья группа – девять связей с четвертой и т. д. Число связей между каждой парой групп можно представить в виде матрицы связности. Матрица связности является квадратной-симметричной относительно главной диагонали матрицей порядка  $g$ , где  $g$  – число нагрузочных групп неполнодоступной схемы.

На рис. 8.1 з, д, е, приведены матрицы связности для неполнодоступных схем, изображенных на рис. 8.1 а, б, в. Схемы имеют одинаковое число групп  $g = 4$ , одинаковую доступность  $d = 10$ , одно и то же число выходов  $\nu=16$ , отличаются способом соединения

точек коммутации. Элементы главной диагонали равны доступности  $d$ . Элементы, стоящие на пересечении строки и столбца, показывают число связей между группами, соответствующими номерам строки и столбца. Элементы столбца, расположенного справа от матрицы, указывают на суммарное число связей соответствующей группы с остальными. Как видно из рис. 8.1, и суммарное число связей у каждой группы с другими и равномерность их распределения по группам различны у разных схем.

Суммарное число связей у первых двух неполнодоступных схем больше, чем у третьей равномерной схемы. Наиболее равномерно распределены связи каждой группы с другими во второй НС.

Исследования показывают, что при прочих равных условиях схема, обладающая более равномерной матрицей связности, имеет в определенных случаях преимущество перед схемой с менее равномерной матрицей. Считают, что если разница между любыми двумя элементами матрицы связности и разница между любыми двумя элементами столбца, расположенного справа от матрицы, не превышают по абсолютной величине единицу, то неполнодоступная схема построена хорошо. Матрица, удовлетворяющая указанным условиям, обеспечивает одинаковую связность каждой из нагрузочных групп с любой другой и одинаковую суммарную связность каждой из групп со всеми остальными. При одинаковой нагрузке на каждую из нагрузочных групп НС, обладающая такой матрицей связности, характеризуется одинаковым влиянием всех нагрузочных групп друг на друга. Однако матрица связности не может служить полной характеристикой НС. Существенное значение имеет также распределение связей по шагам искания, учет порядка искания в НС и др.

**Коэффициент уплотнения.** Для характеристики схемы неполнодоступного включения используют коэффициент уплотнения

$$\gamma = gd/v. \quad (8.1)$$

Значения  $\gamma$  лежат в пределах  $1 < \gamma < g$ . При  $\gamma = g$  неполнодоступная схема превращается в полнодоступную ( $v = d$ ), а при  $\gamma = 1$  неполнодоступная схема распадается на  $g$  изолированных полно-доступных схем. Таким образом, чтобы НС не распадалась на  $g$  отдельных ПС, должно соблюдаться неравенство  $\gamma > 1$ .

Для уточнения величины  $\gamma$  можно привлечь следующие соображения. При проведении предварительного запараллеливания надо получить такое число групп, чтобы телефонная нагрузка, создаваемая каждой группой, была меньше нагрузки, которую могут обслужить  $d$  линий полнодоступного пучка при заданных потерях.

Если при заданных потерях  $p$  интенсивность нагрузки, обслуживаемой всеми  $v$  линиями неполнодоступного пучка, равна  $y_{0\text{НС}}(p, v, d)$ , то ее можно представить в виде

$$y_{0\text{НС}}(p, v, d) = v \eta_{\text{НС}}(p, v, d),$$

где  $\eta_{\text{НС}}(p, v, d)$  – средняя нагрузка, пропускаемая каждой линией неполнодоступного пучка, состоящего из  $v$  линий.

При равномерном распределении нагрузки между группами нагрузка каждой группы будет равна

$$y_{0\text{НС}}(p, v, d)/g = v \eta_{\text{НС}}(p, v, d)/g.$$

Интенсивность нагрузки  $y_{0\text{НС}}(p, v = d)$ , обслуживаемой полнодоступным пучком, состоящим из  $d$  линий, при заданных потерях  $p$  может быть выражена как  $y_{0\text{НС}}(p, v, d) = d \eta_{\text{НС}}(p, v = d)$ . В соответствии с вышесказанным  $[v \eta_{\text{НС}}(p, v, d)]/g < d \eta_{\text{НС}}(p, v = d)$ , откуда

$$\gamma = \frac{gd}{v} > \frac{\eta_{\text{НС}}(p, v, d)}{\eta_{\text{НС}}(p, v = d)}. \quad (8.2)$$

Из неравенства (8.2) видно, что нижняя граница  $\gamma$  зависит от величины потерь  $p$ , числа линий в пучке  $v$  и доступности  $d$ . Для столинейного неполнодоступного пучка ( $v = 100$ ) с доступностью  $d = 10$  при потерях  $p = 0,001$  неравенство (8.2) выглядит следующим образом:

$\gamma > 1,6$ .

Практика эксплуатации телефонных систем и теоретические исследования показывают, что величину коэффициента уплотнения следует выбирать в пределах  $\gamma = 2 \div 4$ .

При малых коэффициентах уплотнения уменьшается пропускная способность неполнодоступного пучка за счет того, что среди возможных при таком  $\gamma$  схем неполнодоступного включения может не оказаться схемы с достаточно хорошей пропускной способностью. При больших  $\gamma$  увеличивается расход кабеля на АТС.

Из предыдущего соотношения вытекает, что предварительное запараллеливание нужно производить так, чтобы получить число групп  $g$ , удовлетворяющее условию

$$g = (2 \div 4) v/d. \quad (8.3)$$

### 8.3. Выбор структуры ступенчатой неполнодоступной схемы

При выборе структуры НС преследуют несколько целей. Среди них: получение максимальной пропускной способности при заданных параметрах схемы; уменьшение чувствительности к асимметрии нагрузки по нагрузочным группам; достижение гибкости при изменении параметров схемы; сокращение времени, необходимого на выбор структуры и ее осуществления, и др. В некоторых случаях соответствующим выбором структуры требуется увеличить переходное затухание между соединительными устройствами, подключенными к выходам НС.

Выбор структуры ступенчатой НС (схему ступенчатого включения) – это значит определить взаимные соединения точек коммутации каждой из нагрузочных групп с учетом возможностей различных объединений, перехвата и сдвига. При определении вариантов структуры НС, отличающихся способами объединения точек коммутации без учета перехвата и сдвига, возникает задача отыскания значений структурных параметров  $g$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ , ...,  $k_n$  для заданных  $v$  и  $d$ .

При составлении схемы ступенчатого включения надо стремиться к тому, чтобы параметр  $g$  выбирался из соотношения (8.3) с учетом того, что  $g$  – целое, положительное число. При этом принимаются во внимание удобства конструктивного разделения источников нагрузки на группы и преимущества таких значений  $g$ , которые дают больше различных комбинаций запараллеливания выходов.

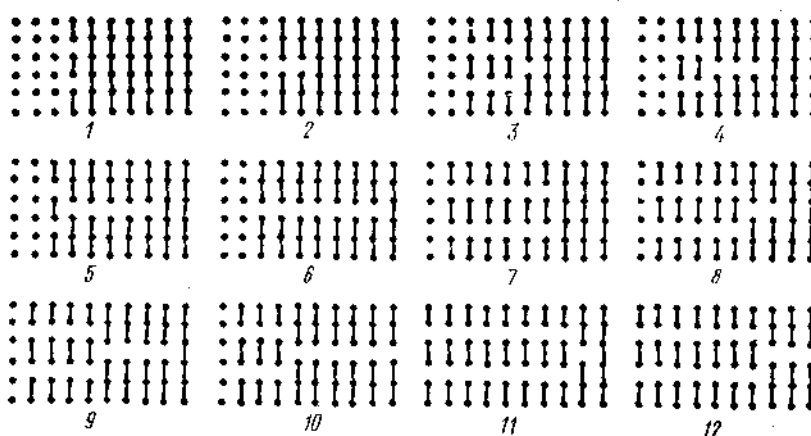
В случае двухгруппового включения ( $g=2$ ) существует один набор значений структурных параметров  $k_1$  и  $k_2$ , для которых справедливы соотношения

$$k_1 = v - d; k_2 = 2d - v. \quad (8.4); (8.5)$$

Для числа групп  $g > 2$  число вариантов структуры может быть большим. Пусть, например, требуется выбрать структуру ступенчатой НС, имеющей  $v=27$  выходов для включения соединительных устройств при доступности  $d=10$ . В этом случае число групп  $g$  должно лежать в пределах

$$g = (2 \div 4) v/d = 5,4 \div 10,8.$$

В указанном диапазоне возможны значения  $g=6, 7, 8, 9, 10$ . Учитывая, что при построении схемы без сдвига значения 6, 8 и 10 дадут больше возможностей запараллеливания выходов, чем значения 7 и 9, принимая во внимание, что при  $g=6$  будет минимальный расход кабеля, а также считая, что в нашем примере число источников нагрузки таково, что оно удобно



Р и с. 8.2. Варианты неполнодоступных схем

делится на шесть групп, выберем  $g=6$  (шестигрупповое включение).

Таким образом, запараллеливанием 60 точек коммутации необходимо получить 27 выходов. В этом случае возможно образовать индивидуальные, парные, объединенные по три и объединенные по шесть точек выходы. Тогда общее число выходов будет

$$v = 27 = 6k_1 + 3k_2 + 2k_3 + k_6, \quad (8.6)$$

а доступность

$$d = 10 = k_1 + k_2 + k_3 + k_6. \quad (8.7)$$

Учитывая, что  $k_1, k_2, k_3$  и  $k_6$  – целые и положительные числа, каждое из которых не превышает 10, число вариантов структуры пучка будет конечным.

Вычитая равенство (8.7) из равенства (8.6), получим  $v-d=5k_1+2k_2+k_3=17$ . Из этого соотношения следует, что  $k_1 \leq 3$ , т. е. для  $k_1$  нужно рассматривать только значения 0, 1, 2, 3. При  $k_1 = 3$  будет справедливо соотношение  $2k_2+k_3=2$ . Поэтому для  $k_2$  возможны значения 0 и 1. Если  $k_2=1$ , то  $k_3=0$ , а  $k_6=6$ .

Таким образом, один из вариантов схемы, удовлетворяющий условиям (8.6) и (8.7), будет иметь следующие структурные параметры:  $k_1=3; k_2=1; k_3=0; k_6=6$ . Действуя указанным образом, можно получить еще одиннадцать вариантов, возможных при заданных условиях. Структурные параметры всех вариантов приведены в табл. 8.1. На рис. 8.2 показаны схемы вариантов структуры неполнодоступного пучка, представленных в табл. 8.1.

Таблица 8.1.

Структурные параметры	Величина параметра для номера варианта											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$k_1$	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	0	0
$k_2$	1	0	3	2	1	0	6	5	4	3	8	7
$k_3$	0	2	1	3	5	7	0	2	4	6	1	3
$k_6$	6	5	4	3	2	1	3	2	1	0	1	0

Наилучшим вариантом ступенчатого включения при заданном качестве обслуживания и прочих равных условиях будет тот, который дает наибольшую пропускную способность или при котором вероятность потерь при заданной величине нагрузки будет наименьшей. При отыскании наилучшего варианта неполнодоступной схемы вообще и ступенчатого включения в частности следует иметь в виду, что не существует схемы с лучшей пропускной способностью при любых значениях нагрузки. При заданных параметрах  $g, d$  и  $v$  неполнодоступной схемы в одной области нагрузки может оказаться предпочтительнее (обеспечивающей меньшие потери) одна структура НС, а в другой области нагрузки – другая. М. А. Шнепс показал, что для схем с упорядоченным исканием свободной линии при малых нагрузках выгоднее использовать ступенчатые схемы с индивидуальными выходами, а при больших нагрузках – равномерные схемы. Для повышения пропускной способности НС существенное значение имеют перехваченные включения, которые во многих случаях позволяют снизить потери. При этом перехваченные включения без сдвига имеют несколько большую пропускную способность, чем перехваченные включения со сдвигом. Однако при доступностях  $d \geq 10$  отрицательное влияние сдвига уже почти не сказывается.

В неполнодоступных схемах со случайным исканием наличие или отсутствие сдвига не влияет на пропускную способность НС. В настоящее время точное решение задачи определения пропускной способности возможно для схем с небольшим числом  $v$  выходов и связано с большим объемом вычислений, а приближенное решение задачи может быть осуществлено путем моделирования на универсальных ЭВМ или специализированных машинах телефонной нагрузки.

Использование методов статистического моделирования позволило установить существенную зависимость эффективности НС от распределения числа выходов (линий) по шагам искания. Поэтому при практическом построении ступенчатых НС в области потерь до 1% ЛОНИИС рекомендует распределять число линий по шагам искания в соответствии с оптимизирующими коэффициентами  $\zeta_j$ , вычисленными А. М. Оганесяном. В этом случае число выходов  $v_j$  на  $j$ -м шаге искания определяется из соотношения

$$v_j = \zeta_j v, \quad (8.8)$$

где  $v$  – суммарное число выходов в неполнодоступной схеме.

Для ступенчатой НС на  $v=27$  выходов с доступностью  $d=10$  распределение выходов по шагам искания приведено в табл. 8.2.

ТАБЛИЦА 8.2

Шаг исканий $j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма
Значение коэффициента $\zeta_j$	0,19	0,13	0,12	0,11	0,1	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	1
Число выходов $v_j$	5,13	3,51	3,24	2,97	2,7	2,43	2,16	1,89	1,62	1,35	27
Округленное число выходов на каждом шаге	6	3	3	3	3	2	2	2	2	1	27
Округленное число выходов с учетом использования цилиндров	6	3	6	6	6	6	6	6	6	6	27

Указанное в третьей строке таблицы число выходов на каждом шаге искания получается дробным, и его округляют с учетом числа групп  $g$  ступенчатой НС и способом объединения точек коммутации. Будем считать, что в нашем случае число групп  $g = 6$ , а сдвинутые соединения не применяются. Тогда для каждого шага искания с учетом симметрии схемы мы должны округлить значение числа выходов до чисел 6, 3, 2 или 1. Один из вариантов округления приведен в предпоследней строке табл. 8.2. Полученная с учетом оптимизирующих коэффициентов ступенчатая НС соответствует варианту 9 из табл. 8.1 и рис. 8.2.

При желании использовать сдвинутые соединения округления числа выходов можно производить с учетом образования цилиндров на двух или нескольких соседних шагах искания. При этом от каждого полного цилиндра получаем шесть выходов. В последней строке табл. 8.2 показан один из вариантов такого округления. В этом случае на шагах искания 3 и 4 образуется двухшаговый цилиндр, на шагах 5, 6, 7 и 8, 9, 10 строятся трехшаговые цилиндры.

Пропускная способность ступенчатой НС, полученная с помощью оптимизирующих коэффициентов, зависит, естественно, как от правильности используемых коэффициентов, так и от способа округления числа выходов.

#### 8.4. Выбор структуры равномерной неполнодоступной схемы

Выбор оптимальной структуры равномерной неполнодоступной схемы производится исходя из следующих принципов:

- 1) каждая линия должна быть доступна одинаковому числу нагрузочных групп (при целом  $\gamma$ ) или числу групп, отличающихся не более чем на единицу (при дробном  $\gamma$ );
- 2) каждая нагрузочная группа должна иметь одинаковое число общих линий со всякой другой группой (элементы матрицы связности должны быть одинаковы или отличаться не более чем на единицу);
- 3) каждая линия объединяет точки коммутации, принадлежащие к соседним шагам искания.

При заданных  $v$  и  $d$  не всегда есть возможность строго выдержать указанные принципы

построения оптимальной равномерной схемы. В этом случае следует стремиться к максимально возможному их выполнению. В случае равномерной схемы, как и при ступенчатом включении, число групп  $g$  выбирается с учетом соотношения (8.3). После предварительного запараллеливания получаем  $gd$  точек коммутации.

На основании первого принципа точки коммутации должны запараллеливаться по  $r$  и  $r+1$  точек, принадлежащих разным группам, где  $r = [(gd)/v] = [\gamma]$ , а квадратная скобка – знак целой части.

Число  $v_1$  линий, полученных путем запараллеливания по  $r+1$  точек, и число  $v_2$  линий, получающихся запараллеливанием по  $r$  точек, определяются соотношениями

$$v_1 = gd - rv; v_2 = (r + 1)v - gd. \quad (8.9)$$

Наиболее удобно определить значения  $v_1$  и  $v_2$ , если коэффициент уплотнения  $\gamma$  представить в виде целой и дробной частей, в которых не производятся сокращения:

$$\gamma = (gd)/v = [\gamma] + v_1/v.$$

Тогда числитель дробной части будет равен числу  $v_1$ , т. е. числу линий, обслуживающих по  $r+1$  нагрузочных групп, а число линий  $v_2$ , обслуживающих по  $r$  нагрузочных групп, будет равно  $v_2 = v - v_1$ . Например, для схемы рис. 8.1в коэффициент уплотнения может быть представлен в следующем виде:  $\gamma = gd/v = 4 \times 10/16 = 2 + 8/16$ . Следовательно,  $v_1 = 8$ , а  $v_2 = 16 - 8 = 8$ .

Если коэффициент уплотнения равен целому числу, то равномерная схема может иметь запараллеливание только по  $r$  точек.

Выполнение второго и третьего принципов осуществляется путем составления всех схем из отдельных подсхем, которые иногда называют цилиндрами. Каждая такая подсхема (цилиндр) охватывает  $r$  или  $r+1$  соседних шагов искания и образует число линий, равное числу групп  $g$ . Например, схема, приведенная на рис. 8.1в, имеет  $r=2$  и построена из цилиндров двух типов: цилиндров, охватывающих по два соседних шага искания, и цилиндров, занимающих по три соседних шага искания. В этом примере вся схема состоит из четырех цилиндров (однотипно построенных подсхем). Если вся схема состоит только из цилиндров, то такую схему называют *правильной*. Для того чтобы при заданных значениях  $v$ ,  $d$  и  $g$  схема была правильной, необходимо, чтобы величины

$$l_{r+1} = v_1/g = (gd - rv)/g \text{ и } l_r = v_2/g = [(r + 1)v - gd]/g, \quad (8.10)$$

были целыми числами. Здесь  $l_r$  – число  $r$ -шаговых цилиндров;  $l_{r+1}$  – число  $(r+1)$ -шаговых цилиндров.

Параметры  $v$  и  $d$  для правильной схемы будут выражаться следующим образом:

$$v = g(l_r + l_{r+1}); d = rl_r + (r + 1)l_{r+1}. \quad (8.11)$$

Если соотношение (8.10) не выполняется и схема не может быть правильной, то поступают следующим образом:

1) при заданных параметрах  $g$  и  $d$  строится правильная схема с числом линий  $v'$ , удовлетворяющим условию (8.10) и близким к заданному числу линий  $v$ . Затем в полученной таким образом правильной схеме изменяется число линий так, чтобы довести его до требуемого значения  $v$ , соблюдая при этом указанные выше принципы;

2) при заданных  $g$  и  $d$  строятся максимально возможное число  $r$ -шаговых цилиндров, которое будет равно целой части отношения  $v_2/g$ , и максимальное число  $(r+1)$ -шаговых цилиндров, которое будет равно  $[v_1/g]$ . После этого остается некоторое число шагов искания, которые запараллеливают с наименьшим нарушением указанных выше принципов.

## 8.5. Построение цилиндров

Цилиндр является элементарной равномерной НС, построенной на  $k$  шагах искания, с одинаковым сдвигом между соседними шагами искания. Каждый цилиндр образует  $g$  выходов, а коэффициент уплотнения цилиндра равен числу шагов искания ( $\gamma = k$ ).

На рис. 8.3а, б, в показаны двухшаговые цилиндры (цилиндры, построенные на двух шагах искания). Все три цилиндра имеют одинаковое число нагрузочных групп  $g$ , одинаковое число выходов, равное числу групп, одинаковый коэффициент уплотнения  $\gamma=2$  и отличаются между собой сдвигом или, как его называют, *наклоном*. Наклон цилиндра, приведенного на рис. 8.3а, равен единице ( $i=1$ ), а на рис. 8.3б – двум ( $i=2$ ). При выборе типа цилиндров при построении равномерных НС этот параметр имеет существенное значение. Его значения показаны на рис. 8.3 в квадратных скобках справа от соответствующего цилиндра. На рис. 8.3г, д, е приведены три трехшаговых цилиндра. Все цилиндры имеют  $g$  выходов с коэффициентом уплотнения  $\gamma=3$ . Отличаются между собой наклоном, который для трехшаговых цилиндров определяется двумя цифрами. Первая цифра указывает наклон (сдвиг) между первым и вторым шагами искания, а вторая цифра – между вторым и третьим шагами искания.

Аналогичным образом строятся четырехшаговые цилиндры параметры которого

Учитывая, что коэффициент уплотнения НС должен лежать в пределах 2–4, наиболее часто употребляемые цилиндры являются двух-, трех- или четырехшаговыми. Для однотипности рассмотрения одношаговым цилиндром называют цилиндр без сдвига, параметр которого равен нулю. Такие одношаговые цилиндры наряду с другими структурами специального вида (особые цилиндры, цикло-схемы) используются в том случае, когда рассматриваемая НС при заданных структурных параметрах не может быть правильной.

Общее число цилиндров, требуемых для построения практически используемых НС, невелико. Для удобства они сведены в таблицы [10], которые позволяют ускорить выбор структуры НС. В таблицах помимо параметров цилиндров указывается первая строка матрицы связности, что облегчает выбор необходимых цилиндров и подсчет матрицы связности всей НС, которая позволяет судить об оптимальности выбранной схемы.

### 8.6. Идеально симметричная неполнодоступная схема

*Идеально симметричной неполнодоступной схемой называют схему, которая при числе выходов  $v$ , доступности  $d$  и случайном равновероятном искании свободного выхода имеет число групп  $g$ , равное*

$$g = C_v^d, \quad (8.12)$$

где  $C_v^d$  – число сочетаний из  $v$  по  $d$ . Таким образом, в идеально симметричной НС имеется такое количество нагрузочных групп, которое равно числу способов выбора  $d$  различных линий из общего числа  $v$  линий. В коммутационные точки каждой нагрузочной группы включается  $d$  различных линий. Любые две нагрузочные группы отличаются друг от друга, по крайней мере, одной линией.

Вообще, нагрузочной группе любого неполнодоступного включения, а не только идеально симметричного, предоставляется доступ к одному из сочетаний, состоящему из  $d$  различных

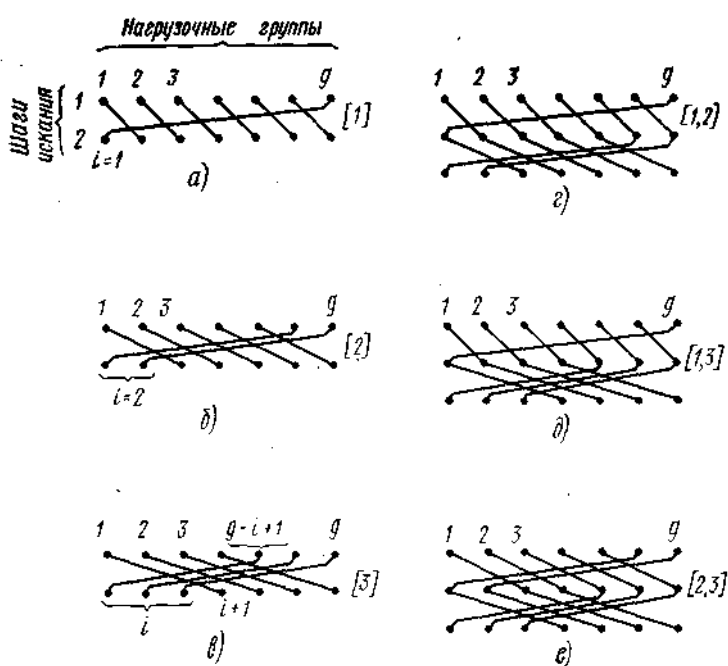


Рис. 8.3. Схемы двух- и трехшаговых цилиндров



линий, выбранных среди всех  $v$  линий НС (см. рис. 8.1). Однако в обычной неполнодоступной схеме из-за малого числа групп используются далеко не все сочетания по  $d$  линий. Например, в схемах, приведенных на рис. 8.1, из большого числа возможных сочетаний, равного  $C_{16}^{10}$ , используется только по четыре сочетания.

Идеально симметричная НС отличается от обычной тем, что для каждого из возможных сочетаний по  $d$  линий предусматривается отдельная нагрузочная группа. На рис. 8.4а, б, в в качестве примера приведены три идеально симметричных НС. На рис. 8.4а изображена схема с доступностью  $d=2$  и числом выходов  $v=3$ , при этом число нагрузочных групп равно  $g=C_v^d=C_3^2=3$ .

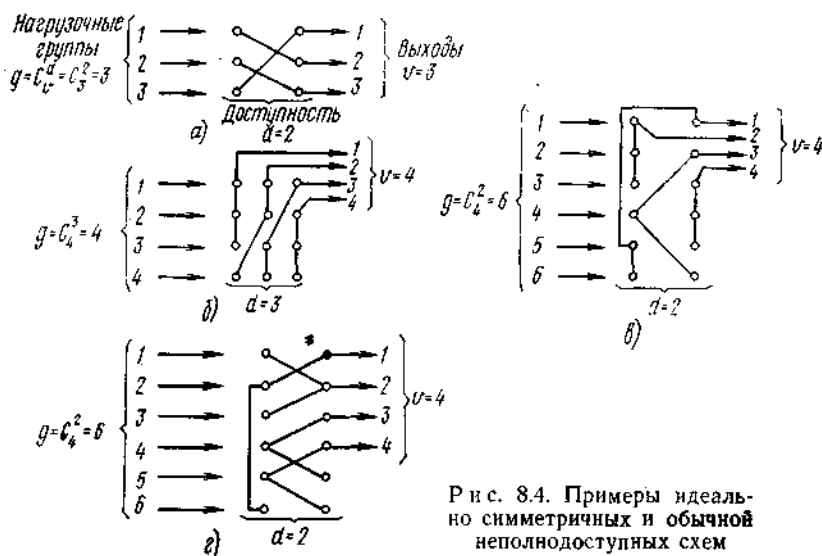


Рис. 8.4. Примеры идеально симметричных и обычной неполнодоступных схем

Каждая нагрузочная группа идеально симметричной НС пользуется своим набором выходов, отличающимся от других наборов, по крайней мере, одним выходом. С этой точки зрения неполнодоступная схема, приведенная на рис. 8.4г и имеющая  $g=C_v^d=C_4^2=6$  нагрузочных групп, не является идеально симметричной, так как нагрузочные группы 4 и 5 имеют доступ к одному и тому же набору выходов 3 и 4.

Следует отметить, что в силу свойств идеально симметричной схемы при одинаковой нагрузке каждой нагрузочной группы и равновероятном случайном выборе свободного выхода использование каждого выхода (нагрузка, обслуженная каждым выходом) будет одинаковым. Поэтому вероятность потерь для каждой нагрузочной группы будет одна и та же. При применении коммутационных устройств, обеспечивающих упорядоченное искание, использование выходов идеально симметричной схемы может быть одинаковым лишь в том случае, если для каждого набора  $d$  выходов из  $v$  будет такое число групп, которое обеспечит любые  $d!$  перестановок этих выходов. Это позволит получить одинаковую нагрузку на каждый из выходов идеально симметричной НС.

При упорядоченном искании число нагрузочных групп будет равно

$$g = d! C_v^d. \quad (8.13)$$

Идеально симметричная неполнодоступная схема, как видно из (8.12) и (8.13), имеет большое число нагрузочных групп. Например, уже при емкости пучка  $v=10$  линий с доступностью  $d=4$  для равновероятного искания число нагрузочных групп в соответствии с (8.12) будет равно  $g=C_v^d=C_{10}^4=210$ . При упорядоченном искании число групп резко увеличивается и по (8.13) в рассматриваемом примере составит  $g=d! C_v^d = 4! C_{10}^4 = 5040$ .

Если учесть, что практически используемые схемы имеют значительно большие  $v$  и  $d$ , то становится очевидной невозможность практического применения идеально симметричных

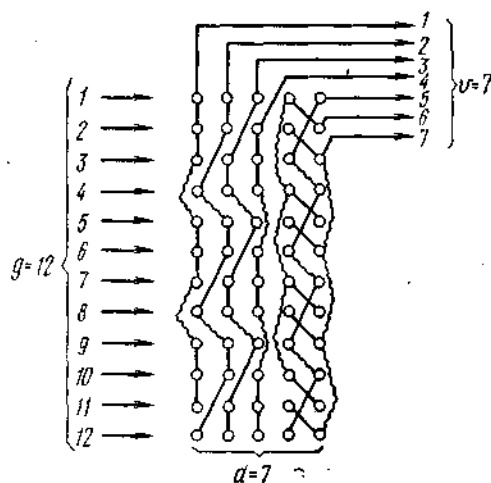


Рис. 8.5. Частично идеально симметричная неполнодоступная схема

НС. Как было указано ранее, эти схемы применяются лишь для оценки пропускной способности реальных НС.

Коэффициент уплотнения идеально симметричной схемы равен

$$\gamma = \frac{g^d}{v} = \frac{d}{v} C_v^d = C_{v-1}^{d-1} \tag{8.14}$$

для случая равновероятного искания и

$$\gamma = \frac{d}{v} d! C_v^d = d! C_{v-1}^{d-1} \tag{8.15}$$

для упорядоченного искания.

Из неполнодоступных схем идеально симметричного типа можно строить частично идеально симметричные НС. На рис. 8.5 приведена такая схема, которая построена с применением схем рис. 8.4 а, б. Она обладает некоторыми свойствами симметрии, позволяющими облегчить определение вероятности потерь. Число нагрузочных групп у частично идеально симметричной схемы меньше, чем у идеально симметричной при том же числе выходов и той же доступности.

### 8.7. Формула Эрланга для идеально симметричной неполнодоступной схемы

Рассмотрим следующую модель:

в выходы одновзвеньевой идеально симметричной неполнодоступной схемы с доступностью  $d$  включено  $v$  линий;

на входы схемы поступает простейший поток вызовов с параметром  $\lambda$ ;

длительность обслуживания является случайной величиной, распределенной по показательному закону  $F(t) = 1 - e^{-\beta t}$ ;

если вызов поступает от источника нагрузочной группы, в которой нет доступа к свободной линии (все  $d$  линий заняты), то вызов теряется. Требуется определить вероятность потерь.

Как было указано в гл. 4, для любого однородного транзитивного марковского процесса с конечным числом состояний переходные вероятности  $p_{ji}(t)$  того, что система, находившаяся в состоянии  $j$ , за время  $t$  перейдет в состояние  $i$ , имеют предел, не зависящий от начального состояния  $j$ . Если  $V(t)$  – число занятых линий в неполнодоступном пучке в момент времени  $t$ , то  $V(t)$  является случайным процессом с конечным числом состояний, поскольку число линий в НС конечно.

Процесс  $V(t)$  является марковским, так как будущее течение его не зависит от прошлого, если известно настоящее, т. е. известно  $V(t_0)$ . Кроме того, этот процесс является однородным, поскольку переходные вероятности  $p_{ji}(t)$  зависят лишь от длины интервала  $t = t_2 - t_1$  и не зависят от расположения интервала на оси времени (т. е. от  $t_2$  и  $t_1$ ). И, наконец,  $V(t)$  является транзитивным марковским процессом. Это следует из того, что возможен переход из любого состояния  $j$  в любое состояние  $i$  пучка. Иначе говоря, переходная вероятность  $p_{ji}(t)$  отлична от нуля. Последнее можно подтвердить следующими соображениями. Если разбить интервал  $t$  на две части, то вероятность перехода из состояния  $j$  в нулевое состояние за первую часть интервала при условии, что не поступит ни одного вызова и освободятся все  $j$  занятых линий пучка, будет отлична от нуля. Точно так же вероятность перехода системы из нулевого состояния в состояние  $i$  (если произойдет  $i$  занятий и ни одного освобождения) за вторую часть интервала будет также отлична от нуля. Переходная вероятность  $P_{ji}(t)$  не меньше произведения вероятностей переходов из состояния  $j$  в нулевое состояние и из нулевого состояния в состояние  $i$  и поэтому отлична от нуля.

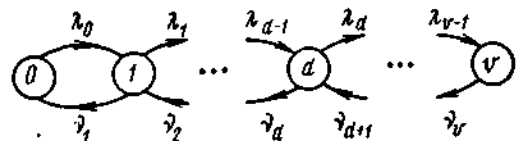


Рис. 8.6. Диаграмма состояний и переходов в идеально симметричной неполнодоступной схеме

В общем случае неполнодоступная схема, в выходы которой включено  $v$  линий, имеет  $2^v$  микросостояний. Для идеально симметричной схемы достаточно рассмотреть только  $v+1$  макросостояний аналогично тому, как это имеет место для полнодоступного пучка.

Запишем параметры потоков рождения и гибели (занятий и освобождений линий) для рассматриваемого процесса (рис. 8.6). Так как на входы схемы поступает простейший поток вызовов, то при  $i < d$   $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{d-1} = \lambda$ . Переход из состояния  $d$  в состояние  $d+1$  возможен только в том случае, если вызов поступает от источника нагрузочной группы, в которой не занята хотя бы одна из  $d$  доступных линий. Если же вызов поступит от источника нагрузочной группы, в которой заняты все  $d$  доступных линий, то вызов теряется. Обозначим через  $\gamma_i$  условную вероятность потери вызова при  $i$  занятых линиях. В идеально симметричной неполнодоступной схеме при  $i < d$   $\gamma_i = 0$ , а при  $i \geq d$   $\gamma_i > 0$ . Тогда вероятность того, что в состоянии  $i$  поступивший вызов займет свободную линию, будет равна  $1 - \gamma_i$ .

Следовательно, для  $i \geq d$   $\lambda_i = \lambda(1 - \gamma_i)$ . Таким образом,

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda, & 0 \leq i < d; \\ \lambda(1 - \gamma_i), & d \leq i \leq v-1. \end{cases} \quad (8.16)$$

Параметр потока освобождений

$$\nu_i = i\beta, \quad 1 \leq i \leq v \quad (8.17)$$

По аналогии с (4.12) при конечном числе состояний стационарные вероятности состояний определяются следующими выражениями:

$$p_0 = \left[ \sum_{i=0}^v \frac{\prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k}{\prod_{k=1}^i \nu_k} \right]^{-1}; \quad p_i = \frac{\left( \prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k \right) / \left( \prod_{k=1}^i \nu_k \right)}{\sum_{j=0}^v \left( \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k \right) / \left( \prod_{k=1}^j \nu_k \right)}, \quad 1 \leq i \leq v. \quad (8.18)$$

Подставляя (8.16) и (8.17) в (8.18) и учитывая, что для  $i < d$   $\gamma_i = 0$ , получим

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \left[ \sum_{i=0}^v \frac{\lambda^i \prod_{k=d}^{i-1} (1 - \gamma_k)}{i! \beta^i} \right]^{-1} = \left[ \sum_{i=0}^v \frac{y^i \prod_{k=d}^{i-1} (1 - \gamma_k)}{i!} \right]^{-1}; \\ p_i &= \frac{\frac{y^i \prod_{k=d}^{i-1} (1 - \gamma_k)}{i!}}{\sum_{j=0}^v \frac{y^j \prod_{k=d}^{j-1} (1 - \gamma_k)}{j!}}, \quad 1 \leq i \leq v. \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

Для получения выражения для вероятности потерь воспользуемся формулой полной вероятности:

$$p = \sum_{i=0}^v \gamma_i p_i.$$

Так как при  $i < d$   $\gamma_i = 0$ , то

$$p = \sum_{i=d}^v \gamma_i p_i. \quad (8.20)$$

Подставляя в (8.20) выражение для  $p_i$  из (8.19), получим

$$p = \frac{\sum_{i=d}^v \gamma_i \frac{y^i}{i!} \prod_{k=d}^{i-1} (1 - \gamma_k)}{\sum_{j=0}^v \frac{y^j}{j!} \prod_{k=d}^{j-1} (1 - \gamma_k)}. \quad (8.21)$$

В (8.21)  $\prod_{k=d}^x (1 - \gamma_k) = 1$  при  $x < d$ . Для того чтобы воспользоваться (8.21), необходимо вычислить  $\gamma_i$ .

В общем случае для произвольной НС условные вероятности  $\gamma_i$  зависят не только от числа  $i$  занятых выходов, но и от интенсивности поступающей нагрузки, структуры НС и алгоритма установления соединения. Для практически используемых НС определение условных вероятностей  $\gamma_i$  представляет собой сложную комбинаторную задачу. Определение всех  $\gamma_i$  в данном случае практически невозможно из-за большого числа состояний системы.

Особое место среди НС занимают идеально симметричные неполнодоступные схемы, так как в этих схемах число нагрузочных групп  $g = C_v^d$  и занятие  $d$  фиксированных линий блокирует одну определенную нагрузочную группу ( $C_d^d = 1$ ).

Определим для идеально симметричной схемы число нагрузочных групп, блокируемых в состоянии  $i$  занятых выходов, если  $i \geq d$ . Очевидно, что число заблокированных групп равно числу способов выбора  $d$  выходов из  $i$  занятых выходов, т. е.  $C_i^d$ . Следовательно, условная вероятность того, что при  $i$  занятых выходах идеально симметричной НС поступающий вызов попадает в заблокированную группу, равна отношению числа заблокированных групп к общему числу групп. Поэтому условная вероятность блокировки  $\gamma_i$  будет равна

$$\gamma_i = C_i^d / C_v^d. \quad (8.22)$$

Соотношение (8.22) справедливо, если возможные размещения свободных и занятых линий равновероятны, что имеет место в силу симметрии идеальной НС. Подставляя выражение для  $\gamma_i$  в формулу для потерь (8.21), получим

$$p = \frac{\sum_{i=d}^v \frac{C_i^d}{C_v^d} \frac{y^i}{i!} \prod_{k=d}^{i-1} \left(1 - \frac{C_k^d}{C_v^d}\right)}{\sum_{j=0}^v \frac{y^j}{j!} \prod_{k=d}^{j-1} \left(1 - \frac{C_k^d}{C_v^d}\right)}. \quad (8.23)$$

Эта формула называется формулой Эрланга для идеально симметричной неполнодоступной схемы. Иногда ее называют *третьей формулой Эрланга* и обозначают  $B_{v,d}(y)$ . Формула (8.23) табулирована [30].

## 8.8. Априорные методы определения потерь в неполнодоступных схемах

**Постановка задачи.** При проектировании объема коммутационного оборудования исходными данными являются интенсивность телефонной нагрузки, подлежащей обслуживанию, и допустимая величина потерь, определяющая качество обслуживания. По этим данным требуется определить число соединительных устройств, которые могут обслужить заданную нагрузку с требуемым качеством, и построить схему соединения, т. е. найти значения структурных параметров схемы. Выбранная структура схемы должна обеспечивать обслуживание нагрузки с заданным качеством при минимальном числе соединительных устройств.

Обе задачи, возникающие при проектировании коммутационного оборудования, – выбор схемы включения и определение числа соединительных устройств – взаимно связаны между собой и являются частями одной общей задачи определения минимального объема оборудования. Сложность решения этой общей задачи заставляет делить ее на две отдельные, из которых первая рассмотрена в парагр. 8.3 и 8.4. Решение второй задачи обычно ищут в

виде  $p=f(y, v, d, g, СП)$ , т. е. стремятся определить вероятность потерь  $p$  как функцию интенсивности нагрузки  $y$ , числа приборов  $v$ , доступности  $d$ , числа нагрузочных групп  $g$  и других структурных параметров (СП).

Для облегчения задачи считают структурные параметры схемы заданными. В этом случае отыскивается соотношение типа

$$p = f_{g, СП}(y, v, d). \quad (8.24)$$

Точное решение данной задачи имеется лишь для идеально симметричных НС и малых неполнодоступных схем, когда возможно решение системы уравнений для вероятностей состояний. Можно получить также приближенную оценку вероятности с требуемой степенью точности, если воспользоваться методом статистического моделирования на ЭВМ или моделированием на специализированных машинах телефонной нагрузки. Для инженерной практики проектирования перечисленные способы подсчета потерь в большинстве случаев неудобны.

Для подсчета потерь в неполнодоступном пучке имеются достаточно простые приближенные способы, которые отражают лишь основные закономерности функции (8.24), учитывая структуру с помощью только одного параметра  $d$ . Данные методы основаны на априорных предположениях о распределении вероятностей занятия линий в неполнодоступном пучке, поэтому назовем их *априорными*. Основным недостатком таких методов является тот факт, что оценить погрешность результатов, полученных с их помощью, можно только экспериментальной проверкой или применением точных методов расчета.

Рассмотрим несколько приближенных априорных методов определения вероятности потерь в неполнодоступном пучке.

**Упрощенный метод Эрланга.** Если  $y$  – интенсивность нагрузки, поступающей на неполнодоступный пучок соединительных устройств,  $v$  – число соединительных устройств, обслуживающих эту нагрузку,  $d$  – доступность и  $p$  – вероятность потерь, то при малой вероятности потерь средняя величина интенсивности нагрузки, обслуженной одним соединительным устройством, будет примерно равна  $y/v$ .

Вероятность  $H_1$  занятости определенного (точно указанного) соединительного устройства можно принять равной средней величине интенсивности нагрузки, обслуженной этим устройством, т. е.  $H_1 = y/v$ . Если события занятости приборов в неполнодоступном пучке считать независимыми, то вероятность занятости  $d$  определенных устройств будет равна  $H_d = H_1^d = (y/v)^d$ . Эта вероятность принимается за вероятность потерь, т. е.

$$p = (y/v)^d. \quad (8.25)$$

Соотношение (8.25) является весьма простой зависимостью типа (8.24). Из него в явном виде можно получить выражения для  $y$  и  $v$ :

$$y = v \sqrt[d]{p}; \quad v = y / \sqrt[d]{p}. \quad (8.26)$$

Приведенные рассуждения равносильны априорному утверждению справедливости распределения Бернулли для описания процесса занятия соединительных устройств в неполнодоступном пучке. Формулы (8.25) и (8.26) могут дать лишь грубое приближение для искомых величин и представляют интерес только в случае качественной оценки основных зависимостей между  $p$ ,  $v$ ,  $y$  и  $d$ .

**Метод Лотце – Бабицкого.** Предположим, что процесс занятия соединительных устройств в неполнодоступном пучке можно описать с помощью распределения Эрланга, полученного им для вероятности занятия любых  $i$  линий в полнодоступном пучке. Для полнодоступного пучка, состоящего из  $v$  линий, при интенсивности поступающей нагрузки  $y$  оно имеет вид

$$E_{i,v}(y) = \frac{y^i/i!}{\sum_{j=0}^v (y^j/j!)} \quad (8.27)$$

В этом случае вероятность занятия  $i$  фиксированных соединительных устройств в полностью доступном пучке при тех же значениях числа приборов и нагрузки будет равна

$$H_{i,v}(y) = E_{v,v}(y)/E_{v-v-i}(y) = E_v(y)/E_{v-i}(y).$$

Тогда, считая, что вероятность потерь в недоступном пучке равна вероятности занятия  $d$  определенных устройств, получим для нее следующее соотношение:

$$p = H_{d,v}(y) = E_v(y)/E_{v-d}(y). \quad (8.28)$$

Формула (8.28) была предложена К. Пальмом в 1943 г. и использовалась К. Якобеусом в 1947 г. для определения потерь в двухзвеньевых схемах. И. А. Бабицкий в 1956 г. использовал эту формулу для определения потерь в ступенчатых НС и привел таблицы для некоторых значений параметров ступенчатых схем.

Результаты вычислений потерь, полученные по формуле Пальма–Якобеуса [см. (8.28)], хорошо согласуются с результатами статистического моделирования при малых значениях потерь. Для более точного соответствия значений потерь, вычисленных по данной формуле в широком диапазоне, в том числе и при больших потерях, А. Лотце предложил модификацию указанной формулы. В модифицированной формуле Пальма – Якобеуса (сокращенно формуле МПЯ) взамен реально поступающей на недоступную схему нагрузки  $y$  используется некоторая фиктивная поступающая нагрузка  $y_\phi$ , которая обеспечивает имеющую место в НС обслуженную нагрузку  $y_0$  при потерях, характерных для полностью доступного пучка.

Формула МПЯ, таким образом, имеет вид

$$p = H_{d,v}(y_\phi) = E_v(y_\phi)/E_{v-d}(y_\phi). \quad (8.29)$$

Для заданных  $v$  и  $y_0$  фиктивная нагрузка  $y_\phi$  определяется следующим соотношением:

$$y_\phi = y_0/[1 - E_v(y_\phi)]. \quad (8.30)$$

Реально поступающая на НС нагрузка  $y$  может быть получена из соотношения

$$y = y_0/(1 - p). \quad (8.31)$$

Таким образом, реально поступающая нагрузка  $y$  обеспечивает обслуженную нагрузку  $y_0$  в недоступной схеме, состоящей из  $v$  линий при доступности  $d$ , а фиктивная поступающая нагрузка  $y_\phi$  создает ту же обслуженную нагрузку  $y_0$  в полностью доступном пучке из  $v$  линий ( $d=v$ ).

Формула МПЯ совместно с соотношениями (8.30) и (8.31) обеспечивает достаточную точность при определении потерь в НС в широком диапазоне потерь. Это подтверждено многочисленными результатами статистического моделирования в работах А. Лотце и его сотрудников. Ими получены таблицы значений потерь по формуле МПЯ для диапазона значений доступности  $d=2 \div 60$ , числа приборов  $v=1 \div 200$  и потерь  $p=0,001 \div 0,5$ .

**Метод О'Делла.** По этому методу нагрузка  $y_0$ , обслуженная недоступным пучком из  $v$  соединительных устройств при вероятности потерь  $p$ , определяется как сумма нагрузок, обслуженных полностью доступным пучком, состоящим из  $d$  устройств, и недоступным пучком, содержащим  $v-d$  соединительных устройств.

Считается, что каждая линия полностью доступного пучка

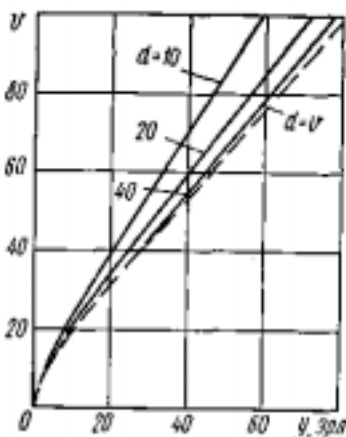


Рис. 8.7. Кривые зависимости числа выходов НС от интенсивности нагрузки для различных значений доступности при фиксированных потерях

обслужит нагрузку

$$y_{min} = y_d/d, \quad (3.32)$$

где  $y_d$  – нагрузка, обслуженная всеми  $d$  линиями полнодоступного пучка при заданных потерях  $p$ .

Относительно второго (неполнодоступного) пучка предполагается, что каждая из  $v-d$  его линий пропустит нагрузку, лежащую между  $y_{min}$  в соответствии с соотношением (8.32) и  $y_{max}$ , определяемой (8.25), т. е.

$$y_{max} = \sqrt[d]{p}. \quad (8.33)$$

Отметим, что средняя пропускная способность каждой линии, определяемая (8.33), является предельной величиной удельной пропускной способности в идеально симметричной НС при неограниченно большом числе линий ( $v \rightarrow \infty$ ). В соответствии со сказанным

$$y_0 = y_d + (v-d) [y_d/d + K(\sqrt[d]{p} - y_d/d)]. \quad (8.34)$$

Коэффициент  $K \leq 1$  в (8.34) определяет величину надбавки пропускной способности линий второго (неполнодоступного) пучка по сравнению с первым (полнодоступным).

Измерения, проведенные Британским почтовым ведомством, показали, что для ступенчатых НС в случае, когда поступающая нагрузка образуется простейшим потоком, для которого отношение дисперсии к среднему значению равно единице ( $\sigma^2/y=1$ ), следует принимать значение  $K=0,53$ . При поступлении выровненной нагрузки, т. е. нагрузки, образуемой потоками вызовов, для которых  $(\sigma^2/y) < 1$ , можно полагать  $K=1$ . В этом случае

$$y_0 = y_d + (v-d) \sqrt[d]{p}. \quad (8.35)$$

Из соотношения (8.35) можно получить выражения для  $v$  и  $p$  в следующем виде:

$$v = d + (y_0 - y_d) / \sqrt[d]{p}; \quad p = [(y_0 - y_d) / (v - d)]^d. \quad (8.36); (8.37)$$

Рис. 8.8. Кривые зависимости числа выходов НС от нагрузки для различных значений потерь при фиксированной доступности

Формулами (8.35) – (8.37) рекомендуется пользоваться для расчета числа соединительных устройств на всех ступенях искания, кроме ПИ. Рекомендация мотивируется тем, что в этих случаях приборы обслуживают поток вызовов, преобразованный (выровненный) на предыдущих ступенях искания, для которого справедливы полученные формулы. Для ПИ, обслуживающих непреобразованный поток вызовов (простейший поток), предлагается использование формул, получающихся из соотношения (8.34) при  $K=0,53$ .

## 8.9. Инженерный расчет неполнодоступных схем

С целью упрощения расчетов обычно стремятся свести их процедуру к использованию таблиц, кривых или простейших формул. Формулы (8.25) и (8.26) являются весьма грубым описанием существа дела и для инженерных расчетов обычно не используются. Результаты вычислений по (8.29) – (8.31) приведены в литературе в виде таблиц и используются для расчетов равномерных НС.

При фиксированных значениях  $d$  и  $p$  ф-ла (8.36) и аналогичная формула при  $K=0,53$  приобретает вид линейной зависимости числа соединительных устройств от интенсивности нагрузки:

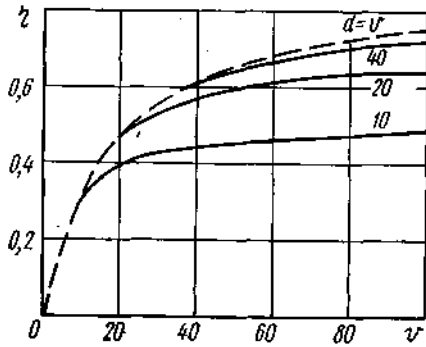


Рис. 8.9. Кривые зависимости среднего использования выхода НС от общего числа выходов при различной доступности и фиксированных потерях

$$v = \alpha y + \beta, \quad (8.38)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – постоянные коэффициенты при заданных  $d$  и  $p$  и зависят от этих параметров. Таблица для  $\alpha$  и  $\beta$  приведена в [12].

Формула типа (8.38) удобна при проведении инженерных расчетов, так как с помощью небольшой таблицы коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  можно охватить широкую область изменения величин  $d$  и  $p$ , необходимую при проведении расчетов.

Графики зависимости числа приборов в неполнодоступном пучке от нагрузки  $v=f_d(y)$  при постоянных потерях  $p = 0,005$  для трех значений доступности  $d$  приведены на рис. 8.7. Зависимость имеет

такой вид, что, начиная с некоторого значения  $y$ , она может быть аппроксимирована прямой линией, как это делается в (8.38). Из рис. 8.7 видно, что с увеличением доступности уменьшается число приборов, требуемых для обслуживания заданной нагрузки. Наименьшее число приборов необходимо при полнодоступном включении (нижняя кривая).

На рис. 8.8 показана зависимость числа приборов в неполнодоступном пучке от нагрузки  $v=f_p(y)$  при постоянной доступности  $d=10$  для трех значений потерь  $p$ . Из рассмотрения этого семейства кривых можно сделать вывод, что с повышением качества обслуживания (уменьшением величины потерь) требуется больше приборов для обслуживания заданной нагрузки.

Характер изменения среднего использования соединительных устройств в неполнодоступном пучке при  $p=0,001$  в зависимости от емкости пучка показан на рис. 8.9 для трех значений доступности в сравнении со средним использованием в полнодоступном пучке (верхняя кривая). Кривые показывают, что среднее использование соединительных устройств растет с ростом емкости пучка  $v$  и увеличением доступности  $d$ .

### Задача.

*Рассчитать:* число линий в неполнодоступном пучке с доступностью  $d=10$ , необходимых для обслуживания интенсивности поступающей на ступень ШГИ нагрузки ( $y=10$  Эрл при величине потерь  $p=0,005$ ). Расчет производить упрощенным методом Эрланга, методом Лотце–Бабицкого по формуле Пальма–Якобеуса, методом О’Делла.

*Решение 1.* Упрощенный метод Эрланга:

$$v = y / \sqrt{p} = 10 / \sqrt{0,005} = 10 / 0,059 = 17 \text{ линий.}$$

2. Метод Лотце–Бабицкого, формула Пальма–Якобеуса:

$$p = E_v(y) / E_{v-d}(y).$$

Из этой формулы число линий в явном виде не выражается, а определяется методом последовательных приближений. Пусть  $v=17$ , тогда

$$p = E_{17}(10) / E_{17-10}(10) = 0,012949 / 0,409041 = 0,0316.$$

Так как потери превышают допустимую норму, то число линий необходимо увеличить. При  $v=20$   $p=0,0087$ ; при  $v=21$   $p=0,0054 \approx 0,005$ . Таким образом,  $v=21$ .

3. Метод О’Делла:

$$v = d + (y_0 - y_d) / \sqrt{p}.$$

Нагрузка, обслуженная всеми линиями неполнодоступного пучка,  $y_0 = y(1-p) = 10 \times (1-0,005) = 9,95$  Эрл.

Нагрузка, поступающая на  $d$  линий полнодоступного пучка при заданной норме потерь  $p=0,005$ , определяется по таблицам первой формулы Эрланга:  $y_d = d = 3,96$  Эрл. Нагрузка, обслуженная  $d$  линиями полнодоступного пучка при  $p=0,005$ ,



$$y_d = y_{v=d} (1 - p) = 3,96 (1 - 0,005) = 3,93 \text{ Эрл};$$

$$v = 10 + (9,95 - 3,93) / \sqrt{0,005} = 20,2 \approx 21 \text{ линия}.$$

Из сравнения результатов расчета числа линий тремя методами следует, что приближенный метод Эрланга значительно занижает число линий по сравнению с методом Лотце–Бабицкого и методом О'Делла.

### Контрольные вопросы

1. Укажите основные особенности ступенчатой и равномерной неполнодоступных схем и их отличие.
2. Какими параметрами характеризуется структура ступенчатой НС?
3. Какими параметрами характеризуется структура равномерной НС?
4. Составьте матрицы связности для четвертого, шестого и девятого вариантов структуры шестигрупповой НС, приведенной на рис. 8.2, и сравните их.
5. Определите структурные параметры двухгрупповой ( $g=2$ ) ступенчатой НС на 14 выходов ( $v=14$ ) при доступности  $d=10$ .
6. Определите число возможных вариантов структуры неполнодоступной НС при  $d=10$ ,  $v=30$ ,  $g=6$ .
7. Определите структурные параметры четырехгрупповой равномерной НС при  $d=10$  и  $v=16$ .
8. Определите число нагрузочных групп идеально симметричной НС для случайного равновероятного исчисления при  $v=16$  и  $d=10$ .
9. Определите вероятность потерь в идеально симметричной НС с параметрами  $v=3$ ,  $d=2$  при интенсивности поступающей нагрузки  $\gamma=1$  Эрл.
10. Укажите, как зависит число выходов НС от доступности при заданных нагрузке и вероятности потерь.
11. Укажите, как зависит число выходов НС от качества обслуживания (вероятности потерь) при заданных нагрузке и доступности.
12. Изобразите характер зависимости среднего использования выхода НС от общего числа выходов при заданных доступности и вероятности потерь.

Звеньевые коммутационные системы

9.1. Общие сведения

Особенности звеньевых коммутационных схем заключаются в том, что в соединении между одним из входов и одним из выходов схемы кроме точек коммутации участвуют также промежуточные линии (ПЛ).

Рассмотрим двухзвеньевую схему, приведенную на рис. 9.1, у которой любой выход схемы доступен любому входу (полнодоступный пучок выходов). Схема изображена в общем виде и

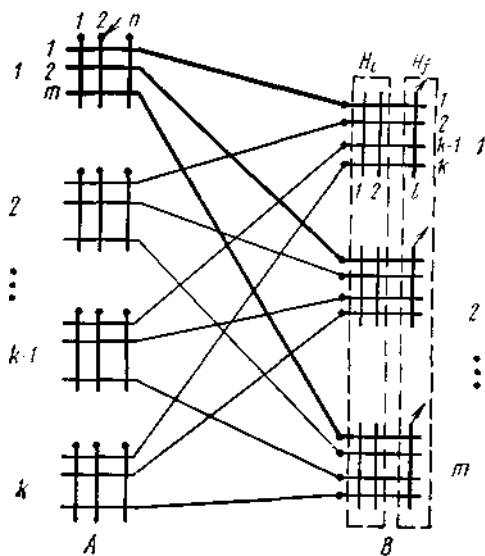


Рис. 9.1. Двухзвеньевая схема

втором звене на  $k$  входов и  $l$  выходов каждый. Выходы схемы разбиты на группы (направления). На рисунке показано два направления – направление  $H_i$ , к которому отнесены по два выхода в каждом коммутаторе второго звена и имеющее таким образом  $2m$  выходов, и направление  $H_j$ , имеющее  $m$  выходов (по одному выходу в каждом коммутаторе второго звена). В общем случае число выходов в каждом коммутаторе, отводимых для одного направления, может быть равно  $q$ , и тогда суммарное число выходов в направлении составит  $mq$ .

В простейших однозвеньевых коммутационных схемах с полнодоступным включением выходов, которые называют *коммутаторами*, обслуживание поступающего на вход вызова заключается в подключении к этому входу свободного выхода в одной точке коммутации (одно звено соединения). В

более сложных неполнодоступных схемах (см. рис. 8.1) при установлении соединения устанавливается путь, содержащий также только одно звено.

В двухзвеньевой коммутационной схеме для установления соединения входа с выходом требуются две точки коммутации и одна из промежуточных линий, и, таким образом, соединительный путь содержит два звена соединения – ПЛ и выход.

Коммутационные схемы, содержащие два и более звеньев в соединительном пути, называют *звеньевыми*. В общем случае звеньевая схема – это схема, имеющая входы, выходы, коммутаторы и промежуточные линии. Все эти элементы взаимно связаны между собой и образуют некоторую структуру, которая позволяет соединить вход с выходом, используя определенные промежуточные линии и точки коммутации, т. е. устанавливая соединительный путь между входом и выходом. Каждый соединительный путь в схеме можно задать упорядоченным набором промежуточных линий. При этом любые две соседние промежуточные линии соединительного пути могут быть соединены между собой в точке коммутации. Если все промежуточные линии и выход, составляющие соединительный путь, свободны, то и этот путь свободен. Соединительный путь считается занятым, если хотя бы одна из промежуточных линий или выход заняты.

Любая звеньевая схема имеет конечное число состояний, каждое из которых отличается комбинацией занятых входов, выходов и промежуточных линий.

По сравнению с однозвеньевыми полнодоступными схемами, рассмотренными в гл. 4–6, и однозвеньевыми неполнодоступными схемами, рассмотренными в гл. 8, звеньевые схемы имеют большее число состояний. Поэтому для звеньевых схем, представляющих практический интерес, система уравнений для вероятностей состояний во многих случаях не может быть решена, а в отдельных случаях не может быть даже выписана.

Исследование звеньевых схем сложно не только из-за их большого числа состояний. Дополнительные осложнения возникают также и из-за того, что между процессами,

происходящими в разных направлениях выходов звеньевой схемы, существует взаимная зависимость. Это можно уяснить, рассматривая схему на рис. 9.1. Для установления соединения к выходам направлений  $H_i$  и  $H_j$  используются одни и те же промежуточные линии. Поэтому занятие промежуточных линий для подключения к выходам одного направления изменяет вероятность занятия выходов другого направления.

Если для звеньевой схемы предположить, что существуют условные вероятности блокировки  $\gamma_i$ , которые зависят лишь от числа занятых выходов, то для простейшего потока вызовов и показательного распределения длительности занятия можно записать уравнения для вероятностей состояний и воспользоваться методом условных вероятностей, разработанным Г. П. Башариным. Однако в общем случае условные вероятности блокировки зависят не только от числа занятых выходов, но и от структуры схемы, поступающей нагрузки и алгоритма установления соединения, что усложняет задачи исследования звеньевой схемы. В связи с этим инженерный расчет звеньевых схем основывается на априорных предположениях относительно способа математического описания результатов воздействия поступающего потока вызовов на отдельные звенья соединения. Обычно предполагается, что процессы, протекающие в различных звеньях схемы, независимы и могут быть описаны каким-нибудь простым законом распределения; кроме того, используются и другие упрощающие предположения. Это облегчает решение задачи, однако вносит отклонение от истинных характеристик, имеющих место в процессе функционирования схемы.

В большинстве случаев нельзя заранее указать, в какой степени то или иное упрощающее предположение искажает истинную величину отыскиваемого показателя (например, вероятности потерь), поэтому для определения степени погрешности приближенных методов можно воспользоваться сравнением с результатами моделирования на ЭВМ. Поскольку наиболее простыми звеньевыми схемами являются схемы с двумя звеньями соединения, то в первую очередь изучим методы расчета потерь в таких схемах.

Из самых распространенных в настоящее время приближенных инженерных методов расчета двухзвеньевых схем рассмотрим два метода: комбинаторный метод Якобеуса и метод эффективной доступности. Сейчас существует тенденция разработки методов расчета числа соединительных устройств с использованием результатов статистического моделирования на ЭВМ. Полученные результаты, как правило, аппроксимируются какими-нибудь простыми функциональными зависимостями. Так как практически невозможно получить числовые данные для любых значений нагрузки и параметров структуры, которые могут встретиться при расчетах, то такого типа методы предполагают интерполяцию и экстраполяцию в области, где числовые данные не получены.

## 9.2. Комбинаторный метод. Полнодоступное включение выходов

Рассмотрим на примере односвязной двухзвеньевой схемы, приведенной на рис. 9.1, комбинаторный метод расчета, разработанный шведским ученым Якобеусом.

Число выходов из каждого коммутатора звена  $B$  этой схемы для направления  $H_j$  равно единице ( $q=1$ ). Будем считать, что к рассматриваемому моменту времени вызов поступил на один из входов схемы, к примеру на второй вход первого коммутатора.

Установление соединения через схему, т. е. между определенным входом и одним из выходов рассматриваемого направления  $H_j$ , заключается в использовании одной из свободных промежуточных линий и одного из свободных выходов требуемого направления, взаимно доступных друг другу. Для обслуживания поступившего вызова в рассматриваемом случае могут быть использованы  $m$  промежуточных линий и  $m$  выходов требуемого направления, которые выделены на рис. 9.1 жирными линиями. Соединение может быть установлено, если имеется пара свободных и взаимно доступных звеньев. Если такой пары нет, то наступают потери соединений.

Таким образом, потери возникают в трех случаях: 1) если заняты все промежуточные линии, которые могут быть использованы для поступившего вызова; 2) если заняты все выходы в требуемом направлении; 3) когда возникают неудачные комбинации свободных промежуточных линий и свободных выходов.

Если считать, что рассматриваемый вызов поступил на отмеченный вход первого коммутатора в момент, когда  $i$  промежуточных линий из  $m$ , подключенных к выходам данного коммутатора, заняты, то для подключения входа к одному из выходов требуемого направления могут быть использованы только оставшиеся  $m-i$  промежуточных линий. Если же выходы требуемого направления, соответствующие этим  $m-i$  линиям, заняты, то наступят потери. Это утверждение справедливо для любого  $i$ , лежащего в пределах  $0 \leq i \leq m$ , и охватывает два случая занятости: всех промежуточных линий ( $i = m$ ) и всех выходов в направлении ( $i=0$ ).

Если вероятность занятия любых  $i$  из  $m$  промежуточных линий, принадлежащих одному коммутатору первого звена, обозначить через  $W_i$ , а вероятность занятия определенных  $m-i$  выходов (соответствующих свободным промежуточным линиям) – через  $H_{m-i}$ , то в соответствии со сказанным можно записать следующее выражение для потерь<sup>1</sup>:

$$p = \sum_{i=0}^m W_i H_{m-i}. \quad (9.1)$$

Записанная формула справедлива при выполнении следующих двух предположений:

1. Независимость событий, описываемых вероятностями  $W_i$  и  $H_{m-i}$ . (Предположения являются условными, так как промежуточные линии и выходы занимают парами.)

2. Случайное (равновероятное) занятие промежуточных линий и выходов. При этом все вероятности занятия  $i$  промежуточных линий считаются в (9.1) равными между собой вне зависимости от того, какие  $i$  из  $m$  линий заняты. (При наличии определенного порядка занятия промежуточных линий это предположение несправедливо.)

Для подсчета потерь в соответствии с выражением (9.1) необходимо знать вероятности  $W_i$  и  $H_{m-i}$ , т. е. функции распределения вероятностей занятия промежуточных линий и выходов.

Комбинаторный метод Якобеуса предусматривает использование распределений Эрланга и Бернулли. При использовании распределения Эрланга вероятность занятия  $i$  любых соединительных устройств в пучке из  $m$  таких устройств при интенсивности нагрузки у Эрл на пучок принимается равной

$$E_{i,m}(y) = W_i = \frac{y^i / i!}{\sum_{j=0}^m (y^j / j!)}, \quad (9.2)$$

а вероятность занятия  $m-i$  фиксированных соединительных устройств в пучке из  $m$  устройств

$$H_{m-i,m}(y) = H_{m-i} = E_m(y) / E_i(y), \quad (9.3)$$

где выражение  $E_m(y)$  – это потери в полностью доступном пучке из  $m$  соединительных устройств при интенсивности нагрузки у Эрл на пучок, вычисленные по формуле Эрланга, т. е.

$$E_m(y) = \frac{y^m / m!}{\sum_{j=0}^m (y^j / j!)},$$

а  $E_i(y)$  – потери при той же интенсивности нагрузки в пучке из  $i$  соединительных устройств, т. е.

$$E_i(y) = \frac{y^i / i!}{\sum_{j=0}^i (y^j / j!)}.$$

При использовании распределения Бернулли (биномиальное распределение) вероятность

<sup>1</sup> Следует иметь в виду, что  $W_i$  и  $H_{m-i}$  зависят также от  $y$  и  $m$ , т. е.  $W_i = W_{m,i}(y)$ ;  $H_{m-i} = H_{m,m-i}(y)$ .

$W_i$  занятия  $i$  любых соединительных устройств в пучке из  $m$  устройств при интенсивности нагрузки у Эрл на пучок принимается равной

$$W_{i, m}(y) = W_i = C_m^i \eta^i (1 - \eta)^{m-i}, \quad (9.4)$$

где  $C_m^i$  – число сочетаний из  $m$  по  $i$ ;  $\eta$  – средняя нагрузка, обслуженная одним соединительным устройством в пучке.

Вероятность  $H_{m-i}$  занятия  $m-i$  фиксированных соединительных устройств при тех же условиях принимается равной

$$H_{m-i, m}(y) = H_{m-i} = \eta^{m-i}. \quad (9.5)$$

Распределение Эрланга предполагает неограниченное число источников нагрузки, а (9.2) и (9.3) основываются на интенсивности поступающей нагрузки. Распределение Бернулли предполагает ограниченное число источников нагрузки, не превышающее число соединительных устройств, а в (9.4) и (9.5) входит обслуженная нагрузка.

Естественно, что величина вероятности потерь при использовании различных распределений получится различной. Метод рекомендует принимать распределение Эрланга при определении вероятности занятия тех соединительных устройств, для которых число источников нагрузки больше числа соединительных устройств. Использование распределения Бернулли считается целесообразным при числе источников нагрузки, примерно равном числу соединительных устройств, для которых определяются вероятности занятия.

Расчетные формулы для определения вероятности потерь в двухзвеневой схеме можно получить, если в общее выражение для потерь (9.1) подставить выражения для  $W_i$  и  $H_{m-i}$ .

### 9.3. Потери в двухзвеневых схемах при отсутствии сжатия и расширения

При отсутствии сжатия (концентрации) и расширения число входов в каждый коммутатор первого звена  $n$  равно числу выходов  $m$  в каждом из этих коммутаторов. В данном случае для промежуточных линий, в соответствии с рассматриваемым методом, можно принять распределение Бернулли, так как число источников телефонной нагрузки, которыми являются входы, равно числу соединительных устройств (промежуточных линий). Если для выходов двухзвеневой схемы можно также принять распределение Бернулли, что может быть справедливым при небольшом числе коммутаторов первого звена, тогда  $W_i$  и  $H_{m-i}$  будут иметь следующие выражения:

относя  $W_i$  к промежуточным линиям, получим  $W_i = C_m^i b^i (1-b)^{m-i}$  где  $C_m^i$  – число сочетаний из  $m$  по  $i$ ;  $b$  – средняя интенсивность нагрузки, обслуженной одной промежуточной линией, Эрл;

для вероятности  $H_{m-i}$ , отнесенной к выходам, выражение имеет вид  $H_{m-i} = c^{m-i}$ , где  $c$  – средняя интенсивность нагрузки, обслуженной одним выходом рассматриваемого направления, Эрл.

Подставляя значения  $W_i$  и  $H_{m-i}$  в (9.1), получаем

$$p = \sum_{i=0}^m C_m^i b^i (1-b)^{m-i} c^{m-i}.$$

Учитывая формулу бинома Ньютона, получаем

$$p = (b + c - bc)^m. \quad (9.6)$$

Если число коммутаторов  $k$  в первом звене велико, тогда для выходов рассматриваемого направления целесообразно принять распределение Эрланга. Относя  $W_i$  к направлению, а  $H_{m-i}$  к промежуточным линиям, получим

$$W_i = \frac{y^i / i!}{\sum_{j=0}^m (y^j / j!)} \text{ и } H_{m-i} = b^{m-i},$$

где  $y$  – интенсивность поступающей нагрузки на направление, Эрл. Подставляя эти выражения в (9.1), получаем

$$p = \sum_{i=0}^m \frac{y^i / i!}{\sum_{j=0}^m (y^j / j!)} b^{m-i}.$$

Вынося затем несуммирующиеся множители за знак суммы, находим

$$p = \frac{b^m}{\sum_{j=0}^m (y^j / j!)} \sum_{i=0}^m \frac{(y/b)^i}{i!}.$$

Используя указанное ранее обозначение для первой формулы Эрланга, получаем выражение для потерь в рассматриваемом случае:

$$p = \frac{E_m(y)}{E_m(y/b)}. \quad (9.7)$$

Если для образования направления отводится в каждом коммутаторе второго звена  $q$  выходов, то для случая, когда и занятие выходов и занятие промежуточных линий можно описать распределением Бернулли, будем иметь  $W_i = C_m^i b^i (1-b)^{m-i}$ ;  $H_{(m-i)q} = c^{(m-i)q}$ . Подставляя эти выражения в (9.1) и учитывая формулу бинома Ньютона, получаем

$$p = (v + c^q - bc^q)^m. \quad (9.8)$$

Если занятие выходов подчиняется распределению Эрланга, а занятие промежуточных линий – распределению Бернулли, то в этом случае выражение для потерь при некоторых дополнительных ограничениях может быть преобразовано к виду

$$p = \frac{E_{mq}(y)}{E_{mq}(y/b)}. \quad (9.9)$$

В соответствии с рассматриваемым методом данная формула может применяться и для дробных значений  $q$ .

Следует отметить, что выражения (9.8) и (9.9) имеют более общий вид и включают в себя соответственно (9.6) и (9.7), которые можно получить из первых двух, полагая  $q=1$ .

#### 9.4. Потери в двухзвеньевых схемах при наличии сжатия или расширения

В схемах со *сжатием* (концентрацией) число входов  $n$  в коммутатор первого звена больше числа выходов  $m$  из этого коммутатора. В таких схемах потери возникают из-за наличия неудачных сочетаний занятых промежуточных линий и выходов, а также при поступлении на входы коммутатора первого звена более  $m$  вызовов.

Если при  $q \geq 1$  и распределении Бернулли для промежуточных линий и выходов  $W_i$  отнести к промежуточным линиям, а  $H_{(m-i)q}$  – к выходам рассматриваемого направления, то можно записать  $W_i = C_n^i a^i (1-a)^{n-i}$  и  $H_{(m-i)q} = c^{(m-i)q}$ , где  $a$  – средняя интенсивность нагрузки, обслуженной одним входом коммутатора первого звена. Потери для данного случая определяются следующим образом:

$$p = \sum_{i=0}^m W_i H_{(m-i)q} + \sum_{i=m+1}^n W_i = \sum_{i=0}^m C_n^i a^i (1-a)^{n-i} c^{(m-i)q} +$$

$$+ \sum_{i=m+1}^n C_n^i a^i (1-a)^{n-i}.$$

В этом выражении первое слагаемое учитывает потери из-за неудачных сочетаний при занятиях промежуточных линий и выходов, а второе – потери за счет поступления более  $m$

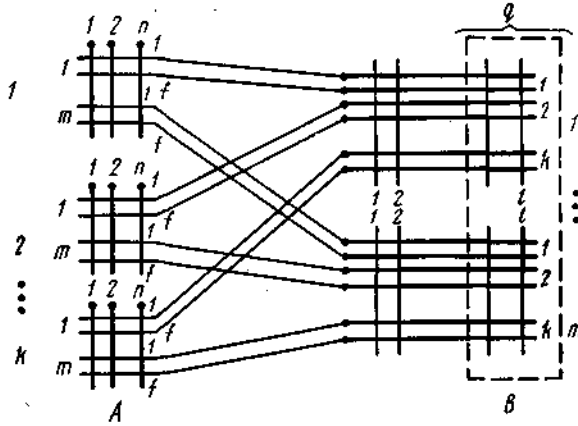


Рис. 9.2. Многосвязная двухзвеньевая схема

Если искание свободных выходов в схемах с  $q > 1$  производить в два этапа, т. е. таким образом, чтобы в первую очередь занимались все выходы в  $q-1$  столбцах (группах) выходов и только после этого занимались бы выходы последнего столбца (группы)  $q$ , то можно приближенно выразить потери для схем с концентрацией при  $q \geq 1$ :

$$p = b^m + (b + c - bc)^{mq}, \quad (9.10)$$

где  $b = (n/m)a$ .

Для случая неупорядоченного занятия выходов в направлении достаточно точные результаты дает выражение (9.8).

Если для первого звена сохранить распределение Бернулли, а для второго звена принять распределение Эрланга, то для двухэтапного искания можно получить следующее приближенное выражение для потерь:

$$p = b^m + \frac{E_{mq}(y)}{E_{mq}(y/b)}. \quad (9.11)$$

В схемах с расширением число входов  $n$  в каждый коммутатор первого звена меньше числа выходов  $m$  из коммутатора. В такой схеме число одновременных вызовов не превышает  $n$ , а следовательно, меньше  $m$ , поэтому потери могут иметь место только за счет неудачных сочетаний занятых промежуточных линий и выходов. Если и для промежуточных линий и для выходов справедливо распределение Бернулли, то при  $q \geq 1$  и  $W_i$ , отнесенном к промежуточным линиям, можно записать  $W_i = C_n^i a^i (1-a)^{n-i}$ ;  $H_{(m-i)q} = c^{(m-i)q}$ . Подставляя значения этих вероятностей в (9.1), получаем

$$p = \sum_{i=0}^n C_n^i a^i (1-a)^{n-i} c^{(m-i)q} = \sum_{i=0}^n C_n^i a^i (1-a)^{n-i} (c^q)^{n-i} (c^q)^{m-n}.$$

Учитывая формулу бинома Ньютона, получаем окончательное выражение для потерь:

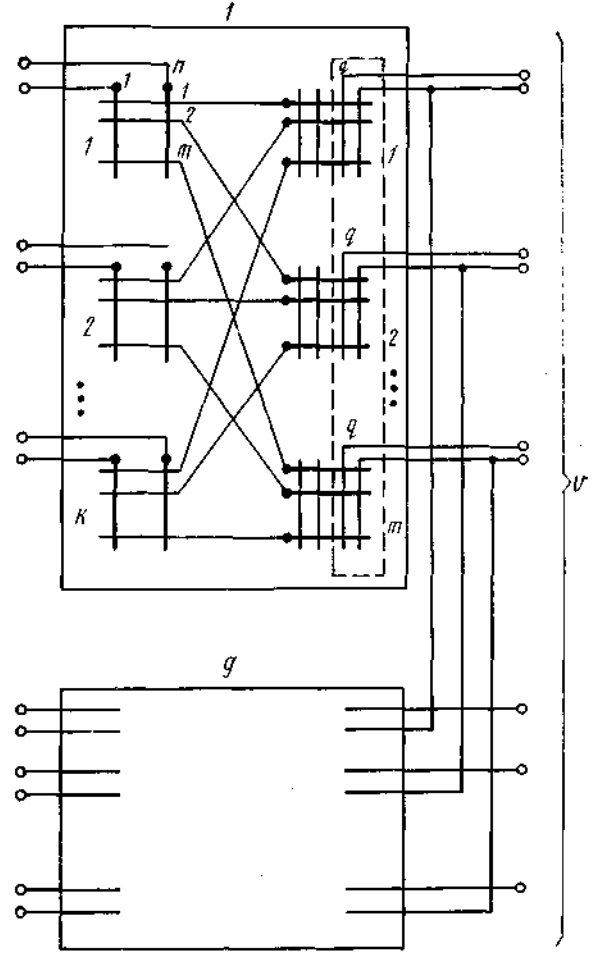


Рис. 9.3. Неполнодоступное включение выходов двухзвеньевых схем

$$p = c^q (m-n) (a + c^q - ac^q)^n. \quad (9.12)$$

Если, сохранив распределение Бернулли для промежуточных линий, принять распределение Эрланга для выходов, то для вероятности потерь в данном случае может быть получено выражение

$$p = \frac{E_{mq}(y)}{E_{nq}(y/a)}. \quad (9.13)$$

Рассмотренные выше схемы относятся к случаю односвязного двухзвеньевого включения, при котором один коммутатор первого звена соединен с коммутатором второго звена одной промежуточной линией. При наличии  $f$  соединительных путей между парой коммутаторов первого и второго звеньев многосвязная двухзвеньевая схема будет иметь вид, показанный на рис. 9.2.

Для многосвязных двухзвеньевых схем в соответствии с комбинаторным методом считаются справедливыми все полученные выше формулы, если  $a$  заменить на  $a^f$ , а  $b$  заменить на  $b^f$ .

### 9.5. Двухзвеньевые неполнодоступные схемы

В парагр. 9.1–9.4 рассматривались двухзвеньевые схемы, у которых число соединительных устройств  $v$ , требуемых для обслуживания телефонной нагрузки в каком-то направлении, не превышало числа  $mq$ , т. е. числа выходов, отводимых в схеме для рассматриваемого направления (максимальная доступность). Однако если приведенные в предыдущем параграфе схемы рассматривать как схемы отдельных блоков искания, то может оказаться, что для целой ступени искания, содержащей несколько указанных блоков, в данном направлении требуется такое число выходов для включения приборов последующей ступени искания, которое превышает число выходов, отведенных для этого направления в каждом блоке. В этом случае приборы последующей ступени искания включаются неполнодоступным пучком по отношению к выходам каждого блока в отдельности.

На рис. 9.3 приведена двухзвеньевая неполнодоступная схема, содержащая  $g$  двухзвеньевых схем (блоков), из которых показана первая и последняя. Если число выходов из каждого блока равно  $mq$ , а число таких блоков  $g$ , то из общего числа выходов всех блоков, равного  $gmq$ , путем запараллеливаний получают число  $v$  выходов, необходимое для включения приборов последующей ступени искания. При этом справедливо следующее неравенство:  $mq < v < gmq$ . Из  $v$  выходов к последующей ступени искания любому входу в любой блок искания доступны только  $mq$  выходов.

Комбинаторный метод Якобеуса для расчета числа соединительных устройств в таких двухзвеньевых неполнодоступных схемах основывается на идее О'Делла, изложенной в гл. 8. Эта идея заключается в том, что средняя интенсивность нагрузки, обслуживаемой каждым соединительным устройством при неполнодоступном однозвеньевом включении в пучке из  $v$  таких устройств, обслуживающих интенсивность поступающей нагрузки  $y$  при доступности  $d$  с потерями  $p$ , принимается лежащей в промежутке между минимальным значением  $y_d/d$ , где  $y_d$  определяется из соотношения

$$p = E_d(y_d), \quad (9.14)$$

и максимальным значением  $\sqrt[d]{p}$ . Минимальное значение средней пропускной способности определяется для случая  $v=d$ . В данном случае неполнодоступное включение превращается в полнодоступное и при потерях  $p$  пучок в  $d$  соединительных устройств обслужит нагрузку, которую при малых потерях можно приближенно принять равной  $y_d$  в соответствии с формулой Эрланга (9.14) для полнодоступного включения.

Максимальное значение пропускной способности определяется из формулы Эрланга для ступенчатого включения, имеющей вид

$$p = (y/v)^d, \quad (9.15)$$



где  $y \approx y_0$  – нагрузка, обслуживаемая пучком  $v$  приборов при ступенчатом включении с доступностью  $d$  и потерях  $p$ . Каждый прибор может обслужить в среднем нагрузку, определяемую (9.15),  $c_{\max} = y/v = \sqrt[q]{p}$  лишь в случае бесконечно большого числа  $v$  приборов в пучке. В соответствии с идеей О'Делла из всех  $v$  соединительных устройств пучка при ступенчатом включении каждый из  $d$  приборов обслуживает среднюю нагрузку, равную  $y_d/d$ , а остальные  $v-d$  приборов обслуживают каждый в среднем  $c_{\max} = \sqrt[q]{p}$ .

Тогда при малой величине потерь число соединительных устройств в пучке ступенчатого включения с доступностью  $d$ , обслуживающ $\bar{e}$  интенсивность поступающей нагрузки  $y$ , определится из формулы О'Делла:

$$v = d + (y - y_d)/c_{\max}, \quad (9.16)$$

или

$$v = y/c_{\max} + v_0, \quad (9.17)$$

где

$$v_0 = d - y_d/c_{\max}. \quad (9.18)$$

Если для двухзвеньевого неполнодоступного включения (см. рис. 9.3) применить тот же ход рассуждений, что и для неполнодоступного однозвеньевого включения, то минимальное значение средней пропускной способности будет в том случае, когда  $v = mq$ , т. е. когда общее число выходов будет равно числу выходов, доступных каждому входу. В этом случае двухзвеньевая неполнодоступная схема превращается в двухзвеньевую полнодоступную схему и пропускаемая нагрузка  $y_d = y_{mq}$  будет определяться из формул, полученных в предыдущем параграфе.

Для случая отсутствия сжатия и расширения ( $n=m$ ) распределения Бернулли для промежуточных линий и распределения Эрланга для выходов справедлива ф-ла (9.9), в соответствии с которой  $y_{mq}$  определится из выражения

$$p = \frac{E_{mq}(y_{mq})}{E_{mq}(y_{mq}/b)}. \quad (9.19)$$

Выходы двухзвеньеовой неполнодоступной схемы достигнут максимального значения средней пропускной способности в том случае, когда число выходов  $v$  будет велико. В этом случае при расчете схемы следует принимать распределение Бернулли и для промежуточных линий и для выходов. Тогда  $c_{\max}$  определится из следующего соотношения:

$$p = (b + c_{\max}^q - bc_{\max}^q)^m, \quad (9.20)$$

полученного на основании (9.8).

Следовательно, в соответствии с идеей О'Делла средняя интенсивность нагрузки, обслуживаемой каждым из  $mq$  выходов в двухзвеньеовой неполнодоступной схеме, имеющей  $v$  выходов, будет равна  $y_{mq}/mq$ , где  $y_{mq}$  определяется (9.19). Остальные  $v - mq$  выходов пропустят каждый в среднем  $c_{\max}$  нагрузки, значение которой определится (9.20).

Таким образом, число выходов  $v$  при двухзвеньеовом неполнодоступном включении, которое необходимо для обслуживания нагрузки  $y$  с потерями  $p$ , определится по аналогии с соотношением (9.16) из следующего уравнения:

$$v = mq + (y - y_{mq})/c_{\max},$$

где  $y_{mq}$  и  $c_{\max}$  определяются (9.19) и (9.20).

Если ввести обозначение  $v_0 = mq - y_{mq}/c_{\max}$ , то для расчета числа выходов в схеме при отсутствии концентрации и расширения для  $q \geq 1$  получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} v &= y/c_{\max} + v_0, \quad v_0 = mq - y_{mq}/c_{\max}; \\ p &= (b + c_{\max}^q - bc_{\max}^q)^m; \\ p &= \frac{E_{mq}(y_{mq})}{E_{mq}(y_{mq}/b)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

В этих уравнениях:  $v$  – число выходов двухзвеньеовой неполнодоступной схемы в

рассматриваемом направлении (число соединительных устройств последующей ступени искания);  $y$  – интенсивность поступающей нагрузки на все  $\cup$  выходов рассматриваемого направления;  $mq$  – максимальное число выходов, доступных любому входу;  $b$  – средняя интенсивность нагрузки, обслуживаемой одной промежуточной линией;  $p$  – допустимые потери;  $y_{mq}$  – интенсивность нагрузки, поступающей на  $mq$  выходов при величине потерь  $p$ , определяемой (9.19);  $c_{max}$  – предельная пропускная способность выхода при неограниченном числе выходов, определяемая (9.20).

Рассуждения, которые приведены выше, дают возможность получить аналогичные системы уравнений для расчета числа соединительных устройств при использовании других типов двухзвеньевого неполнодоступных схем. Составление системы производится следующим образом. Используется формула О'Делла (9.16) в записи (9.17) и (9.18), где вместо  $d$  введена максимальная доступность двухзвеньевого неполнодоступной схемы. Для определения двух пределов нагрузки, обслуженной каждым выходом, к последующей ступени искания в рассматриваемом направлении берутся две формулы, справедливые для двухзвеньевого полнодоступного включения. Нижний предел определяется по формуле, полученной в предположении справедливости для выходов направления распределения Эрланга, а верхний предел – по формуле, использующей для выходов распределение Бернулли. Эти формулы выбираются конкретно для каждого рассматриваемого примера в зависимости от величины отношения  $m/n$ , величины  $q$  и способа отыскания свободного выхода в направлении. Все системы уравнений дают приемлемые результаты, если для заданной интенсивности нагрузки, потерь и параметров схемы число выходов к последующей ступени искания удовлетворяет следующему неравенству:  $mq \leq \cup \leq (g/2)mq$ , где  $g$  – число блоков искания, объединяемых неполнодоступным включением.

### 9.6. Метод эффективной доступности

Метод эффективной доступности пригоден как для полнодоступных, так и неполнодоступных двухзвеньевого схем. Он основан на понятии *переменной доступности*, которое можно уяснить из рассмотрения схемы рис. 9.1. В режиме группового искания в выходы этой схемы включаются соединительные устройства нескольких направлений. Для подключения соединительных устройств последующей ступени, принадлежащих одному направлению, в каждом коммутаторе второго звена в общем случае может отводиться  $q$  выходов. На рис. 9.1 показано направление  $H_j$ , в котором для каждого коммутатора второго звена имеется только по одному выходу ( $q=1$ ).

В рассматриваемой схеме каждому входу доступен любой выход требуемого направления только тогда, когда нет занятых соединительных путей. В этом случае доступность выходов данного направления будет максимальной (все выходы доступны) и при  $q=1$  будет равна  $m$ . В общем случае  $d_{max}=mq$ .

Если занята одна промежуточная линия, то для всех входов в том коммутаторе, из которого она выходит, доступность выходов в указанном направлении уменьшится на единицу для случая  $q=1$  и на  $q$  в общем случае, так как занятая промежуточная линия заблокирует выходы рассматриваемого направления, к которым можно подключиться с ее помощью.

При наличии  $i$  занятых промежуточных линий для всех входов в этот коммутатор, в котором имеются занятые  $i$  линий, доступность уменьшается на  $iq$  и составит величину

$$d_i = (m - i)q. \quad (9.22)$$

Минимальная доступность выходов рассматриваемого направления для случая сжатия ( $n > m$ ) равна нулю, так как для  $(m+1)$ -го занятия, поступающего на вход коммутатора, из-за занятости всех  $m$  промежуточных линий невозможно подключение ни к какому выходу, даже при наличии свободных выходов. Для схем с расширением или без расширения и сжатия ( $n \leq m$ ) минимальная доступность больше нуля и составляет величину

$$d_{min} = (m - n + 1)q, \quad (9.23)$$

так как к моменту поступления последнего вызова  $(n-1)$ -я промежуточная линия занята и, следовательно, доступность уменьшилась на величину  $(n-1)q$ . Таким образом, в процессе работы двухзвеневой схемы в режиме группового искания доступность  $d_i$  выходов (соединительных устройств последующей ступени искания) меняется в пределах между наибольшим и наименьшим значениями:

$$d_{min} \leq d_i \leq d_{max}. \quad (9.24)$$

Каждое из значений доступности  $d_i$  появляется с вероятностью  $W_i$ , где  $W_i$  – вероятность занятия  $i$  промежуточных линий из  $m$  линий, принадлежащих одному коммутатору первого звена.

Вероятность  $W_i$  можно трактовать как долю времени в течение рассматриваемого интервала, в пределах которого занято  $i$  промежуточных линий, т. е. в течение которого существует доступность  $d_i$ . Тогда работу схемы в интервал времени, в пределах которого занято  $i$  промежуточных линий, можно уподобить работе схемы неполнодоступного включения с доступностью  $d_i$ , а потери  $p_i$ , которые возникнут в это время, будут определяться значением доступности  $d_i$ . Так как значения  $d_i$  определяются соотношением (9.24), то потери  $p$  в случае включения соединительных устройств в выходы двухзвеневой схемы будут меньше, чем при неполнодоступном включении с доступностью  $d_{min}$  (т. е. меньше  $p_{max}$ ), и больше, чем при неполнодоступном включении с доступностью  $d_{max}$  (т. е. больше  $p_{min}$ )

$$p_{min} < p < p_{max}. \quad (9.25)$$

Соотношение (9.25) означает, другими словами, что рассматриваемая двухзвеневая схема с точки зрения потерь будет хуже однозвеневого неполнодоступного включения с доступностью  $d_{max}$  и лучше неполнодоступного включения с доступностью  $d_{min}$ .

Из этого же соотношения следует, что всегда найдутся такие два значения доступности,  $d_j$  и  $d_{j+1}$ , где  $j$  – целое положительное число, для которых будет справедливо

$$p_{j+1} < p \leq p_j. \quad (9.26)$$

Это означает, что для данной двухзвеневой схемы существует эквивалентное ей с точки зрения потерь однозвеневое неполнодоступное включение. Доступность такого неполнодоступного включения с потерями, равными потерям в двухзвеневой схеме, назовем *эффективной доступностью* и обозначим  $d_3$ . Из соотношения (9.25) вытекает, что

$$d_{min} < d_3 < d_{max}. \quad (9.27)$$

Если зависимость вероятности потерь  $p$  от доступности  $d$  при определенных значениях интенсивности нагрузки  $y$  и числа соединительных устройств последующей ступени искания  $v$  выражается функцией

$$p = p_{y,v}(d), \quad (9.28)$$

то вероятность потерь при использовании двухзвеневой схемы запишется следующим образом:

$$p = \sum_{i=0}^r W_i p_{y,v}(d_i), \quad (9.29)$$

где  $r=n-1$  при  $n \leq m$  или  $r=m$  при  $n > m$ .

Значение  $p$  из (9.29) будет удовлетворять неравенству (9.26). Так как эффективная доступность определяется из равенства потерь, то для ее вычисления можно использовать такое соотношение:

$$p_{y,v}(d_3) = \sum_{i=0}^r W_i p_{y,v}(d_i). \quad (9.30)$$

Значение эффективной доступности, определяемое из (9.30), лежит в пределах

$$d_j \leq d_s \leq d_{j+1} \quad (9.31)$$

( $j$  – целое положительное число) и может быть дробным, причем дробное значение эффективной доступности следует понимать в смысле соотношения (9.26).

Можно показать, что если функциональная зависимость (9.28) является линейной, т. е.  $p = Ad + B$ , то из соотношения (9.30) следует, что

$$d_s = \bar{d}, \quad (9.32)$$

где  $\bar{d}$  – математическое ожидание доступности.

В общем случае справедливо следующее соотношение для эффективной доступности:

$$d_s \leq \bar{d}. \quad (9.33)$$

Соотношение (9.33) по сравнению с неравенством (9.27) сужает диапазон, в котором может лежать значение  $d_s$ . Этот диапазон определяется неравенствами

$$d_{min} < d_s \leq \bar{d}. \quad (9.34)$$

Неравенство (9.34) можно записать в более удобном для вычислений виде:

$$d_s = d_{min} + \theta (\bar{d} - d_{min}), \quad (9.35)$$

где  $\theta$  – коэффициент, определяемый зависимостью потерь от доступности и распределением  $W_i$  (вероятностей доступности).

Минимальная доступность  $d_{min}$  рассчитывается по (9.23), если она не равна нулю в случаях, указанных выше. Математическое ожидание доступности

$$\begin{aligned} \bar{d} &= \sum_{i=0}^r d_i W_i = \sum_{i=0}^r W_i (m-i) q = q \sum_{i=0}^r (m W_i - i W_i) \approx \\ &\approx q(m - y_m), \end{aligned}$$

где  $y_m$  – интенсивность нагрузки, обслуженной  $m$  промежуточными линиями.

Таким образом, для определения  $\bar{d}$  можно пользоваться следующей приближенной формулой:

$$\bar{d} = q(m - y_m). \quad (9.36)$$

Для двухсвязной схемы  $f=2$  (см. рис. 9.2) математическое ожидание доступности можно определить из следующего выражения:

$$\bar{d} = q[m - y_m^2 / 2(mf - 1)].$$

После определения эффективной доступности расчет двухзвеневой схемы сводится к применению таблиц или формул для неполнодоступного включения. В частности, можно пользоваться ф-лой (8.36). Для заданных величин доступности и потерь эта формула является линейной зависимостью:

$$v = \alpha y + \beta. \quad (9.37)$$

Выбор величины  $\theta$  должен производиться в зависимости от характера применяемой расчетной формулы неполнодоступного включения. При использовании (8.36) величину коэффициента  $\theta$  можно принимать в пределах 0,75–0,85, величины  $\alpha$  и  $\beta$  см. [12].

Расчет по методу эффективной доступности производится в следующем порядке. По (9.23) определяют значение минимальной доступности  $d_{min}$  для случая, когда она не равна нулю. Далее по (9.36) находят величину математического ожидания доступности  $\bar{d}$ , а затем определяют эффективную доступность  $d_s$  из соотношения (9.35). Если  $d_s$  по условиям точности расчетов можно заменить ближайшим целым числом, то определяют коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  расчетной ф-лы (9.37) в зависимости от полученной величины  $d_s$  и требуемой величины потерь. Наконец, число соединительных устройств, которое должно быть включено в выходы

рассматриваемой двухзвеньевой схемы для обслуживания интенсивности поступающей на них нагрузки при заданных потерях, рассчитывается по (9.37).

### 9.7. Структура многозвеньевых коммутационных схем

Помимо двухзвеньевых коммутационных схем в коммутационной технике широко

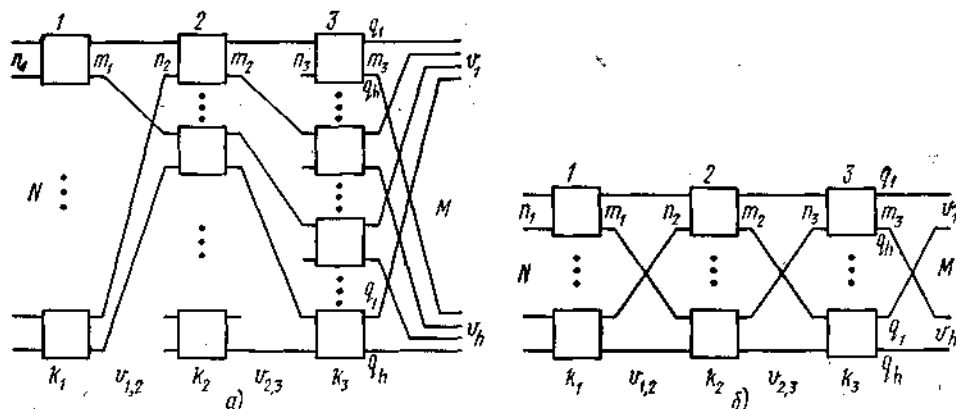


Рис. 9.4. Трехзвеньевая схема

применяются многозвеньевые схемы. В частности, квазиэлектронные системы коммутации используют четыре – восемь звеньев соединения.

На рис. 9.4 приведена трехзвеньевая схема, показанная в двух вариантах. Если в

схеме между любым из входов и любым коммутатором последнего звена имеется не более

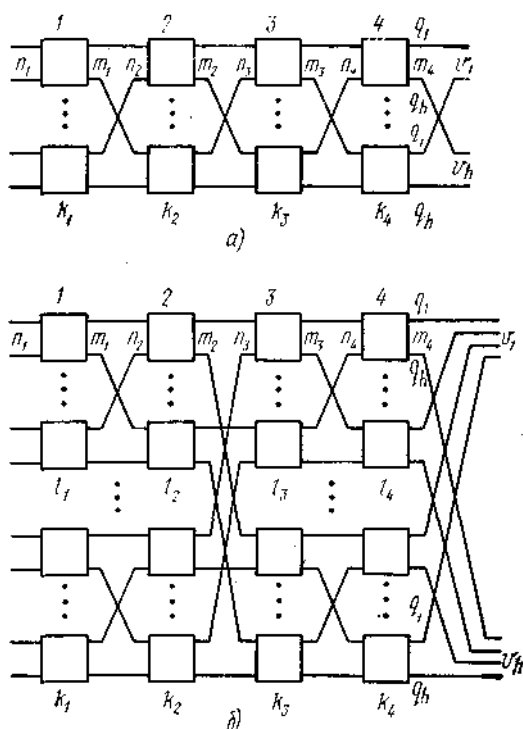


Рис. 9.5. Четырехзвеньевая схема

одного соединительного пути, то такую структуру называют *веерной* (рис. 9.4а); если число соединительных путей более одного, структуру называют *связанной* (рис. 9.4б). Обозначения структурных параметров для трехзвённой схемы, приведенной на рис. 9.4, аналогичны обозначениям параметров двухзвённой схемы. Трехзвённая схема помимо режима группового искания может быть использована и в режиме индивидуального искания (кроме веерной, так как она имеет не более одного пути между заданным входом и требуемым выходом). В этом случае в каждом направлении имеется лишь один выход.

На рис. 9.5а приведена четырехзвённая коммутационная схема с *неделимой* структурой, т. е. со структурой, которая не распадается на блоки, а на рис. 9.5б – четырехзвённая схема *блочной* структуры. При блочном построении коммутаторы первого и второго звеньев, а также третьего и четвертого звеньев соединяются таким образом, что представляют собой

находящуюся в первых двух звеньях. Аналогичное построение имеет и правая группа (третье и четвертое звенья). Левые и правые двухзвённые блоки связаны между собой. Схему, приведенную на рис. 9.5б, иногда называют *итерационной* схемой, так как ее можно получить, заменяя каждый коммутатор двухзвённой схемы такой же двухзвённой схемой. На этом рисунке число коммутаторов в каждом звене обозначено  $k_1, \dots, k_4$ , а число коммутаторов в каждом блоке соответствующего звена обозначено  $l_1, \dots, l_4$ .

Для построения коммутационных схем с большим числом звеньев могут быть использованы те же закономерности структуры, которые показаны на примерах двух-четырёхзвеньевых схем. Так, например, восьмизвеньевая схема может быть построена из нескольких четырехзвеньевых схем (см. рис. 9.5), соединенных между собой в одну общую схему. На рис. 9.6 приведен один из вариантов такой восьмизвеньевой схемы. Коммутаторы каждой пары соседних звеньев образуют двухзвеньевые блоки. Несколько двухзвеньевых блоков связывается между собой и образует четырехзвеньевую схему в соседних четырех звеньях. Такие укрупненные четырехзвеньевые блоки объединяются, в свою очередь, в восьмизвеньевую схему.

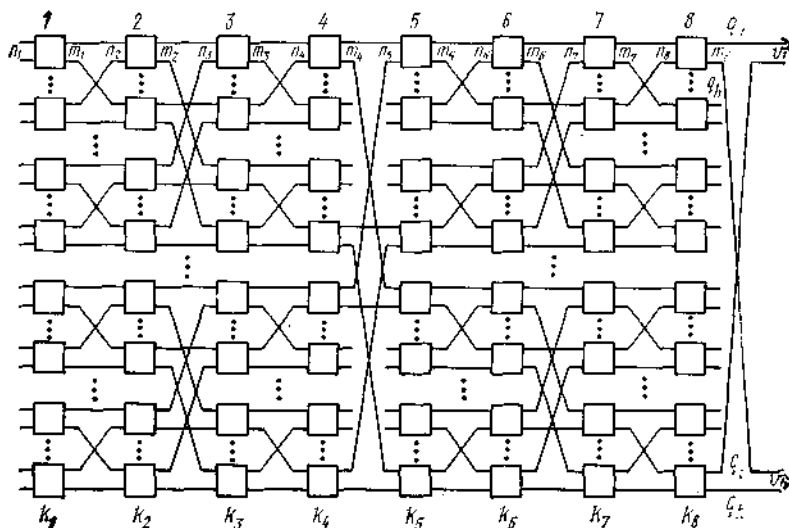


Рис. 9.6. Итерационный вариант структуры восьмизвеньевой схемы

любым числом звеньев количество коэффициентов  $\sigma$  равно числу звеньев.

В режиме группового искания, когда заданный вход схемы должен быть подключен к любому свободному выходу требуемого направления, схемы, как правило, должны иметь расширение. Особо существенную роль играют коэффициенты  $\sigma_{вх}$  и  $\sigma_{вых}$ , относящиеся к первому и последнему звеньям. Если считать, что во всех звеньях, кроме первого и последнего, нет ни концентрации, ни расширения (число входов в коммутаторы равно числу выходов), тогда по отношению к значениям коэффициентов концентрации или расширения на входе и выходе имеет место девять типов коммутационных схем, приведенных на рис. 9.7.

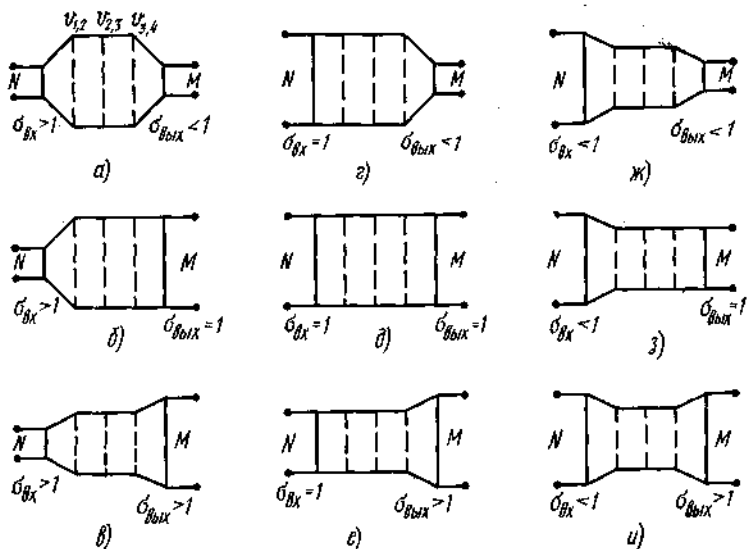


Рис. 9.7. Условные изображения девяти классов коммутационных схем

Условные изображения схем показаны применительно к четырехзвеньевым схемам. Первые три типа схем (схемы а-в) относятся к случаю, когда на входе схемы (в первом звене) имеется расширение. Последние три типа (схемы ж-и) – это схемы с концентрацией на входе, а остальные три типа схем не имеют ни концентрации, ни расширения в первом звене. Каждой из схем в этих трех группах соответствуют три возможных значения коэффициента  $\sigma_{вых}$  в последнем звене (на выходе).

Естественно, что коммутационные схемы связанной структуры, имеющие более двух звеньев, могут использоваться в режиме индивидуального искания, т. е. в таком режиме,

На основе рассмотренных схем легко представить себе построение схем с числом звеньев более восьми.

Существенную роль в коммутационных схемах играет отношение числа выходов к числу входов на каждом звене, которое называется коэффициентом расширения, если это отношение больше единицы, или коэффициентом

коэффициентом концентрации, если это отношение меньше единицы. Если считать, что во всех звеньях, кроме первого и последнего, нет ни концентрации, ни расширения (число входов в коммутаторы равно числу выходов), тогда по отношению к значениям коэффициентов концентрации или расширения на входе и выходе имеет место девять типов коммутационных схем, приведенных на рис. 9.7. Условные изображения схем показаны применительно к четырехзвеньевым схемам.

Первые три типа схем (схемы а-в) относятся к случаю, когда на входе схемы (в первом звене) имеется расширение. Последние три типа (схемы ж-и) – это схемы с концентрацией на входе, а

когда заданный вход, на который поступает вызов, должен быть подключен к одному вполне определенному выходу.

### 9.8. Способы межзвеньевых соединений и методы искания в многозвеньевых схемах

Вероятность потерь в звеньевых блокирующих коммутационных схемах зависит от многих факторов. В первую очередь она зависит от характера потока вызовов и величины поступающей нагрузки. Существенная зависимость вероятности потерь наблюдается от

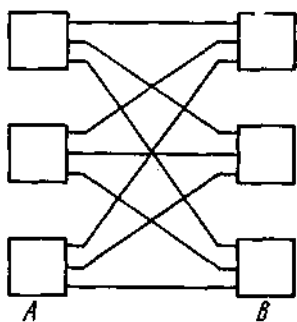


Рис. 9.8. Схема последовательных межзвеньевых соединений

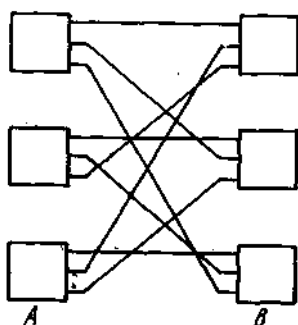


Рис. 9.9. Схема циклических межзвеньевых соединений

между коммутаторами, наличия или отсутствия расширения (концентрации) в каждом из звеньев, наличия или отсутствия блоков, веерной или связанной структуры и других характеристик структуры. Установлено также, что вероятность потерь зависит от способа межзвеньевых соединений  $l$  метода искания свободных промежуточных линий (выбора пути установления соединения для

В звеньевых коммутационных схемах наиболее часто используются два способа межзвеньевых соединений, показанных на рис. 9.8 и 9.9. На первом рисунке изображен способ последовательных межзвеньевых соединений, при котором номера занимаемых входов в коммутаторах звена  $B$  соответствуют номеру коммутатора в звене  $A$ . На втором рисунке приведен способ циклических межзвеньевых соединений. При этом способе осуществляется циклический сдвиг номера занимаемого входа в коммутаторах звена  $B$  при переходе от одного выхода из коммутатора звена  $A$  к другому. Любой из указанных двух способов соединений при неделимой структуре может применяться независимо от другого между любой парой соседних звеньев. При блочной структуре каждый из способов может использоваться как внутри блока, так и для междублочных соединений. Таким образом, для схемы с несколькими звеньями число вариантов межзвеньевых соединений может быть значительным.

Методами искания, наиболее часто применяемыми в коммутационной технике, считаются: *последовательное искание из фиксированного исходного положения*, *последовательное искание из случайного положения*. Второй из этих способов дает такие же результаты, как и равновероятное случайное искание (равновероятный выбор любой свободной промежуточной линии).

Каждый из указанных методов искания может независимо от другого использоваться между любой парой звеньев как внутри блоков, так и на междублочных промежуточных линиях.

### 9.9. Расчет многозвеньевых коммутационных схем в режиме группового искания. Метод КЛИГС

Комбинаторный метод Якобеуса, рассмотренный на примере двухзвеньевых схем, без существенных усложнений может быть использован для расчета трехзвеньевых схем. Некоторые четырехзвеньевые схемы также можно проанализировать комбинаторным методом, принимая простейшие предположения о распределениях вероятностей занятия промежуточных линий в отдельных звеньях. Использование комбинаторного метода для схем с большим числом звеньев (пять и более) в настоящем его виде затруднительно.

Метод эффективной доступности приспособлен для расчета двухзвеньевых схем в режиме группового или свободного искания, а также трехзвеньевых схем в режиме индивидуального

искания. Однако обобщение этого метода возможно для схем с большим числом звеньев. Если вместо эффективной доступности использовать среднюю доступность, то анализ многозвеньевых коммутационных схем дополнительно упрощается.

Таким образом, комбинаторный метод и метод эффективной доступности в основном обеспечивают расчеты числа соединительных устройств, включаемых в выходы двухзвеньевых коммутационных схем. При проектировании отечественных АТС координатной системы (АТСК и АТСКУ) определение объема коммутационного оборудования сводится к анализу двухзвеньевых схем, поэтому данные методы позволяют обеспечить нужды проектирования таких АТС.

Структура квазиэлектронных АТС такова, что для их анализа и проектирования необходимо рассматривать коммутационные схемы с четырьмя, шестью и более звеньями соединений. Из-за сложности расчета схем с большим числом звеньев, связанной в основном со сложностью их структуры, до последнего времени, за исключением метода вероятностных графов, не было даже приближенных инженерных методов анализа многозвеньевых схем. Использование понятия эффективной доступности и методов статистического моделирования позволило А. Лотце разработать приближенные методы расчета многозвеньевых схем в режиме группового искания (метод КЛИГС) и в режиме индивидуального искания (метод ППЛ), а также предложить метод оптимизации коммутационных схем по числу точек коммутации.

Метод КЛИГС получил сокращенное название от английских слов, означающих «расчет звеньевых систем группового искания». Метод основывается на понятиях средней доступности (свободный веер)  $d_{cp}$ , средней недоступности (занятый веер)  $\bar{d}_{cp}$ , максимальной доступности (максимальный веер)  $d_{max}$  коммутаторов последнего звена от любого свободного входа первого звена. С помощью этих понятий определяется эффективная доступность  $d_3$ , значение которой позволяет вычислить вероятность потерь, пользуясь модифицированной формулой Пальма – Якобеуса. Используем следующие обозначения:

$m_i$  – число выходов коммутатора  $i$ -го звена;  $k_i$  – число коммутаторов  $i$ -го звена;  $s$  – число звеньев;

$q_r$  – число выходов из одного коммутатора последнего звена в направлении  $r$ ;  $v_r$  – число линий в пучке  $r$ -го направления;  $M$  – общее число выходов схемы;

$v_{i, i+1}$  – общее число промежуточных линий между соседними звеньями;

$\sigma_{вх} = v_{1,2}/N$  – коэффициент расширения на входе;  $\sigma_{вых} = M/v_{s-1, s}$  – коэффициент концентрации на выходе. Тогда

$$d_{cp} = \prod_{i=1}^{s-1} (m_i - y_i), \quad (9.38)$$

где  $y_i$  – обслуженная нагрузка коммутатора  $i$ -го звена.

На соотношение (9.38) налагается следующее ограничение:

$$\prod_{i=1}^j (m_i - y_i) \leq k_{j+1} \quad (j = 1, \dots, s-1), \quad (9.39)$$

которое означает, что средняя доступность коммутаторов любого звена от любого свободного входа не может превышать числа коммутаторов в соответствующем звене.

Величина  $d_{cp}$  равна среднему числу коммутаторов последнего звена, доступных от любого свободного входа в первом звене через свободные промежуточные линии между звеньями. Максимальная доступность определяется выражением

$$d_{max} = \prod_{i=1}^{s-1} m_i \quad (9.40)$$

и равна максимальному числу коммутаторов последнего звена, доступных от любого свободного входа первого звена. Она равна средней доступности при нулевой нагрузке и ограничена соотношением  $d_{max} \leq k_s$ . Средняя недоступность определяется соотношением



$$\tilde{d}_{cp} = d_{max} - d_{cp} \quad (9.41)$$

и соответствует среднему числу недоступных коммутаторов последнего звена, равному разности между количеством коммутаторов, доступных при нулевой нагрузке и заданной обслуженной нагрузке.

В рассматриваемом методе эффективная доступность определяется как сумма двух слагаемых:

$$d_3 = d_{13} + d_{23} \quad (9.42)$$

Первое из этих слагаемых является функцией  $d_{cp}$ , определяется соотношением

$$d_{13} = d_{cp} q_r \quad (9.43)$$

и представляет собой среднее число выходов рассматриваемого  $r$ -го направления, которые могут занимать через промежуточные линии, образующие среднюю доступность (свободный веер). Второе слагаемое эффективной доступности задается выражением

$$d_{23} = \tilde{d}_{cp} q_r \frac{y_{or}}{v_r} \frac{v_{s-1,s} - y_o}{M} \quad (9.44)$$

где  $y_{or}$  – обслуженная нагрузка  $r$ -го направления;  $y_o$  – общая обслуженная нагрузка.

Произведение первых двух сомножителей в правой части (9.44) выражает число выходов рассматриваемого направления, находящихся в недоступных коммутаторах последнего звена. Умножением на третий множитель  $y_{or}/v_r$  получаем среднее число занятых выходов рассматриваемого направления, которые находятся в недоступных коммутаторах. Четвертый множитель представляет собой отношение среднего числа свободных входов в последнее звено к общему числу выходов последнего звена и является коэффициентом, учитывающим степень концентрации в последнем звене.

После определения эффективной доступности по (9.42) считают, что вероятность потерь в многозвонье схеме равна вероятности потерь в однозвонье схеме с доступностью, равной эффективной доступности. Для расчета вероятности потерь  $p$  применяется модифицированная формула Пальма – Якобеуса (см. гл. 8)

$$p = \frac{E_{v_r}(y_{\phi r})}{E_{v_r - d_3}(y_{\phi r})} \quad (9.45)$$

В числителе (9.45) стоит функция Эрланга, выражающая потери в полностью доступном пучке, содержащем  $v_r$  линий, на который поступает некоторая фиктивная нагрузка  $y_{\phi r}$ , в знаменателе – функция Эрланга, выражающая потери в полностью доступном пучке из  $v_r - d_3$  линий при той же нагрузке. Фиктивная нагрузка  $y_{\phi r}$  определяется из соотношения

$$y_{or} = y_{\phi r} [1 - E_{v_r}(y_{\phi r})] \quad (9.46)$$

а фактически поступающая на направление нагрузка  $y_r$  определится затем из соотношения

$$y_r = y_{or} / (1 - p) \quad (9.47)$$

Точность рассмотренного метода проверена статистическим моделированием. Метод позволяет определить вероятность потерь в многозвонье схемах, в которых число промежуточных линий между всеми звеньями одинаково, а  $\sigma_{вх} \geq 1$  и  $\sigma_{вых} \leq 1$ , при этом схемы могут иметь как веерную, так и связанную структуры неделимого или блочного типа.

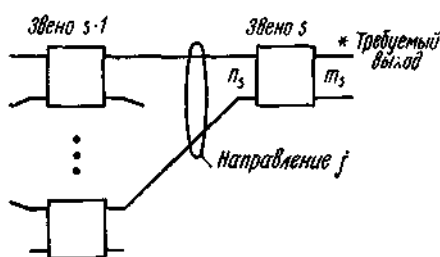


Рис. 9.10. Оконечная часть многозвонье схемы

При использовании  $s$ -звонье схем блокирующих коммутационных схем в режиме индивидуального искания пучок, состоящий из  $n_s$  промежуточных линий между предпоследним и последним звеньями, входящих в

тот коммутатор последнего звена, в который включен требуемый выход, можно рассматривать (рис. 9.10) как некоторое направление  $j$  коммутационной схемы с числом звеньев на единицу меньше (схемы с  $s-1$  звеном). В этом случае работа  $s$ -звеньевой схемы в режиме индивидуального искания эквивалентна работе  $(s-1)$ -звеньевой схеме в режиме группового искания. Поэтому методы расчета, применимые в режиме группового искания, могут быть использованы для расчета схем в режиме индивидуального искания. В частности, метод КЛИГС, предложенный А. Лотце для режима группового искания, можно применить для схем, используемых в режиме индивидуального искания. Для многозвеньевых блокирующих схем, работающих в режиме индивидуального искания, разработаны также специальные методы расчета.

### 9.10. Метод вероятностных графов

Метод основывается на представлении коммутационной схемы в виде графа, конфигурация которого зависит не только от структуры схемы, но и от режима искания, в котором используется схема. Переход от коммутационной схемы практически любой сложности к графу не представляет принципиальных трудностей. Граф, представляющий собой картину всевозможных путей между заданным входом схемы и заданным выходом (или одним из выходов заданной группы), может принадлежать к классу параллельно-последовательных графов или к классу непараллельно-последовательных (мостиковых) графов.

Дальнейшая процедура метода вероятностных графов заключается в том, чтобы записать функцию для вероятности потерь при установлении соединений в рассматриваемом графе между его входными и выходными полюсами, аргументами которой являются вероятности занятости отдельных дуг графа. Для определения вероятностей занятости дуг обычно используют значение средней интенсивности нагрузки, обслуженной каждой из них. Записанная таким образом функция позволяет определить вероятности потерь или оптимизировать структуру по числу точек коммутации или другим показателям.

Для того чтобы уяснить соответствие между коммутационной схемой и представляющим ее графом и способ перехода от схемы к графу, рассмотрим графы отдельных типовых коммутационных схем. Трехзвеньевая коммутационная схема, приведенная на рис. 9.4б, в зависимости от режима искания будет соответствовать одному из вероятностных графов, изображенных на рис. 9.11. При построении этих графов считаем, что коммутационная схема – односвязная (одна промежуточная линия между каждой парой коммутаторов соседних звеньев), а структурные параметры схемы удовлетворяют следующим соотношениям:  $k_2=m_1$ ;  $n_2=k_1$ ;  $k_3=m_2$ ;  $n_3=k_2=m_1$ .

На рис. 9.11а приведен вероятностный граф трехзвеньевой коммутационной схемы, используемой в режиме индивидуального искания (определенный вход должен быть подключен к точно указанному выходу). Дуги  $A\alpha_i$ , соединяющие входной полюс  $A$  и вершины  $\alpha_i$ , изображают промежуточные линии между звеньями 1 и 2, дуги  $\alpha_i\beta$ ,

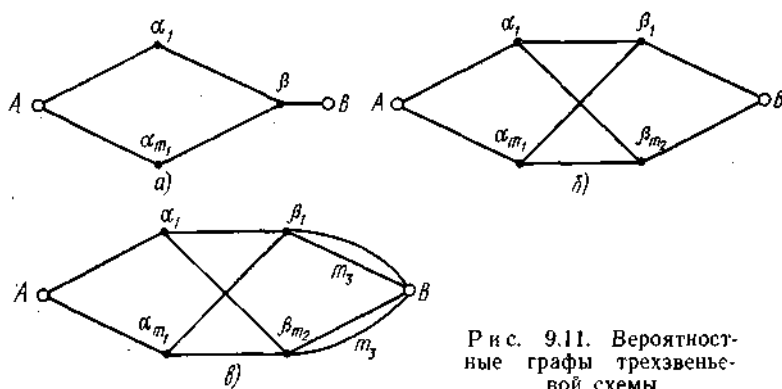


Рис. 9.11. Вероятностные графы трехзвеньевой схемы

соединяющие вершины  $\alpha_i$  с вершиной  $\beta$ , изображают промежуточные линии между звеньями 2 и 3, а дуга  $\beta B$ , соединяющая вершину  $\beta$  с выходным полюсом  $B$ , изображает выход коммутационной схемы, к которому должен быть подключен заданный вход при использовании схемы в режиме индивидуального искания

(режим И).

При такой конфигурации графа совокупность всех путей на графе, содержащих дуги,

лежащие между входным и выходным полюсами (полюса  $A$  и  $B$ ), является совокупностью всех возможных путей установления соединения анализируемой коммутационной схемы в рассматриваемом режиме искания.

На рис. 9.11б приведен вероятностный граф той же трехзвеньеовой коммутационной схемы, используемой в режиме группового искания (определенный вход должен быть подключен к одному из свободных выходов в заданной группе – направлении). Граф изображен для случая, когда рассматриваемая группа выходов (направление) содержит только по одному выходу в каждом коммутаторе третьего звена.

На этом рисунке, как и на предыдущем, дуги  $A\alpha_i$  изображают промежуточные линии между звеньями 1 и 2, дуги  $\alpha_i\beta_i$  – промежуточные линии между звеньями 2 и 3, а дуги  $\beta_i B$  – выходы рассматриваемого направления, к одному из которых должен быть подключен заданный вход в режиме группового искания (режиме Г).

Рассматриваемый граф, как и в предыдущем случае (рис. 9.11а), изображает совокупность всех возможных путей установления соединения в анализируемой схеме (см. рис. 9.4б) в режиме группового искания.

На рис. 9.11б приведен вероятностный граф трехзвеньеовой коммутационной схемы в режиме свободного искания (режим С), в котором определенный вход должен быть подключен к одному из свободных выходов всей схемы. Этот граф отличается от предыдущего только тем, что между каждой вершиной  $\beta_i$  и полюсом  $B$  имеется не одна, а  $m_3$  дуг, изображающих  $m_3$  выходов из каждого коммутатора третьего звена.

Если в режиме Г для рассматриваемого направления в каждом из коммутаторов третьего звена используется  $q$  выходов, то структура графа будет такой же, как показано на рис. 9.11в, а между вершинами  $\beta_i$  и полюсом  $B$  будет  $q$  дуг вместо  $m_3$ .

Приведенные на рис. 9.11 три вероятностных графа трехзвеньеовой схемы рис. 9.4б соответствуют, как указано выше, трем режимам искания. В режиме И трехзвеньеовая схема имеет граф параллельно-последовательного типа (тип П), а в режимах Г и С – граф непараллельно-последовательного типа (тип Н).

Рассмотренные принципы построения графов трехзвеньеовой коммутационной схемы позволяют построить вероятностный граф для схемы с любым числом звеньев, учитывая закономерность построения, подмеченную в рассмотренных примерах. Увеличение числа звеньев схемы приводит к возрастанию числа звеньев графа, однако принцип построения сохраняется тот же.

Запись функции потерь вида  $p=f(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_s)$ , где  $p$  – вероятность потерь, а  $\omega_i$  – вероятность занятости каждой дуги  $i$ -го звена, сводится для графов параллельно-последовательного типа к умножению и суммированию вероятностей  $\omega_i$ , так как предполагается независимость событий, происходящих в различных звеньях графа (коммутационной схемы). При этом в случае параллельного включения нескольких дуг, образующих некоторую общую ветвь, для получения вероятности занятости всей ветви вычисляют произведение вероятностей занятости отдельных дуг. Если ветвь образуется последовательным включением (цепочкой) дуг, то вероятность занятости всей ветви определяется как дополнительная вероятность к вероятности свободы всей ветви, а вероятность свободы всей ветви, в свою очередь, определяется как произведение вероятностей свободы отдельных последовательно включенных дуг.

Обозначим вероятность занятости дуг для параллельно-последовательного графа, приведенного на рис. 9.11а, соответственно  $\omega_1$  (для дуг  $A\alpha_i$ ),  $\omega_2$  (для дуг  $\alpha_i\beta$ ) и  $\omega_3$  (для дуги  $\beta B$ ), а вероятности свободы этих же дуг через  $q_1=1-\omega_1$ ,  $q_2=1-\omega_2$  и  $q_3=1-\omega_3$ . Тогда вероятность того, что один из путей между полюсом  $A$  и вершиной  $\beta$ , состоящий из двух дуг, будет свободен, составит  $q_{A\alpha\beta} = q_1 q_2$ , а вероятность занятости этого пути  $\omega_{A\alpha\beta} = 1 - q_1 q_2 = 1 - (1 - \omega_1) \cdot (1 - \omega_2)$ .

Вероятность занятости всех  $m_1$  путей между полюсом  $A$  и вершиной  $\beta$  будет равна  $\omega_{A\beta} = \omega_{A\alpha\beta}^{m_1} = [1 - (1 - \omega_1) \cdot (1 - \omega_2)]^{m_1}$ .

Для того чтобы подсчитать вероятность потерь  $p$ , равную вероятности занятости всех

возможных путей между полюсами  $A$  и  $B$  ( $\omega_{AB}$ ), определим вероятность свободности хотя бы одного пути между полюсами  $A$  и  $B$  как произведение вероятностей свободности ветви  $A\beta$  и дуги  $\beta B$ :

$$q_{AB} = (1 - \omega_{A\beta})(1 - \omega_3) = \{1 - [1 - (1 - \omega_1)(1 - \omega_2)]^{m_1}\}(1 - \omega_3).$$

В свою очередь, вероятность потерь будет равна

$$p = \omega_{AB} = 1 - q_{AB} = 1 - \{1 - [1 - (1 - \omega_1)(1 - \omega_2)]^{m_1}\}(1 - \omega_3). \quad (9.48)$$

Таким образом, функция вероятности потерь для графа по рис. 9.11а будет определяться (9.48). Следовательно, для вероятности потерь трехзвеньевого схемы (см. рис. 9.4б) в режиме индивидуального искания по методу вероятностных графов также будет справедлива ф-ла

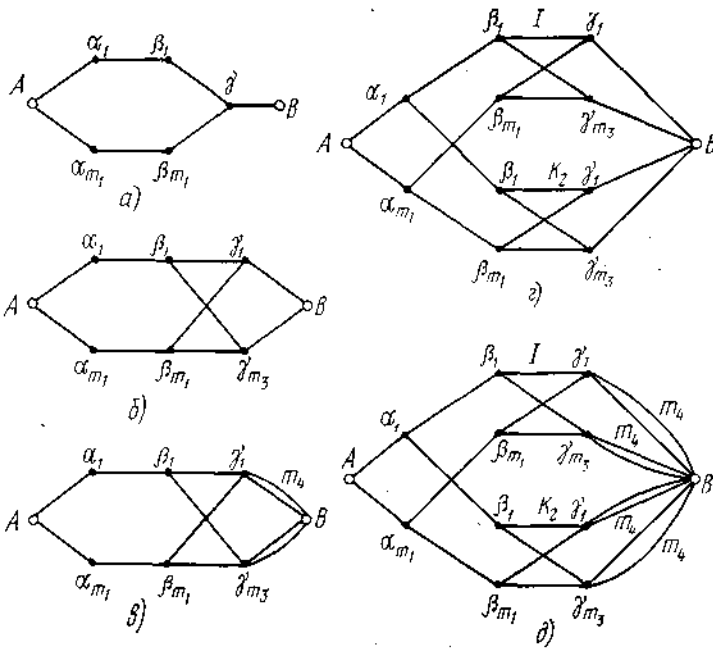


Рис. 9.12. Вероятностные графы одного из вариантов четырехзвеньевого схемы

образуют искомую группу выходов. Третий граф справедлив для случая, когда группа выходов образуется путем использования по одному из выходов от каждого коммутатора всей схемы.

В режиме свободного искания рассматриваемая схема будет соответствовать графу на рис. 9.12д

Как видно из рис. 9.12, все графы, за исключением первого (рис. 9.12а), принадлежат к классу непараллельно-последовательных графов и в их структуре существенную роль играет простейший непараллельно-последовательный (мостиковый) граф, показанный на рис. 9.11б. Формула для вычисления вероятности потерь такого мостикового графа будет иметь вид

$$p = \sum_{k=1}^{m_2} C_{m_2}^k \omega_2^{m_2-k} (1 - \omega_3)^k [\omega_1 + \omega_2^k (1 - \omega_1)]^{m_1}, \quad (9.49)$$

где  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  – вероятности занятости дуг графа на рис. 9.11б.

Во многих случаях вычисление вероятности потерь для более сложных непараллельно-последовательных графов сводится к приемам, применимым для параллельно-последовательных графов в сочетании с ф-лой (9.49). В тех случаях, когда вычисление потерь для непараллельно-последовательного графа слишком громоздко, можно пользоваться *методом оценочных графов*.

Для рассматриваемого графа из класса непараллельно-последовательных схем подбирают два параллельно-последовательных графа, причем таким образом, чтобы вероятность потерь для одного из них была оценкой сверху вероятности потерь в рассматриваемом графе, а

вероятность потерь для другого графа – оценкой снизу. Тогда искомая вероятность потерь для исследуемого графа будет заключена между двумя значениями потерь, выражения для которых легко записать.

Получение оценочных графов осуществляется с помощью некоторых операций. Граф для получения оценки по потерям сверху получают путем использования операций выбрасывания отдельных дуг и разделения одной вершины на две или несколько, что приводит к заведомому увеличению потерь. Для получения графа, пригодного для оценки вероятности потерь снизу, используются противоположные операции добавления дуг и объединения вершин, которые приводят к уменьшению потерь.

### 9.11. Оптимизация многозвеньевых коммутационных схем

При разработке многозвеньевых схем с блокировками новые схемы получают по аналогии с уже известными, используя опыт и интуицию проектировщика. В этом случае обычно рассматривается несколько классов коммутационных схем. В пределах каждого из классов проводится возможная в рамках имеющихся методов оптимизация с последующим сопоставлением лучших вариантов каждого класса и выбором требуемой схемы. В качестве критерия при выборе структуры коммутационных схем в большинстве случаев пользуются числом точек коммутации.

Иногда при проектировании блокирующих коммутационных схем используют методику синтеза неблокирующих коммутационных схем. В таком случае по заданным характеристикам блокирующей схемы выбирают неблокирующую схему с оптимальными структурными параметрами, которая имеет большее число точек коммутации, чем требуемая блокирующая схема. Далее путем устранения некоторых соединительных путей получают блокирующую схему с заданной нормой блокировок при заданной нагрузке на один вход, которая во многих случаях близка к оптимальной.

Естественно, что при проектировании коммутационных схем существенное значение имеют методы оптимизации и особенно такие, которые позволяют выбирать оптимальную схему по заданному показателю в пределах широкого класса структур. В работах Лотце разработан метод оптимизации многозвеньевых коммутационных схем по числу точек коммутации с помощью простых аналитических выражений. Полученные формулы дают возможность определить структурные параметры схемы и удельную нагрузку на одну промежуточную линию.

Указанный метод оптимизации справедлив для многозвеньевых схем, не имеющих существенной концентрации в промежуточных звеньях, за исключением последнего. В первом звене целесообразно использовать расширение. Метод не требует применения каких-либо приближенных формул для определения вероятности потерь. Используются лишь две характеристики: нагрузка, обслуженная одним входом первого звена ( $a_i$ ), и *прозрачность* схемы ( $T$ ).

Если суммарное число выходов последнего звена остается постоянным, то число исходящих направлений, на которое разбиваются выходы, не влияет на результаты оптимизации. Оптимальные структурные параметры могут быть определены не только для оптимального, но и для любого другого числа звеньев.

Основные соотношения, используемые при оптимизации схем по этому методу, получаются из анализа выражения для числа точек коммутации  $C$  на один эрланг нагрузки.

Для многозвеньевых коммутационных схем с  $s$  звеньями при любой обслуженной нагрузке, отличной от нуля, это выражение имеет вид

$$C = m_1/a_1 + m_2/a_2 + \dots + m_s/a_s, \quad (9.50)$$

где  $m_i$  – число выходов из коммутаторов  $i$ -звена;  $a_i$  – нагрузка, обслуженная одним входом  $i$ -звена.

Далее используется понятие *прозрачности* коммутационной схемы, под которой понимают среднее количество свободных путей в схеме между заданным входом и всеми  $M$  выходами схемы.

Значение прозрачности  $T$  определяется выражением

$$T = (m_1 - y_{o1})(m_2 - y_{o2}) \dots (m_{s-1} - y_{o(s-1)}) m_s = m_1 m_2 \dots m_{s-1} m_s (1 - a_2)(1 - a_3) \dots (1 - a_{s-1}), \quad (9.51)$$

где  $y_{oi}$  – нагрузка, обслуженная  $m_i$  выходами одного коммутатора  $i$ -звена;  $a_i$  – нагрузка, обслуженная одним входом  $i$ -звена.

Если из (9.51) выразить  $m_1$  и подставить в (9.50), то получим следующее соотношение для  $C$ :

$$C = \frac{T/a_1}{m_2 \dots m_s (1 - a_2) \dots (1 - a_s)} + \frac{m_2}{a_2} + \dots + \frac{m_s}{a_s}. \quad (9.52)$$

При синтезе блокирующих коммутационных схем величина нагрузки  $a_1$  на один вход схемы считается заданной, поэтому оптимизация структуры коммутационной схемы по числу точек коммутации заключается в том, чтобы подобрать такие емкости коммутаторов  $m_2, \dots, m_s$  и такие нагрузки на один вход коммутаторов  $a_2, \dots, a_s$ , при которых число точек коммутации  $C$  на один эрланг нагрузки будет минимальным. При этом значение прозрачности  $T$  предполагается постоянным и таким, которое гарантирует требуемые качественные показатели схемы.

Решая систему из 2 ( $s-1$ ) уравнений, которая получается, если положить равными нулю частные производные по всем аргументам  $\partial C/\partial m_2 = \dots = \partial C/\partial m_s = \partial C/\partial a_2 = \dots = \partial C/\partial a_s = 0$ , получаем следующие основные формулы, используемые для оптимизации структуры:

$$m_i = 2 \sqrt[s]{T/(4a_1)}; a_i = 0,5; \quad (9.53); (9.54)$$

$$m_1 = m_i (a_1/a_i); C_0 = 2 s m_i = 4 s \sqrt[s]{T/(4a_1)}. \quad (9.55); (9.56)$$

Формулы (9.53) – (9.56) справедливы для  $i=2, 3, \dots, s$  и заданного числа  $s$ -звеньев схемы. Число точек коммутации  $C$  на один эрланг нагрузки, в том числе и  $C_0$ , полученное оптимизацией по  $m_i$  и  $a_i$ , зависит также от числа  $s$ -звеньев схемы.

$$s_{\text{опт}} = \ln(T/4 a_1), \quad (9.57)$$

а минимальное число точек коммутации на один эрланг будет равно

$$C_{\text{min}} = 4 e \ln(T/4 a_1) = 4 e s_{\text{опт}} \approx 11 s_{\text{опт}}. \quad (9.58)$$

Оптимальное число звеньев схемы из выражения (9.56), при котором число точек коммутации на один эрланг будет минимальным, определяется следующим выражением:

Формулы (9.53) – (9.58) используются для оптимизации блокирующих многозвеньевых коммутационных схем по числу точек коммутации.

В процессе оптимизации считаются заданными общее число  $N$  входов схемы, общее число  $M$  выходов схемы, нагрузка  $a_1$  на один вход и требуемая величина прозрачности  $T$ . По заданным величинам можно определить оптимальное значение числа звеньев  $s_{\text{опт}}$ , а также для  $s_{\text{опт}}$  или любого заранее выбранного  $s$  подсчитать структурные параметры схемы ( $m_1, \dots, m_s$ ) и определить соответствующие нагрузки на входы ( $a_1, \dots, a_s$ ) и число точек коммутации на один эрланг ( $C_0$  или  $C_{\text{min}}$ ).

### Контрольные вопросы

1. Приведите общее выражение для вероятности потерь в двухзвеньеовой односвязной полнодоступной схеме при использовании комбинаторного метода Якобеуса и укажите, при каких предположениях оно справедливо.
2. Какие распределения используются для аппроксимации вероятностей занятия промежуточных линий и выходов схемы в комбинаторном методе Якобеуса?
3. Пользуясь комбинаторным методом, запишите выражение вероятности потерь в режиме индивидуального искания (фиксированный вход схемы подключается к фиксированному выходу схемы) для трехзвеньеовой схемы, приведенной на рис. 9.4, в случае квадратных коммутаторов в первом звене ( $N_1 = M_1$ ).
4. В чем заключается идея комбинаторного метода Якобеуса для расчета двухзвеньеовых яеполюдоступных схем?

5. Чему равна минимальная и максимальная доступности двухзвеньеовой полностью доступной схемы с параметрами  $n_1=10$ ,  $m_1=20$ ,  $q=2$ ?
6. Какова эффективная доступность двухзвеньеовой схемы, приведенной на рис. 9.1, если зависимость потерь от доступности является линейной?
7. Какие методы расчета пригодны для коммутационных схем с тремя и более звеньями соединения?
8. Перечислите способы межзвеньеовых соединений, используемые в многозвеньеовых схемах.
9. Какие методы поиска наиболее часто используются в многозвеньеовых схемах?
10. Как определяется эффективная доступность многозвеньеовой схемы в соответствии с методом КЛИГС?
11. Каков порядок расчета многозвеньеовых коммутационных схем в режиме группового поиска по методу КЛИГС?
12. Что такое прозрачность коммутационной схемы?
13. Какова идея оптимизации многозвеньеовых коммутационных схем?
14. Каким образом устанавливается однозначное соответствие между коммутационной схемой и графом?
15. Как записывается выражение для вероятности потерь в параллельно-последовательном графе?
16. Приведите формулу для определения вероятности потерь в простейшем графе непараллельно-последовательного типа.
17. Изобразите графы, соответствующие двух-, трех- и четырехзвеньеовым схемам в режимах свободного, группового и индивидуального поиска.
18. Как оценить величину вероятности потерь в сложном непараллельно-последовательном графе?

# Г Л А В А Д Е С Я Т А Я

## Распределение нагрузки и потерь на сетях связи

### 10.1. Качество обслуживания на автоматически коммутируемых сетях связи

**Суммарные потери.** Качество обслуживания потоков вызовов рассмотрим на примере автоматических телефонных сетей. В нашей стране создается общегосударственная автоматически коммутируемая телефонная сеть, в состав которой входят междугородная, внутризоновые, городские и сельские телефонные сети. Основной дисциплиной обслуживания потоков вызовов на автоматически коммутируемых телефонных сетях в нашей стране является обслуживание с явными потерями. При этом основной количественной характеристикой качества обслуживания потоков вызовов является математическое ожидание

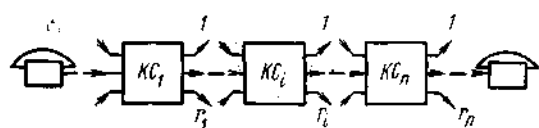


Рис. 10.1. Схема соединительного тракта сложной коммутационной системы

– величины потерь из-за отсутствия свободных и исправных соединительных устройств при установлении соединения между двумя телефонными аппаратами.

Пусть соединительный тракт содержит  $n$  последовательно включенных ступеней искания.

Поступающий на  $i$ -ю ступень искания поток вызовов делится на  $r_i$  потоков в соответствии с числом направлений, организуемых на ступени искания (рис. 10.1). Пусть на каждом направлении  $i$ -й ступени искания число соединительных устройств рассчитывается при величине потерь  $p_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Определим результирующую величину потерь  $p$  при установлении соединения между двумя телефонными аппаратами через  $n$  ступеней искания.

Исследования сложных коммутационных систем показали, что величина  $p$  зависит от величин потерь на отдельных ступенях искания  $p_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), числа ступеней искания  $n$ , числа направлений  $r$ , включаемых в каждую ступень искания, т. е.  $p=f(p_1, p_2, \dots, p_n, n, r_1, r_2, \dots, r_n)$ . При этом величина потерь  $p$  находится в пределах

$$p_{\max} \leq p \leq \sum_{i=1}^n p_i, \quad (10.1)$$

где  $p_{\max} = \max\{p_i, i=1, 2, \dots, n\}$  – максимальное из значений потерь на ступенях искания сложной коммутационной системы.

Если на входы и выходы любого числа ступеней искания включено только одно направление, то имеет место равенство

$$p = p_{\max}. \quad (10.2)$$

В другом предельном случае при  $r \rightarrow \infty$  процессы обслуживания потоков, поступающих на направления разных ступеней искания, независимы и математическое ожидание величины потерь  $p$  при установлении соединения между двумя телефонными аппаратами через  $n$  ступеней искания определяется из выражения

$$p = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i). \quad (10.3)$$

Действительно, вероятность того, что поступающий вызов будет обслужен на первой ступени, равна  $(1-p_1)$ , на второй ступени –  $(1-p_2)$  и т. д., на  $n$ -й ступени –  $(1-p_n)$ . Тогда вероятность того, что поступающий вызов будет обслужен и на первой, и на второй, и т. д., и на  $n$ -й ступени искания, равна  $\prod_{i=1}^n (1 - p_i)$ , а искомая вероятность того, что вызов не будет



обслужен хотя бы на одной ступени искания, определится из выражения (10.3).

В реальных коммутационных системах величина  $r$  конечна. Так как каждый вызов занимает соединительные устройства нескольких ступеней искания, то состояния этих ступеней не являются независимыми. Кроме того, из-за потерь на ступенях искания меняется характер потока вызовов, поэтому ф-ла (10.3) является приближенной. В большинстве практических случаев  $p_i \leq 0,01$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) и без большой погрешности выражение (10.3) можно заменить следующей простой формулой:

$$p \approx \sum_{i=1}^n p_i, \quad (10.4)$$

так как члены, содержащие произведения, в этом случае пренебрежимо малы. В соответствии с (10.4) результирующие потери равны сумме потерь на всех ступенях искания, поэтому потери  $p$  называют *суммарными* потерями.

Из предыдущих глав известно, что с уменьшением потерь (по-вышением качества обслуживания) увеличивается объем станционных и линейных сооружений, а следовательно, и затраты на построение сети. Емкости пучков линий (каналов) и их протяженность существенно различаются на междугородной, внутрizonовых, городских и сельских телефонных сетях. На любой сети затраты на построение отдельных участков соединительного тракта также могут значительно различаться. Для снижения суммарных затрат на построение телефонных сетей нормируется тем большая величина суммарных потерь на сети, чем больше протяженность пучков линий (каналов) и меньше их емкости. По этим соображениям минимальная норма суммарных потерь принята на городских телефонных сетях и большая – на сельских телефонных сетях, на которых преобладают пучки соединительных линий малой емкости. В пределах одной сети суммарные потери распределяются по ступеням искания таким образом, что на более дорогие участки соединительного тракта отводится большая величина потерь.

**Нормы потерь при городской телефонной связи.** Суммарные потери при установлении соединения между двумя телефонными аппаратами одной ГТС не должны превышать 0,02–0,03; при связи между телефонными аппаратами ГТС и телефонным аппаратом пригородной зоны, на которой приняты нормы потерь ГТС, – 0,04. Величина потерь на участках между входами соседних ступеней ГИ, а также между входами последней ступени ГИ и ЛИ (АИ) не должна превышать 0,005; на участке ПГИ–ШГИ узла специальных служб – 0,001.

**Нормы потерь при сельской телефонной связи.** Суммарные потери при установлении соединений между двумя телефонными аппаратами одной СТС не должны превышать 0,035–0,11. Потери при расчете количества соединительных линий на участках оконечная станция (ОС) – центральная станция (ЦС), оконечная станция – узловая станция (УС) не должны превышать 0,02–0,03; на участке УС–ЦС–0,01. Потери между входами соседних ступеней ГИ, а также между входами последней ступени ГИ и ЛИ (АИ) АТС не должны превышать 0,005; на участке ПГИ–ШГИ специальных служб – 0,001.

**Нормы потерь при зоновой телефонной связи.** Суммарные потери при установлении соединений между двумя телефонными аппаратами разных местных сетей одной зоновой телефонной сети (ЗТС) не должны превышать 0,03–0,125. Нормы потерь на участках соединительного тракта ЗТС приведены в табл. 10.1.

ТАБЛИЦА 10.1

Участок	Нормы потерь на участках соединительного тракта ЗТС		
	Города, где расположены АМТС	Райцентры	Выделенные города
ПГИ– АМТС	0,005	0,01	0,01
АМТС– РАТС (УВСМ)	0,002	–	0,01
АМТС– ЦС	–	0,01	–
Между входами соседних ступеней ГИМ	0,001	0,001	0,001

**Нормы потерь при междугородной телефонной связи.** Суммарные потери при

установлении соединений между двумя телефонными аппаратами ГТС, расположенных в разных зонах семизначной нумерации, не должны превышать 0,1. Количество каналов на одном участке пути последнего выбора должно рассчитываться при величине потерь 0,01. Вероятность потерь в коммутационной системе станций типов АМТС-4, АРМ-20, АМТС-КЭ, УАК-КЭ не должна превышать 0,003; АМТС-2 и АМТС-3 – 0,007. Нормы потерь на участках телефонный аппарат – АМТС и АМТС – телефонный аппарат такие же, как при зонной телефонной связи.

## 10.2. Расчет нагрузок на входах и выходах ступеней искания коммутационных узлов

Для каждой ступени искания АТС или узла расчет интенсивности поступающей на входы и выходы нагрузки производится отдельно, так как при этом необходимо учитывать перераспределение потоков нагрузки по направлениям разных ступеней искания, потери сообщения и различие в значениях средней длительности занятия на этих ступенях искания. Расчеты нагрузок по ступеням искания рассмотрим на примере координатных телефонных станций АТСК.

**Интенсивность нагрузки, поступающей на ступень абонентского искания.** Во входы ступени АИ координатных АТС могут включаться линии от квартирных телефонных аппаратов индивидуального пользования, коллективного пользования или спаренных, телефонных аппаратов народнохозяйственного сектора, таксофонов с интенсивностью удельной исходящей нагрузки менее 0,33 Эрл, соединительные линии от учрежденческих телефонных станций (УТС) малой емкости. Среднее число вызовов и средняя продолжительность разговора у этих источников нагрузки неодинаковы. Интенсивность нагрузки, создаваемой абонентами квартирного сектора, достигает максимального значения в вечерние часы суток, а народнохозяйственного сектора – в утренние часы. По этим причинам для определения максимальной суммарной нагрузки, поступающей от источников разных категорий, расчеты следует проводить как для утреннего, так и для вечернего ЧНН.

Интенсивность исходящей нагрузки, обслуживаемой ступенью АИ в ЧНН, представляет собой сумму интенсивностей нагрузок, поступающих по всем линиям, включенным в ступень:

$$y_{\text{исх АИ}} = \sum_i n_i a_i + \sum_j v_{\text{исх } j} a_j, \quad (10.5)$$

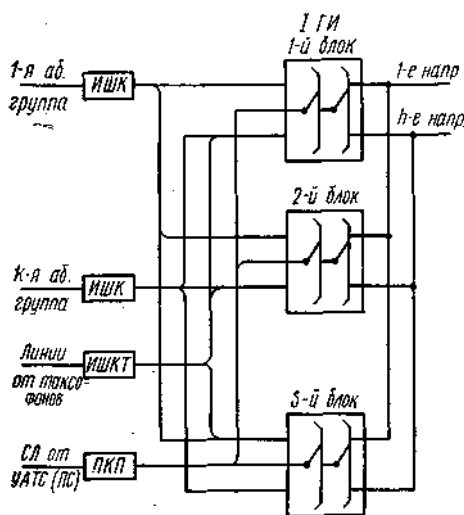


Рис. 10.2. Схема включения линий в ступень ИГИ

где  $n_i$  – число источников  $i$ -й категории;  $a_i$  – среднее значение интенсивности удельной исходящей нагрузки  $i$ -й категории источников в ЧНН;  $v_{\text{исх } j}$  – число исходящих соединительных линий от  $j$ -й УТС;  $a_j$  – среднее значение интенсивности нагрузки, поступающей на ступень АИ по одной соединительной линии от  $j$ -й УТС в ЧНН. Среднее значение интенсивности удельной исходящей нагрузки источников  $i$ -й категории  $a_i$  определяется как произведение среднего числа вызовов в единицу времени от одного источника  $i$ -й категории  $\bar{c}_i$  на среднюю длительность одного занятия для источника  $i$ -й категории  $\bar{t}_i$ .

Расчет объема оборудования осуществляется по максимальному из значений интенсивности нагрузки в утренний и вечерний ЧНН.

**Интенсивность нагрузок на ступенях группового искания.** Нагрузка, поступающая на входы первой ступени группового искания ИГИ АТСК, создается абонентскими группами ступени АИ, абонентами УТС и подстанций (ПС), исходящие соединительные линии от которых включены во входы ступени ИГИ, а также абонентами таксофонов, линии от которых включены непосредственно во входы ИГИ (рис.

10.2). Нагрузка от абонентских групп ступени АИ и от остальных источников, обслуживаемых ступенью ПГИ, распределяется по возможности равномерно между всеми блоками ступени.

Средняя величина интенсивности нагрузки, поступающей на входы ступени ПГИ, рассчитывается в утренний и вечерний ЧНН по формуле

$$y_{\text{вх ПГИ}} = y_{\text{исх АИ}} (1 - p_{\text{АИ}}) + y_{\text{т}} + \sum_k y_{\text{УТС (ПС)}_k}, \quad (10.6)$$

где  $y_{\text{т}}$  – интенсивность нагрузки, поступающей от таксофонов;  $y_{\text{УТС (ПС)}_k}$  – интенсивность нагрузки, поступающей от  $k$ -й УТС (ПС);  $p_{\text{АИ}}$  – потери на ступени АИ.

Нагрузка на выходах ступени ПГИ меньше нагрузки, поступающей на ее входы, так как время занятия выхода ступени ПГИ меньше времени занятия ее входа на величину, включающую в себя время слушания сигнала ответа станции  $t_{\text{с.о}}$  и время набора знаков номера вызываемого абонента –  $t_{\text{н.н}}$ . При связи с координатными АТСК регистр принимает все  $m$  знаков абонентского номера, а затем устанавливается соединение на ступени ПГИ. При связи со станциями декадно-шаговой системы соединение устанавливается после приема  $m_1$  знаков, определяющих код АТС или узла. Среднее время приема регистром знаков набора номера вычисляется с учетом распределения нагрузки между АТС координатной и декадно-шаговой систем по формуле

$$t_{\text{н.н}} = 1,5 m \sum_i p_i + 1,5 m_1 (1 - \sum_i p_i), \quad (10.7)$$

где 1,5 – время набора одного знака номера, с;  $p_i$  – доля нагрузки от проектируемой АТС к  $i$ -й станции координатной системы. Так как до вычисления нагрузки на выходах ступени ПГИ значения  $p_i$  могут быть неизвестны, то в первом приближении  $p_i$  можно заменить отношением возникающей на  $i$ -й АТС координатной системы нагрузки к суммарной возникающей нагрузке на всех АТС проектируемой сети.

Среднее время занятия выхода ступени ПГИ

$$t_{\text{вых ПГИ}} = t_{\text{вх ПГИ}} - t_{\text{с.о}} - t_{\text{н.н}}. \quad (10.8)$$

Средняя длительность занятия входа ступени ПГИ –  $t_{\text{вх ПГИ}}$  – определяется как средневзвешенная из длительностей занятия входов источниками разных категорий:

$$t_{\text{вх ПГИ}} = \frac{\sum_i n_i c_i t_i (1 - p_{\text{АИ}}) + n_{\text{т}} c_{\text{т}} t_{\text{т}} + \sum_k y_{\text{УТС (ПС)}_k} c_{\text{УТС (ПС)}_k} t_{\text{УТС (ПС)}_k}}{\sum_i n_i c_i (1 - p_{\text{АИ}}) + n_{\text{т}} c_{\text{т}} + \sum_k y_{\text{УТС (ПС)}_k} c_{\text{УТС (ПС)}_k}} \rightarrow \quad (10.9)$$

Нагрузка на выходах ступени ПГИ рассчитывается в утренний и вечерний ЧНН по формуле

$$y_{\text{вых ПГИ}} = y_{\text{вх ПГИ}} \frac{t_{\text{вых ПГИ}}}{t_{\text{вх ПГИ}}} (1 - p_{\text{ПГИ}}), \quad (10.10)$$

где  $p_{\text{ПГИ}}$  – потери на ступени ПГИ.

При расчете нагрузки на выходах входящей ступени ПГИ (ВПГИ) следует учитывать, что длительность занятия входов блоков ВПГИ, обслуживающих входящее сообщение от АТС декадно-шаговой системы, больше длительности занятия выходов на время приема входящим регистром (ВРД) необходимой информации.

Продолжительность занятия выходов по сравнению с продолжительностью занятия входов на других ступенях ПГИ уменьшается на время действия маркера в процессе установления соединения ( $t_{\text{МПИ}} = 0,6 \div 1,0$  с). Обычно принимают, что нагрузка на выходы составляет 0,99

величины нагрузки на входы.

Нагрузка, поступающая на ступень АИ, распределяется между абонентскими группами пропорционально той части исходящей от них нагрузки, которая создается источниками двустороннего действия.

Интенсивности нагрузки на входах и выходах всех ступеней искания рассчитываются в утренний и вечерний ЧНН. Расчет объема оборудования производится по максимальному значению интенсивности нагрузки.

### 10.3. Расчет нагрузок, поступающих на регистры и маркеры

Отдельные группы (пучки) абонентских регистров (АР) обслуживают вызовы, поступающие от тысячных или двухтысячных абонентских групп. Интенсивность нагрузки, поступающей на АР  $i$ -й группы –  $y_{APi}$  – определяется по формуле

$$y_{APi} = (t_{AP}/t_{вх} \overline{пги}) y_{вх} \overline{пги}, \quad (10.11)$$

где  $t_{AP}$  – среднее время обслуживания абонентским регистром одного вызова;  $t_{вх} \overline{пги}$  – среднее время занятия одним вызовом входа ПГИ;  $y_{вх} \overline{пги}$  – интенсивность суммарной нагрузки, поступающей на входы ПГИ от всех абонентских групп, обслуживаемых  $i$ -й группой регистров.

Интенсивность нагрузки, поступающей на входящие регистры ВРД, –  $y_{ВРД}$  – определяется из выражения

$$y_{ВРД} = (t_{ВРД}/t_{СЛ}) y_{СЛ}, \quad (10.12)$$

где  $t_{ВРД}$  – среднее время обслуживания входящим регистром одного вызова;  $t_{СЛ}$  – среднее время занятия одним вызовом соединительной линии от АТС декадно-шаговой системы;  $y_{СЛ}$  – интенсивность нагрузки, обслуженной соединительными линиями, к которым подключается группа ВРД.

Нагрузка на маркеры блоков ступеней искания определяется с целью проверки среднего времени ожидания подключения маркеров при установлении соединений. Интенсивность нагрузки, поступающей на маркер коммутационного блока, определяется по формуле

$$y_M = (t_M/t_{вх.бл}) y_{вх.бл}, \quad (10.13)$$

где  $t_M$  – среднее время обслуживания маркером одного вызова;  $t_{вх.бл}$  – среднее время занятия входа коммутационного блока одним вызовом;  $y_{вх.бл}$  – интенсивность нагрузки, поступающей на все входы коммутационного блока.

Интенсивность нагрузки, поступающей на регистры и маркеры, рассчитывается в утренний и вечерний ЧНН.

### 10.4. Способы распределения нагрузки

Определение и способ задания потоков нагрузки. Телефонные сети представляют собой, как правило, совокупность телефонных станций, соединенных пучками межстанционных линий или каналов. *Пучком линий называется совокупность линий, обслуживающих нагрузку, поступающую от определенной группы источников нагрузки к определенной группе приемников этой нагрузки.*

*Потоком поступающей или обслуженной нагрузки называется нагрузка, поступающая на линии или обслуженная линиями одного пучка.*

Величины потоков телефонной нагрузки полностью определяются взаимной заинтересованностью в телефонной связи абонентов разных станций. Поэтому при проектировании АТС точно установить величины межстанционных потоков нагрузки невозможно. Это можно сделать только после введения АТС в действие путем специальных наблюдений за потоками нагрузки.

Пусть наблюдения за интенсивностями потоков нагрузки осуществляются периодами до 15 мин (см. парагр. 3.2). Временные положения промежутков продолжительностью в 1 ч, начинающихся со сдвигом в 15 мин, обозначим моментами времени  $t_1, t_2, \dots, t_r$ ,

расположенными в середине каждого из промежутков. Средние значения интенсивностей нагрузки от АТС, к АТС<sub>*j*</sub> в эти промежутки времени обозначим вектором

$$\mathbf{Y}_{ij} = \{y_{ij}(t_1), y_{ij}(t_2), \dots, y_{ij}(t_r)\}. \quad (10.14)$$

Пусть на направлении *ij* ЧНН приходится на *k*-й промежуток времени. Интенсивность нагрузки в ЧНН обозначим  $y^*_{ij}(t_k)$ .

При *m* АТС на сети интенсивности межстанционных потоков нагрузки полностью характеризуются квадратной матрицей векторов

$$\|\mathbf{Y}_{ij}\| = \begin{vmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} & \dots & \mathbf{Y}_{1m} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} & \dots & \mathbf{Y}_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{Y}_{m1} & \mathbf{Y}_{m2} & \dots & \mathbf{Y}_{mm} \end{vmatrix}. \quad (10.15)$$

На телефонных сетях имеют место объединение и разделение потоков нагрузки. При рассмотрении этих явлений пользуются понятиями исходящей и входящей нагрузок.

**Разделение потоков.** Под исходящей от АТС<sub>*i*</sub> нагрузкой понимается сумма потоков нагрузки, исходящих от АТС<sub>*i*</sub> ко всем АТС сети. Вектор интенсивностей исходящей от АТС, нагрузки определится как сумма элементов *i*-й строки матрицы (10.15):

$$\mathbf{Y}_{\text{исх } i} = \sum_{j=1}^m \mathbf{Y}_{ij}. \quad (10.16)$$

По правилу сложения векторов выражение (10.16) с учетом (10.14) можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{Y}_{\text{исх } i} = \left\{ \sum_{j=1}^m y_{ij}(t_1), \sum_{j=1}^m y_{ij}(t_2), \dots, \sum_{j=1}^m y_{ij}(t_r) \right\}. \quad (10.17)$$

Интенсивность исходящей нагрузки в ЧНН определяется из выражения

$$y^*_{\text{исх } i} = \max_k \left\{ \sum_{j=1}^m y_{ij}(t_k), k = 1, 2, \dots, r \right\}. \quad (10.18)$$

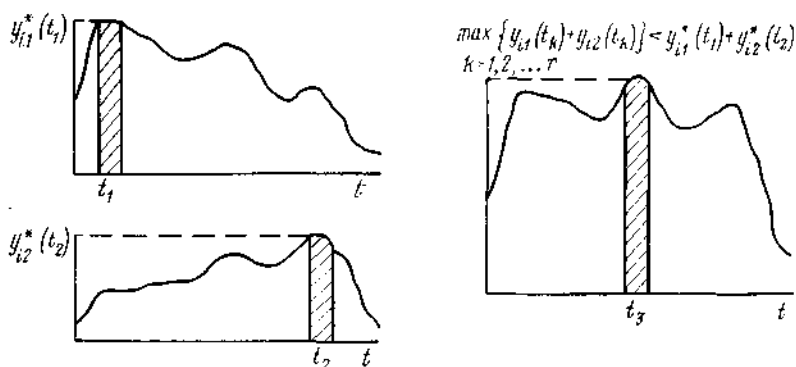


Рис. 10.3. Зависимости изменения интенсивностей двух потоков нагрузки с несовпадающими ЧНН и суммарной интенсивности этих потоков по часам суток

В частном случае при совпадении временных положений ЧНН на направлениях межстанционной связи *ij* (*j*=1, 2, ..., *m*).

$$y^*_{\text{исх } i} = \sum_{j=1}^m y^*_{ij}(t_k). \quad (10.19)$$

При этом имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^m y_{ij}^*(t_k) \geq \max_k \left\{ \sum_{j=1}^m y_{ij}(t_k), k=1, 2, \dots, r \right\}. \quad (10.20)$$

Очевидность этого соотношения иллюстрируется простейшим примером суммирования интенсивностей двух потоков с несовпадающими ЧНН (рис. 10.3).

**Объединение потоков.** Под входящей на АТС<sub>j</sub> нагрузкой понимается сумма потоков нагрузки, входящих на АТС<sub>j</sub> от всех АТС сети. Вектор интенсивностей входящей на АТС<sub>j</sub> нагрузки определится как сумма элементов j-го столбца матрицы (10.15)

$$Y_{вх j} = \sum_{i=1}^m Y_{ij}. \quad (10.21)$$

По аналогии с (10.17)

$$Y_{вх j} = \left\{ \sum_{i=1}^m y_{ij}(t_1); \sum_{i=1}^m y_{ij}(t_2), \dots, \sum_{i=1}^m y_{ij}(t_r) \right\}. \quad (10.22)$$

Интенсивность входящей нагрузки в ЧНН определяется из выражения

$$y_{вх j}^* = \max_k \left\{ \sum_{i=1}^m y_{ij}(t_k), k=1, 2, \dots, r \right\}. \quad (10.23)$$

При совпадении временных положений ЧНН на направлениях ij (i=1, 2, ..., m)

$$y_{вх i}^* = \sum_{j=1}^m y_{ij}^*(t_k). \quad (10.24)$$

По аналогии с (10.20) имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^m y_{ij}^*(t_k) \geq \max_k \left\{ \sum_{i=1}^m y_{ij}(t_k), k=1, 2, \dots, r \right\}. \quad (10.25)$$

Из (10.19) и (10.24) следует, что при объединении и разделении потоков нагрузки в условиях совпадения временных положений ЧНН на всех направлениях межстанционной связи ij (i, j=1, 2, ..., m) интенсивности результирующих потоков в ЧНН однозначно определяются через интенсивности в ЧНН составляющих их потоков, т. е. вместо матрицы векторов (10.15) достаточно иметь квадратную матрицу скаляров  $\|y_{ij}^*(t_k)\|$ .

Далее в тех случаях, когда интенсивности всех межстанционных потоков нагрузки рассматриваются в один и тот же временной интервал для простоты обозначений вместо  $y_{ij}(t_k)$  будем писать  $y_{ij}$ .

При условии совпадения временных положений ЧНН на всех направлениях межстанционной связи ij (i, j=1, 2, ..., m) интенсивность суммарной нагрузки в ЧНН, исходящей от всех АТС сети, определится из выражения

$$y_{исх}^* = \sum_{i=1}^m y_{исх i}^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m y_{ij}^*, \quad (10.26)$$

а интенсивность суммарной нагрузки в ЧНН, входящей на все АТС сети, из выражения

$$y_{вх}^* = \sum_{j=1}^m y_{вх j}^* = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m y_{ij}^*. \quad (10.27)$$

Из сравнений (10.26) и (10.27) следует

$$y_{исх}^* = y_{вх}^*, \quad (10.28)$$

т. е. интенсивность суммарной нагрузки, исходящей от всех АТС сети, равна

интенсивности суммарной нагрузки, входящей на все АТС сети.

**Некоторые закономерности формирования потоков нагрузки.**

Закономерности формирования потоков нагрузки могут быть выяснены только путем постановки наблюдений на действующих сетях. Наблюдениями установлено, что временное положение ЧНН на направлении  $ij$  существенным образом зависит от структурного состава абонентов АТС, и АТС $_j$ . Если эти АТС обслуживают преимущественно абонентов квартирного сектора, то имеет место вечерний ЧНН, если народнохозяйственного сектора, то утренний ЧНН. При прочих равных условиях величины интенсивностей потоков нагрузки в ЧНН  $y^*_{ij}(i, j=1, 2, \dots, r)$  тем больше, чем территориально ближе расположены абоненты АТС $_i$  к абонентам АТС $_j$ . В частности, величина интенсивности внутростанционной нагрузки АТС $_j$   $y^*_{ij}$  при прочих равных условиях обычно бывает больше интенсивностей потоков нагрузки к другим АТС сети.

Анализ закономерностей формирования абсолютных значений потоков нагрузки обычно выполнять достаточно сложно, так как емкость сети во времени не остается постоянной, АТС различаются емкостью и структурным составом абонентов. Поэтому часто используются отношения интенсивностей нагрузки на направлениях межстанционной связи к интенсивности нагрузки, исходящей от АТС:

$$k_{ij} = y_{ij} / y_{исх\ i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m).$$

Эти отношения называют *коэффициентами распределения* нагрузки. Очевидно выполнение следующего условия:

$$\sum_{j=1}^m k_{ij} = \sum_{j=1}^m (y_{ij} / y_{исх\ i}) = 1. \quad (10.29)$$

При известных значениях коэффициентов распределения интенсивности потоков нагрузки определяются из выражения

$$y_{ij} = k_{ij} y_{исх\ i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m). \quad (10.30)$$

Величина коэффициента распределения  $k_{ij}$  тем больше, чем больше отношение интенсивности исходящей от АТС $_j$  нагрузки к интенсивности суммарной исходящей от всех АТС сети нагрузки:

$$\omega_j = y_{исх\ j} / \sum_{j=1}^m y_{исх\ j}. \quad (10.31)$$

На рис. 10.4 в качестве примера приведена зависимость  $k_{ij} = f(\omega_j)$ , построенная по данным норм технологического проектирования. Коэффициент распределения от АТС $_i$  к АТС $_i$   $k_{ii}$  называют *коэффициентом внутростанционного сообщения*.

Для проектирования матрицы интенсивностей потоков нагрузки (10.15) в общем случае необходимо задать строку векторов  $Y_{исх\ i}(i=1, 2, \dots, m)$  и матрицу векторов

$$\| \| K_{ij} \| \| = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1m} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{m1} & K_{m2} & \dots & K_{mm} \end{pmatrix}. \quad (10.32)$$

Трудность прогнозирования коэффициентов  $k_{ij}$  состоит в том, что их значения, кроме  $\omega_j$ , зависят еще от целого ряда факторов, которые определяют взаимное телефонное тяготение абонентов АТС $_i$  к абонентам АТС $_j$ . Количественной оценкой телефонного тяготения

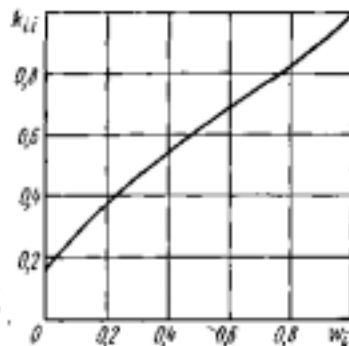


Рис. 10.4. Зависимость коэффициента внутростанционного сообщения  $k_{ii}$  от отношения интенсивности исходящей от АТС $_i$  нагрузки к интенсивности суммарной исходящей от всех АТС сети нагрузки —  $\omega_i$ .

являются *коэффициенты тяготения*. При равномерном телефонном тяготении между абонентами всей сети интенсивность нагрузки от АТС, к АТС<sub>j</sub>  $y'_{ij}$  ( $i, j=1, 2, \dots, m$ ) пропорциональна доле интенсивности нагрузки, исходящей от АТС<sub>i</sub>, в суммарной интенсивности нагрузки, исходящей от всех АТС сети:

$$y'_{ij} = y_{исх\ i} \frac{y_{исх\ j}}{\sum_{i=1}^m y_{исх\ i}} = y_{исх\ i} \omega_j. \quad (10.33)$$

Наблюдениями на действующих сетях установлено, что это равенство обычно не выполняется, так как тяготение между абонентами разных АТС является неравномерным. Если в левую часть выражения (10.33) подставить фактическое значение нагрузки  $y_{ij}$ , то для выполнения равенства правую часть этого выражения необходимо умножить на коэффициент тяготения  $f_{ij}$ :

$$y_{ij} = f_{ij} y_{исх\ i} \frac{y_{исх\ j}}{\sum_{i=1}^m y_{исх\ i}} = f_{ij} y_{исх\ i} \omega_j. \quad (10.34)$$

Из (10.33) и (10.34) следует, что

$$f_{ij} = \frac{y_{ij}}{y'_{ij}} = \frac{y_{ij}}{y_{исх\ i} y_{исх\ j}} \sum_{j=1}^m y_{исх\ j}. \quad (10.35)$$

Коэффициент тяготения  $f_{ij}$  абонентов АТС<sub>i</sub> к абонентам АТС<sub>j</sub> представляет собой отношение фактического значения интенсивности нагрузки от АТС<sub>i</sub> к АТС<sub>j</sub> к тому значению интенсивности нагрузки, которое было бы между этими станциями при равномерном телефонном тяготении на сети. При равномерном тяготении  $f_{ij} = 1$  ( $i, j=1, 2, \dots, m$ ).

Значения коэффициентов тяготения можно рассчитать только для действующих станций. Для проектируемых АТС их значения прогнозируются на основании анализа закономерностей распределения нагрузки на действующих сетях.

Пусть для всех станций сети в результате прогноза определены значения интенсивностей исходящих нагрузок  $Y_{исх\ i}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) и матрица векторов коэффициентов тяготения  $\|f_{ij}\|$ . Требуется рассчитать матрицу векторов межстанционных потоков нагрузки  $\|Y_{ij}\|$ .

Значения интенсивностей межстанционных потоков нагрузки в каждый фиксированный временной интервал рассчитываются по (10.34). Проверкой правильности распределения  $y_{исх\ i}$  является выполнение равенства

$$\sum_{j=1}^m y_{ij} = y_{исх\ i}. \quad (10.36)$$

Если это равенство не выполняется, то вычисленные значения  $y_{ij}$  умножаются на *выравнивающий коэффициент*:

$$q_i = y_{исх\ i} \left/ \sum_{j=1}^m y_{ij} \right. \quad (10.37)$$

Трудность прогнозирования матрицы  $\|f_{ij}\|$  заключается в сложной зависимости изменения значений коэффициентов  $f_{ij}$  с ростом емкости телефонной сети. Эта зависимость является более простой для так называемых *нормированных коэффициентов тяготения*.

Будем распределять интенсивность исходящей от АТС<sub>i</sub> нагрузки  $y_{исх\ i}$  пропорционально условным исходящим нагрузкам АТС сети. Под условной исходящей нагрузкой АТС<sub>j</sub> понимается произведение фактического значения исходящей нагрузки  $y_{исх\ j}$  на коэффициент  $n_{ij}$ , характеризующий телефонное тяготение абонентов АТС<sub>i</sub> к абонентам АТС<sub>j</sub>. В соответствии с правилом пропорционального деления получаем



$$y_{ij} = y_{исх i} \frac{y_{исх j} n_{ij}}{\sum_{j=1}^m y_{исх j} n_{ij}}. \quad (10.38)$$

Сравнивая (10.38) с (10.34), можем записать

$$(y_{исх j} n_{ij}) \left/ \sum_{j=1}^m y_{исх j} n_{ij} = (y_{исх j} f_{ij}) \right/ \sum_{j=1}^m y_{исх j}, \quad (10.39)$$

откуда

$$n_{ij}/f_{ij} = \left( \sum_{j=1}^m y_{исх j} n_{ij} \right) \left/ \sum_{j=1}^m y_{исх j}. \quad (10.40)$$

Правая часть выражения (10.40) от  $j$  не зависит, следовательно, для фиксированного  $i$

$$n_{i1}/f_{i1} = n_{i2}/f_{i2} = \dots = n_{im}/f_{im} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (10.41)$$

принимая  $n_{ii}=1$ , получим

$$n_{ij} = f_{ij}/f_{ii} = y_{ij} y_{исх i} / y_{ii} y_{исх j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m). \quad (10.42)$$

Значения коэффициентов тяготения существенно образом зависят от расстояния между абонентами. На рис. 10.5 в качестве примера приведена усредненная зависимость значений нормированных коэффициентов тяготения от кратчайшего расстояния между АТС для телефонной сети, построенной без узлов. Аналитически кривая рис. 10.5 может быть аппроксимирована уравнением вида

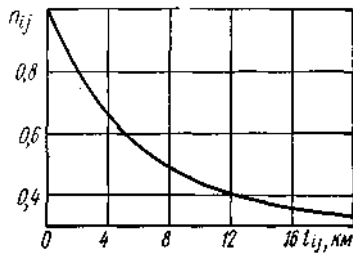


Рис. 10.5. Зависимость нормированных коэффициентов тяготения  $n_{ij}$  от кратчайшего расстояния между АТС  $l_{ij}$

$$n_{ij} = a e^{bt_{ij}} + c, \quad (10.43)$$

где значения постоянных коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  зависят от емкости телефонной сети и других факторов. Пусть для всех станций сети в результате прогноза определены значения интенсивностей исходящих нагрузок  $Y_{исх i}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) и матрица нормированных коэффициентов тяготения  $\|n_{ij}\|$ .

Требуется рассчитать матрицу межстанционных потоков нагрузки  $\|Y_{ij}\|$ .

Значения интенсивностей межстанционных потоков нагрузки в каждый фиксированный временной интервал рассчитываются по (10.38).

Кроме коэффициентов  $f_{ij}$  и  $n_{ij}$  в литературе описаны и другие коэффициенты для учета тяготения между абонентами. Однако какие бы коэффициенты не применялись, прогнозирование их значений может осуществляться только на основе наблюдений за их значениями на действующих сетях.

### 10.5. Колебания нагрузки. Расчетная интенсивность нагрузки

Наблюдениями установлено, что интенсивность нагрузки, создаваемой группой источников, колеблется по ЧНН разных дней. Так как зависимость вероятности потерь от интенсивности нагрузки имеет явно выраженный нелинейный характер, то в области малых значений потерь увеличение поступающей нагрузки на несколько процентов может привести к возрастанию потерь в несколько раз. Поэтому при расчете объема оборудования необходимо учитывать колебания интенсивности нагрузки. Закон колебаний с хорошим приближением аппроксимируется нормальным распределением. При этом вероятность отклонения нагрузки в произвольно взятый ЧНН  $y_i$  от математического ожидания нагрузки в ЧНН  $y$  определяется из выражения

$$P(|y_i - y| < z \sigma(y)) = 0,5 + \Phi(z), \quad (10.44)$$

где  $\sigma(y)$  – среднее квадратическое отклонение интенсивности нагрузки в ЧНН;  $\Phi(z)$  – нормированная функция Лапласа;  $z$  – аргумент функции Лапласа.

Из (10.44) следует, что при расчете объема оборудования с нормированными потерями  $p$  по математическому ожиданию нагрузки  $y$  потери будут меньше или равны  $p$  только с вероятностью 0,5, т. е. в 50% всех ЧНН. Если потребовать выполнения заданного качества обслуживания с большей вероятностью, то расчет объема оборудования следует выполнять не по математическому ожиданию интенсивности нагрузки, а по расчетной интенсивности нагрузки:

$$y_p = y + z \sigma(y). \quad (10.45)$$

Для простейшего потока вызовов математическое ожидание интенсивности нагрузки равно дисперсии нагрузки. Полагая  $a(y) = \sqrt{y}$ , получим следующее выражение для расчетной интенсивности нагрузки:

$$y_p = y + z \sqrt{y}. \quad (10.46)$$

Чем больше в выражении (10.46) значение аргумента  $z$  функции Лапласа, тем с большей вероятностью гарантируется нормированное качество обслуживания, однако при этом возрастает объем оборудования. В практике проектирования ГТС значение коэффициента  $z$  принимается равным 0,6742. При этом норма потерь  $p=0,005$  выполняется с вероятностью 0,75, а с вероятностью 0,9 потери не превысят 0,02, что для городской телефонной связи считается вполне приемлемым качеством обслуживания. Таким образом, формула расчетной нагрузки имеет следующий вид:

$$y_p = y + 0,6742 \sqrt{y}. \quad (10.47)$$

Переход от расчетного значения к математическому ожиданию нагрузки осуществляется по формуле

$$y = (\sqrt{y_p + 0,114} - 0,337)^2. \quad (10.48)$$

Из (10.47) видно, что величина расчетной нагрузки нелинейно возрастает с увеличением математического ожидания: чем больше математическое ожидание, тем меньше отношение  $\varepsilon = y_p/y$ . Например, при  $y=1$  Эрл величина  $y_p=1,674$  Эрл и  $\varepsilon=1,674$ , а при  $y=100$  Эрл расчетная нагрузка  $y_p=106,7$  Эрл и  $\varepsilon=1,067$ . Такая зависимость отражает физическую сущность колебаний нагрузки в группах различной емкости. В группах большой емкости меньше сказывается разброс нагрузок, создаваемых каждым источником, и как следствие – меньше колебания суммарной средней нагрузки в ряду таких групп.

Величина расчетной нагрузки зависит не только от ее математического ожидания, но и от способа объединения выходов коммутационной системы, на которые поступает нагрузка. При неполнодоступном включении нагрузка на линии в определенном направлении поступает с отдельных нагрузочных групп. Чем больше число нагрузочных групп при прочих равных условиях, тем меньше величина нагрузки отдельной нагрузочной группы и выше ее колеблемость. Поэтому при неполнодоступном включении расчетная величина нагрузки на направлении должна быть принята более высокой, чем при полнодоступном включении линий. Легко показать, что расчетная нагрузка, поступающая на неполнодоступный пучок линий,  $y_{p, \text{нп}}$  заключена в следующих пределах:

$$y_{p1} < y_{p, \text{нп}} < y_{p2}. \quad (10.49)$$

Нижняя граница неравенства  $y_{p1}$  соответствует расчетной нагрузке полнодоступного пучка, обслуживающего суммарную нагрузку всех нагрузочных групп (все нагрузочные группы объединяются в одну нагрузочную группу, коэффициент уплотнения  $\gamma=g$ ). Верхняя граница неравенства  $y_{p2}$  соответствует сумме расчетных нагрузок обособленных полнодоступных пучков (коэффициент уплотнения  $\gamma=1$ ).

Кроме коэффициента уплотнения неполнодоступного включения  $\gamma$  и математического

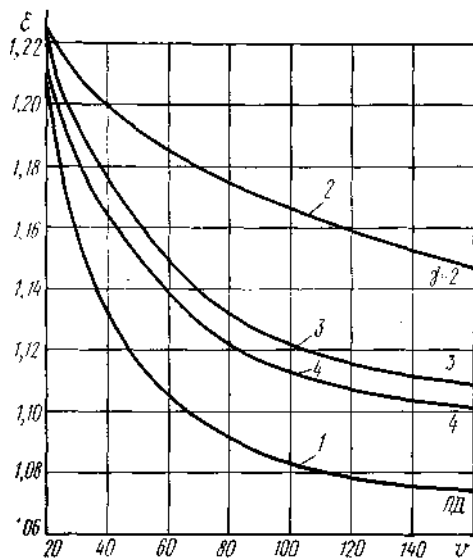


Рис. 10.6. Зависимость коэффициента  $\varepsilon$  от емкости пучка линий для двухзвеньевой схемы ступени ГИ

ожидания нагрузки  $y$  значения расчетной нагрузки  $y_{р.нп}$  зависят от структуры коммутационной системы, доступности  $d$ , величины потерь  $p$ . На рис. 10.6 в качестве примера представлены зависимости коэффициента  $\varepsilon = y_{р.нп}/y$  от емкости равномерного неполнодоступного пучка линий  $\gamma$  при различных значениях коэффициента уплотнения  $\gamma$  (кривые 2, 3, 4); для сравнения дана зависимость коэффициента  $\varepsilon$  от  $\gamma$  для полнодоступных пучков той же емкости (кривая 1). Приведенные зависимости получены для схем неполнодоступного включения ступени ГИ АТСК, построенной из двухзвеньевых блоков при доступности  $mq=20$ , потерях  $p=0,005$  и нагрузке на вход  $a=0,4$  Эрл. Как и следовало ожидать, с увеличением  $\gamma$  значение  $\varepsilon$  уменьшается во всем диапазоне емкостей пучков линий. Значения коэффициентов  $\varepsilon$  для других значений доступности и потерь приведены в [14]. При объединении и разделении потоков нагрузки на

определяться в следующей последовательности. В случае объединения потоков нагрузки необходимо найти математическое ожидание суммарной нагрузки как сумму математических ожиданий объединяемых нагрузок, а затем перейти к расчетному значению нагрузки для определения числа устройств, обслуживающих суммарную нагрузку. При разделении на выходах ступени искажения общей нагрузки по направлениям следует определить математическое ожидание нагрузки данного направления как долю математического ожидания суммарной нагрузки, а затем найти расчетное значение.

### Задача 10.1.

*Задано:* интенсивность нагрузки, поступающей на проектируемую АТСК<sub>1</sub> в утренний и вечерний ЧНН:  $y_{1в}=504,6$  Эрл;  $y_{1в}=475,4$  Эрл. Вся нагрузка, поступающая от абонентов проектируемой АТСК, распределяется между четырьмя АТС сети (включая и проектируемую). Интенсивности исходящих нагрузок от всех АТС сети в утренний и вечерний ЧНН приведены в табл. 10.2.

ТАБЛИЦА 10.2

Параметр	Величина нагрузки, Эрл, для АТС с индексом			
	1	2	3	4
$y_{1в}$	504,6	403	554	375
$y_{1в}$	475,4	605	275	508

Нормированные коэффициенты тяготения в утренний и вечерний ЧНН от проектируемой АТД ко всем АТС сети:

$$n_{11в}=1; n_{12в}=0,53; n_{13в}=0,71; n_{14в}=0,42;$$

$$n_{11у}=1; n_{12у}=0,69; n_{13у}=0,4; n_{14у}=0,45.$$

Необходимо рассчитать интенсивности межстанционных потоков нагрузки для расчета числа соединительных линий.

*Решение.* Интенсивности межстанционных потоков в утренний и вечерний ЧНН рассчитываются по (10.38):

$$y_{11у} = y_{1у} \frac{y_{1у} n_{11у}}{\sum_{j=1}^4 y_{jу} n_{1jу}} = \frac{504,6 \cdot 504,6 \cdot 1}{504,6 \cdot 1 + 403 \cdot 0,53 + 554 \cdot 0,71 + 375 \cdot 0,42} =$$

$$= 200,7 \text{ Эрл}; y_{12у} = 85 \text{ Эрл}; y_{13у} = 156,1 \text{ Эрл}; y_{14у} = 62,6 \text{ Эрл};$$

$$y_{11в} = 183,6 \text{ Эрл}; y_{12в} = 161,2 \text{ Эрл}; y_{13в} = 42,4 \text{ Эрл}; y_{14в} = 88,2 \text{ Эрл}.$$

Так как расчет числа соединительных линий осуществляется по максимальной интенсивности нагрузки, то искомыми интенсивностями будут:

$$y_{11у}=200,7 \text{ Эрл}; y_{12у}=161,2 \text{ Эрл}; y_{13у}=156,1 \text{ Эрл}; y_{14у}=88,2 \text{ Эрл}.$$

### **Задача 10.2.**

*Задано:* на коммутационную систему по четырем направлениям поступают нагрузки, расчетные интенсивности которых равны:

$$y_{p1\text{ вх}}=10 \text{ Эрл}; y_{p2\text{ вх}}=15 \text{ Эрл}; y_{p3\text{ вх}}=20 \text{ Эрл}; y_{p4\text{ вх}}=25 \text{ Эрл}.$$

В коммутационной системе эти нагрузки перераспределяются по трем направлениям пропорционально коэффициентам  $k_1=0,25$ ;  $k_2=0,35$ ;  $k_3=0,4$ . Требуется определить расчетные интенсивности нагрузок в трех направлениях, включенных в выходы коммутационной системы.

*Решение.* По ф-ле (10.48) (рассчитываем по заданным величинам  $y_{p\text{ вх}}$  соответствующие им математические ожидания нагрузок:

$$y_{1\text{ вх}}=8,076 \text{ Эрл}; y_{2\text{ вх}}=12,513 \text{ Эрл}; y_{3\text{ вх}}=17,257 \text{ Эрл}; y_{4\text{ вх}}=21,768 \text{ Эрл}.$$

Суммарная средняя нагрузка, поступающая на входы коммутационной системы, равна

$$y_{BX} = \sum_{i=1}^4 y_i = 59,614 \text{ Эрл}.$$

Средняя величина нагрузки на выходах ступени ГИ  $y_{\text{вых}}=0,99y_{\text{вх}}=0,99 \times 59,614=59$  Эрл. Она распределяется по трем направлениям:

$$y_{1\text{ вых}}=k_1 y_{\text{вых}}=0,25 \times 59=14,75 \text{ Эрл}; y_{2\text{ вых}}=20,65 \text{ Эрл}; y_{3\text{ вых}}=23,6 \text{ Эрл}.$$

По ф-ле (10.47) рассчитываются расчетные интенсивности потоков нагрузки:  $y_{p1\text{ вых}}=17,34$  Эрл;  $y_{p2\text{ вых}}=23,72$  Эрл;  $y_{p3\text{ вых}}=26,87$  Эрл.

### **Контрольные вопросы**

1. В каких пределах заключена результирующая величина потерь в сложной коммутационной системе, содержащей  $n$  ступеней искания?
2. Запишите выражения для результирующей величины потерь в сложной коммутационной системе с  $n$  последовательно включенными ступенями искания.
3. Назовите нормы суммарных потерь при городской, сельской, зонавой и междугородной телефонной связи.
4. В каких случаях потоки межстанционной нагрузки достаточно характеризовать только интенсивностями нагрузки в ЧНН?
5. Поясните способ распределения нагрузки с помощью коэффициентов распределения.
6. Поясните физический смысл коэффициентов тяготения  $f_{ij}$ .
7. Что такое выравнивающий коэффициент?
8. С какой вероятностью гарантируется норма потерь при расчете объема оборудования по математическому ожиданию интенсивности нагрузки и расчетной интенсивности нагрузки?
9. Запишите и поясните формулу для вычисления расчетной нагрузки.
10. В каких пределах заключена расчетная интенсивность нагрузки, поступающей на неполнодоступный пучок линий?
11. Поясните принцип определения расчетной интенсивности нагрузки при объединении и разделении потоков нагрузки.

## Управляемые элементы сети связи и методы определения ее характеристик

### 11.1. Общие сведения

Быстрые темпы развития сетей связи и ЭВМ, большой объем оборудования, используемого на таких сетях, делают весьма важной проблему повышения эффективности функционирования сетей. Информационная сеть или ее отдельные части обслуживают потоки сообщений (телефонных, телеграфных, передачу данных и другие), характерной особенностью которых является их непрерывное изменение во времени как по величине, так и по направлениям. Структура сети и ее технические средства (пучки каналов, коммутационное оборудование) в процессе функционирования сети развиваются и увеличиваются в объемах только через определенные промежутки времени. Таким образом, правильно спроектированная сеть, наилучшим образом обслуживающая заданные потоки сообщений, является оптимальной лишь в течение некоторого, сравнительно небольшого периода времени.

Постоянно изменяющиеся потоки сообщений приводят к тому, что возникает несоответствие между схемой потоков и структурой сети. Это несоответствие обусловлено как общим увеличением потоков, так и их перераспределением по направлениям. Общее увеличение объемов требований на передачу сообщений в течение некоторого времени компенсируется запасами технических средств, а в дальнейшем должно быть учтено очередным развитием сети.

Перераспределение потоков сообщений в пределах примерно одинаковых общих объемов приводит к уменьшению соответствия структуры сети измененному распределению потоков сообщений, снижению эффективности функционирования сети и ухудшению качества обслуживания. Таким образом, возникает проблема восстановления соответствия между распределением потоков и структурой сети, которая может быть решена за счет введения управления на сети.

Управление на сети связи может осуществляться как за счет управления ресурсами сети (техническими средствами, заложенными в линиях связи и узлах коммутации), так и за счет управления потоками сообщений (изменение путей передачи сообщений практически без ограничения объема потоков). Возможно одновременное управление и потоками, и ресурсами. Кроме того, существуют и используются такие методы управления, которые можно считать и методами управления потоками, и методами управления техническими средствами сети.

Проблема повышения эффективности сетей важна не только потому, что позволяет получить существенный экономический выигрыш. В некоторых случаях это – единственная возможность обеспечить передачу информации в требуемых объемах, т. е. без повышения эффективности сеть не может быть построена вообще. Поэтому методы анализа, синтеза и оптимизации сети приобретают исключительное значение, а в связи с этим и методы теории телетрафика, позволяющие решать отдельные задачи исследования сетей.

Необходимость управления сетью связи (изменение структуры, использование адаптивной структуры, изменение направления передачи сообщений и другие) ставит целый ряд сложных, специфических задач теории телетрафика. Большинство этих задач до сих пор еще не решено, а часть из них даже не сформулирована должным образом. Однако решение отдельных задач, связанных с управлением на сети связи, уже сейчас может быть проиллюстрировано методами теории телетрафика, и в некоторых случаях существует возможность оценить эффект от использования того или другого способа управления на сети связи.

К методам теории телетрафика, которые используются для определения отдельных характеристик сети связи, можно отнести: метод определения числа соединительных

устройств в пучках, обслуживающих избыточную нагрузку (метод эквивалентных замен); методы определения характеристик управляемых процессов, возникающих как при управлении потоками, так и при управлении структурами; методы, используемые при определении характеристик информации, передаваемой по сети с целью управления отдельными элементами сети или сетью в целом (метод укрупнения состояний), и др.

В последующих параграфах этой главы рассматриваются вопросы, связанные с установлением соединений по обходным путям, которые можно считать методом управления как потоками, так и каналами на сети; охарактеризованы задачи, возникающие при динамическом управлении на сети (управлении потоками сообщений); указаны основные идеи применения кроссовой коммутации на сети связи (управление каналами связи и каналами коммутации), а также рассмотрен метод укрупнения состояний пучка, позволяющий определять важные характеристики управляющей информации на сети.

## 11.2. Обходные направления и использование метода эквивалентных замен при расчете числа линий в обходных пучках

**Обходные направления.** Установление соединений между абонентами различных АТС районированной телефонной сети осуществляется с помощью межстанционных соединительных линий (СЛ). При этом для улучшения использования соединительных линий

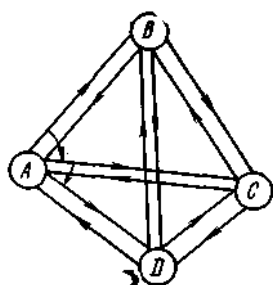


Рис. 11.1. Упрощенная схема сети с четырьмя районными АТС

и повышения вероятности установления соединения современные системы автоматической коммутации (координатные, квазиэлектронные) позволяют помимо основного пути установления соединения (пути первого выбора) использовать один или несколько обходных путей (пути второго и последующего выборов). Например, на сети, содержащей четыре районных АТС, упрощенная схема которой приведена на рис. 11.1, установление соединений между абонентами, включенными в АТС  $A$  и АТС  $B$ , может производиться с использованием одной из СЛ пучка  $AB$  (путь первого выбора), но если все СЛ этого пучка заняты, то можно использовать обходный путь  $ACB$  (путь второго выбора) с занятием одной из СЛ пучка  $AC$  и одной

пучков, составляющих обходный путь). Если же все СЛ хотя бы в одном из рассматриваемых пучков ( $AC$  или  $CB$ ) заняты, то можно использовать обходный путь третьего выбора, например  $ADB$ .

Таким образом, основная часть телефонной нагрузки, поступающей от абонентов АТС  $A$  к абонентам АТС  $B$  (интенсивность поступающей нагрузки  $y_{AB}$ ), будет обслужена СЛ пучка  $AB$ , однако некоторая часть этой нагрузки в моменты занятости всех линий пучка  $AB$  будет предлагаться пучкам  $AC$  и  $CB$ , составляющим путь второго выбора. Эту часть нагрузки называют *избыточной нагрузкой* ( $R_{AB}$ ). Следовательно, пучок  $AC$  должен обслуживать как поступающую нагрузку  $y_{AC}$ , так и избыточную нагрузку  $R_{AB}$ .

Кроме того, если СЛ пучка  $AC$  используются также и для установления соединений между АТС  $A$  и  $D$  ( $y_{AD}$ ) по обходному пути  $ACD$  в случае, когда все СЛ пучка  $AD$  (путь первого выбора) заняты, тогда пучок  $AC$  будет обслуживать поступающую нагрузку  $y_{AC}$ , избыточную нагрузку  $R_{AB}$  (оставшуюся часть нагрузки  $y_{AB}$ , не обслуженную пучком  $AB$ ), и избыточную нагрузку  $R_{AD}$  (оставшуюся от нагрузки  $y_{AD}$ , предложенной пучку  $AD$ ).

Если поступающая нагрузка создается простейшим потоком вызовов, то избыточный поток вызовов будет иметь другой характер, его нельзя описать пуассоновским распределением и считать простейшим потоком. Поэтому для описания смеси поступающего и избыточного потоков телефонных вызовов в том случае, когда одни и те же пучки СЛ обслуживают и поступающие, и избыточные потоки, средние значения нагрузки оказываются недостаточными и расчет числа линий в таких пучках не может производиться обычными методами по средним значениям.

**Параметры избыточной нагрузки.** Рассмотрим полнодоступный пучок из  $v$  линий, на первую линию которого поступает поток с интенсивностью  $y$ . Вызовы, поступающие в моменты занятости первой линии, предлагаются для обслуживания второй и последующим

линиям пучка и образуют избыточный поток для первой линии пучка. Аналогичным образом можно рассматривать избыточный поток для первых двух линий пучка, поступающий на все остальные линии, и избыточный поток для любого числа первых  $v_1$  линий рассматриваемого

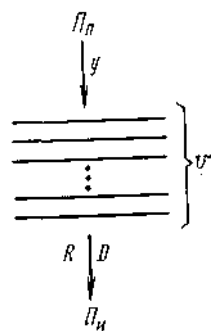


Рис. 11.2. Схема полнодоступного пучка

На рис. 11.2 приведен полнодоступный пучок, содержащий  $v$  линий, на который поступает поток  $\Pi_p$ , характеризующийся интенсивностью нагрузки  $y$ . Избыточный поток  $\Pi_n$  создает интенсивность нагрузки  $R$ . Если считать, что поступающий поток  $\Pi_p$  простейший, то избыточный поток  $\Pi_n$  не будет простейшим. Вызовы этого потока могут появиться не в любой момент рассматриваемого периода, а только в моменты, когда все  $v$  линий пучка заняты, т. е. вызовы избыточного потока сосредоточены только на части рассматриваемого интервала времени, значит, избыточный поток более концентрирован. При одной и той же нагрузке избыточный поток требует больше линий для своего обслуживания, чем простейший поток.

Для характеристики статистических (случайных) колебаний избыточного потока кроме интенсивности нагрузки, т. е. средней величины (первого момента случайной величины), используют также дисперсию  $\sigma^2$  (второй момент). Неравномерность избыточного потока характеризуется чаще всего отношением дисперсии к среднему значению нагрузки – коэффициентом скупенности

$$z = \sigma^2/R \quad (11.1)$$

или коэффициентом рассеяния

$$D = \sigma^2 - R, \quad (11.2)$$

представляющим собой разность между дисперсией и средним значением нагрузки.

Если учесть, что для простейшего потока дисперсия  $\sigma^2$  равна среднему значению  $R$ , то указанные коэффициенты будут равны:  $z=1$ ,  $D=0$ . Для выровненных потоков  $z < 1$ , а  $D$  отрицательно; для избыточных потоков  $z > 1$  и  $D > 0$ .

Таким образом, процесс обслуживания поступающего потока полнодоступным пучком, состоящим из  $v$  линий, характеризуется четырьмя величинами:  $y$ ,  $v$ ,  $R$  и  $D$ .

Поступающий поток, который предполагается простейшим, описывается одним параметром – средним значением нагрузки, так как коэффициент рассеяния для простейшего потока  $D=0$ . Избыточный поток характеризуется двумя параметрами – средним значением избыточной нагрузки  $R$  и коэффициентом рассеяния  $D > 0$ . Полнодоступный пучок характеризуется одной величиной – числом линий  $v$ .

Значение интенсивности избыточной нагрузки можно рассчитать по формуле Эрланга:

$$R = yp = y E_v(y) = f(y, v), \quad (11.3)$$

а для коэффициента рассеяния избыточной нагрузки справедливо следующее выражение:

$$D = R \left( \frac{y}{v+1-y+R} - R \right) = \varphi(y, v, R). \quad (11.4)$$

В ф-лах (11.3) и (11.4) каждая пара параметров  $y$ ,  $v$ ,  $R$ ,  $D$  определяет два других. Если на один и тот же пучок поступает несколько статистически независимых друг от друга потоков со средними значениями избыточной нагрузки  $R_1, R_2, \dots, R_k$  и коэффициентами рассеяния  $D_1, D_2, \dots, D_k$ , то среднее значение нагрузки и коэффициент рассеяния объединенного потока равны сумме соответствующих параметров этих потоков:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_k; \quad D = D_1 + D_2 + \dots + D_k. \quad (11.5); (11.6)$$

Статистически независимыми потоками можно считать избыточные потоки от различных пучков линий, на каждый из которых поступает простейший поток от отдельной группы источников нагрузки. Примерами статистически зависимых потоков могут служить поступающий и избыточные потоки одного и того же пучка линий или избыточные потоки, вызовы которых хотя бы частично обслуживались одними и теми же линиями.

**Метод эквивалентных замен.** Рассмотрим метод расчета числа линий в полностью доступном

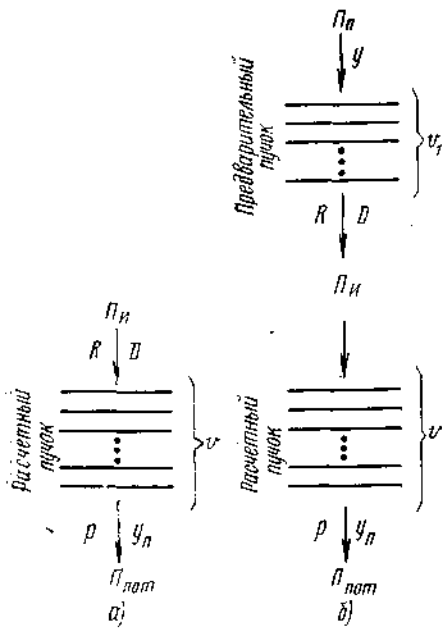


Рис. 11.3. Схемы, иллюстрирующие метод эквивалентных замен

пучке, на который поступает избыточный поток  $\Pi_{и}$ , характеризующийся средним значением нагрузки  $R$  и коэффициентом рассеяния  $D > 0$  (рис. 11.3а). Избыточный поток  $\Pi_{и}$  мог образоваться суммированием нескольких избыточных и простейших потоков, и при определении его параметров  $R$  и  $D$  в случае их статистической независимости можно использовать ф-лы (11.5) и (11.6).

Расчет полностью доступного пучка по рис. 11.3а заключается в определении числа линий  $v$ , если заданы характеристики потока  $R$ ,  $D$  и указана допустимая вероятность потерь  $p$  или потерянная нагрузка  $y_p$ , характеризующие поток потерянных вызовов  $\Pi_{пот}$ .

Основная идея метода эквивалентных замен заключается в том, что поступающий поток  $\Pi_{и}$  с параметрами  $R$  и  $D$  заменяется потоком, прошедшим  $v_1$  линий предварительного полностью доступного пучка (рис. 11.3б) и имеющим те же самые характеристики  $R$  и  $D$ .

Пользуясь соотношениями (11.3) и (11.4), по заданным величинам  $R$  и  $D$  (рис. 11.3б) можно

линии  $v_1$  в предварительном полностью доступном пучке. С другой стороны, предварительный и расчетный пучки составляют один общий полностью доступный пучок линий, для которого известна интенсивность поступающей нагрузки  $y$  простейшего потока и задана вероятность потерь  $p$  или потерянная нагрузка  $y_p$ . Поэтому, пользуясь первой, формулой Эрланга, можно определить суммарное число линий в полностью доступном пучке, обслуживающем нагрузку  $y$  с потерями  $p$ , т. е. определить сумму  $v_{\Sigma} = v_1 + v$ . Отсюда искомое число линий, в расчетном полностью доступном пучке  $v = v_{\Sigma} - v_1$ .

Число линий  $v_1$  может быть дробным, и его следует использовать в таком виде до получения результатов для  $v$ . Значение  $v$  целесообразно округлить до целого числа в сторону увеличения.

### 11.3. Динамическое управление. Характер задач, возникающих при управлении потоками

Установление соединений на сети с использованием обходных направлений, описанное в предыдущем параграфе, является одним из способов управления сетью связи. Как указано в парагр. 11.1, этот способ можно отнести и к управлению ресурсами, и к управлению потоками. В зависимости от точки зрения можно считать, что при определенном состоянии сети (а точнее, при определенном состоянии пучка линий первого выбора, например при занятости всех линий этого пучка) поступившему вызову из потока, обслуживаемого пучком первого выбора, предоставляются соединительные средства из других пучков, и этим самым производится управление имеющимися ресурсами сети. С другой стороны, этот же процесс можно рассматривать как изменение потока вызовов, обслуживаемого рассматриваемым пучком, за счет присоединения поступившего вызова к другому потоку, обслуживаемому другими пучками линий, т. е. можно рассматривать как разрежение рассматриваемого потока (управление потоками).

Возможность двойного толкования обусловлена тем, что управление сетью при использовании обходных путей осуществляется на время соединения. Если же изменять правила (алгоритмы) установления соединения, структуру сети или другие показатели функционирования сети на время, существенно большее, чем длительность передачи информации, то такое управление можно более четко отнести к управлению потоками или управлению техническими средствами сети.



*Способ управления, при котором производится изменение планок распределения потоков по направлениям, по величине или характеру распределения вызовов в потоке в зависимости от изменения состояния сети (ситуации на сети) или ее отдельных частей, получил название динамического управления.*

В общем случае при динамическом управлении на сети связи для оценки состояния сети или ее отдельных частей устройства, предназначенные для управления сетью, должны накапливать информацию о состоянии сети в течение некоторого периода времени, усреднять ее и производить управление по средним значениям. Длительность периода накопления информации о состоянии сети определяет эффективность управления. Очень короткие периоды не позволяют получить достаточно достоверную информацию, и управление по коротким интервалам накопления информации может оказаться неэффективным из-за принятия слишком частых и поспешных решений, не обеспечивающих эффективности функционирования сети. С другой стороны, чрезмерно длинные интервалы наблюдений без принятия решений об изменении плана распределения потоков делают сеть консервативной, работающей неэффективно в течение длительных периодов.

Как указано в предыдущем параграфе, при установлении соединений по обходным путям усложняется описание потоков сообщений в пучках, которые обслуживают избыточные потоки, и поэтому расчет числа соединительных путей в таких пучках становится более сложным. Пучки первого выбора, которые не обслуживают избыточных потоков, рассчитываются обычными методами с учетом наличия в них большой вероятности отказов.

В случае динамического управления при изменении плана распределения потоков характер потоков сообщений может изменяться в любых пучках сети. Само изменение плана распределения потоков на сети при динамическом управлении может осуществляться как за счет выбора соответствующих путей соединения (приводящего к разделению или объединению потоков), так и за счет запрещения обслуживания отдельных вызовов.

Составление плана распределения потоков на сети может осуществляться с использованием нескольких способов выбора оптимальных путей установления соединений (*волнового, матричного, рельефов* или *игрового* способа). Часть способов основывается на сборе информации путем непосредственного контроля за состоянием элементов сети; другие способы используют косвенные методы сбора информации путем анализа статистических данных о предыдущих соединениях.

На сети различают *централизованный, зонный* и *децентрализованный* способы управления.

При централизованном способе управления вся информация накапливается в едином центре и на ее основании принимается общее решение для всех элементов сети, которое и передается в соответствующие звенья сети для его исполнения.

Другим, противоположным способом управления является децентрализованное управление, при котором отдельные узлы сети принимают местные решения об алгоритмах установления соединений на основании информации от близлежащих (соседних) узлов.

Зонный способ управления является промежуточным, между указанными выше двумя способами. При этом способе информация о состоянии сети собирается в пределах части сети (зоны) и решения, принимаемые зонным управляющим устройством, предназначаются для их использования в пределах рассматриваемой зоны.

Из сказанного вытекает, что задачи теории телетрафика для сети с динамическим управлением отличаются сложностью. Помимо того, что, как и другие задачи, сформулированные для сети, они относятся к весьма сложной структуре реальных информационных сетей, потоки, обслуживаемые сетью, из-за изменения плана распределения потоков могут принимать сложный характер, трудно поддающийся аналитическому описанию. В связи с этим большинство задач определения пропускной способности сети или сравнения различных алгоритмов установления соединений на сети при динамическом управлении может решаться лишь методом статистического моделирования (см. гл. 7).

#### **11.4. Кроссовая коммутация как управление структурой сети**

Как указано в 11.1, в связи с изменением схемы потоков сообщений во времени

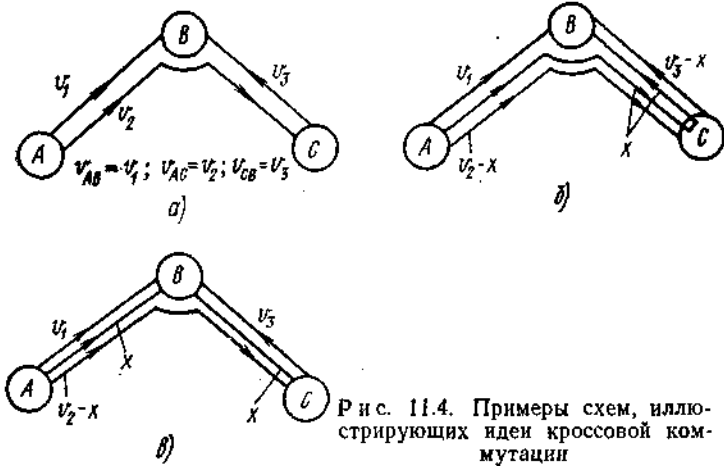


Рис. 11.4. Примеры схем, иллюстрирующих идеи кроссовой коммутации

соответствие между существующей схемой потоков и запроектированной структурой сети может сохраняться лишь в течение некоторого периода времени. В другие временные интервалы наблюдается существенное отличие структуры сети от схемы потоков сообщений. Основной задачей динамического управления на сети (см. парагр. 11.3) является изменение схемы потоков сообщений с целью увеличения соответствия между распределением потоков и структурой.

Возможен и другой путь установления соответствия – за счет изменения структуры сети. Рассмотрим элемент сети, содержащий три узла (рис. 11.4) и обеспечивающий связь от узла  $A$  к узлам  $B$  и  $C$  и от узла  $C$  к узлу  $B$ . Предположим, что соединительные линии между узлами  $A$  и  $C$  проходят через узел  $B$  без включения их в коммутационную систему узла. Будем считать, что в начальный момент времени структура сети (распределение СЛ в пучках) соответствует распределению нагрузок между узлами (рис. 11.4а). Если с течением времени распределение нагрузок изменилось таким образом, что  $u_{AB}$  увеличилось, а  $u_{AC}$  и  $u_{CB}$  уменьшились, то при наличии возможности установления соединений по обходным путям и отсутствии свободных СЛ в пучке  $AB$  для соединений от узла  $A$  к узлу  $B$  будут заниматься СЛ в пучках  $AC$  и  $CB$ . Это равносильно перераспределению СЛ, показанному на рис. 11.4б, на котором в среднем  $x$  линий в пучках  $AC$  и  $CB$  заняты для установления соединений от узла  $A$  к узлу  $B$ , а всего для этой цели используется  $u_1 + x$  линий. Для соединений от узла  $A$  к узлу  $C$  используется в среднем  $u_2 - x$  линий, а для соединения между узлами  $C$  и  $B$  –  $u_3 - x$  линий.

Такое распределение имеющихся линий в указанном случае нерационально. Если пучок линий  $AC$ , состоящий из  $x$  линий и проходящий через узел  $B$ , расчленив на узле  $B$  на две части –  $AB$  и  $BC$ , то  $x$  линий на участке  $AB$  можно использовать для обслуживания нагрузки  $u_{AB}$ , а освободившиеся  $x$  линий на участке  $BC$  могут быть использованы для установления других соединений и, в частности, между узлами  $B$  и  $C$  (рис. 11.4 в). Кроме того, структура сети по рис. 11.4 в не требует свободных линий в пучке  $CB$  при установлении соединений от узла  $A$  к узлу  $B$ .

Указанную выше возможность превращения структуры сети по рис. 11.4б в структуру, соответствующую рис. 11.4 в, можно осуществить за счет системы кроссовой коммутации (СКК), которая должна переключать СЛ в узлах при изменениях потоков, приводя в соответствие изменившемуся плану распределения потоков структуру сети.

В рассмотренном примере СКК улучшает использование СЛ. Кроме того, СКК может сократить объем коммутационного оборудования на узлах за счет изъятия части СЛ из коммутационной системы узла и уменьшить нагрузку на управляющие устройства в транзитном узле (в рассматриваемом случае узла  $C$ ).

Если пренебречь нестационарным режимом, возникающим непосредственно после изменения структуры сети с помощью СКК, то методы расчета сети, использующей СКК, практически остаются теми же, что и без СКК. Сравнение структур сети и определение эффективности СКК сводятся к решению нескольких однотипных задач.

### 11.5. Метод укрупнения состояний пучков при определении характеристик управляющей информации

Для того чтобы управлять элементами сети (потоками, структурой или тем и другим элементами) в зависимости от состояния отдельных частей сети (пучков каналов передачи или каналов коммутации), необходимо располагать информацией о состояниях этих частей. Например, при применении обходных путей (см. парагр. 11.2) на сети по рис. 11.1 (если для установления соединения от станции  $A$  к станции  $B$  в пучке  $AB$  нет прямых каналов) можно

воспользоваться каналами в обходных направлениях  $ACB$  или  $ADB$ . При условии, что узел  $A$  располагает информацией о числе занятых линий в пучках  $AC$ ,  $CB$ ,  $AD$  и  $DB$ , можно выбрать наиболее эффективный путь установления соединения. Если же такой информации нет, то, устанавливая соединение по обходному пути  $ACB$  и занимая для этого канал в пучке  $AC$ , можно получить отказ в соединении из-за занятости всех каналов в пучке  $CB$ , в то время как по пути  $ADB$  имеются свободные каналы во всех пучках. Таким образом, отсутствие информации о состоянии пучков в этом примере приводит к задержке установления соединения и к увеличению нагрузки на каналы, занимаемые напрасно.

Кроме того, известно, что использование обходных путей эффективно лишь до тех пор, пока нагрузка на каналы сети не превысит некоторое пороговое значение. При нагрузках выше этого порога целесообразно исключить возможность установления соединений по обходным путям. Для того чтобы реализовать такое управление сетью, необходима также информация о состоянии отдельных частей сети.

При получении и использовании указанной информации для управления сетью следует учитывать степень детализации передаваемой информации. Если передавать слишком подробные сведения о каждом состоянии сети (отличающиеся занятостью или освобождением хотя бы одного канала), то во многих случаях данную информацию нельзя использовать из-за того, что смена таких состояний сети происходит быстрее, чем может быть передана информация об изменении состояний. С другой стороны, слишком длительное накопление информации об изменяющихся состояниях (укрупнение состояний) с последующей ее передачей не позволяет оперативно реагировать на эти изменения. Кроме того, нужно иметь в виду, что не всякая информация существенна для управления сетью, а слишком детальная информация излишне загружает каналы и управляющие устройства.

Аналогичные соображения имеют место при передаче информации о состояниях отдельных частей сети при управлении потоками (динамическом управлении) или управлении структурой сети (кроссовой коммутации).

При получении формулы Эрланга (см. гл. 4) для полнодоступного пучка с потерями рассматривались состояния, при которых в пучке из  $\nu$  линий занято ровно  $k$  любых линий. При выводе расчетных формул для звеньевых схем (см. гл. 8) использовались состояния с занятостью  $k$  определенных (фиксированных) линий. Как те, так и другие состояния являются макросостояниями полнодоступного пучка, и пребывание в таких состояниях сравнительно кратковременное.

В отличие от указанных состояний, можно рассматривать укрупненные состояния с  $k$  и более занятыми линиями, с  $k$  и менее занятыми линиями или с числом занятых линий, находящимся в некоторых границах между  $k_1$  и  $k_2$ . Информация о данных состояниях является полезной при управлении на сети, а среднее время пребывания пучка линий в одном из таких укрупненных состояний значительно больше среднего времени пребывания в одном из указанных выше макросостояний. Увеличенное время пребывания пучка в укрупненном состоянии позволяет передать информацию до того, как она устареет, и уменьшить частоту и суммарный объем передаваемых сообщений.

Рассмотрим полнодоступный пучок из  $\nu$  линий, на который поступает простейший поток вызовов с параметром  $\lambda$ . Предположим, что длительности обслуживания вызовов (время

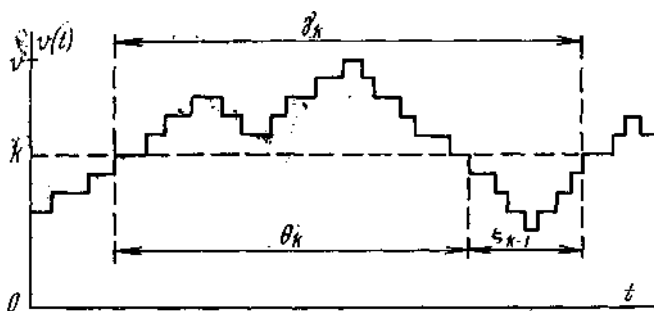


Рис. 11.5 Схематическое изображение одной из возможных реализаций процесса в полнодоступном пучке линий

занятия линии для установления соединения и передачи информации) — взаимно независимые случайные величины с показательным распределением и средним значением  $1/\beta$ . При работе сети рассматриваемый полнодоступный пучок будет изменять свои состояния, отличающиеся числом занятых линий в пучке.

На рис. 11.5 приведена одна из возможных реализаций процесса изменения состояний пучка во времени.

На оси ординат отложены значения числа занятых линий в пучке  $\nu(t)$ , которое изменяется в пределах  $0 \leq \nu(t) \leq \nu$ , а на оси абсцисс – текущее время. На рисунке отмечено некоторое состояние с  $k$  занятыми линиями.

В течение случайного интервала времени, обозначенного  $\theta_k$ , марковский процесс  $\nu(t)$  изменения числа линий в рассматриваемом пучке будет находиться в состоянии с  $k$  и более ( $k$  и «выше») занятыми линиями, в течение случайного интервала времени  $\zeta_{k-1}$  процесс находится в состоянии с  $k-1$  и менее ( $k-1$  и «ниже») занятыми линиями, а случайный отрезок времени  $\gamma_k$  будет представлять собой длительность полного периода изменения состояний пучка рассматриваемого  $k$ -го уровня.

На рис. 11.5 высота каждой ступеньки реализации Процесса (траектории процесса) одинакова и выражает занятие или освобождение одной линии пучка. Ширина каждой ступеньки представляет собой время пребывания пучка в некотором состоянии  $i$  ( $i$  – число занятых линий) и является случайным интервалом времени, который распределен по показательному закону, так как процесс  $\nu(t)$  является марковским.

Случайный интервал  $\theta_k$  представляет собой время пребывания рассматриваемого пучка в состоянии с  $k$  и более занятыми линиями (состояние  $B_k$ ,  $1 \leq k \leq \nu$ ).

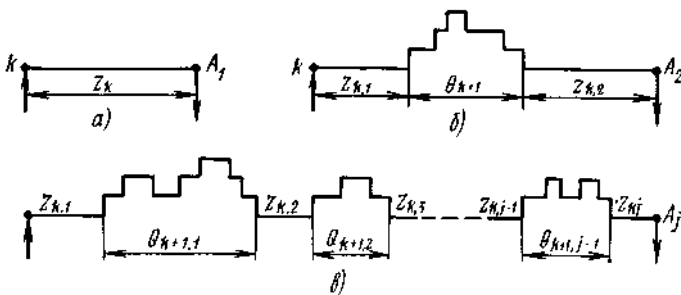


Рис. 11.6. Схематическое изображение различных типов траектории процесса

Если в некоторый момент времени рассматриваемый пучок пришел снизу в состояние  $k$ , тогда дальнейшее поведение процесса (траектория) будет принадлежать только к одному из изображенных на рис. 11.6 типов. На этом рисунке показаны траектории процесса  $A_1, A_2, \dots, A_j$  в пределах случайного промежутка времени  $\theta_k$ , в

траектория  $A_1$  (рис. 11.6 а) соответствует случайному времени пребывания  $z_k$  в состоянии  $k$  с последующим уменьшением числа занятых линий (переход «вниз»); траектория  $A_2$  (рис. 11.6б) содержит некоторое случайное время  $z_{k,1}$ , в течение которого пучок находится в состоянии  $k$ , затем случайное время  $\theta_{k+1}$ , в течение которого пучок находится в состоянии  $k$  и «выше», и, наконец, случайное время  $z_{k,2}$ , в течение которого рассматриваемый пучок будет находиться в состоянии  $k$  до перехода «вниз». Как видно из рис. 11.6, первый тип траектории не содержит «восхождений» в область состояний  $k+1$  и «выше», а второй тип траектории имеет одно «восхождение» в эту область. Аналогично третий тип траекторий будет содержать два «восхождения», а в общем случае  $j$ -й тип траектории будет иметь  $j-1$  «восхождений» (рис. 11.6 в). Число случайных интервалов пребывания в состоянии  $k$  для траектории  $A_j$  будет равно  $j$ . Далее используется взаимная независимость случайных величин типа  $z$  и  $\theta$ , а также справедливость показательного распределения интервалов типа  $z$ . Принимая во внимание, что условные вероятности перехода пучка в некоторый момент из состояния  $i$  в «верхнее» состояние  $i+1$  и «нижнее» состояние  $i-1$  (при условии, что в этот момент произойдет изменение состояния) равны соответственно  $\lambda/(\lambda+i\beta)$  и  $i\beta/(\lambda+i\beta)$ , а условные вероятности перехода «вверх» из состояния 0 и «вниз» из состояния  $\nu$  равны единице, можно найти функцию распределения случайных величин  $\theta_k$ , т. е.  $F_k(t) = P\{\theta_k \leq t\}$ , которая представляет собой гиперэкспоненту.

Для среднего времени пребывания пучка в состоянии с  $k$  и более занятыми линиями (состояние  $B_k$ ) может быть получено рекуррентное выражение следующего вида:

$$\tau_k = M(\theta_k) = 1/(k\beta) + (\lambda/k\beta)\tau_{k+1} \quad (k = 1, \dots, \nu). \quad (11.7)$$

Учитывая, что  $\tau_\nu = 1/\nu\beta$ , а  $\tau_{\nu+1} = 0$ , из системы ур-ний (11.7) можно найти  $\tau_k$  в явном виде:

$$\tau_k = \frac{1}{\beta} \sum_{i=0}^{\nu-k} \frac{\lambda^i (k-1)!}{(k+i)!}, \quad (11.8)$$

где  $y = \lambda/\beta$ . Аналогичными рассуждениями можно получить стационарное распределение вероятностей случайной величины  $\zeta_k$ , т. е. времени пребывания пучка в состоянии с  $k$  и менее занятыми каналами (состояние  $H_k$ ), а также рекуррентное соотношение для среднего времени пребывания в этом состоянии:

$$t_k = M(\zeta_k) = 1/\lambda + (k\beta/\lambda)t_{k-1}. \quad (11.9)$$

Принимая во внимание, что  $t_{-1} = 0$ , можно получить выражение для  $t_k$  в явном виде:

$$t_k = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{(k-i)!} \frac{1}{y^i} \quad (k = 0, \dots, v-1). \quad (11.10)$$

Если  $\gamma_k$  — длительность случайного интервала времени между соседними моментами перехода в состояние  $k$  «снизу» (длительность периода), то  $\gamma_k = \theta_k + \zeta_{k-1}$ . Учитывая, что случайные величины  $\theta_k$  и  $\zeta_{k-1}$  независимы, для средней длительности периода справедлива формула

$$\begin{aligned} T = M(\gamma_k) &= M(\theta_k) + M(\zeta_{k-1}) = \frac{1}{\beta} \sum_{i=0}^{v-k} \frac{y^i (k-1)!}{(k+1)!} + \\ &+ \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k-1)!}{(k-1+i)!} \frac{1}{y^i} \end{aligned} \quad (11.11)$$

для любого  $k = 1, \dots, v$ .

Анализ выражений, полученных для средних значений рассматриваемых интервалов времени, показывает, что время пребывания в укрупненных состояниях существенно больше времени пребывания в макросостояниях, и поэтому информация о наступлении таких укрупненных состояний за время ее передачи не успевает устареть. Во многих случаях управления на сети (в частности, при установлении соединений по обходным путям) необходимо передавать именно такую информацию о наступлении состояний  $B_k$  или  $H_k$ , поскольку принятие решения о запрещении или разрешении пользоваться обходными путями зависит от этих укрупненных состояний.

Следует также указать, что во многих случаях управления на сети связи границы принятия противоположных решений (например, запрещения и разрешения использования обходных путей) должны отличаться друг от друга, т. е. должна существовать определенная полоса, в которой при пересечении ее нижней границы снизу алгоритм функционирования остается прежним до пересечения верхней границы, после чего алгоритм меняется. При пересечении верхней границы сверху измененный алгоритм сохраняется до пересечения нижней границы рассматриваемой полосы. Только после ее пересечения восстанавливается первоначальный алгоритм. В этом случае определение среднего времени работы одного из алгоритмов сводится к использованию изложенных выше результатов.

### Контрольные вопросы

1. Назовите способы управления сетью связи и укажите их отличительные особенности.
2. Каков качественный эффект от управления техническими средствами сети при использовании кроссовой коммутации?
3. Что такое динамическое управление на сети связи и каковы способы выбора путей установления соединения?
4. В чем заключается смысл установления соединений по обходным путям и каков эффект от такого способа?
5. Что такое избыточный поток вызовов и каково его простейшее описание?
6. Чему равен коэффициент рассеяния избыточного потока вызовов и простейшего потока вызовов?
7. Как определить величину избыточной нагрузки для полнодоступного пучка линий при поступлении на него простейшего потока вызовов?
8. Каково выражение для определения коэффициента рассеяния для избыточной нагрузки полнодоступного пучка линий при поступлении на него простейшего потока вызовов?
9. Как определить нагрузку и коэффициент рассеяния потока, получающегося путем объединения нескольких избыточных потоков вызовов?
10. В чем заключается идея метода эквивалентных замен?

11. Каково назначение метода укрупнения состояний?
12. Как определить период повторения укрупненных состояний?

## Измерения параметров нагрузки и потерь

### 12.1. Цели и задачи измерений

Измерения параметров нагрузки и потерь осуществляются с целью получения: 1) информации для прогнозирования нагрузки при проектировании станций и сетей; 2) для управления сетью в процессе ее эксплуатации и развития; 3) для практической проверки основных положений теории телетрафика. Эффективность капитальных вложений на развитие сетей и качество их функционирования существенным образом зависят от регулярности измерений, правильности обработки и толкования статистических данных параметров нагрузки.

При организации измерений параметров нагрузки в соответствии с поставленной целью необходимо решить следующие вопросы: установить объекты измерений; определить период измерений; установить продолжительность и величину допустимой ошибки измерений.

Объектами первичного учета могут быть: число вызовов, поступающих от источников разных категорий; число вызовов по межстанционным соединительным линиям различных направлений; число занятий различных видов – состоявшихся разговоров, случаев занятости и неответа абонентов, ошибок абонентов, вызовов, не окончившихся разговором по техническим причинам; продолжительность разговора, прослушивания сигнала контроля посылки вызова при ответе и неответе абонента и сигнала «занято»; число одновременно занятых приборов. В соответствии с целями измерений для экономии времени и средств необходимо выбирать минимальное количество объектов наблюдений.

При выборе периода измерений необходимо учитывать, что в основе расчета объема оборудования станций и сети лежит нагрузка в ЧНН. В соответствии с принятым методом измерения нагрузки в ЧНН (см. гл. 3) наблюдения за элементами нагрузки проводятся в наиболее нагруженные месяцы года, дни недели и периоды суток. Периоды наибольшей нагрузки в пределах суток можно определить, зная данные о расходе электрического тока по часам суток. Периоды наибольшей нагрузки находятся обычно в пределах от 9 до 22 часов.

Продолжительность измерений определяется в зависимости от необходимого числа измерений, которое, в свою очередь, зависит от величины допустимой ошибки измерений. Из математической статистики известно, что при измерении случайных величин число измерений находится в обратной зависимости от квадрата величины допустимой ошибки. Например, для увеличения точности результатов измерений в 2 раза число измерений необходимо увеличить в 4 раза. Поэтому не следует требовать от измерений большей точности, чем это нужно для решения поставленной задачи.

### 12.2. Принципы измерений параметров нагрузки и потерь

Измерения параметров нагрузки и потерь можно классифицировать следующим образом:

по способу получения данных – *автоматические* и *ручные*;

по способу регистрации измеряемой величины – *прямые* и *косвенные*;

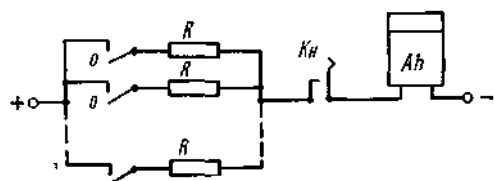


Рис. 12.1. Схема непрерывного измерения обслуживаемой нагрузки

по способу организации процесса измерений – *непрерывные*, *периодические* и *эпизодические* (спорадические);

по охвату объектов изучаемой совокупности – *сплошные* и *выборочные*.

Ручные измерения допускается применять только при отсутствии автоматической аппаратуры, так как они являются слишком дорогостоящими и не

обеспечивают необходимой точности измерений.

Примером прямых измерений может служить регистрация числа вызовов с помощью счетчиков при измерении числа поступающих вызовов, а косвенных измерений – измерение

интенсивности обслуженной нагрузки путем регистрации через некоторые интервалы времени числа одновременно занятых приборов.

Непрерывные измерения являются дорогостоящими и организуются при измерении коэффициентов концентрации нагрузки, определении характера распределения нагрузки по часам суток, дням недели, месяцам года. В большинстве случаев параметры нагрузки измеряются периодически, так как это дешевле непрерывных измерений и при выборе соответствующей длительности измерений обеспечивают требуемую точность.

Эпизодические (спорадические) измерения могут начинаться, например, при появлении симптомов неудовлетворительной работы оборудования.

Для экономии средств и затрат труда при наблюдениях за параметрами нагрузки применяются, как правило, не сплошные, а выборочные измерения. В математической статистике вся подлежащая изучению совокупность однородных элементов называется *генеральной совокупностью*, а часть генеральной совокупности, отобранная для измерения, – *выборочной совокупностью*. Объем выборочной совокупности и ошибки выборочных измерений рассматриваются в следующих разделах данной главы.

При измерении нагрузки наибольшее распространение получили следующие три принципа: непрерывного измерения, сканирования, подсчета числа случайных событий.

*Принцип непрерывного измерения* обслуженной нагрузки поясняется схемой рис. 12.1. Каждый прибор имеет измерительный резистор  $R$ , через который ток протекает, когда прибор занят, и не протекает, когда он свободен:

$$I(t) = \frac{U}{R} v(t), \quad (12.1)$$

где  $v(t)$  – число занятых устройств в момент  $t$ ;  $U$  – напряжение питания.

В приборе, измеряющем ампер-часы, ток интегрируется за весь период измерения  $T$ , так что обслуженная нагрузка составит

$$y_0 = k \int_0^T I(t) dt, \quad (12.2)$$

где  $k$  – градуировочная постоянная.

*Принцип сканирования* заключается в том, что следящее устройство поочередно подключается к линиям исследуемого пучка и в случае занятости линии посылает импульс в суммирующий счетчик. Интенсивность обслуженной нагрузки определяется в этом случае как среднее число одновременно занятых линий по формуле

$$y_0 = \left( \sum_{i=1}^n v_i \right) / n, \quad (12.3)$$

где  $v_i$  – число занятых линий при  $i$ -м сканировании;  $n$  – общее число сканирований.

*Принцип подсчета числа случайных событий* основан на приеме импульса при появлении каждого события. Таким способом регистрируется число поступивших, обслуженных и потерянных вызовов при измерении потерь по вызовам, число случаев занятости всех линий пучка при измерении потерь по времени и т. д. Этот принцип может быть использован также при измерении нагрузки, обслуженной устройствами, время занятия которых постоянно.

Все три принципа находят широкое применение в аппаратуре измерения параметров нагрузки и потерь.

### 12.3. Обработка результатов измерений

Основными задачами обработки результатов измерения являются:

вычисление оценки измеряемого параметра;

вычисление степени достоверности этой оценки.

При статистических измерениях за наиболее вероятное значение измеряемой величины принимается *среднее арифметическое значение*. Различают *среднюю генеральной*



совокупности (генеральную среднюю)

$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^k X_j N_j}{\sum_{j=1}^k N_j} \quad (12.4)$$

и среднюю выборочной совокупности (выборочную среднюю)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^m x_j n_j}{\sum_{j=1}^m n_j}, \quad (12.5)$$

где  $N_j, n_j$  – численность  $j$ -й группы элементов соответственно в генеральной и выборочной совокупностях;  $X_j, x_j$  – значения варьирующего признака в  $j$ -й группе элементов соответственно в генеральной и выборочной совокупностях;  $k, m$  – число групп элементов, в каждой из которых варьирующий признак принимает одно из своих значений, причем  $\sum_{j=1}^k N_j = N$  – число элементов генеральной совокупности,  $\sum_{j=1}^m n_j = n$  – число элементов выборочной совокупности.

Степень расхождений между собой отдельных значений изучаемого признака характеризуется среднеквадратическим отклонением. Формула среднеквадратического отклонения выборочной совокупности имеет вид

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x})^2 n_j}{n-1}} \quad (12.6)$$

и для генеральной совокупности

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X})^2 N_j}{N}}. \quad (12.7)$$

Важнейшей задачей обработки результатов измерений является оценка их точности. При обработке результатов измерений параметров нагрузки и потерь необходимо учитывать: ошибки регистрации, вносимые измерительной аппаратурой (аппаратурные); ошибки представительности выборки (репрезентативности); грубые ошибки или промахи.

*Аппаратурные ошибки*, в первую очередь, обусловлены принятым принципом измерений и классом точности измерительных приборов. Так, при непрерывном измерении облученной нагрузки (см. рис. 12.1) аппаратурная ошибка зависит от допусков на величину сопротивлений резисторов  $R$ , допустимых колебаний напряжения источника питания, класса точности прибора, фиксирующего ампер-часы.

Максимальная относительная аппаратурная ошибка  $\beta_a$  в данном случае является суммой относительных ошибок, возникающих вследствие неточности изготовления резисторов  $\beta_R$ , колебаний напряжения  $\beta_U$ , погрешности измерительного прибора  $\beta_n$ :

$$\beta_a = \beta_R + \beta_U + \beta_n. \quad (12.8)$$

При использовании принципа сканирования состояния коммутационной системы фиксируются лишь через интервалы сканирования  $\tau$ . Ясно, что чем меньше  $\tau$ , тем меньше величина ошибок, связанных со сканированием. Средняя величина относительной ошибки при измерениях с использованием сканирования вычисляется по формуле

$$\beta_c = \sqrt{\frac{1}{c} \left( \frac{1 + e^{\omega}}{1 - e^{\omega}} \omega - 2 \right)}, \quad (12.9)$$

где  $c$  – суммарное число занятий за период наблюдений;  $\lambda = \tau / \bar{t}$  – отношение интервала сканирования  $\tau$  к средней длительности одного занятия  $\bar{t}$ . Зависимость средней

относительной ошибки  $\beta_c$  от числа занятий  $c$  при различных значениях  $\omega$  приведена на рис. 12.2.

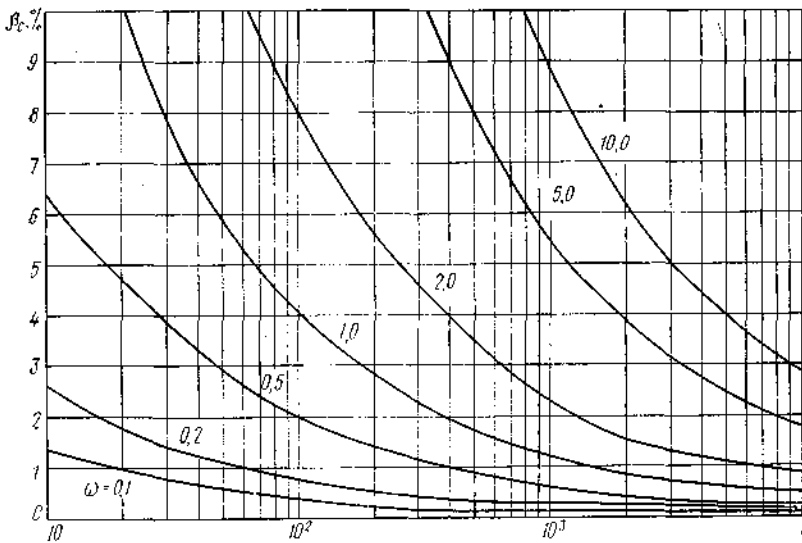


Рис. 12.2. Зависимость средней относительной ошибки измерений по принципу сканирования от числа занятий  $c$  при фиксированных значениях отношения интервала сканирования к средней длительности одного занятия

При использовании принципа подсчета числа сигналов от различных источников одним общим счетчиком появляются ошибки вследствие совпадения импульсов от нескольких источников. Ясно, что чем больше интенсивность поступления импульсов и длительность импульсов, тем больше вероятность совпадения импульсов. Зависимость средней относительной погрешности работы счетчика, используемого для фиксации независимых случайных импульсов, от интенсивности поступления импульсов  $\mu$  и

Ошибка репрезентативности является следствием того, что выборочная совокупность является частью генеральной совокупности, и так как часть всегда отличается от целого, то и выборочные характеристики  $\bar{x}$  и  $\sigma(x)$  могут отличаться от аналогичных характеристик  $\bar{X}$  и  $\sigma(X)$  генеральной совокупности.

Величина ошибки репрезентативности в значительной степени зависит от способа отбора и объема выборки.

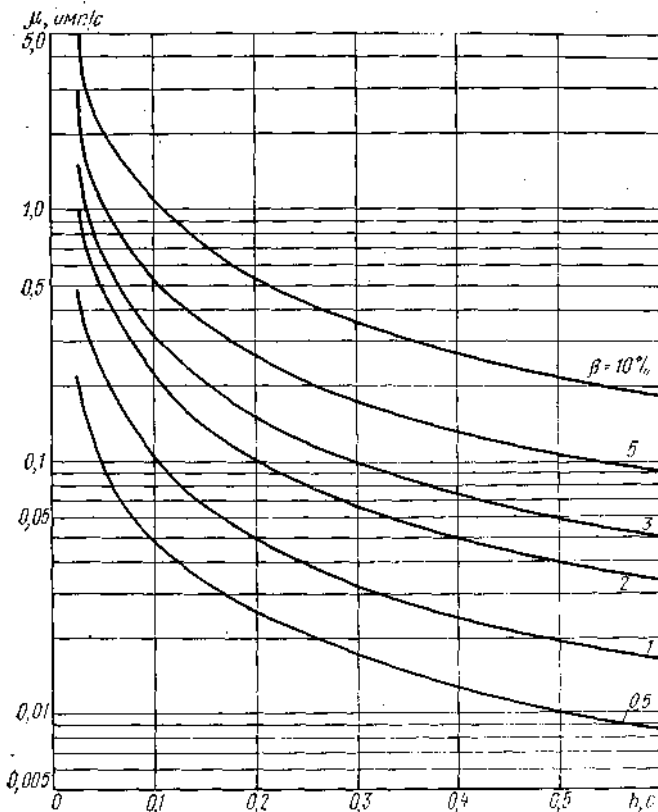


Рис. 12.3. Зависимость средней относительной ошибки работы счетчика независимых случайных импульсов  $\beta$  от интенсивности поступления импульсов  $\mu$  и длительности импульсов  $h$

Существуют различные способы выборочных наблюдений: случайный, типический, серийный. При случайном отборе каждая единица генеральной совокупности имеет одинаковые со всеми другими возможности попасть в выборочную совокупность.

В некоторых случаях может оказаться целесообразным рассматривать совокупность единиц не целиком, а расчлененную на группы (типы), единицы каждой из которых оказываются более похожими друг на друга, чем во всей совокупности. Выборка, произведенная в случайном порядке в каждой из установленных типических групп, называется типической. Объем выборки в каждой типической группе устанавливается пропорционально ее удельному весу в генеральной совокупности. При типическом отборе в выборочной совокупности отдельные группы оказываются представленными в такой же пропорциональности, что и в

генеральной совокупности. Это увеличивает точность выборочного наблюдения.

*Серийная* выборка предполагает отбор из генеральной совокупности не отдельных единиц, а целых серий. Серии единиц отбираются по принципу случайного отбора, в отобранных же сериях обследование производится методом сплошного учета.

Вычисление ошибки репрезентативности рассмотрим на примере случайного отбора. Процесс отбора при случайной выборке может быть *повторным* или *бесповторным*. *Повторный отбор* состоит в том, что каждый элемент, попавший в выборку, после регистрации его снова возвращается в генеральную совокупность и в дальнейшем может еще раз попасть в выборку. *Бесповторный отбор* состоит в том, что каждый элемент, попавший в выборку, в генеральную совокупность не возвращается и таким образом повторному измерению не подвергается.

Величина средней абсолютной ошибки репрезентативности случайной повторной выборки приближенно рассчитывается по формуле

$$\mu_n \approx \sigma(x) / \sqrt{n}, \quad (12.10)$$

где  $\sigma(x)$  – среднее квадратическое отклонение выборочной совокупности, рассчитывается по (12.6);  $n$  – число элементов выборочной совокупности.

Поскольку состав выборочной совокупности является случайным, то выборочная средняя в отдельных выборках может значительно отличаться от генеральной средней. Учитывая, что выборочные средние распределены по нормальному закону, с определенной вероятностью можно утверждать, что отклонения выборочной средней от генеральной средней не превысят заданной величины  $\Delta$ , которая называется *предельной ошибкой выборки*, а вероятность – *доверительной вероятностью*.

Предельная ошибка выборки  $\Delta$  связана со средней ошибкой  $\mu$  соотношением

$$\Delta = z \mu, \quad (12.11)$$

где  $z$  – коэффициент, зависящий от вероятности, с которой гарантируется предельная ошибка.

Значения доверительной вероятности  $p(z)$  для некоторых значений коэффициента  $z$  приведены в табл. 12.1.

ТАБЛИЦА 12.1

$z$	1,2816	1,6449	1,96	2,58	3,29	3,9
$P(z)$	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999	0,9999

Как видно из этой таблицы, с увеличением  $z$  вероятность  $p(z)$  быстро приближается к единице.

Величина относительной ошибки повторной выборки  $\beta_n$  с доверительной вероятностью  $p(z)$  рассчитывается по формуле

$$\beta_n = \Delta_n / \bar{x} = z \sigma(x) / \bar{x} \sqrt{n} = zV / \sqrt{n}, \quad (12.12)$$

где  $V = \sigma(x) / \bar{x}$  – коэффициент вариации, представляющий собой отношение среднее квадратического отклонения  $\sigma(x)$  к среднему значению признака выборочной совокупности.

Выражения (12.10) – (12.12) справедливы, если число элементов выборочной совокупности  $n$  достаточно большое, например  $n > 20 \div 50$ . Только в этом случае выборочные средние распределены по нормальному закону. При *малых выборках* кривая распределения выборочных средних является плосковершинной и описывается не нормальным распределением, а распределением Стьюдента (псевдоним английского ученого В. Госсета).

Предельная ошибка малой повторной выборки рассчитывается по формуле

$$\Delta_n^* = z_{n-1}^*(\sigma(x))/\sqrt{n-1}, \quad (12.13)$$

где  $z_{n-1}^*$  – коэффициент в распределении Стьюдента. Величина этого коэффициента зависит от доверительной вероятности  $p(z_{n-1}^*)$  и объема выборки. В табл. 12.2 Приведены значения коэффициента  $z_{n-1}^*$  при различных значениях объема выборки для доверительных вероятностей  $p(z_{n-1}^*) = 0,95$  и  $0,99$ .

ТАБЛИЦА 12.2

$n-1$	1	2	3	4	5	10	15	20	30	40	∞
$p(z_{n-1}^*) = 0,95$	12,71	4,3	3,18	2,77	2,57	2,23	2,13	2,08	2,04	2,02	1,96
$p(z_{n-1}^*) = 0,99$	63,7	9,92	5,84	4,6	4,03	3,17	2,95	2,84	2,75	2,7	2,58

При  $n = \infty$  значения  $z_{n-1}^*$  совпадают со значениями  $z$  нормального распределения, а при  $n = 20 \div 50$  различие относительно невелико. Подробные таблицы значений  $z$  и  $z_{n-1}^*$  приведены в [29].

Для вычисления ошибок репрезентативности случайной бесповторной выборки правые части выражений (12.10), (12.12) и (12.13) необходимо домножить на  $\sqrt{1-n/N}$ , где  $N$  – число элементов генеральной совокупности.

*Грубые ошибки* или промахи являются следствием недостатка внимания экспериментатора. Источником грубых ошибок могут быть, например, неисправности в измерительных приборах или в коммутационной аппаратуре. Для устранения промахов необходимо соблюдать аккуратность и тщательность в работе и записях результатов. При планировании измерений должны быть предприняты необходимые меры для устранения промахов.

При определении точности результатов измерений следует учитывать как аппаратные ошибки  $\beta_a$ , так и ошибку репрезентативности  $\beta_p$ . Предельная суммарная относительная ошибка измерений  $\beta_{\Sigma}$  может быть определена как сумма предельных значений этих ошибок:

$$\beta_{\Sigma} = \beta_a + \beta_p. \quad (12.14)$$

Доверительная вероятность суммарной ошибки измерений в первом приближении может оцениваться доверительной вероятностью ошибки репрезентативности.

Кроме ошибок измерений достоверность конечного результата зависит от точности вычислений при обработке результатов измерений. Рекомендуется придерживаться следующего правила: *ошибка вычислений должна быть примерно на порядок (т. е. в 10 раз) меньше суммарной ошибки измерений.*

#### 12.4. Определение объема измерений

Как установлено в предыдущем параграфе, некоторые составляющие суммарной ошибки измерения, например обусловленные классом точности приборов, не зависят от объема измерений, другие составляющие, например ошибки репрезентативности, в основном определяются объемом измерений.

Из выражения (12.10) следует, что с увеличением объема измерений ошибка репрезентативности уменьшается, однако уменьшать ее целесообразно только до тех пор, пока суммарная ошибка измерений не будет в основном определяться аппаратной ошибкой. Практически при измерении параметров телефонной нагрузки относительную ошибку репрезентативности принимают порядка 5–10% с доверительной вероятностью 0,95 или 0,99.

Для расчета минимального объема выборки  $n$  с заданной доверительной вероятностью  $p(z)$ , исходя из предельной ошибки повторной выборки  $\beta_n$ , решим уравнение (12.12)

относительно  $n$ :

$$n_n = z^2 (V^2 / \beta_n^2). \quad (12.15)$$

Для бесповторной выборки

$$n_{\text{бп}} = (z^2 V^2 N) / (\beta_{\text{бп}}^2 N + z^2 V^2). \quad (12.16)$$

До начала измерений коэффициенты вариации  $V$  в (12.15) и (12.16) неизвестны, поэтому объем выборки можно определить лишь приближенно, задавшись значениями коэффициентов вариации по результатам предыдущих аналогичных измерений. После получения результатов измерений необходимый минимальный объем выборки уточняется.

### Задача 12.1.

*Задано:* на АТС в результате проведения 1850 измерений длительности разговора на ступени линейных искателей оказалось, что средняя длительность разговора  $\bar{T}=99,5$  с, среднеквадратическое отклонение  $\sigma(T)=82,5$  с.

*Рассчитать:* относительную ошибку репрезентативности при доверительной вероятности  $p(z) = 0,99$ .

*Решение.* Так как на ступень линейных искателей вызовы могут поступать от любых абонентов станции и в выборку может попасть несколько вызовов от любого абонента, то выборка является случайной повторной. По (12.12) имеем

$$\beta_{\text{п}} = z \frac{\sigma(T)}{\bar{T} \sqrt{n}} = 2,58 \frac{82,5}{99,5 \sqrt{1850}} = 0,05 = 5 \%$$

### Задача 12.2.

*Задано:* интенсивность поступающей на АТС нагрузки с 10 до 11 часов, измеренная в течение  $n = 10$  рабочих дней (первая строка табл. 12.3).

*Рассчитать:* абсолютную ошибку репрезентативности в определении средней интенсивности поступающей на АТС с 10 до 11 часов нагрузки с доверительной вероятностью  $p(z^*_{n-1})=0,95$ .

*Решение.* Измерения выполнены по схеме повторной малой выборки. Предельная ошибка репрезентативности в данном случае рассчитывается по (12.13). Для расчета ошибки необходимо найти среднее значение и средне квадратическое отклонение интенсивности нагрузки (табл. 12.3):

ТАБЛИЦА 12.3

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	—
$y_i$	498	500	495	504	495	485	502	491	503	497	$\sum_{i=1}^{10} y_i = 4970$
$y_i - \bar{y}$	1	3	-2	7	-2	-12	5	-6	6	0	—
$(y_i - \bar{y})^2$	1	9	4	49	4	144	25	36	36	0	$\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = 298$

$$\bar{y} = \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) / n = 4970 / 10 = 497 \text{ Эрл};$$

$$\sigma(y) = \sqrt{\left[ \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \right] / (n - 1)} = \sqrt{298 / 9} = 5,75 \text{ Эрл};$$

$$\Delta_n^* = z^*_{n-1} \sigma(y) / \sqrt{n - 1} = 2,26 (5,75 / \sqrt{9}) = \pm 4,3 \text{ Эрл}.$$

Коэффициент  $z^*=2,26$  определен при  $k=n-1=9$  степенях свободы и доверительной вероятности  $p(z^*_{n-1})=0,95$ .

### **Контрольные вопросы**

1. Каковы основные цели измерения параметров нагрузки и потерь?

2. Назовите основные вопросы, которые необходимо решать при организации измерений параметров нагрузки и потерь.
3. Приведите основную классификацию измерений параметров нагрузки и потерь.
4. Поясните принцип непрерывного измерения обслуженной нагрузки.
5. Сформулируйте теорему, на основании которой измерение обслуженной пучком линий нагрузки производится путем сканирования состояния этих линий.
6. Назовите параметры нагрузки, которые измеряются с использованием принципа подсчета числа случайных событий.
7. Перечислите типы ошибок, которые необходимо учитывать при измерении параметров нагрузки и потерь.
8. Назовите причины аппаратных ошибок.
9. Назовите основные факторы, от которых зависит величина ошибки репрезентативности.
10. Поясните, в чем состоит повторный и бесповторный отбор.
11. Назовите объем выборочной совокупности, начиная с которого выборку считают малой.

## Список литературы

### Учебная

1. Аваков Р. А. и др. Координатные АТС. М.: Связь, 1966.
2. Аваков Р. А. и др. Учебное пособие по курсовому проектированию координатных АТС. Л.: ЛЭИС, 1961.
3. Автоматические системы коммутации/Под ред. О. Н. Ивановой. М.: Связь, 1978.
4. Автоматическая коммутация и телефония. Ч. II/Под ред. Г. Б. Метельско-го. М.: Связь, 1969.
5. Автоматическая междугородная и сельская телефонная связь/Под ред. Е. А. Зайончковского. М.: Связь, 1976.
6. Бухгейм Л. Э., Максимов Г. З., Пшеничников А. П. Автоматическая сельская телефонная связь. М.: Связь, 1976.
7. Городские координатные автоматические телефонные станции и подстанции/Аваков Р. А. и др. М.: Связь, 1971.
8. Ионин Г. Л. Теория телетрафика. Рига: РПИ, 1975.
9. Корнеев Ю. В., Корнышев Ю. Н., Шилов О. С. Методические указания к практическим занятиям по курсу «Теория телефонных и телеграфных сообщений». Одесса: ОЭИС, 1972.
10. Корнышев Ю. Н., Мамонтова Н. П. Задачник по теории телефонных и телеграфных сообщений. Одесса: ОЭИС, 1974.
11. Корнышев Ю. Н. Потоки вызовов и нагрузка. Одесса: ОЭИС, 1975.
12. Лившиц Б. С., Фидлин Я. В., Харкевич А. Д. Теория телефонных и телеграфных сообщений. М.: Связь, 1971.
13. Лившиц Б. С., Мамонтова Н. П. Учебное пособие по теории телефонных сообщений. Л.: ЛЭИС, 1970.
14. Максимов Г. З., Пшеничников А. П. Телефонная нагрузка местных сетей связи. М.: Связь, 1969.
15. Мархай Е. В., Рогинский В. Н., Харкевич А. Д. Автоматическая телефония. М.: Связьиздат, 1960.
16. Проектирование городских координатных автоматических телефонных станций/Копп М. Ф., Корнышев Ю. Н., Шилов О. С. и др. М.: Связь, 1975.
17. Харкевич А. Д., Шитова Д. С. Проектирование сети соединительных линий с учетом кроссовой коммутации. М.: ВЗЭИС, 1975.
18. Харкевич А. Д. Расчет числа соединительных линий на сетях с обходными направлениями. М.: ВЗЭИС, 1976.
19. Харкевич А. Д., Самхарадзе Т. Г., Ситников С. Г. Расчет многозвеньевых коммутационных схем для ивизэлектронных АТС.. М.: ВЗЭИС, 1978.
20. Шилов О. С. Методы расчета обходных направлений на телефонных сетях. Одесса: ОЭИС, 1977.
21. Шилов О. С. Измерение параметров телефонного сообщения. Одесса: ОЭИС, 1976.

### Справочная

22. Башарин Г. П. Таблицы вероятностей и средних квадратических отклонений потерь на полнодоступном пучке линий. М.: АН СССР, 1962.
23. Захаров Г. П., Варакосин Н. П. Расчет количества каналов связи при обслуживании с ожиданием. М.: Связь, 1967.
24. Ионин Г. Л., Седол Я. Я. Таблицы вероятностных характеристик полнодоступного пучка при повторных вызовах. М.: Наука, 1970.
25. Корнышев Ю. Н., Шилов О. С. Методы расчета коммутационных систем связи (справочные материалы). Одесса: ОЭИС, 1975.
26. Лившиц Б. С., Фидлин Я. В. Системы массового обслуживания с конечным числом источников. М.: Связь, 1968.
27. Мамонтова Н. П. Справочные материалы (таблицы). Л.: ЛЭИС, 1970.

28. ГОСТ 21835–76. Сообщение телефонное. Термины и определения.
29. Справочник по вероятностным расчетам. М.: Военное издательство Министерства обороны СССР, 1966.
30. Шнепс М. А. Системы распределения информации. Методы расчета. М.: Связь, 1979.
31. Lotze A., Botsch D., Schehrer R. Tables for overflow variance coefficient and loss of gradings and full available groups. Stuttgart, 1966.
32. Palm C. Table of the Erlang loss Formula. Second edition. L. M. Ericsson. Stockholm, 1954.
33. Wilkinson R. I. Nonrandom traffic curves and tables. Bell telephone laboratories, 1970.
34. Telephone traffic theory tables and charts. Part 1. Siemens aktiengesellschaft, 1970.

### Дополнительная

35. Архангельская А. А., Ершов В. А., Нейман В. И. Автоматическая коммутация каналов связи. М.: Связь, 1970.
36. Башарин Г. П., Харкевич А. Д., Шнепс М. А. Массовое обслуживание в телефонии. М.: Наука, 1968.
37. Бенеш В. Э. Математические основы теории телефонных сообщений, М.: Связь, 1968.
38. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем. М.: Наука, 1968.
39. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1966.
40. Давыдов Г. В., Рогинский В. Н., Толчан А. Я. Сети электросвязи. М.: Связь, 1977.
41. Ершов В. А. Коммутация на интегральной цифровой сети связи. М.: Связь, 1978.
42. Ионин Г. Л., Седол Я. Я. Программирование и статистическое моделирование на БЭСМ-4. Рига: ЛГУ, 1976.
43. Клейнрок Л. Коммуникационные сети. М.: Наука, 1970.
44. Климов Г. П. Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966.
45. Кокс Д., Смит У. Теория очередей. М.: Мир, 1966.
46. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание. Теория и приложения. М.: Мир, 1965
47. Лившиц Б. С., Мамонтова Н. П. Развитие систем автоматической коммутации каналов. М.: Связь, 1976.
48. Мархай Е. В. Основы технико-экономического проектирования городских телефонных сетей. М.: Связьиздат, 1953.
49. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). М.: Физматгиз, 1962.
50. Нейман В. И. Структуры систем распределения информации. М.: Связь. Л 975.
51. Риордан Дж. Вероятностные системы обслуживания. М.: Связь. 1966.
52. Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Сов. радио, 1971.
53. Сети ЭВМ/Под ред. В. М. Глушкова. М.: Связь, 1977.
54. Теория телетрафика: Пер. с нем./Под ред. Г. П. Башарина. М.: Связь, 1971.
55. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967.
56. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1963.
57. Шнепс М. А. Численные методы теории телетрафика. М.: Связь, 1974.
58. Эллдин А., Линд Г. Основы теории телетрафика. М.: Связь, 1972.
59. Pollaczek F. Theorie analytique des problemes stochastiques relative a un group de lignes telephoniques avec dispositif d'attente. Paris, 1961.
60. Takacs L. Combinatorial methods in the theory of stochastic processes. Wiley, N.-Y., 1967.

### Статьи

61. Базлен Д., Кампе Т., Лотце А. Исследование звеньевых систем группового искания.– Экспресс-информация. Передача информации, сентябрь 1973, № 35.
62. Духовный И. М., Шимко М. Ф. Оценка эффективности контроля состояний пучков каналов на сети с динамическим управлением.– В кн.: Теория телетрафика и информационные сети. М.: Наука, 1977, с. 91–98.
63. Зелинский А. М., Корнышев Ю. Н. Две модели системы с повторными вызовами.– Электросвязь, 1978, № 1.
64. Ионин Г. Л., Седол Я. Я. Исследование полностуиной схемы с повторными вызовами и предварительным обслуживанием.– В кн.: Методы теории телетрафика в системах распределения информации. М.: Наука, 1975, с. 75–83.
65. Корнышев Ю. Н. Однолинейная система с повторными требованиями и предварительным обслуживанием.– Техническая кибернетика, 1977, № 2, с. 83– 88.
66. Лившиц Б. С. Особенности характеристик качества обслуживания примитивного потока вызовов.– В кн.: Теория телетрафика и информационные сети. М.: Наука, 1977, с. 67–80.
67. Лотце А. Оптимальные многокаскадные коммутационные схемы.– В кн.: Вероятностные задачи в структурно-сложных системах коммутации. М.: Наука, 1969, с. 49–56.
68. Севастьянов Б. А. Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным линиям с отказами.– Теория вероятностей и ее применение, 1957, т. 2, вып. 1.
69. Фидлин Я. В. Измерение параметров телефонной нагрузки.– В кн.: Системы массового обслуживания и коммутации. М.: Наука, 1974, с. 146–162.
70. Харкевич А. Д. Приближенный метод расчета числа соединительных устройств в АТС координатной системы. – «Электросвязь», 1959, № 2.

71. Степанов С. Н. Моменты избыточной нагрузки однолинейной системы с повторными вызовами. – Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1977, № 1, с. 88–93.
72. Школьный Е. И. Оценки вероятностей потерь для системы массового обслуживания с повторными заявками. – Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1977, № 2, с. 95–99.
73. Фалин Г. И. Однолинейная система с повторными вызовами. – Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1979, № 2, с. 107–114.
74. Lotze A., Roder A., Thierer O. PPL-A reliable method for the calculative •of Point-to-Point Loss in link systems. 8-th ITC, Melbourne, November, 1976.
75. Wilkinson R. 1. Theories for toll traffic engineering in the USA. – BSTJ, :1956, 35, № 3, p. 421–514.



# ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ.....	5
Предисловие.....	7
Основные обозначения.....	8
ГЛАВА ПЕРВАЯ.....	10
Предмет и задачи теории телетрафика.....	10
1.1. Теория телетрафика – одна из ветвей теории массового обслуживания.....	10
1.2. Математические модели систем распределения информации.....	10
1.3. Основные задачи теории телетрафика.....	11
1.4. Общие сведения о методах решения задач теории телетрафика.....	12
1.5. Краткий исторический обзор развития теории телетрафика.....	13
ГЛАВА ВТОРАЯ.....	16
Потоки вызовов.....	16
2.1. Основные понятия.....	16
2.2. Принципы классификации потоков вызовов.....	17
2.3. Характеристики потоков вызовов.....	18
2.4. Простейший поток вызовов.....	19
2.5. Нестационарный и неординарный пуассоновские потоки.....	23
2.6. Потоки с простым последствием.....	24
2.7. Симметричный и примитивный потоки.....	25
2.8. Поток с повторными вызовами.....	26
2.9. Поток с ограниченным последствием. Поток Пальма.....	26
2.10. Просеивание потоков. Потоки Эрланга.....	27
2.11. Длительность обслуживания.....	28
2.12. Поток освобождений.....	28
ГЛАВА ТРЕТЬЯ.....	31
Нагрузка. Характеристики качества обслуживания.....	31
3.1. Поступающая, обслуженная, потерянная нагрузки.....	31
3.2. Концентрация нагрузки.....	33
3.3. Основные параметры и расчет интенсивности нагрузки.....	34
3.4. Характеристики качества обслуживания потоков вызовов.....	37
3.5. Пропускная способность коммутационных систем.....	39
ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.....	42
Полнодоступный пучок. Система с потерями.....	42
4.1. Обслуживание вызовов симметричного потока с простым последствием.....	42
4.2. Обслуживание вызовов простейшего потока.....	47
4.3. Обслуживание вызовов примитивного потока.....	54
ГЛАВА ПЯТАЯ.....	62
Полнодоступный пучок. Система с ожиданием.....	62
5.1. Обслуживание вызовов простейшего потока при показательном законе распределения длительности занятия.....	62
5.2. Обслуживание вызовов простейшего потока при постоянной длительности занятия.....	68
5.3. Область применения систем с ожиданием.....	72
ГЛАВА ШЕСТАЯ.....	76
Полнодоступный пучок. Система с повторными вызовами.....	76
6.1. Постановка задачи.....	76
6.2. Предельная величина интенсивности поступающей нагрузки.....	77
6.3. Уравнения вероятностей состояний системы с повторными вызовами.....	78
6.4. Основные характеристики качества работы системы с повторными вызовами.....	79
ГЛАВА СЕДЬМАЯ.....	82
Метод статистического моделирования в задачах теории телетрафика.....	82
7.1. Общие сведения.....	82
7.2. Моделирование случайных величин.....	82
7.3. Моделирование коммутационных систем на универсальных вычислительных машинах.....	85
7.4. Точность и достоверность результатов моделирования.....	87
ГЛАВА ВОСЬМАЯ.....	89
Неполнодоступное включение. Системы с потерями.....	89
8.1. Общие сведения.....	89
8.2. Некоторые характеристики неполнодоступных схем.....	90
8.3. Выбор структуры ступенчатой неполнодоступной схемы.....	92
8.4. Выбор структуры равномерной неполнодоступной схемы.....	94
8.5. Построение цилиндров.....	95
8.6. Идеально симметричная неполнодоступная схема.....	96

8.7. Формула Эрланга для идеально симметричной неполнодоступной схемы.....	98
8.8. Априорные методы определения потерь в неполнодоступных схемах.....	100
8.9. Инженерный расчет неполнодоступных схем.....	103
ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.....	106
Звеньевые коммутационные системы.....	106
9.1. Общие сведения.....	106
9.2. Комбинаторный метод. Полнодоступное включение выходов.....	107
9.3. Потери в двухзвеньевых схемах при отсутствии сжатия и расширения.....	109
9.4. Потери в двухзвеньевых схемах при наличии сжатия или расширения.....	110
9.5. Двухзвеньевые неполнодоступные схемы.....	112
9.6. Метод эффективной доступности.....	114
9.7. Структура многозвеньевых коммутационных схем.....	117
9.8. Способы межзвеньевых соединений и методы искания в многозвеньевых схемах.....	119
9.9. Расчет многозвеньевых коммутационных схем в режиме группового искания. Метод КЛИГС.....	119
9.10. Метод вероятностных графов.....	122
9.11. Оптимизация многозвеньевых коммутационных схем.....	125
ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.....	128
Распределение нагрузки и потерь на сетях связи.....	128
10.1. Качество обслуживания на автоматически коммутируемых сетях связи.....	128
10.2. Расчет нагрузок на входах и выходах ступеней искания коммутационных узлов.....	130
10.3. Расчет нагрузок, поступающих на регистры и маркеры.....	132
10.4. Способы распределения нагрузки.....	132
10.5. Колебания нагрузки. Расчетная интенсивность нагрузки.....	137
ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ.....	141
Управляемые элементы сети связи и методы определения ее характеристик.....	141
11.1. Общие сведения.....	141
11.2. Обходные направления и использование метода эквивалентных замен при расчете числа линий в обходных пучках.....	142
11.3. Динамическое управление. Характер задач, возникающих при управлении потоками.....	144
11.4. Кроссовая коммутация как управление структурой сети.....	145
11.5. Метод укрупнения состояний пучков при определении характеристик управляющей информации.....	146
ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ.....	151
Измерения параметров нагрузки и потерь.....	151
12.1. Цели и задачи измерений.....	151
12.2. Принципы измерений параметров нагрузки и потерь.....	151
12.3. Обработка результатов измерений.....	152
12.4. Определение объема измерений.....	156
ОГЛАВЛЕНИЕ.....	161

**Борис Самойлович Лившиц, Анатолий Павлович Пшеничников, Анатолий  
Демьянович Харкевич**

## ТЕОРИЯ ТЕЛЕТРАФИКА

Редактор *А. П. Пшеничников* Редактор издательства *Е. В. Комарова* Художественный редактор *Р.  
А. Клочков* Обложка художника *В. К. Кузнецова* Технический редактор *Г. И. Колосова* Корректор  
*Я. С. Корнеева*

### **ИБ № 17**

Сдано в набор 9.04.79 г. Подп. в печ. 27.09.79 г. Т-15100 Формат 60ХЭ0Ае Бумага кн.-журн.  
Гарнитура литературная Печать высокая Усл. печ. л. 14,0 Уч.-изд. л. 15,18 Тираж 12 000 экз. Изд. №  
17336 Зак. № 106 Цена 55 к. Издательство «Связь», Москва 101000, Чистопрудный бульвар, д. 2

---

Типография издательства «Связь» Госкомиздата СССР Москва 101000, ул. Кирова, д. 40