С. П. ТИМОШЕНКО

ИСТОРИЯ НАУКИ О СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

С КРАТКИМИ СВЕДЕНИЯМИ ИЗ ИСТОРИИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ТЕОРИИ СООРУЖЕНИЙ

перевод с английского
В. И. КОНТОВТА
под редакцией
А. Н. МИТИНСКОГО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1957

12-5-4

Тимошенко Степан Прокофьевич

История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений.

Редактор *И. К. Снитко.*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов.* Корректор *Е. А. Белицкая*

Сдано в набор 10/IX 1957 г. Подписано к печати 28/XI 1957 г. Бумага 60×92 1/16. Физ. л. 33,5. Условн. печ. л. 33,5. Уч.-изд. л. 35,65. Тираж 5 000 экз. Т-10456. Заказ 1409. Цена книги 19 р. 85 к.

Государственное издательство технико-теоретической литературы.
Москва, Б. Калужская 15.

16-я типография Московского городского Совнархоза.
Москва, Трехпрудный пер., д. 9.

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Предлагаемая вниманию читателя новая книга С. П. Тимошенко, широко известного своими трудами в области сопротивления материалов и теории упругости, является первой попыткой систематического изложения истории науки о сопротивлении материалов. Автору удалось собрать важные и интересные исторические факты. В качестве основной канвы для изложения им использованы биографии ученых. Вопросы связи между развитием науки и требованиями практики рассматриваются только мимоходом (исключение составляет глава VII, посвященная влиянию, оказанному на развитие сопротивления материалов требованиями железнодорожного транспорта).

При составлении книги автор, по-видимому, не располагал полными сведениями о достижениях в области сопротивления материалов и теории упругости в СССР. Упущены также некоторые исторические данные, относящиеся и к периоду до Великой Октябрьской социалистической революции. Ввиду этого редактор перевода профессор А. Н. Митинский сопроводил авторский текст некоторыми дополнениями в форме кратких подстрочных примечаний.

Издательство надеется, что книга С. П. Тимошенко окажется полезной в работе преподавателей, помогая им оживлять лекции путем привлечения исторических материалов.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Эта книга возникла на основе лекций по истории сопротивления материалов, которые я читал на протяжении последних 25 лет для студентов, специализировавшихся в технической механике и уже прослушавших курсы сопротивления материалов и теории сооружений. При подготовке книги к печати первоначальный материал этих лекций был значительно пополнен, однако общий характер курса не подвергся изменениям. Работая над книгой, я имел в виду главным образом тех студентов, которые, изучив обязательный курс сопротивления материалов, обнаруживают желание углубиться в эту науку и познакомиться с историей ее развития. При этом я не пытался создать справочник по вопросам теории упругости или дать полный библиографический указатель по этому предмету. Такую библиографию можно найти в имеющейся литературе, например в «Истории теории упругости и сопротивления материалов» Тодхентера и Пирсона[1]), а также в статьях из IV тома «Энциклопедии математических наук», выходившей под редакцией Ф. Клейна и К. Мюллера[2]).

Я стремился скорее следовать «Краткому историческому очерку»[3]) Сен-Венана и дать широкому кругу читателей исторический обзор главных этапов в развитии нашей науки, не входя в излишние подробности. В соответствии с этим я счел желательным включить в эту историю краткие биографии наиболее крупных ученых, работавших в интересующей нас области, а также осветить связь развития сопротивления материалов с состоянием технического образования и промышленным развитием в различных странах. Нет сомнения, что развитие, например, железнодорожного транспорта, а также использования стали в качестве строительного материала поставили множество новых проблем, связанных с определением прочности конструкций, и оказали сильное влияние на развитие сопротивления материалов. Такой же эффект в более близкое к нам время произвели применения двигателей внутреннего сгорания и легких конструкций самолетов.

Нельзя удовлетворительно изложить историю сопротивления материалов без рассмотрения развития смежных наук—теории упругости и теории сооружений. В своем развитии все эти науки тесно связаны между собой, и потому в настоящую книгу пришлось внести кое-что из истории и этих двух наук. При этом в истории теории упругости я касался лишь тех ее разделов, которые имели близкое отношение к развитию сопротивления материалов, и опускал все то, что относилось к чисто теоретическому, математическому усовершенствованию самой этой науки. Точно так же и в отношении теории сооружений я не включил в книгу вопросов, представлявших лишь узко практический, прикладной интерес.

В своем изложении я пытался следовать хронологической последовательности и с этой целью разделил историю нашей науки на несколько периодов. Для каждого из этих периодов я дал картину развития как в области сопротивления материалов, так и в смежных науках. Строго выдержать такой порядок не всюду, однако, удалось, и иногда при обсуждении трудов того или иного автора я находил более удобным дать в одном месте обзор всего его твор-

---

[1]) Todhunter I., Pearson K., A history of the elasticity and strength of materials.

[2]) Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, т. 4.

[3]) Историческое введение, которым Сен-Венан дополнил свое издание книги Навье: Navier, Résumé des Leçons.

чества, хотя бы некоторые из его работ и не укладывались в рассматриваемый период.

В работе над этой книгой большую помощь мне оказали существующие труды по истории науки. Кроме уже упомянутых, я имел в своем распоряжении третье издание книги Навье «Résumé des Leçons...», отредактированное Сен-Венаном и содержавшее его «Historique abrégé», а также многочисленные его примечания, представляющие большой исторический интерес. Я обращался также к переведенной Сен-Венаном на французский язык книге Клебша по теории упругости, в которой содержится и история этой науки в ее ранних стадиях. Что касается биографий, то в этой области я нашел следующие весьма содержательные источники: Marie M., Histoire des sciences mathématiques et physiques; Rühlmann M., Geschichte der technischen Mechanik; ряд английских биографий, а также «Собрание академических похвальных речей» Араго и Бертрана (Arago F., Bertrand J., Éloges académiques[1]). Переходя к более близкому к нам времени, потребовалось тщательно разобрать в большом объеме периодическую литературу на различных языках. Это заняло много времени, но автор почувствует себя вполне вознагражденным, если его работа сбережет в какой-то мере время и труд других работников в области истории сопротивления материалов.

Выражаю благодарность моим коллегам по Стенфордскому университету: профессору Альфреду Найлсу (Alfred S., Niles) за его указания по тем частям рукописи, где излагаются начала истории ферм и метод Максвелла—Мора расчета статически неопределимых ферм; профессору Доновану Юнгу (Donovan Young) за его многочисленные ценные советы при подготовке рукописи. Я весьма обязан также д-ру Р. Бишопу (Dr. R. E. D. Bishop) за прочтение всей рукописи и за многочисленные важные замечания, сделанные им при этом, и моему аспиранту Джэмсу Джеру (James Gere) за ведение корректуры.

Стэнфорд, Калифорния, декабрь 1952

С. П. Тимошенко

[1]) Имеется русский перевод: Араго Ф., Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров. СПб., 1859. (*Прим. ред.*)

ВВЕДЕНИЕ

Уже в те отдаленные времена, когда людям впервые пришлось заняться строительством, они убедились в необходимости располагать сведениями о сопротивлении материалов, на основе которых можно было бы назначать надежные размеры частей сооружений. Нет сомнения в том, что египтянам были уже известны некоторые эмпирические правила подобного рода, поскольку без них нельзя было бы возводить грандиозные монументы, храмы, пирамиды, обелиски, из которых некоторые существуют еще и поныне.

Греки внесли крупный вклад в дело дальнейшего развития строительного искусства. Они разработали статику, лежащую в основе механики материалов. Архимед (287—212 до н. э.) дал строгое доказательство условий равновесия рычага и указал методы отыскания центров тяжести тел. Он применил свою теорию для конструирования различных подъемных механизмов. Использованные греками приемы транспортировки колонн и архитравов храма Дианы Эфесской показаны на рис. 1—3.

Широкий размах получило строительство у римлян. До нашего времени сохранились не только их памятники и храмы, но также дороги, мосты и фортификационные сооружения. Об установившихся в их практике строительных приемах мы кое-что узнаем из книги Витрувия[1]), знаменитого римского архитектора и инженера эпохи императора Августа. В этой книге приведены описания некоторых строительных материалов и типов сооружений. На рис. 4 показан тип механизма, применявшегося римлянами для подъема тяжелых камней. В своих сооружениях римляне часто использовали арки. На рис. 5 мы видим арки знаменитого Гардского моста (Южная Франция), и по сей день выполняющего

---

[1]) Vitruvius M. P., De architectura, Французский перевод Де Биуля (De Bioul), Брюссель, 1816 (*Прим. авт.*) (Русские переводы последнего времени Витрувий М. П., Десять книг по архитектуре. Перев. Ф. А. Петровского, г. 1, М., Изд. Всес. акад. арх., 1936 (Классики теории архитектуры, под ред. А. Г. Габричевского); Витрувий М. П., Об архитектуре, Десять книг, Ред. и введение А. В. Мишулина, Л., Соцэкгиз, 1936. (*Прим. перев.*,

свою службу. Сравнение римских арок с подобными же сооружениями нового времени в отношении их пропорций указывает на то, что позднее строители научились выполнять эти сооружения значительно более легкими[1]); римляне еще не владели знаниями,

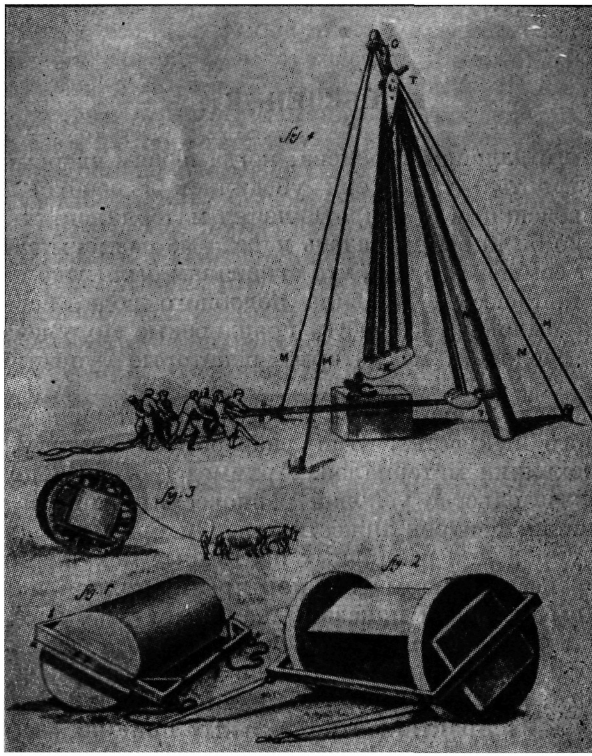


Рис. 1—4. Снизу—принятые в античной Греции способы транспортировки колонн. Сверху—подъемное устройство, которым пользовались римляне.

которые даются анализом напряженного состояния. Они не знали, чем следует руководствоваться в выборе надлежащего очертания арки, и потому, как правило, придавали им форму полуокружности и ограничивались сравнительно небольшими пролетами.

Опыт, накопленный в практике строительства греками и римлянами, был в значительной своей части утрачен на протяжении

[1]) Это сравнение сделано Альфредом Лежером. См. Leger Alfred. Les travaux publics aux temps des romains, стр. 135, Paris, 1875.

средних веков, и только в эпоху Возрождения это искусство было поднято на прежнюю высоту. Так, например, когда знаменитый итальянский архитектор Фонтана (1543—1607) построил по указу папы Сикста V в Ватикане обелиск (рис. 6), это сооружение обратило на себя почтительное внимание инженеров всей Европы, между тем как египтяне, как известно, воздвигали такие обелиски за несколько тысяч лет до этого, вырезая камни в каменоломнях

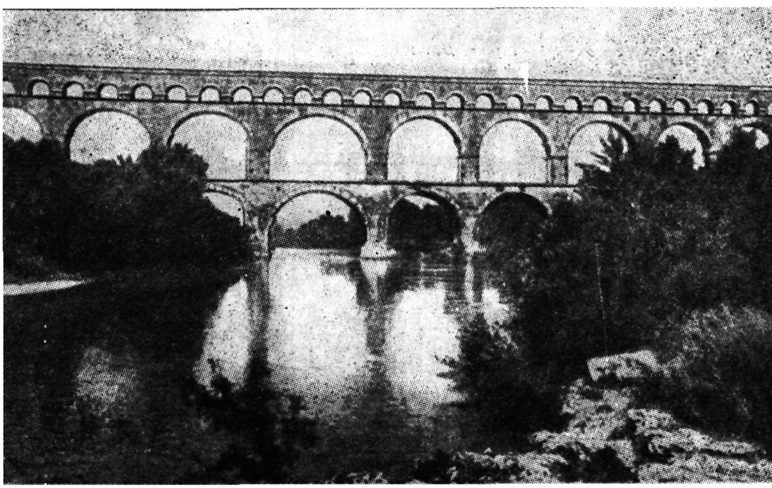


Рис. 5. Знаменитый Гардский мост (Южная Франция).

Сиены (Египет) и транспортируя их по Нилу. Впоследствии римляне вывезли целый ряд подобных египетских обелисков из тех мест, где они первоначально были построены, и установили их в Риме. Отсюда можно заключить, что инженеры XVI века были оснащены для такой трудной работы не столь хорошо, как их предшественники.

Эпоха Возрождения принесла с собой и оживление интереса к науке. Появились крупные мастера в области архитектуры и строительного искусства. Наиболее ярко дух эпохи воплотился в образе Леонардо да Винчи (1452—1519). Он был не только великим мастером в области искусства, но и широко мыслившим ученым и инженером. Он не писал книг, но в его записных книжках[1])

[1]) Библиографический указатель сочинений Леонардо да Винчи приводится в Британской энциклопедии. Избранное собрание отдельных выдержек из его рукописей можно найти также в книге: Mc Curdy Edward, Leonardo da Vinci's note-books. См. также Parsons W. B., Engineers and engineering in the Renaissance, 1939. Из последней книги заимствованы

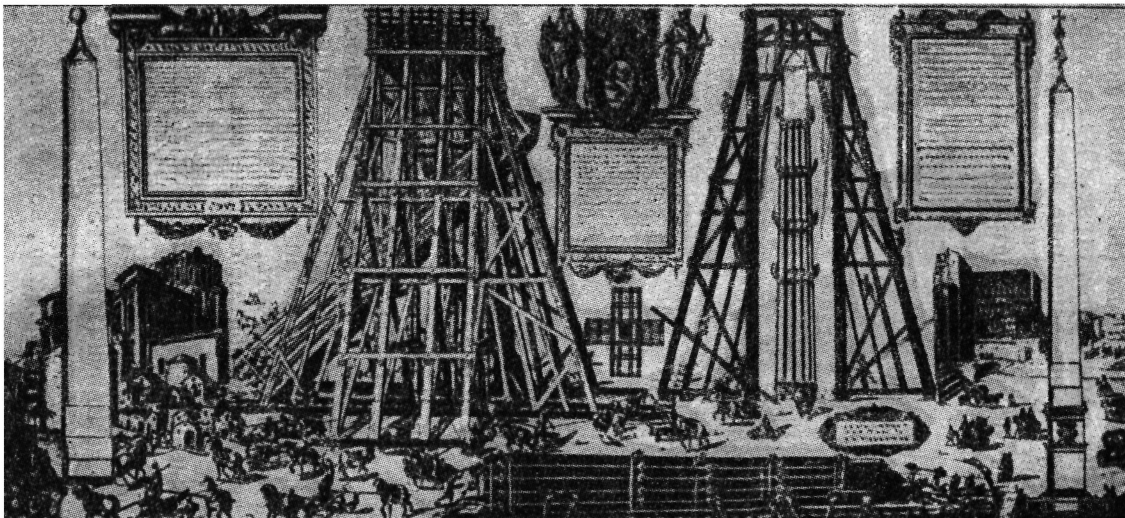


Рис. 6 Установка обелиска в Ватикане.

было найдено много данных о сделанных им крупных открытиях в разных областях науки. Его глубоко интересовала механика, и одна из его записей гласит: «Механика—это рай математической науки, поскольку мы получаем в ней плоды математики». Леонардо да Винчи пользуется методом моментов и получает с его помощью правильные решения задач, представленных на рис. 7,*а* и 7,*б*. Он применяет идею принципа виртуальных перемещений к расчету различных систем блоков и рычагов, применявшихся в подъемных механизмах. По-видимому, Леонардо да Винчи имел правильное представление о распоре, возникающем в арках. В одной из его рукописей имеется схематический рисунок двухстержневой системы (рис. 8), на которую действует верти-

Леонардо да Винчи.

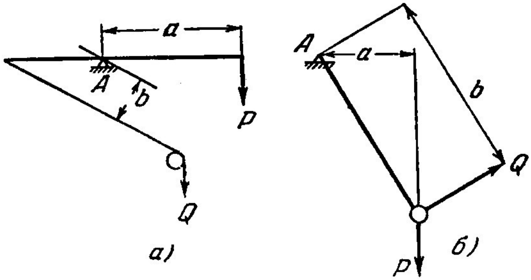


Рис. 7.

кальная нагрузка Q и относительно которой ставится вопрос: какие силы нужно приложить в a и b, для того чтобы система осталась в равновесии? Из показанного на рисунке штриховыми

рис. 9 и приведенные в этом параграфе выдержки высказываний Леонардо. (*Прим. авт.*) Из относящейся к Леонардо да Винчи литературы на русском языке укажем последние издания: Л е о н а р д о д а В и н ч и, Избранные естественнонаучные произведения, Ред., перев., статья и комментарии В. П. Зубова, Изд. АН СССР, 1955; Г у к о в с к и й, М. А. Механика Леонардо да Винчи. Изд. АН СССР, 1947. (*Прим. перев.*)

линиями параллелограмма можно заключить, что Леонардо да Винчи знал правильное решение этой задачи.

Леонардо да Винчи экспериментально изучал прочность строительных материалов. В заметке «Испытание сопротивления железных проволок разных длин» он дает эскиз, приведенный на рис. 9, сопровождая его следующим разъяснением: «Цель настоящего испытания—найти нагрузку, которую может выдержать железная проволока. Укрепив железную проволоку длиной 2 локтя на чем-либо так, чтобы она крепко держалась, затем подвесив к ней корзинку, ящик или что-либо подобное, через малое отверстие на дне воронки насыпать туда некоторое количество мелкого песка. Как только проволока лопнет, отверстие воронки закроется укрепленной на ней пружиной. Падая, корзина не

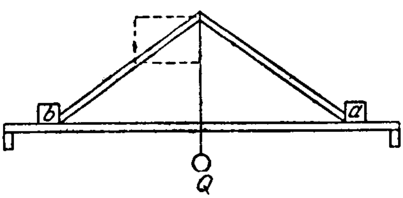


Рис. 8.

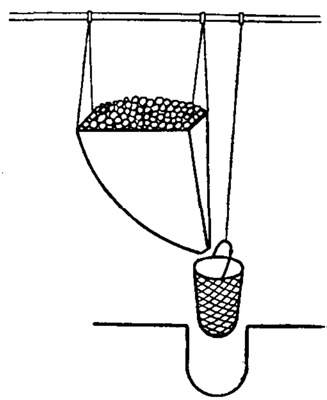


Рис. 9. Испытание проволоки на растяжение по Леонардо да Винчи.

опрокинется, так как она падает с небольшой высоты. Вес песка и место разрыва проволоки следует заметить. Испытание повторяется несколько раз для контроля результатов. Затем испытывают проволоку вдвое меньшей длины, причем отмечается увеличение выдерживаемой ею нагрузки; далее подвергается испытанию проволока, составляющая по длине $^1/_4$ первоначальной, и т. д.; при этом всякий раз отмечаются предельное сопротивление и место разрыва»[1]).

Леонардо да Винчи исследовал также сопротивление балок изгибу и установил такое общее положение: «Во всяком бруске, опирающемся на опоры, но имеющем возможность свободно изгибаться, при неизменности поперечного сечения и однородности материала, та его часть, которая находится на наибольшем расстоянии от опор, изгибается больше всего». Он рекомендует провести серию опытов, начиная с балки, способной нести опре-

[1]) См. Parsons W. B., Engineers and engineering in the Renaissance, стр. 72.

деленную нагрузку при опирании обоими концами, а затем, переходя последовательно к более длинным балкам той же ширины и высоты, отмечать всякий раз величину нагрузки, которую они выдерживают. Он приходит к тому заключению, что прочность балок, опертых обоими концами, изменяется в обратном отношении к длине и в прямом отношении к ширине. Он проделал ряд опытов над балками с одним заделанным и другим свободным концом, в результате чего устанавливает: «Если балка в 2 локтя длиной выдерживает 100 фунтов, то балка длиной в 1 локоть будет выдерживать 200 фунтов. Во сколько раз короткая балка меньше более длинной, во столько же раз больший груз она способна выдержать в сравнении с этой более длинной». Относительно влияния высоты на сопротивление балок в записках Леонардо да Винчи не дается определенных заключений.

По-видимому, Леонардо да Винчи проводил также некоторые исследования по сопротивлению колонн. Он указывает, что их несущая способность обратно пропорциональна длине, но находится в прямом отношении к площади их поперечного сечения.

Эти вкратце отмеченные нами достижения да Винчи представляют собой, вероятно, первую попытку применения статики к определению сил, действующих на элементы строительных конструкций, а также первые опытные определения сопротивления строительных материалов. Но эти ценные научные открытия оставались погребенными в записных книжках Леонардо, и инженеры XV и XVI столетий продолжали, как и в римскую эпоху, назначать размеры элементов своих сооружений, полагаясь лишь на практический опыт или на догадку.

Первые попытки установления безопасных размеров элементов сооружений аналитическим путем относятся к XVII веку. Знаменитая книга Галилея «Две новые науки»[1]) обнаруживает в ее авторе стремление привести известные ему методы анализа напряжений в логическую систему. Она знаменует собой возникновение науки о прочности, т. е. *сопротивления материалов*.

---

[1]) Английский перевод Henry Crew и Alfonso de Salvio, Нью-Йорк, 1933. (*Прим. авт.* См. сноску на стр. 18 англ. перевода. (*Прим. перев.*)

ГЛАВА I

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ В XVII ВЕКЕ [1])

1. Галилео Галилей

Галилей (1564—1642) родился в г. Пизе[2]) (Италия) и происходил из знатного флорентийского рода. Первоначальное обучение латинскому и греческому языкам и логике он получил в монастыре Валломброза, близ Флоренции. В 1581 г. он был принят в Пизанский университет, где ему предстояло изучать медицину. Но очень скоро он увлекся лекциями по математике и со всей энергией погрузился в изучение сочинений Евклида и Архимеда. По-видимому, из сочинений Кардано[3]) он познакомился с открытиями Леонардо да Винчи в области механики. В 1585 г. Галилею из-за недостатка средств пришлось прекратить занятия в университете, не закончив курса, и вернуться домой, во Флоренцию. Здесь он стал давать частные уроки по математике и механике и продолжать одновременно свою научную работу. В 1586 г. он сконструировал гидростатические весы для измерения плотности разных веществ и провел исследования по нахождению центров тяжести

---

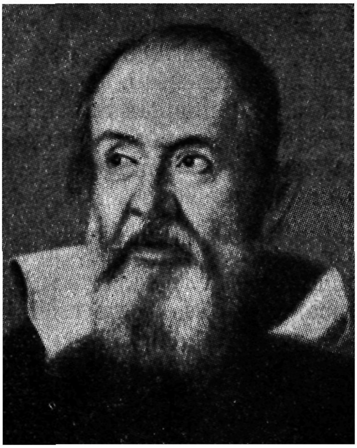
[1]) История механики материалов за XVII и XVIII века излагается в предисловии к книге Жирара: Girard P. S, Traité analytique de la résistance des solides, Paris, 1798.

[2]) См. Fahie J. J., Galileo, his life and work, New York, 1903. См также роман Zsolt de Harsanyi, The Star gazer Английский перевод П. Табора, New York, 1939. (*Прим. авт.*) На русском языке опубликовано много литературы о Галилее. Первый обстоятельный библиографический очерк и перевод двух первых глав «Бесед», составленные А. О. Сомовым, со вступительной статьей акад. О. И Сомова были опубликованы в Журнале Гл. упр. п. с. и публ. зд., т. XXXI, 1860, II отд., стр. 36 и далее. См. также «Сборник, посвященный 300-летию со дня смерти Галилео Галилея», изд. АН СССР, 1943, в котором помещены статьи акад. С. И. Вавилова «Галилей и история оптики», акад. А. Н. Крылова «Галилей как основатель механики» и др. (*Прим. ред.*).

[3]) См Duhem P., Les Origines de la statique, стр. 39, Paris, 1905. Дж. Кардано (1501—1576) обсуждает вопросы механики в одной из своих математических работ. Его представление об этой науке весьма сходно с представлениями Леонардо да Винчи, в связи с чем обычно предполагают, что Кардано были известны рукописи и записные книжки последнего.

твердых тел. Эта научная работа[1]) доставила ему известность, и в середине 1589 г. он начал вести в Пизанском университете преподавание математики в качестве профессора; в то время ему не исполнилось еще и 26 лет.

За период своего пребывания в Пизе (1589—1592) Галилей продолжал исследования в области математики и механики, поставив, в частности, знаменитые опыты с падающими телами. На основе этих опытов им был написан в 1590 г. трактат «De motu gravium» («О движении падающих тел»), представляющий собой начало той динамики, которую мы знаем в настоящее время. Главными выводами этой работы были следующие: 1) все тела падают с одной и той же высоты в равные интервалы времени; 2) приобретаемые телами в конце падения скорости пропорциональны продолжительности падения; 3) пути, проходимые падающими телами, пропорциональны квадратам времени падения. Эти заключения полностью расходились с основами механики Аристотеля, но Галилей, не колеблясь, опирался на них в своих диспутах с представителями аристотелевой школы. Это породило чувство враждебности против молодого Галилея, которое побудило его, наконец, покинуть Пизу и вернуться во Флоренцию. В это трудное для Галилея время друзья помогли ему получить должность профессора в Падуанском университете. Сохранился опубликованный в то время документ[2]) об его официальном назначении на эту должность, гласящий: «По причине смерти синьора Молетти, читавшего ранее лекции по математике в Падуе, кафедра его на долгое время осталась вакантной, ибо, ввиду ее особой важности, было признано целесообразным отложить замещение ее до той поры, когда появится подходящий способный кандидат. Ныне такой кандидат появился. Это— Галилео Галилей, с великой славой и успехом читавший лекции в Пизе и достойный почитаться первым в своей профессии, —он выразил согласие вступить в наш университет и читать здесь свои лекции; университет же находит должным принять его».



Галилео Галилей.

---

[1]) Опубликована в 1586 г. под названием «La Bilancetta» (маленькие весы). (*Прим. ред.*)

[2]) См. книгу F a h i e J. J., стр. 35

В 1592 г., 7 декабря, Галилей вступил в исполнение своих новых обязанностей, произнеся речь, которая вызвала величайшее восхищение не только по причине ее глубокой учености, но и в силу ее красноречия и изящества формулировок. В Падуе первые годы работы Галилей был исключительно активным. Его лекции приобрели столь широкую славу, что туда стали стекаться студенты из других европейских стран. Иногда для этих лекций отводилась аудитория, в которой могло вместиться 2000 слушателей. В 1594 г. им был написан знаменитый трактат по механике («Della scienza meccanica»—«О науке механике»). Разнообразные задачи статики решались в нем с использованием принципа виртуальных перемещений. Этот трактат получил широкое распространение в рукописных списках. Около того же времени в связи с некоторыми вопросами кораблестроения Галилей заинтересовался также и сопротивлением материалов. Однако вскоре его внимание было привлечено астрономией. Известно, что в первые годы своей педагогической деятельности в Падуе Галилей придерживался птолемеевой системы, как это было в обычае того времени. Но уже в 1597 г. в письме к Кеплеру он признается: «Много лет тому назад я начал склоняться к мнениям Коперника, и в свете его теории мне удалось объяснить много таких явлений, которые совершенно не поддавались объяснению на основе старой гипотезы». В 1609 г. до Падуи дошел слух об изобретении телескопа, и Галилей, несмотря на скудность сведений, самостоятельно соорудил собственный телескоп с 32-кратным увеличением. С помощью этого прибора он сделал ряд выдающихся астрономических открытий. Он показал, что Млечный Путь состоит из слабых звезд, описал гористый характер поверхности Луны, а в 1610 г. впервые обнаружил спутников Юпитера. Последнее открытие оказало большое влияние на дальнейшее развитие астрономии, поскольку видимое движение этой системы сыграло роль весьма убедительного аргумента в пользу теории Коперника. Эти исследования сделали Галилея знаменитым. Он получил звание «экстраординарного философа и математика» при великом герцоге Тосканском и в сентябре 1610 г. переехал из Падуи во Флоренцию. В новой должности Галилей не нес никаких иных обязанностей, кроме продолжения своей научной работы, и направил все свои силы на развитие астрономии. Он обнаружил своеобразную форму Сатурна, наблюдал фазы Венеры и описал пятна на Солнце.

Все эти блестящие открытия и проникнутые энтузиазмом сочинения Галилея в защиту теории Коперника привлекли внимание церкви. Отступление новой теории солнечной системы от библейской догмы было передано суду инквизиции, и в 1615 г. Галилей получил полуофициальное предупреждение с указанием избегать вторжения в вопросы теологии и ограничиваться впредь рассуждениями, не выходящими за пределы физики. В 1616 г.

великое научное творение Коперника было осуждено церковью, и в течение последующих семи лет для Галилея была исключена всякая возможность публиковать какие-либо работы по астрономии. В 1623 г. на папский престол был избран Маффео Барбарини, друг и почитатель Галилея. Рассчитывая теперь на более

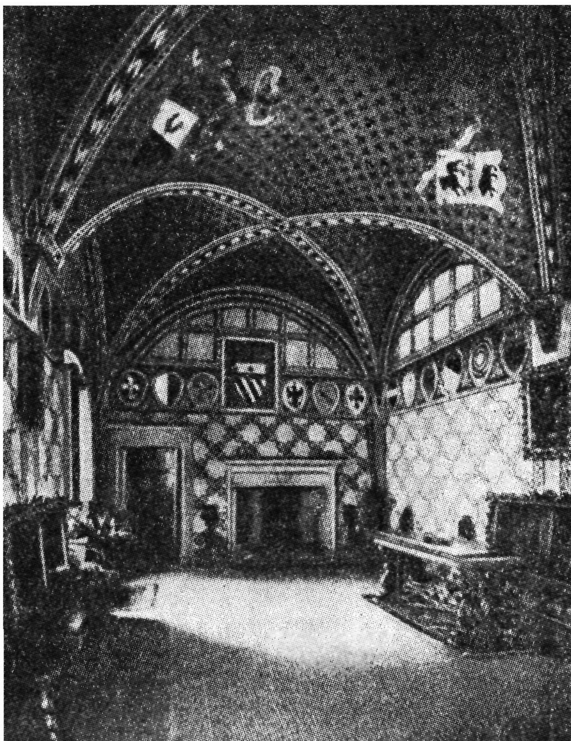


Рис. 10. Приемная виллы Галилея в Арчетри.

благосклонное отношение к своим астрономическим трудам, Галилей тут же приступил к работе над получившей впоследствии известность книгой «О двух системах мира», вышедшей из печати в 1632 г. Так как книга недвусмысленно отстаивала теорию Коперника, продажа ее была запрещена церковью и Галилей был вызван инквизицией в Рим. Там он был осужден и его вынудили огласить свое отречение. По возвращении во Флоренцию его обязали поселиться в принадлежавшей ему вилле в Арчетри (рис. 10) и жить в строгом уединении, что он и выполнял на протяжении последних восьми лет своей жизни. Там именно он и написал свою знаменитую книгу о двух новых науках[1]), в которой суммировал результаты всех своих прежних трудов по различным отделам

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue ſcienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI;
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filoſofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

The title page of Galileo's book, "Two New Sciences.

Рис. 11. Титульная страница книги Галилея о двух новых науках.

механики. Книга была отпечатана фирмой Эльзевиров в Лейдене в 1638 г. (рис. 11). Часть книги, посвященная механическим свойствам строительных материалов и исследованию прочности балок,

---

[1]) Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica e i movimenti locali del signor Galileo Galilei Linceo, filosofo e matematico primario... In Leida, MDCXXXVIII. См. русский перевод С. Н. Долгова: Галилео Галилей. Сочинения, т. I, «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению». Серия «Классики естествознания», Гос. тех.-теор. изд., М.—Л., 1934 В дальнейшем ссылки автора на английские издания заменены ссылками на названный русский перевод. (*Прим. перев.*)

представляет собой первый печатный труд в области сопротивления материалов; датой ее выхода в свет начинается история механики упругих тел.

2. Работы Галилея в области сопротивления материалов

Все работы Галилея по механике материалов вошли в первые два диалога его книги о двух новых науках. Свое изложение он начинает ссылкой на некоторые наблюдения, сделанные им при посещениях венецианского арсенала, и обсуждением свойств геометрически подобных сооружений. Он утверждает, что если возводить сооружения геометрически подобные, то по мере увеличения их абсолютных размеров они будут становиться все более и более слабыми. Для пояснения он указывает: «Небольшие обелиск, колонна или иная строительная деталь могут быть установлены без всякой опасности обрушения, между тем как весьма крупные элементы этого типа распадаются на части из-за малейших причин, а то и просто под действием своего собственного веса». Чтобы подтвердить это, он начинает с исследования прочности материалов при простом растяжении (рис. 12) и устанавливает, что прочность бруса пропорциональна площади его поперечного сечения и не зависит от его длины. Такую прочность бруса Галилей называет «абсолютным сопротивлением разрыву» и приводит несколько числовых значений, характеризующих прочность меди.

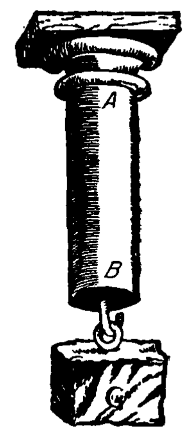


Рис. 12. Иллюстрация Галилея к испытанию на растяжение.

Определив абсолютное сопротивление бруса, Галилей исследует сопротивление разрушению того же бруса в том случае, когда он используется как консоль и нагружен на свободном конце (рис. 13). Он утверждает: «Ясно, что если призматический брус подвергнется излому, этот излом произойдет в точке B, причем ребро гнезда играет роль оси вращения для рычага BC, к которому приложена сила; толщина BA бруса представляет собой другое плечо, вдоль которого распределяется сопротивление. Это сопротивление препятствует отделению части BD, лежащей вне стены, от части, лежащей внутри ее. Из сказанного следует, что величина силы, приложенной в C, относится к величине сопротивления, обусловленного толщиной призмы, т. е. сцеплением основания BA с примыкающими к нему частями бруса, точно так же, как половина длины BA относится к длине BC»[1]. Мы видим, что

---

[1]) Discorsi e dimostrazioni...», Диалог второй.

в случае излома согласно представлению Галилея «сопротивление» распределяется равномерно по поперечному сечению BA (рис. 14, *б*). Полагая, что поперечное сечение бруса—прямоугольник и что материал следует закону Гука до наступления излома, мы полу-

Рис. 13. Иллюстрация Галилея к испытанию на изгиб.

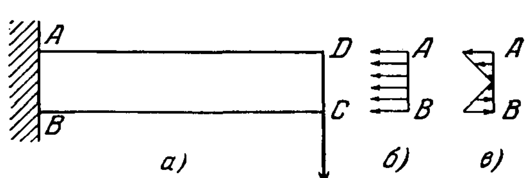


Рис. 14.

чаем распределение напряжений по эпюре, показанной на рис. 14, *в*, Соответствующий такому распределению напряжений момент сопротивления составляет лишь $^1/_3$ от момента, принимаемого Галилеем. Поэтому для такого материала теория Галилея дает значение в три раза большее, чем действительное значение разрушающей нагрузки в случае приложения ее в точке C. Реальные материалы не следуют закону Гука до момента излома, и действительное распределение напряжений при изломе отличается от показанного на рис. 14, *в* так, что расхождение между предсказанием теории Галилея и истинным значением разрушающей нагрузки уменьшается.

На основе своей теории Галилей получает ряд важных выводов. Рассматривая балку прямоугольного поперечного сечения, он ставит вопрос: «Почему и во сколько раз брус, или, лучше, призма, ширина которой больше толщины, окажет больше сопротивления излому, когда сила приложена в направлении ее ширины, чем в том случае, когда она действует в направлении толщины?». Исходя из своего предположения (рис. 14, *а*), он дает правильный ответ: «Любая линейка или призма, ширина которой больше толщины, окажет большее сопротивление излому, когда она поставлена на ребро, чем когда она лежит плашмя, и притом во столько раз больше, во сколько ширина больше толщины»[1]).

Продолжая исследование задачи о балке—консоли постоянного поперечного сечения, Галилей заключает, что изгибающий момент веса балки возрастает пропорционально квадрату длины. Сохраняя длину круговых цилиндров, но меняя радиусы их оснований, Галилей находит, что их момент сопротивления пропорционален кубам радиусов. Этот результат следует из того факта, что «абсолютное» сопротивление пропорционально площади поперечного сечения цилиндра, а плечо момента сопротивления равно радиусу цилиндра.

Сравнивая геометрически подобные консоли, нагруженные собственным весом, Галилей заключает, что если изгибающий момент в сечении заделки пропорционален четвертой степени длины, то момент сопротивления пропорционален кубу линейных размеров. Это указывает на то, что геометрически подобные балки не равнопрочны.

По мере возрастания размеров геометрически подобные балки становятся все менее и менее прочными и в конце концов при достаточно больших размерах могут разрушиться под действием одного лишь собственного веса. Он замечает также, что для сохранения постоянной прочности размеры поперечного сечения нужно увеличивать в большем отношении, чем то, в котором возрастают длины.

Все эти соображения приводят Галилея к следующему важному замечанию общего характера: «Вы теперь ясно видите невозможность как для искусства, так и для природы увеличивать размеры

---

[1]) См. Г. Галилей «Беседы и математические доказательства...», стр. 228. Приведенная С. П. Тимошенко цитата—не полный ответ: в этой фразе лишь ссылка на эмпирический факт; теоретическое же объяснение, основанное на соотношении моментов, содержится в продолжении ответа. См. там же, стр. 229. (*Прим. перев.*)

своих произведений до чрезмерно огромных; равным образом невозможно и сооружение кораблей, дворцов или храмов колоссальных размеров, если мы хотим, чтобы их весла, реи, балки, скрепы, короче, все вообще их части держались бы как одно целое; сама природа не производит деревьев необычайной величины, иначе ветви их поломались бы от собственной тяжести; невозможно было бы также создать и скелет человека, лошади или какого-либо другого животного, так чтобы он сопротивлялся и выполнял бы свои нормальные функции, если бы размеры этих живых существ были бы непомерно увеличены в высоту; такое увеличение в высоту могло бы оказаться осуществимым лишь в том случае, если бы для них был использован более твердый и прочный материал, или если бы их кости были увеличены также и в ширину, отчего по форме и по облику эти существа стали бы походить скорее на чудовищ... Если, напротив, размеры тела сократить, то прочность его хотя и уменьшится, но не в той же степени; и действительно, чем меньше тело, тем больше его относительная прочность. Так, например, маленькая собачка смогла бы, вероятно, унести на своей спине пару или даже три таких, как она, собачки, лошадь же, надо думать, не в силах была бы поднять и одной себе подобной»[1]).

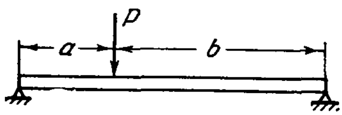


Рис. 15.

Галилей исследует также балку, лежащую на двух опорах (рис. 15), и находит, что изгибающий момент принимает наибольшее значение в той точке пролета, где приложена нагрузка; величина же его получается пропорциональной произведению ab, так что для осуществления излома с наименьшей нагрузкой эту нагрузку следует поместить в середину пролета. Он замечает, что здесь представляется возможность сэкономить на материале, уменьшая поперечное сечение вблизи опор.

Галилей дает полное решение задачи о консоли равного сопротивления, поперечное сечение которой—прямоугольник. Рассматривая сначала призматическую консоль $ABCD$ (рис. 16, a), он замечает, что часть материала можно из нее удалить, не нанося ущерба ее прочности. Он показывает также, что если мы удалим половину материала, придав консоли форму клина ABC, то прочность в любом промежуточном поперечном сечении EF окажется недостаточной по той причине, что если отношение изгибающих моментов в сечениях EF и AB равно отношению $EC : AC$, то моменты сопротивления для этих сечений, пропорциональные квадратам толщины, будут находиться в отношении $(EC)^2 : (AC)^2$. Для того чтобы моменты сопротивления находились между собой

[1]) См. Г Галилей «Беседы и доказательства...», стр. 247—248.

в том же самом отношении, что и изгибающие моменты, мы должны придать продольному очертанию консоли параболическую форму BFC (рис. 16, *б*). Это удовлетворяет требованию равной прочности, поскольку для параболы мы имеем:

$$\frac{(EF)^2}{(AB)^2}=\frac{EC}{AC}.$$

В заключение Галилей исследует прочность полых балок, указывая[1]), что такие балки «находят разнообразнейшие применения в технике—а еще чаще в природе—в целях возможно большего увеличения прочности без возрастания в весе; примерами тому

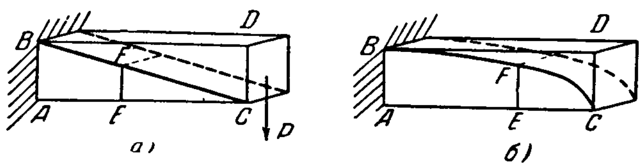


Рис. 16.

могут служить кости птиц и разного вида тростники: и те и другие отличаются большой легкостью и в то же время хорошо сопротивляются как изгибу, так и излому. Так, если бы пшеничный стебель, которым поддерживается превышающий его по весу колос, был бы сформирован из того же количества материала сплошным стержнем, то он смог бы оказать меньшее сопротивление изгибу и излому. Проверенный и подтвержденный практикой опыт указывает, что полые пики или трубы, будь то из дерева или из металла, всегда оказываются значительно более прочными, чем соответствующие сплошные стержни того же веса при той же длине...». Сравнивая полый цилиндр со сплошным той же площади поперечного сечения, Галилей замечает, что их абсолютные сопротивления разрыву одинаковы, а так как моменты сопротивления равны абсолютным сопротивлениям, умноженным на наружный радиус, то прочность при изгибе трубы будет превышать соответствующую прочность сплошного цилиндра во столько же раз, во сколько раз диаметр трубы больше диаметра сплошного цилиндра.

3. Организация академий наук в различных странах

XVII век был эпохой быстрого развития математики, астрономии и естественных наук. Образованные люди начали проявлять интерес к наукам, в частности, большое внимание к себе

---

[1]) См. Г Галилей «Беседы и доказательства. .», стр. 274—278. (*Прим. перев.*)

привлекла экспериментальная работа. Многие университеты находились под наблюдением церкви, и, поскольку это не благоприятствовало научному прогрессу, в различных европейских странах начали образовываться ученые общества. Задачей их было взаимное сближение людей, интересующихся наукой, и обеспечение условий для экспериментальной работы. Такое движение возникло в Италии, где с 1560 г. в Неаполе была создана «Академия тайн природы» (Accademia secretorum naturae). Знаменитая Accademia dei Lincei была основана в Риме 1603 г., и Галилей был одним из ее членов. После смерти Галилея Accademia del Cimento (Академия опытных знаний) была создана во Флоренции при поддержке великого герцога Фердинанда де Медичи и его брата Леопольда. Ученики Галилея—Вивиани и Торричелли принимали участие в работах этой академии. В печатном издании трудов этой академии значительное место уделяется таким вопросам, как термометр, барометр, маятник, а также разнообразным экспериментам по вакууму [1]).

Приблизительно к тому же времени отосится формирование в Англии на почве общих научных интересов аналогичной группировки людей, договорившихся собираться по мере возможности. У математика Валлиса (Wallis) мы находим следующие воспоминания об этих неофициальных научных собраниях: «Проживая около 1645 г. в Лондоне, я имел возможность не только беседовать с различными именитыми духовными лицами по теологическим вопросам, но и познакомиться с рядом весьма достойных особ, интересовавшихся натуральной философией, равно как и другими отраслями светского знания, в частности, тем, что называлось «Новой философией или экспериментальной философией». Мы договорились между собой встречаться еженедельно где-либо в Лондоне в определенный день и час, внеся при этом некоторый вступительный взнос и делая еженедельные сборы в погашение расходов по научным экспериментам, для того, чтобы обсуждать согласно выработанным нами правилам эти вопросы... В наши задачи (из коих исключались вопросы теологии и государственные дела) входило изучение и обсуждение философских исследований, а также связанных с ними вопросов физики, анатомии, геометрии, астрономии, мореплавания, статики, магнетики, химии, механики, выполнение естественнонаучных экспериментов, ознакомление с состоянием этих наук, как они были разработаны у нас и за границей. Мы проводили на этих заседаниях беседы о циркуляции крови, о венозных клапанах, о гипотезе Коперника, о природе комет и новых звезд, о спутниках Юпитера, об овальной форме (какой она казалась) Сатурна, о пятнах на Солнце и о его вращении относительно собственной оси, о неровностях на по-

[1]) Saggi di naturali esperienze, 2-е изд., Firenze, 1691.

верхности Луны, о фазах Венеры и Меркурия, об усовершенствовании телескопа и о шлифовке стекол для этой цели, о взвешивании воздуха, о возможности и невозможности пустоты и об отвращении к ней природы, о торричеллиевом эксперименте с ртутью, о стремлении тяжелых тел вниз и о степенях их ускорения, а также и о многих других вещах того же рода. Некоторые из них были тогда совсем новыми открытиями, иные же, не будучи еще столь общеизвестными, как ныне, и не получив еще всеобщего признания, входили наряду с другими вопросами в состав того, что называлось тогда «Новой философией» и что со времен Галилея во Флоренции и сэра Френсиса Бэкона (лорда Варулемского) в Англии энергично разрабатывалось в Италии, Франции, Германии и других странах, равно как и у нас в Англии. Эти научные заседания в Лондоне вошли в постоянный обычай... и впоследствии были оформлены как Королевское общество, которое продолжает вести свою работу и по сей день [1])».

День, когда был подписан его первый устав (хартия), т. е. 15 июля 1662 г., считается обычно датой основания Королевского общества. В списке приглашенных в члены Общества мы находим имена Роберта Бойля—физика и химика, Кристофора Врена (Chr. Wren)—архитектора и математика и Джона Валлиса—математика. На должность куратора, в обязанности которого входило «подготовлять к каждому собранию общества три-четыре крупных эксперимента», был назначен Роберт Гук.

Точно так же и Французская Академия наук имела своим началом добровольные объединения людей науки. Отец Мерсенн (1588—1648) ввел и поддерживал до своей смерти обычай собирать конференции, в которых принимали участие такие люди, как Гассенди, Декарт, Паскаль. В дальнейшем эти частные встречи ученых стали происходить в доме Абер-де-Монмора (Habert de Montmor). В 1666 г. Кольбер, министр Людовика XIV, предпринял официальные меры для организации Академии наук, в состав которой должны были войти специалисты различных областей знания. Математик Роберваль, астроном Кассини, датский физик Ремер (измеривший скорость света) и французский физик Мариотт значатся в первом списке членов Французской академии [2]).

Несколько позднее (в 1770 г.) была организована Берлинская Академия наук, а в 1725 г. в Петербурге возникла Российская Академия наук [3]).

Все эти академии издавали свои печатные труды, оказавшие большое влияние на развитие науки в XVII и XIX столетиях.

---

[1]) Lyons Henry, The Royal Society, 1660—1940, 1944.

[2]) Bertrand J.L.F., L'Académie des sciences et les académiciens de 1666 à 1793, Paris, 1869.

[3]) Очерки по истории Академии наук СССР (к 220-летию); физико-матем. науки. Изд. АН СССР, 1945. (*Прим. ред.*)

4. Роберт Гук

Роберт Гук (1635—1703)[1]) был сыном приходского священника, жившего на острове Уайт (Wight). В детском возрасте он был очень слабым и болезненным, но весьма рано обнаружил живой интерес к изобретению механических игрушек и к рисованию. Когда ему исполнилось 13 лет, он поступил в Вестминстерскую школу и поселился в доме школьного учителя, д-ра Басби (Busby). Там он изучил латинский, греческий и немного еврейский языки, а также познакомился с Началами Евклида и некоторыми другими трудами по математике. В 1653 г. Гук был отправлен в церковь Христа в Оксфорде, где стал певчим. Это дало ему возможность продолжать свои занятия, и в 1662 г. он получил степень магистра искусств. В Оксфорде он сблизился с некоторыми учеными и, будучи опытным механиком, помогал им в их исследовательской работе. Около 1658 г. он работал совместно с Бойлем и усовершенствовал воздушный насос. Он пишет: «Почти в то же самое время благодаря доброте д-ра Уорда (Ward) мне представился случай познакомиться с астрономией, в связи с чем для уточнения астрономических наблюдений я занялся усовершенствованием маятника и нашел способ увеличивать продолжительность его колебаний... С этой целью я провел несколько испытаний, которые, как я обнаружил к моему удовлетворению, увенчались удачей. Этот успех побудил меня к дальнейшим размышлениям о возможности приспособления маятника для определения географической долготы мест, и тогда разработанный мною для самого себя метод механических изобретений быстро привел меня к использованию пружин вместо силы тяжести для того, чтобы приводить какое-либо тело в колебательное движение при любом положении». Это сообщение отмечает начало экспериментирования с пружинами.

В 1662 г. по рекомендации Роберта Бойля Гук стал куратором по организации экспериментов в Королевском обществе, и его познания в механике и изобретательские способности нашли здесь хорошее применение. Он всегда стремился к разработке какого либо прибора, чтобы продемонстрировать свои собственные идеи или же для того, чтобы проиллюстрировать или выяснить какой-либо вопрос, возникавший в дискуссиях членов Общества.

В годы 1663—1664 Роберт Гук заинтересовался микроскопией, а в 1665 г. вышла его книга «Микрография»[2]). В ней мы находим

[1]) См. Gunther R. T. The life and work of Robert Hooke в Собрании Early science in Oxford, тт. VI—VIII. См также статью Andrade E. N. da C., Proc. Roy. Soc., London, т. 201, стр. 439, 1950. Приведенные в этой статье цитаты взяты из указанных здесь источников. (*Прим. авт.*) На русском языке—статья Т. И. Райнова «Роберт Гук и его трактат об экспериментальном методе», Научное наследство, т. I, изд. АН СССР, 1948, стр. 653 и далее. (*Прим. ред.*)

[2]) См. Early science in Oxford, т. XIII.

не только сведения о микроскопе Гука, но также и описания его новых важных открытий. Гук пришел к мысли, что «свет представляет собой весьма короткие колебательные движения, совершающиеся в поперечных направлениях к линиям распространения света». Он объяснил происхождение интерференционной окраски мыльных пузырей и явление ньютоновых колец.

В 1664 г. Гук стал профессором геометрии в колледже Грэшем (Gresham), однако продолжал демонстрировать свои эксперименты, изобретать и описывать новые инструменты в Королевском обществе, а также читать, сверх того, лекции [1]) (по кафедре Кутлера). На заседании Королевского общества 3 мая 1666 г. Гук заявил: «Я намерен изложить систему мира, весьма отличающуюся от всех до сих пор предложенных; она основывается на следующих трех положениях:

I. Все небесные тела не только обладают тяготением своих частей к их собственному общему центру, но притягиваются и взаимно одно к другому внутри их сфер действия.

II. Все тела, совершая простое движение, будут продолжать двигаться по прямой линии, если только они не будут постоянно отклоняться от нее некоторой внешней силой, побуждающей их описывать окружность, эллипс или какую-либо иную кривую.

II. Это притяжение тем больше, чем тела ближе. Что же касается отношения, в котором эти силы уменьшаются с увеличением расстояния, то я сам (как он сообщает) не определил его, хотя и проделал с этой целью некоторые эксперименты. Предоставляю сделать это другим, у которых найдется для этой задачи достаточно времени и знаний» [2]).

Мы видим, что Гук имел ясное представление о всемирном тяготении, хотя ему и недоставало математических познаний, чтобы доказать законы Кеплера.

После большого лондонского пожара в сентябре 1666 г. Гук представил модель, иллюстрировавшую его проект реконструкции пострадавшего города; по рассмотрении ее члены городского магистрата поручили вести эти восстановительные работы Гуку. Он проявил большую активность и спроектировал несколько зданий.

В 1678 г. вышла из печати его работа «De potentia restitutiva or of spring» (О восстановительной способности или об упругости). В ней содержатся результаты проведенных Гуком опытов с упругими телами. Это был первый печатный труд, в котором рассматривались упругие свойства материалов. Относительно выпол-

---

[1]) См. Early science in Oxford, т. VIII.

[2]) См. Robinson, Elements of mechanical philosophy, стр. 284, Edinburgh, 1804.

нения самих экспериментов он дает следующие указания: «Возьмите проволочную струну (рис. 17[1]) 20, 30 или 40 футов длиной,

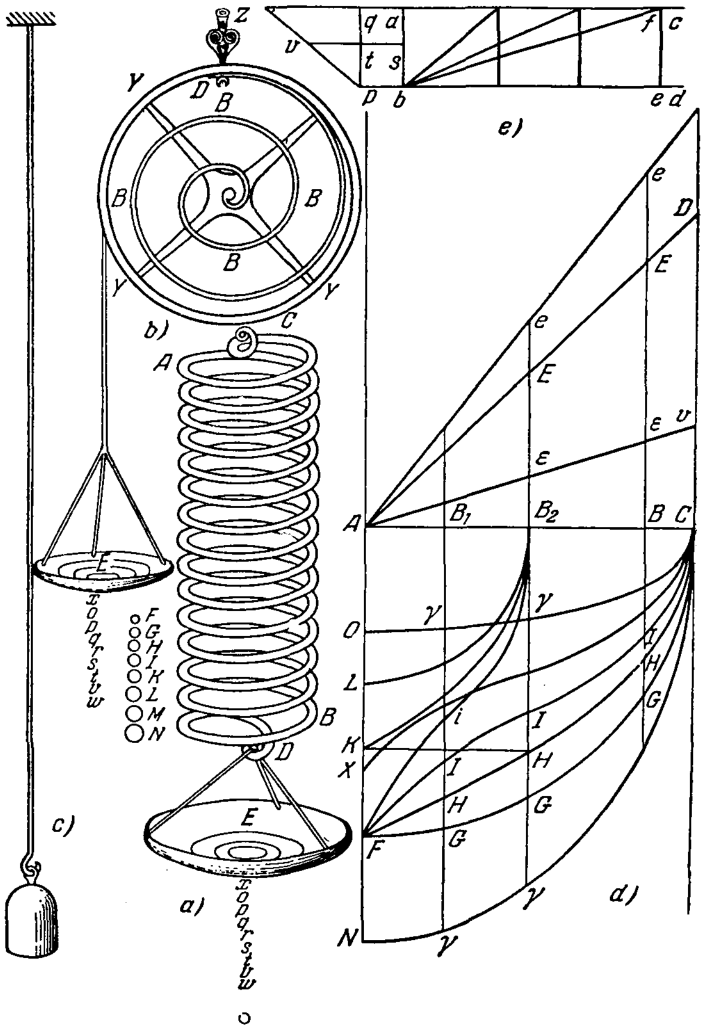


Рис. 17. Приборы, которыми пользовался в своих экспериментах Гук.

укрепите ее в верхней части гвоздем, а к нижнему концу подвесьте чашку весов для нагрузки (разновесов). Затем измерьте циркулем

[1]) Рис. 17 воспроизводится из книги Гука.

расстояние от дна чашки до земли или пола и запишите это расстояние; далее положите в названную чашку гири, измерьте несколько раз удлинения названной струны и запишите их. Затем сравните несколько таких удлинений той же струны, и вы найдете, что они всегда будут относиться друг к другу так же, как вызвавшие их нагрузки». Гук описывает также опыты с винтовыми и спиральными пружинами, в частности часовыми, а также с «бруском сухой древесины, который изгибается и возвращается в первоначальное состояние, если одним концом его укрепить в горизонтальном положении, к другому же концу подвешивать нагрузки, прогибающие его вниз». Он не только исследует прогибы такой консоли, но рассматривает и деформации продольных ее волокон и приходит к весьма важному заключению, что на выпуклой поверхности волокна при изгибе растягиваются, на вогнутой—сжимаются. Из всех этих экспериментов Гук извлекает важное заключение. «Совершенно очевидно, что правило или закон природы для всякого упругого тела состоит в том, что его сила или способность восстанавливать свое естественное состояние всегда пропорциональны той мере, на которую оно выведено из этого своего естественного состояния, совершено ли это путем его разрежения, отделения его частей одна от другой или же путем сгущения или уплотнения этих частей. И наблюдать это можно не только в рассмотренных выше телах, но и во всех каких бы то ни было упругих телах, будь то металлы, дерево, каменные породы, кирпич, волос, рог, шелк, кости, мышцы, стекло и т. п. При этом имеют значение та или иная форма изгибаемого тела, а также тот или иной, выгодный или невыгодный, способ его изгибания. Исходя из этого принципа, легко можно будет вычислять силу луков, а также баллист или катапульт, находивших применение у древних... Легко будет вычислить и необходимое сопротивление пружины для часов... На той же основе легко объяснить изохронные колебания пружины или натянутой струны, а также однородность звука, производимого теми струнами, колебания которых достаточно быстры для того, чтобы произвести доступный слуху звук. Этим же объясняется, по-видимому, почему пружина, присоединенная к балансиру часов, выравнивает его колебания, когда они бывают то бо̀льшими, то меньшими... Пользуясь тем же законом, легко было бы устроить Философские весы, чтобы определять вес любого тела без применения гирь... Такие весы я изобрел для того, чтобы исследовать притяжение тел к центру земли, иначе говоря, выяснить, не теряют ли тела на большом удалении от центра земли несколько в своей силе тяготения к центру земли...».

Мы видим, что Роберт Гук не только установил соотношение между величиной сил и производимыми ими деформациями, но и указал ряд экспериментов, где этим соотношением можно воспользоваться для решения некоторых весьма важных вопросов. Это линейное соотношение между силой и деформацией, известное как закон Гука, и послужило фундаментом, на котором впоследствии получила свое дальнейшее развитие механика упругих тел.

5. Мариотт

Большую часть своей жизни Мариотт (1620—1684) провел в Дижоне (Франция), где он был настоятелем монастыря Сен-Мартэнсубон. Одним из первых в 1666 г. он вошел в состав только что сформированной в том же году Французской Академии наук, причем именно его инициатива в значительной мере способствовала тому, что экспериментальные методы были внедрены во французскую науку. Его эксперименты с воздухом привели к открытию широко известного закона Бойля—Мариотта, утверждающего, что при постоянной температуре давление определенной массы газа по умножении на его объем остается всегда величиной постоянной.

В механике твердых тел Мариотт построил теорию удара, в которой, пользуясь подвешенными на нитях шарами, он смог продемонстрировать сохранение количества движения. Ему принадлежит также честь изобретения баллистического маятника.

Исследования Мариотта по теории упругости входят в состав его труда о движении жидкостей[1]). Мариотту пришлось проектировать трубопровод для водоснабжения Версальского дворца, и в связи с этим он заинтересовался сопротивлением балок изгибу. Экспериментируя с деревянными и стеклянными стержнями, он приходит к выводу, что теория Галилея дает преувеличенные значения для разрушающей нагрузки, и поэтому строит свою теорию изгиба, в которой принимаются во внимание упругие свойства материала.

Он начинает с простых испытаний на растяжение. На рис. 18 показано устройство, использованное им при испытании на растяжение дерева[2]). Об его установке для испытания на растяжение бумаги дает представление рис. 18. Мариотта интересовала не только абсолютная прочность материалов, но также и их упругие свойства, и он нашел, что во всех испытанных им материалах удлинения оказывались всегда пропорциональными приложенным силам. Он обнаруживает, что разрушение наступает тогда, когда удлинение превосходит некоторый предел. Свое исследование изгиба консоли (рис. 18, *c*) он начинает с рассмотрения условий равновесия рычага AB (рис. 18, *d*), опертого в точке C. К левому плечу рычага на расстояниях $AC=4$ фута, $DC=2$ фута,

---

[1]) Эта работа была издана Ля-Иром (M. de la Hire) в 1686 г., после смерти Мариотта. См. также второй том Собрания трудов Мариотта (2-е изд., Гаага, 1740).

[2]) Рис. 18 воспроизводится из Собрания трудов Мариотта.

$EC=1$ фут подвешены три равных груза $G=H=I=12$ фунтов. Чтобы уравновесить их нагрузкой F, приложенной на расстоянии $BC=12$ футов от точки опоры, мы должны положить $F=7$ фунтов. Если же нагрузку F несколько увеличить, то рычаг начнет совершать поворот относительно точки C. Перемещения точек A, D, E будут пропорциональны их расстояниям от C, силы же, приложенные в этих точках, будут оставаться равными 12 фунтам.

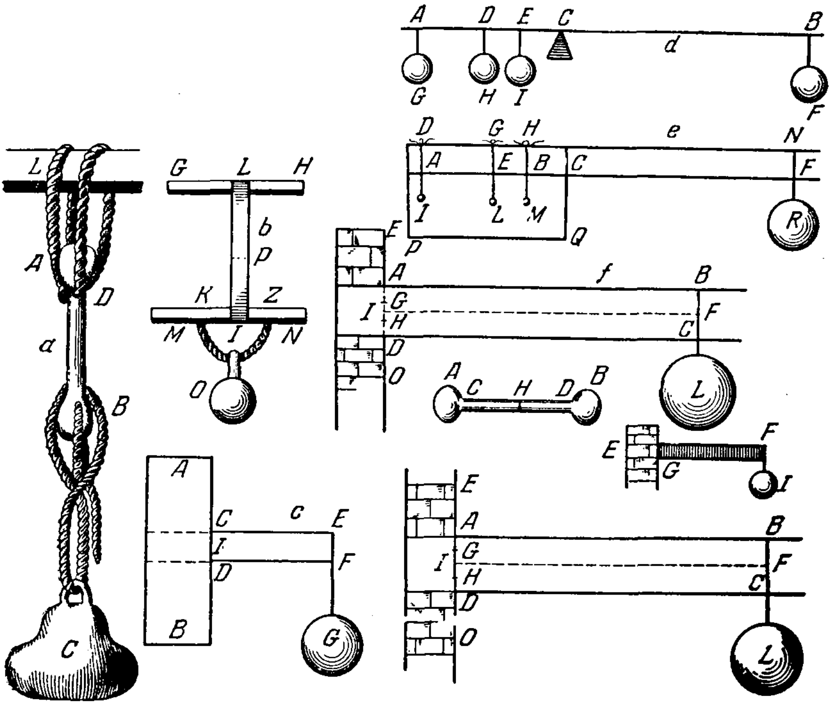


Рис. 18. Опыты Мариотта на растяжение и изгиб.

Рассмотрим теперь тот же самый рычаг, но допустим, что нагрузки G, H, I заменены тремя одинаковыми проволоками DI, GL, HM (рис. 18, e), абсолютная прочность которых равна 12 фунтам. Вычисляя нагрузку R, необходимую для того, чтобы вызвать разрыв проволок, Мариотт замечает, что когда усилие в проволоке DI достигает своего предельного значения 12 фунтов, то усилия в проволоках GL и HM, пропорциональные их удлинениям, равны соответственно 6 фунтам и 3 фунтам, так что разрушающая нагрузка R оказывается равной всего лишь $5^1/_2$ фунтам, а не 7 фунтам, как это имело место в предыдущем случае.

Сходным рассуждением Мариотт пользуется и в исследовании изгиба консоли (рис. 18, f). Полагая, что в момент разрушения правая часть консоли будет совершать поворот вокруг точки D, он приходит к выводу, что усилия в продольных волокнах будут находиться между собой в таких же отношениях, как их расстояния от D. Отсюда следует, что в случае прямоугольной балки сумма этих сил будет равна $S/2$ (т. е. лишь половине абсолютной прочности балки на растяжение), момент же их относительно D будет равен $S/2\times\frac{2}{3}h=Sh/3$, где h—высота балки. Приравнивая эту величину моменту Ll приложенной нагрузки L, мы находим значение разрушающей нагрузки

$$L=\frac{Sh}{3l}\,. \tag{a}$$

Принимая, таким образом, во внимание деформацию волокон и пользуясь той же самой точкой поворота D, что и Галилей, Мариотт находит, что предельная изгибающая нагрузка L относится к абсолютной прочности S, как $h/3:l$. Это значит, что предельная нагрузка составляет всего лишь $^2/_3$ от значения, вычисленного Галилеем.

Но Мариотт идет в своем исследовании дальше и, испытывая ту же самую прямоугольную балку (рис. 18, f), замечает, что волокна, расположенные в нижней части ID поперечного сечения, оказываются сжатыми, между тем как волокна, занимающие верхние части IA, растянуты. Для того чтобы вычислить нагрузку L, необходимую для того, чтобы преодолеть сопротивление растянутых волокон, он пользуется уравнением (a), подставив в него $h/2$ вместо h, что приводит к

$$L_1=\frac{Sh}{6l}\,. \tag{b}$$

Переходя к сжатым волокнам нижней части ID поперечного сечения, Мариотт полагает, что здесь имеет место тот же самый закон распределения силы, что и в зоне растяжения, и что абсолютная прочность здесь та же. Поэтому прочность, сообщаемая балке сжатыми волокнами, также должна быть равна L_1 и выражаться уравнением (b). Полная прочность выразится выведенным раньше уравнением (a). Как мы видим, Мариотт воспользовался в своем исследовании теорией распределения напряжений в упругих балках, которую можно признать удовлетворительной. Его допущение относительно характера распределения усилий в волокнах правильно, но при вычислении момента растягивающих усилий относительно точки I необходимо подставить в уравнение (a) не только $h/2$ вместо h, но также и $S/2$ вместо S. Эта ошибка помешала Мариотту прийти к правильной формуле для разрушения балки, материал которой следует закону Гука до разрушения.

Для проверки своей теории Мариотт провел испытания с деревянными цилиндрическими брусьями диаметром 6 *мм* (0,25 дюйма). Испытание на растяжение дало значение абсолютной прочности, равное $S=330$ фунтам. Испытывая брус как консоль[1]) длиной $l=4$ дюйма, он нашел, что предельная нагрузка L равна 6 фунтам, что дает $S:L=55$ между тем как из уравнения (a) получается[2]) $S:L=48$, по теории же Галилея $S:L=32$. Мариотт пытается объяснить это расхождение между экспериментальными результатами и вычисленными из уравнения (a) ссылкой на «влияние времени». Он утверждает, что растянутый образец может разрываться и под нагрузкой в 300 фунтов, если эта нагрузка будет действовать достаточно продолжительное время. Повторив свои эксперименты со стеклянными стержнями, Мариотт вновь обнаружил, что его формула (уравнение (a)) дает более точное предсказание, чем формула Галилея.

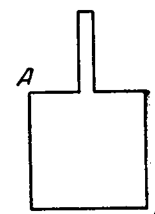


Рис. 19. Цилиндрический барабан, примененный Мариоттом в своих испытаниях на разрыв.

Мариотт провел также эксперименты с балками, опертыми обоими концами, причем нашел, что в случае заделки опор такая балка в центре пролета выдерживает вдвое бóльшую предельную нагрузку, чем такая же балка, свободно лежащая на опорах.

На основе весьма интересной серии испытаний Мариотт определил сопротивление разрыву труб, находящихся под действием внутреннего гидростатического давления. С этой целью он использовал цилиндрический барабан AB (рис. 19) с укрепленной на нем длинной вертикальной трубой. Наполняя барабан и трубу водой и увеличивая высоту уровня воды в этой последней[3]), он смог достигнуть того, что барабан разрывался. Таким путем он нашел, что безопасная толщина трубы должна быть пропорциональна действующему на нее внутреннему давлению и диаметру.

Изучая изгиб равномерно нагруженных квадратных пластинок, Мариотт делает из соображений подобия правильный вывод, что полная предельная нагрузка на пластинку остается постоянной и не зависит от горизонтальных размеров пластинки, если толщина ее не меняется.

---

[1]) Мариотт упоминает в своей работе, что эти испытания производились в присутствии Роберваля и Гюйгенса.

[2]) Нужно учесть, что уравнение (a) выведено для прямоугольного сечения, Мариотт же пользуется им также и для круглого.

[3]) В некоторых его опытах отметка уровня воды в трубе приближалась к 100 футам.

Все это дает нам основание признать, что Мариотт значительно продвинул теорию механики упругих тел. Приняв во внимание упругую деформацию, он усовершенствовал теорию изгиба балок, а затем провел испытания, чтобы подтвердить свою гипотезу. Экспериментально же он подверг проверке и некоторые заключения Галилея относительно того, как изменяется прочность балки с изменением пролета. Он исследовал также влияние, оказываемое на прочность балки заделкой ее концов, и дал формулу для определения прочности труб на разрыв под воздействием внутреннего давления.

ГЛАВА II

УПРУГИЕ ЛИНИИ (ЭЛАСТИКИ)

6. Математики семьи Бернулли[1])

Представители фамилии Бернулли жили первоначально в Антверпене, но в связи с религиозными преследованиями со стороны герцога Альбы они уехали из Голландии и к концу XVI века поселились в Базеле. Начиная приблизительно с конца XVII века и в течение более чем ста последующих лет этот род дал науке ряд выдающихся математиков. В 1699 г. Французская Академия наук избрала двух братьев Бернулли—Якова и Иоганна—в состав своих иностранных членов, и в дальнейшем вплоть до 1790 г. в этом ученом учреждении всегда были представители фамилии Бернулли[2]).

Последняя четверть XVII и начало XVIII века ознаменовались быстрым развитием исчисления бесконечно малых. После того как Лейбниц (1646—1716)[3]) положил ему начало на европейском континенте, своей дальнейшей разработкой оно обязано трудам главным образом Якова и Иоганна Бернулли. Пытаясь расширить область применения этого нового математического аппарата, они исследовали ряд задач из механики и физики. Одна из этих задач, рассмотренная[4]) Яковом Бернулли (1654—1705),

---

[1]) Их биографии см.: Merian Peter, Die Mathematiker Bernoulli, Basel, 1860.

[2]) Среди представителей рода Бернулли четверо: Иоганн (1667—1748), его сыновья Даниил (1700—1782) и Николай (младший, 1695—1726) и племянник Даниила Яков (младший, 1759—1789, женатый на внучке Эйлера)— состояли почетными членами и профессорами математики и механики Петербургской Академии наук. О Д. Бернулли см. Райнов Т. И., Даниил Бернулли и его работа в Петербургской Академии наук, Вестн. АН СССР, № 7—8, 1938. *(Прим. ред.)*

[3]) Ньютон заложил основы исчисления бесконечно малых независимо от Лейбница в Англии, но на материке Европы в этой быстро разраставшейся отрасли математики были приняты и получили широкое использование метод изложения и обозначения Лейбница

[4]) Первоначальный набросок подхода к этой задаче был напечатан в журнале Лейбница Acta eruditorum Lipsiae, 1694 г.; окончательная же

касалась формы кривой изгиба упругого стержня; разработкой этой темы он положил начало одному из важных разделов механики упругого тела. Если Галилей и Мариотт исследовали прочность балок, то Бернулли решал задачу вычисления их прогибов, хотя при этом и не расширил наших знаний о физических свойствах материалов. Следуя допущению Мариотта относительно положения нейтральной оси, он принимает, что касательная к контуру поперечного сечения с вогнутой поверхности перпендикулярна к плоскости действия внешних нагрузок. Рассматривая консоль прямоугольного сечения, заделанную одним концом и нагруженную на другом силой P, он полагает, что кривая изгиба примет при этом форму, показанную на рис. 20. Пусть $ABFD$ представляет собой элемент консоли, длина которого по ее оси равна ds. Если вследствие изгиба поперечное сечение AB, повернувшись вокруг оси A, образует некоторый угол с сечением FD, то удлинения волокон между этими двумя смежными поперечными сечениями пропорциональны расстояниям их от оси A. Принимая закон Гука и обозначая удлинение крайнего волокна на выпуклой грани через $\Delta\, ds$, мы найдем, что равнодействующая растягивающих усилий во всех волокнах поперечного сечения AB выразится произведением

Яков Бернулли.

$$\frac{1}{2}\,\frac{m\Delta\, ds}{ds}\,bh, \tag{a}$$

где bh—площадь поперечного сечения, а m—постоянная, зависящая от упругих свойств материала балки. Момент этой равнодействующей относительно оси A должен быть равен моменту P_x приложенной нагрузки относительно той же оси, на основании чего получаем уравнение

$$\frac{1}{2}\,\frac{m\Delta\, ds}{ds}\,bh\,\frac{2}{3}\,h = Px. \tag{b}$$

Замечая теперь, что

$$\frac{\Delta\, ds}{ds} = \frac{h}{r},$$

ее трактовка была помещена автором в Histoire de l'Académie des sciences de Paris 1705. См. также Собрание трудов И. Бернулли, т. 2, стр. 976, Genève, 1744.

можно представить уравнение (b) в виде

$$\frac{C}{r} = Px, \tag{c}$$

где

$$C = \frac{mbh^3}{3}.$$

Вследствие сделанного Яковом Бернулли ошибочного допущения относительно положения оси поворота поперечного сечения AB мы пришли вместе с ним к неправильному значению постоянной C. Тем не менее общая форма уравнения (c), указывающего, что кри-

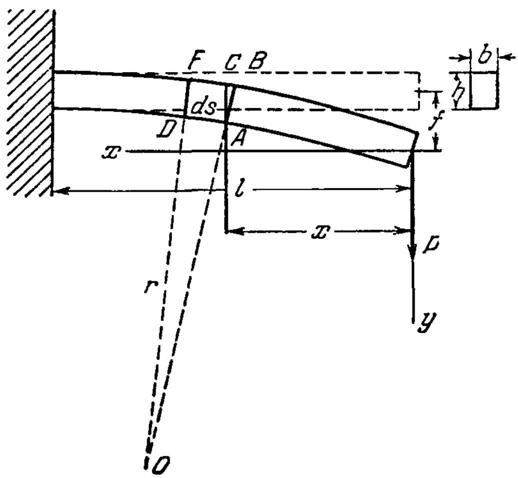


Рис. 20.

визна кривой изгиба в каждой своей точке пропорциональна изгибающему моменту в этой же точке, правильна, и она была принята впоследствии другими математиками (прежде всего Эйлером) в их исследованиях упругих линий изгиба.

Иоганн Бернулли (1667—1748), младший брат Якова, считался крупнейшим математиком своего времени. Результатом его преподавания явилась первая книга по исчислению бесконечно малых, написанная маркизом де-Лопиталем[1]) в 1696 г. Подлинные лекции Иоганна Бернулли по дифференциальному исчислению были изданы Базельским естественноиспытательным обществом

[1]) De l'Hospital, Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes, Paris, MDCCXVI, 2-е изд. Имеется русский перевод с издания 1768; Лопиталь Г. Ф., Анализ бесконечно малых. Перевод Н. В. Леви под редакцией и со вступительной статьей А. П. Юшкевича «Первый печатный курс дифференциального исчисления». Серия «Классики естествознания», Гостехиздат, М.—Л., 1935. (*Прим. перев.*)

в 1922 г. по случаю 300-летней годовщины той даты, когда Бернулли стали гражданами города Базеля. Иоганну Бернулли (в его письме к Вариньону[1]) принадлежит формулировка принципа виртуальных перемещений. Хотя он и интересовался упругими свойствами материалов, его собственный вклад в эту область имеет лишь небольшое значение[2]). Значительно более важный вклад в сопротивление материалов был сделан сыном Иоганна Бернулли, Даниилом, и его учеником Л. Эйлером.

Даниил Бернулли (1700—1782) известен преимущественно как автор знаменитой книги «Гидродинамика»[3]), но он содействовал также и развитию теории упругих кривых. Он подал Эйлеру мысль использовать вариационное исчисление для вывода уравнений упругих кривых, указав ему в письме: «Поскольку никто не овладел в таком совершенстве мастерством изопериметрического метода (вариационного исчисления), как Вы, Вам легко будет решить задачу, в которой требуется, чтобы $\int ds/r^2$ принял наименьшее значение»[4]). Приведенный здесь интеграл, как нам теперь известно, выражает, если не учитывать постоянного множителя, энергию деформации изогнутого бруса. Этим советом Эйлеру был подсказан труд, на освещении которого мы остановимся в дальнейшем см. стр. 45).

Даниил Бернулли первый вывел дифференциальное уравнение поперечных колебаний призматического бруса[5]) и пользовался им в изучении частных случаев колебаний. Интегрирование этого уравнения было выполнено Эйлером, и о нем речь будет дальше (см. стр. 49), но Даниил Бернулли провел серию контрольных опытов, о результате которых он сообщает Эйлеру нижеследующее: «Эти колебания возникают свободно, и я определил различные условия их и выполнил множество прекрасных экспериментов для установления узловых точек и высоты тона, прекрасно согласующихся с теорией»[6]). Даниил Бернулли был, таким образом, не только математиком, но и экспериментатором. Некоторые из его экспериментов послужили Эйлеру поводом для постановки новых математических проблем.

---

[1]) См. Varignon, Nouvelle mécanique, т. 2, стр. 174, Paris, 1725.

[2]) Вопросы упругости обсуждаются в первых трех главах книги Иоганна Бернулли «Discours sur les lois de la communication du mouvement», Paris, 1727.

[3]) Bernoulli D., Hydrodynamica seu de viribus et motibus fluidorum, Argentoratae, 1738. (*Прим. ред.*)

[4]) См. Fuss P. H., Correspondance mathématique et physique (Фусс, Переписка по математике и физике), письмо 26, том II, С.-Петербург, 1843.

[5]) В работе «De vibrationibus laminarum elasticarum», опубликованной в «Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae», т. 13, Петербург, 1751. (*Прим. ред.*)

[6]) См. Фусс П. Х., письмо 30, т. 2.

7. Леонард Эйлер

Леонард Эйлер[1]) (1707—1783) родился неподалеку от Базеля. Его отец был пастором в близлежащей деревне Рихен. В 1720 г. Эйлер поступил в Базельский университет, который в то время был крупным центром научно-исследовательской работы в области математики, так как лекции Иоганна Бернулли привлекали сюда молодых математиков со всех концов Европы. Математические таланты юного студента скоро обратили на себя внимание, и Иоганн Бернулли в дополнение к своим обычным лекциям начал давать ему еженедельно особые уроки. В возрасте 16 лет Эйлер получил степень магистра, а прежде чем ему исполнилось 20 лет, он уже принял участие в международном конкурсе на премию, предложенную Французской Академией наук, и издал свою первую научную работу.

Леонард Эйлер.

В 1725 г. в Петербурге была основана Российская Академия наук. Два сына Иоганна Бернулли—Николай и Даниил—приняли приглашение стать членами этого нового ученого учреждения. Обосновавшись в России, они помогли и Эйлеру занять там положение члена-корреспондента. Летом 1727 г. Эйлер переехал в Петербург и, будучи свободным от всяких других обязанностей, получил возможность отдать все свои силы математическим исследованиям. Он стал членом Академии в 1730 г. по разделу физики, а в 1733 г., когда Даниил Бернулли после смерти своего брата (в 1726 г.) покинул Петербург и вернулся в Базель, Эйлер занял его место руководителя по разделу математики.

За время своего пребывания в Петербурге в составе Российской Академии Эйлер написал свою знаменитую книгу по механике[2]), в которой он вместо геометрических методов, применявшихся Нью-

---

[1]) См. Spiess Otto, Leonard Euler. См. также хвалебную речь Кондорсе, напечатанную в «Lettres de L. Euler à une princesse d'Allemagne», Paris, 1842. (*Прим. авт.*) На русском языке см. Крылов А. Н., Леонард Эйлер, отд. изд. АН СССР, 1939 и Собр. соч. А. Н. Крылова, т. I, ч. 2, 1951; также «Леонард Эйлер, 1707—1783. сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти» изд. АН СССР, 1935. В этом сборнике опубликована и переписка Эйлера с великими математиками. (*Прим. ред.*)

[2]) Mechanica sive motus scientia analytice exposita, 2 тома, С.-Петербург, 1736 г. Немецкий перевод Вольферса (Wolfers, J. P., Greifswald), 1848 и 1850.

тоном и его учениками, ввел аналитические методы. Он показал, как могут быть выведены дифференциальные уравнения движения частицы и каким образом путем интегрирования этих дифференциальных уравнений может быть выяснено движение тела. Этот метод упрощал решение задач, и его книга оказала сильное влияние на последующее развитие механики. Лагранж в своей «Mécanique analytique» (1788) утверждает, что книга Эйлера была первым трактатом по механике, в котором исчисление бесконечно малых было применено к науке о движении тел.

Ко времени издания этой книги Эйлер заинтересовался упругими кривыми. Кроме того, из той же переписки между Эйлером и Даниилом Бернулли можно установить, что последний привлек внимание Эйлера к задаче поперечных колебаний упругого бруса и к исследованию соответствующего дифференциального уравнения.

В 1740 г. королем Пруссии стал Фридрих II (Фридрих Великий), интересовавшийся наукой и философией и вознамерившийся привлечь лучших ученых в Прусскую Академию. К этому времени Эйлер был уже признан выдающимся математиком, и новый король пригласил его войти в состав Берлинской Академии. Поскольку в России в то время была политическая смута, Эйлер принял это предложение и летом 1741 г. переехал в Берлин. Он сохранил некоторую связь с Российской Академией и продолжал печатать многие из своих мемуаров в «Commentarii Academiae Petropolitanae»[1]). В Берлине Эйлер продолжал свои математические исследования, и его труды печатались в ежегодниках (анналах) Прусской и Российской академий.

В 1744 г. вышла его книга «Methodus inveniendi lineas curvas...». Это была первая книга по вариационному исчислению, и в ней, сверх того, содержалось первое систематическое изложение теории упругих кривых. На ней мы остановимся в дальнейшем.

Живя в Берлине, Эйлер написал свое «Введение в исчисление бесконечно малых» (1748), «Дифференциальное исчисление» (2 тома, 1755) и «Интегральное исчисление» (3 тома), причем последнее сочинение было издано в Петербурге (1768—1770). Все эти книги послужили на многие годы руководствами для математиков, и можно утверждать, что все знаменитые математики, жившие в конце XVIII и начале XIX века, были учениками Эйлера[2]).

После смерти Мопертюи (1759) Эйлеру пришлось нести ряд обязанностей по Академии и выполнять большое количество административной работы. Ему приходилось также заниматься изыска-

---

[1]) Труды-мемуары Петербургской Академии наук.

[2]) Кондорсе в своей хвалебной речи заявляет: «Все живущие ныне знаменитые математики являются его учениками: нет ни одного, который не сформировался бы в чтении его сочинений...».

нием денежных средств, необходимых на содержание Академии в трудные времена Семилетней войны. В 1760 г. Берлин был оккупирован русской армией, и дом Эйлера пострадал. Когда русский командующий генерал Тотлебен узнал об этом, он немедленно принес Эйлеру свои извинения и распорядился об уплате компенсации. Русская императрица Елизавета послала ему еще дополнительную сумму, которой Эйлер был с избытком вознагражден.

В 1762 г. императрицей России стала Екатерина II. Она покровительствовала научным исследованиям и развитию науки и поставила себе задачу поднять престиж Российской Академии наук. Вскоре с Эйлером завязались переговоры о его возвращении в Петербург. Екатерина II смогла сделать ему лучшее предложение, чем Фридрих II, и потому в 1766 г., после 25 лет работы в Берлине, Эйлер вновь вернулся в Петербург. Ему был оказан весьма любезный прием при императорском дворе, и Екатерина подарила ему дом. Он опять был избавлен от финансовых трудностей и получил возможность посвятить все свое время научной работе. Ему шел тогда шестидесятый год, и его зрение к этому времени пришло в крайне плохое состояние. Один глаз он потерял уже в 1735 г., но, так как катаракта начала после этого поражать и другой глаз, ему угрожала полная слепота. Это, однако, не погасило его активности: за годы последнего периода своей жизни он написал больше научных работ, чем когда-либо раньше. Чтобы довести все эти работы до конца, он пригласил к себе помощников, подробно разъяснял им существо тех или иных новых проблем и указывал методы, которыми они должны были пользоваться в их решении. С такой подготовкой помощники получали возможность продвигать работу вперед, а после очередной беседы с руководителем они представляли результаты в письменном докладе на окончательное утверждение Эйлера. Более 400 научных работ было дано престарелым Эйлером за эти последние (1766—1783) годы его жизни, и свыше сорока лет спустя после его смерти Российская Академия наук все еще продолжала печатать его произведения в своих анналах.

8. Вклад Эйлера в науку о сопротивлении материалов

Эйлера как математика интересовала прежде всего геометрическая форма упругих линий изгиба. Без серьезного обсуждения он принял теорию Якова Бернулли, утверждавшую, что кривизна изогнутой оси балки в каждой ее точке пропорциональна изгибающему моменту в этой же точке. Основываясь на этом допущении, он исследовал форму кривых, которые принимает тонкий гибкий упругий стержень при различных условиях его загружения. С главными результатами работы Эйлера в этой области можно познакомиться по вышеупомянутой его книге «Methodus inveniendi lineas curvas...»[1]). Он подходит к задаче с точки зрения вариационного исчисления, которое он разрабатывает в своей книге. Вводя этот метод, Эйлер замечает: «Так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым творцом, то в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума; поэтому нет никакого сомнения, что все явления мира с таким же успехом можно определить из причин конечных при помощи метода максимумов и минимумов, как и из самих причин производящих... Итак, открыто два пути для познания явлений природы: один—через производящие причины, который обычно называют прямым методом, другой—через конечные причины, и математик с равным успехом пользуется обоими... Но прежде всего надо прилагать усилия, чтобы открыть доступ к решению обоими путями; ибо тогда не только одно решение наилучшим образом подтверждается другим, но от согласия обоих мы получаем высшее наслаждение»[2]).

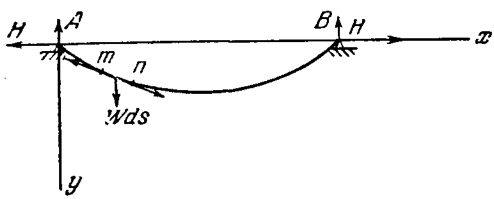


Рис. 21.

В целях пояснения применения этих двух методов Эйлер останавливается на задаче о цепной линии. Для цепи, подвешенной в двух точках A и B (рис. 21), можно получить кривую ее равновесия, воспользовавшись «прямым методом». При этом мы рассматриваем силы, действующие на бесконечно малый ее элемент mn, и составляем уравнения равновесия этих сил. Из этих уравнений выводится требуемое дифференциальное уравнение цепной линии. Но той же цели мы можем достигнуть и «методом конечных причин», подходя к задаче из соображений о потенциальной энергии сил тяжести. Из всех геометрически возможных кривых провеса искомая должна быть такой, для которой эта потенциальная энер-

[1]) Английский перевод приложения (Appendix) к этой книге, посвященного исследованию упругих линий изгиба, был выполнен Ольдфасером (W. A. Oldfather), Эллисом (C. A. Ellis) и Броуном (D. M. Brown). См. Isis, т XX, p. 1, 1933, Brügge, Belgique. См. также немецкий перевод в серии «Классики Оствальда», № 175 («Ostwald's Klassiker»). (*Прим. авт.*) Русский перевод: «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле, Леонарда Эйлера, королевского профессора и члена Императорской Петербургской Академии наук», с латинского Я. М. Боровского, под ред. чл. корр. АН СССР Н. С. Кошлякова в серии «Классики естествознания», ГТТИ, М.—Л., 1934. Приложение I «Об упругих кривых», стр. 447—572. (*Прим. ред.*)

[2]) Цитируется по русскому изданию (см. выше), стр. 447—448. (*Прим. ред.*)

гия примет наименьшее значение, или, что означает то же самое, кривой равновесия будет та, для которой центр тяжести цепи займет самое низкое положение. В такой постановке задача приводится к отысканию экстремума интеграла $\int\limits_0^s Wy\,ds$, в котором s— заданная длина кривой, W—вес единицы длины цепи. Применяя правила вариационного исчисления, мы приходим опять к тому же самому дифференциальному уравнению, что и раньше.

Переходя к случаю упругого стержня, Эйлер отмечает, что «прямой метод» вывода уравнения упругой кривой был применен Яковом Бернулли (см. стр. 39). Чтобы воспользоваться «методом конечных причин», Эйлеру нужно иметь выражение энергии деформации, и здесь он прибегает к данным, предоставленным ему Даниилом Бернулли. Он заявляет: «Достославный и остроумнейший в этой возвышенной области исследования природы Даниил Бернулли сообщил мне, что он может представить всю силу, заключающуюся в изогнутой упругой пластинке, одной формулой, которую он называет „потенциальной силой", и что это выражение для упругой кривой должно быть наименьшим», а затем продолжает (согласно Бернулли): «если только пластинка будет повсюду одинаково толстая, широкая и упругая и в естественном состоянии будет вытянута прямолинейно», то форма кривой прогиба должна получаться такой, что для этого случая «значение выражения $\int\limits_0^s ds/R^2$ будет наименьшим»[1]). Пользуясь своим вариационным исчислением, Эйлер получает дифференциальное уравнение Якова Бернулли для упругой линии, принимающее для случая, изображенного на рис. 20, вид

$$C\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=Px. \tag{a}$$

Поскольку Эйлер не ограничивает свой анализ рассмотрением лишь малых прогибов, членом y'^2 в знаменателе пренебречь нельзя, и уравнение поэтому получается сложным. Эйлер интегрирует его путем разложения в ряд и показывает, что если прогиб f (см. рис. 20) мал, то уравнение (a) дает:

$$C=\frac{Pl^2\,(2l-3f)}{6f}. \tag{b}$$

Если мы отбросим член $3f$ в числителе, то придем к обычной формуле для прогиба на конце консоли, т. е.

$$f=\frac{Pl^3}{3C}. \tag{c}$$

[1]) Цитируется по русскому переводу (см. выше), стр. 449, 450, 451. (*Прим. ред.*)

Отброшенный член учитывает то обстоятельство, что длина вследствие изгиба несколько уменьшается по сравнению с первоначальной длиной балки.

Эйлер не входит в обсуждение физического смысла постоянной C, которую он называет «абсолютной упругостью», отмечая лишь, что она зависит от упругих свойств материала и что в случае прямоугольной балки она пропорциональна ширине и квадрату высоты h. Мы видим, что Эйлер ошибся, допустив, что C пропорциональна h^2, а не h^3, но его совету пользоваться уравнением (b) для опытного определения C последовали многочисленные экспериментаторы[1]).

Эйлер исследует разнообразные случаи изгиба, представленные на рис. 22[2]) и классифицирует соответствующие упругие линии по величине угла, образуемого направлением силы P с касательной к упругой линии в точке приложения нагрузки. Если этот угол весьма мал, мы имеем важный случай продольного изгиба колонны под действием осевой сжимающей силы. Эйлер показывает (см. колонну AB на рис. 22), что в этом случае уравнение упругой линии легко может быть решено и что нагрузка, при которой начинается выпучивание колонны, определяется уравнением

$$P=\frac{C\pi^2}{4l^2}. \tag{d}$$

Он резюмирует: «Если груз P не будет превышать $C\pi^2/4l^2$, то можно будет не опасаться решительно никакого изгиба; наоборот, если груз P будет больше, то колонна не сможет сопротивляться изгибу. При этом, если упругость колонны, а также ее толщина остаются одинаковыми, то груз, который она способна безопасно нести, будет обратно пропорционален квадрату высоты колонны; так что колонна, вдвое более высокая, сможет нести лишь четвертую часть груза»[3]). Эйлеру, как мы видим, принадлежит, таким образом, честь установления двести лет тому назад формулы продольного изгиба колонн, той самой, которая в наше время приобрела столь широкое применение в расчетах упругой устойчивости инженерных сооружений[4]).

Эйлер исследует также стержни переменного поперечного сечения и в качестве примера рассматривает прогиб консоли (рис. 22), жесткость которой пропорциональна расстоянию x.

---

[1]) См., например, работу Жирара, указанную в сноске на стр. 16.

[2]) Этот чертеж воспроизведен из книги Эйлера.

[3]) Цитируется по русскому переводу (см. выше), стр. 492. (*Прим. ред.*)

[4]) Обстоятельный разбор исследований Эйлера по продольному изгибу стержней на основании изучения подлинных трудов принадлежит Е. Л. Николаи в статье «О работах Эйлера по теории продольного изгиба» (Уч. зап. Ленинградского гос. ун-та, № 44, 1938 и Н и к о л а и Е. Л., Труды по механике, Гостехиздат, М. 1955, стр. 436 и далее). (*Прим. ред.*)

Далее Эйлер изучает изгиб стержней, имеющих некоторую начальную кривизну $1/R_0$, и указывает, что уравнение (a) для этого случая должно принять форму

$$C\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right)=Px. \tag{e}$$

Этим соотношением утверждается, что в стержнях с начальной кривизной все последующие дополнительные изменения этой кри-

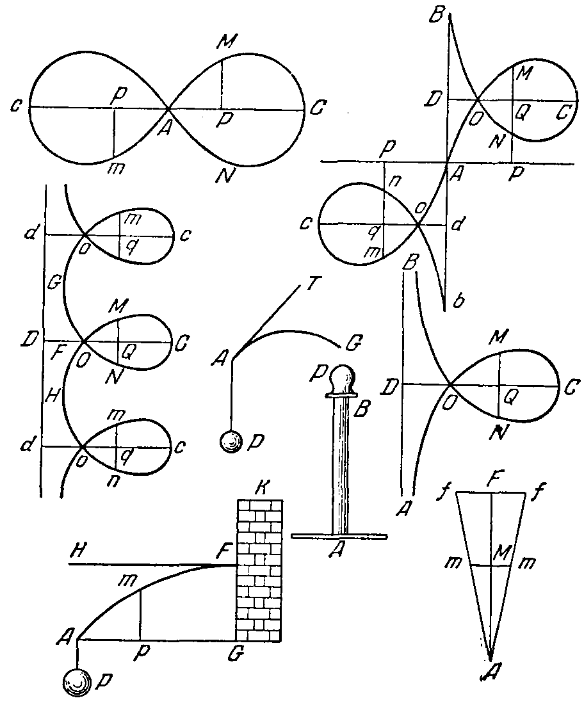


Рис. 22. Исследованные Эйлером упругие линии.

визны в каждой точке пропорциональны изгибающему моменту в этой точке. Если, как показывает далее Эйлер, начальная кривизна $1/R_0$ постоянна по длине стержня, то с уравнением (e) допустимо поступать точно так же, как и с ранее приведенным уравнением для прямолинейного стержня. Он останавливается также на следующей интересной задаче: какой должна быть начальная форма консоли, если приложенная на ее конце нагрузка сообщает ей прямолинейную форму?

В тех случаях, когда на балку действует сплошная (распределенная) нагрузка, например собственный вес балки или гидростатическое давление, изогнутая ось ее будет выражаться, как показывает Эйлер, дифференциальным уравнением четвертого порядка. Ему удалось решить это уравнение для случая гидростатического давления и получить уравнение прогибов в алгебраической форме.

Далее в книге Эйлера мы находим разработку проблемы поперечных колебаний стержней. Ограничивая эту тему случаем малых перемещений, он обосновывает возможность принятия в качестве кривизны изогнутой оси балки значения второй производной d^2y/dx^2 и записывает уравнение изогнутой оси в том самом виде, в каком оно применяется в настоящее время. Чтобы исключить влияние сил тяжести, он полагает, что колеблющийся стержень AB жестко заделан в вертикальном положении концом A (рис. 23,a), и рассматривает движение бесконечно малого элемента mn весом Wdx. Он замечает, что это движение в точности совпадает с колебаниями простого изохронного маятника (фиг. 23, $б$), так что сила, влекущая элемент к оси x, должна быть такой же самой, как и в случае маятника, т. е. для малых колебаний она равна $Wydx/l$. Эйлер рассуждает так: «Отсюда следует, что, если к отдельным элементам mn пластинки были приложены в обратных направлениях равные силы $Wy\,dx/l$, то пластинка уравновесилась бы в состоянии $AmnB$. Отсюда вытекает, что пластинка во время колебания подвергнется такому же изгибу, какой она приняла бы, будучи неподвижной, если бы в отдельных ее точках m на нее действовали силы $Wydx/l$ в направлении оси y»[1]). Таким образом, Эйлер приходит к тем самым выводам, которые и ныне устанавливаются нами применением принципа Даламбера[2]). Для случая сплошной (распределенной) нагрузки Эйлер получает теперь искомое дифференциальное уравнение движения путем двукратного дифференцирования уравнения

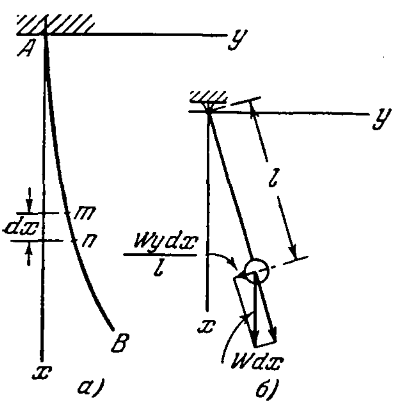


Рис. 23.

$$C\frac{d^2y}{dx^2}=M,$$

[1]) Цитируется по русскому переводу, стр. 526.

[2]) Книга Даламбера «Traité de dynamique» вышла в свет в 1743 г., но она была неизвестна Эйлеру, когда он писал приложение «De curvis elasticis» к своей книге «Methodus inveniendi...».

замечая при этом, что вторая производная от M равна интенсивности поперечной нагрузки. Получая в результате

$$C\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{wy}{l}, \tag{f}$$

Эйлер заключает: «Этим уравнением и выражается природа кривой $AmnB$, и из него же, если применять его к представившемуся случаю, определится и длина l (эквивалентного маятника); а зная ее, мы узнаем и самое колебательное движение»[1]). После этого он интегрирует уравнение (f) и, используя принятые условия на концах пластинки, находит уравнение частот, из которого представляется возможным вычислять частоты для ряда последовательных форм колебаний.

Не ограничиваясь случаем консоли, Эйлер исследует также и поперечные колебания стержней: 1) со свободно опертыми концами, 2) с жестко заделанными концами и 3) стержней, оба конца которых совершенно свободны. Для всех этих случаев он дает формулу частот f вида

$$f=m\sqrt{\frac{\pi^4Cg}{wl^4}}, \tag{g}$$

где m—численный коэффициент, зависящий от условий на концах стержня и от формы колебания. В заключение Эйлер указывает, что уравнением (g) можно пользоваться не только для экспериментальной проверки его теории, но и в качестве практического средства определения «абсолютной упругости» C пластинки.

В 1757 г. Эйлер опубликовал новую работу о продольном изгибе колонн[2]). В ней он дает простой вывод формулы для определения критической нагрузки, пользуясь упрощенным дифференциальным уравнением

$$C\frac{d^2y}{dx^2}=-Py.$$

Он приводит здесь также и более убедительное истолкование смысла величины C, приходя к выводу, что она должна иметь размерность силы, умноженной на квадрат длины. В последующих работах Эйлер распространяет свой анализ на расчет колонн переменного поперечного сечения, а также нн задачу о колонне с осевой нагрузкой, распределенной по ее длине, но прийти к правильным решениям в этих более сложных задачах ему не удается.

Яков Бернулли[3]) (1759—1789) упоминает о работе Эйлера «Von dem Drucke eines mit einem Gewichte beschwerten Tisches auf eine Fläche» («О давлении загруженного стола на плоскость»),

[1]) Цитируется по русскому переводу, стр. 528.
[2]) Sur la force des colonnes, Mém. Acad., Berlin, т. 13, 1757—1759.
[3]) Племянник Даниила Бернулли. Он погиб, утонув в реке Неве.

в которой мы имеем первый случай трактовки статически неопределенной задачи. Она была решена в предположении, что крышка стола остается плоской.

Эйлер работал также в области теории провисания и колебаний идеально гибкой мембраны. Рассматривая мембрану как сетку из двух систем взаимно-перпендикулярных волокон, он выводит дифференциальное уравнение в частных производных[1])

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Эта идея была использована впоследствии Яковом Бернулли, который в своем исследовании изгиба и колебаний прямоугольной пластинки, рассматривая пластинку как систему перекрестных балок, получил отсюда уравнение вида[2])

$$k\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right)=z.$$

Это уравнение помогло ему объяснить результаты экспериментов Хладни, относящихся к колебаниям пластинок (см. стр. 116).

9. Жозеф Луи Лагранж

Лагранж (1736—1813) родился в Турине[3]); его отец был богатым человеком, потерявшим свое состояние в каких-то сомнительных коммерческих операциях. Юный Лагранж впоследствии высказывал мнение, что это разорение сыграло известную освободительную роль, ибо, будь он богатым, он, вероятно, не взялся бы за математику. Уже в раннем возрасте он обнаружил исключительные математические способности и в 19 лет стал уже профессором математики в Королевской артиллерийской школе в Турине.

С группой своих учеников он основал общество, преобразованное впоследствии в Туринскую Академию наук. В первом томе трудов этого ученого учреждения (вышедшем в 1759 г.) было напечатано несколько мемуаров Лагранжа, между прочим, те из них, которые составляют в своей совокупности его, сыгравший впоследствии большую роль, труд по вариационному исчислению. На почве общего интереса к этой теме возникла его переписка с Эйлером. Чрезвычайно высокое мнение о трудах Лагранжа, ко-

---

[1]) См. Novi comm. Acad. Petrop. Труды Петербургской Академии наук), т. 10, стр. 243, 1767. Эйлер воспользовался этой мыслью также и в изучении колебаний колоколов (см. ту же статью, стр. 261).

[2]) Nova acta, т. 5, 1789, С.-Петербург.

[3]) См. биографию Лагранжа, напечатанную Даламбером в «Oeuvres de Lagrange», т. 1, Paris, 1867. *Прим. авт.*). См. также Крылов А. Н., Жозеф Луи Лагранж, В сборнике «Ж. Л. Лагранж, 1736—1936, к 200-летию со дня рождения», Изд-во АН СССР, 1937, и Собр. соч. т. I ч. 2, 1951. (*Прим. ред.*)

торое составил себе Эйлер, побудило последнего выдвинуть кандидатуру Лагранжа на пост иностранного члена Берлинской Академии наук, куда он и был избран в 1759 г. В 1766 г. по рекомендации Эйлера и Даламбера он был приглашен заменить Эйлера в этой Академии, в связи с чем и переехал в Берлин. Здесь он нашел прекрасные условия для работы и вскоре опубликовал целый ряд многочисленных серьезных научных трудов.

Жозеф Луи Лагранж.

В это же время он подготовил и свою знаменитую «Аналитическую механику» («Mécanique analytique»). В ней, пользуясь принципом Даламбера и началом возможных перемещений, он ввел понятия «обобщенных координат» и «обобщенных сил» и свел теорию механики к некоторым общим уравнениям, из которых представилось возможным выводить все необходимые формулы для решения тех или иных частных задач. В предисловии Лагранж обращает внимание читателя на то обстоятельство, что в его книге нет чертежей по той причине, что методы, которыми он пользуется, не нуждаются в геометрических или механических соображениях, но лишь в аналитических операциях, которые должны выполняться в предписанном порядке. В руках Лагранжа механика превратилась в отрасль математического анализа, которую он назвал «геометрией четырех измерений». В те времена лишь немногие были способны оценить такой способ трактовки механики, и Лагранжу пришлось испытать трудности, чтобы найти издателя для своей книги. В конце концов она была напечатана в Париже в 1788 г., сто лет спустя после того, как вышли в свет «Начала» Ньютона.

После смерти Фридриха Великого условия для научной работы в Берлине ухудшились, и, не встречая больше прежнего понимания, Лагранж переехал в 1787 г. в Париж. Во французской столице его ждал теплый прием, квартира ему была предоставлена в Лувре, оклад ему был назначен в том же размере, которым он пользовался до последнего времени. Несмотря на это, однако, вследствие переутомления в результате перегрузки, Лагранж утратил совершенно всякий интерес к математике, и только что отпечатанный том его «Механики» пролежал два года нераскрытым на его столе. На протяжении этого периода он проявлял некоторый интерес к другим наукам, в особенности к химии, а также участвовал в работах комиссии, обсуждавшей вопрос о введении во Франции метрической системы мер.

Это была эпоха Французской революции, и революционное правительство начало чистку состава членов этой комиссии. Несколько крупных ученых, как, например, химик Лавуазье и астроном Бэйли, были казнены, и Лагранж принял решение уехать из Франции. Но в это время была открыта новая высшая школа— Политехническая, и Лагранж получил приглашение читать там лекции по математическому анализу. Эта деятельность оживила его интерес к математике, и его лекции начали привлекать не только студентов, но также преподавателей и профессоров. Плодом этих лекций были две написанные им книги «Аналитические функции» («Fonctions analytiques») и «Трактат о решении численных уравнений» («Traité de la résolution des équations numériques»). В последние годы жизни Лагранж занялся переработкой своей книги по механике, но в 1813 г., когда было выполнено лишь около двух третей этой работы, его постигла смерть. Второй том переработанного издания вышел уже после его смерти.

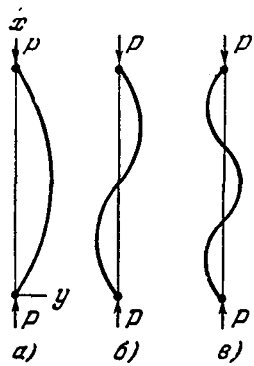


Рис. 24.

Важнейшим вкладом, внесенным Лагранжем в теорию упругих кривых, является его мемуар «Sur la figure des colonnes»[1]) (О форме колонн). Он начинает эту работу исследованием призматического стержня, снабженного по концам шарнирами (рис. 24) и получающего, согласно его допущению, малый прогиб под действием осевой сжимающей силы P. Задача приводит его к уравнению

$$C\frac{d^2y}{dx^2} = -Py, \tag{a}$$

выведенному уже Эйлером см. стр. 49). Он показывает, что решение этого уравнения

$$y = f\sin\sqrt{\frac{P}{C}}\,x$$

удовлетворяет условиям на концах лишь в том случае, если

$$\sqrt{\frac{P}{C}}\,l = m\pi,$$

[1]) См. «Oeuvres de Lagrange», т. 2, стр. 125.

где m—целое число. Отсюда следует, что нагрузка, под которой колонна может получить весьма малый прогиб, определяется уравнением

$$P=\frac{m^2\pi^2C}{l^2}. \tag{b}$$

Возможно, таким образом, иметь бесконечное множество упругих линий. Чтобы получить изогнутую ось в одну полуволну, как на рис. 24, *а*, следует приложить нагрузку, в четыре раза большую той, которая вычислена Эйлером для случая, когда один конец стержня жестко заделан. Для получения кривой рис. 24, *б* требуется нагрузка, в 16 раз превышающая нагрузку Эйлера, и т. д. Лагранж не ограничивается вычислением критических значений нагрузки P, но предпринимает и исследование прогибов, которые должны возникнуть, когда нагрузка P превысит критическое значение. С этой целью он использует уравнение, в которое входит точное выражение кривизны, а не приближенное, как в уравнении (а), и, интегрируя его путем разложения в ряд, получает:

$$l=\frac{m\pi}{\sqrt{\frac{P}{C}}}\left[1+\frac{Pf^2}{4(4C)}+\frac{9P^2f^4}{4\cdot 16(16C^2)}+\frac{9\cdot 25P^3f^6}{4\cdot 16\cdot 36(64C^3)}+\ldots\right].$$

Для $f=0$ это уравнение приводится к формуле (b). При малых значениях f ряд сходится быстро и нагрузку, соответствующую заданному прогибу, легко можно вычислить.

Продолжая свое исследование, Лагранж переходит к колоннам переменного поперечного сечения (представляющим собой тела вращения) и задается вопросом, как найти такую образующую кривую, которая, вращаясь вокруг оси, очертила бы продольный профиль колонны наибольшей эффективности. При этом за меру эффективности Лагранж принимает отношение критической нагрузки P к квадрату объема V колонны. Из рассмотрения кривых, на обоих концах которых кривизна одинакова, а касательные параллельны оси колонны, Лагранж заключает, что колонна наибольшей эффективности имеет цилиндрическую форму. К тому же выводу он приходит и из анализа кривых, проходящих через четыре точки, взятые на равных расстояниях от оси. Таким образом, Лагранжу не удается получить удовлетворительного решения задачи о форме колонны наибольшей эффективности. Впоследствии над той же задачей работали некоторые другие авторы [1]).

---

[1]) См. Clausen, Bull. phys.-mathem. acad. sci. (С.-Петербург), т. IX, 1851; Николаи Е. Л., Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонн, «Известия Политехнического института», С.-Петербург, т. 8, 1907; Blasius Z., Math. u. Phys., т. 62.

Во втором мемуаре[1]) «Sur la force des ressorts pliés» («О силе плоских пружин») Лагранж исследует изгиб полосы постоянного сечения, жестко заделанной одним концом и загруженной на другом конце. Он вводит обычное допущение о том, что кривизна пропорциональна изгибающему моменту, и обсуждает несколько частных случаев, могущих представить известный интерес для теории расчета плоских пружин, подобных тем, которые применяются в карманных часах. Форма предложенного Лагранжем решения слишком сложна для практического использования.

Хотя вклад Лагранжа в науку о сопротивлении материалов представляет больше теоретический, чем практический интерес, его метод обобщенных координат и обобщенных сил нашел впоследствии применение в сопротивлении материалов и выявил свою высокую ценность в решении задач практического значения.

[1]) «Oeuvres de Lagrange», т. 3, стр. 77.

ГЛАВА III

НАУКА О СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ В XVIII ВЕКЕ

10. Применения сопротивления материалов в инженерном деле

В XVII столетии научные исследования велись преимущественно лицами, работавшими в академиях наук. Лишь немногие интересовались механикой упругого тела, а если Галилей, Гук, Мариотт и занимались решением некоторых вопросов теории упругости и прочности сооружений, выдвинутых потребностями практики, то главной движущей силой в их трудах оставалась все же научная любознательность. На протяжении XVIII столетия научные результаты предшествовавшего века нашли практические приложения и научные методы были введены постепенно в различные области техники и инженерного дела. Дальнейшее развитие военной и строительной техники требовало не только опыта и практических знаний, но также и способности анализировать новые насущные проблемы практики теоретическими средствами. К этому времени относится учреждение первых высших технических учебных заведений и выход в свет первых печатных руководств по строительной механике. Франция шла в этом развитии впереди других стран, и изучение механики упругого тела продвигалось в XVIII веке вперед главным образом благодаря научной активности, развившейся именно в этой стране.

В 1720 г. во Франции был открыт ряд военных учебных заведений для подготовки специалистов по фортификации и артиллерии, и в 1735 г. Белидор (Belidor, 1697—1761) выпустил учебник по математике[1]), задуманный как пособие именно для этих учебных заведений. Поэтому предметом изложения названного автора была не только математика, но и ее применения в механике, геодезии и артиллерии. Хотя Белидор включил в свой учебник лишь

[1]) Belidor. Nouveau cours de mathématique à l usage de l'artillerie et du génie, Paris, 1735.

элементарную математику, однако тем из своих учеников, которые чувствовали в себе склонность к этой науке, он рекомендовал изучать также и анализ бесконечно малых, указывая им для этой цели на руководство Де Лопиталя «Анализ бесконечно малых», первую вообще книгу по анализу бесконечно малых. Чтобы составить себе представление, сколь быстро расширялось в то время применение математики, достаточно лишь вспомнить, что к концу XVII века всего только четыре человека (Лейбниц, Ньютон и два брата Бернулли) работали в области анализа бесконечно малых и были знакомы с этой новой тогда областью математики.

В 1729 г. вышла книга Белидора «Инженерная наука» (La science des Ingénieurs). Она приобрела большую популярность среди инженеров-строителей и много раз переиздавалась. Последнее ее издание с дополнениями Навье вышло в 1830 г. В этой книге имеется глава, посвященная сопротивлению материалов. Теория в ней не идет дальше результатов, полученных Галилеем и Мариоттом, но Белидор применяет ее к своим опытам над деревянными балками и дает правила для определения безопасных для них размеров. В своих рассуждениях Белидор показывает, что установившаяся в его время практика назначения размеров балок лишена достаточных научных оснований, и потому рекомендует более рациональный метод подхода к решению задачи. С этой целью он пользуется найденной Галилеем закономерностью, согласно которой прочность балки прямоугольного профиля пропорциональна ширине и квадрату высоты поперечного сечения. В заключение он выражает мнение, что не только простые балки, но и более сложные системы стержней, подобные тем, которые применяются в конструкциях стропильных и мостовых ферм, поддаются расчету и что для них также можно установить методы назначения безопасных размеров.

В 1720 г. французским правительством был учрежден Корпус инженеров путей сообщений, а в 1747 г. в Париже была основана знаменитая Школа мостов и дорог (École des Ponts et Chaussées) для подготовки инженеров-специалистов по сооружению дорог, каналов и мостов. Эта школа, как мы увидим в дальнейшем, сыграла большую роль в развитии нашей науки[1]). Первый директор этой школы Жан-Родольф Перронэ (Jean Rodolphe Perronet, 1708—1794) был знаменитым инженером, спроектировавшим и построившим ряд крупных арочных мостов, Бургундский канал и много ответственных сооружений в Париже. Его научные труды[2]) пользовались широкой известностью среди инженеров-строителей;

[1]) С историей этого знаменитого учебного заведения можно познакомиться по статье Дартейна Dartein, Ann. ponts et chaussées, 1906.

[2]) Описания проектов построенных им мостов и других сооружений см. Perronet, Oeuvres, Paris, 1788.

в дальнейшем (см. стр. 74) мы остановимся на них в той части, которая имеет отношение к испытаниям строительных материалов.

В самом конце XVIII века (в 1798 г.) из-под пера Жирара вышла первая книга по сопротивлению материалов[1]). Историческое введение к этой книге представляет большой интерес, поскольку в нем освещены важнейшие исследования по механике упругого тела, выполненные в XVII и XVIII столетиях. Останавливаясь на задаче изгиба балок, Жирар излагает расчетные методы Галилея и Мариотта таким образом, что при этом создается впечатление, что обе эти теории были в то время в ходу. Применительно к хрупким материалам, как, например, к камню, инженеры исходили из гипотезы Галилея, согласно которой внутренние силы в момент разрыва распределяются по всему поперечному сечению равномерно. Что касается деревянных балок, то здесь предпочитали гипотезу Мариотта, согласно которой интенсивность внутренних сил изменяется от нуля на вогнутой поверхности до наибольшего растягивающего напряжения в крайнем наиболее удаленном волокне (с выпуклой поверхности). С другой стороны, сам Жирар ясно утверждал, что волокна на вогнутой поверхности сжаты, на выпуклой же—растянуты. Он знал, что ось, относительно которой нужно вычислять момент внутренних сил, лежит внутри контура поперечного сечения, но в то же самое время поддерживал ошибочное представление Мариотта о том, что положение нейтральной линии не имеет существенного значения. Таким образом, в теории прочности балок книга Жирара не улучшает того, что было сделано Мариоттом. В вопросе о прогибах балок Жирар весьма близко следует трудам Эйлера, но не ограничивает свои выводы условием малости деформаций. Естественно, он приходит к сложным формулам, малопригодным для практических применений. В своей ранней работе Эйлер допускал, что жесткость балки при изгибе пропорциональна кубу ее линейных размеров. Впоследствии он исправил это предположение и стал считать жесткость при изгибе пропорциональной четвертой степени. Жирар же вовсе не исследует этого вопроса и пользуется первоначальным неправильным предположением Эйлера.

Во второй части этой книги Жирар занимается балками равного сопротивления. От них он требует, чтобы в каждом поперечном сечении они удовлетворяли условию

$$\frac{Mh}{I} = \text{const},$$

где M—изгибающий момент, I—момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной линии, h—высота балки. Жирар

---

[1]) Girard P. S., Ingenieur des ponts et chaussées, Traité analytique de la résistance des solides, Paris, 1798.

показывает, что для заданной нагрузки мы можем найти несколько различных форм такой балки равного сопротивления в зависимости от того, какие мы примем соотношения между размерами поперечного сечения. В XVIII веке эта задача была очень популярна и ей было посвящено множество научных работ. Однако они мало помогали развитию более важной для практических применений теории прочности балок.

В третьей части своей книги Жирар знакомит нас с экспериментальной работой по изгибу и потере устойчивости деревянных колонн. Она представляет собой собственный вклад Жирара в теорию изгиба балок, и на ней мы остановимся ниже (см. стр. 74).

Из этого краткого обзора можно убедиться, что в решении проблемы определения прочности балок инженеры XVIII века пользовались теориями XVII века. Вместе с тем, однако, на протяжении этого периода сформировалась и более совершенная теория изгиба балок; ей посвящены следующие параграфы нашего изложения.

11. Паран

В предыдущей главе мы познакомились с тем, как математики XVIII века построили теорию упругих кривых, положив в ее основу допущение, что кривизна такой линии пропорциональна изгибающему моменту. Они решили эту задачу, не задаваясь вопросом о том, как распределяются напряжения в балке. Но одновременно с тем, как продвигалось вперед это математическое решение, проводились исследования и по выяснению физической картины явления изгиба, приведшие в итоге к лучшему пониманию того, как распределяются напряжения в балке. Остановимся в связи с этими исследованиями на научной деятельности Парана (Parent, 1666—1716). Паран родился в Париже[1]). Его родители хотели, чтобы он изучал право, но его склонности тяготели к математике и физическим наукам. Окончив курс, Паран отказался совершенно от юридической практики. Большую часть своего времени он проводил за изучением математики и жил уроками по этому предмету. В 1699 г. был избран в члены Французской Академии Де-Бийетт (Des Billettes), который ввел туда вместе с собой Парана в качестве ученика (ассистента). Это положение в Академии дало Парану возможность встречаться с французскими учеными и принимать участие в собраниях Академии. Здесь ему представился случай показать свои обширные познания в различных областях науки, и несколько его научных работ было напечатано в трудах Академии. Однако не все его работы были приняты в это издание, и потому в 1705 г. Паран основал свой собственный журнал, в котором печатал свои работы, а также давал обзоры работ

[1]) См. статью в Histoire de l'Académie des sciences Paris, 1716.

других математиков. В 1713 г. эти его работы были переизданы в трех томах под общим заглавием «Исследования по математике и физике» («Recherches de mathématique et de physique»).

В первых своих работах¹), посвященных изгибу балок, Паран следует гипотезе Мариотта и принимает за нейтральную линию касательную к контуру поперечного сечения балки с вогнутой его стороны, перпендикулярную к плоскости действия нагрузки. Он пользуется этой теорией для нахождения различных форм балок равного сопротивления. Он разбирает также интересную задачу

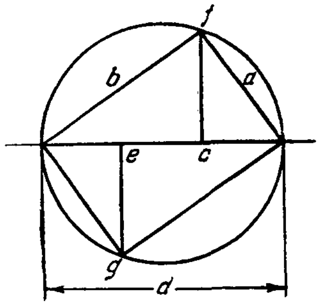


Рис. 25.

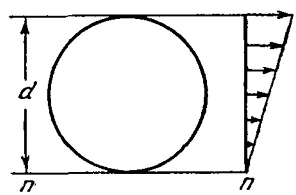


Рис. 26.

о том, каким образом нужно обтесать круглое бревно, чтобы получить из него балку прямоугольного сечения наибольшей прочности; при этом он показывает, что для выполнения этого требования при заданном диаметре d (рис. 25) произведение ab^2 должно иметь наибольшее значение. Чтобы достигнуть этого, диаметр нужно разделить на три равные части и восстановить перпендикуляры cf и eg (как показано).

В 1713 г. Паран выпустил по изгибу балок две научные работы²), представляющие собой крупный шаг вперед. В первой из них он показывает, что уравнение

$$L = \frac{Sh}{3l}, \tag{a}$$

выведенное Мариоттом (см. стр. 34) для прямоугольных балок и использованное впоследствии для других форм поперечных сечений, не допускает применения ни к круглым трубам, ни к сплошным балкам круглого сечения. Принимая вместе с Мариоттом, что поперечное сечение совершает поворот вокруг касательной nn (рис. 26) и что усилия в волокнах пропорциональны их расстояниям от этой касательной, Паран находит, что для сплошного круглого сечения наибольший (критический) момент этих сил

¹) См. Histoire de l'Académie des sciences, Paris, 1704, 1707, 1708, 1710.
²) Essais et recherches de mathématique et de physique, т. 2, стр. 567; т. 3, стр. 187.

относительно оси nn равен $5Sd/16$, где S—«абсолютная прочность» балки. Из этого соотношения видно, что для круглой балки в уравнение (а) вместо $h/3$ нужно подставить $5d/16$.

Во второй работе Паран приводит чрезвычайно важные соображения о положении оси, относительно которой следует вычислять момент усилий в волокнах, обеспечивающих сопротивление балки. Рассматривая прямоугольную балку, защемленную по сечению AB (рис. 27, *а*), и несущую нагрузку L, он допускает прежде всего, что вращение (поворот) совершается вокруг оси B. Соответствующие напряжения, показанные на рис. 27, *б*, можно заменить равнодействующей F. Продолжая направление действия этой силы до его пересечения в E с линией действия нагрузки L, он заключает из условий равновесия, что равнодействующая R сил F и L должна

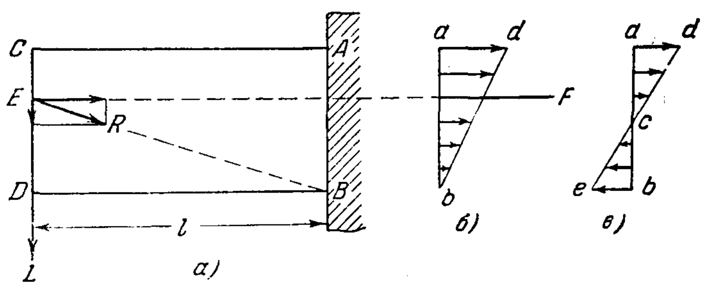


Рис. 27.

проходить через ось вращения B. Далее, он констатирует, что одна точка B не обладает достаточным сопротивлением, чтобы служить противодействием этой равнодействующей, и приходит поэтому к выводу, что значительная часть поперечного сечения AB должна создавать противодействие для R и работать на сжатие. Нет сомнения, как он добавляет, что именно это соображение побудило Мариотта принять для закона распределения напряжений эпюру в виде двух равных треугольников (рис. 27, *в*) вместо одного треугольника abd (рис. 27, *б*). Приняв этот второй вариант закона распределения напряжений и заметив, что в момент разрушения растягивающее напряжение в наиболее удаленном волокне всегда должно быть равно $\sigma_{\text{пр}}$, он заключает, что момент сопротивления, представляемый двумя треугольниками, равен всего лишь половине момента, представляемого треугольником рис. 27, *б*. Таким образом, Паран исправляет ошибку, допущенную Мариоттом и повторенную впоследствии такими людьми, как Яков Бернулли и Вариньон[1]). Мы знаем, что распределение напряжений, представленное двумя равными треугольниками (рис. 27, *в*), правильно лишь постольку, поскольку материал балки следует закону Гука,

[1]) См. статью Вариньона в Histoire de l'Académie des sciences, Paris, 1702.

и поэтому им нельзя пользоваться для определения предельного (критического) значения изгибающей нагрузки L. Из опытов Мариотта Паран знал, что предельный момент сопротивления имеет значение, лежащее в промежутке между значениями, отвечающими закону распределения напряжений согласно рис. 27, *б* и закону, представленному рис. 27, *в*. Он выходит из этого затруднения, приняв, что в момент разрушения ось вращения (нейтральная линия) не проходит через центр поперечного сечения и при этом напряжения распределяются подобно тому, как это показано на рис. 28. Максимальное растягивающее напряжение ad остается при этом прежним и представляет собой предел прочности волокон на растяжение. Заменяя напряжения, действующие в поперечном сечении ab, их равнодействующими и складывая, как показано на чертеже, растягивающее усилие F с внешней нагрузкой L, Паран из условий равновесия приходит к выводу, что равнодействующее сжимающее усилие, действующее на часть bc поперечного сечения ab, должно быть равно равнодействующему растягивающему усилию, действующему на верхнюю часть того же поперечного сечения. Он отмечает также, что в дополнение к нормальным силам на поперечное сечение ab будет действовать также и поперечная (перерезывающая) сила величиной L. Мы видим, что статическая задача изгиба балки решена Параном полностью; он ясно показывает, что силы сопротивления, распределенные по сечению ab, заделки, должны составлять систему сил, уравновешивающую внешнюю нагрузку. В одной из своих предыдущих работ[1]) Паран замечает, что нейтральная линия может сместиться при возрастании нагрузки и к моменту излома занять положение, почти совпадающее с касательной к контуру с вогнутой стороны. Исходя теперь из распределения напряжений, представленного на рис. 28, Паран сопоставляет его с результатами экспериментов Мариотта и показывает, что его (Парана) предельный момент сопротивления совпадает с найденным экспериментально, если нейтральная линия расположена так, что $ac : ab = 9 : 11$.

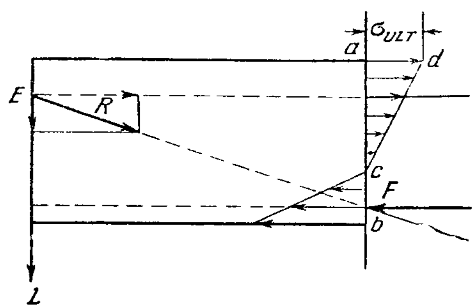
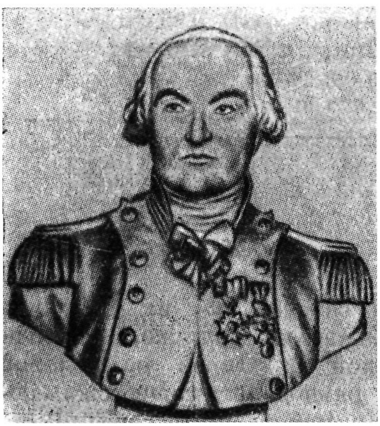


Рис. 28.

Принимая для распределения напряжений треугольную эпюру рис. 28, Паран тем самым приписывает своему материалу свой-

[1]) См. его «Mémoires», т. 2, стр. 588—589.

ства, выраженные законом Гука, однако с различными значениями модуля для растяжения и для сжатия. Рассматривая также и тот случай, когда материал не следует этому закону, он правильно замечает, что предельный момент сопротивления получается меньшим, чем при рассмотренном распределении по двум треугольникам рис. 28, если материал таков, что деформация возрастает в нем медленнее, чем напряжение. Не имея в своем распоряжении никаких экспериментальных данных относительно механических свойств материалов, Паран, естественно, был лишен возможности развить дальше свои, в основном правильные, взгляды в этом вопросе. Из этого краткого изложения научных трудов Парана можно видеть, что он имел гораздо более ясные представления о распределении напряжений в балках, чем его предшественники. Однако труд его остался незамеченным, и на протяжении XVIII века большинство инженеров продолжали пользоваться формулами, основанными на теории Мариотта. Причина этого коренится, может быть, в том обстоятельстве, что самые важные результаты Парана не были опубликованы Академией, а вышли из печати в томах собрания его сочинений, изданных весьма плохо, с большим числом опечаток. Кроме того, язык Парана не отличался ясностью, и следить за его рассуждениями было трудно. В своих критических отзывах он был чрезмерно строг в отношении трудов других исследователей, и это обстоятельство, без сомнения, сделало его непопулярным среди ученых своего времени. Прошло 60 лет после выхода в свет трудов Парана, прежде чем был сделан следующий очередной сдвиг в научной теории механики упругих тел. Совершить это выпало на долю Кулона.



Шарль Огюстэн Кулон.

12. Шарль Огюстэн Кулон

Ш. О. Кулон (C. A. Coulomb, 1736—1806) родился в Ангулеме[1]) (Франция). После предварительной подготовки в Париже он по-

[1]) См. Delambre J. B. J., Éloge historique de Coulomb, Mém. inst. natl. France, т. 7, стр. 210, 1806; см. также Hollister S. C., The life and work of C. A. Coulomb, Mech. Eng., 1936, стр. 615.

ступил в военно-инженерный корпус. Будучи командирован на остров Мартинику, он в течение девяти лет принимал там участие в различного рода строительных работах, что побудило его к изучению механических свойств материалов и других проблем строительной техники. За время пребывания на острове им была написана известная работа «О применении правил максимума и минимума к некоторым вопросам статики, имеющим отношение к архитектуре» («Sur une application des régles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture»), представленная в 1773 г. во Французскую Академию наук[1]). В предисловии к этой работе Кулон сообщает: «Этот мемуар, написанный мною несколько лет тому назад, предназначался в первую очередь для личного пользования в работе, которую мне приходится выполнять в соответствии со своей профессией. Если я отваживаюсь теперь представить его Академии, то только потому, что эта последняя приветствует даже и самые скромные старания, если они направлены на полезные цели. Кроме того, наука—это монумент, воздвигаемый ради блага общества. Каждый гражданин должен внести в него что-нибудь сообразно своим талантам. В то время как великие люди поднимаются к вершине здания, где они получают возможность размечать и строить верхние этажи, остальным работникам, рассеянным по нижним этажам или же скрытым во тьме подвалов, нужно стремиться окончательно отделать то, что уже создано более умелыми руками».

По возвращении во Францию Кулон работал инженером в Рошели Ист-Э (Rochelle Iste Aix) и Шербурге. В 1779 г. он разделил (с Ван-Свинденом) премию, присужденную Академией за решение задачи о наилучшем устройстве компаса; в 1781 г. он получил премию Академии за мемуар[2]) «Теория простых машин» («Théorie des machines simples»), в котором сообщались результаты его опытов по трению различных тел, скользящих одно по другому (сухих или смазанных жирным веществом). После 1781 г. Кулон постоянно жил в Париже, где был избран в члены Академии и где ему представились более широкие возможности для научной работы. Он переключил свое внимание на раскрывавшиеся в то время новые области исследований—электричество и магнетизм. Он изобрел для измерения малых электрических и магнитных сил

---

[1]) Опубликовано в Mém. acad. sci. savants étrangers, т. VII, Paris, 1776. (*Прим. авт.*) Разбор этой работы приведен в книге А. А. Гвоздева «Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия», вып. 1, Стройиздат, М., 1949, стр. 14—22. (*Прим. ред.*)

[2]) См. Mém. présentés par savants étrangers, т. X, стр. 161. Этот мемуар вместе с упомянутым выше мемуаром по теории сооружений и некоторыми другими, представляющими интерес для инженеров-механиков, был затем переиздан в виде книги «Théorie des machines simples», Paris, 1821.

весьма чувствительные крутильные весы, а в связи с этим исследовал прочность проволоки на кручение[1]).

В начале Французской революции 1789 г. Кулон уехал в свою маленькую усадьбу в Блуа. В 1793 г. Академия была закрыта, но два года спустя, она вновь приступила к работе, будучи переименована в Institut national des Sciences et de Arts (Национальный институт наук и искусств). Кулон одним из первых был избран в это новое ученое учреждение и его последние работы, посвященные вопросам вязкости жидкостей и магнетизма, были напечатаны в «Mémoires de l'Institut» (1801, 1806). Он был назначен в 1802 г. на должность одного из генеральных инспекторов по научной части и отдал много сил на улучшение постановки народного просвещения. Эта деятельность была сопряжена с частыми разъездами, слишком для него утомительными при его возрасте и слабом здоровье, и в 1806 г. он умер. Но труды его сохранили свое значение, и мы до сих пор еще пользуемся его теориями трения, прочности строительных материалов и кручения.

Никто другой из ученых XVIII века не дал так много механике упругого тела, как Кулон. Самые ценные его достижения в этой области вошли в его работу, изданную в 1773 г.

В начале ее сообщается о выполненных Кулоном испытаниях по определению прочности одной из разновидностей песчаника. Для испытания на растяжение Кулон использовал квадратные плитки со сторонами 0,3 *м* (1 фут), толщиной 25 *мм* (1″) и придавал образцам форму, показанную на рис. 29, *а*[2]). Таким путем он находил предел прочности при растяжении равным 15 $кг/см^2$ (215 $фт/дм^2$). Для испытаний того же материала на срез он пользуется прямоугольными брусками, сечением 25×50 $мм^2$ (1×2″) и прилагает срезывающую силу P в сечении ge заделки (см. рис. 29, *б*). Он находит, что предел прочности при срезе оказывается в данном случае равным пределу прочности при растяжении. Наконец, он ставит испытания на изгиб (рис. 29, *в*), пользуясь для этой цели брусками высотой 25 *мм* (1″), шириной 50 *мм* (2″), длиной 230 *мм* (9″) и находит, что предельная нагрузка P при этом равна 9 *кг*.

После этого Кулон переходит к построению теории изгиба балок (рис. 29, *г*). Взяв прямоугольную консоль и рассматривая поперечное сечение AD, он заключает, что волокна верхней части AC поперечного сечения работают на растяжение, в то время как волокна нижней части сжаты. Разлагая действующие в волокнах усилия на горизонтальные и вертикальные составляющие (как показано векторами PQ и $P'Q$) и применяя к ним три уравнения

[1]) Recherches théoriques et experimentales sur la force de torsion et sur l'elasticité des fils de métal, Mém. acad. sci., 1784.

[2]) Чертежи эти воспроизводятся из книги Кулона.

статики, он заключает, что сумма горизонтальных сил, распределение которых по AD изображается кривой BCc, должна обратиться в нуль, сумма же вертикальных компонент должна быть равна приложенной нагрузке φ и момент относительно оси C всех усилий

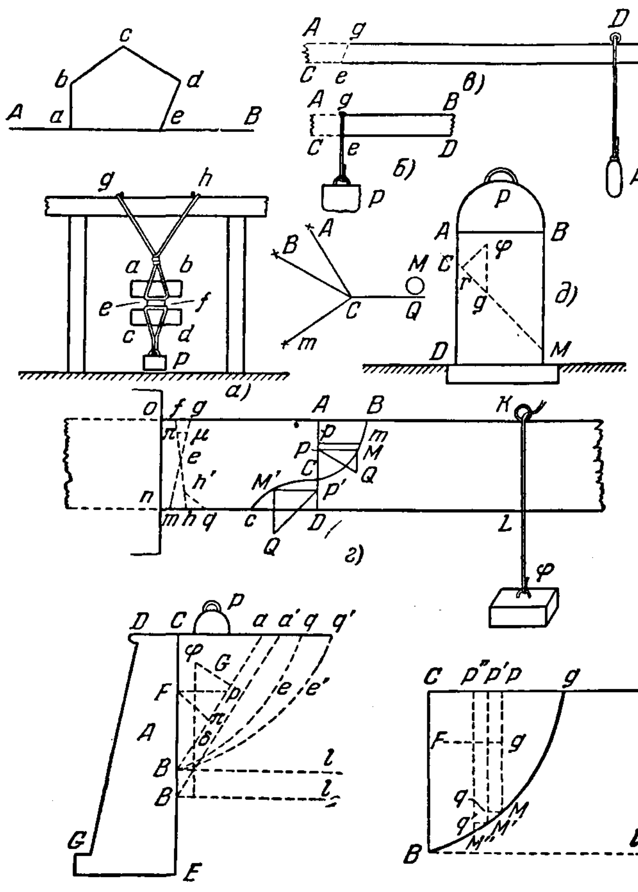


Рис. 29.

в волокнах должен быть равен моменту приложенной нагрузки φ относительно той же оси. Он отмечает, что эти уравнения не зависят от закона, определяющего усилия и удлинения в волокнах. Приняв идеально упругий материал, следующий закону Гука вплоть до разрушения, и рассматривая элемент $ofhn$ у заделанного конца, он полагает, что под изгибающим воздействием нагрузки φ плоскость fh примет положение gm и малые треугольники fge и emh изобразят деформации и напряжения волокон. Обозначая σ

наибольшее растягивающее напряжение в точке f, он находит, что момент внутренних сил оказывается равным[1]) $\sigma(\overline{fh})^2/6$. Обозначая предел прочности бруса на растяжение через S, а плечо нагрузки φ и высоту балки соответственно через l и h, мы получим уравнение для определения разрушающей нагрузки

$$\frac{Sh}{6} = \varphi l. \tag{a}$$

Кулон указывает, что влиянием поперечных сил на прочность балки можно пренебречь, если высота балки в сравнении с ее длиной мала.

Полагая далее, что материал балки абсолютно жесткий, что при изгибе происходит поворот сечения относительно точки h и что напряжения распределяются по поперечным сечениям равномерно, Кулон приходит к выводу, что при этих условиях уравнение для определения разрушающей нагрузки должно принять вид

$$\frac{Sh}{2} = \varphi l. \tag{b}$$

Сравнивая результаты вычислений по этому уравнению с данными описанных выше опытов, он находит, что вычисленное значение предельной нагрузки оказывается несколько большим, чем получается из опыта. Отсюда он заключает, что центром поворота не может быть точка h, что этот центр должен лежать где-то в точке h' (см. рис. 29, *г*), так что участок сечения bh' должен быть сжатым.

Мы убеждаемся, таким образом, что в своей теории изгиба Кулон правильно применял уравнения статики при исследовании внутренних сил и имел ясное представление о распределении этих сил по поперечному сечению балки. Научные работы Парана остались, по-видимому, ему неизвестны, поскольку в своей работе он ссылается лишь на Боссю (C. Bossut)[2]), рекомендующего в своем сочинении «La construction la plus avantagense des digues» («Наивыгоднейшее возведение плотин») рассчитывать деревянные балки как упругие, каменные же—как абсолютно жесткие.

Своей следующей задачей Кулон ставит исследование сжатия призмы осевой силой P (рис. 29, *д*). Он предполагает, что разрушение происходит в результате скольжения по некоторой плоскости CM и начинается в тот момент, когда составляющая силы P по этой плоскости становится больше, чем обусловленное сцеплением сопротивление скалыванию по этой плоскости. На основании ранее найденных результатов своих опытов Кулон полагает, что предел прочности $\tau_{\text{пр}}$ на срез равен пределу проч-

[1]) Ширина балки принята равной единице.

[2]) Боссю (C., Bossut, 1730—1814)—профессор математики в Военно-инженерной школе в Мезьере и член Академии. Его перу принадлежат трехтомный курс математики (1765), двухтомный курс гидродинамики (1771) и представляющая большой интерес история математики в двух томах (1810).

ности $\sigma_{\text{пр}}$ на растяжение. Обозначая площадь поперечного сечения призмы через A, а угол между осью призмы и нормалью к плоскости CM через α, он получает уравнение для вычисления предельной нагрузки

$$P\sin\alpha = \frac{\sigma_{\text{пр}}A}{\cos\alpha}, \tag{c}$$

откуда

$$P = \frac{\sigma_{\text{пр}}A}{\sin\alpha\cos\alpha}. \tag{d}$$

Это уравнение показывает, что наименьшее значение P получается при $\alpha = 45^\circ$ и что это значение вдвое больше предела прочности призмы при растяжении. Чтобы приблизить эту теорию к лучшему согласованию с опытами, Кулон предлагает учитывать не только сопротивление сцепления по плоскости CM, но также и трение. В соответствии с этим вместо уравнения (c) он вводит уравнение

$$P\sin\alpha = \frac{\sigma_{\text{пр}}A}{\cos\alpha} + \frac{P\cos\alpha}{n}, \tag{e}$$

где $\frac{1}{n}$ — коэффициент трения. Тогда

$$P = \frac{\sigma_{\text{пр}}A}{\cos\alpha\left[\sin\alpha - \left(\frac{\cos\alpha}{n}\right)\right]}. \tag{f}$$

Подобрав α таким образом, чтобы P приняла наименьшее значение, он находит:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+n^2} - \frac{1}{n}}}. \tag{g}$$

Принимая для кирпича $1/n = 3/4$, Кулон находит $\operatorname{tg}\alpha = 2$ и из уравнения (f) получает $P = 4\sigma_{\text{пр}}A$. Это хорошо сходится с его экспериментальными данными.

Во второй части той же статьи (от 1773 г.) Кулон занимается исследованием подпорных стен и арок, но мы отложим обсуждение этого материала на дальнейшее.

В 1784 г. Кулон издал свой мемуар о кручении. Перейдем к рассмотрению его содержания. Кулон определяет жесткость при кручении для проволоки, наблюдая крутильные колебания подвешенного на ней металлического цилиндра (рис. 30, a)[1]. Полагая, что момент, противодействующий скручиванию проволоки, пропорционален углу закручивания φ, он приходит к дифференциальному уравнению

$$n\varphi = -I\ddot{\varphi}$$

[1]) Этот чертеж воспроизводится из мемуара Кулона.

и, интегрируя его, находит формулу для периода колебания

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{n}}. \tag{h}$$

Опытным путем Кулон находит, что период не зависит от угла закручивания, если этот угол не очень велик, и отсюда делает вывод, что допущение о пропорциональности крутящего момента

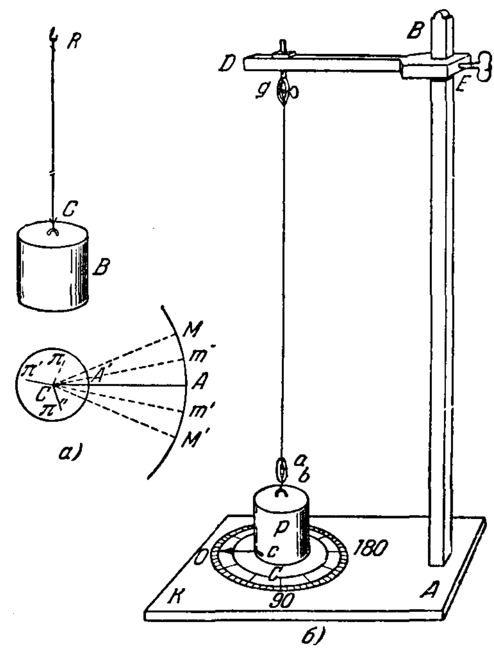


Рис. 30. Прибор Кулона для исследования крутильных колебаний.

углу закручивания правильно. Теперь Кулон продолжает свои опыты, беря проволоки из того же материала, но различных длин и диаметров; таким способом он устанавливает следующую формулу для крутящего момента M:

$$M = \frac{\mu d^4}{l} \varphi, \tag{i}$$

где l—длина пловолоки, d—ее диаметр, а μ—постоянная материала. Сравнивая стальную и латунную проволоки, Кулон находит, что отношение постоянных для этих материалов равно $3^1/_3 : 1$, откуда заключает, что там, где нам нужна большая жесткость, как, например, в цапфах, предпочтительно применять сталь.

Установив основное уравнение (i), Кулон углубляется в более тщательное изучение механических свойств материалов, из которых изготовляется проволока. Для каждого типа проволоки он находит предел упругости при кручении, превышение которого приводит к появлению некоторой остаточной деформации. Точно так же он показывает, что если проволока подвергнута предварительно первоначальному закручиванию далеко за предел упругости, то материал в дальнейшем становится более твердым и его предел упругости повышается, между тем как входящая в уравнение (i) величина μ остается неизменной. С другой сторны, путем отжига он получает возможность снизить твердость, вызванную пластическим деформированием. Опираясь на эти опыты, Кулон утверждает, что для того, чтобы характеризовать механические свойства материала, необходимы две численные характеристики, а именно: число μ, определяющее упругое свойство материала, и число, указывающее предел упругости, который зависит от величины сил сцепления. Холодной обработкой или быстрой закалкой можно увеличить эти силы сцепления и таким путем повысить предел упругости, но в нашем распоряжении нет средств, способных изменить упругую характеристику материала, определяемую постоянной μ. Для того чтобы доказать, что это заключение распространяется также и на другие виды деформирования, Кулон проводит испытания на изгиб со стальными брусками, отличающимися один от другого лишь характером термической обработки, и показывает, что под малыми нагрузками они дают тот же прогиб (независимо от своей термической истории), но что предел упругости брусьев, подвергшихся отжигу, получается значительно более низким, чем тех, которые подвергались закалке. В связи с этим под бóльшими нагрузками бруски, подвергшиеся отжигу, обнаруживают значительную остаточную деформацию, между тем как термически обработанный металл продолжает оставаться совершенно упругим, поскольку термическая обработка повышает предел упругости, не оказывая никакого влияния на его упругие свойства. Кулон вводит гипотезу, согласно которой всякому упругому материалу свойственно определенное характерное для него размещение молекул, не нарушаемое малыми упругими деформациями. При превышении предела упругости происходит какое-то остаточное скольжение молекул, результатом чего является увеличение сил сцепления, хотя упругая способность материала сохраняется при этом прежней.

Исследуя затухание крутильных колебаний, Кулон показывает экспериментально, что первичной причиной его является не сопротивление воздуха, а какое-то несовершенство в материале проволочных подвесов. При малых амплитудах он устанавливает, что уменьшение амплитуды за цикл приблизительно пропорционально амплитуде. Но в тех случаях, когда размах колебаний достаточно широк (если предел упругости повышен холодной обработкой), затухания возрастают скорее, чем амплитуды, и результаты испытания обнаруживают большой разброс.

13. Опытное изучение механических свойств строительных материалов в XVIII столетии

Мы уже останавливались на экспериментальных исследованиях таких ученых, как Гук, Мариотт и Кулон. Они проводили свои опыты главным образом для того, чтобы проверить то или другое теоретическое положение механики материалов. Но независимо от этого научного экспериментирования в течение XVIII века было выполнено и значительное количество экспериментальных работ более практического назначения, отвечавших задачам установления прочности тех или других материалов, применявшихся в строительной технике.

Реомюр (Réaumur, 1683—1757) руководил механическими испытаниями, связанными с изучением различных технологических процессов в стальной промышленности[1]). Им были проведены испытания проволоки на растяжение с той целью, чтобы установить влияние различных способов термической обработки, и изобретен метод измерения твердости путем измерения углублений, производимых в двух треугольных призмах при вдавливании их одна в другую ребрами под прямым углом.

Обширная серия механических испытаний с различными материалами была выполнена Петрусом Ван-Мусшенбруком (1692—1761), профессором физики в Утрехте, а затем в Лейдене. В книге «Physicae experimentales et geometricae» (1729) он описывает свои методы испытания и сконструированный им для этой цели прибор. На рис. 31 показана построенная им машина для испытаний на растяжение, а на рис. 32—тип применявшихся им образцов и способы захвата их по концам. Хотя рычажная система и позволила ему значительно увеличивать силу, однако довести на своей машине образец из дерева или стали до разрыва ему удавалось лишь в тех случаях, когда поперечные сечения образцов были малы. Результаты этих испытаний были собраны в его книге по физике[2]) и нашли широкое применение среди инженеров. На рис. 33 воспроизведена машина Мусшенбрука для испытаний на изгиб.

---

[1]) В годы 1720—1722 Реомюр представил во Французскую Академию наук несколько мемуаров. См. его книгу: Réaumur, L'art de convertir le fer forgé en acier, Paris, 1722.

[2]) См. французский перевод этой книги: Musschenbroek, Essai de physique, Leiden, 1751. Из любопытного предисловия к ней мы узнаем, что вопросами физики интересовались в то время в самых различных кругах населения и что научные общества возникали в целом ряде городов Голландии.

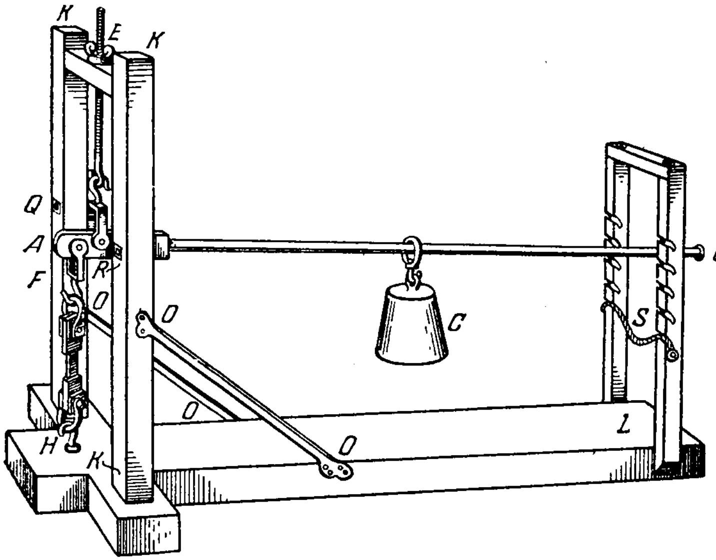


Рис. 31. Машина Мусшенбрука для испытаний на растяжение.

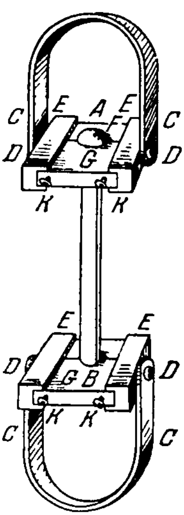


Рис. 32. Устройство для захвата торцов образца в испытаниях на растяжение.

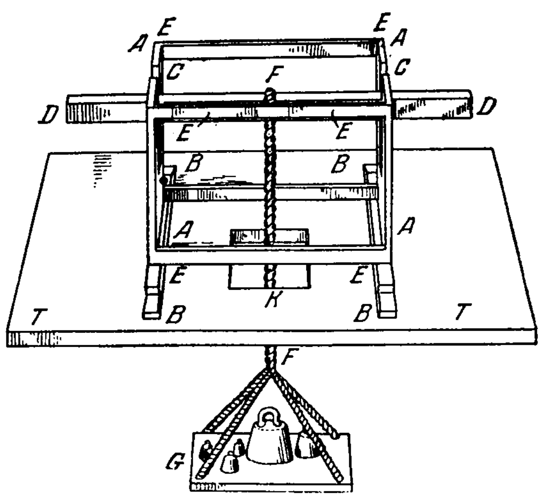


Рис. 33. Машина Мусшенбрука для испытаний на изгиб.

Испытывая на ней деревянные брусья прямоугольного сечения, этот физик подтвердил теорию Галилея, согласно которой прочность балки на изгиб пропорциональна bh^2. Использовав результаты, полученные им на малых образцах, Мусшенбрук показывает, каким образом может быть вычислена предельная нагрузка и для крупных балок, подобных тем, какие применяются в строительных сооружениях.

На рис. 34 мы видим установку Мусшенбрука, предназначенную для испытания стоек на сжатие. Здесь мы встречаемся с пер-

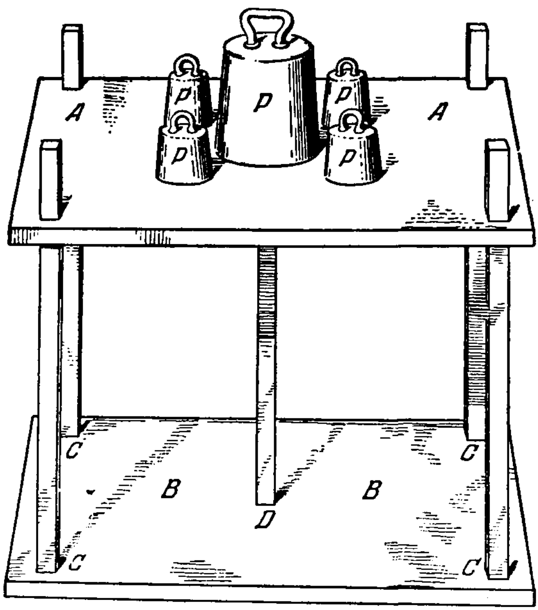


Рис. 34. Установка Мусшенбрука для испытаний на сжатие.

вой попыткой практического исследования продольного изгиба, причем экспериментатор на основании этого исследования приходит к важному выводу, что критическая нагрузка обратно пропорциональна квадрату длины стойки. Как мы уже видели, Эйлер пришел к тому же самому заключению, исходя из математического анализа упругих линий.

Проделанные Мусшенбруком опыты встретили критическую оценку со стороны Бюффона (1707—1788). Последний известен главным образом своими работами по природоведению, но его интересы распространялись, по-видимому, на разные области. Хотя он был директором Ботанического сада в Париже и организатором Музея естественных наук, это не помешало ему в то же самое время перевести на французский язык «Методы флюксий» Ньютона и проделать весьма обширное изучение механических свойств дерева[1]). Его исследования показали, что прочность образцов дерева, отобранных из одного и того же ствола, резко различается в зависимости от места, из которого они вырезаны, причем здесь имеет значение как расстояние от оси ствола, так и расстояние по этой оси. Поэтому эксперименты на малых образцах, с которыми работал Мусшенбрук, и не давали инженеру-строителю всех тех данных, в которых он нуждается и которые можно получить только из испытаний, проводимых на балках в натуральную величину. Бюффон проделал много таких испытаний на балках квадратных профилей от 10×10 *см*^{2} до 20×20 *см*^{2} при пролетах до 8,5 *м*. Балки были свободно оперты по концам и нагружались посередине пролета, причем результаты вновь подтвердили утверждение Галилея о том, что прочность балки пропорциональна ширине ее поперечного сечения и квадрату высоты. Они показали также, что прочность балки может быть принята пропорциональной плотности материала.

В связи с постройкой церкви св. Женевьевы в Париже возник вопрос о надлежащем назначении размеров для поперечных сечений колонн; при этом мнения ведущих французских архитекторов и инженеров разделились. Возникла настоятельная необходимость в том, чтобы путем механических испытаний установить значения прочности на сжатие для различных каменных пород. Для выполнения этих испытаний французский инженер Готэ (Gauthey, 1732—1803), автор широко известных руководств по сооружению мостов[2]), спроектировал и построил специальную машину, схема которой дана на рис. 35. В этой установке используется принцип рычага, и она напоминает несколько рычаг Мусшенбрука, которым последний пользовался в своих испытаниях на растяжение (см. рис. 31). В качестве образцов применялись кубики, обычно со стороной 5 *см*. Сравнивая результаты своих испытаний со значениями тех сжимающих нагрузок, которым подвергаются камни этих пород в некоторых существующих сооружениях, Готэ нашел, что коэффициент запаса (в предположении центрального действия сжимающей силы) оказывался обычно не меньше 10. Он объясняет это сравнительно слабое загружение каменных сооружений учетом того обстоятельства, что на практике нагрузка в сооружениях может оказаться приложенной с эксцентриситетом и не по нормали к той плоскости, на которую она дей-

---

[1]) См. Buffon, Histoire naturelle, т. 2, стр. 111, Paris, 1775.

[2]) Gauthey, Traité de la construction des ponts, 1809—1813. Этот трактат был издан после смерти Готэ его племянником Навье. К нему мы вернемся в дальнейшем в связи с обсуждением работ Навье (см. стр. 90).

ствует. Он ссылается также и на некоторые опыты, показавшие, что сопротивление сжатию удлиненных образцов бывает обычно много меньше, чем обнаруживаемое на образцах кубической формы.

Ронделе (1734—1829) усовершенствовал машину Готэ, заменив в ней ось b (рис. 35) опорной призмой и уменьшив, таким обра-

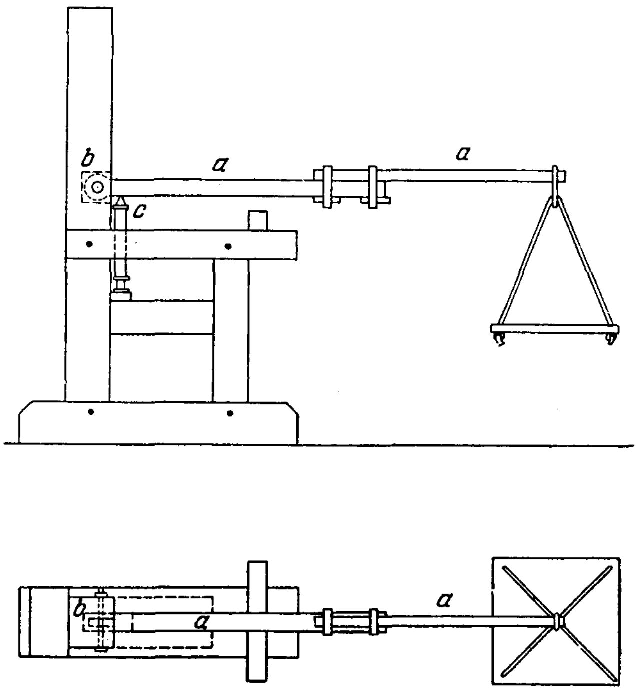


Рис. 35. Испытательная машина Готэ.

зом, трение. Описание этого устройства имеется в работе Ронделе «Строительное искусство»[1]).

Большая экспериментальная работа по определению прочности каменных строительных материалов была предпринята Перроне. Поводом к ней явилось строительство арочного моста через Сену в Нейи. Перроне спроектировал машину, сходную с конструкцией Готэ, установив ее в Школе мостов и дорог и дополнив ее приспособлением для испытаний на растяжение. В качестве профессора Школы и инженера-строителя Перроне выполнил большое число испытаний.

---

[1]) Rondelet, L'art de batir, Paris, 1802.

За последние годы XVIII века был проведен ряд испытаний деревянных стоек. Начало этой работе положил Ламбларди (Lamblardie, 1747—1797), преемник Перроне по должности ди-

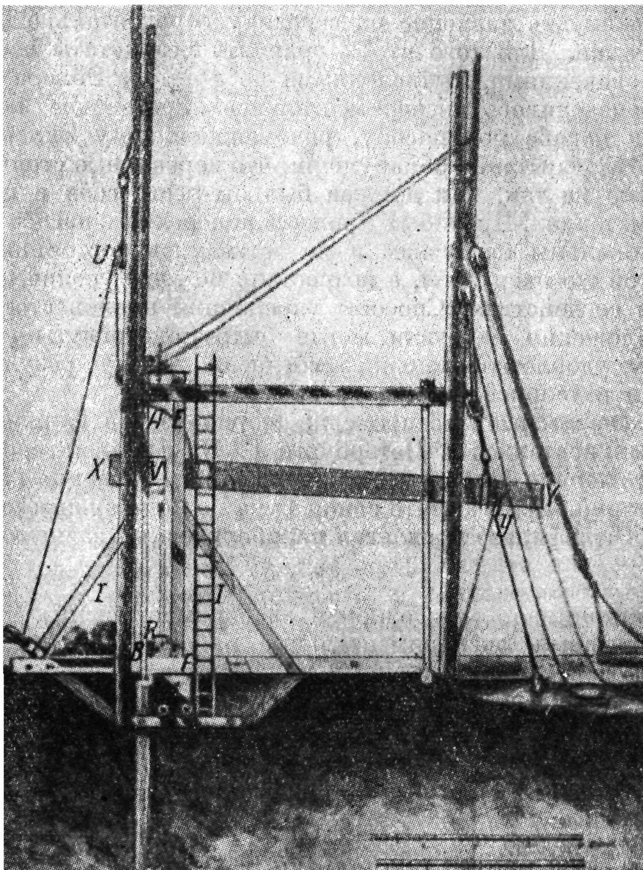


Рис. 36. Опыты Жирара с деревянными колоннами.

ректора Школы мостов и дорог и участник учреждения знаменитой Политехнической школы. Его продолжателем был Жирар (P. S. Girard), автор первого руководства по сопротивлению материалов (см. стр. 57). Сконструированная для этих испытаний машина представлена на рис. 36. Вертикальная стойка сжимается с помощью рычага XY, совершающего поворот относительно оси V

и нагруженного в точке y. Круговые диски на верхнем конце образца скользят между вертикалями AB и EF и препятствуют верхнему концу совершать поперечные движения. Нижний конец образца опирается в точке R. Той же самой машиной пользовались и для испытаний на поперечный изгиб, заставляя нижний конец R' стойки оказывать давление на середину горизонтально расположенной балки. Для того чтобы сравнить результаты испытаний стоек со значениями, вычисленными по формуле Эйлера для колонн, производилось экспериментальное определение жесткости стоек при изгибе по способу, рекомендованному Эйлером (см. стр. 46). Эти испытания обнаружили, что деревянные стойки ведут себя далеко не так, как должен был бы вести себя и идеально упругий материал. Прогибы в процессе поперечного изгиба не были пропорциональны нагрузкам и не оставались постоянными под одной и той же нагрузкой, а возрастали по мере увеличения длительности ее действия. Способы укрепления концов стоек и методы приложения нагрузки могли быть подвергнуты критике, поскольку удовлетворительного согласия между результатами испытания и теорией Эйлера не получалось.

Ряд экспериментов по проверке теории изгиба Галилея и Мариотта был поставлен в Петербурге Г. В. Бюльфингером[1]). Он нашел, что теория Мариотта дает лучшее истолкование результатов испытаний. Полагая, что закон Гука не подтверждается этими опытами, Бюльфингер предлагал параболическую зависимость

$$\varepsilon = a\sigma^m,$$

где m—постоянная, определяемая экспериментально[2]).

Рассмотренные экспериментальные работы были выполнены в первую очередь французскими инженерами, и собранные ими в большом объеме результаты представили значительную практическую ценность. Так, например, в упомянутом выше руководстве Готэ по мостам мы находим большое количество таблиц с приведенными в них данными о прочности различных сортов железа, дерева и камня.

---

[1]) Comm. Acad. Petrop., т. 4, стр. 164, Петербург, 1735.

[2]) Бюльфингер Герман-Бернгард (1693—1750) с 1725 г. был приглашен в члены Петербургской Академии наук и явился первым профессором физики в Академии. Организовал первый физический кабинет в доме на Васильевском острове, принадлежавшем ранее царице Прасковье Федоровне, где и провел описываемые выше опыты. По научным убеждениям—антиньютонианец. В 1731 г. покинул Россию, но сохранил связь с Академией, публикуя свои труды в «Acta Com. Ac. Petrop.». Обзор его 13 работ, опубликованных в России, приведен в «Кратком описании комментарий Академии наук», Петербург, 1782. В упомянутом труде отметил ошибку Мариотта и Я. Бернулли и, по-видимому, независимо от Парана правильно указал положение нейтральной оси при изгибе балок. См. также Вавилов С. И., Очерк развития физики в АН СССР. В сборнике к 220-летию АН, изд. АН СССР, 1945, стр. 3—29. (*Прим. ред.*)

14. Теория подпорных стен в XVIII веке

Практика возведения подпорных стен для предупреждения оползней грунта имеет большую давность. Но к задаче назначения надлежащих размеров этих сооружений в древности подходили грубо эмпирическими методами. Чтобы поставить проектировочную работу в этой области на научно-теоретическую основу, инженерами XVIII века было предложено несколько различных гипотез, объяснявших механизм действия грунта на стену и определявших спо-

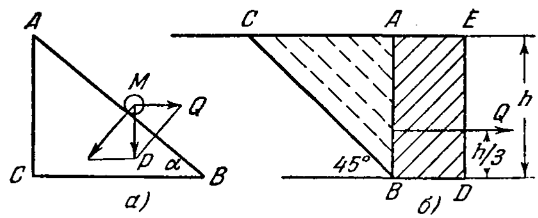


Рис. 37.

соб расчета оказываемого им давления. С той же целью были выполнены и некоторые лабораторные эксперименты[1]).

Много содействовал решению этой проблемы Белидор, включивший главу о подпорных стенках в свою книгу (см. стр. 56) «Инженерная наука» («La science des ingénieurs») (1729). Указывая, что горизонтальная сила Q, требующаяся для того, чтобы удержать шар весом P (рис. 37, *а*) в равновесии на наклонпой плоскости AB, равна $P \operatorname{tg} \alpha$, он переходит отсюда к рассмотрению состояния грунта, находящегося за подпорной стеной $ABDE$ (рис. 37, *б*). Полагая, что при отсутствии стены ничем не поддерживаемый грунт расположится с откосом BC под углом около 45° к горизонту, он заключает, что треугольная призма грунта ABC имеет стремление скользить по плоскости BC. Если бы это скольжение не сопровождалось, как в случае шара, трением, то горизонтальная реакция стены, необходимая для того, чтобы удержать призму грунта в равновесии, должна была бы равняться весу этой призмы. Но благодаря трению это достигается значительно меньшей силой, и Белидор полагает, что для реакции стены допустимо с избытком принять значение, равное половине веса призмы. Обозначая высоту стены через h, а объемный вес грунта через γ, он находит, что горизонтальное давление на единицу длины, производимое грунтом на стену, равно $\gamma h^2/4$. Повторяя то же

[1]) Подробнее с историей теории подпорных стен и связанного с ней экспериментирования в XVIII веке можно познакомиться по книге К. Мэниеля: M a y n i e l K., Traité expérimental, analytique et pratique de la poussée des terres et de murs de revêtements, Paris, 1808.

рассуждение в отношении любой, показанной на чертеже пунктиром плоскости, параллельной BC, Белидор приходит к выводу, что давление земли на плоскость AB распределяется по закону треугольника и что равнодействующее давление Q приложено на расстоянии $h/3$ от основания BD стены. Поэтому опрокидывающий момент этого давления относительно ребра D, который необходимо учесть при назначении толщины стены, равен $\gamma h^3/12$. Пользуясь этим значением момента для определения толщины стены, Белидор приходит к соотношениям, близко совпадающим с общепринятой в его время практикой.

Дальнейшим развитием теории подпорных стен мы обязаны Кулону. В мемуаре 1773 г. (упомянутом нами на стр. 63) он исследует давление грунта на участок BC вертикальной грани CE стены (см. рис. 29), делая допущение, что грунт стремится скользить по некоторой плоскости aB. Пренебрегая трением по плоскости CB, он заключает, что реакция H стены должна быть горизонтальной. Вес W призмы CBa равен $(\gamma h^2 \operatorname{tg} \alpha)/2$, где h—глубина точки B, а α—угол CBa. Равнодействующая R реакции плоскости скольжения образует с нормалью к плоскости Ba угол трения ϕ, так что R действует под углом $\alpha+\phi$ к горизонту. Поэтому треугольник сил, изображенный на рис. 38, представляет условие равновесия клина CBa (рис. 29), из которого следует, что

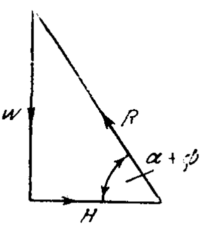


Рис. 38.

$$H = W \operatorname{ctg}(\alpha+\phi) = \frac{\gamma h^2}{2} \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}(\alpha+\phi) = \frac{\gamma h^2}{2} \frac{1-\mu \operatorname{tg}\alpha}{1+\mu \operatorname{ctg}\alpha}, \qquad \text{(a)}$$

где $\mu = \operatorname{tg}\phi$—коэффициент трения.

Следующий шаг—выбрать для угла α такое значение, при котором реакция H приняла бы наибольшее значение. С этой целью производная от H (выраженного формулой (a)) по α приравнивается нулю, и это дает нам

$$\frac{1-\mu \operatorname{tg}\alpha}{1+\mu \operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha, \qquad \text{(b)}$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = -\mu + \sqrt{1+\mu^2}. \qquad \text{(c)}$$

Подставляя это значение в выражение (a), Кулон находит искомое наибольшее давление на подпорную стену. В своем выводе он учитывает также силы сцепления, действующие в плоскости Ba, доказывая, что уравнение (c) сохраняет силу и в этих условиях. Рассматривается, кроме того, и случай дополнительной нагрузки P (рис. 29).

Во второй поставленной Кулоном задаче рассматривается стена, производящая горизонтальное давление Q' на призму CBa, так что призма при этом смещается вверх. Кулон вычисляет значение угла α, при котором Q' получается наименьшим. Наконец, им же рассматривается и случай, когда скольжение грунта происходит по криволинейной поверхности, как это, например, показано на рис. 29 линией Beg, причем Кулон дает краткие указания к определению того очертания кривой, при котором стена испытывает наибольшее давление.

Некоторые упрощения в метод Кулона, в целях облегчения его для использования на практике, были внесены Прони (1755—1839). Прони родился в Шамле, близ Лиона, и в 1776 г. поступил в Школу мостов и дорог. По окончании ее в 1780 г. он работал под руководством Перроне на постройке моста в Нейи. В 1785 г. он сотрудничал с Перроне в реконструкции Дюнкирхенского порта и сопровождал его в поездке в Англию. В годы Французской революции Прони стал членом Французской комиссии по разработке метрической системы мер, а когда была принята десятичная система деления углов и потребовалось составление новых тригонометрических таблиц, ему была поручена эта работа. Прони был одним из основателей знаменитой Политехнической школы (1794) и первым профессором механики в ней. В 1798 г. он стал директором Школы мостов и дорог. Его книги по гидравлике («Architecture hydrolique», 1790—1796, 2 тома) и по механике («Leçons de mécanique analytique», 1810) широко использовались во французских инженерных учебных заведениях.

Продолжая начатое Кулоном исследование устойчивости подпорных стен и исходя из равенства $\mu = \operatorname{tg} \varphi$, Прони придает уравнению (b) более простую форму

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \varphi) = \operatorname{tg} \alpha,$$

откуда следует, что

$$\alpha = \frac{1}{2}(90^\circ - \varphi).$$

Это указывает на то, что плоскость Ba на рис. 29, отвечающая наибольшей величине давления грунта, делит пополам угол между вертикалью BC и линией естественного откоса. На этой основе Прони разработал практический метод расчета необходимых размеров подпорных стен[1]).

---

[1]) Prony R., Instruction pratique pour déterminer les dimensions des murs de revêtement, Жерминаль, год X, Paris.

15. Теория арок в XVIII веке

Искусство возведения арок восходит к глубокой древности. Римляне широко пользовались полуциркульными арками при сооружении своих мостов и акведуков, причем они оказались в своей работе столь искусными, что некоторые их сооружения сохранились невредимыми и по сей день[1]), что позволяет нам изучать на них пропорции размеров и строительные приемы, которыми пользовались римляне. По-видимому, никакой теории для определения безопасных размеров арок у римских строителей не было и они руководствовались лишь эмпирическими правилами. В средние века строительство дорог и мостов почти прекратилось и методы римлян были забыты.

Эпоха Возрождения, принесшая с собой подъем экономической жизни в Европе, поставила строителей перед необходимостью заново изучать искусство возведения арок. Сначала соотношения в размерах этих сооружений опять стали определять чисто эмпирически, но к концу XVII и в начале XVIII века французскими инженерами были предприняты некоторые попытки построить теорию арок. По развитию дорожной сети Франция стояла тогда впереди других стран, и здесь арочные мосты часто устраивались на шоссейных дорогах.

Первым применением статики к расчету арок мы обязаны Лаиру (Lahire, 1640—1718), члену Французской Академии[2]). Курс своего математического образования Лаир прошел под руководством Дезарга; от этого же великого математика он унаследовал и свое увлечение геометрией. В книге Лаира «Трактат по механике» («Traité de Méchanique», 1695) мы впервые встречаемся с использованием веревочного многоугольника для расчета арки. Лаир рассматривает полуциркульную арку (рис. 39) и исходит из предположения, что поверхности соприкасания клиньев, образующих арку, идеально гладкие, так что через них передаются одни лишь нормальные давления. Исходя из этого допущения, он решает следующую задачу: каковы должны быть веса P_1, P_2, P_3,... клиньев арки, для того чтобы была обеспечена устойчивость сооружения? Лаир решает эту задачу графическим методом, как показано на рис. 39. Проводя горизонтальную касательную MN к наружному очертанию арки и продолжая радиусы, подразделяющие арку на клинья, до точек пересечения M, K, L, N с касательной, он находит, что условие устойчивости выполняется, если веса P_1, P_2 ,... находятся в тех же отношениях, что и отрезки MK, KL, LN. Он находит

---

[1]) Чертежи римских мостов приводятся в упомянутой выше книге Готэ: Gauthey, Traité de la construction des ponts, т. 1, 1809.

[2]) История развития теории арок излагается в чрезвычайно интересном мемуаре Понселе, Compt. Rend., т. 35, стр. 493, 1852.

также, что давления, действующие между клиньями арки, представляются продолженными радиусами CK, CL, CN. Пользуясь терминологией нашего времени, мы должны были бы сказать, что фигура $ABCDE$ представляет собой веревочный многоугольник, построенный для системы вертикальных сил P_1, P_2, P_3,..., а фигура

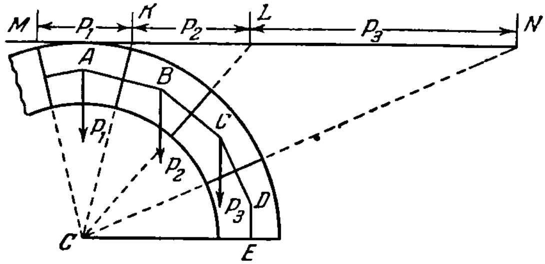


Рис. 39.

$MKLNC$ представляет собой многоугольник сил, повернутый на 90° относительно полюса C.

Продолжая этот процесс деления, Лаир находит, что вес последнего клина, опирающегося на горизонтальную плоскость CE, должен быть бесконечно большим, поскольку радиус CE параллелен касательной MN. Это привело Лаира к заключению, что при условии идеальной гладкости поверхностей соприкасания клиньев устойчивость полуциркульной арки не осуществима. Он отмечает, что в сооружениях арочного типа цемент препятствует скольжению клиньев и обеспечивает, таким образом, устойчивость. Поэтому найденное соотношение для $P_1 : P_2 : P_3$... можно и не выполнять с полной строгостью.

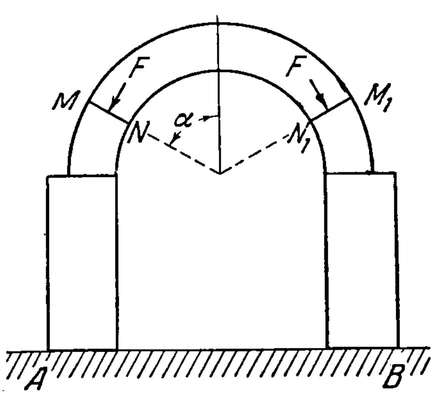


Рис. 40.

Впоследствии Лаир возвращается к проблеме арки [1]) и применяет свою теорию к определению необходимых размеров колонн, поддерживающих полуциркульную арку (рис. 40). Предполагая, что излом происходит в наиболее неблагоприятно расположенных местах арки, как, например, в сечениях MN и M_1N_1, и опять пренебрегая трением, он вычисляет силы F, представляющие собой

[1]) См. его мемуар в Histoire de l'Académie des sciences, Paris, 1712.

действие верхней части арки на нижние ее части. Затем он вычисляет тот вес, который должны иметь колонны, с тем чтобы, противодействуя силам F, они не имели вращения вокруг точек A и B.

Этот метод расчета был впервые применен в практических целях Белидором, изложившим теорию Лаира в своей «Инженерной науке» и указавшим, что угол α (на рис. 40) должен быть принят равным 45°. Впоследствии методом Лаира воспользовались Перонне и Шези при составлении таблицы для расчета толщины арок[1]).

Кулоном был сделан дальнейший шаг в развитии теории арок. В его время из опытов на моделях[2]) было установлено, что типичными формами разрушения арок являются случаи,

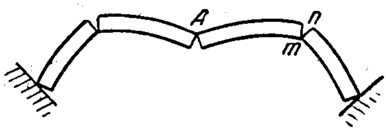


Рис. 41.

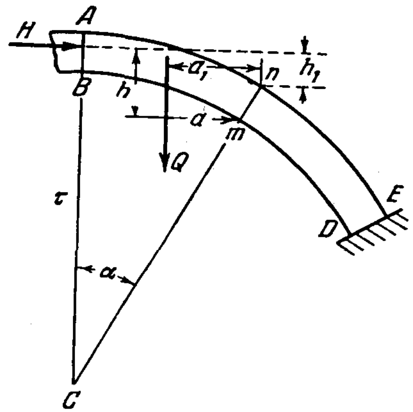


Рис. 42.

показанные на рис. 41. Из этой схемы можно заключить, что при исследовании устойчивости арки следует учитывать не только возможность относительного скольжения клиньев, но также и возможность их относительных поворотов. В своем мемуаре 1773 г. Кулон рассматривает оба эти типа разрушения. Пусть $ABDE$ (рис. 42) представляет собой половину симметричной арки, симметрично нагруженной. Обозначив горизонтальный распор в поперечном сечении AB через H и вес участка $ABmn$ арки через Q, он находит, что нормальная и касательная составляющие результирующей силы действующей на плоскость mn, равны

$$H\cos\alpha + Q\sin\alpha$$

и

$$Q\cos\alpha - H\sin\alpha,$$

[1]) Lesage M., Recueil des mémoires extraits de la bibliothèque des ponts et chaussées, Paris, 1810.

[2]) Опыты такого рода были выполнены в 1732 г. Данизи в академии в Монпелье и были описаны Фрезье в его книге: Frézier, Traité de la coupe des pierres, т. 3, Strassbourg, 1739. Подобные же опыты в более широком масштабе были поставлены Буатаром (L. C. Boistard). См. Lesage, Recueil de divers mémoires..., т. 2, стр. 171, Paris, 1808.

где α—угол, образуемый этой плоскостью с вертикалью AC. Наименьшее значение H, небходимое для того, чтобы воспрепятствовать участку арки $ABmn$ скользить по плоскости mn, определяется уравнением

$$Q\cos\alpha - H\sin\alpha = \mu\,(H\cos\alpha + Q\sin\alpha) + \tau A, \tag{a}$$

где μ—коэффициент трения, а τA—полное сопротивление арки скалыванию по плоскости mn. Из этого уравнения он находит:

$$H = \frac{Q\cos\alpha - \mu Q\sin\alpha - \tau A}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}. \tag{b}$$

Из всех возможных значений угла α необходимо теперь отобрать то, которое обращает выражение (b) в максимум. Положим, что H—соответствующее значение распора. Очевидно, это будет наименьшим значением силы, необходимой для того, чтобы воспрепятствовать верхней части арки соскользнуть вниз по плоскости mn. Точно таким же путем мы сможем найти и значение H' распора, при котором начнется скольжение части $ABmn$ арки вверх. Это значение равно

$$H' = \frac{Q\cos\alpha + \mu Q\sin\alpha + \tau A}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}. \tag{c}$$

Теперь Кулон отбирает то значение α, которое обращает выражение (c) в минимум. Положим, что H' будет соответствующим значением. Ясно, что для исключения возможности скольжения фактический распор должен быть больше H и меньше H'.

Обращаясь теперь к возможности вращения вокруг точки m, как это показано примерно на рис. 41, и пользуясь обозначением рис. 42, он находит предельное значение H_1 распора

$$H_1 = \frac{Qa}{h}. \tag{d}$$

Подобным же образом для вращения относительно точки n получается:

$$H_1' = \frac{Qa_1}{h_1}. \tag{e}$$

Наибольшее значение выражения (d) и наименьшее—выражения (e) дают пределы, между которыми должно заключаться значение фактического распора, если требуется, чтобы возможность вращения была исключена. Таков метод подхода к задаче, примененный Кулоном. На основе изучения случаев, встречающихся в практике, Кулон приходит к выводу, что, как правило, инженеру, проектирующему арку, приходится считаться лишь с двумя пределами (d) и (e). Им отмечается также, что точку приложения распора следует сместить в A (рис. 42) для того, чтобы сделать H_1 в выражении (d) малым, насколько это возможно.

Мы видим, что Кулон не дает определенных правил для проектирования арок, но лишь устанавливает пределы для значений распора, обеспечивающих устойчивость арки. По этой причине важность трудов Кулона не нашла должной оценки среди современных ему инженеров [1]) и лишь впоследствии, в XIX веке, когда для нахождения пределов (d) и (e) были предложены графические методы, его идеи стали широко применяться строителями арок.

К концу XVIII века большие экспериментальные работы были выполнены Готэ [2]), Буатаром [3]) и Ронделе [4]). Все эти эксперименты указывали, что разрушение арок происходит по схеме рис. 41. Они подтвердили, таким образом, гипотезу Кулона, положенную им в основу своей теории.

---

[1]) Инженеры-практики для расчета необходимой толщины арок предпочитали пользоваться в то время формулами Перроне, основанными на теории Лаира.

[2]) Gauthey, Dissertation sur les dégradations du Panthéon Français, Paris, 1800.

[3]) Boistard, Recueil d'experiences et observations, Paris, 1800.

[4]) Rondelet, Art de batir, т. 3, стр. 236.

ГЛАВА IV

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ В ПЕРВОЙ ТРЕТИ XIX ВЕКА

16. Парижская политехническая школа[1])

Как уже говорилось раньше (см. § 10), на протяжении XVIII века во Франции впервые был создан целый ряд специальных учебных заведений для подготовки инженеров. В связи с событиями Французской революции учебная работа в них, равно как и в университетах, временно прекратилась, поскольку студенты и профессора возбуждали некоторые подозрения у революционного правительства. Но, находясь в то время в состоянии войны с европейской коалицией, Франция вместе с тем остро нуждалась в инженерах в связи с необходимостью строительства фортификационных сооружений, дорог, мостов и развития артиллерии. И вот тогда группа ученых и инженеров, во главе с великим математиком Гаспаром Монжем, предложила новому правительству организовать инженерное учебное заведение нового типа взамен всех существовавших при старом режиме. Это предложение получило официальное одобрение в 1794 г., и уже к концу этого года новый институт приступил к выполнению своей учебной программы. В 1795 г. ему было присвоено наименование Политехнической школы, сохранившееся за ним и по настоящее время.

По своей организационной структуре новая школа сильно отличалась от тех, которым она пришла на смену. Все старые привилегии были отменены, и право доступа в школу получили все независимо от своего социального происхождения. Для того чтобы отбирать лучших, были введены конкурсные вступительные экзамены[2]). Ко времени создания школы в Париже было много

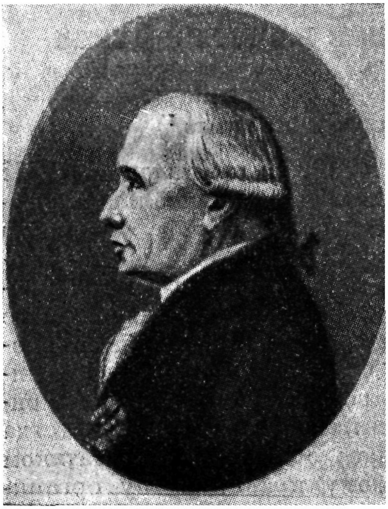
---

[1]) Весьма подробное освещение истории этого знаменитого учебного заведения было опубликовано в 1895 г. группой его воспитанников: «École Polytechnique, Livre du Centenaire, 1794—1894». См. также: P i n e t, L'Histoire de l'École Polytechnique, 1886.

[2]) Этот метод отбора сохранился и до наших дней. Ежегодно лучшие ученики, окончившие среднюю школу, стекаются со всей Франции в Париж к приемным испытаниям в Политехническую школу. Лишь небольшая часть выдержавших эти экзамены зачисляется в студенты.

ученых и профессоров, не имевших занятий и желавших вести педагогическую работу; группа наиболее выдающихся специалистов из их числа и образовала состав преподавателей новой школы. Ряд знаменитых ученых—Лагранж, Монж, Прони—приняли участие в преподавании математики и механики. Вскоре к ним присоединились Фурье и Пуассон.

Система преподавания в новой школе, разработанная Монжем, существенно отличалась от установившихся прежде обычаев. В учебных заведениях старого типа не было единообразия в требованиях, предъявлявшихся к поступающим, и не устраивалось общих лекций для больших групп учащихся. Методика преподавания носила характер ремесленного ученичества, поскольку дело сводилось к тому, что инженеры-практики объясняли отдельным студентам (или небольшим их группам), как нужно проектировать и возводить тот или иной тип сооружений. Если при этом возникала необходимость в сообщении студентам каких-либо дополнительных, незнакомых им теоретических сведений по математике или механике, то это поручалось сделать профессору технических наук или же одному из студентов из числа обнаруживших лучшие успехи в области математики. Никаких общих лекций по таким основным наукам, как математика, механика и физика, в этих старых учебных заведениях не читалось.



Гаспар Монж.

Распорядок работы в новой школе основывался на совершенно иных началах. Было установлено, что различные области техники требуют одной и той же, одинаковой для всех подготовки в таких общих основных науках, как математика, механика, физика и химия. Было признано также, что если студент получает хорошую подготовку в этих основных науках, то ему облегчается и усвоение в дальнейшем необходимых познаний в любой специальной области техники. В соответствии с этим общим принципом первые два года выполнения учебной программы посвящались исключительно основным наукам, на третьем же году обучения проходились сжатые курсы по отдельным специальным техническим дисциплинам. В последующем, однако, преподавание по специальным техническим дисциплинам было вовсе отменено и Политехническая школа стала учебным заведением, где студенты получали подготовку по одним лишь общеобразовательным наукам, необходимую для тех, кто имел в виду поступить в дальнейшем в то или иное специализированное техническое учебное заведение, как, например, в Школу мостов и дорог, Горную школу, Морскую академию и другие.

Главным вдохновителем—основоположником новой школы был Гаспар Монж (1746—1818)[1]), энтузиазм и педагогические способности которого много содействовали успеху школы. Он родился в Боне (Beaune) в семье с очень ограниченными материальными средствами и учился в местной школе. Обнаружив большие способности, он стал преподавателем физики, когда ему не исполнилось еще и 16 лет. Неизменными объектами его интересов были геометрия и черчение. Один военный инженер, по случайности обративший внимание на необычайные способности мальчика, постарался устроить ему доступ к занятиям в Мезьерской военной школе, которая в то время пользовалась, вероятно, самой большой славой в Европе. Здесь Монж познакомился с профессорами Камю и Боссю, весьма скоро оценившими его математический талант и оказавшими ему помощь в прохождении курса школы, которую он кончил столь быстро, что уже в 1768 г. стал в этой школе профессором математики. Именно в этой работе ему и удалось развить свое педагогическое чутье. Его лекции возбуждали глубокий интерес в слушателях, в числе которых были Лазарь Карно и Приёр. Эти два человека стали весьма влиятельными в годы Французской революции и оказали большую помощь в создании Политехнической школы.

В Мезьере Монж разработал совершенно новую отрасль математики, известную с тех пор под названием начертательной геометрии и ставшую одним из краеугольных камней в системе технического образования инженеров. В 1780 г. Монж был избран в члены Академии наук, а в 1783 г. оставил школу в Мезьере и переехал в Париж, где занял кафедру профессора в Морской академии. Для этой Академии он написал трактат по статике[2]), применявшийся в качестве учебного руководства на протяжении многих лет в ряде технических учебных заведений Франции.

Как прогрессивный мыслитель Монж с энтузиазмом поддерживал революцию и одно время участвовал в правительстве в качестве секретаря по морским делам. Очень скоро, однако, он утратил интерес к административной деятельности и, вернувшись к науке, взялся за организацию Политехнической школы. Монж был не только великим ученым, но также выдающимся педагогом и лектором, производившим сильное впечатление на слушателей.

[1]) О Монже см. Араго Ф., Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров, Пер. с франц., т. I, СПб, 1858, стр. 499—589. (*Прим. ред.*)

[2]) Monge G., Traité élémentaire de statique, 1-е изд., 1786.

Он придавал большое значение лекциям как методу преподавания, позволяющему студентам встречаться с ведущими учеными своего времени и получать, таким образом, основы необходимых им знаний от людей, которые сами участвуют в созидании и развитии науки. Лекционный метод Политехнической школы имел крупный успех. Величайшие математики того времени читали свои лекции в этой школе, и им удавалось передать свое увлечение наукой студентам. Общий энтузиазм, вдохновлявший и учителей и студентов, способствовал успешности занятий, и первые выпуски школы дали стране ряд замечательных ученых и инженеров, в том числе: Пуансо, Био, Малю, Пуассона, Гей-Люссака, Араго, Коши, Навье.

Лекции для широких групп студентов чередовались с классными упражнениями по решению задач; резервировалось время и для черчения, а также для занятий в физической и химической лабораториях [1]). Для такого рода занятий многолюдные классы разбивались на более мелкие группы (бригады) по 20 человек, причем к каждой группе прикреплялся специальный инструктор. Наиболее талантливые из этих молодых инструкторов выдвигались со временем в профессора, так что школа готовила не только будущих инженеров, но также профессоров и ученых.

Успехи, которыми ознаменовалось развитие механики упругого тела на протяжении первой половины XIX века, были делом главным образом работников науки, вышедших из стен этой школы.

С самого своего возникновения школа начала выпускать «Journal Polytechnique» («Политехнический журнал»), занявший место ведущего периодического издания по математике. В нем печатались не только оригинальные труды преподавательского персонала, но также и курсы лекций, которые читались им для студентов. Исчисление бесконечно малых, механика и физика преподавались здесь широким группам студентов впервые и, чтобы обеспечить успех этому нововведению, необходимо было обеспечить курсы учебными пособиями. В связи с этим на профессоров была возложена обязанность подготовить свои лекции для печати. Таким путем был написан целый ряд ценных книг и в числе их: «Начертательная геометрия» («Géometrie descriptive») [2]) и «Курс геометрических приложений анализа» («Cours d'analyse appliquée à la géometrie» [3]) Монжа, «Лекции по аналитической механике»

[1]) Насколько известно, здесь впервые лабораторные занятия были включены в учебную программу как ее составная часть.

[2]) См. русский перевод: М о н ж Г а с п а р, Начертательная геометрия, Пер. В. Ф. Газе, комм. и ред. проф. Д. И. Каргина, под общ. ред. члена-корреспондента АН СССР Г. П. Кравца, Изд. АН СССР, М., 1947. (*Прим. перев.*)

[3]) См. русский перевод: М о н ж Г., Приложение анализа к геометрии, Пер. В. А. Гуковской, под ред., с пред. и прим. М. Я. Выгодского, М.—Л., ОНТИ, 1936. (См. также «Гаспар Монж», Сборник статей к 200-летию

(«Leçons de mécanique analytique») Прони, «Трактат по механике» («Traité de mécanique») Пуассона, «Дифференциальное и интегральное исчисление» («Calcul différentiel et intégral») Лакруа и «Трактат по физике» («Traité de physique») Аюи (Haüy). Эти книги получили широкое распространение не только во Франции, но также и в других странах и оказали большое влияние на развитие этих основных наук.

В других странах системы инженерного образования строились по образцу, принятому в Политехнической школе. В частности, например, программой ее руководствовались организаторы Политехнического института в Вене. Политехнический институт в Цюрихе был основан генералом Дюфуром, бывшим воспитанником Политехнической школы. Французская система технического образования была принята и в России, она же оказала влияние на учреждение Военной академии США в Уэст-Пойнте.

Франция была первой страной, где инженеры стали получать серьезную подготовку в основных науках. На базе такого широкого научного образования эти люди смогли проявить себя весьма деятельно и творчески в дальнейшем развитии технических наук. Престиж французских инженеров в то время поднялся на очень большую высоту, и их часто приглашали в другие страны, чтобы оказать помощь в решении трудных инженерных проблем.

17. Луи Мари Анри Навье

Знаменитый мемуар Кулона 1773 г. содержал правильные решения для целого ряда важных проблем механики материалов, но инженерам потребовалось более 40 лет, чтобы их достаточно понять и использовать в практических целях [1]). Очередной крупный успех в нашей науке был достигнут Луи Мари Анри Навье [2]) (1785—1836). Правда, его первые печатные труды, несмотря на то, что он начал работать уже после смерти Кулона, совершенно не отразили достижений его предшественника. Навье родился в Дижоне в семье состоятельного адвоката. В возрасте 14 лет он потерял отца и был взят в дом своего дяди, знаменитого французского инженера Готэ, отдавшего много внимания воспитанию мальчика. В 1802 г. Навье, выдержав конкурсные экзамены, поступил в Политехническую школу, а в 1804 г., по окончании ее, был

со дня рождения, Под ред. акад. В. И. Смирнова, Изд. АН СССР, 1947.) (*Прим. перев.*)

[1]) Понселе в своем, упомянутом выше, историческом обзоре различных теорий арок отмечает: «Мемуар Кулона на немногих страницах захватывает так много, что на протяжении последующих 40 лет внимания инженеров и ученых не хватило на то, чтобы разработать вполне хотя бы одну из них».

[2]) Биография Навье и полный перечень его печатных трудов приводятся в третьем издании его книги по сопротивлению материалов, вышедшем в Париже в 1864 г. под редакцией Сен-Венана.

принят в Школу мостов и дорог, где ранее учился, а затем преподавал математику его дядя. Готэ пользовался всяким случаем, чтобы наполнить теоретические занятия своего племянника практическими познаниями из области строительства мостов и каналов. Благодаря этому Навье ко времени завершения образования в 1808 г. оказался хорошо подготовленным, чтобы методами теоретического исследования решать практические проблемы.

Немедленно же ему представилась возможность применить свои познания и способности в ответственной работе. Готэ, скончавшийся в 1807 г., был занят в последние годы своей жизни подготовкой трактата о мостах и каналах. Этот труд остался незаконченным, и именно Навье пришлось взять на себя окончательную редакционную обработку и издание трех томов этого сочинения. Первый том, содержавший историю строительства мостов, а также описания важнейших новых мостов, вышел из печати в 1809 г., второй вышел в 1813 г., а последний, посвященный сооружению каналов, появился в 1816 г. Чтобы привести текст этой работы в соответствие с уровнем современного ему состояния знаний, Навье внес в разных местах многочисленные редакционные дополнения и примечания. Они сейчас представляют большой исторический интерес, поскольку отражают развитие механики упругого тела к началу XIX века. Сравнивая эти примечания с позднейшими трудами Навье, мы получаем возможность оценить тот прогресс, который был добыт нашей наукой за время его жизни главным образом благодаря его собственным усилиям. Примечание на стр. 18 второго тома представляет в этом отношении особый интерес; в нем излагается полная теория изгиба призматического бруса, причем из нее можно заметить, что для Навье остались тогда неизвестными важный мемуар Парана (см. стр. 60) и работа Кулона. Не придавая, подобно Мариотту и Якову Бернулли, существенного значения вопросу о положении нейтральной линии, Навье считает ее совпадающей с касательной к контуру поперечного сечения с вогнутой стороны. Он принимает также, что формула Мариотта (см. стр. 34) достаточно точна для вычисления прочности балки и занимается исследованием ее прогибов. Исходя из некоторых не вполне приемлемых допущений, он выводит выра-

Луи Мари Анри Навье.

жение для жесткости при изгибе, включающее два члена, и утверждает, что для определения входящих в формулу постоянных необходимо использовать результаты испытаний бруса на изгиб и на сжатие.

Этих ошибочных взглядов Навье держался, однако, не долго: в 1819 г., когда он начал читать свои лекции по сопротивлению материалов в Школе мостов и дорог, некоторые ошибки в его теории были уже устранены [1]). Но метод, с помощью которого устанавливалось положение нейтральной линии, продолжал оставаться неправильным, а именно, Навье предполагал, что эта линия делит поперечное сечение таким образом, что момент относительно ее растягивающих напряжений равен моменту сжимающих напряжений. Лишь в первом печатном издании (1826) его лекций это утверждение было исправлено, и вместо него доказано, что для материалов, следующих закону Гука, нейтральная линия должна проходить через центр тяжести поперечного сечения.

Навье опубликовал в 1813 г. новое издание «Инженерной науки» («La science des ingénieurs») Белидора, а в 1819 г. переиздал первый том его «L'architecture hydrolique». В обеих этих книгах мы встречаемся с многочисленными важными примечаниями, внесенными Навье с целью приблизить их содержание к требованиям своего времени.

В 1820 г. Навье представил в Академию наук свой мемуар об изгибе пластинок, а в следующем, 1821 г. появилась его знаменитая работа, формулирующая основные уравнения математической теории упругости.

Занятый теоретическими исследованиями и редактированием книг, Навье в то же время всегда имел и какую-либо практическую работу, связанную обычно со строительством мостов. В этой области в конце XVIII и в начале XIX столетия произошли большие перемены. До этого времени основным материалом, применявшимся в строительстве ответственных мостов, был камень, теперь же все более и более широкое применение стал получать металл. Англия в это время была наиболее передовой индустриальной страной, и широкое использование металлов в промышленности началось впервые именно в этой стране. Джон Смитон (John Smeaton, 1724—1792) [2]) был первым крупным инженером, применившим чугун в конструкциях ветряных мельниц, водяных колес и насосов. Первый чугунный мост был построен в 1776—1779 гг.

---

[1]) См. примечание Сен-Венана на стр. 104 его «Истории сопротивления материалов и теории упругости», приложенной к его знаменитому изданию книги: Navier, Resumé des leçons, ... de la résistance des corps solides, Paris, 1864.

[2]) Биография Смитона приведена в первом томе «Reports of John Smeaton F. R. S.», London, 1812.

Авраамом Дэрби (Abraham Darby) через реку Северн [1]). Другие последовали за Англией, и на рубеже века чугунные мосты появились в Германии и во Франции [2]). Эти мосты выполнялись в виде арок с тем, чтобы материал работал преимущественно на сжатие. Эти сооружения нового типа не всегда были достаточно прочны, и некоторые из них терпели аварии.

Инженеры пришли к выводу, что чугунные мосты не могут быть признаны безопасными для больших пролетов, и перешли к системе висячих мостов, основной принцип которой восходит к глубокой древности. Несколько весьма древних сооружений этого типа было найдено в Китае и Южной Америке [3]). Но первые висячие мосты, оказавшиеся способными противостоять суровым требованиям более близких к нам времен, были построены в Северной Америке в конце XVIII столетия. Джэмс Финли (J. Finley) построил первый висячий мост в Пенсильвании в 1796 г. В начале XIX века в этом штате существовало уже довольно много таких мостов. Самым крупным из них был мост через реку Счуйлкилл (Schuylkill) близ Филадельфии. Британские инженеры последовали примеру американцев, в результате чего на протяжении первой четверти XIX века было построено много таких мостов и в Англии. Крупнейший из них—через реку Менэй (Menai) со средним пролетом 165 *м* (550 фут.) был спроектирован и построен (1822—1826) Тельфордом [4]) (1757—1834).

Французское правительство чрезвычайно заинтересовалось этим новым направлением в мостостроении, и Навье был послан в Англию для изучения искусства сооружения висячих мостов. После двух поездок (в 1821 г. и 1823 г.) он представил свой отчет-

[1]) Описание этого моста, его постройки и дальнейшей судьбы, а также рисунок моста приведены, в частности, в журнале «Известия собрания Инж. п. с.», № 3, 1897, стр. 43—44. (*Прим. ред.*)

[2]) Начало строительства чугунных мостов в России относится к 1783—1784 гг., когда по проектам Камерона в верхнем парке б. Царского Села (ныне г. Пушкин) были построены два «китайских» мостика. В последующие годы в парках Царского Села было построено еще несколько оригинальных по форме арочных и балочных чугунных мостиков; см. Щ у с е в П. В., Мосты и их архитектура, М., 1953, стр. 221—226. В 1806—1818 гг. через каналы и реки Петербурга было построено шесть чугунных арочных мостов по проектам архитектора Геста пролетом 15—32 *м*, составленных из отдельных косяков; некоторые из них существуют и поныне; их описание см. «Отеч. записки», т. V, 1821, стр. 212 и «Журнал Гл. упр. п. с. и публ. зд.», т. XXXI, 1860, отдел вспом. наук, стр. 1 и далее. (*Прим. ред.*)

[3]) Любопытные исторические данные, относящиеся к металлическим мостам, можно найти в лекциях по металлическим мостам Мертенса (M e h r t e n s G. C., т. 1, Lpzg, 1908). См. также J a k k u l a A. A., A History of suspension bridges in bibliographical form, Texas Agricultural and Mechanical colledge, 1941.

[4]) См. G i b b A., The story of Telford, London, 1935, а также S m i l e s, Lives of the enqineers, т. 2. (Имеется русский перевод. *Прим. перев.*) Тельфорд учредил Лондонский институт гражданских инженеров (1821) и оставался президентом этого Института до конца своей жизни.

мемуар о висячих мостах (Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus, 1823), в котором не только приводится исторический обзор этой области строительства и даются описания важнейших существовавших тогда висячих мостов, но и излагаются теоретические методы расчета таких сооружений [1]). В течение 50 лет этот отчет был одним из важнейших литературных источников по вопросам проектирования висячих мостов; и по сей день он еще сохранил отчасти свое значение.

В 1824 г. Навье был избран в члены Академии, а в 1830 г. получил назначение на должность профессора по кафедре математики и механики в Политехнической школе. Его лекции «Resumé des leçons de mécanique» были изданы и на протяжении многих лет пользовались широкой популярностью среди французских инженеров.

18. Книга Навье по сопротивлению материалов

В 1826 г. появилось первое печатное издание книги Навье по сопротивлению материалов[2]), содержащее главнейшие его открытия в этой области. Если мы сравним эту книгу с аналогичными сочинениями XVIII века, то ясно заметим тот большой сдвиг, который совершила механика материалов за первую четверть XIX века. Инженеры XVIII века пользовались экспериментом и теорией с целью установления формул для вычисления предельных (разрушающих) нагрузок, Навье же с самого начала указывает, насколько важно знать предел, до которого сооружения ведут себя идеально упруго и не получают остаточных деформаций. В пределах упругости деформацию можно считать пропорциональной силе и установить сравнительно простые формулы для вычисления ее величин. За пределом же упругости зависимость между силами и деформациями получается очень сложной и вывод простых формул для определения разрушающих нагрузок становится невозможным. Навье полагает, что если применять формулы, выведенные для расчета по упругому состоянию существующих сооружений, обнаруживших свою достаточную прочность,

---

[1]) В то время английские инженеры не очень интересовались теорией. Так, например, Брьюстер (Brewster) сообщает о Тельфорде следующее: «Он питал необычайное отвращение к математическим занятиям и не изучил даже элементов геометрии; эта странность дошла до того, что когда нам случилось рекомендовать одного нашего юного друга для поступления в его проектное бюро, причем мы обосновали нашу рекомендацию тем, что наш кандидат был отличным математиком, Тельфорд без колебаний заявил, что подобные познания скорее дисквалифицируют кандидата, чем подтверждают его пригодность для занятия подобной должности».

[2]) Копии лекций Навье распределялись среди студентов с 1819 г. Сен-Венан, являвшийся одним из слушателей этих лекций, ссылается именно на этот материал, обсуждая некоторые ошибки в ранних работах Навье.

то таким путем можно установить значения безопасных напряжений для различных материалов и в дальнейшем пользоваться этими данными при назначении надлежащих размеров в проектах новых сооружений.

В первых двух главах своей книги автор исследует простое сжатие и простое растяжение призматического бруса, причем отмечает, что для полного описания механических свойств материала недостаточно дать только его предел прочности, но необходимо также установить и его модуль упругости E, который определяется у Навье как отношение нагрузки, приходящейся на единицу площади поперечного сечения, к произведенному ею относительному удлинению[1]). Так как для определения модуля упругости E требуются измерения весьма малых удлинений, соответствующих упругой области, то из имевшегося в его распоряжении экспериментального материала Навье смог извлечь лишь весьма скудные данные для своей цели. Поэтому он поставил свои собственные опыты над железом, которое он применял в сооружении моста Инвалидов в Париже[2]). Таким путем он определил модуль упругости E для этого материала.

Третья глава посвящена изгибу призматического бруса, и здесь Навье с самого начала принимает, что изгиб происходит в той же самой плоскости, в которой действует нагрузка, в связи с чем его исследование может относиться лишь к балкам, имеющим плоскость симметрии и нагруженным в этой плоскости. Полагая, что поперечные сечения остаются плоскими при изгибе, и применяя три уравнения статики, он заключает, что нейтральная линия проходит через центр тяжести поперечного сечения и что кривизна оси определяется уравнением

$$\frac{EI}{\rho} = M, \tag{a}$$

где I является моментом инерции поперечного сечения относительно нейтральной линии. Считая прогибы малыми и совмещая ось x с осью балки, он получает зависимость

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M. \tag{b}$$

Со времени Эйлера этим уравнением пользовались для вычисления прогибов консолей и симметрично нагруженных свободно опертых балок. Навье применяет его для любого вообще случая поперечного загружения простой балки, причем кривая прогибов описывается у него в отдельных участках пролета балки

[1]) Модуль упругости был введен впервые в механику упругого тела Томасом Юнгом (см. стр. 114). Но последний давал ему другое определение. В настоящее время общее признание получило определение Навье.

[2]) См. Rapport et mémoire sur les ponts suspendus, 2-е изд., стр. 293.

различными уравнениями. Чтобы пояснить расчетный метод Навье, рассмотрим балку, нагруженную сосредоточенной силой P в точке C (рис. 43). Обозначая угол, который касательная к упругой линии в C образует с горизонтальной осью, через α, он находит выражения

$$f_b = \frac{Pa}{l} \frac{b^3}{3EI} + b \operatorname{tg} \alpha, \qquad f_a = \frac{Pb}{l} \frac{a^3}{3EI} - a \operatorname{tg} \alpha$$

для прогибов в B и в A (при отсчете их от оси x). Из равенства этих прогибов он заключает, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Pab(a-b)}{3EIl}.$$

Зная α и пользуясь приведенным выше выражением для изогнутой оси консоли, можно написать уравнение кривых прогиба для обоих участков балки AB.

Тем же приемом решает Навье и задачу об изгибе балки (рис. 43), когда равномерная нагрузка распределена лишь по отдельному ее участку. Вычисляя для этого случая наибольшее напряжение, он ошибочно допускает, что максимальный изгибающий момент в балке имеет место под центром тяжести нагрузки.

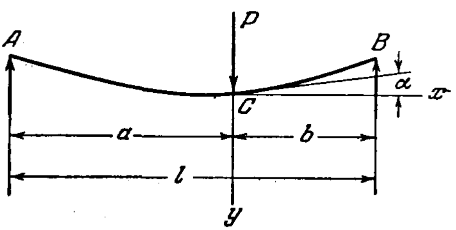


Рис. 43.

Навье первый разработал общий метод решения статически неопределенных задач в механике материалов. Он утверждает, что такие задачи представляются неопределенными лишь постольку поскольку телам приписывается абсолютная жесткость, но что, приняв во внимание их упругость, мы всегда имеем право присоединить к уравнениям статики еще некоторое число уравнений, выражающих условия деформации, так что в нашем распоряжении всегда окажется достаточное число зависимостей, чтобы найти все неизвестные величины. Рассматривая, например, нагрузку P, поддерживаемую несколькими расположенными в одной плоскости стержнями (рис. 44), Навье указывает, что если стержни абсолютно жестки, то задача получается неопределенной. Он вправе приписать произвольные значения усилиям во всех стержнях, за исключением двух, и определить усилия в этих последних, воспользовавшись уравнениями статики. Но задача становится определенной, если учесть упругость стержней. Если u и v—горизонтальная и вертикальная составляющие смещения точки O, то можно выразить удлинения стержней и действующие в них усилия в виде функций от u и v. Написав затем два уравнения статики, можно найти u и v, а по ним определить и усилия во всех стержнях.

Переходя к статически неопределенным задачам изгиба, Навье начинает со случая балки, заделанной одним концом и свободно

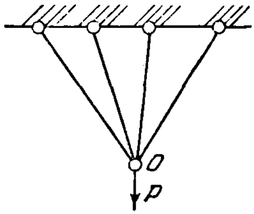


Рис. 44.

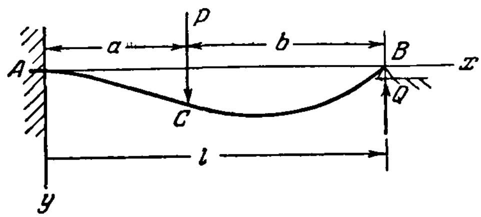


Рис. 45.

опертой на другом (рис. 45). Обозначая статически неопределимую реакцию в B через Q, он получает следующие уравнения:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=P(a-x)-Q(l-x),$$

$$EI\frac{dy}{dx}=P\left(ax-\frac{x^2}{2}\right)-Q\left(lx-\frac{x^2}{2}\right),$$

$$EIy=P\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)-Q\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)$$

для участка AC балки и

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-Q(l-x)$$

для участка CB. Интегрируя это уравнение и замечая, что в точке C оба участка изогнутой оси имеют общую касательную и общую ординату, он находит:

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{Pa^2}{2}-Q\left(lx-\frac{x^2}{2}\right),$$

$$EIy=P\left(\frac{a^2x}{2}-\frac{a^3}{6}\right)-Q\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right).$$

Так как при $x=l$ прогиб равен нулю, он получает из последнего уравнения

$$Q=\frac{P(3a^2l-a^3)}{2l^3}.$$

Поскольку значение опорной реакции определено, устанавливается и уравнение кривой прогиба для обоих участков балки.

Тот же прием Навье использует и в расчете балки, заделанной на обеих опорах, а также балки, лежащей на трех опорах. Мы видим, что нахождение кривых прогиба путем интегрирования и вычисления лишних неизвестных (статически неопределимых величин) было полностью разработано Навье. Но эпюры изгибающего момента и поперечной силы, столь широко применяемые в настоящее время, отсутствуют в его исследованиях, и этим обстоятельством, вероятно, хорошо объясняется, почему в некоторых случаях положение точки максимума для изгибающего момента устанавливалось им неправильно.

Навье останавливается также на случаях изгиба призматического бруса, находящегося под совместным воздействием осевой и поперечной сил. Рассмотрев продольный изгиб колонны

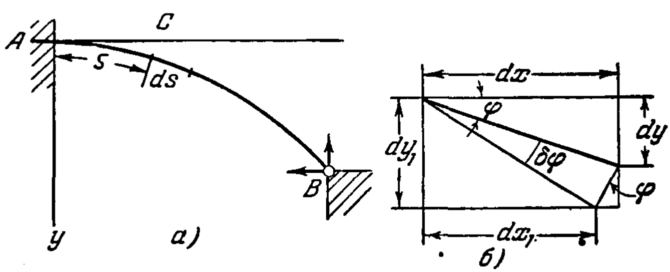


Рис. 46.

при осевом сжатии, он переходит к случаям внецентренного сжатия и растяжения и изучает действие силы, приложенной на конце колонны под некоторым углом к оси. Его формулы для определения наибольшего изгибающего момента и наибольшего прогиба в этих случаях много сложнее, чем формулы для случая действия одной лишь поперечной нагрузки, и в его время они, вероятно, мало применялись. Впоследствии, однако, в связи с возраставшим использованием в сооружениях гибких стержней эти формулы приобрели большое значение, и для того, чтобы облегчить их применение, были составлены подробные таблицы для вычислений.

В своей книге Навье внес много ценного в теорию изгиба кривого бруса. Уже Эйлер высказал гипотезу, что при изгибе первоначально искривленного бруса изгибающий момент пропорционален приращению кривизны. Навье принимает формулу

$$EI\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)=M$$

и использует ее для исследования изгиба кривого бруса AB (рис. 46, a), заделанного концом A. Взяв некоторый элемент ds у точки C, он заключает в связи с приведенным уравнением, что угол, образуемый двумя смежными поперечными сечениями, изменяется в результате изгиба на величину $M\,ds/EI$. Поэтому поперечное сечение C при изгибе поворачивается на угол

$$\delta\varphi = \int_0^s \frac{M\,ds}{EI}.$$

Вследствие этого начальные проекции dx и dy элемента ds примут новые значения dx_1 и dy_1 (рис. 46, *б*), и мы найдем:

$$dx_1 - dx = -ds\,\delta\varphi \sin\varphi = -dy \int_0^s \frac{M\,ds}{EI},$$

$$dy_1 - dy = ds\,\delta\varphi \cos\varphi = dx \int_0^s \frac{M\,ds}{EI}.$$

Интегрируя, Навье получает компоненты смещения некоторой точки C при изгибе в следующем виде:

$$x_1 - x = -\int_0^s dy \int_0^s \frac{M\,ds}{EI},$$

$$y_1 - y = \int_0^s dx \int_0^s \frac{M\,ds}{EI}.$$

С помощью этих уравнений можно решать статически неопределенные задачи изгиба кривого бруса. Рассматривая, например, симметричную двухшарнирную арку, нагруженную в ключе сосредоточенной силой P (рис. 47), мы имеем статически неопределимый распор H, величина которого может быть найдена из условия, что горизонтальное перемещение шарнира B должно быть равно нулю. Тогда

$$\int_0^s dy \int_0^s \frac{M\,ds}{EI} = 0.$$

Из этого уравнения Навье вычисляет распор H для параболических и круговых арок. Аналогично им проводится расчет и в том случае, когда нагрузка равномерно распределена по пролету. Все эти вычисления основываются на том допущении, что длина элементов, подобных показанному на рис. 46, *б*, остается неизменной. В заключение Навье показывает, каким образом может быть принято в расчет сжатие, производимое осевой силой.

Последняя глава книги посвящена тонким оболочкам, и в ней также имеются некоторые оригинальные исследования самого Навье. Он начинает с обсуждения формы равновесия идеально гибкой нерастяжимой нити AB, подвергнутой нормальному давлению в плоскости кривой AB (рис. 48), причем заключает (из условий равновесия элемента mn), что.

$$S=\text{const},\qquad \frac{S}{\rho}=p,$$

где S—растягивающее усилие в нити, ρ—радиус кривизны. Таким образом, кривизна в некоторой точке должна быть пропор-

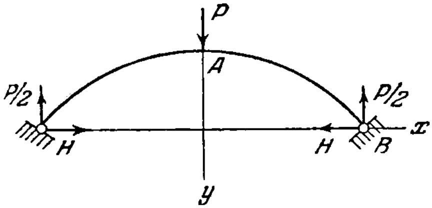


Рис. 47.

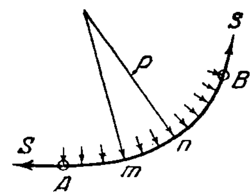


Рис. 48.

циональна давлению в этой же точке. Взяв бесконечно длинный лоток (рис. 49, *а*), наполненный жидкостью и поддерживаемый равномерно распределенными силами S, Навье задается вопросом, при каких условиях оболочка не будет подвергаться изгибу, и по-

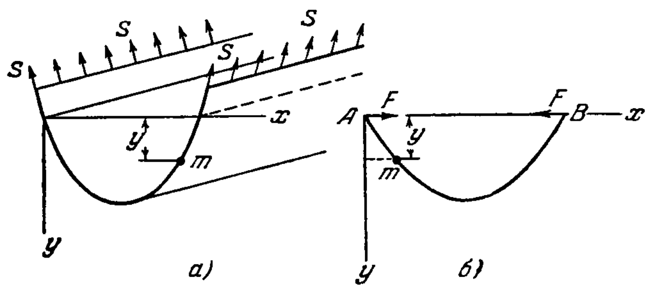


Рис. 49.

казывает, что это имеет место в том случае, когда кривизна в некоторой ее точке m пропорциональна глубине y. Профиль, удовлетворяющий этому условию, может быть получен изгибанием гибкой первоначально плоской полосы AB силами F, как показано на рис. 49, *б*, поскольку изгибающий момент и кривизна изогнутой оси в каждой точке m, очевидно, пропорциональны y.

Рассматривая тонкую оболочку, подвергнутую равномерному натяжению S и нормальному давлению p, из условий равновесия Навье находит уравнение

$$S\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_1}\right)=p.$$

Отсюда он получает выражение для растягивающего напряжения в сферической оболочке толщиной h:

$$\sigma = \frac{S}{h} = \frac{p\rho}{2h}.$$

Навье провел испытания[1]) тонких железных сферических оболочек диаметром около 0,3 *м* (1 фут), толщиной 2,5 *мм* (1''). Подвергая их внутреннему давлению, достаточному для того, чтобы вызвать разрыв, он нашел, что предельное сопротивление материала в этом случае остается приблизительно тем же, что получается из испытаний на простое растяжение.

В книге Навье имеются дополнительные главы, касающиеся подпорных стен, арок, пластинок и ферм. О них будет сказано дальше. Мы видим, что в книге даны удовлетворительные решения многих задач строительной механики, хотя для того, чтобы привести их к окончательному виду с современной точки зрения, было бы необходимо дополнить их исследованием касательных напряжений при изгибе балки, а также исследованием изгиба балки в плоскости, не совпадающей с плоскостью действия сил. Эти две задачи, как мы увидим, были решены позднее, после смерти Навье.

19. Экспериментальные исследования французских инженеров в первой трети XIX века

Инженеры XVIII столетия, производя испытания материалов, интересовались главным образом пределом прочности, и если им удалось собрать обширные данные относительно разрушения материалов, то изучению упругих свойств своих образцов они уделяли очень мало внимания. Только инженеры, вышедшие из Политехнической школы в начале XIX века, начали проявлять в своей экспериментальной работе не только практический, но, как мы увидим, и некоторый научный интерес. Этим они были обязаны своей обширной подготовке в области математики, механики и физики.

Ф. Дюпэн[2]) (Dupin F. P. C., 1784—1873), закончивший курс Политехнической школы в 1803 г., был одним из выдающихся представителей этого нового поколения. Находясь еще в стенах учебного заведения, он проявил большие математические способности и опубликовал свою первую научную работу по геометрии. В 1805 г. он был командирован в качестве морского инженера на Ионические острова, где на него были возложены обязанности по сооружению арсенала на острове Корфу. Здесь он провел важ-

---

[1]) См. Ann. chim. et phys., т. 33, Paris, 1826, стр. 225.

[2]) Биографию Дюпэна см. Betrand J., Éloges académiques, стр. 221, 1890.

ные исследования по изгибу деревянных балок[1]). Испытывая балки, опертые по концам, он находит, что прогибы их до известного предела пропорциональны нагрузкам. За этим пределом прогибы начинают возрастать с большей скоростью, причем, как он показывает, зависимость между нагрузкой и прогибами изображается параболической кривой. Испытывая различные породы древесины, он находит, что их сопротивление изгибу возрастает с удельным весом. Сравнивая прогиб, произведенный сосредоточенной силой, приложенной в середине пролета, с прогибом от равномерно распределенной нагрузки той же величины, он устанавливает, что во втором случае прогиб составляет $^{19}/_{30}$ от значения, получаемого в первом случае. Как видно, это экспериментально найденное соотношение находится в близком соответствии с отношением $^{5}/_{8}$, которое указывается теорией.

Из опытов с прямоугольными балками Дюпэн находит, что прогибы обратно пропорциональны ширине балки и кубу ее толщины. Он устанавливает также, что прогибы пропорциональны кубу пролета. Сопоставляя геометрически подобные балки из одного и того же материала, он заключает, что кривизна изогнутой оси посредине пролета, обусловленная действием собственного веса балки, постоянна, а прогибы пропорциональны квадратам линейных размеров. Исследуя форму кривой изгиба при загружении балки силой, приложенной в середине пролета, он находит, что эта кривая с достаточной точностью может быть представлена гиперболой. Из этих экспериментов Дюпэн извлекает яд выводов, касающихся прочности и прогибов обшивки деревянных судов. Все эти результаты были получены им до выхода в свет книги по сопротивлению материалов Навье.

Весьма обширная серия испытаний железа и железных конструкций была проведена Дюло[2]), другим воспитанником Политехнической школы. В первой части своего труда Дюло устанавливает необходимые формулы для изгиба и выпучивания призматических стержней, изгиба арок и кручения валов. Отыскивая положение нейтральной линии при изгибе, он ошибочно полагает момент растягивающих сил относительно нее равным моменту сжимающих сил. Поскольку бо́льшая часть его работы относится к балкам прямоугольного и круглого профилей, эта ошибка не оказывает влияния на выводы. С самого начала он определяет модули упругости при растяжении и сжатии и, делая допущение, что поперечные сечения остаются при изгибе плоскими, выводит дифференциальное уравнение изогнутой оси. Он применяет это уравнение к консоли и к балке, свободно опертой по концам.

[1]) См. Expériences sur la flexibilité, la force et l'élasticité des bois, J. École polytech., т. 10, 1815.

[2]) Duleau A., Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, Paris, 1820.

Чтобы перейти к формуле для прогиба балки с заделанными концами, он рассматривает бесконечно длинный брус, загруженный, как показано на рис. 50, *а*. Выделив участок получающейся при этом волнообразной изогнутой оси (рис. 50,*б*) длиной l, он заключает, что заделка концов уменьшает прогиб в середине пролета до $^1/_4$ той величины, которая получается в свободно опертой балке того же пролета.

Результаты его опытов по изгибу балок обнаруживают весьма хорошее согласие с теорией в случае прямоугольного сечения, но жесткость равностороннего треугольного профиля оказалась в его испытаниях меньшей, чем значение, предсказанное теорией. Это расхождение следует, вероятно, приписать ошибочному представлению о положении нейтральной оси.

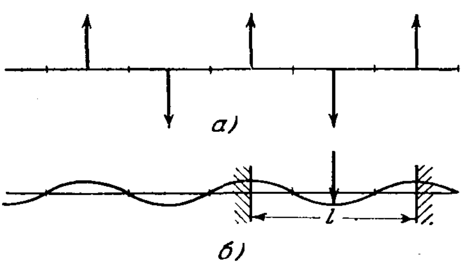


Рис. 50.

Далее, необходимо упомянуть и об его испытаниях на осевое сжатие железных призматических стержней. Дюло пользовался в этих опытах весьма гибким стержнем и принимал меры, чтобы обеспечить центральное действие нагрузки. Таким путем он достиг результатов, обнаруживших удовлетворительное соответствие с теорией Эйлера.

Дюло провел ряд испытаний составных балок типа, показанного на рис. 51. Вычисляя жесткость при изгибе, он вводит в качестве момента инерции сечения величину $b(h^3-h_1^3)/12$. Опыты показали, что для получения удовлетворительного соответствия с теорией чрезвычайно важно предупредить возможное скольжение верхней части балки по нижней. Этого можно достигнуть путем стягивания их болтами. Прогибы, наблюдавшиеся в такого рода конструкциях на опыте, всегда оказывались несколько бо́льшими вычисленных, причем расхождение становилось тем более ощутительным, чем большим было расстояние h_1 между двумя брусьями составной балки. Причина такого несоответствия станет ясной, если заметить, что в своих вычислениях Дюло не учитывал влияния, которое оказывает на прогибы поперечная сила. С увеличением расстояния h_1 это влияние сказывается сильнее, так как полный прогиб уменьшается и прогиб от поперечной силы получает все большее относительное значение.

Установив из своих опытов, что прочность балки и ее жесткость возрастают с расстоянием h_1, Дюло обратил внимание на ту выгоду, которую представляет применение балок, состоящих из двух полок, соединенных между собой стенкой, т. е. двутавра.

Он рекомендует также трубчатые сечения, которые в то время уже вошли в практику строительства арочных чугунных мостов [1]).

Следующая серия выполненных Дюло испытаний имела своим объектом тонкие железные двухшарнирные арки. Он обнаружил, что если арку нагрузить в середине пролета, то в точках, делящих пролет на три части, кривизна арки при изгибе не изменится. Полагая, что шарниры размещены именно в этих точках, он строит приближенное решение, и оно оказывается удовлетворительным для арок, имеющих размеры, принятые в его опытах. Удобная для практических применений теория изгиба арок была, как мы знаем, предложена впоследствии Навье (см. стр. 97).

Наконец, Дюло исследовал также опытным путем кручение железных призматических стержней. Начав с круглых стержней

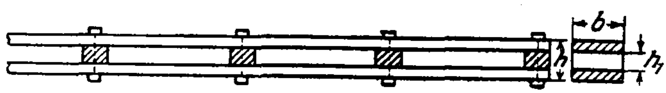


Рис. 51.

и допустив, что поперечные сечения остаются плоскими, а радиусы этих поперечных сечений сохраняют прямолинейность, он выводит формулу для угла закручивания, совпадающую с формулой Кулона. Те же допущения он принимает и при вычислении угла закручивания круглых труб. Здесь он опять обращает внимание на преимущество использования трубчатых сечений. Рассматривая кручение прямоугольных стержней, Дюло подчеркивает, что допущения, принятые им для круглых стержней, здесь уже не приложимы. В то время было принято считать, что напряжения кручения пропорциональны расстояниям от оси стержня, но опыты Дюло показали что это не так [2]). Мы увидим в дальнейшем, что Коши улучшил эту теорию и что строго эта задача была решена, наконец, Сен-Венаном.

Все эксперименты Дюло проводились в пределах упругости. Его материал следовал закону Гука, и он всегда пытался проверить или подтвердить свои теоретические формулы опытом. Он был убежден, что только в такой постановке опыт может быть полезен инженерам, и критиковал такие испытания, в которых, как, например, у Бюффона (см. стр. 73), ставилась одна только цель—найти предельную нагрузку.

Интересные и важные результаты были получены, наконец, в этот же период времени Секэном (Sequin), Ламе и Вика (Vicat).

[1]) Дюло отмечает, что подобные трубчатые арки были рекомендованы в 1805 г. инженером Готэ.

[2]) Сен-Венан в своем историческом обзоре (см. стр. 181) отмечает, что полученные Дюло опытные результаты по кручению прямоугольных стержней удивили Навье.

Первый из этих знаменитых инженеров опубликовал результаты испытаний проволоки, примененной в постройке первого французского висячего моста[1]). Исследования Ламе имели своей задачей изучение механических свойств русского железа[2]), между тем как Вика выступил сторонником испытаний на длительное загружение, которые могли бы согласно его взглядам гарантировать материал от последствий ползучести, явления, которое впервые было замечено им[3]). Вика изучал также сопротивление различных материалов скалыванию[4]) и непосредственным опытом показал, что в коротких балках влияние поперечной силы на прочность приобретает весьма большое значение. Так как он работал именно с короткими балками и пользовался такими материалами, как естественный камень или кирпич, которые не следуют закону Гука, он имел дело с условиями, при которых пользоваться простой теорией изгиба недопустимо. Ценность его работ в теоретическом отношении оказалась поэтому невысокой, если не считать того, что они привлекли внимание к важной роли поперечных сил в балках.

20. Теория арок и висячих мостов в первой трети XIX века

На протяжении первых трех десятилетий XIX века инженеры, занимавшиеся проектированием арок, следовали обычно теории Кулона и принимали, что если арка разрушается, то это происходит по схеме, приведенной на рис. 41, т. е. раскалываясь на четыре части. Главная трудность расчета заключается здесь в нахождении положения *поперечного сечения излома BC* (рис. 52). Теория предполагает, что горизонтальный распор H, приложенный в наивысшей точке A поперечного сечения AD, совместно с весом P части $ADBC$ арки и приходящейся на эту часть внешней нагрузкой дает равнодействующую R, проходящую через точку B. Таким образом, положение поперечного сечения излома BC определяется из того условия, что распор H должен принять наибольшее значение. Задача отыскания этого сечения решалась обычно способом последовательных проб. Приняв сначала условно какое-либо положение этого сечения, определялись вес P и точка его приложения, а затем из уравнений статики вычислялось соответствующее значение распора H. Для того чтобы с достаточной

[1]) См. его книгу «Des ponts en fil de fer», 1823, 2-е изд., 1826. Биографию этого знаменитого инженера можно найти у Пикара: Picard Émile, Éloges et discours académiques, Paris, 1931.

[2]) Результаты его опытов приводятся в книге Навье, 2-е изд., стр. 34.

[3]) См. Ann. ponts et chaussées, 1834 (статья о постепенном удлинении железной проволоки, подвергнутой различным растягивающим напряжениям).

[4]) Ann. ponts et chaussées, 1833, стр. 200.

точностью найти наибольшее значение H, такое вычисление нужно повторить несколько раз, а поскольку в то время подобные расчеты производились аналитическим способом, они требовали много времени. Для облегчения этой работы составлялись таблицы, в которых указывались вес и положение центра тяжести части $BCAD$ арки для любого положения BC в некоторых типах арок [1]). После того как поперечное сечение излома и соответствующее значение H_{max} найдены, назначается ширина EF нижней части $EFCB$ сооружения с таким расчетом, чтобы момент веса полуарки $ADEF$ относительно оси F противостоял с некоторым коэффициентом запаса моменту распора H_{max}, приложенного в A.

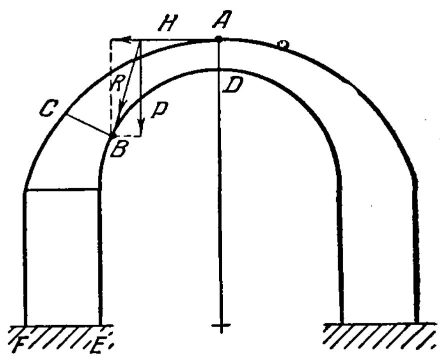


Рис. 52.

Некоторые интересные применения этой теории были разработаны Ламе (M. G. Lamé) и Клапейроном [2]) (E. Clapeyron), состоявшими в то время на службе в России. Оба они были профессорами Института инженеров путей сообщений в Петербурге. Им было поручено исследовать устойчивость цилиндрических арок и купола строившегося тогда Исаакиевского собора. Для круговой арки постоянного поперечного сечения аналитическим путем они нашли положение сечения излома и дали формулу для H_{max}. Они показали также, что для симметричных арок любого очертания положение сечения излома может быть найдено с большими упрощениями, если вместо радиальных сечений ввести вертикальные. Они доказали, что искомое сечение определяется при этом из того условия, что касательная к внутреннему контуру арки в точке B проходит через точку пересечения линии действия сил P и H. На этом выводе основывается чрезвычайно простой графический способ нахождения сечения BC.

Навье в примечаниях, которыми он дополнил книгу Готэ по мостам (см. стр. 73), следует теории Кулона. Но в своем

[1]) Понселе указывает, что в военной школе г. Меца для этой цели пользовались формулой Одуа (Audoy). См. его Examen critique et historique des principales théories ou solutions concernant l'équilibre des voutes. Compt. rend., 35, стр. 494, 531, 577, 1852.

[2]) Ann. mines, т. 8, 1823. (*Прим. авт.*) См. также статью «Об устойчивости сводов» в издававшемся в России в двух изданиях, на русском и французском языках, Журн. путей сообщ., 1826, кн. 2, стр. 16—28 и кн. 3, стр. 39—54. Перевод отзыва Прони и Дюпэна об этой статье, датированного 26 мая 1823 г., приведен в том же журнале, кн. 1, 1826, стр. 31—40. (*Прим. ред.*)

«Resumé des Leçons», относящемся к 1826 г., он вводит весьма интересное рассуждение о напряжениях в арках. Уже Кулон обратил внимание на то, что силы H и R (рис. 52) должны действовать на некоторых расстояниях от точек A и B, так чтобы для распределения напряжений остались достаточные площади. Навье полагает, что нормальные напряжения распределены по сечениям AD и BC, следуя линейному закону, и что они падают до нуля в точках D и C, в которых согласно теории Кулона начинается раскрытие арки, ведущее к ее разрушению. Из этого вытекает, что в точках A и B напряжения должны оказаться вдвое бо́льшими по сравнению с теми, которые получились бы в предположении равномерного распределения напряжений (по поперечным сечениям AD и CB). Отсюда же следует и то, что равнодействующие сил H и R должны быть приложены в своих поперечных сечениях на расстояниях, равных $^1/_3$ высоты сечения от точек A и B. Приняв для сил H и R эти новые линии действия, Навье получает для H_{max} несколько бо́льшие значения в сравнении с ранее полученными. Он пользуется этими новыми значениями для вычисления напряжений и определения размера EF (рис. 52) сооружения. Решение вопроса о положении сил H и R получило общее одобрение и было принято в последующей практике расчетов арок. Интересно отметить, что решение задачи о внецентренном сжатии стержней, полученное Томасом Юнгом (см. стр. 117) и включенное в его «Натуральную философию» («Natural Philosophy», 1817), не было замечено Навье, и он пришел к своему заключению о значении точек, делящих высоту сечения на три части, совершенно независимо от Юнга.

Навье первый рассмотрел несколько задач о деформации кривых брусьев, но ему не пришло в голову, что они могут быть применены для определения распора каменных арок. Взгляд, что арку следует трактовать как кривой упругий брус, был высказан впервые, вероятно, Понселе в упомянутой выше статье, излагающей историю теории арок. Потребовалось, как мы увидим, много времени для того, чтобы эта идея вошла в практику проектирования арок.

Первые висячие мосты, к которым было предъявлено требование подвергаться регулярной сравнительно тяжелой эксплуатации, были построены в Соединенных Штатах Америки и в Англии. Проектирование их не основывалось на строгой теории. Барлоу (Barlow), выполнивший ряд расчетов и испытаний для Тельфорда [1]), пользовался при определении растягивающего усилия в тросах [2])

[1]) См. Barlow, Treatise on the strength of materials, 6-е изд. стр. 209, 1867.

[2]) Дэвис Джильберт составил таблицы для упрощения подобных расчетов. См. его статью: Gilbert D., Tables for computing all the circumstances of strain, stress, .. of suspension bridges, Phil. Trans., 1826.

уравнением цепной линии, но, как общее правило, инженеры того времени видели более эффективный путь к решению задачи прочности в испытаниях. Тельфорд счел желательным испытать прочность своего троса, подвергнув его растяжению, возможно более близкому к тому, какое он должен был испытывать, поддерживая мост. Рис. 53 воспроизводит установку, которой он пользовался для пролетов до 274 *м* длиной (900 фут.). Было обнаружено, что проволока начинает быстро удлиняться, как только растягивающее напряжение в ней слегка превысит половину ее предела прочности; отсюда был сделан тот вывод, что трос нужно спроектировать таким образом, чтобы в наихудших возможных условиях растягивающее напряжение в нем не превышало $^1/_3$ предельного.

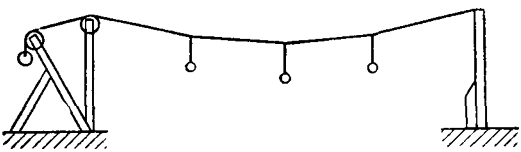


Рис. 53.

Следующей работой по теории висячих мостов был доклад Навье (см. стр. 93). Увиденные им в Англии мосты произвели на него большое впечатление, и он дал высокую оценку этому виду сооружений. В первой главе своего доклада после исторического обзора он описывает ряд вновь построенных в Англии мостов. Вторая глава посвящена решению различных задач по определению напряжений и деформаций в висячих мостах. Определив прогиб, производимый нагрузкой, равномерно распределенной по длине троса или пролета, Навье переходит к исследованию прогибов, возникающих под воздействием сосредоточенной силы, показывая, что влияние такой нагрузки сказывается тем меньше, чем крупнее сооружение и больше его вес. К аналогичному заключению приходит он и в результате исследования колебаний висячего моста, вызываемых ударами сосредоточенных нагрузок. На основе этого анализа Навье решает, что «успех обеспечен тем надежнее, чем крупнее сооружение и чем оно кажется более смелым». Последующее изучение конструкций висячих мостов подтвердило правильность этого мнения. Большие тяжелые висячие мосты оказались свободными от того недостатка чрезмерной гибкости, которым весьма часто страдали первые малопролетные конструкции этого типа. Они обнаружили свою способность нести не только автодорожный транспорт, но также и тяжелые железнодорожные поезда. В третьей части своей книги Навье приводит данные, относящиеся к его собственному проекту висячего моста через Сену в Париже, а также и к проекту акведука.

Во втором издании своего доклада, а также и в мемуаре Навье подробно излагает обстоятельства, которые привели в конечном итоге к разборке его висячего моста, прежде чем он был построен [1]). Небезынтересно отметить, что первый висячий мост, который удалось построить французским инженерам, был сооружен в России (1824—1826): это был мост через реку Фонтанку в Петербурге [2]).

21. Жан Виктор Понселе

Жан Виктор Понселе (Poncelet Jean Victor, 1788—1867) родился в бедной семье в Меце [3]). Исключительно успешное прохождение курса средней школы открыло ему возможность получить стипендию в лицее своего родного города. В 1807 г. он удачно выдержал конкурсные вступительные экзамены в Политехническую школу и стал учеником Монжа. Пройдя курс Политехнической школы (в 1810 г.), он поступил в Военно-инженерное училище в Меце [4]) и по его окончании был зачислен в 1812 г. в армию Наполеона. При отступлении из Москвы в ноябре 1812 г. он был взят в плен

[1]) Вес опорных контрфорсов, в которых закреплялись несущие тросы, оказался недостаточным, и во время постройки было обнаружено их скольжение. Об истории этого промаха в проекте Навье рассказано у Прони, см. Ann. ponts et chaussées, 1837, стр. 1.

[2]) Имеется в виду Пантелеймоновский цепной мост через Фонтанку близ Летнего сада под экипажную езду, отверстием около 37 *м*, построенный в 1824 г. по проекту инженеров В. К. Треттера и В. А. Христиановича (1803—1847), окончившего в 1823 г. Институт инженеров путей сообщения, ученика Ламе и Клапейрона, впоследствии профессора института по курсу строительного искусства. В том же году теми же инженерами был построен пешеходный висячий мост через Мойку, Почтамтский, отверстием 34 *м*. Описание этих мостов в книге: G. de Traitter «Description des ponts en chaines executées à St.-Petersbourg en 1824», S.-Petersbourg, 1825. В библиотеке Ленинградского института инж. ж.-д. транспорта (бывш. Ин-т инж. п. с.) сохранился альбом «Projets d'un ponts de chaines à construire sur la Moskva et d'un pont en fonte à construire sur la Jaouse à Moscou, présentés... par Majors Lamé et Clapeiron avec plans de details dessinés par le lieutenant Brun, St.-Petersbourg, 1825», содержащий переработанный в соответствии с докладом Навье о висячих мостах (1823) проект висячего моста через Москву-реку отверстием около 107 *м* и проект большого моста через Яузу. В связи с разработкой этих проектов Ламе и Клапейроном были опубликованы в Журнале п. с две статьи: «О висячих мостах», кн. 3, 1826, стр. 55—81 «О построении веревчатых многоугольников», кн. 6, 1826, стр. 38—51 и кн. 7, 1837, стр. 47—62. Первым висячим мостом в Петербурге был пешеходный цепной мост в Екатерингофском парке у домика Петра Первого 15 *м*, построенный в 1823 г. по проекту французского инженера, профессора Ин-та инж. п. с. П. П. Базена. Им же был составлен в 1825 г. неосуществленный проект висячего моста через Неву отверстием 306 *м* (Николаи Л. Ф., Кратк. истор. данные о развитии мостового дела в России, СПб., 1898). (*Прим. ред.*)

[3]) С биографией Понселе можно познакомиться у Бертрана: Bertrand J., Mémoires de l'Académie des sciences, т. 41, 1879.

[4]) Это училище в 1794 г. было переведено в Мец из Мезьера.

и вынужден был прожить почти целых два года в Саратове на Волге. Находясь в плену, лишенный научной литературы и всякой связи с западноевропейской культурой, но располагая в изобилии свободным временем для научных размышлений, Понселе разработал основные идеи новой геометрической науки—проективной геометрии.

После заключения мира Понселе вернулся во Францию и поступил на службу в арсенал в Меце. Там он имел достаточно свободного времени, чтобы продолжать свои научные исследования, результатом которых явилась вышедшая в свет в 1822 г. в Париже книга «Traité des propriétés projectives des figures» («Трактат о проективных свойствах геометрических фигур»). В то время интересы французских математиков были направлены главным образом на применения математического анализа к решению задач физики, и работа Понселе в области чистой геометрии не встретила должной оценки. Обескураженный Понселе прекратил исследования по математике и направил все свои силы на решение задач технической механики. Много важных вопросов в области механики возникало у него в связи с его службой в арсенале. Очень скоро у Понселе создалась репутация специалиста по этим вопросам, и в 1825 г. он был назначен профессором механики в военном училище Меца. В 1826 г. вышла в свет его книга «Cours de mécanique appliquée aux machines» («Курс механики в применении к машинам»), а в 1829 г. «Introduction à la mécanique industrielle» («Введение в промышленную механику»). Труды Понселе по механике быстро получили признание, и в 1834 г. он был избран в члены Академии наук. Он переехал в Париж, где некоторое время преподавал механику в Сорбонне.

Жан Виктор Понселе.

В 1848—1850 гг. он был руководителем Политехнической школы, а в 1852 г. вышел в отставку, имея в виду посвятить остаток жизни переработке и переизданию своих многочисленных работ по геометрии и прикладной механике.

Хотя славу Понселе принесли его работы в области геометрии и динамики, но весьма ценными достижениями, вошедшими в его курс «Промышленной механики», он обогатил и механику материалов. Та часть этой книги, которая посвящена сопротивлению материалов, представляет собой, может быть, самое полное для своего времени изложение науки о механических свойствах материалов. Понселе не только приводит результаты механических испытаний, но и подробно обсуждает практическое значение этих результатов для инженеров-проектировщиков. Чтобы наглядно показать результаты испытаний различных материалов на растяжение, он вводит диаграммы растяжения; такие диаграммы оказались чрезвычайно полезными для сравнения различных сортов железа и стали. Понселе показывает, как с помощью диаграмм можно назначать для того или иного материала рабочие (допускаемые) напряжения. Он проявляет чрезвычайную осторожность в выборе этих напряжений и редко рекомендует значения, превышающие ½ предела упругости материала. При этом он руководствуется данными своего изучения динамической прочности строительных материалов.

Томас Юнг первый показал (см. стр. 116), насколько значительным может быть динамический эффект нагрузки. Понселе, побуждаемый к тому современной ему практикой проектирования висячих мостов, входит в более подробное изучение динамического действия. Пользуясь диаграммами своих испытаний, он показывает, что до предела упругости железный брус способен поглотить лишь малую долю кинетической энергии и что в условиях удара легко могут быть вызваны остаточные деформации. Для элементов конструкций, подвергающихся ударам, он рекомендует применять сварочное железо, дающее при испытаниях на растяжение сравнительно большое удлинение и способное поглотить, не разрушаясь, большее количество кинетической энергии. Понселе доказывает аналитически, что внезапно приложенная нагрузка вызывает вдвое большее напряжение, чем та же самая нагрузка, приложенная статически (с постепенным возрастанием до полной величины). Он исследует влияние продольного удара на брус и вызываемые таким ударом продольные колебания. Он показывает также, что если пульсирующая сила действует на нагруженный брус, то амплитуда возникающих при этом вынужденных колебаний может значительно возрастать в условиях резонанса, и этим объясняет, почему маршировка солдат по висячему мосту может оказаться опасной. Мы находим у него любопытное истолкование экспериментов Савара по продольным колебаниям стержней и обоснование того факта, что большие амплитуды и большие напряжения могут быть вызваны малыми силами трений, действующими по поверхности.

В «Промышленной механике» Понселе мы находим высказывание о важности явления усталости металлов, возбуждаемого повторными циклами напряжения. Он указывает, что под чередующимся воздействием растяжения и сжатия самая совершенная пружина может разрушиться в результате усталости[1]).

Ряд новых исследований по механике материалов был выполнен Понселе в связи с его лекциями в Сорбонне. Эти лекции не были изданы в печатном виде, но сохранились в рукописи. Некоторые разделы ее были использованы Мореном в его «Сопротивлении материалов»[2]). Сен-Венан в третьем издании лекций Навье[3]) ссылается на неопубликованные лекции Понселе; д-р Шнузе, редактор немецкого перевода книги Понселе «Механика в применении к машинам», пополнил это издание текстом (§§ 220—270), содержащим материал из неопубликованного труда. Из этого источника мы узнаем, что Понселе надлежит приписать введение в формулы прогиба балок члена, учитывающего влияние поперечной силы. Для случая консоли длиной l прямоугольного поперечного сечения шириной b и высотой h, несущей равномерно распределенную нагрузку интенсивности q, он дает формулу максимального прогиба

$$f = \frac{3}{2} \frac{ql^4}{Ebh^3} \left(1 + \frac{9}{8} \frac{h^2}{l^2}\right),$$

указывая, что второй член в скобках, представляющий собой влияние поперечной силы, имеет практическое значение лишь для сравнительно коротких балок.

Обсуждая вопрос о выборе безопасных напряжений, Понселе высказывается в пользу теории наибольшей деформации, утверждая, что потеря несущей способности наступает, когда наибольшая деформация достигает некоторого определенного предела. Так, в частности, условие разрушения при сжатии хрупких материалов, таких, как камень или чугун, определяется поперечным расширением. Теории наибольшей деформации неизменно придерживался впоследствии Сен-Венан, и она встретила широкое признание на материке Европы, в то время как английские авторы продолжали основывать свои расчеты на наибольшем нормальном напряжении.

Исследования Понселе охватили также и вопросы теории сооружений. Решая задачу об устойчивости подпорных стен, он предложил графический способ определения наибольшего давления на стену[4]). В задаче о распределении напряжений в арках он первый указал, что ее рациональное решение может быть достигнуто лишь в том случае, если арку рассматривать как упругий кривой брус (см. стр. 386).

---

[1]) См. стр. 317 третьего издания «Introduction à la mécanique industrielle», Paris, 1870.

[2]) M o r i n, Résistance des matériaux, 1853, §§ 213—219.

[3]) N a v i e r, Resumé des leçons..., 3-е изд., стр. 374, 381, 512.

[4]) См. его Mémoire sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations. Mém. officier génie, 13, 1840.

22. Томас Юнг

Томас Юнг[1]) (Thomas Young, 1773—1829) родился в квакерской семье в Мильвертоне (Сомерсет, Англия). В детские годы он обнаружил замечательные способности к учебным занятиям, в особенности же к изучению языков и математики. Еще не достигнув и 14 лет, он знал уже не только современные языки, но также латинский, греческий, арабский, персидский и еврейский. С 1787 до 1792 г. он зарабатывал себе на жизнь, давая уроки в качестве домашнего учителя в одной богатой семье. Это положение оставляло ему достаточно свободного времени, чтобы продолжать свои занятия, и он упорно работал в области философии, а также математики. В 1792 г. Юнг начал изучать медицину сначала в Лондонском и Эдинбургском, а затем в Гёттингенском университетах, где в 1796 г. он получил докторскую степень.

Томас Юнг.

По возвращении в Англию в 1797 г. он был допущен в качестве вольнослушателя в колледж Эммануэля в Кембридже, где и продолжал некоторое время свои занятия. Человек, хорошо знавший Юнга в ту пору его жизни, вспоминает следующее[2]). «Представляя Юнга его будущим руководителям, магистр заявил шутя: „Я привел вам ученика, способного читать лекции своим руководителям“. Но Юнг, однако, не пытался этого делать, и в отношениях снисходительность была взаимной; к нему никогда не предъявлялось требование выполнять общие служебные обязанности по колледжу... Взгляды, темы изучения, методы и познания наших математиков были тогда, как и ныне, весьма различными, и Юнг, который стоял, конечно, выше окружавших его, замечал их недостатки. Надо думать, что он смотрел на их науку свысока и не испытывал желания завязывать знакомства с кем-либо из наших философов... Он никогда не вступал в беседу, не навязывал своих богатых познаний; но если к нему обращались по какому-либо из труднейших вопросов, он тотчас же, не задумываясь, отвечал в самом решительном тоне, как будто речь шла о самом пу-

[1]) Весьма интересная биография Томаса Юнга была написана Пикоком: Peacock G., London, 1855.

[2]) См. только что упомянутую книгу Пикока.

стом деле; этой манерой разговаривать он отличался от всех других способных людей, с которыми мне когда-либо приходилось встречаться. Его ответы, казалось, не стоили ему никаких усилий, и он как будто не усматривал никакой заслуги в том, что умел их давать. Он не притязал на утверждение какого-либо своего превосходства и не позволял догадываться о том, что он владел им; говорил он при этом таким тоном, как если бы для него было само собой разумеющимся, что мы все понимаем то, о чем он говорит, так же хорошо, как и он сам... Его язык был правильный, речь быстрая, его фразы, хотя и без всякой аффектации, никогде не оставались незаконченными. Но слова его не были повседневными, а аранжировка его идей редко сходилась с той, которая была привычной для его собеседников. Для передачи другим каких-либо научных знаний он был поэтому приспособлен хуже некоторых других людей, которых мне приходилось знать ... Трудно сказать, как он работал: читал он мало и, хотя у него был свободный доступ в библиотеки колледжа и университета, его редко можно было там видеть. На полу у него не громоздились кучи книг, на его столе не было разбросано бумаг—все видимые признаки изобличали в обитателе его комнаты человека праздного... Он редко выражал свое мнение и никогда не вызывался высказывать его по собственному почину. Какая-либо философская истина, трудное математическое вычисление, остроумный прибор или новое изобретение захватывали его внимание, но он никогда не высказывался ни по вопросам морали, ни по метафизике или религии».

Весьма рано Юнг начал вести самостоятельную научную работу. Еще в 1793 г. он представил в Королевское общество свою теорию зрения. В Кембридже (1798) он заинтересовался явлением звука. По поводу этой работы он пишет: «Я изучал не теорию духовых инструментов, а теорию воздуха и провел новые, как мне думается, наблюдения над гармониками. Некоторые обстоятельства, остававшиеся неизвестными английским математикам и открытые, как я себе это представлял, впервые мною, оказались, как я это потом обнаружил, открытыми и доказанными иностранными математиками; действительно, Британия сильно отстает от своих соседей во многих областях математики: если бы я серьезно обратился к ним, я стал бы учеником Французской или Немецкой школы; но расстояния слишком велики и не доступны для меня». Научный труд «Начала и опыты, касающиеся звука и света» («Outlines and experiments respecting sound and light») был написан в Кембридже летом 1799 г. и в январе следующего года был прочитан в Королевском обществе в Лондоне. В 1801 г. Юнг сделал свое знаменитое открытие интерференции света.

Его обширная эрудиция в области физических наук получила признание, выразившееся в том, что в 1802 г. он был избран в члены Королевского общества. В том же году он был утвержден в должности профессора натуральной философии в Королевском институте. Этот институт был основан в 1799 г. «для распространения знаний и облегчения всеобщего и быстрого введения новых полезных механических изобретений и усовершенствований, а также для обучения с помощью регулярных курсов лекций по философии и экспериментированию, для усовершенствования ремесел и производства путем использования новых открытий науки, а также для развития средств, создающих комфорт и удобства жизни». В качестве лектора Королевского института Юнг потерпел неудачу; его изложение страдало обычно чрезмерной сжатостью., и он, по-видимому, был не способен разъяснять и задерживаться на таких вопросах, которые представляли особые трудности для понимания слушателей. В 1803 г. он сложил с себя профессорские обязанности, но продолжал интересоваться натуральной философией и подготовил к изданию свой курс лекций по этому предмету. По этому курсу можно познакомиться со всем самым существенным из того, что было внесено Юнгом в механику материалов[1]).

В главе о пассивной прочности и трении (т. I, стр. 136) рассматриваются основные типы деформирования призматических брусьев. В исследование растяжения и сжатия впервые вводится понятие модуля упругости. Определение этой величины отличается от того, которым мы пользуемся теперь, устанавливая смысл модуля Юнга. Его формулировка гласит: «модуль упругости какого-либо вещества представляет собой столбик этого вещества, способный произвести давление на свое основание, которое так же относится к весу, создающему некоторую степень сжатия, как длина столбика к уменьшению его длины». Юнг применяет также такие выражения, как «вес модуля», «высота модуля», указывая, что высота модуля для данного материала не зависит от площади поперечного сечения. Вес модуля равен произведению величины, которую мы называем теперь модулем Юнга, на площадь поперечного сечения бруса[2]).

Описывая опыты на растяжение и сжатие брусьев, Юнг обращает внимание своих читателей на тот факт, что продольные деформации всегда сопровождаются некоторым изменением поперечных размеров. Вводя закон Гука, он обращает внимание на то, что этот закон сохраняет силу лишь до известного предела, за которым часть деформации получается неупругой, составляя ее необратимую, остаточную долю.

[1]) Young Thomas, A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts, 2 тома, London, 1807. Самая интересная часть материала, относящаяся к деформации балок, не включена в новое издание, вышедшее под редакцией Келлэнда (Kelland).

[2]) Юнг определил величину модуля стали из наблюдения частоты вибраций камертона и нашел его равным $29\cdot10^6$ фунт/дюйм^2$=2\cdot10^6$ *кг/см*^{2}. См. его «Natural Philosophy», т. 2, стр. 86.

В отношении сдвигающих сил Юнг замечает, что хотя непосредственные испытания для установления зависимости между сдвигающей силой и производимой ею деформацией не производились, однако «из свойств скручиваемых материалов можно, тем не менее, заключить, что эта сила изменяется в простом отношении к расстояниям частиц от их естественного положения и должна быть поэтому пропорциональна величине поверхности, к которой она приложена». При кручении круглых стержней, как указывает Юнг, приложенный крутящий момент уравновешивается главным образом касательными напряжениями, действующими в плоскостях поперечных сечений и пропорциональными расстоянию от оси стержня и углу закручивания. Он указывает также, что дополнительное сопротивление крутящему моменту, пропорциональное кубу угла закручивания, обусловливается продольными напряжениями в волокнах, искривляющихся по винтовым линиям. По этой причине наружные волокна окажутся растянутыми, внутренние—сжатыми. Далее, стержень подвергнется при кручении укорочению, «в 4 раза меньшему той величины, на которую удлинились бы наружные волокна, если бы длина не уменьшилась»[1]).

Излагая теорию изгиба консоли и простой балки, Юнг приводит важнейшие результаты, относящиеся к прогибам и прочности, не давая их вывода. Исследование поперечного выпучивания сжатых колонн сопровождается у него следующим любопытным замечанием: «Во всех проведенных до сего времени опытах с изгибом колонн и балок под воздействием продольных сил можно заметить большие неправильности, и нет сомнения, что в некоторых случаях они обусловлены трудностью приложения в опытах силы по торцам точно по оси, в других же—местными неоднородностями материала, волокна которого очень часто располагаются так, что образуют колонну не прямую, а искривленную уже в самом начале».

По вопросу о неупругой деформации Юнг делает важное утверждение: «Остаточное изменение формы... снижает прочность материала с точки зрения практических применений почти в такой же степени, как и излом, поскольку, как общее правило, сила, способная произвести такое изменение формы, достаточна, чтобы при незначительном росте увеличить это изменение формы до наступления излома». Как мы видели, Навье пришел к тому же самому заключению и, основываясь на нем, рекомендовал принимать для рабочих напряжений нормы, значительно более низкие, чем предел упругости материала.

---

[1]) Истинная величина укорочения вдвое больше указанной Юнгом. См. Тимошенко С. П., Сопротивление материалов, т. 2, стр. 270, Пер. Н. А. Шошина, ОГИЗ, 1946.

В заключение Юнг приводит любопытные соображения о разрушении упругих тел ударом. В этом случае учитывать надлежит не вес ударяющего тела, а его кинетическую энергию. «Полагая, что направление удара горизонтально, так что его эффект не может быть усилен влиянием силы тяжести», Юнг приходит к выводу, что «если давление веса в 100 фунтов (приложенное статически) разрывает данный образец, вызвав в нем предварительно удлинение в 1 дюйм, то тот же самый вес привел бы к разрыву в результате удара со скоростью, которую приобретает тяжелое тело, падая с высоты ½ дюйма, а вес в 1 фунт разорвал бы его, упав с высоты 50 дюймов». Юнг констатирует, что при воздействии на призматический брус продольной динамической нагрузки его упругость[1]) «пропорциональна его длине, поскольку такое же растяжение более длинного волокна производит и большее удлинение». Далее, он находит, что «здесь имеется, однако, предел, дальше которого скорость ударяющего тела не может быть увеличена, не превышая упругость ударяющего тела и не приводя к его разрушению, сколь бы малыми ни были размеры первого тела, причем этот предел зависит от инерции частей второго тела, которой недопустимо пренебрегать, когда эти части приведены в состояние движения с большой скоростью». Обозначая скорость, с которой волна сжатия перемещается вдоль бруса, через V и скорость ударяющего тела через v, он заключает, что относительное сжатие, произведенное на конце бруса в момент удара, равно v/V и что предельное значение для скорости v получится, если отношение v/V приравнять тому относительному укорочению, при котором материал подвергшегося удару бруса испытывает разрыв при статических испытаниях.

Исследуя влияние удара на балку прямоугольного сечения, Юнг устанавливает, что при данном наибольшем напряжении изгиба, возникающем в результате удара, количество аккумулированной в балке энергии пропорционально ее объему. Объясняется это тем, что наибольшее значение силы P, с которой ударяющее тело воздействует на балку, и прогиб δ в точке удара определяются формулами

$$P = k\frac{bh^2}{l},$$

$$\delta = k_1\frac{Pl^3}{bh^3},$$

где b—ширина, h—высота сечения, l—длина балки, k и k_1—постоянные, зависящие от модуля материала и от принятой величины наибольшего напряжения. Если эти значения подставить

[1]) Упругость понимается в смысле податливости деформации. (*Прим. перев.*)

в выражение для энергии деформации U, то мы получим:

$$U=\frac{P\delta}{2}=\frac{k^2k_1}{2}bhl,$$

что и доказывает вышеприведенное утверждение.

Мы видим, что Юнг сделал много для научного построения теории сопротивления материалов, введя в нее понятие модуля упругости при растяжении и сжатии. Он оказался, к тому же, основоположником изучения напряжений, вызываемых ударом, и указал метод вычисления их для идеально упругих материалов, следующих закону Гука до разрушения.

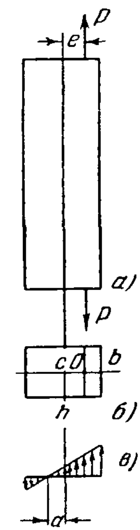


Рис. 54.

Ряд более сложных задач по изгибу брусьев разбирается в главе «О равновесии и прочности упругих материалов» во II томе «Натуральной философии». Нижеследующие, относящиеся к этой главе замечания приводятся в «Истории теории упругости» Тодхентера и Пирсона. «Это ряд теорем, страдающих в отдельных случаях старой ошибкой в решении вопроса о положении нейтральной поверхности... Весь этот раздел представляется мне весьма темным, как и вообще бóльшая часть произведений этого выдающегося автора; в длинном ряду его разнообразных достижений в науках и языках не оказалось, к несчастью, места для способности выражаться ясно обыкновенным языком математиков. Формулы этого раздела были, вероятно, в своей значительной части новыми для времени своего появления, но они имели мало шансов обратить на себя внимание по причине той непривлекательной формы, в которой они были представлены». Нужно согласиться с тем, что эта глава в книге Юнга читается с трудом. Однако при всем том для ряда важных задач в ней даны правильные и новые для его современников решения. Мы находим, например, здесь впервые решение задачи о внецентренном растяжении или сжатии прямоугольного бруса. Полагая, что распределение напряжений в нем может быть представлено двумя треугольниками, как показано на рис. 54, *в*, Юнг определяет положение нейтральной линии из условия, что равнодействующая этих напряжений должна проходить через точку O приложения внешней силы (рис. 54, *б*). Это дает:

$$a=\frac{h^2}{12e},$$

где e—эксцентриситет точки приложения силы. Если $e=h/6$, то $a=h/2$. Напряжения распределяются по треугольнику и наибольшее напряжение получается вдвое бо́льшим, чем в случае центрального приложения нагрузки. В исследовании Юнга выводится также и правильное значение радиуса той окружности, по которой изогнется ось бруса по рис. 54, *а* в случае весьма малых прогибов.

Следующей своей задачей Юнг ставит исследование изгиба сжатой призматической колонны, имеющей небольшую начальную кривизну. Принимая, что начальную искривленную ось можно представить полуволной синусоиды $\delta_0 \sin(\pi x/l)$, он находит, что прогиб посредине высоты в результате приложения сжимающей силы P должен получиться равным

$$\delta = \frac{\delta_0}{1-(Pl^2/EI\pi^2)}.$$

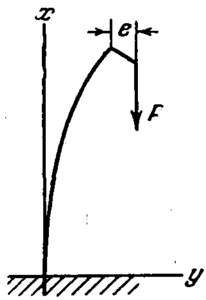


Рис. 55.

Отсюда он приходит к выводу, что если $P = EI\pi^2/l^2$, то «прогиб принимает бесконечно большое значение, какова бы ни была величина δ_0, так что сила преодолеет сопротивление балки или же, по крайней мере, изогнет ее столь сильно, что этим нарушит действие всей системы приложенных сил». Здесь мы имеем первый вывод уравнения колонны при наличии начальной кривизны ее оси. Пользуясь формулой Эйлера для определения размеров поперечных сечений колонны, Юнг указывает, что она применима лишь к гибким колоннам, и приводит некоторые предельные значения для отношения длины колонны к поперечному ее размеру. При меньших значениях этого отношения колонна разрушается не столько в результате выпучивания, сколько вследствие раздавливания материала.

Если гибкая колонна защемлена одним концом и свободна на другом, вертикальная же сила приложена внецентренно (рис. 55), то прогиб y, как показывает Юнг, определяется из формулы

$$y = \frac{e(1-\cos \gamma x)}{\cos pe}.$$

Здесь e означает эксцентриситет, $p = \sqrt{p/EI}$, а x отсчитывается от защемленного конца. В этом вопросе Юнг опередил Навье[1]).

Исследуя продольный изгиб колонн переменного поперечного сечения, Юнг показывает, что если одно из измерений поперечного сечения колонны постоянно, другое же (ширина) изменяется по длине колонны, как ординаты y круговой арки (рис. 56, *б*), то ось колонны изогнется по дуге окружности (рис. 56, *а*).

[1]) Навье сообщил свое решение в мемуаре, представленном в Академию наук в 1819 г. См. «Историю» Сен-Венана, стр. 118

Рассматривая продольный изгиб колонны, составленной из двух треугольных призм (рис. 57), и принимая, что прогиб при этом таков, что радиус кривизны в середине равен половине длины, Юнг устанавливает, что изогнутая ось будет циклоидой. Это следует из уравнения

$$\frac{Py}{EI} = \frac{1}{\rho}. \tag{a}$$

Моменты инерции I поперечных сечений пропорциональны s^3, ординаты же y циклоиды пропорциональны s^2, где s определяется

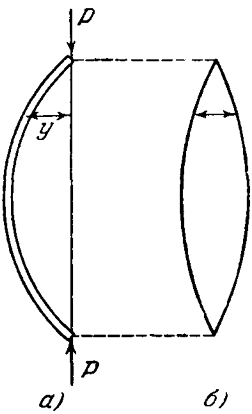


Рис. 56.

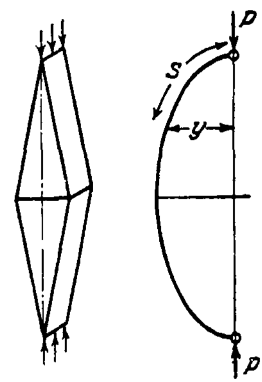


Рис. 57.

из рис. 57. Поэтому левая часть уравнения (а) имеет размерность числа, разделенного на длину s. Поскольку для циклоиды $\rho = s$, мы всегда можем найти для P такое значение, чтобы уравнение (а) удовлетворялось.

В задаче о наивыгоднейшей форме балки прямоугольного сечения, вырезанной из заданного кругового цилиндра, Юнг находит: «самой жесткой балкой будет та, высота которой относится к ширине, как $\sqrt{3} : 1$, самой прочной—та, у которой это отношение равно $\sqrt{2} : 1$, но наибольшей упругостью[1]) будет обладать та, у которой высота и ширина равны». Это следует из того, что при данном пролете жесткость балки определяется величиной момента инерции ее поперечного сечения, прочность—моментом сопротивления, а упругость—площадью поперечного сечения. Аналогично он решает задачу и для тонкостенных круглых труб. Юнг утверждает: «Положим, что труба весьма малой

[1]) Упругость в смысле податливости деформации. (*Прим. перев.*)

толщины заменяется подобной же трубой большего диаметра, но с сохранением той же длины; тогда, при том же самом количестве материала, прочность трубы возрастет в том же отношении, что и диаметр, жесткость—пропорционально квадрату диаметра, упругость же останется прежней».

Из этих рассуждений мы убеждаемся в том, что глава из второго тома «Натуральной философии», посвященная механике материалов, заключает в себе правильно обоснованные решения для ряда серьезных проблем сопротивления материалов, совершенно новых во времена Юнга. Эта работа не обратила, однако, на себя внимания в широких инженерных кругах по той причине, что изложение автора было всегда сжато и только в редких случаях ясно. Прежде чем перейти к следующей теме, приведем еще некоторые оценки, которыми была удостоена «Натуральная философия» Юнга. Они вышли из-под пера автора биографии лорда Рэлея[1]). В 1892 г. лорд Рэлей был назначен профессором Королевского института, и его лекции «следовали довольно близко тому направлению, которое было намечено Томасом Юнгом, занимавшим ту же кафедру почти за сто лет до того, при самом возникновении Королевского института. Текст лекций Юнга вошел целиком в его „Натуральную философию“, вышедшую в свет в 1807 г., а многие из изображенных в этом труде демонстрационных приборов сохранились в институтском музее,—они были оттуда извлечены и вновь нашли применение... Рэлей изучил лекции Юнга и нашел в них целую сокровищницу интересных материалов; карандашные пометки на использованном им экземпляре свидетельствуют о той тщательности, с которой он следил за книгой; в ней, а также в других произведениях того же автора он открыл ряд ценных, но затем забытых начинаний. Одним из самых поразительных мест была оценка Юнгом величины молекулы; он указал для диаметра молекулы величину, лежащую между двумя и десятью тысячными одной миллионной доли дюйма. Это—удивительное предвосхищение современного знания, сделанное более чем на 50 лет раньше подобной же оценки размеров, предложенной Кельвином. До тех пор, пока Рэлей не обратил на это определение Юнга внимания, оно оставалось совершенно забытым, если предположить, что оно вообще когда-либо было замечено, чему, впрочем, доказательств не имеется».

Юнг обнаружил свои необычайные способности не только в решении чисто научных проблем, но также и в преодолении трудностей инженерной практики. Им был представлен, например, в Адмиралтейский совет доклад с предложением о введении косых добавочных тимберсов между шпангоутами, а также других

---

[1]) Baron R a y l e i g h, четвертый (сын лорда Рэлея), Life of Lord Rayleigh, стр. 234, 1924.

изменений в конструкции судов[1]). Он рассматривает корпус судна как балку, вводит некоторые допущения относительно распределения давления и формы волн и на основе этого вычисляет для отдельных сечений значения поперечных сил и изгибающих моментов, указывая также способ вычисления прогиба корабля. Он поясняет, что жесткость корабля при изгибе зависит в значительной степени от связи между отдельными элементами конструкции, ссылаясь на следующие соображения: «Каретную рессору, состоящую из 10 одинаковых полос, можно было бы сделать в 10 раз прочнее, если бы эти полосы были соединены в одну массу; она стала бы при этом одновременно и в 100 раз более жесткой, прогибаясь всего лишь на $^1/_{100}$ дюйма под тем же самым весом, который в ее обычном состоянии прогибает ее на целый дюйм, хотя это соединение полос в одно целое и не приносит никакого выигрыша в способности рессоры сопротивляться весьма быстрому движению, которую я в другом случае позволил себе назвать упругостью. Что касается практической реализации этих теоретических положений, то соединить несколько параллельных планок в одно целое скобами, схватывающими их под прямыми углами так крепко, чтобы исключить какое бы то ни было скольжение между ними, представляется, по-видимому, чрезвычайно трудным делом, и потому достаточно прочная косая (диагональная) обвязка, если бы даже она и не усилила несущей способности отдельных планок, могла бы все же во многих случаях оказаться выгодной, уменьшая степень, до которой прогнется вся рессора, прежде чем лопнет». Опираясь на эти доводы, Юнг высказывается за введение диагональных связей в конструкции деревянных судов. Насколько известно, этот его доклад представляет собой первую попытку применения теоретического анализа в проектировании конструкций судов.

Закончив обзор научного творчества Юнга в области сопротивления материалов, мы сможем теперь, вероятно, оценить замечание лорда Рэлея[2]): «По разным причинам Юнгу не посчастливилось встретить должное признание со стороны своих современников. Научные позиции, уже завоеванные им, не раз потом приходилось с большой затратой интеллектуальной энергии завоевывать вновь его преемникам».

23. Состояние науки о сопротивлении материалов в Англии в первой трети XIX века

В течение первых трех десятилетий XIX века в Англии еще не было учебных заведений, которые могли бы сравниться по своему

[1]) Phil. trans, 1814, стр. 303.
[2]) Lord Rayleigh, Collected papers. т. 1, стр. 190.

научному уровню с французскими: Политехнической школой или Школой мостов и дорог. Инженеры не получали широкого общего образования, а качество принятых ими руководств по сопротивлению материалов было значительно ниже, чем во Франции. Характеризуя эти руководства, английский историк теории упругости Тодхентер заявляет: «Ничто не указывало с бо́льшей ясностью на глубину того падения, которое испытали английские познания по механике в начале этого столетия» [1]). Чтобы дать представление о типичном английском авторе той эпохи, Тодхентер цитирует одного из них—Робинсона [2]), критикующего в своей «Системе механической философии» («A system of mechanical philosophy») Эйлера: «В старых мемуарах Петербургской Академии за 1778 г. помещена диссертация Эйлера на нашу тему, но ограничивающаяся частным вопросом деформирования колонн и учитывающая их изгиб. Господин Фусс [3]) изложил тот же вопрос в применении к строительному искусству в следующем томе. Но в этих статьях мало что можно найти, кроме сухих математических выкладок, основывающихся на допущениях, в высшей степени произвольных (мягко выражаясь). Важнейшее последствие сжатия полностью обойдено, как это мы сейчас увидим. Наши познания о механизме сцепления пока еще слишком несовершенны для того, чтобы дать нам право на уверенное применение...» и далее: «Мы резки в наших высказываниях, поскольку его теория сопротивления колонн представляет собой один из нагляднейших примеров безответственности в научных трудах и поскольку его последователи в Петербургской Академии, как Фусс, Ленселл и другие, принимают его выводы и лишь повторяют его слова». Подобного рода критика, как замечает Тодхентер, не имеет никакого веса в устах автора, который на ближайшей же странице помещает нейтральную ось на вогнутой поверхности балки, подвергающейся изгибу... Не кто иной, как именно Робинсон увековечил (в английских учебниках) эту ошибку, исправленную еще Кулоном.

Тем не менее, хотя теоретическая научная работа по сопротивлению материалов и стояла в Англии на таком низком уровне, британские инженеры решили много важных технических проблем. В отношении промышленного развития страна стояла впереди других, а введение таких материалов, как чугун и сварочное

---

[1]) См. его «History», т. 1, стр. 88.

[2]) См. сноску 1 на стр. 29

[3]) Фусс Николай Иванович (1755—1825), уроженец Базеля, с 1772 г. живший в России, с 1785 г.—академик и непременный секретарь Петербургской Академии наук, один из ближайших учеников и сотрудников Эйлера. Биографию см. «Сев. пчела», № 3, 1826. Ему принадлежит ряд работ по математическому анализу и его приложениям к некоторым задачам об изгибе стержней. (*Прим. ред.*)

железо, в строительство и машиностроение поставило много новых задач и требовало исследования механических свойств этих новых материалов. В ответ на эти запросы времени была выполнена большая экспериментальная работа, подытоженные результаты которой нашли применение не только в Англии, но и во Франции.

Питером Барлоу (Peter Barlow, 1776—1862) была написана книга «Исследование прочности и напряжений древесины» («An essay on the strength and stress of timber»), вышедшая в свет первым изданием в 1817 г. Она приобрела широкую популярность в Англии и многократно переиздавалась[1]). В начале своей книги Барлоу излагает историю сопротивления материалов, пользуясь сведениями, почерпнутыми из книги Жирара (см. стр. 16); но в то время как Жирар уделяет в своей истории много места исследованиям упругих линий Эйлера, Барлоу держится того мнения, что «инструменты анализа» Эйлера «слишком деликатны для того, чтобы их можно было с успехом применить к материалам, над которыми он работал; так что, хотя они и предоставляют в распоряжение исследователя безграничные возможности анализа с самой общей точки зрения и раскрывают превосходные таланты автора, они, к сожалению, дают лишь мало, весьма мало, полезной информации». Излагая теорию изгиба, Барлоу впадает в ту же самую ошибку, которую допустил и Дюло (стр. 101), утверждая, что нейтральная ось делит поперечное сечение балки таким образом, что момент относительно этой линии всех растягивающих усилий равен моменту сжимающих усилий. Эта ошибка исправлена в книге, начиная лишь с издания 1837 г. Барлоу приписывает правильное определение положения нейтральной линии Ходкинсону. Ему, по-видимому, остался неизвестным тот факт, что Кулон внес это исправление еще пятьюдесятью годами раньше.

О Барлоу Тодхентер отзывается так: «Как теоретик он являет собой другой разительный пример того недостатка в ясном мышлении, в научной точности и в знакомстве с научными достижениями других стран, благодаря которому изучение английской литературы по практической механике за первую половину текущего века превратилось для историка в удручающую, если не в бесплодную повинность». Тодхентер, надо полагать, был слишком суров в такой оценке, особенно, если учесть то обстоятельство, что современники Барлоу, инженеры такого ранга, как Дюло и Навье, впадали в подобные же ошибки при определении нейтральной оси.

---

[1]) Шестое издание этой книги, подготовленное двумя сыновьями Питера Барлоу, вышло в 1867 г. Оно представляет большой интерес с точки зрения истории нашей науки, поскольку в нем содержится биография Питера Барлоу, а в приложении дается работа Уиллиса «Исследование о воздействиях, производимых подвижными нагрузками на упругие брусья».

Книга его не вносит ничего нового в теорию сопротивления материалов, но в ней приводятся описания многочисленных опытов, выполненных на протяжении первой половины XIX века и представляющих ныне исторический интерес. Так, например, мы находим там отчет об испытаниях железной проволоки, проведенных Барлоу для Тельфорда, готовившегося тогда к сооружению Рэнкорнского висячего моста. Весьма интересны также опыты автора с железными рельсами различных профилей. Впервые в этих опытах были измерены прогибы рельсов под быстро движущимися нагрузками, а полученные значения были сопоставлены с результатами статических испытаний. В последнем издании книги Барлоу (1867) упоминается о важных усталостных испытаниях двутавровых клепаных балок, выполненных Фейрбейрном (Fairbairn); сюда же включен и отчет Уиллиса (Willis) о динамическом воздействии подвижной нагрузки на балку. На этих экспериментальных работах мы остановимся в дальнейшем.

Другим английским инженером, книги которого пользовались широкой популярностью в первой половине XIX века, был Томас Тредгольд (Th. Tredgold, 1788—1829). Его работа «The elementary principles of carpentry» (1820) («Элементарные начала строительного искусства») содержит главу, посвященную сопротивлению материалов. Здесь можно найти мало нового; все теоретические результаты имеются уже в «Лекциях» Томаса Юнга (см. стр. 114). В другой книге Тредгольда «A practical essay on the strength of cast iron (1822) («Практическое исследование прочности чугуна») приводятся результаты экспериментов автора и дается много практических правил для инженеров, проектирующих конструкции из чугуна. Тредгольд, по-видимому, первый ввел формулу для вычисления безопасных напряжений в колоннах (см. стр. 209). За период 1800—1833 гг. применение чугуна в строительном деле быстро возрастало, и книга Тредгольда нашла широкое применение среди инженеров-практиков. Она была переведена на французский, итальянский и немецкий языки.

24. Другие крупные работы по сопротивлению материалов, проведенные за этот же период в европейских странах

Германии к научной работе по сопротивлению материалов приступили поздно, лишь в начале XIX века, и первый существенный вклад в эту науку был сделан Ф. И. Герстнером (Fr. J. Gerstner, 1756—1832), кончившим Пражский университет в 1777 г. После нескольких лет работы в качестве инженера-практика Герстнер занял должность ассистента при астрономической обсерватории своего старого университета. В 1789 г. он стал профессором математики. Занимаясь педагогической работой, он продолжал интересоваться практическими применениями науки в технике и задался целью организовать в Праге инженерное учебное заведение. В 1806 г. там был открыт «Чешский технический институт» и Герстнер принимал в его работе активное участие до 1832 г. в качестве профессора механики и директора. Основной труд Герстнера по механике получил воплощение в его трехтомной книге «Handbuch der Mechanik» (1831) («Руководство по механике»). Третья глава первого тома этой книги посвящена сопротивлению материалов. Излагая теорию растяжения и сжатия, Герстнер приводит результаты своей экспериментальной работы по растяжению струны фортепиано. Он находит, что зависимость между растягивающей силой P и удлинением δ имеет вид

$$P = a\delta - b\delta^2, \tag{a}$$

где a и b—постоянные величины. При малых удлинениях вторым членом в правой части уравнения (а) можно пренебречь, и мы приходим тогда к закону Гука.

Герстнер изучил также влияние остаточной деформации на свойства образцов, подвергнутых испытанию на растяжение. Он показал, что если струна или проволока растянута и в ней возникла некоторая остаточная деформация, после чего совершена разгрузка, то она будет следовать закону Гука и при вторичном загружении, если величина этой вторичной загрузки не превзойдет той, при которой возникла первичная остаточная деформация. Лишь при более высоких нагрузках будет отмечено отклонение от прямолинейного закона деформирования. Имея в виду это обстоятельство, Герстнер рекомендует проволоку, предназначенную для использования в висячих мостах, предварительно растягивать до известного предела.

Ценную работу провел Герстнер и в других областях инженерной механики. Особую известность получила его теория трохоидальных волн на водной поверхности [1]).

Другим немецким инженером, оказавшим содействие развитию научных знаний в инженерной механике в начале XIX века, был Иоганн А. Эйтельвайн (Ioh. A. Eytelwein, 1764—1848). Мальчиком 15 лет он стал бомбардиром артиллерийского полка в Берлине. В свободное время он изучал математику и инженерную науку и в 1790 г. оказался способным выдержать экзамен на степень инженера (архитектора). Очень скоро он приобрел репутацию инженера с широкими теоретическими познаниями. В 1793 г. вышла в свет его книга «Aufgaben grösstentheils aus der angewandten Mathematik» («Задачи, главным образом из прикладной математики»); в ней разбирались многочисленные вопросы, пред-

---

[1]) См. Gerstner F. J., Theorie der Wellen, Prag, 1804.

ставляющие практическое значение в строительном деле и в машиностроении. В 1799 г. он вместе с несколькими другими инженерами организовал в Берлине Строительную академию, стал директором этого учреждения и профессором инженерной механики.

Курс Эйтельвайна «Handbuch der Mechanik fester Körper» («Руководство по механике твердых тел») вышел в свет в 1800 г., а его «Handbuch der Statik fester Körper» («Руководство по статике твердых тел») появилось в 1808 г. В последней работе излагаются вопросы сопротивления материалов и теории сооружений. Оценивая раздел сопротивления материалов, Тодхентер в своей «Истории» отмечает, что «в нем нет ничего оригинального, но за автором следует признать превосходство над Бэнксом и Грэгори [1]), выражающееся в том, что он стоит на уровне математических знаний своего времени». В области теории сооружений Эйтельвайн вносит кое-какие дополнения в теорию арок, а также в теорию подпорных стен. Он разработал также практически полезный способ определения допускаемой нагрузки на сваи.

После наполеоновских войн в Германии отмечается усиленное движение за развитие промышленности во всех ее разнообразных отраслях. Это требовало значительных улучшений в инженерном образовании, в связи с чем было основано несколько технических учебных заведений.

В 1815 г. под руководством Иоганна Иозефа Прехтля (Ioh. Ios. Prechtl, 1778—1854) открылся Политехнический институт в Вене. В 1821 г. был организован ремесленный институт в Берлине. За этим последовало основание политехнических институтов в Карлсруэ (1825), Мюнхене (1827), Дрездене (1828), Ганновере (1831), Штуттгарте (1840). Эти новые технические учебные заведения оказали сильное воздействие на развитие в Германии промышленности, а вместе с тем и инженерных наук вообще. Ни в какой другой стране не установилось такого тесного контакта между промышленностью и техническим образованием, как в Германии, и нет сомнения, что именно эта близость, стимулировав в значительной степени промышленное развитие страны, в то же время помогла ей занять к концу XIX века видное место в инженерной науке.

В разработку науки о сопротивлении материалов силами английских, немецких и французских ученых вскоре включились и шведские. Черной металлургии и железообрабатывающей промышленности принадлежит в промышленной жизни этой страны ведущая роль, почему первые экспериментальные исследования здесь и имели своим объектом именно этот металл. В авангарде этой научной деятельности мы видим шведского физика П. Ла-

---

[1]) Современные ему английские авторы руководств по инженерной механике.

герхьелма (P. Lagerhjelm)[1]). Он был знаком с теоретическими трудами Томаса Юнга, Дюло и Эйтельвайна и руководствовался в своей исследовательской работе не только практическими, но также и теоретическими соображениями. Созданная по его проекту Броллингом машина для испытаний на растяжение оказалась весьма удачной, и впоследствии подобная же машина была построена Ламе для испытаний, организованных им в Петербурге (см. стр. 140). Испытания Лагерхьелма показали, что модуль упругости при растяжении сохраняет почти одинаковое значение для всех сортов железа и не зависит от таких технологических процессов, как прокатка и ковка, а также от различных типов термической обработки, но что в то же время предел упругости и предел прочности могут быть резко изменены этими же процессами. Он установил, что предел прочности железа обычно пропорционален пределу упругости, что плотность железа близ точки разрыва несколько уменьшается. Лагерхьелм сравнил модуль упругости, полученный из статических испытаний, со значением, вычисленным из наблюдения частот поперечных вибраций, и установил хорошее согласие между ними. Он показал также, что если два камертона издают один и тот же тон, они будут издавать тот же тон и после того, как один из них подвергнуть закалке.

[1]) Труды Лагерхьелма были опубликованы в Jern-Kontorets Ann., 1826. Краткий обзор полученных им результатов помещен в Pogg. Ann. Physik u. Chem., т. 13, стр. 404, 1828. Последующие шведские экспериментаторы ссылаются на труды Лагерхьелма. См., например, работу К. Стиффе (K. Styffe), приводящего весьма подробное описание машины Лагерхьелма для испытаний на растяжение в Jern Kontorets Ann., 1866.

ГЛАВА V

ВОЗНИКНОВЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ [1])

25. Уравнения равновесия в теории упругости

В теории сопротивления материалов, начальное развитие которой мы проследили в предыдущих главах, задачи определения прогибов и напряжений в балках решаются в предположении, что поперечные сечения балки в процессе ее деформирования остаются плоскими и материал балки следует закону Гука. В начале XIX века были предприняты попытки подвести под механику упругого тела более глубокое обоснование. Еще со времени Ньютона существовало убеждение в том [2]), что свойство упругости тел может быть объяснено силами притяжения и отталкивания, действующими между мельчайшими частицами этих тел. Это представление было развито Бошковичем [3]), который ввел предположение, что между каждыми двумя неделимо-мельчайшими частицами тела по соединяющей их прямой действуют силы, обнаруживающие себя как притяжение при некоторых

---

[1]) Более подробное освещение вопросов, относящихся к истории развития этой науки, можно найти в примечаниях Сен-Венана к третьему изданию книги Навье: N a v i e r, Résumé des Leçons..., 1864. в примечаниях к переведенному тем же Сен-Венаном на французский язык труду Клебша: C l e b s c h, Théorie de l'élasticité des corps solides, 1883, и в двух, принадлежащих Сен-Венану, главах книги Муаньо: M o i g n o, Leçons de mécanique analytique, 1868. См также статью Мюллера и Тимпе: M ü l l e r C. H., T i m p e A., в Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, т. 4. стр. 1, 1906, а также работу Буркхардта: B u r c k h a r d t H. Entwicklungen nach oscillierenden Functionen, Leipzig, 1908, стр 526—761.

[2]) См. Сен-Венан: S a i n t V e n a n t, Historique Abrégé...

[3]) B o s c o v i c h, Philosophiae naturalis, Venezia, 1-е изд., 1763. А также новое латино-английское издание с краткой биографией Бошковича, Чикаго—Лондон, 1922. (*Прим. авт.*) Бошкович Ружер Иосип (1711—1787)— сербо-хорватский ученый, математик. натурфилософ. астроном, с 1740 г.— профессор математики коллегии мудрости в Риме, с 1764 г.—профессор университета в Павии, с 1770 г.—в Милане, в 1773—1783 гг. жил в Париже. В 1760 г. избран почетным членом Петербургской Академии наук; об этом см. «Вестник АН СССР», 1, 1957, стр. 92. (*Прим. ред.*)

определенных значениях расстояния между частицами, и как отталкивание при других значениях этого расстояния, причем существуют некоторые расстояния равновесия, при которых эти силы исчезают.

Воспользовавшись этой теорией и дополнив ее требованием, чтобы молекулярные силы быстро уменьшались с увеличением расстояний между молекулами, Лаплас получил возможность построить свою теорию капиллярности[1]).

К исследованию деформаций упругих тел теорию Бошковича применил впервые Пуассон[2]) при изучении изгиба пластинок. Он рассматривает пластинку как систему частиц, распределенных в срединной плоскости пластинки. Однако подобная система способна сопротивляться только растяжению, но не изгибу и может представить собой лишь идеально гибкую мембрану, но не пластинку.

Следующий шаг в молекулярной теории упругого тела был сделан Навье[3]). Он вводит предположение, что на каждую частицу упругого тела действуют две системы сил ΣF и ΣF_1. Силы ΣF уравновешивают друг друга и представляют собой молекулярные взаимодействия, обнаруживающиеся при отсутствии внешних сил. Силы же ΣF_1 уравновешивают внешние силы, к которым относится, например, сила тяжести. В отношении их вводится предположение, что они пропорциональны изменениям $r_1 - r$ расстояний между частицами и действуют по соединяющим их прямым. Если u, v, w — компоненты перемещения частицы $P(x, y, r)$, а $u+\Delta u$, $v+\Delta v$, $w+\Delta w$ — соответствующие перемещения ближайшей смежной частицы

$$P_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z),$$

то приращение расстояния между частицами выразится через

$$r_1 - r = \alpha\ \Delta u + \beta\ \Delta v + \gamma\ \Delta w, \tag{a}$$

где через α, β, γ обозначены косинусы углов, образуемых направлением r с координатными осями x, y, z. Соответствующая этому перемещению сила F_1 равна в таком случае

$$F_1 = f(r)(\alpha\ \Delta u + \beta\ \Delta v + \gamma\ \Delta w), \tag{b}$$

где $f(r)$ — коэффициент, быстро уменьшающийся с возрастанием расстояния r.

---

[1]) Laplace, Ann. chim. et phys., т. 12, 1819.

[2]) Poisson, Mém. acad., 1812, стр. 167

[3]) Работа Навье «Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques» была представлена в Академию наук 14 мая 1821 г. Она была напечатана в Mém. Inst. natl. в 1824 г. Извлечение из нее было опубликовано в Bull. soc. philomath., Paris, 1823, стр. 177

Затем Навье разлагает Δu, Δv, Δw в ряд вида

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y + \ldots,$$

ограничиваясь членами второго порядка. Вводя, далее, эти выражения в уравнение (b) и положив

$$\Delta x = r\alpha, \qquad \Delta y = r\beta, \qquad \Delta z = r\gamma,$$

он получает для компоненты силы F_1 по оси x выражение

$$\alpha F_1 = rf(r)\left[\alpha^3\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2\beta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \ldots\right] + \\ + r^2 f(r)\left[\frac{\alpha^4}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \ldots + \frac{\alpha\gamma^3}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]. \qquad (c)$$

Чтобы вычислить полную величину силы, действующей по направлению x на подвергающуюся перемещению частицу $P(x, y, z)$, следует просуммировать выражения вида (c) для всех частиц, расположенных в сфере действия частицы P. Производя такое суммирование и предположив, что молекулярные силы не зависят от направления r, т. е. что тело изотропно, Навье замечает, что все члены, содержащие косинусы в нечетных степенях, обращаются в нули. В силу этого все интегралы первой строки выражения (c) исчезают. Вычисление же не обращающихся в нуль интегралов второй строки может быть приведено к вычислению единственного интеграла, а именно:

$$C = \frac{2\pi}{15}\int_0^\infty r^4 f(r)\,dr. \qquad (d)$$

Если значение этого интеграла известно, то проекция на ось x результирующей силы, действующей на частицу P, выразится суммой

$$\sum \alpha F_1 = C\left(3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}\right). \qquad (e)$$

Аналогично запишутся и две другие проекции.

Если ввести обозначения

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \nabla &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (f)$$

то уравнения равновесия для частицы P можно будет, очевидно, выразить следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} C\left(\nabla u+2\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+X=0, \\ C\left(\nabla v+2\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)+Y=0, \\ C\left(\nabla w+2\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)+Z=0, \end{aligned}\right\} \qquad (g)$$

где X, Y, Z — компоненты внешней силы, действующей на частицу $P(x, y, z)$. Эти соотношения известны как дифференциальные уравнения равновесия Навье для изотропного упругого тела. Мы видим, что при введенных им допущениях для характеристики упругих свойств тела требуется лишь одна[1]) постоянная C.

Присоединяя к внешним силам X, Y, Z силу инерции частицы, Навье получает, таким образом, общие уравнения движения упругого тела.

В дополнение к трем уравнениям (g), которые должны удовлетворяться в каждой точке внутри тела, необходимо присоединить также условия на поверхности тела, где молекулярные силы должны находиться в равновесии с распределенными по граничной поверхности внешними силами. Обозначая три компоненты такой силы, действующей на элементарную площадку с внешней нормалью n, через $\overline{X}_n$, $\overline{Y}_n$, $\overline{Z}_n$ и пользуясь принципом виртуальных перемещений, Навье получает требуемые краевые условия в следующем виде:

$$\overline{X}_n = C\left\{\left(3\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\cos\alpha + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos\gamma\right\} \qquad \text{(h)}$$

. . . .

Коши впоследствии разъяснил смысл заключенных в скобки выражений в уравнениях (h) и показал, что компоненты $\overline{X}_n$, $\overline{Y}_n$, $\overline{Z}_n$ поверхностных сил являются линейными функциями шести компонент деформации:

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial z},\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad \left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

[1]) Коши обобщил впоследствии вывод Навье, распространив его на анизотропное тело. Он показал, что в наиболее общем случае для определения упругих свойств такого тела требуется 15 постоянных. См. Exercises de mathématique, 3-й год, 1828, стр. 200.

Дальнейшим серьезным продвижением вперед в области теории упругости мы обязаны главным образом трудам Коши. Вместо того чтобы опираться на молекулярные силы, действующие между индивидуальными частицами, он ввел понятия *деформации* и *напряжения* и таким путем чрезвычайно сильно упростил вывод основного уравнения.

26. Огюстэн Луи Коши

Огюстэн Луи Коши[1]) (1789—1857) родился в Париже. Его отец—юрист, сделавший хорошую карьеру на правительственной службе, вынужден был покинуть Париж во время Великой Французской революции и искать убежища в Аркюэйле (Arcueil), деревушке в окрестностях Парижа, где в то время жили знаменитые ученые Лаплас и Бертолле. Во времена Наполеона дом Лапласа стал местом встреч для самых выдающихся деятелей науки Парижа, так что Коши уже в юности представилась возможность познакомиться со многими из них. В числе этих людей был Лагранж, быстро заметивший необычные математические дарования мальчика. Коши получил среднее образование в Центральной школе Пантеона (École centrale du Panthéon), где он с большим успехом изучил классические языки и гуманитарные науки.

Огюстэн Луи Коши.

В 1805 г. он успешно выдержал вступительные экзамены в Политехническую школу, а за время своего пребывания в ней проявил глубокие познания в математике. По окончании этой школы в 1807 г. он решил поступить в Школу мостов и дорог для дальнейшего изучения инженерного дела и окончил ее в 1810 г. Он занял первое место как на вступительных экзаменах, так и на выпускных, причем его блестящие способности были признаны профессорами. В возрасте 21 года он производил уже серьезные

[1]) С биографией О. Коши можно познакомиться по книге Вальсона: Valson C. A., La vie et les travaux du baron Cauchy, Paris, 1868. См. также Histoire des Sciences mathématiques et physiques, т. 12, стр 144, Paris, 1888. (*Прим. авт.*) На русском языке—Бобынин В. В., Огюстэн Луи Коши, очерк его жизни и деятельности, физ.-матем. науки в их настоящем и прошедшем, т. III, № 1—3, 1887. (*Прим. ред.*)

инженерные работы в Шербургском порту. Но математика привлекала Коши больше, чем техника, и свои досуги он посвящал математическим исследованиям. За 1811—1812 гг. он представил несколько важных докладов в Академию наук, а в 1813 г. оставил Шербург и вернулся в Париж, где со всей своей энергией отдался занятиям в области математики. В 1816 г. он стал членом Академии наук.

По возвращении в Париж Коши начал вести преподавательскую работу в Политехнической школе и в Сорбонне. В своих лекциях по дифференциальному и интегральному исчислению он пытался излагать предмет в более строгой форме, чем это делалось раньше. Оригинальность такого изложения привлекала на эти лекции не только студентов, но и профессоров и ученых из других стран. Издание в 1821 г. принадлежавшего ему «Курса анализа политехнической школы» оказало серьезное влияние на последующее развитие математики.

Приблизительно в то же время была представлена в Академию наук и первая работа Навье по теории упругости. Коши заинтересовался работой и сам приступил к исследованиям в этой области. Результаты, полученные им на первых этапах развития этой области механики, представляли огромную ценность[1]).

Навье, как мы видели в предыдущем параграфе, при выводе основных уравнений исходил из рассмотрения сил, действующих между отдельными молекулами деформированного упругого тела. Коши[2]) вместо этого пользуется понятием давления на плоскость (концепцией, знакомой ему из гидродинамики) и вводит гипотезу, согласно которой в упругом теле это давление уже не является нормальным к плоскости, на которую оно действует. Таким путем в теорию упругости было введено понятие *напряжения*. Полное давление на бесконечно малый элемент плоскости, взятой внутри деформированного упругого тела, определяется как результирующая всех воздействий, оказываемых молекулами, лежащими по одну сторону плоскости, на молекулы, лежащие по другую ее сторону,—воздействий, пересекающих рассматриваемый элемент плоскости[3]). Деля полное давление на площадь элемента, Коши получает величину напряжения.

---

[1]) Наилучшее краткое изложение трудов Коши по теории упругости было выполнено Сен-Венаном в двух главах, посвященных этой науке и и написанных им для книги Муаньо: Moigno, Mécanique analytique, statique, 1868.

[2]) Работа Коши, написанная им после изучения доклада Навье (см. стр. 129), была представлена в Академию наук 30 сентября 1822 г., а краткое содержание ее было опубликовано в Bull. Soc. philomath., 1823, стр. 9.

[3]) В этой окончательной форме определение напряжения было дано Сен-Венаном. См. Compt. rend., т. 20, стр. 1765, 1845; т. 21, стр. 125. Коши в своих первоначальных статьях пользовался несколько иным определением и лишь впоследствии принял определение Сен-Венана.

Рассматривая элементарный тетраэдр рис. 58), Коши показывает, что три компоненты X_n, Y_n, Z_n напряжения, действующего на наклонную плоскость abc, могут быть получены из трех уравнений равновесия:

$$\left.\begin{aligned} X_n &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ Y_n &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ Z_n &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

где l, m, n — косинусы углов, образуемых внешней нормалью к плоскости abc с осями координат[1]), а σ_x, τ_{yx}, ... — нормальная и касательная компоненты напряжения, действующего в точке O на координатные плоскости yz, xz, yx.

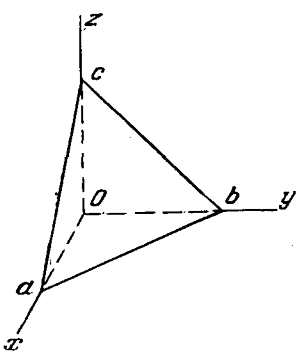


Рис. 58.

Он доказывает также, что

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}, \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \qquad \tau_{zy} = \tau_{yz},$$

откуда видно, что напряжение, действующее на какую-либо плоскость, как, например, на abc, может быть определено шестью компонентами σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} напряжения. Проектируя компоненты X_n, Y_n, Z_n (из уравнения (a)) на направление нормали к плоскости abc, мы получим нормальное напряжение σ_n, действующее на эту плоскость. Коши показывает, что если мы построим во всевозможных направлениях n из начала O (рис. 58) векторы r длиной $r = \sqrt{1/|\sigma_n|}$, то концы этих векторов расположатся на поверхности второго порядка. Коши называет направления главных осей этой поверхности *главными направлениями*, а соответствующие напряжения — *главными напряжениями*.

Коши выводит дифференциальные уравнения равновесия для элементарного прямоугольного параллелепипеда, представляя их в следующем, окончательном виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + x &= 0, \\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + y &= 0, \\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + z &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

[1]) Относительно обозначений, применявшихся различными авторами на первоначальных этапах развития теории упругости, см. M o i g n o, Statique, стр. 626. См. также T o d h u n t e r I., P e a r s o n K., A history of the theory of elasticity, т 1, стр. 322.

где x, y, z обозначают три компоненты объемной силы, отнесенной к элементарному объему и приложенной в точке O. В случае колебаний к этим объемным силам добавляются силы инерции.

Коши исследует также и возможные в области точки O деформации упругого тела (рис. 58) и показывает, что если эти деформации малы, то относительное удлинение в каком-либо направлении и изменение прямого угла между двумя произвольными, первоначально взаимно-перпендикулярными, направлениями могут быть выражены через шесть *компонент деформации*:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \tag{c}$$

Эти соотношения дают значения трех линейных деформаций по координатным осям и трех угловых деформаций, т. е. искажений углов между этими осями. Если по каждому из направлений мы построим из точки O вектор длиной $r = \sqrt{1/|\varepsilon_r|}$, где ε_r – относительное удлинение в направлении r, то концы этих векторов окажутся лежащими на некоторой поверхности второго порядка. Главные оси этой поверхности будут *главными направлениями* деформации, а соответствующие им деформации будут *главными деформациями.*

Коши дает, сверх того, и соотношения между шестью компонентами напряжения и шестью компонентами деформации для изотропного тела. Допуская, что главные направления деформации совпадают с направлениями главных напряжений и что составляющие напряжений являются линейными функциями компонент деформации, он пишет уравнения

$$\sigma_x = k\varepsilon_x + K\theta, \quad \sigma_y = k\varepsilon_y + K\theta, \quad \sigma_z = k\varepsilon_z + K\theta,$$

где k и K—две упругие постоянные, а $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$—относительное увеличение объема. При этом для любого направления координатных осей он получает

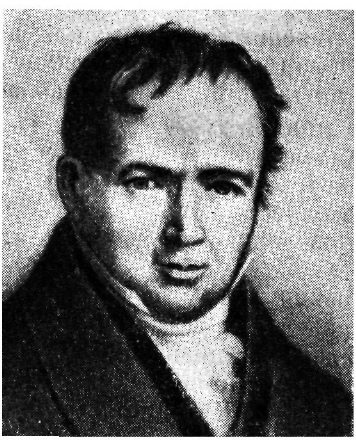
$$\sigma_x = k\varepsilon_x + K\theta, \quad \sigma_y = k\varepsilon_y + K\theta, \quad \sigma_z = k\varepsilon_z + K\theta,$$

$$\tau_{xy} = \frac{k}{2}\gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = \frac{k}{2}\gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = \frac{k}{2}\gamma_{yz}. \tag{d}$$

Соотношения (a)—(d) образуют полную систему уравнений для решения задач упругости изотропных тел. Сам Коши пользуется этими уравнениями в исследовании деформаций прямоугольных стержней. В особенности его заинтересовывает задача кручения прямоугольного стержня, причем ему удается найти удовлетворительное решение для стержня узкого прямоугольного поперечного сечения. Он показывает, что поперечные сечения стержня, подвергающегося кручению, как общее правило, не остаются плоскими, но коробятся. Заключения, к которым пришел Коши, были использованы впоследствии Сен-Венаном, сформулировавшим более полную теорию кручения призматических стержней (см. стр. 283).

27. Симеон Дени Пуассон

Симеон Дени Пуассон (1781—1840)[1] родился в маленьком городке Питивье (Pithiviers) близ Парижа в бедной семье, и до 15-летнего возраста ему непредставилось случая выучиться чему-либо большему, чем читать и писать. В 1796 г. он был послан своим дядей в Фонтенебло и там получил возможность посещать математические классы. Его успехи в этом предмете оказались столь высокими, что уже к 1798 г. он с отличием выдержал вступительные экзамены в Политехническую школу. Здесь его выдающиеся способности были замечены Лагранжем читавшим в то время свой курс теории функций), а также Лапласом. По окончании в 1800 г. Политехнической школы Пуассон был оставлен при ней в качестве руководителя по математике, а около 1806 г. ему было поручено вести курс анализа. Его оригинальные работы по математике создали ему репутацию одного из крупных ученых Франции в этой области, и уже в 1812 г. он становится членом Французской академии. В то время теоретическая физика находилась в стадии быстрого развития, и математики того времени использовали свое искусство в деле теоретического разрешения проблем физики. Теория упругости, базировавшаяся на представлении о молекулярном строении веще-



Симеон Дени Пуассон.

[1]) О Пуассоне и его трудах см. Попов А., Об ученых заслугах Пуассона; речь, читанная на торжественном заседании в Казанском университете 5 июня 1849 г., Казань, 1849. Араго Ф., Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров, Пер. с франц., т. III, СПб., 1861. (*Прим. ред.*)

ства, привлекла внимание Пуассона, и он сделал многое, чтобы укрепить основы этой науки.

Главные полученные Пуассоном результаты содержатся в двух его мемуарах[1]), опубликованных в 1829 и 1831 гг., а также в его курсе механики[2]). Начав свое исследование с рассмотрения системы частиц, между которыми действуют молекулярные силы, он получает три уравнения равновесия и три краевых условия. Они сходны с теми, которые были выведены до него Навье и Коши. Пуассон доказывает, что выраженные этими уравнениями условия не только необходимы, но также и достаточны, чтобы обеспечить равновесие некоторой области тела. Ему удается проинтегрировать уравнения движения, и он показывает, что возмущение в малой области тела влечет за собой возникновение волн двух типов[3]). В более быстро распространяющейся волне движение отдельных частиц нормально к фронту волны и сопровождается изменениями объема (объемным расширением); в другой же волне движение частиц касательно к фронту волны и при таком движении имеет место лишь угловая деформация (искажение формы элемента) без изменения объема.

В этом мемуаре Пуассон ссылается на работу М. В. Остроградского (см. стр. 172). Применяя свои общие уравнения к изотропному телу[4]), Пуассон находит, что при простом растяжении призматического стержня осевое удлинение ε должно сопровождаться поперечным сужением на величину $\mu\varepsilon$, где $\mu=\frac{1}{4}$. Приращение объема должно быть равно в таком случае $\varepsilon\,(1-2\mu)=\frac{1}{2}\varepsilon$. Как на простом примере трехмерной задачи автор останавливается на исследовании напряжений и деформаций в полой сфере, подвергнутой внутреннему или внешнему равномерному давлению. Исследует он также и чисто радиальные колебания сферы.

Переходя к двумерной задаче, Пуассон получает уравнение для поперечного прогиба равномерно нагруженной пластинки

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q, \tag{a}$$

[1]) Мемуар о равновесии и движении упругих тел (Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques), Mém. acad., т. 8, 1829 и Мемуар об общих уравнениях равновесия и движения упругих тел и жидкостей (Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques et des fluides), J. école polytech. (Paris), тетрадь (cahier) 20, 1831. В книге Todhunter, Pearson, History of Elasticity дается подробное изложение этих рефератов.

[2]) Traité de mécanique, 2 тома, изд. 2-е, 1833.

[3]) См. мемуар о распространении движения в упругих средах, Mém. acad..., France, т. 10, стр. 549—605, 1830.

[4]) На этих применениях он останавливается в первом из упомянутых выше мемуаров, относящемся к 1829 г.

где жесткость при изгибе D имеет значение, соответствующее величине $\mu=\frac{1}{4}$, а q есть интенсивность распределенной нагрузки. Выясняя граничные условия, он приходит к тем самым определениям, которые ныне являются общепринятыми для пластинок со свободно опертыми и с жестко защемленными краями. Для края, по которому распределены заданные силы, он требует выполнения трех условий (вместо двух, признанных достаточными в наше время). Эти условия сводятся к тому, что поперечная сила, крутящий момент и изгибающий момент (вычисленные из молекулярных сил для каждого элемента длины края) должны уравновешивать соответствующие величины для внешних сил, приложенных по краю. Сокращение числа условий с трех до двух было выполнено впоследствии Кирхгофом, физическое же обоснование такого сокращения было дано Кельвином (см. стр. 266). В доказательство применимости своей теории Пуассон исследует изгиб круглой пластинки под нагрузкой, интенсивность которой является функцией одного лишь радиуса. С этой целью Пуассон переписывает уравнение (а) в полярных координатах и дает полное решение задачи. В дальнейшем он применяет это решение к случаю равномерно распределенной нагрузки и дает уравнение для свободно опертых и для защемленных краев. Его внимание привлекает также задача о поперечных колебаниях пластинки, и он решает ее в применении к круглой пластинке, форма прогибов которой обладает центральной симметрией.

Михаил Васильевич Остроградский.

Пуассон выводит уравнения для продольных, крутильных и поперечных колебаний стержней и вычисляет частоты для различных форм колебаний.

В своем «Трактате по механике» («Traité de mécanique») Пуассон не пользуется общими уравнениями теории упругости, а выводит особые для прогибов и колебаний стержней, исходя из допущения, что в процессе деформирования поперечные сечения их остаются плоскими. Для изгиба призматических стержней он пользуется не только уравнением второго порядка, выражающим пропорциональность кривизны упругой линии изгибающему моменту, но также и уравнением

$$B\frac{d^4y}{dx^4}=q, \tag{b}$$

где B—жесткость при изгибе, а q—интенсивность поперечной нагрузки. Рассматривая различные применения уравнения (b), Пуассон обращает внимание на любопытное его свойство: если q является функцией x, обращающейся в нуль на концах $x=0$ и $x=l$ стержня, то q всегда можно представить в виде синусоидального ряда. В таком случае уравнение (b) преобразуется в

$$B\frac{d^4y}{dx^4}=\sum a_m \sin\frac{m\pi x}{l}.$$

Интегрируя это уравнение и полагая, что прогибы на концах равны нулю, он получает решение

$$By=\frac{l^4}{\pi^4}\sum\frac{a_m}{m^4}\sin\frac{m\pi x}{l}+x(l-x)[Cx+C_1(l-x)],$$

где C и C_1—постоянные, которые нужно определить так, чтобы удовлетворялись краевые условия. Если стержень по концам свободно оперт, C и C_1 обращаются в нуль, и мы получаем:

$$y=\frac{l^4}{B\pi^4}\sum\frac{a_m}{m^4}\sin\frac{m\pi x}{l}.$$

По-видимому, здесь мы впервые встречаемся со случаем использования тригонометрического ряда для исследования кривых прогиба стержней. Во времена Пуассона этот метод не привлек к себе внимания инженеров, ныне же он нашел полезные применения[1]).

Мы видим, что Пуассон не внес в теорию упругости столь фундаментального идейного вклада, как Навье или Коши. Тем не менее он решил много проблем, представляющих практическую ценность, и мы все еще продолжаем пользоваться полученными им результатами.

28. Габриэль Ламе и Ю. П. Клапейрон

Оба этих выдающихся инженера—Габриэль Ламе (1795—1870) и Клапейрон (1799—1864)—окончили Политехническую школу в 1818 г. и Школу горных инженеров в 1820 г. По окончании курсов наук этих институтов они были рекомендованы русскому правительству в качестве талантливых молодых инженеров, чтобы помочь в работе новому русскому инженерному учебному заве-

[1]) Широким использованием этого метода (в теории пластинок и других отделах механики) мы обязаны в особенности автору этой книги С. П. Тимошенко. (*Прим. перев.*)

дению — Институту инженеров путей сообщения в Петербурге. В последующем новый институт оказал большое влияние на развитие инженерной науки в России; он был основан в 1809 г. при сотрудничестве таких выдающихся французских инженеров, как Бетанкур (Bétancourt), который выполнял обязанности первого директора Института, Базен (Bazain) и Потье (Potier). Его программа и методы преподавания были сходны с принятыми в Парижской политехнической школе и в Школе мостов и дорог. На Ламе и Клапейрона было возложено преподавание прикладной математики и физики в этом Институте, а кроме того, они должны были помогать в проектировании ряда ответственных инженерных сооружений, осуществление которых было предпринято по инициативе русского правительства; так, например, в то время было спроектировано и построено в Петербурге несколько висячих мостов [1]).

Огюстэн де Бетанкур.

Для того чтобы изучить механические свойства примененного для постройки этих мостов русского железа, Ламе спроектировал и построил (1824) специальную испытательную машину, сходную с машиной Лагерхьелма (Lagerhjelm) в Стокгольме [2]). Это была машина горизонтального типа, важнейшим рабочим органом которой был поршень гидравлического насоса, производивший загружение и вызывавший деформации. Величина нагрузки измерялась гирями, как это показано на рис. 59. При выполнении этих испытаний Ламе заметил, что железо начинало быстро удлиняться

[1]) Эти мосты (сооружение их относится к 1824—1826 гг.) были первыми висячими мостами, построенными на континенте Европы. См. W i e b e k i n g, Architecture civile, т. 7, München, 1831. См. также M e h r t e n s G. C., Eisenbrückenban, т. 1, Leipzig, 1908 Ламе и Клапейрон помогали также в проектировании большого висячего моста через р. Неву (в один пролет длиной 306 *м*). См. Ann. mines т. XI, стр. 265, 1825. (*Прим. авт.*) О сооружении висячих мостов в Петербурге см. подстрочные сноски на стр. 105 и 108. (*Прим. ред.*)

[2]) Хорошо известная машина Вульвича (Woolwich) была построена в 1832 г. по тому же самому принципу, равно как и машина Киркальди (Grove Sonthwark Street, London). См. G i b b o n s C. H., Material testing machines, Pittsburgh, 1935 (*Прим. авт.*) См. также М и т и н с к и й А. Н. и А ш к е н а з и Е. К., Первая русская машина для испытания металлов на прочность, Вестн. машиностроения, № 1, 1954, стр. 99—103.

при нагрузке, составлявшей приблизительно $^2/_3$ от разрушающей. Были отмечены также и отслаивание окалины и образование шейки после перехода за предел текучести. Результаты этих испытаний [1]) были использованы в России в проектировании сооружений из железа и приводились в ряде сочинений по сопротивлению материалов [2]).

Габриэль Ламе.

В связи со строительством нового Исаакиевского собора в Петербурге Ламе и Клапейрон исследовали вопрос об устойчивости арок и подготовили мемуар, о котором мы уже упоминали выше (стр. 105).

За время своей службы в Петербурге эти два инженера написали представляющий большую ценность мемуар о внутреннем равновесии твердых тел из однородных материалов: «Sur l'équilibre interieur des corps solides homogènes»; он был представлен во Французскую Академию наук, получил в 1828 г. отзыв Пуансо и Навье [3]) и в 1833 г. был опубликован [4]). Важность мемуара обусловлена тем обстоятельством, что он заключал в себе не только вывод уравнений равновесия (с чем в то время были уже знакомы из трудов Навье и Коши), но также и ряд применений этих общих уравнений к решению проблем практического значения. В первой части мемуара авторы выводят уравнения равновесия, пользуясь понятием молекулярных сил Навье (см. § 25), и показывают, что к тем же самым урав-

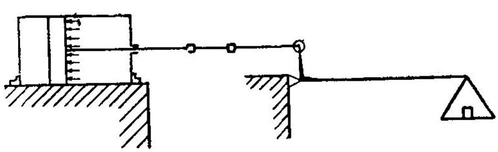


Рис. 59. Машина Ламе для испытаний на растяжение.

[1]) Эти результаты, приведенные в письме Ламе к Бэйе, были опубликованы в Ann. mines, т. 10, Paris, 1825.

[2]) См., например, Navier, Resumé des Leçons..., изд. 2-е, стр. 27, 1833.

[3]) Выдержки из отзыва Навье об этом сочинении были опубликованы в «Журн. п. с.». кн. 14, 1829, стр. 76—87. (*Прим. ред.*)

[4]) Mémoires présentés par divers savants, т. 4, 1833.

нениям можно прийти и исходя из понятия о напряжении, введенном Коши. Во второй части работы исследуются напряжения в точке упругого тела, причем доказывается, что если напряжение, соответствующее каждой из проходящих через точку площадок, представить вектором, начало которого совпадает с заданной точкой, то концы всех таких векторов будут лежать на поверхности эллипсоида. Это и есть так называемый *эллипсоид напряжений Ламе*. В мемуаре показано также, каким образом (пользуясь этим эллипсоидом, а также квадрикой напряжений) для всякой проходящей через точку площадки можно определить величину и направление напряжения.

Изложив общую теорию, авторы применяют свои уравнения в ряде частных случаев. Они показывают, каким образом единственную входящую в их уравнения упругую постоянную можно получить опытным путем из испытаний на растяжение или на равномерное сжатие. Далее, они ставят перед собой задачу о полом круговом цилиндре и выводят формулы для напряжений, вызываемых равномерным внутренним или внешним давлением. Эти формулы используются для вычисления необходимой толщины стенок цилиндра при заданных значениях давлений. В своих исследованиях они пользуются теорией наибольшего напряжения, но предусмотрительно обращают внимание на то, что каждый элемент цилиндра находится в условиях двумерного напряженного состояния и что предел упругости, определенный из испытания на простое растяжение, может оказаться неприменимым к этому более сложному случаю. Следующими вопросами, разобранными в этой части их работы, являются задачи о простом кручении круглого стержня, о сфере, подвергающейся действию сил тяжести, направленных к ее центру, и о сферической оболочке, нагруженной равномерно распределенным внутренним или наружным давлением. Для всех этих случаев авторами выводятся правильные формулы, которые с тех пор нашли разнообразные применения в технике.

В последнем разделе авторы переходят к более сложным проблемам. Они начинают с задачи о бесконечном теле, ограниченном плоскостью, по которой распределены заданные нормально к ней направленные силы. Авторам удается, представив эти силы с помощью интеграла Фурье, получить выражение для компонент перемещения в виде интегралов четвертого порядка. Аналогичный метод они применяют к телу, ограниченному двумя бесконечными параллельными плоскостями. В заключение ставится задача о круговом цилиндре бесконечной длины. Здесь впервые вводятся цилиндрические координаты. В качестве примера исследуется кручение цилиндра, вызванное касательными силами, распределенными по поверхности цилиндра и перпендикулярными к его оси. При этом предполагается, что интенсивность этих сил является функцией одного лишь расстояния, измеряемого по оси цилиндра.

Другим достоинством этого мемуара является то, что, помимо интересных выводов, принадлежащих самим авторам, в нем приведены все известные к тому времени теоретические результаты, относящиеся к упругим деформациям изотропных материалов. Эти результаты были изложены весьма ясным и сжатым языком. Впоследствии эта работа была использована Ламе при подготовке им своей знаменитой книги «Лекции по математической теории упругости твердых тел» («Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides»).

Это была первая книга по теории упругости.

Ламе и Клапейрон вернулись во Францию в 1831 г. в связи с тем, что в результате происшедшей у них на родине революции политические взаимоотношения между Францией и Россией расстроились[1]). Там они обнаружили, что интересы французских инженеров привлечены ростом железнодорожного строительства в Англии и перспективами развития подобного же строительства во Франции. Ламе и Клапейрон внесли свой вклад в дело проектирования и постройки железнодорожной линии между Парижем и Сен-Жерменом. Однако Ламе в скором времени отошел от практики строительства и стал профессором физики в Политехнической школе, сохраняя за собой эту должность до 1844 г. За этот период он опубликовал свой курс физики (1837), а также несколько важных работ по теории света.

В 1852 г. вышла из печати книга Ламе по теории упругости (упомянутая выше). В эту книгу были включены результаты мемуара, написанного им совместно с Клапейроном, но уравнениям была придана здесь несколько иная форма, поскольку Ламе пришел к выводу, что для определения упругих свойств изотропного материала требуются две упругие постоянные. Это, как мы знаем (см. § 26), было установлено Коши. Ламе вводит задачи, относящиеся к упругим колебаниям, и исследует, в частности, колебания струн, мембран и стрежней. Разбирается им также вопрос о распространении волн в упругой среде. Сравнительно больше

---

[1]) Непосредственным поводом к прекращению Ламе и Клапейроном работы в России явилось награждение их правительством Луи-Филиппа французскими орденами и запрещением Николая I носить эти ордена, а также «неосторожные» (с точки зрения царского правительства) высказывания Клапейрона об июльской революции во Франции. Приказом от 21/X 1831 г. (ст. ст.) оба они были уволены с русской службы «по болезни» (Дельвиг А. И., Мои воспоминания, т. I, М., 1913, стр. 91 и далее). Ламе преподавал в Институте инженеров путей сообщения аналитическую механику, высшую математику и физику; Клапейрон—аналитическую и прикладную механику, химию и позже, с 1830 г., строительное искусство (курс построений). В этом году, впервые в Институте и в России вообще, Клапейрон прочел курс сопротивления материалов в изложении Навье. (*Прим. ред.*)

места, чем в мемуаре, уделяется применению криволинейных координат и деформациям сферических оболочек. Наконец, Ламе обсуждает и вопросы применения теории упругости в оптике. Из числа этих применений он останавливается на двойном лучепреломлении, приходя к заключению, что соответствующая среда должна быть *анизотропной.* Он вносит надлежащие изменения в уравнения упругости и находит соотношения между составляющими напряжения и деформации.

Заканчивая в своей «Истории сопротивления материалов» отзыв о книге Ламе, Тодхентер заключает: «Нет оценки, которую пришлось бы признать слишком высокой для произведения Ламе: оно представляет собой столь редко встречающийся пример работы философа, который снизошел использовать свое дарование в составлении элементарного руководства по предмету, в создании которого он сам принимает творческое участие. Математические выкладки проводятся ясно и убедительно, общие же соображения, которыми он щедро делится с читателем в начале и в конце своих лекций, поражают изяществом языка и глубиной мысли».

После выхода в свет своей книги Ламе продолжал активно интересоваться теорией упругости, результатом чего в 1854 г. явился его мемуар об упругом равновесии сферических оболочек («Mémoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques»), напечатанный в XIX томе журнала Лиувилля «Journal de mathématique». В нем автор дает полное решение задачи о деформации сферической оболочки, нагруженной произвольными поверхностными силами.

В 1859 г. вышла из печати книга Ламе о криволинейных координатах и об их разнообразных применениях «Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications».

В этой книге излагается общая теория криволинейных координат и ее применения в механике, в учении о теплоте и теории упругости: разъясняется преобразование уравнений теории упругости к криволинейной системе координат и в качестве примера исследуется деформация сферической оболочки. В заключительных главах Ламе подвергает критическому анализу принципы, на основе которых строится вывод основных уравнений теории упругости. Теперь он уже не одобряет вывод уравнений по способу Навье (с привлечением гипотезы молекулярных сил), а отдает предпочтение методу Коши (в котором используется лишь статика твердого тела). Затем он принимает гипотезу Коши, согласно которой компоненты напряжения должны быть линейными функциями компонент деформации. Для изотропных материалов принятие этой гипотезы приводит к сокращению числа необходимых упругих постоянных до двух, находимых из испытаний на простое растяжение и простое кручение. Таким путем все необходимые уравнения получаются без обращения к каким либо гипотезам, относящимся к молекулярной структуре или молекулярным силам.

В 1843 г. Ламе был избран в члены Французской Академии наук, а с 1850 г. стал профессором Сорбонны, где читал лекции по различным разделам теоретической физики. Он не был выдающимся лектором, но его книги встретили широкий прием и в течение многих лет оказывали сильное влияние на физиков-теоретиков. Плохое состояние здоровья заставило Ламе прекратить свою преподавательскую деятельность в 1863 г.; он умер в 1870 г.

Клапейрон с момента своего возвращения во Францию в 1831 г. продолжал принимать активное участие в практической деятельности, связанной с развивавшимся во Франции железнодорожным строительством. Его главным занятием было применение термодинамики к проектированию локомотивов. Начиная с 1844 г., он читал свой курс паровых машин в Школе мостов и дорог, проявив качества превосходного педагога. Свойственное ему сочетание глубоких теоретических знаний с широким практическим опытом в особенности привлекало студентов на его лекции. Будучи приглашен в 1848 г. на работу по проектированию многопролетного моста, Клапейрон разработал новый метод вычисления напряжений в неразрезных балках, на котором мы остановимся в дальнейшем (стр. 177).

В своей книге по теории упругости Ламе сообщает о другом вкладе своего бывшего коллеги в эту науку, который он именует *теоремой Клапейрона*. Согласно этой теореме сумма произведений приложенных к телу внешних сил на компоненты смещений по направлениям этих сил в точках их приложения равна удвоенному значению соответствующей энергии деформации тела. По-видимому, эта теорема была сформулирована Клапейроном за много времени до выхода в свет книги Ламе, и ею, вероятно, отмечается первый случай вывода общего выражения для энергии деформации изотропного тела. В 1858 г. Клапейрон был избран в члены Французской Академии наук. Он продолжал свою работу в Академии и в Школе мостов и дорог до своей смерти в 1864 г.

29. Теория пластинок

Первые попытки решить задачу изгиба упругих поверхностей, т. е. тел, у которых одно измерение мало в сравнении с двумя другими, были предприняты Эйлером. Описывая колебания идеально гибкой мембраны, он рассматривал ее как совокупность двух систем струн, натянутых в двух взаимно-перпендикулярных направлениях (рис. 60). Он нашел[1]) соответствующее дифференциаль-

[1]) См. «De motu vibratorio tympanorum», Novi comm. Acad. Petrop. т. X, стр. 243, СПб., 1767.

ное уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{a}$$

где через w обозначен прогиб, A и B—постоянные. С этой же идеей подошел Эйлер и к изучению колебаний колоколов[1]).

Яков[2]) Бернулли-младший (1759—1789), используя те же представления в анализе пластинок, получил[3]) дифференциальное уравнение

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = q, \tag{b}$$

где D—жесткость пластинки при изгибе, q—интенсивность поперечной нагрузки. Бернулли отдавал себе ясный отчет в том, что его уравнение было лишь приближением и что если взять две системы балок, не перпендикулярных одна к другой, то результат получается несколько иной. Он опубликовал свою работу лишь как первую попытку решить задачу изгиба пластинки.

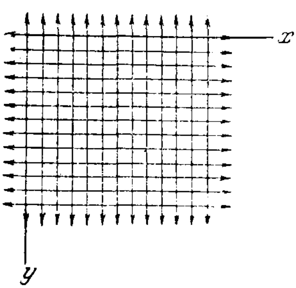


Рис. 60.

Большой интерес к теории пластинок был возбужден книгой Хладни (E. F. F. Chladni) по акустике[4]) и, в особенности, его экспериментами с вибрирующими пластинками. Покрывая пластинку тонким слоем мелкозернистого песка, Хладни получил возможность продемонстрировать существование узловых линий для различных колебаний и определить соответствующие частоты. В 1809 г. Французская Академия пригласила Хладни продемонстрировать свои эксперименты, причем они произвели сильное впечатление на присутствовавшего на этом заседании Наполеона. По предложению последнего Французская Академия назначила премию за разработку математической теории колебаний пластинок и за сравнение теоретических результатов с экспериментальными. В октябре 1811 г. к заключительной дате

[1]) «De sono Campanarum», там же, № 10, 1776. (*Прим. ред.*)

[2]) Яков Бернулли был племянником Даниила Бернулли. В промежутке между 1786 и 1789 гг. он был членом Российской Академии наук.

[3]) «Essai theorique sur les vibrations des plaques élastiques», Nova Acta, т. V, 1789, СПб., стр. 197—219.

[4]) Первое издание книги Хладни «Die Akustik» вышло в Лейпциге в 1802 г., французский перевод ее—в 1809 г.; к последнему присоединена краткая автобиография.

конкурса выявился лишь единственный претендент—Софи Жермен [1]).

Софи Жермен (1776—1831) почувствовала влечение к математике еще в ранней юности и для того, чтобы прочесть «Начала» Ньютона, изучила латинский язык. Она продолжала свои занятия в трудных условиях Французской революции и находилась в переписке с величайшими математиками своего времени: Лагранжем, Гауссом, Лежандром. После Иенского сражения, когда французская армия вступила в Гёттинген, она оказала большую помощь Гауссу, написав письма генералу Пернетти, командовавшему оккупационной армией, и собрав деньги в уплату наложенного на Гаусса генералом Пернетти денежного взыскания. Услышав о конкурсе, объявленном Академией, она решила работать в области теории пластинок. Она была знакома с работой Эйлера об упругих линиях см. стр. 45), в которой он воспользовался вариационным исчислением, чтобы вывести дифференциальное уравнение изгиба из интеграла, выражающего энергию деформации изгиба. Она решила идти тем же путем и начала с того, что для энергии деформации пластинки приняла значение интеграла

$$A\iint\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)^2 ds, \tag{c}$$

где ρ_1 и ρ_2—главные радиусы кривизны изогнутой поверхности. В вычислении вариации интеграла с) Софи Жермен допустила, однако, ошибку и в связи с этим найти правильное уравнение ей не удалось. Она не получила премии. Однако Лагранж[1]), входивший в состав жюри конкурса, заметил ее ошибку и, введя нужное исправление, получил уравнение в правильном виде:

$$k\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0. \tag{d}$$

Академия объявила повторный конкурс с новым сроком к октябрю 1813 г., и Софи Жермен вновь приняла в нем участие. На этот раз она представила правильное уравнение, но члены жюри потребовали физического обоснования для начального допущения (с). Ее постигла неудача вторично. Но Академия решила повторить конкурс еще раз. И в этом третьем конкурсе (в 1816 г.) Софи Жермен получила премию[2]), хотя члены жюри и не были вполне удовлетворены ее работой. В последней отсутствует надлежащая

---

[1]) С биографией Софи Жермен можно познакомиться по ее книге: G e r m a i n Sophie, L'état des sciences et des lettres, вышедшей в Париже в 1833 г., после ее смерти.

[2]) См. Ann. chim., т. 39, стр. 149, 207, 1828.

[3]) Ее статья «Recherches sur la théorie des surfaces élastiques» была напечатана в Париже в 1821 г.

мотивировка формы выражения (c), и мы должны согласиться с мнением Тодхентера[1]), что «эксперты были далеки от суровости, наградив ее премией...».

Следующая попытка усовершенствовать теорию пластинок была предпринята Пуассоном[2]). Чтобы придать физический смысл уравнению (d), Пуассон вводит допущение, согласно которому пластинка состоит из частиц, между которыми действуют молекулярные силы, пропорциональные изменениям расстояний между молекулами. Ему удалось вывести уравнение (d) из условий равновесия такой системы частиц. Но, поскольку он предполагает, что все частицы распределены в срединной плоскости пластинки, постоянная k в его уравнении (d) получается пропорциональной квадрату толщины пластинки, а не кубу ее, как это должно быть в действительности. В том же мемуаре Пуассон показывает, что уравнение (d) может быть получено не только из интеграла (c), но также и из интеграла

$$A\iint\left[\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)^2+m\left(\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}\right)\right]ds,$$

который при надлежащем выборе постоянных A и m точно выражает энергию деформации изгиба упругой пластинки. Этим объясняется, почему Софи Жермен нашла правильную форму (d) дифференциального уравнения пластинки, хотя интеграл (c) и не выражает энергии деформации изогнутой пластинки.

Первой удовлетворительной теорией изгиба пластинок мы обязаны Навье. В своей работе (представленной в Академию наук 14 августа 1820 г. и опубликованной в 1823 г.[3])) Навье предполагает, как это сделал в свое время и Пуассон, что пластинка состоит из молекул, но он распределяет их по всей толщине пластинки и принимает, что их перемещения при изгибе параллельны срединной плоскости пластинки и пропорциональны расстояниям от нее. Таким путем он находит правильное дифференциальное уравнение для поперечного изгиба в общем виде:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q, \tag{e}$$

где q—интенсивность нагрузки, D—жесткость пластинки при изгибе. Поскольку Навье принимает также допущения, приведенные нами в § 25, полученные им результаты оказываются выраженными в зависимости лишь от одной упругой константы, а его значение D совпадает с тем значением этой величины, которое является общепринятым и в наше время, если для коэффициента Пуассо-

---

[1]) См. его «Историю» («History...», т. 1, стр. 148.

[2]) См. его мемуар, опубликованный в Mémoires Французской Академии наук в 1814 г.

[3]) См. Bull. soc. philomath., Paris, 1823, стр. 92.

на принять значение $\mu=\frac{1}{4}$. Навье применяет свое уравнение (e) к задаче о свободно опертой прямоугольной пластинке, для которой он устанавливает правильные граничные условия и получает правильное решение в виде двойного тригонометрического ряда. Он пользуется им для случаев равномерно распределенной нагрузки и нагрузки, сосредоточенной в середине площади пластинки. Это были первые удовлетворительные решения, полученные для задач изгиба пластинок.

Навье исследует также и поперечное выпучивание пластинок под действием сжимающих сил T, равномерно распределенных по контуру, и выводит правильное дифференциальное уравнение для поверхности выпучивания

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+T\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0. \qquad \text{(f)}$$

Он применяет это уравнение к сложной задаче о прямоугольной пластинке, опертой в вершинах четырех углов. В получении приемлемого решения по этому вопросу он терпит, однако, неудачу.

ГЛАВА VI

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ ВО ВТОРОЙ ТРЕТИ XIX ВЕКА

30. Уилльям Фейрбейрн и Итон Ходкинсон

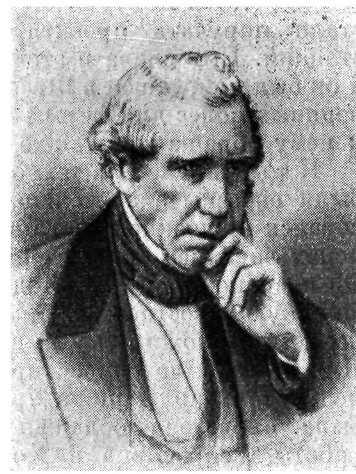
На протяжении первой половины XIX века французские инженеры, располагавшие превосходной математической подготовкой, разрабатывали математическую теорию упругости. В это же время английские инженеры изучали сопротивление материалов экспериментально. Англия была тогда ведущей страной в области развития промышленности, и после изобретения Джэмса Уатта машинная техника в ней быстро росла. Сооружение надежного локомотива дало толчок железнодорожному строительству, и если в 1827 г. Англия произвела 690 500 *т* железа, то в 1857 г. продукция его возросла там до 3 659 000 *т*. В эту эпоху быстрого промышленного роста было, однако, сделано весьма мало в области улучшения английского технического образования и многие инженерные проблемы, возникавшие в промышленной практике, приходилось решать в значительной степени самоучкам. Эти люди не обладали широкими научными знаниями и предпочитали экспериментальный метод их разрешения. Хотя эта экспериментальная работа и не оказала заметного воздействия на развитие общей теории сопротивления материалов, она принесла большую пользу инженерам-практикам, давая им ответы на их повседневные запросы. Результаты этих испытаний широко использовались не только в Англии, но и на континенте Европы; ссылки на них можно было найти в технической литературе[1]) Франции и Германии. Самыми известными из этих английских инженеров были

---

[1]) См., например, Morin A., Résistance des materiaux, 3-е изд., Paris, 1862; Love G. H., Des diverses résistances et autres propriétés de la fonte, an fer et de l'acier..., Paris, 1859; Weisbach J., Lehrbuch der ingenieur- und maschinen-Mechanik, 1845—1862 (3 тома). Последнее сочинение было переведено на английский, шведский, русский и польский языки. (*Прим. авт.*) См. также Собко П. И., Теория сопротивления строительных материалов, Журн. Гл. упр. п. с. и пуб. зд., т. XI, 1850. (*Прим. ред.*)

Уилльям Фейрбейрн (William Fairbairn) и Итон Ходкинсон (Eaton Hodgkinson).

Уилльям Фейрбейрн[1]) (1789—1874) родился в Кельсо (Kelso) в Шотландии и был сыном бедного фермера. По окончании начальной школы ему предстояло стать помощником своему отцу в сельских работах. Но в возрасте 15 лет он поступил учеником в механическую мастерскую при угольных рудниках Пэрси-Мэйн близ Норзс-Шильде. Фейрбейрн был очень прилежным: после дневной работы в мастерской он проводил вечера за изучением математики и английской литературы. Таким путем за семь лет своего ученичества он хорошо восполнил пробелы своего образования. В 1811 г., закончив ученичество, Фейрбейрн перебрался в Лондон, где в это время строился мост Уотерлоо. Слава строителя Джона Ренни[2]) (John Rennie) (1762—1821) привлекла Фейрбейрна, но он не смог найти работы на строительстве моста и остался механиком. Он проводил вечера в библиотеках и таким путем продолжал возмещать отсутствие школьного образования, которого был лишен в детстве. После двух лет жизни в Лондоне и кратковременных пребываний на юге Англии и в Дублине Фейрбейрн поселился в 1814 г. в Манчестере. Там он надеялся встретить более широкий спрос на свои познания механика и сначала работал на разных заводах, а затем с 1817 г., совместно с другим механиком Джэмсом Лилли (James Lillie), открыл собственное предприятие.



Уилльям Фейрбейрн.

Сначала ему пришлось иметь дело с механическим оборудованием хлопчатобумажных фабрик. Это было для него новой областью, но в итоге тщательного исследования он вскоре раскрыл главные дефекты оборудования этих фабрик. Он нашел, что оно приводилось в движение большими валами квадратного поперечного сечения, на которые насаживались деревянные барабаны большого диаметра, причем вращение происходило с весьма малой скоростью, всего 40 оборотов в минуту. Повысив скорость

---

[1]) С биографией Фейрбейрна можно познакомиться по книге Pole William, The life of sir William Fairbairn, Bart, London, 1877.

[2]) Биографию Джона Ренни можно найти у Смайлса: Smiles, Lives of the Engineers, т. 2.

вращения, он смог уменьшить диаметр барабанов. Он улучшил также сцепления и таким путем пришел к более надежной и экономической конструкции. Благодаря этому успеху Фейрбейрн был привлечен к большой работе в хлопчатобумажной промышленности и стал известен как эксперт по механическому оборудованию заводов. В 1824 г. он был приглашен на хлопчатобумажный завод Кэтрин (Catrine) в Шотландии для улучшения работы заводской гидросиловой станции. В эту область он также внес технические усовершенствования, на этот раз в конструкцию водяных колес, причем его успех получил столь широкое признание, что вскоре ему стали поручать проектирование и сооружение гидросиловых станций. Его слава в этой специальности стала международной, и он был приглашен в Швейцарию для реконструкции и установки водяных колес для фирмы Эшер (G. Escher) в Цюрихе. За советом к нему обращались также деятели эльзасской промышленности.

К тому времени в технологию производства сварочного железа были внесены значительные улучшения, и Фейрбейрн заинтересовался изучением механических свойств нового материала и использованием его в различных инженерных сооружениях. Он познакомился с И. Ходкинсоном, уже получившим в то время широкую известность своими работами по сопротивлению материалов, и предложил ему выполнять эксперименты на своем заводе. Для этого была спроектирована и сконструирована специальная испытательная машина (рычаг Фейрбейрна) (рис. 61); на ней была проведена большая часть совместной исследовательской работы Фейрбейрна и Ходкинсона. По поручению Британской ассоциации развития науки (British Association for advancement of science) они приступили к своей деятельности с изучения механических свойств чугуна. В то время как Ходкинсон производил испытания на растяжение и сжатие, Фейрбейрн занялся экспериментальным исследованием изгиба. В этой работе он особенно интересовался изучением влияния времени и температуры. Обнаружив, что с момента приложения нагрузки прогиб балки с течением времени возрастает, он пожелал установить то предельное значение нагрузки, при котором такого нарастания прогибов еще не происходит. Его исследование влияния температуры показало, что разрушающая нагрузка резко падает с повышением температуры.

В 1830 г. Фейрбейрн заинтересовался конструкциями железных судов и провел обширное экспериментальное изучение прочности пластин из кованого железа и заклепочных соединений таких пластин[1]). Он нашел, что прочность железных пластин

[1]) Результаты этого исследования, выполненного в 1838—1839 гг., были опубликованы значительно позднее. См. Phil. Trans., ч. II, стр. 677—725, 1850.

приблизительно одинакова во всех направлениях. Произведя сравнительные испытания заклепочных швов ручной и машинной клепки, он показал качественное превосходство последней. Железные пластинки, которыми больше всего интересовался Фейрбейрн, находили применение в железных мостах. Об экспериментальной работе, которую он провел в связи с проектированием и сооружением таких мостов, будет сказано в дальнейшем (см. стр. 190).

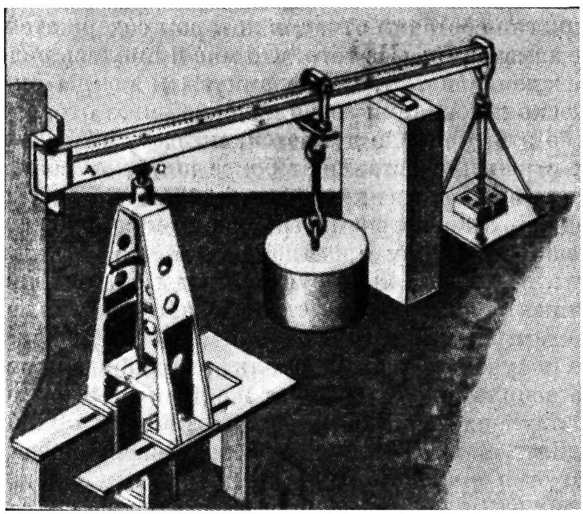


Рис. 61. Рычаг Фейрбейрна.

В своем труде по проектированию котлов[1]) Фейрбейрн исследудует сопротивление сплющиванию труб, подвергнутых наружному давлению. Его опыты над трубами различных размеров с закрепленными концами показали, что критическое значение наружного давления с достаточной точностью определяется формулой $p_{кр} = Ch^2/ld$, где h—толщина стенки, l—длина и d—диаметр трубы, C—константа, зависящая от упругих свойств материала. Чтобы найти более совершенные формы для труб и сферических оболочек, Фейрбейрн стал в дальнейшем пользоваться стеклом. Он изучил его упругие свойства и нашел предел прочности для некоторых его сортов, а затем воспользовался стеклянными трубами и шарами

[1]) См. Phil. Trans., 1858, стр. 389—413. Весьма подробное изложение этой работы дается в вышеупомянутой (см. стр. 150) книге Морэна.

в своем экспериментальном определении критического значения наружного давления [1]).

Результаты своих многочисленных опытов Фейрбейрн излагал в лекциях, а впоследствии описал в книгах, получивших широкую популярность среди инженеров того времени [2]). В знак признания ценности его научных трудов и за участие в проектировании трубчатых мостов «Британия» и «Конвэй» Фейрбейрн был избран в члены Королевского общества. В 1860 г. это ученое учреждение наградило его медалью.

Он был избран в состав жюри Парижской выставки 1855 г. и по ее закрытии составил отчет, в котором содержатся следующие интересные замечания: «Из того, что мне пришлось видеть, я вынес твердое убеждение в том, что французы и немцы опередили нас в теоретическом познании основ важнейших отраслей техники, и произошло это, как мне думается, потому, что научные учреждения этих стран предоставляют более широкие возможности для просвещения в области химической и механической науки... Под громадным воздействием стремления к самовозвеличению мы упорно расширяли нашу промышленность по ее количественным показателям, в то время как другие народы, находившиеся в менее благоприятных условиях и не столь щедро одаренные материальными благами природы, с гораздо большим прилежанием, чем мы, занимались изучением того, сколь разнообразными способами может быть использован один и тот же данный материал, и потому во многих случаях опередили нас в отношении качества». Этот опыт побудил Фейрбейрна заинтересоваться вопросами образования. Он вступил в связь с людьми, которые руководили обследованием царившего в то время невежества масс, и с неутомимой настойчивостью, указывал на то, что Англия должна улучшить свою систему народного просвещения.

Итон Ходкинсон (1789—1861) родился в Андертоне близ Норсвича в Чишайре в семье фермера. Он получил лишь начальное образование и с самой ранней юности начал работать на ферме, помогая своей матери-вдове. В 1811 г. его семья переселилась в Манчестер, и здесь Ходкинсон встретился со знаменитым ученым Джоном Дальтоном (1766—1844), который обратил внимание на способности молодого человека и начал обучать его математике. Таким путем Ходкинсону представился случай изучить классические труды Бернулли, Эйлера, Лагранжа.

---

[1]) См. Phil. Trans., 1859, стр. 213—247.

[2]) См. его «Useful information for engineers», London, 1856, а также вторую серию аналогичных сообщений под тем же заглавием, появившуюся из печати в 1860 г. См. также его книгу «On the application of cast and wrought iron to building purposes», London, 1856; 2-е изд., 1858. (*Прим. авт.*) Имеется русский перевод части этой книги: Ф е й р б е й р н, Железо, исторический обзор, производство, свойства..., СПб., 1864. (*Прим. ред.*)

С 1822 г. он начал работать в области сопротивления материалов и спустя два года опубликовал свою статью «О поперечной деформации и прочности материалов» («On the transverse strain and strength of materials»)[1]). Исследуя изгиб призматических стержней, он замечает, что равнодействующая растягивающих напряжений в каждом поперечном сечении должна быть равна равнодействующей сжимающих напряжений и, полагая, что поперечные сечения остаются плоскими, он заключает: «Удлинения наружных волокон по одной грани стержня относятся к укорочениям наружных волокон противоположной грани так же, как соответствующие расстояния этих граней от нейтральной оси». Этот результат не был новым, поскольку он был уже известен со времени Парана и Кулона, но заслуга этой статьи, как отмечает Тодхентер, состоит в том, что она научила английских инженеров-практиков помещать нейтральную ось в ее правильном положении. В этом исследовании Ходкинсон не пользуется законом Гука, полагая, что растягивающее напряжение пропорционально удлинению, возведенному в некоторую степень. С целью сохранения большей общности он допускает, что показатель этой степени для соотношения между укорочением и сжимающим напряжением имеет иное значение, чем для удлинения. Во второй части своей статьи автор приводит результаты опытов над деревянными балками и показывает, что в интервале напряжений, не превышающих предела упругости, к ним применим закон Гука.

Во второй статье[2]) Ходкинсон описывает свои испытания чугунных балок на изгиб и показывает, что с возрастанием нагрузки положение нейтральной оси в балке изменяется. Он находит, что модули упругости, пределы упругости и пределы прочности для чугуна имеют различные значения при растяжении и при сжатии. Располагая этими данными, Ходкинсон приступил к опытным поискам такой формы чугунной балки, которая при заданном расходе материала обеспечила бы ей наибольшую несущую способность. Опыт показал, что двутавровая балка с равными полками не является в этом отношении наилучшим решением, и что площадь поперечного сечения полки, работающей на растяжение, должна быть в несколько раз больше полки, подвергающейся сжатию.

Следующей темой практических исследований Ходкинсона был поперечный удар по балке. Полученные им результаты хорошо согласовались с предсказаниями элементарной теории, основывавшейся на допущениях: 1) кривая прогибов балки, изогнутой под ударной нагрузкой, должна иметь ту же форму, что

[1]) Напечатана в Mem. Proc. Manchester lit. and phil. Soc., т. IV, 1824.

[2]) Теоретические и экспериментальные исследования по определению прочности и наилучшей формы железных балок—Theoretical and experimental researches to ascertain the strength and best forms of iron beams, Manchester literary and philosophical society, 1830, стр. 401—544.

и в случае статического изгиба, и 2) ударяющее тело и балка после удара ведут себя так, как если бы они составляли одну массу. При вычислении общей скорости, которую принимают совместно ударяющее тело и балка непосредственно после удара, в расчет принимается только половина массы балки[1]).

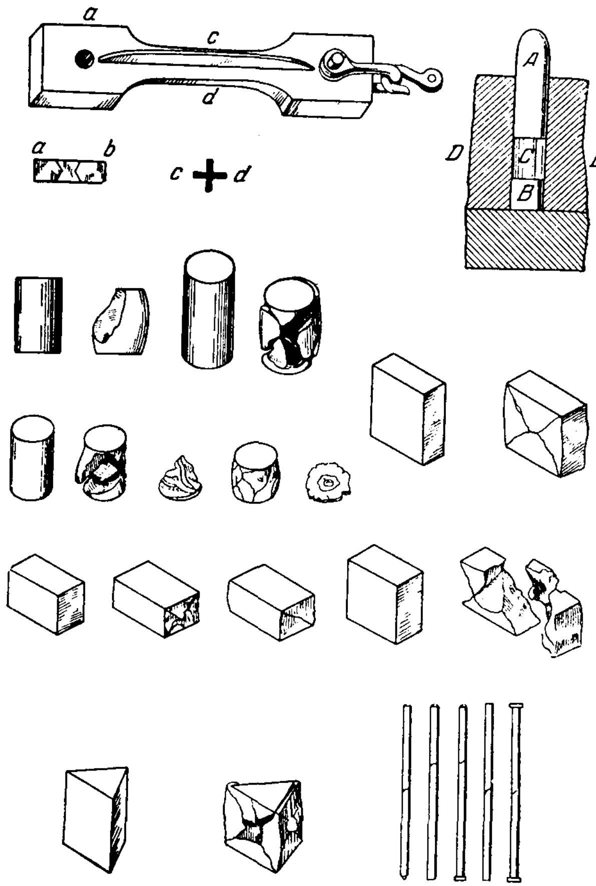


Рис. 62. Образцы, подвергшиеся раздавливанию при испытании на сжатие.

Ходкинсон опубликовал также и результаты своих работ, выполненных на заводе Фейрбейрна[2]). На рис. 62 показаны формы

[1]) Исследования Ходкинсона по ударной нагрузке были опубликованы в British Association Reports за годы 1833—1835.

[2]) Они были напечатаны в British Association Reports за 1837—1838 гг. Бо̀льшая часть материала была воспроизведена позднее в книге «Experimental researches on the strength and other properties of cast iron», London, 1846.

разрушения образцов из чугуна при испытании их на сжатие. Рассматривая их, Ходкинсон замечает, что разрушения носили одну общую черту, а именно: во всех испытанных образцах образуется либо конус, либо клин в результате скольжения материала под одинаковым приблизительно углом. В той же статье сообщается и о результатах испытания на изгиб чугунных двутавровых балок с различными полками. Из них явствует, что наибольшую несущую способность получает балка в том случае, если площади верхней и нижней ее полок относятся как 1 : 6 или 1 : 6½. Это соотношение равно приблизительно отношению пределов прочности чугуна при растяжении и сжатии.

В 1840 г. Ходкинсон представил в Королевское общество свое исследование о продольном изгибе колонн [1]). Его целью была опытная проверка теоретической формулы Эйлера. Общий вид использованной им лабораторной установки и типы подвергнутых испытанию образцов представлены на рис. 61. Он провел испытания с цилиндрическими сплошными и полыми образцами, с закругленными или плоскими торцами. Для гибких сплошных стержней было установлено хорошее соответствие с формулой Эйлера (т. е. критическая нагрузка оказалась пропорциональной величине d^4/l^2, где d—диаметр, а l—длина стержня). Было также найдено, что стержень с плоскими торцами имеет то же сопротивление, что и вдвое более короткий стержень с закругленными торцами.

Для более коротких стержней обнаружились более значительные отклонения от теоретической формулы. Из результатов испытаний сплошных цилиндрических образцов, имевших закругленные торцы, Ходкинсон приближенно установил, что при отношениях длины к диаметру, лежащих в пределах от 12 до 15, критическая нагрузка пропорциональна величине $d^{3,6}/l^{1,7}$.

В связи с проектированием трубчатых мостов «Британия» и «Конвэй» Ходкинсон совместно с Фейрбейрном провел несколько весьма важных испытаний по изгибу и выпучиванию тонкостенных труб. На этих опытах мы остановимся несколько ниже (см. стр. 190).

В 1847 г. Ходкинсон занял должность профессора технической механики в Лондонском университетском колледже и, занимая это место, принимал участие в качестве члена Королевской комиссии, образованной для изучения условий использования железа в железнодорожных сооружениях. В 1841 г. Ходкинсон был награжден Королевской медалью за свою работу по сопротивлению колонн и в том же году был избран в члены Королевского общества.

Эта книга была переведена на французский язык, см. Ann. ponts et chaussées, т. 9, стр. 2—127, 1855.

[1]) См. Phil. Trans., ч. II, стр. 385—456, 1840.

31. Развитие технического образования в Германии

После наполеоновских войн германская экономическая система была реконструирована. Возникла необходимость в развитии промышленности, и с этой целью было создано несколько технических учебных заведений по образцу, близко воспроизводившему Парижскую политехническую школу. Было решено строить систему инженерного образования на базе общеобразовательной подготовки по основным наукам—математике, физике, химии. Инженерам надлежало получить общее образование, равноценное тому, которое признавалось необходимым для других профессий и давалось университетами. Новым инженерным учебным заведениям был присвоен статут университетов, и на них была возложена обязанность готовить инженеров, которые не только были бы способны решать технические проблемы, но и были бы достаточно подготовлены для того, чтобы двигать вперед инженерную науку. Несмотря на то что эти основные положения были взяты из опыта Политехнической школы, германское техническое образование сильно отличалось от своего парижского прообраза. В то время как Парижская политехническая школа была лишь подготовительной ступенью для молодых людей, которым в дальнейшем предстояло пройти еще и инженерное обучение в одном из специализированных учебных заведений (к числу которых относились Школа мостов и дорог, Школа горных инженеров или Военная академия), германские инженерные учебные заведения охватывали полный курс обучения. В течение первых двух лет студентам надлежало пройти общенаучную подготовку. Следующие два года были посвящены изучению одной из отраслей техники. Новая система позволяла лучшим образом регулировать преподавание общей теории в отношении ее объема и содержания.

Была еще и другая существенная разница. Французские школы подготовляли инженеров главным образом для государственной службы, германские же технические учебные заведения с самого начала организовали свою работу в тесной связи с запросами частной промышленной инициативы и именно таким путем в большой степени содействовали росту промышленности. Большая разница между этими двумя типами технических школ выявлялась и в характере их внутренней структуры. В Политехнической школе господствовал военный режим, между тем как в учебных заведениях нового типа был принят статут германских университетов и преподавание велось на началах академической свободы. Они были автономными учреждениями, в которых совет профессоров избирал президента института и деканов отдельных факультетов. Студентам предоставлялась широкая свобода в планировании своей работы и в распределении своего времени.

Новый тип инженерного образования обнаружил свою высокую эффективность, и германские технические учебные заведения весьма скоро стали важным фактором индустриализации страны и развития инженерных наук. Общественное положение профессора в Германии всегда было весьма высоким, в результате чего в распоряжении инженерных школ всегда имелась возможность привлечь лучших инженеров к педагогической деятельности и к научно-исследовательской работе.

Что касается интересующей нас науки—инженерной механики, то германская наука вначале испытала на себе сильное влияние французской технической литературы—трудов Навье, Пуассона, Понселе и других. Но еще много раньше германские инженеры начали пробивать свой собственный путь, поскольку абстрактное изложение механики, столь популярное в Политехнической школе, не удовлетворяло их. Поэтому в рассматриваемый период (1833—1867) в Германии начали выходить книги по инженерной механике с более четко выраженным практическим уклоном, и в дальнейшем мы увидим, каким образом они повлияли на развитие сопротивления материалов.

Юлиус Вейсбах.

Остановим наше внимание на деятельности некоторых наиболее выдающихся германских профессоров механики этой эпохи. Юлиус Вейсбах (Julius Weisbach, 1806—1871) написал трехтомный труд по механике машиностроения и инженерного искусства, пользовавшийся большой известностью не только в Европе, но и в Америке, где он вышел в английском переводе[1]).

Юлиус Вейсбах, получивший в 1826 г. диплом знаменитой Горной академии во Фрейбурге, в дальнейшем, с целью усовершенствования своих знаний в основных науках, занимался два года (1827—1829) в Гёттингенском университете и год в Венском политехническом институте. По окончании этого образования Вейсбах отказался от представившейся ему возможности работать в качестве горного инженера и остался во Фрейбурге,

[1]) «Mechanics of machinery and engineering», Изд. Johnson W. R., Philadelphia, 1848. (*Прим. авт.*) См. также перевод на русский язык: Вейсбах Ю., Теоретическая и практическая механика (3 тома), перевод Стеблицкого, Соколова и Усова, СПб., 1859—1863 и «Добавления к I тому», перевод Усова, СПб., 1865. (*Прим. ред.*)

предпочтя зарабатывать себе средства к существованию частными уроками по математике. В 1833 г. он был приглашен Фрейбургской горной академией преподавать в ней прикладную математику, а с 1836 г. до конца своей жизни он был в ней профессором механики и машиностроительного проектирования. Главнейшие оригинальные работы Вейсбаха относятся к области гидравлики, где он следовал методам Понселе и где ему удалось получить важные практические результаты путем сочетания опытных данных с весьма элементарным теоретическим анализом.

Ф. Редтенбахер.

Задачи сопротивления материалов трактуются в его книге по механике с высоким мастерством, а его оригинальное достижение в этой области состоит в разработке методов расчета частей машин, находящихся в сложном напряженном состоянии[1]). В основу назначения безопасных размеров для частей машин он кладет теорию прочности наибольших деформаций. Этот метод расчета был предложен Понселе (см. стр. 111) и в дальнейшем был разработан Сен-Венаном.

Вейсбах испытывал живой интерес к методам преподавания инженерной механики, организовав лабораторию, в которой студенты могли проверять принципы статики, динамики и сопротивления материалов опытным путем[2]). Его студенты выполняли опыты по изгибу сплошных и составных балок, моделей ферм, кручению валов и по сочетанию кручения и изгиба. Для этих испытаний применялись деревянные модели, причем размеры их были таковы, что небольших сил было достаточно для того, чтобы получить деформации настолько большие, что их легко можно было измерять. Насколько известно, это был первый случай, когда студенты выполняли экспериментальные работы по сопротивлению материалов.

Ф. Редтенбахер (F. Redtenbacher, 1809—1863) был другим выдающимся немецким профессором механики этого периода, боровшимся за введение научного анализа в проектирование машин. Он получил в 1829 г. диплом Венского политехнического института

---

[1]) Z. Ing., т. 1, стр. 252—265, 1848.

[2]) Вейсбах опубликовал описание этих занятий в журнале Civiling, т. 14, стр. 339—370, 1868.

и, зарекомендовав себя высокими успехами еще студентом, получил приглашение занять в этом институте должность преподавателя инженерной механики. В 1833 г. он начал преподавать математику в Цюрихском техническом училище[1]). Здесь он дополнял свою педагогическую деятельность работой в качестве инженера-проектировщика фирмы Эшер и Висс (Escher and Wyss) и таким путем приобрел практический опыт в проектировании машин. Политехнический институт в Карлсруэ предложил ему в 1841 г. кафедру профессора по прикладной механике и по проектированию машин, и он работал здесь профессором (а затем и ректором института) до конца своей жизни. Совмещая в себе широкие познания по механике с практическим опытом, он полностью реорганизовал систему преподавания машиностроительного проектирования и ввел теоретический анализ в решение проектировочных проблем. Он занял ведущее положение в развитии технического образования в Германии. Опубликованные им труды встретили широкий прием среди инженеров-механиков [2]), а его методы получили использование в промышленности. Он интересовался применением сопротивления материалов в определении безопасных размеров частей машин, и в его книгах «Principien der Mechanik und des Machinenbaues» (1852) («Основы механики и машиностроения») и «Der Maschinenbau» (1862—1865) («Машиностроение») мы находим решения таких задач, как исследование напряжений в крюках, листовых пружинах, спиральных пружинах, эллиптических кольцах (звеньях для цепей) и т. п. В то время с расчетом таких частей специалисты были знакомы очень плохо, и Редтенбахер оказался пионером в этой области[3]).

После смерти Редтенбахера руководителем кафедры прикладной механики в Политехническом институте Карлсруэ был избран Ф. Грасхоф[4]) (F. Grashof) (1826—1893). Последний получил техническое образование в Берлинском институте ремесел. По окончании института он в качестве моряка провел два с половиной года в плавании, посетив Индию, Австралию и Африку. По возвращении (в 1851 г.) на родину он начал готовиться к преподавательской деятельности, а с 1854 г. взял на себя в Институте ремесел чтение лекций по прикладной математике. В 1856 г. он

---

[1]) В 1855 г. это училище было реорганизовано в Высшую государственную техническую школу генералом Дюфуром (Dufour), бывшим воспитанником Парижской политехнической школы.

[2]) Его книга «Resultate für den Maschinenbau», 1848, была переведена на французский язык. (*Прим. авт.*) В переводе на русский язык в Петербурге в 1862 г. его книга была издана под названием: «Теоретические и практические данные для проектирования и постройки машин». (*Прим. ред.*)

[3]) Эти решения Редтенбахера приводятся в книге В. Контамэна: Contamin V., Résistance appliquée, Paris, 1878.

[4]) См. Wentzcke, Franz Grashof, ein Führer der deutschen Ingenieure, а также Plank R., Z. Ver. deut. Ing., т. 933, 1926.

принял участие в организации Союза германских инженеров (Verein deutscher Ingenieuren—V.D.I.) и стал редактором учрежденного этим Союзом журнала. Он опубликовал в этом журнале ряд статей по различным вопросам прикладной механики. Научно-литературная деятельность принесла ему известность и славу и послужила основанием к избранию его в Политехнический институт Карлсруэ как преемника Редтенбахера. Здесь Грасхоф продолжал вести преподавание по различным разделам инженерной механики.

Ф. Грасхоф.

Он проявлял большой интерес к сопротивлению материалов и в 1866 г. выпустил руководство по этому предмету «Theorie der Elasticität und Festigkeit» («Теория упругости и прочности»). В этой книге он не ограничивается изложением только элементарного сопротивления материалов, но вводит также основные уравнения теории упругости и пользуется ими в теории изгиба и кручения призматических стержней и в теории пластинок. Излагая изгиб стержня, он находит решения для некоторых форм поперечного сечения, не рассмотренных Сен-Венаном—основоположником точной теории изгиба призматического стержня (см. стр. 287). При выводе формул для проектирования частей машин Грасхоф принимает критерий прочности, основанный на теории наибольшей деформации, и продолжает исследования Вейсбаха по изучению сложного напряженного состояния[1]). В разных случаях Грасхоф предлагает свои собственные методы решения и находит таким путем новые результаты. Разбирая, например, изгиб стержней с шарнирными концами, он ставит вопрос о влиянии продольной растягивающей силы, которая должна была бы возникнуть в результате изгиба при неподвижных шарнирах, и показывает, каким образом можно вычислить соответствующие растягивающие напряжения. Вычисления показывают, что при изгибе гибких стержней эта продольная сила приобретает большое значение, и тогда пренебрегать ее влиянием на прогиб и напряжения становится недопустимым.

---

[1]) См. Z. Ver. deut. Ing., т. 3, стр. 183—195, 1859.

Исследуя цилиндрические оболочки, подвергнутые внутреннему давлению, Грасхоф не только применяет формулы Ламе, но учитывает и местные напряжения изгиба, возникающие в тех случаях, когда края оболочки жестко соединяются с торцовыми плитами. В этом исследовании он пользуется дифференциальным уравнением прогибов продольных полосок, вырезанных из оболочки смежными радиальными сечениями[1]). Грасхоф дает также полные решения для некоторых случаев симметрично нагруженных круглых пластинок. Рассматривает он и равномерно нагруженные прямоугольные пластинки, предлагая для некоторых случаев приближенные решения.

В изложении своих трудов Грасхоф предпочитает пользоваться аналитическими методами и редко прибегает к чертежам для пояснения своих мыслей. Обычно он начинает с постановки проблемы в ее наиболее общей форме и только в дальнейшем, когда общее решение уже найдено, вводит упрощения, допустимые в известных частных случаях. Такая манера изложения затрудняет чтение; по этой причине его книга не приобрела широкого распространения среди инженеров-практиков и оказалась слишком трудной для большинства студентов инженерной специальности. Тем не менее более настойчивые студенты могли извлекать из этой книги действительно глубокое знание теории сопротивления материалов. Книга Грасхофа не утратила своего значения и до наших дней, поскольку она представляет собой первую попытку ввести теорию упругости в изложение сопротивления материалов для инженеров.

Опыты Фейрбейрна по изучению потери устойчивости труб круглого сечения при равномерном внешнем давлении (см. стр. 153) привели Грасхофа к чрезвычайно интересному теоретическому исследованию выпучивания тонких круглых труб большой длины[2]). Полагая, что поперечное сечение первоначально круглой трубы получает в результате выпучивания эллиптическую форму, Грасхоф находит для критического давления следующее выражение:

$$p_{\text{кр}} = \frac{2Eh^3}{d^3},$$

где h—толщина стенок трубы, d—ее диаметр. В своем исследовании Грасхоф выделяет из трубы элементарное кольцо и пренебрегает напряжениями, действующими между составляющими трубу смежными кольцами. Этим объясняется, почему у него в формулу входит непосредственно модуль E вместо $E/(1-\mu^2)$.

---

[1]) Изгиб труб кругового сечения по торцам, а также у колец жесткости был исследован, по-видимому, впервые Шеффлером (H. Scheffler). См. «Organ für Eisenbahnwesen», 1859. См. также W i n k l e r E., Civiling, т. 6, 1860.

[2]) См. статью Грасхофа в Z. Ver. deut. Ing., т. 3, стр. 234, 1859.

На протяжении средней трети XIX столетия развивалась и экспериментальная работа германских ученых по изучению механических свойств строительных материалов: А. К. фон Бург провел в Венском политехническом институте испытания стальных пластинок[1]), К. Кармарш в Ганноверском политехникуме изучал свойства металлической проволоки различных диаметров[2]). В. Людерс исследовал сеть ортогональных систем кривых, появляющихся на поверхности образцов из мягкой стали при их изгибе и в других случаях, когда материал подвергается значительному деформированию. Он показал, что эти кривые выявляются резче, если поверхность металла протравить слабым раствором азотной кислоты[3]).

В 1852 г. Л. Вердер (L. Werder) спроектировал и сконструировал в Нюрнберге испытательную машину на 100 *т* для контрольного испытания растянутых элементов мостов, спроектированных В. Паули (W. Pauli). Эта машина оказалась весьма точной и пригодной для испытания крупных элементов сооружений. В последующем большая часть европейских лабораторий смонтировала и установила у себя подобные машины, почему не приходится сомневаться, что значительная доля научно-исследовательской работы по механике материалов, проведенной во второй половине XIX столетия, была выполнена именно на машинах Вердера.

32. Вклад Сен-Венана в теорию изгиба балок

Главная часть научной работы Сен-Венана относится к математической теории упругости, и о ней будет сказано далее. Но он внес многое также и в элементарное учение о сопротивлении материалов, в особенности в теорию изгиба стержней[4]). Он первый исследовал точность допущений, лежащих в основе теории изгиба, а именно: 1) поперечные сечения балки остаются при ее деформировании плоскими и 2) продольные волокна балки при этом не оказывают давления друг на друга, находясь в состоянии простого осевого растяжения или сжатия. Он доказывает, что оба эти допущения строго выполняются лишь в случае *чистого* изгиба, когда на балку действуют две равные, противоположно направленные пары, приложенные по концам. Исследуя чистый изгиб балки прямоугольного сечения (рис. 63, *а*), он показывает, что изменения

---

[1]) Burg A. K., Sitz. Akad. Wiss. Wien, Math.-Naturwiss. Klasse, т. 35, стр. 452—474, 1859.

[2]) Karmarsch K., Polytech. Zentr, 1859, Leipzig.

[3]) Lüdesrs W., Dinglers Polytech. J., Stuttgart, 1860.

[4]) Большая часть оригинальных исследований Сен-Венана в области элементарной теории сопротивления материалов собрана в его примечаниях и дополнениях к третьему изданию книги Навье «Resumé des leçons...», Paris, 1864, а также в его литографированном курсе «Leçons de mécanique appliquée faites par intérim par M. de St-Venant», 1837—1838.

длины волокон и соответствующие поперечные деформации удовлетворяют не только приведенным выше условиям, но также и условию неразрывности деформации. Он показывает также, что первоначально прямоугольное поперечное сечение изменяет свою форму, как это приведено на рис. 63, *б*, вследствие того, что под воздействием поперечного сужения волокон на выпуклой грани и расширения их на вогнутой первоначально прямая линия ab слегка изгибается по кривой радиуса ρ/μ, где μ—коэффициент Пуассона, а ρ—радиус кривизны изогнутой оси балки. Благодаря этой поперечной деформации расстояния нейтральных волокон a и b от верхней и нижней поверхностей балки также слегка изменяются. Верхняя и нижняя грани изгибаются по *антикластическим* поверхностям. В этой работе впервые было исследовано искажение формы поперечного сечения балки при ее изгибе[1]).

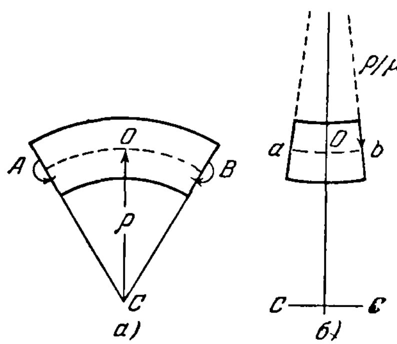


Рис. 63.

Переходя к консоли, нагруженной на свободном конце (рис. 64), Сен-Венан показывает, что в плоскостях поперечных сечений, например ab и a_1b_1, действуют касательные напряжения, вследствие чего поперечные сечения не остаются при изгибе плоскими, а коробятся, как это приведено на рисунке. Поскольку это коробление одинаково для любых двух поперечных сечений, оно не вызывает изменений в длине волокна и потому не оказывает влияния на величину напряжений изгиба (нормальных), вычисляемых в предположении, что поперечные сечения остаются при изгибе плоскими.

Навье в своей книге предполагал, что нейтральная линия всегда перпендикулярна к плоскости, в которой действуют изгибающие силы. Перси (Persy)[2]) первый указал на то, что это предположение законно лишь в случае, если плоскость xy, в которой действуют изгибающие силы, пересекает поперечные сечения балки по одной из главных осей инерции (рис. 65). Только в этом случае момент внутренних сил относительно оси y (равный $\frac{E}{\rho}\int_\Omega zy\,d\omega$) обращается в нуль, а момент тех же сил относительно

[1]) Определение коэффициента Пуассона путем оптического измерения соотношения между двумя главными кривизнами антикластических поверхностей было выполнено Корню (Cornu); см. Compt. rend., т. 64, стр. 333, 1869.

[2]) См. Navier, Résumé des leçons..., 3-е изд., стр. 53.

оси z уравновешивает момент внешних сил. Сен-Венан показал, каким образом можно определить положение нейтральной оси, если плоскость, в которой действуют изгибающие силы, не проходит через главную ось поперечных сечений. Если рис. 66 представляет эллипс инерции поперечного сечения балки с главными осями Ou и Ov, а OP—плоскость, в которой действуют силы, то, как устанавливает Сен-Венан, нейтральная линия nn будет параллельна касательной к эллипсу, проходящей через точку его пересечения с плоскостью OP.

Сен-Венан показывает[1]), что прогиб консоли может быть вычислен элементарным путем, без интегрирования соответству-

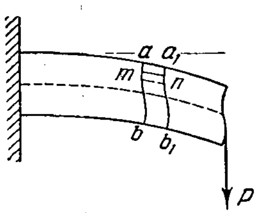


Рис. 64.

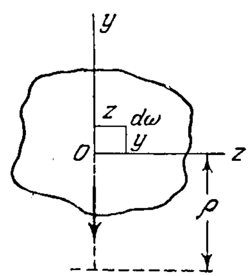


Рис. 65.

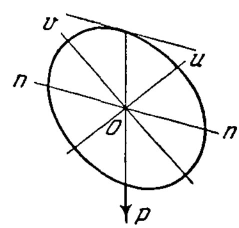


Рис. 66.

ющего дифференциального уравнения, и вводит прием, называемый ныне *методом моментных площадей*. Прогиб nn_1, соответствующий кривизне элемента mm_1 изогнутой оси балки (рис. 67), равен

$$\frac{\overline{mm_1}}{\rho}\,\overline{mn} \approx \frac{dx}{\rho}(l-x).$$

Замечая теперь, что кривизна в произвольном сечении равна

$$\frac{M}{EI}=\frac{P(l-x)}{EI},$$

он получает выражение для прогиба

$$\delta=\frac{P}{EI}\int_0^l (l-x)^2\,dx=\frac{Pl^3}{3EI}.$$

Входящий сюда интеграл можно вычислить как статический момент треугольника, представляющего собой эпюру изгибающего момента. Подобным же образом он находит и прогиб, вызванный равномерно распределенной нагрузкой.

[1]) Navier, Résumé des leçons..., 3-е изд., стр. 72.

Сен-Венан исследует также большие прогибы консоли, при которых кривизна $1/\rho$ не может быть заменена приближенным значением d^2y/dx^2. Он дает решение в виде ряда, суммирование которого позволяет вычислить прогиб δ с любой желаемой точностью[1]).

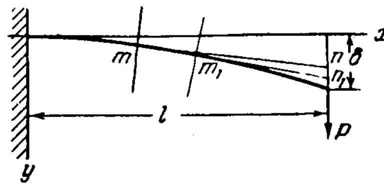


Рис. 67.

Все описанные выше результаты были получены Сен-Венаном в предположении справедливости закона Гука. В дальнейшем Сен-Венан переходит к изгибу балок, материал которых не следует этому закону[2]). Он дает полное решение задачи, основываясь на гипотезе плоских сечений и связывая напряжения и деформации не линейным законом, а зависимостями

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= A\left[1-\left(1-\frac{y}{a}\right)^{m}\right] \text{— для растяжения,} \\ \sigma_1 &= B\left[1-\left(1-\frac{y}{a_1}\right)^{m_1}\right] \text{— для сжатия,} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

где A, B, a, a_1, m, m_1 — постоянные, а y — абсолютное значение расстояния точки от нейтральной оси. Ограничивая постановку задачи случаем балки прямоугольного сечения bh, можно найти расстояния y_1 и y_2 наиболее удаленных от нейтральной оси волокон из двух уравнений:

$$y_1+y_2=h, \quad \int\limits_0^{y_1}\sigma\,dy=\int\limits_0^{y_2}\sigma_1\,dy. \qquad \text{(b)}$$

Зная положение нейтральной оси, Сен-Венан получает возможность вычислить момент внутренних сил, пользуясь соотношениями (a).

Сен-Венан останавливается на частном случае $y_1=a$ (что соответствует $A=\sigma_{\text{макс}}$). Далее, он полагает, что две кривые, представленные уравнениями (a), имеют общую касательную при $y=0$, так что модуль материала при малых напряжениях получается одинаковым как для растяжения, так и для сжатия.

Если, кроме того, обе кривые (a) тождественны (т. е. если $m=m_1$, $a=a_1$, $A=B$), то момент внутренних сил, как находит Сен-Венан, выражается уравнением $M=\alpha bh^2\sigma_{\text{макс}}/6$, где α — коэффициент, значение которого зависит от величины m. Эти

[1]) Navier, Résumé des leçons ..., 3-е изд., стр. 73.
[2]) Navier, Résumé des leçons..., 3-е изд., стр. 175.

значения приводятся в следующей таблице:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	
α	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{81}{56}$	$\frac{35}{24}$	$\frac{22}{15}$	$=1,467$

Мы видим, что с увеличением m коэффициент α также возрастает, приближаясь к значению $\frac{3}{2}$, которое достигается, когда растягивающие и сжимающие напряжения распределяются равномерно. Если $m_1=1$, материал следует закону Гука при сжатии. Распределения напряжений, соответствующие различным значениям m, представлены на рис. 68. В приведенной ниже таблице даются значения отношений y_1/y_2, определяющих положение нейтральной оси, значения отношения максимального сжимающего напряжения к максимальному растягивающему, а также значения коэффициента α в формуле

$$M=\frac{\alpha\sigma_{\text{макс}}bh^2}{6}.$$

m	1	2	3	4	5	6	7	∞
$\lvert\sigma_{\text{мин}}\rvert/\sigma_{\text{макс}}$	1	1,633	2,121	2,530	2,887	3,207	3,500	∞
$y_1:y_2$	1	1,225	1,414	1,581	1,732	1,871	2,000	∞
α	1	1,418	1,654	1,810	1,922	2,007	2,074	3

Для $m=6$ получаем приближенно $M=\sigma_{\text{макс}}bh^2/3$, что совпадает с выводом теории Мариотта (см. стр. 34), а также со значениями $M_{\text{пред}}$, полученными экспериментально Ходкинсоном для чугунных балок прямоугольного сечения. При $m=\infty$ мы приходим к теории Галилея, согласно которой растягивающие напряжения распределены по поперечному сечению равномерно, а сжимающие напряжения дают равнодействующую, направленную по касательной к вогнутой поверхности балки. Это исследование изгиба балок прямоугольного сечения, не следующих закону Гука, может быть использовано при вычислении разрушающего (предельного) изгибающего момента для балок, сечение которых отличается от прямоугольного. Если, например, испытания чугунных балок прямоугольного профиля показывают, что точное значение $M_{\text{пред}}$ получается при значениях коэффициентов $m=6$, $m_1=1$, мы вправе воспользоваться этими же значениями m и m_1 при вычислении $M_{\text{пред}}$ для балок иных профилей, производя этот расчет по тем же формулам.

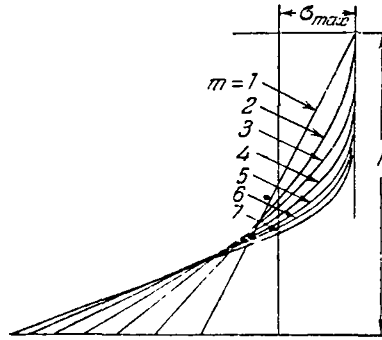


Рис. 68.

В элементарном обсуждении чистого изгиба балок (см. рис. 63) Сен-Венан формулирует принцип, носящий ныне его имя. Он утверждает, что распределение напряжений, найденное для этого случая, совпадает с точным решением лишь при условии, если приложенные по концам внешние силы распределены по торцовым сечениям точно таким же образом, как они распределены и по промежуточным сечениям. Но полученное решение, как он утверждает[1]), будет также достаточно точным и для всякого иного, если только равнодействующая сила и равнодействующая пара приложенных сил остаются неизменными при всех этих распределениях. Он ссылается на некоторые свои опыты с каучуковыми стержнями как на подтверждение того, что если система самоуравнивающихся сил распределена по небольшому участку поверхности призмы, то существенная деформация может возникнуть лишь в непосредственной близости этим силам. На рис. 69 приводится один из примеров Сен-Венана. Две равные противоположно направленные силы, действущие на каучуковый стержень, производят лишь местную деформацию у его торца, по остальной же своей длине он остается почти не деформированным. Принципом Сен-Венана инженеры пользуются весьма часто в практике расчета напряжений в сооружениях. Мы встретимся с этим понятием еще раз, когда познакомимся с работами Сен-Венана по кручению и изгибу призматических стержней (см. стр. 283).

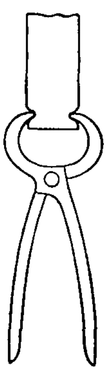


Рис. 69.

Сен-Венан исследовал также изгиб кривого бруса, причем ввел в формулы Навье (см. стр. 98) дополнительные члены, учитывающие перемещения, вызываемые удлинением оси бруса, а также сдвигом. В качестве примеров он исследует деформации под действием силы тяжести кругового кольца, подвешенного

[1]) См. Navier, Résumé des leçons..., 3-е изд., стр. 40.

в вертикальной плоскости, и такого же кольца, установленного на горизонтальной плоскости и нагруженного в вершине.

Сен-Венан обращает внимание на то, что при изучении деформации бруса двоякой кривизны недостаточно определить форму его осевой линии, так как деформации и напряжения могут возникнуть в таком стержне даже и в том случае, если его осевая линия останется неизменной. Представим себе, разъясняет он, круглую упругую проволоку двоякой кривизны, помещенную внутри желоба, того же очертания и того же поперечника, что и проволока. Такую проволоку можно будет подвергнуть вращению в желобе. В результате этого сравнительно более длинные волокна сократятся, более же короткие удлинятся, хотя форма осевой линии при этом и не изменится. Из этого следует, что напряжения изгиба и кручения в проволоке не могут быть вполне определены деформацией осевой линии и что при этом необходимо также учесть углы поворота поперечных сечений относительно осевой линии проволоки. Сен-Венан не ограничивается общим решением этого вопроса, но применяет свою теорию к частным задачам. Он дает решение для бруса, ось которого изогнута по дуге окружности и на который действуют силы, перпендикулярные к плоскости этой оси (рис. 70), а также выводит уравнение для удлинения винтовой пружины силами, приложенными по концам пружины и направленными по ее оси[1]).

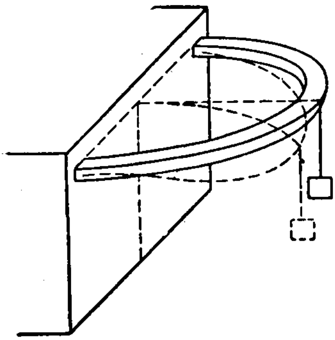


Рис. 70.

В вопросе о назначении допускаемых напряжений для сооружений Сен-Венан неизменно придерживается того взгляда, что предел упругости материала следует считать достигнутым с того момента, когда расстояния между молекулами в результате деформации превысят некоторое определенное значение, характерное для каждого данного материала. Иными словами, его формулы для расчета безопасных размеров сооружений базируются на теории наибольшей деформации как критерия прочности. Так, например, для проектирования валов, работающих на совместное действие кручения и изгиба, он устанавливает формулу, исходя из наибольшего удлинения волокон. Сразу же после ее опубли-

[1]) Об этих результатах Сен-Венаном было сообщено в его ранних мемуарах, собранных для печати в отдельном томе под заглавием «Mémoires sur la résistance des solides suivis de deux notes sur la flexion des pièces à double courbure», Paris, 1844.

кования эта формула нашла непосредственное практическое применение среди инженеров.

Сен-Венан показал, что чистый сдвиг вызывается растяжением в одном направлении при равном ему сжатии в направлении перпендикулярном. Принимая для коэффициента Пуассона значение, равное 0,25, он заключает, что допускаемое напряжение при сдвиге должно составлять 0,8 от соответствующего напряжения при простом растяжении.

33. Д. И. Журавский и его исследования касательных напряжений в балках

Впервые к вопросу о касательных напряжениях в консоли привлек внимание Кулон, отметивший, что они приобретают известное значение лишь в случае изгиба балок небольшой длины. Томас Юнг в своих «Лекциях по натуральной философии» указал[1]), что способность сопротивляться сдвигу отличает твердые тела от жидких. Вика (Vicat) (см. стр. 104) привел много случаев, когда это сопротивление приобретает первостепенную важность, и подверг теорию изгиба балок критике на том основании, что она не учитывает касательных напряжений. Если в первом издании книги Навье (1826) не встречается никаких упоминаний об этих напряжениях, то во второе издание (1833) включен уже отдельный параграф об изгибе коротких балок. Для касательных напряжений, распределенных по защемленному опорному сечению консоли, здесь дается среднее значение и приводится неудачный метод сочетания их с продольными нормальными напряжениями изгиба. Строгое решение задачи о касательных напряжениях в балках было дано Сен-Венаном в его знаменитой работе об изгибах «Mémoire sur la flexion»[2]). Но в ней рассмотрено лишь небольшое число простейших поперечных сечений балок, и потому в более сложных случаях инженеры оказались вынужденными (как и по сей день) пользоваться приближенным элементарным решением, предложенным Д. И. Журавским[3]).

---

[1]) См. Lectures on natural philosophy, т. 1, стр. 135.

[2]) См. J. L i o u v i l l e, 1856.

[3]) Теория касательных напряжений в балках прямоугольного профиля была разработана Д. И. Журавским в 1844—1850 гг. в связи с проектированием деревянных мостов для железной дороги, соединявшей Петербург с Москвой. Работа была представлена в Российскую Академию наук совместно с другими исследованиями, относившимися к проектированию мостов системы Гау, в 1854 г. (см. стр. 226). За эту работу Д. И. Журавский был награжден Академией премией имени Демидова. (*Прим. авт.*) Обзору деятельности и трудов Д. И. Журавского посвящено много работ, опубликованных в России в дореволюционное и советское время. Наиболее обстоятельный обзор был дан в речах М. Н. Герсеванова, Н. А. Белелюбского и Л. Ф. Николаи, произнесенных на торжестве по случаю установки мраморного бюста Д. И. Журавского в Институте инж. п. с., состояв-

Дмитрий Иванович Журавский (1821—1891) окончил в 1842 г. Институт инженеров путей сообщения в Петербурге, организованный, как мы уже отмечали (см. стр. 139), французскими инженерами. Когда там учился Журавский (1838—1842), французских профессоров в нем уже не было и преподавание велось русскими специалистами. Математику преподавал М. В. Остроградский, совмещавший в себе одновременно славу широко известного математика и дарование выдающегося педагога[1]). В своих лекциях он часто уходил далеко за пределы требуемого установленной программой, и в лице его Журавский встретил, несомненно, счастливый случай, позволивший ему получить чрезвычайно хорошую математическую подготовку. Механические свойства материалов он изучил под руководством А. Т. Купфера (A. T. Kupffer) (см. стр. 267).

Дальнейший жизненный путь Журавского после окончания им Института складывается в тесной связи с развитием железнодорожного строительства в России. Первые русские железные дороги были проложены в 1838 г. Это были две короткие линии между Петербургом и Царским Селом (ныне г. Пушкин), а также между Петербургом и Петергофом[2]). В 1842 г. началось строительство железной дороги, соединявшей Петербург с Москвой, и Журавский сразу же по окончании института был направлен на работу по осуществлению этого крупного сооружения. Его способности были скоро оценены, и в 1844 г. на него было возложено проектирование и производство работ по одному из важнейших сооружений этой железнодорожной линии, именно моста через реку Веребье

шемся 9 (21) февраля 1897 г. Эти речи были опубликованы в журнале «Известия собрания инж. п. с.», 1897, № 4 и в «Сборн. Ин-та инж. п. с.», LII, 1899. См. также статью Н. М. Беляева «Д. И. Журавский» в сборнике «Люди русской науки», Гостехиздат, М.—Л., 1948, т. II, стр. 906—913. (*Прим. ред.*)

[1]) Михаил Васильевич Остроградский (1801—1861) родился в деревне близ Полтавы на Украине. По окончании Харьковского университета он направился в Париж, где стал учеником Коши, Пуассона и Фурье. Особую известность он получил за свою работу в области вариационного исчисления. В «Истории вариационного исчисления» Тодхентера («History of the calculus of variations») мы находим целую главу, посвященную научной работе Остроградского. Последний работал также и в области теории упругости, и его исследования по распространению волн в упругом теле излагаются в книге Тодхентера—Пирсона «History of the theory of elasticity», т. 1. (*Прим. авт.*) Наиболее подробный очерк жизни и научного творчества М. В. Остроградского, в том числе и обзор его работ по теории упругости, приведен в монографии Гнеденко Б. В., Михаил Васильевич Остроградский, М., 1952, см. также Отрадных Ф. П., Михаил Васильевич Остроградский, Изд. ЛГУ, Л., 1953 и Геронимус Я. Л., Очерки о работах корифеев русской механики, М., 1952, стр. 13—57. (*Прим. ред.*)

[2]) Железнодорожная линия между Петербургом и Петергофом (ныне г. Петродворец) и далее до Ораниенбаума (ныне г. Ломоносов) была сооружена только в середине 50-х годов. (*Прим. ред.*)

(девять пролетов длиной 54 *м* с проезжей частью, возвышавшейся на 51 *м* над горизонтом воды). В конструкциях этого моста Журавский широко пользовался деревянными балками, которые имели порой большую высоту, а также применил и составные деревянные балки. Материал оказывал весьма слабое сопротивление скалыванию вдоль волокон, и Журавский сделал правильное заключение, что касательные напряжения в подобных балках приобретают большое значение и что не учитывать их недопустимо. Существовавшая в то время литература не давала никаких указаний относительно способов вычисления этих напряжений, и Журавскому самому пришлось решить эту задачу.

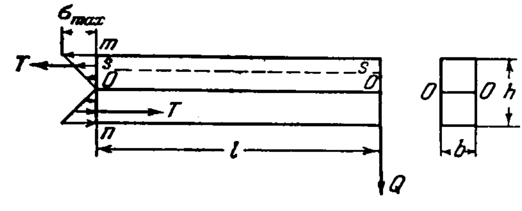


Рис. 71.

Начав с простейшего случая консоли прямоугольного сечения, нагруженной на свободном конце (рис. 71), и рассматривая условия, создающиеся в нейтральной плоскости OO, Журавский приходит к заключению, что нормальные напряжения, распределенные по поперечному сечению mn у защемленного опорного конца, стремятся вызвать скалывание по плоскости OO. Величина скалывающей силы T получается при этом равной

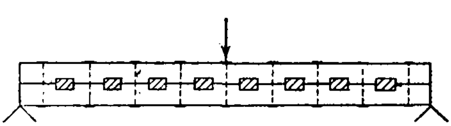


Рис. 72.

$$T = \frac{\sigma_{макс} bh}{4} = \frac{3Ql}{2h};$$

следовательно, соответствующее касательное напряжение, распределенное равномерно по нейтральной плоскости OO, выразится частным

$$\tau = \frac{T}{lb} = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh}.$$

Подобным же образом Журавский вычисляет и касательные напряжения, действующие в плоскости ss, параллельной плоскости OO. В том случае, если нагрузка распределена по длине консоли равномерно, касательные напряжения, как доказывает Журавский, распределяются по нейтральной плоскости уже не равномерно, но возрастают с удалением от свободного конца.

Получив такое решение для сплошной балки, Журавский обращается к составным деревянным балкам (типа рис. 72) и показывает, каким образом при этом можно вычислить силы, действующие на каждую отдельную шпонку. Далее, им доказывается, что если механические свойства материала шпонок и балки известны, то из этих данных можно вычислить и необходимые размеры шпонок. Он применяет свой метод к расчету составных железных балок, указывая порядок вычисления шага заклепок, когда допускаемая величина скалывающей силы на одну заклепку известна. Журавский исследует балки трубчатого профиля (рис. 73) и на том же основании подвергает критике размещение заклепок в трубчатых мостах «Конвэй» и «Британия» (см. стр. 196). Он показывает, что израсходованное на эти конструкции количество заклепок можно было бы сильно сократить, если бы было учтено то обстоятельство, что действующая на балку поперечная сила уменьшается от опор к середине пролета, и, следовательно, шаг заклепок в средней части пролета можно было бы увеличить без ущерба для прочности балки.

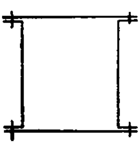


Рис. 73.

Эта часть научного наследия Журавского, посвященная исследованию касательных напряжений в балках, была переведена на французский язык[1]). Сен-Венан с похвалой высказался о приближенном методе Журавского и в своих дополнениях к третьему изданию книги Навье (стр. 390) пользуется этим методом в применении к балкам прямоугольного профиля, высота которого много больше ширины. Метод Журавского вошел в учебники по сопротивлению материалов[2]) и с тех пор стал широко применяться инженера-

---

[1]) См. Ann. ponts et chaussées, т. 12, стр. 328, 1856. (*Прим. авт.*) Это исследование Д. И. Журавского было опубликовано в 1855—1856 гг. в четырех изданиях. Представлено к опубликованию оно было еще в 1848 г., но впервые увидело свет только в 1855 г. как приложение к серии статей под общим заглавием «Результаты исследования системы Гау, примененной к мостам С.-Петербурго-Московской железной дороги», печатавшихся в 1850—1855 гг. в «Журн. Гл. упр. п. с. и публ. зд.» (т. XXII, кн. 6, 1855). В том же году все эти статьи были опубликованы отдельным изданием под названием «О мостах раскосной системы Гау», ч. I и II, СПб., 1855 (приложение—в ч. II, стр. 139—161); кроме того, приложение было издано отдельной книгой в переводе на французский язык «Remarques sur la résistance d'un corps prismatique et d'une piece composée en bois ou en tôle de fer à une force perpendiculaire à leur longueur», St. Petersbourg, 1855. Под тем же названием, но с некоторыми сокращениями оно было опубликовано в 1856 г. во Франции (см. выше). Все четыре издания имеют разночтения; наиболее полное изложение исследования—в петербургском издании на французском языке. В этом издании, в дополнительном параграфе, не приведенном в других изданиях, впервые дано, в частности, решение задачи о распределении усилий в стержне, составленном из двух разновидных материалов и подверженном действию осевой силы. (*Прим. ред.*)

[2]) См., например, Belanger, Théorie de la résistance et de la flexion plane des solides, Paris, 1858; изд. 2-е, 1862; Bresse, Cours de mécanique appliquée, изд. 2-е, ч. I, стр. 209, Paris, 1866; Collignon E., Cours de mécanique appliquée aux constructions, изд. 2-е, стр. 198, Paris, 1877.

ми, обнаружив свою особую пригодность при изучении тонкостенных конструкций, где касательные напряжения представляют особую важность и где точных решений проблемы еще не найдено.

34. Неразрезные балки

Навье первому пришлось столкнуться с проблемой статической неопределимости, возникающей в расчетах неразрезных балок[1]. В своей книге «Résumé des leçons...» он исследует балку на трех опорах и принимает реакцию одной из них как величину, статически неопределимую. В тех случаях, когда число опор превышает три, выбор реакций как лишних неизвестных величин становится затруднительным, поскольку мы получаем столько же уравнений, сколько имеется промежуточных опор, причем в каждое из таких уравнений входят все лишние неизвестные. Исследование частного случая равных пролетов с равномерно распределенной по всей длине балки нагрузкой или с равными сосредоточенными нагрузками, приложенными по середине каждого из пролетов, показывает, что в этих условиях задача упрощается и что между реакциями трех последовательных опор существует линейное соотношение. Использование этого соотношения позволяет без особого труда вычислить опорные реакции для любого числа пролетов[2].

Следующий шаг в развитии теории неразрезных балок был сделан Клапейроном. Он использует выражения для углов, образуемых в опорных точках касательными к изогнутой оси балки с первоначально горизонтальным ее направлением.

Для простой балки пролетом l, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q и моментами M и M', приложенными на опорах, эти углы равны соответственно

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{ql^3}{24EI}+\frac{1}{6EI}(2M+M'), \\ \alpha' &= -\frac{ql^3}{24EI}-\frac{1}{6EI}(M+2M'). \end{aligned} \tag{a}$$

Для неразрезной n-пролетной балки Клапейрон составляет $2n$ уравнений этого вида, содержащих всего $4n$ неизвестных (α, α', M, M'). Замечая теперь, что на каждой промежуточной опоре два смежных пролета имеют общую касательную и одно и то же значение опорного изгибающего момента, он получает $2n-2$

---

[1]) См. Bull. soc. philomath., Paris, 1825.

[2]) Этот метод был развит Ребханном: см. Rebhann G., Theorie der Holz- u. Eisen-Constructionen, Wien, 1856. В этой книге впервые строится и используется в применении к простым и неразрезным балкам эпюра изгибающих моментов.

дополнительных уравнения. Принимая моменты на крайних опорах балки равными нулю, он находит, что число уравнений равно числу неизвестных и что, следовательно, все эти неизвестные легко могут быть определены. Описанный метод расчета был разработан в связи с задачей реконструкции в 1849 г. моста в Аснъере (Asnière) близ Парижа и применялся в течение нескольких лет, прежде чем Клапейрон описал его в статье, которую он в 1857 г. представил в Академию наук [1]). Метод излагается в ряде руководств по теории сооружений, относящихся к раннему периоду развития этой науки [2]).

Уравнение трех моментов в его современной форме было опубликовано впервые инженером Берто (Bertot)[3]). Легко, однако, видеть, что выполненное Берто преобразование уравнений (a) в уравнение трех моментов было сравнительно простым, и мы согласны с профессором Брессом (Bresse), заявляющим, что «настоящим автором открытия является, по моему мнению, Клапейрон, поскольку именно ему принадлежит основная идея»[4]). Таким образом, часто применяемое наименование уравнения трех моментов уравнением Клапейрона имеет основание, хотя это уравнение и появилось впервые в статье Берто. В своей работе Берто ссылается на идею Клапейрона, но не развивает его теории, давая лишь метод решения систем этих уравнений. Если концы неразрезной балки (в $n-1$ пролетов) свободно оперты, то, полагая $M_n=M_0=0$, он получает систему уравнений

$$
\begin{gathered}
2(l_1+l_2)M_1+l_2M_2=\frac{1}{4}(w_1l_1^3+w_2l_2^3),\\
l_2M_1+2(l_2+l_3)M_2+l_3M_3=\frac{1}{4}(w_2l_2^3+w_3l_3^3)\ldots \qquad \text{(b)}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}
$$

где $w_1, w_2, \ldots$ — интенсивности нагрузки, равномерно распределенной по каждому пролету. Задаваясь некоторым значением M_1 (например a_1), он вычисляет значение M_2 из первого уравнения системы (b). Введя найденное значение M_2 во второе уравнение (b), он находит M_3 и, продолжая этот процесс, приходит в конце его

[1]) См. Comp. rend., т. 45, стр. 1076.

[2]) Эти уравнения приводятся, например, в книге Molinos L., Pronnier C., Traité théorique et pratique de la construction des ponts métalliques, Paris, 1857. См. также Laissle F., Schübler A., Der Bau der Brückenträger, Stuttgart, 1857. (*Прим. авт.*) Русский перевод второй из названных книг (3-е нем. изд.), выполненный Н. А. Белелюбским, был издан в 1868—1871 гг. (*Прим. ред.*)

[3]) См. Mém. soc. ing. civils, France, т. 8, стр. 278, 1855.

[4]) См. Ann. ponts et chaussées, т. XX, стр. 465, 1860.

к некоторому значению b_1 для последнего момента M_n в последнем уравнении системы (b). Правильное решение требует, чтобы момент M_n получился равным нулю. Повторяя свои вычисления при другом исходном значении M_1 (например a_2), он получает иное значение и для M_n, например b_2. Поскольку между значениями a и b существует линейная зависимость, а значениям a_1 и a_2 соответствуют значения b_1 и b_2, мы получаем возможность найти такое значение a, при котором b обращается в нуль. Такое a и будет истинным значением M_1. Зная его, легко вычислить и остальные моменты. К этому сводится метод, предложенный Берто для решения системы уравнений трех моментов.

Клапейрон в упомянутой выше работе дает уравнение трех моментов в той же самой форме, что и Берто, но не ссылается на работу последнего. Далее, Клапейрон излагает свой метод решения этих уравнений. В заключение он приводит некоторые интересные сведения о трубчатом мосте «Британия», представляющем собой неразрезную балку на пяти опорах. Он указывает, что вычисления Молино и Проннье дали нижеследующие значения для наибольших напряжений: 1) в середине первого пролета 300 *кг/см*^{2}, 2) на первой опоре 896 *кг/см*^{2}, 3) в середине второго пролета 337 *кг/см*^{2}, 4) на средней опоре 854 *кг/см*^{2}. Отсюда он делает вывод: «Это величественное сооружение оставляет, таким образом, желать лучшего в отношении целесообразного распределения толщины листов, которые представляются относительно слишком слабыми на опорах». Ниже (см. стр. 194) мы увидим, что при выборе размеров для поперечных сечений этого моста были использованы экспериментальные данные, полученные на свободно опертой модели, а изгибающие моменты на опорах были приравнены моментам в серединах пролетов, что было достигнуто специальным конструктивным приемом.

Клапейрон и Берто предполагали, что все опоры неразрезных балок располагаются на одном уровне. Если это условие не выполняется, на опорах возникают некоторые дополнительные моменты. Последние были изучены германскими инженерами Кёпке[1]), Шеффлером[2]) и Грасхофом[3]). Уравнение трех моментов с дополнительными членами, учитывающими разность отметок опор, появляется впервые в статье Отто Мора[4]). Дальнейшая научная работа по теории неразрезных балок была проведена Ж. Брессом и Э. Винклером; она обсуждается в следующих двух параграфах этой книги.

---

[1]) Köpcke, Z. Architek. u. Ing. Ver., Hannover, 1856.

[2]) Scheffler H., Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken, Braunschweig, 1857.

[3]) Grashof F., Z. Ver. deut. Ing., 1859.

[4]) Mohr Otto, Z. Architek. u. Ing. Ver., Hannover, 1860.

35. Ж. А. Бресс

Жак Антуан Шарль Бресс (1822—1883) родился во Вьенне (Изер) во Франции. По окончании Политехнической школы (1843) он поступил в Школу мостов и дорог, в которой получил инженерное образование. Вскоре после окончания этой второй школы, следуя своей склонности, он обратился в 1848 г. к преподаванию прикладной механики. Он работал в качестве ассистента профессора Беланже до 1853 г., после чего стал его преемником. Он преподавал прикладную механику в Школе мостов и дорог до конца своей жизни и пользовался высокой репутацией в области сопротивления материалов и теории сооружений.

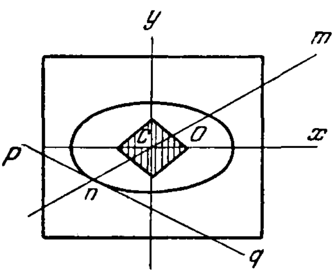


Рис. 74.

В 1854 г. он издал свой труд «Аналитические исследования изгиба и прочности криволинейных брусьев» («Récherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbés»), посвященный изучению кривых брусьев и их использованию в теории сооружений. В 1859 г. вышли первые два тома его курса сопротивления материалов и гидравлики. Третий том этого курса представляет собой весьма подробное исследование о неразрезных балках и вышел в 1865 г. В 1874 г. за свои научные работы в области прикладной механики Бресс был награжден Французской Академией наук премией Понселе, а в 1880 г. избран в члены Академии наук.

Главным достижением Бресса в инженерной науке была его теория кривого бруса с ее применениями в проектировании арок[1]). В первой части этой книги он рассматривает внецентренное сжатие призматического бруса. Частный случай бруса прямоугольного сечения, нагруженного в плоскости симметрии, был уже исследован Томасом Юнгом (см. стр. 117). Бресс ставит задачу в общем виде и показывает, что если построить для поперечного сечения бруса центральный эллипс инерции (рис. 74), то направление нейтральной оси можно легко установить для любого положения нагрузки. Если точку O приложения нагрузки перемещать по прямой Cm, то нейтральная ось будет оставаться параллельной каса-

[1]) Первые исследования Бресса по теории кривых стержней были опубликованы в статье в Annales des ponts et chaussées, 1848, кн. 2; на эту статью, в частности, ссылается Н. Н. Собко в своем незаконченном исследовании «Устойчивость деревянных и металлических мостов арочных систем. Разбор системы Кулибина», статья 1-я, Журн. Гл. упр. п. с. и публ. зд., т. XVIII, кн. 5, 1853, стр. 77—123. (*Прим. ред.*)

тельной pq к эллипсу в точке n пересечения эллипса с прямой Cm. Нейтральная ось приближается к центру тяжести сечения C, если точка O удаляется от него и проходит через C, когда расстояние OC станет бесконечно большим, что соответствует условию чистого изгиба. Если a и b—координаты точки O, то уравнение нейтральной линии принимает вид

$$\frac{ax}{r_y^2}+\frac{by}{r_x^2}+1=0, \tag{a}$$

где r_x и r_y — радиусы инерции поперечного сечения относительно главных осей x и y. Располагая этим уравнением, можно определить ту часть поперечного сечения, внутри которой должна оставаться точка O, для того чтобы нейтральная ось не выходила за пределы контура поперечного сечения бруса, иными словами, для того чтобы все напряжения по поперечному сечению имели один знак. Таким путем Брессом было введено понятие *ядра сечения*[1]).

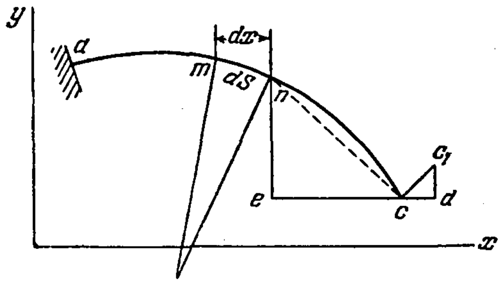


Рис. 75.

Изучая деформацию кривого бруса в плоскости его кривизны, Бресс учитывает не только изменение кривизны, что было сделано еще до него Навье (см. стр. 94), но также и удлинение оси бруса. Чтобы пояснить предложенный Брессом метод вычисления перемещений кривого бруса, допустим, что поперечное сечение a бруса защемлено (рис. 75), и обозначим продольную осевую растягивающую силу и изгибающий момент в некотором поперечном сечении бруса соответственно через N и M; тогда удлинение бесконечно малого элемента mn длиной ds выразится частным $N\,ds/AE$, а поворот поперечного сечения n относительно сечения m через $M\,ds/EI$. При таком повороте точка c оси бруса опишет бесконечно малую дугу $\overline{cc_1}$, равную $\overline{nc}M\,ds/EI$. Заметив, что бесконечно малый треугольник cc_1d подобен треугольнику cen, находим, что горизонтальное перемещение $\overline{cd}$ точки c,

[1]) Тодхентер в своей «Истории...» упоминает, что в его распоряжении находился литографированный курс лекций, которые читались в Школе мостов и дорог в 1842—1843 гг. и в которых содержалось изложение теории внецентренного сжатия, сходное с изложением Бресса. Тодхентер приписывает этот курс Брессу, но в то время Бресс был еще только студентом Политехнической школы и потому не мог быть автором подобного курса.

обусловленное изменением кривизны элемента mn оси бруса, выразится так:

$$\overline{cd} = cc_1 \frac{\overline{cd}}{\overline{cc_1}} = \overline{cc_1}\,\frac{\overline{ne}}{\overline{nc}} = \frac{M\,ds\,\overline{ne}}{EI} = \frac{M\,ds}{EI}(y_n - y_c). \tag{b}$$

Горизонтальное перемещение той же точки вследствие удлинения элемента mn будет равно $N\,ds/AE$. Чтобы найти полное горизонтальное перемещение u точки c, нам остается лишь просуммировать перемещения, вызванные деформациями всех элементов бруса, в пределах от a до c. Это дает:

$$u = \int_a^c \frac{N\,dx}{AE} + \int_a^c \frac{M\,ds}{EI}(y - y_c). \tag{c}$$

Подобным же образом мы получим смещение v по направлению оси y:

$$v = \int_a^c \frac{N\,dy}{AE} - \int_a^c \frac{M\,ds}{EI}(x - x_c). \tag{d}$$

Для угла поворота α поперечного сечения c имеем:

$$\alpha = \int_a^c \frac{M\,ds}{EI}\,. \tag{e}$$

Пользуясь уравнениями (c) — (e), можно вычислить составляющие u и v перемещения и угол поворота α для любого сечения c бруса, если только известны действующие на брус внешние силы.

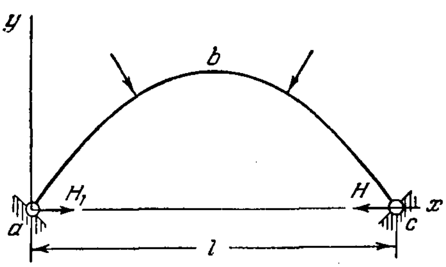


Рис. 76.

Этими уравнениями можно пользоваться для вычисления статически неопределимых величин, т. е. «лишних неизвестных». Рассмотрим, например, двухшарнирную арку abc (рис. 76) и примем в качестве лишнего неизвестного горизонтальную реакцию — распор H; мы сможем определить эту величину из того условия, что горизонтальное перемещение точки c должно быть равно нулю. Пользуясь уравнением (c)[1], мы можем вы-

[1]) Это уравнение здесь сохраняет силу несмотря на то, что поперечное сечение a может иметь некоторый поворот. Законность его применения обосновывается тем, что всякий малый поворот арки относительно шарнира a вызывает лишь вертикальное перемещение точки c.

делить влияние силы H и положить

$$N = N_1 - H\frac{dx}{ds}, \qquad M = M_1 - H_y.$$

Тогда уравнение (c) дает:

$$\int_a^c \frac{N_1\,dx}{AE} - H\int_a^c \frac{dx^2}{AE\,ds} + \int_a^c \frac{M_1\,ds}{EI}\,y - H\int_a^c \frac{y^2 ds}{EI} = 0,$$

и мы найдем:

$$H = \frac{\int_a^c \frac{N_1\,dx}{AE} + \int_a^c \frac{M_1 y}{EI}\,ds}{\int_a^c \frac{dx^2}{AE\,ds} + \int_a^c \frac{y^2\,ds}{EI}}. \tag{f}$$

Если арка имеет защемленные пяты, мы приходим к задаче с тремя лишними неизвестными. Три необходимых для ее решения уравнения легко получить непосредственно из (c)—(e), если заметить, что для защемленного сечения две составляющие u и v перемещения и угол поворота α должны обратиться в нуль. Бресс показывает также, что при этом легко учесть и температурное расширение: в примере рис. 76 для этого достаточно лишь добавить к числителю формулы f произведение εtl, где ε—коэффициент температурного расширения, t—приращение температуры и l—пролет арки. Бресс не только дает общее решение задачи расчета арки, но и подробно исследует различные частные случаи ее нагружения. Здесь он приводит чрезвычайно важные соображения о *принципе наложения* и показывает, что для малых деформаций, следующих закону Гука, перемещения являются линейными функциями внешних нагрузок и могут быть получены суммированием перемещений, вызванных отдельными частными нагрузками. В случае вертикальных нагрузок поэтому достаточно установить сначала эффект одной единичной вертикальной силы. Тогда напряжения и прогибы, вызванные системой вертикальных нагрузок, определятся суммированием. В отношении симметричных арок можно достигнуть еще большего упрощения, если заметить, что распор не изменяет своего значения при перемещении нагрузки P из точки a (рис. 77, a) в симметричную относительно стрелы арки точку a_1. Это значит, что при вычислении лишней неизвестной H мы вправе заменить несимметричное загружение (рис. 77, a) симметричным (рис. 77, $б$), уменьшив потом полученное значение распора в два раза. Подобное же упрощение можно применить и в том случае, если действующая на арку сила направлена наклонно.

Эти теоретические соображения Бресс применяет далее к частным задачам, относящимся к очерченной по дуге окружности симметричной двухшарнирной арке постоянного поперечного сечения. Он дает для различных соотношений размеров таких арок таблицы числовых значений, из которых легко можно определить распор для различных видов нагрузки—сосредоточенной силы, равномерно распределенной по оси арки или по горизонтальной проекции этой оси. К ним присоединяется также и таблица, облегчающая вычисление распора, вызванного повышением температуры. Все эти тщательно составленные таблицы сохранили известную практическую ценность и по настоящее время.

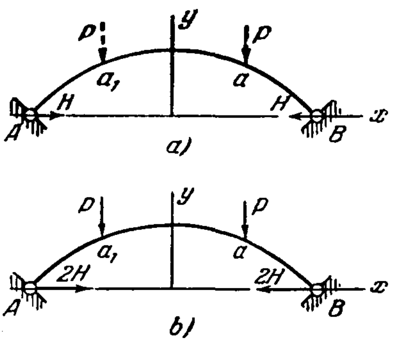


Рис. 77.

Изучая книгу Бресса о кривом брусе, мы убеждаемся в том, что автор ее не удовлетворялся получением определенных теоретических результатов, но стремился сделать эти результаты полезными для инженеров. Ради этого он не колебался предпринимать трудоемкие вычисления таблиц.

Курс прикладной механики Бресса состоит из трех томов[1]). Из них лишь в первом и третьем рассматриваются задачи сопротивления материалов. Автор не делает никаких попыток ввести результаты математической теории упругости в элементарное учение о прочности материалов. Для всех случаев деформирования брусьев предполагается, что их поперечные сечения остаются при деформировании плоскими. В таком предположении исследуются также внецентренные растяжение и сжатие, при этом используется центральный эллипс инерции, как это было разъяснено выше (см. стр. 178). Бресс показывает также, как подходить к задаче, если модуль материала изменяется по площади поперечного сечения. Гипотеза плоских сечений используется им также и в теории кручения, причем Бресс делает попытку оправдать это указанием на то, что в практических применениях поперечные сечения валов бывают либо круглыми, либо правильными многоугольниками, почему депланацией их допустимо пренебрегать. В теории изгиба приводится исследование касательных напряжений по Журавскому. В главах, посвященных кривому брусу и арке, воспроизводится содержание рассмотренной выше книги того же автора.

[1]) Bresse, Cours de mécanique appliquée, 1-е изд., 1859; 2-е изд., 1866; 3-е изд., 1880. В нашем изложении мы ссылаемся на второе издание.

В связи с вопросами расчета цилиндрических котлов затрагивается интересная задача о напряжениях изгиба в кольцах, имеющих малую начальную эллиптичность и подвергающихся равномерному внутреннему давлению. Бресс показывает, что если начальный эксцентриситет эллипса равен ε_0, то после приложения внутреннего давления p он вычисляется из

$$\varepsilon^2 = \frac{\varepsilon_0^2}{1 + (pd^3/2Eh^3)},$$

где h—толщина стенки, d—диаметр котла. В случае наружного давления та же теория дает:

$$\varepsilon^2 = \frac{\varepsilon_0^2}{1 - (pd^3/2Eh^3)}.$$

Критическое значение давления p получается из условия

$$1 - \frac{pd^3}{2Eh^3} = 0,$$

откуда

$$p_{\text{кр}} = 2E\frac{h^3}{d^3}.$$

Этот результат, как мы уже видели (стр. 163), был получен ранее Грасхофом.

Бресс включает в свой курс рассмотрение задач о продольных и поперечных колебаниях призматического бруса. Изучая вопросы поперечных колебаний, он первый пользуется при этом понятием инерции вращения для отдельных элементов бруса. Рассматривает он также и динамический прогиб свободно опертой балки под подвижной нагрузкой. К этой теме мы вернемся ниже (см. стр. 209).

Третий том[1]) курса, как уже упомянуто выше, содержит весьма подробное изложение теории неразрезных балок. В первой главе эта задача ставится в общем виде, и если Клапейрон и Берто требовали, чтобы все пролеты были одинаковыми, а нагрузка была распределена равномерно по всей длине балки, то Бресс отбрасывает эти ограничительные условия. Далее, он допускает, что опоры расположены не на одном уровне, и получает таким путем уравнение трех моментов в его общей форме. Приложенные нагрузки Бресс делит на две группы: 1) равномерно распределенная постоянная нагрузка, к которой относится собственный вес балки, и 2) подвижная нагрузка, которая может занимать лишь часть всей длины балки. Опорные моменты, вызванные постоянной нагрузкой, находятся путем решения уравнений трех моментов. Что касается подвижной нагрузки, то основная задача здесь

[1]) Bresse, Cours de mécanique appliquée, ч. 3, Paris, 1865.

заключается в том, чтобы найти для нее невыгоднейшее для каждого поперечного сечения балки положение[1]). Бресс рассматривает случай одной сосредоточенной силы и обнаруживает при этом существование двух постоянных точек в ненагруженных пролетах (фокусов), являющихся точками перегиба упругой линии балки, когда единичная нагрузка размещается вправо или влево от одной из них. Имея эти точки, мы получаем возможность построить эпюру изгибающих моментов для любого положения единичной сосредоточенной нагрузки, а из нее установить и наиболее неблагоприятное положение заданной подвижной нагрузки. Мы видим, что в этом исследовании Бресс весьма близко подошел к идее *линий влияния*[2]). Тем не менее он все же не ввел этого понятия, равно как и не применил графического метода в отыскании невыгоднейшего распределения нагрузки. Он предпочитал аналитический подход и составил большое количество таблиц для балок с различным числом пролетов с тем, чтобы облегчить проектировочную работу инженерам.

36. Э. Винклер

Э. Винклер (Winkler, 1835—1888) родился близ Торгау в Саксонии и учился в местной гимназии. По смерти своего отца он был вынужден прервать образование и работать некоторое время в качестве ученика каменщика. Преодолев трудности, он сумел, однако, закончить среднее образование, после чего поступил в Дрезденский политехникум, избрав своей специальностью строительную технику. В этом учебном заведении он обнаружил блестящую способность находить в инженерных проблемах их математическую форму. Вскоре после окончания политехникума он опубликовал свою важную работу по теории кривого бруса[3]). С 1860 г. он начал работать в Дрезденском политехникуме преподавателем по сопротивлению материалов, а с 1863 г. приступил в том же политехникуме к чтению лекций по строительству мостов. Он получил докторскую степень в 1860 г. от Лейпцигского университета за свою теорию подпорных стен; в 1862 г. вышла в свет его большая работа по неразрезным балкам (см. сноску[1])). Он был не только выдающимся инженером, но и хорошим педагогом и в 1865 г. был избран на кафедру мостов и постройки железных дорог Пражского политехнического института. Там он продолжал вести

---

[1]) Впервые эта задача была исследована Винклером. См. статью последнего: Civiling, т. 8, стр. 135—182, 1862.

[2]) Метод линий влияния был введен Э. Винклером: W i n k l e r E., Mittl. Architek. u. Ing. Ver. Böhmen, 1868, стр. 6, и О. Мором: M o h r O., Z. Architek. u. Ing. Ver., Hannover, 1868, стр. 19.

[3]) W i n k l e r E., Formänderung und Festigkeit gekrümmter Körper, insbesondere der Ringe, Civiling., т. 4, стр. 232—246, 1858.

научную работу и выпустил в 1867 г. руководство по сопротивлению материалов[1]), в которое включил свои собственные решения ряда важных инженерных проблем. В 1868 г. Винклер был избран на должность профессора Венского политехникума, и здесь он приступил к составлению своих руководств по сооружению мостов и железных дорог, которые сыграли в дальнейшем крупную роль в этих отраслях инженерной науки не только в Германии и Австрии, но также и за пределами этих стран.

В 1877 г. в Берлине началась реорганизация местной Строительной академии с целью повышения ее значения до уровня других германских политехнических институтов, и Винклер был приглашен туда для участия в проведении этой реформы и чтения курсов по теории сооружений и мостам. Именно здесь он заинтересовался вопросами экспериментального исследования напряжений. Он пользовался каучуковыми моделями для изучения напряжений в заклепочных соединениях, исследовал распределение давления песка на подпорные стены и давления ветра на фермы с решетками различных типов, определял экспериментальным путем напряжения в арках. С этой целью, в частности, во дворе Строительной академии была сооружена опытная арка.

Наиболее ценным вкладом Винклера в сопротивление материалов была его теория изгиба кривого бруса. Навье и Бресс, имея дело с такого рода брусом, вычисляли его прогибы и напряжения по формулам, выведенным для призматического бруса. Подобный подход к решению задачи законен лишь в том случае, если размеры поперечного сечения бруса малы в сравнении с радиусом кривизны его оси. Но в крюках, кольцах, звеньях цепей и т. п. это условие не выполняется, и формулы, выведенные для прямого бруса, в этих случаях оказываются недостаточно точными, чтобы на них допустимо было основывать расчет кривого бруса. В ходе построения более точной теории Винклер удерживает гипотезу плоских поперечных сечений при изгибе, но учитывает то обстоятельство, что вследствие начальной кривизны продольные волокна бруса между двумя смежными поперечными сечениями имеют неравные длины, и потому напряжения в них уже не пропорциональны их расстояниям от нейтральной оси, а нейтральная ось не проходит через центры тяжести поперечных сечений.

Чтобы получить аналитические выражения для деформаций и напряжений в кривом брусе, подвергнутом изгибу в плоскости его начальной кривизны, обозначим длину элемента оси через ds, а начальный угол между ограничивающими его поперечными сечениями через $d\varphi$. Пусть Δds—абсолютное удлинение, $\varepsilon_0 = (\Delta ds/ds)$—относительное удлинение оси, а $\Delta d\varphi$—приращение

[1]) W i n k l e r E., Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit, Prag, 1867.

угла между двумя смежными поперечными сечениями элемента вследствие изгиба. Тогда удлинение волокна, отстоящего на расстоянии v от оси, проведенной через центры тяжести поперечных сечений, будет равно

$$\Delta\, ds_v = \Delta\, ds + v\Delta\, d\varphi$$

и его относительное удлинение

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta\, ds + v\Delta\, d\varphi}{ds + v\, d\varphi} = \left(\varepsilon_0 + \frac{v\Delta\, d\varphi}{ds}\right)\frac{r}{r+v},$$

где r — радиус кривизны оси бруса. Полагая, что продольные волокна не оказывают друг на друга давления в процессе изгиба, получаем напряжение

$$\sigma = E\varepsilon_v = E\left(\varepsilon_0 + \frac{v\Delta\, d\varphi}{ds}\right)\frac{r}{r+v} \tag{a}$$

и приходим к следующим выражениям для продольной (осевой) силы N и изгибающего момента M:

$$N = \int\limits_A \sigma\, dA = Er\varepsilon_0 \int\limits_A \frac{dA}{r+v} + Er\frac{\Delta\, d\varphi}{ds}\int\limits_A \frac{v\, dA}{r+v}, \tag{b}$$

$$M = \int\limits_A \sigma v\, dA = Er\varepsilon_0 \int\limits_A \frac{v\, dA}{r+v} + Er\frac{\Delta\, d\varphi}{ds}\int\limits_A \frac{v^2\, dA}{r+v}. \tag{c}$$

Вводя обозначение

$$r\int\limits_A \frac{v^2\, dA}{r+v} = \theta, \tag{d}$$

получаем:

$$r\int\limits_A \frac{dA}{r+v} = \int\limits_A dA - \frac{1}{r}\int\limits_A v\, dA + \frac{1}{r}\int\limits_A \frac{v^2\, dA}{r+v} = A + \frac{1}{r^2}\theta,$$

$$r\int\limits_A \frac{v\, dA}{r+v} = \int\limits_A v\, dA - \int\limits_A \frac{v^2\, dA}{r+v} = -\frac{1}{r}\theta.$$

Из этих соотношений с помощью уравнений (b), (c), (a) Винклер находит:

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{AE} + \frac{M}{AEr}, \tag{e}$$

$$\frac{\Delta\, d\varphi}{ds} = \frac{M}{E\theta} + \frac{M}{Aer^2} + \frac{N}{AEr}, \tag{f}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{Ar} + \frac{Mrv}{\theta(r+v)}. \tag{g}$$

Во всяком статически определенном случае мы легко можем найти N и M для каждого поперечного сечения. Величина θ вычисляется по формуле (d) для заданной формы поперечного сечения, и напряжения определяются из уравнения (g). В случае статической неопределенности системы лишние неизвестные вычисляются из уравнений (e) и (f).

Винклер пользуется своей общей теорией для вычисления напряжений в крюках, кольцах различного очертания и в звеньях цепей. Он показывает, что если размеры поперечных сечений кривого бруса не малы в сравнении с радиусом его кривизны, то элементарная формула изгиба прямого бруса утрачивает свою применимость и расчет должен основываться на новой теории.

В другой представляющей большое значение статье[1]), посвященной деформациям, симметричным относительно оси, Винклер исследует цилиндрическую трубу, находящуюся под равномерными внутренним и внешним давлениями, и выводит формулу Ламе. При определении необходимой толщины стенки для трубы Винклер опирается на теорию наибольших нормальных деформаций и приходит к формуле, несколько отличающейся от формулы Ламе. Он исследует также и условия по торцам трубы, рассматривая сферические и плоские торцы. Для того и другого случаев Винклер дает уравнения для напряжений и показывает, что цилиндрическая труба испытывает у концов некоторый местный изгиб. Учитывая его, он вводит поправки в теорию, разработанную до него Шеффлером (см. стр. 163). В заключение Винклер выводит соотношения между напряжениями во вращающихся дисках и пользуется ими в расчете маховиков[2]).

Статья Винклера о неразрезных балках появилась в печати в 1862 г.[3]). В это время автор ее интересовался строительством мостов, и потому большая часть статьи посвящена вопросам невыгоднейшего загружения. К ней присоединены таблицы для расчета четырехпролетной балки[4]).

В руководстве по сопротивлению материалов, появившемся в 1867 г., Винклер уже не придерживается элементарного изложения предмета, а дает общие уравнения теории упругости и использует их в теории изгиба балок. Он сравнивает обычные

---

[1]) См. Civiling., т. 6, стр. 325—362, 427—462, 1860.

[2]) К тому же времени относится и решение Акселем Вильгельминовичем Гадолиным (1828—1892) задачи о скрепленных трубах под действием внутреннего давления. См. «О сопротивлении стен орудий давлению пороховых газов», Арт. журн., 1858 и «Теория орудий, скрепленных обручами», там же, 1861. (*Прим. ред.*)

[3]) См. Civiling., т. 8, стр. 135—182, 1862.

[4]) Дальнейшее развитие теории неразрезных балок дается в книге Винклера: W i n k l e r E., Theorie der Brücken, Wien, 1872.

приближенные решения с результатами, получаемыми на основе теории упругости, и показывает, что элементарные уравнения обеспечивают необходимую точность в практических применениях. Выводя формулы для определения безопасных размеров сооружений, Винклер следует Сен-Венану и неизменно руководствуется теорией наибольших деформаций как критерием прочности. В главе, посвященной изгибу балок, весьма подробно исследуются неразрезные балки. Останавливаясь на поперечном выпучивании осесимметрично сжатого бруса, автор предлагает несколько решений для различных типов бруса переменного профиля. Задача о «балке-колонне» (т. е. о совместном действии осевой силы и поперечной нагрузки) рассматривается весьма подробно, причем выводится несколько полезных формул для вычисления наибольших прогибов и наибольших изгибающих моментов. Впервые ставится задача об изгибе балки на упругом основании и отмечается применимость относящейся сюда теории к вычислению напряжений в железнодорожном пути. Глава, содержащая теорию кривого бруса, кроме общей (уже разобранной нами выше) теории, касается также и применений ее к расчету арок. Рассматривая двухшарнирные арки, Винклер приводит материал, разработанный уже Брессом, но в разделе бесшарнирных арок дает и новые результаты. Им были составлены с целью упрощения расчетов таблицы для круговых и параболических арок постоянного поперечного сечения при различных загружениях.

Книга Винклера написана в несколько сухом стиле, и читать ее нелегко. Тем не менее это, вероятно, самое полное руководство по сопротивлению материалов из числа написанных на немецком языке, сохраняющее и до сих пор свое значение для инженеров. В позднейших сочинениях по этому вопросу мы обнаруживаем тенденцию к отделению сопротивления материалов от математической теории упругости и к изложению нашей науки в более элементарной форме, чем та, которой пользовался Винклер.

ГЛАВА VII

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ И РАЗВИТИЕ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО СТРОИТЕЛЬСТВА

37. Трубчатые мосты

Сооружение первых железных дорог сообщило сильный толчок дальнейшему развитию науки о сопротивлении материалов, поставив перед ней ряд новых проблем (в особенности в области строительства мостов), требовавших практического разрешения. В качестве материалов для строительства мостов вначале применялись камень и чугун. В отношении последнего было известно, что он оказывается весьма пригодным материалом при работе на сжатие, как, например, в арочных мостах, но обнаруживает ненадежность в балках вследствие слабой сопротивляемости усталости под действием переменных напряжений, вызываемых тяжелой подвижной нагрузкой. Делались попытки усилить чугунные балки постановкой железных затяжек, но безуспешно. Выяснилась необходимость в более надежном материале, и начиная с 1840 г., в строительстве мостов получило быстрое распространение сварочное железо. Применение двутавровых балок из листового железа стало обычным в мостах малых пролетов; одновременно стало очевидным, что и для более крупных сооружений, несущих нагрузку железнодорожных поездов, требовались новые конструктивные решения. В то время уже существовали висячие мосты больших пролетов, однако большая податливость их при действии тяжелых подвижных нагрузок делала их непригодными для обслуживания железнодорожного транспорта.

Требовались более жесткие конструкции, и в качестве одного из возможных решений в Англии, на строительстве железной дороги Лондон—Честер—Холихэд, в виде опыта были применены трубчатые мосты. В ходе строительства дороги инженеры встретились с весьма трудной проблемой пересечений реки Конвэй (рис. 78) и пролива Менэй. Основное условие состояло в том, чтобы мосты не создавали препятствий для судоходства, в связи с чем предложенный вначале вариант арочного моста оказался неприемлемым. Главный инженер Роберт Стефенсон[1]) подал мысль о сооружении мостов в виде труб достаточно больших поперечных размеров, чтобы поезда могли проходить внутри них. Для того чтобы развить эту новую идею и осуществить сооружение таких необычно крупных мостов (наибольший пролет 140 *м*), Стефенсон обратился в 1845 г. за содействием к Фейрбейрну (см. стр. 150), который приобрел большой опыт в области конструкций из листо-

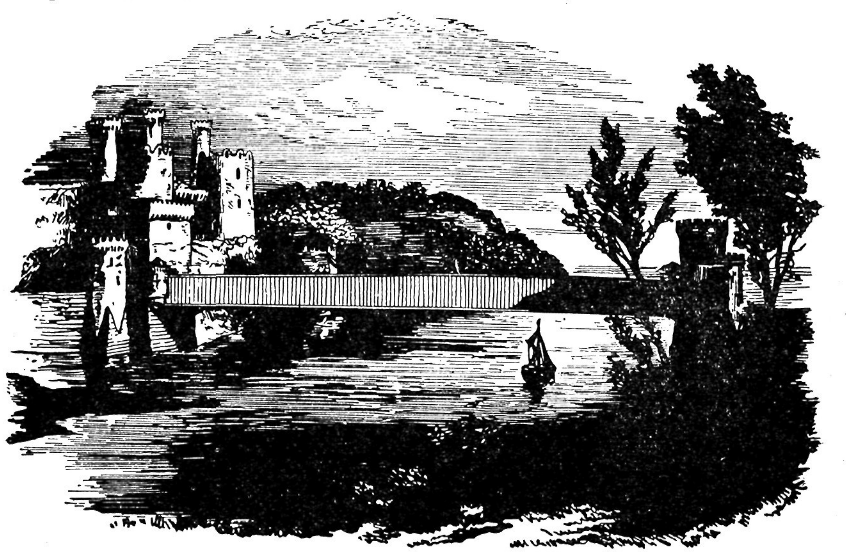


Рис. 78. Кенвэйский мост (Англия).

вого железа на основе своей судостроительной практики. Первоначальный проект Стефенсона, по которому труба должна была поддерживаться цепями, не был принят. Только после предварительных испытаний Фейрбейрна было решено отказаться от цепей и спроектировать трубы столь прочными, чтобы они, как балки, были способны нести нагрузку самых тяжелых поездов.

Первые проведенные Фейрбейрном испытания железных трубчатых балок различных поперечных сечений[2]) показали, что они

---

[1]) Роберт Стефенсон, сын Джорджа Стефенсона, «отца железных дорог», приобрел репутацию инженера-строителя железных дорог. Он был вторым президентом Института инженеров-механиков и с 1849 г. стал членом Королевского общества. Он избирался президентом Института гражданских инженеров в 1856 и 1857 гг. (*Прим. авт.*). Биографии обоих Стефенсонов были приведены в ЖГУПС и ПЗ, т. XXXII, 1860. (*Прим. ред.*)

[2]) Полное описание этих испытаний и окончательного проекта мостов см. в книге Фейрбейрна F a i r b a i r n W., An Account of the construction of the Britannia and Conway tubular bridges, London, 1849. См. также

начинают разрушаться не со стороны выпуклой грани, как это обычно происходит у чугунных балок, а со стороны вогнутой, где материал работает на сжатие. Было ясно обнаружено, что потеря несущей способности происходит здесь потому, что сравнительно тонкие стенки трубы теряют устойчивость и выпучиваются. Фейрнбейрн констатирует: «В испытаниях обнаружились любопытные и интересные явления—многие из них противоречат нашим прежним представлениям о прочности материалов и полностью расходятся со всем, что открывалось нам во всей предшествующей экспериментальной работе. Неизменно, почти в каждом из этих испытаний, обнаруживалось, что самым слабым местом в трубе оказывалась ее верхняя часть, подвергавшаяся действию сил, стремившихся ее раздавить». Здесь мы впервые имеем дело с испытаниями тонкостенных конструкций, теряющих несущую способность вследствие потери устойчивости.

Фейрбейрн предложил своему другу Ходкинсону (см. стр. 154), человеку, обладавшему более широкими теоретическими познаниями, проверить эти результаты. Ходкинсон подтвердил, что не достаточно знать предел прочности материала для вычисления несущей способности трубчатой балки, применяя при этом обычную формулу напряжений изгиба. Он заявляет по этому поводу: «Для меня стало очевидным, что какие бы то ни было выводы из общепринятых принципов, в применении к вопросам прочности тонкостенных труб, могут быть лишь приблизительными, ибо подобные трубы начинают обычно сдавать в верхней, т. е. сжатой, части, где образуются складки (морщины), и теряется сопротивление задолго до того, как растянутые части трубы деформируются до той наибольшей величины, которую они способны выдержать. Чтобы установить, в какой степени этот дефект отражается на правильности вычисления сопротивления труб...», Ходкинсон предложил поставить ряд основательных испытаний. Некоторые из этих испытаний были проведены лично им самим, и на них мы остановимся в дальнейшем. Фейрбейрн не располагал, за отсутствием времени, возможностью следовать этим указаниям и был вынужден принимать решения, касавшиеся назначения размеров для поперечного сечения моста, опираясь лишь на результаты испытаний на изгиб, выполненных им самим на трубчатых балках

Clark E., The Britannia and Conway tubular bridges (2 тома), London, 1850. В последнем сочинении приводятся также результаты экспериментальной работы Ходкинсона (напечатанной также в Reports of the Commissioners...) и исследование неразрезных балок Поула (W. Pole). (*Прим. ред.*)

На основе этих сочинений П. И. Собко была опубликована в «Журн. Гл. упр. п. с. и публ. зд.», т. XII, 1850, № 5, стр. 85—119 статья «Трубчатые мосты Конвэйский и Британский на Честер—Холихедской ж. д. в Англии». См. также его статью в том же журнале, т. IV, 1846, стр. 155—158 под заглавием «Опыты, произведенные в Англии над сопротивлением железных труб перелому» (*Прим. ред.*)

различных форм. По практическим соображениям был избран прямоугольный профиль, а для того чтобы обеспечить равную прочность на растяжение и на сжатие, в верхней части балок было поставлено большее количество металла.

В выполнение программы Ходкинсона было решено провести испытания моста на большой модели пролетом 22,5 *м* с поперечным сечением, показанным на рис. 79. Для усиления верхней части была применена ячеистая конструкция с диафрагмами, а для соотношения между рабочими площадями верхней и нижней частей была принята величина $^5/_3$, причем была предусмотрена возможность усиления в последующем прочности растянутой зоны в случае, если испытания укажут на необходимость этого мероприятия. Испытания установили, что ячеистая конструкция весьма эффективно содействовала повышению устойчивости балки; выразилось это в том, что первые признаки разрушения обнаружились в нижней части. Последнюю затем в несколько приемов последовательно усиливали, причем было установлено, что каждый новый вариант приобретал повышенную в сравнении с предыдущим прочность. Равенство прочностей на растяжение и на сжатие было достигнуто при соотношении между сжатой и растянутой площадями, равном 12 : 10; таким путем с помощью ячеистой конструкции удалось заметно сгладить неравнопрочность материала в его работе на растяжение и на сжатие. Те же испытания выяснили, что и боковые стенки трубы также не обладали достаточной устойчивостью, поэтому во избежание волнообразного деформирования листы стенок были укреплены вертикальными ребрами жесткости.

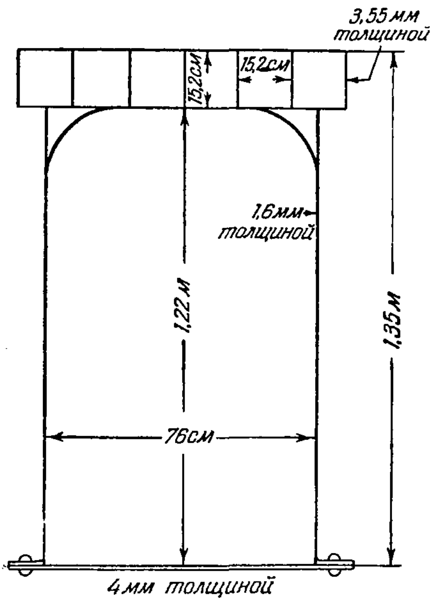


Рис. 79. Поперечное сечение модели, испытанной Фейрбейрном.

По выполнении этих испытаний были назначены окончательные размеры поперечного сечения трубчатых мостов, причем в основу их было положено допущение, что несущая способность трубы возрастает пропорционально квадрату ее линейных размеров, а ее вес—пропорционально кубу этих размеров. На рис. 80 показаны поперечное и продольное сечения моста «Британия» в его окончательном виде. Когда проект Конвэйского моста был закончен, Ходкинсона попросили вычислить наибольшую нагрузку, которую способен выдержать мост, а также вызываемый этой нагрузкой прогиб. Хотя задача была простой и сводилась лишь к определению максимального напряжения и прогиба свободно

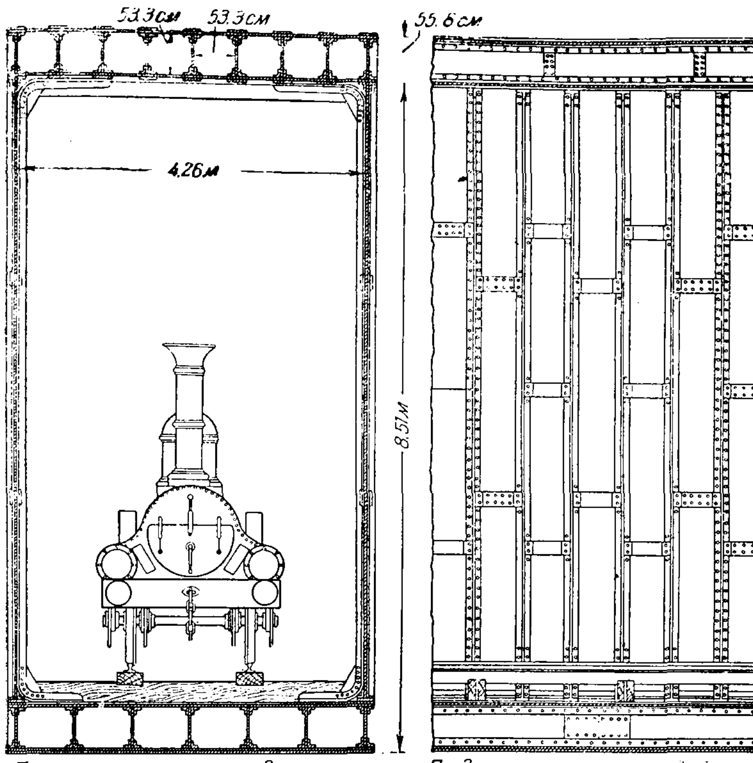


Рис. 80. Поперечное и продольное сечения моста «Британия».

опертой и равномерно загру́женной балки постоянного поперечного сечения, она оказалась не под силу Фейрбейрну и производителю работ инженеру Кларку (E. Clark). Понадобилась помощь «математика» (Ходкинсона). Расчет этот был признан столь важным, что в самом подробном виде был включен в книгу Кларка и в отчет о строительстве[1]). Воспроизводится он также и в книге Уиэйля по теории, практике и архитектуре мостов[2]). Ходкинсон

[1]) Report of the Commissioners...
[2]) W e a l e, Theory, practice and architecture of bridges.

нашел, что для проектных размеров моста и при максимальном допускаемом напряжении на сжатие 1260 *кг/см*^{2} наибольшая сосредоточенная нагрузка W в середине моста может достигать 1130,09 $т$, если для прогиба δ допустить 262 *мм*. При условии равномерного распределения нагрузки по пролету W можно было бы удвоить, а прогиб δ увеличить в $^5/_4$ раза. Модуль упругости в этих расчетах был принят равным $1{,}68 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}. После того как мост был сооружен, в нем были произведены измерения наибольшего прогиба, вызванного нагрузкой, приложенной в центре; оказалось, что этот прогиб составляет 0,28 *мм* на каждую тонну нагрузки. Это значение превышает приблизительно на 20% предсказанное расчетом.

Сооружение мостов «Британия» и «Конвэй» знаменует собой крупный шаг в развитии наших познаний о прочности инженерных сооружений. На основе испытаний на моделях не только устанавливалась прочность целых мостовых трубчатых конструкций, но и производилось исследование сопротивления в железных пластинках и в различных типах клепаных соединений[1]). Изучено было также влияние одностороннего давления ветра и неравномерного нагрева солнцем. Фейрбейрн получил патент на конструкцию трубчатых мостов, и в дальнейшем было построено несколько сооружений этого типа[2]).

Сооружение этих трубчатых мостов возбудило интерес инженеров и за пределами Англии, и мы находим описания их во многих относящихся к тому времени книгах и статьях по сопротивлению материалов и теории сооружений. Мы уже упоминали о критических замечаниях Клапейрона по этому проекту (см. стр. 177). Последний указал, что наибольшие напряжения на опорах моста «Британия» значительно превышали напряжения по середине пролетов. По-видимому, Клапейрон не учитывал порядка сборки моста «Британия», ибо из книги Кларка[3]) мы видим, что инженеры ясно понимали характер воздействия равномерно распределенной нагрузки на неразрезную балку. В этой книге утверждается: «задача состояла не в том, чтобы уложить звенья трубы на предназначенные для них места в точности в те положения, как если бы они с самого начала были собраны в одну целую трубу и в таком виде были уложены на быки,—в такой неразрезной балке (при постоянном сечении) деформации получились бы гораздо бо́льшими над опорами, чем в серединах про-

---

[1]) В итоге этих испытаний выяснилось, что трения, вызываемого заклепками между листами заклепочного соединения, достаточно для того, чтобы оказать сопротивление срезывающим силам, и что прогиб является результатом одной лишь упругой деформации.

[2]) Он ввел трубчатый профиль также и в конструкции кранов, причем это решение оказалось весьма удачным.

[3]) См. книгу Clark E., цит. на стр. 191, т. 2, стр. 766.

летов, между тем как поперечное сечение трубы по всей ее длине было почти постоянно; задача, следовательно, состояла в том, чтобы выравнять деформации». Для того чтобы осуществить это выравнивание, при сборке моста был использован следующий прием. Сначала укладывалась труба, перекрывавшая большой пролет CB (рис. 81). При изготовлении стыка B смежная труба AB укладывалась, как показано на рисунке, под некоторым углом к горизонту, и в этом ее положении производилась клепка стыка. Когда секция AB принимала горизонтальное положение, на опоре B возникал изгибающий момент, величина которого

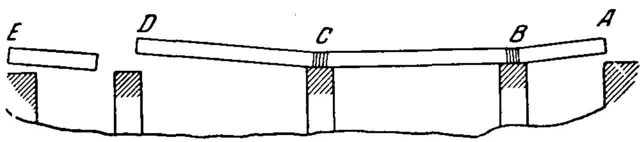


Рис. 81.

зависела от первоначального наклона секции AB к горизонту. Подобный же прием применялся и при клепке стыков C и D. Подбор надлежащих углов наклона склепываемых секций производился инженерами-мостостроителями при консультации Поула (W. Pole), исследовавшего задачу изгиба неразрезных балок методом Навье.

Тщательный критический разбор проекта моста «Британия» был проведен Д. И. Журавским[1]). Он начинает свое обсуждение с рассмотрения решетчатых ферм и правильно заключает, что выпучивание боковых стенок трубчатого моста вызывается напряжениями сжатия, действующими в плоскостях этих стенок под углом в 45° к горизонту. Он рекомендует располагать ребра жесткости в направлении наибольших сжимающих напряжений. В обоснование своей точки зрения он поставил несколько весьма любопытных опытов над моделями из плотной бумаги с картонными ребрами жесткости. Обсуждая вопрос о выборе материала для опытов, он приводит ценные соображения общего характера о постановке английских испытаний. Он считает неправильным судить о прочности конструкции, руководствуясь критерием предельной нагрузки, вызывающей разрушение, поскольку с приближением

[1]) Французский перевод его работы был напечатан в Ann. ponts et chaussées, т. 20, стр. 113, 1860. (*Прим. авт.*) Эта статья Д. И. Журавского была опубликована только во Франции; в России краткое изложение ее содержания было приведено в библиографическом обзоре Н. Беспалова в Журн. Гл. упр. п. с. и публ. зд., т. 35, 1861, стр. 31. Об этой статье см. Митинский А. Н. и Ашкенази Е. К., Об одной мало известной работе Д. И. Журавского, Вестн. инж. и техн., 1951, № 6, стр. 262—265. (*Прим. ред.*)

нагрузки к этому предельному значению напряженные состояния в отдельных элементах конструкции могут оказаться совершенно отличными от тех, которые имеют место в нормальных рабочих условиях. Он советует производить испытания моделей под нагрузками, соответствующими эксплуатационным условиям сооружений, и пользоваться для моделей материалами, имеющими малые модули упругости, с тем, чтобы деформации до достижения предела упругости получались достаточно большими и потому легко доступными для измерения. Пользуясь своими моделями из бумаги, Журавский измеряет деформации в плоскости вертикальной стенки близ нейтральной оси, показывая, что направления наибольших деформаций сжатия (укорочений) образуют угол в 45° с вертикалью. Он получил такие путем возможность изучить направление складкообразования в боковых стенках трубчатых балок. Сравнивая различно расположенные ребра жесткости по их эффективности, он нашел, что модель с наклонными ребрами обладала на 70% более высокой несущей способностью, чем модель с вертикальными ребрами.

Как мы уже упоминали (стр. 174), Журавский вскрыл и нерациональность принятого в трубчатых мостах расположения заклепок. Владея своей теорией касательных напряжений в балках, он не встретил больше никаких трудностей в назначении правильного расстояния между заклепками для каждого частного случая.

Серьезное исследование выпучивания тонкостенных труб при сжатии было предпринято Ходкинсоном[1]) в связи с задачами проектирования больших трубчатых мостов. Он показывает, что сопротивление труб прямоугольного профиля падает с уменьшением отношения толщины стенок к ширине профиля. Им отмечается также преимущество кругового профиля, т. е. цилиндрической трубы. Эта работа представляет собой первое экспериментальное исследование выпучивания сжатых пластинок и тонкостенных труб.

Для мостов меньших пролетов были введены тонкостенные двутавры из полосового металла. Широкое распространение получили балки Брюнеля (Brunel), так как проведенные с ними испытания дали весьма благоприятные результаты[2]). Исследования клепаных двутавровых балок провел Уботт[3]) в Бельгии.

---

[1]) Результаты этого исследования были присоединены в виде Приложения А. А. к отчету Report of the Commissioners appointed to inquire into the application of iron to railway structures, London, 1849. См. также Clark E., The Britannia and Conway, tubular bridges, London, 1850.

[2]) Описания некоторых из этих мостов приводятся в книге Фейрбейрна «The application of cast and wrought Iron to building purposes», стр. 255, 2-е изд., 1857—1858. См. также книгу Э. Кларка, в которой описаны испытания Брюнеля.

[3]) Houbotte, Ann. Travaux publ. de Belgique, 1856—1857.

Испытывая такие балки без ребер жесткости (т. е. с неармированными стенками) при сосредоточенной нагрузке в середине пролета, этот инженер нашел, что выход из строя происходит неизменно в результате местного коробления вертикальной стенки близ точки приложения нагрузки.

38. Первые исследования усталости металлов

Тот факт, что металлический стержень, подвергнутый действию большого числа циклов повторного напряжения, приобретает способность разрушаться под значительно меньшими нагрузками, чем это требовалось бы в условиях статического загружения, был установлен уже давно инженерами-практиками. В своих лекциях для работников города Меца Понселе говорит об *усталости* металлов под повторным воздействием растяжения и сжатия[1]).

Морэн в своем руководстве по сопротивлению материалов[2]) останавливается на чрезвычайно интересных отчетах двух инженеров, служивших в почтовом ведомстве на французских шоссейных дорогах. Эти инженеры рекомендовали производить тщательный технический осмотр осей в почтовых каретах после эксплуатационного пробега ими 70 000 *км*, мотивируя это тем, что, как показал опыт, в результате, по-видимому, такой работы в них появляются тонкие трещины в местах, где имеются резкие изменения профиля, в особенности в острых входящих углах. Они дают интересное описание картины постепенного образования этих трещин и отмечают хрупкий характер развития. При всем том, однако, они не разделяют (в то время принятой) теории, согласно которой повторные напряжения влекут за собой рекристаллизацию железа. Статические испытания осей, прошедших большую службу в эксплуатации, не обнаружили никаких изменений во внутренней структуре металла.

С развитием железнодорожного строительства проблема усталостного разрушения паровозных осей приобрела серьезное значение. Вероятно, первой научной работой на английском языке по этому вопросу была статья Маккуорна Рэнкина (W. J. Macquorn Rankine[3]). Неожиданные, после многолетней работы, поломки доброкачественных по внешнему виду осей объяснялись обычно гипотезой, согласно которой волокнистая структура сварочного железа приобретает постепенно кристаллическое строение.

---

[1]) См. его «Mécanique industrielle», 3-е изд., стр. 317, 1870. Поскольку это издание представляет собой простую перепечатку второго издания 1839 г., возможно, что Понселе был первым, поставившим вопрос о свойстве материалов сопротивляться повторным циклам напряжения, и что именно он ввел термин «усталость».

[2]) Morin A., Résistance des matériaux, 1-е изд., 1853.

[3]) См. Proc. Inst. Civ. Engrs., London, т. 2, стр. 105, 1843.

Рэнкин показывает, что постепенное ослабление материала происходит здесь без утраты волокнистой структуры. По его словам, «излом начинается, по-видимому, с появления гладкой, имеющей правильную форму мельчайшей трещинки, которая затем опоясывает, почти замыкаясь, шейку вала и проникает в глубь ее в среднем на 12—13 *мм*. Подобные трещины проникают, по-видимому, с поверхности в центральную часть, так что поврежденный конец шейки получается выпуклым, средняя же часть оси по необходимости вогнутой, и тогда диаметр внутреннего цилиндрического ядра неповрежденного материала становится недостаточным, чтобы выдерживать удары, которым подвергается ось. Часть волокон, составляющая внутреннее ядро тела у его оси, становится менее упругой, чем в шейке, и возможно, что в углах волокна сдают именно по той причине, что упругое состояние здесь внезапно исчезает. По этим соображениям при изготовлении осей рекомендуется до поступления их на токарные станки очерчивать углы шеек по пологим кривым, так чтобы волокно сохраняло непрерывность по всей своей длине».

За 1849—1850 гг. этот вопрос обсуждался на нескольких собраниях Лондонского института инженеров-механиков. Джемс Мак-Коннелл представил доклад[1] о железнодорожных осях, в котором он заявляет: «Наш практический опыт как будто подтверждает, что даже при условии величайшей тщательности в изготовлении эти оси под воздействием вибраций подвержены быстрому повреждению, которое сказывается еще резче благодаря особенностям их формы. Изломы в углах колен по этой причине почти столь достоверны и регулярны, что в отношении некоторых типов машин мы способны даже предсказать число миль, которое они должны пробежать для того, чтобы появились видимые признаки разрушения... Проблема повреждения осей, возникающего по разным перечисленным мною причинам, представляет большую важность для всех железнодорожных компаний; то, что при этом происходит какое-то изменение природы железа, является хорошо установленным фактом, и изучение его заслуживает как нельзя более тщательного внимания... Переход волокнистой структуры в кристаллическую должен быть, как мне думается, поставлен в связь с рядом разнообразных обстоятельств. Несколько собранных мною образцов, взятых из разных мест осей, подвергшихся разрушению, ясно подтверждают мой взгляд».

«В настоящем докладе невозможно охватить все факты, относящиеся к этой стороне вопроса; однако отчетливое понимание природы повреждения осей представляет для меня столь высокую ценность, что я регистрирую теперь каждую ось, поступа-

[1]) См. Proc. Inst. Mech. Engrs., London, 1847—1849. Заседание от 24 октября 1849 г. M c-C o n n e l James E., On railway axles.

ющую с завода, и стремлюсь получать также отчеты об их эксплуатационных характеристиках и внешнем виде за отдельные периоды их службы, чтобы они позволили мне судить о том, как с ними следует поступать, чтобы повысить их качество. Если учесть, что на железных дорогах Великобритании находится в эксплуатации около 200 000 осей, то для всякого должно стать очевидным, сколь большие преимущества можно будет извлечь из того, что такой существенный элемент железнодорожного подвижного состава, как ось, получит наиболее рациональные очертания, наилучшие качества и наилучшую обработку». Мак Коннелл сопровождает эти соображения ценным советом: «Весь мой практический опыт подтверждает желательность того, чтобы... при профилировании шеек осей, насколько только это возможно, были исключены острые углы и резкие изменения диаметра, т. е. все нарушения прочности сечений».

Последующее обсуждение доклада сосредоточилось в основном на вопросе о том, изменяется структура железа под действием циклов растяжения и сжатия или не изменяется. Никакого общего заключения по этому вопросу достигнуто не было, и председатель собрания Роберт Стефенсон закрыл заседание следующим замечанием: «Мне хотелось бы лишь предостеречь членов Института от успокоения, прежде чем не будет достигнута полная ясность в вопросе молекулярного изменения железа, так как вопрос этот представляет чрезвычайную важность, а поломка одной-единственной оси в одном-единственном случае всякий раз вновь поставит этот вопрос, независимо от того, будет ли к инженеру и техническому инспектору предъявлено обвинение в человекоубийстве или не будет. Исследование в этой области требует, следовательно, величайшей осторожности, и в нашем распоряжении нет очевидных доказательств, с помощью которых мы могли бы установить, что ось обладала волокнистой структурой до излома и приобрела кристаллическую после излома. Я хочу поэтому, чтобы вы, члены Института, поскольку вы имеете дело с производством железа, призадумались бы, прежде чем вы придете к решению, что железо есть вещество, способное к кристаллизации или к молекулярному изменению под воздействием вибраций...».

Обсуждение этого вопроса продолжалось и на заседаниях Института, происходивших в 1850 г. и освещенных в печатных трудах, относящихся к этому году. Весьма интересная мысль была подана на одном из этих заседаний Ходжем (P. R. Hodge)[1]: «Чтобы прийти к сколько-нибудь достоверным выводам относительно структуры железа, необходимо было бы обратиться к помощи микроскопа и рассмотреть волокнистую и кристаллическую

---

[1]) Proc. Inst. Mech. Engrs., London, заседание 23 января 1850 г.

структуры». Этому совету последовал Стефенсон[1]), заявивший (на следующем заседании), что он имел случай исследовать образец железа, известного как «кристаллическое», и другой образец железа, «волокнистого», под микроскопом с большим увеличением и что он, вероятно, удивит членов Института сообщением, что никакой реальной разницы между ними он обнаружить не сумел.

Почти в то же самое время, пока происходила эта дискуссия по вопросам усталости на заседаниях Института инженеров-механиков в Лондоне, интересная работа по тому же вопросу была

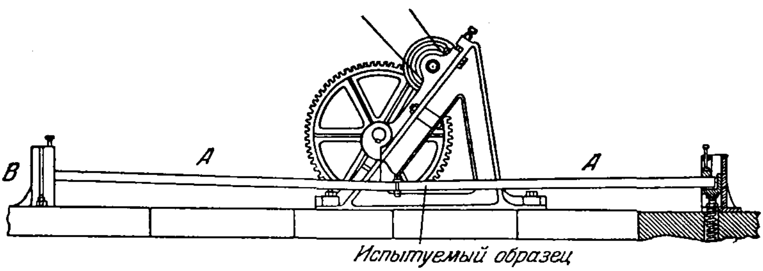


Рис. 82. Машина Джемса — Гальтона для испытаний на выносливость.

проведена комиссией, сформированной в 1848 г. для обследования применений железа в железнодорожных сооружениях. В плане работ этой комиссии капитанами Генри Джемсом (Henry James) и Гальтоном (Galton) было предпринято в Портсмуте экспериментальное исследование прочности железных брусьев, подвергнутых большому числу циклов загружения[2]). Для того чтобы загружать брус изгибающей нагрузкой, а затем внезапно разгружать его, был применен вращающийся эксцентрик (рис. 82), причем частота производимых им изгибов изменялась в интервале от 4 до 7 в минуту. Из числа брусьев, подвергнутых этим испытаниям, «три выдержали 10 000 циклов изгиба, равного тому, который вызывается нагрузкой, составляющей $^1/_3$ от статической разрушающей нагрузки, не получив никакого явного ущерба в своей способности

[1]) Proc. Inst. Mech. Engrs., London, апрель 1850.

[2]) Результаты этого исследования были опубликованы в приложении B 5 к отчету Report of the Commission, стр. 259. О них говорится также в статье Фейрбейрна: Phil. Trans., т. 154, 1864. (*Прим. авт.*) Эти результаты были приведены также в статье П. И. Собко «Исследование вопроса об употреблении чугуна и железа в сооружениях на железных дорогах», Журн. Гл. упр. п. с. и публ. зд., т. 13, 1851, кн. 1, стр. 10—33. Статья эта явилась первой в России, посвященной вопросам сопротивления чугуна и железа действию переменных и динамических нагрузок. При описании результатов исследований английских инженеров приводятся собственные, весьма дельные замечания П. И. Собко. (*Прим. ред.*)

сопротивляться статическим нагрузкам; один брус разрушился после 51 538 таких изгибов, другой же вынес 100 000 таких изгибов без всякого заметного снижения прочности, между тем как три бруса, испытавших на том же эксцентрике повторный изгиб, равный тому, который вызывается статической нагрузкой, составляющей $^1/_2$ от разрушающей, разрушились соответственно после 490, 617 и 900 циклов. Отсюда поэтому следует заключить, что железные брусья способны выдерживать безвредно повторное приложение нагрузки, составляющей только $^1/_3$ от разрушающей».

Фейрбейрн чрезвычайно интересовался вопросом, как отражается на прочности трубчатых мостов повторное загружение их весом проходящих поездов. Он поставил перед собой задачу найти то наибольшее напряжение, которое можно было бы приложить неопределенно большое число раз, не нанося этим никакого вреда материалу. Таким путем он мог бы вычислить безопасное рабочее напряжение. Он указывает[1]), что при проектировании больших трубчатых мостов размеры их назначались таким образом, чтобы разрушающая нагрузка на них «превышала в 6 раз ту самую тяжелую нагрузку, которой они могли бы быть подвергнуты, если бы при этом была снята половина веса самой трубы. Это было признано соответствующим достаточному запасу прочности; однако последующие соображения, сопутствовавшие введению нового конструктивного принципа при использовании еще не испытанного в практике материала, побудили повысить запас прочности, так что временное сопротивление стало превышать наиболее возможный тяжелый груз уже не в 6, а в 8 раз». После этого Фейрбейрн переходит к обсуждению требований Министерства торговли, согласно которым «все будущие мосты для железнодорожного транспорта не должны загружаться свыше чем на 788 *кг/см*^{2} (5 *т* на 1 кв. дюйм)». Он (правильно) замечает, что сжатая стенка в трубчатых мостах может подвергнуться короблению при сравнительно низких напряжениях и что во избежание этого нужно применить ячеистую конструкцию.

Для того чтобы определить безопасное значение рабочего напряжения для мостов, Фейрбейрн решил провести испытания таким образом, чтобы деформации, возникающие в мостах при проходе по ним тяжелых железнодорожных поездов, обнаруживались бы как можно раньше. С этой целью была применена двутавровая балка A (рис. 83) длиной 6,6 *м*, высотой 40 *см*, склепанная из полосового железа и уголков. Начальный прогиб был произведен грузом D, приложенным на конце C рычага BC. Для того чтобы создать цикличность загружения, концу C рычага BC сообщалось попеременное вертикальное движение от стержня CE, прикрепленного к равномерно вращавшемуся эксцентрику. Таким

[1]) Phil. Trans., т. 154, 1864.

путем балка загружалась 7—8 раз в минуту. Из испытаний выяснилось, что «балка из сварочного железа, будучи загруженной растягивающим напряжением до 1100 *кг/см*², не может быть признана надежной, если это напряжение создается попеременным наложением и снятием нагрузки, т. е. если балка подвергается таким путем определенному достаточно большому числу вибраций и притом, что особенно важно, если 300 000—400 000 перемен нагрузки, осуществленных описанным способом, достаточно, чтобы с достоверностью вызвать излом. Следует, однако, иметь в виду, что балка, послужившая поводом для таких заключений, выдержала свыше 3 000 000 циклов при напряжении около 788 *кг/см*², в связи с чем как результат экспериментов следует

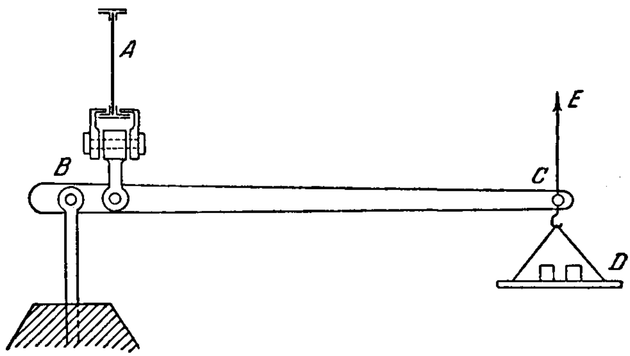


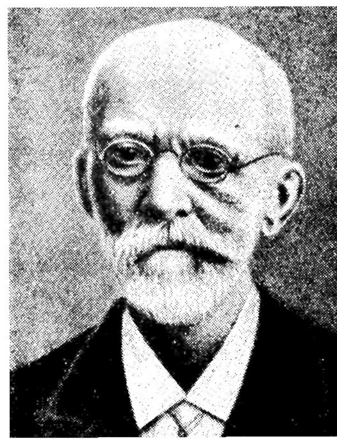
Рис. 83. Машина Фейрбейрна для усталостных испытаний.

признать, что растягивающее напряжение в 788 *кг/см*², фиксированное в качестве допускаемого для балок Министерством торговли, обеспечивает, по-видимому, достаточный запас прочности».

Мы видим, что уже в середине XIX века инженерам было известно отрицательное влияние повторности напряжений на прочность металлов и что на основании нескольких проведенных ими экспериментов они пришли к заключению, что нагрузка, действующая попеременно, может быть признана безопасной, если она не превышает $^1/_3$ от разрушающей статической нагрузки. Значительно более полным разъяснением явления усталости мы обязаны А. Вёлеру

39. Научная работа А. Вёлера

А. Вёлер (A. Wöhler, 1819—1914) родился в семье школьного учителя недалеко от Ганновера и получил техническое образование в Ганноверском политехническом институте. За свои академические успехи при прохождении курса он получил по окончании политехникума стипендию, позволившую ему приобрести практический стаж на паровозном заводе Борзига в Берлине и на строительстве железных дорог Берлин—Анхальт и Берлин—Ганновер. В 1843 г. он был послан в Бельгию для изучения работы паровозостроительных заводов. По возвращении на него было возложено руководство работой железнодорожных мастерских в Ганновере. С 1847 г. он стал заведовать подвижным составом и мастерскими Нижне-Силезской железной дороги, и это заставило его обосноваться на последующие 23 года своей жизни во Франкфурте-на-Одере. Здесь ему пришлось заняться выяснением многочисленных вопросов, касающихся механических свойств материалов; здесь же он приступил и к своим знаменитым исследованиям по усталостной прочности металлов. Его положение открывало ему возможности реализовать результаты своих экспериментов в практических применениях.



А. Вёлер.

Постоянство свойств материала имеет существенное значение при его практическом использовании, и в стремлении достигнуть такого постоянства Вёлер разработал технические условия на материалы, поступающие для использования на железных дорогах. Он содействовал также организации в Германии сети лабораторий по испытанию материалов и помог ввести единообразие в методику самих испытаний. Его влияние в этом отношении было очень большим в Германии, а спроектированные и сооруженные им для своей работы испытательные машины были лучшими в то время. Свидетельством их исторического значения является то, что они хранятся в качестве экспонатов в Музее германской техники в Мюнхене.

Основная работа Вёлера по усталости металлов была выполнена им с намерением найти мероприятия, которые смогли бы снизить аварийность, выражавшуюся в постоянных поломках осей подвижного состава на Нижне-Силезской железной дороге[1]). Чтобы определить наибольшие значения сил, действующих на ось в эксплуатационных условиях, Вёлер воспользовался установкой, схематически изображенной на рис. 84. Часть *mnb* жестко укреп-

[1]) Z. Bauwesen, т. 8, стр. 641—642, 1858; т. 10, стр. 583—616, 1860; т. 16, стр. 67—84, 1866; т. 20, стр. 76—106, 1870.

лена на оси pq, а стрелка bc с помощью шарнирного бруса ab соединена с бандажом колеса. В результате изгиба оси, показанного на схеме пунктиром, шарнир a смещается и острие c стрелки bc оставляет царапину на цинковой пластинке mn. На практике эти царапины получались весьма различной величины и особенно большими под действием ударных сил, вызванных неправильностями рельсового пути. Измеряя размеры царапин, можно найти наибольшие деформации оси. Для определения соответствующих сил производилось испытание на статический изгиб путем загружения оси известными горизонтальными силами в точках a и a_1 и измерения вызванного этим изменения расстояния aa_1. По этим данным легко можно было вычислить наибольшие напряжения изгиба в эксплуатационных условиях. Аналогичным образом определялись и наибольшие напряжения кручения по результатам измерения наибольшего угла закручивания, которому подвергается ось в условиях эксплуатации.

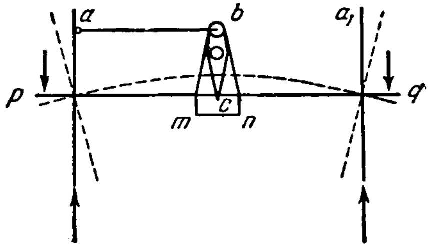


Рис. 84. Прибор для измерения прогибов вагонных осей в условиях эксплуатации.

Зная наибольшие значения действующих на ось сил, Вёлер приступил к исследованию ее прочности в условиях знакопеременного напряженного состояния. Для этой цели была сконструирована специальная машина (рис. 85), главной частью которой был

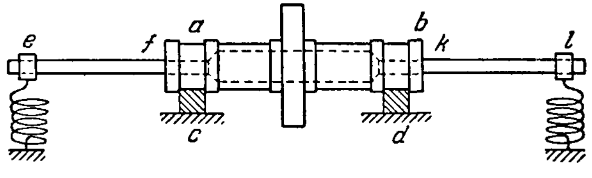


Рис. 85. Машина Вёлера для усталостных испытаний.

цилиндр ab, вращавшийся в подшипниках c и d со скоростью около 15 оборотов в минуту. Каждая из двух осей, ef и kl, укреплена одним своим концом (f и k) в роторе, на другом же изгибается натяжениями пружин, передаваемыми через кольцевые подшипники e и l. За время одного оборота напряжения в волокнах оси совершают один полный цикл изменения. Регулировка напряжений достигается надлежащей установкой пружин. На этой машине были испытаны оси различного диаметра и из разных материалов, причем были получены сравнительные данные, характеризующие их прочности. Однако для фундаментального изучения усталостной прочности металла требовалось большое количество испытаний, и Вёлер решил для этой цели перейти от натурных испытаний с настоящими осями железнодорожного подвижного состава, диаметры которых лежат в пределах $3^3/_4'' \div 5''$ (95 ÷ 127 *мм*), к образцам меньших размеров, полученным путем механической обработки из цилиндрических брусьев диаметром $1^1/_2''$ (37,5 *мм*). Использование таких уменьшенных образцов позволило повысить скорость вращения испытательной машины приблизительно до 40 000 оборотов в день. Таким путем создавалась возможность подвергать образец действию многих миллионов циклов напряжения. Испытывая несколько тождественных образцов под действием сил различной величины и сравнивая количества циклов, потребовавшихся для того, чтобы вызвать излом, Вёлер получил нужные данные для вывода определенных заключений об усталостной прочности испытанного им материала. Следует заметить, что в своем анализе он не пользуется так называемой *кривой Вёлера*, но применяет термин *предельное напряжение* (Bruchgrenze).

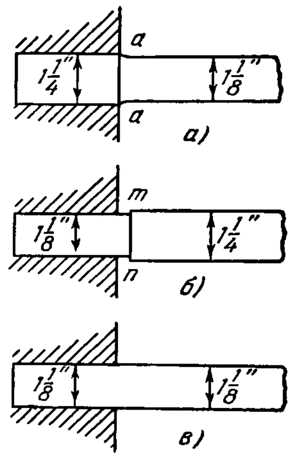


Рис. 86.

Вёлер установил, что отрицательное влияние острых углов и резких изменений профиля может быть смягчено введением плавных переходов (рис. 86, *а*). Им были проведены сравнительные испытания образцов типа рис. 86, *б* и *в*, причем было установлено, что образцы постоянного диаметра обнаруживают более высокую усталостную прочность. В отношении образцов типа рис. 86, *б* было найдено, что излом происходит всегда по тому сечению *mn*, в котором имеется резкое изменение сечения, из чего можно заключить, что, увеличивая диаметр бруса в сечении *mn* и расходуя, таким образом, на него дополнительный материал, мы можем этим лишь ослабить его. Вёлер истолковывает этот неожиданный вывод неправильностью распределения напряжений по сечению *mn*, указывая, что ослабляющее влияние острых углов имеет серьезное значение не только в осях, но должно предусматриваться и при проектировании иных частей машин. Дальнейшие эксперименты показали, что это ослабляющее влияние зависит от рода материала и что падение прочности в острых углах варьируется в интервале 25—33%. Было найдено также, что если резкое изменение поперечного сечения простирается лишь на часть его контура, как это показано на рис. 87, *а* и *б*, усталостная трещина начинается все же с острого угла. Заштрихованная на рис. 87, *б* часть поперечного сечения ограничивает грубозернистый первичный участок трещины, различимый после излома.

В испытаниях, проведенных на машине, показанной на рис. 85, осуществлялся симметричный цикл изменения напряжений. Чтобы получить иные циклы изменения напряжений, Вёлер спроектировал и построил другую машину для усталостных испытаний свободно опертых образцов прямоугольного сечения. Переменные прогибы образцов создавались эксцентриком так, что напряжение в наиболее удаленном волокне растянутой зоны можно было получить в интервале значений между наибольшим и нулевым или же между наибольшим и растягивающим напряжением несколько меньшей величины. Сопоставляя результаты, полученные на этой машине, с полученными ранее для симметричного цикла, Вёлер обнаружил, что излом начинается всегда на растянутой грани и что величина наибольшего напряжения, которое способен выдержать материал, зависит в значительной мере от разности между наибольшим и наименьшим напряжениями (т. е. от разности напряжений). Для одного из сортов применяемой в железнодорожных осях стали Вёлер приводит следующие предельные значения наибольшего и наименьшего напряжений, выдерживаемых этой сталью при любом большом числе циклов:

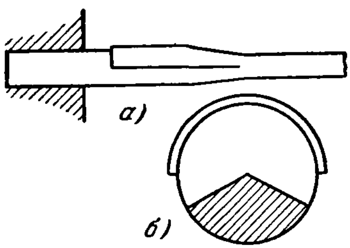


Рис. 87.

Наибольшее напряжение *кг/см²*	2100	3500	4900	5600	6300
Наименьшее напряжение	—2100	0	1750	2800	4200
Разности напряжений	4200	3500	3150	2800	2100

Из всех испытаний явствует, что для данного максимального напряжения число циклов, необходимое для того, чтобы вызвать разрушение, уменьшается с возрастанием амплитуды цикла. Вёлер делает из этого вывод, что в мостах больших пролетов и в рессорах железнодорожных вагонов (где наибольшее напряжение производится главным образом постоянной нагрузкой, т. е. собственным весом) допускаемые напряжения могут быть приняты гораздо более высокими, чем в осях или в поршневых штоках (шатунах), где материал подвергается действию знакопеременного цикла напряжений.

Все эти выводы были получены из испытаний на изгиб, и Вёлер решил проверить их, обратившись к изучению влияния осевой нагрузки, для чего и спроектировал специальную разрывную машину. Образцы в ней подвергались циклам растягивающих напряжений, причем полученные результаты оказались в хорошем согласии с выводами из испытаний на изгиб. Это побудило Вёлера рекомендовать одну и ту же величину рабочего (допускаемого) напряжения при одинаковых циклах напряжений, независимо от того, каким способом эти циклы осуществлены.

Следующим шагом в изучении усталостной прочности металлов было исследование циклов сложного напряженного состояния. Здесь Вёлер полагает, что прочность зависит от циклов наибольшей деформации (следуя теории наибольшей деформации), и принимает при вычислении деформаций коэффициент Пауссона равным $^1/_4$. Далее, он применяет свои общие соображения к кручению, для которого принятая теория прочности дает значение предела выносливости при полном знакопеременном цикле, составляющее 80% от соответствующей величины для растяжения-сжатия. Для того чтобы в этом удостовериться, Вёлер построил специальную машину, с помощью которой он получил возможность подвергать цилиндрические стержни циклическому кручению. Выполненные на ней опыты со сплошными цилиндрическими образцами подтвердили теорию. На их основании Вёлер рекомендует принимать для рабочих (допускаемых) касательных напряжений значение, составляющее 80% от допускаемого нормального напряжения на растяжение-сжатие. Он обратил внимание также на то обстоятельство, что трещины в испытываемых на кручение образцах возникают в направлениях, образующих 45° с осью цилиндра, и вызываются наибольшими растягивающими напряжениями.

Поскольку испытания на выносливость требуют много времени и сопряжены с большими материальными издержками, Вёлер, естественно, попытался найти какие-либо зависимости между усталостной прочностью и другими механическими характеристиками материала, определяемыми при статических испытаниях. Насколько можно судить, особенно он интересовался пределом упругости тех материалов, с которыми он производил усталостные испытания. Установление предела упругости по испытаниям на растяжение требует точного измерения весьма малых удлинений, пригодных же для этой цели инструментов в то время еще не существовало. Поэтому Вёлер решил определить предел упругости по испытаниям на изгиб, хотя он и отдавал себе ясный отчет в том, что этот метод не обеспечивает надлежащей точности, поскольку предельное напряжение достигается сначала самыми крайними волокнами, а начало текучести становится заметным лишь после того, как в значительной части материала напряжения уже превзойдут предел упругости. Чтобы сделать такие измерения, насколько это возможно, точными, Вёлер применил специальную систему нагружения (рис. 88) в построенной им для этой цели машине. Благодаря ей участок ab образца mn испытывает чистый изгиб, и потому из точного измерения прогибов становится возможным определить модуль упругости E и нагрузку, при которой начинается необратимая деформация.

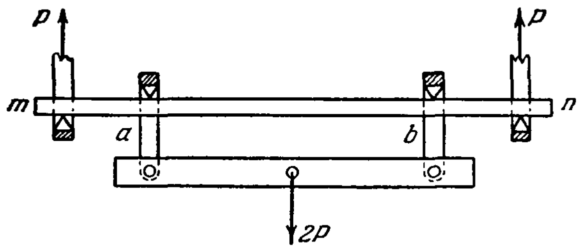


Рис. 88. Прибор Вёлера для статических испытаний на изгиб.

В связи со статическими испытаниями Вёлер заинтересовался и пластической деформацией стержней, предварительно загруженных выше предела упругости, а также остаточными (начальными) напряжениями, вызванными такой деформацией. Он исследует эти напряжения в брусьях прямоугольного поперечного сечения

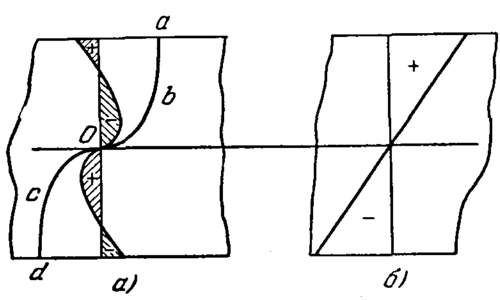


Рис. 89.

загружая их выше предела упругости, а затем разгружая (рис. 88). Полагая, что в процессе разгрузки материал следует закону Гука для остаточных напряжений, он находит закон распределения, показанный графически на рис. 89, *а* штриховкой. Он получает эту эпюру, налагая линейную диаграмму, отражающую процесс разгрузки (рис. 89, *б*), на распределение напряжений при загружении, изображаемое кривой *abocd* (рис. 89, *а*). Отсюда Вёлер заключает, что соответствующая разность напряжений в усталостных испытаниях не связана с начальной пластической деформацией. Здесь мы впервые встречаемся с вопросом об остаточных напряжениях, вызванных пластическим изгибом.

Представляют интерес соображения Вёлера об искажении прямоугольного поперечного сечения при пластическом изгибе бруса. Полагая, что плотность материала остается при пластическом деформировании постоянной, он приходит к заключению, что если волокна испытывают относительное удлинение ε, то поперечное сжатие должно будет при этом выразиться величиной $\varepsilon/(2+\varepsilon)$. Относительному же укорочению ε_1 отвечает поперечное относительное удлинение $\varepsilon_1(2-\varepsilon_1)$. В результате этих поперечных деформаций первоначально прямоугольное поперечное сечение пластически изогнутого бруса должно получить вид, показанный на рис. 90. Это предсказание теории подтвердилось экспериментально.

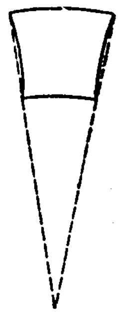


Рис. 90.

Вёлер заканчивает свой труд интересными соображениями о допускаемых напряжениях. Для бруса, подвергнутого действию осевой растягивающей силы, он рекомендует назначать коэффициент запаса, равный 2, иными словами, допускать для рабочего напряжения значение, составляющее половину предела прочности материала. Для циклического загружения он рекомендует тот же запас прочности, т. е. 2, но в данном случае это требует, чтобы наибольшее рабочее напряжение равнялось половине предела выносливости. В обоих случаях предполагается, что при расчетах приняты невыгоднейшие условия загружения. В узлах конструкции рабочие напряжения должны быть много меньшими из тех соображений, чтобы излишний запас прочности мог в случае необходимости компенсировать неравномерности в распределении напряжений. Автор призывает к тщательному исследованию этих неправильностей.

Мы видим, что экспериментальная работа Вёлера носила основоположный характер: с полным основанием можно утверждать, что именно с нее берет начало научное изучение усталости материалов. Для каждого вида своих испытаний Вёлер проектировал и конструировал все необходимые машины и измерительные инструменты. При проектировании их он предъявлял весьма строгие требования к точности, с которой должны были измеряться силы и деформации; по этой причине его машины представляют собой серьезный шаг вперед в технике испытания строительных материалов.

40. Динамическое действие нагрузки

Задача определения напряжений и прогибов в балке под действием движущейся нагрузки возникает, естественно, при изучении прочности мостов. Проследим последовательно развитие успехов в разрешении этого вопроса. В приложении В к отчету Report of the Commissioners... (стр. 196) приводятся описания некоторых чрезвычайно интересных исследований, выполненных проф. Р. Уиллисом, капитанами Г. Джемсом и Д. Гальтоном[1]. К середине XIX века по вопросу о характере воздействия подвижной нагрузки на балку общего мнения среди инженеров еще не установилось. В то время как некоторые полагали, что нагрузка, движущаяся с большой скоростью, оказывает такое же влияние, как и внезапно приложенная нагрузка, и способна вызвать прогибы, бо́льшие по сравнению со статической нагрузкой, другие доказывали, что при весьма высоких скоростях нагрузка имеет слишком

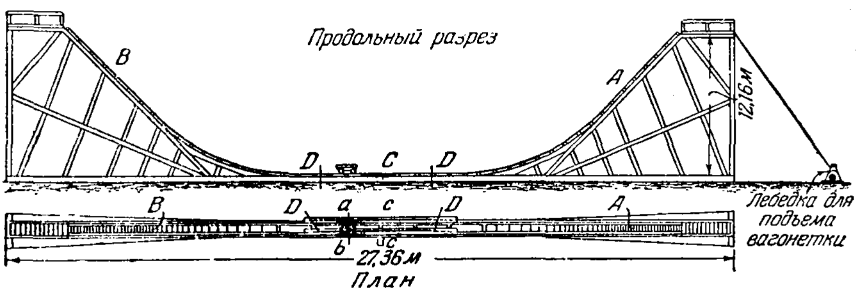


Рис. 91. Рельсовый трек для динамических испытаний балок.

мало времени для того, чтобы успеть снизиться на величину предполагаемого динамического прогиба.

Было решено провести испытания, которые по возможности близко воспроизводили бы реальные условия. На Портсмутском судостроительном заводе, на специально сооруженной для этой цели платформе была уложена железнодорожная колея-трек (рис. 91), а в качестве подвижной нагрузки была применена двухосная вагонетка. По обоим концам этот опытный трек был приподнят над его средним горизонтальным участком почти на 12 *м*, так что скорость скатывавшейся вагонетки к середине участка могла достигать 48 *км/час*. Испытываемые чугунные брусья—шпалы *C* (рис. 91) имели в длину 2,7 *м* и в поперечном сечении—форму прямоугольников трех различных размеров: 25×50 *мм*^{2}, 25×75 *мм*^{2} и 100×37 *мм*^{2}. В статических испытаниях при последовательно возраставшем загружении вагонетки измерялись прогибы этих брусьев, а по ним были найдены соответствующие значения предельного статического напряжения. При динамических испытаниях вагонетка с минимальной нагрузкой втягивалась до того

[1]) Отчет Уиллиса (Willis) с описанием опытов приведен также в приложении к одному изданию книги Барлоу: Barlow, A treatise on the strength of timber, London, 1851.

пункта наклонного участка пути, которому отвечала назначенная скорость скатывания, после чего она внезапно освобождалась. Опыт повторялся несколько раз с постепенно возраставшими нагрузками, причем всякий раз измерялись соответствовавшие динамические прогибы. В заключение для каждой принятой скорости определялась соответствующая ей предельная нагрузка. Таким путем было установлено, что динамические прогибы под нагрузкой определенной величины получаются бо́льшими, чем прогибы, вызванные той же нагрузкой в статических условиях, и что излом бруса в динамических условиях происходит под значительно меньшей нагрузкой, чем в статических условиях. Повторение

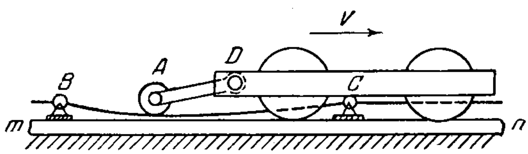


Рис. 92. Установка Уиллиса для динамических испытаний балок.

этих испытаний с более высокими скоростями подвижной нагрузки показало, что снижение прочности проявляется с тем большей резкостью, чем выше эта скорость. При сравнительно более высоких скоростях действительный прогиб получался в два, а иногда в три раза больше статического.

Эксперименты, выполненные на эксплуатируемых мостах, не обнаружили эффекта скорости в столь ярко выраженной форме. Чтобы найти объяснение такому отступлению от лабораторных данных, Уиллис повторил подобные же эксперименты в упрощенном виде в Кембридже и построил на них аналитическую теорию. В его установке испытываемый брус BC (рис. 92) подвергался действию катка A, присоединенного с помощью шарнирной сцепки к вагонетке, двигавшейся по рельсам. Между этими рельсами, составлявшими колею, был уложен третий рельс, причем брус BC составлял с ним одно целое. Отмечая перемещения рамы AD относительно вагонетки, которая двигалась по непрогибавшемуся железнодорожному пути mn, можно было получить траекторию катка A.

Разрабатывая свою теорию, Уиллис пренебрегает массой контрольного бруса BC как малой в сравнении с массой катка A и пользуется для статического прогиба y под точкой приложения силы P (рис. 93, a) выражением

$$y = \frac{Px^2 (l-x)^2}{3lEI}, \qquad \text{(a)}$$

где l — длина бруса, а EI — его жесткость при изгибе. Из этого выражения видно, что, перемещаясь вдоль бруса, точка приложения силы P описывает кривую с горизонтальными касательными у концов участка (рис. 93, *б*). Чтобы применить уравнение (а) к случаю движущегося катка A (рис. 92), Уиллис вводит в него вместо силы P давление катка на брус. Это давление складывается из двух частей: веса W катка и силы инерции $-W\ddot{y}/g$, соответствующей его вертикальному перемещению. Мы получаем, таким образом,

$$y=\frac{W}{3lEI}x^2(l-x)^2\left(1-\frac{\ddot{y}}{g}\right). \qquad \text{(b)}$$

Замечая теперь, что

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dy}{dx} \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dt^2}=v^2\frac{d^2y}{dx^2},$$

приходим к уравнению Уиллиса

$$y=\frac{W}{3lEI}x^2(l-x)^2\left(1-\frac{v^2}{g}\frac{d^2y}{dx^2}\right). \qquad \text{(c)}$$

Поскольку производная $-d^2y/dx^2$ есть кривизна кривой, по которой перемещается точка соприкасания катка A с рельсом, мы убеждаемся из уравнения (с), что динамическое действие катка A учитывается добавлением к силе тяжести W центробежной силы — $(Wv^2/g)(d^2y/dx^2)$. Для вычисления этой центробежной силы следует проинтегрировать (с) и найти уравнение траектории катка. Но уравнение (с) представляет в этом отношении трудности, поэтому Уиллис рекомендует удовлетвориться приближенным решением на том основании, что динамический эффект представляет собой малую величину, в силу чего замена правой части уравнения (с) ее первым членом, т. е. величиной

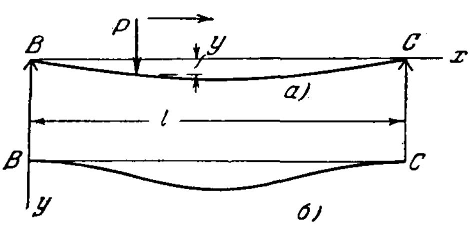


Рис. 93.

$$y=\frac{Wx^2(l-x)^2}{3lEI}, \qquad \text{(d)}$$

влечет за собой лишь малую погрешность. Это упрощенное уравнение описывает траекторию катка, вычисленную из статического прогиба по уравнению (а) и обладающую симметричной формой согласно рис. 93, *б*. Близ опор центробежная сила направлена *вверх* и давление катка на брус получается несколько меньшим его веса W. В середине же центробежная сила направлена *вниз* и суммируется с весом. Максимальное давление на брус получается равным

$$W-\frac{W}{g}v^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\frac{l}{2}}=W\left(1+\frac{16\delta_{\text{ст}}v^2}{gl^2}\right), \qquad \text{(e)}$$

где

$$\delta_{\text{ст}}=\frac{Wl^2}{48EI}.$$

Полагая для примера $v=9{,}81$ *м/сек*, $l=9{,}81$ *м*, $g=9{,}81$ *м/сек*^{2} и $\delta_{\text{ст}}=0{,}001l$, мы найдем из уравнения (е), что наибольшее давление превысит силу тяжести всего лишь на 1,6%. В портсмутских экспериментах пролет l был почти в четыре раза меньше этой величины и относительный прогиб $\delta_{\text{ст}}/l$ весьма часто более чем в 10 раз превышал принятое значение. Динамический эффект при этом составлял около 64% от силы тяжести (для скорости 9,81 *м/сек*), а с повышением скорости v сказывался еще сильнее. Таким путем Уиллису удалось установить, что весьма большой динамический эффект, обнаружившийся в портсмутских испытаниях, имеет своей главной причиной малую жесткость примененных в испытаниях брусьев.

Опыты Уиллиса показали также, что траектория катка не является симметричной кривой, как это показано на рис. 93, *б*. При перемещении катка в направлении от B к C (рис. 93) наибольший прогиб располагается ближе к опоре C_1, чем это показано на схеме, причем отклонение от симметрии увеличивается по мере возрастания величины

$$\frac{1}{\beta}=\frac{16\delta_{\text{ст}}v^2}{gl^2}.$$

Приближенное решение (е) поэтому теряет силу в тех случаях, когда величину $1/\beta$ нельзя считать малой и приходится искать полное решение уравнения (с). Такое решение было найдено Стоксом[1]), и для больших значений β оно показало хорошее совпадение с приближенным решением Уиллиса. При меньших значениях β оно дает несимметричные траектории, показывая, что наиболее напряженное сечение смещается от середины пролета к опоре C (рис. 93). Этот последний результат хорошо совпадает с опытами, согласно которым излом бруса происходит всегда на участке между его серединой и опорой C. Это решение показывает также, что полного совпадения теоретических траекторий с опытными кривыми достигнуть нельзя, если при выводе уравнения пренебрегать массой балки.

---

[1]) См. Stokes G. G., Trans. Cambridge Phil. Soc., т. 8, стр. 707, 1849.

Чтобы получить представление о влиянии массы испытуемого бруса на форму траектории движущегося катка, Уиллис воспользовался остроумным прибором, который он назвал *инерционными весами*. Рычаг mn, несущий два груза, прикреплен шарнирно к середине D испытуемого бруса BC (рис. 94). Грузы находятся в равновесии, так что на брус в точке D не передается никакой статической силы. Когда каток перемещается по брусу BC, инерционные весы приходят в движение и в точке D начинает действовать сила инерции. Это действие сходно с действием подвешенной в D массы. Если изогнутую ось бруса принять за полусинусоиду, то подвешенная в D масса будет динамически эквивалентна удво-

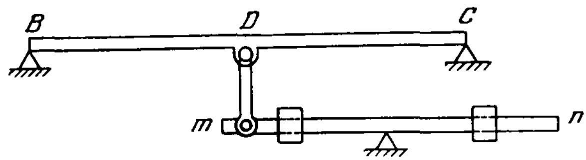


Рис. 94. Инерционные весы Уиллиса.

енной величине массы, равномерно распределенной по пролету. Вводя, таким образом, инерционные весы, мы получаем возможность учесть влияние массы испытуемого бруса на различных скоростях катка.

Этот же прибор позволяет осуществить при испытании то самое соотношение между массой катка и массой бруса, какое можно ожидать в действительных мостах. Ставя эксперимент таким образом, чтобы соотношение масс и величина β были одинаковыми как для модели, так и для моста, мы получаем возможность определить динамические прогибы моста из кривых прогиба модели[1]).

Стоксу, работавшему вместе с Уиллисом в Кембридже, удалось при этом получить приближенное решение для другого крайнего случая, а именно для случая, когда масса моста учитывается, а массой движущегося катка пренебрегают, причем предполагается, что вдоль балки перемещается постоянная сила. Принимая во внимание лишь основную форму колебаний, Стокс показывает, что величина динамического прогиба зависит от отношения между периодом этой основной формы колебаний балки и тем временем, которое затрачивает подвижная нагрузка для прохождения всего пролета.

Полученные Уиллисом и Стоксом результаты подвергались критике со стороны Хомершема Кокса[2]). Последний, основываясь

---

[1]) Это было показано Стоксом.

[2]) Cox Homersham, Civil. Engrs., archits. J., т. 11, стр. 258—264, London, 1848.

на энергетических соображениях, приходит к выводу, что динамический прогиб не может превысить статический более чем в два раза. Он забывает, однако, о том обстоятельстве, что нужно учитывать не только энергию силы тяжести, но также и кинетическую энергию движущегося катка. Реакция балки, направленная по нормали к ее изогнутой оси, дает составляющую в направлении движения на первом участке траектории и в противоположном направлении на втором участке. В силу асимметрии траектории окончательным эффектом этой реакции будет некоторое снижение скорости катка. Потерянная кинетическая энергия катка преобразуется в потенциальную энергию изгиба, за счет чего становится возможным возникновение прогибов, превышающих статический более чем в два раза.

Уиллису и Стоксу удалось, таким образом, объяснить, почему в портсмутских испытаниях динамический эффект проявился в столь сильно выраженной форме. Они показали также, что в эксплуатационных условиях на мостах он должен быть сравнительно слабым. Таким образом, практически проблема, с которой встретились члены комиссии, была разрешена, хотя полного математического обоснования и не было найдено. С тех пор много инженеров пыталось улучшить состояние наших познаний, касающихся динамического воздействия подвижной нагрузки на прогиб балки[1]), но на протяжении всего XIX века к решению этой проблемы удалось продвинуться лишь весьма мало.

Одновременно с изучением динамического эффекта подвижной нагрузки на мосты в Англии, некоторая работа в этой области была проделана также и в Германии. На Баденской железной дороге были проведены измерения прогибов чугунных мостов при различных скоростях паровозов. С этой целью был применен прибор, в котором плунжер, погружаясь в чашечку с ртутью, вытеснял ее в капиллярную трубку и таким образом позволял прочесть величину прогиба на шкале в укрупненном масштабе. Испытания установили некоторое увеличение прогибов с возрастанием скоростей паровозов, хотя при скоростях до $\sim$18 *м/сек* это влияние сказывалось слабо[2]).

41. Действие ударной нагрузки

Комиссия, образованная в 1848 г. для изучения применений железа в железнодорожных сооружениях, занималась также и вопросом о воздействии удара на балки; в представленном ею отчете мы находим результаты проведенных в этой области эксперимен-

[1]) См. Phillips, Ann. mines, т. 7, стр. 467—506, 1855; также Renaudot, Ann. ponts et chaussées, 4-я серия, т. I, стр. 145—204, 1861.

[2]) См. статью Макса Беккера: Becker Max, Die gusseisernen Brücken der badischen Eisenbahn, Ingenieur, т. I, 1848, Freiberg.

тальных работ, которые мы уже обсуждали (стр. 155). Следующий шаг в решении этой проблемы был сделан Хомершемом Коксом[1]), поставившим теоретическую задачу центрального поперечного удара о свободно опертую балку постоянного поперечного сечения. В этой работе он дает некоторое обоснование принятой им (под влиянием Ходкинсона) гипотезы, согласно которой в момент удара ударяющий шар теряет такую же долю своей скорости, которую он потерял бы при соударении с другим свободным шаром, имеющим массу вдвое меньшую, чем масса балки.

Кокс вводит допущение, согласно которому изогнутая ось балки, подвергнутой удару, мало отличается от упругой линии при статическом давлении, приложенном в середине пролета, и пользуется уравнением

$$y=\frac{f\,(3l^2x-4x^3)}{l^3}, \tag{a}$$

где l—пролет, f—прогиб в середине пролета, x—расстояние, отсчитываемое от опоры. Обозначая скорость, которую балка приобретает в среднем сечении пролета сразу после удара, через v, он полагает, что скорость балки в то же мгновение в некотором другом поперечном сечении равна

$$\dot{y}=\frac{v\,(3l^2x-4x^3)}{l^3}. \tag{b}$$

В таком случае кинетическая энергия балки будет:

$$T=\int\limits_0 \frac{q}{2g}\,(\dot{y})\,dx=\frac{17}{35}\,ql\,\frac{v^2}{2g},$$

где ql—вес балки. Мы видим, что она выражается той же самой величиной, которую мы получили бы, если бы масса, составляющая $^{17}/_{35}$ массы балки, была бы сосредоточена в середине ее пролета. Вводя эту «приведенную» массу и обозначив скорость ударяющего тела весом W через v_0, Кокс находит общую для груза и балки скорость v из уравнения сохранения количества движения. Это дает:

$$v=v_0\,\frac{W}{W+\frac{17}{35}\,ql}. \tag{c}$$

Чтобы определить максимальный прогиб f балки, он предполагает, что груз, приобретя общую с балкой скорость v, будет двигаться совместно с ней до тех пор, пока общая кинетическая энергия систе-

---

[1]) Trans. Cambridge Phil. Soc., т. 9, стр. 73—78. (Этот доклад был сделан 10 декабря 1849 г.)

мы не преобразуется в потенциальную энергию изгиба. Это приводит к уравнению

$$\frac{24EIf^2}{l^3} = \left(W + \frac{17}{35}ql\right)\frac{v^2}{2g} = \frac{Wv_0^2}{2g}\,\frac{1}{1+\frac{17}{35}(ql/W)}. \qquad \text{(d)}$$

Мы видим, что максимальный прогиб f пропорционален скорости ударяющего тела, и это удовлетворительно согласуется с опытами Ходкинсона. При вычислении энергии деформации в уравнении (d) предполагалось, что здесь сохраняет силу закон Гука. Чтобы еще теснее сблизить выводы своей теории с опытными результатами Ходкинсона, Кокс принимает и положенную в основу этих опытов общую форму соотношения между напряжениями и деформациями для чугуна

$$\sigma_x = \frac{\alpha\varepsilon_x}{1+\beta\varepsilon_x},$$

где α и β—постоянные. Надлежащим подбором этих постоянных Кокс добился поставленной им цели хорошего совпадения своей теории с экспериментом.

Дальнейшее улучшение теории удара было осуществлено Сен-Венаном[1]). Последний рассматривает систему, состоящую из призматического бруса и присоединенной к нему в его середине массы W/g. Сен-Венан предполагает, что в момент удара скорость v_0 сообщается только этой массе, брус же в целом остается в покое. Он исследует возникающие при этом формы колебаний и вычисляет наибольший прогиб в середине. Вычисления показывают, что если ограничиться лишь первыми (самыми значительными) членами ряда, выражающего наибольший прогиб, результат близко совпадает с приближенным решением (d). Исследование второй производной d^2y/dx^2, представляющей кривизну изогнутой оси, указывает, что эта кривая может значительно отличаться от выраженной уравнением (a) и что эта разница выявляется тем резче, чем больше отношение ql/W. В приводимой ниже таблице даны вычисленные Сен-Венаном значения отношений между наибольшим напряжением $\sigma_{\text{макс}}$, найденным путем суммирования его ряда, и напряжением $\sigma_{\text{макс}}$, полученным из уравнения (a):

ql/W	$^1/_2$	1	2
$\sigma_{\text{макс}}/\sigma'_{\text{макс}}$	1,18	1,23	1,49

[1]) Bull. soc. philomath., Paris, 1853—1854; Compt. rend., т. 45, стр. 204, 1857.

Расхождение между $\sigma_{\text{макс}}$ и $\sigma'_{\text{макс}}$ продолжает возрастать и далее с увеличением отношения ql/W.

Следует заметить, что исследование Сен-Венана нельзя считать полным решением проблемы поперечного удара. В нем не учитывается местная деформация балки в точке приложения удара, а положенная в основу этого исследования предпосылка, требующая, чтобы груз оставался после удара в соприкосновении с балкой до тех пор, пока прогиб не достигнет наибольшей величины, не подтверждается практикой. В действительности груз может отскочить прежде, чем балка прогнется на полную величину наибольшего прогиба, а в этом случае решение Сен-Венана становится неприменимым[1]).

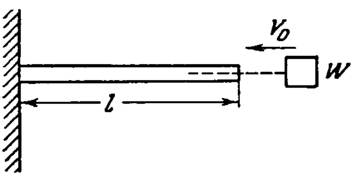


Рис. 95.

Сен-Венан исследует также продольный удар бруса. Рассматривая призматический брус, защемленный одним концом и подвергающийся продольному удару на другом конце (рис. 95), он предполагает, что при ударе в брусе возникает состояние равномерного сжатия. Учитывая массу бруса, он находит необходимым допустить, что $^1/_3$ этой массы должна быть сосредоточена на его свободном конце. Ударяющее тело, по его предположению абсолютно жесткое, принимает после момента удара скорость v, общую с концом бруса и связанную с v_0 соотношением

$$v=\frac{v_0}{1+\frac{1}{3}(ql/W)}.$$

Максимальное укорочение f бруса вследствие сжатия может быть найдено из уравнения

$$\frac{AEf^2}{2l}=\frac{Wv_0^2}{2g}\,\frac{1}{1+\frac{1}{3}(ql/W)}. \tag{e}$$

Чтобы получить более точное решение, Сен-Венан рассматривает систему, состоящую из бруса, защемленного одним концом, и массы, жестко укрепленной на другом его конце. Свободные колебания такой системы были уже изучены Навье[2]). Чтобы применить решение своего учителя к случаю удара, Сен-Венан при-

---

[1]) Сен-Венан признает свое решение точным. В «Historique Abrégé...» (см. стр. 238) он утверждает: «Для того чтобы определить прочность балки, необходимо, под угрозой совершения грубых ошибок, способных внушить ложную уверенность, пойти по пути кропотливого вычисления новой и *точной* формулы».

[2]) Bull. soc. philomath., Paris, 1823, стр. 73—76; 1824, стр. 178—181.

нимает, что брус в момент удара остается в покое, укрепленная же на его конце масса принимает внезапно скорость v_0. Используя теперь решение Навье, он представляет движение конца бруса в виде ряда и, суммируя последний, находит наибольший прогиб. Его величина получается весьма близкой к приближенному решению уравнения (е). Применяя ряд, выражающий продольные колебания бруса после мгновенного удара, Сен-Венан вычисляет также максимальную продольную деформацию и находит, что она может сильно отличаться от вычисленной из приближенного уравнения (е) в предположении ее равномерного распределения. Результаты вычислений Сен-Венана приводятся в следующей таблице:

ql/W	$^1/_4$	$^1/_2$	1	2	4
$\sigma_{\text{макс}} : \sigma'_{\text{макс}}$	1,48	1,59	1,84	2,67	3,47

Они показывают, что отношение максимального напряжения $\sigma_{\text{макс}}$ (вычисленного с помощью ряда) к напряжению $\sigma'_{\text{макс}}$ (полученному с помощью уравнения (е)), возрастает с увеличением отношения ql/W.

Здесь еще раз нужно отметить, что возможность отскакивания ударяющего тела не была предусмотрена Сен-Венаном в его решении, поскольку он предполагал, что ударяющее тело жестко связывается в момент удара с концом стержня. Впоследствии[1]) Сен-Венан вернулся к этой задаче и нашел, что для получения решения нужно было сделать всего лишь небольшой шаг, воспользовавшись для этой цели тригонометрическим рядом Навье, и что представить это решение нужно было в конечной форме. Такое решение было, наконец, найдено Буссинеском (Boussinesq), а также Себером (Sébert) и Гюгонио (Hugoniot). С научной работой этих ученых мы познакомимся позднее, стр. 290.

42. Первые этапы развития теории ферм

Деревянные мосты и стропильные перекрытия были первыми типами сооружений, в которых фермы нашли себе практическое применение. Фермы использовались еще в строительной практике римлян. На рис. 96 показано деревянное верхнее строение знаменитого моста через Дунай, построенного по приказу императора Траяна, в том виде, как оно изображено на барельефе колонны

[1]) См. заключительное примечание 60 «note finale 60» Сен-Венана в книге Клебша: «Théorie de l'élasticité des corps solides de Clebsch» в переводе Баррэ де Сен-Венана и Фламана с подробными примечаниями Сен-Венана, Paris, 1883.

Траяна в Риме[1]). В эпоху Возрождения итальянские архитекторы проявили интерес к деревянным фермам и знаменитый архитектор Палладио был, вероятно, первым, применившим эту конструкцию для перекрытия сравнительно больших пролетов. На рис. 97 представлен деревянный мост пролетом около 30 *м*, сооруженный Палладио между Трентом и Бассано (Италия). Некоторые другие проекты мостов Палладио показаны на рис. 98 и 99.

В дальнейшем деревянные мосты нашли применение в Швейцарии. На рис. 100 представлен один из двух пролетов знаменитого моста через Рейн в Шаффхаузене; он был построен в 1757 г. даро-

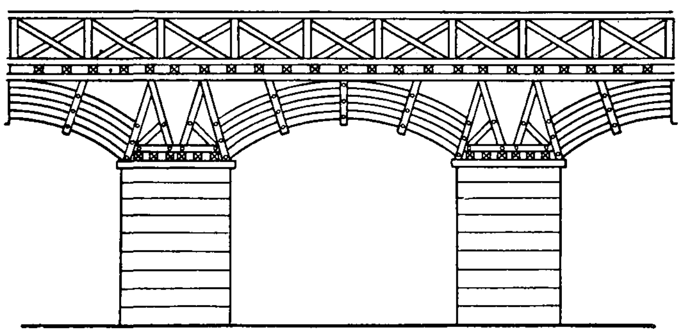


Рис. 96. Мост Траяна через Дунай.

витым плотником Жаном-Ульрихом Грубенманном. Два пролета имели в длину 52,1 *м* и 58,8 *м* и оказались достаточно прочными, чтобы с запасом выдерживать повозки весом до 25 *т*. В 1778 г. Ж.-У. Грубенманн вместе со своим братом построили еще более длинный мост через Лиммат близ Веттингена, пролетом около 119 *м*. Оба эти знаменитых моста были сожжены французами во время войны 1799 г.[2]). В дальнейшем в Швейцарии[3]) и Германии было построено много мостов этого типа, хотя и меньших

---

[1]) С ранней историей строительства мостов можно познакомиться по книге Готье: G a u t i e r H., Traité des ponts, Paris, 1765. См. также «Oeuvres de M. Gauthey», опубликованные Навье, 1809—1813. Интересные сведения о деревянных мостах можно найти в книге Гаспара Вальтера: W a l t e r Caspar, Brückenbau oder Anweisung wie allerley Arten von Brücken sowohl von Holz als Steinen nach den besten Regeln der Zimmerkunst dauerhaft anzulegen sind, Augsburg, 1766. (*Прим. авт.*) С историей строительства мостов на территории СССР с древнейших времен можно ознакомиться по упоминавшимся выше книгам Л. Ф. Николаи (1888) и П. В. Щусева (1952). (*Прим. ред.*)

[2]) Подробное описание этих мостов дается Кретьеном де Мешель: M e c h e l Chrétien de, Plans, coupes et élévations des trois ponts de bois les plus remarquables de la Suisse.

[3]) О швейцарских деревянных мостах см. книгу Бруннера: Dr. B r u n n e r J., Der Bau von Brücken aus Holz in der Schweiz, Zürich, 1925.

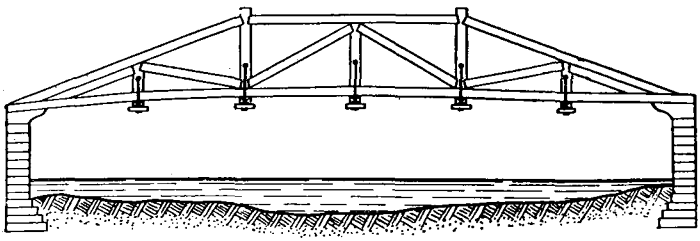


Рис. 97. Мост Палладио близ Трента (Италия).

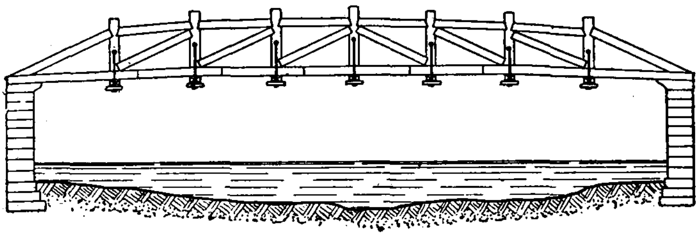


Рис. 98. Мост Палладио из балочных ферм.

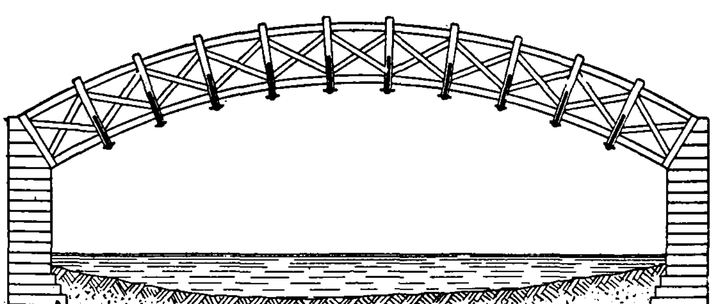


Рис. 99. Арочный мост Палладио.

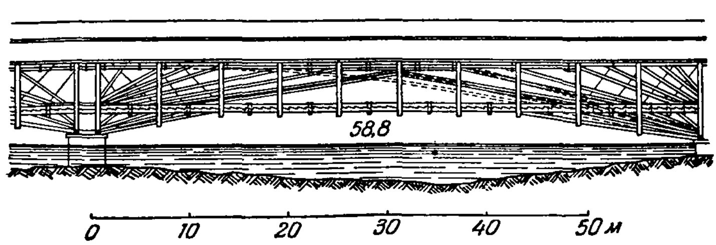


Рис. 100. Мост Грубенманна через Рейн близ Шаффхаузена.

пролетов. Последующее развитие конструкций деревянных мостов привело к переходу на арочную систему ввиду обеспечиваемых ею преимуществ жесткости и снижения прогибов[1]).

На первых же порах железнодорожного строительства задача надлежащего проектирования и сооружения мостов приобрела жизненную важность. В Западной Европе, где первые железнодорожные линии были проложены в густо населенных местностях, мосты должны были носить характер постоянных сооружений, в силу чего широкое распространение получили каменные арки и чугунные балки и арки[2]). В Соединенных Штатах Америки и в России условия были совершенно иными; при слабой заселенности и больших расстояниях экономические соображения диктовали здесь крайнюю бережливость в капитальных расходах. Всем сооружениям такого рода приписывалось поэтому временное значение. В связи с этим широкое использование в строительстве мостов получили лесные материалы, конструктивные же их решения отыскивались в тех или иных системах ферм, сходных с проектами Палладио. Наиболее часто применялись: система Лонга[3]), Тауна (Town), показанные на рис. 98 и 101, система Гау (Howe) на рис. 102.

---

[1]) Такие мосты проектировались Готэ (Gauthey) во Франции и, в особенности, Вибекингом (Wiebeking) в Баварии. (*Прим. авт.*) Не лишним здесь будет упомянуть и о знаменитом проекте деревянного арочного моста через Неву пролетом 298,6 *м*, составленном в 70-х годах XVIII века Иваном Петровичем Кулибиным (1735—1818). См. «Описание представленного на чертеже моста, простирающегося из одной дуги на 140 сажень, изобретенного механиком Иваном Кулибиным», СПб., 1799. Построенная в $^1/_{10}$ натуральной величины модель этого моста была испытана в присутствии комиссии членов Петербургской Академии наук, в которой участвовал и Л. Эйлер, 27 декабря 1776 г. Соображения Эйлера об испытаниях моделей под заглавием «Легкое правило, каким образом из модели деревянного моста или подобной бременосной машины познавать, можно ли то же сделать и в большом» были опубликованы в «Месяцеслове с наставлением», СПб., на 1776 г. и переизданы в Собр. соч., выбранных из месяцесловов, 2/VIII 1792, стр. 138—140. Описание испытаний модели было приведено в «СПб ведомостях» № 12 за 1777 год. При разработке проекта для определения очертания оси арки и усилий в ней И. П. Кулибин поставил «веревочные опыты». Для арки И. П. Кулибин применил сквозную конструкцию—многорешетчатую ферму. Модель моста была после испытаний установлена в Таврическом саду в Петербурге через один из протоков и просуществовала много лет. Впоследствии, в 1800-х годах, И. П. Кулибин разработал несколько вариантов металлических арочных мостов через Неву и Москву-реку. См. «Рукописные материалы И. П. Кулибина» в Архиве АН СССР (с приложением текста и чертежей), изд. АН СССР, М.—Л., 1953; там же обширная библиография. (*Прим. ред.*)

[2]) Разнообразные типы железнодорожных мостов первоначального периода строительства описываются Уиэлом, см. W e a l e J., The theory, practice and architecture of bridges, London, 1853; см. также H u m b e r William, A practical treatise of cast and wrought iron bridges and girders, London, 1857.

[3]) Ферма Лонга сходна с фермой Палладио, воспроизведенной на рис. 98.

Первые цельнометаллические фермы были построены в Соединенных Штатах в 1840 г.[1]). Рис. 103 дает представление об одном из таких мостов, построенном Уипплом; верхний пояс в нем из чугуна, нижний пояс и раскосы из сварочного железа. На рис. 104 показан мост, сооруженный Уипплом в 1852—1853 гг. для желез-

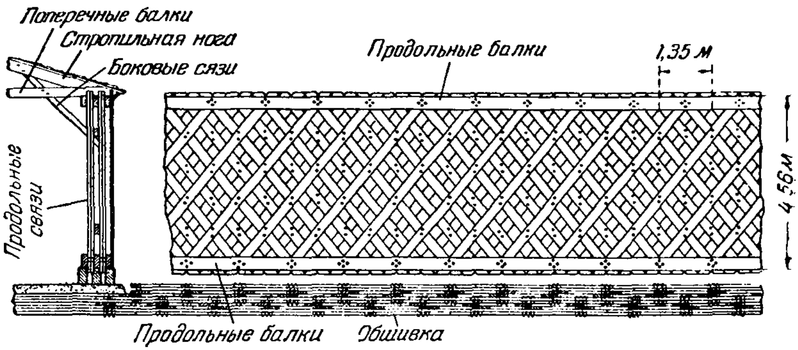


Рис. 101. Мост Тауна.

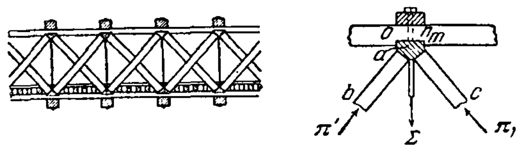


Рис. 102. Ферма Гау.

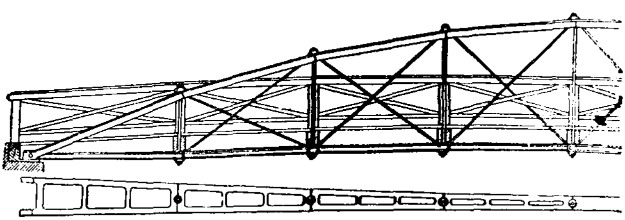


Рис. 103. Мост Уиппла.

ной дороги Ренселер—Саратога. Он сходен с деревянными мостами системы Гау, и в нем так же сжатые элементы—из чугуна, растянутые—из сварочного железа.

Уиппл был автором первой книги[2]), содержавшей необходимые сведения по расчету ферм. Он изучает работу ферм не только под равномерно распределенной постоянной нагрузкой, но и под

---

[1]) См. Mehrtens, Eisenbrückenbau, Leipzig. Первый том этого труда посвящен главным образом истории мостов.

[2]) Whipple S.C.E., An essay on bridge building, Utica, N. Y., 1847.

подвижной нагрузкой, для которой он находит невыгоднейшее для каждого отдельного элемента ферм положение. Рассчитывая ферму, подобную изображенной на рис. 105, он предполагает, что раскосы способны работать лишь на сжатие, и таким путем получает статически определимую систему. Начиная с одной из опор, он находит усилия в элементах ферм, строя последовательно па-

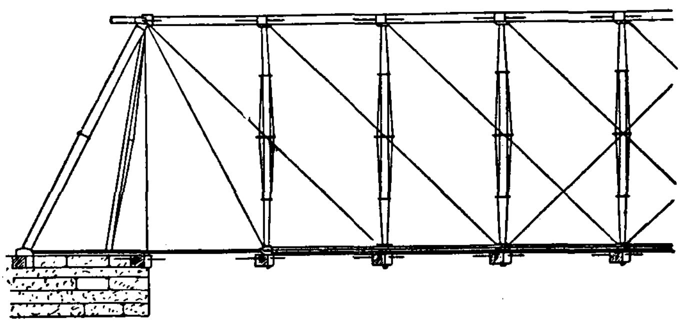


Рис. 104. Мост Уиппла на железной дороге Ренселер—Саратога.

раллелограммы сил для узлов системы. Таким путем Уиппл четко разграничил и хорошо обосновал ряд методов как аналитических, так и графических для расчетов статически определимых ферм. Следуя графическому методу, он строит в схематических чертежах

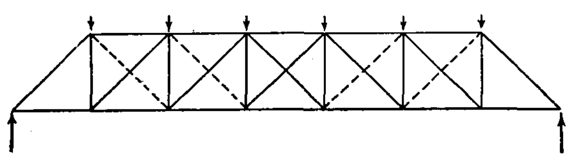


Рис. 105.

своих ферм для каждого узла многоугольники сил. Книга Уиппла осталась, по-видимому, незамеченной инженерами-практиками; об этом можно судить по тому, что говорится в предисловии к руководству Х. Хаупта[1]), вышедшему четыре года спустя (1851) после книги Уиппла: «Когда, будучи призван к тому своими профессиональными обязанностями, в связи с технической инспекцией по строительству мостов, автор этого руководства впервые заинтересовался вопросами назначения надлежащих размеров для частей мостов, он столкнулся с невозможностью получить сколько-нибудь удовлетворительные сведения в этой области как от инже-

---

[1]) H a u p t Herman, General theory of bridge construction, N. Y., 1851, 1869.

неров и строителей, так и из книг». Собственная работа Хаупта в отношении ясности и удовлетворительности изложения во многом, однако, уступает ранее появившейся книге Уиппла.

В Англии первые металлические фермы были построены в 1845 г.[1]). Это были *многорешетчатые фермы*, сходные с деревянными фермами Тауна (рис. 101). В 1846 г. была введена треугольная раскосная система Уоррена (Warren) (рис. 106), и уже с 1850 г. получил известность метод расчета таких ферм. Фейрбейрн в своей книге о применениях чугуна и сварочного железа «On the application of cast and wrought iron»[2]) сообщает, что он ознакомился с такой системой расчета в 1850 г. через У. Блуда (W. B. Blood), и в дальнейшем приводит правильные формулы для вычисления усилий в элементах ферм не только от равномерно распределенной постоянной нагрузки, но также и при наиболее неблагоприятно распределенной подвижной. В книге Хамбера (W. Humber, см. стр. 222) приводятся интересные экспериментальные данные о напряжениях в фермах Уоррена. Опыты были выполнены Блудом и Дойном на модели, имевшей 3,85 *м* в длину и 30,3 *см* в высоту. Силы измерялись специальным динамометром, который устанавливался на модели на месте того элемента, напряженное состояние которого подлежало определению. Измеренные значения оказались в весьма удовлетворительном согласии с результатами теории.

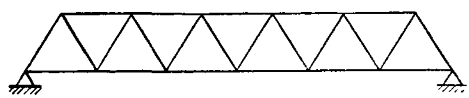


Рис. 106. Треугольная решетка фермы Уоррена.

Французские инженеры также интересовались расчетом ферм. Еще в 1848 г. Мишон (A. Michon) в своих лекциях в военном училище города Меца знакомил своих учеников с методами вычисления усилий в стропильных фермах большого пролета[3]). Ферма желез-

[1]) Первым русским мостом с металлическими (железными) фермами был небольшой мост через р. Стрелку на СПб.-Петергофской ж. д., открытой для движения в 1857 г. Одновременно с ним, в 1853—1857 гг., был построен двухпролетный неразрезной железный решетчатый мост через р. Лугу на СПб.-Варшавской ж. д. (пролеты по 55,2 *м*) по проекту Кербедза (1810—1899). Мост через р. Лугу построен по системе Тауна, но сжатые раскосы были запроектированы не из полос, а впервые жесткими—из полос с приклепанным к ним уголком и соединенных решеткой. Описание этого моста приведено в ЖГУПС и ПЗ, т. XXXII, 1860. С. В. Кербедзу принадлежит также проект железного решетчатого четырехпролетного городского моста через р. Вислу в Варшаве (1859). Еще ранее, в 1844 г., им в сотрудничестве с П. П. Собко был разработан неосуществленный проект висячего моста через Неву в Петербурге, описание которого приведено в статье П. И. Собко в Журн. Гл. упр. п. с. и публ. зд., т. III, 1846, кн. 2. (*Прим. ред.*)

[2]) 2-е изд., стр. 202, 1857.

[3]) См. Historique abrégé, стр. 211. Методы Мишона излагаются в книге Морэна: M o r i n, Résistance des matériaux, 3-e изд., т. 2, стр. 141, 1862.

нодорожного моста типа Палладио (см. рис. 97) пролетом 5 *м* была испытана Морэном[1]) в Парижском музее искусств и ремесел (Conservatoire des arts et métiers). Измеренные с помощью динамометра усилия оказались в хорошем согласии с результатами расчета. Дальнейшим прогрессом в расчете ферм Гау мы обязаны Д. И. Журавскому (стр. 171). Для спроектированного и построенного им моста через р. Веребью он избрал систему Гау, поскольку она уже в течение семи лет применялась на американских железных дорогах. Хотя в то время (1844 г.) теории расчета ферм еще не

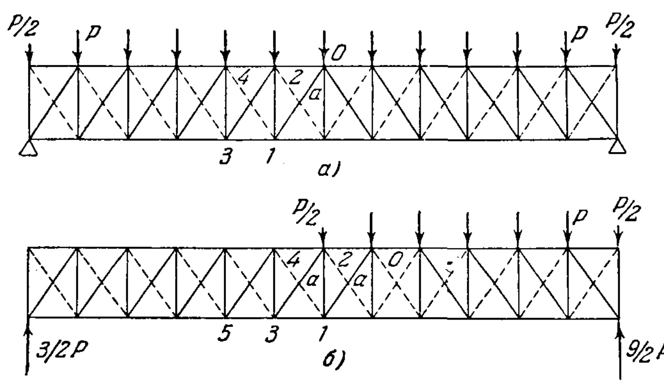


Рис. 107.

существовало, Журавский все же не только спроектировал мост, но и разработал метод вычисления усилий в его элементах. Журавский успешно решил свою задачу и дал общий метод расчета ферм с параллельными поясами[2]).

Рассматривая ферму типа, показанного на рис. 107, Журавский замечает, что узлы в фермах системы Гау устроены таким образом, что раскосы в них способны работать только на сжатие, и в случае равномерно распределенной нагрузки в этой работе принимают участие лишь те раскосы, которые показаны на чертеже сплошными линиями. Ферма такого рода образует статически определимую систему. Анализируя ее, Журавский из соображений симметрии приходит к выводу, что нагрузка в ней распределяется

---

[1]) Morin, Résistance des matériaux, 1-е изд., §§ 324—326, 1853

[2]) В связи с намеченным строительством Петербург-Московской ж. д. в 1842 г. из США были привезены чертежи мостов системы Гау; их описание дано в статье П. П. Мельникова, опубликованной в Журн. п. с., т. III, 1842. Д. И. Журавский в 1849 г. представил для опубликования свои первые статьи о мостах системы Гау, которые и были впервые напечатаны в Журн. Гл. упр. п. с. и публ. зд., 1850, кн. 1; последующие статьи—в том же журнале, 1852, кн. 2 и 5, 1855, кн. 3, 4, 5 и 6. (*Прим. ред.*)

поровну между двумя опорами, причем мы вправе допустить, что нагрузки, приходящиеся на левую половину пролета, вместе с половиной нагрузки, приложенной в середине его, передаются на левую опору, остальная же нагрузка—на правую. Начав теперь с верхнего среднего узла O, Журавский заключает, что нагрузка $^1/_2 \cdot P$, передаваемая на левую опору, вызывает в раскосе O—1 сжимающее усилие $P/2 \cos \alpha$. Это усилие в узле 1 вызывает растягивающее усилие $P/2$ в вертикальном тяже (стойке) 1—2 и горизонтальное усилие $(P/2) \operatorname{tg} \alpha$ в нижнем поясе. Рассматривая теперь узел 2, мы видим, что, кроме растягивающего усилия $P/2$, действующего в стойке, в нем приложена также и направленная вертикально вниз нагрузка P. Совместно эти две силы вызовут в результате сжимающее усилие $^3/_2\, P/(\cos\alpha)$ в раскосе 2—3, и тогда в верхнем поясе возникнет горизонтальное усилие $^3/_2\, P \operatorname{tg} \alpha$. Поступая точно таким же образом с узлами 3, 4,..., Журавский находит для растягивающих усилий в остальных стойках значения $^3/_2\, P$, $^5/_2\, P$, ..., а для сжимающих усилий в раскосах: $^5/_2\, (P/\cos\alpha)$, $^7/_2\, (P/\cos\alpha)$,... Мы видим, что усилия в стойках и раскосах возрастают от середины пролета к опорам. В то же самое время усилия в поясах получаются наибольшими в середине пролета и уменьшаются к опорам.

В случае, когда, как показано на рис. 107, *б*, ферма находится под несимметричной нагрузкой, Журавский начинает с определения усилий в рабочих раскосах. Зная опорные реакции, он заключает, что первые две нагрузки слева передаются на левую опору и рабочими раскосами будут показанные на чертеже сплошными линиями. Начиная в этом случае с узла O и поступая, как и в первом случае, можно легко определить усилия во всех элементах фермы. Пользуясь этим методом, Журавский нашел невыгоднейшие для каждого элемента моста расположения нагрузки и вычислил соответствующие им наибольшие возможные усилия, которыми надлежало руководствоваться при назначении для этих элементов безопасных площадей поперечных сечений. Журавский сконструировал модель моста, в которой вертикальные элементы были изготовлены из струн. Высота тона, который издавала струна при загружении модели, позволяла ему судить о величине действующего в ней растягивающего усилия.

В действительности задача определения усилий в элементах фермы Гау представляется более сложной в связи с тем, что затяжка тяжей обычно влечет за собой появление в системе значительных начальных напряжений, пренебрегать которыми в расчете становится недопустимым. Журавский входит и в исследование начальных напряжений: выделяя сначала из фермы одну панель (рис. 108, *а*), он показывает, что в результате стяжки вертикальных тяжей в раскосах возникает сжатие, а в элементах пояса—растяжение. Но, предупреждает он, эти напряжения нельзя просто складывать с напряжениями, вызванными внешними нагрузками[1]). В доказательство этого, полагая, что тяж ab закреплен неподвижно, он рассматривает действие вертикальной нагрузки Q на тяж cd. Легко заметить, что действие силы Q выразится в том, что начальное сжатие в раскосе ac уменьшится, в раскосе же bd увеличится. Наивыгоднейший эффект начальной затяжки тяжей в некоторой панели моста достигается в том случае, когда под действием максимальной перерезывающей силы Q в этой панели, в раскосе, например, ac (рис. 108, *б*), останется еще небольшое сжимающее усилие, достаточное для того, чтобы удерживать раскос в занимаемом им положении. В этом случае полная величина поперечной силы Q будет передаваться вторым раскосом и наибольшие усилия в тяжах и раскосах будут иметь те же самые значения, что и полученные ранее из анализа, поясненного рис. 107.

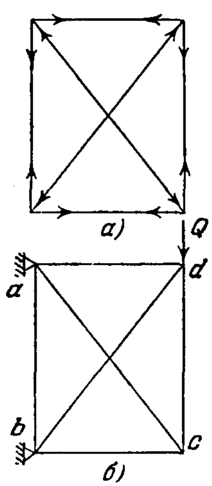


Рис 108.

В дальнейшем изложении Журавский переходит к более сложным системам, подобным изображенной на рис. 109, *а*, предлагая вычислять усилия в их элементах путем наложения усилий, соответствующих двум легко доступным расчету простым фермам согласно рис. 109, *б* и 109, *в*, из которых[2]) составляется заданная сложная.

В заключение Журавский ставит задачу о ферме на трех опорах и дает метод расчета усилий в ней для случая равномерно распределенной нагрузки. Чтобы воспользоваться ранее разработанным методом, Журавскому приходится определить положение поперечного сечения mn, ограничивающего нагрузку, которая распределена по участку aO и передается на левую опору A. Как только положение этого поперечного сечения станет известным, определятся и направления рабочих раскосов, а дальнейший расчет проводится, как и раньше, начиная с верхнего узла O.

Определение же положения поперечного сечения mn осуществляется Журавским на основе двух допущений: 1) что это поперечное сечение совпадает с одним из тяжей (тяж $O—O$ на рис. 110) и 2) что этот тяж остается при изгибе фермы вертикальным. Чтобы найти такое поперечное сечение, он пользуется способом проб. Допустим, что тяж $O—O$ совпадает с искомым сечением: этим опре-

[1]) Такое наложение сил было введено некоторыми инженерами в практику много лет спустя после работ Журавского. См., например, книгу Ребханна: R e b h a n n G., Theorie der Holz- und Eisen-Constructionen, стр. 517, Wien, 1856.

[2]) Предполагается, что пролеты всем ферм равны.

делятся работающие раскосы, а за ними описанным ранее приемом будут найдены и усилия в примыкающих к узлу панелях верхнего пояса. Рассматривая теперь участок *0—1* верхнего пояса как брус, защемленный в опорах *0* и *1*, Журавский определяет непосредственно силу, передаваемую на неподвижную опору *0*. Если положение тяжа *0—0* выбрано правильно, эта сила должна находиться в равновесии с силами, действующими в участке *0—a* верхнего пояса. Таким путем Журавский заканчивает решение своей статически неопределенной задачи.

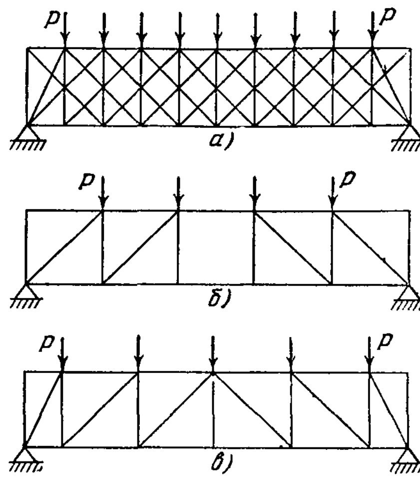


Рис. 109.

Эти научные труды Журавского начали выходить из печати после того, как была закончена постройка моста. В 1850 г. Журавский опубликовал свой метод расчета ферм[1]). В 1854 г. он представил свою работу по мостам системы Гау

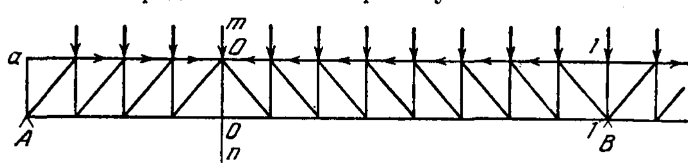


Рис. 110.

в полном виде в Российскую Академию наук и получил за нее премию имени Демидова[2]).

[1]) См. Журнал Главного управления путей сообщения и публичных зданий, 1850.

[2]) Эта работа напечатана в 1856—1857 гг. в Петербурге. Часть ее, посвященная вычислению перерезывающих сил в балках, была переведена на французский язык и напечатена в Ann. ponts et chausséss, 1856, **12**, стр. 328. (*Прим. авт.*) В последующем Д. И. Журавский опубликовал еще ряд работ, посвященных вопросам теории сооружений: «Общие соображения к проектированию деревянных мостов раскосной системы Гау с железными поясами» (ЖГУПС и ПЗ, т. XXIX, 1859), в которой был исследован вопрос о температурных напряжениях в стержнях фермы, составленной из разнородных материалов; «О сложной системе, представляющей соединение арки с раскосной системой» (ЖГУПС и ПЗ, т. XLIII, 1864), в которой дано описание предлагаемой Д. И. Журавским новой мостовой системы. Широкую известность получила предложенная Д. И. Журавским «уравновешенная» система деревянных подмостей. По этому вопросу см. «Жел.-дор. дело», 1885, № 35—36, стр. 248—250. (*Прим. ред.*)

Дальнейшим прогрессом в расчете ферм мы обязаны двум немецким инженерам: Шведлеру[1]) (J. W. Schwedler) и Риттеру[2]) (A. Ritter). Шведлер пользуется в своем анализе понятиями *изгибающего момента* и *поперечной* или *перерезывающей силы* и устанавливает соотношение

$$V = \frac{dM}{dx}, \qquad \text{(a)}$$

получившее в дальнейшем широкое применение в расчетах ферм. Пользуясь этим уравнением, Шведлер показывает, что сечение, в котором изгибающий момент достигает своего максимального значения, является в то же самое время и тем сечением, в котором поперечная сила меняет знак[3]). Рассматривая ферму, представлен-

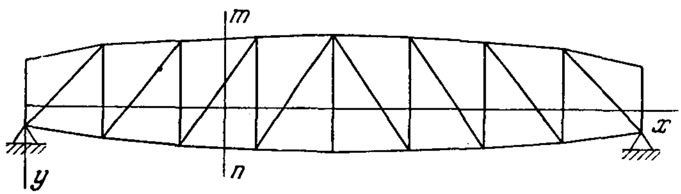


Рис. 111.

ную на рис. 111, и рассекая ее сечением mn, Шведлер находит усилия в трех перерезанных этим сечением элементах из трех уравнений статики. Он показывает, как изменяется это усилие с изменением высоты фермы, и определяет ее наивыгоднейшее (нормальное) очертание из условия, что высота в каждом поперечном сечении пропорциональна изгибающему моменту, вызванному постоянной и равномерно распределенной подвижной нагрузками. В раскосах нормальной фермы такая нагрузка не вызывает никаких усилий. Он показывает, что знак усилия в раскосе меняется вместе со знаком поперечной силы, и дает метод установления границ того участка фермы, где требуются два раскоса, если эти раскосы могут работать на одно лишь растяжение или на одно лишь сжатие. Переходя к более сложным фермам, например системы

---

[1]) Schwedler J. W., Theorie der Brückenbalkensysteme, Z. Bauwesen, т. 1, 1851, Berlin.

[2]) Ritter A., Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brücken-Constructionen, 1862.

[3]) К. Пирсон в своей «Истории ...» (т. 2, стр. 613) высказывает мнение, что Шведлер не был первым, выполнившим вывод уравнения (а). Но автору настоящей книги не удалось найти этот вывод ни в одном из ранее опубликованных сочинений. Навье в своей книге «Résumé des leçons...» (стр. 234, 1833) обнаружил в этом вопросе неправильные представления, утверждая, что точка, в которой изгибающий момент достигает наибольшего значения, расположена всегда на вертикали, содержащей центр тяжести нагрузок, действующих на данный элемент».

Тауна, он указывает, что при выполнении расчета их следует разлагать на простые составляющие системы, как это показано на рис. 109.

Риттер упростил вычисление усилий в стержнях, перерезываемых сечением *mn* (рис. 111), составляя и решая уравнения моментов относительно точек пересечения каждых двух из трех пересекаемых стержней. При этом для того, чтобы получить очень простые формулы для усилий в стержнях, нам приходится решать каждый раз лишь одно уравнение с одним неизвестным.

Как Шведлер, так и Риттер пользовались аналитическими методами. Дальнейшее упрощение в исследование стержневых систем было внесено использованием графических методов. Они были предложены К. Кульманом (K. Culmann) и Максвеллом (J. C. Maxwell).

43. Карл Кульман

Карл Кульман (1821—1881) родился в Бергцаберне (Рейнпфальц), где его отец был священником. Под руководством последнего он получил очень хорошее начальное воспитание, так что в юном возрасте, 17 лет, он уже смог поступить на первый курс политехникума в Карлсруэ, не теряя времени на два подготовительных класса. По окончании политехникума он приступил (в 1841 г.) к практической деятельности в Хофе на баварских железных дорогах. Здесь ему представился случай участвовать в проектировании и строительстве ответственных железнодорожных сооружений. Общепринятым руководством по сопротивлению материалов в то время были лекции Навье («Résumé des leçons...»), и Кульман часто ссылается на эту книгу в своих исследованиях сооружений. С целью повышения своего инженерного образования Кульман предпринял в 1849 г. поездку в Англию и в Соединенные Штаты Америки. Результатом этого путешествия был составленный и изданный им обширный обзор английских и американских мостов[1]). Этот труд оказал

Карл Кульман.

[1]) См. Allgem. Bauztg., т. 16, стр. 69—129, 1851; т. 17, стр. 163—222, 1852. К этим двум статьям приложено много тщательно исполненных чертежей американских и английских мостов.

большое влияние на развитие теории сооружений и строительства мостов в Германии; Англия и Америка опережали тогда Германию в области железнодорожного строительства, и Кульман нашел в этих странах много интересных сооружений—объектов для изучения. К тому же, он имел значительно более глубокое в сравнении с обычной для большинства английских и американских инженеров теоретическое образование, что часто давало ему возможность сопровождать свои описания ценными критическими соображениями.

Его сочинения представляют большой исторический интерес. Начав с описания американских деревянных мостов, он, к своему изумлению, убеждается в том, что они не только воспроизводят европейские образцы, но содержат и много оригинальных нововведений. Особенно глубокое впечатление на него произвело творчество С. Лонга (S. H. Long), признанного в его оценке одним из лучших американских инженеров своего времени—обладателем солидных теоретических знаний, удачно используемых при назначении надлежащих размеров элементов мостовых ферм. Система ферм Лонга была сходна с системой Палладио, но Лонг, очевидно, владел рациональным методом вычисления усилий в элементах ферм и в своем труде[1]) указал весьма разумные соотношения размеров для всех элементов конструкции при различных величинах пролетов. Заканчивая описания ряда мостов Лонга, Кульман сообщает, что для него оказалось невозможным установить, жив ли еще Лонг в то время, когда он пишет свою работу, и если жив, то чем занимается. Кульман заключает: «Американские инженеры слишком большие практики, чтобы интересоваться и думать об окружающих их людях. Каждый инженер-практик считает себя высшим авторитетом, смотрит на других свысока и не уделяет им никакого внимания».

Обсуждая систему Гау, Кульман находит, что она не вносит нового в теорию сооружений. Ее успех объясняется некоторыми практическими усовершенствованиями методов конструирования, примененных Лонгом. К мостам Тауна Кульман проявляет весьма критическое отношение и не рекомендует применять их в Германии. Наконец, Кульман останавливается на мостах, построенных Барром (Burr). Он считает их вариантом европейского типа арочных мостов, предложенного Готэ и Вибекингом (стр. 222). Мосты этой системы на практике ведут себя, по его словам, весьма удовлетворительно, но сама по себе система не поддается теоретическому анализу, поскольку в отношении ее остается нерешенной присущая ей трудность, а именно выяснение вопроса о том, какая часть нагрузки передается арке и какую ее часть несет ферма жесткости.

---

[1]) Заглавие этой работы: Improved brace bridge. Specification of a patent for an improved bridge, granted to Lt. Col. S. H. Long in 1839.

Стремясь найти более удобный критерий для сравнительной оценки различных типов деревянных мостов, Кульман развивает новые методы исследования этих систем ферм. Он дает обоснованную оценку решеток Лонга и Гау и предлагает приближенные методы расчета таких статически неопределимых систем, как мосты Тауна и Барра. Этот труд Кульмана вместе с упомянутой ранее статьей Шведлера (стр. 230) составляют, вероятно, самое полное для своего времени освещение методики расчета ферм.

Применяя свои методы анализа к различным типам деревянных мостов, Кульман получает возможность доказать, что американцы принимают в своих расчетах гораздо более низкие нормы подвижных нагрузок, чем предлагается европейскими техническими условиями, и в то же самое время исходят из гораздо более высоких рабочих (допускаемых) напряжений. Это обстоятельство побуждает Кульмана на несколько неодобрительных замечаний по поводу состояния безопасности американских мостов.

Вторая часть (от 1852 г.) работы Кульмана посвящена железным мостам. В Англии автора заинтересовали клепаные балки Брюнеля из полосового металла (см. стр. 196) и в особенности большие трубчатые мосты, которые в то время только что были закончены постройкой. Есть основания полагать, что до этого времени все сведения, касавшиеся этих мостов, Кульман получил из книги Фейрбейрна (см. стр. 190), и это выразилось в том высоком доверии, которое он склонен был оказывать этому инженеру. В Англии же Кульман встретился с людьми, продолжавшими работать со Стефенсоном[1]), и под их влиянием он, видимо, переменил взгляды, поскольку в своей книге он уже высказывается весьма критически в отношении роли Фейрбейрна в этом строительстве. Он признает ошибкой то, что предварительное изучение проекта было поручено человеку, обладавшему недостаточными теоретическими знаниями, тому, кто лишь после многократных, дорого стоивших опытов открыл, что на сжатие железо работает хуже, чем на растяжение, о чем ему следовало бы знать из существовавшей уже тогда литературы. Можно, однако, предполагать, что эти умаляющие достоинства Фейрбейрна замечания Кульмана были внушены ему несколько тенденциозными оценками, особенно если учесть, что познания о тонкостенных конструкциях в ту эпоху были скудны. В действительности же эксперименты Фейрбейрна впервые открыли инженерам глаза на то серьезное значение, какое представляет проблема устойчивости при проектировании железных пластин и оболочек, работающих на сжатие.

Приступая к описанию металлических мостов, Кульман предваряет свое изложение напоминанием того, что первоначальные

[1]) В результате разногласий со Стефенсоном Фейрбейрн по окончании первой трубы моста Конвэй в 1849 г. отошел от строительства трубчатых мостов.

их конструкции были лишь простыми подражаниями применявшимся в то время типам деревянных ферм. Будучи в Вашингтоне, он посетил завод Райдера (Rider), где в то время изготовлялись части мостов системы самого Райдера, закрепленной за ним патентом. Автор отмечает, что американский изобретатель был, казалось, полностью удовлетворен денежным результатом своего изобретения и не помышлял о дальнейших усовершенствованиях своей конструкции. Главным дефектом моста Райдера, в оценке Кульмана, было отсутствие достаточной жесткости его верхнего сжатого пояса при открытом типе моста. В связи с этим недостатком верхний пояс в некоторых из этих мостов выпучивался, и Кульман описывает одну такую аварию, последствия которой он имел возможность исследовать. По мнению Кульмана, ферма Уиппла гораздо лучше в отношении устойчивости, поскольку верхний сжатый пояс в ней обладает надлежащей жесткостью в горизонтальной плоскости. Особенно резкий тон приобретает критика Кульмана, когда дело доходит до железных решетчатых ферм, подобных деревянным фермам Тауна (рис. 101): он утверждает, что плоские тонкостенные сжатые элементы этой системы не способны противостоять сжимающим силам и поэтому испытывают поперечное выпучивание. В отношении упругой устойчивости они оказываются более слабыми, чем деревянные элементы мостов Тауна, поскольку в случае применения дерева сечениям их придается гораздо бо̀льшая толщина. Он утверждает также, что введение вертикальных ребер жесткости вредно, и показывает, что такие элементы полностью изменяют условия, в которых работает решетчатая система. Кульман высказывается против применения решетчатых ферм в Германии.

В то время, к которому относится посещение Кульманом Америки, большинство американских инженеров питали мало доверия к железным фермам, и надо полагать, что усталостные аварии были главной причиной этого недоверия. Они рассказывали Кульману, что под действием повторной ударной нагрузки и колебаний волокнистое железо принимает кристаллическую структуру, в результате чего отдельные элементы теряют иной раз несущую способность внезапно, без всякого предостерегающего сигнала о наступлении этой аварии. Кульман замечает, вероятно правильно, что причина этого явления заложена в принятых американцами высоких значениях допускаемых напряжений. Усталостных разрушений можно избежать путем снижения рабочих напряжений.

Особенно сильное впечатление на этого немецкого инженера произвели американские висячие мосты: по его словам, из всех виденных им за время своих путешествий мостов самым поразительным был висячий мост через реку Огайо близ Уилинга (Wheeling). В то время среди американских инженеров шла дискуссия по вопросу о том, безопасно ли строить висячие мосты под железнодорожный транспорт. Кульман, опираясь на свои исследования, высказывается в пользу введения таких мостов на железных дорогах при условии устранения их чрезмерной гибкости введением надлежащей фермы жесткости. Он рекомендует назначать для такой фермы жесткости те же самые размеры поперечных сечений, какие потребовались бы для обычного сквозного балочного моста с пролетом, вдвое меньшим, чем пролет висячего моста.

В общем, американское строительство мостов и смелость американских инженеров произвели на Кульмана впечатление. Но, по его мнению, в этом строительстве недооценивается важность предварительного теоретического анализа сооружения. По его словам, американские инженеры заключают о непригодности той или иной конструкции не потому, что она теоретически нерациональна, а потому что она терпит аварию, уже будучи построенной.

По возвращении в 1852 г. домой Кульман продолжает свою работу инженера-практика на баварских железных дорогах, пока в 1855 г. не получает приглашения занять должность профессора теории сооружений в только что организованном Цюрихском политехникуме. Кульман любил педагогическую работу и все свои силы отдал подготовке курсов, в которых он с особой энергией настаивал на введении графических методов в анализ инженерных сооружений. Построение многоугольника сил и веревочного многоугольника было известно со времени Вариньона[1]), и они нашли применение у Ламе и Клапейрона в их расчете арок. Понселе[2]) использовал их в своей теории подпорных стен. Но все эти применения до Кульмана сводились лишь к немногим частным случаям графического решения тех или иных задач строительной механики. Большая заслуга Кульмана заключается в том, что он систематически провел использование графических методов для расчетов конструкций всевозможных типов и составил первое руководство по графической статике[3]).

В этой книге автором предлагается много оригинальных графических решений. В проективной геометрии он усматривает чрезвычайно важную базу для построений графической статики

[1]) См. Varignon, Nouvelle mécanique, т. 1, Paris, 1725.

[2]) Mém. officier génie, т. 12, 1835; т. 13, 1840. Мишон, преемник Понселе в военном училище города Меца, пользовался графическими методами в теории арок и в теории подпорных стен. Кульман ссылается на лекции Мишона в предисловии к французскому переводу своей книги (Paris, 1880).

[3]) Culmann K., Die graphische Statik, 1866. Оттиски лекций Кульмана в виде отдельных статей выходили в 1864 и 1865 гг. В 1875 г. вышел первый том второго расширенного издания, но Кульман умер прежде, чем успел подготовить к этому изданию второй том. В 1880 г. вышел французский перевод второго издания.

и потому вводные главы посвящает исследованию проективных свойств систем сил[1]). Переходя к приложениям, Кульман начинает с параллельных сил в одной плоскости и показывает, каким образом, пользуясь веревочным многоугольником, можно определить опорные реакции балки. Он устанавливает правила построения эпюры изгибающих моментов, разъясняя, как найти такое положение подвижной нагрузки, при котором изгибающий момент принимает наибольшее значение. Далее автор излагает графический метод нахождения центра тяжести плоской фигуры и метод вычисления момента инерции фигуры относительно какой-либо оси. Он показывает, как найти направления главных осей, построить эллипс инерции и применять его к определению ядра сечения балки.

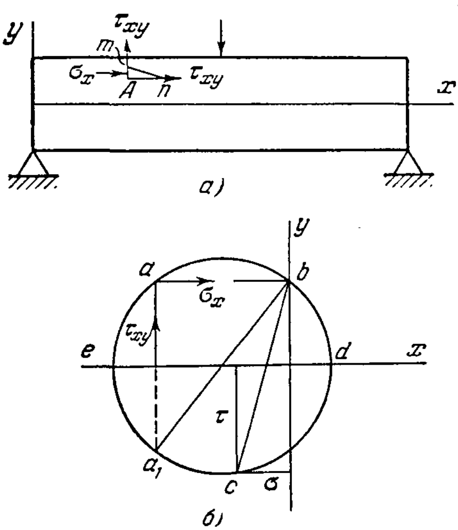


Рис. 112.

В своей работе по изгибу балок Кульман дает графический способ исследования напряжений в произвольной точке A (рис. 112, *а*) балки. Рассматривая бесконечно малый ее элемент Amn и обозначая компоненты напряжения, действующие по площадкам, проходящим через A и перпендикулярным к осям x и y, соответственно через σ_x и τ_{xy}, он доказывает, что нормальная и касательная компоненты напряжения, действующего по произвольной наклонной площадке mn, определятся координатами точек на окружности *круга напряжений*. Для построения этого круга нам нужно лишь фиксировать точку a (рис. 112, *б*) с координатами τ_{xy} и σ_x и определить симметричную ей относительно оси x точку a_1. Тогда прямая a_1b представит диаметр круга напряжений, а на этом диаметре можно построить самый круг. Из уравнений равновесия элемента Amn Кульман показывает, что компоненты σ и τ напряжения, действующего на некоторую пло-

[1]) В предисловии Кульман высказывает взгляд, что проективная геометрия должна преподаваться в технических учебных заведениях как обязательный курс и что его читатели, как он надеется, имеют некоторое знакомство с этой наукой. Эта идея не встретила общего признания, поскольку те разделы графической статики, которые представляют непосредственную практическую важность, легко могут быть изложены и без обращения к «новой» геометрии.

щадку mn, представляются координатами точки c, которую легко найти, проведя прямую a_1c, параллельную mn. В этом построении, как он показывает, точки d и e на концах горизонтального диаметра определяют абсолютные значения и направления главных напряжений в точке A. Он доказывает также, что площадки, на которые действует наибольшее касательное напряжение, делят пополам двугранные углы между главными площадками и что величина этого наибольшего касательного напряжения определяется радиусом круга напряжений. Легко заметить, что круг напряжений Кульмана является прообразом и частным случаем кругов Мора (стр. 343), получивших столь широкое распространение в исследовании напряжений. Зная направления главных напряжений, Кульман выясняет траектории напряжений и в качестве иллюстрации для случая консоли дает эскиз, воспроизведенный на рис. 113.

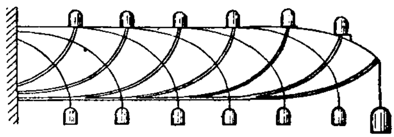
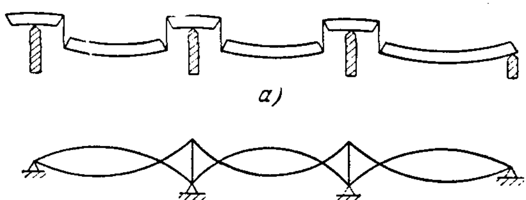


Рис. 113.

Считаясь с широким распространением неразрезных балок в железнодорожных мостах своего времени, Кульман подробно



а)

б)

Рис. 114.

развивает теорию этих конструкций, предлагая графическое решение задачи, которое впоследствии несколько упростил Мор (стр. 341). Касаясь вопроса о точках перегиба в неразрезной балке, он предлагает ввести в конструкцию промежуточные шарниры, как это показано на рис. 114, а, мотивируя это тем, что такой прием позволяет увеличивать пролеты сооружаемых мостов[1]). Траектории напряжений для неразрезной балки даются им в виде систем кривых фигур 114, б, причем автор рекомендует воспроизводить очертания этих кривых в проектах мостов весьма больших

[1]) Наиболее полное теоретическое исследование многопролетных статически определимых балок с шарнирами было выполнено Гавриилом Степановичем Семиколеновым (1845—1912) в статье «Теория уравновешенных балок» (Журн. МПС, 1871, кн. 5, стр. 81—143). О его деятельности и трудах см. «Изв. собр. инж. п. с.», 1913, стр. 315—318. (*Прим. ред.*)

пролетов, ссылаясь, между прочим, на то, что модель моста, представленная на Лондонской промышленной выставке, своей формой подтверждает его мысль.

Применяя графический способ в исследовании ферм, Кульман пользуется методом сечений, показывая, что если одновременно рассечь не более чем три стержня, то при этом всегда имеется возможность без труда получить значения усилий в этих стержнях путем разложения известных внешних сил по направлениям этих стержней. Он строит также диаграммы внутренних усилий в фермах, исходя из условий равновесия в каждом из последовательных узлов и вычерчивая соответствующие многоугольники сил. Хотя он и не опирался на условие взаимности, введенное Максвеллом (см. стр. 245), его диаграмма почти во всех случаях, где он пользуется методом вырезания узлов, совпадает с построенными по способу Максвелла.

В последних главах своей книги[1]) Кульман развивает графический метод расчетов арок и подпорных стен. Влияние этой книги на развитие теории сооружений сказалось далеко за пределами Цюрихского политехникума. Его графические методы были приняты и широко применялись немецкими инженерами-практиками, и такие ученые, как Э. Винклер (E. Winkler) и О. Мор (O. Mohr), много способствовали дальнейшему развитию графической статики. В Италии графическая статика была введена в курс преподавания профессором Миланского политехнического института Кремоной (L. Cremona). Его известная книга[2]) по графическим расчетам и взаимным геометрическим фигурам была переведена на английский язык профессором Томасом Биром (Th. H. Beare) в 1890 г.

44. У. Дж. Макуорн Рэнкин

У. Дж. Макуорн Рэнкин[3]) (W. J. Macquorn Rankine, 1820—1872) родился в Эдинбурге. Его отец, выйдя в отставку из армии, начал работать в качестве инженера на строительстве железной дороги, проявив себя в этой области техники весьма знающим человеком. По окончании школы в Глазго М. Рэнкин в течение

[1]) Он имел в виду полностью переработать эту часть книги для второго издания, но умер прежде, чем успел закончить эту работу.

[2]) Cremona L., Le figure reciproche nella statica grafica, Milano, 1872. (*Прим. авт.*) Русский перевод с итал. изд. 1879 и франц. изд. 1885: Луиджи Кремона, «Взаимные фигуры в графической статике» с приложением введения, написанного Д. Юнгом, и статьи К. Савиотти, «Новые методы расчета стержневых систем», имеющейся только во французском издании. (*Прим. ред.*)

[3]) Биография У. Макуорна Рэнкина, записанная Тэйтом (P. G. Tait), помещена в собрании научных трудов Рэнкина: Rankine W.J.M., Scientific papers, London, 1881.

нескольких лет самостоятельно расширял свое образование в Эдинбурге. В 1836 г. он поступил в Эдинбургский университет, где слушал курс натуральной философии профессора Форбса и получил золотую медаль за работу по волновой теории света («Undulatory theory of light»). Одновременно он приобрел некоторый опыт и в инженерной практике, помогая сначала своему отцу в надзоре за некоторыми видами работ на Эдинбургской и Далькитской железных дорогах. С 1838 г. М. Рэнкин сам начал работать на железной дороге в качестве инженера, приняв участие под руководством Макнэйла (J. B. Macneil) в изысканиях и постройке искусственных сооружений на дороге Дублин—Дрогеда (Drogheda). В последующем он работал еще на нескольких строительствах, организованных Каледонской железнодорожной компанией.

У. Дж. Макуорн Рэнкин.

Очень рано Рэнкин начал печатать свои научные работы. В 1842 г. вышла его первая статья под заглавием «Экспериментальное исследование о преимуществах цилиндрических колес на железных дорогах» («An experimental inquiry in to the advantage of cylindrical wheels on railways»). В следующем году он представил свою работу об усталостных разрушениях осей подвижного состава железных дорог в Институт гражданских инженеров (стр. 197). В примечаниях Рэнкин отмечает, что некоторые из его ранних печатных работ основываются на идеях, поданных ему отцом. Начиная с 1848 г., Рэнкин стал проявлять интерес к вопросам молекулярной физики и термодинамики. Он опубликовал несколько серьезных научных работ по физике и в 1853 г. был избран в члены Королевского общества.

В 1855 г. Рэнкин был назначен главой кафедры инженерного дела в университете города Глазго, где он и работал до конца своей жизни (1872 г.). По-видимому, этот университет был первым в Британии, включившим в свою программу инженерное образование. Профессор этого университета Джон Андерсон (John Anderson, 1726—1796) распорядился в своем завещании учредить специальное учебное заведение для подготовки технических специалистов по различным отраслям промышленности, и носящий его имя колледж ввел у себя с 1796 г. лекции по натуральной философии и химии. С 1799 г. Джордж Биркбич (George Birkbech, 1776—1841) начал читать там лекции по механике и прикладным наукам; они и послужили поводом к основанию инженерных институтов в других городах Англии. В 1840 г. была учреждена первая в Соединенном королевстве кафедра строительной техники. В 1886 г. в результате слияния нескольких институтов был организован Технический колледж в Глазго, и технический факультет колледжа Андерсона вошел в состав этого объединения.

С 1855 г. свои основные силы Рэнкин стал отдавать педагогической деятельности; его лекции и в особенности его учебники много содействовали росту инженерной науки и инженерного образования на университетском уровне в начальных стадиях их развития в Англии. Большая часть его собственного научного вклада в сопротивление материалов и в теорию сооружений была включена в его «Руководство по прикладной механике» («Manual of applied mechanics»), первое издание которого вышло в 1858 г., и в его «Руководство по строительной технике» («Manual of civil engineering»[1]), появившееся в 1861 г. Со времени их первого появления в печати нужда в повторных изданиях этих книг долго не прекращалась, и даже в настоящее время их нельзя считать целиком устаревшими.

Работая над этими книгами, Рэнкин уделял большое внимание тем их разделам, где излагались научные основы той или иной области инженерной техники, и в своей значительной части это были его собственные оригинальные открытия.

Свое изложение сопротивления материалов в «Прикладной механике» Рэнкин начинает с математической теории упругости. Он излагает полную теорию напряжения и деформации в точке и выводит основные уравнения равновесия. Здесь, вероятно впервые в английской литературе, мы встречаемся со строгими определениями таких терминов, как *напряжение* и *деформация*. В своих сочинениях Рэнкин предпочитает трактовать каждую проблему сначала в ее общем виде и лишь в последующем рассматривает различные частные случаи, могущие представить тот или иной практический интерес. Такой метод изложения делает книги Рэнкина трудными для чтения и требует от читателя сосредоточенного внимания.

При рассмотрении задач теории сооружений Рэнкин вводит в статику[2]) свой метод параллельных проекций, иллюстрируя его некоторыми интересными приложениями. Он показывает, что «если уравновешенную систему сил, приложенных к некоторой системе точек, представить системой прямых, то

[1]) В переводе на русский язык было издано под названием «Руководство для инженеров-строителей», перев. И. Н. Андреева, СПб., 1870. (*Прим. ред.*)

[2]) Rankine, Applied mechanics, 14-е изд., гл. IV, 1895.

всякая параллельная проекция такой системы прямых представит уравновешенную систему сил». Применяя этот принцип в теории ферм, он находит: «Если ферма (или стержневая система), линии сопротивления которой образуют данную фигуру, находится в состоянии равновесия под системой внешних сил, представленной данной системой прямых, то ферма, линии сопротивления которой образуют фигуру, являющуюся параллельной проекцией начальной фигуры, будет находиться в равновесии под системой сил, представленных соответствующей параллельной проекцией данной

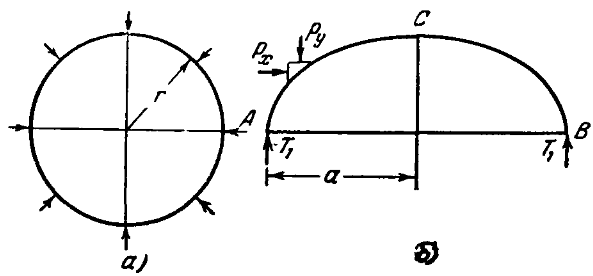


Рис. 115.

системы прямых; линии же, представляющие усилия в стержнях новой фермы, будут соответственно параллельны проекциям линий, представляющих усилия в стержнях начальной фермы». Он дает интересное применение этой теории к расчету арок. Рассматривая сначала *циркульную*[1]) арку (т. е. круговое кольцо), подвергнутую действию равномерно распределенного по дуге нормального давления p (рис. 115, *а*), он заключает, что действующее в кольце осевое усилие T равно произведению давления p на радиус r. Построив параллельную проекцию этого кругового кольца, как показано на рис. 115, *б*, мы не изменяем его вертикальных размеров, между тем как все горизонтальные размеры увеличатся в одном и том же постоянном отношении (положим, в отношении n). Таким путем получается *эллиптическая арка*. Поскольку в такой проекции вертикальные компоненты сил не изменяются в своей величине, расстояния же между ними возрастают в отношении $n:1$, мы вправе заключить, что вертикальное давление на такую арку (рис. 115, *б*) равно $p_y=p/n$. Подобным же образом найдем горизонтальное давление $p_x=np$. Осевое усилие в горизонтальных поперечных сечениях эллиптической арки A и B равно

$$T_1 = p_y a = \frac{p}{n} rn = pr.$$

[1]) Rankine, Applied mechanics, 14-е изд., §§ 179—184, 1895.

В вертикальном же сечении C осевое усилие выразится произведением

$$T_2 = p_x r = npr.$$

В арке ACB, несущей гидростатическое давление (рис. 116), кривизна в некоторой точке M ее очертания должна быть пропорциональна глубине y, ибо только при этом условии равнодействующая усилий, приложенных по концам элемента кривой, уравновесит гидростатическое давление. Чтобы получить такую кривую, возьмем прямолинейный отрезок упругой проволоки DCE и прикрепим к его концам стержни EF и DG, показанные на рисунке штриховыми линиями. Повернув затем концы проволоки на 180°, можно удержать отрезок проволоки в изогнутом

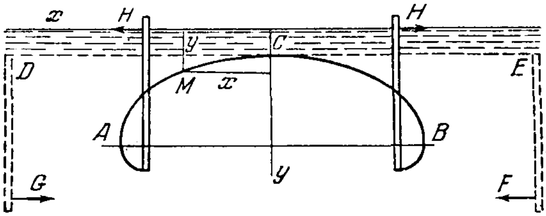


Рис. 116.

состоянии ACB, приложив показанные на рисунке горизонтальные силы H. Кривизна такой кривой в каждой ее точке пропорциональна изгибающему моменту в этой точке, т. е. произведению Hy, и таким образом удовлетворяет поставленному выше требованию. По этим соображениям арка, очерченная по кривой ACB, будет испытывать под гидростатическим давлением лишь осевое сжатие без изгиба[1]). Пользуясь параллельным проектированием, Рэнкин переходит от таких *гидростатических арок* к *геостатическим аркам*. Сокращая горизонтальные размеры арки ACB на рис. 116 в некотором постоянном отношении, без изменения вертикальных размеров, он получает очертание арки для того случая, когда интенсивность горизонтального давления p_x, действующего на арку, составляет лишь некоторую долю вертикального давления p_y, как это имеет место в случае давления грунта.

Излагая теорию плоской полигональной стержневой системы, Рэнкин формулирует следующее условие ее равновесия: «Если из какой-либо точки провести прямые лучи, параллельные

[1]) Математическое исследование форм таких арок было проведено Ивоном Вийарсо: Villarceau Ivon, Mémoires sur les voûtes en berceaux cylindriques, Rev. architect. et travaux publics, Paris, 1845.

линиям сопротивления стержней полигональной фермы, тогда стороны многоугольника, углы которого образованы этими лучами, представят собой систему сил, которые, будучи приложены к узлам ферм, уравновесят одна другую»[1]). Это соотношение было в дальнейшем[2]) распространено Рэнкином на пространственные системы, в отношении которых утверждалось, что многогранник сил и пространственная ферма находятся в некотором отношении взаимности. Эти найденные Рэнкином соотношения подсказали Максвеллу его знаменитую работу о взаимных фигурах (см. стр. 245).

По вопросу о висячих мостах Рэнкин ссылается на П. Барлоу (P. W. Barlow), который, «проделав ряд опытов на моделях, обнаружил, что для придания висячим мостам жесткости достаточны балки, значительно более легкие в сравнении с тем, что считалось до сих пор необходимым». Задаваясь некоторой формой кривой прогиба для фермы жесткости, Рэнкин[3]) дает приближенное решение задачи, указывая, что «поперечное сопротивление балки жесткости должно составлять 4/27 от соответствующего сопротивления простой балки того же пролета, несущей равномерно распределенную нагрузку той же интенсивности». Насколько известно, эти соображения были первым теоретическим исследованием ферм жесткости.

Рэнкин сделал также серьезный вклад в теорию изгиба балок, приняв в соображение влияние касательных напряжений на величину прогиба[4]). Он находит, что увеличение угла наклона упругой оси, вызванное поперечной силой, равно

$$\frac{dy_1}{dx}=\frac{VS}{Glb}=\frac{dM}{dx}\frac{S}{Glb},$$

где V—поперечная сила, S—статический момент нижней части поперечного сечения относительно нейтральной оси, b—ширина поперечного сечения на уровне нейтральной оси. Для равномерно нагруженной балки прямоугольного сечения отношение добавочного прогиба к определяемому по обычной формуле составляет согласно вычислению Рэнкина $6Eh^2/5Gl^2$; эту величину он считает весьма малой и пренебрежимой в практических применениях. Естественно, что Рэнкин пришел бы к совершенно иному заключению, если бы он рассматривал двутавровую балку большой высоты с тонкой стенкой.

Вероятно, самым ценным вкладом Рэнкина в теорию сооружений было его исследование об устойчивости сыпучих тел («On the

---

1) Rankine, Applied mechanics, 14-е изд., стр. 140, 1895.
2) Phil. Mag., 1864, февраль.
3) Applied mechanics, 14-е изд., стр. 370, 1895.
4) Applied mechanics, 14-е изд., стр. 342, 1895.

stability of loose earth»)[1]), в котором он предложил метод расчета надлежащих размеров подпорных стен. Рассмотрим простейший случай, когда сыпучее тело ограничено сверху горизонтальной плоскостью и давит на вертикальную стенку (рис. 117, *а*). Поскольку напряженное состояние во всех точках любой горизонтальной плоскости *mn* будет одним и тем же, постольку главными площадками напряжения будут эти горизонтальные плоскости и вертикальные плоскости, параллельные подпорной стене. Соответствующие главные напряжения можно обозначить через σ_x и σ_y (рис. 117, *а*). Составляющие напряжения σ и τ по площадке,

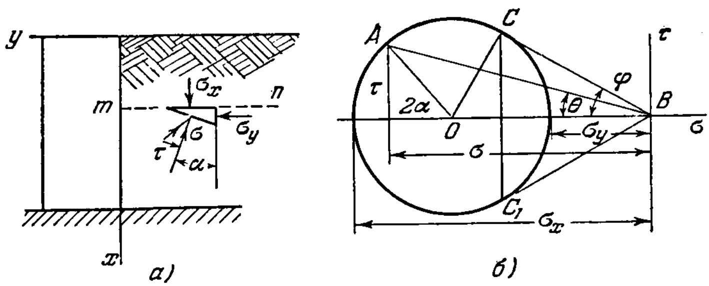


Рис. 117.

наклоненной к горизонту под углом α, могут быть легко получены из круга Мора, построенного на рис. 117, *б*. Проводя с этой целью радиус *OA* под углом 2α к горизонту, мы находим значения требуемых компонент как координаты точки *A*. Длина отрезка *AB* представляет полное напряжение, действующее по заданной площадке, а θ—угол, под которым оно действует на эту площадку. Для того чтобы сыпучее тело, свободное от каких бы то ни было сил сцепления, оставалось в равновесии, необходимо, чтобы угол отклонения напряжения ни при каких условиях не превышал угла внутреннего трения или *угла естественного откоса*, который мы обозначим через φ. Из круга Мора мы видим, что наибольшее значение угла θ соответствует площадкам, отмеченным на круге Мора точками *C* и C_1, откуда заключаем, что предельное состояние равновесия грунта достигается тогда, когда касательные *BC* и BC_1 образуют с горизонтом угол φ. Полагая, что мы имеем предельное состояние, можно найти из круга Мора интересующее нас соотношение между главными напряжениями σ_x и σ_y. Замечая, что радиус круга Мора равен $(\sigma_x - \sigma_y)/2$, а координата *OB* его центра равна $(\sigma_x + \sigma_y)/2$, получаем из треугольника *OBC*

$$\sigma_x - \sigma_y = (\sigma_x + \sigma_y)\sin\varphi,$$

[1]) Phil. trans., 1856—1857.

откуда

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}. \qquad \text{(a)}$$

Обратившись теперь к показанной на рис. 117, *а* подпорной стенке, видим, что

$$\sigma_x = \gamma x, \qquad \text{(b)}$$

где γ — объемный вес грунта. Минимальное значение горизонтальной реакции стенки, соответствующее условию равновесия (а), выразится, таким образом, формулой

$$\sigma_y = \gamma x \frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}. \qquad \text{(c)}$$

Рэнкин рекомендует пользоваться этим значением давления как критерием при оценках устойчивости подпорных стен. Для тех случаев, когда масса грунта ограничена сверху не горизонтальной, а наклонной плоскостью, он дает для давления выражение более общего типа.

45. Исследования Джемса Максвелла по теории сооружений[1])

Мы видели, что Кульман для расчета ферм пользовался диаграммами сил. Но на его диаграммах одна и та же сила появлялась иногда повторно. Метод построения диаграмм сил, позволяющий каждую силу в том или ином элементе изобразить всегда одной, был найден независимо двумя учеными: Джемсом Максвеллом (J. C. Maxwell)[2]) и У. Тэйлором (W. P. Taylor)[3]). Чтобы пояснить метод Максвелла, представим себе плоскую треугольную стержневую систему (рис. 118, *а*), на которую действуют три находящиеся в равновесии силы: P, Q, R. Усилия в стержнях находятся построением диаграммы сил (рис. 118, *б*). Обе эти фигуры можно рассматривать как проекции двух треугольных пирамид на плоскость. Обозначив три боковые грани пирамиды на рис. 118, *а* через a, b, c, а основание ее через O, используем те же обозначения и на рис. 118, *б*. Тогда каждым трем линиям, образующим треугольник на рис. 118, *а*, будет соответствовать точка на рис. 118, *б*, через которую проходят три прямые, параллельные сторонам треугольника. Каждой вершине рис. 118, *а* соответствует треугольник рис. 118, *б*, представляющий условие равновесия сил,

---

[1]) Биография Максвелла вместе с освещением его научных трудов в области теории упругости приводится в главе IX, см. стр. 322.

[2]) Phil. mag., т. 27, стр. 250, 1864.

[3]) См. статью Флеминга Дженкина: J e n k i n Fleming, Trans. Roy. Soc., Edinburgh, т. 25, стр. 441, 1869.

приложенных в рассматриваемой вершине. Рис. 118, *а* и 118, *б* представляют собой простейший пример двух взаимных диаграмм. Легко видеть, что, основываясь на описанном выше отношении взаимности и имея диаграмму 118, *а*, мы можем построить взаимную диаграмму 118, *б* чисто геометрическим путем, не входя в рассмотрение условий равновесия отдельных узлов.

Для общего случая Максвелл формулирует свои выводы в следующих двух положениях: «Две плоские фигуры являются взаимными, если они состоят из равного числа линий, притом таким образом, что соответственные линии двух фигур параллельны, а соответственные линии, сходящиеся в одной точке на одной фигуре, образуют замкнутый многоугольник на другой. Если силы, представленные по величине двумя отрезками, действуют между крайними точками соответственных отрезков одной фигуры, то все точки взаимной фигуры будут находиться в равновесии под действием этих сил». Столь абстрактная формулировка важного свойства взаимных фигур едва ли могла принести большую пользу инженеру-практику, и мы согласны с проф. Дженкином[1]), который, процитировав оба эти положения, находит, что «Немного, однако, найдется таких инженеров, которые заподозрят, что эти две только что приведенные фразы предоставляют в их распоряжение замечательно простой и точный способ определения усилий в стержневых системах». После такого заключения Дженкин дает несколько примеров построения взаимных диаграмм, следуя правилам, разработанным конструктором-практиком У. Тэйлором, сотрудником одного проектного бюро. На материке Европы применение взаимных диаграмм стало известным из книги Кремоны, о которой упоминалось выше (см. стр. 238), и потому очень часто эти построения называются диаграммами Кремоны.

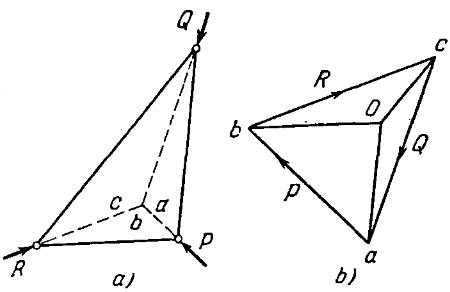


Рис. 118.

Остановимся теперь вкратце на некоторых общих выводах, относящихся к усилиям в элементах статически определимых ферм. Максвелл пришел к этим выводам спустя несколько лет[2]). Один из этих выводов резюмируется им следующим образом: «В системе точек, находящихся в равновесии на плоскости под

[1]) Trans. Roy. Soc., Edinburgh, т. 25, стр. 441, 1869.
[2]) Trans. Roy. Soc., Edinburgh, т. 26, 1870.

действием отталкиваний и притяжений, сумма произведений из каждого притяжения на расстояние между точками, на которые оно действует, равна сумме произведений из отталкиваний, умноженных на расстояние между точками, на которые оно действует». Чтобы доказать это, заметим, что каждая точка системы находится в равновесии под действием систем отталкиваний и притяжений, действующих в одной плоскости. Это равновесие сохранится, если систему повернуть на прямой угол по часовой стрелке. Но если эту операцию произвести над системой сил, действующих на все точки, то на концах каждого отрезка, соединяющего пару точек, мы получим две равные силы, направленные под прямыми углами к этому отрезку и действующие в противоположные стороны. Они образуют пару сил, величина которой равна произведению величины силы на плечо, т. е. расстояние между точками, направление же действия будет по часовой стрелке, если сила отталкивающая, и против часовой стрелки в случае силы притяжения. Поскольку же каждая точка находится в равновесии, эти две системы пар также должны взаимно уравновешиваться, иначе говоря, сумма положительных пар равна сумме отрицательных пар, что и доказывает теорему.

В случае, если ферма загружена, мы имеем в дополнение к усилиям в стержнях еще и внешние силы, а также реакции. Если описанный выше поворот сил выполнен для всех узлов, то сумма моментов повернутых внешних сил и реакций относительно любой точки в плоскости фермы должна уравновесить сумму пар, образованных поворотами усилий в стержнях. Если, например, в данной нам ферме нижний пояс горизонтален, а все внешние силы и реакции вертикальны и приложены в узлах нижнего пояса, то сумма моментов всех повернутых внешних сил и реакций обращается в нуль, сумма же произведений из длин всех растянутых элементов на действующие в них растягивающие усилия должна быть равна сумме произведений из длин всех сжатых элементов на соответствующие сжимающие усилия. Этим выводом можно пользоваться для проверки результатов расчета ферм. Отсюда следует также, что если напряжения во всех стержнях равны по своей абсолютной величине, то общий объем всех растянутых элементов должен быть равен объему сжатых элементов.

Максвелл не ограничил круга своих интересов анализом статически определимых ферм, а поставил проблему в более общем виде[1]). Он показывает, что, имея плоскую стержневую систему с n узлами, можно составить $2n$ уравнений равновесия. Три уравнения обычно бывают нужны для вычисления реакций опор, остальными же $2n—3$ уравнениями мы вправе воспользоваться для определения усилий в стержнях фермы, если число этих

[1]) Phil. mag., т. 27, стр. 294, 1864.

стержней равно $2n-3$. Если стержней более, чем $2n-3$, задача становится статически неопределенной, иначе говоря, для ее решения возникает необходимость в учете упругих свойств стержней и в исследовании деформации сооружения. На вопрос о том, как это сделать, Максвелл дает следующее разъяснение: «Я установил для этой цели общий наименее трудный метод решения всех такого рода задач. Этот метод выводится из принципа сохранения энергии и излагается в „Лекциях по теории упругости" Ламе (Лекция 7-я) как теорема Клапейрона; но до сих пор я еще не видел, чтобы он нашел какое-либо разработанное конкретное применение»[1]).

Поясним предлагаемый Максвеллом метод на примере. Начнем с вычисления прогибов фермы типа рис. 119, *а*. Такая ферма статически определима, и мы легко можем найти усилия во всех ее стержнях при заданных нагрузках на ферму P_1, $P_2, \ldots$ Пусть S_i—усилие, действующее по оси некоторого стержня i, пусть длина этого стержня равна l_i, а площадь его поперечного сечения A_i. Удлинение такого стержня выразится величиной $\Delta_i = S_i l_i / EA_i$. Перед нами теперь геометрическая задача определения прогиба в некотором узле, положим A, по известным нам значениям удлинений во всех стержнях фермы. К решению этой задачи Максвелл подходит через решение вспомогательной задачи, относящейся к той же самой ферме, но нагруженной не заданными силами P_1, $P_2, \ldots$, а силой, равной единице и приложенной в узле A (рис. 119, *б*), прогиб которого нам надлежит определить. Эта вспомогательная задача—также статически определенная, и потому нетрудно найти усилие s_i, возникающее в стержне i под воздействием на ферму единичной нагрузки. Вычислим теперь

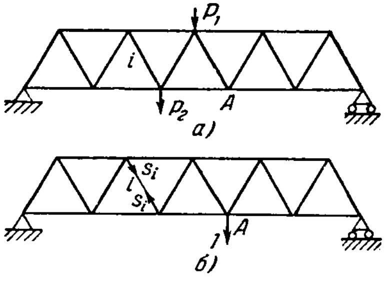


Рис. 119.

[1]) По-видимому, это утверждение Максвелла не совсем правильно. Как отметил С. А. Бернштейн в статье «Забытые страницы из истории русской строительной механики» (Труды по истории техники АН СССР, вып. VII, М., 1954, стр. 35), в вышедшей в 1855 г. в Петербурге небольшой книге Беспалова «Элементарный способ решения вопросов относительно сопротивления материалов и устойчивости сооружений» метод Клапейрона приравнивания работ внешних и внутренних сил был применен к вычислению прогиба консоли под сосредоточенным грузом. При вычислении работы внутренних сил Беспалов пользуется «перемножением эпюр» напряжений и удлинений в произвольном волокне по длине балки и приходит к правильному значению прогиба. Этот прием на 30 лет опередил прием вычисления интегралов Мора, указанный Мюллер—Бреслау. (*Прим. ред.*)

прогиб δ'_a узла A, который получится в результате удлинения Δ'_i стержня i. Допустим при этом, что все стержни фермы, за исключением стержня i, абсолютно жестки. Тогда работа, произведенная единичной силой при перемещении точки ее приложения на величину прогиба δ'_a, преобразуется в энергию деформации стержня i. Полагая, что между силой и вызванным ею прогибом существует пропорциональность, мы придем к уравнению

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \delta'_a=\frac{1}{2}s_i\Delta'_i.$$

Из него следует:

$$\delta'_a=\Delta'\,\frac{s_i}{l}.$$

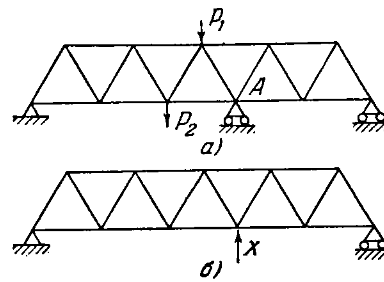


Рис. 120.

Это соотношение имеет силу для всякого малого значения Δ'_i. Если вместо Δ'_i мы напишем $S_i l_i/EA$, то найдем прогиб, вызванный удлинением стержня i для случая загружения фермы заданными нам силами P_1, P_2 (рис. 119, *а*). Чтобы получить полную величину прогиба δ_a при действии заданной нагрузки, нужно будет учесть удлинения всех стержней фермы и просуммировать все вызванные ими в узле A прогибы, что дает:

$$\delta_a=\sum_{i=1}^{i=m}\frac{S_i s_i l_i}{EA_i}. \tag{a}$$

Уравнение (a) позволяет решать некоторые статически неопределенные задачи. Рассмотрим для примера ферму, изображенную на рис. 120, *а*, с одной лишней неизвестной—опорной реакцией X промежуточной опоры A. Чтобы найти значение неизвестной реакции, представим себе, что эта опора удалена и что образовавшийся в результате этого прогиб узла A мы вычислили, пользуясь уравнением (a). Вычислим теперь отдельно также и прогиб в том же узле, вызванный действием одной лишь реакции X по схеме рис. 120, *б*. Используя для этого результаты, полученные нами с помощью схемы рис. 119, *б*, находим, что усилие, возникающее в элементе i фермы вследствие воздействия реакции X, равно $-s_iX$, так что прогиб δ_1 узла A, вызванный реакцией X, определится из уравнения (a):

$$\delta_1=-\sum_{i=1}^{i=m}\frac{Xs_i^2 l_i}{EA_i}.$$

Так как при заданных условиях по схеме рис. 120, *а* прогиб в узле A равен нулю, уравнение для определения X принимает вид

$$\delta+\delta_1=\sum_{i=1}^{i=m}\frac{S_is_il_i}{EA_i}-\sum_{i=1}^{i=m}\frac{Xs_i^2l_i}{EA_i}=0. \qquad \text{(b)}$$

Мы видим, что решение статически неопределенной задачи (рис. 120, *а*) сводится к двум статически определенным задачам вычисления усилий S_i и s_i. Аналогичным образом рассчитываются и фермы, в которых лишними неизвестными являются усилия в стержнях.

В своей работе по прогибам ферм Максвелл открыл существование весьма важного соотношения между прогибами, вызывае-

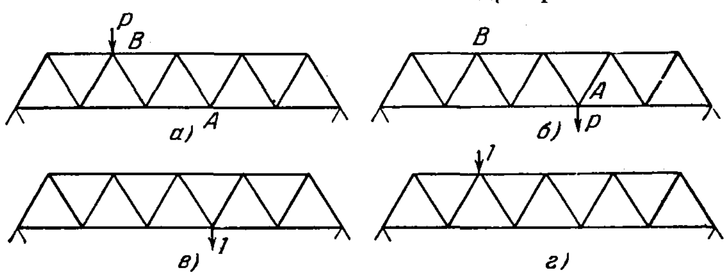


Рис. 121.

мыми в ферме двумя различными видами нагрузок. Рассмотрим два случая загружения фермы, представленных на рис. 121,*а* и 121,*б*. В первом случае нагрузка P приложена в узле B и требуется найти прогиб δ_a узла A. Во втором случае нагрузка P действует непосредственно на узел A_1 и требуется найти прогиб δ_b. Следуя методу, поясненному на рис. 119, рассмотрим два вспомогательных случая, приведенных рис. 121, *в* и 121, *г*. Примем для усилий, возникающих в стержне i по рис. 121, *а* и рис. 121, *в*, обозначения S_i и s_i и соответственно S_i' и s_i' для тех же усилий по рис. 121,*б* и 121,*г*. Тогда в соответствии с уравнением (a) получаем:

$$\delta_a=\sum_{i=1}^{i=m}\frac{S_is_il_i}{A_iE}, \qquad \delta_b=\sum_{i=1}^{i=m}\frac{S_i's_i'l_i}{A_iE}. \qquad \text{(c)}$$

Но из сопоставления рис. 121,*в* и 121, *б* находим, что $S_i'=s_iP$, а из рис. 121, *г* и 121, *а* аналогично $S_i=s_i'P$. Производя соответствующие подстановки в уравнениях (c), приходим к равенствам

$$\delta_a=\delta_b=P\sum_{i=1}^{i=m}\frac{s_is_i'l_i}{A_iE}. \qquad \text{(d)}$$

Таким образом, из сопоставления двух вариантов загружения, представленных на рис. 121, *а* и 121, *б*, мы убеждаемся, что если нагрузку, приложенную в узле B, перенести в узел A, то прогиб, который в первом положении нагрузки получается в узле A, во втором ее положении будет наблюдаться в узле B. К этому сводится содержание теории взаимности в той ее простейшей форме, в которой она была получена Максвеллом.

В последующем, как мы увидим, эта теория была обобщена и стала весьма важным орудием в исследовании статически неопределимых систем.

Максвелл представил свой метод расчета статически неопределимых стержневых систем в абстрактной форме, без чертежей и примеров, и его работа, насколько мы можем судить об этом по современной ему литературе, осталась совершенно незамеченной инженерами[1]). Десять лет спустя О. Мор заново открыл[2]) уравнение (а) Максвелла и показал разнообразные возможности его применения в строительной механике. Так как Мор пришел к своим результатам, не зная о работе Максвелла и воспользовавшись совершенно иным способом вывода, а также потому, что этот метод нашел практическое применение лишь после опубликования работы Мора, он называется обычно *методом Максвелла—Мора*.

46. Вопросы устойчивости упругих систем. Формулы для расчета колонн

С введением железа в проектирование инженерных сооружений вопросы устойчивости гибких сжатых стержней и тонкостенных конструкций получили большое практическое значение. В начале XIX столетия Дюло (Duleau) на основании своих испытаний железных стержней на сжатие (см. стр. 101) показал, что формула Эйлера дает удовлетворительное значение для критической нагрузки, если только выполняются предполагаемые теорией условия на концах. Дюло при этом пользовался сравнительно тонкими стержнями, между тем как элементы ферм на практике бывают обычно не столь гибкими. Для этих условий практики формула Эйлера приводит к преувеличенным значениям критической нагрузки, и для того чтобы найти формулу, более близко отвечающую действительности, потребовалось обратиться к опытам.

В середине XIX столетия широкое применение нашли формулы, выведенные на основе испытаний Ходкинсона (стр. 157). Однако

---

[1]) Критическое освещение работы Максвелла с некоторыми поправками к приведенному Максвеллом примеру дается в недавно опубликованной статье Найлса: N i l e s A. S., Engineering, 1950, сентябрь.

[2]) Z. Architek. u. Ing. Ver., Hannover, 1874, стр. 223, 509; 1875, стр. 17.

в опытах Ходкинсона концы стержней были большей частью плоскими, что делало условия опирания несколько неопределенными. Иногда применялись округленные концы, но так как поверхности соприкасания не были сферическими, то малейшее изгибание стержня приводило к эксцентриситету нагрузки. В связи с этим формулы Ходкинсона оставляли желать лучшего. К тому же, их вовсе не легко было применять при решении практических задач; поэтому в дальнейшем Лявом (Love, см. стр. 150) и Льюисом Гордоном (Lewis Gordon)[1]) было предложено несколько новых формул упрощенного типа.

Весьма серьезное теоретическое исследование продольного изгиба было выполнено в то время Ламарлем[2]). Он первый установил предел, до которого допустимо пользоваться формулой Эйлера и за которым следует полагаться лишь на показания эксперимента. Имея для стержня с шарнирными концами формулу

$$\sigma_{\text{кр}} = \pi^2 E \frac{i^2}{l^2}, \tag{a}$$

где l/i—гибкость стержня, Ламарль правильно заключает, что эта формула может давать верные результаты лишь до тех пор, пока значение критического напряжения $\sigma_{\text{кр}}$ не превышает предела упругости материала. Для железа он, очевидно, считал этот предел упругости совпадавшим с пределом текучести и для предельного значения гибкости получил формулу

$$\frac{l^2}{i^2} = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{т}}}. \tag{b}$$

Для бóльших гибкостей Ламарль рекомендует пользоваться формулой Эйлера, для меньших же ее значений он предлагает принять для $\sigma_{\text{кр}}$ постоянное значение $\sigma_{\text{т}}$.

Это разумное предложение осталось, по-видимому, незамеченным инженерами, поскольку в книге Рэнкина мы встречаем повсюду лишь формулу Гордона. Рэнкин рассказывает интересную историю этой формулы. До того как Ходкинсон поставил свои опыты, английские инженеры пользовались, насколько это известно, формулой Тредгольда (Tredgold), вывод которой был получен следующим образом. Положим, что брус (стойка) прямоугольного поперечного сечения ($b \times h$) и с шарнирными концами получил прогиб δ под действием осевой сжимающей силы P.

---

[1]) См. Rankine, A manual of civil engineering, 20-е изд., стр. 236, 1898.

[2]) Lamarle E., Mémoire sur la flexion du bois, Ann. travaux publics Belgique, т. 3, стр. 1—64, 1845; т. 4, стр. 1—36, 1846. Проблема продольного изгиба рассматривается во второй части мемуара.

Этими данными определяется наибольшее напряжение сжатия

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{P}{bh} + \frac{6P\delta}{bh^2}. \tag{c}$$

Но прогиб пропорционален отношению $M_{\text{макс}}\, l^2/I$, наибольшее же напряжение изгиба пропорционально $M_{\text{макс}}\, h/I$; поэтому при постоянном напряжении изгиба прогиб δ пропорционален l^2/h. Введя это значение δ в уравнение (c), Тредгольд заключает, что критическое значение сжимающего напряжения, при котором брус теряет способность нести нагрузку, может быть вычислено из уравнения

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{P}{bh}\left(1 + a\frac{l^2}{h^2}\right), \tag{d}$$

где a—некоторая постоянная. Рэнкин сообщает, что формулы, основанные на подобных соображениях, «вышедшие некоторое время тому назад из употребления, ныне пересмотрены М. Льюисом Гордоном, который путем сопоставления их с результатами испытаний Ходкинсона нашел значения входящих в них постоянных». Таким путем Гордон получил для сварочного железа[1])

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{36\,000}{1 + \frac{1}{12\,000}\frac{l^2}{h^2}}. \tag{e}$$

Для случая стержня с жестковделанными концами вместо коэффициента 1/12000 в знаменателе формулы предлагается 1/3000. Рекомендуя для стержней непрямоугольного сечения формулу, аналогичную формуле (e), Рэнкин вводит для характеристики гибкости отношение l/i вместо l/h и соответственно этому изменяет численную величину коэффициента в знаменателе.

В своих руководствах Рэнкин разбирает также и некоторые другие вопросы устойчивости упругих систем. Рассматривая осевое сжатие железной трубы квадратного сечения с жестко защемленными концами в предположении, что толщина стенки не меньше $^1/_{30}$ ширины поперечного сечения, он рекомендует пользоваться формулой (e), приняв лишь в ней для числителя значение 27 000 фунт/кв. дюйм вместо 36 000 фунт/кв. дюйм.

Останавливаясь на изгибе клепаных двутавровых балок, Рэнкин предусматривает возможность поперечного выпучивания сжатой полки. Обозначая ширину полки через b, он вычислнет

---

[1]) Формула дана в английских мерах фунт/дюйм², в *кг/см²* имеем:

$$\sigma_{\text{кр}} \approx \frac{2530}{1 + 0{,}000083\,\frac{l^2}{h^2}}.$$

критическое напряжение в ней по формуле

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{36\,000}{1+\left(\frac{1}{5000}\right)\left(\frac{l^2}{b^2}\right)}. \tag{f}$$

Определяя рациональное значение толщины вертикальной стенки для двутавровой балки, Рэнкин учитывает возможность выпучивания этой стенки в результате действия сжимающего напряжения у нейтральной линии, направленного под углом 45° к горизонту. Для вычисления критического значения этого напряжения он предлагает формулу

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{36\,000}{1+\left(\frac{1}{3000}\right)\left(\frac{s^2}{t^2}\right)}, \tag{g}$$

где t—толщина стенки, а s—расстояние между двумя ребрами жесткости, отмеренное по прямой, наклоненной к горизонту под углом 45°.

Более рациональный способ расчета коротких сжатых элементов был предложен Г. Шеффлером[1]). Последний исходит из предпосылки, что в связи с неизбежными неточностями практических приемов загружения бруса сжимающими силами мы всегда должны считаться с наличием некоторого эксцентриситета нагрузки на его концах. Шеффлер выводит формулу для наибольшего напряжения, выражая его в зависимости от эксцентриситета; пользуясь ею, мы получаем возможность для каждого принятого значения эксцентриситета вычислить опасное значение нагрузки. Шеффлер указывает значения эксцентриситета для брусьев из различных материалов таким образом, что получаемые им значения критической нагрузки достаточно хорошо согласуются с экспериментальными результатами Ходкинсона. Надо думать, что Шеффлер первый начал пользоваться некоторыми исходными значениями эксцентриситета при вычислении опасной сжимающей нагрузки. Ценность этого метода не была понята в свое время, и инженеры продолжали пользоваться формулой Рэнкина до конца XIX столетия.

47. Теория подпорных стен и арок во второй трети XIX века

На протяжении рассматриваемого периода инженеры продолжали опираться на теорию Кулона (см. стр. 78) в расчетах устойчивости подпорных стен. Прогресс в этой области заключался

---

[1]) Scheffler Hermann, Theorie der Festigkeit gegen das Zerknicken..., Braunschweig, 1858.

главным образом в развитии графических методов определения давления грунта. Понселе[1]) первый показал, что давление грунта на подпорную стену (как оно вычисляется по формуле Кулона) легко может быть найдено графическим построением. В простейшем случае вертикальной стенки и грунта, ограниченного сверху горизонтальной плоскостью AC (рис. 122), он находит следующую формулу для горизонтального давления грунта на единицу длины стены, пренебрегая трением между стеной и грунтом

$$H = \frac{\gamma}{2} a^2, \tag{a}$$

где γ—вес единицы объема грунта, а a—длина отрезка, определенная согласно рис. 122 как

$$a = \overline{BC} = \overline{OB} - \overline{OA} = \frac{h}{\cos\psi} - h \operatorname{tg}\psi,$$

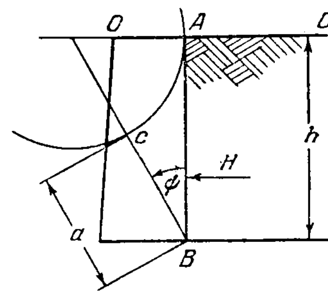


Рис. 122.

где ψ—угол естественного откоса. Таким путем из (а) Понселе получает:

$$H = \frac{\gamma h^2}{2}\left(\frac{1}{\cos\psi} - \operatorname{tg}\psi\right)^2.$$

Этот результат совпадает с формулой (а) Кулона, если мы подставим в последнюю выражения (b) и (c) (стр. 78).

Понселе нашел простое графическое решение и для более общего случая, в котором стена наклонена к горизонту под некоторым углом, отличным от 90°, а масса грунта ограничивается сверху полигональной поверхностью, при этом учитывается также и трение между стеной и грунтом. В этой работе Понселе первый на основании теории Кулона выводит аналитическое выражение для давления грунта и показывает, каким образом можно получить его численное значение графическим построением.

Пока инженеры в своих расчетах устойчивости подпорных стен продолжали пользоваться теорией Кулона, было предпринято несколько попыток выяснить истинное распределение напряжений в сыпучем материале, поддерживаемом подпорной стеной. Как мы видели (стр. 243), инициатива в этом деле принадлежала Рэнкину, а также Шеффлеру[2]), но инженеры долгое время не замечали трудов этих двух ученых, и потому они оказали

---

[1]) Mém. officier génie, т. XIII, стр. 261—270, 1840.
[2]) Scheffler H., Crelle's J. Baukunst, 1851.

очень слабое влияние на практику проектирования подпорных стен[1]) в рассматриваемый нами период.

В области проектирования арочных мостов инженеры проодолжали рассматривать каменную арку как систему абсолютно жестких каменных блоков, хотя, как мы уже видели (стр. 180), еще Бресс дал полное решение для упругой арки с заделанными пятами. Понятия *кривой давления* и *линии сопротивления* были введены в исследование арок около 1830 г. Ф. Герстнеру (F. J. Gerstner)[2]), по-видимому, следует приписать первое исследование линий давления. Поводом к тому послужили вопросы проектирования висячих мостов, в связи с чем он излагает свойства цепной линии и составляет таблицы для построения этой кривой. Там же он указывает, что эта кривая, повернутая вокруг горизонтальной оси, лучше всего отвечает и очертанию арки постоянного поперечного сечения. Такая арка под действием собственного веса работает на одно только сжатие. Поскольку в его время во всеобщем применении были круговые и эллиптические арки, Герстнер занимается вопросом, как нужно распределить по пролету арки нагрузку, чтобы эти кривые, т. е. дуги окружности или эллипса, совпали с кривыми давления. На практике, как он указывает, распределение нагрузки отклоняется от указываемого теорией для идеального случая; это значит, что в действительности материал арки подвергается не только сжатию, но и изгибу. Он обращает также внимание на то, что задача эта — статически неопределенная и что возможно построить бесконечное множество кривых давления, удовлетворяющих условиям равновесия и проходящих через различные точки ключевого сечения и пят. Каждой из таких кривых соответствует некоторое значение горизонтального распора H. Чтобы сделать задачу статически определенной, Герстнер вводит, в заключение, некоторые произвольные допущения относительно положения истинной кривой давления.

Некоторые общие соображения относительно положения истинной кривой давления в арке приводятся английским ученым Генри Мозли (Henry Moseley, 1802—1872). Мозли родился неподалеку от Ньюкэстла. Он обучался в городской средней школе классического типа, а затем в Абвиле. Далее он поступил в колледж Сент-Джонса в Кембридже, который и окончил в 1826 г.

---

[1]) По вопросам развития теории подпорных стен см. M e h r t e n s G. C., Vorlesungen über Ingenieur—Wissenschaften, т. 3, ч. 1, 1912.

[2]) «Handbuch der Mechanik», т. 1, стр. 405, Prag, 1831. (*Прим. авт.*) Герстнер Франтишек Иосиф (1756—1832), чешский инженер и ученый в области механики, профессор математики Пражского ин-та, основатель (1806) Пражского политехникума. Его «Handbuch...» издал в 1831—1834 гг. в трех томах его сын, Франтишек Антонин (1793—1840), инженер и железнодорожный предприниматель, строитель первой железной дороги в России—Царскосельской. (*Прим. ред.*)

В 1836 г. Мозли занял должность профессора натуральной философии и астрономии в Лондонском королевском колледже. Там он вел курсы механики и ее технических приложений и издал две книги: «Учебник по приложениям механики в технике» («A treatise on mechanics applied to the arts») (1839) и «Механические основы инженерного искусства и архитектуры» («The mechanical principles of engineering and architecture») (1843). Из предисловия ко второй из этих книг мы узнаем, что на Мозли оказали большое влияние научные труды французских ученых, и он часто ссылается на книги и статьи Навье, Дюпэна и, в особенности, на «Промышленную механику» («Mécanique industrielle») Понселе. Главная заслуга Мозли в том, что он ввел методику французских инженеров в Англии, в связи с чем его сочинения представили собой заметный шаг вперед в английской технической литературе его времени. Мозли заинтересовался статически неопределенными задачами и для их решения ввел *принцип наименьшего сопротивления*[1]). Применение этого принципа в расчете арок показано им в статье «К теории арок» («On the theory of the arch»), написанной в 1839 г. и вошедшей в первый том изданного Джоном Уилом в 1843 г. руководства по мостам «Теория, практика и архитектура мостов»[2]). Там было впервые показано, что кривая давления и линия сопротивления представляют собой две различные кривые. Для пояснения этого он пользовался схемой рис. 123. Стрелкой A обозначена сила, действующая на поперечное сечение *1—2* и приложенная в точке a. Складывая эту силу с весом камня (клина) *1234*, мы получаем силу B, действующую в точке b на поперечное сечение *3—4*. Продолжая идти тем же путем, получаем силы C, D, E, ..., приложенные в точках c, d, e, ... Многоугольник, образованный пересечениями сил A, B, C, D, E, ..., дает нам в пределе кривую давления, многоугольник же a, b, c, d, e, ...— подобным же образом—линию сопротивления.

При построении кривой давления для симметричной арки (рис. 124) Мозли начинает с произвольно выбранной точки C и прикладывает в ней распор H такой величины, что кривая давления принимает в некоторой точке B направление касательной к внутреннему контуру арки. Меняя положение начальной точки C, можно получить бесчисленное множество кривых давления. Чтобы выбрать истинную кривую давления из всех возможных, Мозли пользуется своим принципом наименьшего сопротивления и утверждает, что требуемой истинной кривой будет та, которая соответствует наименьшему значению H. Можно заметить, что, передвинув точку C выше, мы уменьшим H, на основании чего Мозли приходит окончательно к выводу, что истинная

---

[1]) Phil. mag., октябрь 1833.

[2]) Weale John, The theory, practice and architecture of bridges.

кривая давления проходит через точки A и B. Это заключение согласуется с основным допущением теории Кулона, которая, как сообщает Мозли, «оставалась мне неизвестной до той поры, пока много лет спустя после того, как я закончил свои собственные исследования, эта теория, пролежав свыше шестидесяти лет забытой среди страниц («Mémoires des savants étrangers» («Труды иностранных ученых») и оставшись непотревоженной многочисленными горячими дискуссиями, которые велись в то время как в Англии, так и в других странах вокруг этого вопроса, не была, наконец, извлечена недавно на свет и не стала предметом ценных исследований Навье, Ламе, Клапейрона и Гариделя»[1]).

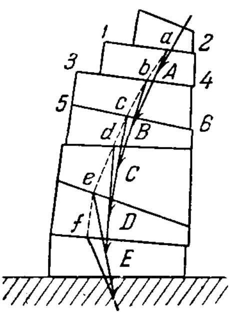


Рис. 123.

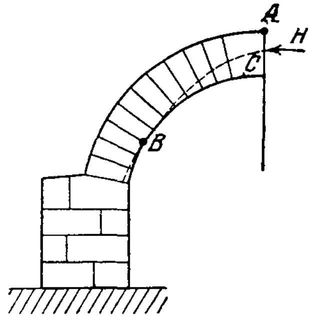


Рис. 124.

Научные труды Мозли обратили на себя внимание германских инженеров, а его книга «Механические основы инженерного искусства и архитектуры» была переведена на немецкий язык Шеффлером (1844), пытавшимся в дальнейшем улучшить теорию Мозли введением в нее соображений о прочности материала арки[2]). Он указывает, что если кривая давления проходит через точки A и B (рис. 124), то напряжение в этих точках должно было бы получиться бесконечно большим. Чтобы избежать этой трудности, кривую давления нужно себе представить, как полагает Шеффлер, сдвинутой внутрь тела арки и в качестве истинной кривой принять ту, для которой максимум напряжения в A и B достигает предела прочности материала.

Дальнейший прогресс в расчете арок стимулировался введением графического метода исследования. Заслуга в этом принадлежит Понселе[3]). Положив в основу своей работы теорию Куло-

---

[1]) См. Mém. officier génie, т. 12, стр. 7, 1835.

[2]) Scheffler, Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken, Braunschweig, 1857.

[3]) См. Mém. officier génie, т. 12, стр. 151—213, 1835.

на, Понселе показывает, каким образом можно графически найти положение опасного шва перелома. Доказанная им теорема утверждает, что принадлежащую шву перелома точку внутреннего контура арки можно установить по тому признаку, что касательная к контуру в этой точке проходит через точку пересечения приложенного в ключе горизонтального распора и равнодействующей собственного веса участка арки между пятой и опасным сечением[1]).

Другим своим усовершенствованием графический расчет арок обязан Кульману[2]). Приняв, что материал арки не способен сопротивляться растягивающим усилиям, Кульман заключает, что в своем крайнем положении кривая давления должна проходить через верхнюю или через нижнюю точку средней трети ключевого сечения в шве перелома. Используя эти две точки, он строит веревочный многоугольник для сил собственного веса последовательных клиньев арки и внешней нагрузки и определяет таким путем усилия, а следовательно, и напряжения в каждом ее сечении. Творчеством Кульмана завершается тот период в развитии теории арок, который позволительно охарактеризовать игнорированием упругой деформации конструкций. Новая эра в этой области была открыта, как мы увидим, переходом к рассмотрению арки как упругого кривого бруса и применением к последнему теории, разработанной в трудах Навье (стр. 97) и Бресса (стр. 178).

В заключение небесполезно остановиться вкратце на широко известной научно-технической деятельности Ивона Вийарсо (Yvon Villarceau[3]) 1813—1883), посвященной арочным мостам. Сын коммерсанта из Вандома[4]), он не проявлял в своей юности склонности к наукам, но, забавляясь долгими часами различного рода механическими игрушками, приобрел большие практические

---

[1]) Эта теорема, как мы видели, была доказана раньше Ламе и Клапейроном (см. стр. 105). (*Прим. авт.*) Среди работ по графическому расчету арок следует указать на статью Германа Егоровича Паукера (1822—1889) «О поверке устойчивости цилиндрических сводов» («Инж. записки», ч. XXXIII, СПб., 1849, № 1, стр. 1—118). О значении этой работы см. А. А. Гвоздев «Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия», вып. I, М., 1949, стр. 23—28. Метод Г. Е. Паукера получил широкое применение в России при расчетах сводов. Этот метод изложен также в печатном (посмертном) издании 1891 г. его курса «Строительная механика». Там же, краткий обзор деятельности и трудов Г. Е. Паукера. (*Прим. ред.*)

[2]) См. Culmann K., Grafische Statik, стр. 435—469, 1866.

[3]) См. его мемуар «Sur l'établissement des arches de pont», представленный во Французскую Академию наук в 1845 г. и опубликованный в Mém. présentés par divers savants, т. 12, стр. 503—822, 1854.

[4]) См. Bertrand Joseph, Éloges académiques, Paris, 1890; см. также Pothier Francis, Histoire de l'École centrale des arts et manufactures, стр. 333, Paris, 1887.

навыки в механике. Потом он увлекся музыкой, участвовал в местном оркестре и в 1830 г. уехал в Париж, чтобы поступить там в консерваторию. Одновременно он заинтересовался социалистическими теориями Сен-Симона. Затем вступил в состав миссии Анфантэна (Enfantin), провел с ней несколько лет в Египте и, вернувшись в Париж лишь в 1837 г., решил изучать технику в центральной Школе ремесел и промышленности. При прохождении курса этого института он обнаружил свои выдающиеся способности и дал ряд оригинальных работ по геометрии. Особенно его заинтересовали вопросы расчета арок, и по окончании курса в 1840 г. он опубликовал несколько статей на эту тему в журнале «Архитектура и строительство» («Revue de l'architecture et des travaux publics»). Наконец, в 1845 г. он представил свой знаменитый мемуар об арках в Академию. В дальнейшем Вийарсо заинтересовался астрономией и вел научную работу в Парижской обсерватории под руководством Араго. Там он написал свое знаменитое сочинение по астрономии. В 1867 г. он был избран в члены Академии наук.

В своей работе, посвященной аркам, Вийарсо интересуется главным образом выбором наивыгоднейшего очертания оси арки. Он отдает себе ясный отчет в том, что задача эта—статически неопределенная и что полное решение ее требует учета упругих деформаций. Но, принимая во внимание недостаточность имеющихся знаний об упругих свойствах материалов, используемых при возведении арок, он идет на упрощение задачи, принимая камни, из которых складывается арка, абсолютно жесткими. Он полагал при этом, что очертания, найденные таким путем, окажутся достаточно хорошими и в том случае, если принять во внимание также и упругие деформации. Такой метод приводит его к рассмотрению случаев совпадения кривой давления с осью арки. Мы уже упоминали раньше (стр. 241) о простейших примерах этого рода, в которых толщиной арки пренебрегалось. Вийарсо идет дальше и рассматривает не только внешнее давление, которое он принимает направленным нормально к внешнему контуру арки, но также и собственный вес. При этих предпосылках дифференциальное уравнение кривой давления получается сложным, и его интегрирование требует введения эллиптических функций. Чтобы ввести все же свое решение в практические применения, Вийарсо не остановился перед вычислением множества таблиц, позволивших инженерам-практикам находить искомую ось и определять необходимую толщину арки в каждом конкретном случае. Вооруженный этими таблицами Вийарсо применил свою теорию к большому числу существовавших мостов и показал, что толщину их можно было бы во многих случаях уменьшить, не повышая этим напряжений, если бы оси их придать очертание согласно его теории.

В заключение он приводит соображения об оценке влияния упругости материала (которой он пренебрегает в своей теории) и подсчитывает то увеличение высоты (строительный подъем), которое следует придать арке при ее возведении, с тем чтобы ее ось приняла проектную форму после раскружаливания. Мысль Вийарсо об использовании веревочной кривой для расчетных внешних нагрузок при построении оси получила широкое распространение. Этим приемом устанавливаются обычно эскизное очертание арки и ее толщина, после чего принятые размеры проверяются средствами упругой теории арок.

ГЛАВА VIII

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ ВО ВТОРОЙ ТРЕТИ XIX ВЕКА

48. Физические основы теории упругости и спор об «упругих постоянных»[1]

В своём выводе основных уравнений теории упругости Навье (см. стр. 129) исходил из предположения, что идеально упругое тело состоит из молекул, между которыми при его деформировании возникают силы взаимодействия. При этом принималось, что силы эти пропорциональны изменениям расстояний между молекулами и действуют по направлениям соединяющих их прямых линий. Таким путем Навье удалось установить соотношения между деформациями и упругими силами для изотропных тел с введением лишь одной упругой константы. Коши (см. стр. 135) первоначально ввел две константы в зависимости между напряжением и деформацией в случае изотропии. В самом же общем случае анизотропного тела Пуассон и Коши допускали, что каждая из шести компонент напряжения может быть представлена однородной линейной функцией шести компонент деформации (обобщенный закон Гука). В эти функции входило 36 постоянных. Положив в основу физического истолкования явления упомянутую выше молекулярную теорию, они снизили число постоянных для общего случая до 15. Они показали, что изотропия допускает дальнейшее снижение этого числа, так что окончательно для записи соотношений между компонентами напряжения и деформации необходима лишь одна постоянная, которую и ввел Навье.

Пуассон показал, что при простом растяжении изотропного бруса отношение поперечного укорочения к продольному удлинению должно быть равно $^1/_4$ и, если E—модуль упругости при простом растяжении или сжатии, то модуль при сдвиге должен

---

[1]) История этого вопроса излагается подробно в приложениях III и V к лекциям Навье: N a v i e r, Resumé des leçons..., 3-е изд., 1864. См. также Note finale № 16 в книге: C l e b s c h, Theorie de l'élasticité des corps solides, Paris, 1883, в переводе Сен-Венана. (*Прим. авт.*)

быть равен

$$G=\frac{E}{2\left(1+\frac{1}{4}\right)}=0,4\,E. \tag{a}$$

Кроме того, при всестороннем равномерном давлении p относительное уменьшение объема e тела определяется формулой

$$e=\frac{3p\left(1-2\cdot\frac{1}{4}\right)}{E}=\frac{3}{2}\frac{p}{E}. \tag{b}$$

Представление о возможности полностью оценить упругие свойства изотропного тела одной постоянной (например, модулем упругости E при растяжении) на ранних стадиях развития теории упругости пользовалось всеобщим признанием. Навье, Коши, Пуассон, Ламе, Клапейрон—все разделяли это мнение.

Большие изменения в решение этого вопроса были внесены трудами Джорджа Грина, предложившего вывод уравнения упругости без введения какой бы то ни было гипотезы относительно поведения молекулярного строения упругих тел.

Джордж Грин (George Green, 1793—1841) был сыном мельника из Ноттинхэма, и в юности ему не посчастливилось получить образование. Он приобрел свои широкие знания в математике уже в зрелую пору жизни из книг, путем самостоятельного изучения. В 1828 г. вышла из печати его первая научная работа: «Опыт применения математического анализа к теории электричества и магнетизма» («An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism»)[1]). Из предисловия к этой работе мы узнаем, что Грин испытал на себе сильное влияние французской математической литературы. Ссылаясь на труды Лапласа, Пуассона, Коши и Фурье, он замечает: «Приятной перспективой для математиков-аналитиков нужно признать, без сомнения, то обстоятельство, что в эпоху, когда астрономия в том состоянии совершенства, которого она ныне достигла, почти уже не оставляет места для дальнейших применений их искусства, остальные физические науки обнаруживают с каждым днем все бо́льшую и бо́льшую склонность подчиниться его воздействию,...» и далее продолжает: «Нужно надеяться, что сложность вопроса побудит математиков прочесть этот труд со снисходительностью, тем большей, когда они узнают, что он был написан молодым человеком, которому пришлось приобретать имеющиеся у него ныне скромные познания, используя лишь урывки времени и сил, как это позволяли ему другие неотвратимые

[1]) См. Mathematical papers of the late George Green, edited by N. M. Ferrers, London, 1871.

обязанности, столь мало благоприятствовавшие усовершенствованию ума».Первая работа Грина признается самым важным его вкладом в науку. Он пользуется в ней математической функцией— «потенциалом», которая применялась уже Лапласом и обнаружила свою универсальную применимость во всех областях физики. Работа Грина привлекла внимание математиков, и в 1833 г. ее автору, достигшему тогда 40-летнего возраста, представилась, наконец, возможность поступить в колледж Гонвиля и Кайя при Кембриджском университете. В январе 1837 г., окончив курс с четвертым отличием по математике, он получил степень баккалавра искусств. В 1839 г. Грин был избран в члены этого колледжа, но ему недолго пришлось пользоваться преимуществами этого положения, так как в 1841 г. он умер.

К проблемам теории упругости Грин обратился в своей работе «О законах отражения и преломления света на поверхности раздела двух некристаллических сред» («On the laws of the reflection and refraction of light at the common surface of two non-crystallized media»)[1]).

Он не захотел делать никаких предположений ни относительно внутреннего строения светоносного эфира, ни о характере взаимодействия молекул и принял лишь гипотезу, что свойства эфира подчиняются принципу сохранения энергии. Он утверждает: «Если... мы столь совершенно несведущи о способе взаимодействия между собой элементов светоносного эфира..., то, казалось бы, более осторожным методом было бы положить в основу наших рассуждений какой-либо общий физический принцип, чем постулировать какие-то определенные формы взаимодействия, которые в конечном счете могли бы оказаться весьма отличными от того механизма, который применен самой природой, в особенности, если этот принцип заключает в себе как частные случаи те, которые приняты Коши и другими, и приводит, сверх того, к более простой вычислительной процедуре. Принцип, принятый в качестве основы для рассуждения, содержащегося в предлагаемой статье, таков: каким бы образом элементы данной материальной системы ни действовали бы друг на друга, полная сумма произведений внутренних сил на элементы тех направлений, по которым они действуют, для каждой заданной части массы должна быть всегда равна полному дифференциалу некоторой функции». Если мы обозначим эту функцию через φ и сочетаем принцип Даламбера с принципом возможных перемещений, то получим уравнения движения для случая, когда внешние силы отсутствуют, из уравнения

$$\iiint \rho\, dx\, dy\, dz \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,\delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,\delta w \right) = \iiint \delta\varphi\, dx\, dy\, dz. \quad \text{(a)}$$

[1]) См. Mathematical papers, стр. 245.

Полагая, что смещения u, v, w малы, Грин приходит к выводу, что функция φ должна быть однородной функцией второй степени шести компонент деформации

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \tag{b}$$

В самом общем случае такая функция содержит 21 постоянную, которые и определяют упругие свойства материала. Пользуясь этой функцией, мы сможем получить из уравнения (a) три уравнения движения, которые должны будут выполняться в каждой точке упругой среды. Для изотропного тела, как показывает Грин, функция φ допускает значительное упрощение. В нее войдут тогда всего лишь два коэффициента, а соответствующие уравнения движения будут содержать тоже всего лишь две упругие постоянные, как это принимал и Коши в своих первоначальных уравнениях (см. стр. 135).

Работа Грина явилась отправным пунктом дискуссии и послужила поводом к формированию двух школ в теории упругости. Ученые, последовавшие за Навье и Коши и принявшие их взгляды на молекулярное строение упругих тел, применяли 15 постоянных для определения упругих свойств материала в общем случае и одну постоянную для случая изотропии, в то время как последователи Грина применяли для тех же условий соответственно 21 и две постоянные. Естественно, что было сделано немало попыток решить спор непосредственными испытаниями, и ряд физиков заинтересовался опытными определениями упругих постоянных.

В. Вертгейм (W. Wertheim, 1815—1861)[1]), в частности, уделил такого рода определениям особенно большое внимание, и полученные им результаты еще и до сих пор весьма часто приводятся в учебниках физики. Сначала он принял гипотезу одной упругой постоянной, и в его первой статье приводятся значения модуля растяжения для различных материалов[2]). В основу им были положены не только статические испытания на растяжение, но также и опыты по продольным и поперечным колебаниям. Он нашел: 1) что для одного и того же металла всякая обработка (ковка, прокатка), увеличивающая плотность, увеличивает вместе с тем и модуль; 2) что значение модуля, полученное из вибрационных

[1]) В. Вертгейм родился в Вене в 1815 г. Там он получил в 1839 г. степень доктора медицины. В 1840 г. он переехал в Париж, где в 1848 г. получил степень доктора наук. С 1855 г. он вошел в состав экзаменационной комиссии по приему студентов в Политехническую школу. Он покончил жизнь самоубийством в 1861 г.

[2]) См. Ann. chim., т. 12, стр. 385—454, Paris, 1844.

испытаний, выше значения, определяемого статическими испытаниями, причем, как он замечает, этой разницей можно воспользоваться для установления соотношения между удельной теплотой при постоянном давлении и удельной теплотой при постоянном объеме. Его исследования о влиянии температуры на величину модуля привели к установлению общего правила постоянного снижения модуля растяжения при повышении температуры в интервале —15÷+200° С. Однако сталь, как выяснилось, представляет собой исключение из этого правила, поскольку ее модуль возрастает с температурой в интервале —15°÷+100° С, а затем начинает падать, так что при 200° С он получается меньшим, чем при 100°, а иногда и меньшим, чем при комнатной температуре. Опыты также показали, что предела упругости как реальной физической величины не существует, и Вертгейм принимает за предел упругости напряжение, при котором относительное остаточное удлинение при растяжении составляет 0,00005.

Впоследствии Вертгейм в сотрудничестве с Шевандье провел обширную серию испытаний стекла[1]) и разных сортов древесины[2]). В 1848 г. он представил в Академию мемуар о равновесии твердых однородных тел («Mémoire sur l'équilibre des corps solides homogenes)[3]). Следуя совету Реньо (Regnault), он применил для испытаний стеклянные и металлические цилиндрические трубы и находил изменения внутренних объемов труб при осевом удлинении. Таким путем могут быть определены поперечные укорочения материала труб. Результаты опытов не подтверждали теоретического значения коэффициента Пуассона, равного 1/4, и это расхождение можно было объяснить лишь введением двух упругих постоянных для изотропных материалов. Все же Вертгейм продолжал придерживаться теории единственной постоянной и предложил принять для коэффициента Пуассона значение, равное 1/3, хотя это значение и не поддавалось обоснованию теорией и не обеспечивало достаточно удовлетворительного согласия теории с его опытами.

Вертгейм интересовался электроупругими и магнитоупругими свойствами материалов и провел большую экспериментальную работу по изучению влияния электрического тока на модуль растяжения проволочного проводника. Он изучил также и влияние продольных деформаций железного стержня на электрический ток в окружавшем его соленоиде.

Изучая оптические свойства упругих тел[4]), Вертгейм составил подробнейшую таблицу цветов, с помощью которой он смог опре-

---

[1]) Ann. chim., т. 19, стр. 129—138, Paris, 1847.
[2]) Mémoire sur les propriétés mécaniques du bois, Paris, 1848.
[3]) Ann. chim., т. 23, стр. 52—95, Paris, 1848.
[4]) Ann. chim. et phys., т. 40, стр. 156—221, Paris, 1854.

делять напряжения в растянутом прозрачном брусе. Он нашел, что если материал не следует в точности закону Гука, то двойное лучепреломление пропорционально деформации, а не напряжению.

Нужно, наконец, упомянуть и о весьма обширном мемуаре Вертгейма о кручении[1]). Он подвергнул испытаниям цилиндры круглого и эллиптического сечений и призмы прямоугольного сечения, а в некоторых случаях также и трубчатые образцы. Материалами были сталь, железо, стекло, древесина. Из этих испытаний Вертгейм вновь пришел к заключению, что коэффициент поперечного укорочения (коэффициент Пуассона) равен не 1/4, а ближе к 1/3. Измеряя внутренний объем труб, подвергнутых кручению, Вертгейм нашел, что он уменьшается с увеличением угла кручения (как это и должно быть, если учесть, что продольные волокна принимают форму винтовых линий). Обсуждая результаты опытов по кручению брусьев эллиптического и прямоугольного профилей, Вертгейм, не зная о теории Сен-Венана, приходит, однако, в своих выводах к хорошему совпадению с этой теорией. Вместо теории Сен-Венана он применяет неудовлетворительную формулу Коши (см. стр. 135), вводя в нее поправочный коэффициент. Исследуя крутильные колебания, Вертгейм обратил внимание на то, что при малых амплитудах частота колебаний получается выше и что при весьма малых напряжениях величина модуля упругости может оказаться более высокой, чем при больших напряжениях.

Хотя работа Вертгейма внесла много нового в уяснение физических основ упругости, фундаментальный вопрос о числе упругих постоянных остался в ней все же нерешенным. Сколько бы опыт ни свидетельствовал о том, что коэффициент Пуассона отличается от 1/4, для экспериментатора всегда оставалась возможность сослаться на то, что использованный в образце материал не был вполне изотропным.

Другим физиком того же периода, проделавшим большую работу в области экспериментального изучения упругости, был А. Т. Купфер (A. T. Kupffer, 1799—1865)[2]). В 1849 г. русское

---

[1]) Ann. chim. et phys., т. 50, стр. 195—321, 385—431, Paris, 1857.

[2]) Купфер Адольф Теодор, уроженец г. Митавы, высшее образование получил в Дерптском (Юрьевском), Берлинском и Геттингенском университетах; с 1821 г. работал в Петербурге; в 1823—1828 гг.—профессор Казанского университета по кафедрам химии и физики, с 1828 г.—член-корреспондент Петербургской Академии наук, с 1828 г.—ординарный академик по минералогии, с 1841 г.—по физике. В 1849 г. организовал в Петербурге Главную физическую обсерваторию, которой руководил до своей смерти. Автор многочисленных трудов по физике, минералогии, кристаллографии, химии, метрологии. Биографические данные см. «Зап. Имп. Ак. наук», т. II, кн. 2, 1865, стр. 298, «Празднование 50-летнего юбилея Ник. Гл. физ. обс.», СПб., 1901, стр. 29; Р ы к а ч е в М., Истор. очерк Гл. физ. обс., СПб., 1899, гл. 3 (приведена обширная библиография трудов Купфера) и др. (*Прим. ред.*)

правительство основало Центральную лабораторию весов и мер, и Купфер был назначен директором этого учреждения. Физические свойства металлов интересовали его, поскольку они могли оказывать влияние на эталоны измерений, и поэтому проведенные им в этом направлении работы были опубликованы в годичных отчетах Центральной физической обсерватории за 1850—1861 гг. Тодхентер и Пирсон[1]) дают им следующую оценку: «По определению вибрационных постоянных упругости и температурного эффекта никогда еще, вероятно, не было проведено более тщательных и исчерпывающих опытов, чем выполненные Купфером».

Купфер начал с испытаний на кручение, по которым он определил модуль сдвига G. Умножая G на 5/2, он должен был бы в соответствии с гипотезой одной упругой постоянной получить модуль растяжения E, однако найденные им таким путем значения сильно отличались от результатов испытаний на растяжение или изгиб. Этот результат, таким образом, не подтвердил гипотезы одной постоянной.

Изучая крутильные колебания, он исследовал механизм их затухания и показал, что оно лишь отчасти может быть приписано сопротивлению воздуха, в остальном же должно быть отнесено на счет вязкости материала. Он впервые поставил вопрос об упругом последействии и показал, что в стальных брусьях прогиб не исчезает немедленно по удалении нагрузок, но уменьшается постепенно в течение времени, исчисляемого несколькими днями с момента разгрузки. Купфером отмечено, что это упругое последействие приводит также и к затуханию колебаний. Оно не пропорционально деформации, так что колебания при этом перестают быть фактически изохронными.

С большой тщательностью изучил Купфер вопрос о влиянии температуры на модуль упругости, представив в 1852 г. работу[2]) на эту тему в Российскую Академию наук. Им установлено, что для малых изменений температуры (от $t=16{,}25°$ С до $31{,}25°$ С) модуль растяжения может быть представлен формулой

$$E_{t_1} = E_t\,[1 - \beta\,(t_1 - t)],$$

где β—константа, зависящая от материала. С повышением температуры, как выяснено им же, затухание, вызванное последействием, возрастает. За эту работу Купфер получил в 1855 г. премию, учрежденную Геттингенским королевским обществом.

---

[1]) См. их историю: History..., т. 1, стр. 750.

[2]) См. Mém. acad... St. Petersburg sci. math. et phys., т. 6, стр. 397—494, СПб., 1857. (*Прим. авт.*) Эта статья называлась «Ueber den Einfluss der Wärme auf die elastische Kraft der festen Körper und inbesondere der Metalle. (*Прим. ред.*)

В 1860 г. вышла из печати книга Купфера, в которой были собраны его многочисленные экспериментальные исследования по изгибу и поперечным колебаниям брусьев[1]). В предисловии к ней автор обращает внимание на то большое значение, которое должно получить существование общегосударственного института по изучению упругих свойств и прочности строительных материалов. По его мнению, путем печатания информационных материалов о свойствах металлов, производимых различными промышленными фирмами, подобное учреждение оказало бы чрезвычайно большую помощь инженерам-проектировщикам. Такая деятельность должна была бы оказать благотворное влияние и на улучшение качества материалов, поскольку она должна побудить производящие их фирмы стремиться к улучшению своей продукции с целью расширения рынка сбыта.

Физические основы теории упругости составляли также и круг научных интересов Франца Неймана (Franz Neumann) и его учеников в Германии; определение упругих постоянных явилось целью также и их опытов. Из переписки[2]) между Нейманном и Купфером мы узнаем, что, по мнению первого, отношение между продольным удлинением и поперечным укорочением не сохраняется постоянным, но зависит от природы материала. Нейманн первый стал укреплять маленькие зеркальца на гранях образцов прямоугольного сечения при испытаниях на изгиб и с их помощью показал, что поперечные сечения принимают при этом трапецеидальную форму. По углу относительного поворота двух боковых граней балки можно определить коэффициент Пуассона.

Кирхгофф (Kirchhoff), ученик Нейманна, производил свои испытания на консолях из круглой стали[3]). Поперечную нагрузку на их свободных концах он укреплял с некоторым эксцентриситетом так, что консоль подвергалась при этом одновременно изгибу и кручению. Угол кручения, а также угол, образуемый касательной к оси консоли на ее свободном конце с горизонталью, измерялись оптическим способом, с помощью зеркальца, укрепленного на свободном конце консоли. Из этих весьма тщательно выполненных испытаний Кирхгофф нашел, что коэффициент Пуассона для стали равен 0,294, для латуни же он дал значение 0,387, сде-

---

[1]) Recherches, expérimentales sur l'élasticité des métaux faites à l'observatoire physique central de Russie, т. 1, стр. 1—430, СПб., 1860. (*Прим. авт.*) Эта книга была издана в Петербурге одновременно на французском и русском языках, ее русское название «Опытные исследования упругости металлов, произведенные в Русской центральной физической обсерватории и напечатанные по распоряжению Горного управления», т. 1, СПб., 1860. Результаты публиковались также частями в отчетах Гл. физ. обс. в «Уч. зап. АН по I и III отд.» за 1854—1858 гг. (*Прим. ред.*)

[2]) «History...», т. II, стр. 507.

[3]) Pogg. Ann. Physik u. Chem., т. 108, 1859; см. также Ges. Abhandl., стр. 316.

лав, однако, оговорку, что примененные им латунные стержни нельзя было считать изотропными[1]).

Все эти экспериментальные результаты находились в противоречии с гипотезой одной упругой постоянной для изотропных тел. К тому же эта гипотеза во все возрастающей степени обнаруживала свое несоответствие с господствовавшими взглядами на строение материи. В связи с этим в последующем развитии теории упругости восторжествовал предложенный Грином и ставший ныне общепринятым метод вывода соотношений между напряжениями и деформациями из энергетических соображений.

49. Первые работы по теории упругости в Кембриджском университете

Блестящие достижения французских математиков Политехнической школы оказали большое влияние на развитие математического образования в других странах, и нет сомнения, что они явились важным фактором в возрождении научной активности Кембриджского университета, которым была отмечена первая четверть XIX столетия[2]). В 1813 г. группа кембриджских ученых во главе с Чарльзом Бэббэджем (Charles Babbage, 1792—1871), Джорджем Пикоком (George Peacock, 1791—1858) и Джоном Фредериком Гершелем (John Frederick Herschel, 1792—1871) образовала Аналитическое общество. Они проводили собрания, читали доклады и вели известную в истории науки борьбу за введение в Кембридже принятых на континенте обозначений в анализе бесконечно малых[3]). Чтобы облегчить введение этих обозначений, Бэббэдж (в сотрудничестве с Гершелем и Пикоком) подготовил к изданию английский перевод французской книги С. Ф. Лакруа (S. F. Lacroix, 1816) по дифференциальному исчислению. Несколько позднее, в 1820 г., вышло «Собрание примеров по применению дифференциального и интегрального

---

[1]) Обстоятельные опыты по определению коэффициента Пуассона для различных сортов стали были произведены в Петербурге в 1865—1866 гг. одним из учеников Кирхгоффа, впоследствии профессором механики Петербургского университета, Михаилом Федоровичем Окатовым (1829—1901). Результаты этих опытов приведены в докторской диссертации М. Ф. Окатова «Теория равновесия и движения упругой проволоки...», СПб., 1867. Ему же принадлежат: «Общая теория равновесия упругих твердых тел и разделение их на классы» (магистерская диссертация), СПб., 1865, «Приложение второй основной теоремы механической теории тепла к упругому твердому телу» в книге «Термостатика», СПб., 1871, стр. 147—168. Биографические данные— см. «Биограф. словарь проф. и преп. СПб. университета», т. II, СПб., 1898, стр. 77. (*Прим. ред.*)

[2]) См. R o u s e B a l l W. W., History of the study of mathematics at Cambridge, Cambridge, 1889.

[3]) Интересные сведения о Кембридже того времени можно найти в книге: B a b b a g e, Passages from the life of a philosopher, 1864.

исчисления» Пикока («Collection of examples of the application of the differential and integral calculus»).

Во время своей поездки по Европе Бэббэдж установил научные связи с многими учеными. Осенью 1828 г. он присутствовал на годичном конгрессе немецких естествоиспытателей и написал о нем отчет проф. Д. Брьюстеру (D. Brewster). Позднее Брьюстер, в сотрудничестве с Джоном Робинсоном (John Robinson) и Уилльямом Харкоуром (William V. Harcourt), предпринял организацию подобного же общества в Англии, получившего наименование «Британской ассоциации содействия развитию науки» («British association for advancement of science»). На втором съезде этой ассоциации Бэббэдж выступал с энергичным призывом: «Обратите внимание на то, чтобы теоретическую науку сблизить с практическими знаниями, поскольку от этого зависит благосостояние народов». Он сам интересовался практическим применением науки, о чем свидетельствует его участие в обсуждении различных технических вопросов, связанных с работой английских железных дорог. Им впервые была поставлена экспериментальная работа на Большой западной железной дороге и был сооружен специальный опытный вагон-лаборатория, оснащенный приборами для измерения силы тяги локомотива и скорости поезда. Его интересовало строительство больших трубчатых мостов, и он переписывался с Фейрбейрном по вопросам экспериментирования с моделями труб.

Уилльяму Уэвеллу (William Whewell, 1794—1866) и Джорджу Биддэллу Эйри (George Biddell Airy, 1801—1892) Кембридж обязан первыми научными работами по прикладной математике. Уэвелл, кончив курс в 1816 г., уже в 1817 г. был избран членом колледжа (Trinity College) и начал преподавать механику. В 1819 г. вышла его книга «Элементарный учебник по механике» («An elementary treatise on mechanics»). Эта книга содействовала распространению достижений континентальных математиков в Кембридже, поскольку Уэвелл широко пользовался в ней дифференциальным и интегральным исчислением. В дальнейшем Уэвелл выпустил несколько книг более серьезного содержания. Свою элементарную статику в упомянутой книге он дополнил «Аналитической статикой» (1833), в состав которой вошла глава о равновесии упругого тела, включавшая элементарную теорию изгиба балок со ссылками на труды Ходкинсона и Барлоу. Чтобы дать студентам некоторое представление о творчестве Ньютона, Уэвелл издал в 1832 г. книгу «О свободном движении точек и о всемирном тяготении с включением главных предложений I и III книг «Начал» («On the free motion of points and on universal gravitation, including the principal propositions of books I and III of the Principia»). Двумя годами позже вышла его книга «О движении точек связанных и оказывающих сопротивление и о движении твердого тела» («On the motion of points constrained and resisted and on the motion of a rigid body»). Наибольшей известностью пользуются следующие книги Уэвелла: «История индуктивных наук» («History of the inductive sciences», 1837) и «Философия индуктивных наук» («The philosophy of the inductive sciences», 1840). Первая из них была переиздана в Соединенных Штатах в 1859 г., а также переведена на немецкий и французский языки[1]).

Уэвелл интересовался также и постановкой высшего образования. Взгляды, выраженные в изданной им книге «О принципах английского университетского образования» («On the principles of english university education», 1837), как можно заметить, легли в основу математического образования в Кембриджском университете [2]).

Джордж Биддэлл Эйри поступил в Кембриджский Тринити колледж в 1819 г. Он зарекомендовал себя блестящим студентом и окончил курс в 1823 г. с отличием первой степени по математике [3]). В 1826 г. он был назначен профессором математики и опубликовал книгу «Математические трактаты о теориях Луны и планет, фигуре Земли, прецессии, нутации и вариационном исчислении» («Mathematical tracts on the Lunar and planetary theories, the figure of the earth, precession and nutation and the calculus of variations»). Во втором ее издании (1828) была добавлена глава по волновой теории света в оптике. Эта книга получила широкое использование в Кембридже как введение к применениям математики в решении задач астрономии и теоретической физики.

Окидывая взглядом этот период своей деятельности в Кембридже, Эйри вспоминает в автобиографии (стр. 73): «На протяжении многих лет лекций по экспериментальной философии (механике, гидростатике, оптике) не читалось вовсе. К моему энергичному начинанию университет в целом относился, как мне думается, весьма благосклонно, но были еще значительные трудности: для лекций не было принято постоянного расписания, не было установлено определенных дней и часов, не было отведено помещений». Но какой бы области теоретической физики ни касалось дело, Эйри всегда находил повод для использования в ней математики и стоял в оппозиции к тем, кто хотел изучать исключительно лишь чистую математику. В письме к Стоксу (1868) по поводу премии имени Смита он пишет: «Я ценю университет

---

[1]) Имеется и русский перевод, выполненный Антоновичем. (*Прим. перев.*)

[2]) Много интересных сведений об Уэвелле и о Кембриджском университете в эпоху Уэвелла можно найти в книге Тодхентера: T o d h u n t e r I., William Whewell, Master of Trinity College, Cambridge, 1876.

[3]) Автобиография сэра Джорджа Биддэлла Эйри была издана в 1896 г. Вильфридом Эйри: A i r y Wilfrid (edit.), The autobiography of Sir Biddle Airy.

за ту благороднейшую миссию, которую он выполняет, неся математическое просвещение в широкие круги общества. Несмотря на вред, нанесенный слишком механическим использованием анализа, сам по себе этот анализ сохраняет за собой достоинство высочайшей точности. И нигде преподавание его не поставлено на столь высоком уровне, как в Кембридже. Равным образом и в отношении прикладных наук, за которые здесь взялись, наконец, по-настоящему и из которых я назову сейчас лишь астрономию, преподавание ведется также с должной полнотой и тщательностью. При всем том, однако, замечается и чрезмерно сильная тенденция к культивированию некоторых математических тем, в полном отрыве их от всего остального, учеными, не дающими себе труда взглянуть на мир науки в целом и увидеть, в чем он собственно нуждается».

В 1828 г. Эйри был избран профессором астрономии, и с тех пор бо̀льшая часть его сил поглощалась работой по организации Кембриджской обсерватории и астрономическими занятиями. В 1835 г. он получил назначение на должность королевского астронома с местом пребывания в Гринвиче. Но Эйри продолжал поддерживать связь с Уэвеллом и Пикоком и его взгляды на математическое образование по-прежнему проводились в жизнь в Кембридже.

Эйри проявлял неизменный интерес к применениям математики в решении технических задач. Он принимал непосредственное участие в сооружении больших трубчатых мостов и показал Фейрбейрну, каким образом можно определять необходимые размеры поперечных сечений этих мостов по результатам, полученным из испытаний моделей (стр. 193). Занявшись теорией изгиба балок, он представил в 1862 г. доклад на эту тему в Королевское общество[1]). Рассматривая балку прямоугольного сечения как объект двумерной задачи, Эйри получает дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}=0 \tag{a}$$

и показывает, что оба эти уравнения будут удовлетворяться, если компоненты напряжений будут получены через некоторую функцию φ следующим образом:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \qquad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}, \qquad \sigma_y=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \tag{b}$$

Эйри принимает функцию φ в виде полинома и подбирает коэффициенты в ней так, чтобы удовлетворялись граничные условия. Но он не предусматривает того, что функция φ должна удовлетворять также и уравнению совместности; поэтому его исследование

[1]) Phil. Trans., т. 153, 1863.

не полно. Тем не менее здесь впервые применяется функция напряжений, и этот факт можно расценивать как возникновение чрезвычайно полезного метода решения вопросов теории упругости.

50. Джордж Габриэль Стокс

Золотой век теоретической физики в Кембридже начался научными исследованиями Джорджа Габриэля Стокса[1]) (George Gabriel Stokes, 1819—1903). Стокс родился в многолюдной семье сельского священника в Скрине, деревушке, расположенной к югу от Слиго, в Ирландии. Начальное обучение по арифметике он получил от местного псаломщика, а в возрасте 13 лет был послан в приходскую школу Уолла (Rev R. H. Wall) в Дублине. Там его приемы решения геометрических задач обратили на себя внимание преподавателя математики. В 1835 г. он поступил в Бристольский колледж, где изучал математику под руководством Фрэнсиса Ньюмэна и сдал выпускной экзамен в 1837 г. с наградой «за выдающиеся способности в математике».

Джордж Габриэль Стокс.

В том же году Стокс поступил в колледж Пемброка в Кембридже. О постановке в Кембридже учебной работы в то время сохранились следующие воспоминания Стокса[2]): «В ту пору поступавшие в университет молодые люди не читали обычно так много по математике, как это вошло в обычай в настоящее время; будучи принят в колледж, я еще не начинал дифференциального исчисления и лишь незадолго перед тем прочел аналитическую геометрию конических сечений. На втором году пребывания в колледже я занимался под руководством частного преподавателя мистера Хопкинса (Hopkins), пользовавшегося почетом по той причине, что весьма многие из его учеников занимали первые места на университетских экзаменах за отличия по математике. В 1841 г. я занял первое место среди своих однокурсников как лауреат премии Смита по математике, за

[1]) Stokes G. G., Memoirs and scientific correspondence (Larmor Joseph ed.), Cambridge, 1907. Краткая биография Стокса, написанная лордом Рэлеем, приводится в V томе трудов Стокса: Stokes G. G., Mathematical and physical papers, vol. V.

[2]) См. статью Глэйзбрука (Glazebrook) в Good words, 1901, май.

что был почтен тогда же избранием в члены этого колледжа. Получив степень, я оставался в колледже и взял частных учеников. Но мне хотелось испробовать свои силы в самостоятельной научно-исследовательской работе, и, следуя совету, поданному мне мистером Хопкинсом, когда я работал над своей диссертацией, я остановился на гидродинамике, предмете, не пользовавшемся тогда в Кембридже широкой популярностью, несмотря на то, что Джордж Грин, внесший столь ценный вклад в эту и в другие области знания, продолжал оставаться в университете до самой своей смерти... В 1849 г., в возрасте 30 лет, я был избран профессором математики и прекратил работу с частными учениками. Дирекция обсерватории в то время числилась за кафедрой, а ее руководитель—профессор Чэллис (Challis) читал обычно лекции по гидродинамике и оптике, следуя традиции своего предшественника Эйри. После моего избрания Чэллис, пожелавший разгрузиться от своих лекций по гидростатике и оптике, чтобы освободить себя для астрономии, предмета более родственного ему по занимаемой им в обсерватории должности, договорился со мной о том, чтобы я взял на себя курс лекций, который раньше вел он сам».

Первые печатные труды Стокса посвящены гидродинамике. Но в своей статье «О теориях внутреннего трения жидкостей, находящихся в состоянии движения, и о равновесии и движении упругих тел»[1]) («On the theories of the internal friction of fluids in motion, and on the equilibrium and motion of elastic solids»), представленной в 1845 г. Кембриджскому философскому обществу, он уделяет значительное внимание выводу основных дифференциальных уравнений упругости для изотропного тела. Стокс полагает, что теория упругости должна быть основана на результатах физических опытов, а не на теоретических предположениях о молекулярном строении твердых тел. Он замечает: «Способность твердого тела быть приведенным в состояние изохронных колебаний свидетельствует о том, что давления, вызванные малыми смещениями, зависят от однородных функций этих одномерных смещений[2]). Я полагаю, сверх того, что в соответствии с общим принципом наложения малых величин эти вызванные различными смещениями давления налагаются одно на другое и что, следовательно, давления являются линейными функциями смещений». Исходя из этих допущений, он устанавливает в конечном счете уравнения равновесия, содержащие две упругие постоянные. Он указывает на индийский каучук[3]) и желатин как на вещества,

[1]) См. S t o k e s G. G., Mathematical and physical papers, t. I, стр. 75.

[2]) Мы уже видели (стр. 31), что еще Гук указал на изохронные колебания как на физический факт, подтверждающий закон пропорциональности напряжений и деформаций.

[3]) Здесь он ссылается на мемуар Ламе и Клапейрона (см. стр. 141).

для которых отношение поперечного укорочения к осевому удлинению сильно отличается от предсказанного гипотезой одной упругой постоянной. Далее он описывает опыты (охватывающие растяжение, кручение и равномерное сжатие) для определения соотношения между двумя упругими постоянными E и G для любого конкретного материала. Он утверждает: «Существуют два различных вида упругости: одна упругость—это та, в силу которой тело, подвергнутое равномерному сжатию, стремится восстановить свой первоначальный объем; другая—та, в силу которой тело, нагруженное некоторым способом, не зависящим от сжатия, стремится принять свою первоначальную форму». Рассматривая этот второй вид упругости, Стокс дает интересное сопоставление твердых тел с вязкими жидкостями. Он замечает: «Многие в высокой степени упругие вещества, как железо, медь и т. п., являются все же заметно пластичными. Пластичность свинца выше, чем железа или меди, упругость же его, как это следует из опытов, ниже. Вообще, вероятно, чем больше пластичность вещества, тем менее его упругость. По мере же дальнейшего увеличения его пластичности и уменьшения упругости твердое тело переходит в состояние вязкой жидкости. По-видимому, между твердым телом и вязкой жидкостью нет резкой границы».

От своих первоначальных исследований по гидродинамике Стокс перешел к оптике. Рассматривая светоносный эфир как однородную некристаллическую упругую среду (подобную упругому твердому телу), он вновь встретился здесь с уравнениями теории упругости. В статье «О динамической теории дифракции»[1]) («On the dynamical theory of diffraction») он приводит следующее заключение: «Эти уравнения можно получить, предположив, что среда состоит из мельчайших частиц—молекул, но принятие этой гипотезы отнюдь не обязательно для вывода этих уравнений; к последним можно прийти и в том случае, если рассматривать среду как непрерывную».

В этой работе он доказывает две теоремы, сыгравшие большую роль в теории колебаний упругих тел. Рассмотрим эти теоремы в их применении к простейшему случаю системы с одной степенью свободы. Смещение x из положения равновесия может быть в этом случае представлено выражением

$$x = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt. \tag{a}$$

Мы видим, что часть этого выражения, зависящая от начального смещения x_0, может быть получена из части, зависящей от начальной скорости, путем дифференцирования ее по t и замены $\dot{x}_0$ на x_0. Это свойство сохраняется и в самом общем случае, на

[1]) Stokes G. G., Mathematical and physical papers, т. 2, стр. 243.

основании чего Стокс делает заключение, что в упругой среде «часть возмущения, имеющая своей причиной начальные смещения, может быть получена из части, зависящей от начальных скоростей, дифференцированием по t и заменой произвольных функций, представляющих начальные скорости, функциями, представляющими начальные смещения». Таким путем задача нахождения смещений приводится к более узкой задаче нахождения смещений, зависящих лишь от начальных скоростей.

Вторая теорема касается возмущения, производимого данной переменной силой, действующей в данном направлении и приложенной в данной точке среды. Рассматривая вновь систему с одной степенью свободы и обозначая возмущающую силу на единицу массы системы через $f(t)$, находим, что вследствие импульса $f(t)\,dt$, сообщенного системе в момент времени t, произойдет приращение скорости $d_a\dot{x}=f(t)\,dt$. В таком случае общий вид второго члена в выражении (a) дает нам право заключить, что смещение в момент времени t_1, вызванное приращением скорости $f(t)\,dt$, сообщенным в момент времени t, равно

$$\frac{f(t)\,dt}{p}\sin p\,(t_1-t).$$

Рассматривая теперь действие возмущающей силы за интервал времени от $t=0$ до $t=t_1$, получим[1]) выражение для смещения системы в момент времени t_1:

$$x=\frac{1}{p}\int\limits_0^t f(t)\sin p\,(t_1-t)\,dt. \tag{b}$$

Аналогичное рассуждение может быть применено и к общему случаю; смещения, произведенные возмущающей силой, поддаются определению во всех случаях, когда свободные колебания системы известны.

В том же самом 1849 г., когда Стокс представил свою работу по дифракции, он провел и исследование динамических прогибов мостов, о котором говорилось выше (стр. 213).

В 1854 г. Стокс стал секретарем Королевского общества. Обязанности по этой новой должности отняли у него много сил, и

---

[1]) Идея подразделения времени действия непрерывно действующей возмущающей силы на бесконечно малые интервалы и определения вынужденного движения путем суммирования движений, совершенных за каждый из этих интервалов, была реализована впервые, насколько об этом можно судить, Дюамелем (M. Duhamel) в мемуаре о колебаниях произвольной системы материальных точек: D u h a m e l, Mémoire sur les vibrations d'un système quelconque des points matériels, J. école polytech. (Paris), тетрадь 25, стр. 1—36, 1834. Она была использована Сен-Венаном в его исследовании вынужденных колебаний стержней. См. выполненный Сен-Венаном перевод книги Клебша, стр. 538.

лорд Рэлей в посвященном Стоксу некрологе замечает: «От внимания читателя собрания его трудов едва ли ускользнет то резко выраженное снижение эффективности его научной продукции, которым было отмечено последовавшее за этим назначением время. Простое размышление подсказывает, что люди науки должны заниматься научной работой и остерегаться соблазна возлагать на себя тяжелые административные обязанности, во всяком случае до наступления того срока, когда они уже сообщат миру свою самую важную весть». Касаясь экспериментальной работы Стокса и его лекции, лорд Рэлей пишет: «Он выполнял свои эксперименты с помощью самого непритязательного оснащения[1]). Многие из его открытий были сделаны в узком коридоре позади кладовой его дома, в оконных ставнях которого он проделал щель, а на кронштейне разместил кристаллы и призмы. Почти так же обстояло дело и с его лекциями. На протяжении многих лет он читал курс физической оптики, который посещался почти всеми без исключения кандидатами на ученую степень математика. Во всяком случае для некоторых из них было наслаждением учиться у мастера своего дела, способного внести в свои лекции свежий материал, прямо с наковальни».

Стокс проявлял всегда живой интерес к вопросам постановки преподавания теоретических наук в Кембридже и часто принимал участие в качестве экзаменатора на математических соревнованиях. После того как он стал профессором математики, в его обязанности вошел отбор конкурсных работ на премию Смита. Эти конкурсные работы вместе с экзаменационными задачами вошли в виде приложения в состав пятого тома собрания его математических трудов («Mathematical Papers»).

С 1885 по 1890 г. Стокс был президентом Королевского общества. Замечательнейшим свидетельством того почета, которым пользовался Стокс среди своих современников—людей науки, было чествование юбилея его профессорской деятельности. Много выдающихся ученых со всех частей света прибыло в Кембридж, чтобы засвидетельствовать ему свое уважение.

51. Барре де Сен-Венан

Сен-Венан (Barré de Saint-Venant, 1797—1886) родился в замке Фортуазо (департамент Сены и Марны, Франция[2])). Его математи-

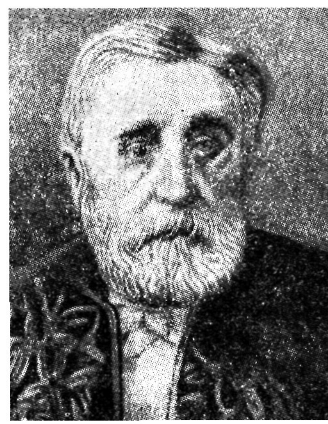
---

[1]) В Кембридже в описываемую эпоху физической лаборатории не было. Организация знаменитой лаборатории Кавендиша была осуществлена Максвеллом в 1872 г.

[2]) Биография Сен-Венана, составленная Буссинеском (I. Boussinesq) и Фламаном (Flamant), опубликована в Ann. ponts et chaussées, 6-я серия, т. XII, стр. 557, 1886. (*Прим. авт.*) На русском языке см. Борзов, И. П., Памяти Сен-Венана, СПб., 1888. (*Прим. ред.*)

ческие дарования были замечены очень рано, и он получил весьма тщательную подготовку от своего отца, хорошо известного специалиста по сельскохозяйственной экономике. Потом он учился в лицее Брюгге, а в 1813 г., в возрасте 16 лет, выдержав конкурсные экзамены, поступил в Политехническую школу. Здесь он обнаружил свои выдающиеся способности и стал первым в своем классе.

Политические события 1814 г. оказали большое влияние на жизненный путь Сен-Венана. В марте этого года союзные армии подходили к Парижу и студенты Политехнической школы были мобилизованы. Когда 30 марта артиллерия направилась к городским укреплениям, Сен-Венан, бывший первым сержантом отряда, вышел из его рядов[1]), воскликнув: «Моя совесть запрещает мне сражаться за узурпатора...». Остальные студенты выразили глубокое возмущение его поступком, и Сен-Венан был объявлен дезертиром, причем ему навсегда было запрещено продолжать занятия в Политехнической школе. Знаменитый математик Шаль (Chasles), один из школьных товарищей Сен-Венана, отозвался о нем впоследствии в следующих беспристрастных выражениях: «Когда дело касалось его совести, то, по собственным словам Сен-Венана, вы могли резать его на куски, но ничуть этим не повлиять на его убеждения. Обвинение в малодушии абсурдно. Как раз напротив, он был очень отважен и проявил 30 марта в сто раз больше решимости и мужества, возбудив негодование своих командиров и презрение своих товарищей, чем если бы он подставил себя под штыки казаков»[2]). В течение восьми лет, последовавших за этим инцидентом, Сен-Венан работал в качестве помощника в пороховом производстве. В 1823 г. правительство разрешило ему поступить без экзамена в Школу мостов и дорог. Здесь в течение двух лет Сен-Венан переносил бойкот других студентов, не разговаривавших с ним и не садившихся с ним на одну скамью. Он игнорировал эти враждебные действия, присутствуя на всех лекциях[3]) и закончив Школу первым по своему курсу. Мы не знаем, насколько все это отразилось на дальнейшей карьере Сен-Венана,



Барре де Сен-Венан.

---

[1]) См. B e r t r a n d, J. Éloges académiques, Новая серия, стр. 42, 1902.

[2]) См. там же.

[3]) В это время Сен-Венан слушал лекции Навье, став горячим поклонником таланта этого крупного инженера и ученого.

но, как свидетельствуют факты, возвышение его общественного положения в сфере практической деятельности как инженера протекало не столь быстро, как этого следовало бы ожидать при его выдающихся способностях, его энергии и его большой любви к трудной работе. В то время как об исключительно важных научных достижениях Сен-Венана ничего не сказано в Британской энциклопедии и очень мало в Большой французской энциклопедии, на титульной странице «Истории теории упругости» Тодхентера и Пирсона мы читаем: «Памяти Барре де Сен-Венана, крупнейшего создателя современной теории упругости, авторы посвящают этот свой труд».

По окончании Школы мостов и дорог Сен-Венан работал некоторое время на строительстве канала в Ниверпэ (1825—1830), а затем на канале в Арденнах. Свои досуги он посвящал теоретическим занятиям и в 1834 г. представил в Академию наук две работы, в одной из которых обсуждались некоторые теоремы теоретической механики, другая же развивала тему гидродинамики. Эти работы принесли ему известность во французском ученом мире и в 1837/38 учебном году на время болезни профессора Кориолиса его пригласили для чтения лекций по сопротивлению материалов в Школе мостов и дорог. Эти лекции были литографированы[1]); они представляют теперь большой исторический интерес, поскольку в них упоминается о некоторых проблемах, послуживших автору впоследствии темами научных исследований. В ту эпоху самой серьезной книгой по сопротивлению материалов были лекции Навье «Resumé des leçons...». Но хотя не кто иной, как сам Навье, вывел основные уравнения теории упругости, он не использовал их в своем курсе, а излагал теорию растяжения, сжатия, изгиба и кручения призматических стержней, допуская, что поперечные сечения остаются плоскими в процессе доформирования. Сен-Венан первый попытался довести до понимания студентов новейшие открытия теории упругости. Во введении к своему курсу он обсуждает гипотезы, касающиеся молекулярного строения твердых тел и сил, действующих между молекулами. Пользуясь этой гипотезой, он устанавливает понятие напряжения. Он говорит о касательном напряжении и деформации сдвига и показывает, что растяжение в одном направлении в сочетании с равным ему сжатием в перпендикулярном направлении эквивалентно чистому сдвигу. Обращаясь к изгибу балки, Сен-Венан останавливает внимание на касательных напряжениях; не имея, однако, никаких данных о том, как они распределены по поперечному сечению, он принимает гипотезу равномерного их распределения. Сочетая эти касательные напряжения с растягивающим

[1]) С экземпляром этих лекций можно ознакомиться в библиотеке парижской Школы мостов и дорог.

и сжимающим напряжениями в продольных волокнах балки; он вычисляет главные напряжения. Обсуждая проблему выбора безопасных размеров балки, он полагает, что критерием для назначения допускаемых напряжений следует признать наибольшую деформацию.

В то время теория упругости не располагала еще строгими решениями задач практического значения и потому нередко можно было встретить инженеров, которые, не ожидая многого от таких теоретических исследований, предпочитали назначать безопасные размеры сооружений, применяя эмпирические формулы[1]). Сен-Венан отказывается верить в то, чтобы таким путем можно было достигнуть какого-либо прогресса в технике, и придерживается того мнения, что развитие нашего знания достижимо лишь в сочетании экспериментальной работы с теоретическим исследованием.

Читая лекции в Школе мостов и дорог, Сен-Венан предпринял одновременно практическую работу для Парижского муниципалитета. Некоторые из его предложений не были, однако, приняты, и в знак протеста он вовсе отказался работать для города. Вскоре Сен-Венан заинтересовался гидравликой и ее применением в сельском хозяйстве. Он выпустил несколько печатных работ по этому вопросу, за что был награжден золотой медалью Французского агротехнического общества. Два года (1850—1852) он читал лекции по механике и Агротехническом институте в Версале. Эти занятия не отвлекли Сен-Венана от излюбленной им работы, и он продолжал вести одновременно свои исследования по теории упругости. В 1843 г. он представил в Академию мемуар об изгибе кривых брусьев, а в 1847 г. появился его первый мемуар о кручении. Однако в законченной форме его идеи о решении задач кручения и изгиба получили воплощение позднее, в двух знаменитых мемуарах, опубликованных в 1855 и 1856 гг. На них мы остановимся в следующих разделах этой книги.

Сен-Венан интересовался не только исследованием напряжений, производимых статически приложенными силами, но изучал также динамическое действие нагрузок, перемещающихся вдоль балки, или нагрузки, падающей на брус и возбуждающей в нем поперечные или продольные колебания. О некоторых важных работах его, относящихся к этим вопросам, речь будет впереди.

Внимание Сен-Венана было привлечено также и к выводам основных уравнений теории упругости, он активно участвовал в дискуссии о необходимом числе упругих постоянных. Он всегда становился на сторону тех ученых, которые отстаивали точку зрения меньшего числа упругих постоянных, основанной на представлении о молекулярном строении твердых тел. Свои соображения

[1]) См. критику теории изгиба, выдвинутую Вика (стр. 104).

по этому вопросу он излагал во многих статьях, оформив их затем в Приложении V (стр. 645—762) к своему изданию лекций Навье «Resumé des leçons...».

История установления системы уравнений теории упругости весьма подробно изложена Сен-Венаном в двух дополнениях к книге Муаньо «Лекции по аналитической механике (статика)», 1868, стр. 616—723. Муаньо в предисловии к книге сообщает некоторые интересные подробности по поводу этих дополнений. Ему хотелось, чтобы раздел статики упругого тела в этой книге был написан специалистом по теории упругости, но всякий раз, как он обращался за сотрудничеством к тому или иному английскому или германскому ученому, он получал один и тот же ответ: «У Вас самих, рядом с Вами имеется непревзойденный авторитет— Сен-Венан; обратитесь к нему, прислушайтесь к нему, последуйте за ним». Один из этих ученых, Эттингсхаузен (Ettingshausen) добавил: «Ваша Академия наук совершает ошибку, крупную ошибку, не открывая свои двери математику, столь высоко стоящему в мнении компетентнейших знатоков». В заключение Муаньо замечает: «Величайшая математическая слава Франции— Сен-Венан остается тем не менее фатально недооцененным в ее пределах, несмотря на то что популярность его в других странах приобрела грандиозный размах».

В 1868 г. Сен-Венан был избран в члены Академии наук и оставался в ней авторитетнейшим специалистом по механике до конца своей жизни. Он продолжал активно работать в области механики твердого тела, особенно интересуясь проблемами колебаний и пластической деформации. К последней теме его внимание было привлечено экспериментальными исследованиями Треска (Tresca) по пластическому течению металлов под большим давлением[1]). В то время это было совершенно новым полем исследования, и Сен-Венан первый сформулировал основные уравнения теории пластичности и пользовался ими в решении некоторых практических задач.

Сен-Венан не систематизировал свои многочисленные исследования в области теории упругости в виде книг, зато он издал лекции Навье «Resumé des Leçons...» (1864), а также перевел и издал «Теорию упругости твердых тел» Клебша (1883) (Clebsch, Theorie de l'élasticité des corps solides). В первой из этих книг дополнительные статьи и примечания заняли столь большой объем, что на долю первоначального текста Навье пришлась всего лишь $^1/_{10}$ изданного Сен-Венаном тома. Книга Клебша в результате редакционной обработки Сен-Венана выросла в объеме втрое. Эти два труда остаются, вне всякого сомнения, важнейшими первоисточни-

---

[1]) См. Tresca, Mémoires sur l'écoulement des corps solides, Mém. présentés par divers savants, т. 20, 1869.

ками для всех интересующихся историей развития теории упругости и сопротивления материалов.

Сен-Венан не отрывался от научной работы до последних дней своей жизни. 2 января 1886 г. в «Трудах Академии» («Comptes rendus») появилась его последняя статья. 6 января 1886 г. великий ученый умер. Президент Французской Академии, объявляя о кончине Сен-Венана, высказал это в следующих словах: «Старость оказалась милостивой к нашему великому коллеге. Он умер в преклонных годах, без недугов, занятый до последнего часа вопросами, которые были ему дороги, и поддержанный в своем великом уходе теми же надеждами, которые поддерживали Паскаля и Ньютона».

52. Полуобратный метод

В 1853 г. Сен-Венан представил во Французскую Академию свой сделавший эпоху мемуар о кручении. На Комитет, в составе Коши, Понселе, Пьобера и Ламе, эта работа произвела большое впечатление, и Комитет рекомендовал ее издать[1]). В ней содержатся не только разработанная автором теория кручения, но также и все, что было известно к тому времени по теории упругости, с присоединением многочисленных важных дополнений самого автора. Во введении Сен-Венан указывает, что напряжения в любой точке упругого тела легко поддаются вычислению, когда известны функции, представляющие компоненты u, v, w смещений. Подставляя известные функции $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ в выражения (см. стр. 131) для компонент деформации, а именно,

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

получают эти компоненты деформации дифференцированием, после чего компоненты напряжения вычисляются путем использования закона Гука. Получив выражения для компонент напряжения, находят из дифференциальных уравнений равновесия [уравнение (b), стр. 134] и из условий на поверхности [уравнение (a), стр. 134] силы, которые нужно приложить к телу, чтобы вызвать в нем предположенные смещения. Но, поступая таким образом, заявляет Сен-Венан, т. е. задаваясь выражениями для u, v и w, мы располагаем малой вероятностью прийти к решениям,

[1]) Mém. acad. sci. savants étrangers, т. XIV, стр. 233—560, 1855. (*Прим авт.*) На русском языке изложение содержания этого мемуара и истории развития теории кручения стержней впервые было приведено в книге И. П. Борзова «Теория сопротивления призм кручению в связи с развитием общих начал теории упругости», СПб., 1884. (*Прим. ред.*)

имеющим практический интерес. В обратном же случае, т. е. в том случае, когда известны силы, нам приходится интегрировать дифференциальные уравнения равновесия, но имеющиеся в нашем распоряжении методы интегрирования не позволяют решить эту задачу в общем виде.

Учитывая это, Сен-Венан предлагает *полуобратный метод*, следуя которому он задается лишь некоторыми компонентами смещений и некоторыми компонентами сил, определяя недостающие компоненты тех и других так, чтобы при этом удовлетворялись все уравнения теории упругости. По его словам, всякий инженер, руководствуясь приближенными решениями элементарной теории сопротивления материалов, получает возможность рекомендуемым им способом находить и строгие решения, представляющие практическую важность. Иллюстрируя этот метод, Сен-Венан дает решения для кручения и изгиба призматических брусьев различных поперечных сечений.

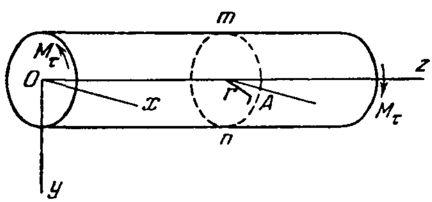


Рис. 125.

Чтобы по возможности наглядно пояснить этот метод, рассмотрим случай простого кручения стержня парами M_τ, приложенными к его концам (рис. 125). Располагая начало координат в центре тяжести левого торца и приняв положительные направления осей в соответствии с рисунком, определим компоненты смещения точки A в некотором поперечном сечении mn, взятом на расстоянии z от левого торца. Предположим, что этот торец не вращается в процессе кручения, и обозначим относительный угол закручивания стержня через θ. Сечение mn повернется на угол θz, и точка A с координатами x и y сместится в результате этого поворота по осям на

$$u = -\theta zy, \qquad v = \theta zx. \tag{b}$$

В случае кругового цилиндра поперечные сечения остаются при кручении плоскими и смещения w в осевом направлении отсутствуют; напряжения кручения в этом случае легко вычислить, воспользовавшись выражениями (h). Были сделаны попытки применить гипотезу плоских сечений также и для некруговых профилей, однако полученные таким путем результаты, обнаружили расхождение с опытом[1]). На этом основании Сен-Венан допускает, что поперечные сечения коробятся, однако, одинаково для всех сечений, вследствие чего w должно быть величиной, не

[1]) См. описание экспериментов Дюло на стр. 103.

зависящей от z, иначе говоря, он полагает, что

$$w = \theta\varphi(x, y), \tag{c}$$

где φ—некоторая функция от x и y, подлежащая в дальнейшем определению.

Уравнения (b) и (c) представляют допущения, вводимые Сен-Венаном, относительно смещений, вызываемых кручением. Что касается сил, то он полагает, что объемные силы отсутствуют и по внешней поверхности не приложено никаких сил. В отношении сил, приложенных по торцам, он допускает, что они статически эквивалентны данному крутящему моменту M_t. Подставляя выражения (b) и (c) в уравнения (a), Сен-Венан находит, что только две компоненты деформации γ_{xz} и γ_{yz} отличны от нуля и что они определятся выражениями

$$\gamma_{xz} = \theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right), \qquad \gamma_{yz} = \theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right).$$

Соответствующими компонентами напряжения будут:

$$\left.\begin{gathered}\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0,\\ \tau_{xz} = G\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right), \qquad \tau_{yz} = G\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right).\end{gathered}\right\} \tag{d}$$

Подставляя эти значения в уравнения равновесия (стр. 134), он находит, что последние будут удовлетворены, если функция φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{e}$$

На контуре профиля (рис. 126) компонента касательного напряжения по направлению нормали n к контуру должна обращаться в нуль, поскольку в противном случае согласно теореме Коши (стр. 134) касательные силы должны были бы быть приложенными и к поверхности стержня, что противоречит первоначальному допущению о том, что боковая поверхность стержня свободна от сил. Эти соображения приводят к условию на поверхности

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right)\cos(nx) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right)\cos(ny) = 0. \tag{f}$$

Таким образом, задача кручения призматического стержня произвольного поперечного сечения приводится к отысканию решения уравнения (e), в каждом конкретном случае такого, чтобы оно удовлетворяло граничному условию (f).

Сен-Венан решает эту задачу для целого ряда различных форм поперечного сечения. Случай эллиптического стержня особенно прост. Для него уравнения (e) и (f) будут удовлетворены, если положить:

$$\varphi = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} xy, \tag{g}$$

где a и b — полуоси эллипса (рис. 127). В таком случае компоненты напряжения (d) равны

$$\tau_{xz} = -G\theta \frac{2a^2 y}{a^2 + b^2}, \qquad \tau_{yz} = G\theta \frac{2b^2 x}{a^2 + b^2}. \tag{h}$$

Соответствующий крутящий момент

$$M_t = \iint (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y)\, dx\, dy = \frac{\pi G \theta a^3 b^3}{a^2 + b^2} \tag{i}$$

и относительный угол закручивания

$$\theta = \frac{M_t (a^2 + b^2)}{\pi G a^3 b^3}. \tag{j}$$

Из выражений (h) мы видим, что для всякой прямой Oc, лежащей в плоскости поперечного сечения и проходящей через его центр тяжести (рис. 127), отношение $\tau_{xz} : \tau_{yz}$ остается постоян-

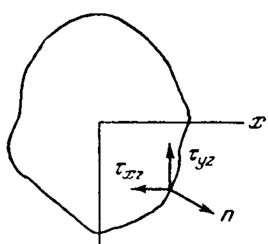


Рис. 126.

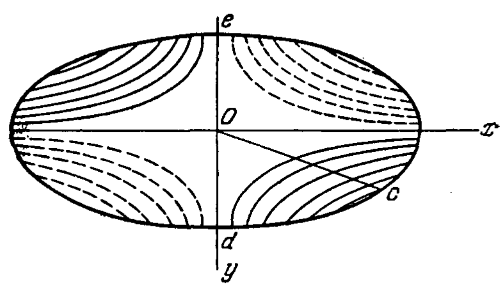


Рис. 127.

ным для всех лежащих на ней точек. Это указывает на то, что равнодействующие касательные напряжения в этих точках параллельны между собой и должны быть параллельны касательной в точке C контура. Мы заключаем также, что наибольшее напряжение возникает в точках d и e контура на концах малой оси эллипса. Уравнения (c) и (g) определяют форму покоробившихся поперечных сечений, и мы видим, что для эллипса горизонталями получающейся при короблении поверхности сечения будут гиперболы, как это показано на рис. 127, где сплошными линиями определяются области, лежащие над плоскостью xy (для точек этих областей w отрицательна), пунктиром — области, лежащие под плоскостью xy. Уравнение (j) можно преобразовать к виду

$$\theta = \frac{M_t}{C}, \tag{k}$$

где

$$C = \frac{\pi G a^3 b^3}{a^2 + b^2} = \frac{GA^4}{4\pi^2 I_p}, \tag{l}$$

$$A = \pi ab, \qquad I_p = \frac{\pi a^3 b}{4} + \frac{\pi a b^3}{4},$$

причем *C*—*жесткость* стержня *при кручении*.

Вычисляя жесткость кручения для сплошных стержней с различными формами поперечных сечений, Сен-Венан убеждается в том, что формула (l) дает значение C с хорошим приближением для всех этих случаев[1]). Допустимо, таким образом, принять, что жесткость всякого, вообще, сплошного стержня любого профиля равна соответствующей характеристике эллиптического стержня с той же самой площадью сечения A и с тем же полярным моментом инерции I_p. Жесткость при кручении изменяется, очевидно, обратно пропорционально полярному моменту инерции, а не прямо пропорционально, как это утверждалось старой теорией.

Полученные Сен-Венаном решения дают одно и то же распределение напряжений для всех поперечных сечений и требуют, следовательно, чтобы приложенные по торцам внешние силы были распределены точно таким же образом. Только при этом условии полученные Сен-Венаном результаты могут считаться строгими решениями соответствующих задач. Однако, применяя свой принцип относительно напряжений, вызванных статически эквивалентными системами сил (см. стр. 169), Сен-Венан заключает, что его решения дают значения напряжений с достаточной точностью также и в том случае, когда распределение сил по торцам отличается от требуемого его теорией, если только рассматриваемые точки (сечения) удалены на достаточное расстояние от торцов. Напряжения близ торцов, естественно, зависят от распределения внешних сил; но, поскольку это распределение остается обычно неизвестным, всякое дальнейшее исследование напряжений в ближайших к торцам сечениях почти лишено практического значения.

Сен-Венан применил полуобратный метод также и к задаче об изгибе консоли силой, приложенной к ее свободному концу[2]). Полагая, что нормальные напряжения в произвольном поперечном сечении правильно определяются элементарной теорией

---

[1]) См. Compt. rend., т. 88, стр. 142—147, 1879.

[2]) Задача изгиба рассматривается вкратце в мемуаре о кручении. В более развернутом виде она трактуется в мемуаре об изгибе, напечатанном в J. math. Liouville, 2-я серия, т. I, стр. 89—189, 1856. Последний предваряется весьма интересным обзором старых теорий изгиба.

изгиба балок, он указывает на возможность установления такого распределения касательных напряжений, при котором все уравнения упругости удовлетворяются. Таким путем он находит строгие решения для изгиба призматических стержней различных поперечных сечений. Он не ограничивается общим решением задачи, но с целью облегчения использования результатов, составляет таблицы, позволяющие вычислять непосредственно наибольшие касательные напряжения в балках прямоугольного профиля. Из этих вычислений следует, что в случае изгиба балки прямоугольного сечения в плоскости ее наибольшей жесткости величина максимального касательного напряжения весьма близка к значению, даваемому элементарной теорией Журавского (см. стр. 173).

Имея решения для задач кручения и изгиба призматического стержня, Сен-Венан переходит к исследованию совместного изгиба и кручения[1]). Не ограничиваясь вычислением напряжений и изучением их распределения по поперечному сечению, он находит главные напряжения и определяет наибольшую деформацию. Он рекомендует назначать при проектировании балок их поперечные размеры такими, чтобы наибольшая деформация не превосходила величины, устанавливаемой для каждого строительного материала непосредственным испытанием.

Легко себе представить тот толчок, который был дан дальнейшему развитию науки о прочности материалов мемуарами Сен-Венана, содержавшими строгие решения для ряда практически важных случаев кручения и изгиба. С их появлением возникло стремление вводить в инженерные руководства по сопротивлению материалов основные уравнения теории упругости. Сам Сен-Венан в многочисленных примечаниях к своему изданию книги Навье действовал в том же направлении. Рэнкин уделяет теории упругости большое место в своем руководстве по прикладной механике. Грасхоф и Винклер, оба, пытались вывести формулы сопротивления материалов, не пользуясь гипотезой плоских сечений, а основывая свои выводы на уравнениях точной теории. Впоследствии такой метод изложения сопротивления материалов вышел из употребления[2]), и ныне принято вести преподавание этой науки на более элементарном уровне. Углубленная же постановка курса преподавания, основанная на теории упругости, сохраняется в настоящее время, как общее правило, лишь для инженеров, специализирующихся в этой области.

---

[1]) См. главу XII мемуара о кручении.

[2]) Руководства по сопротивлению материалов, основанные на теории упругости, подобные, например, курсу Грасхофа, читанному им в Карлсруэ, или курсам некоторых профессоров русских инженерных институтов, оказались слишком трудными для среднего студента и потому уступили постепенно место учебникам нового типа.

53. Позднейшие работы Сен-Венана

Закончив свои знаменитые исследования по кручению и изгибу, Сен-Венан продолжал работать в области теории упругости и опубликовал много статей, преимущественно в трудах Французской Академии наук («Comptes rendus»). Самые важные результаты этой работы были напечатаны позднее в виде примечаний к изданной им книге Навье «Résumé des leçons...» и к его переводу книги Клебша. Его приложения к первой из названных книг содержат полную теорию упругости анизотропных тел и прекрасный разбор вопроса о необходимом числе упругих постоянных[1]). До самого конца своей жизни Сен-Венан оставался при том мнении, что единственный правильный путь решения этого вопроса основывается на признании молекулярного строения твердого тела и существования молекулярных сил. Он одобрял снижение числа упругих постоянных с 21 по 15 в общем случае и с 2 до 1 в изотропных системах. Его исследования не только представили большую ценность для специалистов по теории упругости, но и принесли большую пользу физикам, работавшим в области молекулярной теории.

Примечания Сен-Венана к книге Клебша также представляют большую ценность, в особенности в части, касающейся колебаний стержней и теории удара. Говоря о поперечном ударе балок, мы уже отметили важный вклад Сен-Венана в этот вопрос (стр. 217). Предполагая, что тело после удара по свободно опертой балке продолжает оставаться в соприкосновении с ней, он трактует проблему удара как задачу колебаний балки с присоединенной к ней массой. Он исследует первые семь форм колебаний системы, вычисляет соответствующие частоты и находит формы соответствующих кривых для различных значений отношения между весом балки и весом ударяющего тела. Полагая, что балка в начальный момент находится в покое, между тем как присоединенная к ней масса обладает некоторой скоростью, Сен-Венан вычисляет амплитуду для каждой формы колебаний. Суммируя прогибы, соответствующие этим элементарным колебаниям, он получает кривую прогибов балки для различных моментов времени t, а также находит наибольший прогиб и наибольшую кривизну[2])

Из этого анализа Сен-Венан заключает, что элементарная теория поперечного удара, построенная впервые Коксом (стр. 216), дает удовлетворительные значения для наибольших прогибов, но недостаточно точна для определения наибольшего напряжения[3]).

[1]) См. Приложение V.

[2]) Многочисленные кривые, которыми пользовался Сен-Венан в этом анализе, были опубликованы после его смерти его учеником Фламаном: Flamant, J. école polytech., Paris, тетрадь 59, стр. 97—128, 1889.

[3]) По-видимому, Сен-Венан не знал о существовании элементарного решения Кокса и потому дал свой собственный вывод с подробным анализом

Интересы Сен-Венана простирались также и на продольный удар стержней. Рассматривая горизонтальный стержень, защемленный одним концом и испытывающий осевой удар по другому, он опять интерпретирует задачу удара как задачу колебаний стержня с присоединенной к нему на конце массой. Как и прежде, он допускает, что вначале ($t=0$) стержень находится в покое, присоединенная же к нему масса имеет заданную скорость в осевом направлении. Он принимает решение в виде тригонометрического ряда и, суммируя несколько первых его членов, приходит к удовлетворительному ответу относительно движения конца стержня. Но при вычислении напряжений Сен-Венан обнаруживает, что его ряд сходится не достаточно быстро для того, чтобы обеспечить необходимую точность решения. Впоследствии он попытался применить для смещений вместо бесконечного ряда некоторое выражение в замкнутой форме. Задача, наконец, была решена почти одновременно Буссинеском и двумя артиллерийскими офицерами Себером (Sébert) и Гюгонио (Hugoniot). Они дали это решение в прерывных функциях.

Характерным для научного творчества Сен-Венана является то, что он никогда не удовлетворялся получением общего решения: вычисляя таблицы и строя диаграммы, он неизменно стремился представить свои результаты в таком виде, чтобы ими без труда можно было пользоваться в практических применениях. Воспользовавшись решением Буссинеска, Сен-Венан в сотрудничестве с Фламаном подготовил диаграммы, иллюстрирующие последовательные фазы продольного удара для различных значений отношения r между массами ударяемого стержня и ударяющего тела[1]). Например, на рис. 128 приводится диаграмма, по которой можно вычислить напряжение сжатия на конце стержня, находящегося в соприкосновении с ударяющим телом. На этой диаграмме l обозначает длину стержня, a—скорость звука вдоль стержня, V—скорость ударяющего тела. На оси абсцисс Сен-Венан откладывает значения отношения at/l, на оси ординат—значения величины $d=a\varepsilon/V$, пропорциональной относительному укорочению стержня на конце ε. Три представленные на диаграмме кривые соответствуют трем различным значениям отношения r веса стержня к весу ударяющего тела. Как нетрудно видеть, деформация сжатия, произведенная в момент удара в плоскости соприкосновения стержня с ударяющим телом, постепенно снижается в интервале времени от начала до $t=2l/a$. В этот момент волна сжатия, отраженная от защемленного конца стержня, достигает пло-

вытекающих из него следствий. См. книгу Клебша в переводе Сен-Венана, стр. 576.

[1]) Эта работа была напечатана в Compt. rend., т. 97, стр. 127, 214, 281, 353, 1883. Она вошла также в виде приложения в состав французского перевода книги Клебша.

скости соприкосновения и деформация сжатия испытывает внезапный скачок до более высокого значения. После этого вновь начинается постепенное снижение этой деформации. Если $r=1$, она обращается в нуль, как мы видим, к моменту $t=3{,}07\ l/a$, притом так, что соприкосновение между ударяющим телом и стержнем прерывается. При малых значениях r соприкосновение сохраняется и по истечении этого срока, а в момент $t=4l/a$ мы имеем второй резкий скачок в величине деформации сжатия. После этого деформация падает и соприкосновение прекращается в момент $t=4{,}71l/a$, если $r=\frac{1}{2}$, и в момент времени $t=5{,}90\ l/a$, если

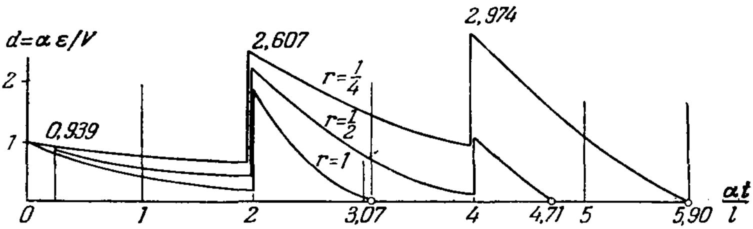


Рис. 128.

$r={}^1/_4$. Диаграмма показывает, что длительность удара возрастает с уменьшением отношения r, а резкие скачки в максимумах деформации дают объяснение тому, почему решение не имеет удовлетворительных результатов, когда оно берется в виде ряда. Диаграммы, подобные представленной на рис. 128, построены Сен-Венаном для нескольких форм поперечных сечений стержня, причем на основании их Сен-Венан показывает, что наибольшее напряжение, вызванное ударом, возникает в защемленном торце.

Изложенная теория удара предполагает, что соприкосновение происходит в один и тот же момент времени по всей площади торца. Это требование не осуществимо на практике, о чем свидетельствуют опыты, выполненные Фойхтом (W. Voigt)[1] (см. стр. 412) и приведшие к результатам, которые расходились с выводами теории.

Круг научных интересов Сен-Венана простирался не только на проблемы удара, но также и на теорию вынужденных колебаний стержня, о чем свидетельствует «Приложение 61» (объемом почти в 150 страниц) к переведенной им книге Клебша, в котором он дает весьма полное исследование задачи о колебаниях стержня, возбужденных в нем силой, изменяющейся во времени. Далее, он исследует вынужденные колебания, вызываемые определенным

[1]) См. Voigt W., Ann. Physik, т. 19, стр. 44, 1883; т. 46, стр. 657, 1915. Обзор литературы по удару приводится в статье Пешля: Pöschl T., Handbuch der Physik, т. 6. стр. 525, Berlin, 1928.

смещением одной из точек стержня, и чрезвычайно подробно останавливается на случае, когда средняя точка свободно опертого призматического стержня совершает заданное гармоническое движение. В том же приложении он уделяет много места задаче об изгибе балки под движущейся нагрузкой. Он ссылается на работу Уиллиса и Стокса (стр. 211), в которой авторы пренебрегали массой балки. Сен-Венан выводит общие уравнения задачи и обсуждает попытку Филлипса[1]) дать приближенное решение этих уравнений. Признавая решение Филлипса неполным, он сам, наконец, находит приближенное решение, следуя методу рассуждений Уиллиса, но учитывая при этом силы инерции равномерно распределенного собственного веса Q балки дополнительно к силе инерции движущейся нагрузки W. Таким путем он находит, что наибольший изгибающий момент, вызванный совместным действием подвижной нагрузки W и собственного веса Q, равен[2])

$$M_{\text{макс}}=\frac{Wl}{4}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)+\frac{Ql}{8}\left(1+\frac{5}{4}\,\frac{1}{\beta}\right),$$

где, как и раньше (стр. 213),

$$\frac{1}{\beta}=\frac{16\delta_{st}v^2}{gl^2}.$$

Отличие этого решения от решения Филлипса заключается в том, что во втором члене выражения для $M_{\text{макс}}$ коэффициент при β равен $^5/_4$ вместо $^3/_4$.

В 1868 г. Треска представил во Французскую Академию две статьи о течении металлов под большим давлением[3]). Сен-Венан, который давал отзыв об этой работе, заинтересовался пластической деформацией вязких материалов. В дальнейшем он опубликовал в связи с этим несколько статей, в которых вывел основные уравнения пластичности, основываясь на допущениях: 1) что объем материала в процессе пластической деформации не изменяется, 2) что направления главных деформаций совпадают с направлениями главных напряжений и 3) что наибольшее касательное напряжение в каждой точке равно определенной постоянной. Опираясь на эти гипотезы, Сен-Венан решает некоторые простые задачи, как, например, о кручении стержня круглого сечения, чистом изгибе прямоугольных призматических брусьев[4]), пластической деформации полых круговых цилиндров под действием внутреннего давления[5]). Этими работами Сен-Венан открыл для ис-

[1]) Ann. mines, т. 7, 1855.

[2]) Подобный же результат был получен Брессом и приведен им в «Курсе прикладной механики», 1-е изд., 1859. Бресс дал решение для случая движения вдоль балки равномерно распределенной нагрузки.

[3]) Mém. presentés par divers savants, т. 20, 1869.

[4]) J. mathématique, т. 16, стр. 373—382, 1871.

[5]) Compt. rend., т. 74, стр. 1009—1015, 1872.

следования совершенно новое поле механики материалов. Он назвал этот предмет «пластикодинамикой» (динамикой пластичности); в последнее время эта область стала объектом большой научно-исследовательской работы.

54. Дюамель и Филлипс

Дюамель (J. M. C. Duhamel, 1797—1872) родился в Сен-Мало, поступил в 1814 г. в Политехническую школу, окончил ее в 1816 г. По завершении этого образования он изучал еще некоторое время юридические науки в Ренне, а затем вернулся в Париж, где начал преподавать математику в нескольких учебных заведениях. В 1830 г. он стал преемником Кориолиса по преподаванию курса математического анализа в Политехнической школе и с этой поры оставался связанным с этой школой до конца своей педагогической карьеры (1869). Занятое им положение было очень влиятельным, и знаменитая школа приняла многие из предложенных им планов. Его руководства по анализу бесконечно малых[1]) и по теоретической механике[2]) имели широкое распространение во французских учебных заведениях. В своих оригинальных научных трудах Дюамель многим обязан своему бывшему учителю Фурье, а также Пуассону. То было время быстрого роста применений математического анализа в физике, и его труды следовали этой тенденции.

Опубликовав несколько важных мемуаров о распространении теплоты в твердых телах, он представил в Академию наук свой мемуар о вычислении молекулярных воздействий, возникающих в твердых телах вследствие изменений температуры[3]) («Mémoire sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements de la température dans les corps solides»). Эта работа Дюамеля представляет собой его главный вклад в теорию упругости. Во введении он указывает, что Фурье в своей знаменитой «Аналитической теории тепла» разработал вопрос о распределении температур в твердых телах, но оставил вне поля своего внимания деформации, вызываемые изменениями температур. Мельчайшие частицы, на которые допустимо делить твердое тело, лишены возможности расширяться свободно под воздействием температурных изменений, вследствие чего в теле будут возникать напряжения. Исследуя эти напряжения, Дюамель следует методу, предложенному Навье (см. стр. 129), и выводит дифференциальные уравнения равновесия, подобные уравнениям (g) (стр. 131). Но в дополнение к компонентам X, Y, Z объемных сил в них входят еще члены вида $-K(\partial T/\partial x)$, $-K(\partial T/\partial y)$, $-K(\partial T/\partial z)$, пропор-

[1]) Cours d'analyse de l'École Polytechnique (2 тома), 2-е изд., 1847.
[2]) Cours de mécanique (2 тома), 2-е изд., 1853.
[3]) Mém. acad. sci. savants étrangers, т. 5, стр. 440—498, 1838.

циональные скорости изменения температуры по соответствующим направлениям x, y, z. Дюамель устанавливает также условия на поверхности тела и показывает, что температурные напряжения поддаются определению точно таким же образом, как и напряжения, вызываемые объемными силами и силами, приложенными на поверхности. Как показывает Дюамель, напряжения, вызываемые силами, и напряжения, связанные с изменениями температур, могут быть вычислены отдельно, полные же напряжения получаются путем наложения. Можно полагать, что здесь впервые мы встречаемся с применением принципа наложения при вычислении напряжений. Автор указывает, что в условиях равномерного распределения температуры напряжений в теле не возникает.

Применение этих основных уравнений к некоторым частным случаям приводит Дюамеля к решениям, представляющим практический интерес. Он начинает с полой сферы, температура которой выражается заданной функцией расстояния от центра. Он показывает, что изменения длин внутреннего и наружного радиусов зависят лишь от среднего значения температуры стенки сферической оболочки. Он распространяет эту закономерность на оболочку, состоящую из двух концентрических слоев различных материалов. В этой статье исследуется также и цилиндрическая труба, температура которой определяется заданной функцией радиального расстояния. В заключение Дюамель исследует перемещения, вызываемые в сферической оболочке изменением температуры. На протяжении всей этой работы Дюамель предполагает, что упругая постоянная не зависит от температуры. Во втором мемуаре[1]), имеющем первостепенную важность в теории теплоты, он изучает изменения температуры, возникающие в результате деформации, а также различие удельной теплоты при постоянном объеме и при постоянном давлении.

Дюамель занимался также теорией колебаний упругих тел. Свободные колебания струны и стержней постоянного поперечного сечения получили к тому времени уже достаточное освещение. Дюамель перешел к более сложным случаям. Он поставил, например, задачу о колебаниях струны с присоединенными к ней сосредоточенными массами и не только дал полное решение этой задачи, но и провел большое количество опытов, результаты которых хорошо согласовались с теорией[2]). Он дал общий метод исследования вынужденных колебаний упругих тел[3]). Применив принцип наложения, он показал, что перемещения, произведенные переменной силой, могут быть получены в виде некоторого интеграла (см. стр. 277). Этот метод был затем использован Сен-Вена-

[1]) J. école polytech., Paris, тетрадь 25, т. 15, 1837.
[2]) J. école polytech., Paris, тетрадь 29, 1843.
[3]) J. école polytech., Paris, тетрадь 25, стр. 1—36, 1843.

ном при исследовании поперечных вынужденных колебаний стержней (см. стр. 291—292).

Филлипс (Phillips, 1821—1889) родился в Париже. В 1840 г. он поступил в Политехническую школу, из которой он перешел затем в Школу горных инженеров (École de Mines), закончив ее в 1846 г. После нескольких лет пребывания на правительственной службе он приступил к работе на французских железных дорогах. Его первое научное исследование было связано с деятельностью железнодорожного инженера. В его ведении находился подвижной состав дороги, и внимание Филлипса привлекли вопросы проектирования вагонных рессор. В эту область научные знания проникали еще очень слабо, и Филлипсу выпало на долю построить полную теорию листовых рессор; он проектировал рессоры на основе своей теории, а впоследствии ему представился случай провести испытания и убедиться в том, что его теория достаточно точна для практических применений. Эта работа была представлена в Академию наук, и комитет рекомендовал ее к напечатанию в Mémoires des savants étrangers[1]). Она представляла собой большую ценность для проектирования рессор и наглядно свидетельствовала, насколько большую пользу в этой новой области технического знания может принести инженер, обладающий в дополнение к практическому опыту еще и основательной ориентировкой в математике. Расчет основывается на элементарной теории изгиба балок с прямолинейной осью. Предполагая, что при изгибе сохраняется соприкосновение между отдельными составляющими рессору полосами (рис. 129, *а*), Филлипс выводит формулы для изменений кривизны рессоры в каждом ее сечении и показывает, что это изменение может быть сделано постоянным по длине рессоры, если концы отдельных полос скашивать, как это показано на рис. 129, *б*. Интегрированием он получает формулы для прогиба рессоры. Дифференцирование дает ему выражения для давления между полосами. Зная давление, можно определить и силы трения, а от последних зависит и декремент затухания рессоры при ее колебаниях. Филлипс применяет все эти результаты в практических расчетах железнодорожных рессор, приводя многочисленные числовые примеры такого расчета. Значительное внимание уделяется данным испытаний механических свойств листового материала рессор, на основании которых он дает рекомендации относительно допускаемых напряжений.

Весьма подробный обзор научной деятельности Филлипса имеется у Пирсона в его «Истории...» (т. 2, ч. 1, стр. 330). Пирсон заканчивает этот обзор замечанием: «Мемуар Филлипса являет собой поразительный пример того, каким образом чрезвычайно

[1]) В полном виде эта статья была напечатана в Ann. mines, 5-я серия, т. I, 1852.

простая теория упругости—достаточно точная для охватываемой ею области фактов—может принести ценнейшие результаты. Теория рессор Филлипса в том виде, в каком она используется в применении к обычному подвижному составу железных дорог,—один из мастерских шедевров, на которые может быть способен лишь практик, обладающий достаточно широким теоретическим кругозором».

В связи со своей работой на железной дороге Филлипс заинтересовался динамическим воздействием движущейся нагрузки на мосты[1]). Он дал приближенное решение этой задачи, в которой были приняты во внимание не только движущаяся масса, но и масса моста. Впоследствии это решение было упрощено Сен-Венаном, внесшим в него также и некоторые поправки (см. стр. 292).

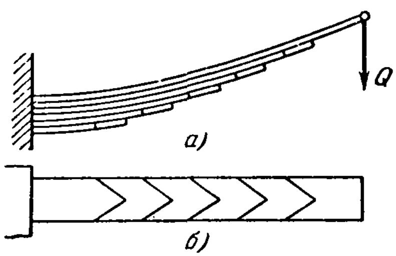


Рис. 129.

Филлипс занимался также и вынужденными продольными и поперечными колебаниями стержней и дал решения таких задач[2]), как, например, задача о продольных колебаниях стержня, один конец которого подвергается действию периодической силы[3]). Исследуя поперечные колебания, Филлипс остановился на определении напряжений в паровозном шатуне, все точки оси которого описывают окружность одного и того же радиуса. Он рассмотрел также и колебания струны, один конец которой закреплен, другой же присоединен к камертону, совершающему гармонические колебания. Развитые Филлипсом методы исследования поперечных колебаний стержней были использованы впоследствии Сен-Венаном при обсуждении частных случаев поперечных колебаний в «Приложении 61» к его переводу книги Клебша (см. стр. 292).

С 1864 г. Филлипс отошел от практической работы и занялся преподаванием механики, сначала в Центральной школе (École centrale, 1864—1875), а затем также и в Политехнической школе (1866—1879). В 1868 г. он был избран в члены Французской Академии наук.

Позднее Филлипс заинтересовался теорией деформации спиральных пружин, подобных тем, которые применяются в часах. На эту тему им было выпущено несколько статей[4]), в которых эта

[1]) См. Ann. mines, т. 7, стр. 467—506, 1855.

[2]) J. mathématique, т. 9, стр. 25—83, 1864.

[3]) Задачи этого типа приобрели в последнее время большую практическую важность в нефтеразработках, где находят применение стержни весьма большой длины.

[4]) J. mathématique, 2-я серия, т. 5, стр. 313—366, 1860; Ann. mines, т. 20, стр. 1—107, 1861.

задача получила детальное освещение. Им было установлено, что одним из условий правильного функционирования таких пружин является то, чтобы центр тяжести часовой спиральной пружины оставался на оси балансира. Он учел также влияние температуры и трения на колебания балансира и привел результаты ряда опытов, весьма ценных для часового производства и представлявших собой образец успешного применения теоретического анализа в решении важной практической проблемы.

55. Франц Нейманн

Франц Нейманн (Franz Neumann[1]), 1798—1895) родился близ Иоахимсталя в провинции Бранденбург. Его отец, Эрнст Нейманн, был управляющим имением. Наполеоновские войны были чрезвычайно трудным временем для Германии, и детство Нейманна протекало в весьма бедственных условиях. Начальное обучение он получил в Иоахимстальской школе, а в возрасте 10 лет поступил в берлинскую гимназию Вердера. Здесь он жил в семье плотника, по-прежнему в стесненной материальной обстановке. Когда в 1813 г. Пруссия освободилась от французской оккупации, Нейманн изъявил желание поступить добровольцем в германскую армию, но он был слишком юн, и его план осуществился лишь в 1815 г. Он был зачислен в армию Блюхера и принял участие в сражении при Линьи (16 июня 1815 г.), предшествовавшем битве при Ватерлоо. Он был тяжело ранен и, принятый за убитого, оставался на поле сражения до следующего дня, когда его обнаружили живым и доставили в лазарет. Потребовалось несколько месяцев для того, чтобы его здоровье восстановилось настолько, чтобы он был в состоянии присоединиться к полку. Осенью он участвовал в осаде Живе и оставался там до конца кампании.

Франц Нейманн.

---

[1]) Биография Франца Нейманна, написанная его дочерью Луизой Нейманн, вышла из печати в 1904 г. См. также книгу Вангерина: W a n g e r i n A., Franz Neumann und sein Wirken als Forscher und Lehrer, 1907, а также статью Фойхта: V o i g t W., Zur Erinnerung an F. E. Neumann, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-physik. Klasse, 1895.

В феврале 1816 г. добровольцы вернулись в Берлин, и только тогда Нейманн получил возможность продолжать прерванные занятия в средней школе. Он кончил ее в 1817 г. и в том же году поступил в Берлинский университет. Жизнь продолжала оставаться трудной, так как отец был не в состоянии его поддерживать и ему приходилось довольствоваться теми скудными средствами, которые ему удавалось заработать уроками. В начале своего пребывания в университете Нейманн слушал лекции по теологии и праву, но весьма скоро переключился на естественные науки, проявив большой интерес к минералогии. Хотя он и увлекался математикой, ему не удалось многому научиться в этом предмете, поскольку и сам университет располагал в этой области весьма малым. Нейманн самостоятельно расширил впоследствии свои математические познания по книгам, причем большую роль в развитии его эрудиции сыграли работы Фурье.

Осенью 1820 г. Нейманн предпринял поездку в Силезию, с тем чтобы собрать там коллекцию минералов и окаменелостей для Берлинского музея естественных наук. Эта экспедиция тесно сблизила его с берлинским профессором минералогии Э. Вейссом (E. C. Weiss), определившим Нейманна на должность ассистента в Минералогическом институте. Работы Нейманна в области минералогии имели своим результатом выпуск книги под заглавием «Кристаллономия» («Krystallonomie»), в которой было приведено описание нового проективного метода анализа кристаллических структур. Книга имела большой успех, и Нейманн был приглашен прочесть серию лекций для группы людей, специально занимавшихся минералогией. Эти лекции предоставили ему возможность развить свои новые методы. Вместе с тем он занялся научной подготовкой к степени доктора, которая была ему присвоена весной 1826 г. В том же году он принял предложение Кенигсбергского университета вести там преподавание минералогии в должности доцента. В Кенигсберге Нейманн встретился со знаменитым астрономом Бесселем и с некоторыми учеными младшего поколения—физиком Дове (Dove) и математиком Якоби.

Установившаяся в Германии политика академической свободы предоставила Нейманну возможность расширить поле своей деятельности, и он начал преподавать различные разделы теоретической физики: геофизику, теорию теплоты, акустику, оптику, теорию электричества, так что за первые три года своей педагогической работы он овладел всеми без исключения разделами теоретической физики. Его быстро выдвинули на должность сначала адъюнкт-профессора (1828), а затем профессора (1829). В 1834 г. Нейманн в сотрудничестве с Якоби организовал семинар по теоретической физике и математике. Такая форма преподавания практиковалась до него лишь на гуманитарных факультетах, и ее применение в физике носило экспериментальный характер и явилось первой попыткой внести какую-то организованность в постановку изучения теоретической науки во внекурсовом, факультативном порядке. Этот новый путь усовершенствования знаний для оканчивающих курс студентов быстро встретил признание в Германии и оказался весьма эффективным. Нейманн много сделал для прогресса физических наук в Германии во второй половине XIX века.

На каждого из участвовавших в семинаре студентов возлагалась обязанность подготовить к занятиям семинара доклад, в котором ставилась либо выходившая за пределы курса, сравнительно более сложная проблема физики, или же обсуждалась какая-либо научная работа, выполненная одним из студентов под руководством профессора. Впоследствии Нейманн разделил студентов на две группы сообразно уровню их познаний. Для тех, чья подготовка была более слабой, тематика семинара примыкала обычно к курсу лекций, проведенному в только что истекшем семестре. Доклады, поступавшие на подобные семинары, состояли часто лишь в более подробном обсуждении вопросов, вкратце затронутых на лекциях. Иногда эти обсуждения более элементарного типа касались описания опытов, проделанных студентами в подтверждение теории. Нейманн придавал большое значение этому виду работы, так как студенты приобретали в ней навыки обращения с испытательными приборами, осваивались с техникой измерения, учились представлять свои результаты в математической форме. Так именно ставились семинары по вопросам теоретической механики, капиллярности, теплопроводности, акустики, оптики, электричества. На семинаре для студентов с более повышенной подготовкой обсуждались обычно самостоятельные работы самих студентов.

Семинар как система обучения показал себя превосходной школой тренировки в научной работе. Ученики Нейманна обнаруживали себя часто хорошими педагогами в других университетах и в свою очередь организовывали там такие же семинары. В силу этого влияние Нейманна на преподавание физической науки в Германии было очень значительно, и, бросая взгляд на развитие теории упругости во второй половине XIX века, мы можем сказать, что ценнейшие открытия в этой науке в Германии были сделаны его учениками: Борхардтом (Borchardt), Клебшем (Clebsch), Кирхгоффом (Kirchhoff), Заальшютцем (Saalschütz) и Фойхтом (Voigt),—все они участники Кенигсбергского семинара по физике, и почин их работам в области теории упругости был положен Нейманном[1]).

---

[1]) Более подробные сведения о семинаре Нейманна и о его учениках можно найти в книге А. Вангерина (см. сноску на стр. 297).

Собственные научные исследования в области теории упругости были начаты Нейманном, когда Навье, Коши, Пуассон еще продолжали активно работать в этой области и когда большое применение эта теория находила в оптике. В своей работе по двойному лучепреломлению[1]) Нейманн рассматривает твердое упругое тело, структура которого определяет три взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии, и, следуя методу Навье (стр. 129), выводит для него уравнения равновесия, содержащие шесть упругих постоянных, и исследует распространение волн в этой упругой среде. В дальнейшем он заинтересовался непосредственно упругими свойствами кристаллов, имеющих три взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии[2]), и указал, каким образом нужно ставить опыты, чтобы получать непосредственным испытанием значения этих шести постоянных. Он впервые вывел формулу для вычисления модуля упругости при растяжении для вырезанной из кристалла призмы, с произвольной ориентировкой оси. В этих ранних работах Нейманн кладет в основу своих исследований теорию молекулярного строения упругих тел и в соответствии с этим использует уменьшенное число упругих постоянных, как это делали до него Пуассон, а позднее Сен-Венан.

Постоянное стремление Нейманна к согласованию теории с опытом скоро, однако, побудило его отвергнуть гипотезы Навье и Пуассона. Он установил окончательно необходимое число упругих постоянных для различных типов кристаллов, не обращаясь к молекулярной теории. Он предложил несколько различных методов испытания вырезанных из кристаллов призм, на основании которых необходимые упругие постоянные представлялось возможным вычислять непосредственно из измерений. Соответствующие опыты были проделаны учениками Нейманна. В этом отношении работа Фойхта[3]) представляется особенно важной, поскольку она окончательно устанавливает, что снижение числа упругих постоянных, требуемое гипотезой центральных упругих сил, действующих между молекулами, несовместимо с результатами испытаний и что в самом общем случае требуется 21 упругая постоянная, а не 15, как это указывалось теорией Пуассона. Для изотропных тел число необходимых постоянных равно 2, а не 1, как это полагали Навье, Пуассон и Сен-Венан. Пока приверженцы мультиконстантной теории приводили такие примеры, как пробка, каучук, желатин, определенно свидетельствующие о том, что коэффициент Пуассона отличается от $^1/_4$, всегда сохранялась возможность парировать их доводы ссылкой на то, что эти материалы не были изотропными. Но эксперименты Фойхта оконча-

[1]) Pogg. Ann. Physik u. Chem., т. 25, стр. 418—454, 1832.
[2]) Pogg. Ann. Physik u. Chem., т. 31, стр. 177—192, 1834.
[3]) Ann. Physik u. Chem., т. 31, стр. 701, 1887; т. 34, стр. 981, 1888; т. 38, стр. 573, 1889.

тельно показали, что рариконстантная теория дает неудовлетворительные результаты и в применении к призматическим стержням, вырезанным из совершенных кристаллов.

Важнейшие открытия Неймана в области теории упругости вошли в состав его второго мемуара, касающегося двойного лучепреломления[1]). Еще Брьюстер (Brewster)[2]) и Зеебек (Seebeck)[3]) обратили внимание на то, что неравномерно нагретая стеклянная пластинка приобретает способность двойного лучепреломления. Брьюстер обнаружил, что стекло приобретает подобную же способность и под действием напряжений[4]) и подал мысль об использовании этого явления для изучения напряжений в конструкциях путем применения стеклянных моделей. Брьюстер провел также опыты с желатином, показав, что если это вещество подвергнуть действию растягивающих сил, а затем высушить его, приведя в твердое состояние, то оно сохранит способность к двойному лучепреломлению и по удалении растягивающей силы. Способность стекла, подвергнутого действию сжимающих сил, к двойному лучепреломлению изучалась также Френелем[5]). Экспериментируя с треугольными призмами, он показал, что под осевым сжатием они приобретают ту же самую способность к двойному лучепреломлению, которой обладают кристаллы.

В своем мемуаре Нейманн развивает теорию двойного лучепреломления в напряженных прозрачных телах. В простейшем случае однородно напряженной пластинки (рис. 130) эта теория устанавливает, что если луч поляризованного света проходит через пластинку в точке O перпендикулярно к ней, причем OA представляет собой амплитуду поперечного колебания света, то это колебание может быть разложено на два составляющих колебания OB и OC, параллельных осям x и y. Эти составляющие будут распространяться в материале пластинки с различными скоростями. Разность между этими скоростями ($v_x—v_y$) пропорциональна разности между двумя главными деформациями $\varepsilon_x—\varepsilon_y$, т. е. пропорциональна наибольшей деформации сдвига γ_{xy}. Воспользовавшись анализатором, можно заставить эти два

[1]) Abhandl. preuss. Akad. Wiss., Math.-Naturer. Klasse, ч. 2, стр. 1—254, 1843.

[2]) Phil. Trans., стр. 436, 1814; стр. 1, 1815.

[3]) Работа Зеебека упоминается в письме Максвелла к Уильяму Томсону. См. Larmor Joseph (ed.). Origins of Clark Maxwell's electric ideas., p. 31, Cambridge, 1937.

[4]) Phil. Trans., стр. 60, 1815; стр. 156, 1816.

[5]) Ann. chim. et phys., т. 20, стр. 376, 1822. См. также Fresnel Augustin, Oeuvres, т. 1, стр. 713, 1866. О работе Френеля Максвелл дает следующий отзыв: «Д-р Брьюстер открыл, что механическое напряжение вызывает в прозрачных твердых телах временную анизотропию в отношении поляризованного света, а Френель отождествил эту анизотропию с двойным лучепреломлением в кристаллах» (см. письмо Максвелла, указанное выше, в примечании[3])).

составляющих луча интерферировать и, наблюдая окрашенное изображение пластинки на экране, найти для данной пластинки связь между цветом изображения и величиной деформации сдвига γ_{xy}. Располагая этими данными, мы получаем возможность исследовать распределение деформации сдвига и в неоднородно напряженной пластинке, наблюдая на экране соответствующий ей интерференционный узор. Если вместо белого света воспользоваться монохроматическим лучом поляризованного света, мы получим отображение пластинки на экране в виде системы темных и светлых полос. По конфигурации этих последних можно составить себе полное представление о распределении деформации сдвига. Эта техника в настоящее время получила среди инженеров широкое распространение и известна как *оптический метод исследования напряжений.*

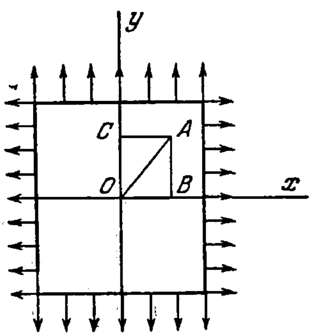


Рис. 130.

Нейманн строит теорию для общего случая трехмерного поля напряжений и показывает, каким образом можно получить из простых испытаний значения оптических констант. По последним предсказывается форма окрашенного интерференционного узора, который должен получиться в том или ином материале при заданном распределении напряжений. Нейманн применяет свою теорию к частным случаям: подвергнутого кручению круглого стержня и радиально-симметричного распределения напряжений в сфере.

Далее, Нейманн применяет свою теорию к изучению интерференционных узоров, наблюдавшихся Брьюстером в неравномерно нагретых стеклянных пластинках, и показывает, что способность таких пластинок к двойному лучепреломлению объясняется напряженным состоянием, возникающим в них в результате неравномерного распределения температур. Для исследования этого напряженного состояния Нейманн выводит уравнения равновесия, сходные с полученными Дюамелем (стр. 293) и содержащие члены, которыми учитывается температурное расширение материала. Применяя эти уравнения к случаю сферы, температурное поле которой определяется одним лишь расстоянием от центра, Нейманн вычисляет температурные напряжения и, поставив затем опытное изучение этого напряженного состояния в поляризованном свете, показывает, что образующиеся при этом цветные полосы близко отвечают теории.

Нейманн исследует температурные напряжения также и в пластинке, температура которой неравномерно распределена по ее площади, но сохраняет постоянное значение в любом месте по толщине пластинки. Он выводит необходимые уравнения и применяет их к круглой пластинке и к круглому кольцу. Он полагает, что круглое кольцо имеет весьма малую толщину в радиальном направлении, и исследует изгиб такого кольца, когда температура его является функцией лишь расстояния S, измеренного по оси кольца. Поставлена Нейманном и задача о двух соединенных между собой пластинках из различных материалов, подобных биметаллическому термометру Бреге, причем он исследует изгиб таких пластинок в условиях равномерного распределения температур.

Последнюю главу своего большого мемуара Нейманн отводит проблеме остаточных напряжений, т. е. напряжений, сохраняющихся в теле после удаления внешних сил, вызвавших в нем при нагружении пластическое деформирование. Его теория основывается на том допущении, что направления главных пластических деформаций совпадают с направлениями главных упругих деформаций, а их величины являются линейными функциями компонент главных упругих деформаций. Нейманн пользуется своей теорией для исследования остаточных напряжений, возникших в быстро охлажденной стеклянной сфере. Надо полагать, что Нейманн первый занимался исследованием остаточных напряжений.

Некоторые из собственных исследований Нейманна по теории упругости были включены в курс его лекций[1]). Проблемы особенно его интересовавшие Нейманн обсуждал обычно совместно со своей аудиторией, и потому некоторые такие беседы подготовляли темы научных работ его учеников. Иные его работы вовсе не публиковались в виде мемуаров и появлялись впервые в печати в его курсе лекций, т. е., может быть, лишь лет 30 спустя после выполнения самой работы, когда результаты уже не представляли собой чего-либо нового.

Осветим бегло содержание книги Нейманна. В первых пяти главах он выводит основные уравнения теории упругости изотропного тела, вводя понятие компонент напряжения и деформации и устанавливая соотношения между ними через две упругие постоянные. Его обозначения для компонент напряжения были впоследствии приняты многими авторами: в частности, их принял Ляв (A. E. H. Love). В следующих трех главах дается вывод основных уравнений с помощью гипотезы о молекулярном строении твердых тел. Излагаются работы Навье и Пуассона. Выводятся уравнения для неравномерного распределения температуры, исследуется теорема об единственности решений уравнений упругости. Следующая часть книги посвящена приложениям основных уравнений к частным задачам. Глава, в которой описывается

[1]) Neumann F., Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers, под ред. д-ра О. Е. Майера (Meyer O. E., Leipzig, 1885).

деформация призм, вырезанных из кристаллов, представляет особый интерес, поскольку в ней идет речь о собственных исследованиях Неймана, а также потому, что она послужила основой для экспериментальной работы некоторых его учеников, занимавшихся определением упругих постоянных для кристаллов различных материалов.

Следующая часть книги посвящена распространению волн в упругой среде, но это приложение теории упругости к оптике относится, собственно, к истории волновой теории света.

Содержанием последней главы являются колебания струн, мембран и призматических стержней. Исследуя продольные колебания круглого вала, Нейманн выводит необходимые уравнения в более полном виде, чем это делалось раньше, так как принимает во внимание не только продольные, но также и радиальные смещения частиц. Он дает приближенный метод[1]) решения этих уравнений и использует результаты в задаче о продольном ударе цилиндрических стержней. Он первый при этом указывает, что в исследовании продольного удара на основе принципа сохранения энергии необходимо учитывать и колебания стержней. Этой задачей, как мы уже видели (стр. 290), занимался позднее Сен-Венан.

56. Густав Роберт Кирхгофф

Густав Роберт Кирхгофф (Gustave Robert Kirchhoff, 1824—1887)[2]) был сыном адвоката и родился в Кенигсберге. По окончании средней школы в 1842 г. он поступил в Кенигсбергский университет; в годы 1843—1845 слушал лекции Нейманна и принимал участие в его семинаре по теоретической физике. Нейманн обратил внимание на большие способности Кирхгоффа и в докладе секретарю по учебной части рекомендовал своего ученика как многообещающего молодого ученого. Он помог также Кирхгоффу напечатать в 1845—1847 гг. несколько научных работ, начало которым было положено на руководимом им семинаре. В 1848 г. Кирхгофф получил степень доктора и начал вести преподавание в Берлинском университете. Но в Берлине он оставался недолго, так как в 1850 г. был приглашен Бреславльским университетом на должность адъюнкт-профессора физики. Здесь он встретил знаменитого химика Бунзена (Bunsen, 1811—1899), с которым он затем многие годы работал в тесном сотрудничестве. В 1854 г. Бунзен перешел в Гейдельбергский университет и, когда там в 1855 г. освободилась кафедра физики, ему удалось привлечь в Гейдельберг и Кирхгоффа. В 1858 г. к ним присоединился

---

[1]) Полное решение задач этого рода было предложено Похгаммером: Pochhammer L., J. Math. (Crelle), т. 81, стр. 324, 1876.

[2]) Краткую биографию Кирхгоффа можно найти в книге Больцмана: Boltzmann L., Populäre Schriften, Leipzig, 1905.

Гельмгольц. Этой встречей в Гейдельбергском университете открылась замечательная научная эра.

Лекции трех выдающихся профессоров привлекали студентов из других немецких университетов и из-за границы. Кирхгофф и Бунзен работали совместно по спектральному анализу, а в 1859 г. первый из них опубликовал свои знаменитые работы в этой области. Он был не только очень хорошим лектором и большим авторитетом в теоретической физике, но в не меньшей степени также и экспериментатором, так что его студенты получали тщательную подготовку и в лабораторной технике. В 1868 г. Кирхгофф повредил случайно ногу, и это сильно отразилось на общем состоянии его здоровья. Он был уже не в состоянии столь интенсивно работать в своей лаборатории и вынужден был ограничить себя лишь теоретическими исследованиями. В 1875 г. он перешел в Берлинский университет и занял там кафедру теоретической физики, освободившись от руководства студенческими лабораторными занятиями. В 1876 г. вышла из печати его знаменитая книга по механике—первый том[1]) его лекций по теоретической физике. В 1882 г. он издал собрание своих трудов[2]). Состояние его здоровья продолжало ухудшаться, вследствие чего ему пришлось прекратить в 1884 г. чтение лекций. Он умер в возрасте 63 лет (в 1887 г.).

Густав Роберт Кирхгофф.

Как ученик Ф. Нейманна, Кирхгофф рано заинтересовался теорией упругости. В 1850 г. он опубликовал важную работу по теории пластинок[3]), в которой мы находим первую удовлетворительную теорию их изгиба. В начале статьи Кирхгофф дает краткий исторический обзор этой проблемы. Он отмечает первые попытки Софи Жермен получить дифференциальное уравнение изгиба пластинки, а также исправление ее ошибки Лагранжем, но не упоминает о предложенном Навье выводе уравнения пластинки, исходя из гипотез, относящихся к молекулярным силам

[1]) Kirchhoff G. R., Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik, 1-е изд., Leipzig, 1876.

[2]) Kirchhoff G. R., Gesammelte Abhandlungen, Leipzig, 1882.

[3]) J. Math. (Crelle), т. 40, 1850.

(стр. 148). Обсуждая работу Пуассона, он указывает, что вводимые последним три граничных условия (стр. 139) в общем случае не могут быть выполнены одновременно и что задача о колебаниях круглой пластинки решена этим ученым лишь потому, что рассмотренные им симметричные формы колебаний уже автоматически удовлетворяют одному из трех граничных условий.

Кирхгофф обосновал свою теорию пластинок двумя гипотезами, получившими ныне всеобщее признание. Эти гипотезы следующие: 1) каждая прямая, первоначально перпендикулярная к срединной плоскости пластинки, остается при изгибе прямой и нормальной к срединной поверхности изогнутой пластинки; 2) элементы срединной плоскости пластинки не испытывают удлинения при малых прогибах пластинки под поперечной нагрузкой. Эти допущения весьма близки по своему смыслу к гипотезе плоских сечений, принятой в наше время в элементарной теории изгиба брусьев. Исходя из этих двух предпосылок, Кирхгофф находит правильное выражение для потенциальной энергии V изогнутой пластинки:

$$V=\frac{1}{2}D\iint\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\right.$$
$$\left.+2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]dx\,dy. \quad \text{(a)}$$

В этом выражении $D=Eh^3/12(1-\mu^2)$—цилиндрическая жесткость пластинки, а w—прогиб ее срединной поверхности. Чтобы получить дифференциальное уравнение изгиба, Кирхгофф пользуется принципом виртуальной работы, согласно которому работа, произведенная нагрузкой q, распределенной по пластинке, на всяком возможном перемещении, равна приращению потенциальной энергии пластинки, т. е.

$$\iint q\,\delta w\,dx\,dy=\delta V. \quad \text{(b)}$$

Вводя сюда значение V из (a) и производя указанную операцию варьирования, Кирхгофф выводит хорошо известное уравнение изгиба пластинки

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q. \quad \text{(c)}$$

Далее, он показывает, что существуют только два граничных условия, а не три, как это предполагалось Пуассоном.

Кирхгофф применяет свои уравнения в теории колебаний круглой пластинки со свободным краем. Он исследует не только симметричные формы колебаний (для которых узловыми линиями являются концентрические окружности), но также и такие формы, для которых узловыми линиями являются диаметры пластинки и для которых граничные условия Пуассона перестают быть применимыми. Придя к общему решению, он выполняет большую вычислительную работу и дает таблицу частот, соответствующую различным формам колебаний. Он пользуется этими численными результатами для анализа опытных данных о колебаниях пластинок, полученных Хладни (стр. 146) и Штрельке (Strehlke). Он хотел установить по этим результатам правильное значение коэффициента Пуассона μ. Но, поскольку частоты лишь в слабой степени зависят от величины μ, эти опыты оказались непригодными для точного определения μ. Впоследствии, как мы уже упоминали (стр. 269), Кирхгофф поставил с той же целью свои собственные опыты.

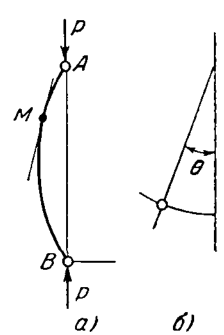


Рис. 131.

В курсе лекций[1]) Кирхгофф обобщил свою теорию пластинок, так что она охватила и тот случай, когда прогибы нельзя считать весьма малыми. Появление такой теории пластинок было большим шагом вперед в теории упругости, и вся его важность выяснилась позднее в том широком применении, которое она получила в проектировании различного рода тонкостенных конструкций.

Другим ценным вкладом Кирхгоффа в теорию упругости было проведенное им исследование деформации тонких стержней[2]). Он вывел общие уравнения равновесия для пространственной изогнутой кривой стержня в предположении больших прогибов. Он доказал далее, что если силы приложены только по концам стержня, то эти уравнения оказываются тождественными с уравнениями движения твердого тела относительно неподвижной точки. Благодаря этому стало возможным уже известные решения динамики твердого тела применить непосредственно к определению деформации тонкого стержня. Этот прием получил известность под наименованием *динамической аналогии Кирхгоффа*. В качестве простого примера применения этой аналогии сопоставим поперечное выпучивание сжатого стержня AB (рис. 131, *а*) с колебанием математического маятника (рис. 131, *б*). Оба эти явления описываются одним и тем же дифференциальным уравнением, существующая же между ними связь сводится к следующему: если точка M движется по кривой AB с постоянной скоростью, так что дугу AB она проходит за время, равное полупериоду маятника, и если M начинает удаляться от A в тот момент, когда маятник находится в крайнем положении и касательная к кривой в A образует с вертикалью угол, равный тому, которым определяется крайнее положение маятника, то и при всяком

[1]) См. его Mechanik, 2-е изд., стр. 450, 1877.

[2]) Borchardt's Journ. für Math., т. 56, 1858. См. также Gesammelte Abhandlungen, стр. 285.

промежуточном положении M направление касательной к кривой будет совпадать с направлением маятника. Подобное утверждение допустимо высказать также и в отношении обращения тонкой проволоки в винтовую и регулярной прецессии гироскопа.

Теория Кирхгоффа возбудила много споров, в ходе которых удалось устранить многочисленные трудности, найти путь к упрощенному ее построению и в то же время подтвердить ее конечные выводы. В более близкое к нам время она нашла применение в решении задач устойчивости упругих систем, как, например, выпучивания равномерно сжатого кругового кольца или поперечного выпучивания кривого стержня с узким прямоугольным поперечным сечением, подвергнутого чистому изгибу.

В заключение необходимо упомянуть и о статье Кирхгоффа, в которой дается исследование колебаний стержней переменного поперечного сечения[1]). Общее уравнение поперечных колебаний таких стержней было уже известно, и Кирхгофф показывает, что в определенных случаях оно поддается точному интегрированию. В частности, он рассматривает стержень, имеющий форму тонкого клина или весьма острого конуса, и вычисляет для обоих этих случаев частоты основной формы колебаний.

57. А. Клебш

А. Клебш (A. Clebsch, 1833—1872) родился в Кенигсберге. Он поступил в местный университет в ранней юности и получил там подготовку по теоретической физике под руководством Неймана. Под его же руководством Клебш написал и свою докторскую диссертацию о движении эллипсоида в несжимаемой жидкости. Получив в 1854 г. степень доктора, Клебш остался при Кенигсбергском университете в качестве преподавателя. Затем он работал в той же должности в Берлинском университете. Вскоре его научная работа начала обращать на себя внимание, и в 1858 г., в возрасте 25 лет, он получил назначение на должность профессора политехникума в Карлсруэ—учебного заведения, пользовавшегося высокой репутацией,—где ему было поручено вести курс теоретической механики. Здесь им была написана известная книга «Теория упругости твердых тел» («Theorie der Elasticität fester Körper», 1862)—его главный вклад в эту науку. С течением времени научные интересы Клебша начали склоняться к чистой математике[2]). Он прекратил преподавание в техническом учебном заведении и в 1863 г. стал профессором чистой матема-

[1]) K i r c h h o f f G. R., Gesammelte Abhandlungen, стр. 339—351.

[2]) Обзор научной деятельности Клебша в этой области дан его учеником Ф. К л е й н о м. См. его книгу: K l e i n F., Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im XIX Jahrhundert. См. также биографию Клебша в Math. Ann., т. 6, стр. 197—202; т. 7, стр. 1—55.

тики Гиссенского университета (Giessen). В 1868 г. он был избран на кафедру в Геттингене. Здесь проявился его блестящий талант ученого и педагога. Вместе со своим другом Карлом Нейманном, сыном Франца Неймана, он основал новый математический журнал «Mathematische Annalen» (1868), занявший ведущее место среди других периодических изданий по математике. Его лекции привлекали много студентов, так как он умел возбудить их интерес к математике и вдохновить к творческой работе в этой области. В 1872 г. он был избран ректором Геттингенского университета, однако ему пришлось недолго работать на этом посту, так как в том же году, в возрасте 39 лет, он внезапно скончался от дифтерита.

В 1861 г., когда ему было 28 лет, Клебш начал работать над своей книгой по теории упругости. В то время существовало лишь единственное руководство по этому предмету, именно книга Ламе. Французский автор интересовался приложением теории упругости к теоретической физике—в таких областях, как акустика, оптика. Клебш, преподававший механику инженерам, поставил себе задачей написать книгу, которая охватывала бы инженерные применения теории упругости. Его введение, знакомящее с понятиями напряжения и деформации, много короче, чем у Ламе. С самого начала он принимает, что строительные материалы изотропны и в этом предположении выводит все необходимые уравнения. Он полностью исключил проблемы, касающиеся оптики, зато ввел в свой курс теорию кручения и изгиба Сен-Венана и исследования Кирхгоффа о деформациях тонкого стержня и тонкой пластинки. Несмотря на это, книга Клебша тогда не пользовалась большой популярностью как руководство для инженеров по той причине, что научные интересы ее автора постоянно отвлекали его слишком далеко от простоты изложения. Он уделял больше внимания построению математических методов решения задач, чем разъяснению физического и технического значения получаемых им решений. К тому же, самобытность побуждала его обращаться к вопросам, которые вызывали у него в тот или иной момент особый интерес, в результате чего содержание книги Клебша потеряло необходимую стройность. Книга очень интересна как собрание собственных исследований автора, но это не та книга, которая могла бы быть пригодной для изучения теории упругости, в особенности теми, кто не интересуется специально математической структурой исследуемых проблем. Сен-Венан в своем переводе книги Клебша на французский язык внес много важных дополнений, и это расширенное ее издание еще и в настоящее время остается одним из самых полных руководств по теории упругости и ее применениям в технике.

Введение в книге Клебша содержит сжатое изложение вывода основных уравнений теории упругости, причем уже на 50-й странице автор переходит к применениям, определяя напряжения и деформации в полой сфере, находящейся под действием равномерно распределенного внешнего или внутреннего давления. В этой задаче нет ничего нового, но Клебш пользуется ею как ключом к теории радиальных колебаний сферы, предлагая оригинальное исследование корней в уравнении частот и математическое доказательство того, что все корни его вещественны и положительны. Он пользуется этим случаем также и для доказательства того, что состояние равновесия упругого тела определяется полностью, если даны действующие силы, а тело закреплено таким образом, что оно не может двигаться как неизменяемая система.

Следующий раздел книги Клебш посвящает задаче Сен-Венана. Он опускает соображения физического характера, введенные Сен-Венаном при использовании им здесь полуобратного метода, и ставит проблему в чисто математической формулировке: найти силы, которые должны быть приложены к торцам призматического бруса, если объемные силы отсутствуют, по боковой поверхности бруса не приложено никаких сил, но между продольными волокнами действуют лишь касательные напряжения в осевом направлении. Таким путем Клебш получает возможность задачи осевого растяжения, кручения и изгиба рассматривать и решать как единую задачу. Подобная трактовка вопроса принимает более сложный вид, чем у Сен-Венана, поскольку при этом подходе опускается физическая сторона явления и решение получается слишком абстрактным, чтобы заинтересовать инженера. Клебш проходит мимо тех многочисленных приложений, на которых останавливается Сен-Венан, демонстрирующий эффективность своего метода на балках различных поперечных сечений. В качестве примеров Клебш приводит случаи сплошного эллиптического бруса и полого бруса, поперечное сечение которого образовано двумя конфокальными эллипсами. Почти никакого практического интереса эти задачи не представляют, но Клебш обращается к ним для того, чтобы впервые ввести новый прием математической трактовки, а именно, использовать сопряженные функции в решении задачи Сен-Венана.

В следующей главе автор переходит к двумерным задачам, и это, вероятно, составляет самую ценную часть исследований Клебша в области теории упругости. С тех пор двумерные задачи привлекли к себе большое внимание, а достигнутые результаты нашли важные практические применения. Подход Клебша к этой задаче—опять чисто математический. При рассмотрении цилиндрического бруса он принимает, что силы и напряжения, обращавшиеся в нуль в задаче Сен-Венана, отличны от нуля и, наоборот, обращаются в нуль те силы и напряжения, которые учитываются в задаче Сен-Венана. В такой системе на поперечные сечения, перпендикулярные к оси бруса, не действуют никакие напряжения, а всякий отрезок бруса между двумя смежными поперечными сечениями представляет собой пластинку, нагруженную силами, распределенными по ограничивающей ее цилиндрической поверхности и параллельными ее торцам. Этот случай представляет собой *плоское напряженное состояние*. Клебш исследует условия, которым должно удовлетворять распределение сил по контуру при плоском напряженном состоянии, и дает общие выражения для перемещений. Затем он применяет эти общие выражения к круглой пластинке с заданными по контуру радиальными смещениями. В качестве следующего примера Клебш выбирает весьма тонкую пластинку, принимая для нее вместо ранее рассмотренной системы напряжений средние по толщине значения этих напряжений. Он показывает, что задача допускает решение при произвольном распределении напряжений по контуру, и дает общее решение для круглой пластинки. Как частный случай общей формы плоского напряженного состояния Клебш рассматривает изгиб пластинки парами, распределенными по контуру, и решает задачу для круглого диска с заданными по контуру перемещениями.

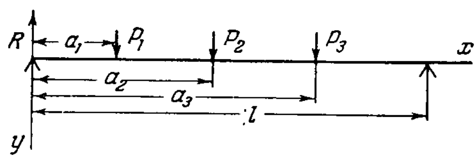


Рис. 132.

В следующем разделе книги мы встречаемся с задачами о деформации тонких стержней и тонких пластинок. Теория тонких стержней Кирхгоффа излагается (стр. 307) в несколько измененном виде. Значительно расширена теория изгиба пластинок, причем предлагаются уравнения для случая больших прогибов[1]). Наконец, Клебш, применяет теорию малых прогибов к изгибу круглой пластинки, защемленной по контуру и загруженной в некоторой ее точке силой, перпендикулярной к ее поверхности.

Последняя часть книги содержит элементарное изложение вопросов сопротивления материалов. Находя прогиб балки, загруженной несколькими поперечными сосредоточенными силами (рис. 132), он показывает, что определение постоянных интегрирования может быть упрощено, если интегралы дифференциальных уравнений равновесия для последовательных участков балки

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Rx,$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Rx + P_1(x-a_1),$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Rx + P_1(x-a_1) + P_2(x-a_2),$$

. . . .

[1]) См. сноску на стр. 264 его книги.

представить в нижеследующем виде:

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{Rx^2}{2} + C,$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{Rx^2}{2} + \frac{P_1(x-a_1)^2}{2} + C_1,$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{Rx^2}{2} + \frac{P_1(x-a_1)^2}{2} + \frac{P_2(x-a_2)^2}{2} + C_2,$$

. . . .

. . . .

$$EIy = -\frac{Rx^3}{6} + Cx + D,$$

$$EIy = -\frac{Rx^3}{6} + \frac{P_1(x-a_1)^3}{6} + C_1x + D_1,$$

$$EIy = -\frac{Rx^3}{6} + \frac{P_1(x-a_1)^3}{6} + \frac{P_2(x-a_2)^3}{6} + C_2x + D_2,$$

. . . .

. . . .

Из того условия, что в точках приложения нагрузок, т. е. для $x=a_1, x=a_2, x=a_3, \ldots$, два смежных участка изогнутой кривой должны иметь общую касательную и общий прогиб, следует, что $C=C_1=C_2\ldots$ и $D=D_1=D_2\ldots$ Это значит, что независимо от числа сил, необходимо в каждом случае вычислить лишь две постоянные интегрирования. Клебш распространяет свой метод и на те задачи, в которых, кроме сосредоточенных сил, действует и нагрузка, распределенная по всему пролету или его части. Далее, он пользуется им и в расчете равномерно нагруженных неразрезных балок. Для этих последних он предлагает чрезвычайно простые формулы опорных реакций при равных пролетах.

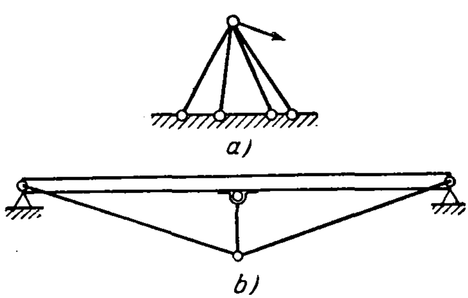


Рис. 133.

В последнем разделе книги излагается метод расчета ферм. Впервые здесь задача ставится в общем виде. Он показывает, что если в качестве неизвестных мы примем вместо усилий в стержнях смещения шарниров, то всегда придем к такому числу линейных уравнений, сколько у нас имеется неизвестных, так что подобная задача всегда допускает решение. Клебш доказывает это на двух простых задачах: 1) для случая одного шарнира, соединенного с фундаментом несколькими стержнями (рис. 133, *a*), и 2) для балки, усиленной системой из трех стержней (шпренгельной балки), как это показано на рис. 133, *b*.

Вклад Клебша в теорию упругости заключается главным образом в ее математическом оснащении. Подобно Коши он был прежде всего чистым математиком и именно в этой науке черпал новые методы решения конкретных задач. Его книга, в особенности же ее французский перевод с дополнениями Сен-Венана, занимает видное место в истории нашей науки.

Представляют интерес для механиков, занимающихся теорией упругости, также и некоторые оригинальные работы Клебша из области оптики. В особенности это относится к его исследованию колебательного движения упругой сферы, при котором смещения по поверхности обращаются в нуль[1]). Он пользуется в своем решении задачи сферическими функциями, причем значительно расширяет и самую теорию этих функций. В частном случае, когда ускорение обращается в нуль, мы приходим к решению статической задачи, рассмотренной впоследствии лордом Кельвином (см. стр. 319).

58. Лорд Кельвин

Уилльям Томсон, лорд Кельвин (William Thomson, Lord Kelvin, 1824—1907), родился в Бельфасте в шотландской семье[2]). Его отец, Джемс Томсон, был профессором математики в Королевском Бельфастском академическом институте. В 1832 г. его семья переехала в Глазго, где Джемс Томсон занял кафедру математики в местном университете. В 1834 г., в возрасте 10 лет, Уилльям Томсон был зачислен в Глазговский университет, где он изучал классические языки, математику и натуральную философию. Лекции по натуральной философии, которые читались в то время профессором Николем (J. P. Nichol), направили интересы юного Томсона к математике; Николь же обратил его внимание в 1840 г. на замечательную книгу Фурье «Аналитическая теория тепла» («Théorie analytique de la chaleur»). Содержание этой книги в сильнейшей степени повлияло на первоначальные научные работы Томсона. Позднее он вспоминал[3]): «Начало моего увлечения этими проблемами относится к тому времени, когда я в 1839 г., посещая занятия по натуральной философии в старшем классе Николя, преисполнился величайшим восхищением перед великолепием и поэзией Фурье... Я спросил Николя, считает ли он меня способным читать Фурье. Он ответил: „Возможно". Он

---

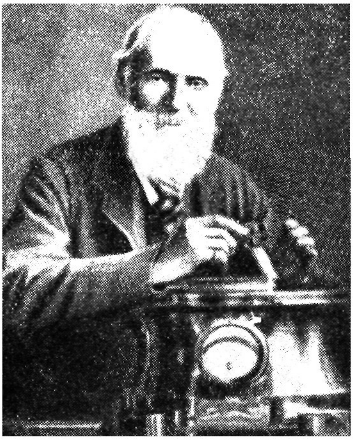
[1]) См. J. reine u. angew. Math., т. 61, стр. 195—202, 1863.

[2]) Подробная биография лорда Кельвина приведена в двухтомном сочинении: Thompson Silvanus P., The life of William Thomson, baron Kelvin of Largs, London, 1910.

[3]) См. стр. 14 упомянутой книги С. П. Томпсона.

ценил эту книгу выше всего на свете. Поэтому 1 мая 1840 г., в тот самый день, когда присуждались награды, я взял Фурье из университетской библиотеки; за две недели я овладел им целиком, прочтя книгу до последней строки».

Чтобы облегчить своим детям изучение иностранных языков, Томсон-отец увез свою семью на лето 1839 г. в Париж, летом же 1840 г. они путешествовали по Германии. Уилльям в то время был поглощен математикой и не испытывал ни малейшего интереса к немецкому языку. Он сообщает в своих воспоминаниях: «Отправившись тем летом в Германию вместе со своим отцом, братьями и сестрами, я захватил с собой Фурье. Отец, взяв нас с собой в Германию, потребовал, чтобы все остальные занятия были оставлены и чтобы все наше время было посвящено изучению немецкого языка. Мы остановились во Франкфурте, где мой отец снял на два месяца целый дом. Я взял за привычку тайком забираться ежедневно в подвал, чтобы читать там отрывок за отрывком из Фурье. Когда отец открыл это, он не поступил со мной очень строго»[1]).



Уилльям Томсон—лорд Кельвин.

В апреле 1841 г. Уилльям Томсон перешел из Глазговского университета в колледж св. Петра в Кембридже. Здесь он продолжал интересоваться сочинением Фурье, и в ноябре 1841 г. появилась в печати—в «Кембриджском математическом журнале» («Cambridge Mathematical Journal») его первая научная работа, посвященная рядам Фурье. В течение следующего года в том же журнале были напечатаны еще две его статьи более специального характера. В отношении математических способностей и познаний Томсон намного опередил остальных студентов своего курса, почему и ожидалось, что в 1845 г. он займет первое место с отличием за успехи в математике. Но к великому своему и своего отца огорчению он получил на выпускных экзаменах лишь второе место. Его биограф описывает это следующим образом: «Такая преданность познавательной деятельности высшего порядка... скорее препятствует, чем содействует в получении университетских наград и отличий... Чтобы обеспечить себе первое место в корпусе Университетского Совета, где происходят выпускные экза-

[1]) Thompson S. P., The life of... Kelvin, стр. 17.

мены, кандидат должен принести готовые решения уже известных задач, отшлифовать свою способность выписывать эти решения, суметь за короткий срок справиться с огромной массой книжного материала. Надрессированный за долгие месяцы своим репетитором или наставником в такого рода гимнастике, подобно тому как тренируют лошадей для скачек, кандидат действительно приобретал способность справляться с задачами частных типов и по специальному способу, одобренному тогдашней модой. Но такая система натаскивания не была приспособлена ни к тому, чтобы культивировать самородный талант, ни к тому, чтобы двигать вперед математическую науку. Она вдохновлялась фальшивым идеалом удачи и успеха и нередко приводила к тому, что в качестве первого отличника по математике награждался не лучший математик своего курса, а тот, кто лучше всех снарядился для скачек»[1]).

По окончании образования в Кембридже Томсон решил продолжать занятия по интересовавшей его области знания и с этой целью отправился в Париж. Франция в то время предоставляла наиболее широкие возможности для изучения математики и ее приложений в различных отраслях физики. Он встретил там Лиувилля, Штурма и Коши—ведущих математиков эпохи, и ему удалось привлечь их внимание к работе Грина (см. стр. 263), экземпляр которой он захватил с собой из Кембриджа.

Он познакомился также с некоторыми французскими физиками. Чтобы усовершенствоваться в технике экспериментирования, оно поступил в физическую лабораторию Французского колледжа (Collège de France), где работал совместно с профессором Реньо (Regnault), помогая ему в его известных экспериментальных исследованиях законов теплоты. К этому времени относится ознакомление Томсона с знаменитой работой Клапейрона «О движущей силе огня» («Mémoires sur la puissance motrice du feu»), в которой автор разъяснил цикл Карно. В своих научных работах раннего периода Томсон многим обязан сочинениям Карно, Фурье и Грина.

После четырехмесячных занятий в Париже Томсон в мае 1846 г. вернулся в Кембридж, а осенью того же года был избран в члены колледжа св. Петра. Он стал преподавателем математики и начал руководить индивидуальными занятиями студентов. Одновременно он взял на себя редактирование математического журнала «Cambridge and Dublin mathematical Journal». Здесь было напечатано несколько его статей по применению математики в теоретической физике.

Осенью 1846 г., в возрасте 22 лет, Уилльям Томсон был избран профессором натуральной философии Глазговского университета,

---

[1]) Thompson S. P., The life..., стр. 96.

где продолжал потом вести преподавание этого предмета в течение последующих 53 лет. Его биограф сообщает, что «для целей систематического преподавания он был плохим истолкователем, но глубоким, как его мировоззрение, и точным, как его язык, учителем. Он не мог прочесть лекции по самому обычному элементарному разделу физики для ординарных университетских студентов без того, чтобы его мысли не уносились всякий раз в самые потаенные области науки, куда лишь немногие сохраняли способность за ним следовать. Эти своеобразные отступления,—свидетельствует бывший слушатель его курса,—содержавшие в себе бесценные жемчужины его мысли, попросту улетучивались для всех, за исключением лишь самых способных и умных учеников, прислушивавшихся с жадным вниманием к сверкающему потоку, неистовому каскаду его гения. Его воображение отличалось живостью: в своем напряженном энтузиазме он, казалось не спешил, а несся. Человек растворялся в предмете; он был поистине вдохновенным, как художник в акте творения»[1]).

С самого начала своей преподавательской деятельности Томсон убедился, сколь большую важность для студентов представляет экспериментирование в физике. Он не удовлетворялся лишь тем, что сам сопровождал свои лекции демонстрациями опытов, но и организовал лабораторию, в которой получил возможность совместно со студентами исследовать свойства вещества. Это была первая физическая лаборатория такого рода в Британии. Важнейший вклад, внесенный Томсоном в физическую науку за первые годы его работы в Глазговском университете, относится к области термодинамики, но он собрал также богатый экспериментальный материал по сопротивлению материалов и теории упругости[2]). Эти результаты были им впоследствии использованы для подготовки статей в 9-е издание Британской энциклопедии; они получили широкую известность и высокую оценку[3]).

Обсуждая в этих статьях основные допущения, на которых строится теория упругости, Томсон разъясняет, что свойства реальных материалов иногда заметно отличаются от предписываемых им. Он отмечает, что строительные материалы не являются идеально упругими, и, исследуя их несовершенства, вводит понятие внутреннего трения, которое он изучает по затухающим колебаниям упругих систем. Из своих опытов он заключает, что это трение не пропорционально скорости, как это имеет место в жидкостях. По вопросу о модулях упругости автор подвергает строгой критике рариконстантную теорию (см. стр. 262), пользовавшуюся

---

[1]) См. книгу С. П. Томпсона, стр. 444.

[2]) См. статьи: A mathematical theory of elasticity, Trans. Roy. Soc. (London) (A), 1856. On The elasticity and viscosity of metals, Proc. Poy. Soc. (London) (A), 1865.

[3]) Эти статьи вышли затем в виде книги: Elasticity and heat, 1880.

признанием многих французских ученых. В своих возражениях против этой теории он ссылается на примеры пробки, желатина, индийского каучука. Томсон пользуется юнговским определением модуля упругости при простом растяжении и употребляет выражения: *вес модуля* и *длина модуля* (см. стр. 114). Он показывает, что длина модуля имеет простое физическое истолкование: скорость передачи продольных колебаний вдоль бруса равна скорости, приобретаемой телом при падении с высоты, равной половине длины модуля.

Опыты, проведенные над упругими телами, привели Томсона в пограничную область между теорией упругости и термодинамикой. Он исследовал температурные изменения, происходящие в телах, подвергнутых деформированию[1]), и установил, что величина модуля зависит от способа, каким создается напряжение в образце. Допустим, что в результате испытания на растяжение получена линия OA (рис. 134), представляющая диаграмму внезапного нагружения образца в пределах упругости. Диаграмма замедленного приложения растягивающей силы характеризуется обычно менее крутым уклоном, как это показано, например, на диаграмме линией OB. В первом случае между образцом и окружающей его средой никакого теплообмена не происходит, и мы имеем здесь дело с *адиабатическим растяжением*. Во втором случае мы предполагаем, что деформация происходит столь медленно, что в результате теплообмена температура образца остается практически постоянной, в этих условиях мы имеем *изотермическое растяжение*. Из диаграммы заключаем, что модуль Юнга для мгновенного загружения выше, чем для замедленного. Разница, поскольку дело идет о стали, весьма незначительна — около $^1/_3$ от 1%, — и в практических применениях ею обычно можно пренебречь. Образец, подвергшийся внезапному растяжению, становится обычно холоднее, чем окружающая его среда, а в результате выравнивания температур получает некоторое дополнительное удлинение, измеряемое на рис. 134 отрезком AB. Если теперь растягивающую нагрузку внезапно снять, образец сократится в длине и его состояние изобразится на диаграмме точкой C. Вследствие укорочения температура образца поднимется и потому возвращение в начальное состояние, представленное на диаграмме точкой O, произойдет лишь после охлаждения образца до температуры среды. Площадь $OABC$ представит поэтому количество механической работы, потерянной за один цикл.

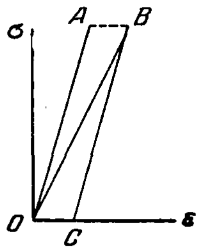


Рис. 134.

[1]) См. Elasticity and heat, стр. 19.

Существуют материалы, обладающие своеобразными свойствами; к числу их относится, например, индийский каучук, в условиях определенной температуры обнаруживающий нагревание при растяжении и охлаждение при устранении растягивающей силы. В подобных материалах, разъясняет Томсон, материал должен сокращаться в размерах при нагревании и удлиняться при охлаждении, поскольку в противном случае рассуждение, иллюстрируемое диаграммой 134, приводило бы к абсурдному заключению о возможности выигрыша механической энергии в результате совершения каждого цикла. В своих экспериментах Томсон применил каучуковую ленту, растянутую в вертикальном положении нагрузкой, подвешенной к ее нижнему концу, показав, как нагрузка приподнималась вверх, когда к ленте приближали нагретое до красного каления тело, и опускалась вниз, когда источник нагрева устранялся.

В дальнейшем Томсон провел общее исследование термических изменений, происходящих в упругих телах при их деформировании. При рассмотрении энергии тела он дал первое логическое доказательство существования так называемой потенциальной функции, представляющей собой энергию деформации и зависящей лишь от деформации измеренной относительно некоторого условно начального состояния, но не от способа, каким она достигается[1]). Эта работа является одним из самых важных дополнений, внесенных Уилльямом Томсоном в теорию упругости.

В 1860 г. на кафедру натуральной философии в Эдинбурге был избран П. Тэйт (P. G. Tait), и вскоре Томсон и Тэйт начали работать совместно. Оба чувствовали недостаток в книгах, которые можно было бы рекомендовать студентам, интересовавшимся той или иной областью теоретической физики. Эти два ученых решили, что им самим следует взяться за составление необходимых руководств; вот почему уже в следующем году они приступили к общей работе над изданием «Курса натуральной философии» («Treatise on natural philosophy»). Работа эта сильно замедлялась участием Томсона в ответственной работе по прокладке Атлантического телеграфа, требовавшей всей полноты его теоретического и экспериментального опыта. Только лишь к 1867 г. вышел из печати первый том их знаменитой книги. Содержание этого тома составляет механика твердых, упругих и жидких тел, причем в него вошло много оригинального материала из собственных открытий Томсона в теории упругости.

Еще на более ранней стадии своей научной деятельности Томсон дал решение[2]) уравнений теории упругости для бесконечной

---

[1]) Mathematical and physical papers, т. 1, стр. 291—313.

[2]) Mathematical and physical papers, т. 1, стр. 97.

однородной изотропной упругой среды. Теперь он использует это решение в таких важных задачах, как о силе, равномерно распределенной по сферическому сегменту бесконечно однородного тела, и о силе, действующей на бесконечно малый элемент такого тела. Он находит также полное решение для сферической оболочки и сплошной сферы при заданных напряжениях или смещениях на поверхности[1]).

Этим же решением Томсон пользуется и в своем исследовании жесткости Земли как планеты. В то время был поставлен вопрос: «Сохраняет ли Земля свою форму с практически абсолютной жесткостью недеформируемого тела, или же поддается как в своих верхних пластах, так и во внутренней массе деформирующим воздействиям притяжений Луны и Солнца? В какой-то мере она должна, конечно, деформироваться под этими воздействиями, поскольку никакое вещество не может быть бесконечно жестким, но достаточно ли велики эти приливы и отливы твердого материала Земли для того, чтобы они были доступны обнаружению каким-либо способом—прямым или косвенным,—это еще не установлено».

Исходя из предположения идеальной упругости, Томсон оценивает влияние упругой деформации твердого равномерно плотного тела Земли на приливно-отливные движения покрывающего его поверхность океана, причем находит, что если бы Земля была столь же жесткой, как сталь, то ее упругая деформация снизила бы высоту приливов в отношении приблизительно $^2/_3$ в сравнении с тем значением, которое получилось бы на основе теории, предполагающей, что Земля абсолютно жестка. Во второе издание книги была включена дополнительно статья Дж. Дарвина (G. H. Darwin) по этому вопросу, заканчивающаяся следующим выводом: «В целом мы вправе с уверенностью заключить, что если и имеются некоторые доказательства приливно-отливного деформирования земной массы, то это деформирование конечно мало, так что эффективная жесткость Земли по крайней мере столь же велика, как и стали»[2]).

В своей работе по теории тонких стержней Томсон дает подробное изложение динамической аналогии Кирхгоффа (стр. 307) и пользуется ею для вычисления перемещений в винтовых пружинах. Развивая теорию изгиба тонких пластинок, он простым способом разъясняет, почему элементарная теория Кирхгоффа дает достаточно точные результаты лишь в том случае, если прогибы малы в сравнении с толщиной пластинки. Весьма поучительные соображения приводятся им по вопросу о граничных условиях. Уже Кирхгофф показал, что для контура пластинки должны

---

[1]) Эта задача была решена еще Ламе, но другим методом (см. стр. 144).

[2]) Treatise on natural philosophy, ч. 2, стр. 460.

удовлетворяться лишь два граничных условия, а не три, как того требовал Пуассон. Томсон дает физическую интерпретацию такому снижению числа условий и, опираясь на принцип Сен-Венана (см. стр. 169) об упругой эквивалентности статически эквивалентных систем нагрузки, показывает, что распределение крутящих моментов по контуру пластинки может быть заменено статически эквивалентным распределением поперечных сил. На этом основании нам надлежит учитывать лишь два условия, относящихся к поперечным силам и изгибающим моментам на контуре[1]). В частном случае крутящих моментов, равномерно распределенных по краям прямоугольной пластинки и производящих равномерную антикластическую кривизну, замена крутящих моментов поперечными силами приводит к интересной системе прямоугольной пластинки, нагруженной перпендикулярными к срединной плоскости силами P, P на концах одной диагонали и силами $-P$, $-P$ на концах другой. Такую систему легко можно приложить к пластинке, а полученные при этом прогибы могут быть использованы для опытного определения жесткости пластинки при изгибе.

Решая задачу кручения Сен-Венана, Томсон применяет метод сопряженных функций, введенный Клебшем, используя его для вычисления напряжений и угла закручивания бруса с поперечным сечением в виде кольцевого сектора.

Данное Томсоном в «Курсе натуральной философии» изложение теории упругости представляет собой первое на английском языке систематическое сочинение по этому вопросу. Оно оказало большое влияние на будущих научных работников в этой области в Англии.

В 1866 г. была установлена телеграфная связь между Англией и Америкой. Успех этого важного мероприятия в значительной степени был обязан научной консультации Томсона и его активному и энергичному участию в работе. В знак признания ценности его трудов и его высокого положения в научном мире ему был пожалован дворянский титул (лорда). Он был признан не только как величайший физик Англии, но и как изобретатель и как инженер-исследователь. С этого времени значительная часть его досуга расходовалась на проектирование инструментов и технические консультации.

Широкий план «Курса натуральной философии», который должен был включить в себя все отрасли теоретической физики, не был никогда осуществлен полностью. Первый том вышел вторым

[1]) См. Treatise on natural philosophy, стр. 724—729. Томсон дает здесь математическое доказательство законности замены одной системы сил другой, статически ей эквивалентной. Это—первый опыт обоснования принципа Сен-Венана. Впоследствии этой же проблемой занимался Морис Леви (L e v y Maurice, J. mathématiques, т. 3, стр. 219—306, 1877).

изданием: часть I в 1879 г., часть II—в 1883 г. Тем не менее Кельвин продолжал интересоваться свойствами материалов. Под влиянием статьи Гельмгольца о вихревом движении[1]) он построил теорию вихревых колец. Он показал, что «в совершенной среде вихревые кольца носят стойкий характер и во многих отношениях обладают качествами, присущими материальным атомам: постоянством, упругостью и способностью воздействовать друг на друга через промежуточную среду».

Идеи Кельвина о строении материи выкристаллизовались впоследствии в его знаменитых «Балтиморских лекциях», прочитанных в 1884 г. перед избранной аудиторией физиков и математиков. Значительная часть этих лекций посвящена теории упругости, распространению света в изотропных и анизотропных упругих телах, а также в упругой среде с погруженным в нее бесконечным множеством гиростатических молекул. Он не принимает электромагнитной теории света и пытается усовершенствовать «упругую» теорию. Он часто повторял: «Я никогда не остаюсь довольным самим собой до тех пор, пока я не сконструирую механической модели явления». Для того чтобы объяснить оптические явления, он изобрел несколько типов молекулярных структур. Текст «Балтиморских лекций» был подготовлен и воспроизведен посредством папирографа в 1884 г., но Кельвин сохранял интерес к вопросу и в дальнейшем, и после многочисленных исправлений и дополнений, 25 лет спустя после их прочтения, эти лекции были изданы в виде книги.

Книга «Балтиморские лекции» вместе с главами «Курса натуральной философии», относящимися к той же теме, получили широкое распространение среди специалистов по теории упругости, в результате чего, как мы увидим, ряд выдающихся английских ученых конца XIX и начала XX века проявили активный интерес к этой науке.

Лорда Кельвина не раз пытались привлечь в Кембридж на кафедру Кавендиша, но он всякий раз предпочитал оставаться в Глазго, где и протекала вся его педагогическая деятельность до ее завершения в 1899 г. К этой дате было приурочено чествование юбилея лорда Кельвина[2]). На торжество съехалось множество ученых со всех частей света, чтобы принести великому деятелю науки свои поздравления. В 1899 г. лорд Кельвин вышел в отставку со своей профессорской должности, но обратился в Академический Совет с просьбой о назначении его резервным ученым, с тем чтобы за ним сохранилось право продолжать занятия в Лаборатории натуральной философии. В 1907 г., 17 декабря, лорд Кельвин скончался.

---

[1]) J. Math. (Crelle), 1858, английский перевод: Phil. Mag., 1867.

[2]) К этому же сроку вышла книга «Lord Kelvin», в которой содержались его биография, а также описание чествования юбилея.

59. Джемс Клэрк Максвелл

Д. К. Максвелл[1]) (James Clerk Maxwell, 1831—1879) родился в Эдинбурге, но большую часть своего детства провел в загородном доме, принадлежавшем его родителям. В 1841 г. мальчик был взят в Эдинбург и определен в школу при Эдинбургской академии, где он учился до 1847 г., проводя летние каникулы в деревне. Интересы Джемса к школьным занятиям пробуждались медленно, но с тех пор как в 1844 г. в классе стали проходить геометрию, скоро обнаружились и его математические способности. Он с большой усидчивостью отдавал свои силы математике и в 1845 г. получил медаль за успешную сдачу экзаменов по этому предмету.

Джемс Клэрк Максвелл.

Отец Дж. Максвелла часто бывал в академии и при случае брал с собой сына на заседания Эдинбургского общества искусств и Королевского общества. На одном из таких заседаний обсуждался доклад о формах этрусских погребальных урн, причем возник вопрос, каким образом можно построить совершенный овал. Мальчик заинтересовался задачей и предложил остроумное решение ее. Он изобрел также простое механическое устройство из намотанной вокруг булавок нитки для вычерчивания овальных кривых. Его работа была представлена в 1846 г. профессором Форбсом (Forbes) Эдинбургскому королевскому обществу и была напечатана в «Трудах» этого общества[2]). Весной 1847 г. Джемсу представилась возможность побывать в лаборатории Николя, изобретателя поляризационной призмы, и с тех пор он обнаружил высокое умение в экспериментировании с поляризованным светом. Для осуществления поляризации он пользовался отражением от стеклянного зеркала. Впоследствии Николь подарил ему призмы, и Максвелл сконструировал из них прибор для оптического анализа напряжений в поляризованном свете.

[1]) Полная биография Максвелла имеется в книге: Campbell L., Garnett W., The life of James Clerk Maxwell, London, 1882. См. также предисловие к собранию его трудов, изданному Нивеном (Niven W. D.): Maxwell J. C., The scientific papers, Cambridge university press, 1890.

[2]) Proc. Roy. Soc. Edinburgh, т. 2, стр. 89—93.

Осенью 1847 г. Максвелл поступил в Эдинбургский университет, где ему была предоставлена возможность работать без всякого принуждения и следовать своим собственным склонностям в выборе предметов для своих занятий. Он слушал лекции по натуральной философии профессора Форбса, продолжал свои опыты с поляризованным светом и просиживал часами за штудированием книг по механике и физике. В письме от марта 1850 г. он писал одному из своих друзей: «Я прочел „Лекции“ Юнга, „Принципы механики“ Уиллиса, „Технику и механику“ Мозли, „Теплоту“ Диксона и „Оптику“ (Répertoire d'optique) Муаньо... У меня имеются кое-какие намерения относительно кручения проволок и стержней, но привести их в исполнение не удастся до каникул; с количественными результатами экспериментов по сжатию стекла, желатина и т. п. дело сделано; далее идут вопросы о связи между оптическими и механическими постоянными, о желательности их определения и т. д., затем висячие мосты, цепные линии, упругие кривые». Мы видим, что уже в то время Максвелл интересовался теорией упругости.

В 1850 г. в Эдинбургском королевском обществе Максвеллом был прочитан доклад «О равновесии упругих тел» («On the equilibrium of elastic solids»). Автор начинает в нем с критики теории малого числа упругих постоянных, ссылаясь при этом на работу Стокса[1]), и выводит уравнения равновесия изотропных тел, применяя две упругие постоянные. Он использует затем уравнения для рассмотрения некоторых частных задач. Большая часть их была уже решена раньше другими авторами, но никто из них до сих пор еще не уделял такого внимания опытной проверке теоретических результатов. Он останавливается на случае «полого цилиндра, наружная поверхность которого неподвижна, внутренняя же поверхность приводится во вращательное движение на малый угол $\delta\theta$ парой, момент которой равен μ». Используя уравнения равновесия в полярных координатах, он без труда показывает, что в этих условиях возникают касательные напряжения и что их величина обратно пропорциональна квадрату расстояния рассматриваемой точки от оси цилиндра.

Чтобы проверить результат, он прибегает к методу фотоупругости, используя для этой цели желатин из рыбьего клея, отлитый в горячем состоянии в пространство между двумя концентрическими цилиндрическими формами. По охлаждении это вещество превращалось в твердую, пригодную для экспериментирования массу. Он сообщает: «Если цилиндр рассматривать в поляризованном свете, направленном параллельно его оси, то разница в замедлении противоположно поляризованных лучей в каждой

---

[1]) Trans. Cambridge Phil. Soc., т. 8, ч. 3. Доклад прочитан в апреле 1845 г.

точке цилиндра будет обратно пропорциональна квадрату расстояния от оси цилиндра... Видимым выражением этого будет система цветных колец, располагающихся в порядке, обратном по отношению к тем кольцам, которые возникают в одноосных кристаллах, т. е. таким образом, что окраска их восходит по шкале спектра—по мере приближения к центру, причем расстояния между кольцами одновременно уменьшаются. Вся система перекрещивается двумя темными полосами, наклоненными под углом в 45° к плоскости первоначальной поляризации». Максвелл наблюдал эти разноцветные кольцевые узоры и воспроизводил их в акварели[1]). По словам биографа, «Максвелл был даровитый рисовальщик и любил развлекаться изготовлением любопытных узоров для вышивок. Его рисунки обращают на себя внимание гармонией красок».

В качестве второй задачи Максвелл исследует кручение стержней кругового профиля и использует результаты своего анализа для опытного определения модуля сдвига. В следующих, третьем и четвертом, примерах автор возвращается к поставленным Ламе проблемам о напряжениях в полом цилиндре и полой сфере, вызванных равномерным давлением. Максвелл использует полученные решения для оценки некоторых экспериментальных результатов, относящихся к определению сжимаемости жидкостей. Он замечает: «Некоторые из тех, кто отвергает математические теории, как не отвечающие реальности, предполагали, что если стенки резервуара достаточно тонки, то при равных давлениях извне и изнутри сжимаемость резервуара не должна влиять на результат. Нижеследующие расчеты показывают, что кажущаяся сжимаемость жидкости зависит от сжимаемости резервуара и не зависит от толщины стенок при равенстве давлений».

Пятым вопросом Максвелл исследует задачу о чистом изгибе балки прямоугольного профиля; здесь автором дается интересное дополнение к элементарной теории, посвященное рассмотрению давления между продольными волокнами, возникающего в результате искривления балки. Далее Максвелл обсуждает (как шестой случай) изгиб равномерно нагруженной круглой пластинки. Эта тема была им поставлена с целью выяснения возможности приготовления вогнутого зеркала из посеребренного стекла путем выгибания. Максвелл вычисляет радиус кривизны в центре пластинки и замечает, что телескоп, выполненный по этому принципу, мог бы служить одновременно и барометром-анероидом, поскольку в нем фокусное расстояние изменялось бы обратно пропорционально атмосферному давлению.

---

[1]) Эти рисунки были приложены к его статье. Они воспроизводятся также в биографии Максвелла, составленной Кэмпбэллом и Гарнетом, но отсутствуют в собрании его трудов «Scientific papers».

Далее (7-й случай), Максвелл определяет крутящий момент, возникающий в результате удлинения продольных волокон в круглом цилиндре, подвергшемся кручению, причем указывает, что в формулу крутящего момента должен входить член, пропорциональный кубу угла закручивания, как это было указано ранее Томасом Юнгом.

В качестве 8-го случая Максвелл рассматривает важную задачу о напряжениях, вызванных центробежной силой во вращающемся тонком круглом диске, и дает правильную формулу для тангенциальных напряжений. Здесь мы встречаемся с первой удовлетворительной трактовкой этой проблемы[1]).

Случаи 9—11 относятся к температурным напряжениям в полых цилиндрах и полых сферах. Решения Дюамеля (см. стр. 293) остались, по-видимому, неизвестными Максвеллу.

В 12-м примере Максвелл вычисляет прогиб свободно опертой балки и дает формулу, в которой учитывается влияние поперечной силы на величину прогиба. Это делается в том предположении, что названные напряжения равномерно распределены по поперечному сечению.

Далее (13-й случай), Максвеллом определяются напряжения, возникающие, когда две цилиндрические поверхности, оси которых перпендикулярны к плоскости бесконечной упругой пластинки, одинаково закручиваются в одном и том же направлении. Результирующее напряжение в некоторой точке получается при этом путем наложения напряжений, произведенных каждым из двух вращающихся цилиндров в отдельности. При этом делается ссылка на первый из разобранных случаев. Полученные им путем вычисления изохромы показаны на рис. 135, причем теорию Максвелл контролирует экспериментом. Он сообщает: «Я получил эти кривые на желатине из рыбьего клея, использованном в случае 1; лучше всего их можно обнаружить в поляризованном по кругу свете, поскольку тогда они становятся видимыми без перерывов и их сходство с вычисленными кривыми становится более явным».

Следующая, четырнадцатая, задача Максвелла—определение напряжений в треугольной пластинке из неотожженного (неотпущенного) стекла. Задача эта сложнее, и мы не располагаем для нее теоретическим решением, на которое могли бы опираться в наших вычислениях. Максвелл находит выход в экспериментальном использовании методики фотоупругости и получает в поляризованном по кругу свете изохромы. Затем, просвечивая образец плоскополяризованным светом, он определяет направления главных напряжений и строит систему изоклин, представлен-

---

[1]) В уравнении (59) «Собрания трудов» (Scientific papers) на стр. 61 имеется опечатка.

ных на рис. 136. «По этим кривым можно построить другие, которые своими направлениями укажут направления главных осей в каждой точке. Такие кривые направлений сжатия и растяжения

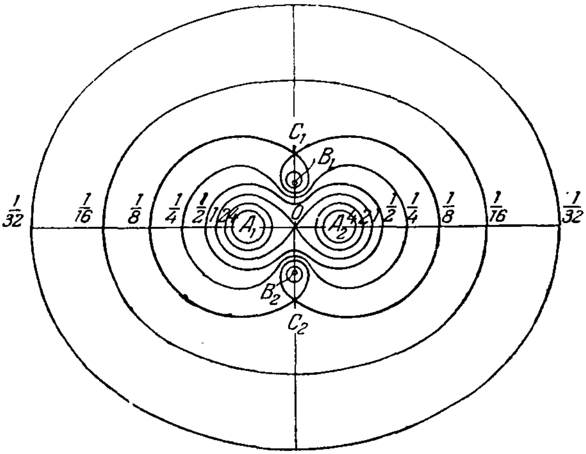


Рис. 135.

показаны на рис. 137; кривые, направления которых соответствуют направлениям сжатия, обращены вогнутостью к центру треугольника и пересекают под прямыми углами кривые растя-

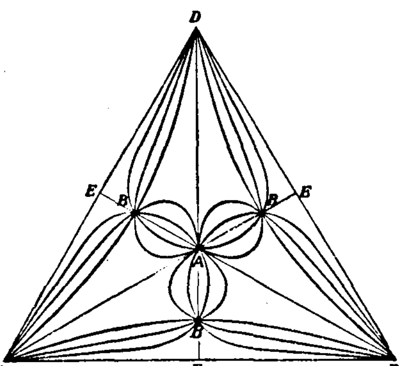


Рис. 136.

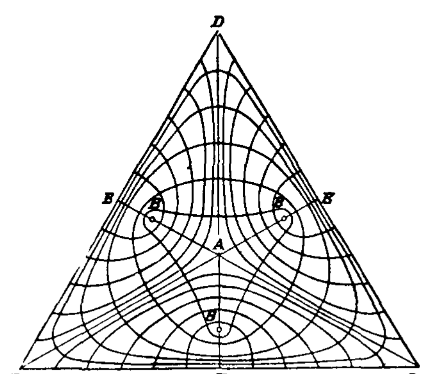


Рис. 137.

жения». Имея такую систему *траекторий напряжений*, Максвелл показывает, каким образом по ним вычисляются главные напряжения. Рассматривая элементарный криволинейный прямоугольник, ограниченный двумя смежными линиями сжатия и двумя смежными линиями растяжения, он пишет уравнение равновесия

$$q - p = r \frac{dp}{ds}, \qquad (a)$$

где q—главное сжимающее напряжение, p—главное растягивающее напряжение, r—радиус кривизны траектории сжатия, ds—расстояние между двумя последовательными траекториями сжатия. Таким образом введенное им здесь уравнение (a) оказывается тем же самым, что и примененное им в решении проблемы Ламе, где через r обозначалось радиальное расстояние точки и ds было равно dr. Так как разность $q—p$ известна из фотоупругого испытания, величины же r и ds могут быть взяты из диаграммы траекторий, то значения p можно получить в результате последовательного интегрированного уравнения (a), начиная с контура, на котором значения p известны.

Мы видим, что Максвелл полностью разработал технику оптического метода анализа напряжений в поляризованном свете, нашедшую в настоящее время широкое применение в исследовании двумерных задач. Он заметил также свойство, обнаруживаемое некоторыми прозрачными материалами и используемое ныне в трехмерной фотоупругости. Так, в описании своих опытов по кручению (случай 1) он сообщает: «Если, сохраняя крутящую нагрузку, дать возможность желатину высохнуть, то мы получим затвердевшую пластинку из рыбьего клея, которая по-прежнему будет действовать на поляризованный свет, если даже крутящий момент и будет устранен... Два других некристаллических вещества обладают способностью сохранять поляризационную структуру, созданную сжатием. Первое из них—это смесь воска и смолы, спрессованная в тонкую пластинку... Другое вещество, обладающее сходными свойствами,—это гуттаперча. Это вещество в своем обычном состоянии и в холодном виде непрозрачно даже в тонких пленках; но если такую пленку постепенно растягивать, она сможет удлиниться более чем вдвое в сравнении со своей первоначальной длиной. В таком состоянии она обладает сильно выраженной способностью к двойному лучепреломлению, которую она сохраняет столь стойко, что используется для поляризации света».

Максвелл проделал эту серьезную работу по теории упругости, включая сюда и оптический метод анализа напряжений в поляризованном свете, прежде чем ему исполнилось 19 лет. Осенью 1850 г. он отправился в Кембридж, чтобы продолжать там свои занятия.

Относительно жизни Максвелла в Кембридже мы имеем нижеследующее свидетельство профессора П. Тэйта, учившегося с ним на одном курсе в Эдинбургском университете и перешедшего в 1848 г. в Кембриджский: «Он (Максвелл) явился в Кембридж осенью 1850 г. с массой знаний, поистине безграничной для столь молодого человека, но находившейся в состоянии такого беспорядка, что это привело в ужас его руководителя-методиста. Хотя этим руководителем был Уилльям Хопкинс, ученик в значительной мере пошел своим собственным путем, и можно с уверенностью утверждать, что никто еще за последние годы из числа претендентов на отличие по математике не вступал в корпус университетского Совета с более неудовлетворительной подготовкой к выполнению оплачиваемой работы, чем Клэрк Максвелл. Исключительно лишь благодаря силе интеллекта, хотя и при ничтожно минимальном умении пользования им с выгодой для удовлетворения экзаменационных требований, он все же занял второе место по конкурсу и был приравнен с получившим первое место Раузом (E. J. Routh) в более высоком испытании на премию Смита (Smith's Prize)».

По окончании курса Максвелл остался в Кембридже и приступил к чтению лекций по курсам гидростатики и оптики. Его научная работа в это время была связана с измерениями сочетаний цветов и выяснением причин цветовой слепоты. Он интересовался также электричеством и напечатал статью о силовых линиях Фарадея. В 1856 г. он был избран профессором колледжа Марискаля в Абердине, где в 1856—1860 гг. преподавал натуральную философию. В то же самое время он продолжал свои занятия по исследованию восприятия цветов, а также выполнил работу по изучению устойчивости колец Сатурна. К своему труду по кинетической теории газов он приступил также в Абердине, и его первый доклад на эту тему был прочитан в Британской ассоциации в 1859 г.

В 1860 г. Максвелл был избран на кафедру Королевского колледжа в Лондоне, где на протяжении 1860—1865 гг. читал натуральную философию и астрономию. За это время вышли из печати его известные мемуары по кинетической теории газов и по электричеству. Его ценные достижения в теории сооружений, на которых мы останавливались выше (см. стр. 245), также были опубликованы в это время.

Преподавательская работа в Королевском колледже отнимала у Максвелла много времени, поэтому, чтобы расширить возможности самостоятельной научной работы, он решил отказаться от кафедры и уединиться в своей шотландской усадьбе. Здесь он смог отдавать все свои силы подготовке книги по теории теплоты и работать над классическим трактатом по электричеству и магнетизму.

В связи с появлением из печати работы Эйри (G. B. Airy), о деформациях балок[1]) Максвелл вернулся к своей идее взаим-

[1]) Phil. Trans, 1863.

ных фигур и разработал общую теорию диаграмм напряжений для трехмерных систем напряжений[1]). Он показывает, что общее решение уравнений упругости может быть выражено с помощью трех функций напряжения. Прилагая свою теорию к двумерным задачам, он заключает: «Предложенные Эйри решения задач, разобранных им в статье, не удовлетворяют в точности условиям, выведенным из теории упругости. И это связано с тем, что соображения, касающиеся упругой деформации, не вводятся явно в его исследование». Пользуясь своей теорией в применении к свободно опертой балке прямоугольного сечения, равномерно нагруженной по верхней грани, он находит, что точное решение отличается от предложенного Эйри только по величине продольных напряжений и что наибольшее значение расхождения равно 0,314 q, где q—интенсивность нагрузки.

Интересное сопоставление между научными мировоззрениями Максвелла, Стокса и лорда Кельвина приводится в книге Джозефа Лармора «Сэр Джордж Габриэль Стокс» (Larmor Joseph, Sir George Gabriel Stokes, стр. 217): «У Максвелла всем руководило научное воображение; Стокс возводил осторожность в крайность. Максвелл был неистощим в построениях и раскрытии всевозможных логических и физических моделей и образов для различных форм активности молекул, образующих основу материи. Опубликованные исследования Стокса характеризуются, как преобладающим тоном, точностью и строгой оформленностью определений, относящихся к свойствам и закономерностям вещества, взятого в массе, чем исключается даже всякая нужда в использовании понятия молекулы. Кельвин занимает, пожалуй, среднее положение между ними. В основных особенностях научного творчества его можно определить, следуя его собственному постоянному признанию, как ученика Стокса, однако наряду с этой практической жилкой в нем билось и конструктивное воображение, которое так же, как и у Фарадея, составляло главный источник вдохновения Максвелла, хотя оно и останавливалось здесь перед рискованными полетами в неведомое, которые увенчивались всегда таким успехом в творчестве Максвелла».

В 1871 г. Максвелл был вынужден оставить свое пристанище в Шотландии и принять профессорскую должность в Кембридже. К этому времени университет полностью признал важность экспериментальной работы в таких областях физики, как теплота, электричество и магнетизм. Ректор, герцог Девоншайрский, предоставил крупные фонды на сооружение физической лаборатории, и Максвелл был избран ее первым директором. За этот последний период своей жизни (1871—1879) ему пришлось отдать

[1]) Phil. Trans, т. 26.

много сил административным обязанностям по этой новой лаборатории. Он много помогал и в общем руководстве университетом. Он держался того взгляда, что научные занятия в университете должны вестись в тесном контакте с работой других научных институтов и что в экзаменационные работы по математике должны быть введены задания из различных отделов физики. Он принял активное участие в подготовке закона об экзаменах, вступившего в силу в 1873 г.

ГЛАВА IX

РАЗВИТИЕ НАУКИ О СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ НА ПРОТЯЖЕНИИ ПОСЛЕДНЕЙ ТРЕТИ XIX ВЕКА

60. Лаборатории механических испытаний материалов

Как мы уже отмечали, на начальной стадии использования железа и стали в строительных сооружениях и в машиностроении возникла необходимость в экспериментальном изучении механических свойств этих материалов. В первое время испытания ограничивались обычно определением предела прочности (временного сопротивления), но скоро обнаружилось, что свойства железа и стали зависят и от тех технологических процессов, которым они подвергаются при изготовлении, и что во всяком случае знания одного предела прочности недостаточно, если стоит задача подобрать надлежащий материал для того или иного конкретного назначения. Более глубокое и детальное исследование механических свойств материалов приобрело существенно важное значение для практики. Подобные испытания требуют специального оборудования, и мы увидим, что рассматриваемый нами период характерен быстрым ростом сети специальных лабораторий для испытания материалов, возникавших одна за другой в разных странах.

Вёлер (Wöhler) в Германии был сторонником организации лабораторий государством; в Англии же лаборатории основывались по частной инициативе. Одним из первых успешных примеров последнего типа явилась лаборатория Дэвида Киркальди (David Kirkaldy), открытая в 1865 г. в Саусуорке (Лондон). В предисловии к своей известной книге[1]) Киркальди сообщает: «Фирма Роберт Нэйпир с сыновьями, получив заказы на изготовление некоторого количества котлов высокого давления и судовых машин, для которых весьма большое значение имело сочетание малого веса с прочностью, наметила вместо обычно приме-

[1]) Kirkaldy D., Results of an experimental inquiry into the tensile strength and other properties of varions kinds of wrought-iron and steel, Glasgow, 1862.

няемого сварочного железа использовать в первом случае термически обработанный металл, во втором—пуддлинговую сталь. Поскольку, однако, эти материалы лишь недавно вошли в упо-

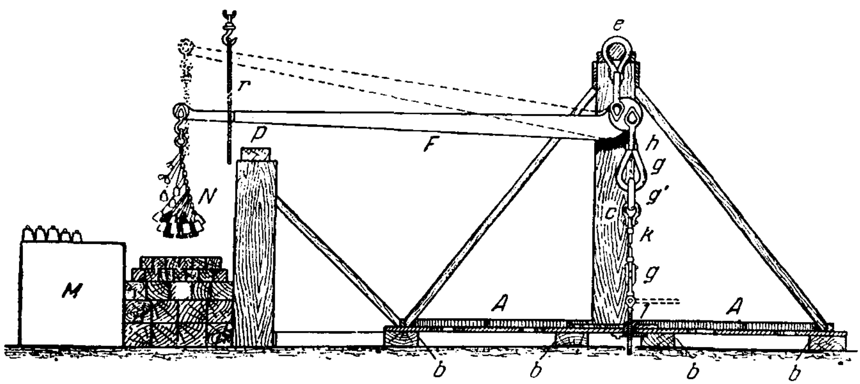


Рис. 138. Испытательная машина Киркальди.

требление, было признано благоразумным, прежде чем их применить в дело, удостовериться в их сравнительных достоинствах. С этой целью был сконструирован прибор, описание которого приводится ниже. Первоначально имелось в виду подвергнуть испытанию лишь несколько образцов каждого материала, но испытания оказались столь интересными сами по себе и вместе с тем столь многообещающими в смысле возможности получения практически важных результатов, что я решился с санкции руководителей фирмы Нэйпир расширить опыты, насколько позволяли время и средства, далеко за пределы того, что предусматривалось вначале. Испытания начались 13 апреля 1858 г. и были закончены 18 сентября 1861 г.». На рис. 138 показана машина, построенная и примененная Киркальди в его экспериментальной работе, а на рис. 139—форма использованных им образцов и способ их захвата в испытательной машине. Со столь простым оборудованием Киркальди сумел получить весьма важные результаты, и его книга ко времени своего появления из печати содержала наиболее подробные описания свойств железа и стали, какими только в то время можно было располагать.

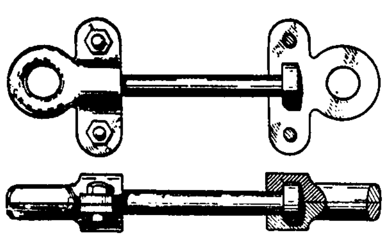


Рис. 139. Образцы, примененные Киркальди в испытаниях на растяжение.

Испытывая сравнительно короткие образцы[1]) и пользуясь грубыми измерительными инструментами, Киркальди был лишен возможности измерять упругие удлинения или вычислять модули Юнга. Его эксперименты давали разрушающую нагрузку и полное (абсолютное) удлинение образцов. В некоторых случаях образец подразделялся по своей длине рисками через каждые 12,5 *мм* ($^1/_2''$), причем расстояния между рисками измерялись после испытания. Таким путем было установлено, что на значительной части своей длины образец удлинялся равномерно и сохранял цилиндрическую форму и что только ближайшие к месту разрыва участки обнаруживали сравнительно большую деформацию и значительное местное сужение площади поперечного сечения. Отсюда Киркальди заключил, что отношение полного абсолютного удлинения к начальной длине зависело от соотношения размеров испытанного образца. Он был первым, рекомендовавшим измерять поперечное сужение образца, полагая, что относительное уменьшение площади поперечного сечения в месте разрыва является важной характеристикой материала. Он убедился, что одного лишь знания величины временного сопротивления недостаточно для каких-либо выводов о качестве материала: высокая прочность на растяжение вовсе не является доказательством того, что качество материала высоко, поскольку он может быть при этом столь твердым и хрупким, что будет лишен какой бы то ни было способности к гнутью и скручиванию. Совсем, однако, другое дело, если в основу сравнения мы положим величину деформации при разрушении и сужение площади в месте разрыва, поскольку в таком случае нам представится возможность правильно решить, с одной стороны, имеет ли большая деформация (напряжение) при разрушении своей причиной высокое качество железа: его плотность, мелкозернистость и умеренную пластичность, или же попросту его следует признать весьма твердым и недеформируемым, и, с другой стороны, найти, что низкое значение деформации (напряжения) при разрушении должно быть приписано рыхлости структуры или чрезмерной пластичности, несмотря на весьма плотное и чистое качество. В своих таблицах автор дает два значения для предельного сопротивления, они вычисляются по начальной площади сечения и по площади сечения разрыва.

Киркальди был, вероятно, первым, осознавшим влияние формы образца на предельное сопротивление. Сравнивая некоторые из своих результатов с полученными на коротких образцах того же материала, но переменного поперечного сечения, он

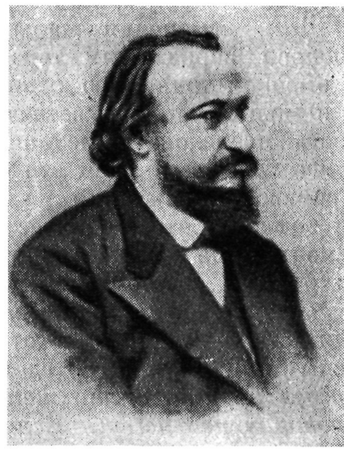
---

[1]) Для того чтобы удовлетворительно измерять упругие удлинения и получить модуль Юнга с достаточной точностью, Ходкинсон пользовался стержнями длиной 15 *м*.

заключает: «Этим, следовательно, подтверждается, что величина деформации образца при разрушении существенно зависит от его формы—важного фактора, остававшегося до сих пор не замеченным и даже не заподозренным никем, насколько известно автору. Это—еще один лишний пример, из числа многих, которые можно было бы привести, чтобы засвидетельствовать абсолютную необходимость (и это замечание применимо к многочисленным иным вопросам, не только к объекту нашего труда) знать в точности условия, при которых производились те или иные испытания, прежде чем иметь право объективно сравнивать результаты, полученные в разных условиях. Из вышеприведенных фактов должно стать совершенно очевидным, что мы не вправе судить о достоинствах двух кусков железа или стали на основании лишь сравнения их деформаций или напряжений при разрушении, если один из них имел постоянный диаметр на длине в несколько дюймов, другой же—лишь на незначительной части».

Киркальди проявлял большой интерес к усталостным испытаниям стали и описал в своей книге дискуссию по этому вопросу, развернувшуюся в 1850 г. на заседаниях Института гражданских инженеров под председательством Роберта Стефенсона (см. стр. 197). Разделяя мнение председателя о том, что колебания не способны вызвать рекристаллизацию стали, он ставит свои собственные опыты в подтверждение того, что гипотеза рекристаллизации ничего не вносит для объяснения хрупкого характера усталостного излома. Он показывает возможность хрупкого излома пластичных материалов, изменяя форму образца таким образом, чтобы распространение сужения в поперечном сечении в месте разрушения было каким-либо образом стеснено или ограничено, например, в образце с прямоугольной выточкой. Он показывает также, что внешний вид разрушенного сечения получается иным, если «загружение произвести столь быстро, что образец, не располагая достаточным временем для того, чтобы удлиниться, подвергнется внезапному разрыву».

Изучая влияние холодной обработки на механические свойства железа, Киркальди расходится с установившимся мнением, согласно которому повышение прочности на растяжение является «результатом отвердения». Непосредственным испытанием он устанавливает, что «плотность железа снижается процессом волочения и сходным процессом холодной прокатки, вместо того чтобы возрастать, как это представляли себе до сих пор». Киркальди полагает, что необходимые сведения о свойствах железа и стали могут быть получены из исследования структуры этих металлов. Он сообщает, что «структура различных видов сварочного железа прекрасно обнаруживается при погружении в разбавленную соляную кислоту, которая, действуя на местные включения-примеси, обнажает для наблюдения одну лишь металлическую составную часть». Таким путем он находит, что «при волокнистых изломах волокна вытягиваются, что и наблюдается на поверхности, между тем как при кристаллических изломах волокна разрываются пучками, что обнаруживается по внутреннему виду сечений. В последних случаях излом образца происходит всегда под прямым углом к его продольному направлению; в первом же случае—более или менее неправильно».



Иоганн Баушингер.

Из этого краткого обзора работы Киркальди мы убеждаемся, что этот выдающийся экспериментатор поднял и осветил ряд важных вопросов в области механических испытаний материалов, почему его книга и до сих пор сохраняет интерес для инженеров, работающих в этой области. Сочетая большой практический опыт со свойственным ему чутьем к обнаружению всего необычного, отклоняющегося от общих правил, Киркальди сумел в своей личной лаборатории решить многие из проблем, которые возникали в быстроразвивавшейся строительной и машиностроительной промышленности.

На континенте Европы лаборатории по испытанию материалов возникали как государственные учреждения. Особенно высокого уровня они достигли в Германии[1]), где их работа направлялась инженерными учебными заведениями и где они использовались не только для производственных испытаний, но также и для научно-исследовательской работы преподавательского персонала этих учебных заведений и в учебных целях. Такая постановка оказала благоприятное воздействие как на инженерное образование, так и на промышленность.

Первая лаборатория такого рода была основана в 1871 г. при Мюнхенском политехническом институте. Ее первый директор Иоганн Баушингер (Iohann Bauschinger, 1833—1893) был профессором механики этого института[2]). Ему удалось обзаве-

[1]) По вопросам об истории испытания материалов в Германии см. B a u m a n n R., Beitr. Geschichte Technik u. Industrie, т. 4, стр. 147, 1912. См. также L e o n A., Die Entwicklung und die Bestrebungen der Materialprüfung, Wien, 1912.

[2]) Биографический очерк Баушингера, составленный на русском языке Н. А. Белелюбским, был издан Собр. инж. п. с., СПб., 1894. (*Прим. ред.*)

стись машиной, способной развивать в образцах усилие до 100 *т*; ее конструкция была разработана Людвигом Вердером[1]) (Ludwig Werder, 1808—1885) в 1852 г. для Нюрнбергского машиностроительного общества. Она оказалась весьма пригодной для экспериментов, требовавших большей точности, чем это было доступно при пользовании машинами прежних типов; вслед за этим сходные с ней машины были установлены в большей части крупных лабораторий Европы[2]),

Для измерения малых упругих деформаций Баушингер изобрел зеркальный тензометр[3]), позволивший ему измерять с высокой точностью относительные удлинения порядка $1 \cdot 10^{-6}$. С помощью столь чувствительного прибора он получил возможность исследовать механические свойства материалов гораздо более тщательно, чем это было доступно его предшественникам. Производя испытания на растяжение железа и мягкой стали, он заметил, что до известного предела эти материалы следуют закону Гука весьма точно, причем до тех пор, пока удлинения сохраняют пропорциональность напряжениям, они остаются вместе с тем и упругими, так как никаких остаточных (пластических) деформаций при этом обнаружить не удается. Из этих испытаний Баушингер сделал тот вывод, что мы вправе считать *предел упругости* для железа и стали совпадающим с *пределом пропорциональности*. Если увеличивать нагрузку на образец за предел упругости, то удлинения начнут возрастать с большей скоростью, чем нагрузка, однако только до некоторого предела, при котором происходит резкое возрастание деформации, продолжающей расти со временем и дальше уже при постоянной нагрузке. Это критическое значение нагрузки определяет *предел текучести* материала. Предел текучести мягкой стали повышается, если загрузить образец выше начального предела текучести; тогда наибольшее значение этой нагрузки дает нам новое значение предела текучести, если только вторичное загружение произведено непосредственно после первого. Если вторичное загружение сделано по истечении некоторого времени, порядка нескольких дней, предел текучести получается несколько выше наибольшей нагрузки первичного загружения. Баушингер обратил также внимание на то, что образец, растянутый выше предела текучести, уже утрачивает свойство совершенной упру-

---

[1]) Биография Вердера имеется в книге Matschoss Conrad, Crosse Ingenieure, 3-е изд., 1942.

[2]) Горизонтальная машина Вердера по принципиальной своей схеме во многом повторяла сидерометр, построенный в Петербурге на механическом заводе Берда в 1824 г.; об этой испытательной машине сказано в примечании на стр. 140. (*Прим. ред.*)

[3]) С описанием этого тензометра можно познакомиться по статье Баушингера в Civiling, т. 25, стр. 86, 1879.

гости и обнаруживает весьма низкий предел упругости при вторичном загружении, если оно следует сразу же за первым. В том, однако, случае, если между двумя загружениями проходит несколько дней, материал восстанавливает свои упругие свойства и обнаруживает предел пропорциональности, несколько превышающий первоначальное значение.

Баушингер провел исследование свойств мягкой стали в условиях загружения материала циклами напряжений[1]). Он нашел, что если образец подвергся растяжению выше начального предела упругости при растяжении, то его предел упругости при сжатии понижается. Значение последнего можно поднять, подвергая образец сжатию; однако если это сжатие превзойдет известный предел, то снизится предел упругости при растяжении. Подвергая образец нескольким циклам загружения, представляется возможным установить два таких предела, в интервале между которыми образец ведет себя идеально упруго. Баушингер называет эти два предела *естественными* пределами упругости при растяжении и сжатии. Он предполагает, что *начальные* пределы упругости зависят от технологических процессов, которым подвергается материал, *естественные* же пределы являются «истинными» физическими характеристиками. Он утверждает, что до тех пор, пока материал остается внутри естественных пределов упругости, он сохраняет способность выдержать неограниченное число циклов и ему не угрожает опасность усталостного разрушения.

Результаты своих исследований Баушингер публиковал в «Сообщениях» («Mitteilungen»), выходивших ежегодно и пользовавшихся широким признанием среди инженеров, занимавшихся аналогичной работой. Начинание мюнхенской лаборатории явилось стимулом к организации экспериментального изучения строительных материалов также и во многих других городах. В 1871 г. лаборатория для испытания материалов была создана при Берлинском политехникуме А. Мартенсом[2]), выпустившим впоследствии книгу[3]), в которой им были описаны разнообразные методы испытаний и применяемые для этой цели машины. В 1873 г. имело место открытие подобной же лаборатории при Венском политехническом институте под руководством проф. К. Джэнни (K. Jenny). В 1879 г. открылась лабаратория по испытанию

[1]) См. Mitt. mech. tech. Lab., München, 1886. См. также Dinglers polytech. J., стр. 266, 1886.

[2]) С историей развития этой лаборатории можно познакомиться по книге «Das königliche Materialprufungsamt der technischen Hochschule», Berlin, 1904.

[3]) Martens A., Handbuch der Materialienkunde für den Maschinenbau, ч. I, Berlin, 1898; ч. II совместно с Хёном (E. Heun), Berlin, 1912. (*Прим. авт.*)

материалов при Цюрихском политехническом институте[1]) под руководством проф. Людвига Тетмайера (Ludwig von Tetmajer, 1850—1905). Она завоевала репутацию одной из самых крупных лабораторий в Европе.

К. Бах (C. Bach), заняв в 1879 г. пост профессора в Штутгартском политехническом институте, тогда же организовал при нем аналогичную лабораторию. Круг его интересов составляли главным образом применения сопротивления материалов в проектировании машин, и он пользовался лабораторией не только для научно-исследовательской работы в области изучения свойств материалов, но также и для получения экспериментальных решений разнообразных задач, связанных с определением напряжений в сооружениях и деталях машин. Важнейшие результаты этих исследований были собраны Бахом в руководстве «Упругость и прочность» («Elasticität und Festigkeit»[2]), получившем широкое распространение среди инженеров-механиков и ставшем могучим фактором в развитии машиностроительного проектирования в Германии.

В Швеции заинтересованность в механических испытаниях материалов проявили прежде всего черная металлургия и железо- и сталепрокатная промышленность. Большая работа в этой области была проделана в 1862 г. П. Лагерхьелмом (P. Lagerhjelm), построившим, как мы уже знаем (см. стр. 127), для этой цели специальную машину. Эта машина была широко использована Кнутом Стиффом (Knut Styffe) для исследований железа и стали в железнодорожном строительстве в Швеции[3]). Стифф был директором Стокгольмского технического института. В 1875 г. шведская стальная промышленность обзавелась лабораторией по испытанию материалов в Лильехольмене (Liljeholmen), оснастив ее машиной Вердера мощностью 100 *т* и гидравлическим прессом Амслера-Лаффоне. В 1896 г. машина Вердера была переведена в новую лабораторию при Стокгольмском институте.

В России начало механическим испытаниям материалов положил Ламе, которому пришлось производить экспертизу железа, поступавшего с русских заводов и предназначенного для постройки висячих мостов в Петербурге[4]). Его испытательная машина была установлена в Петербургском институте инженеров путей сообщения, где он был профессором механики. В дальнейшем

---

[1]) Описание этой лаборатории и производившейся в ней работы см. Jenny K., Festigkeitsversuche und die dabei verwendeten Maschinen und Apparate an der K. K. technischen Hochschule in Wien, 1878.

[2]) Bach C., Elasticität and Festigkeit, 1-е изд., 1899; 6-е изд., 1911.

[3]) Результаты этого исследования были опубликованы в Jern-Kontorets Ann., 1866. Обсуждение этой важной работы проводится в книге Festigkeitproblem Schwedischer Materialien Stockholm, 1897, изданной к Международному конгрессу по испытанию материалов в Стокгольме.

[4]) По этому вопросу см. примечание на стр. 140. (*Прим. ред.*)

работа в этой области проводилась под руководством П. И. Собко[1]) (1819—1870), профессора по курсу мостов в том же институте. Лаборатория этого института быстро расширялась и заняла первое по своему значению место в России под руководством хорошо известного русского инженера-мостовика Н. А. Белелюбского (1845—1922), энергично отстаивавшего необходимость введения в практику испытания материалов единых международных технических условий и принявшего активное участие в организации Международного общества по испытанию материалов[2]).

Чтобы сделать экспериментальные результаты различных лабораторий сравнимыми между собой, необходимо было внести единообразие в механические испытания во всех лабораториях. Для осуществления такого единообразия проф. Баушингер созвал в 1884 г. конференцию в Мюнхене. Она имела большой успех—на нее съехалось из разных стран 79 ученых, занимавшихся научно-исследовательской работой, причем многие принимали активное участие в обсуждении. Для выработки технических условий на различные виды испытаний был избран специальный комитет; проведенная последним подготовительная работа в своей значительной части была одобрена второй конференцией, состоявшейся в Дрездене в 1886 г.

В связи с Международной промышленной выставкой 1889 г. в Париже был созван конгресс прикладной механики, и вопросы механического испытания материалов составили тему одной из его секций. Здесь подверглись обсуждению работы[3])

[1]) П. И. Собко окончил Институт инженеров путей сообщения в 1840 г. и занял должность ассистента у М. В. Остроградского. Он преподавал механику, издал лекции Остроградского по математическому анализу и напечатал ряд серьезных статей по сопротивлению материалов и мостам. В 1847 г. он совершил поездку в Соединенные Штаты для ознакомления с конструкциями американских мостов. (*Прим. авт.*) Механическая лаборатория при Институте инженеров путей сообщения была организована в 1853 г. Собко. Биография П. И. Собко, составленная Д. И. Журавским, и очень неточный список его трудов, приведенный в книге «Гимназия высших наук и лицей князя Безбородко», СПб., 1859, 2-е изд., СПб., 1881, перепечатаны в книге С. М. Житкова «Биографии инженеров п. с.», СПб., т. 1, 1889; см. также статью А. Митинского «П. И. Собко—основоположник преподавания строительной механики в России», Научн.-метод. сб. № 6 ВВИА им. Н. Е. Жуковского, М., 1955, стр. 5—17. (*Прим. ред.*)

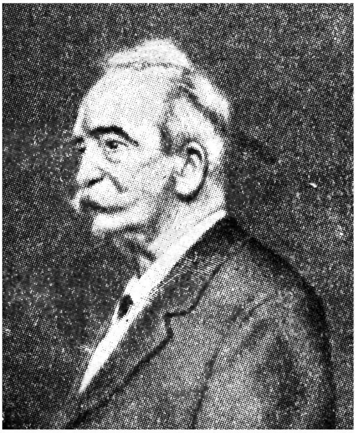
[2]) Обзору деятельности Н. А. Белелюбского как инженера и ученого посвящена большая литература. См. «Изв. собр. инж. п. с.», 1892, № 9 и 1917, № 6 (номера, посвященные 25-летию и 50-летию инженерной деятельности Н. А. Белелюбского), также статью проф. Н. П. Прокофьева в сборнике «Люди русской науки», Гостехиздат, т. II, 1948, стр. 970—977 и др. Библиографию научных трудов см. «Н. А. Белелюбский», Гос. научн. библ. МВО, Москва, 1951. (*Прим. ред.*)

[3]) Отчет этой секции занимает большую часть третьего тома трудов конгресса «Congrès International de mécanique appliquée», Paris, 1891. Он хорошо отражает состояние экспериментальной техники того времени в этой области.

Киркальди, Баушингера, Барба и других, причем было признано необходимым применять в испытаниях геометрически подобные образцы. На заключительном заседании было единодушно решено принять меры к сближению взглядов правительств различных стран на учреждение международного общества по испытанию материалов. Первый международный конгресс этого общества состоялся в Цюрихе под председательством проф. Л. Тетмайера. Большая часть стран примкнула к этой организации, а последующая деятельность международных конгрессов много способствовала внедрению новых методов испытания механических свойств материалов.

61. Научная деятельность Отто Мора

Отто Мор (Otto Mohr, 1835—1918) родился в Весельбурене (Гольштейн) на берегу Северного моря. Шестнадцати лет он поступил в Ганноверский политехнический институт и по окончании его работал в качестве инженера-строителя на сооружении железных дорог в Ганновере и Ольденбурге. За это время Мор спроектировал несколько стальных ферм из числа первых, построенных в Германии. Он работал также и в области теории, опубликовав несколько серьезных статей в ганноверском «Журнале Союза архитекторов и инженеров» («Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins»).



Отто Мор.

Здесь[1]) были напечатаны: работа Мора об использовании веревочной кривой для определения упругих прогибов балки, его вывод уравнения трех моментов для неразрезной балки с опорами на разных уровнях, а также первые применения линий влияния.

В 32 года он пользовался уже широкой известностью компетентного инженера и получил приглашение Штутгартского политехникума на пост профессора инженерной механики. Приняв это приглашение, он в течение пяти лет (1868—1873) читал

[1]) Z. Architek. u. Ing. Ver., Hannover, 1868. (*Прим. авт.*) Имеется русский перевод в книге: М о р О., Графический способ расчета изгиба балок. Аналитический и графический способы расчета мостовых ферм балочной системы, Перевод А. Л. Недзелковского, СПб., 1871. (*Прим. ред.*)

в этом институте лекции по различным отделам технической механики. В особенности он интересовался в то время разработкой графических методов для решения задач теории сооружений, открыв, таким образом, новые области в графической статике. Мор был весьма талантливым профессором, и его искусство возбуждало высокий интерес к избранным им темам в студентах, среди которых были и выдающиеся. Его лекции в то время слушали Карл Бах и Август Фёппль. В своей автобиографии[1]) А. Фёппль сообщает, что, по общему признанию студентов того времени, Мор был прирожденным педагогом (Lehrer von Gottes Gnaden[2])). Его лекторская техника была далеко не на высоте, слова приходили к нему иногда с большими промедлениями, а его эскизные чертежи на доске были плохи. Но содержание лекций было всегда ясным и логически построенным, причем он всегда стремился обратить внимание студентов на что-либо свежее и интересное. Источник того увлечения, которое испытывали студенты на его лекциях, заключался в том, что он не только знал свой предмет в совершенстве, но и сам много сделал в создании науки, которую он излагал.

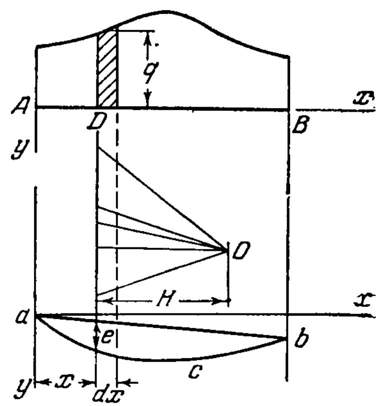


Рис. 140.

В 1873 г. Мор переехал в Дрезден, где и продолжал вести преподавательскую работу в Дрезденском политехникуме до 65-летнего возраста, когда он вышел в отставку. Последние годы своей жизни он провел в спокойной обстановке в окрестностях Дрездена, продолжая заниматься научной работой.

Самые ценные достижения Мора относятся к теории сооружений, и мы будем говорить о них в следующей главе, но и вклад его в сопротивление материалов также весьма значителен. Он первый обратил внимание[3]) на то, что дифференциальное уравнение веревочной кривой

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q}{H}, \qquad \text{(a)}$$

построенной для нагрузки переменной интенсивности q, распределенной по длине AB (рис. 140), имеет тот же самый вид,

[1]) Föppl August, Lebenserinnerungen, München, 1925.

[2]) «Учитель божьей милостью».

[3]) См. статью в Z. Architek. u. Ing. Ver., Hannover, 1868, стр. 19.

что и дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \tag{b}$$

упругой линии. Из этого следует, что кривую прогибов можно построить как веревочную кривую для фиктивной нагрузки интенсивностью M с полюсным расстоянием, равным жесткости EI балки. Заметив также, что ордината e (между веревочной кривой acb и замыкающей прямой ab), будучи умножена на полюсное расстояние H, определяет величину изгибающего момента в поперечном сечении D балки AB, Мор заключает, что прогибы балки могут быть вычислены как изгибающие моменты, вызванные в балке фиктивной нагрузкой интенсивностью M/EI, что чрезвычайно упрощает задачу определения прогибов. Интегрирование уравнения (b) становится ненужным, и прогибы находятся из простых положений статики. Упрощение получается особенно ощутительным, как показывает Мор, в балках переменного поперечного сечения.

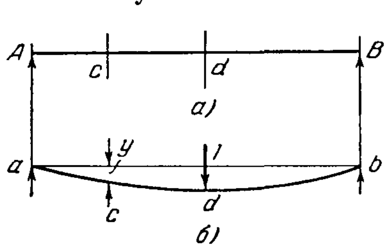


Рис. 141.

Применяя свой метод к однопролетной свободно опертой балке (рис. 141, *а*) и рассматривая два поперечных сечения c и d, Мор доказывает, что если нагрузку P приложить сначала в c и прогиб измерить в d, а затем ту же нагрузку приложить в d и прогиб измерить в c, то измеренные прогибы для этих двух условий загружения окажутся одинаковыми. Располагая этим результатом, Мор решает задачу, в которой требуется найти прогибы, производимые в некотором поперечном сечении балки (положим, d) силой, точка приложения которой меняет своё положение на пролете. С этой целью он строит упругую линию $acdb$ (рис. 141, *б*) для случая, когда единичная нагрузка, т. е. сила, равная 1, приложена в d. Пусть при этом y обозначает прогиб в некоторой точке c. Тогда в силу вышеуказанной связи между прогибами и положениями нагрузки он заключает, что единичная нагрузка, приложенная в c, вызывает в d прогиб y, а всякая иная нагрузка P, приложенная в той же точке c, дает в d прогиб yP. Имея, таким образом, кривую прогибов $acdb$, он получает вместе с тем в этой же кривой и значения прогибов в точке d пролета при различных положениях нагрузки. Мор называет кривую $acdb$ *линией влияния* (инфлюэнтной линией) для прогиба в точке d. Пользуясь законом наложения, Мор показывает, что если на балку действует несколько нагрузок $P_1, P_2, P_3, \ldots$, а $y_1, y_2, y_3, \ldots$ являются соответствующими ординатами линии влияния, то прогиб в d, производимый всеми этими нагрузками, равен $\sum P_i y_i$. Это—первый случай применения линий влияния в инженерных расчетах[1]). В той же статье, относящейся в 1868 г., Мор останавливается и на расчете неразрезных балок, причем предлагает графическое решение уравнений трех моментов.

Другим крупным достижением научной работы Мора в области сопротивления материалов является графическое представление напряженного состояния в точке[2]). В математической теории упругости для этой цели вошел в употребление эллипсоид напряжений (см. стр. 134), в двумерных же задачах мы пользуемся

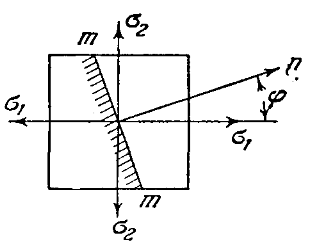


Рис. 142.

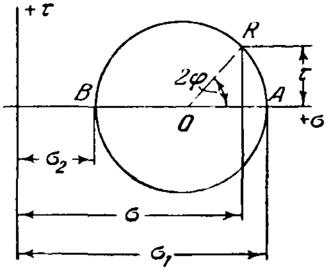


Рис. 143.

эллипсом напряжений. В своей «Графической статике» («Graphische Statik», стр. 226, 1866) Кульман уже показал, что напряженное состояние в двумерной системе может быть представлено кругом (см. стр. 236), что значительно упрощает решение соответствующих задач. Мор изучает этот вопрос более подробно. Рассматривая случай плоского напряженного состояния, характеризуемого значениями главных напряжений σ_1 и σ_2 (рис. 142), он показывает, что величины нормальной σ и касательной τ компонент напряжения, действующего на площадку mm, заданную углом φ нормали, могут быть определены как координаты точки R, лежащей под полярным углом 2φ на окружности, построенной, как это показано на рис. 143. Диаметр AB этой окружности равен разности $\sigma_1—\sigma_2$, а его концы A и B определяют напряжения на главных площадках, перпендикулярных к σ_1 и σ_2. Применяя тот же ход рассуждений и в трехмерном случае, когда действуют три главных напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, Мор находит, что компоненты напряжения, действующего на площадки, проходящие через главные оси, могут быть представлены координатами точек, лежащих на трех окружностях, как это показано на

[1]) Мор в своих Abhandlungen (2-е изд., стр. 374, 1914) отмечает, что почти в то же самое время и независимо от него Винклер также воспользовался понятием линии влияния. См. статью Винклера в Mitt. Architek. u. Ing. Ver., Böhmen, 1868, стр. 6.

[2]) См. Civiling. 1882, стр. 113.

рис. 144. Наибольшая из этих трех окружностей имеет диаметр, равный разности $\sigma_1-\sigma_3$ между наибольшими и наименьшими из заданных главных напряжений, и определяет напряжения на площадках, проходящих через ось промежуточного главного напряжения σ_2. Мор показывает также, каким образом можно представить координатами некоторых точек той же диаграммы (рис. 144) и напряжения, действующие на площадках, пересекающих все три главные оси; он доказывает, что все эти точки располагаются на заштрихованных участках диаграммы. Если мы зададимся каким-либо определенным значением нормального напряжения, положим тем, которое определяется абсциссой OD, то убедимся, что имеется бесчисленное множество плоскостей, для которых нормальная компонента напряжения имеет это же самое значение. Точки, определяющие величины касательных напряжений в этих плоскостях, будут лежать на участках EF и E_1F_1 перпендикуляра, проходящего через точку D, и мы сможем отсюда заметить, что из всех площадок, имеющих одно и то же значение нормальной компоненты напряжения, определяемое длиной OD, те из них будут иметь и наибольшее касательное напряжение, которые пройдут через промежуточную главную ось и для которых напряжения определятся координатами точек F и F_1.

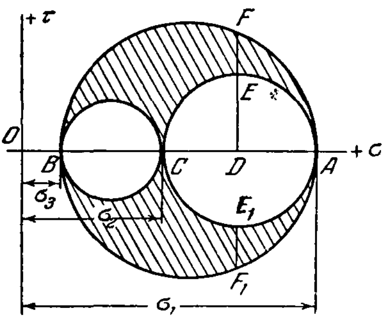


Рис. 144.

Далее, Мор использует этот метод графического представления напряжений в построении своей теории прочности[1]). В то время большинство инженеров, работавших в области исследования напряжений, следуя Сен-Венану в выборе критерия разрушения, исходили из *теории наибольшей деформации*. Поперечные сечения элементов конструкций назначались отсюда из расчета, чтобы наибольшая деформация в самой слабой точке при наиболее неблагоприятном условии загружения не превосходила допускаемого относительного удлинения при простом растяжении. Но уже на протяжении многих лет ряд ученых приписывал важную роль касательным напряжениям и отстаивал тот взгляд, что их влияние необходимо учитывать. Кулон уже исходил в своей теории прочности из того допущения, что разрушение должно ускоряться касательными напряжениями. Вика (см. стр. 104) критиковал элементарную теорию балки, в которой

[1]) См. Z. Ver. deut. Ing., 1900, стр. 1524.

касательные напряжения не рассматривались, а Людерс привлек внимание к линиям текучести, появляющимся на поверхности полированных образцов при растяжении их выше предела упругости[1]). Во времена Мора имелись уже и некоторые опытные результаты, полученные Баушингером, который, воспользовавшись своими чувствительными инструментами, установил пределы упругости для стали при растяжении, сжатии и сдвиге. Эти результаты расходились с теорией наибольшей деформации. Мор в своей статье 1882 г. обсуждает опыты Баушингера и критикует результаты испытаний на сжатие, проведенных на образцах-кубиках, указывая на то, что силы трения, возникающие по граням кубика, соприкасающимся с плитами машины, должны оказывать большое влияние на распределение напряжений, в связи с чем результаты должны получиться иными, чем при испытании на простое сжатие.

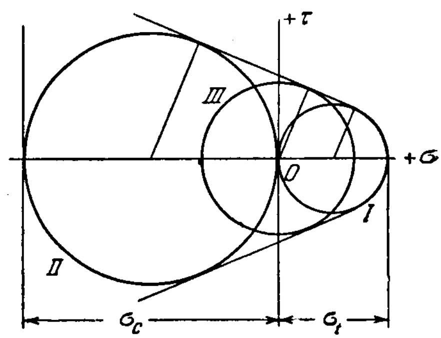


Рис. 145.

Мор применяет свое графическое представление напряжений при помощи кругов (рис. 144) для разработки такой теории прочности, которая могла бы отвечать различным напряженным состояниям и находилась бы в лучшем согласии с данными опытов. В основу ее он кладет то допущение, что из всех площадок, испытывающих одно и то же по величине нормальное напряжение, слабейшей, т. е. такой, по которой вероятность разрушения[2]) получается наибольшей, будет та, для которой касательное напряжение окажется наибольшим. В этих условиях необходимо рассматривать один лишь наибольший круг диаграммы (рис. 144). Мор называет его *главным кругом* и указывает, что такие круги нужно строить, производя испытания для каждого напряженного состояния, сопутствующего разрушению. На рис. 145 представлены для примера такие главные круги для чугуна, подвергшегося испытанию до разрушения на растяжение, сжатие и чистый сдвиг (кручение). Если таких главных кругов построено несколько, то для них может быть построена огибающая, причем с достаточной точностью допустимо предположить, что и всякий другой главный круг, отвечающий некоторому напряженному

[1]) См. его статью в Dinglers Polytech. J , 1860, а также Hartmann L., Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts, 1896.

[2]) Мор понимает разрушение в широком смысле—оно может быть текучестью материала или изломом.

состоянию, не исследованному экспериментально, также будет касаться этой огибающей. В частности, в отношении чугуна Мор указывает, что за огибающую здесь принимаются внешние касательные к кругам *I* и *II* рис. 145, соответствующим экспериментальным данным о разрушении при растяжении и при сжатии. Предельное сопротивление сдвигу будет в таком случае найдено, если мы опишем окружность *III* из центра *O*, касательную к огибающей. Если $\sigma_{\text{рас}}$ и $\sigma_{\text{сж}}$—абсолютные значения пределов прочности материала при растяжении и сжатии, то предел прочности при сдвиге мы найдем из чертежа:

$$\tau_{\text{сдв}} = \frac{\sigma_{\text{рас}}\,\sigma_{\text{сж}}}{\sigma_{\text{рас}} + \sigma_{\text{сж}}}$$

—значение, близко совпадающее с результатами испытаний.

Теория Мора привлекла к себе большое внимание инженеров и физиков. В связи с ней было проведено много экспериментальных работ; о них мы сообщим в дальнейшем (см. стр. 413).

62. Энергия деформации и теорема Кастильяно

Мы видели, что Эйлер в своем выводе дифференциального уравнения упругой линии использовал выражение энергии деформации изогнутого бруса (см. стр. 45). Грин, обсуждая вопрос о необходимом числе упругих постоянных, полагает, что энергию деформации можно выразить однородной функцией от компонент деформации (см. стр. 264). Ламе в своей книге по теории упругости[1]) приводит теорему Клапейрона, констатирующую, что работа, произведенная внешними действующими на упругое твердое тело силами при его деформировании, равна накопленной в этом теле энергии деформации (см. стр. 145).

Если принять, что перемещения, происходящие при деформировании упругого тела, являются линейными функциями внешних сил, то произведенная этими силами работа выразится полусуммой произведений

$$T = \frac{1}{2} \sum P_i r_i, \tag{a}$$

где P_i обозначает силу, приложенную в точке i, а r_i — перемещение этой точки в направлении действия силы. Сосредоточенная же в упругом теле энергия V деформации выражается интегралом

$$V = \frac{1}{2} \iiint \left\{ \frac{1}{E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{2\mu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right\} dx\,dy\,dz, \tag{b}$$

[1]) Первое издание 1852 г.

и теорема Клапейрона утверждает, что

$$T = V. \tag{c}$$

Итальянский военный инженер Л. Ф. Менабреа (L. F. Menabrea), занимаясь расчетом ферм с «лишними» неизвестными, предложил использовать в такого рода расчетах формулу для энергии деформации фермы[1]). Он утверждал что силы X_1, X_2, X_3, ..., действующие в «лишних» элементах, должны быть такими, чтобы энергия деформации фермы принимала минимальное значение. Из этого условия он выводит уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial X_2} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial X_3} = 0, \ \ldots, \tag{d}$$

которые вместе с уравнениями статики составляют систему, достаточную для определения сил во всех стержнях фермы. Как видим, Менабреа пользуется *началом наименьшей работы*, не приводя, однако, приемлемого обоснования этого начала. Такое логически строгое обоснование ему дал впоследствии итальянский инженер Альберто Кастильяно (Alberto Castigliano, 1847 – 1884).

Кастильяно родился в Асти (Италия). Проработав несколько лет в качестве учителя, он поступил в 1870 г. в Туринский политехнический институт и, еще будучи студентом, выполнил там выдающееся исследование по теории сооружений. Представленная им в 1873 г. научная работа на соискание звания инженера этого политехникума содержит формулировку его знаменитой теоремы вместе с некоторыми приложениями ее в теории сооружений. В более подробном виде эта работа была опубликована Туринской Академией наук в 1875 г.[2]). Важность этого труда на первых порах не была оценена инженерами, и для того чтобы дать ему более широкую известность, Кастильяно издал его на французском языке[3]) вместе с полным доказательством своей теоремы и с многочисленными применениями. Преждевременная смерть Кастильяно положила конец дальнейшим успехам этого блестящего ученого. Но его теорема получила всеобщее признание в качестве одного из краеугольных камней теории сооружений. Многочисленные научные труды таких выдающихся инженеров, как Г. Мюллер-Бреслау в Германии и Камилло Гвиди в Италии, основывались на ней.

---

[1]) См. Compt. rend., т. 46, стр. 1056, 1858.

[2]) Atti reale Accad. sci., Torino, 1875.

[3]) Castigliano A., Théorie de l'équilibre des systèmes elastiques, Turin, 1879. В связи с 50-летием со дня смерти Кастильяно было издано собрание его избранных трудов под редакцией Дж. Колоннетти: Colonnetti G., Alberto Castigliano, Selecta. В него вошли его диссертации на соискание звания инженера и основная часть французской книги. Английский перевод этого издания был выполнен Эндрьюсом (Andrews E. S.), London, 1919.

К своей теории Кастильяно приходит из исследования ферм с идеальными шарнирами. Если внешние силы приложены только в шарнирах, а стержни имеют призматическую форму, то энергия деформации такой системы выразится суммой

$$V=\frac{1}{2}\sum\frac{S_j^2 l_j}{EA_j}, \tag{e}$$

и из теоремы Клапейрона будет следовать, что

$$\frac{1}{2}\sum P_i r_i=\frac{1}{2}\sum\frac{S_j^2 l_j}{EA_j}. \tag{f}$$

Суммирование в левой части этого равенства распространяется на все загруженные шарниры, в правой части — на все стержни фермы. Кастильяно вводит относительно этой системы допущение, что ее прогибы r_i являются линейными функциями внешних сил. Вводя эти функции в левую часть уравнения (f), он получает возможность представить энергию деформации в виде однородной функции второй степени от внешних сил P_i. Воспользовавшись теми же самыми соотношениями между прогибами и силами, он представляет силы в виде линейных функций от перемещений и получает таким путем энергию деформации как однородную функцию второй степени от перемещений r_i. Кастильяно применяет в своем исследовании оба эти выражения для энергии деформации V и доказывает две важные теоремы.

Сначала он исходит из представления V в виде функции перемещений r_i. Если путем малого изменения сил P_i сообщить перемещениям r_i малые приращения δr_i, то полная энергия деформации фермы изменится на малую величину

$$\delta V=\sum\frac{\partial V}{\partial r_i}\delta r_i.$$

Эта величина должна быть равна, очевидно, работе, произведенной внешними силами на малых приращениях перемещений, т. е. сумме

$$\sum P_i\,\delta r_i.$$

Таким путем он получает уравнение

$$\sum\frac{\partial V}{\partial r_i}\delta r_i=\sum P_i\,\delta r_i, \tag{g}$$

которое должно удовлетворяться при произвольно выбранных значениях величин δr_i. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial V}{\partial r_i}=P_i$$

для всех i. Это значит, что линейные функции, получаемые нами в результате дифференцирования V по перемещениям r_i, являются не чем иным, как соответствующими силами P_i.

При выводе своей второй теоремы Кастильяно принимает V как функцию внешних сил P_i[1]). Тогда, изменив слегка силы, мы получим изменение энергии деформации в виде суммы

$$\sum \frac{\partial V}{\partial P_i} \delta P_i,$$

а вместо уравнения (g) будем иметь:

$$\sum \frac{\partial V}{\partial P_i} \delta P_i = \sum P_i \,\delta r_i. \tag{h}$$

Правой части этого уравнения, выражающей приращение работы $\frac{1}{2} \sum P_i r_i$, можно придать иной вид, заметив, что

$$\sum P_i \,\delta r_i = \delta \left[\frac{1}{2} \sum P_i r_i \right] = \frac{1}{2} \sum P_i \,\delta r_i + \frac{1}{2} \sum r_i \,\delta P_i,$$

откуда следует, что

$$\sum P_i \,\delta r_i = \sum r_i \,\delta P_i.$$

Подставив это в уравнение (h), получим:

$$\sum \frac{\partial V}{\partial P_i} \delta P_i = \sum r_i \delta P_i.$$

Поскольку это уравнение должно оставаться в силе для произвольно взятых значений δP_i, автор заключает, что

$$\frac{\partial V}{\partial P_i} = r_i. \tag{i}$$

Таким образом, если энергия деформации V представлена как функция независимых внешних сил, то производная этой функции по любой из этих сил дает соответствующее перемещение точки приложения силы в направлении силы.

Найдя этот общий метод вычисления прогибов, Кастильяно останавливается на двух важных частных случаях, показанных на рис. 146. Он доказывает, что если равные и противоположно направленные силы S действуют по прямой ab (рис. 146, *а*) упругой системы, то производная $\partial V/\partial S$ выразит приращение расстояния ab, вызванное деформацией системы, например фермы, с входящими в ее состав шарнирами a и b. В случае, когда две действующие на ферму силы перпендикулярны к прямой и образуют пару M (рис. 146, *б*), производная $\partial U/\partial M$ даст угол поворота прямой ab.

[1]) Кастильяно обращает внимание на то, что P_i являются *независимыми силами*. Это значит, что при вычислении энергии V реактивные силы, допускающие их определение из уравнений статики, заданы как функции от сил P_i.

Кастильяно пользуется этими разультатами в расчете ферм с «лишними» неизвестными и дает доказательство началу наименьшей работы. В расчете по этому способу он удаляет «лишние» стержни и заменяет их действие на остающуюся часть системы силами, как это показано на рис. 147, *б*. Система после удаления из нее «лишних» стержней становится статически определимой и ее энергия деформации V_1 может быть выражена в виде функции внешних сил P_i и неизвестных «лишних» сил x_i, действующих в устраненных стержнях. В силу сказанного выше о рис. 146, *a* Кастильяно заключает, что $-\partial V_1/\partial X_i$ представляет собой приращение расстояния между узла-

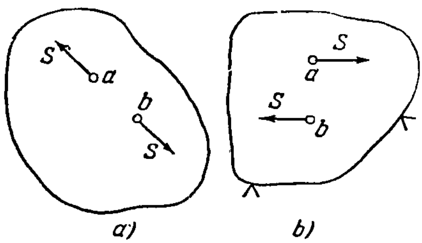


Рис. 146.

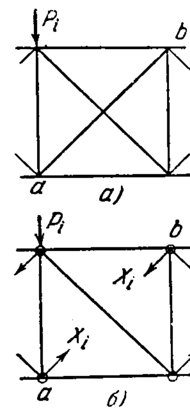


Рис. 147.

ми *a* и *b*. Это приращение равно, очевидно, удлинению стержня *ab* в статически неопределимой системе (рис. 147, *a*); таким путем он приходит к соотношению

$$-\frac{\partial V_1}{\partial X_i}=\frac{X_i l_i}{EA_i}. \qquad \text{(k)}$$

Замечая, что правая часть этого уравнения представляет собой производную по X_i от энергии деформации $X_i^2 l_i/2EA_i$ для «лишнего» стержня, и обозначая полную энергию деформации статически неопределимой системы, т. е. со включением «лишних» неизвестных, через V, он приводит уравнение (k) к виду

$$\frac{\partial V}{\partial X_i}=0, \qquad \text{(l)}$$

в котором мы узнаем формулировку начала наименьшей работы.

Эти результаты, полученные Кастильяно первоначально для шарнирных ферм, в дальнейшем были им обобщены на упругое тело любого вида. Он выводит выражения упругой энергии для стержней, подвергающихся различным видам деформирования, и пользуется этими выражениями в разнообразных применениях своей теории для решения различных статически неопределенных задач о балках и арках. Рассматривая все эти применения, легко будет заметить, что с того времени, как Кастильяно написал свою знаменитую книгу, эта область теории сооружений обогатилась лишь весьма немногим.

Важнейшим обобщением теории Кастильяно мы обязаны Ф. Энгессеру[1]). Хотя Кастильяно во всех случаях требовал, чтобы перемещения были линейными функциями внешних сил, имеются примеры, когда такое требование не выполняется и когда, следовательно, его теорема оказывается неприменимой. Энгессер вводит для такого случая понятие *дополнительной энергии* и показывает, что производные от дополнительной энергии по независимым силам всегда являются перемещениями (зависимости между силами и перемещениями могут быть и нелинейными). Поясним это простым примером двух одинаковых стержней, соединенных шарнирами между собой и с неподвижными опорами AB (рис. 148, *а*). Будучи ненагруженными, стержни располагаются по прямой ACB. Если приложить симметрично действующую силу P, то шарнир C сместится в C_1 на расстояние δ и из простых условий мы найдем:

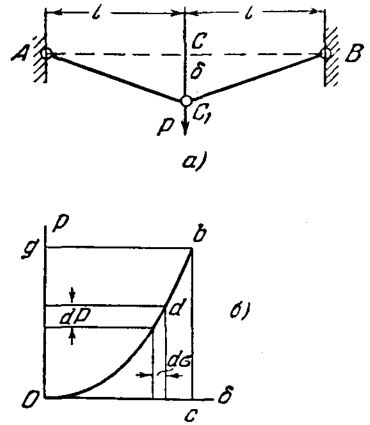


Рис. 148.

$$\delta = l\sqrt[3]{\frac{P}{AE}}, \tag{m}$$

где l и A обозначают соответственно длину и площадь поперечного сечения стержней. Кривая Odb на рис. 148, *б* представляет δ в функции от P, площадь же $Odbc$ дает энергию деформации

$$V = \int_0^\delta P\,d\delta = \frac{lP^{4/3}}{4\sqrt[3]{AE}}.$$

Здесь она уже не является функцией второй степени от силы P, так что производная $\partial V/\partial P$ уже не дает прогиба δ. Дополнительная энергия V_1, по Энгессеру, изображается площадью $Odbg$, и мы получаем:

$$V_1 = \int_0^P \delta\,dP = \frac{l}{\sqrt[3]{AE}}\int_0^P P^{1/3}dP = \frac{3lP^{4/3}}{4\sqrt[3]{AE}}.$$

---

[1]) См. его статью в Z. Architek. u. Ing. Ver., Hannover, т. 35, стр. 733—744, 1889.

Производная этого выражения по P дает значение δ, находимое из формулы (m). Работа Энгессера не обратила на себя большого внимания, поскольку строительные расчеты чаще всего имеют дело с системами, удовлетворяющими условию Кастильяно[1]).

63. Вопросы устойчивости упругих систем

Введение в строительную технику стали выдвинуло ряд проблем упругой устойчивости, получивших жизненно важное значение. Инженерам на практике все чаще приходилось иметь дело с подвергающимися сжатию гибкими стержнями, тонкими сжатыми пластинками, разного рода тонкостенными конструкциями, выход из строя которых определялся не чрезмерным напряжением, а потерей упругой устойчивости. Простейшие задачи этого рода, относящиеся к сжатым колоннам, получили уже к тому времени достаточно тщательную теоретическую разработку. Но ограничения, при которых можно было бы с уверенностью полагаться на теоретические результаты, не были еще вполне ясны. В опытах с колоннами уделялось недостаточно внимания тому влиянию, которое оказывали те или иные способы закрепления концов, точность приложения нагрузки и упругие свойства материала. Поэтому результаты испытаний расходились с теорией, и инженеры в своей проектной работе предпочитали пользоваться различными эмпирическими формулами. Заметный сдвиг в области экспериментального изучения работы сжатых стержней произошел лишь после того, как развилась сеть лабораторий по испытанию материалов и были усовершенствованы измерительные приборы.

Первые надежные испытания колонн были выполнены Баушингером[2]). Применив для своих образцов конические наконечники, он обеспечил возможность свободного вращения концов и центрального приложения нагрузки. Его эксперименты показали, что при этих условиях результаты, полученные для гибких стержней, удовлетворительно согласуются с формулой Эйлера. Более короткие образцы выпучивались при сжимающих напряжениях, превосходивших предел упругости, и так как теория Эйлера к ним была неприменима, необходимо было установить для них эмпирическое правило. Баушингер выполнил лишь небольшое число испытаний, недостаточное для установления практической формулы, которой можно было бы пользоваться в проектировании колонн.

---

[1]) Недавно проф. Вестергор (H. M. Westergaard), ныне скончавшийся, привлек внимание инженеров к обобщению Энгессера и указал на случаи, где оно может найти применение с большими выгодами. См. Proc. Am. soc. civ. engrs., 1941, стр. 199.

[2]) Bauschinger T., Mitt. tech. mech. Lab., München, тетрадь 15, стр. 11, 1887.

Работа была продолжена проф. Л. Тетмайером[1]) в Цюрихском политехническом институте. Под его руководством испытаниям было подвергнуто значительное число железных и стальных стержней составных профилей. На основании их было установлено, что формулой Эйлера следует пользоваться при определении критических напряжений в стальных конструкциях в тех случаях, когда гибкость, т. е. отношение свободной длины колонны к радиусу инерции ее сечения, превышает 110. Для более коротких образцов была предложена линейная формула, нашедшая впоследствии широкое применение в Европе. На рис. 149 схематически изображена конструкция опорных устройств, примененных в экспериментах Тетмайера, они допускали свободное вращение образцов в опорах. Пользуясь этим приспособлением, Тетмайер провел также и испытания на сжатие при внецентренном приложении сил и проверил теоретические формулы для прогибов и наибольших напряжений. Была вычислена для этого случая также и величина сжимающей силы, при которой наибольшее напряжение достигает предела упругости. Если эту нагрузку разделить на запас прочности, то мы получим величину наибольшей безопасной нагрузки на колонну[2]).

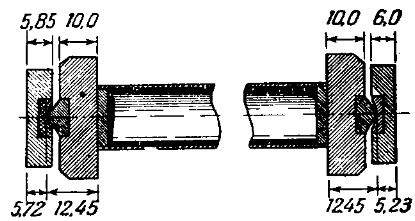


Рис. 149.

С состоянием научных знаний в этой области теории устойчивости упругих систем к концу XIX века можно познакомиться по ценной книге Ф. С. Ясинского[3]). Мы находим в ней общий обзор теоретических и экспериментальных исследований по вопросам устойчивости колонн с включением туда и собственного

[1]) Mitteilungen der Materialprüfungs—Anstalt, тетрадь VIII, Zürich, 1896; 2-е расширенное издание, 1901.

[2]) По-видимому, А. Остенфельд (A. Ostenfeld) первый ввел в расчет колонн некоторую поправку, учитывающую влияние указанных выше неточностей, и определял безопасную нагрузку на колонны как некоторую долю от нагрузки, приводящей к опасным напряжениям. См. Z. Ver. deut. Ing., т. 42, стр. 1462, 1898; т. 46, стр. 1858, 1902.

[3]) Ясинский Ф. С., Опыт развития теории продольного изгиба, Изв. собр. инж. п. с., 1892—1893; отдельное издание, СПб., 1893. См. также Ясинский Ф. С., Собрание сочинений, т. 1, СПб., 1902, французский перевод его диссертации «О сопротивлении продольному изгибу», СПб., 1894 («Recherches sur la flexion des pièces comprimées», Ann. ponts et chaussées, т. 8, № 9, стр. 233—364, 1894). (*Прим. авт.*) См. также Ясинский Ф. С., Избранные работы по устойчивости сжатых стержней, с приложением очерка А. Н. Митинского «О жизни и научно-инженерной деятельности Ф. С. Ясинского» (Библиотека русской науки), Гос. изд. тех.-теор. лит., М.—Л., 1952 и Митинский А. Н., «Ф. С. Ясинский—к 100-летию со дня рождения», Гостехиздат, М., 1957. (*Прим. перев.*)

вклада автора. Феликс Станиславович Ясинский (1856—1899) родился в Варшаве в польской семье. В 1872 г., выдержав конкурсные приемные экзамены, он поступил в Петербургский институт инженеров путей сообщения. По окончании его в 1877 г. Ясинский работал сначала на Петербургско-Варшавской, а затем на Петербургско-Московской железных дорогах; для обеих этих дорог он спроектировал и построил ряд крупных сооружений. В то же время им было опубликовано и несколько научных работ. Работы, посвященные теории сжатых стержней, были впоследствии собраны и изданы (1893) в виде книги в качестве диссертации на научную степень адъюнкта в Институте инженеров путей сообщения. В 1894 г. Ясинский занял в этом институте должность профессора по теории сооружений и теории упругости. Преждевременная смерть прервала эту блестящую профессорскую деятельность, но за пять лет своего преподавания в институте он успел поднять общий уровень теоретического образования, которое получали в то время русские инженеры. Его руководства по теории сооружений и теории упругости пользовались широким распространением в России.

Феликс Станиславович Ясинский.

Ясинский был крупным профессором. В лице его высшая школа получила необычное сочетание выдающегося инженера-практика с одаренным ученым, обладавшим глубоким знанием своего предмета и оказавшимся, к тому же, первоклассным лектором. Русским студентам в то время предоставлялась полная свобода в выборе своих занятий и в распределении своего учебного времени. Лишь весьма немногие регулярно посещали лекции, но аудитория Ясинского всегда была переполнена. Отнюдь, однако, не ораторское искусство было причиной этого: его манера читать лекции отличалась крайней простотой,—студентов привлекала ясность и логичность его изложения и постоянные указания на новые проблемы, возникавшие в его собственной инженерной практике. Для студентов, желавших испытать свою изобретательность, всегда находилось множество новых задач.

Основной вклад Ясинского в теорию сжатых стержней связан с проблемами, встречающимися в строительстве мостов. В многорешетчатых мостах (см. замечание на стр. 223) имеются две системы раскосов, одна из которых работает на сжатие, другая—

на растяжение. Ясинский первый занялся исследованием устойчивости сжатых раскосов, а также оценкой повышения их сопротивления, вызываемого влиянием растянутых раскосов. Это время ознаменовалось как раз несколькими случившимися в Западной Европе и в России авариями открытых мостов, не имевших верхних горизонтальных связей (рис. 150)[1]. Причиной

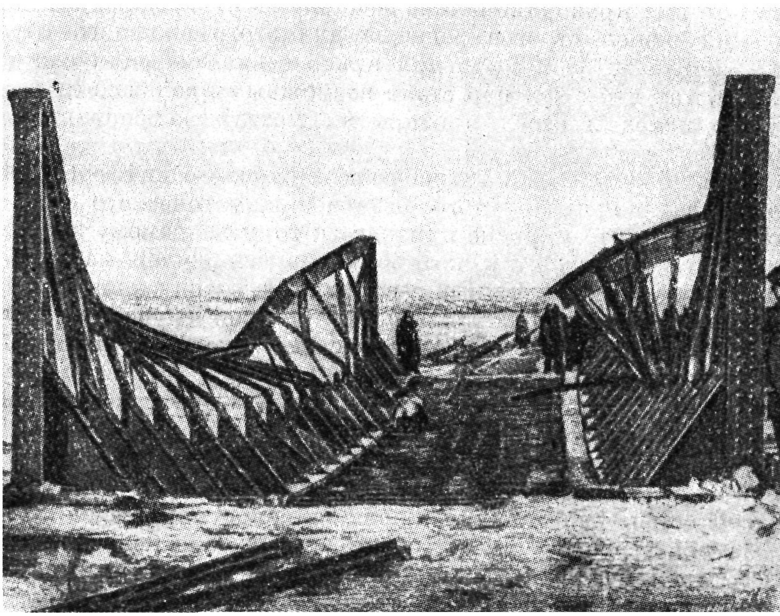


Рис. 150. Разрушение открытого моста.

этих аварий оказывалась недостаточная поперечная жесткость верхнего сжатого пояса, а в то время инженерная наука не располагала никакими достоверными данными относительно того, чем нужно руководствоваться при назначении жесткости изгиба для поясов и стоек таких мостов. Ясинский провел теоретическое

[1]) Рис. 150 (из книги Ф. С. Ясинского) представляет разрушение в 1875 г. моста через р. Кевду на быв. Моршанско-Сызранской ж. д. В своей книге Ф. С. Ясинский по поводу этого разрушения пишет: «С особым удовольствием приходится нам отметить, что катастрофы подобного рода значительно реже у нас, чем за границей (крушение моста на реке Кевде составляет, как кажется, единственный случай в этом роде), и что отрадный этот факт скорее следует приписать известной осторожности наших специалистов мостового дела, чем счастливой случайности». («Опыт развития...», стр. 92.—*Прим. ред.*)

исследование этой проблемы. Он рассматривал сжатый верхний пояс открытого моста как стержень, свободно опертый по концам, сжатый горизонтальными составляющими растягивающих усилий в раскосах и стесненный в своем выпучивании действием стоек. Чтобы упростить задачу, он заменил упругое сопротивление стоек эквивалентной сплошной реакцией упругой среды, а действие раскосов—сплошными осевыми силами, интенсивность которых пропорциональна расстоянию от середины стержня. Ясинский нашел строгое решение для этого сложного случая продольного изгиба и вычислил критические значения сжимающих сил, так что с тех пор стало возможным производить расчет верхнего пояса и стоек в открытых мостах на рациональных основах.

Ясинский исследовал также решение точного дифференциального уравнения продольного изгиба призматического стержня и показал, что это решение приводит к тому же самому значению критической нагрузки, к которому пришел Эйлер из приближенного уравнения. Таким образом, он разъяснил ошибку Клебша[1]), заявившего, что только по счастливой случайности приближенное дифференциальное уравнение может дать правильное значение для критической нагрузки.

Ясинский не ограничился только теоретическим изучением продольного изгиба стержней, а, воспользовавшись результатами экспериментов Баушингера, Тетмайера и Консидера[2]), составил таблицу критических значений напряжений сжатия для различных гибкостей. Эта таблица нашла широкое применение в России, заменив собой формулу Рэнкина. Далее, он показал, каким образом таблицу, составленную для сжатых стержней с шарнирными концами, можно применить и к другим случаям продольного изгиба, если ввести для этой цели понятие «приведенной длины» стержня.

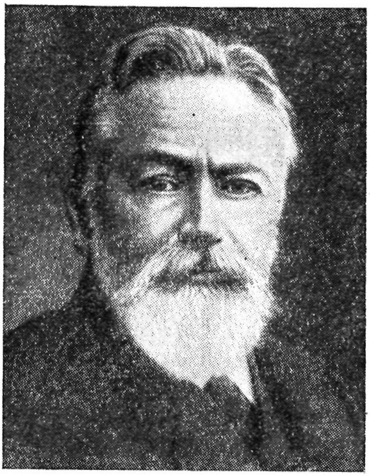
Другим инженером, внесшим много ценного в теорию продольного изгиба в рассматриваемый нами период, был Фридрих Энгессер. Энгессер (F. Engesser, 1848—1931) родился в семье учителя музыки в Вайнгейме близ Мангейма в герцогстве Баденском[3]). По окончании средней школы в Мангейме он поступил в 1865 г. в Политехнический институт в Карлсруэ. Окончил его Энгессер в 1869 г. с дипломом инженера-строителя. Это время ознаменовалось в Германии бурным развитием железнодорожного строительства, и Энгессер в качестве молодого инженера принял участие в проектировании и сооружении мостов на Шварц-

[1]) Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper, стр. 407, 1862.

[2]) Considére, Résistance des pièces comprimés, Congrés International des procédés de construction, т. 3, стр. 371, Paris, 1891.

[3]) С биографией Ф. Энгессера можно познакомиться по работе: Steinhardt Otto, Friedrich Engesser, Karlsruhe, 1949.

вальдской железной дороге. Потом он занял административный пост в системе Баденских железных дорог и занялся проектированием мостов для этой сети. Это было время быстрого роста теории сооружений, и Энгессер принял активное участие в развитии этой науки. Он опубликовал ряд важных научных статей, посвященных главным образом расчету статически неопределимых систем: неразрезных балок, арок, мостов с лишними стержнями и с жесткими узлами. Он приобрел известность не только в качестве инженера-практика, но и в качестве компетентного специалиста по теории сооружений и в 1885 г. был избран профессором Политехнического института в Карлсруэ. Последовавшие за этой датой тридцать лет своей жизни Энгессер вел преподавательскую работу в названном институте, произведя огромный сдвиг в теории сооружений.



Фридрих Энгессер.

Работая в области теории продольного изгиба, Энгессер[1]) предложил расширить область применения формулы Эйлера, введя в нее вместо постоянного модуля упругости E, переменную величину $E_t = d\sigma/d\varepsilon$, которую он назвал *касательным модулем* упругости. Определяя касательный модуль из опытной кривой сжатия для какого-либо частного случая, он получил возможность вычислять критические напряжения для стержней из материалов, в своем поведении отклоняющихся от закона Гука, а также для стержней из строительной стали при напряжениях выше предела упругости. В связи с этим предложением возникла дискуссия между ним и Ясинским. Последний указал[2]), что сжимающие напряжения на выпуклой стороне стержня при выпучивании уменьшаются и что в соответствии с испытаниями Баушингера для этой области поперечного сечения следует пользоваться постоянным модулем упругости E, а не касательным E_t. Впоследствии Энгессер переработал свою теорию, введя в нее два различных модуля для двух областей поперечного сечения[3]).

---

[1]) Z. Architek. u. Ing. Ver., Hannover, т. 35, стр. 455, 1889.
[2]) Schweiz. Bauz., т. 25, стр. 172, 1895.
[3]) Schweiz. Bauz., т. 26, стр. 24, 1895; Z. Ver. deut. Ing., т. 42, стр. 927, 1898.

Энгессер первый занялся теорией продольного изгиба составных колонн[1]). Он исследовал влияние поперечной силы на величину критической нагрузки и нашел, что для сплошных колонн это влияние мало и им можно пренебречь, в сквозных же или в составных стойках оно может оказаться практически значительным, в особенности если ветви таких стоек или колонн соединить между собой одними лишь планками. Энгессер вывел формулы для определения того отношения, в котором в каждом частном случае следует уменьшать значения эйлеровой критической нагрузки, чтобы учесть гибкость элементов решетки.

Строгие решения дифференциального уравнения продольного изгиба известны лишь для простейших задач. Поэтому инженерам приходится часто довольствоваться лишь приближенными решениями. Идя навстречу такого рода запросам, Энгессер предложил метод[2]) вычисления критических нагрузок способом последовательных приближений. Чтобы получить приближенное решение, он рекомендует задаться некоторой формой изогнутой кривой, удовлетворяющей граничным условиям. Эта кривая является вместе с тем и эпюрой изгибающих моментов, из которой, пользуясь методом моментных площадей, мы имеем возможность вычислить прогибы. Из сравнения вычисленной таким путем кривой прогибов с первоначально принятой можно получить уравнение для определения критического значения нагрузки. Чтобы прийти к лучшему приближению, Энгессер принимает вычисленную кривую как новое приближение для упругой кривой продольно изогнутого стержня и повторяет расчет, аналогично проделанному; такой прием воспроизводится несколько раз. Вместо того чтобы оперировать с аналитическим выражением для первоначально принятой упругой кривой, можно исходить из ее графического представления и последовательные приближения находить графическим методом[3]).

Энгессер интересовался также проблемой продольного изгиба верхнего пояса открытых мостов и дал вывод нескольких приближенных формул для определения надлежащей жесткости этого пояса при изгибе[4]). Вопросы устойчивости занимают, однако, лишь небольшую часть в научном творчестве Энгессера по теории сооружений. Его важную работу по *дополнительным* напряжениям мы рассмотрим в следующей главе.

---

[1]) Zentr. Bauw., стр. 483, 1891.

[2]) Z. österr. Ing. u. Architek. Ver., 1893.

[3]) Такого рода графический метод был предложен итальянским инженером Л. Вианелло: V i a n e l l o L., Z. Ver. deut. Ing., т. 42, стр. 1436, 1898. Математическое доказательство сходимости этого процесса было дано Треффцом: Trefftz E., ZAMM, т. 3, стр. 272, 1923.

[4]) См. Zentr. Bauw., 1884, 1885, 1909; см. также Z. Ver. deut. Ing., т. 39, 1895.

В то время как Ясинский и Энгессер занимались исследованием частных случаев продольного изгиба стержней, важная работа по общей теории устойчивости упругих систем была опубликована Брайэном (G. H. Bryan)[1]). Последний показал, что теорема Кирхгоффа об единственности решений уравнений теории упругости применима лишь в тех случаях, когда все измерения тела являются величинами одного и того же порядка. Для тонких же стержней, пластинок и оболочек возможна более чем одна форма равновесия, отвечающая той же системе внешних сил, так что вопрос об устойчивости таких форм принимает важное значение в практике.

Впоследствии Брайэн[2]) рассмотрел задачу о выпучивании сжатой прямоугольной пластинки, свободно опертой по краям, и дал формулу для определения критического напряжения сжатия. Это был первый опыт теоретического подхода к решению вопроса об устойчивости сжатой пластинки. Как на пример практического применения своей формулы Брайэн указывает на задачу подбора толщины для сжатых стальных пластин в корпусе корабля. С развитием самолетостроения проблемы устойчивости пластинок приобрели чрезвычайную важность, и труд Брайэна явился фундаментом для построения логически последовательной теории упругой устойчивости тонкостенных конструкций.

64. Август Фёппль

Историю сопротивления материалов к концу XIX века мы закончим обзором научного творчества Августа Фёппля (August Föppl, 1854—1924). Его книга по сопротивлению материалов, вышедшая из печати в 1898 г., получила широкое распространение в Германии и была переведена на русский и французский языки. Август Фёппль[3]) родился в маленьком городке Гросс-Умштадте, в герцогстве Гессенском, в семье врача. Начальное образование он получил в местной школе, после чего поступил в дармштадтскую гимназию. В то время через Гросс-Умштадт проводилась железная дорога, и это произвело на мальчика такое впечатление, что он решил стать инженером-строителем и с этой целью в 1869 г. поступил в Дармштадтский политехнический институт. Насколько можно судить, уровень преподавания в Дармштадте в те дни был не особенно высок, и потому, закончив там свою предварительную подготовку, Фёппль переехал в 1871 г. в Штутгарт. Здесь в политехникуме читал свои лекции Мор—они-то именно и побудили Фёппля посвятить свои силы изучению главным образом теории сооружений.

---

[1]) Proc. Cambridge Phil. soc., т. 6, стр. 199, 1888.

[2]) Proc. London math. soc., т. 22, стр. 54, 1891.

[3]) Чрезвычайно интересная автобиография Фёппля была опубликована Р. Ольденбургом (Oldenbourg R., München—Berlin, 1925).

Когда в 1873 г. Мор занял профессорскую кафедру в Дрездене, Фёппль также покинул Штутгарт и, чтобы закончить свое инженерное образование, поступил в Политехнический институт в Карлсруэ. Курс технической механики вел в этом учебном заведении профессор Грасхоф (см. стр. 161), но его лекции не произвели, по-видимому, благоприятного впечатления на Фёппля, поскольку в своей автобиографии он сурово критикует педагогические методы Грасхофа. После отличавшихся высоким мастерством лекций Мора изложение Грасхофа казалось ему слишком запутанным и лишенным оригинальности. В 1874 г. Фёппль окончил политехникум, получив звание инженера-строителя, и решил посвятить себя проектированию мостов. Экономика Германии в то время была в упадке, железнодорожное строительство протекало поэтому в замедленных темпах, так что Фёпплю не удалось найти постоянного удовлетворявшего его положения. Выполнив одну временную работу по проектированию моста в Карлсруэ и проведя год на обязательной военной службе, он поступил в 1876 г. на должность преподавателя в одно из ремесленных училищ. Сначала он вел педагогическую работу в Хольцминделе, а затем, с 1878 г., в Лейпциге. Такое положение не удовлетворяло Фёппля, но в Германии всегда было очень трудно получить профессорскую должность в университете или политехникуме, поскольку вакансий было мало, предложений же весьма много. Чтобы иметь какой-либо шанс на получение такой должности в политехническом институте, нужно было выпустить из печати серьезный научный труд и приобрести широкую известность в научном мире. Такой пост считался в Германии всегда очень высоким, и лучшие инженеры страны вступали обычно в соревнование на занятие всякой вновь открывавшейся вакансии. Фёппль усиленно работал и опубликовал ряд важных статей по вопросам пространственных конструкций; он спроектировал также здание рынка в Лейпциге. Эти статьи он впоследствии объединил и издал в виде книги[1]). То была первая книга по данному вопросу, поэтому она пользовалась широкой популярностью.

Август Фёппль.

[1]) F ö p p l August, Das Fachwerk im Raume, Leipzig, 1892.

Начало 80-годов XIX века ознаменовалось в Германии быстрым ростом промышленных применений электричества, и Фёппль заинтересовался этой областью физики. Он сошелся с Г. Видеманном (G. Wiedemann), широко известным профессором физики Лейпцигского университета, и по его совету начал работать в области теории электричества Максвелла. Результатом этой работы было появление солидного труда по теории Максвелла[1]). Именно этот труд послужил началом распространения названной теории в Германии и сделал имя его автора хорошо известным в мире науки.

В 1893 г. умер в Мюнхене профессор Баушингер, и в следующем учебном году Фёппль был избран, чтобы заменить этого выдающегося ученого в области технической механики. Теперь ему опять представилась возможность отдавать свои силы механике, всегда его особенно привлекавшей. Ему пришлось не только читать лекции по этому предмету, но и руководить также работой механической лаборатории, за которой уже установилась заслуженно, благодаря трудам Баушингера, весьма высокая репутация. Деятельность Фёппля в обоих этих направлениях оказалась в высшей степени успешной. Он был прекрасным лектором и умел возбудить интерес студентов, хотя его аудитория и была весьма многолюдной. Иной раз ему приходилось обращаться к пяти сотням слушателей. Чтобы улучшить условия учебной работы и поднять ее на должную высоту, он приступил к изданию своих лекций по технической механике в печатном виде. Они вышли в четырех томах: 1) Введение в механику, 2) Графическая статика, 3) Сопротивление материалов, 4) Динамика. Том, посвященный сопротивлению материалов, вышел в 1898 г. первым. Эта книга сразу же имела крупный успех и скоро стала самым популярным учебником в странах немецкого языка. Она получила известность также и за пределами Германии. Например, Ясинский в Петербурге сразу же привлек внимание своих студентов к этому выдающемуся произведению. Книга была переведена на русский язык[2]) и встретила широкий прием среди инженеров, интересовавшихся исследованием напряжений. Книга вышла также и во французском издании.

В своей автобиографии Фёппль обсуждает требования, которым должен удовлетворять хороший учебник. Весьма часто, замечает он, авторы учебников думают больше о критиках, собирающихся рецензировать их труд, чем о студентах. Чтобы угодить критикам, эти авторы стараются представить свой предмет

---

[1]) F ö p p l A., Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Electricität, Leipzig, 1894.

[2]) В переводе А. А. Бубликова в 1901 г. Перевод с 10-го немецкого издания, выполненный А. Н. Обморшевым, издан в 1937 г. Гос. тех.-теор. изд-вом. (*Прим. ред.*)

в самых общих терминах и изложить его в насколько это возможно строгой форме. Читать такую книгу начинающим становится поэтому трудно. Фёппль излагает предмет в своей книге в точности так же, как он делал это и на своих лекциях в аудитории. Обычно он начинал с простых частных случаев, легко доступных для понимания начинающего, и исследовал их, не загромождая посторонними деталями. Более общая постановка вопроса и более строгая форма изложения привлекались позднее, когда студент уже осваивался с элементарными началами и приобретал способность оценить более строгую форму. В Германии в то время имелись уже весьма полные руководства по сопротивлению материалов, как, например, Грасхофа или Винклера. Но оба эти автора основывали свое изложение сопротивления материалов на математической теории упругости и тем затрудняли доступ к этой науке для большинства студентов. Фёппль в своей книге все необходимые знания по сопротивлению материалов сообщает в элементарной форме и только в конце ее переходит к уравнениям теории упругости. В позднейших изданиях своего курса Фёппль расширил ту его часть, которая имеет дело с теорией упругости, и выделил ее в дополнительный том. Эта новая книга сильно содействовала популяризации нашей науки и внедрению строгих методов анализа напряжений в инженерной практике. Это была первая книга по теории упругости, написанная специально для инженеров.

Экспериментальная работа Фёппля также имела большое значение. Его предшественник, профессор Баушингер, интересовался преимущественно механическими свойствами материалов и разработал тонкую технику испытания образцов различных материалов. Фёппль раздвинул поле экспериментальной работы и использовал лабораторию для испытаний, связанных с различными теориями разрушения материалов, и для экспериментального определения напряжений в сложных задачах, для которых не имелось теоретических решений. Измеряя прочность цемента при растяжении на специально предназначенных для этой цели стандартных образцах, Фёппль заметил, что растягивающие напряжения распределяются по сечению такого образца неравномерно и что поэтому стандартные образцы для испытаний на растяжение не дают истинного значения прочности при растяжении. Воспользовавшись каучуковой моделью такого стандартного образца и измеряя продольные удлинения на различных расстояниях от его оси, Фёппль получил удовлетворительную картину распределения напряжений в этом сложном случае. Испытывая цементные кубики на сжатие, он обнаруживает влияние сил трения, действующих по граням кубика, соприкасающимся с зажимными плитами испытательной машины. Он исследует различные методы уменьшения этих сил и показывает, что общепринятые методы испытаний кубических образцов дают преувеличенные значения прочности на сжатие. Во всех этих испытаниях Фёппль, естественно, проявлял высокий интерес к точности своих испытательных машин. Чтобы контролировать величину растягивающих и сжимающих сил, действующих на образцы, он ввел специальный динамометр в виде тяжелого стального кольца, применяемого ныне во многих лабораториях.

При выводе формул для расчета безопасных размеров сооружений Фёппль, следуя Сен-Венану, пользовался в своей книге теорией наибольшей деформации. Но в то же самое время он интересовался и другими теориями прочности и для того, чтобы выяснить вопрос, какой же из них следует отдать предпочтение, провел ряд любопытных экспериментов. Ему удалось выполнить испытания на сжатие различных материалов под высоким гидростатическим давлением, воспользовавшись для этой цели толстостенными цилиндрами из высококачественной стали. Он нашел при этом, что изотропные материалы способны выдерживать весьма высокие давления. Он спроектировал и сконструировал специальный прибор для сжатия кубических образцов в двух взаимно-перпендикулярных направлениях и провел серию испытаний такого же рода с цементными образцами.

Фёпплем были продолжены усталостные испытания по способу Вёлера, поставленные в Мюнхене Баушингером. Он распространил их на образцы с выточками и изучил, таким образом, влияние концентрации напряжений. Он изучил этот вопрос также и теоретически и показал, что при кручении вала, состоящего из двух частей разных диаметров, соединенных галтелью, концентрация напряжений зависит в значительной мере от радиуса галтели.

Фёппль первый дал удовлетворительную теорию биения гибкого вала, вращающегося с высокой скоростью, и в подтверждение ее проделал ряд испытаний в своей лаборатории.

Все получаемые им экспериментальные результаты он публиковал в бюллетенях лаборатории. Это периодическое издание было основано Баушингером; начиная же с 24-го номера до конца своей жизни его продолжал издавать Фёппль. Оно было хорошо известно инженерам, занимавшимся сопротивлением материалов, и, таким образом, оказало заметное влияние на рост этой науки.

ГЛАВА X

ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ ЗА ПОСЛЕДНЮЮ ТРЕТЬ XIX ВЕКА

65. Статически определимые фермы

В главе VII мы познакомились с различными методами, предложенными инженерами для определения усилий в стержнях ферм. В простейших случаях, исследованных Уипплом и Журавским, усилия в стержнях находятся из условий равновесия узлов. В дальнейшем А. Риттер и Шведлер ввели *метод сечений*, а Максвелл, Тэйлор и Кремона показали, каким образом можно строить взаимные диаграммы. Эти методы были достаточны для расчета большинства применявшихся тогда в практике ферм, но возраставшее использование металла потребовало и более полного исследования разнообразных типов ферм.

Несколько теорем, имеющих фундаментальное значение в теории ферм, было сформулировано А. Ф. Мёбиусом (A. F. Möbius, 1790—1868), профессором астрономии Лейпцигского университета. В своем учебнике статики[1]) Мёбиус рассматривает задачу равновесия системы стержней, соединенных между собой шарнирами, и показывает, что если общее число шарниров в такой системе равно n, то для получения из соединяющих эти шарниры стержней жесткой неизменяемой системы нужно иметь не менее $2n—3$ стержней в плоской системе и не менее $3n—6$ стержней в случае пространственной системы. При этом Мёбиус указывает и на возможность исключительных случаев, когда система с $2n—3$ стержнями может оказаться не абсолютно жесткой, допуская возможность малых относительных перемещений шарниров. Исследуя подобные исключительные случаи, он находит, что детерминант системы уравнений равновесия для узлов таких ферм обращается в нуль. Отсюда он заключает, что если из системы, обладающей числом стержней, необходимым для того, чтобы она была жесткой, устранить один из этих стержней, например стер-

---

[1]) Möbius August Ferdinand, Lehrbuch der Statik (2 тома), 1837. См. т. 2, гл. 4 и 5.

жень l_{ab}, соединяющий узлы a и b, то система будет допускать движение оставшихся в составе ее стержней, как механизм. В результате таких относительных перемещений расстояние между узлами a и b может измениться. Представим себе теперь, что конфигурация заданной системы такова, что расстояние между узлами a и b имеет в ней наибольшее или наименьшее значение из возможных. В таком случае малые относительные перемещения системы не изменят расстояния ab, и это укажет на то, что включение стержня l_{ab} не устранит возможности малых перемещений системы. Такой случай и будет исключительным.

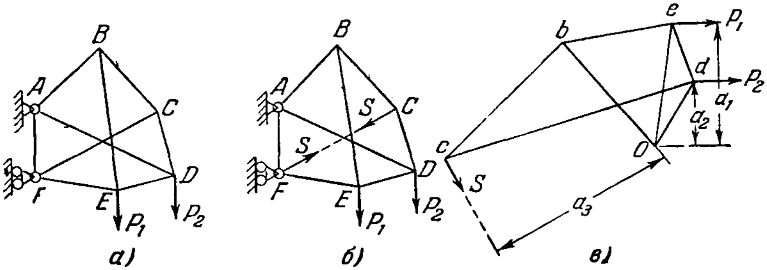


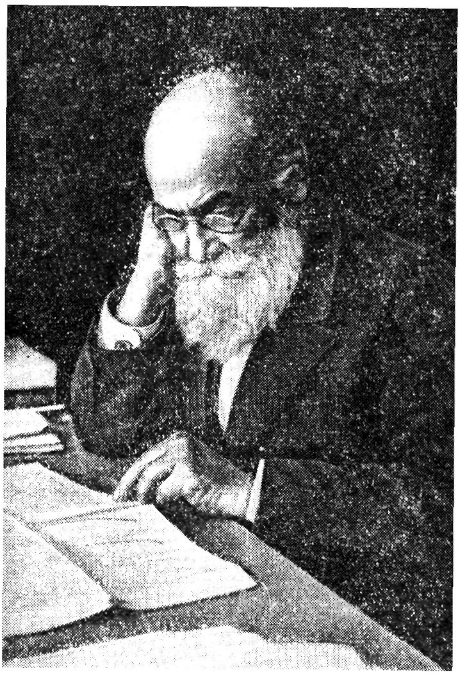
Рис. 151.

Важная работа Мёбиуса оставалась неизвестной инженерам на протяжении многих лет, и только когда практика освоила использование стальных ферм и когда в связи с этим потребовалось усовершенствовать общую их теорию, инженеры вновь открыли теоремы Мёбиуса. В этой работе повторного открытия выдающаяся роль принадлежит Отто Мору[1]). Он установил требование, относящееся к числу стержней, необходимому для того, чтобы образовать жесткую статически определимую систему, исследовав также и исключительный случай бесконечно малой подвижности. Он доказал, что существуют статически определимые фермы, не поддающиеся расчету ранее указанными методами, и предложил для решения таких систем пользоваться методом возможных перемещений.

На рис. 151, a дан пример такой статически определимой системы, которую нельзя решить старыми методами. Определяя усилие в каком-либо из составляющих ее стержней (например в раскосе FC) на основе принципа возможных перемещений, предположим, что этот стержень удален и его действие на остальную систему заменено двумя равными противоположно напра-

[1]) Z. Architek. u. Ing. Ver., Hannover, 1874, стр. 509; Ziviling, 1885, стр. 289. См. также его Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, гл. XII, 1905.

вленными силами, как это показано на рис. 151, *б*. Эта система уже не жесткая, и мы имеем право задать ее шарнирам бесконечно малые возможные перемещения. Уравнение для вычисления сил S можно получить, если приравнять нулю работу, произведенную на возможных перемещениях данными внешними силами P_1, P_2 и силами S. Естественно, что применимость метода зависит от того, каким образом назначаются возможные перемещения. Метод, примененный Мором[1]), разъясняется на рис. 151, *в*. При малых перемещениях системы рис. 151, *б* шарниры B, D и E смещаются перпендикулярно к радиусам AB, AD и FE. Для того чтобы построить план перемещений (рис. 151, *в*), выбираем полюс O и проводим отрезки Ob, Od и Oe, параллельные этим перемещениям, причем величина одного из них, например Ob, может быть принята произвольной. Тогда два других перемещения найдутся путем проведения линий be перпендикулярно[2]) к стержню BE и de, перпендикулярного к ED. Для того чтобы, наконец, получить точку c на плане рис. 151, *в*, остается только провести прямые bc и dc, перпендикулярные к стержням BC и CD. Имея возможные перемещения всех шарниров, легко можно вычислить виртуальную работу и составить уравнение для определения неизвестных сил.



Николай Егорович Жуковский.

Николай Егорович Жуковский (1847—1921), знаменитый основоположник теоретической аэродинамики, подал мысль[3]) рас-

[1]) См. Abhandlungen, гл. IV.

[2]) Перпендикулярность этих прямых, например be и BE, следует из того, что любое движение стержня в плоскости фигуры может быть осуществлено вращением относительно мгновенного центра.

[3]) В докладе, представленном Московскому математическому обществу в 1908 г. См. Жуковский Н. Е., Собрание трудов, т. I, стр. 566, 1937. (*Прим. авт.*) Статья под названием «Сведение динамических задач о кине-

сматривать план перемещений рис. 151, *в* как жесткую систему с шарниром в полюсе O, к которой приложены силы P_1, P_2 и S в направлениях, составляющих 90° с первоначальными. Выражение для виртуальной работы получается тогда точно таким же, как и для момента сил относительно полюса O, а уравнение равновесия фигуры совпадает с уравнением возможных перемещений. Мы получим, таким образом, уравнение

$$P_1a_1 + P_2a_2 - Sa_3 = 0,$$

откуда

$$S = \frac{P_1a_1 + P_2a_2}{a_3}. \qquad \text{(a)}$$

Если направление сил S на плане рис. 151, *в* проходит через полюс O, отрезок a_3 обращается в нуль и уравнение (а) дает для S бесконечно большое значение. Это указывает на то, что данная система удовлетворяет условию исключительного случая бесконечно малой подвижности.

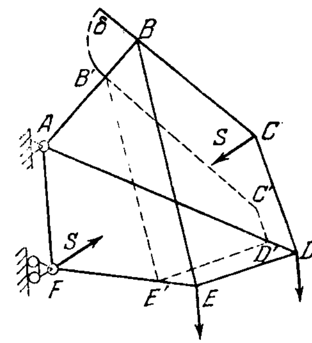


Рис. 152.

Несколько иной вариант метода возможных перемещений был предложен Мюллер-Бреслау[1]). Сущность его поясняется рис. 152. Рассматривая ту же самую систему, что и раньше, и допустив, что стержень FC из нее изъят, мы опять получаем изменяемую систему, возможные перемещения коотрой нужно исследовать. Но вместо того чтобы строить для этих перемещений отдельную диаграмму, попробуем на этот раз получить все необходимые нам данные из уже имеющегося рисунка. Величина δ перемещения шарнира B принимается произвольной, и точка B' будет найдена, если мы повернем перемещение на 90°. Пользуясь свойством мгновенного центра, мы заключаем, что точка E', определяющая повернутое на 90° перемещение EE' шарнира E, определится проведением прямой $B'E'$ параллельно BE. Точка D' будет найдена проведением прямой $E'D'$ параллельно ED, и наконец, точка C', определяющая повернутое на 90° перемещение шарнира C, находится как точка пересечения прямых $D'C'$ и $B'C'$, параллельных прямым CD и BC. Найдя теперь возможные перемещения всех шарниров, мы можем определить и виртуальную работу, вычислив сумму моментов относительно точек $E', D', C', \ldots$ внешних сил и силы S, приложенных в E, D, $C, \ldots$ Приравнивая

матической цепи к задачам о рычаге». О жизни и деятельности Н. Е. Жуковского см. Л. С. Лейбензон, «Николай Егорович Жуковский—к 100-летию со дня рождения», М.—Л., 1947; статья А. А. Космодемьянского в книге «Люди русской науки», т. 1, стр. 153 и др., М.—Л., 1948. (*Прим. ред.*)

[1]) Müller-Breslau, Schweiz. Bauztg., т. 9, стр. 121, 1887.

эту сумму нулю, мы получаем уравнение для вычисления S. Если при этом окажется, что точка C' будет лежать на прямой FC, то сила S получится бесконечно большой; это укажет на то, что мы имеем дело с исключительным случаем бесконечно малой подвижности.

Другой общий метод исследования сложных стержневых систем ферм был разработан Л. Хеннебергом[1]). Метод основывается на возможности преобразования данной сложной стержневой системы в более простую путем удаления из нее некоторых стержней и замены их другими стержнями, иначе расположенными. Чтобы показать его применение, вернемся к ранее разобранному примеру (рис. 153, *а*). Заменяя стержень FC стержнем AE, как показано на рис. 153, *б*, получаем простую систему, усилия в стержнях которой легко определяются из диаграммы Максвелла. Пусть S'_i—усилие, действующее во вновь введенном стержне AE. Решим следующую простую вспомогательную задачу: найдем усилия в стержнях для того случая, когда на систему действуют две равные противоположно направленные единичные силы, показанные на рис. 153, *в*. Пусть s''_i является усилием в стержне AE в этом случае. Если система будет подвергнута действию не этих единичных сил, а сил S, как это показано на рис. 153, *г*, то усилие в стержне AE определится как произведение Ss''_i. Соответственно этому усилия в стержнях действительной заданной системы (рис. 153, *а*) будут найдены как результат наложения случаев 153, *б* и 153, *г*. Истинным значением величины S будет, очевидно, то, которое обращает усилие в стержне AE в нуль. Таким путем мы приходим к уравнению

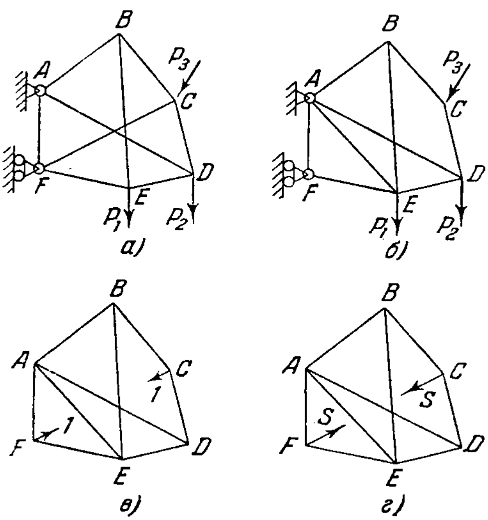


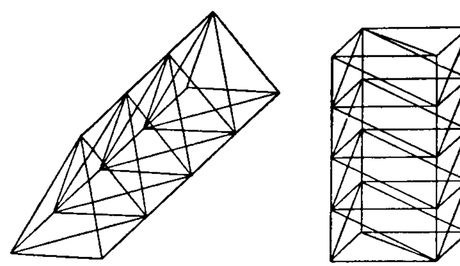
Рис. 153.

$$S'_i + Ss''_i = 0,$$

[1]) Henneberg L., Statik der starren Systeme, стр. 122, Darmstadt, 1886. См. также Graphische Statik der starren Systeme, стр. 526, 1911 и его статью в Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, т. 4, стр. 406.

из которого находится усилие S. Если величина s_i оказывается равной нулю, мы получаем упомянутый выше исключительный случай. Метод этот легко распространить и на такие системы, для преобразования которых в простейшие требуется произвести замену более чем одного стержня, поэтому он представляет собой общий способ расчета сложных плоских стержневых систем. Другие общие методы решения той же задачи были предложены Савиотти[1]) и Ф Шуром[2]).

Начала общей теории пространственных систем были заложены также Мёбиусом. Он показал, что для соединения в жесткую геометрически неизменяемую систему n шарниров необходимо $3n—6$ стержней, отметив, что и здесь могут иметь место исключительные случаи бесконечно малой подвижности. Они характеризуются обращением в нуль детерминанта системы уравнений равновесия для всех узлов. Он указал полезный практический прием решения вопроса о том, является данная система жесткой или нет. Если для какого-либо загружения мы можем найти усилия во всех элементах системы, не приходя к неопределенностям, то упомянутый детерминант получается отличным от нуля и система неизменяема. В качестве простейшего предположения Мёбиус допускает загружение нулевыми силами, и если при этом ни в одном из стержней усилие не отлично от нуля, мы вправе утверждать, что система жесткая.



а) б)

Рис. 154.

Мёбиус исследовал весьма важную задачу о самоуравновешивающейся пространственной стержневой системе[3]) в виде замкнутого многогранника и показал, что если плоские грани такого многогранника являются треугольниками или составлены из треугольников, то число стержней в ней в точности равно числу уравнений статики и такая система статически определима. На рис. 154 даны примеры таких систем.

Работа Мёбиуса по пространственным системам также осталась неизвестной инженерам, и они впоследствии разработали теорию такого вида ферм независимо от Мёбиуса. Это было

---

[1]) Saviotti C., La statica grafica (3 тома), Milano, 1888. См. также его статью в Atti accad. Nazi. Lincei (3), т. 2, стр. 148, Roma, 1875.

[2]) Schur F., Z. Math. u. Physik, т. 40, стр. 48, 1895.

[3]) См. Statik, т. 2, стр. 122.

выполнено главным образом А. Фёпплем, объединившим свои исследования этого вопроса в изданной им книге[1]). В этой книге мы впервые встречаемся с разработкой некоторых важных вопросов, относящихся к пространственным системам. Книга Фёппля явилась серьезным вкладом и послужила основой для многих последующих трудов в этой области.

Автор начинает с рассмотрения конструкций, подобных тем, что мы видим на рис. 154. Он называет их *сетчатыми конструкциями* (Flechtwerk). Не будучи знаком с трудом Мёбиуса, он замечает: «Будущий историк строительной техники может с изумлением спросить, как это могло случиться, что общая идея сетчатой конструкции оставалась совершенно неизвестной вплоть до нынешнего 1891 г., несмотря на то что во всех веках она находила столь широкое использование в строительной практике?». Затем он доказывает, что подобная система статически определима, и рассматривает ее использование в качестве фермы покрытия (рис. 155). Фёппль настолько заинтересовался этой системой ферм, что изготовил для нее модель в крупном масштабе и подверг последнюю испытаниям в своей лаборатории. Испытания показали, что обычное предположение о шарнирности узлов не приводит здесь к столь удовлетворительным результатам, как это наблюдается в отношении плоских ферм. Отсюда он пришел к выводу, что там, где требуется провести расчет пространственной конструкции с большой точностью, необходимо учитывать жесткость ее узлов.

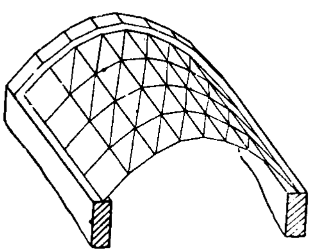


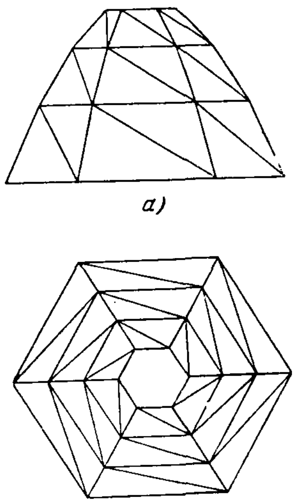
Рис. 155.

Далее Фёппль исследует купольное покрытие системы Шведлера[2]) (рис. 156) и проектирует свою систему такого покрытия (рис. 157). Она нашла применение при строительстве крупного крытого рынка в Лейпциге[3]). Для каждой системы Фёппль указывает методы определения усилий в стержнях при любом виде загружения. Кроме того, им исследовано также, как нужно опирать подобные конструкции, чтобы исключить возможность бесконечно малой подвижности. В применении к более сложным конструкциям Мюллером-Бреслау были с успехом использованы метод возможных перемещений и метод Хеннеберга[4]).

Его исследование по расчету ферм имело в виду главным образом проектирование металлических мостов, и здесь первостепенное значение приобретала задача нахождения наиболее

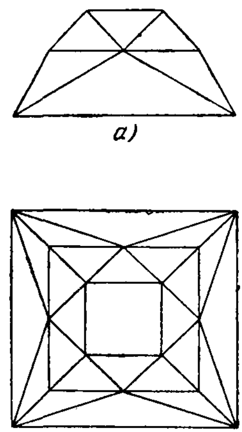
[1]) Föppl August, Das Fachwerk im Raume, Leipzig, 1892.
[2]) Z. Bauwesen, 1866.
[3]) Schweiz. Bauztg., т. 17, стр. 177, 1891.
[4]) Zentr. Bauw., т. 11, стр. 437, 1891; т 12, стр. 225, 244, 1892.

неблагоприятного положения подвижной нагрузки. Решение было найдено в методе *линий влияния*. В отношении большей части конструкций, встречающихся на практике, применим принцип наложения и потому, исследуя влияние перемещающейся по пролету единичной нагрузки, легко можно вычислить и усилия, вызываемые в элементах стержневой системы любой заданной системой нагрузок. Линии влияния были введены в практику



а) б)

Рис. 156.



а) б)

Рис. 157.

проектирования с той целью, чтобы облегчить и сделать графически наглядным представление о том, как именно изменяются усилия от единичной нагрузки, когда эта нагрузка меняет свое положение. Мы уже останавливались (см. стр. 184) на основоположных в этой области работах Мора и Винклера, выполненных в 1868 г. Последний из двух названных авторов пользовался этими линиями в своей книге по теории мостов[1], одном из лучших и популярнейших сочинений по этому вопросу. Френкель является автором статьи[2], содержащей первое

[1] Winkler E., Vorträge über Brückenbau, т. I, Theorie der Brücken, Wien, 1872. (*Прим. авт.*)

[2] Fränkel W., Civiling, т. 22, стр. 441, 1876. (*Прим. авт.*) Вильгельм Френкель (1841—1895), сын русского врача, уроженец Одессы, по окончании в 1857 г. одесской гимназии поступил в число студентов Дрезденского политехникума, по окончании которого в 1862 г. со званием инженера-строителя был оставлен при нем для подготовки к научно-педагогической деятельности. В 1869 г. был избран профессором Политехникума по строительной механике и в этой должности оставался до смерти.

систематическое изложение теории линий влияния. Самое же полное описание разнообразных применений их мы находим в книгах[1]) Мюллер-Бреслау, профессора Берлинского политехникума, проделавшего большую работу по использованию графических методов в решении задач теории сооружений.

66. Прогибы ферм

При проектировании ферм часто возникает необходимость в вычислении их прогибов. После того как определены усилия во всех стержнях статически определимой системы, имеется возможность, пользуясь законом Гука, вычислить изменения их длин. Возникает чисто геометрическая задача. зная удлинения или укорочения стержней, образующих ферму, найти соответствующие перемещения ее узлов. Во многих случаях достаточно узнать перемещения лишь нескольких узлов. Если в этих узлах приложены силы, то пригодным средством здесь может оказаться теорема Кастильяно. Помимо этого, Кастильяно показано, что если в узле не приложены силы, то мы вправе ввести в нем фиктивную силу, приняв, после выполнения вычислений, в окончательном результате, что эта добавочная сила равна нулю. Он применил понятие обобщенной силы и доказал, что в случае двух равных противоположно направленных по одной прямой сил P произволная $\partial V/\partial P$ дает изменение расстояния между точками приложения сил; в случае же пары M, приложенной к упругой системе, производная $\partial V/\partial M$ дает угол поворота того элемента системы, на который эта пара действует (см. стр. 347).

Как указывалось выше (см. стр. 248), Максвелл дал другой метод определения перемещений узлов фермы (раньше, чем Кастильяно). Но он представил его в столь абстрактной форме, что инженеры не обратили на него внимания, и его метод нашел надлежащее применение лишь после того, как Мор открыл его вторично[2]). Но, зная о печатной работе Максвелла, Мор разработал метод, основанный на использовании принципа виртуальной работы, и на примерах показал его практическую ценность. Для пояснения этого метода покажем его применение к ранее разобранной нами задаче (рис. 119, *а*, стр. 248), а именно к вычис-

[1]) Müller-Breslau H., Die graphische Statik der Baukonstruktionen, 2-е изд., 1887; см. также его книгу «Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen», 1-е изд., 1886. (*Прим. авт.*) Имеются русские переводы: «Графическая статика сооружений», перев. с 1 и 2-го нем. изд. Г. Г. Кривошеина, т. I—II, СПб., 1898—1900 и его же перев. с 4-го нем. изд., СПб., 1910—1913; «Новые методы строительной механики», перев. со 2-го нем. изд. Н. Н. Митинского, СПб., 1898. (*Прим. ред.*)

[2]) См. Z. Architek. u. Ing. Ver., Hannover, стр. 509, 1874; стр. 17, 1875.

лению прогиба узла A от действия нагрузки P_1, P_2,... Чтобы решить эту задачу, Мор рассматривает вспомогательное состояние, представленное на рис. 119, *б*. Чтобы найти соотношение между удлинением Δ_i' стержня i и соответствующим прогибом δ_a' узла A, он устраняет стержень и заменяет его действие на ферму двумя равными противоположно направленными силами s_i'. Считая остальные стержни абсолютно жесткими, он получает систему с одной степенью свободы, подвергающуюся действию единичной нагрузки, опорных реакций и сил s_i'. Поскольку эти силы находятся в равновесии, работа их на любых возможных перемещениях должна равняться нулю. Таким путем он приходит к уравнению

$$-s_i'\Delta_i' + 1\cdot\delta_a' = 0,$$

из которого

$$\delta_a' = \Delta_i' \frac{s_i'}{1}. \tag{a}$$

Мы видим, что начало возможных перемещений позволяет установить искомое соотношение между удлинением Δ_i' и прогибом δ_a', сохраняющее силу при любом малом значении Δ_i'. Пользуясь этим соотношением, можно легко найти прогиб δ_a узла A при действии на систему заданных сил P_1, P_2, ... (рис. 119, *а*). Подставляя действительное удлинение $S_i l_i / EA_i$ стержня i в уравнение (а), Мор получает прогиб узла A, вызванный удлинением лишь одного стержня. Суммируя такие прогибы, обусловленные всеми стержнями системы, он получает:

$$\delta_a = \sum \frac{S_i s_i' l_i}{A_i E}. \tag{b}$$

Этот результат Мора совпадает с тем, который был получен ранее Максвеллом (см. стр. 249).

Для вычисления прогибов нескольких узлов по способу Максвелла—Мора нам нужно, очевидно, для каждого из этих узлов решить вспомогательную задачу, подобную поясненной на рис. 119, *б*. С увеличением числа узлов в системе решение ее усложняется. Чтобы обойти это затруднение, Мор предложил другой метод[1]), позволяющий получить все необходимые прогибы путем построения эпюры изгибающих моментов для простой балки, несущей некоторые фиктивные нагрузки. Рассмотрим в качестве примера вертикальные прогибы фермы рис. 158, *а*. Усилия во всех стержнях этой фермы, а также соответствующие им удлинения или укорочения, легко поддаются определению. Для того чтобы вычислить вертикальные прогибы узлов, произве-

[1]) См. Z. Architek. u. Ing. Ver., Hannover, стр. 17, 1875. См. также Abhandlungen, стр 377, 1906.

денные удлинением Δl_i одного элемента, например стержня CD, воспользуемся уравнением (а) и найдем из него, что прогиб δ_m узла m (рис. 158, *б*), лежащего против стержня CD, равен

$$\delta_m = \Delta l_i \frac{s_i'}{1}, \tag{c}$$

где s_i'—осевое усилие в стержне CD, вызванное единичной нагрузкой, приложенной в узле m. Так как все стержни, за исключением CD_1, рассматриваются как жесткие, то обе заштрихованные на рис. 158, *б* части фермы перемещаются, как абсолютно твердые тела, совершая одна относительно другой поворот вокруг шарнира m. Отсюда очевидно, что вертикальные прогибы всех узлов определяются как соответствующие ординаты диаграммы amb на рис. 158, *в*. Замечая, что осевое усилие s_i', произведенное в стержне CD единичной нагрузкой в m, равно изгибающему моменту в m, разделенному на плечо h, мы заключаем из уравнения (c), что диаграмму прогибов рис. 158, *в* можно рассматривать как эпюру изгибающих моментов для балки AB (рис. 158, *г*), на которую действует фиктивная нагрузка

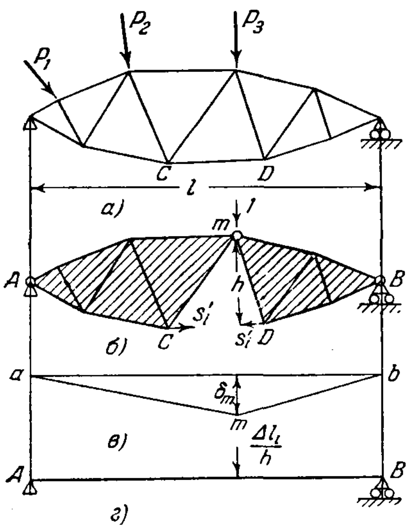


Рис. 158.

$$\frac{\Delta l_i}{h}. \tag{d}$$

Подобным же образом можно определить и прогиб, возникающий в результате изменения длины всякого другого стержня, входящего в состав пояса фермы. Прогиб фермы, получающийся в результате изменений длин всех поясных элементов, можно таким путем вычислить для каждого узла как изгибающий момент для соответствующего поперечного сечения балки AB, несущей фиктивные грузы, определяемые для каждого узла величиной (d). Эти грузы, как мы видим, являются безразмерными величинами, соответствующие же им изгибающие моменты, как это и должно быть, имеют размерность длины. Мор показывает, что дополнительные прогибы, вызванные деформацией *элементов решетки*, могут быть вычислены точно таким же образом, так что в конечном счете вычисление прогибов узлов в нашей ферме (рис. 158, *а*) сводится к определению изгибающих моментов, возникающих в балке под действием надлежащим образом подобранной системы фиктивных грузов.

Дальнейшее развитие задача определения прогибов ферм получила в трудах Винклера[1]), показавшего, что прогибы узлов пояса фермы могут быть вычислены из рассмотрения элементов

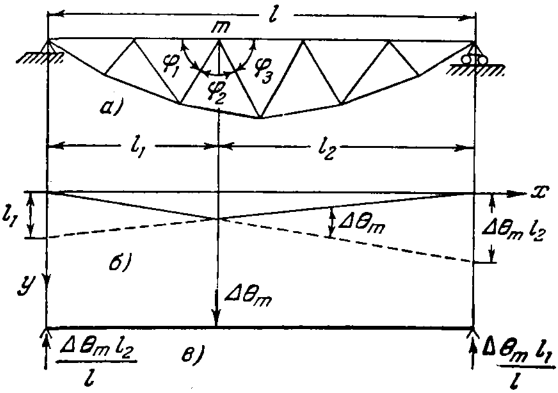


Рис. 159.

этого пояса. Особенно просто такое вычисление в том случае, когда один из поясов фермы прямолинеен и горизонтален, как, например, верхний пояс фермы, изображенной на рис. 159. Очевидно, что прогибы будут полностью определены, если только мы определим изменения длин стержней верхнего пояса и углы их поворотов. Так как пояс горизонтален и прямолинеен, то изменения длин стержней приведут лишь к горизонтальным перемещениям верхних узлов. В таком случае вертикальные их перемещения зависят лишь от поворотов элементов верхнего пояса. Винклер[2]) показывает, что эти повороты легко определятся, если мы вычислим изменения углов каждого треугольника фермы, вызванные деформацией стержней. Допустим на мгновение, что эти изменения углов φ_1, φ_2 и φ_3 в верхнем узле m фермы (рис. 159, *а*) найдены, тогда путем их суммирования мы получим малый угол $\Delta\theta_m$, образующийся между двумя элементами пояса в узле m в результате прогиба. Соответствующий прогиб верхнего пояса в предположении, что $\Delta\theta_m$ положителен, показан на рис. 159, *б*. Прогиб для точки пояса, лежащей

[1]) Winkler E., Theorie der Brücken, II выпуск, 2-е изд., стр. 363, 1881.

[2]) Winkler E., Theorie der Brücken, II выпуск, 2-е изд., стр. 302, 1881.

слева от узла m, равен $\Delta\theta_m l_2 x/l$; для точки же, лежащей справа от m, он выразится через $\Delta\theta_m l_1(l-x)l$. Мы видим, что эти выражения для прогибов совпадают с соответствующими выражениями для изгибающих моментов в свободно опертой балке, находящейся под фиктивной нагрузкой $\Delta\theta_m$, приложенной, как это показано на рис. 159, *в*. Вычисляя этим способом значения $\Delta\theta_i$ для каждого узла i верхнего пояса и пользуясь методом наложения, мы находим искомые прогибы как изгибающие моменты для свободно опертой балки, на которую действуют фиктивные силы $\Delta\theta_i$.

Если требуется определить прогиб пояса, имеющего полигональное очертание, например нижнего пояса фермы, предста-

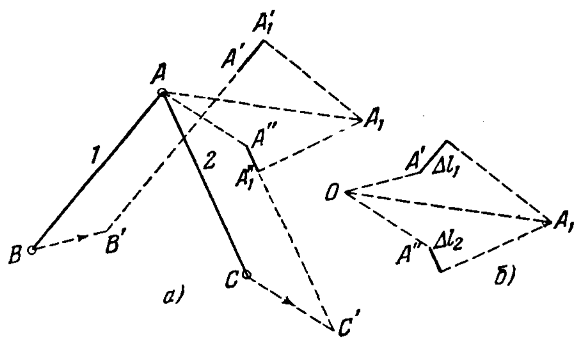


Рис. 160.

вленной на рис. 159, *а*, то часть этого прогиба, обусловленная изменениями углов между стержнями, вычисляется только что описанным способом. К ней нужно добавить часть прогиба, представляющую собой результат изменения длин в элементах этого пояса. Эти последние также могут быть найдены как изгибающие моменты в простой балке от системы надлежащим образом приложенных фиктивных грузов.

Чисто графический метод определения прогибов ферм был предложен Виллио[1]). Покажем применение этого метода на простом примере смещения одного узла A (рис. 160), образованного двумя стержнями *1* и *2*, противоположные концы которых шарнирно укреплены в B и C. Перемещения BB' и CC' шарниров B и C и изменения длин стержней *1* и *2* будем считать известными. Требуется найти получающееся при этом перемещение узла A. Допустив предварительно, что стержни в узле A разъединены, перенесем их в положения $A'B'$ и $A''C'$ параллельно их перво-

[1]) Williot M., Notions pratiques sur la statique graphique, Paris, 1877 См. также Ann. génie. civil, 2-я серия, 6-й год, 1877.

начальным положениям, притом так, чтобы BB' и CC' представляли собой заданные перемещения шарниров B и C. Исходя теперь из этих новых положений как из начальных и закрепив неподвижно точки B' и C', дадим противоположным концам стержней перемещения $A'A_1'$ и $A''A_1''$, показанные толстыми линиями. Эти перемещения равны заданным изменениям длин стержней: удлинению $A'A_1'$ стержня *1* и укорочению $A''A_1''$ стержня *2*. Теперь, чтобы закончить построение, нам останется лишь совместить точки A_1' и A_1'', повернув для этого стержень $B'A_1'$ относительно B' и стержень $C'A_1''$ относительно C'. Поскольку мы имеем дело с малыми деформациями и малыми углами поворота, дуги окружностей, по которым перемещаются точки A_1' и A_1'' при поворотах стержней, могут быть заменены перпендикулярами $A_1'A_1$ и $A_1''A_1$, пересечение которых и даст новое положение A_1 узла A. Таким образом, вектор AA_1 представит собой искомое перемещение A.

Поскольку удлинения стержней и перемещения узлов весьма малы по сравнению с длинами элементов фермы, откладывать эти величины следует в увеличенном масштабе на отдельной диаграмме (рис. 160, *б*). С этой целью поместим полюс в точку O и отложим от него в заданных направлениях и в назначенном масштабе перемещения OA' и OA'' шарниров B и C. Затем из точек A' и A'' проведем векторы Δl_1 и Δl_2, показанные на чертеже сплошными линиями и представляющие собой известные изменения длин стержней *1* и *2*. При этом нужно обратить внимание на знаки этих изменений длин. Стержень *1*, по предположению, испытывает удлинение, поэтому Δl_2 откладывается в направлении от B к A. Стержень *2* подвергается укорочению, поэтому Δl_2 откладывается в направлении от A к C. Наконец, перпендикуляры, восстанавливаемые в концах векторов Δl_1 и Δl_2, пересекаясь в точке A_1, определяют перемещение OA_1, узла A. Рис. 160, *б* представляет собой диаграмму Виллио для нашей простейшей системы.

Тем же приемом строятся диаграммы перемещений для всех ферм, образованных путем присоединения к исходному стержню каждого следующего узла двумя новыми стержнями. Имея дело с такими фермами, мы всегда располагаем возможностью, задавшись перемещениями двух узлов и воспользовавшись описанным выше методом, определить перемещение третьего узла. Найдя это перемещение, мы можем перейти к следующему узлу и повторить то же построение. Имея перемещения всех узлов и спроектировав их на вертикальную ось, мы легко получим вертикальные составляющие перемещения, что позволит нам построить кривую прогибов, которую раньше мы получали аналитическими методами Кастильяно, Максвелла и Мора или же графоаналитическим методом фиктивных грузов.

В специальной литературе рассматриваемого нами периода нашли выражение два противоположных мнения по вопросу о сравнительных достоинствах аналитических и графических методов, используемых в теории сооружений. В то время как некоторые инженеры находили в графических методах эффективную помощь в своей работе, другие считали их недостаточно точными и предпочитали определять нужные величины вычислением. Винклер обсуждает этот вопрос в своей книге по мостам[1]. Он указывает, что за графическими методами нужно признать преимущества их большей наглядности и то, что они легче позволяют обнаруживать ошибки в вычислениях. Графические построения не так утомительны, как аналитические вычисления, и решения графическим путем получаются обычно за более короткий срок в сравнении с тем, который требуется для вычислений; результаты же их обеспечивают точность, достаточную для всех практических целей. Графическое исследование неразрезной балки требует, по данным Винклера, всего лишь третью часть времени, необходимого для выполнения вычислений. Но некоторые преимущества этот автор признает и за численными методами: им следует отдавать предпочтение в тех случаях, где требуется более высокая точность и, в особенности, если для подобных расчетов уже составлены таблицы, предназначенные для разнообразных применений. Труды Винклера и Мора способствовали широкой популяризации графических методов теории сооружений среди практиков.

67. Статически неопределимые фермы

Мы уже видели (см. стр. 312), что задача исследования усилий в стержневых системах с лишними неизвестными была поставлена Клебшем. Он показал, что, приняв в качестве неизвестных перемещения шарниров, мы всегда имеем возможность составить столько же уравнений, сколько у нас имеется неизвестных. Он рассмотрел несколько простых примеров, легко поддающихся его методу, и получил для них решения. Дальнейшие успехи в исследовании статически неопределимых систем были достигнуты Максвеллом. Его метод был повторно открыт Мором (см. стр. 372) и после этого получил общее применение среди инженеров-строителей. Иной путь подхода к этой проблеме, основанный на зависимостях, определяющих энергию деформации, был предложен Кастильяно[2]. Покажем применение методов Максвел-

---

[1]) W i n k l e r E., Theorie der Brücken, Wien, 1873.

[2]) Оригинальные доказательства начала наименьшей работы и его применений к расчету статически неопределимых систем, главным образом ферм, были предложены Ипполитом Антоновичем Евневичем (1831—1903) в статье «Начало наименьшей работы внутренних сил и его приложение

ла—Мора и Кастильяно на простом примере системы с одним лишним элементом (рис. 161, *а*). Примем за лишнюю неизвестную усилие в раскосе AB. Используя метод Максвелла—Мора, устраняем стержень AB и заменяем его действие на остальную часть системы двумя равными противоположно направленными силами X. Таким путем мы приходим к статически определимой системе рис. 161, *б*, на которую действуют заданные нагрузки P_1, P_2 и неизвестные силы X. Усилия в стержнях этой системы, вызванные заданными нагрузками P_1, P_2, легко поддаются вычислению. Пусть S_i обозначает усилие, действующее в некотором стержне i. Для того чтобы определить усилие, возникающее в том же самом стержне под воздействием на систему двух сил X, мы решаем вспомогательную задачу, полагая, что внешние нагрузки P_1, P_2 устранены, а силы X заменены двумя единичными силами (рис. 161, *в*). Пусть s_i—усилие, вызванное в стержне i этими двумя силами. Тогда полное усилие в стержне i, произведенное нагрузками P_1, P_2 и силами X (рис. 161, *б*), выразится, очевидно, суммой

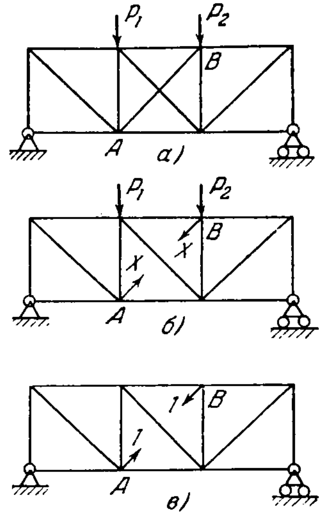


Рис. 161.

$$S_i + s_i X. \tag{a}$$

Соответствующее удлинение стержня i равно $(S_i + s_i X) l_i / A_i E$. Вследствие этих удлинений расстояние между узлами A и B изменится, причем величина, на которую сблизятся между собой точки B и A, определится выражением[1])

$$\sum \frac{(S_i + s_i X) s_i l_i}{A_i E}. \tag{b}$$

Теперь можно определить и величину сил X из условия, что в данной нам ферме (рис. 161, *а*) изменение расстояния между шарнирами A и B равно удлинению Xl/AE раскоса AB. Это

к определению направлений, развиваемых в частях сооружений», Изв. СПб. Технол. ин-та, т. 1, 1877, стр. 161—181 и Харлампием Сергеевичем Головиным (1844—1904) в статье «Начало наименьшей работы в применении к расчету решетчатых ферм», Инженерный журнал, 1883.

[1]) Положительный знак этой суммы указывает на то, что расстояние AB уменьшается, отрицательный—на то, что оно увеличивается.

условие приводит нас к уравнению

$$-\sum \frac{(S_i + s_i X)\, s_i l_i}{A_i E} = \frac{Xl}{AE}. \tag{c}$$

Отсюда определяется неизвестная сила X, а затем из выражения (a) находятся и усилия во всех стержнях.

Решение по методу Кастильяно начинается с того, что мы вычисляем сначала энергию деформации системы рис. 161, *б*. Она выражается суммой

$$V_1 = \sum \frac{(S_i + s_i X)^2\, l_i}{2A_i E}.$$

Производная $\partial V_1/\partial X$ дает нам выражение (b), определяющее перемещение шарнира B относительно шарнира A. Приравни-

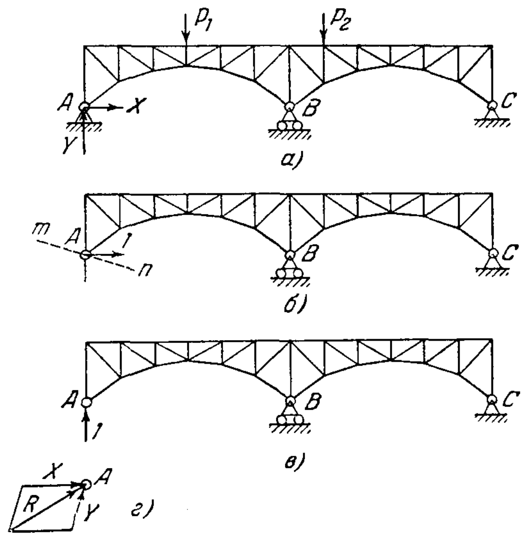


Рис. 162.

вая это перемещение (с отрицательным знаком) удлинению раскоса AB, мы опять приходим к уравнению (c).

Подобным же образом можно поступать и с системами, имеющими несколько лишних связей. Например, ферма, изображенная на рис. 162, *а*, представляет собой систему с двумя лишними элементами. Примем за лишние неизвестные две составляющие X и Y опорной реакции A и исследуем две вспомогательные задачи, показанные на рис. 162, *б* и 162, *в*. Пусть s_i' и s_i'' обозначают усилия в некотором стержне i для этих двух случаев и положим, что Si —усилие в том же стержне i, вызванное силами P_1, P_2, когда опора A устранена и $X=Y=0$. В таком случае полное усилие в стержне i в действительных условиях на рис. 162, *а* выразится суммой

$$S_i+s_i'X+s_i''Y. \tag{d}$$

Воспользовавшись теперь уравнением (b) предыдущего параграфа и приравнивая горизонтальное и вертикальное смещения шарнира A для действительного состояния (рис. 162, *а*) нулю, получаем два линейных относительно X и Y уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \sum \frac{(S_i+s_i'X+s_i''Y)\,s_i'\,l_i}{A_iE} &= 0, \\ \sum \frac{(S_i+s_i'X+s_i''Y)\,s_i''\,l_i}{A_iE} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

Из них можно вычислить X и Y.

Аналогично система с тремя лишними элементами позволит нам составить три уравнения с тремя неизвестными, и вообще мы всегда имеем столько линейных уравнений, сколько имеется неизвестных, а потому всегда в состоянии определить статически неопределимые величины. На практике по мере повышения степени статической неопределимости системы, т. е. увеличения числа лишних неизвестных в ней, задача усложняется и не только потому, что при этом увеличивается число уравнений [подобных уравнениям (e)], но также и потому, что уравнения эти получаются часто такого вида, что ко всей вычислительной работе, ведущей к их решению, предъявляется при этом требование повышенной точности, если определенная степень точности требуется в окончательных значениях определяемых величин[1]). Графический метод приводит обычно к недостаточно точным результатам. Чтобы обойти эту трудность, неизвестные рекомендуется выбирать таким образом, чтобы составляемые для определения их уравнения содержали каждое только одно такое неизвестное. Мор[2]) показывает, как этого можно достигнуть в частном случае арочной фермы с тремя лишними стержнями (рис. 163).

Чтобы пояснить общий метод, которому надо следовать при выборе неизвестных, остановимся еще раз на случае, представленном на рис. 162. Рассматривая составленные для него уравнения (e), мы замечаем, что желаемое упрощение будет достигнуто, если

$$\sum \frac{s_i's_i''l_i}{A_iE} = 0. \tag{f}$$

[1]) Обсуждение вопроса о точности вычислительных процессов, выполняемых в расчетах статически неопределимых систем со многими лишними неизвестными, можно найти в диссертации Пирле: Pirlet J., Dissertation Technische Hochschule, Aachen, 1909. См. также Cyran A., Z. Ver. deut. Ing., т. 54, стр. 438, 1910.

[2]) Mohr O., Z. Architek. u. Ing. Ver., Hannover, т. 27, стр. 243, 1881.

Это уравнение означает (как в этом легко убедиться из уравнения (e) § 66), что единичная сила, действующая в направлении X, не должна вызывать никакого перемещения узла A в направлении Y. Чтобы удовлетворить этому требованию, установим сначала путем построения диаграммы Виллио, в каком направлении будет перемещаться шарнир A под действием горизонтальной единичной силы согласно рис. 162, *б*. Положим, что этим направлением будет mn. Разлагая тогда реакцию R в шарнире A на две составляющие, направим компоненту Y перпендикулярно к mn, как это показано на рис. 162, *г*. При таком выборе направлений для двух составляющих условие (f) будет выполнено и каждое из уравнений (e) будет содержать лишь одно неизвестное.

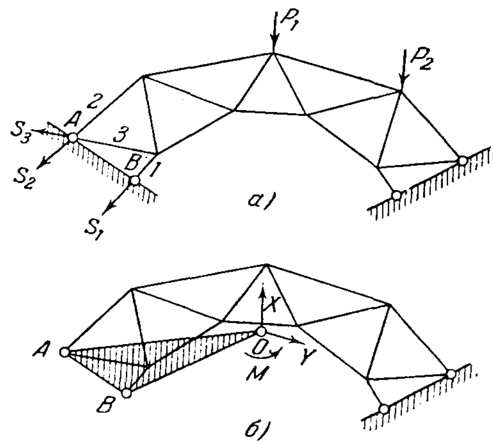


Рис. 163.

Арка, показанная на рис. 163, *а*, представляет собой систему с тремя лишними элементами. Если в качестве неизвестных мы примем усилия S_1, S_2, S_3 в стержнях *1*, *2*, *3* и поступим с ними, как раньше, то придем к трем уравнениям, сходным с уравнениями (e), в каждое из которых войдут все три неизвестные S_1, S_2, S_3. Чтобы упростить задачу и получить три уравнения, содержащих каждое лишь по одной неизвестной, заменим S_1, S_2 и S_3 статически эквивалентной системой трех сил, выбрав их таким образом, чтобы каждая из них, действуя одна, не вызывала перемещений, соответствующих двум другим силам. Предположим для этого, что шарниры A и B связаны с абсолютно жестким диском AOB (рис. 163, *б*); приложим тогда к этому диску соответствующим образом выбранные силы X и Y и пару M. Будем считать их *обобщенными силами*. Для того чтобы найти точку O, в которой следует приложить силы X и Y, определим с помощью диаграммы Виллио перемещение блока ABO под действием пары M. Выберем для O точку, которая при этом перемещении остается неподвижной. Так как точка O не должна перемещаться под действием пары M, мы заключаем из теоремы взаимности, что сила, приложенная в O, не сообщит этому блоку поворота. Поэтому одно из трех уравнений для вычисления неизвестных реакций, а именно то из них, в которое входит M, не будет содержать ни X, ни Y, в другие же уравнения будут входить лишь X и Y. Выбрав направления сил X и Y способом, разъясненным на примере рис. 162, получим, наконец, три уравнения, из которых каждое содержит лишь одно неизвестное.

Методы определения усилий в системах с лишними неизвестными легко могут быть распространены на случаи, где линейные деформации стержней вызываются изменением температур. Примеры такого рода приводятся в книге Кастильяно и в работах Мора.

Широкое применение в исследовании статически неопределимых систем получили линии влияния. Построение их основано на теореме взаимности, доказанной Максвеллом для простого случая двух сил; общее доказательство этой теоремы было дано позднее итальянским ученым Бетти[1]). Лорд Рэлей распространил теорему также и на колебания упругих систем[2]), доказав, что если сила гармонического типа с заданными амплитудами и периодом действует на систему в точке P, то получающееся в результате этого воздействия перемещение во второй точке Q будет иметь ту же амплитуду и ту же фазу, что и перемещение в точке P, если бы сила была приложена в Q. Отсюда он вывел теорему взаимности для статических условий как частный случай, в котором сила имеет бесконечно большой период[3]). В этой работе Рэлей пользуется понятиями *обобщенной силы* и соответствующего *обобщенного перемещения*, рассматривая силу и пару, в обычном смысле, как частные случаи. Он сопровождает это обобщение следующим замечанием: «Для тех, кому понятие обобщенных координат представляется недостаточно отчетливым, здесь можно привести доказательство более специального случая этой общей теории...». Рэлей подтвердил правильность своей теоремы опытами и, производя их для балки, получил линию влияния для прогиба в заданном поперечном сечении. Это — первый случай построения линии влияния экспериментальным путем.

---

[1]) Nuovo cimento (2), тома 7, 8, 1872.

[2]) Proc. London math. soc., т. 4, стр. 357—368, 1873.

[3]) Phil. Mag., т. 48, 1874, стр. 452—456; т. 49, стр. 183—185, 1875

Научная деятельность Рэлея и, в особенности, опубликование им книги «Теория звука»[1]) оказали сильное влияние на оживление научной работы по теории сооружений в России. Идея использования теоремы взаимности вместе с понятием обобщенных сил получила практическое осуществление в трудах проф. Виктора Львовича Кирпичева (1845—1913), применившего ее для построения линий влияния в разнообразных задачах, относящихся к простым и неразрезным балкам и аркам[2]). В дальнейшем понятия обобщенных сил и обобщенных координат были широко использованы В. Л. Кирпичевым в его получившей большое значение книге «Лишние неизвестные в строительной механике»[3]). Таким путем ему удалось значительно упростить изложение различных методов расчета статически неопределимых конструкций. В предисловии к своей книге В. Л. Кирпичев указывает, что все инженеры, интересующиеся теорией сооружений, должны изучить «Теорию звука» Рэлея. Книга В. Л. Кирпичева[4]) и его лекции сыграли большую роль в развитии науки о прочности материалов в России в конце XIX и начале XX века.

В изложении теории расчета ферм предполагали до сих пор, что все узлы в них представляют собой идеальные шарниры. В действительности, однако, эти узлы бывают обычно жесткими, в связи с чем составляющие ферму стержни подвергаются в дополнение к растяжению или сжатию также еще и некоторому изгибу. Это обстоятельство в значительной степени усложняет

---

[1]) Первое английское издание этой знаменитой книги вышло в 1877 г. (*Прим. авт.*). Русский перевод с 3-го англ. изд. в 1940 г.; 2-е изд. этого перевода в 1955 г.: лорд Рэлей (Стретт Дж. В.), Теория звука, т. 1—2, перев. с 3-го англ. изд. П. Н. Успенского и С. А. Каменецкого, под ред. и с предисловием С. М. Рытова, М., Гос. изд. тех.-теор. лит., 1955. (*Прим. перев.*).

[2]) См. Изв. СПб. технол. ин-та, 1883—1884 гг. (*Прим. авт.*). Статья под названием «Приложение теоремы лорда Рэлея к вопросам строительной механики» переиздана в собрании сочинений, т. 1, Петроград, 1917; там же подробная биография.

[3]) Киев, 1903. (*Прим. авт.*). Второе посмертное издание: Кирпичев В. Л., Лишние неизвестные в строительной механике. Расчет статически неопределимых систем, М.—Л., Гос. тех.-теор. изд., 1934. (*Прим. перев.*).

[4]) Кроме вышеупомянутых работ, В. Л. Кирпичев выпустил курс сопротивления материалов в двух томах и курс графической статики. См. Кирпичев В. Л., Сопротивление материалов, Изд. 4-е, перепечатанное со 2-го, испр. и доп., под ред. С. П. Тимошенко, М.—Пг., 1922—1923; Кирпичев В. Л., Основания графической статики, Изд. 6-е посмертн., М.—Л., Гос. тех.-теор. изд., 1933; Кирпичев В. Л., Беседы о механике, изд. 5-е, М.—Л., Гос. тех.-теор. изд., 1951; отдельные его оригинальные статьи по сопротивлению материалов: «О подобии упругих явлений», 1874; «Формулы сложного сопротивления», 1901; «Доказательство теоремы Мориса Леви», 1903; «Новый способ расчета купольных и других пространственных ферм», 1911; «Оптическое изучение деформации», 1913; «К вопросу об усталости металлов», 1913 и др., были переведены в «Собрании сочинений», 1917. (*Прим. перев.*)

расчет ферм. Лишь постепенно были разработаны удовлетворительные методы учета этого изгиба. По предложению проф. Азимонта[1]) Мюнхенское инженерное училище объявило конкурс на разработку метода расчета ферм с жесткими узлами, ответом на что и явилось тщательное исследование этой проблемы, представленное инженером Мандерла[2]). Автор работы показывает, что в фермах с жесткими узлами мы должны исследовать не только перемещения узлов, но также и их повороты, и с этой целью выводит три необходимых уравнения равновесия для каждого узла. Поскольку им учитывается при этом влияние осевых усилий на изгибающие моменты в стержнях фермы, его система уравнений получается весьма сложной и практически непригодной в применениях. Для практических целей был разработан ряд приближенных методов, в которых неразрезными считались лишь пояса, стержни же решетки принимались шарнирно-прикрепленными[3]). Сравнительно более точный приближенный метод был предложен Мором[4]). Он полагает, что на перемещениях узлов их жесткость сказывается не особенно сильно, и, основываясь на этом, определяет эти перемещения по методу, принятому для ферм с идеальными шарнирами. Этим путем углы поворота ψ_{ik} всех элементов (ik) могут быть легко найдены (например построением диаграммы Виллио). В качестве неизвестных величин он принимает углы поворота φ_i жестких узлов. Тогда изгибающий момент в узле i элемента ik определяется из уравнения

$$M_{ik}=\frac{2EI_{ik}}{l_{ik}}(2\varphi_i+\varphi_k-3\psi_{ik}), \tag{g}$$

где $\varphi_i-\psi_{ik}$ и $\varphi_k-\psi_{ik}$—углы поворота концов i и k стержня ik относительно прямой ik. Из условий равновесия узлов мы получаем теперь столько же уравнений вида

$$\sum = M_{ik}=0, \tag{h}$$

сколько у нас имеется неизвестных поворотов φ_i. Хотя число уравнений (h) может оказаться и значительным, все же они, как показывает Мор, легко решаются методом последовательных приближений. Вычислив таким путем углы φ_i, он находит из уравнений (g) изгибающие моменты и определяет соответствующие им напряжения изгиба (т. е. *дополнительные напряжения*).

[1]) Asimont, Z. Baukunde, 1880.

[2]) Manderla H., Die Berechnung der Sekundärspannungen, Allgem. Bauztg., т. 45, стр. 34, 1880.

[3]) См. Winkler E., Theorie der Brücken, II выпуск, стр. 276; см. также книгу Энгессера: Engesser F., Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerk-Brücken, Berlin, 1892.

[4]) Mohr O., Civiling, т. 38, стр. 577, 1892. См. также его Abhandlungen, 2-е изд., стр. 467.

Этот метод расчета ферм с жесткими узлами оказался достаточно точным и нашел широкое применение в практике.

Поскольку расчет ферм во всех случаях, как правило, основывается на тех или иных упрощающих предпосылках, инженеры всегда интересовались возможностями экспериментальной проверки вычисленных на основе теории напряжений и прогибов. В частности, например, В. Френкель сконструировал специальный тензометр для измерения напряжений в элементах ферм. Он изобрел также прибор для определения прогибов в мостах под подвижными нагрузками. Эти испытания[1]) показали удовлетворительное соответствие между измеренными величинами и теоретически вычисленными их значениями.

68. Арки и подпорные стены

Мы уже видели (стр. 182), что Бресс разработал теорию кривого бруса и исследовал как частные случаи двухшарнирную арку и арку, защемленную в пятах. Но в его время инженеры не учитывали, что теория упругого тела может быть применена к проектированию каменных арок, и продолжали рассматривать эти последние как сооружения, составленные из абсолютно жестких клиньев. Лишь чрезвычайно медленно, после обширных экспериментальных исследований Винклера (см. стр. 185) и де Перродиля[2]), в особенности же после испытаний, широко поставленных специальным комитетом Общества австрийских инженеров и архитекторов[3]), инженеры признали, наконец, что теория упругого кривого бруса дает с удовлетворительной точностью надлежащие размеры и для каменных арок. Введением этой теории в практику мы обязаны главным образом Винклеру и Мору.

В своем руководстве по сопротивлению материалов (см. стр. 188) Винклер чрезвычайно подробно исследует двухшарнирные и бесшарнирные арки, а в важной работе[4]) 1868 г. пользуется в применении к ним линиями влияния. Опираясь на начало наименьшей работы, он устанавливает положение кривой давления в арках[5]) и формулирует принцип, носящий его имя. Согласно этому принципу из всех веревочных кривых, которые могут быть построены для действующих на арку нагрузок, истинной кривой давления будет та, которая в наименьшей степени отклоняется от оси арки. Для того чтобы прийти к этому заключению, можно

---

[1]) Fränkel W., Civiling, т. 27, стр. 250, 1881; т. 28, стр. 191, 1882; т. 30, стр. 465, 1884.

[2]) Perrodil, Ann. ponts et chaussées, 6-я серия, т. 4, стр. 111, 1888.

[3]) См. Z. österr. Ing. u. Architek. Ver., 1895, 1901.

[4]) Mitt. Architek. u. Ing. Ver. Böhmen, 1868, стр. 6.

[5]) Die Lage der Stützlinie im Gewölbe, Deut. Bauztg., 1879, стр. 117, 127, 130; 1880, стр. 58, 184, 210, 243.

исходить из следующего рассуждения. Предположим прежде всего, что энергию деформации арки допустимо с приемлемой точностью представить как энергию одного лишь изгиба; тогда мы вправе выразить эту энергию интегралом

$$V=\int_0^s \frac{M^2\,ds}{2EI}. \tag{a}$$

Обозначив измеренное по вертикали расстояние от некоторой точки *оси арки* до соответствующей точки *кривой давления* через z, а горизонтальный распор арки через H, получим:

$$M = Hz.$$

Теперь из начала наименьшей работы и из уравнения (a) следует, что истинной кривой давления будет кривая, для которой интеграл

$$\int_0^s \frac{H^2z^2}{2EI}\,ds \tag{b}$$

принимает минимальное значение. Если все нагрузки вертикальны, т. е. H не зависит от s, а поперечное сечение арки постоянно, то условие минимума интеграла (b) сводится к условию экстремума интеграла

$$\int_0^s z^2\,ds. \tag{c}$$

Это условие и составляет содержание *принципа Винклера*.

Найденный принцип сохраняет свою силу также и для арки переменного сечения, если поперечные сечения ее изменяются таким образом, что

$$I = I_0\frac{ds}{dx},$$

где I_0—момент инерции поперечного сечения в середине пролета. Но теперь теория требует, чтобы минимальное значение получил не интеграл (c), а интеграл

$$\int_0^l z^2\,dx. \tag{d}$$

Из принципа Винклера следует, что если в качестве оси арки принять веревочную кривую, построенную для действующих нагрузок, то кривая давлений совместится с этой осью и арка не будет испытывать изгиба. В действительности, она всегда все же будет подвергаться некоторому изгибу, производимому осевым сжатием, которым мы пренебрегли при выводе выражения для энергии деформации (а). Поскольку, однако, изгиб этот, как правило, всегда мал, право пользоваться принципом Винклера за нами сохраняется. В соответствии с этим при проектировании арок вошло в обычную практику очерчивать ее ось по веревочной кривой для постоянных нагрузок.

Важнейший вклад Мора в теорию арок—это его работа[1]) 1870 г., в которой дан графический метод исследования арок. Рассматривая двухшарнирную арку рис. 164, *а*, Мор допускает

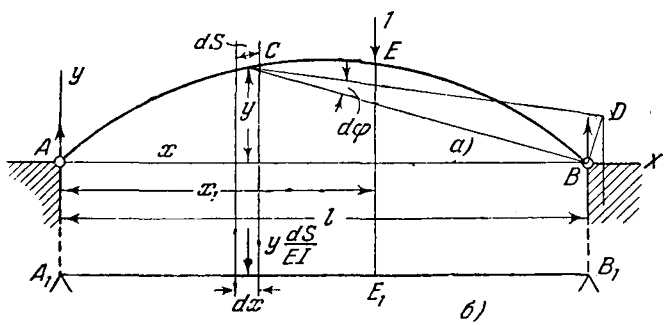


Рис. 164.

сначала, что правый шарнир B может свободно перемещаться в горизонтальном направлении, и вычисляет величину такого горизонтального перемещения, произведенного вертикальной единичной нагрузкой, приложенной в точке E. В этом вычислении он пользуется графическими методами и находит перемещения из веревочной кривой, построенной для некоторых фиктивных нагрузок. Выделив элемент арки, ограниченный двумя поперечными сечениями близ точки C, он замечает, что угол поворота $d\varphi$ участка CB, образующийся в результате изгиба элемента, равен Mds/EI, соответствующая же горизонтальная составляющая перемещения BD равна $Myds/EI$. Суммируя эти элементарные перемещения, он находит, что полное горизонтальное перемещение шарнира B выразится суммой

$$u=\int_0^l \frac{My\,ds}{EI}=\int_0^{x_1}\frac{x\,(l-x_1)\,y\,ds}{lEI}+\int_{x_1}^{l}\frac{x_1\,(l-x)\,y\,ds}{lEI}\,.$$

[1]) Z. Architek. u. Ing. Ver., Hannover, 1870. (*Прим. авт.*) Перевод на русский язык: М о р О., Графический расчет упругих мостовых арок, Перев. А. Л. Недзелковского, СПб., 1872. (*Прим. ред.*)

Из этого выражения видно, что горизонтальное перемещение может быть определено как изгибающий момент в поперечном сечении E_1 свободно опертой балки A_1B_1 (рис. 164, *б*), нагруженной фиктивными силами интенсивностью $y\,ds/EI$, приложенными к каждому элементу ds балки. Подобным же образом можно определить и горизонтальное перемещение u_0 шарнира B, если вместо вертикальной единичной силы, приложенной в E, приложить в точке B единичную горизонтальную силу. Поскольку же в действительности шарнир B неподвижен, единичная нагрузка в E повлечет за собой возникновение горизонтального распора H. Величина его определится, очевидно, из отношения

$$H = 1\frac{u}{u_0}.$$

Из этого уравнения Мор заключает, что для каждого положения вертикальной единичной силы соответствующий распор пропорционален смещению u и потому эпюра изгибающих моментов балки A_1B_1, построенная для фиктивных нагрузок, может рассматриваться линией влияния для распора H.

Метод фиктивных грузов в сочетании с основной идеей выбора статически неопределимых величин (лишних неизвестных), иллюстрированной с помощью рис. 163, представляют собой два существенных упрощения, внесенных в расчет арок теорией упругости. Простота этих приемов содействовала в дальнейшем и общему внедрению методов этой теории в практику расчета арок.

При проектировании подпорных стен инженеры продолжали пользоваться методами, основанными на допущении Кулона (см. стр. 78), согласно которому скольжение песка происходит по наклонной плоскости[1]); важнейшим достижением его преемников было развитие чисто графических методов исследования. Весьма полезным методом этого рода оказался предложенный Ребханном[2]). Последний рассматривает общий случай, когда стена AB не вертикальна (рис. 165) и ее реакция R направлена под некоторым углом β к горизонту; поверхность же земли ограничена кривой поверхностью ACE.

Ребханн доказывает, что если BD есть плоскость естественного откоса, BC—плоскость скольжения, по определению Кулона, и прямая CD образует угол β с перпендикуляром CF к BD, то площади ABC и BCD должны быть равны. Для того чтобы найти плоскость скольжения, он проводит поэтому прямую BC, которая делит площадь $BACD$ пополам. Ребханн показывает

[1]) Полную библиографию по этому вопросу можно найти в статьях Ф. Ауэрбаха и Ф. Хюльзенкампа (F. Auerbach, F. Hülsenkamp) в Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, т. 4, 1931.

[2]) Rebhann G., Theorie des Erddruckes und der Futtermauern mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen, Wien, 1871.

также простой способ нахождения реакции R подпорной стены. Для этого нужно только построить треугольник KCD (рис. 165), в котором $KD=CD$. Тогда площадь этого треугольника по умножении на γ—вес объемной единицы песка—даст величину реакции R на единицу длины стены.

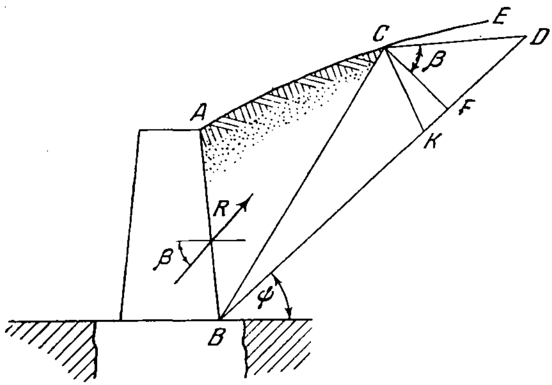


Рис. 165.

Замысел Рэнкина обосновать расчет подпорных стен на анализе напряжений в сыпучем материале получил впоследствии дальнейшее развитие в трудах ряда инженеров[1]). Но полученные этим путем результаты не были признаны более надежными, чем предлагаемые теорией Кулона.

Теория определения необходимой глубины заложения фундаментов под сооружения была предложена Паукером[2]). Пусть p (рис. 166)—равномерно распределенное давление, передаваемое стеной AB на грунт (длина стены перпендикулярна к плоскости чертежа). Выделив элемент ab сыпучего материала под стеной и воспользовавшись уравнением (а) теории Рэнкина (стр. 245), Паукер заключает, что для устранения возможности скольжения грунта горизонтальное давление σ_y должно удовлетворять условию

$$\sigma_y \geqslant \frac{p(1-\sin\varphi)}{1+\sin\varphi}, \qquad \text{(e)}$$

где φ—угол естественного откоса материала. Рассматривая теперь смежный элемент bc, испытывающий вертикальное давление $h\gamma$,

---

[1]) Considère A., Ann. ponts et chaussées (4), т. 19, стр. 547, 1870; Lévy M., J. Mathématiques (2), т. 18, стр. 241; 1873; Winkler E., Z. österr. Ing. u. Architek. Ver., т. 23, стр. 79, 1871; Mohr O., Z. Architek. u. Ing. Ver., Hannover, 1871, стр. 344; 1872, стр. 67 и 245; см. также его Abhandlungen, стр. 236, 1914.

[2]) См. Журнал М-ва путей сообщения, СПб., 1889, № 40, стр. 217—238. (*Прим. авт.*) Статья под названием «Пояснительная записка к проекту морской батареи» датирована 3. XII 1857; опубликована посмертно по рукописи, обнаруженной в архиве Г. Е. Паукера; биографические данные о Германе Егоровиче Паукере (1822—1889) приведены в его курсе «Строительная механика», посмертн. изд., СПб., 1891, под ред. проф. В. Л. Кирпичева. (*Прим. ред.*)

он находит для предельного значения горизонтального давления выражение

$$\sigma_y = \frac{\gamma h (1+\sin\varphi)}{1-\sin\varphi}. \tag{f}$$

Подстановка этого выражения в (e) дает значение необходимой глубины заложения основания

$$h \geqslant \frac{p(1-\sin\varphi)^2}{\gamma(1+\sin\varphi)^2}. \tag{g}$$

Для того чтобы проверить эти формулы и найти поверхности, по которым происходит скольжение песка, Валерианом Ивановичем Курдюмовым в лаборатории Петербургского института инженеров путей сообщения был поставлен ряд интересных опытов[1]). Свои испытания он проводил на модели в виде ящика со стеклянными стенками, наполненного песком. Увеличивая постепенно давление P на блок AB (рис. 166), он смог для каждого значения глубины h установить предельное значение P, при котором в песке возникало скольжение и блок внезапно погружался в его массу на некоторую глубину. Заснятая в это мгновение фотография отчетливо обнаруживает в песке присутствие поверхностей скольжения. Испытания показали, что для возбуждения этого скольжения нужны более высокие значения давлений, чем указываемые уравнением (g). Несколько тщательно поставленных испытаний на модели подпорной стены было выполнено Мюллером-Бреслау[2]). Этими испытаниями было установлено, что в некоторых случаях давление на стену может превысить значения, предсказываемые теорией Кулона. Из них выяснилось также, что способ укладки песка, вибрации в нем, загружение и разгрузка его поверхности способны оказать большое влияние на величину того давления, которое масса песка производит на стену.

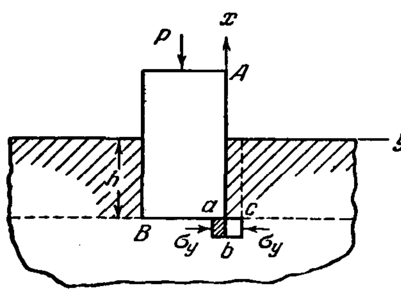


Рис. 166.

[1]) Civiling, т. 38, стр. 292—311, 1892. (*Прим. авт.*) «К вопросу о сопротивлении естественных оснований», Спб., 1891. Биографический очерк В. И. Курдюмова (1853—1904), см. Н. А. Рынин, «Материалы к истории начертательной геометрии», Л., 1938, стр. 19. (*Прим. ред.*)

[2]) См. его книгу. Müller-Breslau H., Erddruck auf Stützmauern, Stuttgart, 1906.

ГЛАВА XI

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ ЗА ПОСЛЕДНЮЮ ТРЕТЬ XIX ВЕКА

69. Научные работы учеников Сен-Венана

Самым выдающимся учеником Сен-Венана был Жозеф Валентэн Буссинеск[1]) (1842—1929). Он был родом из маленького городка Сент-Андрэ-де-Сангони в департаменте Эро, на юге Франции. Начальное образование он получил в родном городе, а с 16 лет продолжал его в Монпелье, где изучал языки и математику. Окончив 19 лет курс, Буссинеск избрал профессию педагога и преподавал математику в средних учебных заведениях в ряде небольших городков южной Франции. Особого интереса к преподаванию элементарной математики он, надо думать, не испытывал, поскольку часы досуга отдавал изучению творчества таких людей, как Фурье, Лаплас, Коши. Вскоре он выступил и с собственной научно-исследовательской работой: в 1865 г. Ламе представил первый научный труд Буссинеска (о капиллярности) в Академию наук.

В 1867 г. Буссинеск получил степень доктора Парижского университета. Приблизительно в то же время он написал и мемуар по теории упругости. Работа была отослана в Академию наук и поступила на просмотр к Сен-Венану; тот сразу же признал в молодом авторе исключительное дарование и с этого времени с неослабевающим интересом следил за его научным развитием. Они вступили в переписку и обсуждали вопросы, занимавшие Буссинеска. По своей молодости последний как автор не отличался ясностью изложения и бывал часто слишком нетерпелив, для того чтобы строить логические выводы, и тогда Сен-Венану приходилось напоминать ему о необходимости в научной работе отчетливой и детальной аргументации.

Преподавание в средней школе не являлось подходящей карьерой для Буссинеска, и Сен-Венан принял все меры, чтобы привлечь молодого ученого к университетской деятельности. Нако-

[1]) С биографией Буссинеска знакомит нас статья Эмиля Пикара (Emile Picard) в Mém. Acad. sci., 1933.

нец это ему удалось, и в 1873 г. Буссинеск принял профессорскую кафедру в Лилльском университете. Теперь он получил возможность отдавать все свои силы науке, результатом чего явились многие ценные его труды по различным отраслям теоретической физики. В 1886 г. он был избран в члены Академии наук и руководителем кафедры механики Парижского университета. С этого времени и до конца своей жизни Буссинеск жил в Париже, в стороне от общества и политики, уйдя всецело в научную работу. Ему мы обязаны рядом открытий в гидродинамике, оптике, термодинамике и теории упругости. Важнейшие его достижения в нашей науке объединены в его книге «Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques...»[1] («Применение потенциалов в исследовании равновесия и движения упругих тел...»). Это была одна из самых значительных книг в этой области из числа тех, которые появились после знаменитых мемуаров Сен-Венана по кручению и изгибу.

Жозеф Валентэн Буссинеск.

Потенциальными функциями пользовались еще Ламе и Кельвин в своих исследованиях деформаций сферических тел, но Буссинеск применил их в гораздо более широком кругу задач. С точки зрения практического значения наибольшую ценность представляют предложенные им методы определения напряжений и деформаций в полубесконечной среде, находящейся под действием заданных сил, приложенных к ее граничной плоскости. В простейшем случае мы имеем силу P, действующую перпендикулярно к горизонтальной граничной плоскости gh (рис. 167)[2]). Принимая положительное направление оси z внутрь тела и вводя для горизонтальных плоскостей полярные координаты r, θ, Буссинеск получает следующие выражения для компонент

[1]) Париж, 1885.

[2]) Одновременно с Буссинеском решение той же задачи в несколько более общем виде, основанное на методе интегрирования Бетти, дал В. Черрути (V. Cerruti) в мемуаре, опубликованном в Atti della R. Ac. d. Lincei, **13**, 1881—1882, стр. 81. Решение Черрути приведено в книге А. Лява «Матем. теория упр.» (русск. перевод), ОНТИ, 1935, стр. 248 и далее. (*Прим. ред.*)

напряжения по горизонтальным площадкам:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_z &= -\frac{3P}{2\pi} z^3 (r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}, \\ \tau_{rz} &= -\frac{3P}{2\pi} rz^2 (r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Мы видим, что

$$\frac{\sigma_r}{\tau_{rz}} = \frac{z}{r},$$

откуда следует, что направление полного напряжения, действующего в некоторой точке горизонтальной плоскости mn (рис. 167), проходит через точку приложения нагрузки O, а его величина равна

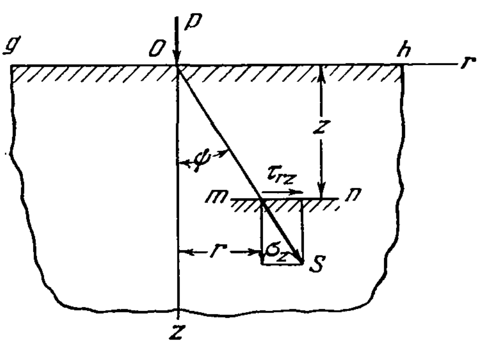


Рис. 167.

$$S = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_{rz}^2} = \frac{3P}{2\pi}\frac{\cos^2\psi}{r^2+z^2},$$

где ψ—угол, образуемый этим направлением с осью z. Мы видим также, что полное напряжение в точке обратно пропорционально квадрату ее расстояния от точки приложения силы P.

Рассматривая вертикальные перемещения граничной плоскости, Буссинеск находит, что

$$w = \frac{P(1-\mu^2)}{\pi E r},$$

откуда видно, что произведение wr для этой плоскости является величиной постоянной, иначе говоря, что радиусы, проведенные в граничной плоскости из начала координат, обращаются при деформации в гиперболы с асимптотами Or и Oz. В начале координат перемещение принимает бесконечно большое значение. Чтобы обойти эту трудность, можно допустить, что материал близ начала координат в объеме полусферы малого радиуса с центром в начале выделен и что заданная сосредоточенная сила P заменена статически эквивалентной сплошной нагрузкой, распределенной по поверхности полусферы.

Имея решение для сосредоточенной силы и пользуясь принципом наложения, Буссинеск решает и задачу для нагрузки, распределенной по части граничной плоскости полубесконечной среды. Рассматривая, в частности, случай равномерной нагрузки интенсивностью q, распределенной по площади круга радиуса a, он находит, что вертикальное перемещение в центре круга равно

$$w_0 = \frac{2(1-\mu^2)\,qa}{E},$$

по его периметру $w_p = 2w_0/\pi$. Тем же путем он решает задачи, когда нагрузка распределяется по площади эллипса или прямоугольника. Эти задачи представляют интерес для инженеров, проектирующих основания под сооружения и исследующих в связи с этим их осадки.

Буссинеск рассматривает также случай, когда вместо распределенных нагрузок заданы вертикальные перемещения некоторого участка граничной плоскости. В частности, он исследует давление абсолютно жесткого штампа (имеющего форму кругового цилиндра радиуса a) на граничную плоскость полубесконечной упругой среды и находит, что перемещение штампа равно в этом случае

$$w = \frac{P(1-\mu^2)}{2aE}.$$

Отсюда видно, что при одном и том же неизменном значении среднего давления $P/\pi a^2$ прогиб среды не остается величиной постоянной, но возрастает прямо пропорционально радиусу штампа. Распределение давления под штампом, очевидно, не равномерно, причем наименьшее значение его имеет место в центре, где оно равно половине средней величины для площади круга соприкосновения. По контуру этой площади давление возрастает до бесконечности, и это указывает на то, что там устанавливается состояние текучести. Текучесть эта, однако, носит местный характер и существенно не влияет на распределение давлений в точках, отстоящих на некотором расстоянии от контура этого круга.

Буссинеск пользуется своими решениями для доказательства принципа Сен-Венана. Выделив систему сил, находящихся в равновесии и приложенных к малому участку среды, он показывает, что вызванные этими силами напряжения носят местный характер. С увеличением расстояния от загруженного участка их величина быстро падает и становится пренебрежимо малой в точках, удаленных от загруженной площади на расстояния, лишь немного превышающие линейные размеры загруженной площади.

К книге «Применение потенциалов...» приложены «Дополнительные замечания...» Они представляют большую ценность. В одном из них излагается теория колебаний стержня. В качестве первого примера Буссинеск рассматривает тонкий однородный полубесконечный стержень, ось которого простирается бесконечно из начала координат в положительном направлении. Исследуя поперечные колебания, он пользуется уравнением

$$a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

и дает решения при различных условиях на конце $x=0$. Он останавливается особо на случае движения, возбуждаемого силой, приложенной к концу как удар, в течение весьма короткого промежутка времени, и находит, что поперечные упругие волны не сохраняют свою форму, как это имеет место в случае продольных колебаний, но подвергаются при распространении вдоль стержня рассеянию и постепенно затухают. Автор задается целью установить предельное значение v скорости удара (ударяющего тела), при превышении которой в материале стержня возникает местная остаточная деформация, сколь бы ни была мала масса ударяющего тела. Он находит:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{\sigma_т}{E} \frac{2i}{h},$$

где $\sqrt{E/\rho}$—скорость звука в материале стержня, h—высота поперечного сечения, i—его радиус инерции. Результат, как мы видим, сходен с полученным Томасом Юнгом для продольного удара (стр. 116).

Буссинеск занимался также исследованием продольного удара стержней и дал полное решение задачи, интересовавшей Сен-Венана (см. стр. 290).

Большую работу выполнил Буссинеск по теории тонкостенных стержней и по теории пластинок[1]). Он дал новый метод вывода уравнений равновесия для тонкостенного стержня, полученных ранее Кирхгоффом. В теории пластинок он привел новый вывод дифференциального уравнения равновесия и исследовал краевые условия Пуассона—Кирхгоффа на основе изучения местных нарушений, возникающих в результате замены одной системы контурных сил другой, статически ей эквивалентной. Таким путем он пришел к выводам, ранее уже полученным Кельвином (см. стр. 319). Эта работа была предпринята Буссинеском по совету Сен-Венана [2]) и вошла в состав приложения (note finale) 73 к выполненному последним переводу книги Клебша.

В заключение следует упомянуть и о научной работе Буссинеска по изучению условий равновесия сыпучих (или зернистых)

---

[1]) См. J. mathématiques, 2-я серия, т. 16, стр. 125—274; т. 5, стр. 163—194 и 329—344, 1879.

[2]) См. выполненный и дополненный Сен-Венаном перевод книги Клебша, стр. 691.

масс[1]). Если внимание его предшественников в этой области было занято изучением предельного равновесия таких масс, то Буссинеск занялся исследованием их упругой деформации. Он полагает, что под действием сил тяжести между зернами песка возникает давление, достаточное для того, чтобы трение предотвращало какое бы то ни было скольжение между частицами, так что масса всего тела деформируется под действием сил, как упругое тело. Он полагает, далее, что модуль сдвига в любой точке такого тела пропорционален среднему давлению $p=\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$, и устанавливает, пренебрегая изменением объема, необходимые уравнения для вычисления напряжений. Ему удается, ограничившись двумерными случаями, получить решения, пригодные для расчета подпорных стен. Сен-Венан, произведя сравнение [2]) теоретических результатов Буссинеска с экспериментальными данными, пришел к выводу, что теория его друга превосходит в отношении точности теории Рэнкина и других авторов. По его указанию Фламан [3]) составил таблицы для облегчения расчетов подпорных стен по способу Буссинеска. Подробная оценка научной деятельности Буссинеска приводится К. Пирсоном [4]), заканчивающим ее следующими словами: «Среди многочисленных учеников Сен-Венана лишь немногие охватили столь широкий круг проблем теории упругости, как это сделал Буссинеск, или же обогатили теорию упругости более полезными трудами, чем он...; он прославил нашу науку не столько частными решениями тех или иных задач механики или физики, сколько искусством тонкого анализа».

Другим учеником Сен Венана был Морис Леви (Maurice Lévy, 1838—1910). По окончании Политехнической школы (1858) и Школы мостов и дорог (1861) он работал в Париже в качестве гражданского инженера, ведя одновременно преподавание в Политехнической школе. Затем, в 1875 г., он стал профессором прикладной механики в Центральной школе ремесел и промышленности (École centrale des arts et manufactures), а в 1883 г. вошел в состав Академии наук.

Научные интересы Леви распространялись на широкий круг разнообразных проблем теории упругости. Он выводит дифференциальное уравнение равновесия плоского кривого стержня, изогнутого действием равномерно распределенной нагрузки,

---

[1]) Boussinesq J., Essai théorique sur l'équilibre d'élasticité des massifs pulvérulents... Mémoires..., publiés par l'Academie de Belgique.

[2]) Saint-Venant, Compt. rend., т. 98, стр. 850, 1884.

[3]) Flamant, Tables numériques pour le calcul de la poussée des terres, Ann. ponts. et chaussées, т. 9, стр. 515—540, Paris, 1885.

[4]) Pearson K., «History»..., т. 2, ч. 2, стр. 356.

и исследует решение[1]) для случая, когда ось стержня в ненапряженном состоянии представляет собой окружность. Если только стержень изогнут слегка, уравнение может быть упрощено, и Леви удается получить из него критическое значение давления, при котором круговое кольцо теряет устойчивость[2]).

В своей работе по пластинкам[3]) Леви останавливается на обобщении граничных условий Пуассона и Кирхгоффа, предложенном Кельвином, и для пластинки конечной толщины проводит детальное исследование местных возмущений, вызываемых заменой одной статической системы краевых сил другой (ей эквивалентной). В исследовании задачи изгиба прямоугольных пластинок Леви дает решение для важного случая свободного опирания по двум противоположным краям, когда два других края защемлены, свободно оперты или совершенно свободны[4]). Это решение нашло разнообразные применения, и Эстанав (E. Estanave) в своей докторской диссертации[5]) рассмотрел много его частных случаев.

Леви решил двумерную задачу распределения напряжений в клине, подвергнутом давлениям по его граням[6]), и рекомендует использовать это решение при расчете напряжений в каменных плотинах. Им был написан также четырехтомный труд по графическим методам в строительной механике[7]).

Альфред Эме Фламан (Alfred Aimé Flamant) по окончании Школы мостов и дорог работал в гидротехническом строительстве в северной Франции. Впоследствии он занял должность профессора теории сооружений в Школе мостов и дорог и профессора механики в Центральной школе ремесел и промышленности. Его интересовала механика сыпучих масс и он упростил теорию Буссинеска[8]). Он сотрудничал с Сен-Венаном в переводе на французский язык книги Клебша. Их совместный труд по продольному удару стержней включен в эту книгу как приложение.

Воспользовавшись решением Буссинеска для полубесконечной среды, Фламан получил как его частный случай распределение напряжений в полубесконечной пластинке, толщина которой равна 1, при действии на нее силы P, перпендикулярной

---

[1]) Lévy M., J. mathématiques (3), т. 10, 1884.
[2]) Первым нашел это решение Бресс.
[3]) Lévy M., J. mathématiques (3), т. 3, стр. 219—306, 1877.
[4]) Lévy M., Compt. rend., т. 129, 1899.
[5]) Estanave E., Thèse, Paris, 1900.
[6]) Lévy M., Compt. rend., т. 127, стр. 10, 1898.
[7]) Lévy M., La statique graphique, 3-е изд., тома 1—4, Paris, 1907.
[8]) Flamant A., Ann. ponts et chaussées, т. 6, стр. 477—532, 1883. См. также его книгу: Flamant A., Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents, Paris. Элементарное изложение теории устойчивости сыпучих масс можно найти в учебнике Фламана: Flamant A. A., Stabilité des constructions, résistance des matériaux, Paris, 1886.

к ее краю[1]) (рис. 168). Распределение напряжений в этом случае получается особенно простым. Элемент C, находящийся на расстоянии r от точки приложения силы, подвергается при этом простому сжатию в радиальном направлении, равному

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi}\frac{\cos\theta}{r}. \qquad \text{(a)}$$

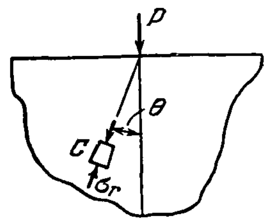


Рис. 168.

Напряжение же σ_θ и касательное напряжение $\tau_{r\theta}$ обращаются в этом случае в нуль. Это простое радиальное распределение напряжений было использовано впоследствии Мичеллом (J. H. Michell) в решении ряда важных проблем (см. стр. 422).

70. Лорд Рэлей

Лорд Рэлей (Джон Уилльям Стрэтт, 1842—1919—John William Stratt, Lord Rayleigh)[2]) был старшим сыном второго барона Рэлея и родился в Лэнгфорд-Грове, близ Терлинга, в имении своего отца, где он провел большую часть своей жизни. После начальной подготовки в частной школе он поступил в 1861 г. в Тринити-колледж в Кембридже. При прохождении курса его занятиями по математике и механике руководил Раузс (Dr. Rauth), пользовавшийся тогда репутацией выдающегося педагога и возбудивший в Рэлее высокое уважение. Будучи уже президентом Королевского общества, Рэлей как-то отозвался о своем бывшем учителе[3]) следующим образом: «Я обязан ему за подготовку в математике и за стимул к ее изучению, который он сумел внушить мне в Кембридже; до сих пор еще во мне живет то изумленное восхищение, с каким я, новичком, открывал для себя обширность и глубину его познаний, его способность сразу же разрешать любую предложенную ему задачу... Мне всегда казалось, что научные заслуги Раузса не получили должной оценки. Ошибочно предполагать, что такая преданность преподавательской работе будто бы должна была оставлять мало возможностей для чего-либо иного... Мне думается, что, вероятно, благодаря принятой в те дни системе математического обучения, которую ныне вошло в манеру порицать, а также тому способу,

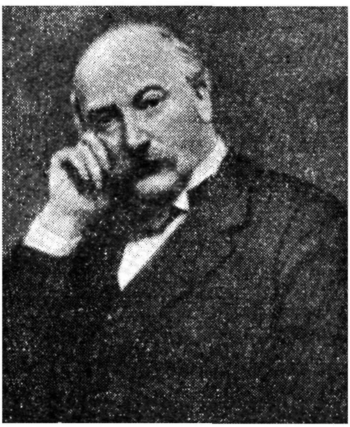
---

[1]) См. Flamant A. A., Compt. rend., т. 114, стр. 1465, 1892. Обобщением этого решения на случай наклонно направленной силы мы обязаны Буссинеску: Boussinesq, Compt. rend., т. 114, стр. 1510, 1892.

[2]) Биография лорда Рэлея: «John William Stratt, third baron Rayleigh», London, 1924, была написана его сыном, Робертом Джоном Стрэттом, четвертым бароном Рэлеем (Stratt, Robert John, fourth baron Rayleigh).

[3]) См. биографию Рэлея, стр. 27.

которым она применялась д-ром Раузсом, мне ни разу за всю мою последующую научную деятельность не представилось повода пожалеть о времени, проведенном мною на курсе математики в Кембридже». Но вместе с тем Рэлей отмечает и некоторые «порочные установки Кембриджской школы», имея при этом в виду склонность «рассматривать оперирование математическими символами как самоцель, а не как средство для решения научных проблем».



Джон Уилльям Стрэтт — лорд Рэлей.

В Кембридже не было условий для постановки экспериментальной работы и в первые годы пребывания там Рэлея не читалось лекций по физике, так что лишь с осени 1864 г. ему представилась впервые возможность слушать курс оптики профессора Стокса. Эти лекции произвели на него сильное впечатление, в особенности их экспериментальное сопровождение. В университете в то время физической лаборатории не было, и, как уже отмечалось ранее, Стоксу приходилось выполнять свои опыты «с самой скромной аппаратурой».

Рэлей был весьма систематичным тружеником, благодаря чему по мере приближения срока экзаменов на получение отличий по математике он постепенно выделялся из ряда своих сотоварищей по классу Раузса.

В декабре 1864 г., успешно выдержав экзамены, он окончил курс лауреатом, с высшим отличием по математике. Это послужило ему поводом остаться в Кембридже для подготовки к экзаменам на вступление в научно-преподавательскую корпорацию колледжа. Ему хотелось также «сделать почин в научно-исследовательской работе, но он нашел это крайне трудным. Имевшиеся в то время в Кембридже условия для этого были весьма ограничены. У него не было, в частности, и практического стажа экспериментальной работы... Кое-чему он научился из опытов, которые демонстрировались Стоксом; он был бы рад почерпнуть из этого источника и больше, но и на этом пути наткнулся на преграду: профессор Стокс был отзывчив и любезен, давая ему после лекций разъяснения по его вопросам, но попытки Рэлея узнать у Стокса, где можно было бы достать тот или иной прибор ни к чему существенному не приводили... Рэлей был несколько обескуражен, обнаружив, что его рвение не встречает отклика, который мог бы выразиться в том или ином приглашении, пусть хотя бы лишь к установке или разборке приборов»[1]).

Легче было заручиться руководством по теоретическим занятиям. Рэлей прочел важнейшие научные труды Стокса и Кельвина и изучил большую работу Максвелла «Динамическая теория электромагнитного поля» («A dynamical theory of the electromagnetic field»). Он вступил в переписку с Тэйтом (Tait) и с Максвеллом. Последний в то время жил в своей усадьбе в Гленлэйре, но при посещении им Кембриджа в связи с происходившим там конкурсом по математике произошла его встреча с Рэлеем.

В 1866 г. Рэлей был избран в члены ученой корпорации колледжа, а в следующем году совершил свою первую поездку в Северную Америку. По возвращении в 1868 г. он приступил к выполнению некоторых экспериментов по электричеству и с этой целью приобрел несколько простых приборов. Приблизительно к этому же времени относится и его знакомство со знаменитой книгой Гельмгольца («Lehre von den Tonempfindung»...—«Учение о слуховых ощущениях»...[2]), пробудившей его интерес к акустике[3]). Он провел некоторые теоретические и экспериментальные исследования с резонаторами и подытожил их результаты в статье по теории резонанса[4]), явившейся началом его собственной научной работы по изучению звука. Несколько позднее, под впечатлением работы Тиндалла (Tyndall), он заинтересовался вопросом о причине голубой окраски неба и напечатал несколько статей по теории света[5]). Они были одобрены Максвеллом и Тиндаллом.

В 1871 г. Рэлей женился и в связи с этим вышел из состава Тринити-колледжа. В следующем году он перенес серьезную болезнь и ему рекомендовали провести зиму в более мягком климате. Взяв с собой жену и нескольких родственников, он снарядил экспедицию по Нилу в собственном паруснике, который представлял собой целый пловучий дом. Жизнь в этом плавании текла монотонно, но это отвечало вкусам Рэлея. Здесь он начал работать над своим трудом «Теория звука», «проводя за ним утренние часы в своей каюте... Трудно было в эти моменты убедить его сойти на берег, хотя бы и для того лишь, чтобы взглянуть на какой-либо храм сказочной красоты»[6]).

В 1873 г. умер отец Рэлея, и ему пришлось с этого времени принять участие в ведении хозяйства в оставленном ему имении.

---

[1]) См. биографию Рэлея, стр. 37.
[2]) Имеется русское издание, СПб., 1875. (*Прим. перев.*)
[3]) См. биографию Рэлея, стр. 50.
[4]) См. Phil. Trans., т. 161, стр. 77—118, 1870.
[5]) См. Phil. Mag., т. 41, 1871.
[6]) См. биографию Рэлея, стр. 62.

Он поселился в Терлинге и, чтобы обеспечить себе возможность продолжать исследовательскую работу, устроил там небольшую лабораторию. Одновременно он продолжал работать и над своим трудом, который вышел, наконец, из печати в 1877 г. Гельмгольц поместил отзыв об этой книге в журнале «Nature» («Природа»);

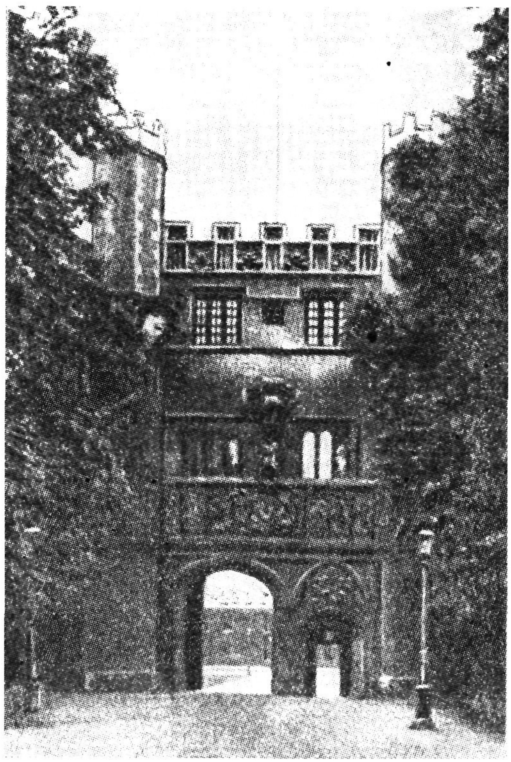


Рис. 169. Тринити-колледж Кембриджского университета.

по его указанию она была переведена на немецкий язык и издана в этом переводе в 1878 г. в Германии.

В связи со смертью Максвелла Рэлей в 1879 г. был избран на кафедру экспериментальной физики в Кембридже. По собственному опыту он знал, насколько важно бывает предоставить студентам возможность производить эксперименты. «До его вступления на кафедру возможности для среднего студента приобрести навыки в практике лабораторной работы не соответствовали требованиям и далеко не достигали уровня, установленного в Германии Гельмгольцем... В намерения Рэлея входило как раз поставить общее элементарное обучение на гораздо более широкой базе, чем это до сих пор пробовали делать; для осуществления этой задачи потребовался разнообразный инвентарь лабораторного оснащения...»[1]). Для получения необходимых средств Рэлей учредил специальный фонд, пополненный им самим и герцогом Девонширским[2]).

В работе по заведыванию лабораторией Рэлею оказывали помощь Глэйзбрук (Glazebrook) и Шоу (Shaw); последний в то время написал книгу «Практическая физика», в которой можно найти описания первых экспериментов, проведенных в этой лаборатории. Рэлей читал элементарные курсы электростатики и магнетизма, теории электрического тока, акустику и повышенный курс электрических измерений. Но все же «Школа натуральной науки в Кембридже переживала в те дни лишь свое младенчество и, понятно, что количество посещавших лабораторию Кавендиша было не велико...». На первый курс было зачислено всего лишь 16 студентов, и эта цифра сохранилась почти неизменной за все то время, пока Рэлей занимал кафедру[3]).

В 1884 г. Рэлей предпринял вторую поездку в Америку и при этом присутствовал на лекциях лорда Кельвина в Балтиморе. По поводу их, несколько лет спустя, он делится впечатлениями со своим сыном: «Что это была за необычайная манера читать лекции! Часто я узнавал в их основе как раз те самые вопросы, которые только перед этим возникали в нашей с ним беседе за завтраком». Когда же в ответ на это Рэлей-сын высказывает предположение, что «знаменитейшие физики Америки, собравшиеся послушать Кельвина, ждали от него, вероятно, чего-то более тщательно подготовленного», Рэлей-отец возражает: «Напротив, они остались весьма довольными, и Кельвину удалось даже заполучить кое-кого из них для того, чтобы они проделали для него во время перерывов какие-то длинные вычисления»[4]).

В конце 1884 г. Рэлей сложил с себя обязанности, связанные с профессурой в Кембридже, и вновь поселился у себя в имении. Здесь, в своей библиотеке и в домашней лаборатории, он до конца своей жизни продолжал вести напряженную научную работу.

Рэлей неоднократно принимал на себя разные общественные обязанности. Так, например, он был профессором натуральной философии в Королевском научном институте (1887—1905),

---

[1]) См. биографию Рэлея, стр. 105.

[2]) Много интересных материалов, относящихся к развитию этой лаборатории, можно найти в книге «A history of the Cavendish laboratory», 1910.

[3]) Биография Рэлея, стр. 106.

[4]) Lord Rayleigh's biography, стр. 145.

президентом Королевского общества (1905—1908), президентом Кембриджского университета (с 1908 г. до своей смерти). За свою жизнь он удостоился многих почестей, включая Нобелевскую премию по физике в 1904 г. и орден «За заслуги».

Главный вклад Рэлея в нашу науку содержится в его книге «Теория звука» («The theory of sound»)[1]). В первом томе этой замечательной книги исследуются колебания струн, стержней, мембран, пластинок и оболочек. Автор демонстрирует те преимущества, которые может извлечь инженер из применения понятий *обобщенных сил* и *обобщенных координат*. Введение этих понятий и использование теоремы взаимности Бетти—Рэлея внесло большое упрощение в расчеты статически неопределимых систем. Труд этот охватывает не только собственно звуковые колебания, но и колебания не акустические. Автор обращает внимание на те удобства, которые может представить применение нормальных координат, и показывает, каким образом, приравнивая скорости нулю, можно извлекать решения для статических задач из исследования колебаний. Таким путем он находит прогибы для стержней, пластинок и оболочек, выражая их через нормальные функции; эта методика приобрела в технике большое значение.

Определяя частоты колебаний сложных систем, он приходит к приближенному решению, задаваясь подходящей формой для заданного типа колебаний и приводя таким путем поставленную задачу к исследованию колебаний системы с одной степенью свободы. Затем он описывает те приемы, которыми можно повысить точность приближенного решения. Идея вычисления частот непосредственно из энергетического условия, без решения дифференциальных уравнений, была впоследствии разработана Вальтером Ритцем (Walter Ritz)[2]), и *метод Рэлея—Ритца* получил ныне широкое применение не только в изучении колебаний, но и в решении задач теории упругости, теории сооружений, нелинейной механики и других разделов физики. Вероятно, никакой другой математический прием не позволил развернуть научные исследования по сопротивлению материалов и теории упругости в столь широкой степени, как этот метод.

Рэлей пользуется своим приближенным методом в ряде сложных задач. В задаче о колебаниях струны он показывает, как найти приближенное решение в том случае, если масса струны распределена по ее длине неравномерно, причем он учитывает

---

[1]) Rayleigh, Theory of sound, London, 1877. Русские издания: Стрэтт Дж. В. (лорд Рэлей), Теория звука. Перев. с 3-го англ. изд. П. Н. Успенского и С. А. Каменецкого, Гостехиздат, т. 1, 1940; т. 2, 1944 и повторное издание, заново сверенное с 3-м англ. изд., под ред. и с пред. С. М. Рытова, М., Гостехиздат, 1955. (*Прим. перев.*)

[2]) Ritz W., Crelle's J., т. 85, 1909.

здесь и влияние, оказываемое на частоту колебаний малой сосредоточенной массой, укрепленной на струне. Переходя затем к продольным колебаниям стержней, он дает оценку погрешности, проистекающей из того, что мы пренебрегаем инерцией поперечного движения частей, не лежащих на оси[1]). Он указывает, что для стержня круглого сечения полученный им результат находится в хорошем согласии с выводами более строгой теории, предложенной Похгаммером[2]). Вводится, кроме того, и поправка в упрощенную теорию поперечных колебаний стержней для того, чтобы учесть инерцию вращения[3]).

Рэлею мы обязаны крупным сдвигом в теории колебаний тонких оболочек. Здесь надлежит иметь в виду два вида колебаний: 1) колебания растяжения, при которых срединная поверхность оболочки подвергается растяжению, и 2) колебания изгиба без растяжения. В первом случае энергия деформации оболочки пропорциональна ее толщине, во втором—кубу толщины. Опираясь теперь на принцип, согласно которому при заданных перемещениях энергия деформации оболочки должна быть наименьшей, Рэлей приходит к выводу, что «если толщина оболочки неограниченно уменьшается, то действительное перемещение сведется к чистому изгибу, насколько это будет совместимо с заданными условиями». Используя этот вывод, он исследует[4]) изгибные колебания цилиндрической, конической и сферической оболочек и приходит к результатам, удовлетворительно согласующимся с экспериментами.

Одно ценное открытие Рэлея из области теории упругости не вошло в состав его книги—это теория поверхностных упругих волн[5]). В так называемых волнах Рэлея движение распространяется по поверхности упругой среды, подобно тому как рябь распространяется по воде, когда ее спокойная поверхность подвергается возмущающему воздействию. Как это и было предсказано Рэлеем, наука установила впоследствии важное значение этих волн в сейсмических процессах.

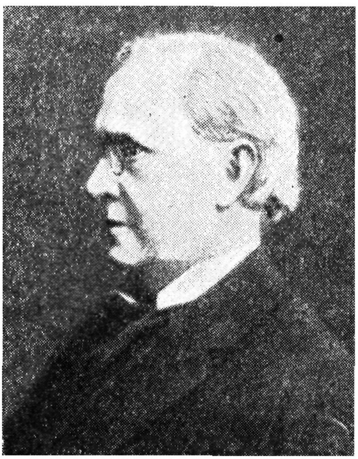
71. Теория упругости в Англии за последнюю треть XIX века

Выход в свет книги Рэлея о звуке (1877) оказал вместе с «Натуральной философией» Томсона—Тэйта (см. стр. 318) большое влияние на развитие физики вообще и нашей науки в частности. За последнюю четверть XIX столетия британскими

[1]) Рэлей, Теория звука, М., 1955, т. I, § 157.
[2]) Pochhammer, J. math. (Crelle), т. 81, 1876.
[3]) Рэлей, Теория звука, М., 1955, т. 1, §§ 163, 186.
[4]) Там же, т. 1, § 235в и след.
[5]) Proc. London Math. soc., т. 17, 1887, или Rayleigh, Scientific papers, т. 2, стр. 441.

учеными было проведено немало глубоких исследований в области теории упругого тела, но в настоящей книге, предназначенной в первую очередь для инженеров, о них будет сообщено лишь вскользь.

Горэйс Лэмб (Horace Lamb, 1849—1934)[1]) родился в Стокпорте (близ Манчестера) и был сыном мастера бумагопрядильной фабрики. До поступления в Тринити-колледж в Кембридже он посещал среднюю школу своего города. Он окончил курс с наградой второй степени по математике и, получив в 1872 г. премию Смита второй степени, остался при колледже в качестве преподавателя вплоть до 1875 г. После этого он принял должность профессора математики в университете Аделаиды (Австралия), где работал 10 лет. По истечении этого срока он вернулся в Англию и занял кафедру чистой математики (а в дальнейшем также и прикладной математики) в Манчестерском университете. Там его выборные полномочия были продлены до 1920 г., когда он был избран почетным членом Тринити-колледжа в Кембридже и лектором математики по кафедре Рэлея в Кембриджском университете. Известно, что он был не только первоклассным ученым, но и прирожденным педагогом.



Горэйс Лэмб.

Основное направление творчества Лэмба лежит в области гидродинамики, но его интересы простирались и на теорию упругости, по которой им также было опубликовано несколько ценных трудов. Он принял тему пластинок и оболочек как наследие разработанной Рэлеем проблемы колебаний оболочек. Лэмб исследовал колебания растяжения[2]) цилиндрических и сферических оболочек, не рассмотренные в приближенной теории Рэлея. Обсуждая вопрос о граничных условиях по краям прямоугольных пластинок, он показывает, что такой пластинке можно придать форму антикластической поверхности, если в ее углах приложить две пары равных, нормально к ней направленных сил[3]).

---

[1]) См. Dictionary of national biography, Oxford.

[2]) Lamb H., Proc. London math. soc., т. 21, стр. 119, 1891.

[3]) Там же, стр. 70. Эта задача рассматривается также в книге Thomson, Tait, Natural philosophy, т. 2, § 656.

Этот результат представляет собой случай изгиба пластинок, использованный впоследствии А. Надаи для экспериментального подтверждения приближенной теории изгиба[1]), предложенной Кирхгоффом. О другой интересной краевой задаче упоминается в «Натуральной философии» Томсона—Тэйта. Здесь сообщается по этому поводу: «До сих пор, к сожалению, математикам не удалось решить, а возможно, что они даже и не пытались решать, прекрасную задачу об изгибании широкой, весьма тонкой полосы (подобной, например, часовой пружине) в круговое кольцо»[2]). Лэмб исследовал антикластический изгиб по краю тонкой полосы[3]) и достиг большого прогресса в решении задачи о балке[4]). Рассматривая бесконечно длинную балку узкого прямоугольного сечения, нагруженную через равные интервалы равными сосредоточенными силами, действующими поочередно вверх и вниз, он упростил решение двумерной задачи и для некоторых случаев получил уравнения кривых прогиба. Таким путем было показано, что элементарная теория изгиба Бернулли достаточно точна, если высота сечения балки мала в сравнении с ее длиной. При этом было также показано, что поправка на поперечную силу, даваемая элементарной теорией Рэнкина и Грасхофа, несколько преувеличена и должна быть снижена до 75% от рекомендуемого этой теорией значения. Надлежит упомянуть также и о труде Лэмба, посвященном теории колебаний упругих сфер[5]) и распространению упругих волн по поверхности полубесконечного тела[6]), а также в теле, ограниченном двумя плоскими гранями[7]). Он изложил также и теорию колебаний естественно искривленного стержня[8]). Особый интерес для инженеров представляет его и Р. В. Саусвелла трактовка колебаний круглого диска[9]).

А. Ляв (A. E. H. Love, 1863—1940) был другим хорошо известным ученым в области теории упругости, вышедшим из Кембриджа в рассматриваемый период времени[10]). Он родился в Уэстонсупер Мэйре в семье врача и поступил в 1874 г. в среднюю школу в Уольвехэмптоне. Потом он был принят в Сент-Джонс-колледж в Кембридже и окончил его в 1885 г. со второй премией. Оставшись холостяком всю свою жизнь, он состоял членом корпорации Сент-Джонс-колледжа с 1887 по 1899 г. и занимал кафедру

[1]) См. N a d a i A., Elastische Platten, стр. 42, Berlin, 1925.

[2]) T h o m s o n, T a i t, Natural philosophy, т. 2, § 717.

[3]) L a m b H., Phil. Mag. (5), т 31, стр. 182, 1891.

[4]) См. Atti congr. intern. math., IV, Roma, 4-й конгресс в Риме, 1909, т. 3, стр. 12; Phil Mag. (6), т. 23, 1912.

[5]) L a m b. H., Proc. London math. soc., т. 13, 1883.

[6]) Trans. Roy. Soc. (London) (A), 1904.

[7]) L a m b H., Proc. Roy. soc. (London) (A), 1917.

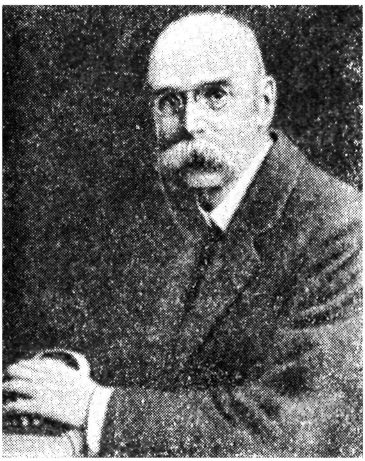
[8]) Proc. London math. soc., т. 19, стр. 365, 1888.

[9]) Proc. Roy. soc. (London) (A), т. 99, 1921.

[10]) См. посвященный Ляву некролог в J. London math. soc., т. 16, 1941.

Сэдли (Sedleian) в Оксфорде всю остальную часть своей жизни. Его научное творчество принесло ему большой почет. Он поддерживал близкую связь с Лондонским математическим обществом и в 1894 г. был избран в члены Королевского общества.

Основные интересы Лява лежали в области теории упругости и геофизики, но, так же как многим из его современников по Кембриджу, ему принадлежат большие работы и в других областях знания. Его главный труд «Курс по математической теории упругости» («Treatise on the mathematical theory of elasticity») вышел из печати в двух томах в 1892—1893 гг. и носил в своем первоначальном виде несколько абстрактный характер. К последующим изданиям автором были приложены усилия, чтобы изменить этот характер и таким путем сделать его содержание более доступным для использования инженерами[1]). Это—образцовое произведение высокого уровня, с самого момента своего выхода в свет ставшее богатейшим источником познаний в этой науке. В нем содержится краткий исторический очерк развития теории упругости и многочисленные указания на выполненные за последнее время научно-исследовательские работы в этой области.



А. Е. Ляв.

Свою творческую работу в теории упругости Ляв начал с теории оболочек. Основываясь на полученных Рэлеем результатах изучения их колебаний (о которых мы упоминали выше), Ляв, пользуясь методом Кирхгоффа, провел полное исследование изгиба оболочек[2]) и указал, что допущения Рэлея относительно изгибных колебаний не удовлетворяют в точности краевым условиям. В последующих изданиях своей книги Ляв значительно расширил строгую теорию пластинок, использовав решение двумерной задачи теории упругости, предложенное Мичеллом[3]). Ляв занимался также и решением задачи об упругом равновесии

[1]) Второе издание (1906) этой книги было переведено на немецкий язык и получило широкое распространение в Центральной Европе и в России. (*Прим. авт.*) В 1935 г. вышел русский перевод этой книги: Л я в А., Математическая теория упругости, Пер. с 4-го англ. изд., М.—Л., ГТТИ, 1935. (*Прим. перев.*)

[2]) Trans. roy. soc. (London) (A), т. 179, 1888.

[3]) M i c h e l l J. H., Proc. London math. soc., т. 31, стр. 100, 1899.

сплошной сферы[1]) и выпустил книгу «Некоторые проблемы геодинамики»[2]), в которой ряд вопросов геофизики получил новую оригинальную трактовку. В последней главе исследуется распространение сейсмических волн, вводится поправка в теорию Рэлея на силу тяготения и дается важное доказательство возможности волн, носящих ныне наименование волн Лява. Эти *волны Лява* могут возникать в многослойных средах и сопровождаются колебаниями, перпендикулярными к направлению распространения волны и лежащими в плоскости свободной границы передающей среды.

Карл Пирсон[3]) (Karl Pearson, 1857—1936)—другой ученый из числа воспитанников Кембриджа, многое внесший в развитие теории упругости. Он родился в Лондоне и воспитывался в Кингс-колледже в Кембридже, кончил курс в 1879 г. с третьей премией, после чего занимался в Гейдельбергском и Берлинском университетах. Его первые печатные работы были литературного характера, а его первоначальным стремлением была адвокатура. В 1884 г. он прекратил занятия юридическими науками и, переключившись на прикладную математику, занял должность профессора прикладной математики и механики в Лондонском университетском колледже. За первые годы своей деятельности в этом колледже Пирсон оказал большое содействие развитию нашей науки. В 1891 г. он стал также профессором и в Грешем-колледже, где читал популярные лекции. Он был талантливым лектором и мог захватывать широкую аудиторию студентов или случайных слушателей. В 1892 г. вышла его книга «Грамматика науки» («The grammar of science»)[4]), оказавшая большое влияние на молодое поколение конца XIX столетия. Пирсон заинтересовался теорией вероятностей и ее приложениями в статистике и естественных науках. В 1911 г. он стал профессором евгеники по кафедре Гальтона.

Главный вклад Карла Пирсона в теорию упругости—его соавторство с Исааком Тодхентером в работе над книгой «История теории упругости», первый том[5]) которой вышел в 1886 г., второй—в 1893 г. Тодхентер—инициатор этой работы—имел в виду дать исторический обзор научных трудов исключительно лишь теоретического (математического) характера, Пирсон же, взявший на себя завершение этого начинания и придавший ему окончательную форму, расширил первончальный замысел,

---

[1]) Proc. roy. soc. (London) (A), т. 82, стр. 73, 1909.

[2]) Вышла в 1911 г. и была удостоена премии Адамса: Love A. E. H., Some problems of geodynamics.

[3]) См. Dictionary of national biography, 1931—1940, Oxford.

[4]) Имеется русский перевод Пирсон К., Грамматика науки. (*Прим. перев.*)

[5]) Он вышел с посвящением Сен-Венану.

включив туда также и обзор трудов, представляющих физический и технический интерес. Благодаря этому вся работа приобрела еще более высокую ценность. Пирсон, в частности, интересовался научным творчеством Сен-Венана, и написанный им обзор этого творчества был извлечен из второго тома «Истории» и издан отдельной книгой[1]) с посвящением «последователям Барре де Сен-Венана, которые столь достойно продолжили его дело».

В начале своей научной деятельности в университетском колледже Пирсон опубликовал несколько собственных научных работ по теории упругости, из числа которых особый интерес для специалистов представляет его исследование «Об изгибе тяжелых балок под действием систем сплошных нагрузок»[2]). В этой работе Пирсон обобщает теорию изгиба балок на случаи действия объемных сил, к которым, в частности и в первую очередь, относится сила тяжести. Из полного решения задачи для круглого и эллиптического поперечных сечений Пирсон заключает, что «теорию Бернулли—Эйлера нельзя признать строгой для балок, находящихся под действием сплошных нагрузок, хотя, с другой стороны, результаты ее и близко сходятся с получаемыми средствами точной теории». Некоторые из работ Пирсона представляют интерес для инженеров. Он исследовал изгиб неразрезных балок на упругих опорах[3]) и показал, что в такой постановке задача приводит к уравнениям, в которые входят значения моментов на пяти последовательных опорах. Он исследовал также важную для практики задачу о напряжениях в каменных плотинах[4]).

За рассматриваемый период в области теории упругости работал также и целый ряд других английских ученых. Лармор (J. Larmor) дал обобщение теоремы о динамической аналогии (Кирхгоффа) для стержней с начальной кривизной[5]). Он показал также[6]), что если в подвергнутом кручению валу имеется цилиндрическая полость круглого сечения, ось которой параллельна оси вала, то касательное напряжение близ полости может оказаться вдвое бóльшим, чем соответствующее напряжение в сплошном валу при отсутствии полости. Чарльз Кри (Charles Chree), хорошо известный геофизик, также затрагивал в некоторых из своих ранних работ вопросы теории упругости. Его исследова-

---

[1]) Pearson Karl, The elastical researches of Barré de Saint-Venant, Cambridge, 1889.

[2]) Pearson K., On the flexure of heavy beams subjected to continuous systems of load, Quart. j. pure appl. math., № 93, 1889.

[3]) The Messenger of mathematics, Новая серия, № 225, 1890.

[4]) См. Drapers'Company research memoirs, Tech. series, II, Lond., 1904; tech. series, V, 1907.

[5]) Larmor J., Proc. London math. soc., т. 15, 1884.

[6]) Phil mag. (5), т. 33, 1892.

ния[1]) напряжений, возникающих во вращающихся сфере, эллипсоиде и диске, имеют практическое значение, поскольку уточняют обычную теорию распределения напряжений во вращающихся дисках переменной толщины, сходных с теми, что имеются в паровых и газовых турбинах.

Как мы видели, последняя четверть XIX века принесла внушительный сбор новых познаний, полученных английскими учеными. Авторов этих работ отнюдь нельзя причислить к специалистам какой-либо одной отрасли физики, в некоторых же случаях теория упругости была для них лишь побочным занятием. Этот подъем научно-творческой активности был перенесен названными нами английскими учеными уже в пределы нашего, XX века, где он был подхвачен свежей сменой—Файлоном (L. N. G. Filon), Саусвеллом (R. V. Southwell), Тэйлором (G. I. Taylor) и другими.

72. Теория упругости в Германии за последнюю треть XIX века

Последние десятилетия XIX века ознаменовались также и близким участием германских ученых в разработке теории упругости. Ими был выпущен ряд книг по этому вопросу, из которых самой важной был курс лекций Франца Нейманна, о котором мы уже упоминали (стр. 303). Некоторые из учеников Нейманна заняли профессорские кафедры физики в германских университетах и, поддерживая традиции школы своего учителя, организовали семинары и аспирантские занятия по общей физике, уделяя иногда большое внимание теории упругости. На освещении научных работ Кирхгоффа и Клебша—учеников Нейманна старшего поколения—мы уже останавливались. Из его учеников более позднего времени наиболее широкой известностью пользовался Вольдемар Фойхт (1850—1919)[2]).

В. Фойхт родился в Лейпциге (Саксония). Здесь он получил среднее образование и приступил к занятиям в университете. В 1870 г. он был призван в Саксонскую армию и в составе ее принимал участие в франко-прусской войне 1870—1871 гг. По окончании ее он решил поступить в Кенигсбергский университет, где вошел в руководимый Нейманном класс лабораторной физики. Заинтересовавшись теорией упругости, он избрал темой своей докторской диссертации (1874) упругие свойства каменной соли. В 1875 г. он стал доцентом Кенигсбергского университета, разгрузив частично Нейманна от его преподавательских обязанностей.

[1]) Proc. Cambridge phil. soc., т. 7, стр. 201, 283, 1892; Proc. roy. soc., London (A), т. 58, 1895.

[2]) Краткая биография Фойхта приводится в статье Рунге: R u n g e C., Woldemar Voigt, Nachr. Ges. wiss. Göttingen, Math.-physik. Klasse, 1920.

В 1883 г. Фойхт был избран на кафедру Геттингенского университета, где учредил курсы лекций по теоретической физике. Кроме того, он создал здесь лабораторию, в работе которой большое место было уделено теории упругости. Особенно его интересовали упругие свойства кристаллов, и он обогатил науку весьма ценной работой по этому вопросу. Его многочисленные статьи на эту тему были впоследствии объединены в «Руководстве по кристаллофизике»[1]), которое до сих пор сохраняет крупнейшее научное значение.

Труды Фойхта окончательно разрешили старый спор между двумя теориями о малом и большом числе упругих постоянных (рариконстантной и мультиконстантной теориями). Спор шел вокруг вопроса: «Определяется ли упругая изотропия одной или двумя постоянными? И в общем случае упругой анизотропии требуется 15 или 21 постоянных?» Опыты Вертхейма и Кирхгоффа не смогли дать ответа на этот вопрос вследствие несовершенства материала, который они применяли в своих исследованиях. Фойхт же использовал в экспериментах тонкие призмы, вырезанные в разных направлениях из монокристаллов. Модули упругости были определены из испытаний этих призм на кручение и на изгиб. В дополнение изучалась сжимаемость кристаллов под равномерным всесторонним гидростатическим давлением. Полученные результаты с полной ясностью засвидетельствовали невозможность тех соотношений между упругими постоянными, которых требовала рариконстантная теория. Этим самым была показана несостоятельность гипотезы молекулярных сил Навье—Пуассона.

Побуждаемый интересом к теории Сен-Венана о продольном ударе призматических стержней (стр. 290), Фойхт провел серию испытаний [2]) металлических образцов. Он получил результаты, расходящиеся с теоретическими. Но теория Сен-Венана исходит из той предпосылки, что контакт между стержнями происходит в одно и то же мгновение по всей торцовой поверхности образцов. На практике же осуществить это условие бывает трудно, и для того чтобы привести полученные им опытные результаты в соответствие с теорией, Фойхт вносит допущение, что два соударяющихся образца разделяются «слоем перехода», который принимает на себя все несовершенства контактных поверхностей. Надлежащим выбором механических характеристик этого слоя можно достигнуть удовлетворительного согласия между практикой и теорией. Главная трудность подобных опытов сопряжена с тем обстоя-

---

[1]) Voigt W., Lehrbuch der Kristallphysik, Teubner, Leipzig, 1910. См. также доклад Фойхта, представленный 1 Международному конгрессу по физике в Париже, 1900: L'état actuel de nos connaissances sur l'élasticité des cristaux.

[2]) См. Ann. Physik, т. 19, стр. 44, 1883; т. 46, стр. 657, 1915.

тельством, что продолжительность удара чрезвычайно кратка. Гораздо лучшего согласия с теорией Сен-Венана удалось достигнуть Рамзауэру (C. Ramsauer)[1], применявшему в своих испытаниях вместо стержней винтовые пружины. Таким путем скорость распространения продольных волн была уменьшена, и время, которое требовалось для того, чтобы волна распространилась по образцу и вернулась обратно, получилось достаточно большим в сравнении с тем, которое необходимо для выравнивания небольших неровностей на торцах. Есть, однако, другой путь придать условиям на концах при ударе бо́льшую определенность— это применить образцы со сферическими концами и учесть местные деформации при контакте по теории Герца [2]).

Большой интерес среди инженеров вызвала серия экспериментальных исследований, проведенных Фойхтом и его учениками [3]) с целью разъяснить понятия, относящиеся к прочности материалов. Работая на образцах, вырезанных из крупных кристаллов каменной соли, Фойхт нашел, что сопротивление растяжению весьма сильно зависит от ориентации оси образца относительно кристаллографических осей. Оно зависит также и от характера поверхности образца. Фойхт показал, что легкое травление боковой поверхности стеклянных образцов приводит к резкому повышению их сопротивления. Равным образом им было показано, что при неоднородном поле напряжений сопротивление в точке зависит не только от величины напряжений в этой точке, но также и от степени их изменений от точки к точке. Сравнивая, например, предельные сопротивления растяжению изгиба для каменной соли и для стекла, он находит, что наибольшее напряжение разрушения при изгибе почти вдвое превышает соответствующее напряжение при разрыве. Много испытаний было проведено им в условиях сложного напряженного состояния с той целью, чтобы проверить теорию Мора. Все эти испытания выполнялись на хрупких материалах, и результаты их не совпадали с теорией. Фойхт пришел к заключению, что вопрос о физической сущности прочности слишком сложен и что построить единую теорию, которую можно было бы с успехом применять ко всем видам строительных материалов, невозможно.

В связи с экспериментальными работами Фойхта по изучению кристаллов находятся и крупные достижения его в области теории упругости. Занимаясь кручением и изгибом призм, вырезанных из кристаллов, он обобщил теорию Сен-Венана, распространив

---

[1]) Ann. Physik, т. 30, стр. 416, 1909.

[2]) Такое же исследование было проделано Сирсом: S e a r s J. E., Trans. Cambridge Phil. soc., т. 21, стр. 49, 1908. См. также W a g s t a f f J. E. P., Proc roy. soc. (London) (A), т. 105, стр. 544, 1924.

[3]) Главные результаты этих исследований вошли в состав его статьи: V o i g t, Ann. Physik (4), т. 4, стр. 567, 1901.

ее законность и на различные типы анизотропных материалов. В задаче о деформировании пластинки силами, действующими в ее срединной плоскости, Фойхт вывел [1]) дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка, в котором функция напряжений должна удовлетворяться также и для анизотропного материала. Он рассмотрел также задачу об изгибе анизотропной пластинки, получил дифференциальное уравнение для ее изгиба[2]) и воспользовался им в исследовании колебаний подобной пластинки. Таким путем было получено теоретическое объяснение опытов Савара[3]) с узловыми линиями в анизотропных круглых пластинках. Анализ узловых линий представляет собой весьма чувствительный способ обнаружения отклонений от идеальной изотропии материала пластинки. Наконец, Фойхт первый ввел в теорию упругости тензорные и тензор-диадные обозначения, получившие ныне широкое распространение.

Чтобы завершить наш обзор деятельности наиболее известных ученых по теории упругости из числа учеников Неймана, необходимо упомянуть также о А. Вангерине (A. Wangerin), который работал над проблемами симметричной деформации тел вращения[4]), о Л. Заальшютце (L. Saalschütz), исследовавшем многие специальные случаи большого прогиба призматических брусьев[5]), и о Борхардте (C. W. Borchardt), которому мы обязаны развитием теории температурных напряжений. Если Дюамель и Нейманн, исследуя случаи кругового цилиндра и сферы, рассматривали температуру как функцию одного лишь радиального расстояния, то Борхардт дает решения для обоих этих случаев в форме интегралов, предполагая произвольное распределение температуры[6]). Он распространил это решение на деформацию, производимую в круговых цилиндрах и сферах любыми поверхностными силами[7]).

Весьма существенные успехи были достигнуты в рассматриваемый период Г. Герцем[8]). Генрих Рудольф Герц (1857—1894) родился в Гамбурге, в состоятельной семье адвоката. С юности он проявлял большие способности к занятиям, а также склонность к практической механике. Обучение в средней школе он совмещал с посещением по вечерам технического училища,

---

[1]) Lehrbuch der Kristallphysik, стр. 689.

[2]) Там же, стр. 691.

[3]) S a v a r t, Ann. chim. et phys., т. 40, 1829.

[4]) Archiv. math., т. 55, 1873.

[5]) См. книгу Заальшютца: S a a l s c h ü t z L., Der belastete Stab, Leipzig, 1880.

[6]) B o r c h a r d t C. W., Gesammelte Werke, стр. 246, Berlin, 1888.

[7]) Там же, стр. 309.

[8]) С биографией его можно познакомиться во введении к собранию его трудов: H e r t z H., Gesammelte Werke, т. I, а также в предисловии Гельмгольца к тому III, Leipzig, 1894. (*Прим. авт.*) См. также М а л о в Н., Генрих Герц, Успехи матем. наук, 1938, т. 19, вып. 4. (*Прим. перев.*)

где приобретал опыт в техническом черчении и в обращении с измерительными инструментами. По окончании средней школы он решил посвятить себя инженерным наукам и в 1877 г. поступил в Мюнхенский политехнический институт. Весьма скоро, однако, он убедился, что его настоящее призвание лежит скорее в области чистой науки; поэтому после одного года занятий в Мюнхене он переехал в Берлин, где в то время преподавали знаменитые физики Г. Гельмгольц и Г. Кирхгофф.

Генрих Рудольф Герц.

В октябре 1878 г. Герц начал работать в физической лаборатории Гельмгольца; благодаря ранее приобретенному дома и в Мюнхене опыту он оказался хорошо подготовленным к этой работе и быстро добился успехов. Философским факультетом университета в то время был объявлен для студентов конкурс на премию за работу по электродинамике, и Герц решился выступить с самостоятельным научным исследованием на эту тему. Из его писем к родителям мы узнаем об обстоятельствах его первой встречи с Гельмгольцем и о предварительном обсуждении ими проблемы. Герц произвел весьма благоприятное впечатление на Гельмгольца, который отвел ему отдельную комнату и снабдил необходимым оборудованием для работы. Гельмгольц проявлял живой интерес к опытам молодого человека и ежедневно посещал его комнату, чтобы обсудить продвижение выполненной им работы. Очень скоро Герц проявил себя первоклассным экспериментатором. В течение зимы 1878—1879 г. работа была закончена, и Герц получил за нее золотую медаль университета. Он продолжал работать в области электродинамики и в январе 1880 г. представил диссертацию на докторскую степень, которую он получил с редким отличием: *summa cum laude* («с наивысшей похвалой»).

Осенью 1880 г. Герц стал ассистентом Гельмгольца и ему было предоставлено право пользоваться любым институтским оборудованием для своих научных работ. Изучая ньютоновы цветные кольца, он заинтересовался теорией сжатия упругих тел и в январе 1881 г. представил в Берлинское физическое общество свою знаменитую работу по этому вопросу [1]). Он не только предложил в ней общее решение проблемы, но и применил его

[1]) Hertz H., J. reine angew. Math., т. 92, стр. 156—171, 1881.

в частных случаях и составил таблицу для упрощения вычислений в практических расчетах. Далее, он распространил свою теорию на удар и вывел формулы для определения продолжительности удара двух шаров и возникающих при этом напряжений. Работа эта привлекла внимание не только физиков, но также и инженеров, и по их просьбе он подготовил эту работу в новой редакции[1]), добавив туда описание своих опытов по сжатию стеклянных образцов и круговых цилиндров. Покрывая один из образцов до сжатия тонким слоем сажи, Герц получал очертание поверхности контакта в виде эллипса, оси которого можно было точно измерить. Таким путем он смог дать экспериментальное доказательство своей теории.

Исследуя сжатие упругих тел, Герц заинтересовался и твердостью материалов. Применявшиеся тогда методы ее измерения его не удовлетворяли[2]), и он ввел собственное определение твердости. Он отстаивал необходимость применять для измерения твердости такие образцы, у которых контур поверхности контакта получается в виде окружности, и чтобы этого достигнуть, он пользовался шаром определенного радиуса, вдавливая его в плоскую поверхность тела из изучаемого материала. За меру твердости он принял ту нагрузку, под которой в испытуемом материале возникала остаточная пластическая деформация. Применяя это определение в исследовании твердости стекла (остающегося упругим до мгновения разрушения), он принял в качестве меры твердости этого материала нагрузку, под которой появлялась первая трещина по контуру поверхности контакта. Метод Герца не получил признания, так как для пластичных материалов чрезвычайно трудно установить, под какой именно нагрузкой в них начинает возникать остаточная деформация[3]).

В начале 1883 г. научные интересы Герца вновь привели его к теории упругости. На этот раз дело шло об изгибе бесконечной пластинки, плавающей на поверхности воды и нагруженной нормальной нагрузкой в одной точке[4]). Он нашел, что пластинка прогибается под нагрузкой вниз, но что на некотором расстоянии от точки приложения нагрузки прогибы становятся отрицательными, далее же, с увеличением расстояния, они вновь приобретают положительные значения, а затем вновь отрицательные и т. д. Получается, таким образом, волнистая поверхность,

[1]) См. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleisses, Berlin, ноябрь 1882.

[2]) Он нашел описание этих методов в книге: Huguenу M. F., Recherches expérimentales sur la dureté des corps, Strasbourg, 1864.

[3]) А. Фёппль пытался применить метод Герца, воспользовавшись для этой цели в качестве образцов двумя круговыми цилиндрами одного и того же диаметра с взаимно-перпендикулярно направленными осями. См. Mitt. mech. tech. Lab., München, 1897.

[4]) Wiedemann's Ann., т. 22, стр. 449—455, 1884.

в которой высота волны быстро снижается с увеличением расстояния от точки приложения нагрузки. Он пришел таким путем к парадоксальному выводу, что пластинку более тяжелую, чем вода, можно сделать плавучей, нагрузив ее в центре. Истолковывается этот парадокс тем, что в результате изгиба пластинка приобретает форму оболочки и получает поэтому способность вытеснять больше воды, чем количество, эквивалентное ее собственному весу.

В том же самом году Герц решил другую важную задачу теории упругости[1])—о загружении длинного цилиндра сплошными нагрузками, действующими нормально к его оси с постоянной по ее длине интенсивностью. Он находит общее решение задачи и в качестве ее частного примера исследует распределение напряжений в цилиндрических катках, подобных тем, что применяются в конструкциях подвижных опор в мостах.

В 1883 г., после трех лет работы в качестве ассистента в лаборатории Гельмгольца, Герц занял место преподавателя в Кильском университете, а в 1855 г. был избран профессором физики в Политехнический институт в Карлсруэ. Там он сделал свое знаменитое открытие по электродинамике. Он обнаружил распространение электромагнитных волн в пространстве и указал, что эти волны сходны с волнами света и тепла, дав, таким образом, экспериментальное доказательство математической теории Максвелла. В 1889 г. Герц был избран на кафедру физики Боннского университета. Здесь он работал над вопросами электрического разряда в разреженных газах и написал книгу о принципах механики. Это было его последним трудом, так как в январе 1894 г. он умер. Хотя теория упругости занимала в научных достижениях Герца сравнительно скромное место, мы все же обязаны ему решением ряда трудных проблем, представлявших, к тому же, и большое практическое значение. В последующем построенная Герцем теория сжатия упругих тел нашла широкое применение в железнодорожной технике и в машиностроительном проектировании[2]).

---

[1]) Hertz H., Z. Math. u. Physik, т. 28, стр. 125, 1883.

[2]) См. Беляев Н. М., Местные напряжения при сжатии упругих тел, Лнгр., 1924. Дальнейшее развитие этой теории, в которой учитываются не только нормальные, но также и касательные силы на поверхности контакта, обсуждалось Фроммом: Fromm, ZAMM, т. 7, стр. 27—58, 1927; см. также Föppl L., Forschung Gebiete Ingenieurw., 1936, стр. 209; Саверин М. М., Контактная прочность материала..., Москва, Машгиз,. 1946. (*Прим. авт.*)
Работы Николая Михайловича Беляева (1890—1944) по контактным направлениям (4 статьи) переизданы в сборнике: Н. М. Беляев, Труды по теории упругости и пластичности с приложением очерка о научной, педагогической и инженерной деятельности, М., Гостехиздат 1957.

Развитием теории Герца явилась работа Александра Николаевича Динника (1876—1950) «Удар и сжатие упругих тел» (1909); эта работа переиздана в книге: А. Н. Динник, Избранные труды, т. I, Киев, 1952; там же краткий биографический очерк. (*Прим. ред.*)

К рассматриваемому периоду относится также и научная деятельность Л. Похгаммера (L. Pochhammer, 1841—1920). В 1876 г. им был опубликован ценный труд о колебаниях круговых цилиндров[1]). Со времен Эйлера к этой задаче подходили с тем допущением, что радиальными движениями частиц при продольных колебаниях можно пренебрегать. Похгаммер устраняет это допущение и исследует колебания общего вида, причем ему удается получить таким путем поправки к скоростям распространения различных типов продольных колебаний. Им были изучены также и изгибные колебания.

Во второй своей работе[2]) Похгаммер исследует изгиб балки силами, распределенными по ее боковой поверхности; он показывает, что нейтральная ось балки не проходит через центры тяжести ее поперечных сечений и что обычная элементарная формула для напряжений при изгибе дает лишь первое приближение. Он вычисляет более точное приближение для консоли круглого сечения под нагрузкой, равномерно распределенной по ее верхней образующей. Свой метод Похгаммер распространяет на балку, имеющую вид полого цилиндра, и на кривые брусья.

73. Решение двумерных задач за последнюю треть XIX века

За последние десятилетия XIX века крупных успехов удалось достигнуть в решении двумерных задач теории упругости. Существуют два типа таких задач. Если тонкая пластинка подвергается действию сил, приложенных по ее краю, в ее срединной плоскости (которую мы совмещаем с плоскостью xy), то компоненты σ_z, τ_{xz} и τ_{yz} напряжения по обеим граням пластинки обращаются в нуль, и тогда, не делая большой погрешности, мы вправе допустить, что эти компоненты равны нулю также и по всей толщине пластинки. В подобных случаях мы имеем дело с (обобщенным) *плоским напряженным состоянием*. Другого рода двумерная задача возникает, если длинное цилиндрическое или призматическое тело нагружено распределенными силами, интенсивность которых не меняется по длине цилиндра. В такой системе участок тела, отстоящий на значительном расстоянии от концов цилиндра, испытывает, по существу, *плоскую деформацию*, т. е. перемещения при деформировании происходят лишь в плоскостях, перпендикулярных к оси цилиндра (которую мы совмещаем с осью z). В этом случае обращаются в нуль компоненты деформации ε_z, γ_{xz} и γ_{yz} и нам достаточно рассматривать лишь три компоненты деформации ε_x, ε_y и γ_{xy}. Такое состояние упругого тела называется *плоской деформацией*.

[1]) J. Math. (Crelle), т. 81, стр. 324, 1876.

[2]) См. Pochhammer L., Untersuchungen über das Gleichgewicht des elastischen Stabes, Kiel, 1879.

В задачах как того, так и другого типа число неизвестных снижается, как мы видим, с шести до трех. Это обстоятельство, конечно, упрощает решение.

Клебш первый занялся исследованием задачи плоского напряженного состояния и дал решение для круглой пластинки (см. стр. 310). Другой случай, имеющий большое практическое значение, был решен Харлампием Сергеевичем Головиным (1844—1904)[1]). Он заинтересовался деформациями и напряжениями круговых арок постоянной толщины. Рассматривая задачу как двумерную, он сумел получить решения для систем, представленных на рис. 170. Он находит, что в условиях чистого изгиба (рис. 170, *а*) поперечные сечения остаются плоскими, как это обычно и принимается в элементарной теории кривого бруса. Но найденное им распределение напряжений не совпадает с тем, которое дается элементарной теорией, поскольку последняя предполагает, что продольные волокна испытывают лишь напряжение σ_t простого растяжения или сжатия, между тем как Головин доказывает существование также и напряжений σ_r, действующих в радиальном направлении. При изгибе же, производимом силой P, приложенной к торцу (рис. 170, *б*), в каждом поперечном сечении возникают не только нормальные напряжения, но также и касательные, причем распределение последних не следует параболическому закону, как это предполагается в элементарной теории. Головин вычисляет не только напряжения для такого кривого бруса, но также и его перемещения. Имея формулы перемещений, он получает возможность решить и статически неопределенную задачу арки с защемленными пятами. Проделанные им вычисления для обычных соотношений размеров арок показывают, что точность элементарной теории должна быть признана для практических целей вполне достаточной. Исследования Головина представляют собой первую попытку применения теории упругости в изучении напряжений в арках.

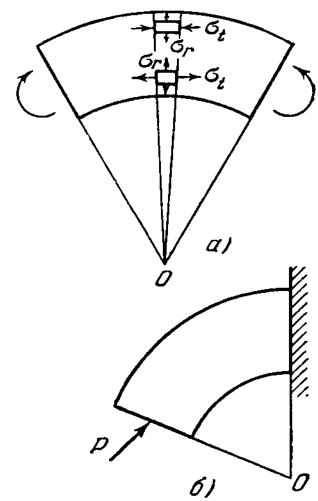


Рис. 170.

[1]) «Одна из задач статики упругого тела», Изв. СПб. технол. ин-та, СПб., 1880—1881, стр. 373—410. (*Прим. авт.*) Биографические сведения о Х. С. Головине см.: Р а б и н о в и ч И. М., Деятели русской строительной механики XIX века, Вестн. ВИА им. В. В. Куйбышева, № 43, 1945. (*Прим. ред.*)

Поскольку строгие решения теории упругости известны лишь для простейших случаев, инженеров всегда интересовали возможности определения напряжений экспериментальными методами. Еще Максвеллом был указан способ измерения напряжений, основанный на свойствах фотоупругости; его предложение не было, однако, в свое время оценено должным образом инженерами. Очередная попытка воспользоваться оптическим методом для измерения напряжений была предпринята сорок лет спустя после этого Карусом Вильсоном[1]). Последний применяет этот способ в исследовании напряженного состояния прямоугольной балки, нагруженной в середине пролета, причем обнаруживает крупные расхождения между измеренными им значениями напряжений и предсказаниями обычной теории балок. Источник такого расхождения был установлен Дж. Стоксом, который посоветовал вычислять напряжения в балке наложением на простое радиальное распределение напряжений[2]), возникающих в полубесконечной пластинке (рис. 171, *а*), напряжений, производимых в свободно опертой балке (рис. 171, *б*) радиальными растягивающими силами, равными и противоположными сжимающим напряжениям в бесконечной пластинке. Равнодействующая этих растягивающих сил для каждой половины балки уравновешивается вертикальной реакцией $P/2$ на опоре и горизонтальной силой P/π, приложенной в точке m (рис. 171, *а*). Поэтому в поперечном сечении mn балки мы имеем изгибающий момент

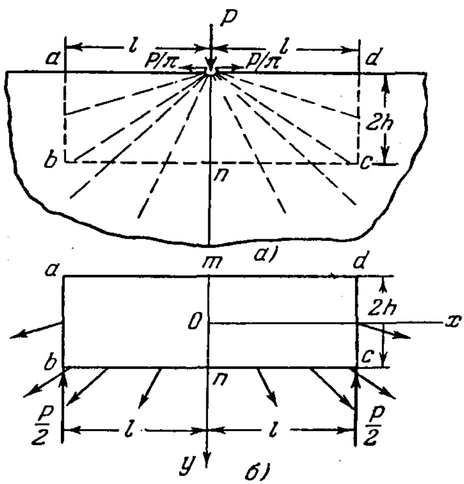


Рис. 171.

$$\frac{P}{2}l-\frac{P}{\pi}h$$

и растягивающую силу P/π. Соответствующее нормальное напря-

[1]) Wilson C., Phil. mag. (5), т. 32, 1891.

[2]) Стокс указывает, что он заимствовал это распределение напряжений из книги Буссинеска «Application des potentiels...», 1885, см. Stokes, Mathematical and physical papers, т. V, стр. 238.

жение σ_x получается равным[1]) 44

$$\sigma_x = \left(\frac{Pl}{2} - \frac{Ph}{\pi}\right)\frac{y}{I} + \frac{P}{2\pi h}.$$

Налагая эти напряжения на радиальные сжимающие напряжения в полубесконечной пластинке, Вильсон получил результаты своих оптических испытаний с удовлетворительной точностью.

С другим примером использования оптического метода в измерении напряжений мы встречаемся в работе Менаже (Mesnager)[2]), который произвел проверку радиального распределения напряжений в пластинке под действием на нее сил, приложенных в ее срединной плоскости. Таким образом, мы видим, что уже в конце XIX века инженеры начали признавать ценность оптического метода исследования напряжений. Первые годы XX века были ознаменованы быстрым ростом его применений, ныне же этот метод стал одним из самых эффективных средств экспериментального исследования напряжений.

Дальнейшее развитие теоретической разработки двумерных задач основывается на применении функции напряжений. Как мы уже знаем (стр. 273), эта функция была введена впервые Эйри, воспользовавшимся ею в своем исследовании изгиба прямоугольных балок. Эйри выбрал свою функцию напряжений так, чтобы удовлетворялись граничные условия; но он упустил из вида то обстоятельство, что она должна удовлетворять также и условию совместности, установленному Сен-Венаном. Максвелл в своей работе «О взаимных фигурах, стержневых системах и диаграммах сил»[3]) исправил ошибку Эйри и дал для функции напряжений дифференциальное уравнение. Он показал также, что при отсутствии объемных сил для обоих типов двумерных задач получаются тождественные уравнения и что распределение напряжений не зависит от упругих постоянных материала.

Ценное дополнение в теорию двумерных задач было внесено Дж. Мичеллом[4]) (J. H. Michell, 1863—1940). Исследуя задачи[5]) такого рода, он показывает, что распределение напряжений не зависит от упругих констант изотропной пластинки, если 1) объемные силы отсутствуют, 2) контур пластинки односвязный. Если контур многосвязный, как это имеет место, например, в пластинках с отверстиями, напряжения получатся не зависящими от модулей

---

[1]) При этом предполагается, что толщина пластинки равна единице.

[2]) Mesnager, Congr. intern. phys., т. 1, стр. 348, 1900.

[3]) См. Maxwell, Scientific papers, т. 2, стр. 200.

[4]) Мичелл родился в Австралии, учился в Кембриджском университете, где и получил в 1887 г. степень магистра искусств. После нескольких лет педагогической деятельности в Кембридже он вернулся в Австралию и занял должность профессора в Мельбурнском университете.

[5]) Proc. London math. soc., т. 31, стр. 100—124, 1899.

только в том случае, если равнодействующая сила обращается в нуль на каждом контуре.

Применяя общую теорию к частным случаям[1]), Мичелл исходит из простого радиального распределения напряжений, найденного Буссинеском и Фламаном (см. стр. 398). Таким путем он приходит к решениям для полубесконечной пластинки при условии, если сила действует под некоторым углом к прямолинейному краю пластинки, а также для клина, нагруженного в вершине (рис. 172). Заключение о точности формулы для простой балки может быть получено из только что упомянутого решения для балки переменного поперечного сечения. Мичелл дает также решение для задачи о силе, приложенной во внутренней точке бесконечной пластинки, показывая, что в этом случае распределение напряжений зависит от упругих констант. В точке приложения силы напряжения получают бесконечно большие значения, и чтобы обойти эту трудность, нужно предположить, что в пластинке вырезано малое круговое отверстие и что по его контуру равномерно распределена нагрузка, статически эквивалентная заданной силе. Таким путем мы получаем многосвязный контур.

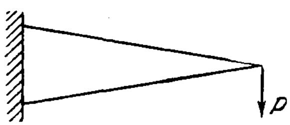


Рис. 172.

Рассматривая напряжения, вызываемые в круглом диске сосредоточенными нагрузками, приложенными по контуру, Мичелл получает то же самое решение, которое было найдено до него Герцем (см. стр. 416). Далее он переходит к соответствующим решениям для тяжелого диска или катка на горизонтальной плоскости. В работе Мичелла приводится также ряд интересных диаграмм, иллюстрирующих различные типы распределения напряжений в круглых пластинках[2]).

[1]) Proc. London math. soc., т. 32, стр. 35, 1900.

[2]) Из имеющих инженерное значение работ русских ученых второй половины XIX века в области теории упругости, кроме упомянутых в тексте и в примечаниях, можно отметить также исследования А. В. Гадолина—о расчете скрепленных (составных) толстостенных цилиндров под внутренним давлением (Артилл. журн., 1858 и 1861), А. Соколова—о кручении призматических тел (Изд. Моск. матем. общ. при Моск. ун-те, 1878), Н. В. Калакуцкого—о внутренних напряжениях (отд. изд., СПб., 1887), В. А. Стеклова—о равновесии упругих цилиндров, о равновесии упругих тел вращения и др. (Изв. Харьк. матем. общ., 1893 и др.); обзор работ В. А. Стеклова по теории упругости см. статью Б. Г. Галеркина в сборнике «Памяти В. А. Стеклова», 1928, стр. 23—28. *(Прим. ред.)*

ГЛАВА XII

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ В XX ВЕКЕ

С конца XIX столетия мы вступаем в эпоху весьма быстрого развития механики материалов. Международные съезды по испытаниям материалов становятся все более и более многолюдными: на них стекаются и инженеры, которых интересует уточнение механических характеристик материалов, и физики, стремящиеся к более глубокому познанию общих свойств твердого тела. Усилиями Гельмгольца и Вернера Сименса в Берлине учреждается[1]) (1883—1887) Государственный физико-технический институт (Reichsanstalt), в задачи которого входит координация научно-исследовательской работы физиков с требованиями промышленности. Оливер Лодж в своей президентской речи 1891 г. в Британской ассоциации содействия науке привлекает внимание членов ассоциации к работе Германского физико-технического института, подчеркивая значение, которое могло бы иметь подобное же учреждение для британской промышленности [2]). Под влиянием этого выступления в Англии создается комитет, члены которого совершают поездку в Германский физико-технический институт, а также на испытательную станцию в Потсдаме. В их отчете отмечаются преимущества, которые могла бы получить научно-исследовательская работа в результате общей стандартизации экспериментальной методики. В нем утверждается также, что «нет никакой необходимости и ничего желательного в том, чтобы мешать или препятствовать той многообразной работе по испытанию материалов, которая проводится ныне в частных или иного типа лабораториях; с другой стороны, имеется целый ряд таких специальных и представляющих большую важность испытаний и исследований по вопросам прочности и механического поведения материалов, которые могут быть проведены с большими выгодами

---

[1]) С историей и деятельностью этого учреждения можно познакомиться по книге: S t a r k I., Forschung und Prüfung 50 Jahre physikalisch—technische Reichsanstalt, Leipzig, 1937.

[2]) См. книгу первого директора 1900—1919 Английской государственной физической лаборатории Ричарда Глэйзбрука: Sir Richard G l a z e b r o ok, «Early days at the National physical laboratory».

в лаборатории того типа, о котором здесь идет речь». В 1899 г. планы организации Государственной физической лаборатории были согласованы и это важное учреждение приступило к работе. В Соединенных Штатах было создано Государственное бюро стандартов (National Bureau of standards) с большой лабораторией для изучения механических свойств материалов.

Частная промышленность также оценила важность научных исследований, что повело к быстрому развертыванию сети заводских и иных промышленных лабораторий. При этом не только возрос общий объем исследований по механике материалов, но изменился и самый их характер. Новые лаборатории облегчили установление контакта между инженерами-исследователями и физиками в их работе, теснее направив их общие усилия на освещение основных проблем о связи структуры и механических свойств твердых тел. После открытия Лауэ в 1912 г. интерференции рентгеновых лучей в кристаллах представилось возможным использовать это явление для исследований структуры металлов. Развилась техника изготовления крупных кристаллов, а изучение отдельных монокристаллов внесло бо̀льшую ясность в наши представления о характере воздействия внешних условий на механические свойства металлов [1]). Количество научных работников, интересующихся механическими свойствами материалов, увеличилось; безгранично возросло и число научных работ, публикуемых по этому вопросу в различных изданиях. Поэтому в настоящем обзоре мы сможем остановиться только на немногих, самых важных работах этого периода.

Одновременно с развитием экспериментального изучения материалов быстро расширяется и область технических применений сопротивления материалов и теории упругости. Использование анализа напряжений в инженерных сооружениях вошло уже в практику на протяжении XIX столетия. В начале XX века новая тенденция усматривается и в машиностроении: оно требует более точных методов анализа напряжений в элементах машин. Эта тенденция нашла свое выражение в новом типе руководств по машиностроительному проектированию, среди которых особенно яркий пример представляет собой книга А. Стодолы «Паровые турбины» (A. Stodola, «Dampfturbinen»). Если в руководствах старого времени расчет элементов машин основывался главным образом на эмпирических формулах с использованием лишь элементарного аппарата сопротивления материалов, то Стодола в своей книге свободно оперирует всеми средствами анализа напряжений, кото-

---

[1]) Важнейшие книги, в которых описываются опыты с монокристаллами, следующие: Schmid E., Boas W., Kristallplastizität, Berlin, 1935; Elam C. F., The distortion of metal crystals, Oxford. University press, 1936. (*Прим. авт.*) См. русский перевод: Шмид Е. и Боас В., Пластичность кристаллов, ОНТИ, 1938. (*Прим. ред.*)

рые предоставляет современная теория упругости. Он приводит решения разнообразнейших задач: о напряжениях в пластинках и оболочках, о температурных напряжениях, о напряжениях во вращающихся дисках; он подробно исследует напряжения, вызываемые различного рода вибрациями. Серьезное внимание в его книге уделяется вопросам концентрации напряжений близ отверстий и выкружек и различным методам экспериментального исследования напряжений. Наметив в известной мере пути дальнейшего развития науки о прочности, эта книга совершила вместе с тем и другое важное дело, внеся научные методы в машиностроительное проектирование.

74. Свойства материалов при напряжениях, не превышающих предела упругости

Более совершенная в смысле точности методика определения модуля упругости была введена Грюнейзеном[1]). Пользуясь интерференцией света в измерении малых удлинений, он показал, что такой материал, как чугун, при малых напряжениях (ниже 9,8 *кг/см*^{2}) в точности следует закону Гука и что параболическая формула $\varepsilon = a\sigma^m$, предложенная Бюльфингером[2]) и Ходкинсоном[3]) и широко использованная Бахом[4]) и Шюле[5]), совершенно непригодна для очень малых деформаций. Сравнение различных формул зависимости между напряжением и деформацией, предложенных для материалов, не следующих закону Гука, было произведено Р. Мемке[6]).

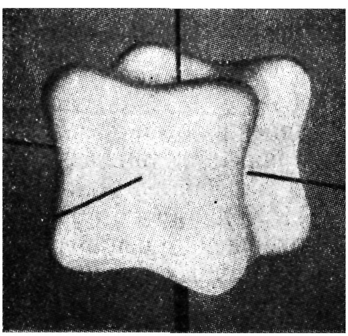
Эксперименты с монокристаллическими образцами показали, что модуль упругости обнаруживает четко выраженную зависимость от ориентации. На рис. 173 приводятся для примера пространственные диаграммы изменений E и G для железа[7]). Для того чтобы по этим данным, относящимся к монокристаллу, получить средние значения модулей для поликристаллических образцов, были разработаны расчетные методы[8]), которые позволяют предсказать с некоторой точностью результаты опытного их определения.

Интерференционный метод был использован для изучения малых отклонений от закона Гука, наблюдаемых в «идеально упругих» материалах; при этом было установлено, что *гистерезис-*

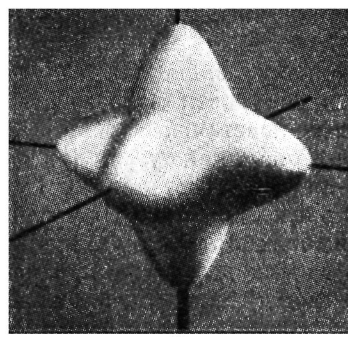
[1]) Grüneisen E., Verhandl. physik. Ges., т. 4, стр. 469, 1906.
[2]) Bülfinger G. B., Comm. Acad. Petrop, СПб., 1729, т. 4, стр. 164.
[3]) Hodgkinson E., Mem. proc. Manchester lit. phil. soc., т. 4, стр. 225, 1822.
[4]) Bach C., Abhandl. u. Ber. Stuttgart, 1897.
[5]) Schülle W., Dinglers Polytech. J., т. 317, стр. 149, 1902.
[6]) Mehmke R., Z. Math. u. Physik, 1897.
[7]) См. книгу Шмида и Боаса (сноска на стр. 424), стр. 200.
[8]) Boas W., Schmid E., Helv. Phys. Acta, т. 7, стр. 628, 1934.

ные петли и *упругое последействие* в монокристаллах кварца могут быть полностью объяснены термоупругими и пьезоэлектрическими свойствами материала[1]).

Еще лорд Кельвин показал[2]), что если испытание на растяжение производить при весьма медленном нарастании нагрузки, то в образце будет сохраняться температура окружающей среды, а зависимость между напряжением и деформацией изобразится прямой линией OA (рис. 174, *a*), уклон которой представит величину модуля E *в изотермических условиях*. Если же нагрузку в испытании прилагать с большой скоростью, то для теплообмена не будет времени и мы получим вместо OA прямую OB; при этом



E



G

Рис. 173. Пространственные диаграммы модулей E и G для железа.

модуль E *в адиабатических условиях* получится, как правило, бо́льшим, чем отвечающий изотермическим условиям. В результате внезапного удлинения образец охладится относительно окружающей среды. Если образец оставить на достаточно продолжительное время под постоянной нагрузкой, то он, постепенно нагреваясь, приобретет температуру среды, в результате чего произойдет дополнительное удлинение образца, представленное на графике горизонтальным отрезком BA. Это и есть *упругое последействие*, представляющее собой проявление термоупругого свойства материала. Если после того, как температура совершенно сравняется, образец внезапно разгрузить, произойдет адиабатическое сокращение длины, представленное на рис. 174, *a* прямой AC, параллельной OB. Вследствие быстрого укорочения образец нагреется, и последующий процесс охлаждения до температуры среды вызовет новое сокращение длины, представленное отрезком CO.

[1]) Ioffe A., Ann. Physik, 4-я серия, т. 20, 1906.
[2]) Kelvin, Elasticity and Heat., стр. 18, Edinburgh, 1880.

Мы видим, что, деформируя образец адиабатически, а затем предоставляя достаточное время для выравнивания температур, мы дадим ему возможность совершить полный цикл, представленный на рисунке параллелограммом $OBAC$. Площадь последнего представляет потерю механической энергии за цикл. В наших рассуждениях мы предполагали, что деформация происходит адиабатически; на практике же за время совершения цикла всегда имеет место какой-то теплообмен. Это выражается в том, что вместо параллелограмма мы получаем в действительности петлю, подобную показанной на рис. 174, *б*. Разница между адиабатическим и изотермическим модулями упругости бывает обычно малой[1]), и потеря механической энергии за цикл также оказывается весьма незначительной. Но если образец провести последовательно через много циклов, как это имеет место при колебаниях, то потеря механической энергии может достигнуть значительной величины и должна быть принята во внимание, поскольку она проявляется в так называемом *внутреннем трении* и влечет за собой затухание колебаний.

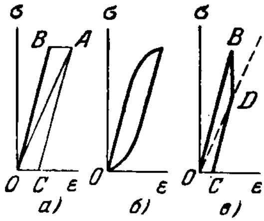


Рис. 174.

Мы предполагали в нашем рассуждении, что после внезапного растяжения образец остается под действием постоянно приложенной нагрузки. Но вместо этого мы можем поддерживать в нем постоянную длину. Тогда нагрев образца приведет к некоторому снижению первоначально приложенной силы. Этот процесс *релаксации* представлен на рис. 174, *в* вертикальным отрезком BD. Если теперь образец внезапно разгрузить, то он испытает процесс, изображенный отрезком DC, а затем, в результате охлаждения, отрезком CO, замыкающим цикл $OBDC$.

Мы рассмотрели монокристаллический образец, но подобное же явление внутреннего трения можно наблюдать и в поликристаллических образцах. Термоупругий эффект при растяжении кристалла зависит от его ориентировки. В связи с этим обстоятельством изменения температур, вызываемые растяжением поликристаллического образца, получаются различными для различных зерен, почему в этих условиях нам надлежит учитывать не только теплообмен между образцом и окружающей его средой, но также и теплообмен между отдельными кристаллами. Так как количество теплоты, заключенной в отдельном зерне, пропорционально его объему, а интенсивность теплообмена зависит от величины его поверхности, очевидно, что выравнивание температур будет облегчено и потери механической энергии возрастут с уменьше-

[1]) Для стали она выражается величиной, равной около $^1/_3$ от 1%.

нием величины зерна. Это представляет большую практическую важность, поскольку имеются случаи, где затухание колебаний упругой системы зависит главным образом от внутреннего трения материала. Для того чтобы повысить в таких системах затухание, необходимо подбирать для них мелкозернистые материалы.

В нашем рассуждении мы предполагали, что деформация образца чисто упругая (как и следует ожидать при малых напряжениях). При больших напряжениях явление внутреннего трения принимает более сложный характер, поскольку нам при этом следует принимать во внимание не только потери механической энергии, являющиеся результатом указанного выше теплообмена, но также и потери, обусловленные пластической деформацией внутри отдельных зерен[1]).

75. Разрушение хрупких материалов

За последние годы крупные успехи достигнуты в изучении характера разрушения хрупких материалов, подобных, например, стеклу. Испытания стекла на растяжение дают для него обычно низкое значение предела прочности (порядка 700 *кг/см*^{2}). Приняв для модуля упругости значение $E=7\cdot 10^5$ *кг/см*^{2}, мы найдем, что для разрушения 1 *см*^{3} этого материала требуется затратить всего лишь около 0,35 *кгсм* работы. Но в то же самое время вычисления, основанные на определении силы, необходимой для разрыва молекул, дают для этой энергии значения, бóльшие почти в 30 000 раз.

Чтобы объяснить это несоответствие, Гриффитс[2]) предложил теорию, согласно которой такое резкое снижение прочности стекла имеет своей причиной микроскопические трещины, действие которых выражается в концентрации напряжений. Рассматривая трещину как узкое эллиптическое отверстие и пользуясь хорошо известным решением для распределения напряжений близ эллиптического отверстия в пластинке, равномерно растянутой в одном направлении (рис. 175), он находит, что благодаря отверстию

---

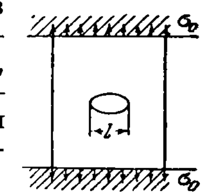
[1]) Обширная экспериментальная работа по измерению амортизирующей способности различных материалов была проведена Роуиттом: R o w e t t, Proc. roy. soc. (London), т. 89, стр. 528, 1913 и в более недавнее время Отто Фёпплем и его сотрудниками в Институте Вёлера в Брауншвейге. См. Z. VDI, т. 70, стр. 1291, 1926; т. 72, стр. 1293, 1928; т. 73, стр. 766, 1929. Большое значение термоупругости как причины внутреннего трения было продемонстрировано Ценером (C. Zener) и его сотрудниками. См. Phys. Rev., т. 52, стр. 230, 1937; т. 53, стр. 90, 1938; т. 60, стр. 455, 1941. Результаты этих исследований изложены в книге: Z e n e r C., Elasticity and anelasticity of metals, 1948.

[2]) G r i f f i t h A. A., Trans. roy. soc. (London) (A), т. 221, стр. 163, 1920; см. также Proc. intern. Congr. applied mechanics, Delft, стр. 55, 1924; см. также статью А. Смекала (A. Smekal) в Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, т. 4, стр. 1, 1931.

энергия деформации пластинки уменьшается на величину

$$\frac{\pi l^2 \sigma_0^2}{4E}, \tag{a}$$

где l—длина трещины, толщина же пластинки принята равной единице. Поставив себе задачу определить величину напряжения σ_0, при котором трещина начинает распространяться по пластинке и таким путем приводит ее к разрушению, Гриффитс замечает, что такое распространение становится возможным без всякой дополнительной работы только в том случае, если увеличение *поверхностной энергии*, обусловленное удлинением dl трещины, компенсируется соответственным уменьшением энергии деформации пластинки. Это соображение позволяет ему написать уравнение



$$\frac{d}{dl}\left(\frac{\pi l^2 \sigma_0^2}{4E}\right) dl = 2S\, dl, \tag{b}$$

Рис. 175.

в котором S обозначает *поверхностное натяжение*. Из этого уравнения Гриффитс находит:

$$l = \frac{4SE}{\pi \sigma_0^2}. \tag{c}$$

Таким путем он получает возможность найти длину трещины, если предел прочности стекла на растяжение σ_0 определен из испытаний на разрыв. Приняв значение [1])

$$S = 5{,}6 \cdot 10^{-4} \ \textit{км/см}$$

для поверхностного натяжения и подставив $E = 7 \cdot 10^5$ *кг/см²*, $\sigma_0 = 700$ *кг/см²*, он получает:

$$l \sim 1 \cdot 10^{-3} \ \textit{см}.$$

Чтобы проверить свою теорию, Гриффитс поставил опыты над тонкими стеклянными трубками, подвергая их внутреннему давлению. Прорезав в них алмазом параллельно оси искусственные трещины различной длины, он нашел критические значения σ_0. Они оказались в удовлетворительном согласии с теоретическими предсказаниями уравнения (c). Затем Гриффитс провел испытания тонких стеклянных волокон и нашел, что при диаметре, равном $3{,}3 \cdot 10^{-3}$ *мм*, предел прочности стекла равен $3{,}5 \cdot 10^4$ *кг/см²*. Это значение в 50 раз превышает указанное выше. Такую огромную в сравнении с обычной прочность тонких волокон можно объяснить в свете теории Гриффитса, если учесть, что в процессе вытяги-

[1]) Гриффитс получает значение S, экстраполируя результаты испытаний, проведенных с расплавленным стеклом при разных температурах.

вания тонкого волокна возможность образования в нем первоначально перпендикулярных к его длине трещин исключается. Гриффитс обнаружил, что с течением времени волокна теряют часть своей прочности; при проверке этого явления на волокнах, только что перед этим подвергнутых вытяжке, ему удалось получить огромное значение предела прочности, равное $6{,}3 \cdot 10^4$ *кг/см²* при диаметре 0,5 *мм*. Оно достигает почти 50% теоретической прочности, предсказываемой учетом молекулярных сил. Все эти эксперименты ясно показали, что в хрупких материалах прочность на растяжение сильно снижается структурными дефектами в виде внутренних микроскопических трещин.

К дальнейшему выяснению этой проблемы удалось прийти на основе испытаний на растяжение отдельных монокристаллов. Работая с образцами каменной соли, А. Ф. Иоффе нашел[1]), что предел прочности этого материала на растяжение составляет всего лишь 45 *кг/см²*, если испытание производить в воздухе при комнатной температуре. Но если такой же образец испытывать в горячей воде, он достигает своего предела текучести при напряжении 80 *кг/см²*, после чего начинает пластически удлиняться и, наконец, испытывает разрыв при напряжении 16 000 *кг/см²*, которое уже не далеко отстоит от теоретической прочности 20 000 *кг/см²*, вычисленной Ф. Цвикки [2]). Эти испытания доказали, что сглаживание поверхности образца оказывает большое влияние на сопротивление разрыву [3]).

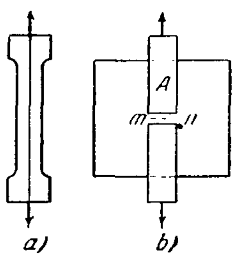


Рис. 176.

Очень интересные опыты по изучению предела прочности на растяжение листовой слюды были проведены Орованом[4]). Он показал, что если при испытании на растяжение вместо образца, изображенного на рис. 176, *a* (вырезанного из пластинки слюды), использовать всю пластинку и вызвать с помощью зажимов *A* растяжение по площади *mn*, как это показано на рис. 176, *б*, то предел прочности возрастает почти в 10 раз. При этом вновь было установлено, что дефекты по продольным краям образца (*a*) резко снижают прочность и что, исключая их влияние с помощью установки (*б*), можно достигнуть более высоких значений предела прочности.

[1]) См. Z. Physik, стр. 286, 1924. См. также Proc. intern. congr. applied mechanics, Delft, 1924, стр. 64. (*Прим. авт.*) Ак. Иоффе, Кирпичев и Левитская, ЖРФХО, 493, 1924.

[2]) Zwicky F., Z. Physik, т. 24, стр. 131, 1923.

[3]) Дальнейшее обсуждение *эффекта Иоффе* приводится в книге Schmid E., Boas W., Kristallplastizität, стр. 271.

[4]) Orowan E., Z. Physik, т. 82, стр. 235, 1933.

Если наличие дефектов оказывает столь сильное влияние на прочность хрупких материалов, то логично предположить, что значение предела прочности для них зависит от величины образца и снижается с увеличением размеров последнего, поскольку вместе с этим возрастает и вероятное количество слабых участков в образце. Влияние размера образца отмечалось в случаях хрупкого излома, производимого, например, ударом [1]) или в результате воздействия переменных нагрузок [2]); объяснение же этого явления на статистической основе было дано позднее Вайбуллом [3]). Последний показал, что если мы проведем две серии испытаний на растяжение с геометрически подобными образцами из одного и того же материала, но разных объемов V_1 и V_2, то соответствующие значения пределов прочности будут находится в отношении

$$\frac{(\sigma_{\text{пр}})_1}{(\sigma_{\text{пр}})_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1/m}, \tag{a}$$

где m—постоянная материала. Определив m из уравнения (a), мы получаем возможность предсказать значение $\sigma_{\text{пр}}$ для любого размера образца. Эксперименты подобного рода были проведены Николаем Николаевичем Давиденковым [4]). Применив сталь с высоким содержанием фосфора и испытывая образцы двух диаметров ($d=10$ *мм* и 4 *мм*) и двух различных длин ($l=50$ *мм* и 20 *мм*), он нашел два значения $\sigma_{\text{пр}}$ (57,6 *кг/мм*^{2} и 65,0 *кг/мм*^{2}). Из уравнения (a) он определил тогда $m=23{,}5$. Пользуясь этим значением, он установил, что для образцов $d=1$ *мм*, $l=5$ *мм* предел прочности должен быть равным $\sigma_{\text{пр}}=77{,}7$ *кг/мм*^{2}. Испытания дали для них значение 75,0 *кг/мм*^{2}, так что теория оказалась здесь в хорошем согласии с опытами.

Пользуясь тем же статистическим методом, Вайбулл вычислил в упомянутой выше работе предел прочности при чистом изгибе и нашел для стержня прямоугольного сечения отношение

$$\frac{(\sigma_{\text{пр}})_{\text{изг}}}{(\sigma_{\text{пр}})_{\text{раст}}} = (2m+2)^{1/m}. \tag{b}$$

Эта формула подтвердилась также и испытаниями Н. Н. Давиденкова. Последний нашел для этого отношения значение 1,40,

[1]) Charpy M., Ass. intern. essais matériaux, VI congr., New York, 1912, т. 4, стр. 5.

[2]) Peterson R. E., J. appl. mechanics, т. 1, стр. 79, 1933.

[3]) Weibull W., Roy. swed. Inst. eng. research, Proc., № 151, 1939, Stockholm.

[4]) Английский перевод его работы имеется в J. appl. mechanics, т. 14, стр. 63, 1947. (*Прим. авт.*) См. Давиденков Н. Н. Некоторые проблемы механики материалов, Л., 1943. Обзор работ и научной деятельности Н. Н. Давиденкова см. в статье, посвященной его 75-летию в журнале Техн. физ., т. 24, в. 3, 1954. (*Прим. ред.*)

весьма близкое к теоретической его величине (вычисленной для $m=24$), равной 1,41.

В работе Вайбулла рассматривается и ряд других случаев распределения напряжений, представляющих практический интерес. При этом обсуждается несколько экспериментальных исследований, результаты которых обнаруживают удовлетворительное согласие со статистической теорией. Разумеется, эта теория применима лишь к хрупкому разрушению. Если материал обнаруживает перед разрушением значительную пластическую деформацию, то последняя смягчает все местные концентрации напряжений близ «дефектных пунктов» и задерживает разрыв до того, пока среднее для всего сечения напряжение не достигнет значения разрушающего.

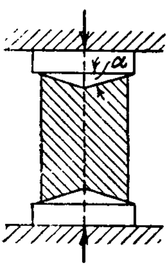


Рис. 177.

В технических испытаниях хрупких материалов образцы подвергаются обычно сжатию, но достигнуть равномерного распределения сжимающих напряжений в такого рода испытаниях бывает затруднительно. В связи с проявлениями трения по поверхности соприкосновения между образцом и подушками испытательной машины возможность поперечного расширения для образца исключается, вследствие чего материал его в этих областях попадает в условия трехмерного сжатия. В итоге близ поверхностей соприкосновения этот материал остается неповрежденным, боковые же грани образца выкрашиваются. Чтобы исключить трение, А. Фёппль покрывал поверхности соприкасания парафином[1]); разрушение образца при этом происходило совершенно иначе, чем в обычных условиях испытания. Кубический образец разрушался, расслаиваясь на пластинки, параллельные боковым граням. В тех случаях, когда в испытаниях на сжатие применяется цилиндрический образец (высота которого в 2—3 раза превышает диаметр), мы получаем приблизительно равномерное распределение напряжений в средней части образца, причем влияние торцов практически исключается. Другой способ обеспечения равномерности в распределении сжатия был предложен Зибелем и Помпом[2]) и показан на рис. 177. Цилиндрический образец сжимается здесь между двумя коническими поверхностями с углом в вершине α, равным углу трения. Равнодействующее давление в таком случае будет параллельно оси цилиндрического образца.

Испытания хрупких материалов под высокими гидростатическими давлениями показали, что в этих условиях хрупкий мате-

[1]) См. Mitt. mech. tech. Lab., München, № 27, 1900.

[2]) Mitt. Kaiser-Wilhelm Inst. Eisenforsch, Düsseldorf, т. 9, стр. 157, 1927.

риал может вести себя, как пластический[1]). Пользуясь цилиндрическими образцами мрамора и песчаника и подвергая их осевому сжатию с одновременным поперечным давлением, Т. Карман[2]) сумел получить бочкообразную форму сжатия, характерную для пластичных материалов, подобных, например, меди.

76. Испытания пластичных материалов

Проведенные за последнее время опытные исследования деформации монокристаллических образцов расширили наши познания относительно деформирования пластичных материалов. Они[3]) обнаружили, что пластическая деформация при растяжении монокристалла заключается в скольжении материала по некоторым кристаллографическим плоскостям в определенном направлении. Если, например, мы испытываем монокристаллический образец алюминия с гранецентрированной кубической структурной решеткой (рис. 178), то скольжение будет происходить в плоскости, параллельной одной из октаэдрических плоскостей (например, *abc*), в направлении, параллельном одной из сторон треугольника. В образце, испытываемом на растяжение, скольжение происходит не по плоскостям, образующим 45° с направлением силы, по которым действуют наибольшие касательные напряжения, а по наиболее неблагоприятно ориентированной октаэдрической плоскости. Этим объясняется, почему испытания монокристаллических образцов приводят нас к разбросу значений растягивающей нагрузки, при которой начинается пластическое деформирование. Эти значения зависят, как мы видим, не только от механических свойств материала, но также и от ориентации кристаллических осей относительно оси образца.

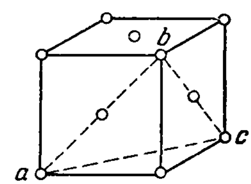


Рис. 178.

Положим, например, что в нашем монокристаллическом растягиваемом образце (рис. 179) с площадью поперечного сечения A, направление наиневыгоднейшим образом ориентированной октаэдрической плоскости скольжения определяется нормалью n, а направление скольжения—прямой pq. Касательное напряжение по плоскости скольжения равно

$$\tau = \frac{P}{A}\cos\alpha\sin\alpha. \tag{a}$$

[1]) См. Kick F., ZVDI, т. 36, стр. 278, 919, 1892; Adams, т. 195, стр. 363, 1901.

[2]) Kármán Th., ZVDI, 55, стр. 1749, 1911.

[3]) См. ранее указанные книги Илэма (C. F. Elam) и Шмида—Боаса (E. Schmid, W. Boas) (см. сноску на стр. 424).

Опыты показывают, что начало скольжения вызывается не величиной τ, но величиной компоненты $\tau \cos \varphi$ этого напряжения по направлению скольжения pq. Скольжение начинается, когда эта компонента достигает определенного критического значения $\tau \cos \varphi = \tau_{\text{кр}}$. Подставляя это его значение в уравнение (a), мы получаем:

$$\tau_{\text{кр}} = \frac{P}{A} \cos \alpha \sin \alpha \cos \varphi. \qquad \text{(b)}$$

Отсюда видно, что когда $\tau_{\text{кр}}$ сохраняет для данного материала постоянное значение, то нагрузка P, при которой начинается пластическое течение материала, зависит от значений углов α и φ

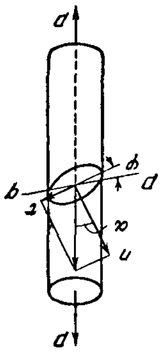


Рис. 179.

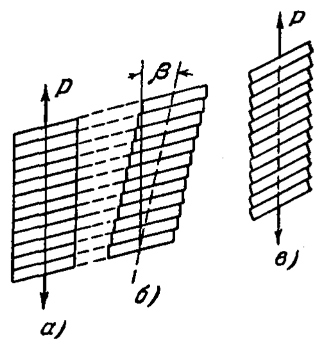


Рис. 180.

Обусловленный этим скольжением процесс растяжения показан схематически на рис. 180. Мы можем допустить, что он состоит из двух стадий: 1) поступательного движения по плоскостям скольжения (рис. 180, *б*) и 2) вращения образца на угол β, приводящего ось в первоначальное положение (рис. 180, *в*). Из этого механизма растяжения становится ясным, что 1) угол между направлением растягивающей силы P и плоскостями скольжения изменяется в процессе формоизменения образца и 2) первоначальное круговое поперечное сечение образца преобразуется в эллиптическое с соотношением главных осей, равным $1 : \cos \beta$.

Многочисленные эксперименты с монокристаллами привели к результатам, подтверждающим эти заключения. Об этом свидетельствует, например, рис. 181, где представлен растянутый образец из медно-алюминиевого монокристалла [1]). Кроме того, эти опыты показывают, что величина $\tau_{\text{кр}}$, при которой начинается скольжение, бывает обычно весьма малой. Кривые рис. 182 дают соотношения между величиной деформации сдвига и касательным напряжением, найденные из испытаний монокристаллических

[1]) См. Elam C. F., The distcrtion of metal Crystals, стр. 182, 1935.

образцов алюминия при различных температурах[1]). Из них видно, что значение $\tau_{кр}$ весьма мало, хотя в то же самое время величина τ, требуемая для продолжения скольжения, постепенно возрастает с ростом деформации. Это является результатом упрочнения материала.

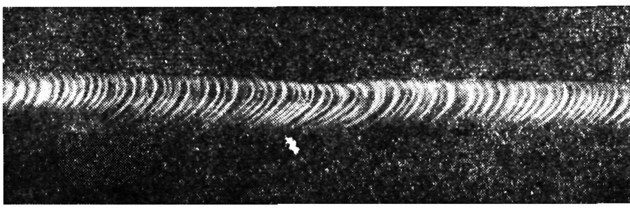


Рис. 181. Монокристаллический образец меди—алюминия в состоянии растяжения.

Вычисления $\tau_{кр}$, основанные на рассмотрении молекулярных сил, приводят к огромным значениям. Это говорит о том, что процесс скольжения отнюдь не сводится лишь к свойственному твердым телам переносному движению атомных плоскостей одной относительно другой и что для объяснения его мы должны предположить существование каких-то местных несовершенных первичных очагов скольжения, откуда оно под воздействием малой силы распространяется затем по всей плоскости скольжения. Модель, иллюстрирующая возможность такого скольжения (возникшего в месте несовершенства), была описана Л. Прандтлем[2]). Другая механическая модель была предложена Тэйлором[3]). Допуская, что в распределении атомов может существовать какое-либо местное нарушение («дислокация»), он показал, что это нарушение будет перемещаться в кристалле по плоскости скольжения под влиянием малого напряжения $\tau_{кр}$ и повлечет за собой смещение

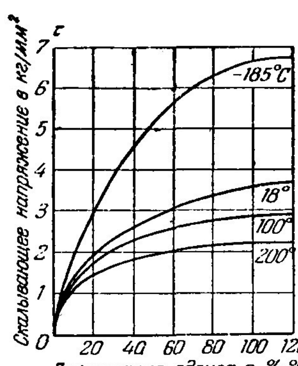


Рис. 182.

[1]) См. Boas W., Schmid E., Z. Physik, т. 71, стр. 703, 1931.

[2]) Об этой модели Прандтль сообщил на семинаре по теории упругости в 1909 г. в Геттингене, описание же ее было дано в ZAMM, т. 8, стр. 85—106, 1928.

[3]) См. Taylor G. I., Proc. roy. soc. (London), т. 145, стр. 362—404, 1934.

одной части кристалла относительно другой. Пользуясь этой моделью, Тэйлор получил возможность объяснить не только возникновение скольжения при весьма малых значениях $\tau_{кр}$, но также и явление наклепа, показанного кривыми рис. 182.

Располагая теперь некоторыми сведениями о свойствах монокристаллов, мы можем лучше понять и результаты испытаний поликристаллических образцов обычного типа. Юинг и Розенхайн[1]) поставили весьма интересные опыты на растяжение образцов из полированного железа. Микроскопическое исследование поверхности металла обнаружило, что даже при сравнительно низких растягивающих нагрузках на поверхности некоторых зерен появляются «полосы скольжения». Эти полосы свидетельствуют о том, что по определенным кристаллографическим плоскостям в этих зернах происходит скольжение. Поскольку упругие свойства в отдельном кристалле могут резко отличаться в разных направлениях и поскольку отдельные кристаллы размещаются в общей массе беспорядочно, постольку напряжения в растягиваемом поликристаллическом образце распределяются неравномерно, и скольжение может произойти в отдельных наиболее неблагоприятно ориентированных кристаллах прежде, чем среднее растягивающее напряжение достигнет значения предела текучести. Если такой образец разгрузить, то кристаллы, подвергшиеся скольжению, не смогут вернуться полностью к своей первоначальной форме, в результате чего в разгруженном образце останутся некоторые остаточные напряжения. Некоторое *последействие* в образце может быть приписано именно этим остаточным напряжениям. Пластическая деформация отдельных кристаллов содействует также потерям энергии при последовательных загружениях и разгрузках и увеличивает площадь гистерезисной петли, о которой шла речь на стр. 426. Если этот уже испытанный образец подвергнуть растяжению вторично, то зерна, в которых имело место скольжение, не будут пластически деформироваться, пока растягивающая нагрузка не достигнет значения, отмеченного при первом загружении. Лишь когда вторичная загрузка превысит это значение, вновь начнется скольжение. Если образец после предварительного растяжения подвергнуть сжатию, то сжимающие напряжения в сочетании с остаточными напряжениями (возникшими при предварительном растяжении) повлекут за собой текучесть в наиболее неблагоприятно ориентированных кристаллах, прежде чем среднее сжимающее напряжение достигнет того значения, при котором в первоначальном состоянии образца в нем возникают полосы скольжения. Поэтому цикл испытания на растяжение повышает предел упругости при растяжении, но при этом

---

[1]) Ewing I. A., Rosenhain W., Trans. roy. soc. (London) (A), т. 193, стр. 353, 1900.

предел упругости на сжатие снижается. Мы убеждаемся в том, что соображения, опирающиеся на явление скольжения в отдельных кристаллах и на обусловленные этим скольжением остаточные напряжения, дают объяснение *эффекту Баушингера*[1]).

При изучении сопротивления растяжению строительной стали инженеров заинтересовало в особенности явление внезапного удлинения на пределе текучести. Тот факт, что при определенном значении растягивающего напряжения происходит внезапное падение растягивающей нагрузки и что после этого металл получает значительное удлинение при несколько пониженном напряжении, хорошо известен. Бах ввел для этих двух значений напряжения наименования *верхнего* и *нижнего* пределов текучести[2]). Дальнейшие опытные исследования показали, что нижний предел текучести в меньшей степени зависит от формы образца, чем верхний; на этом основании на практике ему придается большее значение. Испытания на изгиб и кручение показали, что характерные линии текучести (линии Людерса) в этих условиях появляются при значительно более высоких напряжениях, чем в случае однородного распределения напряжений, откуда выясняется, что начало текучести зависит не только от величины наибольшего напряжения, но также и от градиента напряжений. Недавно под руководством А. Надаи были проведены важные эксперименты со сталью при пределе текучести. Они показали, что начало текучести весьма сильно зависит от скорости деформирования[3]). Кривые рис. 183 воспроизводят результаты, полученные для мягкой стали в широком интервале скоростей деформирования ($u=d\varepsilon/dt=9{,}5\cdot10^{-7}$ *сек*$^{-1}$ до $u=300$ *сек*$^{-1}$). Из них видно, что не только предел текучести, но также предел прочности и полное удлинение в сильной степени зависят от скорости деформирования.

Для объяснения внезапного удлинения стали на пределе текучести указывалось на то[4]), что поверхностные слои зерен состоят из хрупкого материала и образуют жесткий каркас, препятствующий возникновению пластической деформации в зернах при низких напряжениях. Без такого каркаса диаграмма растяжения приняла бы вид, показанный на рис. 184 штриховой линией. Благодаря наличию жесткого поверхностного слоя материал остается идеально упругим и следует закону Гука до точки A, соответствующей моменту его разрушения. При этом пластичный материал зерна внезапно получает необратимую деформацию AB, после чего

[1]) Интересная модель, воспроизводящая петли гистерезиса и эффект Баушингера, была построена Дженкином см.: Jenkin C. F., Engineering, т. 114, стр. 603, 1922.

[2]) Bach C., ZVDI, т. 58, стр. 1040, 1904; т. 59, стр. 615, 1905.

[3]) Manjoine J., J. appl. mechanics, т. 11, стр. 211, 1944.

[4]) Ludwik P., Scheu, Werkstoffanschuss, VDI-Ber. № 70, 1925; Köster, Archiv Eisenhüttenw., № 70, 1929.

его поведение определяется обычной для пластичного материала кривой BC. Эта теория объясняет состояние неустойчивости материала на верхнем пределе текучести.

Она же дает обоснование и тому явлению, что мелкозернистые материалы обнаруживают обычно сравнительно более высокие значения напряжений предела текучести и в связи с этим бо̀льшие удлинения текучести (определяемые на рис. 184 длиной горизонтального отрезка AB). Кроме того, она же объясняет и тот факт, почему при испытаниях, производимых с большой скоростью, повышение напряжения, соответствующего пределу[1]) текучести, сопровождается увеличением удлинения при этом напряжении (как в этом можно убедиться из кривых рис. 183).

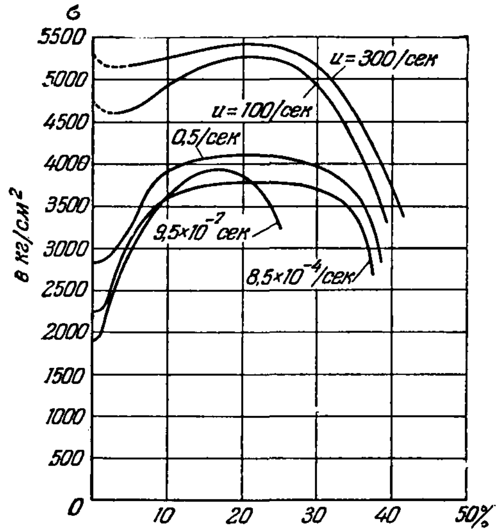


Рис. 183.

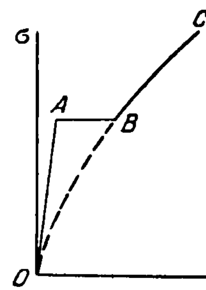


Рис. 184.

Некоторый прогресс в изучении пластической деформации растянутых образцов за пределом текучести был достигнут путем введения понятий *истинного напряжения* и *истинной деформации* при построении диаграммы растяжения. Истинное напряжение получается путем деления нагрузки на действительную площадь

---

[1]) Освещение различных вопросов, относящихся к испытаниям на растяжение, и соответствующую библиографию можно найти в книге: Sachs G., Der Zugversuch, Leipzig, 1926. См. также статью по этому вопросу: McGregor C. W., Proc. ASTM, т. 40, стр. 508, 1940 и его статью в Handbook of experimental stress analysis (ed. Hetenyi), 1950. (*Прим. авт.*) См. Закс Г., Практическое металловедение (русск. перев. ОНТИ), 1937, также Фридман Я. Б., Механические свойства металлов, М., 1946; 2-е изд. М., 1951; Ужик Г. В., Сопротивление отрыву и прочность металлов, АН СССР, 1950; Пашков П. О., Растяжение и разрыв металлов, Л., 1952; Шапошников Н. А., Механические испытания металлов, М.—Л., 1951. (*Прим. ред.*)

поперечного сечения деформированного образца, соответствующую этой нагрузке. Для вычисления истинной деформации[1]) точно так же учитывается фактическая длина l образца, а не начальная его длина l_0. Тогда приращения деформации определяются отношением $d\varepsilon = dl/l$, а истинное удлинение выразится интегралом

$$\varepsilon = \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0}.$$

Когда растягивающая нагрузка на образец достигает своего наибольшего значения, возникает местное поперечное сжатие (образование «шейки»). При этом напряжения перестают распределяться по поперечному сечению шейки равномерно и вместо простого растяжения получается трехмерное распределение напряжений. Распределение напряжений по поперечному сечению шейки в самом узком ее месте было исследовано Н. Н. Давиденковым для круглого цилиндрического бруса[2]). Он нашел, что наибольшее растягивающее напряжение действует в центре поперечного сечения, наименьшее же—на контуре. Значения этих напряжений выражаются приближенно формулами

$$\sigma_{\text{макс}} = \sigma_a \frac{R+0{,}50a}{R+0{,}25a}, \qquad \sigma_{\text{мин}} = \frac{\sigma_a R}{R+0{,}25a},$$

где σ_a—среднее растягивающее напряжение, a—радиус наименьшего поперечного сечения, R—радиус кривизны профиля шейки. Но, кроме напряжений, действующих в направлении оси образца, здесь возникают еще и напряжения σ_r и σ_θ в радиальном и тангенциальном направлениях. Давиденков показал, что эти два последних напряжения равны и выражаются формулой

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{\sigma_a R}{R+0{,}25a} \, \frac{a^2-r^2}{2Ra},$$

где r—радиальное расстояние рассматриваемой точки от оси образца.

Изучая явление разрушения, Л. Прандтль указал[3]), что следует различать два типа разрушения: 1) *хрупкое разрушение* (*отрыв*), происходящее по плоскостям, перпендикулярным к растягивающей силе, и 2) разрушение от сдвига. При испытании цилиндрических

---

[1]) Идея такого измерения была подана Менаже (Mesnager) в докладе, представленном Международному конгрессу физиков, см. Congr. intern. phys., Paris, 1900, т. 1, стр. 348.

[2]) Английский перевод этой статьи см. Proc. ASTM, т. 46, 1946. (*Прим. авт.*) См. Давиденков Н. Н., Спиридонова Н. И. Анализ напряженного состояния в шейке растянутого образца, Журн. Заводская лаборатория, 1945, XI, 6 (*Прим. ред.*)

[3]) Verhandlungen deutscher Naturforscher und Ärzte, Dresden, 1907.

образцов конструкционной стали мы получаем так называемое *разрушение по чашке и конусу*. В центре его поверхность разрыва перпендикулярна к оси образца и носит хрупкий характер, наружная же кольцевая область поверхности разрушения имеет коническую форму и образует с направлением растяжения угол приблизительно в 45°; она представляет собой разрушение сдвига. П. Людвик[1]) (P. Ludwik) обратил внимание на то, что разрушение начинается в центре наименьшего поперечного сечения шейки и распространяется как хрупкий разрыв по центральной области поперечного сечения, в то время как остальной материал продолжает удлиняться пластически. Микроскопическое исследование[2]) изломов мягкой стали показывает, что некоторые зерна раскалываются по плоскостям кубической решетки, другие же разрушаются по октаэдрическим плоскостям. Кристаллы, подвергшиеся вытягиванию при пластическом деформировании, дают волокнистую поверхность разрыва.

77. Теории прочности

Бóльшая часть наших сведений о механических свойствах пластичных материалов почерпнута из испытаний на растяжение, в то время как в отношении хрупких материалов они устанавливаются из испытаний на сжатие. Для того чтобы обосновать назначение допускаемых напряжений в различных встречающихся на практике случаях сложного напряженного состояния, выдвигались различные теории прочности[3]). Такие ученые, как Ламе и Рэнкин, принимали в качестве критерия прочности наибольшее главное напряжение, но впоследствии, главным образом под влиянием таких авторитетов, как Понселе и Сен-Венан, общее признание получила *теория наибольшей деформации*. В соответствии с ней принималось, что текучесть или разрушение при любом сложном напряженном состоянии начинается, когда наибольшая деформация достигает определенного критического значения, которое устанавливается из испытаний на растяжение.

Максвелл высказал мысль воспользоваться выражением энергии деформации при оценке прочности в сложных напряженных состояниях. Он показал, что полную удельную (т. е. отнесенную к единице объема) энергию деформации можно разложить на две части: 1) энергию деформации равномерного растяжения или сжатия и 2) энергию перекашивания (искажения формы). По поводу последней Максвелл замечает: «У меня имеются веские основания

[1]) Schweiz, Verband Materialprüfung, Tech. Ber., № 13, 1928.
[2]) Tippler C. F., Metallurgia, т. 39, стр. 133, 1949.
[3]) Полную библиографию по этому вопросу можно найти в статье Ганса Фромма, см. Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, т. 4, стр. 359, 1931.

думать, что когда энергия (искажения формы) достигает известного предела, элемент выходит из строя». Далее он утверждает: «Я первый берусь писать на эту тему. Мне еще не приходилось видеть ни одной научной работы, в которой *при заданных по трем направлениям механических воздействиях* на элемент решался бы вопрос об его несущей способности». Мы видим, что Максвелл уже владел теорией прочности, которую мы теперь называем *теорией наибольшей энергии формоизменения*. Но он никогда больше не возвращался к этому вопросу, и его мысль стала известной только после издания его писем[1]). Потребовалось еще много времени, прежде чем инженеры пришли, наконец, к теории, тождественной с теорией Максвелла.

Дюге построил теорию растяжения[2]), сходную с теорией Кулона, предложенной последним для сжатия (стр. 67). Теория наибольших касательных напряжений, учитывающая разнообразные случаи сложного напряженного состояния, была предложена Гестом[3]) для мягкой стали. Эта теория представляет собой частный случай теории О. Мора, на которой мы останавливались раньше (см. стр. 344). Опыты с хрупкими материалами, как, например, с песчаником, показали, что теория Мора не может быть приведена в соответствие с результатами испытаний на хрупкий разрыв[4]).

Бельтрами[5]) полагал, что при определении критических значений сложных напряженных состояний в качестве критерия разрушения надлежит принять количество энергии деформации, заключенной в единице объема материала. Эта теория, однако, расходится с опытами, согласно которым под гидростатическим давлением в материале может аккумулироваться большой запас энергии деформации, не вызывая ни разрушения, ни текучести.

Улучшение в эту теорию прочности было внесено М. Т. Губером[6]), который для определения критического состояния при сложном напряженном состоянии предложил учитывать лишь энергию формоизменения. Эта энергия представляется выражением

$$U=\frac{1}{12G}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2\right], \qquad \text{(a)}$$

[1]) Письма Джемса Клэрка Максвелла своему другу Уилльяму Томсону были впервые напечатаны в Proc. Cambridge phil. soc., ч. 5, т. 32. Впоследствии они были изданы отдельной книгой издательством Кембриджского университета (New York, Cambridge), 1937.

[2]) Duguet, Déformation des corps solides, т. 2, стр. 28, 1885.

[3]) Guest J., J. Phil. Mag., т. 50, стр. 69, 1900.

[4]) Kármán Th., Z. VDI, т. 55, стр. 1749, 1911; Böker R., Forsch. Gebiete Ingenieurw. № 175—176, 1915.

[5]) Beltrami, Rendiconti, стр. 704, 1885; Math. Ann., стр. 94, 1903.

[6]) Huber M. T., Crasopismo tech., т. 15, 1904, Львов; см. также Föppl A., Föppl L., Drang und Zwang, 2-е изд., т. I, стр. 50. Та же мысль была высказана независимо Мизесом: Mises R., Göttinger Nachr., стр. 582, 1913. (*Прим. авт.*) См. русский перевод: Фёппль А., Фёппль Л., Сила и деформация, М.—Л., ГТТИ, т. I, 1933. (*Прим. перев.*)

где σ_1, σ_2, σ_3 — главные напряжения. В условиях простого растяжения энергию формоизменения при напряжении, равном пределу текучести, мы получим, если в выражение (a) подставим $\sigma_1 = \sigma_т$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, где $\sigma_т$ — предел текучести. Это дает:

$$U = \frac{\sigma_т^2}{6G}. \qquad (b)$$

Приравнивая выражения (a) и (b), мы найдем, что условие появления текучести для всякой пространственной системы напряжений выразится равенством

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_т^2. \qquad (c)$$

В двумерной задаче, положив в уравнении (c) $\sigma_3 = 0$, мы получим аналогичное условие для плоского напряжения состояния

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_т^2. \qquad (d)$$

Например, для чистого сдвига мы имеем $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$, и уравнение (d) дает значение

$$\tau_т = \frac{\sigma_т}{\sqrt{3}} = 0{,}5774\sigma_т \qquad (e)$$

для предела текучести при сдвиге. Оно близко совпадает с результатами испытаний.

Если напряжения σ_1 и σ_2 откладывать как координаты прямоугольной системы, то условие текучести (d) изобразится эллипсом (рис. 185). Неправильный пунктирный шестиугольник на том же чертеже воспроизводит условие текучести на основе теории наибольших касательных напряжений.

Через главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 мы можем вычислить касательные напряжения $\tau_{окт}$, действующие по октаэдрическим плоскостям[1]), т. е. по плоскостям, одинаково наклоненным к главным осям:

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \qquad (f)$$

Вводя это уравнение в условие текучести (c), получаем:

$$\tau_{окт}^2 = \frac{2}{9}\sigma_т^2.$$

Это значит, *что теорию энергии формоизменения* можно выразить следующим простым образом: в любом случае сложного напряженного состояния пластическая деформация (текучесть) начинается, когда октаэдрическое касательное напряжение достигает значения $\tau_{окт} = \sigma_т\sqrt{2}/3$.

---

[1]) Здесь этот термин применяется в совершенно ином смысле, чем тот, в котором он использован на рис. 178.

С целью проверки справедливости теории энергии формоизменения была проведена большая экспериментальная работа. В. Лоде провел по предложению А. Надаи испытания с тонкостенными железными, медными и никелевыми трубками, подвергая их осевому растяжению и внутреннему гидростатическому давлению [1]). Таким путем можно было создать двумерное напряженное состояние с различными соотношениями $\sigma_1 : \sigma_2$ (напряжениями в радиальных направлениях допустимо пренебречь). При этом было установлено, что экспериментально полученные точки располагаются довольно точно по предельному эллипсу, представленному на рис. 185. Подобные же опыты были проведены М. Рошем и А. Эйхингером в лаборатории по испытанию материалов при Цюрихском политехническом институте [2]). Результаты оказались и на этот раз подтверждающими теорию энергии формоизменения. Тэйлор и Куинни [3]), комбинируя растяжение с кручением, имели возможность наблюдать поведение тонкостенных трубок из алюминия, меди и мягкой стали в разнообразных условиях двумерного напряженного состояния. Для первых двух из названных здесь металлов им удалось получить особенно близкое совпадение между показаниями их опытов и значениями, предсказанными теорией энергии формоизменения.

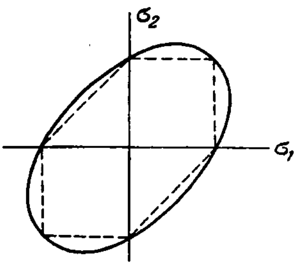


Рис. 185.

Г. Закс [4]) пришел к соотношению (e) между пределом текучести при сдвиге и пределом текучести при растяжении совершенно иным путем. Из соотношения (b) § 76 мы знаем, что нагрузка на пределе текучести для монокристаллического образца зависит от ориентации кристалла. Учитывая это и рассматривая поликристаллический образец как систему беспорядочно расположенных кристаллов, пренебрегая влиянием ограничивающих наружных поверхностей кристаллов и предположив, что все кристаллы начинают испытывать пластическую деформацию одновременно, Закс вычислил соотношение между $\sigma_т$ и критическим касательным напряжением $\tau_{кр}$, воспользовавшись приближенным методом усреднения [5]). Для кристаллов с гранецентрированной кубической

---

[1]) Lode W., Z. Physik, т. 36, стр. 913, 1926.

[2]) Roš M., Eichinger A., Proc. intern. congr. appl. mech., Zürich, 1926.

[3]) Taylor G. I., Quinney H., Trans. roy. soc. (London) (A), т. 230, стр. 323—362, 1931.

[4]) Sachs G., ZVDI, т. 72, стр. 734, 1928.

[5]) Мысль о желательности выполнения такого вычисления была высказана Прандтлем в дискуссии на съезде Общества прикладной математики и механики в Дрездене в 1925 г. См. примечание в статье В. Лоде: Lode W., Z. Physik, т. 36, стр. 934, 1926.

структурной решеткой (алюминий, медь, никель) он нашел:

$$\sigma_т = 2{,}238\tau_{кр}.$$

Подобным же образом для чистого сдвига

$$\tau_т = 1{,}293\tau_{кр},$$

откуда, наконец,

$$\tau_т = \sim 0{,}577\sigma_т.$$

В пределах точности его вычислений это совпадает с результатом (е) теории энергии формоизменения. Закс полагает, что тот же самый результат должен получиться приближенно и для кристаллов с объемноцентрированной кубической структурной решеткой (как, например, в железе). Мы видим, таким образом, что его научная работа дает некоторое физическое обоснование результатам, полученным прежде, чем было сделано допущение, что течение материала начинается с того момента, когда количество удельной энергии формоизменения достигает некоторой определенной величины, характерной для каждого материала[1]).

78. Ползучесть металлов при высоких температурах

В XIX веке был проведен ряд исследований по изучению прочности материалов при высоких температурах, но испытания, которым подвергались при этом материалы, были того же рода, что и производимые при обычной комнатной температуре. Целью их было установление предельных сопротивлений материалов и их модулей упругости при повышенных температурах. За последние 30 лет проблемы, касающиеся механических свойств материалов при высоких температурах, приобрели большое практическое значение. Экономия топлива требовала непрестанного повышения температур во всех типах работающих на паре установок. Рабочие температуры в пароэлектроцентралях поднялись с 340° С в 1920 г. до 540°С к настоящему времени. Знание характеристик металлов при высоких температурах стало существенной предпосылкой в проектировании паровых турбин. С той же проблемой инженерам пришлось столкнуться и в проектировании дизелей и газовых двигателей. Введение в практику и усовершенствование газовых турбин и реактивных двигателей стали возможными лишь благодаря введению металлов, выдерживающих высокие температуры. В нефтяной и химической отраслях промышленности также встают

[1]) Обсуждение различных теорий прочности с полной библиографией вопроса дается в работе: Roš M., Eichinger A., Die Bruchgefahrfester Körper, Ber., № 172 der EMPA, Zürich, 1949. (*Прим. авт.*) См. также Пономарев С. Д. и др., Основы современных расчетов и прочность в машиноведении, Машгиз, 1956, т. I, гл. V. (*Прим. ред.*)

новые проблемы, в которых важную роль играют механические свойства металлов при высоких температурах. В ответ на запросы промышленности в различных странах начало развиваться экспериментальное изучение ползучести металлов при высоких температурах[1]). П. Шевенар положил начало этому роду работы во Франции[2]), Диккенсон поставил эксперименты по течению сталей в состоянии темно-красного каления в Англии[3]).

Было установлено, что при высоких температурах образцы стали *«ползут»* под воздействием постоянной растягивающей силы точно так же, как ползет свинец при обычной температуре. Попытки определить «предельное напряжение ползучести», ниже которого всякая ползучесть прекращается, обнаружили, что такого предела не существует и что чем чувствительнее используемые в испытаниях аппаратуры, тем меньшими оказываются отмечаемые ими напряжения, способные вызвать ползучесть в нагруженных образцах. В связи с этим стало ясно, что обычные методы назначения надлежащих размеров для элементов сооружений (на основе указываемых техническими условиями допускаемых напряжений) не применимы к конструкциям, подвергающимся действию высоких температур. Проектировщику надлежит в подобных случаях учитывать и те деформации, которые возникают в результате ползучести, и в соответствии с этим назначать размеры элементов. Это должно выполняться таким образом, чтобы ожидаемые деформации в сооружении на протяжении всего срока его службы, например 20—30 лет в случае электростанций, не превзошли некоторых допускаемых пределов.

Для получения необходимых данных некоторые лаборатории начали ставить испытания образцов на растяжение под длительно действующей нагрузкой. Результаты подобных испытаний представляются обычно графически в виде кривых, подобных показанным на рис. 186 и дающих удлинения в функции времени. Эти кривые строятся по опытным данным, полученным при различных значениях растягивающей нагрузки. Рассматривая, например, кривую $OABCD$, мы видим, что в момент приложения нагрузки образец удлиняется на величину OA, а затем ползет с постепенно уменьшающейся скоростью. Последняя характеризуется уклоном кривой AB.

---

[1]) Данные об этих исследованиях и полную библиографию вопроса можно найти в книгах: Tapsel H. J., Creep of metals, Oxford, 1931; Smith George V., Properties of metals at elevated temperatures, New York, 1950. (*Прим. авт.*) На русском языке: Тэпсел Г. Д., Ползучесть металлов, перев. с англ., Металлургиздат, 1934; также Пономарев С. Д. и др., Основы современных методов расчета на прочность в машиноведении, т. II, Машгиз, 1952, гл. V, где приведена обширная библиография работ советских ученых. (*Прим. ред.*)

[2]) Chevenard P., Compt. rend., т. 169, стр. 712—715, 1919.

[3]) Dickenson J. H. S., J. Iron steel Inst. (London), т. 106, стр. 103, 1922.

На участке BC этот уклон сохраняется почти постоянным; образец в этом интервале времени удлиняется с постоянной скоростью ползучести. Наконец, на участке CD скорость ползучести возрастает со временем; это объясняется главным образом постепенным уменьшением площади поперечного сечения, в связи с чем ползучесть продолжается при возрастающем растягивающем напряжении. Для инженеров участок BC кривой представляет наибольшую важность, и они обычно стараются ограничить область работы конструкций именно этим интервалом «минимальной скорости ползучести». При этом предполагается[1]), что на протяжении интервала времени, соответствующего участку BC кривой, вызываемое ползучестью упрочнение непрерывно компенсируется отжигом, производимым высокой температурой, и что в итоге такого уравновешивания процесс ползучести протекает с постоянной скоростью.

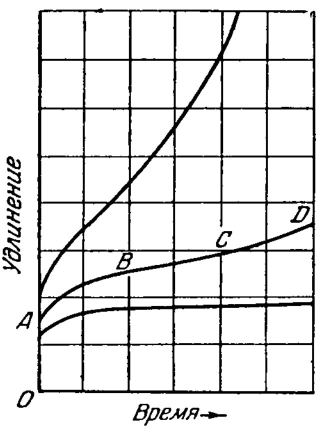


Рис. 186.

Длительность лабораторных испытаний такого рода не превышает обычно нескольких тысяч часов, так что предсказание деформаций, производимых ползучестью за весь срок службы сооружения, требует некоторой экстраполяции результатов испытаний. Эксперименты с различными сортами стали показали, что на участке AB кривой (рис. 186) приращение скорости ползучести сверх наименьшего ее значения снижается в геометрической прогрессии по мере того, как время увеличивается в арифметической прогрессии. На этом основании для зависимости между скоростью ползучести и временем принимается обычно такое соотношение[2]):

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = v_0 + ce^{-at}. \qquad \text{(a)}$$

Под величиной v_0 здесь разумеется то наименьшее значение скорости ползучести, которое вместе с постоянными c и a подлежит определению из экспериментальной кривой ползучесть—время, построенной для тех температурных условий и того напряжения,

[1]) Эта мысль была подана Р. Бэйли, оказавшим большое содействие делу изучения ползучести. См. B a i l e y R. W., J. Inst. metals, т. 35, стр. 27, 1926.

[2]) Этот метод экстраполяции был предложен П. Мак-Ветти. См. M c V e t t y P. G., Proc. ASTM, ч. II, т. 34, стр. 105—129, 1934.

для которых требуется произвести экстраполяцию. Интегрируя, получаем:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + v_0 t - \frac{c}{a} e^{-at}. \tag{b}$$

Постоянную ε_0 также можно установить из испытаний, так что удлинение образца в любой момент времени t легко вычисляется из уравнения (b). При больших значениях t последним членом в уравнении (b) допустимо пренебречь, и тогда вместо кривой AC ползучесть—время (рис. 187) мы вправе воспользоваться ее асимптотой BD. Таким именно путем опыты, проведенные с металлом при 455° С под различными напряжениями[1]), были использованы

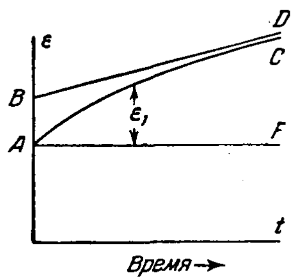


Рис. 187.

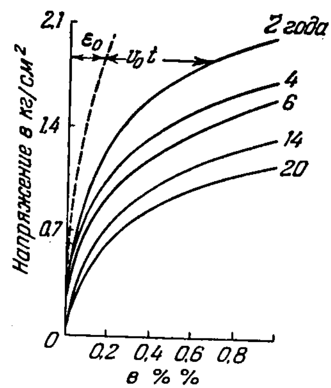


Рис. 188.

для построения кривых, приведенных на рис. 188. С помощью этих кривых можно определить удлинение для заданных значений напряжения σ и срока службы.

При вычислении напряжений в сооружениях, подвергающихся действию высоких температур, желательно выделить ту часть полной величины ползучести, которая налагается за весь срок службы сооружения на начальное удлинение (обозначенное на рис. 187 через ε_1). Обычно принимается, что эту величину можно представить выражением вида

$$\varepsilon_1 = \varphi(\sigma)\, \psi(t),$$

где φ — функция одного лишь σ, ψ — функция одного лишь t. На практике φ представляют часто степенной функцией σ, опытная же кривая AC на рис. 187 отображает функцию ψ. Таким путем мы получаем уравнение

$$\varepsilon_1 = a\sigma^m \psi(t), \tag{c}$$

[1]) Эти результаты заимствованы из статьи Мак-Ветти: McVetty P. G., Proc. ASTM, т. 34, 1938.

где a и m — две постоянные, которые нужно выбрать так, чтобы уравнение отвечало экспериментальным кривым. Располагая этим уравнением, мы получаем возможность решать некоторые практические задачи проектирования конструкций, предназначенных для работы при высоких температурах.

В качестве примера рассмотрим чистый изгиб балки прямоугольного сечения, высотой h, шириной b. Положим, что поперечные сечения остаются в процессе изгиба плоскими и что материал обладает одинаковыми свойствами при растяжении и при сжатии, так что нейтральная линия проходит через центр тяжести поперечного сечения. Пусть $\sigma_{\text{макс}}$ обозначает наибольшее напряжение, а σ — напряжение на расстоянии y от нейтральной оси. Тогда из уравнения (c) находим:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{\text{макс}} &= \frac{h}{2\rho} = a\sigma_{\text{макс}}^{m}\psi, \\ \varepsilon &= \frac{2y}{h}\,\varepsilon_{\text{макс}} = a\sigma^{m}\psi, \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

откуда

$$\sigma = \sigma_{\text{макс}}\left(\frac{2y}{h}\right)^{1/m}. \tag{e}$$

Подставляя это в выражение для изгибающего момента, находим:

$$M = 2\int_{0}^{h/2} b\sigma y\,dy = \sigma_{\text{макс}}\,\frac{bh^2}{6}\,\frac{3m}{2m+1},$$

откуда мы можем определить $\sigma_{\text{макс}}$, а с помощью уравнения (d) вычислить кривизну $1/\rho$ для любого заданного времени t. Кривизной, образовавшейся при приложении момента M, в этом выводе мы пренебрегаем.

Небольшое число опытов было посвящено изучению ползучести в условиях сложного напряженного состояния. Бэйли[1]) испытал при обычной температуре свинцовые трубы под внутренним давлением, а также под внутренним давлением в сочетании с осевой нагрузкой. Им же были изучены и свойства стальных труб при 480° и 490° С при осевом растяжении в сочетании с кручением. Ф. Л. Ивритт[2]) испытал при высоких температурах стальные трубы на кручение. Поскольку мы не располагаем достаточными экспериментальными данными о ползучести в условиях сложного напряженного состояния, возникает необходимость

[1]) Bailey R. W., World power conference, Tokyo, 1929; Engineering, т. 129, стр. 265—266, 327—329, 772, 1930.

[2]) Everett F. L., Trans. ASME, т. 53, 1931; Proc. ASTM, т. 39, стр. 215—224, 1939.

использовать результаты изучения ползучести при простом растяжении для решения этих более сложных задач. Это достигается обычно на основе следующих допущений: 1) в процессе пластической деформации направления главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3 совпадают с направлениями главных деформаций ε_1, ε_2, ε_3; 2) объем материала остается постоянным, в силу чего для малых деформаций имеет место равенство

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=0, \tag{f}$$

и 3) наибольшие касательные напряжения пропорциональны соответствующим деформациям сдвига, т. е.

$$\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sigma_1-\sigma_2}=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_3}{\sigma_2-\sigma_3}=\frac{\varepsilon_3-\varepsilon_1}{\sigma_3-\sigma_1}=\theta, \tag{g}$$

где θ обозначает некоторую функцию от σ_1, σ_2, σ_3, определяемую из опытов. Из уравнений (f) и (g) следует, что

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1&=\frac{2\theta}{3}\left[\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right],\\
\varepsilon_2&=\frac{2\theta}{3}\left[\sigma_2-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right],\\
\varepsilon_3&=\frac{2\theta}{3}\left[\sigma_3-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{h}$$

Эти уравнения напоминают соотношения между напряжениями и деформациями закона Гука, но отличаются от них в двух отношениях: вместо постоянной $1/E$ в них входит величина $2\theta/3$, а вместо коэффициента Пуассона — множитель $1/2$.

Для того чтобы применить уравнения (h) к ползучести с постоянной скоростью, мы можем разделить эти уравнения на время t. Введя обозначения $\dot\varepsilon_1$, $\dot\varepsilon_2$, $\dot\varepsilon_3$ для главных скоростей ползучести и обозначая множитель перед квадратными скобками через $\varkappa$, приходим к системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\dot\varepsilon_1&=\varkappa\left[\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right],\\
\dot\varepsilon_2&=\varkappa\left[\sigma_2-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right],\\
\dot\varepsilon_3&=\varkappa\left[\sigma_3-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{k}$$

Применяя эти уравнения к случаю простого растяжения, когда $\sigma_1=\sigma$ и $\sigma_2=\sigma_3=0$, получаем:

$$\dot\varepsilon=\varkappa\sigma. \tag{l}$$

Мы уже установили, что опытные данные для ползучести с постоянной скоростью при простом растяжении допускают удовлетворительное представление степенной функцией

$$\dot{\varepsilon} = b\sigma^m, \tag{m}$$

где b и m — две постоянные материала. Чтобы удовлетворить требованию совместности уравнений (l) и (m), нам следует положить:

$$\varkappa = b\sigma^{m-1}. \tag{n}$$

Для того чтобы установить вид функции $\varkappa$ для общего случая, представленного уравнениями (k), воспользуемся уравнением (c) § 77, выражающим условие текучести для трехмерного напряженного состояния, а именно введем из этого уравнения значение

$$\sigma_т = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \tag{p}$$

в уравнение (n) как эквивалентное растягивающее напряжение. При простом растяжении мы придем таким путем опять к уравнению (m); для общего же случая уравнения (k) дают:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= b\sigma_т^{m-1}\left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)\right], \\ \dot{\varepsilon}_2 &= b\sigma_т^{m-1}\left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1)\right], \\ \dot{\varepsilon}_3 &= b\sigma_т^{m-1}\left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{q}$$

Подставляя значения b и m, найденные из испытаний на ползучесть при простом растяжении, мы получаем формулы для вычисления скоростей ползучести $\dot{\varepsilon}_1$, $\dot{\varepsilon}_2$, $\dot{\varepsilon}_3$ в общем случае. Сходные формулы были использованы различными авторами[1]) в решении таких важных задач, как ползучесть в толстостенных цилиндрах, нагруженных внутренним давлением, и во вращающихся дисках. Напряжения σ_1, σ_2, σ_3 не поддаются в подобных случаях определению из условий статики, и задачу здесь приходится решать методами приближенного интегрирования.

79. Усталость металлов

Современное машиностроение в своем развитии поставило в порядок дня важную проблему предупреждения опасности, связанной с усталостью металлов при действии циклических напряжений. Основной причиной аварий, происходящих с машинами в эксплуатационных условиях, является усталость элементов

[1]) Odqvist F. K. G., Plasticitetsteori..., Proc. roy. swed. Inst. eng. research, 1934; Bailey R. W., J. Inst. mech. eng., т. 131, стр. 131, 1935; Soderberg C. R., Trans. ASME, т. 58, стр. 733—743, 1936.

машин—вот почему изучение этого явления заняло в XX веке одно из важнейших мест в исследовательской работе лабораторий по испытанию материалов[1]). Понятия *предела выносливости* и *амплитуды цикла напряжений* вошли уже в практику со времени Вёлера и Баушингера. Если мы знаем предел выносливости для симметричного цикла напряжений, то усталостные характеристики материала для циклов иных типов устанавливаются обычно на основе допущения Гербера[2]), согласно которому амплитуда напряжения R и среднее напряжение σ_a связаны между собой параболической зависимостью

$$R = R_{\text{макс}}\left(1 - \frac{\sigma_a^2}{\sigma_b^2}\right).$$

Установление предела выносливости в лабораториях с помощью испытательных машин малой скорости сопряжено с затратой времени и большими издержками, вследствие чего были предприняты многочисленные попытки выяснить, не существует ли какихлибо соотношений между пределом выносливости и другими механическими характеристиками материала, получаемыми из статических испытаний. Эти усилия увенчались небольшим успехом, хотя в результате их и было найдено, что предел выносливости для черных металлов, подвергаемых циклической нагрузке, составляет приблизительно 40—55% от предела прочности.

Большой труд был затрачен на выяснение вопроса о том, существует ли какая-либо связь и какая именно между явлениями гистерезиса и усталости. Еще Баушингер ввел понятие *естественных пределов пропорциональности*, фиксируемых после приложения к материалу ряда циклов напряжений; при этом он предполагал, что эти пределы должны определять безопасную амплитуду в усталостных испытаниях. Эту идею развил в дальнейшем Л. Бейрстоу [3]). Пользуясь зеркальным тензометром и машиной медленного действия, производящей загружение и разгрузку образца, он измерил ширину гистерезисных петель, причем нашел, что если значения этой ширины наносить в координатной сетке в функции

[1]) Эта научная работа описывается в следующих книгах: Gough H. J., The fatigue of metals, London, 1924; Moore H. F., Kommers J. B., The fatigue of metals, New York, 1927; литографированные лекции Гафа (H. J. Gough), читанные им в Массачузетском техническом институте в летнем семестре (июнь—июль 1937); а также Roš M., Eichinger A., Bericht, № 173, EMPA, Zürich, 1950. (*Прим. авт.*) См. русские переводы: Мур Г. Ф. и Коммерс Дж. В., Усталость металлов, дерева и бетона, перев. с англ. под ред. и с доп. П. В. Сахарова, Гостехиздат, М., 1929; Гаф Дж., Усталость металлов, ОНТИ, 1935. Библиография работ советских и иностранных ученых по вопросам усталости металлов приведена в книге: Кудрявцев И. В., Внутренние напряжения как резерв прочности в машиностроении, Машгиз, 1951. (*Прим. ред.*)

[2]) Gerber W., Z. bayer Architek. u. Ing. Ver., 1874.

[3]) Bairstow L., Trans. roy. soc. (London) (A), т. 210, стр. 35, 1911.

от максимальных напряжений приложенных циклов, то нанесенные точки расположатся приблизительно на прямой линии. Бейрстоу рекомендует определить *безопасную амплитуду цикла* как точку пересечения этой прямой с осью напряжений. Последующие испытания на усталость подтвердили правильность этого предложения. С того времени было предложено несколько методов быстрого определения амплитуд по петлям гистерезиса. Вместо того чтобы измерять ширину гистерезисных петель, Хопкинсон и Уилльямс[1]) произвели калориметрические измерения энергии, рассеиваемой за один цикл, и указали быстрый метод установления предела выносливости. В более близкое нам время О. Фёппль и его сотрудники провели в институте Вёлера в Брауншвейге обширную работу по измерению *циклической вязкости металлов* и ее отношения к пределу выносливости (усталостной прочности)[2]).

Другой быстрый способ определения предела выносливости был предложен Юингом и Хэмфри[3]). Они пользовались образцами шведского железа с полированными поверхностями и, подвергнув их определенному числу циклов знакопеременных напряжений, исследовали эти поверхности под микроскопом. Они нашли, что если подвергнуть образцы действию напряжений, превышающих определенный предел, то на поверхности некоторых из кристаллов по истечении времени появляются *полосы скольжения*. При увеличении числа циклов некоторые из этих полос как бы уширяются, после чего по одной из таких уширившихся полос начинает возникать трещина. Было высказано предположение, что напряжения, влекущие за собой появление полос скольжения, лежат за пределами безопасной амплитуды. Если продолжать дальше циклическое загружение образца, то по поверхности обнаруживается непрерывное скольжение материала. Оно сопровождается трением, подобно тому как это имеет место между скользящими поверхностями твердых тел. Под действием этого трения материал по поверхностям скольжения согласно этой теории постепенно истирается и в результате возникает трещина. Последующее исследование Гафа и Хансона[4]) обнаружило, что полосы скольжения могут образовываться и при напряжениях, лежащих ниже предела выносли-

---

[1]) Hopkinson B., Williams C. T., Proc. roy. soc. (London) (A), т. 87, 1912.

[2]) Английские рефераты об этой работе были опубликованы Гейдекампом: Heydekamp G. S., Proc. ASTM, т. 31, 1931 и О. Фёпплем: J. Iron and steel inst. (London), т. 134, 1936. (*Прим. авт.*) См. также Фёппль О., Беккер Е., Гейдекамп Г., Длительное испытание материалов, ОНТИ, 1935. (*Прим. ред.*)

[3]) Ewing J. A., Humfrey J. C. W., Trans. roy. soc. (London) (A), т. 200, стр. 241, 1903.

[4]) Gough H. J., Hanson D., Proc. roy. soc. (London) (A), т. 104, 1923.

вости материала, и что они могут развиваться и уширяться, не приводя к образованию трещин.

Чтобы получить более детальное представление о механизме разрушения при усталостных испытаниях, Гаф[1]) использовал новый метод подхода к такого рода проблемам, применив прецизионную рентгенографию. Начав с монокристаллических образцов, он показал, что механизм деформации кристаллов пластичного металла, находящихся под действием циклических напряжений, тот же, что и наблюдаемый в статических условиях: как в том, так и в другом случае скольжение происходит по некоторым кристаллографическим плоскостям в определенных направлениях и зависит от компоненты касательного напряжения в направлении скольжения. Рентгеновский анализ показал[2]), что если циклическая нагрузка превышает безопасный предел, то «кристаллографические плоскости подвергаются искажению формы такого характера, что хотя средняя их кривизна и остается почти незаметной, ... зато появляются местные резкие искривления. Можно предполагать, что в этих покоробившихся плоскостях возникают большие местные деформации,—а возможно и настоящие разрывы решетки,—которые при достаточно большой амплитуде налагаемых напряжений или деформаций могут повести к образованию и постепенному росту трещины; при сравнительно более низких значениях циклического загружения состояние может оставаться стабильным».

При экспериментировании с кристаллическими материалами, подобными, например, мягкой стали, предварительные статические испытания показали, что в цельных зернах, если напряжения в них не превышают предела упругости, никаких необратимых изменений не происходит. В интервале между пределом упругости и пределом текучести лишь немногие цельные зерна подвергаются дроблению, образуя незначительную часть более мелких зерен и кристаллитов (нижний предел размеров этих кристаллических осколков лежит в интервале 10^{-4}—10^{-5} *см*). По достижении предела текучести все цельные зерна подвергаются дроблению, образуя более мелкие зерна и большое количество кристаллитов. Под действием циклических напряжений, как было установлено, «если амплитуда их превышает безопасный предел, постепенное истирание и измельчение в кристаллитах завершаются разрушением точно так же, как и в статических испытаниях». Таким образом, опыты показали, что разрушение металлов под статической и под усталостной нагрузкой сопровождается одинаковыми структурными изменениями.

---

[1]) Реферат этой работы был представлен в Королевское авиационное общество. См. J. roy. aeronant. soc., август 1926.

[2]) См. вышеупомянутую статью Гафа.

Большое внимание в исследовательской работе описываемого вида было уделено изучению факторов, влияющих на предел выносливости. Испытания на машинах, приспособленных к тому, чтобы загружать образец с различными частотами, установили, что при частотах до 5000 циклов в минуту никакого сколько-нибудь заметного влияния частоты не обнаруживается. Но, увеличивая частоты свыше 1 000 000 циклов в минуту, Дженкин[1]) отметил в армко-железе и в алюминии повышение предела выносливости более чем на 30%.

Усталостные испытания стальных образцов, подвергнутых предварительно растяжению за предел текучести, показали, что умеренное предварительное растяжение приводит к некоторому повышению предела выносливости. С дальнейшим ростом наклепа можно, однако, достигнуть такого состояния, когда в результате перегрузки становится возможным падение предела выносливости[2]). Если до начала обычного испытания на усталость образец подвергнуть предварительно действию некоторого числа циклов напряжения, превышающего предел выносливости, то, как показывает опыт, можно установить предельное число циклов перенапряжения (зависящее от величины этого перенапряжения), которое не оказывает влияния на предел выносливости. При бо́льшем же числе циклов перенапряжения наблюдается снижение предела выносливости. Откладывая значения наибольшего предварительного перенапряжения по одной оси координат и соответствующие им предельные числа циклов по другой, мы получим *кривую «повреждаемости»* для испытуемого материала[3]). Область диаграммы, лежащая ниже этой кривой, определяет те степени перенапряжения, которые не вызывают повреждений. Кривой повреждаемости можно пользоваться для оценки поведения частей машин, работающих при напряжениях ниже предела выносливости, но подвергающихся время от времени циклам перенапряжения. Для вычисления числа циклов перенапряжений различной интенсивности, выдерживаемых частями машин до разрушения, была установлена формула[4]). В применении к конструкциям самолетов в известных случаях производится статистический анализ напряжений, которым подвергается та или иная деталь в условиях эксплуатации[5]), и усталостные испытания ставятся так, чтобы повторная нагрузка лабораторной установки воспроизводила бы

[1]) Jenkin C. F., Proc. roy. soc. (London) (A), т. 109, стр. 119, 1925; т. 125, 1929.

[2]) Moore H. F., Kommers J. B., Univ. Illinois eng. exp. sta. bull., 124, 1921.

[3]) French H. J., ASST, т. 21, стр. 899, 1933. (*Прим. авт.*) См. также Шапошников Н. А., Механические испытания металлов, Машгиз, 1951, стр. 351 и далее. (*Прим. ред.*)

[4]) Langer B. F., J. applied mechanics, т. 4, стр. 160, 1937.

[5]) Kaul H. W., Jahrb. deut. Luftfahrt-Forsch, 1938, стр. 307—313.

эксплуатационные условия, в которых должна работать исследуемая деталь.

Обширная исследовательская работа была проведена по изучению режима металлов, подвергающихся действию повторной (усталостной) нагрузки и находящихся при этом в корродирующей среде. Хэйг[1]) заметил некоторое снижение предела выносливости в образцах латуни, испытанных под знакопеременной нагрузкой в условиях воздействия на них соленой воды, аммиака или соляной кислоты. Он указал при этом, что разрушительное действие аммиака на латунь проявляется лишь при условии одновременного воздействия обоих факторов: корродирующего вещества и знакопеременной нагрузки. Дальнейшие успехи в изучении *коррозионной усталости* были достигнуты Мак-Адамом[2]), исследовавшим комбинированный эффект коррозии и усталости на различных металлах и их сплавах. Эти испытания обнаружили, что в большинстве случаев сильная коррозия металла до испытания его на усталость оказывает значительно менее вредное воздействие, чем легкая коррозия, происходящая одновременно с испытанием. При этом выяснилось также, что если средой для образца является воздух, то предел выносливости стали возрастает приблизительно пропорционально временному сопротивлению при статической нагрузке; при проведении же этих испытаний в пресной воде результаты получаются совершенно иными. Было установлено, что предел коррозионной усталости стали с содержанием углерода свыше 0,25% не может быть повышен. Он может быть понижен термической обработкой. Опыты, проведенные в вакууме, показали[3]), что предел выносливости стали получается при этом таким же, как и при испытаниях на воздухе, между тем как в образцах из меди и латуни этот предел повышается соответственно не менее чем на 14 и 16%. Все эти результаты представляют большую практическую важность, поскольку многочисленные в эксплуатационных условиях аварии приходится часто относить на счет именно коррозионной усталости[4]).

Бóльшая часть наших сведений по вопросам усталости черпается из испытаний на изгиб или на осевое растяжение—сжатие; поэтому весьма важно установить правила, как пользоваться этими данными при наличии сложного напряженного состояния. В связи с этим Гафом и Поллардом[5]) были поставлены

[1]) Haigh, J. inst. metals, т. 18, 1917.

[2]) McAdam D. J., Proc. intern. congr. testing materials, Amsterdam, 1928, т. 1, стр. 305.

[3]) Gough H. J., Sopwich D. G., J. inst. metals, т. 49, стр. 93, 1932.

[4]) О механизме коррозионно-усталостного разрушения стали см. статью А. Н. Митинского и Е. С. Рейнберга в журн. «Судостроение», № 6, 1949. (*Прим. ред.*)

[5]) Gough H. J., Pollard H. V., Proc. inst. mech. engrs., т. 131.

испытания на знакопеременный изгиб с софазным ему знакопеременным кручением. Изменяя соотношения между наибольшим изгибающим и наибольшим крутящим моментами, они нашли, что для мягкой углеродистой и никель-хромистой стали (3,5% Ni) предельные значения нормального и касательного напряжений могут быть найдены из уравнения

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_r^2}+\frac{\tau^2}{\tau_r^2}=1, \tag{a}$$

где σ_r—предел выносливости при изгибе и τ_r—предел выносливости при кручении.

К тому же результату мы придем, исходя из теории наибольшей энергии формоизменения. Переписав уравнение (с) (стр. 442) в виде

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2=2\sigma_r^2 \tag{b}$$

и введя в него вместо σ_1 и σ_3 значения

$$\frac{1}{2}\left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right), \qquad \sigma_2=0, \qquad \tau_r=\frac{\sigma_r}{\sqrt{3}},$$

мы получим уравнение (а). Испытания Р. Петерсона и А. Валя [1]) также оправдывают применения уравнения (b) для пластичных материалов.

Горький опыт убедил нас в том, что усталостные трещины распространяются чаще всего от очагов концентрации напряжений; такие области создаются всегда в работающих частях машин у галтелей, выточек отверстий, шпоночных пазов и т. п. Вёлер первый провел опыты по изучению влияния концентрации напряжений на усталость (см. стр. 203). Баушингер, продолживший труд Вёлера, поставил ряд испытаний [2]) над образцами с выточками. При ширине выточек 0,1—0,5 *мм* предел выносливости мягкой стали снижается, как он установил, лишь весьма незначительно. Более систематическое изучение концентрации напряжений было предпринято А. Фёпплем [3]). Испытывая на растяжение—сжатие прямоугольные образцы с круглыми отверстиями, он нашел, что влияние отверстий сказывается в действительности значительно меньше, чем это предсказывает теоретическая формула. Это расхождение было объяснено тем обстоятельством, что в испытаниях А. Фёппля с целью уменьшения числа необходимых для разрушения циклов были применены высокие напряжения. При меньших напряжениях влияние отверстий сказалось бы более резко. Кроме указанных, Фёпплем были проведены еще и испытания на растяжение—сжатие и изгиб круглых стержней, ослабленных выточками; результаты

[1]) Peterson R. E., Wahl A. M., доклад, представленный Обществу содействия техническому образованию 23 июня 1941 г. в Анн-Арборе (Мичиган, США).

[2]) Mitt. mech. tech. lab. technischen Hochschule, München, № 25, 1892.

[3]) Там же, № 31, 1909.

этих опытов подтвердили его прежние выводы. Наконец, он поставил усталостные испытания на кручение цилиндрических образцов ($d=20$ *мм*), имевших галтели радиусом 1 *мм* и 4 *мм*. В целях возможного снижения числа циклов, приводящих к разрушению, до $n=10^5$, Фёппль и на этот раз применил высокие напряжения. Поэтому влияние галтелей также оказалось в испытаниях значительно меньшим, чем этого следовало ожидать на основании теоретического исследования Фёппля[1]).

В дальнейшем влиянием концентрации напряжений на усталость интересовался Р. Петерсон[2]). Из своих испытаний с образцами различных диаметров он пришел к следующим заключениям: 1) иногда испытания на усталость приводят к результатам, весьма близким к теоретическим значениям концентрации напряжений; 2) для легированных сталей и подвергшихся закалке углеродистых сталей эти результаты, однако, ближе к теоретическим значениям, чем получаемые для углеродистых сталей, не подвергшихся закалке; 3) с уменьшением размеров образца снижение усталостной прочности, вызываемое выкружкой или отверстием, получается несколько меньшим, и для весьма малых выкружек или отверстий это снижение оказывается относительно незначительным. На основании этих результатов в проектировании более или менее крупных частей машин рекомендовалось пользоваться теоретическими значениями коэффициента концентрации напряжений и применять предпочтительно мелкозернистые стали, например легированные и подвергшиеся термической обработке углеродистые стали.

Несколько различных теорий было выдвинуто для того, чтобы объяснить влияние размеров образца, или так называемого *масштабного фактора*, сказывающегося в усталостных испытаниях при наличии концентрации напряжений. Петерсон[3]) показал, что это влияние можно объяснить путем анализа экспериментальных результатов (см. стр. 431) на основе статистического метода, рекомендованного Вайбуллом (для статических испытаний хрупких материалов). Даст этот метод удовлетворительное объяснение масштабному фактору в усталостных испытаниях или не даст, зависит от того, будем ли мы располагать необходимым количеством экспериментальных данных, чтобы они охватили достаточно

---

[1]) А. Фёппль, вероятно, первый дал приближенную формулу для коэффициента концентрации напряжений у выкружки подвергающегося кручению вала. См. ZVDI, стр. 1032, 1906. Более точное решение этой задачи было дано Виллерсом: W i l l e r s, Z. Math. u. Physik, т. 55, стр. 225, 1907. Экспериментальное определение коэффициента концентрации напряжений с использованием стеклянных образцов было выполнено Леоном: L e o n A., Kerbgrösse und Kerbwirkung, Wien, 1902.

[2]) P e t e r s o n R. E., J. appl. mech., т. I, стр. 79, 157, 1933; т. 3, стр. 15, 1936.

[3]) P e t e r s o n R. E., Properties of metals in materials engineering (Amer. Soc. for metals, Cleveland, Ohio, USA), 1948.

широкий диапазон размеров образцов. Усталостные испытания крупных образцов, проведенные на машине Тимкена (Timken)[1], а также испытания судовых валов в Ставели (Stavely) (Англия)[2]) подтвердили значительное снижение предела выносливости для крупных образцов.

Проблема ослабления вредного влияния концентрации напряжений представляет первостепенную важность в машиностроительном проектировании. Известной разгрузки местных напряжений можно добиться в самом проекте: смягчением или исключением острых входящих углов, применением галтелей достаточно больших радиусов, выбором для них правильных профилей, устройством разгрузочных выточек и т. п. В некоторых, однако, случаях такие меры могут оказаться невыполнимыми или недопустимыми, и тогда следует прибегать к тем или иным средствам улучшения качества материала в опасном месте. Иногда такое улучшение может быть достигнуто надлежащей термической обработкой поверхности материала. Замечательные результаты дает холодная обкатка; идея применения поверхностной холодной обработки с целью повышения усталостной прочности материалов была выдвинута О. Фёпплем, проделавшим в связи с этим ряд испытаний на образцах малых размеров[3]). Бакуотер и Хоргер[4]) перенесли этот метод на натурные испытания валов, сконструировав для этой цели машину, приспособленную для испытаний валов до 356 *мм* в диаметре. Такое решение характеризует современную тенденцию проводить усталостные, а в известных случаях также и статические испытания до разрушения на элементах конструкций в их натуральную величину. Основу этой методике положил еще Вёлер, начавший свои знаменитые исследования по усталости с испытания осей железнодорожного подвижного состава (см. стр. 203) и лишь впоследствии продолживший их в лаборатории на малых образцах. В заключение, однако, для окончательной проверки внесенных конструктивных усовершенствований и оценки масштабного эффекта в этих случаях вновь приходится возвращаться к испытаниям большеразмерных образцов.

80. Экспериментальные методы исследования напряжений

Современные исследования в области сопротивления материалов потребовали оснащения экспериментальной техники и новыми приемами измерения, и новыми измерительными приборами.

[1]) Horger O. J., Neifert H. R., Proc. ASTM, т. 39, стр. 723, 1939.
[2]) Dorey S. F., Engineering, 1948.
[3]) См. его работы в Mitt. Wöhlers Inst., Braunschweig; см. также Maschinenbau, т. 8, стр. 752—755, 1929.
[4]) Buckwalter T. V., Horger O. J., Trans. ASM, т. 25, стр. 229—244, 1937. См. также Timoschenko, Proc. Inst. mech. engrs (London), т. 156, стр. 345, 1947.

В свою очередь эти обстоятельства позволили широко раздвинуть рамки наших знаний о распределении напряжений в инженерных конструкциях. Развитие экспериментальных методов анализа напряжений стимулировалось разнообразными мотивами. Прежде всего, большую роль здесь сыграло то обстоятельство, что теоретические формулы сопротивления материалов и теории упругости выводились в предположении, что материалы однородны, идеально упруги и следуют закону Гука. В действительности же технические материалы иногда весьма далеко отступают от совершенной однородности и идеальной упругости, в связи с чем проверка формул, выведенных для идеализированных материалов, приобретает большое практическое значение. Лишь в простейших случаях теория способна дать полное решение задачи о распределении напряжений. Бо́льшей же частью инженерам приходится довольствоваться приближенными решениями, точность которых нуждается в проверке непосредственными испытаниями. Основное требование, предъявляемое в настоящее время к инженерному проекту,—это наивысшая возможная экономия в весе материала, что может быть достигнуто повышением допускаемых напряжений и снижением коэффициентов запаса. Но то и другое можно признать безопасным лишь в том случае, если проектирующий инженер располагает точными данными о свойствах материалов и строгой методикой исследования напряжений. Обязательной предпосылкой такого исследования является детальное знание условий службы сооружения, в особенности всего, что касается характера воздействия на него внешних сил. Действующие на сооружение силы известны часто лишь приблизительно, так что для пополнения наших знаний в этой области приходится обращаться к исследованию напряжений в существующих сооружениях в условиях их эксплуатации. Из всех этих соображений явствует то значение, которое приобретают ныне успехи экспериментального исследования напряжений[1]).

Дальнейшее движение вперед на этой стадии развития механики упругих тел потребовало введения новых измерительных приборов и новых методов исследования напряжений. Для непосредственного измерения деформаций были разработаны различные типы тензометров; они предназначались не только для лабораторной работы, но и для определения в полевой измерительной

[1]) Об этом свидетельствует также и организация в Соединенных Штатах Америки Общества экспериментального анализа напряжений (Society for experimental stress analysis). Его деятельность и научные труды («Proceedings of the socsiety for experimental stress analysis» с 1943 г.) привлекли к нему внимание широкого круга инженеров. Недавно вышедший из печати коллективный труд этого Общества под редакцией М. Хетени «Руководство по экспериментальному исследованию напряжений» («Handbook of experimental stress analysis», стр. 1077, New York, 1950) призван сыграть большую роль в деле обогащения и систематизации нашего опыта в области экспериментальных исследований по сопротивлению материалов и теории упругости.

практике действительных напряжений в эксплуатируемых сооружениях. Особенно полезным в практических применениях показали себя проволочные электротензометры сопротивления. Приборы этого типа не только упростили измерительную процедуру в статических условиях, но и представили возможность записи циклов напряжений, которым подвергаются инженерные сооружения, находящиеся под действием переменных сил, а также части машин при их движении. Подобного рода записи оказывают большую помощь в исследовании проблем, относящихся к колебаниям, и щедро обогатили наши познания о возможных динамических воздействиях на сооружения. Другой тип тензометра—*электроиндукционный*—нашел широкое применение при измерении напряжений в рельсах под проходящими по ним колесами локомотивов, а также в измерении углов закручивания вращающихся валов[1]).

Оптический метод исследования напряжений в поляризованном свете, начало которому положил Максвелл (см. стр. 325), нашел широкое применение в XX веке. Менаже использовал его для проверки теории Фламана о распределении напряжений около точки приложения сосредоточенной силы[2]). Он воспользовался им также и в решении практической задачи исследования напряжений в арочном мосту[3]). Поляризационно-оптический метод позволяет установить разность между двумя главными напряжениями. Менаже показал, что сумму двух главных напряжений в исследуемой точке можно найти, если измерить в ней изменение толщины пластинки-модели. Эта идея была использована Кокером, сконструировавшим специальный поперечный тензометр для измерения этих изменений толщины. Он ввел также применение целлулоида, благодаря чему приготовление моделей для поляризационно-оптических испытаний было значительно упрощено. Труды Кокера[4]) содействовали широкой популяризации метода. Немало молодых научных работников-специалистов по фотоупругости приобрело свой первоначальный опыт в этой области как раз на практической работе в лаборатории Кокера при университетском колледже в Лондоне.

Дальнейшее свое развитие техника поляризационно-оптического исследования получила в результате введенного З. Тузи[5])

[1]) Полное описание тензометра этого типа приводится в статье Б. Ф. Лангера; см. Langer B. F., Handbook for experimental stress analysis, стр. 238—272.

[2]) Mesnager, Ann. ponts. et chaussées, т. 4, стр. 128—190, 1901.

[3]) Mesnager, Ann. ponts. et chaussées, т. 16, стр. 133—186, 1913.

[4]) Экспериментальные исследования Кокера и теоретические труды Файлона составили содержание их книги по фотоупругости Coker E. G., Filon L. N. G., A treatise on photo-elasticity, Cambridge, 1931. (*Прим. авт.*) Русск. пер.: Кокер и Файлон, Оптический метод исследования напряжений, М.—Л., 1936. (*Прим. перев.*)

[5]) Tuzi Z., Sci. papers inst. phys. chem. researches, Токуо, т. 7, стр. 79—96, 1927. См. также Proc. III intern. congr. appl. mechanics, Stockholm, 1931, т. 2, стр. 176—180.

«метода полос» (fringe method) в измерении напряжений, в сочетании с фотографированием позволившего получать результаты немедленно же после загружения, так что погрешность, обусловленная влиянием времени, снижается здесь до наименьшей возможной величины. Для своих моделей Тузи применил новый материал—фенолит, обладавший более высокой оптической активностью. Чисто оптический метод исследования напряженных состояний в упругих материалах был введен Фавром[1]). В тех или других вариантах техника фотоупругих измерений получила широкое распространение, и используемую в таких измерениях аппаратуру мы можем теперь найти не только в научно-исследовательских институтах и университетских лабораториях, но и во многих промышленных предприятиях. Техника изготовления моделей и выполнения измерений прошла через разнообразные усовершенствования, благодаря чему мы располагаем теперь достаточно точными экспериментальными решениями для ряда таких двумерных задач, для которых никаких теоретических решений не имеется[2]).

В последнее время было сделано несколько попыток разработать методику поляризационно-оптического исследования в применении к трехмерным напряженным состояниям, используя способ *«замораживания» напряжений* в пространственной объемной модели. Явление это впервые было замечено Максвеллом. Тем не менее, техника решения пространственных задач этим методом до сих пор продолжает оставаться в зачаточной стадии[3]).

Приближенное определение напряжений в опаснейших точках сложных сооружений (с трудом и не всегда поддающихся теоретическому исследованию) с наилучшими, во многих случаях, результатами осуществляется способом *хрупких покрытий*[4]). Если поверхность модели или образца до приложения к ним сил покрыть хрупким лаком, а затем постепенно загружать, то первая трещина в слое лака обнаружит место наибольшей деформации, направление же ее укажет направление наибольшего растягивающего напряжения: оно перпендикулярно к трещине. Величину напряжения можно также определить, если произвести предварительное испытание на растяжение с контрольным стержнем-эталоном, покрытым тем же самым сортом лака. Для уточнения результата

---

[1]) Favre H., Schweiz. Bauz., т. 20, 1927.

[2]) Frocht M. M., Photoelasticity, New York, 1941. (*Прим. авт.*) Русск. перев.: Фрохт М. М., Фотоупругость. Поляризационно-оптический метод исследования напряжений. Под ред. Н. И. Пригоровского, М.—Л., Гостехиздат, т. I, 1948; т. II, 1950. (*Прим. перев.*)

[3]) История этих попыток излагается в статье Хетении: Hetenyi M., J. applied mechanics, 1938, за декабрь. См. также статью по исследованию поляризационным методом напряженного состояния в трехмерных моделях в Handbook of experimental stress analysis, стр. 924—965, 1950.

[4]) Этот метод описывается в статье Хетении в Handbook of experimental stress analysis, стр. 636—662

уместно прибегнуть при этом и к чувствительным тензометрам, установив их в исследуемых слабых точках сооружения, по направлению трещин и перпендикулярно к ним. Таким именно способом Дитрих и Лер[1]) исследовали напряжения в кривошипах, шатунах и других частях машин.

Большая исследовательская работа была проведена по изучению остаточных напряжений, возникающих в частях машин под воздействием тех или иных технологических процессов. Например, при протягивании медного стержня через матрицу напряжения по его поперечному сечению распределяются неравномерно. Близ поверхности металл вытягивается сильнее, чем во внутреннем объеме, ближе к оси, как показано на рис. 189, *а*. Если растягивающую силу P снять, стержень будет сжиматься равномерно и напряжения, представленные эпюрой mn, уменьшатся на величину равномерно распределенного напряжения. Таким путем возникают остаточные напряжения, представленные заштрихованной площадью на рис. 189, *б*. Наружные волокна растянуты, внутренние—сжаты. Если теперь в стержне сделать продольный прорез, то остаточные напряжения будут этим частично сняты и обе половины надрезанного конца отогнутся, как показано на рис. 189, *в*, в противоположные стороны. Подобные же остаточные напряжения возникают в результате холодной прокатки, как это показано на рис. 189, *г*. Если по поверхностям стержня до выполнения в нем продольного прореза укрепить тензометры, то с помощью последних можно измерить наибольшие остаточные напряжения[2]) по происходящему согласно рис. 189, *в* изгибу.

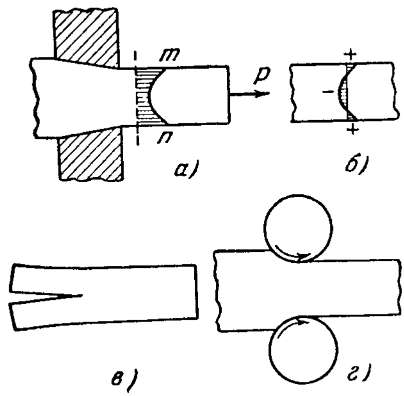


Рис. 189.

Остаточным напряжениям придают в практике большое значение. Они являются причиной нежелательного коробления материала в процессе его механической обработки; на их же счет следует отнести и образование трещин в отливках. Это явление замечается, например, в холоднотянутых трубах из некоторых видов медных сплавов, не отожженных надлежащим образом после холод-

[1]) Dietrich, Lehr, ZVDI, т. 76, стр. 973—982, 1932.

[2]) Некоторые экспериментальные исследования подобного рода были проведены автором настоящей книги в Научно-исследовательской лаборатории электротехнической корпорации Вестингауза (Westinghouse electric corporation) в 1924 г.

ной обработки. Для того чтобы измерить остаточные напряжения в каком-либо элементе конструкции, нам следует разрезать этот элемент на тонкие слои. Измеряя возникающие при этом деформации, мы получаем данные, из которых остаточные напряжения могут быть получены вычислением. Первые опыты такого рода были произведены Н. Калакуцким[1]), изучавшим остаточные напряжения в сплавах орудий. Чтобы исследовать остаточные напряжения в брусе прямоугольного сечения (рис. 190), мы должны сначала удалить с него механической обработкой тонкий поверхностный слой толщиной Δ. Если материал в этом слое испытывает остаточное растягивающее напряжение σ, то механическая обработка оказывает на деформацию бруса такое же влияние, как и внецентренное приложение двух растягивающих сил $\sigma\, b\, \Delta$ (рис. 190, *а*). Эти две силы вызовут продольную деформацию—удлинение

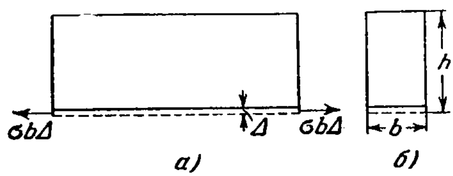


Рис. 190.

$$\varepsilon = \frac{\sigma b \Delta}{Ebh} \tag{a}$$

и изгиб с кривизной

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma b h \Delta}{2EI}\,. \tag{b}$$

Измеряя изменения кривизны всякий раз после того, как мы сострагиваем, один за другим, каждый новый слой материала, мы получаем все данные, чтобы из уравнений (a) и (b) вычислить интересующие нас начальные остаточные напряжения. Описанный метод можно усовершенствовать, применив для отделения тонких слоев материала вместо механической обработки химический процесс. Такой способ стравливания слоев был разработан Н. Н. Давиденковым[2]). Он нашел применение при исследовании остаточных напряжений также и в холоднотянутых трубах.

В сплошных цилиндрах остаточные напряжения можно находить способом сверления. Выбирая заполняющий такой цилиндр материал изнутри тонкими слоями и производя замеры деформаций, которыми сопровождается эта операция, в продольном (осевом) и тангенциальном (окружном) направлениях, мы получаем данные, необходимые для вычисления остаточных напряжений,

---

[1]) Калакуцкий Н., Изучение внутренних напряжений в чугуне и стали, СПб., 1887; англ. перев.: Kalakoutzky N., The study of internal stresses in cast Iron and Steel, London, 1888; то же, франц. перев., Париж, 1888.

[2]) Давиденков Н. Н., Якутович М. В., Опыт измерения остаточных напряжений в трубах, Журнал технической физики СССР, М.—Л., АН СССР, 1931, т. I, вып. 2, 1931.

распределенных симметрично относительно оси цилиндра[1]). Этот метод был использован также при изучении остаточных напряжений, являющихся следствием различных термических обработок, и пластической деформации, сопровождающей неравномерное охлаждение[2]). Принцип этот заложен и в основе некоторых применений термической обработки. С целью повышения усталостной прочности частей машин в точках высокой концентрации напряжений теперь часто прибегают к местной закалке и к азотированию. Таким путем у поверхностей этих частей машин создаются высокие остаточные напряжения сжатия, которые в сочетании с циклами напряжений, вызываемых эксплуатационными нагрузками, воздействуют благоприятно на напряженное состояние элемента.

Серьезное значение остаточные напряжения приобретают в сварных конструкциях. Они появляются здесь обычно в результате воздействия высоких местных температур, сопутствующих процессу сварки, и последующего охлаждения. Величина таких напряжений в сварных конструкциях из листовой стали устанавливается с помощью *розеточных тензометров*[3]), позволяющих измерять деформацию в плоскости листа в трех направлениях. По данным этих измерений можно вычислить величины и направления главных деформаций и соответствующие главные напряжения. Для определения имеющихся в листовом материале остаточных напряжений подобные измерения необходимо произвести дважды: сначала до вырезывания небольшого участка площади из листа и вторично после такого вырезывания. Разности между двумя отсчетами определят деформации, вызванные вырезыванием участка, а по ним устанавливаются и величины остаточных напряжений.

Методы экспериментального исследования напряжений продолжают развиваться в различных направлениях, и мы вправе ожидать дальнейших успехов в этой области, а следовательно, и дальнейшего углубления наших знаний в сопротивлении материалов. На протяжении длительного времени в нашей науке преобладали аналитические методы. Они засвидетельствовали свою плодотворность, но вместе с тем обнаружили во многих случаях и недостаточность для полного решения ряда технических задач. Широкое внедрение эксперимента внесло свежую жизнь в исследовательскую работу в области сопротивления материалов.

---

[1]) Этот метод определения был предложен Заксом: Sachs G., Z. Metallkunde, т. 19, стр. 352—357, 1927; Trans. ASME, стр. 821, 1939.

[2]) Buchholtz H., Bühler H., Stahl u. Eisen, т. 52, стр. 490—492, 1932. См. также статьи Фукса: Fuchs S., Milt. Forsch., т. 3, стр. 199—234, 1933; Bühler H., Buchholtz H., Schultz F. H., Archiv Eisenhüttenw, т. 5, стр. 413—418, 1942.

[3]) Описания различных типов розеточных тензометров, их теорию и применения читатель сможет найти в статье Мейера (J. H. Meier) в Handbook of experimental stress analysis, стр. 390—437.

ГЛАВА XIII

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ В ПЕРВОЙ ПОЛОВИНЕ XX ВЕКА

81. Феликс Клейн

Со времен Гаусса Геттинген не переставал сохранять за собой значение важного центра математической науки. Гаусс не только был великим математиком, но и постоянно стремился обогатить математикой методику решения проблем, возникавших в астрономии, физике, геодезии. Наследием его научной деятельности явилась установившаяся в Геттингене традиция тесного контакта между математикой и ее приложениями. Преемники Гаусса — выдающиеся математики Дирихле, Риман, Клебш—поддерживали эту традицию и приняли за правило совмещать чтение лекций по чистой математике с лекциями по различным отраслям теоретической физики. В конце XIX и начале XX века эта идея сближения названных дисциплин получила новый импульс под влиянием деятельности Феликса Клейна.

Феликс Клейн.

Феликс Клейн (1849—1925) родился в Дюссельдорфе[1]). По окончании гимназии он поступил в Боннский университет, где вскоре стал ассистентом профессора Плюккера (Plücker) по кафедре

[1]) См. автобиографические заметки Клейна в приложениях к различным разделам его «Собрания математических трудов»: Klein F., Gesammelte mathematische Abhandlungen, Berlin, 1921. См. также Universitätsbund Göttingen E. V. Jahrgang 26, Mitteilungen, 1949, вып. I; Mises R., ZAMM, т. 4, стр. 86, 1924. Материалы по истории математики в Геттингенском университете имеются в книге: Klein F. und Schimmack R., Der mathematische Unterricht..., ч. 1, стр. 158, 1907.

физики. Не достигнув еще и 20-летнего возраста, он в 1868 г. получил докторскую степень, после чего направился в Геттинген, где преподавал Клебш. В 1871 г. Клейн занял должность преподавателя в этом университете, но в следующем же году покинул Геттинген, будучи избран на кафедру университета в Эрлангене (прежде чем ему исполнилось 23 года). Там он выступил со своей знаменитой программной лекцией—«Эрлангенской программой»[1]), в которой подчеркнул актуальность творческого сочетания математики с теми науками, в которых она находит применение. В 1875 г.

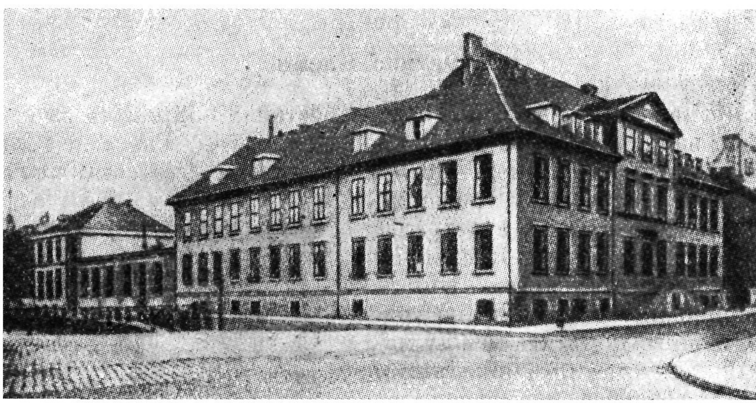


Рис. 191. Институт прикладной математики и механики Геттингенского университета.

Клейн стал профессором математики в Мюнхенском политехническом институте. Здесь он читал не только общий курс дифференциального и интегрального исчисления, но также и специальные лекции по математике, рассчитанные на более высокий уровень знаний. Он полагал, что инженерное образование должно выиграть, если часть студентов получит более глубокую математическую подготовку и таким путем вооружит себя для исследовательской работы в области прикладной науки, а также для преподавательской работы. Из Мюнхена Клейн перешел в 1880 г. в Лейпцигский университет, а в 1886 г. вернулся в Геттинген уже в качестве профессора университета. Везде и постоянно он отводил чистой математике ответственную роль в развитии технической физики и прикладной механики. До Клейна эти науки не были представлены в герман-

---

[1]) Русский перевод ее помещен в сборнике «Об основаниях геометрии», Гостехиздат, 1956.

ских университетах, но по его настоянию в Геттингенском университете были учреждены три новые кафедры: прикладной математики, технической физики (электротехники) и прикладной механики.

В 1893 г. Клейн совершил поездку в Соединенные Штаты и посетил Международную выставку в Чикаго. Он принял участие в Международном математическом конгрессе этого года и прочел цикл лекций в Ивэнстоне для американских математиков. С этого времени он установил постоянную связь с американскими учеными; много раз он имел в своем классе студентов из Соединенных Штатов. За время своего пребывания в Соединенных Штатах он изучил организационные формы американских университетов, в состав которых входили инженерные факультеты; здесь математическое образование давалось не только тем, которые избирали математику своей специальностью, но также и будущим инженерам. На него произвело большое впечатление то, что многие университеты и научные институты в США поддерживаются частной инициативой и сохраняют независимость от правительства.

По возвращении в Геттинген Клейн решил испытать американские методы и установил контакт с представителями германской промышленности. Он разъяснил им, к каким благотворным для промышленности последствиям привело бы создание в Геттингене институтов прикладной математики, прикладной механики и прикладной физики, где могли бы получать подготовку молодые специалисты для научно-исследовательской работы в этих областях. Он указал, в каком направлении деятельность этих институтов повлияла бы на методику преподавания математики и как они могли бы помочь в подготовке преподавателей математики, вооруженных некоторыми знаниями в технических науках. В 1898 г. было учреждено «Геттингенское общество содействия развитию прикладной физики и математики» (Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik), при финансовой поддержке которого при Геттингенском университете вскоре было создано несколько научно-исследовательских институтов. Клейн сумел найти эту финансовую поддержку для новых институтов, а также привлечь к работе по их руководству выдающихся представителей прикладной науки. К 1904 г.—моменту завершения организационной стадии—К. Рунге[1]) руководил научной работой по прикладной математике, Л. Прандтль был директором института прикладной механики, а Г. Симон (H. T. Simon) возглавлял отдел электротехники.

Для поддержания связи между новыми институтами и школой чистой математики был организован семинар под руководством Клейна и при сотрудничестве профессоров по прикладным наукам.

[1]) С биографией Карла Рунге можно познакомиться по книге R u n g e Iris «Karl Runge», где дается также живая картина академической жизни в Геттингене в начале XX века.

На последовательных семестрах этого семинара в качестве основных тем значились: сопротивление материалов, теория сооружений, теория упругости, электротехника и т. д. Для каждого двухчасового заседания один из студентов подготовлял доклад по заранее намеченному вопросу под руководством соответствующего профессора; после доклада происходила дискуссия, в которой принимали участие профессора и студенты. Выступления Клейна были обычно особенно интересны, поскольку, обладая широким научным кругозором и исключительными педагогическими способностями, он умел находить в каждом частном вопросе то или иное основание для постановки проблем более общего значения и в соответствующих замечаниях вскрывал связи между изложенной темой и вопросами, относившимися к другим смежным областям знания. Семинары такого рода, где на почве общего сотрудничества встречались представители чистой математики и прикладных наук, были новшеством, и потому они привлекли к себе многих молодых инженеров не только со всей Германии, но также и из других стран, так что заседания этих семинаров приняли вскоре международный характер. Это новое движение имело большой успех, и множество студентов стремилось избрать Геттинген местом выполнения своих квалификационных работ. Здесь было написано много докторских диссертаций по прикладным наукам, а университет подготовил немало профессоров по прикладной механике для многих инженерных учебных заведений. За протекшие с тех пор годы бывшие ученики Ф. Клейна—К. Рунге и Л. Прандтль—щедро обогатили своими трудами инженерную механику в Германии.

Деятельность Клейна не исчерпывалась его организационной работой в Геттингене. Он отдавал свои силы и свои широкие знания целому ряду научных начинаний международного значения. Он руководил редакционной работой и изданием «Математической энциклопедии» («Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften», 1901—1914). Соприкасаясь с математиками других стран, он имел возможность заручиться сотрудничеством выдающихся ученых и превратил издание энциклопедии в культурное дело международного размаха. Сам Клейн редактировал отдел механики. В четырех подготовленных под его руководством томах дается изложение на вполне современном уровне теоретической и различных разделов прикладной механики в сопровождении чрезвычайно полной библиографии. Приводятся в них также и исторические данные. Выход в свет этих томов энциклопедии был крупным событием в истории механики нашего времени. Энциклопедия стала незаменимым пособием в работе отдельных ученых и, установив более тесный контакт между чистой и прикладной наукой, тем самым содействовала поднятию инженерной механики на более высокий уровень.

Другой путь, на котором Клейн укрепил связь между чистой и прикладной наукой, заключался в проведенном им пересмотре учебных программ математического образования в средней школе и в университетах. Он настаивал на необходимости учреждения институтов по прикладным наукам при германских университетах. Он хотел также добиться того, чтобы инженерные учебные заведения приняли более деятельное участие в подготовке преподавателей математики, подняв уровень их знаний в основных науках. Идеи Клейна оказали сильное влияние на математическое образование в Германии, а впоследствии, через международную комиссию по международным математическим съездам, они воздействовали также и на методику математического преподавания в других странах.

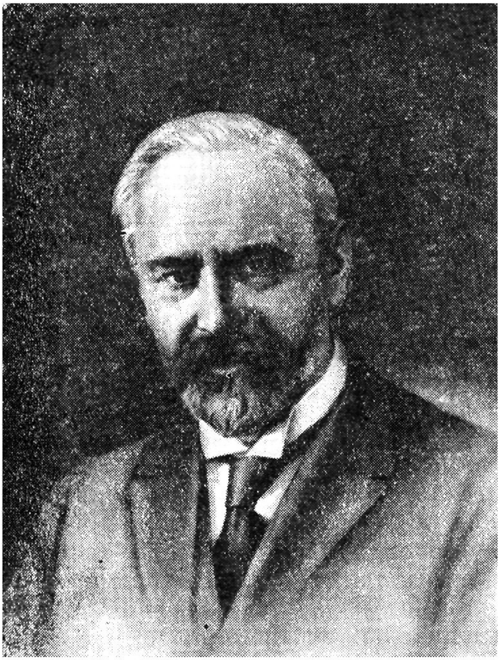
Наука о сопротивлении материалов со своей стороны также обнаружила в XX столетии тенденцию к более широкому использованию математики в своей исследовательской работе: важнейшие достижения этой науки за названный период были осуществлены людьми, в которых инженерное образование сочеталось с серьезной подготовкой в основных науках. Инженерная наука их трудами развивалась именно в том направлении, которое было намечено предвидением Клейна.

82. Людвиг Прандтль

Людвиг Прандтль родился в 1875 г. во Фрейзинге, близ Мюнхена, в семье профессора сельскохозяйственного института, и получил инженерное образование в Мюнхенском политехническом институте. По окончании курса он был оставлен при институте в качестве ассистента проф. А. Фёппля, который в то время только что начал вести преподавание и был занят переработкой учебных программ по инженерной механике и по лабораторным испытаниям материалов. Прандтль помогал ему в этой работе и уже в самом начале своей научной деятельности выполнил серьезную исследовательскую работу.

А. Фёппль интересовался в то время теорией изгиба кривых брусьев и провел большое число испытаний по определению прочности сцепок железнодорожных вагонов. Он полагал, что при вычислении наибольших напряжений в изгибаемом крюке вполне приемлемую точность дает формула простой прямолинейной балки. Профессор К. Бах в Штутгартском политехническом институте был иного мнения и исходил из теории изгиба кривого бруса, построенной Винклером в том предположении, что поперечные сечения кривого бруса остаются при изгибе плоскими. Прандтль получил строгое решение для чистого изгиба кривого бруса узкого прямоугольного поперечного сечения. Оно подтвердило, что поперечные сечения в условиях чистого изгиба остаются действительно плоскими и что распределение напряжений получается при этом весьма близким к указываемому теорией Винклера[1]).

Занимаясь исследованием изгиба круглых пластинок, Прандтль заметил, что их прогибы пропорциональны нагрузкам лишь при малых прогибах, при сравнительно же больших прогибах пластинка обнаруживает бо́льшую жесткость, чем это предсказывается теорией. Это было, вероятно, первое экспериментальное обнаружение предела применимости обычной теории пластинок. В 1899 г. Прандтль представил докторскую диссертацию[2]) об устойчивости (Kipperscheinung) балок узкого прямоугольного поперечного сечения при их изгибе в плоскости наибольшей жесткости. Он получил решения для ряда частных случаев[3]), представляющих практический интерес, составил таблицы бесселевых функций, используемых в этой задаче, и провел серию испытаний, результаты которых оказались в хорошем согласии с теорией. При выполнении этих испытаний Прандтль разработал технику определения критической нагрузки, которая впоследствии была принята многими научными работниками в области экспериментальной теории упругости. Диссертация Прандтля явилась



Людвиг Прандтль.

[1]) Строгое решение задачи об изгибе бруса кругового очертания было получено ранее Х. С. Головиным (см. стр. 419), но его статья была опубликована на русском языке и осталась неизвестной в Западной Европе. Прандтль никогда не публиковал своей работы; сообщение о ней дается в статье А. Тимпе: Timpe A., Z. Math. u. Physik, т. 52, стр. 348, 1905.

[2]) Prandtl L., Kipperscheinungen, Диссертация, München, 1899.

[3]) Простейший случай потери устойчивости в условиях чистого изгиба был решен независимо Мичеллом: Michell A. G. M., Phil. Mag., 5, т. 48, стр. 298, 1899.

началом многочисленных исследований поперечной устойчивости балок[1]) и кривых брусьев[2]).

По окончании своей докторской диссертации Прандтль работал некоторое время в промышленности. Скоро, однако, он вернулся к академической работе и уже в 1900 г. принял предложение занять кафедру инженерной механики в Ганноверском политехническом институте. К этому времени относится опубликование им важной работы о *мембранной аналогии* в задаче кручения[3]). Здесь он показывает, что все данные о распределении напряжений при кручении стержня могут быть получены экспериментально, путем использования аналогии с формой провисания мыльной пленки. Дальнейшая работа по этому вопросу была проведена впоследствии его учеником Антесом[4]). Практическая важность принципа аналогий была понята Гриффитсом и Тэйлором, применившими[5]) метод мыльной пленки для определения жесткости при кручении брусьев разнообразных сложных профилей.

Успехи Прандтля в инженерной механике стали известны Клейну, и по рекомендации Фёппля последний решил привлечь Прандтля в Геттинген, доверив ему ответственную задачу: развернуть преподавание инженерной механики в университете. Это необычное решение[6])—привлечь молодого инженера к работе в высшей математической школе и возложить на него такую серьезную миссию—еще раз свидетельствует о прозорливости Клейна. Развернувшаяся с этого момента деятельность Прандтля в Геттингене еще выше подняла высокую репутацию этого научного центра.

На Международном математическом конгрессе 1904 г. в Гейдельберге Прандтль ознакомил участников этого ученого собрания со своей новой работой «О движении жидкости с весьма малым трением» («Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner

---

[1]) Поперечная устойчивость двутавровых балок была исследована автором настоящей книги. См. Тимошенко С. П., Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровых балок, Изв. Петербургского политехнического ин-та, т. 4, 1905; т. 5, 1906. Дальнейшая разработка этой задачи была проведена Хваллой: Chwalla E., Bauing., т. 17, 1936. См. также, Sitzber. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Klasse, Abt. IIa, т. 153, 1944; Pettersson O., Bulletin № 10, Royal inst. of technology, Stockholm, 1952.

[2]) См. Тимошенко С. П., Об устойчивости упругих систем, Изв. Киевского политехнического ин-та, Киев, 1910.

[3]) Prandtl L., Physik. Z., т. 4, 1903.

[4]) Anthes H., Dinglers Polytechn. J., 1906, стр. 342.

[5]) Griffith A. A., Taylor G. I., Tech. rept. advisory comm. aeronautics, London, т. 3, стр. 910, 938, 1917—1918.

[6]) Некоторые профессора встретили неблагосклонно включение прикладных наук в университетские программы, но опыт Прандтля доказал, что это начинание не наносит ни малейшего ущерба сохранению полной гармонии с высокими идеалами университетского образования. См. Voigt W., «Festrede», Göttingen, 1912.

Reibung»), в которой впервые рассматривалась проблема пограничного слоя. Клейн, прослушавший доклад Прандтля, тотчас же понял огромное значение этой работы для всего последующего развития гидродинамики и аэродинамики и заявил своему младшему коллеге, что его труд—лучший из представленных на конгрессе.

К своей работе в Геттингене Прандтль приступил с осени 1904 г. В том же году к нему присоединился его близкий друг проф. Рунге, чтобы вести здесь курс прикладной математики. Их работа, протекавшая в полном согласии, была направлена к общей цели—поставить работу Института прикладной математики и механики[1]) на должную высоту, в результате чего он превратился скоро в мощный центр, куда стали стекаться молодые силы, интересовавшиеся приложениями математики в технике[2]). В этот период времени аспиранты Прандтля работали главным образом в области сопротивления материалов: Г. Хорт[3]) написал диссертацию о температурном режиме стали, подвергающейся испытаниям на разрыв; С. Берлинер[4]) провел исследование гистерезисных петель в чугуне при растяжении; автор настоящей книги приступил тогда к упомянутой выше работе по устойчивости двутавровых балок. В связи с аварией, случившейся на строительстве Квебекского моста (в Канаде) Прандтль заинтересовался устойчивостью сжатых элементов составных профилей и показал[5]), что раскосам и планкам, соединявшим тяжелые пояса сжатых составных стержней моста, потерпевшего аварию, были даны недостаточные размеры поперечных сечений.

Около того же времени в Геттинген прибыл Теодор фон Карман, чтобы приступить там под руководством Прандтля к своей докторской диссертации об устойчивости колонн в пластической стадии[6]). Получив степень доктора, Карман еще в течение нескольких лет продолжал оставаться в Геттингене в качестве ассистента Прандтля и провел исследовательскую работу по изгибу кривых труб[7]) (вопрос, которым интересовался Прандтль). Он поставил также опыты по определению прочности на сжатие камней при одновременном воздействии осевого и поперечного давлений[8]). Сам

---

[1]) На стене институтского здания можно видеть мемориальную плиту, прибитую в память пребывания здесь в XVIII веке Томаса Юнга, работавшего в этом здании в бытность студентом физики.

[2]) См. статью А. Зоммерфельда к 60-летию Л. Прандтля: Sommerfeld A., ZAMM, т. 15, стр. 1, 1935.

[3]) Hort H., Über die Wärmevorgänge beim Zerreiss versuch, Diss., 1906.

[4]) Berliner S., Ann. Physik, т. 20, стр. 527, 1906.

[5]) Prandtl L., VDI, т. 55, 1907.

[6]) Karman Th., Forschungsarb., № 81, Berlin, 1910.

[7]) VDI, т. 55, стр. 1889, 1911.

[8]) Karman, VDI, т. 55, стр. 1749, 1911; Forschungsarb., № 118, Berlin, 1912.

Прандтль построил теорию двух типов разрушения твердых тел и предложил модель, объясняющую гистерезисные петли (см. стр. 435).

Он интересовался также пластической деформацией балок, и под его руководством Гербертом была написана диссертация на эту тему[1]). Ряд задач о пластической деформации был уже решен Сен-Венаном (см. стр. 292). Прандтль сделал дальнейшее продвижение в этой области и решил[2]) более сложную двумерную задачу о полубесконечном теле, находящемся под равномерным давлением p, распределенным по полосе шириной a (рис. 192). Он показал, что при некотором критическом значении $p_{\text{кр}}$ давления треугольная призма ABC смещается вниз, между тем как треугольные призмы BDE и AFG под воздействием давлений, передаваемых через секторы BCD и ACF, будут смещаться вверх. Скольжение будет происходить по поверхностям наибольших касательных напряжений, показанным на рисунке. Допуская, что при пластическом деформировании наибольшее касательное напряжение составляет половину предела текучести при растяжении, он нашел критическое давление

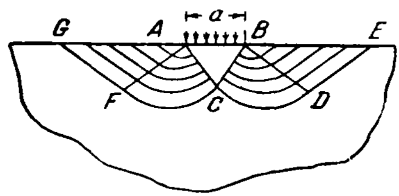


Рис. 192.

$$p_{\text{кр}} = \sigma_{\text{т}}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

Со времени появления этой статьи теория пластичности стала быстро развиваться. Ныне эта наука составляет важную отрасль в механике материалов и излагается в ряде специальных руководств, из числа которых мы укажем здесь на работы А. Надаи[3]), В. В. Соколовского[4]) и Р. Хилла[5]).

Статья Прандтля имеет историческое значение и в другом отношении: она была напечатана в первом выпуске «Журнала приклад-

---

[1]) Herbert H., Dissertation, 1909, Göttingen.

[2]) Prandtl L., Z. angew. Math. u. Mech., т. I, стр. 15, 1921. Перевод этой статьи на русский язык см. в сборнике статей «Теория пластичности», ИЛ, Москва, 1948, стр. 70.

[3]) Nadai A., Theory of flow and fracture of solids, 2-е изд., 1950. (*Прим. авт.*) Русск. перев.: Надаи А., Теория пластичности и разрушения твердых тел, М.—Л., ИЛ, 1954. (*Прим. перев.*)

[4]) Соколовский В. В., Теория пластичности, М., 1946. (*Прим. авт.*), 2-е изд., переработ. и доп., М.—Л., Гостехиздат, 1950. (*Прим. перев.*)

[5]) Hill R., The mathematical theory of plasticity, Oxford, 1950. (*Прим. авт.*) Русск. перев.: Хилл Р., Математическая теория пластичности, Гостехиздат, 1956. Обширная библиография советских и иностранных работ—см. Качанов Л. М., Основы теории пластичности, Гостехиздат, 1956. (*Прим. ред.*)

ной математики и механики» («Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik»). Это издание, выходившее под редакцией Р. Мизеса (R. von Mises), приобрело огромное влияние не только в Германии, но и повсюду. Для некоторых стран оно послужило примером и побудило их к созданию аналогичных журналов, посвященных прикладной механике. Возможности движения вперед для научных работников в области механики материалов были таким путем сильно облегчены.

Работы Прандтля по сопротивлению материалов составляют лишь малую долю его общего вклада в инженерную механику. Самые крупные его достижения относятся к аэродинамике и потому не входят в поле зрения нашего изложения; отметим здесь все же, что с 1906 г., когда организовалось Авиационное научно-исследовательское общество (Motorluftschiff—Studiengesellschaft), Прандтль стал отдавать все больше и больше своего времени аэродинамике. В 1908 г. в Геттингене была сооружена по проекту Прандтля небольшая аэродинамическая труба. Использование последней в решении ряда научно-исследовательских вопросов, а также техника измерений и методика обработки результатов оказались столь успешными, что постановка экспериментальной работы по аэродинамике весьма скоро и по всему миру усвоила методы Прандтля. В годы первой мировой войны в Геттингене была построена вторая, более крупная аэродинамическая труба, и Прандтль опубликовал свои чрезвычайно ценные труды по теории несущего крыла (Tragflügeltheorie), в которых излагалось, как следует проектировать самолеты на основании экспериментов в аэродинамической трубе с маломасштабными моделями. Его идеи и на этот раз получили всеобщее признание, и в настоящее время ими пользуются в своей повседневной работе авиаконструкторы всего мира.

Характерной особенностью трудов Прандтля является их оригинальность. В них всегда открывается какая-либо новая область исследования, а у автора их всегда находится достаточно учеников, готовых следовать направлениям, намеченным его основоположными работами. Многие из этих учеников сами ныне являются уже учителями, работая как в Германии, так и в других странах[1]). Чтобы с должной полнотой оценить вклад Прандтля

[1]) Некоторые из бывших учеников и ассистентов Прандтля работают в настоящее время в Соединенных Штатах. Укажем из их числа на Теодора Кармана, проделавшего здесь большую научную работу по аэродинамике, А. Надаи, проведшего обширные эксперименты по изучению пластичности материалов в научно-исследовательских лабораториях фирмы Вестингауз, В. Прагера, руководителя новых исследовательских работ по пластичности в Броунском университете. Профессор Флюгге со своей супругой работают на факультете инженерной механики в Станфордском университете, проф. Ден-Хартог и автор настоящей книги также вели в течение некоторого времени научную работу в Геттингене и считают себя учениками Прандтля.

в инженерную механику, мы обязаны принять во внимание не только его собственные печатные труды, но также и мощную школу этой науки, созданную им в Геттингене.

83. Приближенные методы решения задач теории упругости

Для решения новых проблем, возникших в XX веке в области проектирования машин и в теории сооружений, к анализу напряжений были предъявлены гораздо более высокие требования в смысле точности, чем это было раньше. Элементарные формулы сопротивления материалов часто оказывались недостаточно точными, и потому в решении практических задач все чаще и шире начинает применяться теория упругости. Эта наука, которая не так давно преподавалась лишь в немногих учебных заведениях и которой обычно придавался теоретический уклон, ныне приобрела значение важной прикладной дисциплины и вошла в программы многочисленных инженерных учебных заведений. Изменился и общий характер учебных руководств по этому предмету в связи с тем, что их авторы стали рассматривать проблемы не только с точки зрения теоретического интереса, но и в смысле практических приложений[1]).

Строгие математические решения для задач теории упругости имеются, однако, лишь для простейших случаев; в связи с этим общей тенденцией в этой науке в настоящее время является использование различных приближенных методов. Одни из таких приближенных методов основываются на физических аналогиях[2]). Мы уже упоминали о мембранной аналогии, установленной Прандтлем и оказавшейся весьма эффективной в решении задач кручения. Эта аналогия была распространена Венингом Мейнесом[3]) на теорию изгиба. Автор настоящей книги, воспользовавшись уравне-

---

[1]) Первой книгой по теории упругости, написанной со специальной установкой на читателей-инженеров, было руководство А. Фёппля «Важнейшие понятия высшей теории упругости» (Техническая механика, т. 5): Föppl A., Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie—Technische Mechanik, B. 5, 1907. Впоследствии оно было расширено ее автором в сотрудничестве с Людвигом Фёпплем в трехтомное сочинение: Föppl A., Föppl L., «Drang und Zwang», 1920—1947. (*Прим. авт.*) Имеется русск. перев.: Фёппль А., Фёппль, Л., Сила и деформация, М.—Л., 1933, 1936; см. сноску на стр. 484. (*Прим. перев.*)

[2]) Применение аналогий в исследовании напряжений описывается в коллективном труде «Handbook of experimental stress analysis». См. также: Biezeno C. B., Grammel R., Technische Dynamik, Berlin, 1939. (*Прим. авт.*) Имеется русск. перев. под ред. А. И. Лурье: Бицено К. В., Граммель Р., Техническая динамика, М.—Л., Гостехиздат, т. I, 1950; т. 2, 1952. Различные экспериментальные методы решения задач теории упругости рассмотрены в книге: Папкович П. Ф., Теория упругости, Оборонгиз, 1939, гл. XIII. (*Прим. ред.*)

[3]) Meinesz Vening, Ingenieur (Utrecht), стр. 108, 1911.

нием неравномерно нагруженной мембраны, упростил исследование изгиба стержней[1]). Применение мембранной аналогии в двумерной фотоупругости было предложено Ден-Хартогом для определения суммы двух главных напряжений[2]). Этому методу успешно последовал Вайбель в изучении концентрации напряжений у выкружек[3]).

В решении задач теории упругости используются также и электрические аналогии. Одна из таких аналогий была предложена Л. Якобсеном в применении к кручению вала переменного диаметра. Он показал[4]), что, изменяя надлежащим образом толщину пластинки, имеющей тот же самый контур, что и осевое сечение вала, можно получить дифференциальное уравнение потенциальной функции, которое будет совпадать с уравнением функции напряжений для исследуемого вала. На основе этой аналогии стало возможным решение важного вопроса о концентрации напряжений у галтели, соединяющей две части вала различных диаметров. Дальнейшим сдвигом в этой области мы обязаны А. Туму и В. Бауцу[5]), применившим вместо пластинки переменной толщины электролитическую ванну переменной глубины.

Другая интересная аналогия была указана Н. И. Мусхелишвили[6]). Она связывает напряжения, обусловленные наличием двумерного установившегося (стационарного) температурного поля, с напряжениями, являющимися результатом смещений (dislocations). Основываясь на этой аналогии, Вайбель исследовал поляризационно-оптическим способом температурные напряжения в круглых и прямоугольных трубах в условиях стационарного температурного поля[7]).

Существует аналогия, находящая свое выражение в том факте, что бигармоническое дифференциальное уравнение для функции напряжений Эйри совпадает с уравнением поперечного прогиба пластинки, изогнутой силами и парами, распределенными по контуру. Этой аналогией пользуются в решении двумерных задач теории упругости[8]).

---

[1]) Тимошенко С. П., Применение функции напряжений к исследованию изгиба и кручения призматических стержней, Сборник Ин-та инж. п. с., СПб., 1913; см. также A membrane analogy to flexure, Proc. London math. soc. (2), т. 20, стр. 398, 1922.

[2]) Den Hartog J., Z. angew. Math. Mech., т. 11, стр. 156, 1931.

[3]) Weibel E. E., Trans. ASME, т. 56, стр. 601, 1934.

[4]) Jacobsen L. S., Trans. ASME, т. 47, стр. 619, 1925.

[5]) Thum A., Bautz W., VDI, т. 78, стр. 17, 1934.

[6]) Мусхелишвили Н. И., Изв. С.-Петербургского электротехнического ин-та, СПб., т. 13, стр. 23—37, 1916; см. также Rend accad. Nazl. Lincei, 5-я серия, т. 31, стр. 548—551, 1922; Biot M. A., Phil. Mag, т. 19, стр. 540, 1935.

[7]) Труды V Международного конгресса по прикладной механике (Proc. V intern. congr. appl. mechanics, Cambridge Mass. USA), стр. 213, 1938.

[8]) Wieghardt K., Mitt. Forschungsarb., т. 49, стр. 15—30, 1908. См. также Cranz H., Ing.-Arch., т. 10, стр. 159—166, 1939.

Весьма полезный метод приближенных решений был разработан Рунге[1]), предложившим заменять дифференциальные уравнения соответствующими уравнениями в конечных разностях. Решая, например, задачу кручения, требующую интегрирования уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=C,$$

где φ—функция напряжений, он заменяет это соотношение уравнением в конечных разностях

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4-4\varphi_0=C. \qquad \text{(a)}$$

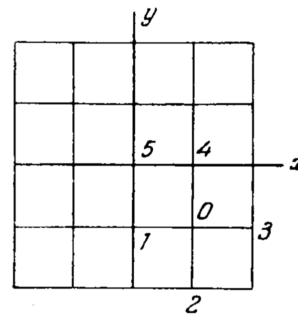


Рис. 193.

Оно должно удовлетворяться в каждой точке (например в точке O на рис. 193) квадратной сетки, покрывающей поперечное сечение скручиваемого стержня. Написав уравнение (а) для каждой внутренней узловой точки этой сетки (рис. 193) и заметив, что на контуре φ обращаются в нуль, мы получаем систему линейных уравнений, достаточную для того, чтобы вычислить все значения φ. Из полученных же значений φ определяются жесткость кручения и наибольшие касательные напряжения. В показанном на рис. 193 случае симметрии достаточно написать лишь три уравнения, а именно лишь для точек 0, 1 и 5. Непосредственное решение их не представит никакой трудности. Для достижения более высокой точности площадь сечения необходимо разбить на более мелкую сетку, что приводит, естественно, и к увеличению числа уравнений.

Если число уравнений получается большим, в решении их можно применить итерационный процесс[2]). Для этого мы задаемся прежде всего несколькими произвольными начальными значениями φ. Вводя их в уравнение (а) вместо φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, находим для всех узлов сетки новые значения φ_0, а имея их, должны будем вновь повторить все вычисление. После нескольких повторений этого процесса мы придем, наконец, к значениям φ, обладающим достаточной точностью.

Уравнения в конечных разностях были с успехом использованы Л. Ричардсоном[3]) в двумерных задачах теории упругости, где функция напряжений должна удовлетворять дифференциальному

[1]) Runge C., Z. Math. u. Physik, т. 50, стр. 225, 1908.

[2]) См. Liebman H., Sitz.-ber. math.-naturw. Abt. Bayer. Acad. Wiss., München, 1918, стр. 385. (*Прим. авт.*) Изложение метода Либмана можно найти в книге: Панов Д. Ю., Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных, М., Гостехиздат, 1949. (*Прим. перев.*)

[3]) Richardson L. F., Phil. trans. (A), т. 210, стр. 307—357, 1910.

уравнению четвертого порядка. Дальнейшее свое развитие этот метод получил в работах Р. Саусвелла, который внес в него ряд улучшений и применял систематически к широкому кругу физических проблем, в том числе также и к многочисленным задачам теории упругости[1]).

Весьма эффективным в получении приближенных решений для задач теории упругости показал себя метод Рэлея—Ритца. Для того чтобы найти частоту основной формы колебаний сложной системы, Рэлей рекомендует задаться некоторым начальным видом этой формы, вывести из него выражение соответствующей частоты, а затем принять параметры, определяющие эту избранную форму таким образом, чтобы выражение для частоты приняло минимальное значение. В. Ритц[2]), исследуя задачу изгиба прямоугольной пластинки, приходит к выражению потенциальной энергии

$$I = \iint \left\{ \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \right)^2 \right) \right] - wq \right\} dx\,dy, \quad \text{(b)}$$

где w—прогиб, q—интенсивность поперечной нагрузки и D—жесткость при изгибе. Он указывает, что правильным решением задачи будет такое значение прогиба w пластинки, при котором энергия деформации принимает минимальное значение; он выражает это решение в виде ряда

$$w = a_1\varphi_1(x, y) + a_2\varphi_2(x, y) + a_3\varphi_3(x, y) + \ldots, \quad \text{(c)}$$

где каждая из функций φ удовлетворяет контурным условиям пластинки, а коэффициенты $a_1, a_2, a_3, \ldots$ должны быть вычислены из системы линейных уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial a_3} = 0, \quad \ldots \quad \text{(d)}$$

Эти уравнения выражают условия обращения интеграла I в минимум при нахождении приближенного решения[3]) (c). Опыт показывает, что для получения хороших результатов обычно достаточно наибольшего числа членов ряда (c).

Таким методом были получены приближенные формулы для изгиба бруса при совместном действии поперечной и осевой сил.

---

[1]) См. Southwell R. V., Relaxation methods in engineering science, Oxford, 1940; Southwell R. V., Relaxation methods in theoretical physics, Oxford, 1946.

[2]) Биография этого выдающегося ученого приводится в собрании его трудов, Париж, 1911.

[3]) Таким путем находится верхняя граница для минимальных значений I. Е. Треффц дал способ нахождения нижней границы той же величины; см. Trefftz E., Math. Ann., т. 100, стр. 503, 1928.

Аналогичному же способу решения поддается и задача исследования бруса с начальной кривизной и круглого кольца[1]). Применение метода Ритца к вычислению прогиба мембраны с использованием мембранной аналогии привело к выводу простых формул для расчета напряжений кручения и изгиба в брусьях различных поперечных сечений[2]). Тот же метод принес полезные результаты в исследовании колебаний бруса переменного поперечного сечения и прямоугольных пластинок при различных краевых условиях.

Метод Ритца был применен также и в сочетании с принципом наименьшей работы[3]). При этом установлено, что если дано тело с действующими на него поверхностными силами и рассматриваются такие изменения компонент напряжения, что это не отражается ни на уравнениях равновесия, ни на краевых условиях, то истинными значениями этих компонент напряжения будут те, при которых вариация энергии деформации обращается в нуль. Например, в двумерной задаче с функцией напряжения φ энергия деформации выразится двойным интегралом

$$V=\frac{1}{2E}\iint\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2\right]dx\,dy. \tag{e}$$

Представив функцию напряжений в виде ряда

$$\varphi=a_1\varphi_1(x,\ y)+a_2\varphi_2(x,\ y)+a_3\varphi_3(x,\ y)+\ldots, \tag{f}$$

в котором каждый член удовлетворяет краевым условиям задачи, и введя его в выражение (e), мы сможем вычислить коэффициенты a_1, a_2, a_3 из уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial a_1}=0,\qquad \frac{\partial V}{\partial a_2}=0,\qquad \frac{\partial V}{\partial a_3}=0,\ \ldots$$

Подставляя эти значения в выражение (f), находим функцию напряжений, которой можем воспользоваться для приближенного вычисления напряжений. С помощью этого метода была решена задача[4]) о распределении напряжений в полках широкополочных двутавровых балок при их изгибе (т. е. найдена эффективная ширина полок). Этот же способ позволил исследовать и депланацию в тонкостенных конструкциях[5]).

---

[1]) См. Timoschenko S. P., статья в Сборнике к 70-летию А. Фёппля: Festschrift zum siebzigsten Geburtstage August Föppl, 1923.

[2]) См. Тимошенко С. П., Применение функции напряжений к исследованию изгиба и кручения призматических стержней. Сборник Ин-та инж. п. с., СПб., 1913; см. также Proc. London Math. Soc. (2), т. 20, стр. 398, 1922.

[3]) См. Тимошенко С. П., Теория упругости, ч. I, СПб., 1914, §§ 23 и 44; также Timoschenko S. P., Phil. Mag., т. 47, стр. 1095. 1924.

[4]) См. Karman Th., Festschrift... August Föppl, стр. 114, 1923.

[5]) Reissner Eric, Quart applied Math., т. 4, стр. 268, 1946.

84. Трехмерные задачи теории упругости[1])

Поставленная Сен-Венаном задача о кручении и изгибе консоли продолжала оставаться темой научной разработки также и в XX веке, причем были найдены строгие решения для некоторых новых видов поперечных сечений[2]). Для случая изгиба были исследованы несимметричные сечения, причем была установлена точка, в которой приложение изгибающей нагрузки не сопровождается кручением[3]). Было показано, что в полукруглом и равнобедренно-треугольном сечениях достаточно лишь небольшого смещения нагрузки из центра тяжести, для того чтобы избежать кручения. В тонкостенных профилях такое смещение может оказаться существенным и иметь большое практическое значение. Ясность в этот вопрос была внесена Р. Мэйаром[4]): он ввел понятие *центра сдвига* и показал, как находить эту точку.

В решении задачи кручения, предложенном Сен-Венаном, предполагается, что действие приложенного к стержню крутящего момента передается касательными напряжениями, распределенными по торцовым сечениям по тому же самому закону, что и в любом промежуточном сечении. Но так как действительное распределение напряжений по торцам не отвечает этому предположению и в них наблюдаются обычно местные нарушения общего характера распределения, то решение Сен-Венана имеет силу лишь для областей стержня, достаточно удаленных от его торцов. Эти местные нарушения поля напряжений были изучены рядом исследователей[5]). Применение принципа Сен-Венана к тонкостен-

---

[1]) Здесь отмечаются лишь немногие посвященные этому вопросу научные работы, именно те из них, которые представляют практический интерес в технике. Полный указатель литературы вопроса прилагается к статьям: Timpe A., Tedone O., Encyklopädie Math. Wiss., т. 4, 1914; Trefftz E., Geckeler J. W., Handbuch der Physik, т. 6, 1928. (*Прим. авт.*) См. русские переводы: Треффц Е., Математическая теория упругости, ГТТИ, 1932 и Геккелер И. В., Статика упругого тела, ГТТИ, 1934. Обзор работ советских ученых по пространственным задачам теории упругости—см. сборник «Механика в СССР за 30 лет», Гостехиздат, 1950. (*Прим. ред.*)

[2]) См. Trefftz E., Math. Ann., т. 82, стр. 97, 1921; ZAMM, т. 2, стр. 213, 1922.

[3]) Тимошенко С. П., Применение функции напряжений..., Сборник Ин-та инж. п. с., СПб., 1913; см. также работу Сигара и Пирсона: Seegar M., Pearson K., Proc. roy. soc. (London) (A), т. 96, стр. 211, 1920.

[4]) Maillart R., Schweiz Bauztg, т. 77, стр. 195, 1921; т. 79, стр. 254, 1922. О научно-техническом творчестве Майара см. новую книгу: Bill M., Robert Maillart, Zürich, 1955. См. также Eggenschwyler A., Diss E., Tech. Hochschule, Zürich, 1921. С последующим развитием этого вопроса можно познакомиться по работам: Weber C., ZAMM, т. 4, стр. 334, 1924; см. также Trefftz E., ZAMM, т. 15, стр. 220, 1935.

[5]) Purser F., Proc. roy. Irish. Acad. (A), т. 26, стр. 54, 1906; Timpe A., Math. Ann., т. 71, стр. 480, 1912; Wolf K., Sitzber. Acad. Wiss. Wien, math.-naturw. Klasse, т. 125, стр. 1149, 1916. Случай стержня прямо-

ным стержням открытого профиля представляется несколько более трудным, поскольку угол кручения в этих условиях может зависеть в сильной степени от того способа, каким крутящие моменты приложены по торцам. Автор настоящей книги исследовал[1]) задачу кручения двутавровой балки с защемленным концом и нашел, что для получения удовлетворяющего действительности значения угла закручивания надлежит учитывать не только напряжения кручения по Сен-Венану, но также и напряжения изгиба в полках двутавра. Дифференциальное уравнение для относительного угла закручивания принимает при этом вид

$$C\theta - C_1\theta'' = T, \tag{a}$$

где C—жесткость при кручении по Сен-Венану, C_1—постоянная, зависящая от жесткости полок при изгибе, T—крутящий момент. Опыты дали удовлетворительное совпадение с теоретическими решениями уравнения (а), причем показали, что область применения принципа Сен-Венана нуждается в некотором ограничении, поскольку изгиб полок носит не местный характер. Вебер[2]) пришел к тому же результату, изучая кручение швеллеров, а Василий Захарович Власов установил это в своем общем исследовании кручения тонкостенных открытых профилей[3]).

Использование функций комплексного переменного в решении задачи Сен-Венана было показано Николаем Ивановичем Мусхелишвили[4]). Он получил решения для некоторых новых форм поперечных сечений[5]) и исследовал кручение бруса, составленного из двух различных материалов, каким является, например, железобетонный брус.

Дальнейшей разработке подверглась и проблема совместного воздействия кручения и осевой нагрузки. Томас Юнг (см. стр. 115),

---

угольного сечения с защемленными концами был исследован С. П. Тимошенко: Timoschenko S. P., On the torsion of a prism, on of the cross-sections of which remains plane, Proc. London math. soc., т. 20, стр. 389. 1921. Доказательство принципа Сен-Венана дал Гудир: Goodier J. N, Phil. Mag. (7), т. 24, стр. 325, 1937.

[1]) Тимошенко С. П., Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровых балок, Изв. Политехн. ин-та, СПб., т. IV—V, 1905—1906.

[2]) Weber C., ZAMM, т. 6, стр. 85, 1926.

[3]) Власов В. З., Тонкостенные упругие стержни, прочность, устойчивость, колебания, М.—Л., Стройиздат, 1940. (*Прим. авт.*) См. также Власов В. З., Строительная механика тонкостенных пространственных систем, М.—Л., Стройиздат, 1949. (*Прим. перев.*)

[4]) Muschelisvili N. I., Rend. accad. nazl. Lincei, 6-я серия, т. 9, стр. 295—300. 1929. (*Прим. авт.*) См. также: Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, АН СССР, 1933; 4-е изд., 1954. (*Прим. перев.*)

[5]) Muschelisvili N. I., Compt. rend, т. 194, стр. 1435, 1932. (*Прим. авт.*) См. также его «Некоторые задачи...», изд. 1933, гл. IV. (*Прим. ред.*)

исследуя кручение круглого вала, нашел, что выражение крутящего момента складывается из двух членов, один из которых пропорционален относительному углу закручивания θ, другой — кубу этого угла θ^3. Юнг показал, что для получения второго члена необходимо при рассмотрении деформации принимать во внимание величины более высокого порядка малости, которыми обычно в исследовании кручения пренебрегают. Выделив у цилиндрической поверхности вала радиуса r соосный ему прямоугольный элемент $abcd$, мы заключаем, что в результате кручения он примет форму параллелепипеда ab_1c_1d (рис. 194) и деформация сдвига будет равна $r\theta$. Соответствующие касательные напряжения $Gr\theta$ дают нам хорошо известную формулу крутящего момента

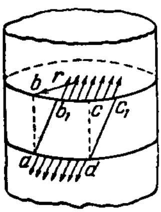


Рис. 194.

$$T_1 = \int_0^a Gr\theta \cdot 2\pi r^2\, dr = I_p G\theta. \qquad \text{(b)}$$

Если же мы примем во внимание, что расстояние между двумя поперечными сечениями вала остается при кручении неизменным, то должны будем убедиться в том, что линейные элементы, подобные ab и cd, удлиняются, причем их относительное удлинение выражается величиной

$$\varepsilon = \sqrt{1 + r^2\theta^2} - 1 \approx \frac{1}{2} r^2\theta^2. \qquad \text{(c)}$$

Соответствующие растягивающие напряжения $Er^2\theta^2/2$ создадут дополнительный момент кручения относительно оси вала

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^a Er^2\theta^2 \cdot r\theta \cdot 2\pi r^2\, dr = \frac{\pi a}{6} \theta^3 E, \qquad \text{(d)}$$

который и будет, как мы видим, пропорционален кубу относительного угла закручивания, т. е. θ^3. Юнг первый ввел в рассмотрение малые величины более высокого порядка, нашедшие свое выражение в уравнении (c). Поправка (d) к обычной формуле весьма мала для стального вала, но принимает существенное значение для таких материалов, как каучук, способный воспринимать значительные деформации в упругой области. Она представляет важность также и в тонкостенных стержнях открытого профиля[1]). Теория больших деформаций получила за последнее время разви-

[1]) Buckley, Phil. Mag., т. 28, стр. 778—787, 1914; Weber C., Festschrift... August Föppl, Berlin, 1924.

тие в трудах ряда исследователей[1]). Био[2]) показал, что приведенные выше соображения Юнга дают правильное решение этой задачи в отношении круглого вала. Случаи кручения тонкостенных профилей открытого типа в сочетании с действием продольной осевой силы и чистым изгибом были рассмотрены Гудиром (J. N. Goodier)[3]), использовавшим теорию больших деформаций; при этом он вновь убедился в том, что элементарные выводы, основывающиеся на допущении Томаса Юнга, согласуются с результатом более глубокого исследования.

Некоторые успехи были достигнуты в решении задачи кручения круглого вала переменного диаметра. Дж. Мичелл[4]) и, независимо от него, А. Фёппль[5]) установили, что распределение напряжений определяется при этом функцией напряжений, и указали такую функцию для конического вала. Тем же методом были решены и случаи вала, имеющего форму эллипсоида, гиперболоида или параболоида вращения. К. Рунге[6]) дал приближенный метод расчета местных напряжений у кольцевой галтели в месте соединения двух цилиндрических валов различных диаметров.

Обратили на себя внимание и некоторые задачи осесимметричного распределения напряжений в теле вращения. Дж. Мичелл[7]) и А. Ляв[8]) показали, что все компоненты напряжения в подобных случаях могут быть выражены через одну функцию напряжений. Связь между этой функцией и соответствующей функцией двумерных задач была исследована К. Вебером[9]). А. П. Коробов[10]), приняв для функции напряжений при осесимметричном распределении форму полинома, получил строгое решение изгиба круглой пластинки при различных симметричных типах загружения.

---

[1]) См. Southwell R. V., Trans. roy. soc. (London) (A), т. 213, стр. 187, 1913; Biezeno C. B., Hencky H., Proc. Acad. sci., Amsterdam, т. 31, стр. 569—578, 579—592, 1928; Trefftz E., ZAMM, т. 12, стр. 160—165, 1933.

[2]) Biot M. A., Phil. Mag., т. 27, стр. 468—489, 1939.

[3]) Goodier J. N., J. appl. mechanics, т. 17, стр. 383—387, 1950. См. также: Green A. E., Shield R. T., Trans. roy. soc. (London) (A), т. 244, стр. 47, 1952.

[4]) Michell J. H., Proc. London math. soc., т. 31, стр. 140, 1900.

[5]) Föppl A., Sitzber. math.-naturw. Abt. bayer. Akad. Wiss., München, т. 35, стр. 249, 505, 1905.

[6]) См. Willers F. A., Z. Math. u. Physik, т. 55, стр. 225, 1907; Föppl L., Sitzber. math.-naturw. Abt. bayer. Akad. Wiss., München, т. 51, стр. 61, 1921.

[7]) Michell J. H., Proc. London math. soc., т. 31, стр. 144, 1900.

[8]) Love A. E. H., Mathematical theory of elasticity, 4-е изд., стр. 274, 1927. (*Прим. авт.*) Имеется русский перевод.

[9]) Weber C., ZAMM, т. 5, 1925.

[10]) См. статью А. П. Коробова, Изв. Киевского политехнического ин-та, Киев, 1913. Случай сосредоточенной силы, приложенной в центре пластинки, был исследован А. Надаи; см. его книгу: Nadai A., Elastische Platten, стр. 315, 1925.

Растяжение цилиндра касательными напряжениями, распределенными по поверхности близ торцов, а также сжатие цилиндра между двумя жесткими пластинками было исследовано Л. Файлоном[1]), давшим решение в бесселевых функциях. Распределение напряжений, вызванных в длинном цилиндре равномерным нормальным давлением, действующим на узкую кольцевую полосу, представляет практический интерес, поскольку оно приблизительно воспроизводит насадку короткой шейки (муфты, втулки, подшипника) на длинный вал. Проблема обсуждалась целым рядом авторов[2]), и в настоящее время мы можем считать ее достаточно освещенной.

В последнее время среди инженеров оживился интерес к общим решениям дифференциальных уравнений теории упругости. Буссинеск показал, что три компоненты u, v, w перемещения могут быть определены тремя бигармоническими функциями[3]). П. Ф. Папкович[4]) установил возможность упрощения решения Буссинеска, придав ему вид

$$u = B\frac{\partial\omega}{\partial x} + \varphi_1, \qquad v = B\frac{\partial\omega}{\partial y} + \varphi_2, \qquad w = B\frac{\partial\omega}{\partial z} + \varphi_3,$$

где B—постоянная,

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{2}(\varphi_1 x + \varphi_2 y + \varphi_3 z),$$

а функции φ_1, φ_2, φ_3 и ω_0 удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Независимо это общее решение было получено Нейбером[5]), применившим его к практическим задачам, связанным с концентрацией напряжений в круглых валах, снабженных выточками или эллипсоидальными отверстиями[6]). Кроме того, Нейбер вос-

---

[1]) Filon L. N. G., Phil. trans. (A), т. 198, стр. 147, 1902.

[2]) Föppl A., Föppl L., Drang und Zwang, 2-е, изд., т. 2, стр. 141, 1928; Barton M. V., J. appl. mechanics, т. 8, стр. 97, 1941; Rankin A. W., J. appl. mech., т. 11, стр. 77, 1944; Tranter C. J., Craggs J. W., Phil. Mag., т. 38, стр. 214, 1947. (*Прим. авт.*) См. русск. перев.: Фёппль А., Фёппль Л., Сила и деформация. Прикладная теория упругости, Перев. с нем., т. I—II, ГТТИ, 1936. (*Прим. перев.*)

[3]) Boussinesq, Application des potentiels..., стр. 281, 1885.

[4]) Papkovich P. F., Compt. rend., стр. 513, 1932. (*Прим. авт.*) Также его статья в Изв. АН СССР, серия матем. и естеств. наук, № 10, 1932, стр. 1425—1435. (*Прим. ред.*)

[5]) Neuber H., ZAMM, т. 14, стр. 203, 1934; см. также Ing. Arch., т. 5., стр. 238—244, 1934; т. 6, стр. 325—334, 1935.

[6]) Случай сферической полости углубления был исследован Р. В. Саусвэллом: Southwell R. V., Phil. Mag., 1926, и Гудиром: Goodier J. N., Trans. ASME, т. 55, стр. 39, 1933. Общий случай эллипсоидальных отверстий был рассмотрен М. А. Садовским и Э. Штернбергом: Sadowsky M. A., Sternberg E., J. appl. mech., т. 16, стр. 149—157, 1949.

пользовался этим же решением и в двумерном напряженном состоянии и вывел формулы для коэффициентов концентрации напряжений у выточек и эллиптических отверстий, а также в пластинке, подвергнутой растяжению, скалыванию или изгибу в ее плоскости. Приводимые в книге Нейбера[1]) многочисленные таблицы и графики представляют собой ценное пособие для расчета концентрации напряжений в частях машин.

85. Двумерные задачи теории упругости

В текущем столетии отмечается и дальнейшее развитие в области двумерных задач теории упругости; использование строгих решений входит в повседневную практику технических расчетов. А. Менаже[2]) нашел способ решать двумерные задачи, представляя функцию напряжений в виде полиномов, и применил результаты к некоторым случаям изгиба балок узкого прямоугольного сечения. Он показал, что элементарные формулы сопротивления материалов дают правильные значения для нормального и касательного напряжений в консоли, нагруженной силой на свободном конце, а также что строгое решение для равномерно нагруженной балки вносит в элементарные формулы лишь незначительные поправки, которыми в практических применениях допустимо пренебрегать.

Рибьер[3]) использовал для исследования изгиба прямоугольных балок ряды Фурье. Эта работа была продолжена Л. Файлоном[4]), применившим общее решение к частным случаям, имеющим практическое значение. Г. Лэмб[5]) изучал работу бесконечной прямоугольной полосы, загруженной через равные интервалы равными сосредоточенными силами, направленными попеременно вверх и вниз. Исходя из этой схемы, он определял прогибы под сосредоточенной нагрузкой. Той же задачей занимался и Т. Карман[6]), получивший точную формулу для прогиба, вызываемого сосредоточенной силой в свободно опертой балке.

Ряды Фурье были применены Клебшем в исследовании напряженного состояния круглых дисков (см. стр. 311). О. Венске[7]) воспользовался тем же методом в применении к круговому кольцу.

---

[1]) N e u b e r H., Kerbspannungslehre, Berlin, 1937. (*Прим. авт.*) См. также Н е й б е р Г., Концентрация напряжений, Перев. с нем., Гостехиздат, 1947. (*Прим. ред.*)

[2]) M e s n a g e r A., Compt. rend., т. 132, стр. 1475, 1901.

[3]) R i b i è r e M. C., Sur divers cas de la flexion des prismes rectangles (Diss.), Bordeaux, 1889.

[4]) F i l o n L. N. G., Phil. trans. (A), т. 201, стр. 63, 1903.

[5]) L a m b H., Atti congr. intern. matemat. IV—Roma, 1909, т. 3, стр. 12.

[6]) K a r m a n Th., Abhandl. aerodynam. Inst. tech. Hochschule, Aachen, т. 7, стр. 3, 1927.

[7]) V e n s k e O., Nachr. Ges. wiss., Göttingen, 1891, стр. 27.

А. Тимпе[1]), рассмотрев несколько частных случаев, пришел к решениям Х. С. Головина для изгиба части кольца парами и силами, приложенными по концам. Круглое кольцо представляет собой простейший случай многосвязной области, и общее решение для него содержит многозначные члены. Тимпе дает физическое истолкование факту многозначности решений, принимая во внимание остаточные напряжения, возникающие в результате разрезания кольца, смещения одного конца в месте разреза относительно другого и последующего соединения их тем или иным способом. Как мы уже упоминали выше (см. стр. 421), общее исследование решений двумерных задач для многосвязных контуров было проведено Дж. Мичеллом[2]), показавшим, что распределение напряжений в этом случае не зависит от упругих постоянных материала, если объемные силы отсутствуют, а поверхностные силы таковы, что их равнодействующая обращается в нуль на каждом контуре. Это заключение представляет большую практическую важность в тех случаях, когда исследование напряжений производится поляризационно-оптическим методом. Случай кругового диска, нагруженного в произвольной точке сосредоточенными силами, был исследован Р. Миндлином[3]). Автор настоящей книги изучил частный случай напряженного кругового кольца, именно сжатие его двумя равными противоположно действующими по диаметру силами[4]). При этом было показано, что в сечении, расположенном на некотором расстоянии от точек приложения нагрузок, достаточно точным для практических целей является даваемое элементарной теорией Винклера гиперболическое распределение напряжений. Другие примеры деформации круговых колец были изучены Л. Файлоном[5]) и Г. Рейсснером[6]). К. В. Нельсон[7]) в связи с задачей о напряженном состоянии в роликовых подшипниках поставил задачу о двух равных противоположно направленных силах, действующих в радиальном направлении и приложенных к внешнему и внутреннему контурам кольца.

Концентрация напряжений, наблюдаемая в выточках, выкрутках и у отверстий различной формы, представляет большое прак-

---

[1]) Timpe A., Z. Math. u. Physik, т. 52, стр. 348, 1905.

[2]) Michell J. H., Proc. London math. soc., т. 31, стр. 100, 1899. См. также Volterra V., Ann. école norm., 3-я серия, т. 24, стр. 401—517, 1907; Föppl A., Tech. Mech., т. 5, стр. 293, 1907.

[3]) Mindlin R. D., J. appl. mech., т. 4, стр. 115, 1937.

[4]) Тимошенко С. П., О распределении напряжений в круговом кольце, Изв. Киевского политехн. ин-та, Киев, 1910; Phil. Mag., т. 44, стр. 1014, 1922.

[5]) Filon L. N. G., Selected engineering papers, № 12 (published by Inst. of civ. eng-rs), London, 1924.

[6]) Reissner H., Jahrbuch wiss. Ges. Luftfahrt, стр. 125, 1928.

[7]) Nelson C. W., J. appl. mech., доклад 50-A-16, представленный на съезд Амер. об-ва инж.-мех. в декабре 1950 г.

тическое значение; в связи с этим для ряда случаев такой концентрации напряжений были найдены строгие решения двумерных задач теории упругости. Распределение напряжений около круглого отверстия в пластинке, подвергнутой равномерному растяжению в одном направлении, было исследовано Г. Киршем[1]). Его решение показывает, что наибольшее напряжение имеет место у контура отверстия (по концам его диаметра, перпендикулярного к направлению приложенной растягивающей силы) и что оно в три раза больше номинального напряжения. На этом примере, вероятно впервые, обнаружилось, сколь существенно важным является исследование местных неправильностей в распределении напряжений, вызываемых отверстиями. С этого времени задачи о концентрации напряжений стали объектом тщательного теоретического и экспериментального изучения со стороны инженеров. Р. Хаулэнд[2]) исследовал пластинку конечной ширины с круглым отверстием на оси симметрии. Случай, когда силы приложены к контуру отверстия, был рассмотрен У. Биккли[3]). Эллиптическое отверстие было исследовано Г. В. Колосовым[4]), а позднее К. Инглисом[5]). Уменьшение напряжений путем усиления края круглого отверстия буртиком было изучено автором настоящей книги[6]). Ряд авторов[7]) занялся задачами, в условия которых входило наличие двух и большего числа круглых отверстий.

Много важных двумерных задач теории упругости было решено путем использования функций комплексного переменного. Этот метод был разработан главным образом Г. В. Колосовым[8]) и его учеником Н. И. Мусхелишвили. С библиографией, дающей перечень важнейших научных трудов по этому вопросу, опубликованных на русском языке, можно познакомиться по книге Мусхелишвили[9]).

---

[1]) Kirsch G., VDI, т. 42, 1898.

[2]) Howland R. C., J. Trans. roy soc. (London) (A), т. 229, стр. 49, 1930; т. 232, стр. 155—229, 1932.

[3]) Bickley W. C., Trans. roy. soc. (London) (A), т. 227, стр. 383, 1928.

[4]) Колосов Г. В., Диссертация, СПб., 1900. Это решение было опубликовано в книге. Колосов Г. В., Об одном приложении теории функций комплексного переменного в плоской задаче математической теории упругости, Юрьев, 1909. (*Прим. перев.*)

[5]) Inglis C. E., Trans. Inst. naval. architects, London, 1913.

[6]) Timoshenko S. P., J. Franklin Inst., т. 197, стр. 505, 1924.

[7]) Weber C., ZAMM, т. 2, стр. 267, 1922; Sadowsky M. A., т. 8, стр. 107, 1928; Howland R. C., J. Proc. roy. soc. (London) (A), т. 148, стр. 471, 1935.

[8]) Указанная выше работа и статья в Z. Math. u. Physik, т. 62, стр. 383—409, 1914. (*Прим. авт.*) См. также Колосов Г. В., Применение комплексной переменной к теории упругости, М.—Л., 1935.

[9]) Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, 1949.

Расчет напряжений в тонкостенных конструкциях, например в конструкциях самолетов, весьма часто приводится к исследованию изгиба балок, профили которых близки к типам рис. 195, *а*, *б*. Ширина *a* полки в первом типе и расстояние между стенками во втором типе не малы в сравнении с пролетом балки, и потому здесь возникают вопросы об *эффективной ширине* и о депланации. Приближенные решения такого рода задачи были предложены рядом авторов, и относящаяся к этому вопросу литература указывается в статьях Э. Хваллы[1]), Э. Рейсснера[2]) и Хаджи-Аргириса и Г. Кокса[3]).

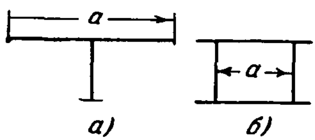


Рис. 195.

Применение древесины и других неизотропных материалов в различного рода сооружениях направило внимание инженеров к теории анизотропных тел. Некоторые успехи были достигнуты в исследовании двумерных задач, в основу которого кладется предположение, что упругие свойства пластинки могут быть определены уравнениями

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1}\sigma_x - \frac{\mu_1}{E_2}\sigma_y, \qquad \varepsilon_y = -\frac{M_2}{E_1}\sigma_x + \frac{1}{E_2}\sigma_y, \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy},$$

где $E_1\mu_1 = E_2\mu_2$. Пользуясь этими зависимостями, можно вывести дифференциальное уравнение функции напряжений, сходное с тем, которое применяется в условиях изотропии. С. Г. Лехницкий[4]) получил решения этого уравнения для прямоугольных балок, круглых колец и эллиптических отверстий, сходные с вышеупомянутыми решениями, отвечающими изотропным пластинкам[5]).

86. Изгиб пластинок и оболочек

Широкое использование в современном строительстве сравнительно тонких пластинок, плит и оболочек повлекло за собой дальнейшее развитие их теории. Хотя основные уравнения были выведены еще Кирхгоффом и вскоре же нашли некоторые применения в акустике, широкое использование теории пластинок в инженерном деле началось лишь в XX столетии. Прямоугольная пла-

[1]) Chwalla E., Stahlbau, т. 9, стр. 73, 1936.

[2]) Reissner E., Quart. applied. math., т. 4, стр. 268, 1946.

[3]) Hadji-Argyris J., Cox H. L., Aeronautical research council (Brit) Rept., 1969, 1944.

[4]) Лехницкий С. Г., Анизотропные пластинки, М.—Л., Гостехиздат, 1947. В этой книге приводится полная библиография по этому вопросу. (*Прим. авт.*) См. также Лехницкий С. Г., Теория упругости анизотропных тел, М.—Л., Гостехиздат, 1950. (*Прим. перев.*)

[5]) Работы советских ученых в области двумерной задачи теории упругости освещены в статье Д. И. Шермана «Основные плоские и контактные смешанные задачи статической теории упругости» в сборнике «Механика в СССР за 30 лет», Гостехиздат, 1950. (*Прим. ред.*)

стинка, свободно опертая по двум противоположным краям и удовлетворяющая произвольным краевым условиям по двум другим краям, была в свое время исследована М. Леви и Э. Эстанавом (см. стр. 398). Задача эта приобрела большое практическое значение. Много частных случаев загружения такой пластинки было изучено инженерами, причем составлены таблицы наибольших прогибов и наибольших изгибающих моментов. Были исследованы пластинки других форм—эллиптической, треугольной, секторной; появились руководства, в которых преимущественное внимание уделялось изгибу пластинок[1]). В тех случаях, когда задача не получала строгого решения или когда решение давалось в виде ряда, непригодного в практических вычислениях, инженеры были вынуждены обращаться к приближенным методам. Широкое применение в теории пластинок получил метод Ритца, принесший много полезных результатов. В ряде сложных вопросов большую помощь оказывают уравнения в конечных разностях, и необходимые решения находятся методами численного анализа[2]).

В разнообразных инженерных проблемах приходится иметь дело с прямоугольной пластинкой, все четыре края которой жестко защемлены, но математическая трактовка этой задачи наталкивается на ряд трудностей. Первое пригодное для числовых расчетов решение было дано Б. М. Кояловичем[3]). Оно было несколько упрощено И. Г. Бубновым[4]), вычислившим таблицы наибольших прогибов и наибольших изгибающих моментов для различных соотношений между сторонами пластинки. Более подробные таблицы, основанные на решении автора настоящей книги[5]), были составлены Т. Ивэнсом[6]).

Вопрос о действии на пластинку сосредоточенной силы приводит к исследованию местных напряжений у точки приложения

[1]) Тимошенко С. П., Теория упругости, т. 2, СПб., 1916; Nadai A., Elastische Platten. Berlin, 1925; Галеркин Б. Г., Упругие тонкие плиты, М.—Л., ОНТИ, 1933. (*Прим. авт.*) Работы Б. Г. Галеркина по теории пластин вошли в собрание его сочинений, т. II, М., АН СССР, 1953. (*Прим. перев.*)

[2]) См. Marcus H., Die Theorie elastischer Gewebe, 2-е изд., Berlin, 1932. См. также статью Д. Холла: Holl D. L., J. appl. mechanics, т. 3, стр. 81, 1936. (*Прим. авт.*) Имеется русск. перев.: Маркус Г., Теория упругой сетки и ее приложение к расчету плит и безбалочных перекрытий, Харьков—Киев, Гостехиздат УССР, 1936. (*Прим. перев.*)

[3]) Коялович Б. М., Докторская диссертация «Об одном уравнении с частными производными 4-го порядка», СПб., 1902. (*Прим. авт.*) См. также статью Б. М. Кояловича в Изв. физ.-матем. ин-та им. Стеклова, т. III, АН СССР, 1930. (*Прим. ред.*)

[4]) Бубнов И. Г., Строительная механика корабля, т. 2, стр. 465, СПб., 1914. (*Прим. авт.*) См. также Бубнов И. Г., Труды по теории пластин, Гостехиздат, стр. 158, 1953. (*Прим. ред.*)

[5]) Timoshenko S. P., Proc. V intern. congr. applied mechanics, Cambridge, Mass., 1938.

[6]) Evans T. H., J. appl. mech., т. 6, стр. A—7, 1939.

нагрузки. Решить эту задачу средствами элементарной теории пластинок не представляется возможным. Исследование задачи было проведено А. Надаи[1]) и С. Войновским-Кригером[2]). Ряд авторов исследовал действие сосредоточенной силы на прямоугольную пластинку, свободно опертую по краям[3]). Задача о действии сосредоточенной силы на пластинку с защемленными краями рассмотрена автором настоящей книги в упомянутом выше докладе на V Международном конгрессе по прикладной механике, а также Д. Юнгом[4]).

Большое практическое значение в проектировании железобетонных сооружений представляет расчет пластинки, опирающейся на несколько рядов равноотстоящих колонн. Первое приближенное решение этой задачи было дано Ф. Грасхофом[5]), дальнейшая же разработка этого вопроса была выполнена В. Леве[6]). Он обсуждался также в указанных ранее книгах А. Надаи и Б. Г. Галеркина. С позднейшей трактовкой этой темы мы встречаемся в работе С. Войновского-Кригера[7]).

В связи с проблемами проектирования плит, используемых в автодорожном строительстве и на аэродромах, актуальной стала задача о пластинке на упругом основании, получившая разработку в особенности в трудах Вестергора[8]). Испытания таких плит производились Винтом и Эльгудом[9]), а также Мэрфи[10]).

Разнообразные применения деревянных досок и железобетонных плит послужили поводом к построению теории анизотропных пластинок. Хотя первое исследование на эту тему было выполнено Ф. Герингом[11]), решения, применимые к практическому использованию, были даны в основном М. Т. Губером. Его многочисленные статьи по этому вопросу составили впоследствии содержание его книги «Проблемы статики ортотропных пластинок, имеющих значение в технике» («Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten», Варшава, 1929). Недавно, как известно, он

[1]) Nadai A., Elastische Platten, стр. 308.

[2]) Woinowsky-Krieger S., Ing.-Arch., т. 4, стр. 305, 1933.

[3]) См. Nadai A., Bauing, 1921, стр. 11; Timoshenko S. P., Bauing, 1922, стр. 51, также статью Б. Г. Галеркина: Galerkin B. G., Messenger Math., т. 55, стр. 26, 1925 (*Прим. авт.*) Перев. статьи Б. Г. Галеркина на русск. яз.— см. Собр. соч., т. II, 1953, стр. 359. (*Прим. ред.*)

[4]) Young D., J. appl. mech., т. 6, стр. A—114, 1939.

[5]) Grashof F., Theorie d. Elasticität u. Festigkeit, 2-е изд., стр. 358, 1878.

[6]) Lewe V., Pilzdecken, 2-е изд., Berlin, 1926. Книга содержит полную библиографию вопроса. (*Прим. авт.*) Имеется русск. перев.: Леве Д., Безбалочные покрытия, Макиз, 1927; 2-е изд., Гостехиздат, 1931. (*Прим. ред.*)

[7]) Woinowsky-Krieger S., ZAMM, т. 14, стр. 13, 1934.

[8]) Westergaard H. M., Ingeniøren, т. 32, стр. 513, 1923; см. также его статьи в J. Public roads, 1926, 1929, 1933.

[9]) Vint J., Elgood W. N., Phil. Mag., 7-я серия, т. 19, стр. 1, 1935.

[10]) Murphy G., Iowa eng. exp. sta. bull., т. 135, 1937.

[11]) Gehring F., Doctor-Dissertation, Berlin, 1860.

опубликовал и книгу по теории упругости[1]). Дальнейшая работа в этой области проводилась главным образом русскими инженерами, а ее итоги подведены в упомянутой выше книге С. Г. Лехницкого.

В элементарной теории пластинок принимается, что прогибы пластинки малы в сравнении с ее толщиной. При больших прогибах необходимо принимать во внимание растяжение срединной плоскости; соответствующие уравнения были выведены Кирхгоффом[2]) и Клебшем (см. стр. 311). Эти уравнения не линейны и с трудом поддаются решению; Кирхгофф применил их лишь в одном простейшем случае, а именно в случае равномерного растяжения срединной плоскости. Дальнейшая разработка этой задачи была выполнена инженерами, главным образом в связи с практической необходимостью расчета напряжений в обшивке судов. Рассматривая изгиб длинной равномерно нагруженной прямоугольной пластинки, И. Г. Бубнов[3]) привел эту задачу к задаче изгиба полосы и решил ее для различных вариантов краевых условий, встречающихся в кораблестроении. Он составил также таблицы, благодаря которым весьма облегчаются расчеты и которые стали теперь повседневным пособием в судостроительной промышленности. Задача исследования больших прогибов круглой пластинки парами, равномерно распределенными по контуру, была рассмотрена автором настоящей книги[4]), установившим также для этого случая и границы точности элементарной линейной теории. Дальнейшее изучение этой темы провел. С. Вэй[5]); он исследовал изгиб равномерно нагруженной круглой пластинки, защемленной по контуру, одновременно и теоретически и экспериментально. Кроме того, он выполнил аналогичное исследование и для равномерно нагруженной прямоугольной пластинки[6]), показав, что если одна из ее сторон превышает другую более чем вдвое ($a/b>2$), то наибольшее напряжение в ней лишь незначительно отличается от указанного Бубновым для бесконечно длинной пластинки.

---

[1]) Huber M. T., Théorie de l'élasticité (на польском языке), Krakow, т. 1. 1948; т. 2, 1950.

[2]) Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik, 2-е изд., 1877; *см. также диссертацию Ф. Геринга, в которой используется указание Кирхгоффа, напечатанное последним в журнале Крелля*: Crelle's, J., т. 56.

[3]) Англ. перев. его статьи см. Trans. inst. naval architects, т. 44 стр. 15. (*Прим. авт.*) Статья И. Г. Бубнова под названием «Напряжения в обшивке судов от давления воды» была напечатана в журнале «Морской сборник»: № 8—10 за 1902 г; отдельное издание, СПб., 1904; переиздана в книге, И. Г. Бубнов, Труды по теории пластин, Гостехиздат, 1953. (*Прим. ред.*)

[4]) Тимошенко С. П., Сборник Института инженеров путей сообщения, т. 89, 1915.

[5]) Way S., Trans. ASME, т. 56, стр. 627, 1934. См. также Federhofer K., Luftfahrt—Forsch., т. 21, стр. 1, 1944; Sitzber. Acad. Wiss. Wien, math.-naturw. Klasse, Abt. IIa, т. 155, стр. 15, 1946.

[6]) См. его доклад на V Международном конгрессе по прикладной механике в 1938 г.: Proc. V intern. congr. appl. mechanics, Cambridge, Mass.,1938.

Общие уравнения для больших прогибов весьма тонких пластинок были приведены к более простому виду А. Фёпплем, применившим функцию напряжений для напряжений, действующих в срединной плоскости пластинки[1]). Лимитирующее условие, по которому пластинка должна быть «весьма тонкой», было отброшено Карманом[2]), уравнения которого нашли использование в упомянутой выше книге А. Надаи и в исследовании больших прогибов прямоугольных пластинок Самюэля Леви[3]).

В выводе уравнений элементарной теории пластинок принимается, что каждый тонкий слой пластинки, параллельный ее срединной плоскости xy, находится в плоском напряженном состоянии, в силу чего отличными от нуля остаются только три компоненты напряжения: σ_x, σ_y и τ_{xy}. Для более толстых пластинок полезно иметь полное решение задачи с учетом всех шести компонент напряжения. Несколько решений этого рода было предложено Сен-Венаном в его переводе книги Клебша[4]). Некоторые элементарные строгие решения для круглых пластинок были найдены А. П. Коробовым[5]), опыт же построения общей строгой теории пластинок был предложен Дж. Мичеллом[6]) и получил дальнейшее развитие в книге А. Лява[7]) по теории упругости. В последнее время строгая теория пластинок обратила на себя внимание инженеров и некоторые ее задачи были полностью решены. Особого упоминания заслуживают труды С. Войновского-Кригера[8]) и Б. Г. Галеркина[9]). Возрастающий успех, который находят в настоящее время в разнообразных технических применениях тонкостенные конструкции, привлек большое внимание к теории оболочек. Приемлемое для практики решение во многих, относящихся к тонким оболочкам, задачах становится достижимым, если пренебречь изгибом и допустить, что напряжения распределяются по толщине

---

[1]) Föppl A., Technische Mechanik, т. 5, стр. 132, 1907.

[2]) Kármán Th., Festigkeit im Maschinenbau, Encycl. math. Wiss., т. IV, стр. 311, 1910.

[3]) Levy Samuel, Nat. adv comm. aer tech. Notes, 846, 847, 853.

[4]) См. стр. 337 этого перевода.

[5]) См. Timoshenko S., Theory of Elasticity, стр. 315, 1934. (*Прим. авт.*) Русск. перев.: Тимошенко С. П., Теория упругости, Гостехиздат, 2-е изд., 1937, стр. 348. Статья А. П. Коробова (1885—1952) была напечатана в Изв. Киевск. политехн. ин-та за 1913 г. (*Прим. ред.*)

[6]) Michell J. H., Proc. London math. soc., т. 31, стр. 100, 1900.

[7]) Love A. E. H., Mathematical theory of elasticity, 4-е изд., стр. 473, 1927. В русском переводе стр. 474.

[8]) Woinowsky-Krieger S., Ing.-Arch, т. 4, стр. 203, 305, 1933.

[9]) Galerkin B. G., Compt. rend., т. 190, стр. 1047; т. 193, стр. 568; т. 194, стр. 1440. (*Прим. авт.*) Русские издания: Доклады АН СССР, 1931, № 10, стр. 273—286, Изв. НИГИ, 1931, т. 1, стр. 49—56, Изв. НИГИ, 1932, т. 7, стр. 1; Труды Ленингр. ин-та соор., вып. 2, Л.—М., ОНТИ, 1935, а также Собрание сочинений. т. 1, АН СССР, 1952, стр. 322, 328, 335, 345. Там же библиографический очерк, обзор и список трудов. (*Прим. ред.*)

оболочки равномерно. Такие *мембранные напряжения* изучены для некоторых поверхностей вращения, в частности для сферической и цилиндрической оболочек[1]). Общая теория изгиба оболочек была предложена Ароном[2]) и Лявом[3]); первым техническим применением, которое нашла эта теория, было выполненное А. Стодолой исследование напряжений в конических оболочках постоянной толщины[4]). Симметрично нагруженную сферическую оболочку постоянной толщины исследовал Г. Рейсснер[5]). Он показал, что напряжения изгиба вызываются при этом главным образом реактивными силами, действующими по опорному закрепленному краю оболочки, и вывел дифференциальные уравнения для вычисления названных реакций. Эти уравнения были использованы затем Э. Мейсснером, которому удалось, совместно со своими учениками, получить строгие решения для ряда задач, представляющих практическую важность[6]). Применимость этих строгих решений зависит от быстроты сходимости ряда, через который выражаются решения; сходится же он тем медленнее, чем тоньше оболочка. Чтобы обойти связанные с этим трудности, с успехом можно использовать приближенные методы, предложенные О. Блюменталем[7]) и И. Геккелером[8]). Загружение сферических оболочек несимметричной нагрузкой было изучено А. Хаверсом[9]). Теория цилиндрических оболочек остановила на себе внимание нескольких авторов[10]) в связи с проектированием котлов и трубопроводов[11]).

---

[1]) Указатели литературы по этим вопросам можно найти в книгах: Flügge W., Statik und Dynamik der Schalen, Berlin, 1934; Girkmann K., Flächentragwerke, 2-е, изд., Wien, 1948.

[2]) Aron H., J. reine u. ang. Math., т. 78, стр. 136, 1874.

[3]) Love A. E. H., Phil. trans. (A), т. 179, стр. 491, 1888.

[4]) Stodola A., Die Dampfturbinen, 4-е изд., стр. 597, Berlin, 1910; см. также Keller H., Schweiz. Bauztg., 1913, стр. 111, и книгу Keller H., Berechnung gewölbter Böden, Berlin, 1922.

[5]) Reissner H., Müller—Breslau Festschrift, стр. 192, 1912.

[6]) Meissner E., Physik Z., т. 14, стр. 343, 1913; Bolle L., Schweiz. Bauztg., т. 66, стр. 105, 1915; Dubois F., Promotionsarb., Zürich, 1916; Hohegger E., ZAMM, т. 7, стр. 120, 1927.

[7]) Blumenthal O., Z. Math. Physik, т. 62, стр. 343, 1914.

[8]) Geckeler J. W., Forchungsarb., № 276, Berlin, 1926; см. также Ing.-Arch., т. 1, стр. 255, 1930.

[9]) Havers A., Ing.-Arch., т. 6, стр. 282, 1935.

[10]) Указатель литературы по теории оболочек можно найти в работах: Geckeler J. W., Handbuch. der Physik, т. 6, 1928; Flügge W., Statik und Dynamik der Schalen, Berlin, 1934; Timoshenko S. P., Theory of plates and schells, 1940. (*Прим. авт.*) На русск. яз.: Геккелер И. В., Статика упругого тела, ГТТИ, М., 1934 и Тимошенко С. П., Пластинки и оболочки, Пер. В. И. Контовта, Гостехиздат, 1945. (*Прим. ред.*)

[11]) Обзор работ советских ученых по теории пластин и оболочек приведен в статье Ю. Н. Работнова в сборнике «Механика в СССР за 30 лет», Гостехиздат, 1950; см. также очерк развития теории гибких пластинок и оболочек в книге: А. С. Вольмир, Гибкие пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1956; там же—обширная библиография. (*Прим. ред.*)

87. Устойчивость упругих систем

Широкое использование стали и других высокопрочных сплавов в инженерных сооружениях, особенно в мостах, судостроении и самолетостроении, придало проблеме упругой устойчивости особую актуальность[1]). Настоятельные требования практики побудили развернуть за последние годы обширную как теоретическую, так и экспериментальную работу по изучению условий, определяющих устойчивость или неустойчивость тех или иных элементов конструкций. На первых порах вопрос о продольном изгибе сжатых стержней был единственным интересовавшим инженера, теперь же на него легла обязанность ответить и на множество других серьезных вопросов. Мы уже останавливались на проблеме устойчивости плоской формы изгиба балок, исследованной Л. Прандтлем для узкого прямоугольного сечения и автором настоящей книги для двутавровых балок.

В связи с только что упомянутой проблемой приобрел практическую важность и вопрос о кручении тонкостенных элементов открытых профилей. Простейший случай потери устойчивости в крутильной форме уголкового профиля (рис. 196) был уже рассмотрен[2]). Общее исследование потери устойчивости в крутильной форме тонкостенных элементов, подобных тем, что применяются в конструкциях самолетов, было выполнено Г. Вагнером[3]). Более строгое обоснование этой теории дал Р. Каппус[4]). За время, истекшее после опубликования этих работ, немало инженеров поработало над изучением поперечного выпучивания балок и крутильной формы потери устойчивости сжатых тонкостенных элементов; результаты этих исследований нашли широкое использование не только в самолетостроении, но также и в строительстве мостов. Здесь следует отметить работы Гудира[5]), исследовавшего устойчивость не только отдельного сжатого стержня при различных условиях, но также и стержня, жестко соединенного с упругими пластинками. Пользуясь теорией большой деформации, он дал строгое подтверждение фактической правильности той предпосылки, на

[1]) Общее исследование критерия устойчивости в теории упругости произведено Г. Циглером: Z i e g l e r H., ZAMM, т. 20, стр. 49, 1952. (*Прим. авт.*) Также П а п к о в и ч П. Ф., Несколько общих теорем, относящихся к устойчивости упругих систем, Труды Лнгр. Кораблестр. ин-та, вып. 1, 1937, стр. 3—27. (*Прим. ред.*)

[2]) См. Т и м о ш е н к о С. П., К вопросу об устойчивости сжатых пластин, стр. 27, Изв. Киевского политехн. ин-та, 1907; см. также P l a s s H. J., J. appl. mech., т. 18, стр. 285, 1951.

[3]) См. статью Г. Вагнера: W a g n e r H., Festschrift Fünfundzwanzig Jahre technische Hochschule, Danzig, стр. 329, 1929.

[4]) K a p p u s R., Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung, 1937; Luftfahrt—Forsch., т. 14, стр. 444, 1938.

[5]) G o o d i e r Gornell univ. eng. exp. sta. bulls., 27, 1941; 28, 1942.

которой Г. Вагнер построил свою теорию потери устойчивости в крутильной форме[1]). Г. Ниландер[2]) пополнил теорию поперечного выпучивания двутавровых балок и провел обширное экспериментальное исследование по этой проблеме.

Э. Хвалла[3]) исследовал поперечное выпучивание балок несимметричного профиля и дал общий вид уравнений, из которых уравнения для двутавровой балки получаются как частный случай. Автор настоящей книги изложил общую теорию изгиба, кручения и устойчивости тонкостенных элементов открытого профиля[4]). В. З. Власов развил в своей книге[5]) иной метод подхода к теории устойчивости, указав, что для тонкостенных стержней принцип Сен-Вена на теряет силу и что, например, в элементе зетового профиля можно вызвать кручение, приложив по торцам к его полкам изгибающие моменты.

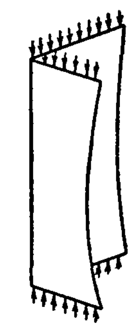


Рис. 196.

В связи с некоторыми судостроительными проблемами, возникшими в русском флоте, автор настоящей книги провел исследование упругой устойчивости прямоугольных пластинок, подвергавшихся действию сил в срединной плоскости[6]). Простейший случай равномерно сжатой прямоугольной пластинки, свободно опертой по краям, был уже решен Дж. Брайэном (см. стр. 359), но в кораблестроении инженеру приходится сталкиваться обычно с иными условиями и отыскание критических значений напряжений сопряжено здесь с более сложными вычислениями. На этот раз задача была решена для многих частных случаев, причем для них были составлены таблицы критических значений напряжений.

Исследование проблем устойчивости упругих систем приводит часто к дифференциальным уравнениям, строгое решение которых наталкивается на большие трудности; в таких случаях приходится

---

[1]) W a g n e r H., J. appl. mechanics, т. 17, стр. 383, 1950.

[2]) N y l a n d e r H., Proc. roy. swed. Inst. eng. research, № 174, 1943.

[3]) C h w a l l a E., Sitzber. Acad. Wiss., Wien, Отдел IIa, т. 153, стр.25—60, 1944.

[4]) T i m o s h e n k o S. P., J. Franklin inst., т. 239, стр. 201,1945. (*Прим. авт.*) Русский перевод этой статьи вошел в состав второго издания книги: Т и м о ш е н к о С. П., Устойчивость упругих систем, 2-е изд., М., Гостехиздат 1955, стр. 502—561. Теория изгиба, кручения и устойчивости тонкостенных стержней открытого поперечного сечения. (*Прим. перев.*)

[5]) В л а с о в В. З., Тонкостенные упругие стержни, Москва, 1940. (*Прим. авт.*); см. также В л а с о в В. З., Строительная механика тонкостенных пространственных систем, Стройиздат, 1949. (*Прим. перев.*)

[6]) Т и м о ш е н к о С. П., Изв. Киевского политехн. ин-та, 1907. Нем. перев: Z. Math. Physik, т. 58, стр. 357, 1910.

обращаться к тому или иному приближенному методу вычисления критических сил. Один из таких методов, основанный на рассмотрении энергии системы и сходный с приближенным методом Рэлея определения частот колебаний в упругих системах, был разработан автором настоящей книги[1]); он нашел применения в решении многочисленных задач устойчивости. Рассматривая, например, сжатую колонну, мы можем принять для ее изогнутой оси при выпучивании некоторое уравнение, удовлетворяющее условиям на концах, и найти критическое значение нагрузки из условия, что приращение энергии деформации колонны при выпучивании должно быть равно работе, произведенной сжимающей силой. Таким путем мы получаем для критической нагрузки значение, обычно превосходящее ее истинное значение, поскольку принятие для изогнутой оси некоторой наперед заданной формы эквивалентно введению в систему некоторых дополнительных связей. Эти связи препятствуют сжатому стержню принять какую-либо иную форму, отличную от принятой. Введение таких дополнительных связей может иметь своим результатом лишь увеличение критической нагрузки. Лучшее приближение для значения критической нагрузки можно получить, вводя в уравнение изогнутой оси несколько параметров, а затем путем варьирования их несколько изменить принятую форму этой кривой. Корректируя эти параметры таким образом, чтобы выражение для критической нагрузки приняло наименьшую величину, мы получим значение этой нагрузки с более высокой точностью. Этот метод был применен в ряде случаев, в частности применительно к системе стержней. Таким путем было проведено исследование устойчивости составных колонн, сжатых поясов открытых мостов и некоторых видов стержневых систем.

Проблема расчета пластинок, усиленных различного рода элементами жесткости, также без труда поддается рассмотрению приближенным методом. В кораблестроении часто приходится укреплять равномерно сжатые прямоугольные пластинки системой продольных и поперечных ребер. Критические значения сжимающих напряжений для таких усиленных жесткими ребрами пластинок определяются энергетическим методом, назначение же надлежащих размеров для ребер жесткости облегчается использованием специально для этой цели составленных таблиц. Тем же приближенным методом была решена также и задача об устойчивости прямоугольной пластинки под действием скалывающих напряжений, с указанием надлежащего подбора элементов жесткости,

---

[1]) Тимошенко С. П., Об устойчивости упругих систем, Изв. Киевского политехн. ин-та, 1910. Франц. перев. этой статьи помещен в Ann. ponts et chaussées, Paris, 1913.

предупреждающих потерю устойчивости[1]). С введением в практику строительства большепролетных клепаных или сварных двутавровых балок этот же метод позволил решить и вопрос об усилении ребрами жесткости стенок таких балок[2]).

Упругая устойчивость сжатого кривого бруса приобрела практическое значение в связи со строительством тонких арок. Для двухшарнирной круговой арки постоянного поперечного сечения эта задача была решена Э. Хурльбринком[3]), а случай весьма малой начальной кривизны был рассмотрен автором настоящей книги[4]). Трехшарнирная арка была исследована Р. Майером[5]); испытания подобных конструкций провел Э. Габер[6]). Е. Николаи рассмотрел равномерно сжатую круговую арку постоянного поперечного сечения с защемленными пятами[7]), арки переменного поперечного сечения были исследованы И. Я. Штаерманом[8]), А. Н. Динником[9]) и К. Федерхофером[10]). Чрезвычайно подробный анализ устойчивости винтовых пружин выполнил Дж. А. Харингкс[11]).

Первостепенную важность в современном самолетостроении имеют вопросы упругой устойчивости оболочек. Существующие по этому вопросу труды посвящены главным образом цилиндри-

---

[1]) См. статью Тимошенко С. П., Об устойчивости пластинок, подкрепленных жесткими ребрами, в Сборнике Ин-та инж. п. с., т. 89, стр. 23, 1915, СПб. Случай бесконечно длинной прямоугольной пластинки был рассмотрен независимо Р. Саусвэллом: Southwell R. V., Phil. Mag., т. 48, стр. 540, 1924.

[2]) См. Timoshenko S. P., Eisenbau, т. 12, стр. 147, 1921; Engineering, т. 138, стр. 207, 1934. С дальнейшими результатами изучения выпучивания пластинок, усиленных жесткими ребрами, можно познакомиться по работам Р. Барбрэ и Э. Хвалла: Barbré R., Bauing, т. 17, 1936; Chwalla E., Bauing, т. 17, 1936.

[3]) Hurlbrink E., Schiffbau, т. 9, стр. 517, 1908.

[4]) Timoshenko S. P., J. appl. mech., т. 2, стр. 17, 1935.

[5]) Mayer R., Eisenbau, т. 4, стр. 361, 1913.

[6]) Gaber E., Bautechn., 1934, стр. 646.

[7]) Николаи Е., Об устойчивости кругового кольца и круговой арки, сжатых равномерно распределенным нормальным давлением, Изв. Петербургского политехн. ин-та, т. 27, 1918; ZAMM, т. 3, стр. 227, 1923. (*Прим. авт.*) Работа перепечатана в сборнике: Николаи Е., Труды по механике, М., Гостехиздат, 1955, стр. 278. (*Прим. ред.*)

[8]) Steuermann E., Ing.-Arch., т. 1, стр. 301, 1930. (*Прим. авт.*) См. также Штаерман И. Я., Устойчивость криволинейных стержней и арок, Киев, 1929 и Устойчивость круговых арок под действием сосредоточенной силы, Прикл. матем. и мех., т. I, вып. 1, 1937. (*Прим. ред.*)

[9]) Динник А. Н., Вестник инженеров и техников, №№ 6, 12, 1933. (*Прим. авт.*) См. также Динник А. Н., Устойчивость арок, Гостехиздат, 1946. (*Прим. ред.*)

[10]) Federhofer K., Bauing, т. 22, стр. 340, 1941.

[11]) Haringx J. A., Philips Research repts, т. 3, 1948; т. 4, 1949.

ческим оболочкам, и случай осевого сжатия трактуется у ряда авторов[1]). Было показано, что при этом возможны не только симметричные, но также и несимметричные формы потери устойчивости. В связи с вопросами проектирования корпуса подводных лодок Р. Мизес[2]) исследовал условия упругой устойчивости цилиндрической оболочки под совместным воздействием осевого и поперечного давлений. Осевое сжатие криволинейных листовых панелей исследовал автор настоящей книги[3]), устойчивость таких панелей под воздействием скалывающих сил исследовал Д. М. А. Леджетт[4]). Вопросами устойчивости цилиндрических оболочек, подвергнутых кручению, занимались Э. Шверин[5]) и Л. Доннэлл[6]).

В. Флюгге[7]) рассмотрел задачу устойчивости тонких цилиндрических труб в условиях чистого изгиба. Он показал, что критическое напряжение сжатия в этом случае приблизительно на 30% выше, чем для симметрично выпученной цилиндрической оболочки, подвергнутой осевому сжатию. По запросам авиационной промышленности сравнительным теоретическим и лабораторным исследованиям были подвергнуты разнообразные методы усиления цилиндрических оболочек. Если цилиндрическая оболочка усилена равноотстоящими продольными и кольцевыми ребрами, задача сводится к определению условий потери устойчивости анизотропной оболочки. Соответствующие дифференциальные уравнения были установлены В. Флюгге), некоторые же вычисления выполнил Джи-Джюэн-Дшу[8]).

Равномерно сжатая сферическая оболочка обратила на себя внимание Р. Цёлли[9]), рассмотревшего симметричные формы потери устойчивости, и Ван-дер Неута[10]), давшего по этому вопросу исследование более общего характера. Задача выпучивания сегмента

---

[1]) Lorenz R., VDI, т. 52, стр. 1766, 1908; Physik Z., т. 13, стр. 241, 1911; Timoshenko S. P., Z. Math. u. Physik, т. 58, стр. 378, 1910; Тимошенко С. П., Изв. Петербургского электротехнич. ин-та, т. 11, 1914. См. также Southwell R. V., Phil. Mag., т. 25, стр. 687, 1913; Trans. roy. soc. (London) (A), т. 213, стр. 187, 1914. (*Прим. авт.*) См. также Тимошенко С. П., К вопросу о деформациях и устойчивости цилиндрической оболочки, Вестн. Общ. технолог., СПб., 1914. (*Прим. ред.*)

[2]) Mises R., VDI, т. 58, стр. 750, 1914.

[3]) Тимошенко С. П., Теория упругости, т. 2, стр. 395, Петроград, 1916.

[4]) Leggett D. M. A., Proc. roy. soc. (London) (A), т. 162, стр. 62—83, 1937.

[5]) Schwerin E., Repts intern. congr. appl. mech., Delft, 1924; ZAMM, т. 5, стр. 235, 1925.

[6]) Donnell L. N., Natl. advisory comm. aeronautic. Rept., 479, 1933.

[7]) Flügge W., Ing.-Arch., т. 3, стр. 463, 1932.

[8]) Dji-Djüän Dschou, Luftfahrt-Forschung, т. 11, стр. 223, 1985.

[9]) Zoelly R., Dissertation, Zürich, 1915.

[10]) Van der Neut, Dissertation, Delft, 1932.

сферической оболочки малой кривизны была исследована К. Б. Бицено[1]).

Теоретические формулы для расчета критических напряжений в пластинках и оболочках выводятся из линейных дифференциальных уравнений перемещений, исходя из той предпосылки, что перемещения эти малы. Для исследования деформаций пластинок и оболочек под нагрузками, превышающими критические значения, следует обратиться к теории больших прогибов. Г. Вагнер[2]) показал, что клепаная или сварная двутавровая балка с весьма тонкой стенкой способна нести большую дополнительную нагрузку после того, как ее стенка подвергнется выпучиванию; им же была дана и приближенная формула для вычисления критической нагрузки. Вопрос о нагрузке для сжатой прямоугольной пластинки обсуждался Т. Карманом[3]), причем им была дана приближенная формула для *эффективной ширины*. Некоторые другие работы по тому же вопросу выполнили автор настоящей книги[4]), Е. Треффц и К. Маргэрр[5]). Опыты по устойчивости тонких оболочек показали, что выпучивание начинается обычно под нагрузками, много меньшими, чем указываемые теорией. Объяснение этому явлению дали Карман и Тсиен[6]), показавшие с помощью теории больших прогибов, что существуют такие формы устойчивого равновесия, которые требуют меньших значений нагрузки, чем формы, получаемые с помощью классической теории. Дальнейшее освещение относящиеся сюда вопросы получили в работах Л. Доннэлла[7]) и К. Фридрихса[8]).

Проблема упругой устойчивости возникает обычно в отношении тел, одно или два измерения которых малы в сравнении с третьим, а именно в отношении тонких стержней, пластинок и оболочек. Но для материалов, способных, подобно каучуку, обнаруживать большие деформации в упругой зоне, вопрос об устойчивости может стать актуальным также в отношении таких тел, у которых все три измерения являются величинами одного и того же порядка. Впервые вопросами этого рода занялся

---

[1]) Biezeno C. B., ZAMM, т. 15, стр. 10, 1935.

[2]) Wagner H., Z. Flugtech. u. Motorluftschiffahrt, т. 20, стр. 200, 1929.

[3]) Karman Th., Trans. ASME, т. 54, стр. 53, 1932.

[4]) Timoshenko S. P. Theorie of Elastic stability, стр. 390, 1936. (*Прим. авт.*) На русск. яз.: Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, стр. 333, 2-е изд., М., Гостехиздат, 1955. (*Прим. перев.*)

[5]) Trefftz E., Marguerre K., ZAMM, т. 16, стр. 353, 1936; т. 17, стр. 121, 1937.

[6]) Karman Th., Tsien, J. aeronaut. sci., т. 7, стр. 43, 1939; т. 8, стр. 303, 1941.

[7]) Donnell L. H., J. appl. mechanics, т. 17, стр. 73, 1950.

[8]) Friedrichs K. O., Theodore von Karman Anniversary volume, стр. 258, 1941.

Р. В. Саусвэлл[1]). Дальнейшее развитие общая теория упругой устойчивости получила в трудах К. Б. Бицено и Г. Хенки[2]), М. Био[3]) и Е. Треффца[4]).

88. Колебания и удар

Современное машиностроение часто ставит проблемы, приводящие к исследованию напряжений, причиной которых являются динамические факторы. Такие проблемы практического значения, как крутильные колебания валов, вибрации турбинных лопаток и дисков, критические скорости вращающихся валов, колебания железнодорожных рельсов и мостов под катящимися нагрузками, колебания фундаментов, могут быть вполне поняты лишь в свете общей теории колебаний. Только такая теория способна указать нам те оптимальные соотношения размеров для частей машины, при которых рабочий режим ее будет, насколько это возможно, гарантирован от перехода в критические условия резонанса (когда могут иметь место опасные колебания).

Одной из первых проблем, убедивших инженеров в важности изучения колебаний, явились крутильные колебания гребных валов в паровых судах. Фрам[5]) был, вероятно, первым исследовавшим эту проблему как теоретически, так и экспериментально и показавшим, что в результате резонанса крутильные напряжения могут достигать столь больших значений, что за этим нередко может возникнуть внезапное усталостное разрушение. Со времени опубликования Фрамом его знаменитой работы проблема крутильных колебаний изучалась многими инженерами и не только уже в разрезе проектирования гребных винтов, но и в применении к более сложным системам кривошипных механизмов с многими вращающимися массами. Такая задача может быть идеализирована и приведена к решению системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Отсюда получается уравнение частот, причем, естественно, что с увеличением числа вращающихся масс нахождение коэффициентов этого уравнения и численное его решение затрудняются соответственным

---

[1]) Southwell R. V., Trans. roy. soc. (London) (A), т. 213, стр. 187—244, 1913.

[2]) Biezeno C. B., Hencky H., Proc. Acad. sci, Amsterdam, т. 31, стр. 569—592, 1928.

[3]) Biot M. A., Proc. V intern. congr. appl. mech., Cambridge, Mass., 1938; Phil. Mag. (7), т. 27, стр. 468—489, 1939.

[4]) Trefftz E., ZAMM, т. 13, стр. 160—165, 1933. (*Прим. авт.*) Развитие вопросов устойчивости стержней и стержневых систем в трудах советских ученых освещено в работах И. М. Рабиновича «Достижение строительной механики стержневых систем в СССР», Изд. Ак. архитект. СССР, М., 1934, С. Д. Лейтеса, «Устойчивость сжатых стальных стержней», М., 1954, и др. работы по устойчивости пластин и оболочек—в упомянутой на стр. 494 статье Ю. Н. Работнова. (*Прим. ред.*)

[5]) Frahm, VDI, 1902, стр. 797.

увеличением объема вычислительной работы. Системы, с которыми нам приходится иметь дело на практике, заключают в себе часто большое количество масс, и тогда объем этой вычислительной работы начинает превышать практически приемлемую меру. В подобных случаях используются те или иные приближенные методы вычисления частот без составления уравнения частот. Определение самой низкой частоты с удовлетворительными результатами достигается обычно методом Рэлея. Для ее вычисления, а также вычисления частот высших порядков может быть применен метод последовательных приближений. Подобный метод был предложен Л. Вианелло[1]), применившим его при вычислении критических нагрузок для сжатых стержней. А. Стодола в своей книге по паровым турбинам применил его в вычислении главных частот колебаний валов. Подробное изложение этого метода приводится в книге К. Б. Бицено и Р. Граммеля[2]). Весьма полный обзор различных методов решения задач колебаний кручения со сравнительной оценкой их выполнен К. Клоттером[3]).

Большое практическое значение имеют также поперечные колебания валов и балок. Простейшие случаи колебаний призматических стержней были исследованы еще в XVIII веке, причем решения их входили в состав сочинений по акустике. Использование этих решений в применении к балкам технического назначения, поперечные размеры которых не малы в сравнении с пролетом, или же в случаях, когда недопустимо пренебрегать сравнительно более высокими частотами, вызвало необходимость в выводе более полного дифференциального уравнения, учитывающего влияние на прогиб также и касательных напряжений[4]). Весьма часто размеры поперечного сечения меняются вдоль пролета балки. Строгий анализ колебаний таких балок выполним лишь в простейших случаях[5]), обычно же приходится прибегать к одному из приближенных методов интегрирования дифференциальных уравнений. Эти методы приобрели популярность в связи с потребностями расчета частот поперечных колебаний в судах[6]). Основываются они обычно

[1]) Vianello L., VDI, т. 42, стр. 1436, 1898.

[2]) Biezeno C. B., Grammel R., Technische Dynamik, Berlin, 1939. (*Прим. авт.*) Русск. перев. Бицено К. Б., Граммель Р., Техническая динамика, т. II, М.—Л., 1952, гл. X. (*Прим. перев.*)

[3]) Klotter K., Ing.-Arch., т. 17, стр. 1, 1949.

[4]) Тимошенко С. П., Теория упругости, т. 2, стр. 206, СПб., 1916. См. также Phil. Mag. (6), т. 41, стр. 744; т. 43, стр. 125.

[5]) См. Ward P. F., Phil. Mag., т. 25, стр. 85—106, 1913; Динник А. Н., Диссертация, Екатеринослав, 1915. (*Прим. авт.*) Динник А. Н., Приложение функций Бесселя к задачам теории упругости, ч. 2, Теория вибраций, Изв. Екатериносл. горн. ин-та, вып. 2, 1915; см. также Динник А. Н., Избранные труды, т. II, АН УССР, 1955. (*Прим. перев.*)

[6]) Весьма полный обзор литературы по вибрациям судов и сравнение различных методов анализа их дается П. Ф. Папковичем: Прикл. матем. и мех., Изд. АН СССР, т. 1, стр. 97—124, 1933.

на упомянутой выше идее последовательных приближений, принадлежащей Л. Вианелло. Практический интерес представляют также и колебания призматических стержней с укрепленными на их торцах массами; в связи с этим для них были определены основные формы[1]).

Продолжала интересовать инженеров и проблема поперечных колебаний мостов под подвижными нагрузками. В 1905 г. А. Н. Крылов дал полное решение этой задачи[2]), пренебрегая массой катящейся нагрузки и приняв, что постоянная сила движется по призматической балке с постоянной скоростью. Был рассмотрен также и случай пульсирующей нагрузки, имитирующий движение по мосту недостаточно уравновешенного паровоза[3]). Исследование показало, что пульсирующая сила способна возбудить значительные колебания в условиях резонанса. Эта задача повторно была рассмотрена Инглисом[4]), принявшим во внимание при некоторых упрощающих допущениях также и влияние катящейся массы. В общем виде оценка влияния катящихся масс была выполнена А. Шалленкампом[5]), который провел и опыты с маломасштабной моделью, чтобы убедиться в соответствии своих теоретических вычислений с экспериментальной кривой прогибов. В Стэнфордском университете Р. С. Эйри, Джордж Форд и Л. С. Якобсен поставили теоретическое и экспериментальное исследование колебаний, производимых в неразрезной двухпролетной балке движущейся по ней силой[6]).

Ряд серьезных вибрационных проблем был изучен инженерами-практиками в связи с задачами проектирования паровых турбин. Первое экспериментально-теоретическое исследование биения вала, несущего диск, было выполнено А. Фёпплем[7]). Дальнейшее освещение этот вопрос получил в книге А. Стодолы по паровым турбинам. Учет влияния гистерезиса на критические скорости вала произвел А. Л. Кимболл[8]). Вибрации турбинных лопаток могут иногда быть чрезмерными и приводить к разрушению. Эта задача

[1]) Timoshenko S. P., Z. Math. u. Physik, т. 59, 1911. (*Прим. авт.*) На русск. яз.: Тимошенко С. П., О явлениях резонанса в валах, Изв. СПб. политехн. ин-та, т. III, 1905. (*Прим. ред.*)

[2]) Kryloff A. N., Math. Ann., т. 61, 1905 (*Прим. авт.*) См. также гл. VII книги А. Н. Крылова, О некоторых дифференциальных уравнениях матем. физики, Изд. АН СССР, 3-е изд., 1933.

[3]) Тимошенко С. П., Изв. Киевского политехн. ин-та, Киев, 1909; Phil. Mag., т. 43, стр. 1018, 1922. (*Прим. авт.*) Имеется в виду статья «О вынужденных колебаниях призматических стержней», Киев, 1909. (*Прим. ред.*)

[4]) Inglis C. E., A mathematical treatise on vibrations in railway bridges, Cambridge, 1934.

[5]) Shallenkamp A., Ing.-Arch., т. 8, стр. 182, 1937.

[6]) Ayre R. S., Ford George, Jacobsen L. S., J. appl. mech., т. 17, стр. 1, 283.

[7]) Föppl A., Civiling, т. 41, стр. 333, 1895.

[8]) Kimball A. L., Phys. Rev., 1923; 6-я серия, т. 49, стр. 724, 1925.

подвергалась изучению многими инженерами. Здесь приходится иметь дело с колебаниями стержня переменного сечения при совместном действии осевой и поперечной сил. Определение основной частоты производится при этом обычно методом Рэлея[1]). С целью смягчения вредного эффекта колебаний лопатки соединяются часто в группы, и изучение режима таких сложных систем представило новую проблему, решением которой занимались Э. Шверин[2]) и Р. П. Кроон[3]).

Колебания вращающихся дисков—не менее важная проблема в проектировании турбин. Теоретически она была изучена на основе метода Рэлея А. Стодолой[4]), а экспериментально—Вильфредом Кемпбэллом[5]), описавшим метод наблюдения колебаний диска в условиях эксплуатации. Весьма полное экспериментальное исследование колебаний круглых дисков было проведено Мэри Д. Уоллер[6]), применившей новый эффективный метод получения хладниевых линий. К большим успехам привело также и изучение колебаний прямоугольных пластинок, главным образом благодаря сделавшей эпоху работе Ритца (см. стр. 404). Дана Юнг[7]) применил недавно метод Ритца в вычислении частот для прямоугольных пластинок при различных краевых условиях.

С вопросами колебаний круговых колец и кольцевых сегментов приходится встречаться в исследовании колебаний круговых рам, частей вращающегося электрического машинного оборудования и арок. Изгибные колебания кольца круглого поперечного сечения в его плоскости были изучены Р. Хоппе[8]) и под прямыми углами к этой плоскости Дж. Мичеллом[9]). Крутильные колебания того же типа колец были исследованы Э. Бассетом[10]). Колебания кольцевого сегмента при различных условиях на торцах привлекли внимание нескольких авторов; К. Федерхофер[11]) дал весьма подробное обсуждение этой проблемы и недавно собрал и издал в виде книги все свои многочисленные печатные труды по этому вопросу.

В XX веке продолжалось и изучение удара упругих тел. Эксперименты по соударению стальных шаров засвидетельствовали

[1]) Sörensen E., Ing.-Arch., т. 8, стр. 381, 1937; Mesmer G., Ing.-Arch., т. 8, стр. 396, 1937.

[2]) Schwerin E., Z. tech. Physik, т. 8, стр. 312, 1927.

[3]) Kroon R. P., Trans. ASME, т. 56, стр. 109, 1934; Mech. Eng., т. 62, стр. 531, 1940.

[4]) Stodola A., Schweiz. Bauztg., т. 63, стр. 112, 1914.

[5]) Campbell Wilfred, Trans. ASMF, т. 46, стр. 31, 1924.

[6]) Waller Mary D., Proc. Phys. soc. (Brit.), т. 50, стр. 70, 1938.

[7]) Young Dana, J. appl. mechanics, т. 17, стр. 448, 1950.

[8]) Hoppe R., J. Math. (Crelle), т. 73, 1871.

[9]) Michell J. H., Messenger math., т. 19, 1890.

[10]) Basset A. B., Proc. London math. soc., т. 23, 1892.

[11]) Federhofer K., Dynamik des Bogenträgers und Kreisringes, Wien, 1950.

обоснованность теории Герца[1]). Дж. Сирс[2]), применивший в своих опытах стержни со сферическими торцами, установил соответствие их результатов теории Сен-Венана продольного удара цилиндрических стержней. Д. Табор исследовал удар шаров за пределом упругости[3]).

Поперечный удар шара о балку был изучен теоретически автором настоящей книги[4]). Сочетая данную Герцем теорию деформации на поверхности контакта с теорией поперечных колебаний балки, представилось возможным вычислить продолжительность удара и показать, что в процессе удара обычно происходит несколько перерывов контакта между шаром и балкой. Этот результат был подтвержден опытами Г. Л. Масона[5]). Ряд авторов продолжил исследования поперечного удара[6]). Пластическая деформация брусьев, а также упругая и пластическая деформация разнообразных конструкций в условиях удара привлекли к себе за последнее время большое внимание в связи с некоторыми вопросами военной техники[7]).

---

1) Динник А. Н., Журнал Русского физ.-хим. об-ва, т. 38, стр. 242, 1906. (*Прим. авт.*) См. также его «Удар и сжатие упругих тел», 1909. Избр. труды, т. I, 1952. (*Прим. ред.*)

2) Sears J. E., Proc. Cambridge Phil. soc., т. 14, стр. 257, 1908; см. также Wagstaff J. E. P., Proc. roy. soc. (London) (A), т. 105, стр. 544, 1924; Prowse W. A., Phil. Mag. (7), т. 22, стр. 209, 1936; Davies R. M., Trans. roy. soc. (London) (A), т. 240, стр. 375—457, 1948.

3) Tabor D., Engineering, т. 167, стр. 145, 1949.

4) Timoshenko S. P., Z. Math. u. Physik, т. 62, стр. 198, 1914. (*Прим. авт.*) На русск. яз.: К вопросу о действии удара на балку, Изв. СПб. политехн. ин-та, т. XVII, 1912. (*Прим. ред.*)

5) Mason H. L., J. appl. mechanics, т. 58, стр. A—55, 1936.

6) См. Arnold R. N., Proc. inst. mech. engrs. (London), т. 137, стр. 217, 1937; Lee E. H., J. appl. mech., т. 62, стр. A—129, 1940; Zener C., J. appl. mech., т. 61, стр. A—67, 1939; Tuzi Zirô, Nisida Masataka, Bull., inst. Phys. chem. research (Tokyo), т. 15, стр. 905—922, 1936.

7) Библиография работ советских ученых в области расчетов конструкций на колебания и удар приведена в книге: Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К. Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И., Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении, т. II, Машгиз, М., 1952. (*Прим. ред.*)

ГЛАВА XIV

ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ В ПЕРВОЙ ПОЛОВИНЕ XX ВЕКА

89. Новые методы расчета статически неопределимых систем

В XIX веке развитие теории сооружений определялось главным образом задачами расчета ферм. Достаточно приемлемые решения здесь могли быть получены, исходя из допущения, что узлы фермы шарнирные и, следовательно, все стержни подвергаются действию лишь осевых усилий. Внедрение в строительную технику железобетона сопровождалось широким использованием различных типов рамных систем, конструкций с жесткими узлами. Эти конструкции отличаются, как правило, высокой степенью статической неопределимости, и составляющие их элементы работают главным образом на изгиб. Разработанные ранее методы обнаружили вскоре в применении к такого рода системам свою несостоятельность и взамен их в практику проектирования вошли новые методы, основанные на учете деформаций.

Выше мы уже видели (см. стр. 385), что при вычислении дополнительных напряжений в статически неопределимых системах в качестве неизвестных выгодно принимать углы поворота жестких узлов. Систематическое использование углов поворота в расчете рамных систем было введено Акселем Бендиксеном[1]), разработавшим так называемый *метод угловых деформаций*. Рассматривая рамную систему, в которой допустимо пренебречь линейными смещениями узлов[2]), можно использовать хорошо известное выражение для изгибающего момента M_{mn}, действующего на конец m стержня mn (рис. 197):

$$M_{mn} = 2k_{mn}(2\theta_{mn} + \theta_{nm}) + M^{0}_{mn}. \qquad \text{(a)}$$

---

[1]) Bendixen Axel, Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstructionen, Berlin, 1914.

[2]) Бендиксен в своей работе рассматривает также и более общие случаи.

Здесь θ_{mn} и θ_{nm}—углы поворота концов стержня, принимаемые положительными при повороте по часовой стрелке, $k_{mn}= =EI_{mn}/l_{mn}$—так называемый *коэффициент жесткости* (погонная жесткость), а M^0_{mn}—*момент защемления*, иными словами, момент, действующий на конце m стержня, если его концы жестко защемлены и к нему приложены лишь поперечные нагрузки P и Q. Эти моменты считаются положительными, если их действие на стержень приводит его в состояние вращения по часовой стрелке. Если в системе, воспроизведенной на рис. 198, мы примем в качестве неизвестных концевые моменты стержней ab, ac, ad и ae, то нам придется составить и решить семь уравнений; можно привести задачу к решению всего лишь одного уравне-

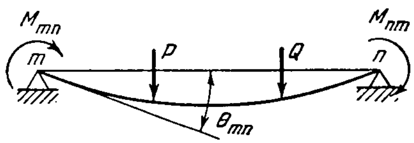


Рис. 197.

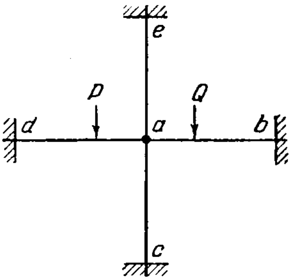


Рис. 198.

ния, если за искомую неизвестную принять угол поворота θ_a жесткого узла a. Это уравнение мы получим, приравняв нулю сумму четырех концевых моментов стержней, сходящихся в узле a. Выражая эти моменты через (а) и учитывая, что концы b, c, d и e неподвижны, получаем:

$$4\theta_a(k_{ab}+k_{ac}+k_{ad}+k_{ae}) = -(M^0_{ab}+M^0_{ad}). \qquad \text{(b)}$$

Решая это уравнение относительно θ_a и вводя найденное значение в выражение (а), получим концевые моменты для всех стержней системы. Для более сложных систем, где приходится иметь дело с несколькими жесткими узлами (подобными узлу a в только что разобранном примере), мы составляем уравнение, эквивалентное уравнению (b) для каждого такого узла. Число таких уравнений равно числу неизвестных углов поворота, и как только эти углы определятся, все концевые моменты можно найти из уравнений (а).

Следующий шаг в упрощении расчета стержневых систем был сделан К. А. Чалышевым[1]). Этот автор пользуется методом последовательных приближений и приводит задачу к решению только одного уравнения с одним неизвестным на каждом этапе решения. Рассматривая рамную систему рис. 199, в которой вве-

[1]) Č a l i š e v K. A., Tehnički list, №№ 1—2, 1922; №№ 7—21, 1923.

дением горизонтального стержня ab исключено горизонтальное смещение, он полагает сначала, что все узлы защемлены и что под воздействием нагрузок P_1, P_2 они не получают поворотов. В этом предположении он вычисляет *концевые моменты* защемления для всех загруженных стержней и суммирует их для каждого узла. Полученная таким путем и взятая с обратным знаком сумма представляет собой действующий на рассматриваемый узел *неуравновешенный момент.* Окончательные значения концевых моментов мы получим, суммируя (алгебраически) концевые моменты, произведенные *неуравновешенными моментами* в узлах, и предварительно вычисленные концевые моменты. Чалышев решает эту последнюю задачу способом последовательных приближений. Обозначая неуравновешенные моменты системы (рис. 199) через M_c, M_d, M_e, он раскрепляет на время один из узлов, сохраняя остальные защемленными, и вычисляет первые приближения для углов поворота. Раскрепляя, например[1]), узел d на рис. 199 и продолжая считать остальные узлы защемленными, он составляет уравнение типа (b) для первого приближения θ_d' угла поворота θ_d; это уравнение принимает вид

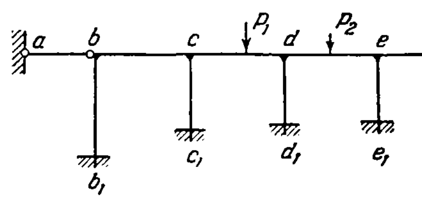


Рис. 199.

$$4\theta_d'(k_{dc}+k_{de}+k_{dd_1}) = -(M_{de}^0+M_{dc}^0) = M_d,$$

откуда

$$\theta_d' = \frac{M_d}{4\sum k_{mn}}. \qquad \text{(c)}$$

Соответствующее первое приближение M_{mn}' концевых моментов определяется по углам поворота узлов из хорошо известного уравнения

$$M_{mn}' = 2k_{mn}(2\theta_{mn}' + \theta_{nm}'). \qquad \text{(d)}$$

Так как входящие сюда значения θ_{mn}' и θ_{nm}' не являются точными, то сумма $-\Sigma M_{mn}'$ не будет равна неуравновешенному моменту M_d в узле d. Чтобы получить второе приближение, Чалышев находит разность $\Delta' M_d = M_d + \Sigma M_{mn}$ и, вводя ее в уравнение (c) вместо M_d, получает поправку θ_d''. Располагая такими поправками для всех узлов и используя их в уравнении (d), можно найти соответствующие поправки $\Delta M_{mn}'$. Если эти поправки прибавить к первым приближениям концевых моментов, мы получим для этих

[1]) Чалышев рекомендует начинать с того узла, в котором неуравновешенный момент имеет наибольшее значение.

моментов более близкие приближения. Обычно они бывают достаточно точными для практических целей. Но если задача требует лучшего приближения, Чалышев, повторяя по отношению ко вторым приближениям M''_{mn} только что проделанную процедуру, приходит к третьему приближению, а в случае необходимости — и к дальнейшим.

Вместо того чтобы получать последовательные приближения, пользуясь уравнениями (c) и (d), мы можем достигнуть того же непосредственно, распределяя неуравновешенные моменты, и с этой целью раскреплять поочередно один узел за другим, продолжая при этом считать все остальные узлы защемленными.

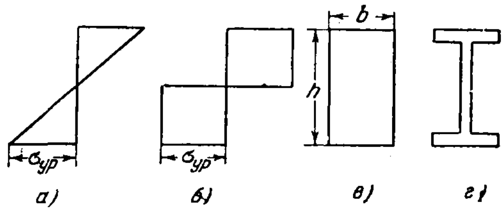


Рис. 200.

Такая процедура последовательных приближений была предложена Харди Кроссом[1]) и нашла широкое применение в Америке.

При назначении надлежащих размеров поперечных сечений в стальных конструкциях иногда бывает необходимо учитывать не только те нагрузки, при которых материал начинает обнаруживать текучесть, но и такие, под действием которых сооружение окончательно теряет несущую способность, совершенно разрушаясь. Анализ свидетельствует, что если два сооружения спроектированы с одним и тем же коэффициентом запаса относительно предела текучести, то они могут характеризоваться весьма различными коэффициентами запаса в отношении полного разрушения. Рассмотрим, например, чистый изгиб балки и положим, что материал ее — сталь — следует закону Гука до предела текучести, с превышением же этого предела — удлиняется без упрочнения; при этих условиях распределения напряжений, показанные на рис. 200, *а* и 200, *б*, будут отражать два предельных состояния: 1) начало текучести и 2) полное разрушение. Соответствующие изгибающие моменты для прямоугольного поперечного сечения (рис. 200, *в*) определяются из следующих формул:

$$M_{\text{т}} = \sigma_{\text{тек}} \frac{bh^2}{6}, \qquad M_{\text{пр}} = \sigma_{\text{тек}} \frac{bh^2}{4},$$

[1]) Cross Hardy, Trans. ASCE, т. 96, 1932.

откуда

$$M_{\text{пр}} : M_{\text{т}} = 1{,}5.$$

Для двутавровой балки (рис. 200, *г*) это отношение окажется много меньшим и будет зависеть от соотношения размеров поперечного сечения. Отсюда следует, что если две такие балки—прямоугольная и двутавровая—спроектированы с одним и тем же коэффициентом запаса в отношении предела текучести, то в отношении окончательного разрушения коэффициент запаса двутавровой балки окажется меньшим, чем для балки прямоугольного профиля.

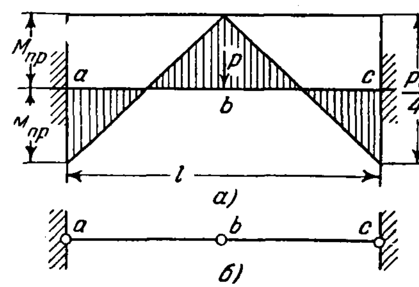


Рис. 201.

Учитывая это обстоятельство, некоторые инженеры рекомендовали[1]) назначать размеры поперечных сечений для элементов сооружений, исходя из предельного сопротивления. Они указывали, что если распределение напряжений в сечении при достижении предельного сопротивления представляется эпюрой (рис. 200, *б*), то легко может быть найдена и соответствующая этому состоянию материала предельная нагрузка. Например, для однопролетной балки с защемленными концами, нагруженной в середине пролета (рис. 201, *а*), мы можем заключить, что окончательная утрата ею несущей способности наступит, когда предельное значение M изгибающего момента будет достигнуто в трех сечениях: a, b, c. Всякое дальнейшее загружение приведет ее в состояние, тождественное с состоянием двух шарнирно соединенных между собой двухшарнирных брусьев (рис. 201, *б*). Величина предельной разрушающей нагрузки определится тогда из соответствующей эпюры изгибающих моментов (рис. 201, *а*), которая дает нам:

$$\frac{P_{\text{разр}} l}{4} = 2M_{\text{пр}}.$$

Если мы подойдем с этой же точки зрения к расчету таких конструкций, как каркасы высотных зданий, характеризующихся высокой степенью статической неопределимости, и введем шарниры во все те поперечные сечения, где изгибающие моменты

---

[1]) См. статью: K i s t N. C., Eisenbau, 1920, стр. 425; теоретическое исследование вопроса проводится в книге: G r ü n i n g M., Die Tragfähigkeit statisch unbestimmer Tragwerke..., Berlin, 1926.

достигают предельных значений, то задача определения разрушающих нагрузок сведется к простой статике твердых тел и весь расчет напряженного состояния системы чрезвычайно упростится.

В расчетах систем из гибких стержней, несущих осевую нагрузку и подвергающихся одновременно действию поперечных сил, большое практическое значение приобретают задачи, связанные с условиями работы балки-колонны. Первое систематическое исследование относящихся сюда вопросов принадлежит А. П. Фандер-Флиту[1]). Построив теорию такого рода систем, он дополнил ее составленными им же расчетными таблицами. С развитием самолетостроения тема балки-колонны выдвинулась на первый план, и рядом авторов были разработаны новые, более детальные таблицы[2]) для упрощения таких расчетов[3]).

90. Арки и висячие мосты

С введением в инженерно-строительную практику железобетона широкое применение вновь получили арки, особенно в мостовых конструкциях; это повело к изысканию более совершенных методов определения и исследования усилий в арочных системах. Бесшарнирная арка представляет собой статически неопределимую систему с тремя «лишними неизвестными», ее расчет может быть значительно упрощен надлежащим выбором этих неизвестных. К. Кульман[4]) ввел понятие о так называемом *упругом центре* и показал, что если реакции, возникающие в пятах арки, представить силой, приложенной в ее упругом центре, и парой, то три неизвестные (две компоненты силы и момент пары) могут быть определены каждая из одного уравнения с одной неизвестной. Нахождение упругого центра и определение реакций он производил графическим методом, вводя фиктивные силы, аналогичные тем, что применяются в исследовании прогиба балок. Несколько иные

---

[1]) Фан-дер-Флит А. П., Изв. Собр. инж. п. с., 1900—1903; Изв. Петерб. политехн. ин-та, СПб., т. 1, вып. 1—2, 3—4, 1904.

[2]) Весьма подробные таблицы были вычислены Найлсом; они приводятся в книге: Niles A. S., Newell J. S., Aeroplane structures, 2-е изд., 1938.

[3]) О работах советских ученых по различным разделам строительной механики стержневых систем см.: Рабинович И. М., Достижения строительной механики стержневых систем в СССР, Изд. Ак. архит. СССР, 1949; его же «Курс строительной механики стержневых систем», т. I—II, 2-е изд., Стройиздат, 1950—1954 (исторические справки в конце каждой главы); Филоненко-Бородич, М. М. «Новые вопросы строительной механики» в книге «Механика в СССР за 30 лет», Гостехиздат, 1950. (*Прим. ред.*)

[4]) См. книгу Ritter W., Anwendungen der graphischen Statik, т. 4, стр. 197, Zürich, 1906.

методы расчета арок были предложены Е. Мёршем[1]), И. Меланом[2]) и А. Штрасснером[3]). В их руководствах по этому предмету приводятся многочисленные таблицы для вычисления распора и изгибающих моментов в арках при различных их геометрических параметрах.

С точки зрения условий наивыгоднейшей работы арки наиболее рациональным очертанием ее оси следует считать то, при котором она совпадает с веревочной кривой для постоянных нагрузок. Если это условие выполнено в трехшарнирной арке, то равнодействующая сила в каждом ее поперечном сечении будет действовать по касательной к оси арки и вызывать в этих сечениях лишь равномерно распределенные сжимающие напряжения. В бесшарнирной же арке внутренние силы зависят от деформации сооружения, и потому полностью исключить в ней напряжения изгиба мы лишены возможности. Если вначале ось такой арки и совмещается с веревочной кривой для постоянной нагрузки, то в дальнейшем вследствие объемного сжатия материала, усадки бетона и понижения температуры она будет испытывать некоторое укорочение. Распор арки при этом несколько уменьшится в сравнении с расчетным значением его для трехшарнирной конструкции. В результате этого кривая давлений в бесшарнирной арке смещается относительно проектной оси (совпадающей с веревочной кривой для постоянной нагрузки) вверх в ключе и вниз в пятах. Особенно значительным становится это смещение в толстых пологих арках, где в связи с этим мы можем ожидать появления нежелательных растягивающих напряжений в пятах. За последнее время поэтому был предложен ряд разнообразных методов ограничения или компенсации этих смещений в крупных арочных сооружениях. Иногда с этой целью в ключ и в пяты вводятся временные шарниры, назначение которых—обеспечить свободу поворота отдельных секций арки при ее раскружаливании. Таким приемом удается избежать смещения кривой давления, являющегося следствием укорочения продольной оси арки под постоянной нагрузкой. Заполняя затем после раскружаливания зазоры временных шарниров бетоном, мы получаем бесшарнирную арку, ось которой совмещается с веревочной кривой для постоянной нагрузки. Чтобы компенсировать смещения кривой давления, связанные с усадкой

---

[1]) Mörsh E., Schweiz. Bauztg, т. 47, стр. 83, 1906; см. также Mörsch E., Der Eisenbetonbau, т. 2, ч. 3, 1935. (*Прим. авт.*) Имеется русский перевод.

[2]) Melan J., Gesteschi T., Bogenbrücken, Handbuch für Eisenbetonbau, т. 11, 1931. (*Прим. авт.*) Русск. перев. под ред. В. В. Григорьева: Мелан и Гестеши, Железобетонные арочные мосты, Трансжелдориздат, 1939. (*Прим. ред.*)

[3]) Strassner A., Der Bogen und das Brückengewölbe, 3-е изд., т. 2, Berlin, 1927. (*Прим. авт.*) Русск. перев. в книге: Каменцев П. Я. и Дигинский Б. Н., Бесшарнирные арочные мосты, М., 1928. (*Прим. ред.*)

бетона и падением температуры, следует разместить временные шарниры с надлежащими эксцентриситетами с тем, чтобы по заполнении зазоров после раскружаливания в ключе и в пятах возникли изгибающие моменты, по своим знакам противоположные тем, которые могут ожидаться в результате усадки бетона и падения температуры. Э. Фрейссине[1]) подал мысль вводить во временный ключевой зазор между двумя половинами арки домкраты. С их помощью можно обеспечить в ключе наивыгоднейшее расположение кривой давления, прежде чем будет произведено заполнение зазора бетоном. Для арки с балкой-затяжкой Ф. Дишингер[2]) предложил применить тросы. Путем натяжения последних можно достигнуть значительного уменьшения изгибающих моментов от постоянной нагрузки и усадки бетона[3]). В настоящее время идея предварительного приведения материала сооружения в напряженное состояние *предварительного напряжения* получила разнообразные реализации и широкое использование. Дишингеру, например, в выполненных им недавно проектах в Германии удалось этим методом резко снизить вес железобетонных мостов. Применение предварительно напряженного бетона внесло вместе с тем большое оживление в теоретическую и экспериментальную разработку относящихся сюда научных вопросов[4]). Применяя в качестве арматуры проволоку из высокопрочной стали и подвергая ее во время твердения бетона весьма высоким растягивающим напряжениям, представилось возможным изготовлять индустриальными методами железобетонные балки, основной материал которых—бетон—уже находится (до загружения, лишь под воздействием растянутой арматуры) в напряженном состоянии значительного начального сжатия. Такие предварительно напряженные балки способны до появления в бетоне трещин выдерживать значительно более высокие нагрузки, чем это свойственно обыкновенным железобетонным балкам. Чтобы облегчить процесс создания предварительных напряжений, А. Лоссье (A. Lossier) предложил использовать специальный вид цемента, обладающего способностью расширяться при твердении[5]). При

---

[1]) Freyssinet E., Génie civil, т. 79, стр. 97, 1921; т. 93, стр. 254, 1928. (*Прим. авт.*) В русской литературе см. статью П. В. Щусева, «Изв. МВТУ», № 1,1929; К. С. Завриева «Изв. Пол. ин-та Грузии», Тбилиси, 1929. (*Прим. ред.*)

[2]) Dischinger F., Bauing, т. 24, стр. 193, 1949.

[3]) Génie civil, 1944.

[4]) Методы вычисления начальных напряжений и описания экспериментов приводятся в следующих книгах: Ritter M., Lardy P., Vorgespannter Beton, Zürich, 1946; Magnel Gustave, Le béton précontraint, Gand (Belgique), 1948; Magnel G., Prestressed concrete, London, 2-е изд., 1950.

[5]) Этот способ создания предварительных напряжений был применен Дишингером при постройке моста через Саале близ Альслебена в 1927—1928 гг., а также неоднократно в военные годы в строительстве ангаров.

таком сочетании в стальной проволоке возникают растягивающие напряжения, в бетоне же—сжатие, и тогда применение специальных механических приспособлений для предварительного растяжения арматуры становится излишним.

При проектировании арок инженеры обычно принимают, что перемещения, являющиеся результатом упругих деформаций, малы, и на этом основании исходят в своих расчетах из неизменной недеформированной продольной оси арки. Между тем в статически неопределимых арках больших пролетов влияние прогибов на величину возникающих в них усилий может оказаться значительным[1]). В этих условиях расчет, основанный на предположении неизменности начально недеформированной оси, может рассматриваться только как первое приближение: за ним должно последовать нахождение более точного решения с учетом влияния деформаций, определяемых из первого приближения.

Возрастающее использование арочных конструкций в строительстве плотин возлагает на инженеров обязанность решения весьма сложной задачи анализа напряжений в пространственной системе. В связи с этим в США был разработан приближенный метод расчета крупных плотин арочного типа. Первое приближение достигается путем замены пространственной системы плотины системой горизонтальных арок и вертикальных консолей. Горизонтальное гидростатическое давление распределяется методом проб на две радиальные компоненты, одна из которых передается аркам, другая—консолям. Надлежащим распределением нагрузки будет по этой схеме то, при котором как арки, так и консоли во всех точках будут иметь общие радиальные компоненты прогиба. Этот метод был предложен инженерами мелиоративного бюро США[2]). Для получения более точных результатов в расчет вводится влияние крутящих моментов в горизонтальных и вертикальных сечениях, а также поперечных сил, действующих в горизонтальных сечениях вдоль осевых линий арок, и соответствующих вертикальных перерезывающих сил в радиальных сечениях[3]). С целью проверки этой теории для некоторых ответственных случаев были поставлены испытания на моделях. В связи со строительством плотины Гувера была испытана модель из пластерцелита, загружение производилось ртутью; измеренные значения деформаций оказались при этом весьма близкими к расчетным. Произведенные впоследствии замеры на законченном сооружении

[1]) См. статьи Мелана (Melan J.) в «Handbuch der Ingenieurwissenschaften», т. 2, 1906 и Bauing, 1925; K a s a r n o w s k y S., Stahlbau, 1931; F r i t z B., Theorie und Berechnung vollwandiger Bogenträger, Berlin, 1934.

[2]) См. статью: H o w e l l C. H., J a q u i t h A. C., Trans. ASCE, т. 93, стр. 1191, 1929.

[3]) См. доклад Вестергора: W e s t e r g a a r d H. M., Proc. III intern. cong. appl. mechanics, 1931, Stockholm, т. 2, стр. 356.

дали результаты, оправдавшие прогнозы как расчета, так и испытания на модели.

Значительные успехи за последнее время[1]) были достигнуты в расчете и конструировании висячих мостов. Те из сооружений этого типа, возведение которых относится к началу XIX века, не оправдали возлагавшихся на них надежд: они оказались слишком гибкими и многие из них обрушились в результате чрезмерных колебаний, возбужденных подвижной нагрузкой или ветром. Такая нежелательная гибкость была компенсирована в позднейших сооружениях введением ферм жесткости. Было установлено также, что колебания, производимые подвижной нагрузкой, уменьшаются с увеличением пролета и веса мостов, почему в весьма крупных мостах удовлетворительные условия достигаются и без введения ферм жесткости. В первоначальных проектах висячих мостов с фермами жесткости принималось обычно, что деформации малы, и потому к ним применялись те же способы расчета, что и к жестким фермам. Первая попытка учитывать прогибы ферм жесткости была сделана В. Риттером, профессором Рижского политехнического института[2]). Следующие шаги в этом направлении были предприняты рядом авторов; в пригодной для практических применений форме такой расчет был представлен И. Меланом[3]). Эта теория была использована в проектировании больших висячих мостов, построенных в США. В ней учитывается влияние равномерно распределенного собственного веса моста, а также равномерно распределенной по части пролета временной нагрузки.

Чтобы установить наиболее неблагоприятное распределение нагрузок, Годар[4]) рекомендовал применять линии влияния в несколько ограниченном смысле (ограниченном тем обстоятельством, что принцип наложения в строгом решении неприменим). Автор настоящей книги произвел исследование изгиба ферм жесткости с помощью тригонометрического ряда[5]). Этим способом удалось определить влияние сосредоточенной силы, что требуется для построения линий влияния. Метод рядов был обобщен Г. Блей-

---

[1]) Весьма полная история строительства висячих мостов приводится в форме библиографии у Яккулы: J a k k u l a A. A., Bull. Agr. mech. coll. Texas, 4-я серия, т. 12, 1941.

[2]) R i t t e r W., Z. Bauwesen, стр. 189, 1877.

[3]) M e l a n J., Theorie der eisernen Bogenbrücken und der Hängebrücken, 2-е изд., Berlin, 1888.

[4]) G o d a r d, Ann. ponts et chaussées, т. 8, стр. 105—189, 1894.

[5]) T i m o s h e n k o S. P., Proc. ASCE, т. 54, стр. 1464, 1928. Независимо использование тригонометрического ряда в расчете ферм жесткости на изгиб было предложено Мартином: M a r t i n, Engineering, т. 125, стр. 1, 1928. Сравнение метода рядов с методом Мелана было произведено А. А. Яккулой: J a k k u l a A. A., Pub. intern. assoc. bridge structur. eng., т. 4, стр. 333, 1936, Zürich.

хом[1]), применившим его при различных условиях опирания ферм жесткости, и И. Я. Штейерманом[2]), рассчитавшим с его помощью ферму жесткости переменного сечения. Как показал Ф. Штюсси[3]), для исследования изгиба ферм жесткости переменного поперечного сечения можно пользоваться уравнениями в конечных разностях. Автор настоящей книги в сотрудничестве с С. Вэем[4]) произвел исследование висячих мостов с неразрезными трехпролетными фермами жесткости.

Теория висячих мостов продолжает привлекать интересы инженеров и в последнее время по этому вопросу вышло несколько серьезных трудов[5]). Большое значение приобрела проблема собственных колебаний висячих мостов; ее освещению было уделено значительное место в специальной печати. Заслуживают в этой связи внимания прежде всего отчет О. Аммана, Т. Кармана, Л. Данна и Дж. Вудраффа[6]) об обстоятельствах аварии моста через Такомское ущелье (США), статьи Г. Рейсснера[7]), а также К. Клёппеля и К. Ли[8]).

91. Напряжения в железнодорожном пути

Надо думать, что исследование напряжений, возникающих в рельсах при проходе по ним подвижной нагрузки, привлекло внимание инженеров уже со времени постройки первых железных дорог. Барлоу (см. стр. 124) определял прочность рельсов различных профилей при изгибе, рассматривая их как балки на двух опорах. В соответствии с этим наибольший изгибающий момент для груза P и расстояния между опорами l определяются произведением 0,250 Pl. Винклер[9]) рассматривал рельс как неразрезную

---

[1]) Bleich H. H., Die Berechnung verankerter Hängebrücken, Wien, 1935.

[2]) Steuerman E., Trans. ASCE, т. 94, стр. 377, 1930. (*Прим. авт.*) См. также Штаерман И. Я., О точном расчете цепных мостов с балкой жесткости, Киев, 1928. (*Прим. ред.*)

[3]) Stüssi F., Publ. intern. assoc. bridge structural eng., т. 4, стр. 531, 1936. См. также его статьи в Schweiz. Bauztg., т. 116, 1940; т. 117, 1941.

[4]) Timoshenko S. P., Way S., Publ. intern. assoc. bridge struct. eng., т. 2, стр. 452, 1934.

[5]) Здесь надлежит отметить следующие: Atkinson R. I., Southwell R. V., J. inst. civilengrs (London), 1939, стр. 289—312; Klöppel K., Lie K. H., Forschungshefte Stahlbau, № 5, Berlin, 1942; Granholm H., Trans. Chalmers univ. technol., Göthenburg, 1943; Asplund S. O., Proc. roy. swed. inst.eng. research, № 184, Stockholm, 1945; Selberg A., Design of saspension bridges, Trondheim, 1946; Gran Olsson R., Kgl. Norske videnskab. selskabs., т. 17, № 2.

[6]) Amman O. H., Kármán Th., Dunn L. G., Woodruff G. B.

[7]) Reissner H., J. appl. mech., т. 10, стр. A—23—A—32, 1943.

[8]) Klöppel K., Lie K. N., Ing.-Arch., т. 13, стр. 211—266, 1942.

[9]) Winkler E., Vorträge über Eisenbahnbau, 3-е изд., Prag, 1875.

балку на жестких опорах и, исходя отсюда, дал для наибольшего момента значение 0,189 Pl.

Дальнейшее развитие эта задача получила в трудах Г. Циммермана[1]), составившего таблицы для упрощения расчета балок на упругом основании по теории Винклера и применившего эту теорию к определению прогиба шпал. Он рассматривал рельс как неразрезную балку на упругих опорах. При обычных расстояниях между шпалами вертикальная нагрузка на рельс распределяется на несколько шпал, так что отдельные упругие опоры могут быть заменены эквивалентным сплошным упругим основанием. Поэтому можно воспользоваться для вычисления напряжений и прогибов в рельсах[2]) теорией балки на упругом основании. Обозначив коэффициент постели жесткости основания через K, мы получим для кривой прогиба (рис. 202) следующее дифференциальное уравнение:

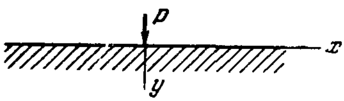


Рис. 202.

$$EI = \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -Ky. \tag{a}$$

Рассматривая рельс как бесконечно длинную балку и интегрируя уравнение (a), находим для наибольшего изгибающего момента значение

$$M_{\text{макс}} = \frac{P}{4} \sqrt[4]{\frac{4EI}{K}}. \tag{b}$$

Соответствующее ему значение наибольшего напряжения равно

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{M_{\text{макс}}}{S} = \frac{P}{4} \frac{\sqrt[4]{I}}{S} \sqrt[4]{\frac{4E}{K}}, \tag{c}$$

где S обозначает момент сопротивления сечения рельса. Второй множитель в этой формуле имеет размерность $см^{-2}$, откуда можно заключить, что для геометрически подобных рельсовых профилей и для постоянных значений отношения E/K величина $\sigma_{\text{макс}}$ остается постоянной, если нагрузка P возрастает в том же отношении, что и погонный вес рельса.

---

[1]) Zimmermann H., Die Berechnung des Eisenbahn-Oberbaues, Berlin, 1888; 2-е изд., Berlin, 1930; см. также его статью Berechnung des Oberbaues в Handbuch Ingenieurwiss, т. 2, стр. 1—68, 1906.

[2]) Эта упрощенная теория была применена автором настоящей книги для русской железнодорожной сети. См. «К вопросу о прочности рельс», Сборник Ин-та п. с., СПб., 1915. Она была использована для польской железнодорожной сети А. Васютынским: см. Wasiutynski A., Ann. acad. sci. tech., Warszawa, т.4, стр. 1—136, 1937. В Германии ее применил д-р Заллер: Saller, Organ Fortschritte Eisenbahnw., т. 87, стр. 14, 1932. См. также статью Читари в том же издании (Czitary E., т. 91, 1936).

Пользуясь теорией балки на упругом основании и принципом наложения, легко получить эпюру изгибающих моментов для системы действующих на рельс грузов. Например, на рис. 203 приведена эпюра изгибающих моментов для четырех равных грузов при значениях момента инерции $I=1882$ *см*^{4} и коэффициента постели $K=105$ *кг/см*^{2}. Значение $M_{\text{макс}}$ для одного груза P согласно уравнению (b) принято за единицу в масштабе моментов. Из рис. 203 видно, что наибольшие моменты приходятся под первым и последним грузами и что каждый из них составляет 75% от наибольшего момента, произведенного одним грузом P. Между грузами рельс изгибается выпуклостью вверх, и наибольшее

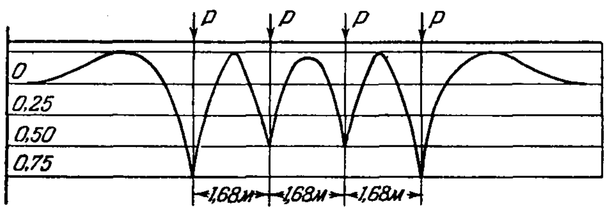


Рис. 203.

численное значение соответствующего изгибающего момента составляет около 25% от получаемого из уравнения (b). Отсюда следует, что при проходе по железнодорожному пути локомотива напряжения в поперечном сечении рельса изменяются несколько раз и по своей величине и по знаку. Этим обстоятельством объясняются усталостные разрушения рельсов.

Обширная экспериментальная работа была проведена по измерению деформации железнодорожного пути под подвижными нагрузками. Однако на первоначальные измерения этого рода, в которых использовались измерительные приборы механического типа, положиться нельзя. А. Васютынский изобрел оптический метод, и ему удалось получить фотографические снимки деформации изгиба и прогибов рельса под колесами движущегося локомотива[1]).

Обширное исследование напряжений в железнодорожном пути было выполнено в Соединенных Штатах Электротехнической

---

[1]) Полное описание этих важных испытаний приводится в диссертации Александра Леонардовича Васютынского, представленной в Петербургский институт инженеров путей сообщения в 1899 г. См. также: Wasiutynski A., Verhandl. intern. Eisenbahn kong., 1895—1898 и книгу Васютынского: Wasiutynski A., Beobachtungen über die elastischen Formänderungen des Eisenbahngleises, Wiesbaden, 1899. (*Прим. авт.*) На русск. яз.: Васютынский А. Л., Наблюдения над временными деформациями верхнего строения на Варшаво-Венской ж. д., Труды съездов инж. сл. пути, XV, 1898 и XVI, 1899. (*Прим. ред.*)

корпорацией Вестингауза. Измерение деформаций в этих испытаниях производилось магнитными тензометрами[1]). Исследования показали, что теория балок на упругом основании достаточно точна для описания работы рельсов. Они также установили, что поперечные силы, как и вертикальные нагрузки, вызывают в рельсах не только изгиб, но и кручение. Этим последним фактором нельзя пренебрегать[2]). С целью нахождения наилучшего метода определения этих сил в полевых испытаниях были поставлены предварительные лабораторные опыты для изучения изгиба упруго опертого рельса и возникающих в нем местных напряжений в точке приложения сосредоточенной нагрузки[3]). Этими предварительными исследованиями было установлено также надлежащее размещение тензометров в полевых испытаниях.

Полевые испытания выяснили большое влияние динамического фактора на напряжения, возникающие в железнодорожном пути под колесами в движении. Васютынский в упомянутой выше диссертации указывает, что колеса некоторых товарных вагонов с изношенными поверхностями бандажей вызывают в рельсах бо́льшие прогибы, чем тяжелые колеса локомотивов с гладкой поверхностью бандажа. Насколько известно, первое теоретическое исследование динамического воздействия смятых колесных бандажей и выбоин в рельсах было проведено Н. П. Петровым[4])— основоположником гидродинамической теории трения в машинах. Пренебрегая в своем исследовании массой рельса и рассматривая его как балку, лежащую на равноудаленных упругих опорах, он выводит дифференциальное уравнение, аналогичное уравнению Уиллиса (см. стр. 212). Интегрирование этого уравнения производится приближенным численным методом. Вычисляя давление колеса на рельс, он учитывает при этом не только изгиб рельсов,

---

[1]) Первоначальный тип такого тензометра был изобретен Риттером (J. G. Ritter). Его дальнейшим усовершенствованием мы обязаны инженерам лабораторий Вестингауза Б. Лангеру (B. F. Langer) и Шамбергеру (J. P. Shamberger), проводившим исследования напряжений в железнодорожном пути. Полное описание прибора приводится Лангером в Handbook of experimental stress analysis, стр. 238.

[2]) См. доклад С. П. Тимошенко: Timoshenko S. P., Proc. II intern. cong. appl. mechanics, Zürich, 1926, стр. 407.

[3]) См. статью С. П. Тимошенко и Б. Лангера: Timoshenko S. P. Langer B. F., Trans. ASME, т. 54, стр. 277, 1932.

[4]) Петров Н. П., Зап. Русск. имп. техн. об-ва, № 2 и 12, 1903, и его последующие труды, опубликованные в Журнале Министерства путей сообщения. (*Прим. авт.*) См. также Петров, Н. П., Давление колес на рельсы железных дорог, ПТГ, 1915. О Николае Павловиче Петрове (1836—1920) и его трудах и деятельности см. статью в книге «Люди русской науки», УТТИ, т. 2, 1948, стр. 942, также Петров М. Н., Николай Павлович Петров, очерк жизни и идей, 1925; Костомаров В. М. и Бургвиц А. Г., Основоположник теории гидродинамического трения в машинах Н. П. Петров, Машгиз, 1952. (*Прим. ред.*)

но также и упругие вертикальные смещения опор и вертикальные перемещения колеса, вызываемые выбоинами.

Это исследование оказалось возможным упростить рассмотрением вместо балки на отдельных упругих опорах балки на упругом основании[1]). При такой расчетной схеме легко определить динамический эффект выбоин на прогиб рельсов. Положим, например, что профиль выбоины (длиной l, глубиной δ) задан уравнением

$$y=\frac{\delta}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{l}\right). \tag{d}$$

Можно показать, что дополнительный динамический прогиб. вызываемый выбоиной, пропорционален δ и зависит от величины отношения T_1/T, где T—период вертикальных колебаний колеса, возникающих под воздействием на него рельса как пружины, а T_1—время, в течение которого колесо проходит выбоину. Наибольший дополнительный прогиб, равный 1,47 δ, получается при скорости, соответствующей $T_1/T=2/3$. Отсюда можно заключить, что дополнительное динамическое давление, являющееся результатом выбоины, равно приблизительно нагрузке, производящей статический прогиб рельса, равный 1,5 δ. Мы видим, что сравнительно малая выбоина производит при определенных скоростях весьма заметный динамический эффект.

В этом расчете массой рельса пренебрегают как малой в сравнении с массой колеса. Это допустимо, если время T_1 велико в сравнении с периодом колебаний рельса на его упругом основании.

При выводе уравнения (a) предполагалось, что прогиб в произвольном поперечном сечении балки пропорционален давлению на основание в том же сечении. Но если мы будем рассматривать основание как полубесконечное упругое тело, прогиб в любом поперечном сечении балки будет функцией распределенного по длине балки давления и задача определения прогибов осложняется. Такое более углубленное исследование было выполнено М. Био[2]) и К. Маргэрром[3]). Последний показал, что согласно более точной теории наибольшее напряжение изгиба в балке получается приблизительно на 20% выше определяемого элементарной формулой[4]).

[1]) См. статью С. П. Тимошенко, указанную на стр. 516 и его же статью в Génie civil, 1921, стр. 551, Paris. Некоторые дальнейшие результаты изучения динамического действия колеса на рельс приводятся в докторской диссертации Б. Ховея: Hovey B. K., Doctor-Dissertation, 1933. (*Прим. авт.*) См. Тимошенко С. П. «О динамических напряжениях в рельсах», «Вестн. инж.», № 4, ПТГ, 1915; а также «К вопросу о вибрациях рельс», Изв. Электрот. ин-та, ПТГ, т. XIII, 1915; «Влияние начальной осадки шпалы на условия изгиба рельс», Сб. ИИПС, ПТГ, 1916 (*Прим. ред.*)

[2]) Biot M. A., J. appl. mechanics, т. 4, стр. 1—7, 1937.

[3]) Marguerre K., ZAMM, т. 17, стр. 224—231, 1937.

[4]) Библиография работ русских и советских ученых за 1897—1940 гг. приведена в книге А. Н. Митинского: «Балки постоянного сечения на упругом основании», Л., 1940. (*Прим. ред.*)

92. Строительная механика корабля

Крупные успехи на протяжении первой половины XX века были достигнуты в применениях науки о прочности к проектированию судов, особенно военно-морского флота. Кораблестроителям пришлось столкнуться здесь с многочисленными новыми проблемами в связи с быстрым ростом габаритов судов, с тенденцией к возможно большему снижению веса их корпуса (с тем чтобы облегчить этим установку тяжелого вооружения и мощной брони), с увеличением скоростей и т. д. Для решения этих задач они обратились к теоретическим исследованиям[1]).

Томас Юнг рассматривал корабль как балку и дал способ построения кривых плавучести и веса. Разности между ординатами этих кривых давали значения нагрузки, действующей на «балку-корабль». Такой расчет продольной прочности судов получил всеобщее признание, а его точность была проверена непосредственными испытаниями. Испытания, проведенные по изгибу корпуса эскадренного миноносца «Вольф»[2]), а впоследствии эсминцев «Престон» и «Брюс»[3]) показали, что измеренные прогибы и напряжения можно привести в соответствие с теорией балки, если при определении жесткости изгиба судна принять во внимание то обстоятельство, что работоспособность некоторых пластин снижается в результате потери устойчивости. Аварии судов «Престон» и «Брюс» произошли вследствие потери устойчивости сжатых пластин и стрингеров.

Опыт показал, что, сверх общих соображений об обеспечении прочности судна как подвергающейся изгибу балки, следует учитывать также и местные напряжения в области резких изменений поперечных сечений и вводить необходимые усиления. Такие именно условия создаются там, где на несущей конструкции главной палубы возводятся надпалубные постройки. Отмечено много случаев возникновения трещин на палубе и на стенках рубки близ углов. Другим важным очагом концентрации напряжений являются углы люков на главной палубе. Были случаи возникновения трещин именно в этих местах, откуда они распространяются постепенно через палубный настил,

---

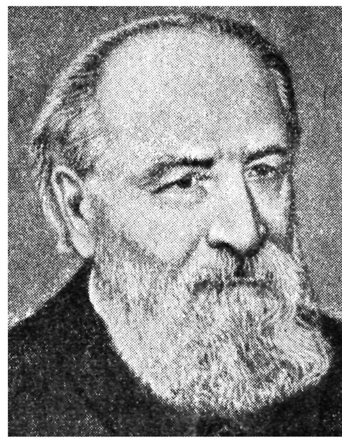
[1]) См. Папкович П. Ф., Краткий очерк развития проблемы внутренних сил в учении об общей крепости корабля, Труды ВНИТОСС, вып. 7, 1932; перепечатаны в книге: Папкович П. Ф., Труды по прочности корабля, Судпромгиз, 1956, стр. 37; там же краткая биография П. Ф. Папковича, составленная В. В. Екимовым. (*Прим. ред.*)

[2]) См. Biles J. H., Trans. inst. naval arch., т. 1, 1905; Hoffmann G. H., Trans. inst. naval architects, 1925.

[3]) Hovgaard W., Trans. soc. naval architects, marine engrs., 1931, стр. 25; см. также доклад Келля (C. O. Kell), представленный в ноябре 1931 г. на заседании Общества кораблестроителей и инженеров флота.

нанося этим серьезный ущерб общей прочности судна[1]). Концентрация напряжений вокруг отверстий в палубах была изучена К. Инглисом[2]); автором настоящей книги было исследовано влияние усиления краев круглых отверстий[3]).

В задачи инженеров-кораблестроителей входит также и обеспечение поперечной прочности судна. С этой целью были разработаны разнообразные методы анализа деформаций шпангоутов. Особое значение эта проблема приобретает в миноносцах и в подводных лодках. Шпангоуты таких судов имеют сходство с замкнутыми кольцами, и потому в расчете их находят применение теории кривого бруса и методы теории арок[4]).



Алексей Николаевич Крылов.

На развитие рациональных методов исследования напряженного состояния и на их применение в конструировании судов оказала глубокое влияние научная деятельность Алексея Николаевича Крылова (1863—1945). Мы даем здесь поэтому краткий очерк важнейших достижений этого великого инженера-ученого[5]). Яркое математическое дарование Крылова обнаружилось еще во время пребывания его в военно-морском училище. Свое свободное время он проводил обычно за чтением книг по математике и к моменту выпуска из училища (1884) уже владел широкой подготовкой в этой науке, далеко превосходившей установленные школьные программы. В 1888 г., после некоторой практической

---

[1]) Авария с «Мэджестик», была описана Эльсбергом: E l l s b e r g E., «Marine Engineering», 1925. Обсуждение подобного случая с «Левиафаном» см. L y e l l J. Wilson, Trans. soc. naval architects marine engrs., 1930.

[2]) I n g l i s C. E., Trans. inst. naval architects, London, 1913.

[3]) T i m o s h e n k o S. P., J. Franklin inst., т. 197, стр. 505, 1924.

[4]) См. статью: M a r b e c M., Bull. assoc. tech. maritime, 1908.

[5]) См. акад. К р ы л о в А. Н., Мои воспоминания, АН СССР, 1945, а также посвященный ему некролог «Прикладная матем. и мех.», т. X, стр. 3, 1946, где приводится также «Список научных трудов, переводов, рефератов, рецензий и статей А. Н. Крылова». (*Прим. авт*). В 1936—1951 гг. издательством Академии наук СССР было осуществлено издание собрания трудов А. Н. Крылова в 12 томах (16 книг). Биографические очерки: Л е й б е н з о н Л. С. и М а р к у ш е в и ч А. Н., «Алексей Николаевич Крылов» в сборнике «Люди русской науки», Гостехиздат, т. I, 1948, стр. 218; Ш т р а у х С. Я., А. Н. Крылов, его жизнь и деятельность, Гостехиздат, 1950; Л у ч и н и н о в С. Т., Академик А. Н. Крылов, Труды Лнгр. кораб. ин-та, вып. IX, 1951, и др. (*Прим. ред.*)

службы в русском флоте, Крылов поступил в Морскую академию, где проявил особый интерес к теории корабля и к проектированию его конструкций. В связи с отличными, обнаруженными им при прохождении курса успехами ему было предложено по окончании Академии (1890) остаться при ней в качестве руководителя практических занятий по математике. С 1891 г. он начал читать там лекции по теории корабля. В качестве введения к этому курсу молодой педагог прочел серию лекций по приближенным вычислениям, показав, каким образом вычислительные методы, разработанные математиками и астрономами, могут получить полезное применение и в практике инженеров. Впоследствии на основе этих лекций он подготовил и опубликовал (1906) руководство по приближенным вычислениям. И в настоящее время эта книга[1]) остается все еще одним из самых серьезных сочинений по этому вопросу.

Весьма скоро А. Н. Крылов заинтересовался теорией движения корабля на волнении. Если проблема бортовой качки подверглась разработке Фруда, то Крылов занялся более сложным вопросом килевой качки. В 1896 г. он успешно решил эту проблему и опубликовал полученные им результаты на английском[2]), а затем на французском[3]) языках. Затем он перешел к исследованию общего случая движения корабля на волнении и изложил свои заключения по этому вопросу в работе «Общая теория колебаний корабля на волнении»[4]) («General theory of the oscillations of a ship on waves»). Эти труды выдвинули Крылова в первый ряд авторитетов по теории корабля, и Общество английских инженеров кораблестроителей (Society of english shipbuilding engineers) наградило его золотой медалью общества, удостоив его таким образом чести, которой не пользовался до него ни один из иностранных ученых. Работая в области изучения вибраций корабля, Крылов обратил внимание и на напряжения, возбуждаемые в обшивке (корпусе) судна силами инерции, и предложил ценный метод вычисления этих напряжений[5]). Он провел также экспериментальные исследования динамических напряжений на нескольких кораблях рус-

---

[1]) К р ы л о в А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, 3-е изд., перераб. и значит. доп., Л.—М., АН СССР, 1935. Последнее издание этой книги 6-е, 1954. (*Прим. перев.*)

[2]) K r y l o v A. N., A new theory of pitching motion of ships on waves (Новая теория килевой качки корабля на волнении и напряжения, вызываемые ею), Trans. inst. naval architects, 1896, стр. 326—359, London.

[3]) Théorie générale des oscillations du navire sur une mer houleuse, Bull. assoc. tech. maritime, т. 8, стр. 1—31, 1897.

[4]) K r y l o v A. N., Trans. inst. naval architects, т. 40, стр. 135—190, 1898. (*Прим. авт.*) Русск. изд.: К р ы л о в А. Н., Качка корабля, Л., ВМА РКиФ. (*Прим. перев.*)

[5]) См. Engineering, 1896, стр. 522—524; Trans. inst. naval architects, т. 40, стр. 197—209, 1898.

ского флота, воспользовавшись для этой цели чувствительным тензометром собственной конструкции.

В 1900 г. А. Н. Крылов был назначен заведующим Опытовым бассейном русского флота в Петербурге. Он поставил в этом учреждении опытную работу на моделях и координировал ее с натурными испытаниями в море новых кораблей. Одновременно он оказал содействие в организации кораблестроительного факультета в Петербургском политехническом институте и разработал для этого института курс лекций по вибрации корабля. Впоследствии он был опубликован отдельной книгой[1]).

Первые исследования вибраций корабля были проведены, вероятно, О. Шликом[2]), сконструировавшим специальный прибор для их записи[3]) и определившим экспериментально частоты для различных форм таких вибраций. А. Н. Крылов в своем курсе дает теоретический анализ свободных колебаний корабля. Корабль рассматривается им как балка переменного поперечного сечения; он пользуется в расчете приближенным методом Адамса[4]) для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Около того же времени Крылов заинтересовался колебаниями мостов и опубликовал упомянутую раньше (см. стр. 502) статью о вынужденных колебаниях балок, возбуждаемых подвижными нагрузками. Использованный в этой статье метод был применен впоследствии в анализе продольных колебаний цилиндров и в измерении давления газа в орудиях[5]).

В связи с проблемой хода корабля на волнении Крылов занялся изучением гироскопических приборов в их применении к целям стабилизации[6]) и впоследствии выпустил из печати книгу о гироскопах[7]).

В «Энциклопедии математических наук» («Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften») А. Н. Крылову принадлежит статья по теории корабля[8]). Он написал ее по просьбе Ф. Клейна (см. стр. 468), который, как мы видели, руководил редакционным подбором материала по механике для этого издания.

---

[1]) Крылов А. Н., Вибрация судов, Л.—М., ОНТИ судостр., 1936.

[2]) Schlick O., Trans. inst. naval architects, 1884, стр. 24.

[3]) См. Schlick O., Trans. inst. naval architects, 1893, стр. 167.

[4]) См. Bashford F., An attempt to test the theories of capillary action with an explanation of the method of integration employed by J. C. Adams, Cambridge, 1883. (*Прим. авт.*) Метод Адамса излагается также в книге: Скарборо Д., Численные методы математического анализа, М.—Л., ГТТИ, 1934, стр. 266—272. (*Прим. перев.*)

[5]) Крылов А. Н., Изв. Российск. Акад. наук, 6-я серия, 1909, стр. 623—654.

[6]) См. его статью в Bull. assoc. tech. maritime, 1909, стр. 109—139.

[7]) Крылов А. Н., Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений, Л., АН СССР, 1932.

[8]) См. Encyklopädie der math. Wissenschaften, т. 4, ч. 3, стр. 517—562, 1906.

В 1908 г. на Крылова было возложено руководство всем кораблестроением русского флота (в должности главного инспектора кораблестроения). В то время Россия предприняла меры к восстановлению своего флота после тяжелых потерь, нанесенных ему Японией в русско-японской войне. В Англии в то время было только что построено несколько линейных кораблей совершенно нового типа (дредноутов), и русская программа наметила постройку судов аналогичного типа. В проектировании этих новых судов возник ряд специальных проблем, и Крылову представился случай применить в решении их весь тот обширный арсенал научных методов, которым он располагал. Замена примитивных эмпирических приемов математическим анализом оказалась чрезвычайно плодотворной, и множество конструктивных проблем получило успешное разрешение под руководством Крылова. Он лично участвовал в этой работе и разработал новый метод расчета балок на упругом основании, внесший значительные упрощения, в особенности в отношении балок переменного поперечного сечения[1]). Он выполнил также чрезвычайно подробное исследование упругой линии сжатого стержня, подвергающегося большим прогибам в условиях потери устойчивости[2]).

В связи со своей преподавательской деятельностью А. Н. Крылов опубликовал несколько книг по прикладной математике и механике. Одна из них — «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах»[3]) — вызвала такой интерес среди инженеров и физиков, что первое ее издание разошлось за несколько дней. Его книга «Приближенное численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений»[4]) была переведена на французский язык[5]). В своих «Воспоминаниях»[6]) А. Н. Крылов рассказывает, как после утомительных дневных часов, проведенных в учреждениях, он читал, чтобы отдохнуть, «отвлечься», классические произведения по астрономии и математике. Таким именно путем возникла его важная работа «Беседы о способах определения

---

[1]) Это исследование было опубликовано впоследствии Академией наук СССР в виде книги Крылов А. Н., О расчете балок, лежащих на упругом основании, Л., АН СССР, 1930; 2-е изд., 1931.

[2]) Крылов А. Н., О формах равновесия сжатых стоек при продольном изгибе, Изв. АН СССР, ОМЕН, 7-я серия, 1931, № 7, стр. 963—1012.

[3]) 1-е издание—1913—Морской Академии, СПб., стр. 360, Изд. АН СССР, стр. 472, 1932.

[4]) В первом варианте эта работа была напечатана в 1917 г. в Ежегоднике Союза морских инженеров, т. 2, стр. 3—43, затем вышла отдельной книгой в Берлине в 1923 г. Росс. ж.-д. миссия. (*Прим. перев.*)

[5]) Krylov A. N., Sur l'intégration numérique approchée des équations differentielles avec application au calcul des trajectoires des projectiles, Paris, 1927.

[6]) См. стр. 217.

орбит комет и планет по малому числу наблюдений»[1]). Он предпринял также выполнение огромной задачи—перевод на русский язык «Начал» Ньютона[2]); свыше 200 примечаний и дополнений было внесено Крыловым в эту работу. В конце своей жизни А. Н. Крылов перевел также книгу Эйлера «Новая теория движения Луны»[3]). Полное собрание сочинений А. Н. Крылова было издано в восьми томах Академией наук СССР в 1936—1943 гг.[4]).

Весьма ценный вклад в строительную механику корабля внес ученик и сотрудник А. Н. Крылова, Иван Григорьевич Бубнов (1872—1919), спроектировавший первые русские дредноуты и подводные лодки. Он первый применил теорию изгиба пластинок в проектировании судовых конструкций, показав, что под гидростатическим давлением прогибы пластинок бывают обычно не малыми, в связи с чем при расчете их необходимо учитывать не только изгиб, но и растяжение в срединной плоскости. Он дал общее решение задачи и составил численные таблицы, весьма облегчающие использование этого решения. Этот труд обратил на себя внимание специалистов не только в России, но и в других странах. В своей первоначальной редакции эта работа была переведена на английский язык[5]), а ее результаты в последующем вошли в состав книги Бубнова «Строительная механика корабля»[6]).

В проектировании судов большое значение имеет теория плоских перекрытий из перекрестных продольных и поперечных балок, и Бубнов много сделал для разработки этой теории. Рассматривая систему параллельных равноотстоящих продольных балок, опирающихся на поперечную балку, Бубнов показал, что эту систему можно трактовать как балку на упругом основании, и для проведения расчета именно по этому способу составил таблицы для

---

[1]) Изв. Ник. Морск. акад., вып. 1, 1911, СПб., стр. 1—161.

[2]) Ньютон Исаак, Математические начала натуральной философии, Пер. с латинск. с прим. и поясн. А. Н. Крылова, Л., АН СССР, 1936. (*Прим. пер.*)

[3]) Эйлер Леонард, Новая теория движения Луны, Перев. с латинск. первой части книги и извлечения из частей второй и третьей, с прим. и поясн. А. Н. Крылова, Л., АН СССР, 1934.

[4]) См. прим. на стр. 521. (*Прим. ред.*)

[5]) Boobnov I. G., Trans. inst. naval architects, стр. 15, 1902. (*Прим. авт.*) На русск. яз. «Напряжения в обшивке судов от давления воды», Морск. сборн., 1902, № 8, 9, 10, 12; отд. изд. СПб. политехн. ин-та, 1904; переиздано в книге: И. Г. Бубнов, Труды по теории пластин, С приложением очерка А. С. Вольмира о жизни и деятельности И. Г. Бубнова, Гостехиздат, М., 1953. (*Прим. ред.*)

[6]) Первые два тома этого важного труда вышли из печати в 1912 г., СПб. Третий том, посвященный применению теории сооружений в проектировании судов, сохранился лишь в литографированном виде. См. также Тимошенко С. П., Пластинки и оболочки, М.—Л., стр. 1—33, 1945, ГИТЛ, и доклад С. Вэя на съезде по прикладной механике США в июне 1932 г.

практического применения. Впоследствии Бубнов распространил свой метод на случай нескольких поперечных балок[1]).

Исследование упругой устойчивости пластинок под нагрузками различных типов и при различных краевых условиях было введено в практику судостроительного проектирования впервые при сооружении русских дредноутов[2]). Постановка линейного корабля в док на одном лишь вертикальном киле предъявляет высокие требования прочности и упругой устойчивости к поперечным переборкам. В связи с этим была разработана теория устойчивости пластинок, усиленных ребрами жесткости, о которой мы упоминали выше (см. стр. 495), а также поставлена серия испытаний на моделях размерами $4{,}5 \times 2{,}1$ *м*. В расчете на изгиб плоских перекрытий из соединенных между собой продольных и поперечных балок был использован метод Рэлея—Ритца[3]), позволивший получить для этой задачи достаточно точные решения.

Все эти усовершенствованные методы расчетов напряженного состояния в конструкциях судов критически освещены и развиты Петром Федоровичем Папковичем (1887—1946) в труде «Строительная механика корабля». В первой его части излагаются вопросы подбора профилей, расчета статически неопределимых балок и плоских рам, составленных из прямых стержней (т. I, стр. 1—618, М., 1945); теория криволинейных рам и перекрестных связей (т. II, стр. 1—816, М.—Л., 1947). Содержание второй части составляют: сложный изгиб и устойчивость стержней; изгиб и устойчивость пластинок (стр. 1—960, Л., 1941). Эти три тома представляют собой самый полный и современный трактат по строительной механике корабля[4]).

---

[1]) Дальнейшее обсуждение относящихся сюда вопросов и указатель литературы на эту тему можно найти в книге М. Хетении: Hetenyi M., Beams on elastic foundation, University of Michigan press, 1946. См. также книгу Хлитчиева: Hlitčijev J. M., Теория упругости, Белград, 1950. (*Прим. авт.*) См. также ряд работ П. Ф. Папковича, объединенных в сборнике «Труды по прочности корабля», Судпромгиз, 1956 и в курсе «Строительная механика корабля», ч. 1, т. II, изд. Морск. транспорт, 1947. (*Прим. ред.*)

[2]) Автор настоящей книги принимал участие в этой работе (1912—1917) в качестве инженера-консультанта.

[3]) См. Тимошенко С. П., Сопротивление материалов, стр. 321, 1911; Теория упругости, т. 2, стр. 72, 1916. См. также Timoshenko S. P., ZAMM, т. 13, стр. 153, 1933.

[4]) Полный перечень трудов П. Ф. Папковича приведен в Тр. Лнгр. корабл. ин-та, вып. X, 1952; там же биографический очерк, составленный А. А. Курдюмовым, и литература о П. Ф. Папковиче. (*Прим. ред.*)

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН

Звездочкой отмечены имена, упоминаемые в примечаниях редактора русского перевода

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ