МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КАЛИНИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Б. З. ВУЛИХ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ КОНУСОВ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Учебное пособие

КАЛИНИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАЛИНИН 1978

УДК 513.88

Данное учебное пособие посвящено ряду вопросов теории конусов в нормированных пространствах. В пособии изложены некоторые специальные вопросы теории конусов, представляющие интерес для специалистов по функциональному анализу и его приложениям.

Учебное пособие предназначено для студентов университетов, специализирующихся по функциональному анализу.

Научный редактор кандидат физико-математических наук, доцент В.Н. Никольский.

БОРИС ЗАХАРОВИЧ ВУЛИХ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ КОНУСОВ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Учебное пособие

Редактор И.А. Лаврова
Технический редактор Н.В. Жеглова

ЕА04607 Сдано в набор 26/X-77 г. Подписано в печать 10/I-78 г.
Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$. Бумага писчая № 1.
Физ. печ. л. 5,25. Усл. печ. л. 4,88. Уч.-изд. л. 4,3.
Тираж 500 экз. Заказ 42. Цена 22 коп.

Издано Калининским государственным университетом.
Темплан 1978, поз. 58.
170013 Калинин, 13, Желябова, 33.
Отпечатано на ротапринте КГУ.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Многочисленные исследования конусов в нормированных, а также и в более общих линейных топологических пространствах привели за последние десятилетия к созданию большой теории — геометрии конусов, эта теория находит важные применения, в первую очередь, при изучении операторных уравнений, а также и в других вопросах математики. Автор неоднократно читал спецкурсы по геометрии конусов для студентов Ленинградского, а также и Калининского университетов и на базе этих спецкурсов подготовил к печати учебное пособие «Введение в теорию конусов в нормированных пространствах», содержащее начальные сведения из геометрии конусов. Однако в этой книге совершенно не были отражены более специальные вопросы из прочитанных автором спецкурсов, необходимые для специалистов по функциональному анализу в упорядоченных пространствах. Эти вопросы, перечень которых виден из оглавления, и составляют содержание данного учебного пособия. Объем пособия не позволил осветить здесь приложения теории конусов к операторным уравнениям. Но это обстоятельство не следует рассматривать как существенный пробел, поскольку в настоящее время имеется значительная литература, посвященная специально операторным уравнениям.

От читателя этого пособия требуется знание основных фактов теории нормированных пространств, а также основных сведений, касающихся замкнутых, телесных, несплющенных и нормальных конусов, например, в объеме упоминавшегося выше пособия автора «Введение в теорию конусов в нормированных пространствах». Ссылки на это пособие обозначаются восклицательным знаком, который ставится после номера главы. Например, V!2 — второй параграф пятой главы. Принцип нумерации теорем в настоящем пособии не требует пояснений. Знак $\square$ — конец доказательства.

Автор глубоко признателен безвременно скончавшемуся Г.Я. Лозановскому, оказавшему значительную помощь при написании этого пособия. Замечания Г.Я. Лозановского позволили существенно дополнить и улучшить первоначальное изложение. Автор благодарит И.И. Чучаева и И.Ф. Даниленко, давших ему много полезных советов, и О.С. Корсакову, И.П. Костенко и Г.Я. Ротковича, прочитавших всю рукопись и оказавших помощь при окончательной редакции пособия.

I. ПРАВИЛЬНЫЕ И ВПОЛНЕ ПРАВИЛЬНЫЕ КОНУСЫ

§ 1. ПРАВИЛЬНЫЕ КОНУСЫ

Определение. Конус K в УНП[1] (X, K) называется *правильным*, если всякая возрастающая (o)-ограниченная последовательность элементов из K (b)-фундаментальна[2].

Из определения сразу следует, что если (X, K) — интервально полное УНП и конус K правилен, то всякая возрастающая (o)-ограниченная последовательность его элементов имеет (b)-предел. Заметим также, что несобственный конус не может быть правильным. Действительно, если $\pm x \in K$, $x \neq 0$, то последовательность $x, -x, x, -x, \dots$ возрастает, (o)-ограничена, но не (b)-фундаментальна.

Легко проверить, что конус неотрицательных функций в пространствах L^p $(1 \leq p < +\infty)$ правилен, а в пространстве $L^\infty[a, b]$ неправилен. Конус неотрицательных последовательностей в пространстве c_0 правилен. Простой пример замкнутого, нормального и правильного конуса в не банаховом (но интервально полном) пространстве представляет конус неотрицательных функций в пространстве L^∞ с интегральной нормой, индуцированной из L^1.

Замечание. Если конус K з УНП (X, K) правилен, то всякое возрастающее (o)-ограниченное направление элементов из K тоже (b)-фундаментально[3].

Действительно, пусть $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq y$. Допустим, что направление $\{x_\alpha\}$ не (b)-фундаментально. Тогда при некотором $\varepsilon > 0$ для любого α существует такой индекс $\beta > \alpha$, что $\|x_\beta - x_\alpha\| \geq \varepsilon$. Следовательно, существует возрастающая последовательность индексов α_n, для которых

$$\|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\| \geq \varepsilon.$$

Но

$$x_{\alpha_1} \leq x_{\alpha_2} \leq \dots \leq x_{\alpha_n} \leq \dots \leq y,$$

и, по определению правильности конуса K, эта последовательность должна быть (b)-фундаментальной. Приходим к противоречию.

[1]Как и в книге [8], мы пользуемся следующими сокращениями: УНП (УБП) — упорядоченное нормированное (банахово) пространство, РУНП (РУБП) — решеточно упорядоченное нормированное (банахово) пространство (см. I!7). В [8] можно найти объяснение и многих других встречающихся ниже терминов.

[2]Понятие правильного, а также и вполне правильного конуса введено М.А. Красносельским [12]. Однако М.А. Красносельский рассматривал только банаховы пространства, и поэтому в его определениях требуется не (b)-фундаментальность, а существование (b)-предела.

[3](b)-фундаментальность направления $\{x_\alpha\}$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое α_0, что $\|x_\beta - x_\alpha\| < \varepsilon$ при всех $\alpha,\ \beta \geq \alpha_0$. В банаховом пространстве всякое (b)-фундаментальное направление имеет (b)-предел.

Теорема I.1.1. *Если в УБП (X, K) конус K замкнут и правилен, то он нормален.*

Доказательство. Допустим, что конус K не нормален, и, следовательно, норма не полумонотонна на K. Тогда в K существуют такие последовательности элементов x_n и z_n, что

$$0 < z_n < x_n, \quad \|x_n\| = \frac{1}{n^2}, \quad \|z_n\| > 1.$$

Положим

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Тогда для любого n

$$0 < y_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n < x_1 + x_2 + \ldots + x_n < y$$

и y_n образуют возрастающую последовательность. Благодаря правильности конуса K последовательность $\{y_n\}$ (b)-фундаментальна, однако $\|y_{n+1} - y_n\| = \|z_{n+1}\| > 1$ при любом n. □

Приведенные в IV!2 примеры 7 и 8 показывают, что эта теорема перестает быть верной, если отказаться от (b)-полноты X или от замкнутости K.

Действительно, пространство (X, K), построенное в примере 7, не банахово, а конус K замкнут, но не нормален. Проверим, что он правилен. Если $0 \le x_n \uparrow \le y$, то, поскольку y — финитный вектор, существует такое k_0, что у всех x_n все координаты с номерами $k > k_0$ равны 0. А так как первые k_0 координат тоже образуют сходящиеся числовые последовательности, то $\|x_n - x_m\| \to 0$ при $m, \ n \to \infty$. Этот же пример показывает, что интервальной полноты пространства недостаточно, чтобы из правильности и замкнутости конуса вывести его нормальность.

С другой стороны, пространство (X, K), построенное в примере 8, банахово, но конус K не замкнут и не нормален. Проверим, что он тоже правилен. Пусть

$$0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le \ldots \le y, \quad x_n = \{\xi_{nk}\}_k, \quad y = \{\eta_k\}.$$

Тогда

$$\xi_{11} \le \xi_{21} \le \ldots \le \xi_{n1} \le \ldots \le \eta_1,$$

следовательно, существует $\xi_1 = \lim \xi_{n1}$. Так как $x_n - x_m \ge 0$ при $n \ge m$, то

$$|\xi_{nk} - \xi_{mk}| \le \xi_{n1} - \xi_{m1} \to 0 \quad (n, \ m \to \infty),$$

следовательно, и при любом k существует $\xi_k = \lim \xi_{nk}$. Если $\eta_k = 0$ при $k > k_0$, то и $\xi_{nk} = 0$ при $k > k_0$ и всех n. Таким образом, и $\xi_k = 0$ при $k > k_0$. Если положить $x = \{\xi_k\}$, то и $x \in X$ и

$$\|x_n - x\| = \sum_{k=1}^{k_0} |\xi_{nk} - \xi_k| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

т. е. $x = (b)\text{-}\lim x_n$.

В отличие от многих других свойств конуса, изучаемых в этой книге, правильность конуса K часто нарушается при переходе к другим конусам, близким к K. Сформулируем два утверждения такого типа.

а) Если в УБП (X, K) конус K правилен, но не нормален, а, следовательно, и не замкнут, то $\overline{K}$ не может быть правильным конусом. Действительно, если бы $\overline{K}$ был правильным, то по доказанной теореме он был бы и нормальным, а тогда и K должен быть нормальным. Именно так обстоит дело в только что упомянутом примере 8.

б) Пусть $X = L^1$ с естественным упорядочением, $u(t) \equiv 1$. Мы уже отмечали, что конус K в пространстве L^1 правилен. В то же время, $X_u = L^\infty$ с равномерной нормой, а конус K_u есть конус неотрицательных функций из L^∞ и этот конус не правилен. Таким образом, правильность конуса K не влечет правильность K_u.

Теперь отметим несколько простых, но важных предложений.

1. Если в интервально полном УНП (X, K) конус K замкнут и правилен, то пространство (X, K) дедекиндово полно.

Действительно, если $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq y$, то $x_\alpha \xrightarrow{(b)} x$ и при этом $x = \sup x_\alpha$.

2. Если (X, K) — интервально полное РУНП с замкнутым и правильным конусом K, то (X, K) — K-пространство.

Вытекает из предложения 1.

3. Если (X, K) — интервально полное УНП с (и.св.)[4], а конус K — замкнутый, воспроизводящий и правильный, то (X, K) — K-пространство.

Вытекает из предложения 1 с помощью теоремы V!2.1.

§ 2. ВПОЛНЕ ПРАВИЛЬНЫЕ КОНУСЫ

Определение. Конус K в УНП (X, K) называется *вполне правильным*, если всякая возрастающая (b)-ограниченная последовательность элементов из K (b)-фундаментальна.

Конусы в пространствах L^p $(1 \leq p < +\infty)$, упомянутые в первом пункте, вполне правильны, но конус в c_0 не является вполне правильным. Возрастающая последовательность элементов

$$x_n = \{\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n \text{ единиц}}, 0, 0, \ldots\}$$

(b)-ограничена, но не (b)-фундаментальна.

Совершенно так же, как это сделано в I.1 для правильного конуса, доказывается, что если конус K вполне правилен, то любое (b)-ограниченное возрастающее направление его элементов (b)-фундаментально.

Теорема I.2.1. *Если конус K в УНП (X, K) вполне правилен, то он нормален и правилен*[5]*.*

Доказательство. Сначала проверим нормальность конуса K. Допустим, что K не нормален. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ существуют такие $x_n,\ y_n \in K$, что $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, но $\|x_n + y_n\| < \dfrac{1}{n^2}$. Положим

$$z_{2n} = x_1 + y_1 + \ldots + x_n + y_n, \quad z_{2n+1} = z_{2n} + x_{n+1}.$$

[4](и.св.) — интерполяционное свойство Рисса (V!1).

[5]Обращаем внимание на то, что в отличие от аналогичной теоремы I.1.1 здесь не требуется ни (b)-полноты X, ни замкнутости K.

Тогда последовательность $\{z_n\}$ возрастает и (b)-ограничена:

$$\|z_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + 1;$$

следовательно, она (b)-фундаментальна. Но это противоречит равенству $\|z_{2n+1} - z_{2n}\| = 1$.

Теперь докажем, что K правилен. Если возрастающая последовательность положительных элементов (o)-ограничена, то, благодаря нормальности конуса K, она и (b)-ограничена, а, следовательно, поскольку конус K вполне правилен, (b)-фундаментальна. □

Как показывает приведенный выше пример — пространство c_0, доказанная теорема не допускает обращения: конус в c_0 нормален и правилен, но не вполне правилен. Однако справедлива следующая простая теорема.

Теорема I.2.2. *Если конус K правилен и телесен, то он вполне правилен.*

Вытекает из того, что благодаря телесности конуса K (b)-ограниченность множества влечет его (o)-ограниченность.

Теорема I.2.3. *Если конус K в УНП (X, K) вполне правилен, то и его замыкание $\overline{K}$ тоже вполне правильный конус.*

Доказательство. Из того, что конус K нормален, уже вытекает, что $\overline{K}$ тоже конус (IV!1). Пусть $x_n \in \overline{K}$ образуют возрастающую по отношению к $\overline{K}$ последовательность (т. е. $x_{n+1} - x_n \in \overline{K}$) и $\|x_n\| \leq C$. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем $y_1 \in K$ так, что $\|y_1 - x_1\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Далее, для каждого $n \geq 2$ подбираем $y_n \in K$ так, что

$$\|y_n - (x_n - x_{n-1})\| < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Положим $z_n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$. Тогда $z_n \in K$, а

$$z_n - x_n = y_1 - x_1 + \sum_{i=2}^{n} [y_i - (x_i - x_{i-1})].$$

Следовательно, $\|z_n - x_n\| < \varepsilon$ при всех n, и потому $\|z_n\| < C + \varepsilon$. Так как конус K вполне правилен, то последовательность $\{z_n\}$ (b)-фундаментальна, следовательно, $\|z_n - z_m\| < \varepsilon$ при $n,\ m \geq N$. Тогда $\|x_n - x_m\| < 3\varepsilon$ при $n,\ m \geq N$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ тоже (b)–фундаментальна. □

Напомним, что, как отмечено ранее, аналогичная теорема для правильного конуса неверна.

Мы уже видели, что если в определении правильности конуса вместо (b)-фундаментальности последовательности потребовать наличия (b)-предела, то это не повлечет (b)-полноты даже для нормированной решетки. Однако в отношении полной правильности дело обстоит иначе. Именно, если в УНП (X, K) каждая возрастающая (b)-ограниченная последовательность положительных элементов имеет (b)-предел, а конус K замкнут и несплющен, то пространство банахово. Это вытекает непосредственно из теоремы III!3.1.

Теорема I.2.4. *Если в УНП (X, K) конус K — телесный, миниэдральный и правильный, то пространство X конечномерно*[6].

Доказательство. Пусть Y — пополнение пространства X по норме, $\overline{K}_Y$ — замыкание конуса K в пространстве Y. По двум предыдущим теоремам конус $\overline{K}_Y$ вполне правилен. Кроме того, он, очевидно, телесен, так как любая внутренняя точка конуса K является и внутренней точкой в $\overline{K}_Y$, а из теории векторных решеток известно, что $\overline{K}_Y$ также и миниэдрален[7]. По теореме IV!7.3 $(Y, \overline{K}_Y)$ изоморфно некоторому пространству $C(T)$, где T — компактное хаусдорфово пространство. Покажем, что T состоит лишь из конечного числа точек. Допустим, что T содержит бесконечное множество точек. Тогда из T можно выделить счетное множество точек t_n, имеющих попарно дизъюнктные окрестности[8]. После этого строим на T непрерывные функции x_n так, что $0 \le x_n(t) \le 1$ при всех $t \in T$ и

$$x_n(t_i) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ 0 & \text{при} \quad i = n+1, \ldots \end{cases}$$

Далее полагаем

$$y_n(t) = \max[x_1(t), \ldots, x_n(t)].$$

Тогда y_n образуют ограниченную возрастающую последовательность, причем

$$y_n(t_n) - y_{n-1}(t_n) = 1,$$

следовательно, последовательность $\{y_n\}$ не (b)-фундаментальна. Но это противоречит полной правильности конуса $\overline{K}_Y$. Таким образом, T действительно состоит из конечного числа точек, а это и означает, что $C(T)$, а вместе с ним и Y и X, конечномерны. $\square$

§ 3. НЕКОТОРЫЕ ПРИЗНАКИ ПРАВИЛЬНОСТИ И ПОЛНОЙ ПРАВИЛЬНОСТИ КОНУСА

Приведем сначала два признака М.А. Красносельского [11] , основанные на понятии строго растущего функционала.

Определение. Функционал f с неотрицательными значениями, заданный на конусе K в УНП (X, K), называется *строго растущим*, если для любой последовательности элементов $x_n \in K$, у которой $\inf \|x_n\| > 0$,

$$f(x_1 + \ldots + x_n) \to +\infty\,^9.$$

[6]Для банаховых пространств эта теорема была доказана В.Я. Стеценко в диссертации, защищенной в 1961 году.

[7]Благодаря нормальности и телесности K в пространстве X существует эквивалентная u-норма, следовательно, (X, K) превращается в нормированную решетку, а тогда $(Y, \overline{K}_Y)$ — банахова решетка (см. [5] стр. 197). Напомним также, что из нормальности и миниэдральности конуса K вытекает принцип Архимеда в (X, K) (следствие 3 из теоремы IV!2.1).

[8]Если в T есть счетное множество изолированных точек, то из них и можно выбрать t_n. Если же изолированных точек конечное число, то рассмотрим множество T_1 всех неизолированных точек и дальнейшее рассуждение проводим в T_1 по индукции. Именно, если из T_1 уже выделено n точек, имеющих попарно дизъюнктные окрестности, а также непустое открытое множество $G_n \subset T_1$, не пересекающееся с каждой из этих окрестностей, то из G_n можно выделить еще одну точку, имеющую окрестность, дизъюнктную со всеми предыдущими, причем так, что и эта окрестность не пересекается с некоторым непустым открытым множеством $G_{n+1} \subset G_n$.

[9]Подчеркнем, что от функционала f не требуется ни аддитивности, ни однородности.

Кроме того, функционал f называется, как обычно, *монотонным*, если из $x \leq y$ следует, что $f(x) \leq f(y)$.

Теорема I.3.1. *Если на конусе K в УНП (X, K) существует монотонный строго растущий функционал f, то конус K — правильный.*

Доказательство. Пусть $0 \leq x_n \uparrow \leq y$ и предположим, что последовательность $\{x_n\}$ не (b)-фундаментальная. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется $p > n$, при котором $\|x_p - x_n\| \geq \varepsilon$. Отсюда вытекает существование такой частичной последовательности $\{x_{n_k}\}$, что $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \geq \varepsilon$. Теперь положим

$$y_p = \sum_{k=1}^{p} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}).$$

Тогда, по условию, $f(y_p) \to +\infty$. С другой стороны, $y_p \leq y$ и, следовательно, $f(y_p) \leq f(y)$, и мы приходим к противоречию. $\square$

Теорема I.3.2. *Если на конусе K в УНП (X, K) существует строго растущий функционал f, ограниченный на каждом шаре, то конус K — вполне правильный.*

Доказательство. Пусть $0 \leq x_n \uparrow$ и $\|x_n\| \leq C$ при всех n. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ не (b)-фундаментальна, и так же, как в предыдущем доказательстве, построим последовательность элементов y_p. При этом получится, что $\|y_p\| \leq 2C$, а $f(y_p) \to +\infty$, что противоречит условию. $\square$

Примером строго растущего функционала на конусе в пространстве L^p $(1 \leq p < +\infty)$ может служить

$$f(x) = \|x\|^p.$$

Действительно, из неравенства $(\alpha + \beta)^p \geq \alpha^p + \beta^p$ при $\alpha, \beta \geq 0$ [10] сразу вытекает, что если $x_n \in K$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\delta = \inf \|x_n\| > 0$, то

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \geq \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \geq n\delta^p \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty.$$

Так как ограниченность функционала f на каждом шаре тривиальна, мы еще раз с помощью теоремы I.3.2 убеждаемся, что классический конус в пространстве L^p $(1 \leq p < +\infty)$ — вполне правильный.

Необходимые и достаточные признаки другого типа были найдены И.А. Бахтиным [3]. Приведем один из них, который относится к полной правильности.

Теорема I.3.3. *Для того чтобы конус K в УНП (X, K) был вполне правильным, необходимо и достаточно следующее условие: для любой последовательности элементов $x_n \in K$ с $\|x_n\| = 1$ существует такой функционал $f \in K'$, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x_n) = +\infty$.*

Доказательство. а) Необходимость. Пусть конус K вполне правилен, $x_n \in K$, $\|x_n\| = 1$ и допустим, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x_n) < +\infty$ для любого $f \in K'$. Положим $y_n = x_1 + \ldots + x_n$. Тогда y_n образуют возрастающую последовательность, а $\{f(y_n)\}$ ограничена для любого $f \in K'$. Поскольку K вполне правилен, то он и нормален, а тогда конус K' — воспроизводящий в X'. Следовательно, $\{f(y_n)\}$ ограничена для любого $f \in X'$.

---

[10] Это неравенство может быть доказано совершенно элементарно, например, дифференцированием по β.

Отсюда вытекает, что последовательность $\{y_n\}$ (b)-ограничена и, благодаря полной правильности K, она (b)-фундаментальна. Но это неверно, так как $\|y_n - y_{n-1}\| = \|x_n\| = 1$.

б) Достаточность. Пусть выполнено условие теоремы, но конус K не вполне правильный. Значит, существует возрастающая, (b)-ограниченная, но не (b)-фундаментальная последовательность элементов $z_n \in K$. Рассуждая, как в доказательстве теоремы I.3.1, выделим частичную последовательность $\{z_{n_k}\}$ так, что $\|z_{n_{k+1}} - z_{n_k}\| \geq \varepsilon > 0$. Далее, положим

$$x_k = \frac{z_{n_{k+1}} - z_{n_k}}{\|z_{n_{k+1}} - z_{n_k}\|}.$$

Согласно условию, существует такой $f \in K'$, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(x_k) = +\infty$. Но

$$z_{n_{k+1}} = z_{n_1} + \sum_{i=1}^{k} \|z_{n_{i+1}} - z_{n_i}\| x_i,$$

и потому

$$f(z_{n_{k+1}}) \geq \varepsilon \sum_{i=1}^{k} f(x_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty,$$

что противоречит (b)-ограниченности последовательности $\{z_n\}$. $\square$

§ 4. КОНУСЫ В СЕКВЕНЦИАЛЬНО СЛАБО ПОЛНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Напомним определение: нормированное пространство называется *секвенциально слабо полным*, если любая слабо фундаментальная последовательность его элементов x_n (т. е. такая, что $f(x_n)$ имеет конечный предел для любого $f \in X'$) слабо сходится к некоторому элементу. Известно, что рефлексивное пространство секвенциально слабо полно[11]. Всякое секвенциально слабо полное пространство (b)-полно[12].

Конусы в секвенциально слабо полных пространствах обладают некоторыми дополнительными интересными свойствами.

Лемма. *Если в УНП (X, K) конус K нормален, то всякая монотонная (b)-ограниченная последовательность $\{x_n\}$ слабо фундаментальна.*

Доказательство. Для любого $f \in K'$ последовательность $\{f(x_n)\}$ монотонна и ограничена, следовательно, имеет конечный предел. Но так как конус K нормален, то любой $f \in X'$ представим в виде разности функционалов из K' и потому конечный $\lim f(x_n)$ существует для любого $f \in X'$. $\square$

---

[11] См., например, Иосида К. Функциональный анализ. М., «Мир», 1967, стр. 178.

[12] Поскольку в распространенных курсах функционального анализа эта теорема в явном виде не приводится, дадим ее простое доказательство.

Пусть нормированное пространство X секвенциально слабо полно, а последовательность $\{x_n\}$ (b)-фундаментальна. Так как она и слабо фундаментальна, то существует ее слабый предел: $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такое m, что $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ при всех $n > m$. Таким образом, $x_n \in \overline{S(x_m;\varepsilon)}$ при $n > m$. Но так как всякий замкнутый шар слабо замкнут, то $x \in \overline{S(x_m;\varepsilon)}$ и, тем самым, $\|x - x_n\| \leq \|x - x_m\| + \|x_m - x_n\| < 2\varepsilon$ при всех $n > m$. Значит, $x_n \xrightarrow{(b)} x$.

Теорема I.4.1. *Если в секвенциально слабо полном УБП (X, K) конус K нормален, то он и вполне правилен.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — возрастающая и (b)-ограниченная последовательность элементов из K. Тогда, благодаря лемме, последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к некоторому x_0. Разности $x_0 - x_n$ образуют убывающую последовательность, причем $x_0 - x_n \xrightarrow{\text{сл}} 0$. По теореме IV!3.1 (см. также замечание к ней), $x_0 - x_n \xrightarrow{(b)} 0$, т. е. $x_n \xrightarrow{(b)} x_0$. $\Box$

Следствие. *Если УБП (X, K) секвенциально слабо полно и обладает (и.св.), а конус K — замкнутый, воспроизводящий и нормальный, то (X, K) — K-пространство.*

Это вытекает из доказанной теоремы с помощью предложения 3 из I.1.

Последний результат примыкает к замечанию, сделанному в конце V!3.

На приведенном ниже рисунке указаны соотношения между свойствами нормальности, правильности и полной правильности конуса, причем около стрелок (там, где это требуется) отмечены те дополнительные условия, при которых справедливо соответствующее заключение.

Рис. I

§ 5. МОНОТОННО НЕПРЕРЫВНЫЕ НОРМЫ

Определение. Норма в УНП (X, K) называется *монотонно σ-непрерывной*, если из $x_n \downarrow 0$ вытекает, что $x_n \xrightarrow{(b)} 0$ (условие (A_σ)). Норма называется *монотонно непрерывной*, если то же верно для любого направления: из $x_\alpha \downarrow 0$ вытекает, что $x_\alpha \xrightarrow{(b)} 0$ (условие (A))[13].

Как мы увидим, монотонная непрерывность нормы тесно связана с правильностью конуса K, хотя в общем случае, и даже для векторных решеток, эти свойства независимы. Хотя, как было показано в I.1, определения правильного конуса, сформулированные с помощью последовательностей и с помощью произвольных направлений, оказываются равносильными, из монотонной σ-непрерывности нормы в общем случае не вытекает ее монотонная непрерывность. Приведем примеры, заимствованные из работ Люксембурга и Заанена [26].

Пример 1. Пусть T — несчетное множество, а X состоит из всех вещественных функций x на T, для которых существует число $\ell(x)$, удовлетворяющее следующему условию: для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|x(t) - \ell(x)| < \varepsilon$ справедливо на всем T, за исключением только конечного числа точек $t \in T$. Норму в X вводим равномерную, т. е. $\|x\| = \sup |x(t)|$, а X упорядочиваем с помощью конуса K неотрицательных функций.

Из определения X видно, что каждая входящая в него функция $x(t) = \ell(x)$ всюду за исключением не более, чем счетного множества точек. Ясно, что X — банахова решетка, но она не дедекиндово σ-полна, и, следовательно, не является K_σ-пространством.

Пусть $x_n \downarrow 0$. Тогда $x_n(t) \downarrow 0$ при каждом $t \in T$, иначе у последовательности

[13]В литературе по теории векторных решеток до сих пор условие (A_σ) часто обозначается через (A), а условие (A) через (A'). Мы изменили здесь эти обозначения для приведения их в соответствие со многими другими, где буквой σ отмечается «счетный случай».

$\{x_n\}$ нашлись бы нижние границы, большие 0. Но при всех $t \in T$ за исключением не более, чем счетного множества, $\ell(x_n) = x_n(t)$ для любого $n \in \mathbb{N}$, а потому и $\ell(x_n) \downarrow 0$. Отсюда уже легко вытекает, что $\|x_n\| \to 0$, т. е. условие (A_σ) выполнено.

Теперь рассмотрим совокупность E всех конечных подмножеств $e \subset T$, упорядоченную по включению, и пусть x_e — характеристическая функция множества $T \backslash e$. Ясно, что $\{x_e\}$ — убывающее направление, и, так как $x_e(t) \downarrow 0$ при каждом $t \in T$, $\inf x_e = 0$. В то же время $\|x_e\| = 1$ для любого $e \in E$. Условие (A) не выполнено.

Легко проверяется, что конус K в этом пространстве не правильный. Достаточно выбрать счетное множество точек $t_n \in T$ и принять за x_n характеристическую функцию множества $\{t_1, \ldots, t_n\}$. Эта последовательность функций возрастает, (o)-ограничена (ее верхней границей является, например, функция $x(t) \equiv 1$), но не (b)-фундаментальна.

Пример 2. Пусть X — векторное пространство всех вещественных непрерывных функций на отрезке $[0,1]$, упорядоченное естественным образом (конус K состоит из всех неотрицательных функций), с нормой

$$\|x\| = |x(0)| + \int_0^1 |x(t)|\, dt.$$

Положим

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 - nt & \text{при} \quad 0 \le t \le \dfrac{1}{n}, \\ \quad 0 & \text{при} \quad \dfrac{1}{n} \le t \le 1. \end{cases}$$

Тогда $x_n \downarrow 0$, но $\|x_n\| > 1$, следовательно, условие (A_σ) не выполнено. В то же время всякая возрастающая (o)-ограниченная последовательность функций $x_n \in X$ сходится в себе в каждой точке $t \in [0,1]$, а потому она (b)-фундаментальна по введенной метрике. Таким образом, конус K — правильный.

Заметим, что в обоих примерах конус K замкнут и нормален, а пространство из примера 2 не банахово и даже не интервально полное.

Приведем еще один пример, показывающий, что даже при выполнении условия (A) конус все же может не быть правильным.

Пример 3 (И.И. Чучаев [18]). Пусть $X = c_0$ с классической нормой, а конус K состоит из всех векторов $x = \{\xi_k\}$, у которых $\xi_1 \ge 0$ и $-\xi_1 \le \xi_k \le k\xi_1$ при $k \ge 2$. Сначала проверим, что конус K не правилен. Пусть $x_n = \{\xi_{nk}\}$, где $\xi_{n1} = \dfrac{2n-1}{n}$, $\xi_{nk} = 1$ при $2 \le k \le n^2 + n - 1$, $\xi_{nk} = 0$ при $k > n^2 + n - 1$. Ясно, что $x_n \in K$, а элементарный подсчет показывает, что $x_n \uparrow \le y$, где $y = \{3, 0, 0, \ldots\}$. В то же время $\|x_{n+1} - x_n\| = 1$ при всех n.

Теперь докажем, что норма в X монотонно непрерывна. Пусть $x_\alpha \downarrow 0$, $x_\alpha = \{\xi_{\alpha k}\}_k$. Тогда $0 \le \xi_{\alpha 1} \downarrow$, следовательно, существует $\xi_1 = \lim\limits_\alpha \xi_{\alpha 1}$. Так как $x_\beta \le x_\alpha$ при $\beta \ge \alpha$, то

$$-(\xi_{\alpha 1} - \xi_{\beta 1}) \le \xi_{\alpha k} - \xi_{\beta k} \le k(\xi_{\alpha 1} - \xi_{\beta 1}) \quad \text{при всех} \quad k \ge 2.$$

Отсюда видно, что при любом k направление координат $\{\xi_{\alpha k}\}$ фундаментально, следовательно, существует $\xi_k = \lim\limits_\alpha \xi_{\alpha k}$. Так как $x_\alpha \downarrow 0$, то $\xi_{\alpha k} + \xi_{\alpha 1} \downarrow \ge 0$ при любом $k \ge 2$. Положим

$$b_k = \inf_\alpha \{\xi_{\alpha k} + \xi_{\alpha 1}\}$$

и покажем, что $b_k = 0$ при всех $k \geq 2$. Допустим, что $b_{k_0} > 0$ ($k_0 \geq 2$), и рассмотрим элемент $y \in X$, $y = \{\eta_k\}$, для которого

$$\eta_{k_0} = b_{k_0}, \quad \eta_k = 0 \quad \text{при} \quad k \neq k_0.$$

По определению порядка в X этот элемент несравним с нулем. С другой стороны, учитывая, что $\xi_{\alpha k_0} + \xi_{\alpha 1} \geq \eta_{k_0}$, легко убедиться, что $y \leq x_\alpha$ при всех α, следовательно, $y \leq \inf x_\alpha = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $b_k = 0$. Это же означает, что

$$\xi_k + \xi_1 = \lim_\alpha (\xi_{\alpha k} + \xi_{\alpha 1}) = 0 \quad \text{при любом} \quad k \geq 2,$$

т. е. $\xi_k = -\xi_1$.

Покажем, что $\xi_1 = 0$. Допустим, что $\xi_1 > 0$. Тогда $\xi_2 < 0$ и, следовательно, существует такое α_0, что $\xi_{\alpha 2} < 0$ при $\alpha \geq \alpha_0$. Рассмотрим вектор $z = \{\zeta_k\} \in X$, для которого $\zeta_2 = -\xi_1$, $\zeta_k = 0$ при $k \neq 2$. Легко видеть, что $z \leq x_\alpha$ при всех α[14], следовательно, $z \leq 0$, что невозможно, поскольку z несравним с 0. Таким образом, $\xi_1 = 0$, а потому и все $\xi_k = 0$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем такое β, что $\xi_{\alpha 1} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $\alpha \geq \beta$. Далее, обозначим через P множество всех тех индексов k, для которых $|\xi_{\beta k}| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Это множество конечно. Так как $\xi_{\alpha k} \underset{(\alpha)}{\longrightarrow} 0$ при каждом k, то существует такое γ, что $|\xi_{\alpha k}| < \varepsilon$ при $\alpha \geq \gamma$ и $k \in P$. Пусть теперь $k \notin P$, т. е. $|\xi_{\beta k}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Поскольку $x_\alpha \leq x_\beta$ при $\alpha \geq \beta$, имеем

$$\xi_{\beta k} - \xi_{\alpha k} \geq -(\xi_{\beta 1} - \xi_{\alpha 1}) > -\frac{\varepsilon}{2},$$

откуда $\xi_{\alpha k} < \varepsilon$, а так как $x_\alpha \geq 0$, то $\xi_{\alpha k} \geq -\xi_{\alpha 1} > -\dfrac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, $|\xi_{\alpha k}| < \varepsilon$ при всех $\alpha \geq \beta$ и $k \notin P$. А тогда $|\xi_{\alpha k}| < \varepsilon$ при $\alpha \geq \beta,\ \gamma$ и при всех k. Это значит, что $\|x_\alpha\| < \varepsilon$ при $\alpha \geq \beta,\ \gamma$, т. е. $\|x_\alpha\| \to 0$.

Лемма 1. *Если в интервально полном УНП (X, K) конус K замкнут и правилен, то норма в (X, K) монотонно непрерывна.*

Доказательство. Пусть направление $x_\alpha \downarrow 0$. Фиксируем какой-нибудь индекс α_0 и рассмотрим возрастающее направление $\{x_{\alpha_0} - x_\alpha\}$ ($\alpha \geq \alpha_0$). Оно (o)-ограничено и, благодаря правильности конуса K и интервальной полноте X, это направление имеет (b)-предел. Но таким пределом может быть только $\sup\{x_{\alpha_0} - x_\alpha\} = x_{\alpha_0}$, а потому $x_\alpha \xrightarrow{(b)} 0$. □

Теорема I.5.1. *Пусть (X, K) — интервально полное УНП, а конус K замкнут. Для того чтобы он был правильным, необходимо и достаточно, чтобы пространство (X, K) было дедекиндово σ-полным, а норма в (X, K) была монотонно σ-непрерывной.*

Доказательство. а) Необходимость. Дедекиндова σ-полнота (и даже полнота) установлена в предложении 1 (I.1). Монотонная непрерывность нормы доказана в лемме 1.

б) Достаточность. Пусть $0 \leq x_n \uparrow \leq y$. Так как (X, K) дедекиндово σ-полно, то существует $x = \sup x_n$. Тем самым, $x - x_n \downarrow 0$ и, благодаря монотонной σ-непрерывности нормы, $x - x_n \xrightarrow{(b)} 0$, т. е. $x_n \xrightarrow{(b)} x$. □

[14] Достаточно проверить это при $\alpha \geq \alpha_0$.

Замечание. Из доказательства видно, что в части достаточности теорема верна в любом УНП.

Следствие 1. *В интервально полном и дедекиндово σ-полном УНП (X, K) с замкнутым конусом K монотонная σ-непрерывность нормы влечет ее монотонную непрерывность, а также дедекиндову полноту пространства.*

Доказательство. Если (X, K) удовлетворяет указанным условиям и там выполнено условие (A_σ), то по доказанной теореме конус K правилен. Тогда условие (A) вытекает из леммы. Дедекиндова полнота (X, K) вытекает из предложения 1 (I.1). $\square$

Следствие 2. *Если сопряженное пространство (X, K) дедекиндово σ-полно и норма в нем монотонно σ-непрерывна, то это пространство дедекиндово полно, а норма в нем монотонно непрерывна.*

Вытекает непосредственно из следствия 1.

Теорема I.5.2. *Если в УНП $(X, \|\cdot\|, K)$ конус K телесен и правилен, то норма $\|\cdot\|$ монотонно непрерывна.*

Доказательство. Из теорем I.2.2 и I.2.1 следует, что конус K нормален. Пусть направление $x_\alpha \downarrow 0$. Тогда, при фиксированном α_0, направление $\{x_{\alpha_0} - x_\alpha\}$ $(\alpha > \alpha_0)$ возрастает и ограничено сверху и, вследствие правильности конуса K, оно (b)-фундаментально, а вместе с ним и $\{x_\alpha\}$ (b)-фундаментально. В конусе K выберем элемент $u \geq 0$. В силу неравенства $x \leq C\|x\|u$, где C — постоянная (см. II!1), при любом $\varepsilon > 0$ существует такой индекс α_1, что $x_\alpha - x_\beta \leq \varepsilon u$ при $\alpha,\ \beta \geq \alpha_1$. Отсюда, поскольку $x_\beta \downarrow 0$, получаем, что $x_\alpha \leq \varepsilon u$. Если M — константа полумонотонности нормы $\|\cdot\|$, то

$$\|x_\alpha\| \leq M\varepsilon\|u\| \quad \text{при} \quad \alpha \geq \alpha_1,$$

а это и означает, что $\|x_\alpha\| \to 0$. $\square$

Лемма 2. *Пусть (X, K) — УНП с замкнутым конусом K. Если $\{x_\alpha\}$ — возрастающее (b)-фундаментальное направление, у которого существует $\sup x_\alpha = y$, то из этого направления можно выделить возрастающую частичную последовательность $\{x_{\alpha_n}\}$ так, что*

1) $y = \sup x_{\alpha_n}$;

2) $\sup\limits_{\alpha \geq \alpha_n} \|x_\alpha - x_{\alpha_n}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Доказательство. Зададим последовательность чисел $\varepsilon_n \downarrow 0$ и подберем возрастающую последовательность индексов α_n так, что $\|x_\alpha - x_{\alpha_n}\| < \varepsilon_n$ при $\alpha \geq \alpha_n$. Тем самым, условие 2) будет выполнено. Проверим, что $y = \sup x_{\alpha_n}$. Пусть $z \geq x_{\alpha_n}$ при любом n. Возьмем произвольный x_α и для каждого n найдем индекс $\alpha_n' \geq \alpha_n,\ \alpha$. Положим $y_n = x_{\alpha_n'}$. Тогда $y_n \geq x_{\alpha_n},\ x_\alpha$ и $\|y_n - x_{\alpha_n}\| < \varepsilon_n$. Имеем

$$x_\alpha = x_{\alpha_n} + (x_\alpha - x_{\alpha_n}) \leq z + (y_n - x_{\alpha_n})$$

и, переходя в этом неравенстве к (b)-пределу по n, получаем $x_\alpha \leq z$, а, следовательно, и $y \leq z$. Тем самым доказано, что $y = \sup x_{\alpha_n}$. $\square$

Отметим еще некоторые предложения о связи между рассматриваемыми свойствами нормы и конуса.

1. Если (X, K) — УНП с замкнутым и правильным конусом K, то монотонная σ-непрерывность нормы влечет ее монотонную непрерывность.

Доказательство. Пусть норма в (X, K) монотонно σ-непрерывна и пусть направление $x_\alpha \downarrow 0$. Тогда $x_{\alpha_0} - x_\alpha \uparrow x_{\alpha_0}$ $(\alpha \geq \alpha_0)$ и, так как конус K

правилен, направление $\{x_{\alpha_0} - x_\alpha\}$ (b)-фундаментально, следовательно, и $\{x_\alpha\}$ (b)-фундаментально. По лемме 2 можно выделить частичную последовательность $x_{\alpha_n} \downarrow 0$, удовлетворяющую также и второму условию леммы, причем, благодаря условию (A_σ), $\|x_{\alpha_n}\| \to 0$. Но тогда и все направление $x_\alpha \xrightarrow{(b)} 0$, поскольку

$$\|x_\alpha\| \le \|x_{\alpha_n}\| + \|x_\alpha - x_{\alpha_n}\| < \|x_{\alpha_n}\| + \varepsilon_n$$

при $\alpha \ge \alpha_n$ $(\varepsilon_n \to 0)$. □

2. Если (X, K) — РУНП с замкнутым и нормальным конусом и если норма монотонно непрерывна, то конус K — правильный.

Доказательство. Пусть $x_n \ge 0$ и образуют возрастающую (o)-ограниченную последовательность. Совокупность L всех верхних границ этой последовательности направлена по убыванию. Рассмотрим множество E всех элементов вида $y - x_n$, где $y \in L$, $n \in \mathbb{N}$. Это множество тоже направлено по убыванию и ограничено снизу элементом 0. Покажем, что $y - x_n \downarrow 0$ (т. е. $\inf E = 0$). Пусть $z \le y - x_n$ при всех $y \in L$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $x_n \le y - z$ при всех $n \in \mathbb{N}$, следовательно, $y - z \in L$. Отсюда по индукции получается, что если $y \in L$, то и $y - nz \in L$ при всех $n \in \mathbb{N}$. В частности, это означает, что $x_1 \le y - nz$ или $nz \le y - x_1$. Так как конус K замкнут, то в (X, K) выполнен принцип Архимеда и потому $z \le 0$. Таким образом,

$$0 = \inf_{y \in L,\, n \in \mathbb{N}} \{y - x_n\}.$$

Отсюда, благодаря условию (A), вытекает, что $\|y - x_n\| \to 0$. Следовательно, по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такие y и n, что $\|y - x_n\| < \varepsilon$. Если же $m > n$, то $x_n \le x_m \le y$ и потому

$$\|x_m - x_n\| \le N \|y - x_n\|,$$

где N — константа полумонотонности нормы. □

3. В интервально полном РУНП (X, K) с замкнутым и нормальным конусом K правильность K равносильна монотонной непрерывности нормы.

Вытекает из леммы 1 и предложения 2.

§ 6. СЛАБО ПРАВИЛЬНЫЕ И СЛАБО ВПОЛНЕ ПРАВИЛЬНЫЕ КОНУСЫ

Впервые определения слабо правильного и слабо вполне правильного конуса были введены В.Я. Степенно. Здесь мы дадим другие определения, не равносильные определениям В.Я. Стеценко, но лучше согласованные с нашими определениями правильного и вполне правильного конуса. Пусть (X, K) — произвольное УНП.

Определение. Конус K называется *слабо правильным*, если любая возрастающая (o)-ограниченная последовательность его элементов слабо фундаментальна. Конус K называется *слабо вполне правильным*, если любая возрастающая (b)-ограниченная последовательность его элементов слабо фундаментальна.

Из леммы в I.4 сразу вытекает, что всякий нормальный конус и слабо правилен и слабо вполне правилен.

Лемма. *Если в УНП (X, K) конус K слабо правилен, то всякий интервал в (X, K) (b)-ограничен.*

Доказательство. Предположим, что конус K слабо правилен, но в X существует не (b)-ограниченный интервал. Не умаляя общности, можно считать, что этот интервал имеет вид $[0, y]$. Теперь для любого $n \in \mathbb{N}$ найдем такой y_n, что $0 < y_n \leq y$ и $\|y\| = 5^n$. Далее положим

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} y_k.$$

Тогда $0 < x_n \leq y$, а последовательность $\{x_n\}$ — возрастающая и, следовательно, слабо фундаментальная. Однако

$$\|x_n\| \geq \frac{1}{2^n}\|y_n\| - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}\|y_k\| = \left(\frac{5}{2}\right)^n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{5}{2}\right)^k =$$

$$= \left(\frac{5}{2}\right)^n - \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^n - \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} > \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы. □

Теорема I.6.1. *В УБП (X, K) с замкнутым конусом K нормальность равносильна его слабой правильности.*

Доказательство. Выше уже отмечено, что из нормальности конуса всегда вытекает его слабая правильность. Обратное заключение получается с помощью леммы и теоремы IV!2.2. □

Примеры 7 и 8 из IV!2 подтверждают, что в этой теореме нельзя отбросить предположение о (b)-полноте X и замкнутости K (ср. I.1).

Из доказанной теоремы и теоремы I.4.1 (ср. также схему из I.4) вытекает

Следствие. *Если УБП (X, K) секвенциально слабо полно, а конус K замкнут, то следующие свойства K равносильны: нормальность, правильность, полная правильность и слабая правильность.*

Теорема I.6.2. *Если УБП (X, K) рефлексивно, а конус K замкнут, то он слабо вполне правилен.*

Доказательство. Пусть $x_n \in K$ образуют возрастающую и (b)-ограниченную последовательность. По известной теореме Эберлейна–Шмульяна[15] эта последовательность содержит частичную, слабо сходящуюся к некоторому пределу: $x_{n_k} \xrightarrow{\text{сл}} x$. Проверим, что x — единственная слабая предельная точка последовательности $\{x_n\}$. Пусть некоторая другая частичная последовательность $x_{n'_\ell} \xrightarrow{\text{сл}} y$. Так как для любого k существует такое ℓ, при котором $n'_\ell \geq n_k$, а конус K замкнут (и слабо замкнут), то $y \geq x$. Аналогично и $x \geq y$, т. е. $y = x$. Наличие единственной слабой предельной точки x и означает, что $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x$. □

Теперь легко понять, что, в отличие от свойства полной правильности, из слабой полной правильности не вытекает ни нормальность, ни слабая правильность конуса. Действительно, упорядочим рефлексивное пространство ℓ^2 с помощью конуса

$$K = \{x \in \ell^2 \ (x = \{\xi_k\}) : \ \xi_1 \geq 0, \ |\xi_k| < \xi_1 \ (k \geq 2)\}.$$

[15] См. Иосида К. Функциональный анализ. М., изд-во «Мир», 1967, с. 201.

Этот конус замкнут, а потому, по доказанной теореме, слабо вполне правилен. С другой стороны, он не нормален: если

$$x = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, \dots\right\}, \quad y = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}, -\frac{1}{\sqrt{n}}, -\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, \dots\right\}$$

(здесь и в x и в y отличных от 0 координат n), то $x,\ y \in K$, $\|x\| = \|y\| = 1$, а $\|x+y\| = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$. По теореме I.6.1 K не является слабо правильным.

Приведем также пример, построенный И.И. Чучаевым, слабо правильного (даже правильного) конуса, который не является слабо вполне правильным. Таким образом, свойства слабой правильности и слабой полной правильности независимы.

Пример 4. Пусть X — подпространство всех финитных векторов из ℓ^1 с нормой, индуцированной из ℓ^1. Конус K, с помощью которого упорядочивается X, состоит из всех векторов $x = \{\xi_k\} \in X$, для которых

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k}\,\xi_k \geq 0 \quad \text{при всех} \quad p \in \mathbb{N}$$

и последняя отличная от нуля координата положительна.

Проверим, что конус K правилен. Пусть $0 \leq x_n \uparrow \leq y$, $x_n = \{\xi_{nk}\}_k$, $y = \{\eta_k\}$. Так как все суммы

$$S_{np} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k}\,\xi_{nk} \leq \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k}\,\eta_k$$

и образуют возрастающую по n последовательность, то каждая сумма (при фиксированном p) имеет конечный предел, а тогда и $\xi_{nk} \to \xi_k$. При этом существует такое k_0, что $\xi_{nk} = 0$ при всех n и $k > k_0$. А тогда ясно, что $x_n \xrightarrow{(b)} x$, где $x = \{\xi_k\}$.

Теперь покажем, что K не является слабо вполне правильным конусом. Зададим последовательность элементов $x_n = \{\xi_{nk}\}_k$, где $\xi_{n1} = 3 - \dfrac{1}{2^{n-2}}$, $\xi_{nn} = 1$ и $\xi_{nk} = 0$ при всех прочих k. Тогда

$$x_n \in K, \quad \|x_n\| < 4, \quad x_{n+1} - x_n = \left\{\frac{1}{2^{n-1}}, 0, \dots, 0, \underbrace{-1}_{(n)}, \underbrace{1}_{(n+1)}, 0, 0, \dots\right\} \in K.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая и (b)-ограниченная. Однако для функционала $f \in X'$, определяемого формулой

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \xi_k,$$

имеем

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2(-1)^{n+1} \not\to 0$$

и последовательность $\{x_n\}$ — не слабо фундаментальная.

II. ОШТУКАТУРИВАЕМЫЕ КОНУСЫ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОШТУКАТУРИВАЕМОГО КОНУСА

Понятие оштукатуриваемого конуса введено М.А. Красносельским [12]. Всюду в этой части B (соответственно B') — замкнутый единичный шар в нормированном пространстве X (соответственно X'). Конус K предполагается ненулевым.

Определение 1. Пусть (X, K) — УНП. Если существуют такие конус $K_1 \subset X$ и число $\gamma > 0$, что для любого $x \in K \setminus \{0\}$ шар $x + \gamma\|x\|B \subset K_1$, то конус K называется *оштукатуриваемым* (с помощью конуса K_1).

Чтобы получить некоторые основные характеристики оштукатуриваемого конуса, введем еще определения.

Определение 2. Функционал $f \in X'$ называется *равномерно положительным*, если существует такое число $\delta > 0$, что $f(x) \geq \delta\|x\|$ для любого $x \in K$.

Примером равномерно положительного функционала в пространстве $L^1[0,1]$ с естественным упорядочением (впрочем, отрезок $[0,1]$ можно заменить здесь произвольным пространством с «достаточно хорошей» мерой) может служить

$$f(x) = \int_0^1 x\,d\mu. \tag{1}$$

В то же время в пространстве $L^p[0,1]$ $(1 < p < +\infty)$ с естественным упорядочением равномерно положительных функционалов нет. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим функции

$$x_i(t) = \begin{cases} n^{\frac{1}{p}+1} & \text{при } \ t \in \left(\dfrac{i-1}{n}, \dfrac{i}{n}\right), \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ 0 & \text{при прочих } \ t \in [0,1]. \end{cases}$$

Если допустить, что равномерно положительный функционал f существует, то

$$f(x_i) \geq \delta\|x_i\| = \delta n.$$

Следовательно, для функции $x(t) \equiv 1$

$$f(x) = \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right] n^{-\frac{1}{p}-1} \geq \delta n^{1-\frac{1}{p}} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty,$$

что противоречит конечности значения $f(x)$.

Еще проще проверяется, что равномерно положительных функционалов нет и в пространстве $L^\infty[0,1]$. Попутно заметим, что во всех пространствах $L^p[0,1]$ ($1 \le p \le \infty$) существуют строго положительные (b)-линейные функционалы, например, функционал (1).

Определение 3. Выпуклое множество $D \subset K$ называется *базой конуса* K, если каждый $x \in K \setminus \{0\}$ допускает единственное представление $x = \alpha y$, где $\alpha > 0$, $y \in D$.

Из определения базы, благодаря ее выпуклости, сразу следует, что если D — база конуса K, то $0 \notin D$.

Теорема II.1.1. *В произвольном УНП $(X, \|\cdot\|, K)$ следующие утверждения равносильны:*

1) *конус K оштукатуриваем;*

2) *в X существует равномерно положительный функционал;*

3) *в X существует норма, эквивалентная заданной норме $\|\cdot\|$ и аддитивная на конусе K;*

4) *конус K имеет (b)-ограниченную базу D, причем $0 \notin \overline{D}$;*

5) *конус K натягивается на (b)-ограниченное выпуклое множество F, причем $0 \notin \overline{F}$.*

В этой теореме собраны характеристики оштукатуриваемого конуса, полученные разными авторами: условие 2) доказано М.А. Красносельским [11], условие 5) — А.М. Рубиновым [16], условия 3)–4) можно найти в работах А. Эллиса [23] и Д. Эдвардса [22], а также И.Ф. Даниленко [9].

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть K оштукатуриваем с помощью конуса K_1. Тогда K_1 телесен и существует ненулевой функционал $f \in X'$, принимающий неотрицательные значения на K_1 (II!2). Если $x \in K$, $x \neq 0$, γ — число из определения 1, а $y \in X$ и $\|y\| \le \gamma\|x\|$, то $f(x-y) \ge 0$ и потому $f(x) \ge f(y)$. Переходя в правой части к верхней грани по всем $y \in \gamma\|x\|B$, получим

$$f(x) \ge \gamma\|x\| \cdot \|f\|,$$

т. е. функционал f равномерно положителен с константой $\delta = \gamma\|f\|$.

2) $\Longrightarrow$ 3). Если f — равномерно положителен, $f(x) \ge \delta\|x\|$ для $x \in K$, то положим

$$\|x\|' = \max(|f(x)|, \delta\|x\|).$$

Тогда $\|\cdot\|'$ — норма в X, причем если $x \in K$, то $\|x\|' = f(x)$, и потому она аддитивна на K. Кроме того, для любого $x \in X$

$$\delta\|x\| \le \|x\|' \le (\|f\| + \delta)\|x\|$$

и, тем самым, обе нормы эквивалентны.

3) $\Longrightarrow$ 4). Если аддитивная на K норма $\|\cdot\|'$ существует и эквивалентна исходной норме $\|\cdot\|$, то положим

$$D = \{x \in K : \ \|x\|' = 1\}.$$

Это множество (b)-ограничено и, благодаря аддитивности нормы, выпукло. Ясно, что оно — база конуса K, причем $0 \notin \overline{D}$.

4) $\Longrightarrow$ 5) тривиально: за F можно принять базу D.

5) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $K = K(F)$, где F — (b)-ограниченное выпуклое множество, $0 \notin \overline{F}$. Положим

$$d = \inf_{x \in F} \|x\| \quad (d > 0),$$

а затем
$$F_1 = \bigcup_{x \in F} S\Big(x; \frac{1}{2}d\Big).$$
Ясно, что $0 \notin \overline{F}_1$, и легко видеть, что F_1 выпукло.

Положим $K_1 = K(F_1)$ и проверим, что K_1 оштукатуривает конус K. Пусть $\|x\| \leq M$ для всех $x \in F$. Положим $\gamma = \dfrac{d}{2M}$. Если $x \in K$, то $x = \alpha x'$, где $x' \in F$, и, следовательно, $\alpha \geq \dfrac{\|x\|}{M}$. Так как $S\Big(x'; \dfrac{1}{2}d\Big) \subset F_1$, то $S\Big(x; \dfrac{1}{2}\alpha d\Big) \subset K_1$; тем более $S\Big(x; \dfrac{d\|x\|}{2M}\Big) \subset K_1$, т. е. $x + \gamma\|x\|B \subset K_1$. $\square$

Следствия. 1. *Если конус K оштукатуриваем, то оштукатуривающий конус K_1 всегда можно выбрать замкнутым.*

Действительно, если $K = K(F)$, то за K_1 можно принять $K(\overline{F}_1)$, где F_1 — то множество, которое построено по ходу доказательства импликации 5) $\Longrightarrow$ 1).

2. *Если конус K оштукатуриваем, то $\overline{K}$ оштукатуриваем.*

Действительно, если $K = K(F)$, то $\overline{K} = K(\overline{F})$, а $\overline{F}$ — замкнутое, (b)-ограниченное, выпуклое множество, не содержание 0 (см. теорему II!3.4).

3. *Понятие оштукатуриваемости конуса инвариантно при переходе к эквивалентной норме.*

4. *Если конус K оштукатуриваем, то он вполне правилен (а, следовательно, и нормален).*

Доказательство. Пусть $0 \leq x_n \uparrow$, $\|x_n\| \leq C$, а $f \in X'$ — равномерно положительный функционал. Тогда последовательность $\{f(x_n)\}$ фундаментальна. Но $x_n \geq x_m$ при $n \geq m$, и потому
$$f(x_n - x_m) \geq \delta\|x_n - x_m\|,$$
следовательно, и последовательность $\{x_n\}$ (b)-фундаментальна. $\square$

Из примеров, приведенных в начале пункта, видно, что классические конусы в пространствах L^p при $p > 1$ (аналогично и в ℓ^p при $p > 1$) не оштукатуриваемы; классические конусы в L^1 и ℓ^1 оштукатуриваемы.

§ 2. СХОДИМОСТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ОШТУКАТУРИВАЕМОСТИ КОНУСА

Здесь мы выведем один критерий оштукатуриваемости, использующий слабую сходимость.

Лемма. *Пусть (X, K) — УНП с нормальным конусом K, $A = \{x \in K : \|x\| = 1\}$, F — выпуклая оболочка множества A. Если $0 \in \overline{F}$, то $0 \in \overline{A}^{\text{сл}}$ (слабое замыкание множества A).*

Доказательство. Если $0 \in \overline{F}$, то существует последовательность выпуклых комбинаций элементов из A
$$x_n = \sum_{k=1}^{P_n} \lambda_k^{(n)} y_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{(b)} 0 \qquad \Big(y_k^{(n)} \in A,\ \lambda_k^{(n)} \geq 0,\ \sum_{k=1}^{P_n} \lambda_k^{(n)} = 1\Big).$$

Для любого $f \in K'$ $\min\limits_k f\left(y_k^{(n)}\right) \le f(x_n)$. Обозначим через z_n^f какой-нибудь из тех $y_k^{(n)}$, на которых указанный минимум достигается. Поскольку $f(x_n) \to 0$, то и $f\left(z_n^f\right) \to 0$. Следовательно, $f\left(z_n^f\right) < 1$ при некотором n. Соответствующий элемент z_n^f обозначим через z^f $(z^f \in A)$.

Множество всех функционалов $f \in K'$ направлено по возрастанию. Покажем, что направление $z^f \xrightarrow{\text{сл}} 0$. Действительно, возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и $f_0 \in K' \setminus \{0\}$. Положим $f_1 = \dfrac{1}{\varepsilon} f_0$. Если $f \ge f_1$, то

$$f_0\left(z^f\right) = \varepsilon f_1\left(z^f\right) \le \varepsilon f\left(z^f\right) < \varepsilon,$$

следовательно, $f_0\left(z^f\right) \to 0$. Но так как конус K нормален, любой $f_0 \in X'$ представим в виде разности функционалов из K' и потому $f_0\left(z^f\right) \to 0$ для любого $f_0 \in X'$. □

Теорема II.2.1. (И.И. Чучаев [17])[16]**.** *Для того чтобы конус в УНП (X, K) был оштукатуриваемым, необходимо и достаточно, чтобы*

1) *конус K был нормальным;*

2) *если $x_\alpha \in K$ и направление $x_\alpha \xrightarrow{\text{сл}} 0$, то $x_\alpha \xrightarrow{(b)} 0$.*

Доказательство. Необходимость условия 1) установлена в следствии 4 из теоремы II.1.1, необходимость условия 2) вытекает немедленно из существования равномерно положительного функционала f: $\|x_\alpha\| \le \dfrac{1}{\delta} f(x_\alpha) \to 0$. Обратно, пусть условия 1)–2) выполнены, а множества A и F — те же, что и в лемме. При этом $K = K(F)$. Если допустить, что $0 \in \overline{F}$, то по лемме $0 \in \overline{A}^{\text{сл}}$. А тогда, по условию 2), $0 \in \overline{A}$, что невозможно. Таким образом, $0 \notin \overline{F}$. Кроме того, $F \subset B$ а потому (b)-ограничено. Тогда, по условию 5) теоремы II.1.1, конус K оштукатуриваем. □

Следствие. *В конечномерном УНП всякий нормальный конус и, в частности, всякий замкнутый конус, оштукатуриваем.*

Получается сразу из того, что в конечномерном пространстве сходимость по норме и слабая сходимость совпадают. Впрочем, этот результат можно вывести и непосредственно из определения нормального конуса, если учесть, что в n-мерном пространстве X, согласно классической теореме Каратеодори, множество $F = \mathrm{co}(A)$ (из леммы) можно составить из выпуклых комбинаций только $n+1$ элементов множества A[17].

И.И. Чучаевым построен пример, показывающий, что в общем случае условие 2) предыдущей теоремы нельзя заменить на аналогичное «секвенциальное» условие. Однако им же указаны некоторые частные случаи, когда это возможно. Приведем две его теоремы.

Теорема II.2.2. *Для того чтобы конус K в рефлексивном УБП (X, K) был оштукатуриваемым, необходимо и достаточно, чтобы*

1) *конус K был нормальным;*

2) *если $x_n \in K$ $(n \in \mathbb{N})$ и $x_n \xrightarrow{\text{сл}} 0$, то $x_n \xrightarrow{(b)} 0$.*

Доказательство. Нужно проверить лишь достаточность условий 1)–2), а для этого, как и в доказательстве предыдущей теоремы, достаточно проверить, что $0 \notin \overline{F}$ $(F = \mathrm{co}(A),\ A = \{x \in K :\ \|x\| = 1\})$. Если допустить, что $0 \in \overline{F}$, то по лемме $0 \in \overline{A}^{\text{сл}}$.

[16] Предыдущая лемма также доказана И.И. Чучаевым.

[17] Простое доказательство теоремы Каратеодори можно найти, например, в книге Х. Никайдо, Выпуклые структуры и математическая экономика. М., изд-во «Мир», 1972, стр. 36.

Так как пространство X рефлексивно, множество A относительно слабо компактно. Тогда по одной общей теореме из теории нормированных пространств существует такая последовательность $x_n \in A$, что $x_n \xrightarrow{\text{сл}} 0$ [18], но, по условию 2), $x_n \xrightarrow{(b)} 0$, т. е. $0 \in \overline{A}$. Получено противоречие. $\square$

Теорема II.2.3. *Пусть (X, K) — УНП, у которого сопряженное пространство X' сепарабельно. Для того чтобы конус K был оштукатуриваемым, необходимо и достаточно выполнение условий 1)–2) из теоремы II.2.2.*

Доказательство. Снова нужно проверить, что $0 \notin \overline{F}$. Допустим, что это не так и потому $0 \in \overline{A}^{\text{сл}}$. Пусть $\{f_i\}$ — плотное множество в X'. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ подберем элемент $x_n \in A$ так, что $|f_i(x_n)| \le \dfrac{1}{n}$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда $f_i(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ при любом $i \in \mathbb{N}$ и, по известному критерию слабой сходимости, $x_n \xrightarrow{\text{сл}} 0$. Как и в доказательстве предыдущей теоремы, мы приходим к противоречию. $\square$

§ 3. УСЛОВИЯ ОШТУКАТУРИВАЕМОСТИ И ТЕЛЕСНОСТИ СОПРЯЖЕННОГО КОНУСА

Свойства телесности и оштукатуриваемости конуса находятся, хотя и не полностью, в двойственности, как будет видно из следующих двух теорем.

Теорема II.3.1 (А.М. Рубинов [16]). *Для того чтобы конус K в УНП (X, K) был оштукатуриваемым, необходимо и достаточно, чтобы сопряженный клин K' был телесным. При этом равномерно положительные функционалы на X и только они суть внутренние точки клина K'.*

Доказательство. Так как для любого $x \in X$

$$\|x\| = \max_{g\in B'} g(x),$$

то неравенство $f(x) \ge \delta\|x\|$ равносильно утверждению, что $f(x) - \delta g(x) \ge 0$ для любого $g \in B'$. Таким образом, равномерная положительность функционала f означает, что $f - \delta B' \subset K'$, т. е. что f — внутренняя точка в K'. $\square$

Теорема II.3.2. *Для того чтобы замкнутый конус K в УНП (X, K) был телесным, необходимо и достаточно, чтобы сопряженный конус K' был оштукатуриваемым и имел (b)-ограниченную слабо замкнутую (т. е. слабо компактную) базу*[19].

Заметим, что в этой теореме X может быть пространством с клином K. Кроме того, в части необходимости теорема верна и без условия замкнутости K.

Доказательство. а) Необходимость. Пусть $u \gg 0$. Положим

$$D' = \{f \in K' :\ f(u) = 1\}.$$

[18] Если множество A из нормированного пространства X относительно слабо компактно, а $x_0 \in \overline{A}^{\text{сл}}$, то существует последовательность $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x_0$, где $x_n \in A$. См. Р. Эдвардс, Функциональный анализ. М., изд-во «Мир», 1969, стр. 752, теорема 8.12.4.

[19] В доказательстве импликации 3) $\Longrightarrow$ 4) из теоремы II.1.1 показано, как по заданному оштукатуриваемому конусу построить его базу. Из этого построения видно, что если конус замкнут, то он имеет замкнутую (b)-ограниченную базу. Сопряженный конус всегда замкнут, следовательно, если он оштукатуриваем, то имеет замкнутую (b)-ограниченную базу. Однако в условиях теоремы II.3.2 от базы конуса K' требуется, чтобы она была не только замкнутой, но и слабо замкнутой. В следующей главе будет показано, какое свойство конуса K равносильно оштукатуриваемости K' без всяких дополнительных ограничений.

Ясно, что D' — база для K', поскольку D' выпукло и $f(u) > 0$ для любого $f \in K' \setminus \{0\}$ (см. теорему II!2.1). Из формулы (2) (II!2) вытекает, что D' (b)-ограничено, а слабая замкнутость D' очевидна.

б) Достаточность. Пусть K' оштукатуриваем и D' — его (b)-ограниченная слабо замкнутая база. Так как $0 \notin D'$, то существует отделяющая D' и 0 гиперплоскость $f(u) = 1$; при этом $f(u) \geq 1$, если $f \in D'$. Пусть $\|f\| \leq M$ для всех $f \in D'$. Если $x \in u + \dfrac{1}{M}B$, т. е. $\|x - u\| \leq \dfrac{1}{M}$, то $|f(x - u)| \leq 1$ для всех $f \in D'$ и $f(x) = f(u) + f(x - u) \geq 0$. А тогда $f(x) \geq 0$ и для всех $f \in K'$ и по лемме из II!4 $x \in K$. Тем самым, u — внутренняя точка в K. $\square$

§ 4. ТЕОРЕМА БИШОПА–ФЕЛПСА ОБ ОПОРНЫХ ТОЧКАХ

Дадим одно применение свойств оштукатуриваемых конусов. Приводимое ниже доказательство мы заимствуем из [24].

Определение. Пусть A — множество в нормированном пространстве X. Точка $x_0 \in A$ называется его *опорной точкой*, если существует такой ненулевой $f \in X'$, что $f(x_0) \geq f(x)$ для любого $x \in A$.

Лемма. *Если в УНП (X, K) конус K замкнут и вполне правилен, а множество $A \subset X$ (b)-ограничено и (b)-полно, то для любого $x \in A$ существует максимальный в A элемент $z \geq x$*[20].

Доказательство. Каждая цепь элементов из A, благодаря полной правильности конуса K и (b)-ограниченности A, (b)-сходится к некоторому пределу (содержащемуся в A) и, следовательно, имеет верхнюю границу. Тогда утверждение леммы непосредственно вытекает из леммы Цорна. $\square$

Теорема II.4.1 (Т. Бишоп, Р. Фелпс [20]). *Если A — (b)-полное выпуклое множество в нормированном пространстве X, то множество его опорных точек плотно в множестве всех его граничных точек.*

Доказательство. Пусть v — произвольная граничная точка множества A. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такой $y \notin A$, что $\|y - v\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Так как A замкнуто, существует замкнутая гиперплоскость, строго отделяющая y от A, т. е. существует такой $f \in X'$, что $f(y) > \sup\limits_{z \in A} f(z)$ (см. следствие из теоремы II!2.3). Не умаляя общности, можно считать, что $\|f\| = 1$. Упорядочим пространство X с помощью конуса

$$K = \Big\{ x \in X : \ f(x) \geq \frac{1}{2}\|x\| \Big\}.$$

Ясно, что K — замкнутый конус, а функционал f равномерно положителен, и потому конус K оштукатуриваем, а, следовательно, и вполне правилен (следствие 4 из теоремы II.1.1). Кроме того, K телесен. Действительно, на поверхности единичного шара существует точка x, где $f(x) > \dfrac{1}{2}$ и, следовательно, $f(x) > \dfrac{1}{2}\|x\|$. Тогда, по непрерывности f и нормы, это же неравенство сохраняется и в некоторой окрестности точки x.

Пусть $C = A \cap (v + K)$. Множество C замкнуто, а потому, вместе с A, оно (b)-полно. Проверим, что C (b)-ограничено. Если $z \in A$ и $z \geq v$, то $z - v \in K$ и потому

[20] Элемент $z \in A$ называется *максимальным* в A, если в A не существует элемента $y > z$ (но могут существовать элементы, не сравнимые с z).

$f(z-v) \geq \dfrac{1}{2}\|z-v\|$. С другой стороны, $f(v) \leq f(z) < f(y)$, следовательно,

$$f(z-v) < f(y-v) \leq \|y-v\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, $\|z-v\| \leq 2f(z-v) < \varepsilon$ и $C \subset S(v;\varepsilon)$.

По лемме, в C существует максимальный элемент z_0. При этом $\|z_0 - v\| < \varepsilon$, $z_0 \in v + K$, т. е. $z_0 \geq v$. Если некоторый $x \geq z_0$ входит в A, то $x \geq v$ и потому $x \in C$, значит, $x = z_0$. Таким образом, z_0 — максимальный элемент и в A.

Остается проверить, что z_0 — опорная точка множества A. Так как z_0 — максимальный элемент в A, то $(z_0+K)\cap A = \{z_0\}$. Выпуклые множества A и z_0+K_1, где K_1 — совокупность сильно положительных элементов, отделимы с помощью некоторого функционала $g \in X'$. Тогда $g(x) < g(z_0+u)$ для всех $x \in A$ и $u \in K_1$. Беря u со сколь угодно малой нормой, получаем отсюда $g(x) \leq g(z_0)$, а это и означает, что z_0 — опорная точка. $\square$

III. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ КОНУСА

Здесь будут изложены, в основном, результаты Е.А. Лифшица [13–14] и Л. Азимова [19], дополненные Г.Я. Лозановским.

§ 1. КОНСТАНТЫ НОРМАЛЬНОСТИ

Будем предполагать, что конус K в УНП (X, K) ненулевой. Для каждого натурального n положим

$$N(K,n) = \sup_{x_1,\dots,x_n \in K\setminus\{0\}} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|}{\left\| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right\|}. \tag{1}$$

Ясно, что $1 \leq N(K,n) \leq +\infty$ и $N(K,n)$ образуют возрастающую последовательность[21]. Назовем их *константами нормальности* конуса K. Заметим также, что $N(K,1) = 1$.

Теорема III.1.1. *Для любого УНП (X, K) следующие утверждения равносильны:*

1) *конус K нормален;*

2) *все константы нормальности $N(K,n) < +\infty$;*

3) $N(K,2) < +\infty$.

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Если K нормален, то норма полумонотонна на нем. А тогда $\|x_i\| \leq M \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right\|$ для любых $x_1, \dots, x_n \in K$, где M — константа полумонотонности, следовательно, $N(K,n) \leq Mn$.

2) $\Longrightarrow$ 3). Тривиально.

3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $\beta = N(K,2) < +\infty$. Тогда для любых $x_1,\ x_2 \in K$ с $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ имеем $\|x_1 + x_2\| \geq \dfrac{2}{\beta}$, что и означает нормальность конуса K. $\square$

Из доказательства импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) видно, что если конус K нормален, то $\sup\limits_{n} \dfrac{N(K,n)}{n} < +\infty$. Если норма монотонна на конусе K, то $M = 1$ и потому $N(K,n) \leq n$.

---

[21]Всякий набор из n элементов $x_1, \dots, x_n > 0$ можно превратить в набор из $n+1$ элементов без изменения величины дроби в правой части (1), например, заменяя x_n двумя элементами $x'_n = x'_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n$. Отсюда и следует, что $N(K,n) \leq N(K,n+1)$.

Лемма. *Если* $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{N(K,n)}{n} = 0$*, то конус* K *вполне правилен.*

Доказательство. Пусть $0 \leq x_n \uparrow$ и $\|x_n\| \leq C$, но предположим, что последовательность $\{x_n\}$ не (b)-фундаментальна. Тогда существует $\varepsilon > 0$ и такая возрастающая последовательность индексов n_k, что

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \geq \varepsilon, \quad x_{n_1} > 0.$$

Положим $y_1 = x_{n_1}$, $y_k = x_{n_k} - x_{n_{k-1}}$ $(k \geq 2)$. Тогда для любого p

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{p} \|y_k\|}{\Big\| \sum\limits_{k=1}^{p} y_k \Big\|} \geq \frac{(p-1)\varepsilon}{C},$$

следовательно, и $N(K,p) \geq \dfrac{(p-1)\varepsilon}{C}$ или $\dfrac{N(K,p)}{p} \geq \dfrac{\varepsilon}{2C}$ (при $p \geq 2$), что противоречит условию леммы. □

Теперь докажем, что для любых m, $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$N(K,mn) \leq N(K,m) \cdot N(K,n). \tag{2}$$

Действительно, пусть задано mn элементов $x_1, \ldots, x_{mn} \in K \setminus \{0\}$. Положим

$$y_k = \sum_{i=(k-1)n+1}^{kn} x_i \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Из определения константы $N(K,n)$ следует, что

$$\sum_{i=(k-1)n+1}^{kn} \|x_i\| \leq N(K,n)\|y_k\|.$$

Теперь имеем

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{mn} \|x_i\|}{\Big\| \sum\limits_{i=1}^{mn} x_i \Big\|} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{i=(k-1)n+1}^{kn} \|x_i\|}{\Big\| \sum\limits_{k=1}^{m} y_k \Big\|} \leq N(K,n) \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} \|y_k\|}{\Big\| \sum\limits_{k=1}^{m} y_k \Big\|} \leq N(K,n) \cdot N(K,m).$$

Переходя в левой части к верхней грани по всевозможным наборам из mn элементов (> 0), получаем (2).

Теорема III.1.2. *Если существует хоть одно* $m \in \mathbb{N}$*, при котором* $\dfrac{N(K,m)}{m} < 1$*, то конус* K *вполне правилен.*

Доказательство. Пусть $q = \dfrac{N(K,m)}{m} < 1$. Так как $N(K,1) = 1$, то $m \geq 2$. Теперь, согласно неравенству (2), при любом $p \in \mathbb{N}$

$$\frac{N(K,m^p)}{m^p} \leq q \, \frac{N(K,m^{p-1})}{m^{p-1}} \leq \ldots \leq q^p \xrightarrow[p\to\infty]{} 0,$$

следовательно, $\varliminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{N(K,n)}{n}=0$, и остается применить предыдущую лемму. $\square$

Теорема III.1.3. *Для того чтобы конус K был оштукатуриваемым, необходимо и достаточно, чтобы его константы нормальности были в совокупности ограничены: $\beta=\sup\limits_n N(K,n)<+\infty$.*

Доказательство. а) Необходимость. Если конус K оштукатуриваем, то в X существует эквивалентная норма $\|\cdot\|'$, аддитивная на конусе K (условие 3 теоремы II.1.1). Константы нормальности $N'(K,n)$, вычисленные с помощью этой нормы, очевидно, равны 1. С другой стороны, если

$$m\|x\|'\le\|x\|\le M\|x\|'\quad (M,\ m>0),$$

то при любом n

$$N(K,n)\le\frac{M}{m}\,N'(K,n)=\frac{M}{m}.$$

б) Достаточность. Положим

$$A=\{x\in K:\ \|x\|=1\},\quad F=\mathrm{co}(A).$$

Ясно, что F (b)-ограничено; докажем, что $0\notin\overline{F}$. Действительно, если $x\in F$, то $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$, где $x_i\in A$, $\lambda_i>0$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$; а тогда, заменяя в формуле (1) x_i на $\lambda_i x_i$, мы сразу получим, что $\dfrac{1}{\|x\|}\le\beta$ или $\|x\|\ge\dfrac{1}{\beta}$. Таким образом, конус K натягивается на выпуклое (b)-ограниченное множество F, причем $0\notin\overline{F}$, т. е. выполнено условие 5) теоремы II.1.1, и потому конус K оштукатуриваем. $\square$

Рассмотрим в качестве примера пространства ℓ^p $(1\le p\le+\infty)$ с естественным упорядочением. При $p=1$ норма в ℓ^p аддитивна на конусе положительных элементов и потому все $N(K,n)=1$. При $p=+\infty$ легко понять, что $N(K,n)=n$. Если же $1<p<+\infty$, то непосредственный подсчет показывает, что $N(K,n)=n^{1-\frac{1}{p}}$, откуда

$$\frac{N(K,n)}{n}=n^{-\frac{1}{p}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

и с помощью теоремы III.1.2 мы снова заключаем, что конус K в пространстве ℓ^p при $1\le p<+\infty$ вполне правилен.

Замечание. Из доказанных трех теорем в первой и третьей мы получили полную характеристику нормальности и оштукатуриваемости конуса с помощью констант нормальности. Однако во второй теореме мы установили лишь достаточное условие полной правильности конуса. Оказывается, что принципиально невозможно получить необходимое и достаточное условие полной правильности конуса, выраженное с помощью только констант нормальности. Именно, можно указать два пространства с одинаковыми наборами констант нормальности, в одном из которых конус вполне правилен, а в другом даже не правилен. Приведем соответствующий пример.

Пример 5. Пусть $\mathbb{R}^\infty_n$ есть n-мерное пространство с покоординатным упорядочением, в котором норма определена по формуле

$$\|(\xi_1,\ldots,\xi_n)\|=\max_i|\xi_i|,$$

и пусть X состоит из всех последовательностей $x = \{x^{(n)}\}$, где $x^{(n)} \in \mathbb{R}^\infty_n$, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x^{(n)}\| < +\infty$. Положим

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x^{(n)}\|$$

и введем в X также покоординатное упорядочение: будем считать $x \geq 0$ тогда, когда $x^{(n)} \geq 0$. Мы получим РУБП (и даже банахово K-пространство). При этом полная правильность конуса положительных элементов столь же очевидна, как и в пространстве L^1 или ℓ^1.

При любом натуральном n рассмотрим векторы

$$y_i = \{0, \dots, 0, e_i, 0, \dots\} \in X \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где на n-ом месте стоит координатный орт e_i из $\mathbb{R}^\infty_n$. Тогда $\|y_i\| = \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \right\| = 1$, следовательно, $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \|y_i\|}{\left\| \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \right\|} = n$ и потому $N(K, n) \geq n$. Но поскольку норма в X монотонна, $N(K, n) \leq n$ (см. замечание к теореме III.1.1), следовательно, $N(K, n) = n$.

Ту же последовательность констант нормальности имеет классический конус в пространстве ℓ^∞, но этот конус не является не только вполне правильным, но даже правильным.

В заключение параграфа выведем с помощью теоремы III.1.3 еще один критерий оштукатуриваемости конуса.

Теорема III.1.4. *Для того чтобы конус K в УНП (X, K) был оштукатуриваемым, необходимо и достаточно, чтобы всякий (b)-сходящийся в себе ряд из элементов конуса K был абсолютно сходящимся*[22].

Доказательство. а) Необходимость. Если конус K оштукатуриваем, то, благодаря теореме II.1.1, можно считать, что норма в X аддитивна на K. А тогда ясно, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ (b)-сходится в себе и $x_n \in K$, то этот ряд абсолютно сходится.

б) Достаточность. Легко видеть, что если условие теоремы выполнено, то конус K нормален. Действительно, если K не нормален, то для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие элементы x_n, $y_n \in K$, что $\|x_n\| = \|y_n\| = \dfrac{1}{n}$, а $\|x_n + y_n\| < \dfrac{1}{n^2}$. Ясно, что ряд $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \ldots + x_n + y_n + \ldots$ (b)-сходится в себе, но не является абсолютно сходящимся.

Теперь предположим, что конус K не оштукатуриваем. Тогда, по теореме III.1.3, для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое конечное множество элементов $x_1^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)} \in K \setminus \{0\}$, что

$$\sum_{i=1}^{k_n} \|x_i^{(n)}\| > n^2 \left\| \sum_{i=1}^{k_n} x_i^{(n)} \right\|. \tag{3}$$

[22] (b)-сходимость ряда в себе означает, что последовательность его частичных сумм (b)-фундаментальна. Абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ означает, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

Положим $y_n = \sum\limits_{i=1}^{k_n} x_i^{(n)}$. При этом можно считать, что $\|y_n\| = \dfrac{1}{n^2}$, а тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ абсолютно сходится.

Рассмотрим (b)-пополнение Y пространства X, упорядоченное с помощью конуса $\overline{K}_Y$, т. е. замыкания конуса K в пространстве Y. Как и K, конус $\overline{K}_Y$ тоже нормален. Пусть y есть сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ в пространстве Y, а s_n — его частичные суммы ($s_n \in X$). Образуем ряд

$$x_1^{(1)} + \ldots + x_{k_1}^{(1)} + \ldots + x_1^{(n)} + \ldots + x_{k_n}^{(n)} + \ldots \tag{4}$$

и проверим, что этот ряд (b)-сходится в пространстве Y, а, следовательно, (b)-сходится в себе в пространстве X. Обозначим его частичные суммы через σ_p. Для любого натурального $p \geq k_1$ находим такое $n = n(p)$, что

$$k_1 + \ldots + k_n \leq p < k_1 + \ldots + k_n + k_{n+1}.$$

Тогда

$$s_n \leq \sigma_p < s_{n+1}.$$

Если $p \to \infty$, то и $n(p) \to \infty$. Но $s_n,\ s_{n+1} \xrightarrow{(b)} y$, а тогда по следствию 1 из теоремы IV!2.1 и $\sigma_p \xrightarrow{(b)} y$. С другой стороны, из неравенства (3) следует, что ряд (4) не является абсолютно сходящимся, и мы приходим к противоречию с условием теоремы. $\square$

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ СВОЙСТВА КОНСТАНТ НОРМАЛЬНОСТИ

Отметим еще некоторые интересные свойства констант нормальности нормального конуса, которые не будут использованы в дальнейшем[23]. Напомним, что если конус K в УНП (X, K) нормален, то в X существует эквивалентная норма, монотонная на конусе K (теорема IV!2.4).

1. *Если норма в УНП (X, K) монотонна на K, то $\dfrac{N(K, n+1)}{n+1} \leq \dfrac{N(K, n)}{n} \leq 1$ при любом $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Правое неравенство уже было отмечено в предыдущем случае. Докажем левое неравенство. Возьмем произвольный набор из $n+1$ элементов $x_1, \ldots, x_{n+1} > 0$. Имеем

$$\frac{1}{n+1} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1} \|x_i\|}{\Big\|\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i\Big\|} = \frac{1}{n(n+1)} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n+1} \sum\limits_{i=1,\, i\neq j}^{n+1} \|x_i\|}{\Big\|\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i\Big\|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{N(K, n)\Big\|\sum\limits_{i=1,\, i\neq j}^{n+1} x_i\Big\|}{\Big\|\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i\Big\|} \leq \frac{N(K, n)}{n}.$$

[23] В частном случае, для нормированных решеток, изложение результатов этого пункта содержится, в основном, в [1].

Переход к супремуму в левой части и доказывает требуемое неравенство. $\square$

2. *Если норма в УНП (X, K) монотонна на K, то выполняется одно из следующих двух утверждений:*

а) $\dfrac{N(K,n)}{n} = 1$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N(K,n)}{n} = 0$.

Доказательство. Положим $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N(K,n)}{n}$. Существование этого предела вытекает из предыдущего предложения. При этом $0 \le \gamma \le 1$. С помощью неравенства (2) имеем

$$\frac{N(K,n^2)}{n^2} \le \left[\frac{N(K,n)}{n}\right]^2,$$

откуда $\gamma \le \gamma^2$, а это возможно лишь при $\gamma = 1$ (случай а)) или $\gamma = 0$ (случай б)). $\square$

3. *В произвольном УНП $(X, \|\cdot\|, K)$ с нормальным конусом K верно одно из следующих двух утверждений:*

а) $\dfrac{N(K,n)}{n} \ge 1$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N(K,n)}{n} = 0$.

Доказательство. Пусть а) не выполнено. Покажем, что тогда выполняется б). По ходу доказательства теоремы III.1.2 установлено, что если а) не выполнено, то $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{N(K,n)}{n} = 0$. Введем в X эквивалентную норму $\|\cdot\|'$, монотонную на конусе K. Тогда $m\|x\|' \le \|x\| \le M\|x\|'$ для всех $x \in X$ $(M \ge m > 0)$. Обозначим через $N'(K,n)$ константы нормальности конуса K, вычисленные с помощью нормы $\|\cdot\|'$. Ясно, что

$$\frac{m}{M}\, N'(K,n) \le N(K,n) \le \frac{M}{m}\, N'(K,n),$$

а потому $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{N'(K,n)}{n} = 0$. Но, согласно предыдущему предложению, это означает, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N'(K,n)}{n} = 0$, а потому и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N(K,n)}{n} = 0$. $\square$

§ 3. КОНСТАНТЫ ВОСПРОИЗВОДИМОСТИ

В произвольном УНП (X, K) с воспроизводящим конусом K положим для любого натурального n

$$V(K,n) = \sup_{x_1,\dots,x_n \in B} \ \inf_{u \ge x_1,\dots,x_n} \|u\|$$

(B — замкнутый единичный шар из X). В этой формуле внутри берется инфимум норм всевозможных элементов u, мажорирующих заданные n элементов $x_1, \dots, x_n$, а наружный супремум вычисляется по всевозможным наборам таких элементов из B. Будем называть числа $V(K,n)$ *константами воспроизводимости* пространства (X, K).

Заметим, что поскольку конус K воспроизводящий, то для любого конечного набора элементов пространства X мажорирующий элемент u существует и потому $V(K,n)$ имеет смысл. При этом $V(K,n)$ образуют возрастающую последовательность. Константа $V(K,1)$ имеет смысл и без требования, чтобы конус K был воспроизводящим, и при этом $V(K,1) \le 1$ (в качестве мажорирующего элемента u для x_1 можно взять $u = x_1$). Но если $V(K,1) < 1$, то непременно $V(K,1) = 0$ (то же верно и при любом n). Действительно, если $V(K,1) < 1$, то существует такая постоянная $q < 1$, что для любого $x \in B$ найдется элемент $u \ge x$ с нормой $\|u\| \le q$. В свою очередь для u существует мажорирующий элемент v с нормой $\|v\| \le q^2$. При этом $v \ge x$. Рассуждая далее по индукции, мы увидим, что x имеет мажорирующий элемент со сколь угодно малой нормой, следовательно, $V(K,1) = 0$.

Далее отметим, что условие $V(K,1) = 0$ означает, что $\overline{K} = X$[24]. Отсюда вытекает:

1) благодаря теореме II!6.1 равенство $V(K,1) = 1$ необходимо и достаточно для того, чтобы сопряженный клин K' не был нулевым;

2) если конус K замкнут, то $V(K,1) = 1$.

В пространстве с незамкнутым конусом K возможно, что $V(K,n) = 0$ при всех n. Например, если X — пространство всех финитных векторов из ℓ^1, а конус K — тот же, что в примере 2 (II!5), то любой конечный набор элементов из X мажорируется элементом со сколь угодно малой нормой. С другой стороны, не исключено и то, что, начиная с $n = 2$, все $V(K,n) = +\infty$.

Теорема III.3.1. *Для любого УНП (X,K) с воспроизводящим конусом K следующие утверждения равносильны:*

1) *конус K несплющен;*

2) $V(K,2) < +\infty$*;*

3) *все константы воспроизводимости $V(K,n) < +\infty$.*

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть конус K несплющен с константой M. Беря произвольные $x_1,\ x_2 \in B$, находим $u_1,\ u_2 \in K$ так, что

$$u_1 \ge x_1, \quad u_2 \ge x_2, \quad \|u_i\| \le M\|x_i\| \le M \qquad (i = 1,\ 2).$$

Положим $u = u_1 + u_2$. Тогда $u \ge x_1,\ x_2$, $\|u\| \le 2M$, следовательно, $V(K,2) \le 2M$.

2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $V(K,2) = \beta < +\infty$. Зададим $\varepsilon > 0$ и возьмем произвольные $x_1, \ldots, x_n \in B$. Затем, рассматривая n множеств из двух элементов $\{x_i, 0\}$ каждое, находим мажорирующие их элементы $u_i \in K$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ так, что $\|u_i\| < \beta + \varepsilon$. После этого положим $u = u_1 + \ldots + u_n$. Ясно, что $u \ge x_i$ при всех i, а $\|u\| < n(\beta + \varepsilon)$. Отсюда уже сразу вытекает, что $V(K,n) \le n\beta$[25].

3) $\Longrightarrow$ 1). Если $V(K,2) = \beta < +\infty$, то для любого $x \in B$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой $u \in K$, что $u \ge x$, а $\|u\| < \beta + \varepsilon$. Следовательно, $x = u - v$, причем $v = u - x \in K$, а

$$\|v\| \le \|u\| + \|x\| < \beta + 1 + \varepsilon.$$

Значит, конус K несплющен с константой $\beta + 1 + \varepsilon$. $\square$

Для удобства некоторых формулировок в дальнейшем условимся считать, что если конус K не воспроизводящий, то $V(K,n) = +\infty$ при всех $n \ge 2$.

[24] Действительно, если $u \ge -x$ и $\|u\| < \varepsilon$, то $u + x \in K$ и $\|(u+x) - x\| < \varepsilon$. Обратно, если $z \in K$ и $\|z + x\| < \varepsilon$, то положим $u = z + x$.

[25] Из этого рассуждения, в частности, следует, что если $V(K,2) = 0$, то и $V(K,n) = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

§ 4. ИНФРАТЕЛЕСНЫЕ КОНУСЫ

Если конус K телесен, то, по теореме II!1.4, замкнутый единичный шар B (o)-ограничен. Пусть u — его верхняя граница. Тогда $V(K,n) \leq \|u\|$ при любом n и, следовательно, константы воспроизводимости в совокупности ограничены. Однако обратное заключение неверно. Так, например, конус K векторов с неотрицательными координатами в пространстве c_0 не телесен. Однако для любого конечного числа векторов $x_i = \{\xi_{ik}\}_k$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ из c_0 вектор

$$u = \left\{ \sup_i \xi_{ik} \right\}_k \in c_0$$

и $u \geq x_i$. Если же при этом $\|x\| \leq 1$, то и $\|u\| \leq 1$ и потому все $V(K,n) = 1$.

Определение. Конус K в УНП (X, K) называется *инфрателесным*[26], если константы воспроизводимости $V(K,n)$ в совокупности ограничены. Иными словами, существует такая постоянная $\beta > 0$, что для любой конечной совокупности элементов $x_1, \ldots, x_n \in B$ существует мажорирующий элемент $u \in \beta B$. Всякое число β, удовлетворяющее этому условию, будем называть константой инфрателесности конуса K.

Как мы только что видели, всякий телесный конус инфрателесен, а классический конус в c_0 представляет пример инфрателесного, но не телесного конуса. Из теоремы III.3.1 следует, что инфрателесный конус несплющен, а из теоремы II!1.2 сразу видно, что в конечномерном нормированном пространстве классы телесных и инфрателесных конусов совпадают.

Теорема III.4.1. *В сопряженном пространстве (X', K') инфрателесность конуса K' равносильна его телесности.*

Доказательство. Пусть конус K' инфрателесен с константой β. Для любого $f \in B'$ (B' — замкнутый единичный шар из X') образуем множество

$$A_f = (f + K') \cap \beta B'.$$

Это множество слабо замкнуто. Для любой конечной совокупности функционалов $f_1, \ldots, f_n \in B'$ существует функционал $g \in \beta B'$, мажорирующий $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Следовательно, $g \in f_i + K'$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$, и потому $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_{f_i} \neq \varnothing$, т. е. множества A_f образуют центрированную систему[27]. Но так как это слабо замкнутые множества в слабо компактном пространстве $\beta B'$, то $\bigcap\limits_{f \in B'} A_f \neq \varnothing$. Пусть $\varphi \in \bigcap\limits_{f \in B'} A_f$. Тогда $\varphi \in f + K'$ при любом $f \in B'$, следовательно, $\varphi \geq f$ для любого $f \in B'$ и потому B' ограничено сверху. Функционал $-\varphi$ является его нижней границей и, значит, шар B' (o)-ограничен. По теореме II!1.4 отсюда вытекает, что конус K' телесен. $\square$

Понятие инфрателесности имеет смысл и в том случае, если K — несобственный конус в нормированном пространстве X.

---

[26] Этот термин введен Е.А. Лифшицем.

[27] Семейство множеств из какого-нибудь пространства называется *центрированным*, если пересечение любого конечного числа множеств из данного семейства не пусто. Известна следующая теорема: для того чтобы топологическое пространство было компактным, необходимо и достаточно, чтобы всякая центрированная система его замкнутых подмножеств имела непустое пересечение (см., например, Канторович Л.В. и Акилов Г.П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959, с. 42).

Теорема III.4.2. *Пусть (X, K) — УНП, Y — его пополнение по норме, $\overline{K}_Y$ — замыкание конуса K в пространстве Y. Если конус K инфрателесен в X, то клин $\overline{K}_Y$ инфрателесен в Y.*

Доказательство. Пусть β — константа инфрателесности конуса K. Возьмем n элементов $y_1, \ldots, y_n$ из замкнутого единичного шара пространства Y. Каждый y_i представим в виде суммы ряда

$$y_i = \sum_{k=0}^{\infty} x_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $x_{ik} \in X$ и $\|x_{ik}\| \leq \dfrac{1}{2^k}$. Благодаря инфрателесности конуса K при любом k существует такой элемент $u_k \in X$, мажорирующий $x_{1k}, \ldots, x_{nk}$, что $\|u_k\| \leq \dfrac{\beta}{2^k}$. Положим $u = \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ $(u \in Y)$. Ясно, что $\|u\| \leq 2\beta$ и что $u \geq y_i$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ по отношению к клину $\overline{K}_Y$. $\Box$

Замечание. Из нашего доказательства вытекает, что 2β — константа инфрателесности клина $\overline{K}_Y$. Однако более точный подсчет показывает, что любое число $\gamma > \beta$ тоже является константой инфрателесности клина $\overline{K}_Y$.

§ 5. σ-ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

Определение. Непустое множество E в нормированном пространстве X называется *σ-выпуклым*, если для любой (b)-ограниченной последовательности элементов $x_n \in E$ и любой последовательности чисел $\lambda_n \geq 0$, таких, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$ и что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n = x \in X$, элемент $x \in E$.

Ясно, что всякое σ-выпуклое множество выпукло. Обратное неверно. Например, множество всех финитных векторов из ℓ^1 не является σ-выпуклым.

Лемма. *Если E замкнуто и выпукло, то оно и σ-выпукло.*

Доказательство. Пусть $x_n \in E$ и $\lambda_n \geq 0$ удовлетворяют условиям, указанным в определении, а

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in X.$$

Положим $\mu_n = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$, $y_n = \dfrac{1}{\mu_n} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Элементы y_n имеют смысл, во всяком случае, начиная с некоторого n, поскольку $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Так как E выпукло, то $y_n \in E$. При этом $y_n \xrightarrow{(b)} x$ и потому, благодаря замкнутости E, $x \in E$. $\Box$

Обратное заключение неверно; из σ-выпуклости множества даже в банаховом пространстве не вытекает его замкнутость. Например, в любом нормированном пространстве открытый единичный шар — σ-выпуклое множество.

Теорема III.5.1. *Если E — σ-выпуклое множество, то открытые ядра множества E и его замыкания $\overline{E}$ совпадают*[28].

[28] Для произвольного выпуклого множества эта теорема неверна. Действительно, если E —

Доказательство. Пусть G и H — открытые ядра множеств E и $\overline{E}$ (соответственно). Нужно доказать, что $H \subset G$, а для этого достаточно установить, что если $0 \in H$, то $0 \in G$ (аналогичное заключение для произвольной точки x_0 будет следовать отсюда за счет трансляции на вектор $-x_0$).

Пусть $S = S(0;\varepsilon) \subset H$ (и, следовательно, $S \subset \overline{E}$). Если $x \in S$, то существует такой $y \in S \cap E$, что $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$, значит, $x = y + z$, где $y \in S \cap E$, $\|z\| < \frac{\varepsilon}{2}$. А тогда, если $x \in \alpha S$ $(\alpha > 0)$, то $x = y + z$, где $y \in \alpha(S \cap E)$, $\|z\| < \frac{\alpha\varepsilon}{2}$. Возьмем произвольный элемент $x \in \frac{1}{2}S$. Тогда $x = y_1 + z_1$, где $y_1 \in \frac{1}{2}(S \cap E)$, $\|z_1\| < \frac{\varepsilon}{4}$. В свою очередь, $z_1 = y_2 + z_2$, где $y_2 \in \frac{1}{4}(S \cap E)$, $\|z_2\| < \frac{\varepsilon}{8}$. Продолжая этот процесс, мы построим последовательности элементов y_n и z_n, удовлетворяющих условиям:

$$z_n = y_{n+1} + z_{n+1}, \quad y_n \in \frac{1}{2^n}(S \cap E), \quad \|z_n\| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Но тогда $x = y_1 + \ldots + y_n + z_n = (b)\text{-}\lim(y_1 + \ldots + y_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$. Так как при этом $y_n = \frac{1}{2^n}x_n$, где $x_n \in S \cap E$, а E σ-выпукло, то $x \in E$. Таким образом, $S\left(0; \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset E$ и $0 \in G$. $\square$

§ 6. УСЛОВИЕ ОШТУКАТУРИВАЕМОСТИ СОПРЯЖЕННОГО КОНУСА

Сначала установим некоторые соотношения между константами воспроизводимости в исходном пространстве и константами нормальности сопряженного конуса. Воспользуемся следующей конструкцией. Пусть X — нормированное пространство. Рассмотрим декартово произведение X^n n экземпляров ($n \in \mathbb{N}$) пространства X с нормой

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \max_i \|x_i\|. \tag{5}$$

Замкнутый единичный шар в X^n есть, очевидно, произведение B^n, где B, как обычно, — замкнутый единичный шар в X. Легко понять, что это пространство в некоторых отношениях сходно с пространством $\mathbb{R}_n^\infty$, т. е. с n-мерным координатным пространством, в котором норма определена по аналогичной формуле. В частности, общий вид (b)-линейных функционалов в X^n дается формулой

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i),$$

где $f_i \in X'$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Таким образом, сопряженное пространство $(X^n)' = (X')^n = X' \times \ldots \times X'$, т. е. оно тоже равно декартову произведению n экземпляров

множество всех финитных векторов из ℓ^1, то $\overline{E} = \ell^1$ и его открытое ядро равно ℓ^1, а открытое ядро самого E пусто. Напомним, что *открытым ядром множества* называется совокупность всех его внутренних точек.

сопряженного пространства X'. При этом

$$\|(f_1,\dots,f_n)\| = \sum_{i=1}^{n}\|f_i\|. \tag{6}$$

Если пространство X — банахово, то и X^n — банахово.

Теорема III.6.1. *Пусть (X,K) — произвольное УНП с ненулевым сопряженным конусом K'; тогда $N(K',n) \le V(K,n)$ при любом n. Если же (X,K) — УБП с замкнутым конусом K, то $N(K',n) = V(K,n)$ при всех n.*

Доказательство. Пусть сначала (X,K) — произвольное УНП. Так как конус K' ненулевой, все $V(K,n) > 0$. При этом доказательство следует провести только в предположении, что $V(K,n) < +\infty$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и возьмем любые n ненулевых функционалов $f_1,\dots,f_n \in K'$. Для каждого f_i существует такой $x_i \in B$, что $\|f_i\| \le (1+\varepsilon)f_i(x_i)$. Далее, по определению константы $V(K,n)$, существует такой $u \in X$, что $u \ge x_1,\dots,x_n$, а $\|u\| \le (1+\varepsilon)V(K,n)$. Теперь имеем $\sum\limits_{i=1}^{n}\|f_i\| \le (1+\varepsilon)\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i) \le (1+\varepsilon)\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(u) \le (1+\varepsilon)\|u\|\Big\|\sum\limits_{i=1}^{n} f_i\Big\| \le (1+\varepsilon)^2 V(K,n)\Big\|\sum\limits_{i=1}^{n} f_i\Big\|$, откуда $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\|f_i\|}{\Big\|\sum\limits_{i=1}^{n} f_i\Big\|} \le (1+\varepsilon)^2 V(K,n)$. Переходя в левой части к верхней грани, получаем $N(K',n) \le (1+\varepsilon)^2 V(K,n)$, следовательно, благодаря произвольности ε, $N(K',n) \le V(K,n)$.

Теперь предполагаем, что (X,K) — УБП, а конус K замкнут. Будем доказывать неравенство

$$V(K,n) \le N(K',n), \tag{7}$$

причем достаточно рассмотреть случай, когда $N(K',n) < +\infty$. Заметим, что по теореме II!4.1 конус $K' = \{0\}$[29]. Обозначим для краткости $N(K',n)$ через a ($a > 0$).

Рассмотрим вспомогательное пространство X^n с нормой, определенной по формуле (5), и выделим в нем множество

$$\Omega = \bigcup_{x\in aB}(x-K,\dots,x-K),$$

где $(x-K,\dots,x-K)$ означает совокупность всех элементов $(x_1,\dots,x_n) \in X^n$, у которых $x_i \in x-K$, т. е. $x_i \le x$ ($i = 1,2,\dots,n$). Проверим, что Ω — σ-выпукло. Пусть $y_k \in \Omega$, $\|y_k\| \le C$, $\lambda_k \ge 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k = 1$. Каждый y_k имеет вид $y_k = (x_k - z_{k1},\dots,x_k - z_{kn})$, где $x_k \in aB$, $z_{ki} \in K$, $\|z_{ki}\| \le C + a$. Положим

$$y = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k y_k = \Big(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k - \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k z_{k1},\dots,\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k - \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k z_{kn}\Big).$$

Вследствие (b)-полноты X все ряды в правой части сходятся,

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k\Big\| \le a,$$

[29]При $n = 1$ неравенство (7), и даже равенство, очевидно, поскольку конус K' ненулевой, а тогда $V(K,n) = N(K',n) = 1$.

а так как конус K замкнут, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k z_{ki} \in K$ при любом $i = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, $y \in \Omega$.

Пусть Ω° — поляра множества Ω. Докажем, что Ω° содержится в замкнутом единичном шаре пространства $(X')^n$, причем, если $g = (f_1, \ldots, f_n) \in \Omega^\circ$, то все $f_i \in K'$. Действительно, если $g \in \Omega^\circ$, то, в частности, $g(0, 0, \ldots, 0, \underbrace{-z}_{(i)}, 0, \ldots, 0) = -f_i(z) \leq 1$ для любого $z \in K$, а это возможно лишь в случае, когда $f_i(z) \geq 0$ для любого $z \in K$ (поляра $(-K)^\circ = K'$). Таким образом, $f_i \in K'$. С другой стороны, если ненулевой функционал $g \in \Omega^\circ$, то для каждого $x \in aB$

$$g(x, \ldots, x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \leq 1,$$

откуда $\Big\| \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \Big\| \leq \dfrac{1}{a}$. Но из определения констант нормальности и их монотонности видно, что

$$\sum_{i=1}^{n} \|f_i\| \leq a \Big\| \sum_{i=1}^{n} f_i \Big\| \leq 1,$$

т. е., благодаря формуле (6), $\|g\| \leq 1$.

По теореме о биполяре $\Omega^{\circ\circ} = \overline{\Omega}$. Но так как $\Omega^{\circ\circ} \supset B^n$, то $B^n \subset \overline{\Omega}$. Пусть знак волны $\sim$ над множеством означает переход к его открытому ядру. Ясно, что $\gamma B \subset \widetilde{B}$, если $0 < \gamma < 1$. Теперь, с помощью теоремы III.5.1, при любом $\varepsilon > 0$ имеем $\dfrac{1}{1+\varepsilon} B^n \subset \widetilde{B^n} \subset \widetilde{\overline{\Omega}} = \widetilde{\Omega} \subset \Omega$, или $B^n \subset (1+\varepsilon)\Omega$. Следовательно, для любых $x_1, \ldots, x_n \in B$ существуют такой $u \in aB$ и такие $z_1, \ldots, z_n \in K$, что $x_i = (1+\varepsilon)(u - z_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$; тем самым $(1+\varepsilon)u$ мажорирует $x_1, \ldots, x_n$ и $\|u\| \leq a$. А тогда $V(K, n) \leq (1+\varepsilon)a$ и, благодаря произвольности ε, $V(K, n) \leq a$, т. е. (7) доказано. □

Замечание. Применяя вторую половину доказанной теоремы при $n = 2$, мы снова получаем теорему Андо (IV!6.2). Однако теорема IV!6.1, дающая характеристику нормальности K' для произвольного УНП (X, K), так же непосредственно из теоремы III.6.1 не вытекает, поскольку для произвольного УНП мы имеем лишь неравенство, из которого следует, что если конус K несплющен, то K' нормален.

Теорема III.6.2. *Пусть (X, K) — УБП с замкнутым конусом K. Для того чтобы сопряженный конус K' был оштукатуриваемым, необходимо и достаточно, чтобы конус K был инфрателесным.*

Доказательство. По теореме III.1.3 оштукатуриваемость конуса K' равносильна ограниченности последовательности его констант нормальности $N(K', n)$. С другой стороны, инфрателесность конуса K равносильна ограниченности последовательности констант $V(K, n)$. Но, благодаря предыдущей теореме, эти условия равносильны между собой. □

Если отказаться от замкнутости конуса K, то в части необходимости теорема перестает быть верной. Например, если за K принять конус всех финитных векторов с неотрицательными координатами в c_0, то сопряженный для пространства (c_0, K) конус K' будет тот же, что и при классическом упорядочении c_0, т. е. это будет классический конус в пространстве ℓ^1, а он оштукатуриваем. Однако K даже не воспроизводящий.

Но в части достаточности теорема III.6.2 верна в произвольном УНП (X, K), что немедленно вытекает из первой половины предыдущей теоремы. Если же использовать описанное в теореме III.4.2 пополнение пространства X, то, поскольку оно не влияет ни на сопряженное пространство X', ни на сопряженный конус K', получится, что необходимым и достаточным условием оштукатуриваемости K' является инфрателесность конуса (или клина) $\overline{K}_Y$ в пространстве $(Y, \overline{K}_Y)$.

IV. $\mathbb{O}$-ПРОСТРАНСТВА И $\mathbb{O}_\sigma$-ПРОСТРАНСТВА

В этой главе изучаются УНП, в которых сходимость по норме совпадает с (o)-сходимостью. Впервые такие пространства рассматривались американским математиком Р. ДеМарром [21].

§ 1. ХАРАКТЕРИСТИКА $\mathbb{O}$-ПРОСТРАНСТВ

Определение. УНП (X, K) называется $\mathbb{O}$-*пространством*, если направление $x_\alpha \xrightarrow{(b)} x$ тогда и только тогда, когда $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$.

Теорема IV.1.1 [7]. *Для того чтобы УНП (X, K) было $\mathbb{O}$-пространством, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) *конус K был замкнутым, нормальным и телесным;*

2) *норма в X была монотонно непрерывной.*

Доказательство. а) Необходимость. Пусть (X, K) — $\mathbb{O}$-пространство. Если $x_n \in K$ и $x_n \xrightarrow{(b)} x$, то $x_n \xrightarrow{(o)} x$. Отсюда следует, что существует убывающее направление $y_\beta \downarrow x$, мажорирующее последовательность $\{x_n\}$ в том смысле, что для любого β существует такое N, что $x_n \leq y_\beta$ при $n \geq N$[30]. Но тогда ясно, что все $y_\beta \geq 0$ и потому $x \geq 0$, т. е. $x \in K$.

Допустим, что конус K не нормален. Тогда существуют такие последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, что

$$0 < y_n < x_n, \quad \|x_n\| = \frac{1}{n}, \quad \|y_n\| > 1.$$

Так как $x_n \xrightarrow{(b)} 0$, то $x_n \xrightarrow{(o)} 0$, следовательно, и $y_n \xrightarrow{(o)} 0$. В то же время $\|y_n\| \not\to 0$, что противоречит определению $\mathbb{O}$-пространства. Итак, конус K нормален.

Монотонная непрерывность нормы тривиальным образом вытекает из совпадения (b)-сходимости и (o)-сходимости. Остается проверить телесность конуса K. По теореме II!1.4 для этого достаточно установить (o)-ограниченность хотя бы открытого единичного шара $B \subset X$. Рассмотрим множество всех отличных от нуля элементов шара B и составим из них направление, считая, что x следует за

[30]Поскольку последовательность $\{x_n\}$ рассматривается сейчас как частный случай направления, соотношение $x_n \xrightarrow{(o)} x$ означает, что для $\{x_n\}$ существуют направления, «сжимающие ее к x».

Легко проверить, что для (o)-сходимости справедливы теоремы о предельном переходе в неравенстве и о «сжатой» последовательности. Поэтому в $\mathbb{O}$-пространстве эти теоремы должны быть справедливы и для (b)-сходимости. А тогда замкнутость и нормальность конуса вытекают из леммы (II!3) и следствия 1 из теоремы IV!2.1.

y $(x,\ y \in B)$, если $\|x\| < \|y\|$[31]. При этом получается направление, (b)-сходящееся к 0. Но тогда оно и (o)-сходится к 0. Следовательно, существует такой $y \in B$, что множество всех элементов x с $\|x\| < \|y\|$ (o)-ограничено: $u \le x \le v$. А тогда

$$\frac{1}{\|y\|}u \le x \le \frac{1}{\|y\|}v \qquad \forall\, x \in B.$$

б) Достаточность. Пусть $u \gg 0$. Так как конус K нормален и телесен, u-норма эквивалентна основной норме в X (следствие из теоремы IV!4.1). Предположим, что $x_\alpha \xrightarrow{(u)} 0$. Так как $\pm x_\alpha \le \|x_\alpha\|_u u$, то направления $\{\lambda u\}$ и $\{-\lambda u\}$ $(\lambda > 0)$, упорядоченные по убыванию λ, служат «сжимающими» для $\{x_\alpha\}$. Следовательно, $x_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$.

Обратно, пусть $x_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$, а $\{y_\beta\}$ и $\{z_\gamma\}$ — «сжимающие» направления ($y_\beta \downarrow 0$, $z_\gamma \uparrow 0$). Вследствие монотонной непрерывности нормы $y_\beta \xrightarrow{(b)} 0$ и $z_\gamma \xrightarrow{(b)} 0$. Если α таково, что $z_\gamma \le x_\alpha \le y_\beta$, то (см. следствие 2 из теоремы IV!2.1) $\|x_\alpha\| \le C\max(\|y_\beta\|, \|z_\gamma\|)$, где C — некоторая постоянная. Отсюда следует, что $x_\alpha \xrightarrow{(b)} 0$. $\square$

Следствие. *Если в УНП (X, K) конус K замкнут, телесен и правилен, то (X, K) — $\mathbb{O}$-пространство.*

Доказательство. По теоремам I.2.1–2 конус K нормален, а по теореме I.5.2 норма в X монотонно непрерывна. Следовательно, все условия предыдущей теоремы выполнены. $\square$

Из доказанного следствия вытекает весьма простой способ превращения произвольного нормированного пространства X в $\mathbb{O}$-пространство. Достаточно взять любой элемент $u \ne 0$, описать около него замкнутый шар $\overline{S(u; r)}$ с радиусом $r < \|u\|$ и натянуть на этот шар конус K. По теореме II.1.1 этот конус оштукатуриваем, следовательно, тем более правилен. Кроме того, он замкнут по теореме II!3.4 и телесен по построению.

К тому же результату мы придем и в более общем случае, если в качестве K возьмем любой конус, натянутый на замкнутое, выпуклое, (b)-ограниченное множество, не содержащее 0. Однако существуют $\mathbb{O}$-пространства, которые не могут быть получены таким способом; более того, существуют $\mathbb{O}$-пространства с неправильным конусом. Так, в пространстве из примера 3 (I.5) конус K замкнут, неправилен, а норма монотонно непрерывна. Проверим, что этот конус нормален и телесен. Легко видеть, что вектор $u = \{2, 0, 0, \ldots\}$ — внутренняя точка в K. Действительно, если $\|x - u\| \le 1$, $(x = \{\xi_k\})$, то $\xi_1 \ge 1$ и $|\xi_k| \le 1$ при всех прочих k, следовательно, $x \in K$. Далее, если $x \in [-u, u]$, то $|\xi_1| \le 2$ и $|\xi_k| \le 2 + |\xi_1| \le 4$ при $k \ge 2$, значит, интервал $[-u, u]$ (b)-ограничен и по теореме IV!2.3 конус K нормален. Следовательно, рассматриваемое пространство — $\mathbb{O}$-пространство.

Теорема IV.1.2. *Если в $\mathbb{O}$-пространстве (X, K) конус K миниэдрален, то X конечномерно.*

Доказательство. Согласно предложению 2 из I.5 из миниэдральности конуса K в $\mathbb{O}$-пространстве следует, что он правилен, а тогда остается сослаться на теорему I.2.4. $\square$

[31] Здесь роль индексов играют сами элементы. Согласно введенному в B определению порядка они образуют множество, направленное по возрастанию.

§ 2. ХАРАКТЕРИСТИКА $\mathbb{O}_\sigma$-ПРОСТРАНСТВ

Если в определении $\mathbb{O}$-пространства ограничиться требованием совпадения (b)-сходимости и (o)-сходимости только для последовательностей, мы получим некоторое видоизменение понятия $\mathbb{O}$-пространства.

Определение. УНП (X, K) называется *$\mathbb{O}_\sigma$-пространством,* если последовательность $x_n \xrightarrow{(b)} x$ тогда и только тогда, когда $x_n \xrightarrow{(o)} x$.

В этом определении, в отличие от предыдущего пункта, (o)-сходимость последовательности мы будем понимать в том смысле, как это было сформулировано в I!4, т. е. $x_n \xrightarrow{(o)} x$, если существуют «сжимающие» последовательности $y_n \downarrow x$ и $z_n \uparrow x$, причем $z_n \leq x_n \leq y_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тем не менее справедливо следующее предложение:

всякое $\mathbb{O}$-пространство является $\mathbb{O}_\sigma$-пространством.

Действительно, пусть X — $\mathbb{O}$-пространство, а последовательность $x_n \xrightarrow{(b)} 0$. Как показано по ходу доказательства теоремы IV.1.1 (пункт б)), она «сжимается» монотонными направлениями $\{\lambda u\}$ и $\{-\lambda u\}$ ($u \gg 0$). Но последовательности $\{\|x_n\|_u u\}$ и $\{-\|x_n\|_u u\}$ тоже будут «сжимающими» для $\{x_n\}$, следовательно, $x_n \xrightarrow{(o)} 0$ в том смысле, как это понимается в определении $\mathbb{O}_\sigma$-пространства. Обратное заключение (из $x_n \xrightarrow{(o)} 0$ вытекает, что $x_n \xrightarrow{(b)} 0$) в проверке не нуждается.

Теорема IV.2.1 [7]. *Для того чтобы УНП (X, K) было $\mathbb{O}_\sigma$-пространством, необходимо, а в случае его (b)-полноты и достаточно, чтобы:*

1) *конус K был замкнутым, нормальным и инфрателесным;*

2) *норма в X была монотонно σ-непрерывной.*

Доказательство. а) Необходимость. Замкнутость и нормальность конуса K проверяются так же, как и в $\mathbb{O}$-пространстве. Монотонная σ-непрерывность нормы очевидна. Остается проверить инфрателесность K.

Допустим, что K не инфрателесен. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое конечное множество элементов $x_1^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}$ из замкнутого единичного шара $B \subset X$, что если $y \geq x_i^{(n)}$ при всех $i = 1, 2, \ldots, k_n$, то $\|y\| > n^2$. Последовательность

$$x_1^{(1)}, \ldots, x_{k_1}^{(1)}, \ldots, \frac{1}{n} x_1^{(n)}, \ldots, \frac{1}{n} x_{k_n}^{(n)}, \ldots \xrightarrow{(b)} 0,$$

следовательно, она и (o)-сходится к 0, а потому она (o)-ограничена. Пусть y — ее верхняя граница. Тогда, в частности, при любом n

$$\frac{1}{n} x_1^{(n)}, \ldots, \frac{1}{n} x_{k_n}^{(n)} \leq y$$

и по построению $\|y\| > n$, что невозможно.

б) Достаточность. Из нормальности конуса K и монотонной σ-непрерывности нормы, как и для $\mathbb{O}$-пространств, вытекает, что если $x_n \xrightarrow{(o)} 0$, то и $x_n \xrightarrow{(b)} 0$. Проверим обратное заключение.

Пусть сначала $x_n \in K$ и $x_n \xrightarrow{(b)} 0$. Выделим частичную последовательность индексов $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ так, что $\|x_n\| \leq \dfrac{1}{k^2}$ при $n \geq n_k$. Обозначим через

β константу инфрателесности конуса K. Существуют такие элементы y_k нормой $\|y_k\| \leq \dfrac{\beta}{k^2}$, что

$$x_{n_k}, \ldots, x_{n_{k+1}-1} \leq y_k.$$

Положим

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k + x_1 + \ldots + x_{n_1-1}.$$

Тогда $x_n \leq y$ при всех n. Таким образом, всякая (b)-сходящаяся к 0 последовательность положительных элементов (o)-ограничена. Далее подберем положительные числа λ_n так, что $\lambda_n \uparrow +\infty$, а $\lambda_n x_n \xrightarrow{(b)} 0$. По уже доказанному, эта последовательность тоже (o)-ограничена, следовательно, $\lambda_n x_n \leq z$ при всех n. Тогда $x_n \leq \dfrac{1}{\lambda_n} z$ и, благодаря принципу Архимеда, отсюда следует, что $x_n \xrightarrow{(o)} 0$.

Переходим к произвольной последовательности $x_n \xrightarrow{(b)} 0$. Так как инфрателесный конус несплющен (III.4), существуют такие u_n, $v_n \in K$, что $x_n = u_n - v_n$, а $\|u_n\|$, $\|v_n\| \leq M\|x_n\|$. Но тогда $u_n \xrightarrow{(b)} 0$ и $v_n \xrightarrow{(b)} 0$, откуда, по доказанному, $u_n \xrightarrow{(o)} 0$ и $v_n \xrightarrow{(o)} 0$, а потому и $x_n \xrightarrow{(b)} 0$. □

Из доказанной теоремы сразу следует, что классическое пространство c_0 с естественным упорядочением представляет пример $\mathbb{O}_\sigma$-пространства, которое не является $\mathbb{O}$-пространством. Действительно, все условия предыдущей теоремы в c_0 выполнены (ср. III.4), но конус в c_0 не телесен. Помимо рассмотренного в доказательстве теоремы IV.1.1 множества элементов единичного шара, направленного по убыванию нормы, приведем еще один простой пример направления в c_0, которое сходится к 0 по норме, но не сходится по упорядочению: $\left\{\dfrac{1}{n} e_k\right\}$, где $n \in \mathbb{N}$, а e_k — координатные орты в c_0, и пары индексов (n,k) упорядочены по возрастанию n: $(n_1,k_1) > (n_2,k_2)$, если $n_1 > n_2$.

Заметим, что в доказанной теореме условие (b)-полноты в части достаточности существенно, что подтверждается следующим примером. Рассмотрим подпространство всех финитных векторов из c_0 с тем же классическим упорядочением. Легко видеть, что все условия теоремы, кроме (b)-полноты, в этом пространстве выполнены, но оно не $\mathbb{O}_\sigma$-пространство: последовательность $\dfrac{1}{n} e_n \xrightarrow{(b)} 0$ (e_n — координатные орты), но не (o)-ограничена и потому не может (o)-сходиться.

Попутно отметим, что пример c_0 подтверждает, что, в отличие от $\mathbb{O}$-пространств, бесконечномерные $\mathbb{O}_\sigma$-пространства с миниэдральным конусом положительных элементов существуют (c_0 даже банахово K-пространство).

Пример 1 (I.5) показывает, что существует $\mathbb{O}_\sigma$-пространство с телесным конусом, которое не является $\mathbb{O}$-пространством. В [18] построен пример $\mathbb{O}_\sigma$-пространства с оштукатуриваемым конусом положительных элементов, которое также не является $\mathbb{O}$-пространством.

Теорема IV.2.2. *Если (X, K) — $\mathbb{O}_\sigma$-пространство, то всякое предкомпактное множество*[32] *в X (o)-ограничено.*

[32] Множество $E \subset X$ называется *предкомпактным*, если его замыкание в (b)-пополнении

Доказательство. Пусть множество $E \subset X$ предкомпактно. Из теории нормированных пространств известно, что в X существует такая последовательность $x_n \xrightarrow{(b)} 0$, что E содержится в замкнутой симметричной выпуклой оболочке множества $\{x_n\}$ (см. теорему IV.5.1). Но так как X — $\mathbb{O}_\sigma$-пространство, то $x_n \xrightarrow{(o)} 0$ и потому $\{x_n\}$ (o)-ограничена: $\pm x_n \le y$ при всех n. Интервал $[-y, y]$ — симметричное, выпуклое и замкнутое (последнее — благодаря замкнутости K) множество, поэтому замкнутая симметричная выпуклая оболочка множества $\{x_n\}$ содержится в $[-y, y]$. Тем более: $E \subset [-y, y]$, значит, E (o)-ограничено. □

Замечание. Если в теореме IV.2.1 условие инфрателесности конуса K заменить на (o)-ограниченность любого предкомпактного множества в X, а прочие условия оставить без изменения, то получатся необходимые и достаточные условия, при которых произвольное УНП (X, K) (без предположения о его (b)-полноте) оказывается $\mathbb{O}_\sigma$-пространством[33]. Действительно, инфрателесность конуса K была использована для того, чтобы из (b)-сходимости вывести (o)-сходимость. Если же допустить, что любое предкомпактное множество (o)-ограничено, то, в частности, любая (b)-сходящаяся последовательность (o)-ограничена, а тогда рассуждаем так: если $x_n \xrightarrow{(b)} 0$, то существует такая последовательность $\lambda_n \uparrow +\infty$ $(\lambda_n > 0)$, что $\lambda_n x_n \xrightarrow{(b)} 0$. Следовательно, по условию, $\pm\lambda_n x_n \le y$, откуда $\pm x_n \le \dfrac{1}{\lambda_n} y$ и $x_n \xrightarrow{(b)} 0$.

§ 3. О ДЕДЕКИНДОВОЙ ПОЛНОТЕ $\mathbb{O}$- и $\mathbb{O}_\sigma$-ПРОСТРАНСТВ

Теорема IV.3.1.[34] *Если (X, K) — дедекиндово σ-полное $\mathbb{O}_\sigma$-пространство, то оно (b)-полно и дедекиндово полно.*

Доказательство. Сначала проверим (b)-полноту пространства X. Пусть $\{x_n\}$ — возрастающая (b)-фундаментальная последовательность положительных элементов. Так как элементы (b)-фундаментальной последовательности образуют предкомпактное множество, то, по теореме IV.2.2, эта последовательность (o)-ограничена, следовательно, существует $\sup x_n$. Тогда (b)-полнота X вытекает из теоремы IV!2.6, а дедекиндова полнота (X, K) из следствия 1 из теоремы I.5.1. □

Однако, как показывает следующая теорема, не всякое банахово $\mathbb{O}_\sigma$-пространство, и даже $\mathbb{O}$-пространство, дедекиндово полно.

Теорема IV.3.2. *Для того чтобы банахово $\mathbb{O}_\sigma$-пространство (X, K) было дедекиндово полным, необходимо и достаточно, чтобы конус K был правильным.*

Вытекает сразу из теорем I.5.1 и IV.3.1.

Из этой теоремы следует, что банахово $\mathbb{O}$-пространство с неправильным конусом из примера 3 не является дедекиндово σ-полным.

Следствие. *Если в дедекиндово полном $\mathbb{O}_\sigma$-пространстве (X, K) конус K телесен, то (X, K) — (b)-полное $\mathbb{O}$-пространство.*

Доказательство. По предыдущим двум теоремам X (b)-полно, а конус K

пространства X компактно, т. е., иными словами, если из всякой последовательности элементов из E можно выделить частичную фундаментальную. Это равносильно существованию в E при любом $\varepsilon > 0$ конечной ε-сети.

[33]Характеристика $\mathbb{O}_\sigma$-пространств в такой форме была указана И.И. Чучаевым.

[34]В [7] теоремы IV.3.1-2 были доказаны при дополнительном предположении, что конус K телесен. И.И. Чучаев обратил внимание автора на возможность освободиться от этого ограничения.

правилен. Остается сослаться на следствие из теоремы IV.1.1. □

§ 4. СОПРЯЖЕННЫЕ $\mathbb{O}$-ПРОСТРАНСТВА

Пусть (X, K) — произвольное УНП с пространственным конусом K[35]. Рассмотрим сопряженное пространство (X', K').

Теорема IV.4.1. *Если (X', K') — $\mathbb{O}_\sigma$-пространство, то оно и $\mathbb{O}$-пространство, причем конус K' правилен.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что пространство X банахово, а конус K замкнут[36]. Пусть (X', K') — $\mathbb{O}_\sigma$-пространство; тогда конус K' нормален и инфрателесен. По теореме III.4.1, конус K' телесен, а по теореме Андо (IV!6.2) конус K — воспроизводящий, следовательно и несплющенный. Тогда, по теореме III!4.1, пространство (X', K') дедекиндово полно. Теперь правильность конуса K' вытекает из теоремы IV.3.2, а по следствию из этой теоремы (X', K') — $\mathbb{O}$-пространство. □

Теорема IV.4.2. *Для того чтобы оба пространства (X, K) и (X', K') были $\mathbb{O}$-пространствами, необходимо и достаточно, чтобы конус K был замкнутым, телесным и оштукатуриваемым.*

Доказательство. а) Необходимость. Так как конус K' в $\mathbb{O}$-пространстве (X', K') телесен, то K оштукатуриваем по теореме II.3.1. Прочие условия вытекают из теоремы IV.1.1.

б) Достаточность. Из оштукатуриваемости конуса K вытекает его правильность, и по следствию из теоремы IV.1.1 (X, K) — $\mathbb{O}$-пространство. Далее, из телесности и оштукатуриваемости K вытекают те же свойства K' (II.3). Кроме того, сопряженный конус всегда замкнут и потому (X', K') тоже $\mathbb{O}$-пространство. □

Из приведенного доказательства видно, что если нормированное пространство X превращено в $\mathbb{O}$-пространство с помощью конуса, натянутого на (b)-ограниченное, выпуклое, замкнутое тело, не содержащее 0, то не только X', но и все последующие сопряженные пространства $X'', X''', \ldots$ тоже будут $\mathbb{O}$-пространствами.

Лемма. *Если в УНП (X, K) конус K нормален и правилен, а любое предкомпактное множество в X (o)-ограничено, то норма в X монотонно σ-непрерывна.*

Доказательство. Пусть $x_n \downarrow 0$. Из правильности конуса K вытекает, что последовательность $\{x_n\}$ (b)-фундаментальна. Выделим возрастающую последовательность индексов n_k так, что

$$\|x_n - x_m\| \le \frac{1}{k^2} \quad \text{при} \quad n, m \ge n_k.$$

Затем при $n, m \ge n_1$ положим

$$\lambda_{nm} = \max\{k : \ n_k \le n, m\}$$

и образуем направление, упорядоченное по возрастанию обоих индексов, $\{\lambda_{nm} y_{nm}\}$, где $y_{nm} = x_n - x_m$. Легко видеть, что при любом $\varepsilon > 0$ для множества $\{\lambda_{nm} y_{nm}\}$

[35] Можно рассматривать и более общий случай, когда K — пространственный клин.

[36] В противном случае можно вместо (X, K) рассмотреть его (b)-пополнение $(Y, \overline{K}_Y)$. При этом сопряженное пространство и сопряженный конус останутся без изменения.

существует конечная ε-сеть[37], и потому это множество предкомпактно. Тогда, по условию, оно (o)-ограничено, следовательно, $\lambda_{nm}y_{nm} \le z$. Теперь для любого k имеем

$$x_n - x_m \le \frac{1}{k}z \quad \text{при} \quad n, m \ge n_k.$$

Отсюда, переходя к (o)-пределу при $m \to +\infty$, получим $0 \le x_n \le \dfrac{1}{k}z$ и потому, благодаря нормальности конуса K, $x_n \xrightarrow{(b)} 0$. □

Следствие. *Если в УНП (X, K) конус K замкнут, нормален и правилен, а любое предкомпактное множество в X (o)-ограничено, то (X, K) — $\mathbb{O}_\sigma$-пространство.*

Вытекает из леммы, если учесть замечание к теореме IV.2.2.

Теорема IV.4.3. *Для того чтобы УНП (X, K) было $\mathbb{O}_\sigma$-пространством, а сопряженное УНП (X', K') $\mathbb{O}$-пространством, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) *конус K был замкнутым и оштукатуриваемым;*

2) *любое предкомпактное множество в X было (o)-ограниченным.*

Доказательство. а) Необходимость оштукатуриваемости K вытекает из того, что K' телесен, а необходимость условия 2) доказана в теореме IV.2.2.

б) Достаточность. Так как оштукатуриваемость K влечет его нормальность и правильность, то, по следствию из леммы, (X, K) — $\mathbb{O}_\sigma$-пространство. Далее, из оштукатуриваемости конуса K вытекает телесность K', а но теореме IV.2.1 конус K инфрателесен. Тогда, по теореме III.6.2, которая, как отмечено в конце III.6, в части достаточности верна всегда, конус K' оштукатуриваем. А теперь, благодаря следствию из теоремы IV.1.1, (X', K') — $\mathbb{O}$-пространство. □

Следствие 1. *Пусть (X, K) — $\mathbb{O}_\sigma$-пространство. Для того чтобы сопряженное пространство (X', K') было $\mathbb{O}$-пространством, необходимо и достаточно, чтобы конус K был оштукатуриваемым.*

Вытекает сразу из предыдущей теоремы, поскольку прочие ее условия выполняются в любом $\mathbb{O}_\sigma$-пространстве.

Следствие 2. *Если в $\mathbb{O}_\sigma$-пространстве (X, K) конус K миниэдрален и оштукатуриваем, то X конечномерно.*

Доказательство. Так как инфрателесный конус несплющен, то, по теореме V!3.1, сопряженный конус K' миниэдрален. По предыдущему следствию (X', K') — $\mathbb{O}$-пространство, а тогда, по теореме IV.1.2, X' конечномерно, следовательно, и X конечномерно. □

В заключение приведем пример УНП, которое само не является $\mathbb{O}_\sigma$-пространством, но у которого сопряженное пространство — $\mathbb{O}$-пространство.

Пример 6[38]**.** Пусть $X = \ell^2$ с классической нормой, а упорядочение в X введено с помощью конуса

$$K = \Big\{x \in X: \quad \xi_k \ge 0 \ \text{ при всех } k, \ \ \sum_{k=2}^{\infty} \xi_k^2 \le \xi_1^2 \Big\}.$$

[37]Действительно, существует такое k, что $\|\lambda_{nm}y_{nm}\| < \varepsilon$ при $n, m \ge n_k$. Кроме того, все последовательности $\{\lambda_{nm}y_{nm}\}_m$ при фиксированном n, $n_1 \le n < n_k$ (их — конечное число) (b)-фундаментальны, а потому каждая из них имеет конечную ε-сеть. Остается поменять местами m и n.

[38]Этот пример также построен И.И. Чучаевым.

Так как для любого $x \in X$

$$\|x\| \leq |\xi_1| + \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} \xi_k^2},$$

то $\|x\| \leq 2\xi_1$, если $x \in K$. Следовательно, $f(x) = \xi_1$ — равномерно положительный функционал и конус K допускает оштукатуривание. Для любого $x \in X$ положим

$$u = \{2\|x\| + |\xi_1|, |\xi_2|, |\xi_3|, \ldots\}.$$

Тогда $u \in K$ и $u \geq x$. Отсюда следует, что конус K — воспроизводящий. Замкнутость K очевидна. По теореме Андо, сопряженный конус K' нормален, а так как сопряженное пространство $X' = \ell^2$ и, тем самым, рефлексивно, то, по теореме I.4.1, K' вполне правилен. Кроме того, K' телесен, поскольку K оштукатуриваем. Теперь, по следствию из теоремы IV.1.1, (X', K') — $\mathbb{O}$-пространство.

В то же время, даже классический конус в пространстве ℓ^2 не телесен, следовательно, и конус K не телесен, а в рефлексивном пространстве телесность равносильна инфрателесности. Таким образом, K не инфрателесен и потому (X, K) не $\mathbb{O}_\sigma$-пространство.

§ 5. ТЕОРЕМА О ПРЕДКОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Приведем доказательство предложения, на которое мы ссылались при доказательстве теоремы IV.2.2.

Теорема IV.5.1. *Если множество A в нормированном пространстве X предкомпактно, то существует такая последовательность $x_n \xrightarrow{(b)} 0$, $x_n \in X$, что A содержится в замкнутой симметричной выпуклой оболочке множества $\{x_n\}$.*

Доказательство. Зададим числа $\lambda_n > 0$ так, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$, а затем положим $\varepsilon_n = \lambda_{n+1}^2$. Так как A предкомпактно, то при любом n в нем существует конечная ε_n-сеть $P_n = \{y_1^{(n)}, \ldots, y_{m_n}^{(n)}\}$. Пусть $B = \overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n}$. Ясно, что $A \subset B$.

Теперь будем строить некоторые новые конечные множества. Положим

$$Q_1 = \{x_1^{(1)}, \ldots, x_{m_1}^{(1)}\}, \quad \text{где } x_i^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1} y_i^{(1)} \quad (i = 1, 2, \ldots, m_1).$$

Далее, если $n > 1$, то для каждого $y_i^{(n)}$ найдем такой $z_i^{(n)} \in P_{n-1}$, что $\|y_i^{(n)} - z_i^{(n)}\| < \varepsilon_{n-1}$, а затем положим $x_i^{(n)} = \dfrac{1}{\lambda_n}(y_i^{(n)} - z_i^{(n)})$. Тогда $\|x_i^{(n)}\| < \lambda_n$. Множество $\{x_1^{(n)}, \ldots, x_{m_n}^{(n)}\}$ обозначим через Q_n. Из элементов множеств Q_n составим последовательность

$$x_1^{(1)}, \ldots, x_{m_1}^{(1)}, \ldots, x_1^{(n)}, \ldots, x_{m_n}^{(n)}, \ldots \xrightarrow{(b)} 0. \tag{1}$$

Проверим, что эта последовательность обладает требуемым свойством.

Если $y \in P_n$ (т. е. $y = y_i^{(n)}$ при некотором i), а $n \geq 2$, то $y = \lambda_n x + z$, где $x \in Q_n$, а $z_n \in P_{n-1}$. Отсюда по индукции получаем, что

$$y = \lambda_n x_{i_n}^{(n)} + \lambda_{n-1} x_{i_{n-1}}^{(n-1)} + \ldots + \lambda_1 x_{i_1}^{(1)},$$

где $1 \leq i_k \leq m_k$; следовательно, P_n содержится в симметричной выпуклой оболочке множества элементов последовательности (1). А тогда B включается в замкнутую симметричную выпуклую оболочку того же множества и, тем более, это включение справедливо для A. $\square$

V. НОРМИРОВАННЫЕ РЕШЕТКИ

§ 1. ПРОСТРАНСТВА, ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НОРМИРОВАННЫМ РЕШЕТКАМ

В этом пункте рассматривается следующий вопрос: какими свойствами должно обладать РУНП, чтобы в нем можно было ввести эквивалентную монотонную норму и, тем самым, превратить его в нормированную решетку. Для краткости будем говорить, что РУНП эквивалентно нормированной решетке, если в нем существует эквивалентная монотонная норма. Основные результаты этого пункта были изложены в [6].

Теорема V.1.1. *Для того чтобы РУНП $(X, \|\cdot\|, K)$ было эквивалентно нормированной решетке, необходимо и достаточно, чтобы конус K был нормальным и несплющенным.*

Доказательство. а) Необходимость. Пусть $\|\cdot\|'$ — эквивалентная монотонная норма. В нормированной решетке $(X, \|\cdot\|', K)$ конус K нормален, поскольку норма $\|\cdot\|'$ монотонна. Любой $x \in X$ представим в виде $x = x_+ - x_-$, причем $0 \le x_+, x_- \le |x|$, а тогда $\|x_+\|', \|x_-\|' \le \||x|\|' = \|x\|'$ благодаря монотонности нормы. Следовательно, конус K несплющен. Остается заметить, что свойства нормальности и несплющенности конуса K сохраняются при переходе к эквивалентной норме.

б) Достаточность. Пусть конус K нормален и несплющен. По теореме IV!2.4, в X существует эквивалентная норма, монотонная на конусе K, поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что уже $\|\cdot\|$ монотонна на K. А теперь положим

$$\|x\|' = \||x|\|. \tag{1}$$

Из свойств модуля в векторной решетке сразу вытекает, что $\|\cdot\|'$ – норма и притом, очевидно, монотонная. Проверим, что она эквивалентна норме $\|\cdot\|$.

С одной стороны, всякий $x \in X$ представим в виде $x = u - v$, где $u, v \in K$ и $\|u\|, \|v\| \le M\|x\|$ (M — константа несплющенности конуса K). Но

$$x_+ = x \vee 0 \le u, \quad x_- = (-x) \vee 0 \le v$$

и потому $\|x_+\|, \|x_-\| \le M\|x\|$, а тогда $\||x|\| \le 2M\|x\|$. Следовательно,

$$\|x\|' \le 2M\|x\|.$$

С другой стороны,

$$\|x\| \le \|x_+\| + \|x_-\| \le 2\||x|\| = 2\|x\|'.$$

Тем самым, нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ эквивалентны. □

Следствие 1. *Если в РУНП (X, K) конус K нормален и несплющен, то он замкнут.*

Действительно, замкнутость K в нормированной решетке (X, K) хорошо известна[39], следовательно, он замкнут и в РУНП, которое эквивалентно нормированной решетке.

Следствие 2. *Для того чтобы РУБП (X, K) было эквивалентно банаховой решетке, необходимо и достаточно, чтобы конус K был замкнутым и нормальным.*

Необходимость замкнутости конуса K вытекает из предыдущего следствия. С другой стороны, если пространство X банахово, а конус K замкнутый и воспроизводящий, то он несплющен.

Следствие 3. *Для того чтобы $(o\sigma)$-полное РУБП (X, K) было эквивалентно банахову K_σ-пространству, необходимо и достаточно, чтобы конус K был замкнутым.*

Вытекает из предыдущего следствия, поскольку в $(o\sigma)$-полном РУБП замкнутость конуса K влечет его нормальность (см. следствие из теоремы IV!4.4).

Заметим, что в общей теореме V.1.1 несплющенность конуса K нельзя заменить на замкнутость. В примере, приведенном в начале III!3, указано РУНП, состоящее из функций ограниченной вариации, с замкнутым и нормальным, но сплющенным конусом.

Иногда оказывается полезной несколько иная формулировка условий эквивалентности РУНП нормированной решетке. Будем говорить, что *решеточные операции в РУНП (b)-непрерывны*, если из $x_n \xrightarrow{(b)} x$ и $y_n \xrightarrow{(b)} y$ следует, что $x_n \vee y_n \xrightarrow{(b)} x \vee y$. Так как

$$x_n \vee y_n = x_n + (y_n - x_n)_+,$$

то предыдущее условие равносильно тому, что соотношение $x_n \xrightarrow{(b)} x$ влечет $(x_n)_+ \xrightarrow{(b)} x_+$. При этом, если $x_n \xrightarrow{(b)} x$ и $(x_n)_+ \xrightarrow{(b)} x_+$, то и $(x_n)_- \xrightarrow{(b)} x_-$, $|x_n| \xrightarrow{(b)} |x|$. Обратно, если $x_n \xrightarrow{(b)} x$ и $|x_n| \xrightarrow{(b)} |x|$, то

$$(x_n)_+ = \frac{|x_n| + x_n}{2} \xrightarrow{(b)} x_+, \quad (x_n)_- = \frac{|x_n| - x_n}{2} \xrightarrow{(b)} x_-.$$

Таким образом, (b)-непрерывность решеточных операций может быть охарактеризована и так:

$$\text{из} \quad x_n \xrightarrow{(b)} x \quad \text{вытекает} \quad |x_n| \xrightarrow{(b)} |x|.$$

Теорема V.1.2. *Для того чтобы РУНП (X, K) было эквивалентно нормированной решетке, необходимо и достаточно, чтобы конус K был нормальным, а решеточные операции в (X, K) были (b)-непрерывными.*

Доказательство. Необходимость условий вытекает из того, что в нормированной решетке решеточные операции (b)-непрерывны[40]. Проверим их достаточность, а для этого покажем, что из условий теоремы вытекает несплющенность конуса K. Прежде всего установим, что существует такая

[39] См., например, [5], стр. 193.

[40] См. [5], стр. 193.

постоянная M, что $|||x||| \leq M\|x\|$ для любого $x \in X$. Действительно, в противном случае существовала бы последовательность элементов x_n, для которых $|||x_n||| > n\|x_n\|$. Не умаляя общности, можно считать, что $\|x_n\| = \frac{1}{n}$. Следовательно, $x_n \xrightarrow{(b)} 0$, но $|||x_n||| > 1$, и мы приходим к противоречию. Теперь несплющенность конуса K вытекает сразу из представления $x \in X$ в виде $x = |x| - (|x| - x)$. $\square$

Используя понятие $(*\text{-}r)$-сходимости (см. IV!2), можно получить еще одну характеристику РУНП, эквивалентного нормированной решетке.

Теорема V.1.3. *Для того чтобы архимедово РУНП (X, K) было эквивалентно нормированной решетке, достаточно, а в случае (b)-полного X и необходимо, чтобы (b)-сходимость в (X, K) совпадала с $(*\text{-}r)$-сходимостью.*

Доказательство. Необходимость выполнения указанного условия доказана в следствии из теоремы IV!2.5[41]. Докажем его достаточность. Согласно предложению 3 из IV!2 из совпадения $(*\text{-}r)$-сходимости с (b)-сходимостью вытекает нормальность конуса K. Проверим (b)-непрерывность решеточных операций в X.

Пусть $x_n \xrightarrow{(b)} x$. Тогда существует частичная последовательность $x_{n_i} \xrightarrow{(r)} x$. В теории векторных решеток доказывается, что решеточные операции в архимедовой векторной решетке (r)-непрерывны[42]. Следовательно, $|x_{n_i}| \xrightarrow{(r)} |x|$. Но (r)-сходимость влечет $(*\text{-}r)$-сходимость, а потому, по условию, и (b)-сходимость, и, таким образом, $|x_{n_i}| \xrightarrow{(b)} |x|$. Так как это рассуждение применимо и к любой частичной последовательности, выделенной из $\{x_n\}$, то отсюда следует, что и $|x_n| \xrightarrow{(b)} |x|$. Теперь остается сослаться на предыдущую теорему. $\square$

Замечание. В произвольной нормированной решетке из (b)-сходимости может не вытекать $(*\text{-}r)$-сходимость. Так обстоит дело, например, в пространстве L^∞ с интегральной нормой, индуцированной из L^1.

Следующая теорема почти очевидна, и мы формулируем ее лишь для полноты изложения.

Теорема V.1.4. *Для того чтобы РУНП (X, K) было эквивалентно нормированной решетке ограниченных элементов, необходимо и достаточно, чтобы конус K был нормальным и телесным.*

Необходимость условия очевидна, поскольку в нормированной решетке ограниченных элементов конус положительных элементов нормален и телесен. Достаточность установлена в следствии из теоремы IV!4.1. Впрочем, достаточность условия вытекает также и из замечания к теореме IV!7.3.

§ 2. KB-ПРОСТРАНСТВА

Теперь мы рассмотрим важный класс банаховых K-пространств, который был выделен и подробно изучен Л.В. Канторовичем. Позднее эти пространства получили название KB-пространств (пространства Канторовича–Банаха).

Определение. *KB-пространством* называется банахова решетка (X, K) с

[41] Впрочем, это — хорошо известный факт из теории банаховых решеток, впервые установленный Г. Биркгофом. См. [5]. стр. 196.

[42] См. [5], стр. 83.

вполне правильным конусом K[43].

Всякое KB-пространство дедекиндово полно и потому является K-пространством, а норма в нем монотонно непрерывна. Это немедленно вытекает из теоремы I.5.1 и ее следствия.

Простейший пример KB-пространств — пространства L^p и ℓ^p $(1 \le p < +\infty)$ с классической нормой и упорядочением (ср. I.2). Другой пример — пространство Орлича в случае, если определяющая его выпуклая функция удовлетворяет хорошо известному в теории пространств Орлича Δ_2-условию (см. [11], стр. 42). Упомянем еще пространства со смешанной нормой L^{p_1,p_2} $(1 \le p_1, p_2 < +\infty)$. Эти пространства состоят из функций двух переменных $x(t_1,t_2)$, измеримых на произведении пространств с мерой (T_1,μ_1) и (T_2,μ_2), причем

$$\|x\| = \Big\{ \int\limits_{T_2} \Big[\int\limits_{T_1} |x(t_1,t_2)|^{p_1}\, d\mu_1 \Big]^{\frac{p_2}{p_1}} d\mu_2 \Big\}^{\frac{1}{p_2}} < +\infty.$$

Проверка того, что такие пространства при их естественном упорядочении суть KB-пространства, совершенно элементарна.

Теорема V.2.1. *Для того чтобы нормированное K_σ-пространство (X,K) было KB-пространством, необходимо и достаточно, чтобы*

1) *норма в X была монотонно σ-непрерывной (условие (A_σ));*

2) *всякая возрастающая (b)-ограниченная последовательность положительных элементов была (o)-ограничена (условие (B_σ)).*

Доказательство. а) Необходимость монотонной непрерывности нормы, а тем более, условия (A_σ), отмечена выше. Условие (B_σ) вытекает из полной правильности конуса K, поскольку KB-пространство X банахово, а конус K замкнут.

б) Достаточность. Пусть $x_n \in K$ и образуют возрастающую и (b)-ограниченную последовательность. По условию, эта последовательность (o)-ограничена и, следовательно, существует $x = \sup x_n$, а $x_n \uparrow x$. Тогда, благодаря монотонной σ-непрерывности нормы, $x_n \xrightarrow{(b)} x$, следовательно, конус K вполне правилен. При этом, как уже отмечено в I.2, отсюда сразу следует, что в пространстве (X,K) выполнены условия теоремы III!3.1, из которой и вытекает (b)-полнота X. Таким образом, X — KB-пространство. $\square$

KB-пространства подробно изучены в [5]. Удачное согласование нормы и порядка в KB-пространствах позволяет многие их порядковые свойства описать с помощью нормы. Мы установим здесь лишь одно свойство KB-пространств, используемое в последующем.

Теорема V.2.2. *Пусть (X,K) — KB-пространство. Для того чтобы множество $E \subset X$ было (o)-ограниченным, необходимо и достаточно условие (α):*

[43]Первоначально определение KB-пространств было дано с помощью той их характеристики, которая содержится в приводимой ниже теореме V.2.1. В [6] KB-пространства охарактеризованы как нормированные решетки с вполне правильным конусом. Такое определение равносильно приведенному выше в том случае, если определение полной правильности конуса понимается по М.А. Красносельскому, т. е. требуется, чтобы возрастающая (b)-ограниченная последовательность положительных элементов имела (b)-предел (ср. замечание после теоремы I.2.3). При нашем определении полной правильности в определение KB-пространства необходимо включить (b)-полноту пространства. Упомянем также, что, по теореме Т. Огасавары [28], KB-пространства могут быть охарактеризованы как секвенциально слабо полные нормированные решетки.

для любой последовательности элементов $x_n \in E$ и любой последовательности чисел $\lambda_n \to 0$ выполняется соотношение $\lambda_n x_n \xrightarrow{(o)} 0$.

Доказательство. Необходимость условия (α) для (o)-ограниченности множества E очевидна. Проверим его достаточность.

Пусть E удовлетворяет условию (α). Так как множество, состоящее из модулей элементов множества E удовлетворяет тому же условию, достаточно провести доказательство в случае, когда $E \subset K$. Присоединим к E супремумы всех его конечных подмножеств и обозначим полученное множество через E'. Тогда и E' удовлетворяет условию (α). Действительно, пусть $x_n \in E'$, $\lambda_n \to 0$ (не уменьшая общности, можно считать, что $\lambda_n > 0$). Каждый x_n имеет вид

$$x_n = y_1^{(n)} \vee \ldots \vee y_{k_n}^{(n)}, \quad \text{где} \quad y_i^{(n)} \in E.$$

Составим последовательность

$$\lambda_1 y_1^{(1)}, \ldots, \lambda_1 y_{k_1}^{(1)}, \ldots, \lambda_n y_1^{(n)}, \ldots, \lambda_n y_{k_n}^{(n)}, \ldots \tag{2}$$

Поскольку множество E удовлетворяет условию (α), эта последовательность (o)-сходится к 0. Следовательно, существует убывающая последовательность

$$u_1^{(1)}, \ldots, u_{k_1}^{(1)}, \ldots, u_1^{(n)}, \ldots, u_{k_n}^{(n)}, \ldots \downarrow 0,$$

мажорирующая последовательность (2). Последнее означает, что $\lambda_n y_i^{(n)} \le u_i^{(n)}$ при всех n и i. Но тогда $\lambda_n x_n \le u_1^{(n)}$ и потому $\lambda_n x_n \xrightarrow{(o)} 0$.

По построению ясно, что E' направлено по возрастанию. Докажем, что оно (b)-ограничено. Если допустить, что это не так, то из E' можно выделить такую возрастающую последовательность элементов x_n, что $\|x_n\| \to +\infty$. Далее, существует такая последовательность $\lambda_n \to 0$, что $\lambda_n \|x_n\| \to +\infty$. С другой стороны, $\lambda_n x_n \xrightarrow{(o)} 0$, следовательно, эта последовательность (o)-ограничена, а тогда, благодаря монотонности нормы, и (b)-ограничена. Полученное противоречие доказывает (b)-ограниченность множества E'.

Так как конус K вполне правилен, то направленное по возрастанию множество E' должно быть (b)-фундаментальным, а потому (b)-сходится к пределу, который и будет верхней гранью множества E'. □

Теорема V.2.3. *Для того чтобы банахова решетка (X, K) была эквивалентна KB-пространству с нормой, аддитивной на конусе K, необходимо и достаточно, чтобы конус K был оштукатуриваемым*[44].

Доказательство. Необходимость условия вытекает сразу же из теоремы II.1.1. Обратно, если конус K в банаховой решетке (X, K) оштукатуриваем, то в X существует эквивалентная норма, аддитивная на K. Однако эта эквивалентная норма может не оказаться монотонной на X. Но поскольку конус K замкнут и нормален, по следствию 2 из теоремы V.1.1, существует еще одна эквивалентная монотонная на X норма. При этом из доказательства теоремы V.1.1 видно (см.

[44] KB-пространства с нормой, аддитивной на конусе положительных элементов, часто называют пространствами типа (L) благодаря теореме С. Какутани [25], согласно которой такие пространства могут быть реализованы в виде пространства суммируемых функций на некотором топологическом пространстве с мерой.

формулу (1)), что новая монотонная норма может быть построена так, что ее значения на K остаются без изменения. Таким образом и получается эквивалентная монотонная норма, аддитивная на K. $\square$

Теперь докажем еще одну теорему об $\mathbb{O}_\sigma$-пространствах, которая примыкает к следствию 2 из теоремы IV.4.3.

Теорема V.2.4. *Если в банаховом $\mathbb{O}_\sigma$-пространстве (X, K) конус K миниэдрален и вполне правилен, то X конечномерно.*

Доказательство. По следствию 2 из теоремы V.1.1, (X, K) эквивалентно банаховой решетке, поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что уже заданная в X норма монотонна. А тогда (X, K) — KB-пространство. Проверим, что единичный шар $B \subset X$ удовлетворяет условию (α) из теоремы V.2.2. Действительно, если $x_n \in B$, а $\lambda_n \to 0$, то $\lambda_n x_n \xrightarrow{(b)} 0$, а потому и $\lambda_n x_n \xrightarrow{(o)} 0$. Тогда, по теореме V.2.2, шар B (o)-ограничен, следовательно, конус K телесен (теорема II!1.4). Теперь, по следствию из теоремы IV.3.2, (X, K) — $\mathbb{O}$-пространство и, по теореме IV.1.2, X конечномерно. $\square$

В заключение отметим следующую простую характеристику банаховых решеток с правильным конусом: *банаховы решетки с правильным конусом суть банаховы K-пространства с монотонно непрерывной нормой.* Вытекает из теоремы I.5.1 и ее следствия. При этом из той же теоремы I.5.1 следует, что если (X, K) — банахово K_σ-пространство с монотонно σ-непрерывной нормой, то конус K правилен, а потому (X, K) — K-пространство и норма монотонно непрерывна.

§ 3. ПОРЯДКОВОЕ ПОПОЛНЕНИЕ УПОРЯДОЧЕННОГО НОРМИРОВАННОГО ПРОСТРАНСТВА

В теории векторных решеток исключительно важную роль играет теорема А.И. Юдина о том, что всякая архимедова векторная решетка X может быть погружена с сохранением алгебраических операций и граней в K-пространство Y, причем так, что для любого $\widehat{x} \in Y$ множества

$$E = \{y \in X : \ y \le \widehat{x}\} \quad \text{и} \quad F = \{y' \in X : \ y' \ge \widehat{x}\}$$

не пусты и

$$\widehat{x} = \sup E = \inf F. \tag{3}$$

Иными словами, векторная решетка X пополняется минимальным способом так, чтобы в пополненном пространстве всякое ограниченное сверху или снизу множество имело соответствующую грань. Конструкция, с помощью которой строится Y, представляет обобщение известного построения иррациональных чисел по Дедекинду и потому K-пространство Y называется *дедекиндовым пополнением* или *пополнением по сечениям* векторной решетки X.

Подробное доказательство этой теоремы приведено в [5] (теорема IV.11.1), оно весьма некоротко, и мы не будем воспроизводить его здесь. Покажем лишь, что за счет небольшого изменения доказательства теорему Юдина можно получить и в более общем виде, для любого архимедова УВП с воспроизводящим конусом. При этом мы лишь схематически повторяем те части доказательства, которые сохраняются без изменения.

Итак, пусть (X, K) — ненулевое архимедово УВП, а конус K — воспроизводящий. Если $A \subset X$, то через A^s (соответственно, A^i), обозначим множество всех верхних (нижних) границ множества A, а $A^{si} = (A^s)^i$. Всегда справедливо включение $A \subset A^{si}$; если $A = A^{si}$, то множество A назовем классом. Для любого $A \subset X$ множество A^{si} есть класс, притом наименьший, который содержит A. Ясно, что пустое множество — наименьший класс, а X — наибольший класс. Множество Y всех прочих классов, упорядоченное по включению, — условно полная решетка; при этом очевидно, что класс $A \neq X$ тогда и только тогда, когда он ограничен сверху. Каждому $x \in X$ соотносим класс

$$A_x = \{y \in X : \ y \leq x\}.$$

Таким образом устанавливается погружение X в Y. Это погружение сохраняет все грани в X, т. е. если $B \subset X$ и $x_0 = \sup B$ в X, то $x_0 = \sup B$ и в Y.

Дальнейшее доказательство теоремы Юдина, проведенное в [5], заключается в том, что в Y вводятся алгебраические операции (т. е. определяются сумма классов и произведение класса на число) таким образом, что Y оказывается векторной решеткой (а, следовательно, и K-пространством), а алгебраические операции, индуцированные из Y в X, совпадают с теми алгебраическими операциями, которые были определены в X. Сохраним те определения алгебраических операций в Y, которые даны в [5]. Таким образом, сумма двух классов A и B определяется как наименьший класс, содержащий все элементы вида $a+b$ $(a \in A, b \in B)$. Произведение λA при $\lambda > 0$ определяется как класс, состоящий из всех элементов вида λa $(a \in A)$, произведение λA при $\lambda = 0$ считается равным классу $-K = A_0$. Наконец, при $\lambda < 0$ произведение λA состоит из всех элементов вида $\lambda a'$, где $a' \in A^s$. После этого следует проверить, что Y становится векторным пространством. Коммутативность сложения очевидна, класс $-K$ — нулевой элемент умножения, т. е. $0 \cdot A = -K$ по определению, $1 \cdot A = A$ для любого $A \in Y$. Ассоциативность умножения тоже почти очевидна. Ассоциативность сложения доказывается так же, как это сделано в [5]. Затем так же, как и там, проверяется, что $-K$ есть нуль сложения, т. е. что $A + (-K) = A$ для любого $A \in Y$. Во всей части доказательства в [5] не использовано то, что X было там решеткой, и потому все это переносится на наш более общий случай без всяких изменений.

Далее следует доказать, что $A + (-A) = -K$ для любого $A \in Y$. В [5] это сделано с использованием граней в X, которые могут в нашем случае не существовать, и потому дадим сейчас другое доказательство. Пусть $a \in A$, $b \in (-A)$. Последнее означает, что $b = -a'$, где $a' \in A^s$; следовательно, $a + b = a - a' \leq 0$. Если через C обозначить множество всех элементов вида $a + b$ $(a \in A,\ b \in (-A))$, то $K \subset C^s$. Возьмем теперь произвольный $z \in C^s$. Тогда $a - a' \leq z$ при любых $a \in A$, $a' \in A^s$, следовательно, $a - z \leq a'$ и потому $a - z \in A^{si} = A$. Отсюда, по индукции, $a - nz \in A$ при любом $n \in \mathbb{N}$, следовательно, $a - nz \leq a'$ или $-nz \leq a' - a$ и, по принципу Архимеда в X, $-z \leq 0$, т. е. $z \in K$. Таким образом, $C^s = K$, а $C^{si} = -K$. Но C^{si} и есть, по определению, класс $A + (-A)$.

Теперь снова можно вернуться к [5] и так же, как там, проверить дистрибутивный закон

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad \text{для любых} \quad A, B \in Y.$$

Здесь мы проверим второй дистрибутивный закон

$$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A \tag{4}$$

при $\lambda, \mu > 0$. Включение $(\lambda+\mu)A \subset \lambda A + \mu A$ очевидно. Чтобы установить обратное включение, возьмем $b \in [(\lambda+\mu)A]^s$. Имеем $(\lambda+\mu)a \leq b$ при любом $a \in A$, т. е. $a \leq \dfrac{b}{\lambda+\mu}$. Теперь для любых $a_1, a_2 \in A$ имеем

$$\lambda a_1 + \mu a_2 \leq \frac{\lambda}{\lambda+\mu}b + \frac{\mu}{\lambda+\mu}b = b$$

и потому

$$\lambda a_1 + \mu a_2 \in [(\lambda+\mu)A]^{si} = (\lambda+\mu)A.$$

Тем самым, $\lambda A + \mu A \subset (\lambda+\mu)A$. После того, как равенство (4) проверено для $\lambda, \mu > 0$, вся остальная часть доказательства, включая формулу (3), проводится так же, как в [5].

В последующем элементы пополнения Y будем обозначать привычными буквами $x, y, \ldots$ Отметим, что из построения Y сразу следует, что для любого элемента $x \in Y$ существует такой $u \in X$, что $u \geq x$. Но тогда найдется и такой $u \in K$, что $u \geq x$.

Будем дальше считать, что $(X, \|\cdot\|, K)$ — архимедово УНП с воспроизводящим конусом K, а Y — его пополнение по сечениям. Поставим вопрос: при каких условиях в Y можно ввести норму так, чтобы превратить его в нормированное K-пространство, причем такое, чтобы топология, индуцированная в X из Y, совпала с первоначальной. В [5] изложено решение этой задачи в предположении, что X — нормированная решетка, и в этом случае показано, что существует такое распространение нормы, заданной в X, на всё Y, при котором Y будет нормированным K-пространством. В более общей ситуации этот вопрос был рассмотрен И.Ф. Даниленко, и, в частности, ему принадлежит следующая

Теорема V.3.1. *Пусть $(X, \|\cdot\|, K)$ — УНП, причем конус K замкнут, нормален и несплющен, Y — его пополнение по сечениям. Тогда в Y существует монотонная норма, эквивалентная на X норме $\|\cdot\|$.*

Доказательство. Заметим, что, по теореме II!3.2, УНП X архимедово и потому Y существует. Для любого $x \in Y$ положим

$$\|x\|^* = \inf_{u \in K,\, u \geq |x|} \|u\|. \tag{5}$$

Проверим, что $\|\cdot\|^*$ — норма в Y. Равенство $\|\lambda x\|^* = |\lambda|\|x\|^*$ очевидно. Если $\|x\|^* = 0$, то существуют такие $u_n \in K$, что $u_n \geq |x|$, $\|u_n\| \to 0$. Пусть $y \in X$ и $y \leq |x|$. Тогда из неравенства $y \leq u_n$, благодаря замкнутости конуса K, следует, что $y \leq 0$, а потому

$$|x| = \sup\{y \in X :\ y \leq |x|\} \leq 0.$$

Но это значит, что $|x| = 0$, следовательно и $x = 0$.

Пусть $x = x_1 + x_2$ $(x_1, x_2 \in Y)$. Если $u, v \in K$ таковы, что $u \geq |x_1|$, $v \geq |x_2|$, то $u + v \geq |x_1 + x_2|$. Поэтому

$$\|x\|^* \leq \inf_{u \geq |x_1|,\, v \geq |x_2|,\, u,v \in K} \|u+v\| \leq \inf_{u \geq |x_1|,\, u \in K} \|u\| + \inf_{v \geq |x_2|,\, v \in K} \|v\| = \|x_1\|^* + \|x_2\|^*.$$

Таким образом, $\|\cdot\|^*$ — норма. Ее монотонность очевидна и, следовательно, Y с нормой $\|\cdot\|^*$ — нормированное K-пространство.

Теперь докажем, что на X обе нормы эквивалентны. Пусть M — константа несплющенности конуса K. Для любого $x \in X$ существуют такие $u, v \in K$, что $x = u - v$ и $\|u\|, \|v\| \leq M\|x\|$. Тогда $|x| \leq u + v$ ($|x|$ существует в Y) и потому

$$\|x\|^* \leq \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \leq 2M\|x\|.$$

Обратно, если $u \in K$ и $u \geq |x|$, то $u \geq \pm x$, а $0 \leq u + x \leq 2u$. Так как конус K нормален, то норма $\|\cdot\|$ полумонотонна на нем; пусть N — ее константа полумонотонности. Тогда

$$\|x\| \leq \|u + x\| + \|u\| \leq (2N + 1)\|u\|,$$

откуда $\|x\| \leq (2N + 1)\|x\|^*$. □

Теорема V.3.2. *Если в условиях предыдущей теоремы пространство X (b)-полно, то и пространство Y с нормой, определенной формулой (5), тоже (b)-полно.*

Доказательство. По теореме IV!2.6 достаточно проверить, что любая (b)-фундаментальная возрастающая последовательность положительных элементов $x_n \in Y$ (o)-ограничена. Это, в свою очередь, сводится к проверке следующего условия: если $\{x_n\}$ — произвольная последовательность положительных элементов из Y и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^* < +\infty$, то последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ (o)-ограничена. Из формулы (5) следует, что для каждого n существует такой $y_n \in X$, что $y_n \geq x_n$ и $\|y_n\| \leq 2\|x_n\|^*$. Благодаря (b)-полноте X ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ (b)-сходится, а тогда множество его частичных сумм (o)-ограничено. Тем более, (o)-ограничено и множество частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. □

Пусть теперь (X, K) — архимедово УНП с телесным конусом K, $u \gg 0$, а норма в X совпадает с u-нормой. Тогда конус K замкнут, нормален и несплющен (IV!4 и III!1), следовательно, к пространству (X, K) применима теорема V.3.1. Из самой конструкции пополнения по сечениям видно, что элемент u остается сильной единицей в Y. Покажем, что норма в Y, определенная по формуле (5), есть u-норма. Действительно, для любого $x \in Y$

$$\|x\|^* = \inf_{v \geq |x|,\, v \in K} \|v\| \leq \inf_{|x| \leq \lambda u} \{\lambda\},$$

так как $\lambda u \in K$. С другой стороны, для любого $v \in K$

$$v \leq \|v\| u$$

и потому знак $<$ в предыдущем соотношении невозможен.

В теории векторных решеток доказывается, что нормированное K-пространство с сильной единицей u и построенной по ней u-нормой (b)-полно ([5], стр. 200). Его называют банаховым K-пространством ограниченных элементов. Таким образом, предыдущие рассуждения приводят нас к следующему результату.

Теорема V.3.3. *Если u — сильная единица в архимедовом УНП (X, K), то u-норма в X может быть распространена на Y таким образом, что Y оказывается* *банаховым K-пространством ограниченных элементов, норма в котором есть u-норма, построенная по той же сильной единице u.*

Может возникнуть предположение, что если в условии теоремы V.3.1 нормальность конуса K заменить каким-нибудь более сильным свойством, то это свойство переносится и на пополнение по сечениям. Однако это не так и, в частности, на этом пути не удается получить характеристику пространств, у которых пополнение по сечениям оказывается KB-пространством. Последнее замечание подтверждается примером, построенным А. Уотерманом [29], где в качестве (X, K) взято конечномерное УБП с замкнутым, а, следовательно, нормальным и даже оштукатуриваемым (см. следствие из теоремы II.2.1) конусом K, причем его пополнение по сечениям оказывается бесконечномерным банаховым K-пространством ограниченных элементов, и, по теореме I.2.4, конус положительных элементов в нем не может быть правильным.

VI. КОНУС ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. УПОРЯДОЧЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть (X, K) и (Y, L) — два УНП, а Z — пространство всех (b)-линейных (т. е. линейных и непрерывных по норме) операторов, действующих из X в Y, нормированное обычным способом. Предположим, что конусы K и L — не нулевые. Линейный оператор A из X в Y называется *положительным*, если $A(K) \subset L$. Ясно, что положительные (b)-линейные операторы образуют клин в пространстве Z, который мы обозначим через $\mathbb{H}$. Все эти обозначения мы сохраним и в дальнейшем.

В $\mathbb{H}$, в частности, содержатся все «одномерные» операторы вида $Ax = f(x)y_0$, где $f \in K'$, а $y_0 \in L$. Если $\overline{K} \neq X$, то (см. теорему II!6.1) существует ненулевой функционал $f \in K'$, а, следовательно, и ненулевой оператор $A \in \mathbb{H}$. Если же $\overline{K} = X$ и конус L замкнут, то легко понять, что $\mathbb{H}$ состоит только из одного нулевого оператора. Однако, если на L не накладывать никаких ограничений, то и при $\overline{K} = X$ могут существовать положительные (b)-линейные операторы, отличные от нулевого. Например, при любом конусе K тождественный оператор в X положителен.

Аналогично теореме I!8.1 доказывается, что для того чтобы клин $\mathbb{H}$ был конусом, необходимо и достаточно, чтобы конус K был пространственным.

Отметим следующие простые предложения:

а) *если конус L замкнут, то и клин $\mathbb{H}$ замкнут.*

Действительно, если $A_n \in \mathbb{H}$ и $A_n \xrightarrow{(b)} A$, то, в частности, $A_n x \xrightarrow{(b)} Ax$ при каждом $x \in X$, и так как $A_n x \in L$ при всех $x \in K$ и $n \in \mathbb{N}$, то и $Ax \in L$ при $x \in K$;

б) *если пространство (Y, L) архимедово, а конус K пространственный, то и пространство $(Z, \mathbb{H})$ тоже архимедово.*

Действительно, если A, $B \in Z$ и $nA \leq B$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $n(Ax) \leq Bx$ при всех $x \in K$ и потому $Ax \leq 0$. А это и означает, что оператор $A \leq 0$.

Предложения а)–б) допускают обращение: пусть в пространстве X существует функционал $f \in K'$, не равный тождественно 0 на K; тогда из замкнутости $\mathbb{H}$ вытекает замкнутость L, а если Z архимедово, то и Y архимедово (очевидно).

Остановимся на вопросе о дедекиндовой полноте пространства $(Z, \mathbb{H})$. Для сопряженного пространства этот вопрос рассмотрен в III!4. Повторяя доказательство леммы из III!4, мы сразу убеждаемся, что эта лемма верна и для операторов из X в Y, если, кроме несплющенности конуса K, предположить еще нормальность конуса L. Нормальность L потребуется для того, чтобы в пространстве Y можно было воспользоваться теоремой о «сжатой» последовательности. После этого мы легко получим следующее обобщение теоремы III!4.1.

Теорема VI.1.1. *Если конус K несплющен, а конус L нормален и пространство Y дедекиндово полно (соответственно, дедекиндово σ-полно), то и пространство Z тоже дедекиндово полно (соответственно, дедекиндово σ-полно).*

Доказательство ничем принципиальным не отличается от доказательства теоремы III!4.1.

Обратное заключение справедливо при более широких условиях.

Теорема VI.1.2. *Если $\overline{K} \neq X$, а $(Z, \mathbb{H})$ — дедекиндово полное (соответственно, дедекиндово σ-полное) УНП, то и пространство (Y, L) тоже дедекиндово полно (соответственно, дедекиндово σ-полно).*

Доказательство. Так как $(Z, \mathbb{H})$ — упорядоченное пространство, то $\mathbb{H}$ — конус[45] и потому конус K должен быть пространственным. Но тогда $\overline{K}$ не может быть линейным множеством[46] и, по теореме II!6.1, существуют такие $f \in K'$ и $x_0 \in K$, что $f(x_0) = 1$.

Предположим теперь, что Z дедекиндово σ-полно, и рассмотрим возрастающую (o)-ограниченную последовательность элементов $y_n \in Y$: $y_n \leq v$. Введем операторы (из X в Y)

$$A_n x = f(x) y_n, \quad Bx = f(x) v.$$

Тогда $A_n \leq B$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, существует $A = \sup A_n$. Полагая $w = Ax_0$, имеем $w \geq A_n x_0 = y_n$ при всех n и $w \leq Bx_0 = v$. Поскольку v может быть произвольной верхней границей последовательности $\{y_n\}$, предыдущие соотношения и означают, что $w = \sup y_n$. Дедекиндова σ-полнота пространства Y доказана. Аналогично рассматривается случай дедекиндовой полноты. $\square$

Замечание. По той же схеме доказывается, что если $\overline{K} \neq X$ и конус $\mathbb{H}$ миниэдрален, то и конус L — миниэдрален.

§ 2. УСЛОВИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Известно (см. теоремы II!2.1 и III!2.2), что при определенных условиях всякий положительный линейный функционал (b)-линеен. Покажем, что эти теоремы обобщаются и на случай операторов. Заметим, что теорема III!2.2 была перенесена на операторы в работе И.А. Бахтина, М.А. Красносельского и В.Я. Стеценко [4] при условии, что конус L нормален. Однако с помощью теоремы о замкнутом графике, как заметил Г.Я. Лозановский, можно получить следующую значительно более общую теорему.

Теорема VI.2.1. *Пусть УБП (X, K) таково, что всякий положительный линейный функционал на X (b)-линеен, а (Y, L) — УБП, в котором конус L замкнут. Тогда всякий положительный линейный оператор A из X в Y (b)-линеен*[47].

Доказательство. На основании теоремы о замкнутом графике достаточно доказать, что если $x_n \xrightarrow{(b)} 0$, а $Ax_n \xrightarrow{(b)} y_0$, то $y_0 = 0$. Допустим, что $y_0 \neq 0$. Так как L — замкнутый конус, то, по лемме из II!4, существует такой функционал $\varphi \in L'$, что

[45] Напоминаем, что если соотношение $\geq$ введено в векторном пространстве X с помощью клина, то мы не называем X упорядоченным векторным пространством.

[46] В противном случае $K - K \subset \overline{K}$ и потому $\overline{K - K} \neq X$.

[47] Условия, наложенные на (Y, L), можно, очевидно, ослабить: достаточно предположить, что (Y, L) — УНП, а замыкание конуса L в (b)-пополнении пространства Y тоже конус.

$\varphi(y_0) \neq 0$. Суперпозиция $f = \varphi \circ A$ — линейный положительный функционал на X, следовательно, по предположению, он (b)-линеен и потому $f(x_n) \to 0$. Но

$$f(x_n) = \varphi(Ax_n) \to \varphi(y_0) \neq 0,$$

и мы приходим к противоречию, которое и доказывает непрерывность оператора A. □

Следствие 1. *Если (X, K) — УБП с замкнутым воспроизводящим конусом K, а (Y, L) — УНП с нормальным конусом L, то всякий линейный положительный оператор из X в Y (b)-линеен.*

Это и есть упоминавшийся выше результат Бахтина–Красносельского–Стеценко, и он получается из предыдущей теоремы за счет того, что замыкание нормального конуса в (b)-пополнении пространства Y — тоже конус.

Следствие 2. *Пусть (X, K) — УВП с воспроизводящим конусом K. Если на X заданы две нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, и при каждой из них пространство X банахово, а конус K замкнут, то эти нормы эквивалентны*[48].

Доказательство. Тождественный оператор, отображающий одно из пространств $(X, \|\cdot\|_1)$ и $(X, \|\cdot\|_2)$ на другое, положителен, и по доказанной теореме он (b)-линеен, а потому соотношения $\|x_n\|_1 \to 0$ и $\|x_n\|_2 \to 0$ равносильны. □

Если отказаться от (b)-полноты пространства X, то можно получить теорему, аналогичную теореме VI.2.1, но уже в предположении, что конус L нормален.

Теорема VI.2.2. *Пусть УНП (X, K) таково, что всякий положительный линейный функционал на X (b)-линеен, а конус L в УНП (Y, L) нормален. Тогда всякий положительный линейный оператор A из X в Y (b)-линеен.*

Доказательство. Покажем, что образ $A(B)$ единичного шара $B \subset X$ (b)-ограничен. Для любого функционала $\varphi \in L'$ функционал $\varphi \circ A$ — положительный линейный функционал на X, и, по предположению, он (b)-линеен; следовательно, множество $\varphi[A(B)]$ ограничено. Но так как конус L нормален, то всякий функционал $\varphi \in Y'$ представим в виде разности функционалов из L', и, следовательно, множество $\varphi[A(B)]$ ограничено при любом $\varphi \in Y'$. Тогда множество $A(B)$ (b)-ограничено. □

Следствие. *Если конус K телесен, а конус L нормален, то всякий положительный линейный оператор из X в Y (b)-линеен.*

Получается сразу из доказанной теоремы и теоремы II!2.1.

Теперь покажем, что условие нормальности конуса L в теореме VI.2.2, а также и в следствии из нее, существенно. Возьмем УБП (Y, L) с замкнутым, но не нормальным конусом L (такие пространства существуют; см. пример 6 из IV!1), выберем в нем элемент $u > 0$, для которого интервал $[-u, u]$ не (b)-ограничен. Такой элемент тоже существует, поскольку конус L не нормален (см. теорему IV!2.2). Теперь за X примем пространство $(Y_u, \|\cdot\|_u, L_u)$. В этом пространстве конус $K = L_u$ замкнут, телесен и нормален, а замкнутый единичный шар B в пространстве X есть интервал $[-u, u]$. Рассмотрим оператор вложения I пространства X в Y. Этот оператор линеен и положителен, но образ $I(B)$ не (b)-ограничен в пространстве Y, следовательно, оператор I не (b)-линеен.

[48] Применительно к нормированным решеткам это следствие было установлено непосредственно и известно под названием теоремы Накано–Макарова. См. [27] (теорема 30.28) и [15].

§ 3. УСЛОВИЯ, ПРИ КОТОРЫХ КОНУС $\mathbb{H}$ — ВОСПРОИЗВОДЯЩИЙ

Рассматривая вопрос, указанный в заглавии пункта, мы допускаем, что конус $\mathbb{H}$ может быть и несобственным.

Теорема VI.3.1. *Если клин $\mathbb{H}$ воспроизводящий, то и конус L воспроизводящий. Если, дополнительно, $\overline{L} \neq Y$, то конус K — нормальный.*

Доказательство. Пусть $y \in Y$. Существует такой функционал $f \in X'$, что $f(x_0) = 1$ для некоторого $x_0 > 0$. Рассмотрим оператор $Ax = f(x)y$. Так как $\mathbb{H}$ воспроизводящий, то $A = A_1 - A_2$, где $A_1,\ A_2 \in \mathbb{H}$. А тогда $y = A_1x_0 - A_2x_0$, причем $A_ix_0 \in L$ $(i = 1,\ 2)$. Таким образом, конус L — воспроизводящий.

Теперь покажем, что при дополнительном предположении $\overline{L} \neq Y$, клин K' воспроизводящий; тогда, по теореме Крейна, конус K нормален. Пусть $f \in X'$. Так как $\overline{L} \neq Y$, то существует такой $\varphi \in L'$, что $\varphi(y) = 1$ при некотором $y \in Y$. Положим $Ax = f(x)y$. Тогда $A = A_1 - A_2$, где $A_1,\ A_2 \in \mathbb{H}$. Отсюда

$$f(x) = \varphi(Ax) = \varphi(A_1x) - \varphi(A_2x),$$

следовательно, $f = f_1 - f_2$, где $f_i = \varphi \circ A_i \in K'$ $(i = 1,\ 2)$. □

Замечание. Условие $\overline{L} \neq Y$ в доказанной теореме существенно. Покажем это на следующем примере. Пусть X есть $\mathbb{R}_2$ с евклидовой нормой, упорядоченное с помощью конуса

$$K = \{x \in \mathbb{R}_2 :\ \xi_2 > 0\} \cup \{0\},$$

а Y — подмножество всех финитных векторов из ℓ^1, упорядоченное с помощью конуса из примера 2 (II!5), т. е. $y > 0$, если последняя отличная от 0 координата элемента y положительна. Координатные орты в $\mathbb{R}_2$ обозначим $e_1,\ e_2$, а координатные орты в Y через i_k. Пусть A — (b)-линейный оператор из X в Y. Положим $y_i = Ae_i$ $(i = 1,\ 2)$. Так как y_i — финитные векторы, то существует такое k, что все их координаты с номерами, большими k, равны 0. Определим оператор B из X в Y, полагая

$$Bx = \xi_1 i_{k+1} + \xi_2 i_{k+2} \quad (x = (\xi_1, \xi_2)).$$

Ясно, что оператор B линеен, положителен и непрерывен. Так же и оператор $B - A$ положителен, и потому конус $\mathbb{H}$ воспроизводящий. В то же время $\overline{L} = Y$, а конус K не нормальный.

Доказанная теорема может рассматриваться как обобщение теоремы Крейна (IV!5.1) в части необходимости. Однако, в отличие от теоремы Крейна, теорема VI.3.1 не допускает обращения. Приведем некоторые примеры И.И. Чучаева, показывающие, что если конус K — нормальный, а L — воспроизводящий, и они удовлетворяют еще некоторым дополнительным условиям, то все же конус $\mathbb{H}$ может не быть воспроизводящим.

Пример 7. Пусть $X = Y = c_0$, но упорядочение в Y классическое (конус L состоит из всех векторов с неотрицательными координатами), а упорядочение в X вводится с помощью конуса K, натянутого на множество $x_0 + B$, где $\|x_0\| > 1$, а B — замкнутый единичный шар в c_0. Тогда конус K замкнут, телесен и оштукатуриваем, конус L замкнут, нормален и инфрателесен, а (Y, L) — банахово K-пространство. Однако конус $\mathbb{H}$ не воспроизводящий. Покажем, что, например, тождественный оператор I из X в Y не может быть представлен в виде двух положительных (b)-линейных операторов.

Пусть $A \in \mathbb{H}$. Так как конус K телесен, то шар B (o)-ограничен в X. Но тогда и множество $A(B)$ (o)-ограничено в Y. Если бы оператор I можно было представить в виде $I = A_1 - A_2$, где $A_1,\ A_2 \in \mathbb{H}$, то и множество $I(B) = B$ должно было бы быть (o)-ограниченным в Y, что неверно.

Пример 8 [18]. Пусть $X = Y = \ell^2$, причем упорядочение в X классическое (конус K состоит из всех векторов с неотрицательными координатами), а упорядочение в Y вводится с помощью конуса L, натянутого на множество $y_0 + B$, где $y_0 = \{2, 0, 0, \ldots\}$, а B — замкнутый единичный шар в ℓ^2. Тогда (X, K) — KB-пространство, а конус L замкнут, телесен и оштукатуриваем. Покажем, что конус $\mathbb{H}$ не воспроизводящий.

Каждому оператору $A \in Z$ соответствует бесконечная матрица чисел (a_{ik}), где $a_{ik} = (Ae_k, e_i)$, а e_i — координатные орты в ℓ^2. Если $A \in \mathbb{H}$, то $Ae_k \in L$ при любом k, следовательно,

$$Ae_k = \lambda_k(y_0 + u_k), \quad \text{где} \quad \lambda_k \geq 0,\ \|u_k\| \leq 1.$$

Отсюда

$$a_{ik} = (Ae_k, e_i) = \lambda_k(y_0, e_i) + \lambda_k(u_k, e_i),$$

и при $i = 1$ имеем

$$a_{1k} = 2\lambda_k + \lambda_k(u_k, e_1).$$

Но $|(u_k, e_1)| \leq \|u_k\| \leq 1$, и потому $a_{1k} \geq \lambda_k$. Из свойств матричного представления линейных операторов в пространстве ℓ^2 следует, что $a_{1k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ [49], а потому и $\lambda_k \to 0$. Далее, $(y_0, e_i) = 0$ при $i > 1$, и поэтому, в частности, $a_{kk} = \lambda_k(u_k, e_k)$ при $k \geq 2$. Следовательно, $a_{kk} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Теперь допустим, что конус $\mathbb{H}$ воспроизводящий. Тогда тождественный оператор I из X в Y представим в виде $I = A_1 - A_2$, где $A_1,\ A_2 \in \mathbb{H}$. Пусть (δ_{ik}), $(a_{ik}^{(1)})$, $(a_{ik}^{(2)})$ — матрицы, соответствующие этим операторам. Тогда $\delta_{kk} = a_{kk}^{(1)} - a_{kk}^{(2)} \to 0$, что невозможно, поскольку $\delta_{kk} = 1$.

Теорема VI.3.2 (В.И. Ажоркин, И.А. Бахтин [2]). *Если конус K нормален, а конус L телесен и нормален и (Y, L) — (o)-полное РУНП, то клин $\mathbb{H}$ — воспроизводящий.*

Пример 7 показывает, что условие телесности конуса L в этой теореме нельзя заменить даже на инфрателесность.

Доказательство. По лемме 2 из IV!1 конус K можно погрузить в нормальный и телесный конус K_1. Если $\mathbb{H}_1$ — конус положительных (b)-линейных операторов из (X, K_1) в (Y, L), то $\mathbb{H}_1 \subset \mathbb{H}$. Следовательно, достаточно доказать, что $\mathbb{H}_1$ — воспроизводящий. Тем самым, не уменьшая общности, можно считать, что уже конус K нормален и телесен. Дальнейшее рассуждение существенно отличается от первоначального доказательства авторов этой теоремы.

Условия, наложенные на конус L, означают, что за счет перехода к эквивалентной норме Y можно превратить в банахово K-пространство ограниченных элементов[50]. По теореме Крейнов–Какутани, Y может быть реализован в виде пространства $C(T)$ вещественных ограниченных функций на некотором компактном хаусдорфовом пространстве T. Рассмотрим пространство $B(T)$ всех вещественных

[49] Ясно, что $e_k \xrightarrow{\text{сл}} 0$; тогда и $Ae_k \xrightarrow{\text{сл}} 0$, в частности, $(Ae_k, e_1) \to 0$.

[50] Напоминаем, что всякое нормированное K-пространство ограниченных элементов (b)-полно. См. [5], стр. 200.

ограниченных функций на T с естественным упорядочением и равномерной нормой (это — тоже банахово K-пространство ограниченных элементов). $C(T)$ — его подпространство, мажорирующее $B(T)$ (определение этого понятия см. в I!6). Пусть P — тождественный оператор, отображающий $C(T)$ на $C(T)$. Для операторов со значениями в K-пространстве сохраняется без всякого изменения доказательства теорема I!6.2 о распространении положительного линейного функционала с мажорирующего подмножества. Поэтому оператор P как оператор со значениями в K-пространстве $C(T)$, распространяется с сохранением линейности и положительности на всё $B(T)$. Обозначим это распространение той же буквой P. Таким образом, P — линейный положительный оператор, осуществляющий проектирование пространства $B(T)$ на $C(T)$[51].

Пусть теперь A — произвольный (b)-линейный оператор из X в Y, т. е. в $C(T)$. Будем рассматривать его как оператор со значениями в $B(T)$. Обозначим через φ_t функционал, заданный на $B(T)$, который каждой функции из $B(T)$ соотносит ее значение в точке $t \in T$. Функционал φ_t положителен и (b)-линеен. Тогда, если $y = Ax$ $(y \in C(T))$, то

$$y(t) = \varphi_t(Ax).$$

Так как конус K нормален, сопряженный конус K' — воспроизводящий в банаховом пространстве X'; кроме того, он замкнут, а, следовательно, и несплющен. Поэтому каждый функционал $\varphi_t \circ A$ можно представить в виде разности $\varphi_t \circ A = \varphi_t^{(1)} - \varphi_t^{(2)}$, где $\varphi_t^{(1)},\ \varphi_t^{(2)} \in K$ и $\|\varphi_t^{(i)}\| \le M\|\varphi_t \circ A\| \le M\|A\|$. Рассмотрим операторы из X в $B(T)$:

$$y = c_i x, \quad \text{где} \quad y(t) = \varphi_t^{(i)}(x) \quad (i = 1,\ 2).$$

Эти операторы линейны и положительны, причем $A = C_1 - C_2$. Далее, положим $A_i = P \circ C_i$ $(i = 1,\ 2)$. Это тоже линейные положительные операторы, заданные на X, но со значениями в Y. Так как конус K телесен, а L нормален, то, по следствию из теоремы VI.2.2, операторы A_i (b)-линейны и потому $A_i \in \mathbb{H}$. При этом

$$A_1 - A_2 = P \circ (C_1 - C_2) = P \circ A = A. \quad \square$$

В заключение параграфа остановимся на случае, когда одно из пространств X или Y конечномерно.

Теорема VI.3.3 (А. Уикстед [30]). *Если конус K нормален, а пространство Y конечномерно и конус L воспроизводящий, то клин $\mathbb{H}$ — воспроизводящий.*

Доказательство. Если n — размерность пространства Y, то так же, как в доказательстве теоремы II!1.2, выделим в конусе L n линейно независимых элементов $y_1, \ldots, y_n$. Если произвольный $y \in Y$ разложить по элементам y_i, $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$, то коэффициенты $\lambda_i = \varphi_i(y)$ будут (b)-линейными функционалами от y. Для любого $A \in Z$ положим $f_i = \varphi_i \circ A$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда $f_i \in X'$ и, поскольку конус K нормален, каждый f_i представим в виде $f_i = g_i - h_i$, где $g_i,\ h_i \in K'$. Теперь введем операторы

$$A_1 x = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) y_i, \quad A_2 x = \sum_{i=1}^{n} h_i(x) y_i.$$

[51] Легко понять, что этот оператор P (b)-линеен и имеет норму, равную 1.

Ясно, что $A_1,\ A_2 \in \mathbb{H}$, а

$$A_1x - A_2x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)y_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(Ax)y_i = Ax. \quad \square$$

Лемма. *Если (X, K) — конечномерное УБП, причем конус K — замкнутый и воспроизводящий, то в X существует замкнутый миниэдральный конус $K_1 \supset K$.*

Доказательство. Сначала покажем, что существует миниэдральный конус K_2, содержащийся в K. Так как K воспроизводящий, то, по теореме II!1.2, он телесен. Если $u \gg 0$, то в X существует $(n-1)$-мерный симплекс F (где n — размерность пространства X), содержащий u и содержащийся в $K \setminus \{0\}$, вершины которого линейно независимы. Теперь положим $K_2 = K(F)$. Как показано в I!5, этот конус миниэдрален и, очевидно, замкнут.

Рассмотрим сопряженное пространство (X', K'). По теореме IV!1.1 конус K нормален, следовательно, K' — воспроизводящий и, по уже доказанному, в X' существует замкнутый миниэдральный конус $L' \subset K'$. Для их сопряженных конусов справедливо обратное включение $L'' \supset K''$. Но если X'' отождествить с X, то $K'' = K$ и потому $L'' \supset K$. С другой стороны, конус L' нормален, и, следовательно, он удовлетворяет всем условиям теоремы V!3.1. А тогда его сопряженный конус L'' миниэдрален и можно положить $K_1 = L''$. $\square$

Теорема VI.3.4. (А. Уикстед [30]). *Если пространство X конечномерно, конус K нормален, а L — воспроизводящий, то клин $\mathbb{H}$ — воспроизводящий.*

Доказательство. Благодаря лемме 2 из IV!1 можно, не умаляя общности, считать конус K нормальным, телесным и замкнутым (поскольку замыкание нормального конуса тоже нормальный конус). Телесный конус — воспроизводящий и потому к K применима лемма, следовательно, K можно считать еще и миниэдральным (нормальность при этом сохраняется, поскольку она вытекает из замкнутости). Согласно следствию 3 из теоремы IV!2.1 пространство X архимедово и, по упоминавшейся в I!5 теореме А.И. Юдина, (X, K) можно отождествить с n-мерным пространством $\mathbb{R}_n$ с покоординатным упорядочением (n — размерность пространства X).

Возьмем $A \in Z$. Пусть e_i — координатные орты в $\mathbb{R}_n$, $y_i = Ae_i$. Так как конус L воспроизводящий, каждый y_i представим в виде $y_i = u_i - v_i$, где $u_i,\ v_i \in L$. Тогда для любого $x \in X$, $x = \{\xi_i\}$, положим

$$A_1x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i u_i, \quad A_2x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i.$$

Ясно, что $A_1,\ A_2 \in \mathbb{H}$ и $A = A_1 - A_2$. $\square$

§ 4. УСЛОВИЯ НОРМАЛЬНОСТИ КОНУСА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Теорема VI.4.1. *Пусть $\overline{K} \neq X$. Для того чтобы $\mathbb{H}$ было нормальным конусом, необходимо и достаточно, чтобы конус L был нормальным, а конус K удовлетворял условию теоремы IV!6.1: существует такая постоянная M, что любой $x \in X$ представим в виде $x = (b)\text{-}\lim(u_n - v_n)$, где $u_n,\ v_n \in K$ и $\|u_n\|,\ \|v_n\| \leq$*

$M\|x\|$. *В частности, если пространство* X *банахово, а конус* K *замкнут, то для нормальности* $\mathbb{H}$ *необходимо и достаточно, чтобы* K *был воспроизводящим, а* L *нормальным*[52].

Эта теорема естественным образом обобщает теоремы IV!6.1–2.

Доказательство. а) Необходимость. Пусть $\mathbb{H}$ нормален. Докажем, что сопряженный конус K' тоже нормален, а тогда, по теореме IV!6.1, конус K удовлетворяет указанному там условию. Пусть $f,\ g \in K'$, причем $g \le f$. Возьмем произвольный $y_0 \in L \setminus \{0\}$ и рассмотрим операторы

$$A_f x = f(x)y_0, \quad A_g x = g(x)y_0.$$

Ясно, что $A_f,\ A_g \in \mathbb{H}$ и $A_g \le A_f$. Следовательно, $\|A_g\| \le N\|A_f\|$, где N — константа полумонотонности нормы на $\mathbb{H}$. Тогда и $\|g\| \le N\|f\|$, что и доказывает нормальность K'.

Теперь проверим нормальность L. Пусть $y_1,\ y_2 \in L$, причем $y_1 \le y_2$. Рассмотрим операторы $A_i x = f(x)y_i$ $(i = 1,\ 2)$, где f — ненулевой функционал из K'. Ясно, что $A_1,\ A_2 \in \mathbb{H}$ и $A_1 \le A_2$. Используя снова константу N полумонотонности нормы на $\mathbb{H}$, мы легко получим, что $\|y_1\| \le N\|y_2\|$.

б) Достаточность. Если условие теоремы выполнено, то любой $x \in X$ с $\|x\| \le 1$ представим в виде $x = (b)\text{-}\lim(u_n - v_n)$, где $u_n,\ v_n \in K$ и $\|u_n\|,\ \|v_n\| \le M$. Пусть, теперь $A,\ B \in \mathbb{H}$ и $A \le B$. Тогда $0 \le Au_n \le Bu_n$ и, если P — константа полумонотонности нормы на L, то

$$\|Au_n\| \le P\|Bu_n\| \le PM\|B\|.$$

Аналогичное неравенство получается и для $\|Av_n\|$, а следовательно,

$$\|Ax\| \le 2PM\|B\|.$$

Отсюда и вытекает, что $\|A\| \le 2PM\|B\|$. □

§ 5. УСЛОВИЯ ТЕЛЕСНОСТИ И ОШТУКАТУРИВАЕМОСТИ КОНУСА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этом параграфе будут даны обобщения теорем II.3.1 и III.6.2.

Теорема VI.5.1 (В.И. Ажоркин, И.А. Бахтин [2]). *Для того чтобы клин* $\mathbb{H}$ *был телесным, необходимо и достаточно, чтобы конус* K *был оштукатуриваемым, а конус* L *телесным.*

Доказательство. а) Необходимость. Пусть оператор A — внутренняя точка в $\mathbb{H}$, следовательно, $\overline{S(A;r)} \subset \mathbb{H}$ при некотором $r > 0$. Докажем, что если $x_0 > 0$ $(x_0 \in K)$ и $\|x_0\| = 1$, то $\overline{S(Ax_0;r)} \subset L$, и, тем самым, мы установим телесность конуса L.

Пусть $y_0 \in Y$ и $\|y\| \le r$. Возьмем такой $f \in X'$, что $f(x_0) = 1$ и $\|f\| = 1$. Составим оператор $Bx = f(x)y$. Тогда $Bx_0 = y$, а $\|B\| = \|y\| \le r$. Следовательно, $A + B \in \mathbb{H}$, а потому $(A + B)x_0 \in L$, т. е. $Ax_0 + y \in L$.

Теперь проверим оштукатуриваемость конуса K. Так как L телесен, в Y существует ненулевой положительный (b)-линейный функционал g (см. II!2).

[52] Указанный частный случай теоремы содержится в [2].

Положим $f(x) = g(Ax)$. Для любых $x > 0$ и $y \in Y$ с $\|y\| \le r\|x\|$, по доказанному выше, имеем

$$A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \pm \frac{y}{\|x\|} \in L,$$

следовательно, $Ax \ge y$ и потому $f(x) \ge g(y)$ для любого y с $\|y\| \le r\|x\|$. Но тогда $f(x) \ge r\|g\|\|x\|$, а это и означает, что функционал f равномерно положителен. Остается сослаться на теорему II.1.1.

б) Достаточность. Пусть f — равномерно положительный функционал на X. Не умаляя общности, можно считать, что $f(x) \ge \|x\|$ при $x \in K$. Пусть v — внутренняя точка в конусе L, причем $\overline{S(v;\rho)} \subset L$. Докажем, что оператор $Vx = f(x)v$ является внутренней точкой в $\mathbb{H}$, а именно проверим, что $\overline{S(V;\rho)} \subset \mathbb{H}$. Пусть $A \in \overline{S(V;\rho)}$, т. е. $A \in Z$ и $\|A - V\| \le \rho$. Для любого $x > 0$ имеем $\|Ax - Vx\| \le \rho\|x\| \le \rho f(x)$, а потому

$$Ax = Vx + (A - V)x = f(x)\left[v + \frac{Ax - Vx}{f(x)}\right] \in f(x) \cdot \overline{S(v;\rho)} \subset L. \quad \square$$

Теорема VI.5.2. *Пусть пространство X банахово, а конус K замкнут. Для того чтобы $\mathbb{H}$ было оштукатуриваемым конусом, необходимо и достаточно, чтобы конус K был инфрателесным, а конус L оштукатуриваемым.*

Доказательство. а) Необходимость. Предположим, что $\mathbb{H}$ оштукатуриваем, и докажем, что сопряженный конус K' тоже оштукатуриваем, откуда, по теореме III.6.2, будет следовать, что K инфрателесен. Пусть F — равномерно положительный функционал на Z, $F(A) \ge \delta\|A\|$ для любого $A \in \mathbb{H}$. Возьмем $y \in L$ с $\|y\| = 1$ и для любого $f \in X'$ положим $A_f x = f(x)y$, а затем $G(f) = F(A_f)$. Ясно, что G (b)-линейный функционал на X', причем для любого $f \in K'$ $G(f) \ge \delta\|A_f\| = \delta\|f\|$. Таким образом, G — равномерно положительный функционал на X' и потому конус K' оштукатуриваем.

Теперь проверим, что L оштукатуриваем. Возьмем $f \in K'$ с $\|f\| = 1$ и для любого $y \in Y$ введем оператор $B_y x = f(x)y$, а затем положим $g(y) = F(B_y)$. Тогда при $y \in L$ имеем $g(y) \ge \delta\|B_y\| = \delta\|y\|$ и из существования на Y равномерно положительного функционала вытекает оштукатуриваемость конуса L.

б) Достаточность. Так как K инфрателесен, то он несплющен (см. III.4). Пусть M — его константа несплющенности. Далее, для любого $A \in Z$ положим $\|A\|_0 = \sup\limits_{x \in B_+} \|Ax\|$ ($B_+ = B \cap K$, где B — замкнутый единичный шар из X). Ясно, что $\|A\|_0 \le \|A\|$. С другой стороны, так как каждый $x \in B$ представим в виде $x = u - v$, где $u,\ v \in MB_+$, то

$$\|A\| = \sup_{x \in B} \|Ax\| \le \sup_{u,\, v \in MB_+} \|Au - Av\| \le 2M\|A\|_0. \tag{2}$$

Пусть g — равномерно положительный функционал на Y, удовлетворяющий неравенству $g(y) \ge \|y\|$ для любого $y \in L$. Из инфрателесности K, по теореме III.6.2, следует оштукатуриваемость K'. Оштукатуриваемость $\mathbb{H}$ будем проверять с помощью теоремы III.1.3. Возьмем любое конечное число операторов $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ и построим функционалы $f_i(x) = g(A_i x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда $f_i \in K'$. Определяя $\|f_i\|_0$ аналогично $\|A\|_0$, имеем

$$\|f_i\|_0 = \sup_{x \in B_+} g(A_i x) \ge \sup_{x \in B_+} \|A_i x\| = \|A\|_0.$$

Далее с помощью (2) получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\|A_i\| \le 2M\sum_{i=1}^{n}\|A_i\|_0 \le 2M\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_0 \le 2M\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|.$$

Поскольку конус K' оштукатуриваем, его константы нормальности, по теореме III.1.3, в совокупности ограничены: $N(K',n) \le C$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n}\|f_i\| \le C\Big\|\sum_{i=1}^{n}f_i\Big\| = C\Big\|g\circ\sum_{i=1}^{n}A_i\Big\| \le C\|g\|\Big\|\sum_{i=1}^{n}A_i\Big\|.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{n}\|A_i\| \le 2MC\|g\|\Big\|\sum_{i=1}^{n}A_i\Big\|,$$

откуда $N(\mathbb{H},n) \le 2MC$. Константы нормальности конуса $\mathbb{H}$ оказались в совокупности ограниченными и потому $\mathbb{H}$ оштукатуриваем. $\square$

Замечание. Поскольку теорема III.6.2 в части достаточности верна в произвольном УНП, доказанная сейчас теорема в части достаточности тоже верна в произвольном УНП.

§ 6. КОНУС ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ С ТЕЛЕСНЫМ КОНУСОМ

Будем предполагать, что конус K в пространстве X телесен. Из примера 7 видно, что в этом случае из того, что конус L воспроизводящий, не следует, что $\mathbb{H}$ тоже должен быть воспроизводящим. Однако многие другие свойства конуса L переносятся на $\mathbb{H}$ (поскольку K телесен, $\mathbb{H}$ — конус). Собирая результаты, уже полученные в этом направлении в предыдущих параграфах, и дополняя их еще некоторыми, сформулируем следующую теорему.

Теорема VI.6.1. *Пусть конус K телесен. Если конус L обладает одним из следующих свойств:* а) *нормален,* б) *правилен и нормален,* в) *вполне правилен,* г) *оштукатуриваем, то и $\mathbb{H}$ обладает тем же свойством.*

Случай а) покрывается теоремой VI.4.1, так как телесный конус K несплющен, а его замыкание $\overline{K} \ne X$ (II!5). Случай г) покрывается теоремой VI.5.2 (с учетом замечания к ней). Случаи б) и в) вытекают из доказываемой ниже более общей теоремы VI.6.2.

Сформулированная теорема допускает обращение даже без требования, чтобы конус K был телесным. Так, если $\overline{K} \ne X$, а конус $\mathbb{H}$ нормален, правилен или вполне правилен, то тем же свойством обладает и конус L. Случай нормального конуса был разобран по ходу доказательства теоремы VI.4.1, случаи правильного и вполне правильного конуса разбираются аналогично. Обращение теоремы VI.6.1 для оштукатуриваемого конуса содержится в доказательстве теоремы VI.5.2.

Для усиления теоремы VI.6.1 в пунктах б) и в) используем следующее определение, введенное В.И. Ажоркиным.

Определение. Конус K в УНП (X,K) называется *счетно-воспроизводящим* (или *σ-воспроизводящим*), если всякое счетное (b)-ограниченное множество элементов $x_n \in X$ (o)-ограничено.

Всякий телесный конус — счетно-воспроизводящий, но обратное неверно. Например, пусть X состоит из всех ограниченных функций, заданных на несчетном множестве T, которые отличны от 0 на не более чем счетном множестве точек. В X вводим естественное упорядочение и равномерную норму $\|x\| = \sup|x(t)|$. Легко понять, что конус положительных элементов в X не телесный, но счетно-воспроизводящий.

Теорема VI.6.2. *Если конус K счетно-воспроизводящий, а конус L правильный и нормальный (соответственно, вполне правильный), то и $\mathbb{H}$ тоже правильный (соответственно вполне правильный) конус.*

Доказательство. Проведем доказательство для случая, когда конус L правилен и нормален. Пусть операторы $A_n \in \mathbb{H}$ и $A_n \uparrow \le B$ ($B \in \mathbb{H}$), но предположим, что последовательность $\{A_n\}$ не (b)-фундаментальна. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ существует такая возрастающая последовательность индексов n_k, что $\|A_{n_{k+1}} - A_{n_k}\| > \varepsilon$ ($k = 1, 2, \ldots$). Для каждого n существует такой x_k из единичного шара пространства X, что

$$\|(A_{n_{k+1}} - A_{n_k})x_k\| > \varepsilon. \qquad (3)$$

По условию теоремы, множество $\{x_k\}$ (o)-ограничено: $\pm x_k \le u$. При этом $u \in K$, а $A_n u \uparrow \le Bu$. Поскольку конус L правильный, последовательность $\{A_n u\}$ (b)-фундаментальна. Далее имеем $\pm(A_{n_{k+1}} - A_{n_k})x_k \le (A_{n_{k+1}} - A_{n_k})u$, а отсюда

$$\|(A_{n_{k+1}} - A_{n_k})x_k\| \le (2M+1)\|(A_{n_{k+1}} - A_{n_k})u\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

(M — константа полумонотонности нормы на L), и мы приходим к противоречию с неравенством (3). Случай, когда конус L вполне правилен, рассматривается аналогично. □

Пусть теперь X и Y — $\mathbb{O}$-пространства. Поскольку сопряженное пространство X' может не быть $\mathbb{O}$-пространством (см. IV.4), тем более Z не обязано быть $\mathbb{O}$-пространством. Так как конус положительных элементов в $\mathbb{O}$-пространстве всегда телесен, из теоремы VI.5.1 следует, что если Z — $\mathbb{O}$-пространство, то конус K оштукатуриваем (и, следовательно, X' — $\mathbb{O}$-пространство). Однако обратный результат мы можем доказать лишь не в полном объеме.

Теорема VI.6.3. *Если (X, K) — $\mathbb{O}$-пространство с оштукатуриваемым конусом K, а (Y, L) — $\mathbb{O}$-пространство с правильным конусом L, то $(Z, \mathbb{H})$ — $\mathbb{O}$-пространство с правильным конусом $\mathbb{H}$.*

Доказательство. Согласно следствию из теоремы IV.1.1 достаточно установить, что конус $\mathbb{H}$ замкнут, телесен и правилен. Но замкнутость $\mathbb{H}$ вытекает из замкнутости L, телесность $\mathbb{H}$ получается, по теореме VI.5.1, за счет телесности L, а правильность $\mathbb{H}$ вытекает из правильности и нормальности L по теореме VI.6.1. □

Заметим, что для $\mathbb{O}_\sigma$-пространства аналогичная теорема неверна. Более того, используя один пример из [18], можно показать, что даже если (X, K) — $\mathbb{O}$-пространство с оштукатуриваемым конусом K, а (Y, L) — $\mathbb{O}_\sigma$-пространство тоже с оштукатуриваемым конусом L, то конус $\mathbb{H}$ может не быть даже воспроизводящим.

§ 7. УСЛОВИЯ МИНИЭДРАЛЬНОСТИ КОНУСА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В конце V1.1 уже было отмечено, что если пространство $(Z, \mathbb{H})$ — векторная решетка, а $\overline{K} \neq X$, то и пространство (Y, L) тоже векторная решетка. Однако если мы попытаемся обратить это утверждение и из миниэдральности конуса L выводить миниэдральность $\mathbb{H}$, то мы столкнемся с некоторыми трудностями. Это естественно, поскольку даже миниэдральность сопряженного конуса K', т. е. конуса $\mathbb{H}$ в случае, когда $Y = \mathbb{R}_1$, обеспечивается лишь некоторыми сильными свойствами конуса K. Следующая теорема представляет обобщение теоремы V!3.1.

Теорема VI.7.1. *Если УНП (X, K) обладает (и.св.) и конус K не сплющен, а (Y, L) — (o)-полное РУНП с нормальным конусом L и если конус $\mathbb{H}$ воспроизводящий, то $(Z, \mathbb{H})$ — K-пространство.*

Для получения этой теоремы нужно повторить доказательство теоремы V!3.1 и учесть при этом, что используемая там лемма из III!4 сохраняется при несплющенном K и нормальном L (как было отмечено в VI.1).

Следующая теорема, полученная, в основном, А. Уикстедом [30], может рассматриваться как обобщение теоремы Андо (V!4.1).

Теорема VI.7.2. *Пусть (X, K) — УБП, причем конус K — замкнутый и воспроизводящий, а (Y, L) — произвольное УНП, для которого $\overline{L}$ не является линейным множеством. Если $(Z, \mathbb{H})$ — векторная решетка, то (X, K) обладает (и.св.), конус K — нормальный, а (Y, L) — векторная решетка.*

Доказательство. Так как конус K замкнут, из миниэдральности конуса $\mathbb{H}$ вытекает миниэдральность конуса L. Из теоремы VI.3.1 вытекает нормальность конуса K.

Теперь покажем, что сопряженное пространство (X', K') обладает (и.св.). Пусть заданы четыре функционала из X': f_1, f_2, g_1, g_2, причем $f_i \leq g_j$ $(i,\ j = 1,\ 2)$. Так как $\overline{L}$ не линейно, то существуют такие $\varphi \in L'$ и $y_0 \in L$, что $\varphi(y_0) = 1$. Рассмотрим операторы

$$A_i x = f_i(x) y_0; \quad B_j x = g_j(x) y_0 \quad (i,\ j = 1,\ 2).$$

Тогда $A_i \leq B_j$ $(i,\ j = 1,\ 2)$. Поскольку пространство Z как векторная решетка обладает (и.св.), существует такой $C \in Z$, что $A_i \leq C \leq B_j$ $(i,\ j = 1,\ 2)$. Но тогда и $\varphi \circ A_i \leq \varphi \circ C \leq \varphi \circ B_j$ $(i,\ j = 1,\ 2)$, т. е. $f_i \leq \varphi \circ C \leq g_j$, причем $\varphi \circ C \in X'$. Таким образом, пространство (X', K') обладает (и.св.). Теперь, по следствию из теоремы V!2.1, конус K' миниэдрален и, по теореме V!4.1, (X, K) обладает (и.св.). □

Замечание. Если в теореме VI.7.2 дополнительно предположить, что $(Z, \mathbb{H})$ — K-пространство, то и (Y, L) окажется K -пространством. Действительно, дедекиндова полнота (Y, L) будет вытекать из дедекиндовой полноты $(Z, \mathbb{H})$ на основании теоремы VI.1.2. Аналогичное замечание справедливо и для K_σ-пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1 Абрамович Ю.А., Лозановский Г.Я. *О некоторых числовых характеристиках KN-линеалов.* – Матем. заметки, вып. 5, 1973, 14, 723–732.

2 Ажоркин В.И., Бахтин И.А. *К геометрии конусов линейных положительных операторов в пространстве Банаха.* – Труды центрального зонального объединения математических кафедр. Функциональный анализ и теория функций, вып. 2, Калинин, 1971, 3–10.

3 Бахтин И.А. *Конусы в пространствах Банаха,* I. Воронежский гос. педагогический институт, 1975.

4 Бахтин И.А., Красносельский М.А., Стеценко В.Я. *О непрерывности линейных положительных операторов.* – Сиб. мат. журнал. 1962, 3, № 1, 156–160.

5 Вулих Б.З. *Введение в теорию полуупорядоченных пространств.* – М., Физматгиз, 1961.

6 Вулих Б.З. *О линейных структурах, эквивалентных структурам с монотонной нормой.* ДАН СССР, 1962, 147, № 2, 271–274.

7 Вулих Б.З., Корсакова О.С. *О пространствах, в которых сходимость по норме совпадает с порядковой сходимостью.* – Матем. заметки, 1973, вып. 2, 259–268.

8 Вулих Б.З. *Введение в теорию конусов в нормированных пространствах.* Калининский гос. университет, 1977.

9 Даниленко И.Ф. *О нормальных и оштукатуриваемых конусах в локально выпуклых пространствах.* Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1972, 15, 102–110.

10 Канторович Л.В. *Линейные полуупорядоченные пространства.* – Матем. сборник, 1937, 2(44), 121–168.

11 Красносельский М.А. *Положительные решения операторных уравнений.* М., Фиэматгиз, 1962.

12 Красносельский М.А. *Правильные и вполне правильные конусы.* ДАН СССР, 1960, 135, № 2, 255-257.

13 Лифшиц Е.А. *К теории полуупорядоченных банаховых пространств.* Функциональный анализ и его приложения, 1969, вып. 1, 91–92.

14 Лифшиц Е.А. *Идеально выпуклые множества.* – Функциональный анализ и его приложения, 1970, 4, вып. 4, 76–77.

15 Макаров Б.М. *О топологической эквивалентности B-пространств.* ДАН СССР, 1956, 107, № 1, 17–18.

16 Рубинов А.М. *Бесконечномерные модели производства.* – Сиб. мат. журнал. 1969, 10, № 6, 1375–1386.

17 Чучаев И.И. *Об оштукатуриваемых конусах в локально выпуклых пространствах.* – Вестник Ленинградского университета. 1975, 7, 70–77.

18 Чучаев И.И. *Некоторые примеры конусов в нормированных пространствах.* – Вопросы современной математики и ее преподавания в высшей школе, № 108, Саранск, 1974, 24–30.

19 Asimow L. *Directed B-spaces of affine functions.* Trans. A.M.S., 1969, 143, 117–132.

20 Bishop B., Phelps R.R. *Support functionals of a convex set.* Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math., VII, Convexity, 1963, 27–35.

21 De Marr R.E. *Order convergence in linear topological spaces.* Pacific J. Math. 1964, 14, № 1, 17–20.

22 Edwards D.A. *On the homeomorphic affine embedding of a locally compact cone into a Banach dual space endowed with the vague topology.* Proc. Lond. M.S., 1964, 14, 399–414.

23 Ellis A.J. *The duality of partially ordered normed linear spaces.* J. Lond. M.S., 1964, 39, 730–744.

24 Jameson Gr. *Ordered linear spaces.* Springer-Verlag, 1970.

25 Kakutani S. *Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem.* Ann. of Math., 1941, 42, 523–537.

26 Luxemburg W.A.J., Zaanen A.O. *Notes on Banach function spaces.* X. Proc. Nederl. Akad. Wetensch., Ser A, 1964, 67, № 5, 493–506; XVI A, 1965, 68, № 1, 648–657.

27 Nakano H. *Modulared semi-odered linear spaces.* Tokyo, Maruzen Co; LTD, 1950.

28 Ogasawara T. *Theory of vector lattices.* J. Hirosima Univ., Ser A, 1942, 12, 37–100; 1944, 13, 41–161.

29 Waterman A.G. *The normal completion of certain partially ordered vector spaces.* Proc. A.M.S., 1970, 25, № 1, 141–144.

30 Wickstead A.W. *Spaces of linear operators between partially ordered Banach spaces.* Proc. Lond. M.S., 1974, 28, № 1, 141–158.

Предметный указатель