

С. А. ХРИСТИАНОВИЧ, В. Г. ГАЛЬПЕРИН,
М. Д. МИЛЛИОНЩИКОВ, Л. А. СИМОНОВ

ПРИКЛАДНАЯ
ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
С. А. ХРИСТИАНОВИЧА

1948

**С. А. ХРИСТИАНОВИЧ, В. Г. ГАЛЬПЕРИН,
М. Д. МИЛЛИОНЩИКОВ, Л. А. СИМОНОВ**

ПРИКЛАДНАЯ ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

С. А. ХРИСТИАНОВИЧА

1948

ПРЕДИСЛОВИЕ

В течение последнего времени, в связи с широким распространением различных газовых машин, работающих при больших скоростях, приобрели очень важное значение вопросы, связанные с влиянием сжимаемости газа и теплообменом. Для решения этих вопросов разработаны новые методы. Постепенно создается новая отрасль науки, которую можно назвать „Прикладная газовая динамика“.

В настоящей книге сделана попытка изложения прикладной газовой динамики с единой точки зрения.

Первая часть книги содержит изложение основных понятий газовой динамики, законов адиабатического течения и течений газа в трубах.

ГЛАВА I

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

§ 1. Уравнение состояния вещества

Газовая динамика—наука о течениях газа с большими скоростями.

Газовая динамика является основой теории компрессоров, газовых турбин, реактивных двигателей, эжекторов и других машин, широко применяемых в современной технике.

Прежде чем приступить к исследованию газовых течений, необходимо напомнить основные законы, определяющие изменения состояния газа. Опыт показывает, что состояние однородной массы газа определяется двумя величинами, например, ее плотностью ρ и температурой θ . Остальные свойства газа, в том числе и давление p , оказываются зависящими от этих величин.

Обозначим массу газа M и занимаемый ею объем V .

Тогда

$$\rho = \frac{M}{V},$$

а удельный объем

$$v = \frac{V}{M}.$$

Вместо плотности часто пользуются весом единицы объема газа:

$$\gamma = g\rho,$$

где g —ускорение силы тяжести.

Зависимость давления от удельного объема и температуры называется уравнением состояния вещества:

$$p = f(v, \theta).$$

Это уравнение получается наиболее простым при небольшой плотности, если газ далек от состояния сжижения. Тогда изменение состояния газа подчиняется, с большой точностью, следующим двум законам:

Закон Бойля-Мариотта

Для данного газа произведение удельного объема на давление зависит только от температуры:

$$pv = \Phi(\theta).$$

Закон Гей-Люссака

При постоянном давлении относительные приращения удельного объема газа пропорциональны изменению температуры:

$$\frac{v - v_0}{v_0} = \alpha\theta.$$

Здесь α — коэффициент объемного расширения газа при постоянном давлении, v_0 — удельный объем газа при температуре, равной нулю.

Измерения показывают, что величина α почти одинакова для всех газов, очень мало зависит от температуры и равна приблизительно $1/273$.

По закону Бойля-Мариотта

$$v_0 = \frac{C}{p},$$

где $C = \Phi(0)$ — величина постоянная для данного газа, зависящая от его молекулярного веса.

Тогда

$$pv = C(1 + \alpha\theta). \quad (1.1)$$

Это уравнение называется уравнением Клапейрона.

Если изменение состояния газа точно подчиняется уравнению Клапейрона, то газ называют совершенным. Для газов, близких к состоянию конденсации, уравнение Клапейрона становится неточным. Тогда приходится пользоваться более сложными уравнениями состояния.

Приведем здесь для примера одно из таких уравнений, предложенное Ван-дер-Ваальсом:

$$p = \frac{C(1 + \alpha\theta)}{v - b} - \frac{a}{v^2}. \quad (1.2)$$

Оно интересно тем, что применимо не только к газообразному, но и к жидкому состоянию вещества.

Заметим, что постоянные a и b , входящие в уравнение Ван-дер-Ваальса, очень малы. Поэтому уравнение Ван-дер-Ваальса при не очень больших значениях плотности почти не отличается от уравнения Клапейрона.

Для паров обычно пользуются диаграммами состояния или таблицами, составленными по экспериментальным данным, так как не всегда можно выразить уравнение состояния в простой аналитической форме. Примеры таких диаграмм будут приведены ниже.

Из уравнения (1.1) для совершенного газа следует, что, при одних и тех же температуре и давлении, плотности различных газов обратно пропорциональны постоянным C .

Например, для кислорода и какого-нибудь другого газа имеем:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{C}{C_0}. \quad (1.3)$$

Здесь плотность и газовая постоянная кислорода отмечены индексом „0“.

Газовая постоянная C связана с молекулярным весом газа m . Эта связь может быть установлена на основании следующего закона:

Закон Авогадро

Все газы в равных объемах при равной температуре и давлении содержат равное число грамм-молекул¹.

Из закона Авогадро следует, что, при одинаковой температуре и одинаковом давлении, плотности газов относятся как их молекулярные веса. Следовательно,

$$\frac{m_0}{m} = \frac{\rho_0}{\rho}.$$

Сопоставляя с уравнением (1.3), получим

$$\frac{C}{C_0} = \frac{m_0}{m},$$

откуда

$$C = \frac{m_0}{m} C_0.$$

Молекулярный вес кислорода равен 32. Следовательно,

$$C = \frac{32}{m} C_0.$$

Для определения C_0 надо иметь данные измерения плотности кислорода при некоторой температуре и некотором давлении.

¹ Грамм-молекулой называется количество газа, масса которого в граммах численно равна его молекулярному весу.

Измерения показывают, что при температуре нуль градусов и давлении в одну атмосферу, т. е. при $\theta = 0$ и $p = 101325 \times 10 \text{ г/см сек}^2$, плотность кислорода равна $0,0014291 \text{ г/см}^3$. В технической системе единиц, которой преимущественно мы будем пользоваться в дальнейшем, давление в одну атмосферу равно $10326,6 \text{ кг/м}^2$, если принять $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$, а плотность соответственно равна $0,14566 \text{ кгсек}^2/\text{м}^4$.

Отсюда

$$C_0 = \frac{1033 \cdot 10}{0,1457} \approx 709 \cdot 10^2 \text{ м}^2/\text{сек}^2.$$

Уравнение состояния совершенного газа тогда будет:

$$pv = \frac{32}{m} 709 \cdot 10^2 (1 + \alpha\theta) = \frac{2,27 \cdot 10^6}{m} (1 + \alpha\theta).$$

Обозначая

$$1 + \alpha\theta = \alpha T$$

и называя T абсолютной температурой, имеем:

$$T = \theta + \frac{1}{\alpha} = \theta + 273.$$

Уравнение (1.1) можно тогда переписать в виде

$$pv = \frac{R_{\text{абс}}}{m} T, \quad (1.4)$$

где

$$R_{\text{абс}} = \frac{2,27 \cdot 10^6}{273} = 831 \cdot 10 \text{ м}^2/\text{сек}^2 \text{ град}.$$

Постоянная $R_{\text{абс}}$ носит название абсолютной газовой постоянной.

Обозначим

$$R = \frac{R_{\text{абс}}}{m},$$

тогда уравнение Клапейрона примет вид

$$pv = RT. \quad (1.5)$$

Перепишем его в виде

$$p = \rho RT$$

или

$$p = \gamma \frac{R}{g} T = \gamma \bar{R} T. \quad (1.6)$$

Здесь

$$\bar{R} = \frac{R}{g} = \frac{\bar{R}_{абс}}{m}. \quad (1.7)$$

Тогда

$$\bar{R}_{абс} = \frac{R_{абс}}{g} = \frac{831 \cdot 10}{9,81} = 848 \text{ м/град.}$$

Следовательно,

$$\bar{R} = \frac{848}{m} \text{ м/град.} \quad (1.8)$$

Из закона Авогадро следует, что при одинаковом давлении и одинаковой температуре грамм-молекула любого газа занимает один и тот же объем. Вычислим объем газа, вес которого равен килограмм-молекуле при нормальных условиях, т. е. при $\theta=0$ и $p=1033 \cdot 10 \text{ кг/м}^2$. Для кислорода при этом $\rho=0,1457 \text{ кг сек}^2/\text{м}^4$ или $\gamma=1,429 \text{ кг/м}^3$, откуда объем, занимаемый одной килограмм-молекулой газа при нормальных условиях, равен $\frac{32}{1,43} = 22,4 \text{ м}^3$.

Таким образом, зная молекулярный вес, можно определить удельный вес газа при нормальных условиях, пользуясь следующим соотношением:

$$\gamma = \frac{m}{22,4} \text{ кг/м}^3. \quad (1.9)$$

В технике чаще всего приходится иметь дело со смесями газов.

Уравнение состояния для смесей газов определяется на основании закона Дальтона.

Рассмотрим различные газы, имеющие одинаковую температуру T и давление p , находящиеся в сосуде и разделенные между собой перегородками. Пусть газ, имеющий массу M_i , занимает при этом объем V . Снимем перегородки, разделяющие газы; тогда объем смеси будет равен сумме объемов смешиваемых газов. Опыт показывает, что если газы имеют небольшую плотность и далеки от состояния конденсации, температура и давление смеси будут равны температуре и давлению смешиваемых газов.

Вес единицы объема смеси γ при этом будет

$$\gamma = \frac{Mg}{V} = \frac{Mg}{\sum V_i} = \frac{1}{22,4} \frac{M}{\sum \frac{M_i}{m_i}},$$

где M —масса смеси; отсюда молекулярный вес смеси:

$$m = \frac{M}{\sum \frac{M_i}{m_i}}. \quad (1.10)$$

Назовем парциальным давлением газа в смеси давление, которое имел бы этот газ, если бы он один занимал объем V при той же температуре. Для парциального давления газа, имеющего массу M_i , получим

$$p_i = \frac{M_i R_i T}{V} = \frac{p V_i}{V}. \quad (1.11)$$

Складывая парциальные давления газов, составляющих смесь, и принимая во внимание, что $\sum V_i = V$, получим

$$\sum p_i = p.$$

Это равенство выражает закон Дальтона:

Давление смеси равно сумме парциальных давлений отдельных газов.

Из (1.11) имеем

$$\frac{pV}{T} = \sum M_i R_i,$$

откуда для смеси

$$pv = RT,$$

где

$$R = \sum \frac{M_i}{M} R_i. \quad (1.12)$$

Так как

$$R_i = \frac{R_{abc}}{m_i},$$

то

$$R = R_{abc} \sum \frac{M_i}{M} \frac{1}{m_i}. \quad (1.13)$$

Для молекулярного веса смеси получаем вновь

$$\frac{M}{m} = \sum \frac{M_i}{m_i}.$$

Приведенные соотношения справедливы в том случае, если смешение газов не сопровождается химическими изменениями.

Значения m , γ и \bar{R} для некоторых газов даны в приложении (в табл. 1). Для воздуха $\gamma=1,293 \text{ кг/м}^3$ при $\theta=0$, $\rho=1033 \cdot 10 \text{ кг/м}^2$ и $g=9,81 \text{ м/сек}^2$; $R=29,27 \text{ м/град}$; $m=28,86$. Плотность воздуха при 15°Ц и давлении $p=1033 \cdot 10 \text{ кг/м}^2$ будет $\rho \approx 0,125 \text{ кг сек}^2/\text{м}^4$.

§ 2. Первое начало термодинамики

Процессы изменения состояния газа подчиняются двум основным законам: первому и второму началу термодинамики.

Первое начало термодинамики выражает закон сохранения энергии в применении к преобразованиям механической энергии в тепловую и обратно.

Рассмотрим какой-нибудь процесс, при котором происходит изменение температуры тела. При этом телу сообщается или у него отнимается некоторое количество тепла U . Обозначим удельную теплоемкость вещества через c .

Если тело однородное и имеет массу M , то

$$c = \frac{1}{M} \frac{dU}{d\theta}.$$

Часто удельную теплоемкость относят к единице веса тела. В этом случае будем обозначать удельную теплоемкость \bar{c} . Имеем

$$\bar{c} = \frac{1}{Mg} \frac{dU}{d\theta}.$$

Количество тепла всегда будет в дальнейшем выражено в больших калориях, а следовательно, теплоемкость в больших калориях на килограмм.

Теплоемкость газа зависит от процесса, при котором происходит изменение его температуры. Если нагревание происходит при постоянном давлении, то газ имеет одну удельную теплоемкость — теплоемкость при постоянном давлении. Эту теплоемкость обозначают c_p ; если нагревание происходит при постоянном объеме, то удельная теплоемкость газа будет другой. Ее называют удельной теплоемкостью при постоянном объеме и обозначают c_v . Существует процесс, при котором газ изменяет свою температуру без притока тепла извне; этот процесс носит название адиабатического процесса, он будет нами в дальнейшем рассмотрен.

Легче всего поддается измерению теплоемкость при постоянном давлении.

Опыты показывают, что теплоемкость газа в условиях, достаточно далеких от условий сжижения, зависит от температуры газа и почти не зависит от его давления.

Для воздуха имеем:

$$\bar{c}_p = 0,240 + 0,95 \cdot 10^{-5} \theta \text{ кал/кг};$$

для перегретого водяного пара:

$$\bar{c}_p = 0,457 + 0,462 \cdot 10^{-4} \theta \text{ кал/кг}.$$

В большинстве случаев оказывается возможным, в определенном интервале температур, считать теплоемкость постоянной величиной, равной среднему ее значению в этом интервале. Так, для воздуха в дальнейших расчетах мы примем $\bar{c}_p = 0,240$.

Для двухатомных газов при не очень высоких температурах приближенно

$$m\bar{c}_p = 6,86. \quad (1.14)$$

При высоких температурах равенство произведения $m\bar{c}_p$ для различных двухатомных газов также приближенно сохраняется.

Для азота ($m = 28$) в интервале температур до 1000°C можно считать

$$m\bar{c}_p = 6,98 + 0,000266 \theta,$$

а в интервале температур от 1200 до 2500°C —

$$m\bar{c}_p = 7,0 + 0,000713 \theta.$$

Этими формулами можно приближенно пользоваться и для других двухатомных газов.

Для одноатомных газов (гелий, аргон) имеем примерно

$$m\bar{c}_p = 4,96. \quad (1.15)$$

Теплоемкость одноатомных газов не изменяется с температурой.

В приложении (табл. 1) даны значения \bar{c}_p для некоторых газов.

Из закона сохранения энергии следует, что при превращении механической энергии в тепловую и обратно одной калории тепла соответствует некоторое совершенно определенное количество механической энергии. Эта величина носит название механического эквивалента тепла. Обозначим ее J .

Измерения показывают, что одной килограмм-калории соответствуют 427 кгм работы. Таким образом, механический эквивалент тепла равен:

$$J = 427 \text{ кгм кал}.$$

Рассмотрим какой-нибудь процесс, сопровождающийся изменением объема газа и сообщением ему некоторого количества тепла. Будем считать, что газ покоится или, вернее, что рассматриваемый процесс протекает настолько медленно, что изменения кинетической энергии газа пренебрежимо малы. Такой процесс изменения состояния газа называют квазистатическим.

Первое начало термодинамики, в применении к квазистатическому процессу, может быть сформулировано следующим образом: сообщенное газу тепло плюс сообщенная ему механическая энергия равны приращению его внутренней энергии.

Обозначим через E внутреннюю энергию газа, выраженную в механических единицах, и через A —работу внешних сил; получим:

$$E_2 - E_1 = JU + A.$$

Механическая энергия, сообщаемая газу извне при квазистатическом процессе, есть работа сил давления на поверхности, ограничивающей занимаемый газом объем.

Работа сил давления при изменении объема газа от V_1 до V_2 равна

$$A = - \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

Таким образом,

$$JU = E_2 - E_1 + \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

или, для бесконечно малого изменения,

$$JdU = dE + pdV.$$

Обозначая через u количество тепла, сообщенное единице массы газа, и через e — внутреннюю энергию единицы массы газа, получим:

$$Jdu = de + pdv. \quad (1.16)$$

Надо помнить, что это выражение не является полным дифференциалом, так как количество тепла, сообщенное газу, зависит не только от начального и конечного состояния газа, но и от самого процесса изменения состояния.

Остановимся теперь на понятии внутренней энергии газа. Внутренняя энергия однородного газа, отнесенная к единице его массы, зависит от параметров его состояния:

$$e = F(T, v).$$

Гей-Люссаку принадлежит идея опыта, доказывающего, что для газов, далеких от состояния конденсации, при небольшой плотности, внутренняя энергия газа зависит лишь от его температуры и почти не зависит от его объема¹. Не останавливаясь на усовершенствованных впоследствии вариантах этого опыта, приведем лишь его простейшую принципиальную схему.

Пусть в одной части сосуда, разделенного перегородкой, находится газ. Другая часть сосуда пустая. Поместим этот сосуд в водяную ванну так, чтобы температуры сосуда и ванны были первоначально равны. Затем снимем перегородку и дадим газу расшириться. Измерив температуру ванны, можно убедиться, что она при этом почти не изменяется.

Так как внутренняя энергия газа после расширения осталась неизменной (приток тепла извне отсутствует и работа внешних сил равна нулю), а объем газа изменился, то, следовательно, внутренняя энергия не зависит от объема, занимаемого газом. Таким образом, внутренняя энергия газа зависит лишь от его температуры, т. е.

$$e = e(T).$$

Вернемся снова к уравнению (1.16). Рассматривая процесс нагревания газа при постоянном объеме, получим

$$J \left(\frac{du}{dT} \right)_v = \frac{de}{dT} = Jc_v,$$

где c_v — теплоемкость газа при постоянном объеме.

Если нагревание происходит при постоянном давлении, то

$$J \left(\frac{du}{dT} \right)_p = \frac{de}{dT} + p \left(\frac{dv}{dT} \right)_p.$$

(Значок v обозначает, что изменение происходит при постоянном объеме, а значок p — что изменение происходит при постоянном давлении).

Но

$$v = \frac{RT}{p}$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{dv}{dT} \right)_p = \frac{R}{p},$$

откуда

$$Jc_p = Jc_v + R.$$

¹ Об отклонениях от этого закона см. ниже § 4.

Следовательно,

$$R = J(c_p - c_v) \quad (1.17)$$

или

$$\bar{R}_{абс} = Jm(\bar{c}_p - \bar{c}_v). \quad (1.18)$$

Формула (1.17) носит название формулы Майера.

Как было отмечено выше, теплоемкость газа при постоянном давлении мало зависит от его температуры и приближенно может считаться постоянной. Тогда из (1.17) следует, что c_v — теплоемкость при постоянном объеме — также должна считаться постоянной.

В этом случае внутренняя энергия газа будет:

$$e = Jc_v T + \text{const.} \quad (1.19)$$

Из уравнения (1.18) следует

$$m(\bar{c}_p - \bar{c}_v) = \frac{\bar{R}_{абс}}{J} = \frac{848}{427} = 1,98.$$

Если считать, что для воздуха $\bar{c}_p = 0,240$, то

$$\bar{c}_v = 0,171$$

и

$$\frac{\bar{c}_p}{\bar{c}_v} = x = 1,40. \quad (1.20)$$

Из формулы (1.14) следует, что это значение x приближенно будут иметь все двухатомные газы. Для одноатомных газов, пользуясь формулой (1.15), получим:

$$x = 1,67. \quad (1.21)$$

Значения x изменяются с температурой сравнительно мало. В дальнейшем мы будем считать x постоянным, не зависящим от температуры.

Теплоемкость и x для смеси газов, если процесс смешения не сопровождается химическими изменениями, можно вычислить, приравнявая внутреннюю энергию смеси сумме внутренних энергий смешиваемых газов. Пусть газы имеют одинаковое давление и одинаковую температуру; тогда:

$$c_v = \frac{\sum M_i c_{v_i}}{\sum M_i}.$$

Пользуясь формулой Майера и формулой (1.12), получим:

$$c_p = \frac{\sum c_{p_i} M_i}{\sum M_i},$$

так что

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\sum c_{p_i} M_i}{\sum c_{v_i} M_i}. \quad (1.22)$$

Значения κ для различных газов приведены в приложении (табл. 1).

Если рассматривать нагревание единицы массы газа при постоянном давлении, то для количества тепла получим

$$u = c_p (T_2 - T_1).$$

Величину

$$i = Jc_p T + \text{const} \quad (1.23)$$

принято называть теплосодержанием.

Из сравнения (1.19) и (1.23) видно, что для процессов нагревания при постоянном давлении эта величина играет ту же роль, что внутренняя энергия для процесса нагревания при постоянном объеме.

Выше были рассмотрены процессы нагревания газа при постоянном объеме и при постоянном давлении. Остановимся теперь на процессе, имеющем исключительное значение как в термодинамике, так и в газовой динамике. Рассмотрим процесс квазистатического сжатия и расширения газа без теплообмена с окружающей средой. Этот процесс носит название адиабатического процесса.

Пусть газ заключен в сосуд, стенки которого не проводят тепло. Изменим объем газа. Работа сил давления будет тогда равна изменению внутренней энергии газа. Следовательно,

$$de + pdv = 0.$$

При адиабатическом сжатии внутренняя энергия газа возрастает, и газ нагревается; наоборот, при адиабатическом расширении внутренняя энергия газа убывает, и газ охлаждается.

Уравнение

$$de + pdv = 0$$

может быть легко проинтегрировано.

Пользуясь уравнением Клапейрона, получим:

$$Jc_v dT + RT \frac{dv}{v} = 0$$

или

$$Jc_v \ln T + R \ln v = \text{const.}$$

Пользуясь (1.17) и (1.20), имеем:

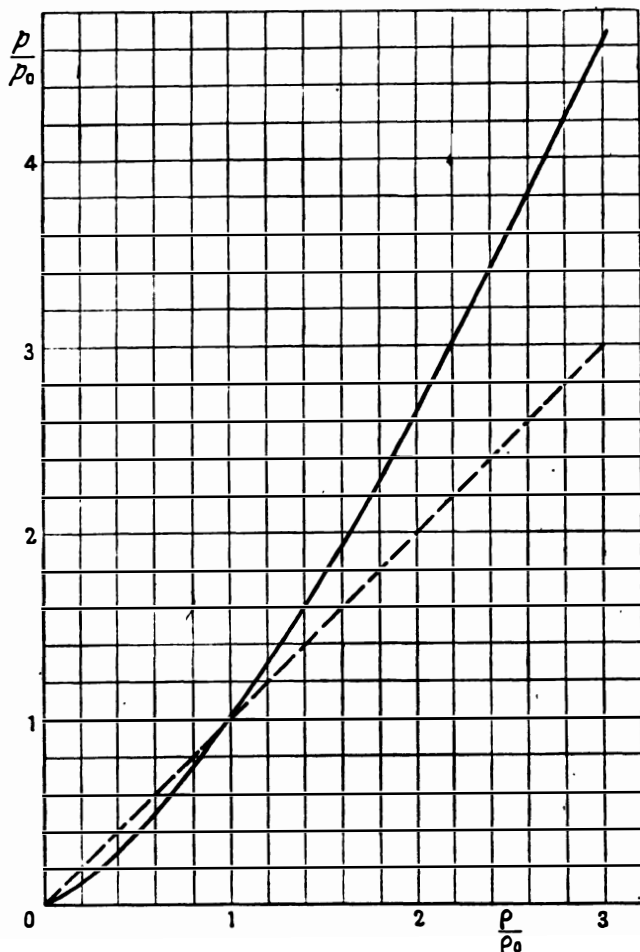
$$\ln T + (\kappa - 1) \ln v = \ln T_0 + (\kappa - 1) \ln v_0.$$

откуда

$$T v^{\kappa-1} = T_0 v_0^{\kappa-1}. \quad (1.24)$$

Принимая во внимание уравнение Клапейрона, можно преобразовать равенство (1.24) к виду

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\kappa} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \quad (1.25)$$



Фиг. 1

На фиг. 1 изображена адиабата для воздуха в координатах $\frac{p}{p_0}$, $\frac{\rho}{\rho_0}$. Пунктиром нанесена изотерма. При адиабате

тическом изменении состояния давление газа с увеличением плотности растет быстрее, чем при изотермическом процессе.

§ 3. Второе начало термодинамики

Первое начало термодинамики устанавливает количественные соотношения, которые имеют место во всяком процессе, сопровождающемся переходом тепловой энергии в механическую и обратно. Однако первого начала недостаточно для полной характеристики процессов, сопровождающихся преобразованием тепловой и механической энергии друг в друга. Оказывается, переход механической энергии в тепловую и переход тепловой энергии в механическую не всегда может при одинаковых условиях протекать одинаковым образом в противоположных направлениях. Взаимное преобразование механической и тепловой энергии подчиняется еще специальному закону, выражающемуся во втором начале термодинамики.

В основание второго начала удобно положить следующий опытный закон:

Невозможно построить периодически действующую машину, вся деятельность которой сводилась бы к поднятию некоторого груза и соответствующему охлаждению теплового резервуара.

Если бы такая машина была построена, она служила бы неограниченным источником механической энергии, позволяя превращать в работу, например, тепло океана или атмосферы.

С другой стороны, легко построить машину, которая производит обратный процесс, т. е. вся деятельность которой сводится к опусканию некоторого груза и к соответствующему нагреванию теплового резервуара.

Примером такой машины может служить аппарат Джауля для определения механического эквивалента тепла, знакомый каждому по упражнениям в физической лаборатории.

Из второго начала непосредственно следует, что процесс, происходящий в опыте Джауля, не может протекать в противоположном направлении—этот процесс не может быть обращен.

Дадим теперь точное определение понятия обратимости процесса.

Рассмотрим какую-нибудь изолированную систему тел, т. е. систему тел, для которой исключен теплообмен с окружающими телами. Любые изменения, происходящие в состоянии такой системы, не отражаются на тепловом состоянии окружающих ее тел.

Пусть A_1 и A_2 будут два каких-нибудь состояния этой системы и пусть существует процесс, переводящий систему из состояния A_1 в состояние A_2 . Если существует другой процесс, переводящий систему из A_2 в A_1 , то оба эти процесса будут обратимы. Если же обратный переход невозможен, при указанном условии относительно изолированности рассматриваемой системы от окружающих тел, то процесс будет необратим.

Примером обратимого процесса может служить процесс квазистатического изменения объема газа без притока тепла извне, т. е. адиабатический процесс. При адиабатическом расширении газ совершает работу за счет внутренней энергии. При адиабатическом сжатии затраченная работа вновь переходит во внутреннюю энергию газа. При этом газ возвращается в первоначальное состояние. Так как теплообмен отсутствует, то тепловое состояние окружающих тел не изменяется.

Рассмотрим случай, когда система состоит из одного тела. Пусть в состоянии A_1 тело имеет объем V_1 и температуру T_1 . В качестве источника механической энергии введем условно груз весом P , находившийся в состоянии A_1 на высоте h_1 , а в состоянии A_2 —на высоте h_2 . Пусть E_1 и E_2 будут соответственно значениями внутренней энергии в состояниях A_1 и A_2 .

Из уравнения сохранения энергии следует, что

$$E_2 - E_1 = P(h_1 - h_2). \quad (1.26)$$

Нам известен один обратимый процесс—это адиабатическое расширение или сжатие.

Попытаемся перевести рассматриваемое тело из состояния A_1 в состояние A_2 при помощи адиабатического процесса. Для этого будем изменять объем этого тела от значения V_1 до V_2 адиабатическим путем. Тогда температура тела станет равной T_2 и внутренняя энергия получит значение E_2 , а груз будет находиться на высоте h_2 . Это состояние системы обозначим A_2 . Если $T_2 = T_1$, то $E_2 = E_1$ и из уравнения (1.26) следует, что $h_2 = h_1$.

В этом случае процесс, при помощи которого система была переведена из состояния A_1 в состояние A_2 ,—обратим.

Если $T_2 < T_1$, то $E_2 < E_1$ и из уравнения (1.26) следует, что $h_2 > h_1$. Для того, чтобы перевести систему из состояния A_2 в состояние A_1 , надо превратить механическую энергию груза в тепло. Это можно осуществить хотя бы при помощи прибора Джауля. Но этот процесс необратим. Если бы нашелся процесс, переводящий систему из состояния A_2 обратно в состояние A_1 , то этот процесс позволил бы обратить процесс в опыте Джауля. Если $T_2 > T_1$, то пе-

переход системы из состояния A_1 в A_2 на этом же основании невозможен. Обратный переход из A_2 в A_1 — необратим.

Таким образом, вопрос о переходе системы из состояния A_1 в состояние A_2 , в рассматриваемом частном случае одного тела, свелся к вычислению температуры T_2 . Для того, чтобы обобщить полученный результат, удобно ввести некоторую специальную величину, являющуюся функцией состояния тела — энтропию, по значениям которой в двух рассматриваемых состояниях системы можно судить о возможности перехода из одного состояния в другое при отсутствии теплообмена с окружающими телами и об обратимости процесса, с помощью которого совершается этот переход.

Рассмотрим уравнение, которое выражает первое начало термодинамики:

$$Jdu = de + pdv. \quad (1.16)$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, не является полным дифференциалом. Однако, как это доказывается в курсах математического анализа, всегда можно найти некоторый множитель — интегрирующий множитель, после умножения на который дифференциальное выражение вида (1.16) обращается в полный дифференциал некоторой функции. Обозначим этот множитель $\frac{1}{N}$ и ограничим его условием $N > 0$. Тогда

$$\frac{du}{N} = \frac{de + pdv}{JN} = dS,$$

где S — некоторая функция от параметров состояния, например, v и T . Эту функцию называют энтропией¹.

Для идеального газа

$$du = c_v dT + \frac{RT}{J} \frac{dv}{v}.$$

Для этого выражения $\frac{1}{T}$ является интегрирующим множителем.

¹ Приведенное определение энтропии не определяет ее однозначным образом. Дифференциальное выражение (1.16) имеет бесчисленное множество интегрирующих множителей. Действительно, если N — интегрирующий множитель, то $N_1 = Nf(S)$, где f — произвольная функция, также будет интегрирующим множителем.

Действительно,

$$dS = \frac{du}{T} = c_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{J} \frac{d\sigma}{\sigma},$$

откуда при $c_v = \text{const}$

$$S = c_v \ln T \sigma^{\gamma-1} + \text{const} \quad (1.27)$$

или, пользуясь уравнением Клапейрона,

$$S = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + \text{const}. \quad (1.28)$$

Из самого определения энтропии следует, что она сохраняет постоянное значение при адиабатическом процессе.

Проследим, как ведет себя энтропия при рассмотренном выше процессе перехода системы из состояния A_1 в состояние A_2 .

При адиабатическом процессе $du = 0$, следовательно,

$$S = \text{const}.$$

Условие обратимости процесса, переводящего систему из A_1 в A_2 , будет, следовательно,

$$S_1 = S_2.$$

При нагревании при постоянном объеме энтропия растет. Действительно, в этом случае $v = \text{const}$:

$$\frac{dS}{dT} = \frac{c_v}{N} > 0.$$

Таким образом, в случае необратимого процесса, переводящего систему из состояния A_1 в состояние A_2 , $S_1 < S_2$. Наконец, условие $S_1 > S_2$ служит критерием невозможности перехода системы из состояния A_1 в состояние A_2 без нарушения теплового состояния каких-то других тел.

Таким образом, для выяснения возможности перехода системы из состояния A_1 в состояние A_2 без теплообмена с другими телами и для выяснения того, будет ли этот процесс обратим или нет, достаточно лишь сравнить значения энтропии в состояниях A_1 и A_2 , т. е. в начальном и конечном состоянии тела.

Можно доказать, что для тела с любым уравнением состояния можно всегда положить $N = T$. Таким образом, выражение

$$dS = \frac{du}{T}$$

может служить общим определением энтропии. Доказательство этого положения приведено ниже.

Рассмотрим теперь случай, когда система состоит из двух тел. Остановимся сначала на описании некоторого специального обратимого процесса. Допустим, что мы имеем два тела. При помощи адиабатического процесса, изменяя состояние каждого тела в отдельности, приведем эти тела к некоторой произвольной, но общей им температуре. После этого приведем оба тела в соприкосновение так, чтобы между ними был возможен теплообмен. При бесконечно медленных изменениях объема каждого из тел, их температура будет оставаться общей (давление при этом вообще будет различным). Эта система будет характеризоваться значениями трех параметров: T и, например, v_1 и v_2 или T и S_1 и S_2 .

Рассмотрим изменения состояния этой системы, происходящие бесконечно медленно, без притока тепла извне. Такой процесс может одинаково хорошо протекать в противоположных направлениях, т. е. будет обратимым. Пусть T' и v'_1 — некоторые произвольные значения температуры и объема. Изменяя обратимым путем рассматриваемую систему, можно перевести первое тело в состояние, при котором оно будет занимать объем v'_1 и иметь при этом температуру T' .

Изменим сначала объем v_1 так, чтобы он совпал с v'_1 ; при этом температура обоих тел изменится. После этого, оставляя объем v'_1 неизменным, будем изменять объем v_2 до тех пор, пока температура этих тел не станет равной T' . После этого разъединим оба тела.

Докажем, что при только что рассмотренном процессе сумма значений энтропий обоих тел остается постоянной. Докажем сперва, что каждому значению энтропии первого тела S_1 будет отвечать всегда только одно определенное значение энтропии второго тела S_2 .

Пусть S_1^0 и S_2^0 будут начальные значения энтропии обоих тел. Пусть какому-то значению S_1 отвечает в одном случае значение S_2 , а в другом S'_2 . Тогда, отделяя первое тело и переводя его из одного состояния в другое адиабатическим путем, что возможно благодаря равенству значений энтропии в обоих состояниях, получим, что рассматриваемая система отличается состоянием лишь одного второго тела. Тогда из условия обратимости процесса следует, что $S_2 = S'_2$.

Таким образом, для рассматриваемого процесса S_1 и S_2 связаны определенной зависимостью, т. е. имеем:

$$f(S_1, S_2) = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial f}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial f}{\partial S_2} dS_2 = 0.$$

С другой стороны, условие отсутствия притока тепла извне можно записать в виде:

$$J(du_1 + du_2) = de_1 + p_1 dv_1 + de_2 + p_2 dv_2 = 0$$

или

$$N_1 dS_1 + N_2 dS_2 = 0.$$

Сравнивая это уравнение и предыдущее, получим:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial S_1}}{\frac{\partial f}{\partial S_2}} = N(S_1, S_2). \quad (1.29)$$

Таким образом, отношение N_1 и N_2 зависит только от S_1 и S_2 . Выберем за параметры, определяющие состояния тел, S и T ; тогда

$$N_1 = N(S_1, T) \quad \text{и} \quad N_2 = N(S_2, T).$$

На основании (1.29) N_1 и N_2 могут иметь лишь следующий вид:

$$\begin{aligned} N_1 &= f_1(S_1) \Phi(T), \\ N_2 &= f_2(S_2) \Phi(T). \end{aligned}$$

Пусть первое тело представляет собой некоторую массу идеального газа. Тогда $N_1 = T$. Следовательно, $N_2 = f_2(S_2)T$, но отсюда следует, что можно вместо N_2 взять T в качестве интегрирующего множителя в уравнении притока тепла для второго тела.

Таким образом, энтропию второго произвольного тела можно также определить выражением

$$dS_2 = \frac{du_2}{T}.$$

Уравнение (1.28) можно тогда переписать в виде

$$dS_1 + dS_2 = 0,$$

откуда для рассматриваемого обратимого процесса

$$S_1 + S_2 = S = \text{const},$$

т. е. сумма энтропий обоих тел сохраняет постоянное значение. Эту сумму называют энтропией системы.

Пусть изолированная система состоит из двух тел. Покажем, что если $S^{(1)} = S^{(2)}$, где $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ — энтропия системы в состояниях A_1 и A_2 , то переход от A_1 к A_2 обратим; если $S^{(2)} > S^{(1)}$, то этот переход необратим, и если $S^{(2)} < S^{(1)}$, то невозможен без нарушения теплового состояния каких-то других тел.

Переведем при помощи указанного выше обратимого адиабатического процесса систему из двух тел в состояние A_2 , при котором первое тело будет находиться в том же состоянии, что в A_1 .

Его энтропия будет $S_1^{(2)}$. При этом энтропия системы осталась неизменной. Но состояния систем A_1 и A_2 отличаются теперь друг от друга состоянием только одного второго тела, следовательно, если

$$S_2^{(2)} = S_2^{(3)},$$

то переход от A_1 к A_2 происходит при помощи обратимого процесса, но в этом случае

$$S^{(1)} = S^{(2)}.$$

Если $S_2^{(2)} > S_2^{(3)}$, то переход от A_1 к A_2 происходит при помощи необратимого процесса, но тогда

$$S^{(2)} > S^{(1)},$$

и, наконец, в случае $S_2^{(2)} < S_2^{(3)}$ и, следовательно, $S^{(2)} < S^{(1)}$ переход системы от состояния A_1 в A_2 невозможен без нарушения состояния каких-нибудь других тел.

Рассмотрим изолированную систему из n тел. Назовем энтропией системы сумму энтропий этих тел. Тогда справедливо следующее утверждение, которое можно рассматривать как общую формулировку второго начала термодинамики: всякий процесс, изменяющий состояние изолированной системы тел, протекает в таком направлении, что энтропия системы при этом или остается постоянной, или увеличивается.

Доказательство этого утверждения вытекает непосредственно из изложенного ранее. Рассмотрим переход системы из состояния A_1 в состояние A_2 . Присоединяя последовательно каждое из $n-1$ тел к оставшемуся с номером n , можно путём обратимого адиабатического процесса перевести систему из состояния A_1 в состояние A_2 , при котором состояния $(n-1)$ тел системы совпадают с соответствующими состояниями при A_2 , а энтропия системы остается неизменной: $S^{(1)} = S^{(2)}$.

Состояния систем A_1 и A_2 отличаются состоянием только одного тела и, следовательно, для возможности перехода от A_1 к A_2 должно быть $S_n^{(3)} \leq S_n^{(2)}$ или, что то же,

$$S^{(1)} = S^{(3)} \leq S^{(2)}.$$

В заключение отметим, что, хотя обратимые процессы, т. е. процессы, при которых энтропия остается неизменной, представляют собой лишь предельные идеальные случаи, их исследование позволяет обычно осветить наиболее важные стороны реальных процессов.

§ 4. Диаграммы состояния

Уравнение Клапейрона выражает изменение состояния совершенного газа. При высоких давлениях и при состояниях, близких к конденсации, газ уже не следует уравнению Клапейрона. Более точно в этих случаях изменение состояния газов описывается уравнением Ван-дер-Ваальса (1.2). Однако и уравнение Ван-дер-Ваальса не всегда достаточно точно. Поэтому приходится пользоваться экспериментальными данными, которые изображают в виде диаграммы состояния. Существует несколько типов диаграмм состояния, в зависимости от того, по каким переменным строить эти диаграммы.

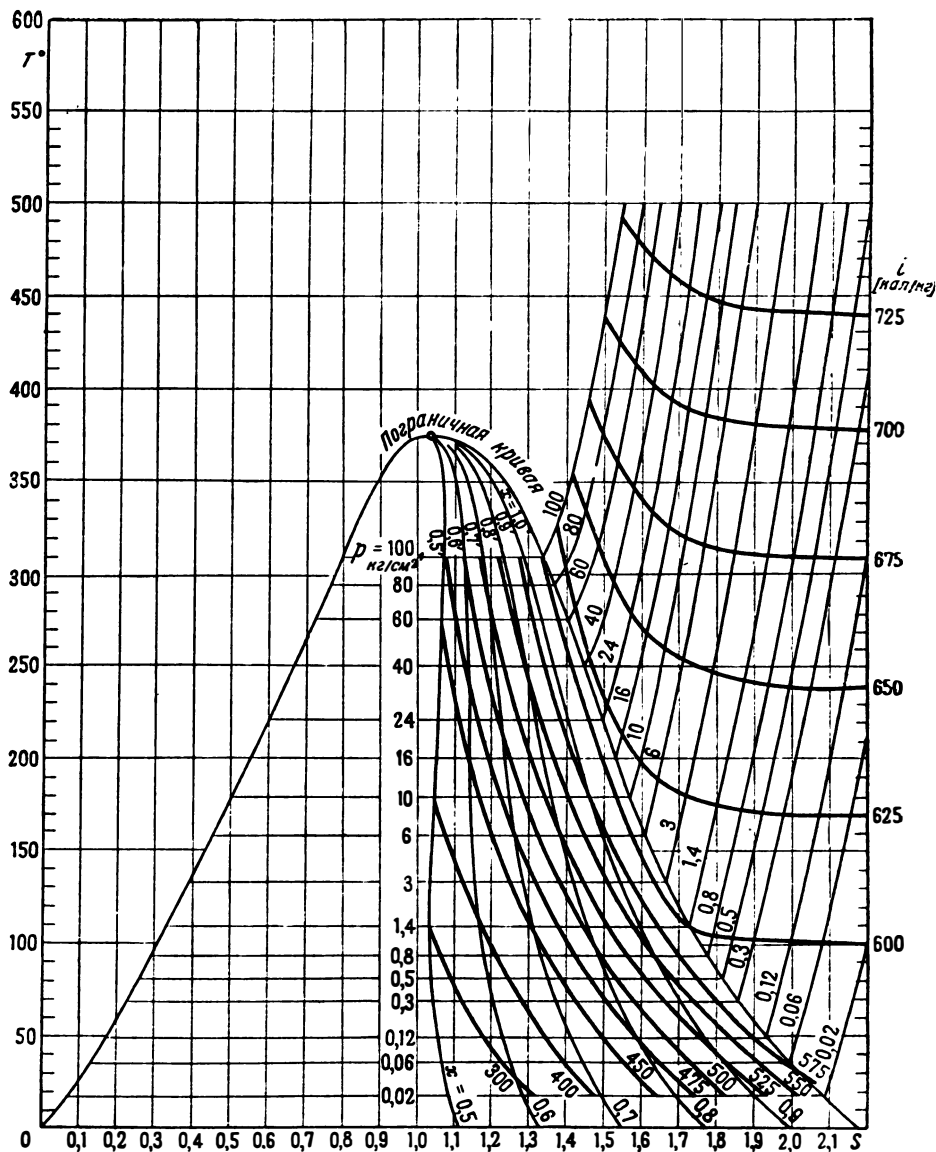
Наиболее часто применяются тепловая диаграмма (TS -диаграмма), в которой по оси абсцисс отсчитывается энтропия, а по оси ординат—температура, и энтропийно-тепловая диаграмма (iS -диаграмма).

На фиг. 2 приведена TS -диаграмма водяного пара. Изотермический процесс изображается на этой диаграмме горизонтальной прямой, а адиабатический процесс ($S = \text{const}$)—вертикальной прямой.

На диаграмме нанесена сетка кривых $p = \text{const}$, $i = \text{const}$ и $x = \text{const}$, где x —паросодержание, т. е. весовая доля пара в смеси.

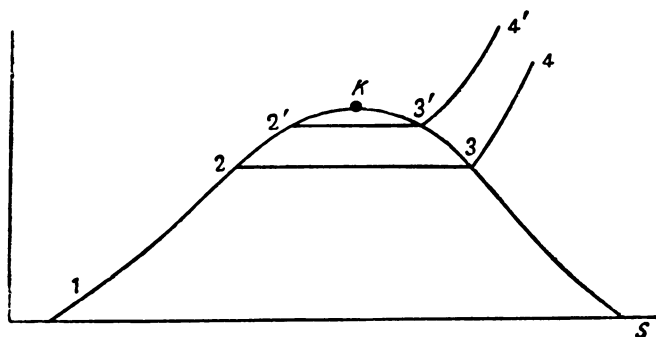
Рассмотрим процесс нагревания воды до температуры кипения, парообразование и перегрев пара при постоянном давлении. Пусть начальное состояние воды отвечает точке 1 (фиг. 3). Нагревание воды до температуры кипения изображается на TS -диаграмме кривой 1—2.

Процесс парообразования происходит при постоянной температуре и изображается отрезком 2—3. На отрезке 2—3 осуществляется постепенный переход от состояния кипения в точке 2 к состоянию сухого пара в точке 3. Между точками 2 и 3 имеет место состояние влажного пара. Перегрев пара при постоянном давлении изображается кривой 3—4.



Фиг. 2

Положение точки 2 определяется температурой кипения. При увеличении давления температура кипения повышается и процесс изобразится отрезками $1-2'-3'-4'$. Давление, при котором точки 2 и 3 совпадают (точка K), называется критическим давлением, а точка K — критической точкой. Если давление воды выше критического, то процесс нагревания при постоянном давлении приводит к образованию перегретого пара, минуя область влажного пара.



Фиг. 3

В приложении дана TS -диаграмма для воздуха. При исследовании течений газов нами везде принято, что c_p , а следовательно, и c_v не зависят от давления, т. е. теплоемкость i и внутренняя энергия e являются функциями только температуры. Величины c_p и c_v приближенно на данном участке температур заменяются их средними значениями.

Из рассмотрения TS -диаграммы для воздуха видно, что в области давлений, меньших 10 атмосфер, и абсолютных температур выше 240° эти допущения дают хорошее приближение.

Вопросы, рассмотренные ниже, относятся именно к этой области температур и давлений.

Значения c_p , c_v и κ для воздуха в широком диапазоне температур и давлений приведены в табл. 6 приложений.

СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ

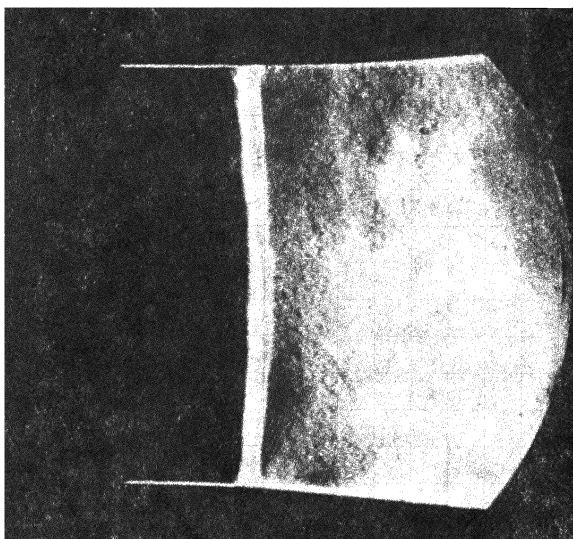
§ 5. Ударная волна

Пусть газ равномерно движется в трубе постоянного поперечного сечения F с некоторой скоростью w_2 и имеет при этом давление p_2 и температуру T_2 . Пусть рассматриваемое течение газа вызвано движением поршня, перемещающегося со скоростью w_2 . Увеличим внезапно скорость поршня от значения w_2 до значения $w_1 > w_2$ и оставим ее затем снова постоянной, равной w_1 . Если бы в трубе двигалась несжимаемая жидкость, то внезапное увеличение скорости поршня мгновенно передалось бы всей массе жидкости, заполняющей трубу. В газе увеличение скорости поршня вызовет сначала сжатие слоя газа, непосредственно прилегающего к поршню, затем этот слой сожмет следующий и т. д. В трубе возникнет и начнет перемещаться по течению волна.

Очень быстро перед поршнем установится равномерное течение со скоростью w_1 , плотностью $\rho_1 > \rho_2$ и давлением $p_1 > p_2$. Наблюдения показывают, что равномерное течение газа со скоростью w_1 , плотностью ρ_1 и давлением p_1 отделяется от невозмущенного еще, первоначального течения лишь очень узкой областью, перемещающейся вдоль трубы со скоростью $\Theta > w_2$. В этой узкой области скорость, давление и плотность газа изменяются почти внезапно от значений w_2 , p_2 и ρ_2 до значений w_1 , p_1 и ρ_1 . Эта область резкого изменения давления, плотности и скорости газа, бегущая вдоль трубы со скоростью Θ , называется ударной волной.

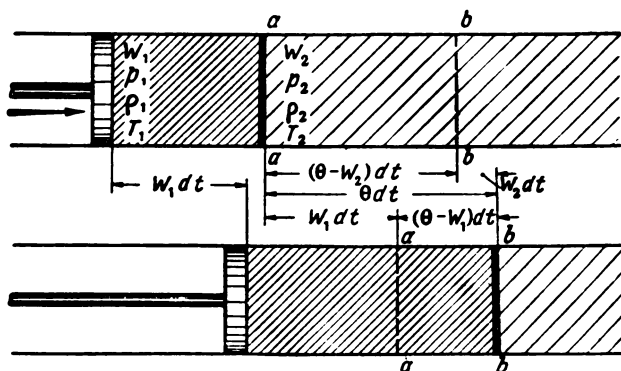
Опыты показывают, что протяжение ударной волны весьма невелико. На фиг. 4 показан снимок ударной волны в расширяющемся сопле. Изображение ударной волны на снимке размыто из-за колебаний волны и недостаточно малой экспозиции снимка. Схематизируя явление, можно пренебречь протяжением ударной волны и считать, что изменение скорости, температуры, давления и плотности газа происходит в некотором сечении внезапно, скачком. Тогда ударная волна будет заменена бегущим вдоль трубы прерывным фронтом, отделяющим две различные области течения (фиг. 5).

Составим уравнения, определяющие движение ударной волны. Это будет уравнение сохранения массы (уравнение



Фиг. 4

неразрывности), уравнение изменения количества движения и, наконец, уравнение, выражающее закон сохранения энергии.



Фиг. 5

Пусть скорость распространения ударной волны в трубе равна θ . Скорость распространения волны относительно

газа, находящегося перед волной, будет $\Theta - w_2$. Масса газа, через которую пройдет волна за время dt , будет

$$dM = (\Theta - w_2) dt F \rho_2.$$

Скорость распространения волны относительно газа, находящегося за волной, будет $\Theta - w_1$. В конце промежутка времени dt , в течение которого ударная волна пролетает через рассматриваемую массу газа dM , частицы, в начальный момент находившиеся на фронте ударной волны, окажутся на расстоянии $(\Theta - w_1)dt$ от ее фронта.

Плотность сжатого газа за ударной волной будет ρ_1 , и, следовательно, рассматриваемая масса

$$dM = (\Theta - w_1) dt F \rho_1.$$

Приравнявая оба эти выражения, получим уравнение сохранения массы

$$(\Theta - w_1) \rho_1 = (\Theta - w_2) \rho_2. \quad (2.1)$$

Запишем теперь для той же массы газа уравнение изменения количества движения. Приравнявая изменение количества движения импульсу сил давления, имеем:

$$\rho_2 (\Theta - w_2) (w_1 - w_2) = p_1 - p_2. \quad (2.2)$$

Составим для этой же массы газа уравнение сохранения энергии. Из закона сохранения энергии следует, что работа сил давления должна быть равна приращению внутренней и кинетической энергии газа.

Принимая во внимание выражение (1.19) для внутренней энергии совершенного газа, получим:

$$p_1 w_1 - p_2 w_2 = \left[J c_v (T_1 - T_2) + \frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} \right] \rho_2 (\Theta - w_2). \quad (2.3)$$

К уравнениям (2.1), (2.2) и (2.3) надо еще присоединить уравнение состояния

$$p = \rho R T.$$

Таким образом, уравнения (2.1), (2.2) и (2.3) связывают семь величин: Θ , w_1 , w_2 , p_1 , p_2 , ρ_1 и ρ_2 . Если даны величины, определяющие течение газа перед ударной волной, то, зная скорость движения поршня, можно полностью определить ударную волну.

Преобразуем полученные уравнения. Из (2.1) имеем:

$$\Theta = \frac{w_1 \rho_1 - w_2 \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}. \quad (2.4)$$

Исключая скорость распространения Θ из уравнений (2.2) и (2.3), получим

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} (w_1 - w_2)^2 \quad (2.5)$$

и

$$\begin{aligned} \rho_1 w_1 - \rho_2 w_2 = & \left[\frac{1}{x-1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_1} - \frac{\rho_2}{\rho_2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} \right] \frac{\rho_1 - \rho_2}{w_1 - w_2}. \end{aligned}$$

Последнее уравнение преобразуется к виду:

$$\frac{(w_1 - w_2)^2}{2} (\rho_1 + \rho_2) = \frac{1}{x-1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_1} - \frac{\rho_2}{\rho_2} \right) (\rho_1 - \rho_2).$$

Исключая с помощью уравнения (2.5) разность скоростей, имеем:

$$\frac{(\rho_1 + \rho_2)(\rho_1 - \rho_2)}{2\rho_1\rho_2} = \frac{1}{x-1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_1} - \frac{\rho_2}{\rho_2} \right),$$

откуда

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{(x+1)\rho_1 - (x-1)\rho_2}{(x+1)\rho_2 - (x-1)\rho_1}. \quad (2.6)$$

Это уравнение связывает значения плотности и давления перед фронтом и позади фронта ударной волны и характеризует процесс сжатия газа в ударной волне.

Пользуясь полученными уравнениями, рассмотрим прежде всего распространение ударной волны с бесконечно малым изменением скорости, давления и температуры. Полагая

$$w_2 = w, \quad \rho_2 = \rho, \quad p_2 = p,$$

$$w_1 = w + dw, \quad \rho_1 = \rho + d\rho, \quad p_1 = p + dp,$$

получим из (2.4) и (2.5):

$$\Theta = w + \rho \frac{dw}{d\rho}$$

и

$$dp d\rho = \rho^2 dw^2,$$

откуда

$$\Theta = w + \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (2.7)$$

Скорость распространения бесконечно малого возмущения складывается из скорости самого потока газа и из скорости распространения возмущения по отношению к частицам газа. Скорость распространения бесконечно малого возмущения в газе есть скорость звука. Скорость звука обозначим буквой a . Из уравнения (2.7) для скорости распространения звука имеем:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (2.8)$$

Из уравнения (2.6) получим:

$$\frac{dp}{p} = \kappa \frac{d\rho}{\rho} \quad (2.9)$$

Для скорости распространения звука имеем, следовательно,

$$a = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa RT} = \sqrt{\kappa gRT} \quad (2.10)$$

Таким образом, скорость распространения звука в газе зависит только от природы газа и его абсолютной температуры.

Для скорости распространения звука в воздухе, выраженной в метрах в секунду, имеем:

$$a = \sqrt{1,4 \cdot 9,81 \cdot 29,3} \sqrt{T} = 20,1 \sqrt{T} \text{ [м/сек]}. \quad (2.11)$$

В частности, скорость распространения звука при нуле градусов Цельсия равна 332 м/сек.

Дифференцируя уравнение адиабаты

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa,$$

получим уравнение (2.9). Следовательно, можно сказать, что распространение бесконечно малой звуковой волны сопровождается адиабатическим сжатием газа.

Для ударной волны с конечным изменением давления, значения плотности и давления после происхождения ударной волны связаны уже не уравнением адиабаты, а уравнением (2.6). Это уравнение называют иногда уравнением ударной адиабаты [5].

Сравним кривую (2.6) и адиабату вблизи точки $\rho = \rho_2$,
 $p = p_2$.

Обозначая

$$\rho_1 = \rho_2 + \Delta\rho,$$

получим

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_{ад} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^x = 1 + x \frac{\Delta\rho}{\rho_2} + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho_2}\right)^2 + \\ + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho_2}\right)^3 + \dots$$

Для ударной адиабаты

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{(x+1)\rho_1 - (x-1)\rho_2}{(x+1)\rho_2 - (x-1)\rho_1} = 1 + x \frac{\Delta\rho}{\rho_2} + \frac{x(x-1)}{2} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho_2}\right)^2 + \\ + \frac{x(x-1)^2}{4} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho_2}\right)^3 + \dots$$

Эти разложения отличаются друг от друга, начиная лишь с членов, содержащих $\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_2}\right)^3$. Кривая (2.6) и адиабата не только касаются в точке $p = p_2$, $\rho = \rho_2$, но имеют в этой точке общую кривизну.

Так как разность

$$\frac{x(x-1)^2}{4} - \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{x(x-1)(x+1)}{12} > 0,$$

то при $\Delta\rho > 0$ будет $p_1 > p_{1 ад}$, а при $\Delta\rho < 0$ будет $p_1 < p_{1 ад}$, где p_1 — ордината ударной адиабаты, а $p_{1 ад}$ — ордината адиабаты.

На фиг. 6 в логарифмическом масштабе показана кривая (2.6), проходящая через точку p_2, ρ_2 , и пунктиром — адиабата, проходящая через ту же точку.

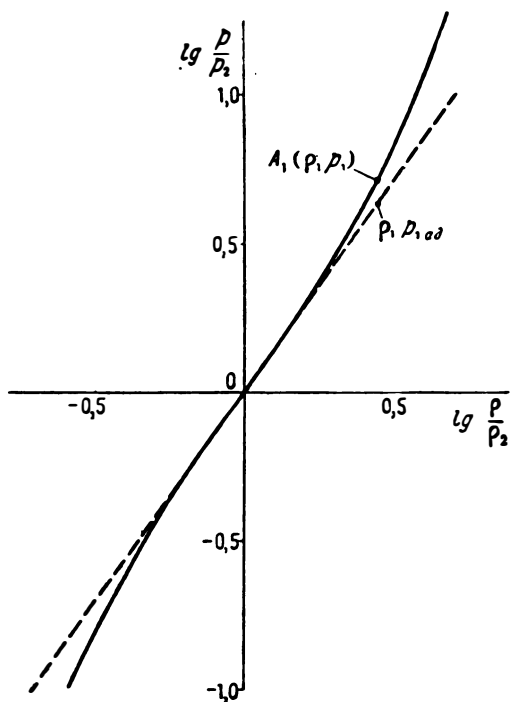
Если состояние газа до прохождения ударной волны изображалось точкой $O(p_2, \rho_2)$, то состояние газа после прохождения ударной волны изображается точкой $A_1(p_1, \rho_1)$, расположенной на ударной адиабате.

Сравним значения энтропии в этих двух точках. Имеем

$$S = c_v \ln \frac{p}{\rho^x} + \text{const.}$$

Из фиг. 6 видно, что для точек ударной адиабаты при $\rho_1 > \rho_2$ справедливо неравенство

$$\frac{\rho_1}{\rho_1^x} > \frac{\rho_{1 \text{ ад}}}{\rho_1^x} = \frac{\rho_2}{\rho_2^x}.$$



Фиг. 6

Следовательно,

$$S_1 - S_2 > 0.$$

Процесс сжатия газа в ударной волне необратим. В случае ударной волны разрежения энтропия уменьшилась бы. Так как в данном случае рассматриваемая масса газа не испытывает теплообмена с внешней средой, то это противоречило бы второму началу термодинамики. Отсюда следует, что распространение прерывной волны разрежения в газе невозможно. Это заключение согласуется с наблюдениями. Если внезапно уменьшить скорость поршня так, что $\omega_1 < \omega_2$, то не возникает прерывной волны разрежения, а образуется некоторое, более сложное, и уже не скачкообразное движение. Таким образом, можно сделать следующее общее заключение.

Ударных волн разрежения при отсутствии извне притока тепла не существует. Процесс сжатия газа в ударной волне необратим.

Приведем зависимость приращения энтропии в ударной волне от относительного уплотнения газа. Имеем

$$S_1 - S_2 = c_v \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^x.$$

Пользуясь формулой (2.6), получим:

$$S_1 - S_2 = c_v \frac{x^3 - x}{12} \left(\frac{\Delta \rho}{\rho_2} \right)^3 \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\Delta \rho}{\rho_2} + \dots \right]. \quad (2.12)$$

Из этого выражения следует, что при малых значениях $\frac{\Delta \rho}{\rho_2}$ приращение энтропии в ударной волне пропорционально кубу относительного уплотнения. В малых ударных волнах приращение энтропии очень невелико.

§ 6. Скачок уплотнения

Остановимся теперь на том случае ударной волны, когда ее фронт остается неподвижным по отношению к стенкам трубы. Это может произойти, когда ударная волна бежит против течения и скорость этого течения настолько велика, что равна скорости распространения ударной волны по отношению к частицам газа. Такую неподвижную ударную волну называют скачком уплотнения.

Образование ударной волны, распространяющейся против течения, можно представить себе следующим образом: пусть течение в трубе вызвано поршнем, перемещающимся со скоростью w_2 и не толкающим, а засасывающим газ за собой. Если внезапно замедлить скорость поршня, то перед поршнем возникает ударная волна сжатия, которая будет распространяться против течения.

Для скачка уплотнения уравнения (2.1), (2.2) и (2.3) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} w_1 \rho_1 - w_2 \rho_2 &= 0, \\ p_1 - p_2 &= -\rho_2 w_2 (w_1 - w_2), \\ p_1 w_1 - p_2 w_2 &= -\rho_2 w_2 \left[\frac{1}{x-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Исключим из этих уравнений ρ_1 и p_1 .

Для этого сначала преобразуем последнее уравнение. Так как

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{a_1^2}{x}, \quad \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{a_2^2}{x},$$

где a_1 и a_2 — скорость звука в областях, отделенных ударной волной, то, пользуясь первым уравнением (2.13), получим:

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{x-1} = \frac{w_2^2}{2} + \frac{a_2^2}{x-1}. \quad (2.14)$$

Следовательно, при переходе через скачок уплотнения величина

$$\frac{w^2}{2} + \frac{a^2}{x-1} = C \quad (2.15)$$

остаётся постоянной. Физическое значение этой постоянной будет выяснено ниже. Определяя из первых двух уравнений (2.13) ρ_1 и ρ_2 и подставляя полученное значение в последнее уравнение (2.13), имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{x-1} (w_1 - w_2) (\rho_2 - \rho_2 w_1 w_2) = \\ & = - \frac{w_2 \rho_2}{2} (w_1 + w_2) (w_1 - w_2). \end{aligned}$$

Так как

$$w_1 \neq w_2,$$

то

$$w_1 w_2 = \frac{2(x-1)}{x+1} \left(\frac{w_2^2}{2} + \frac{a_2^2}{x-1} \right) = \frac{2(x-1)}{x+1} C.$$

Постоянную C представим в виде

$$C = \frac{x+1}{2(x-1)} a_*^2,$$

где a_* — новая постоянная; тогда

$$w_1 w_2 = a_*^2. \quad (2.16)$$

Из этой формулы можно найти скорость после скачка уплотнения, если известна скорость газа до скачка.

Первые два уравнения (2.13) дают для давления и плотности следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p_2 + \rho_2 (w_2^2 - a_*^2), \\ \rho_1 &= \rho_2 \frac{w_2^2}{a_*^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Выше было показано, что возможны только ударные волны, сопровождающиеся уплотнением газа. Отсюда следует, что существуют только скачки уплотнения.

Так как $p_1 > p_2$, то из уравнения (2.17) следует, что

$$w_2 > a_*,$$

а из уравнения (2.16), — что

$$w_1 < a_*.$$

Таким образом, при переходе через скачок плотность и давление газа внезапно увеличиваются, а его скорость внезапно падает.

Покажем сейчас, что скачок уплотнения может образоваться лишь в потоке, скорость которого больше скорости звука. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим подробнее зависимость скорости распространения ударной волны от ее интенсивности.

Из (2.4) имеем:

$$\Theta = \frac{w_1 \rho_1 - w_2 \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = w_2 + \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} (w_1 - w_2),$$

откуда, пользуясь (2.5), получим:

$$\Theta = w_2 + \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}}.$$

Так как w_2 , ρ_2 и p_2 характеризуют заданное течение, то ударная волна определяется значением одного из параметров ρ_1 , p_1 или w_1 . Рассмотрим скорость распространения Θ , как функцию плотности. Так как возможны лишь ударные волны уплотнения, то $\rho_1 > \rho_2$. При $\rho_1 = \rho_2$ скорость распространения ударной волны относительно частиц воздуха равна скорости звука. Покажем, что с ростом отношения значений плотности $\frac{\rho_1}{\rho_2}$, т. е. с ростом интенсивности удар-

ной волны, скорость ее распространения относительно частиц газа увеличивается. Действительно, исключая из по-

следнего уравнения $(p_1 - p_2)$ при помощи уравнения (2.6), получим:

$$\Theta = w_2 + a_2 \sqrt{\frac{2}{(x+1) \frac{\rho_2}{\rho_1} - (x-1)}}. \quad (2.18)$$

Так как с увеличением $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ множитель

$$\sqrt{\frac{2}{(x+1) \frac{\rho_2}{\rho_1} - (x-1)}}$$

возрастает, а при $\rho_1 = \rho_2$ он равен единице, то с увеличением отношения $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ скорость распространения ударной волны относительно частиц газа растет; наименьшая скорость распространения ударной волны в газе есть скорость звука.

Максимальное уплотнение газа, соответствующее ударной волне, распространяющейся с бесконечной скоростью, равно

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{x+1}{x-1}.$$

Давление в ударной волне при этом бесконечно велико.

Для воздуха максимальное теоретически возможное уплотнение

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = 6.$$

Для образования прямого скачка уплотнения скорость потока w_2 должна быть равна по величине и противоположна по направлению скорости ударной волны. Следовательно, скачок уплотнения может образоваться лишь в сверхзвуковом потоке и его интенсивность возрастает с ростом скорости потока.

§ 7. Распространение волны сжатия и волны разрежения. Образование ударной волны¹

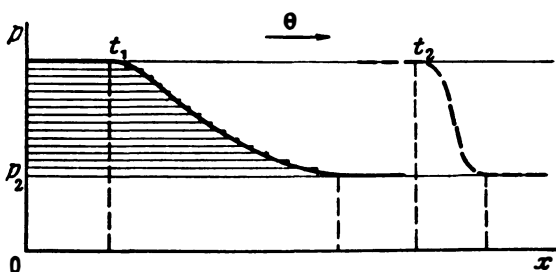
Скачки уплотнения играют большую роль в газовой динамике, поэтому интересно выяснить более детально процесс их возникновения.

¹ Этот параграф приведен с целью пояснения процесса возникновения скачка уплотнения и может быть опущен читателем без ущерба для понимания дальнейшего текста.

Как было показано выше, скачок уплотнения надо рассматривать как ударную волну, остановленную встречным течением. Поэтому естественно, что для понимания процесса возникновения скачка уплотнения надо изучить процесс образования ударной волны. Некоторое представление об этом сложном явлении можно получить, изучая волну сжатия, которая образуется в трубе при постепенном увеличении скорости движения поршня от значения w_2 до некоторого другого значения $w_1 > w_2$. При резком увеличении скорости поршня, т. е. при очень больших ускорениях, эта волна быстро обращается в ударную волну.

Допустим, что увеличение скорости поршня происходит последовательными скачками каждый раз на очень малую величину. Тогда в трубе будет наблюдаться следующая картина.

По невозмущенному течению начнет распространяться малая ударная волна. При следующем небольшом увеличении скорости поршня по новому равномерному течению сжатого газа, возникшему за фронтом первой небольшой ударной волны, начнет распространяться вторая ударная волна; при следующем увеличении скорости поршня по этой волне начнет распространяться следующая волна и т. д. Через некоторое время, в какой-то момент, распределение давления в трубе будет иметь вид, изображенный на фиг. 7. Допустим теперь, что мы непрерывно увеличиваем число малых ударных волн, уменьшая одновременно интенсивность каждой из них. Мы получим волну, вызванную непрерывным изменением скорости поршня, как результат последовательного наложения бесконечно малых волн.



Фиг. 7

Для определения увеличения плотности, скорости и давления, вызванных бесконечно малой волной уплотнения, мы получили в предыдущем параграфе уравнения

$$\frac{dp}{p} = \kappa \frac{d\rho}{\rho} \quad \text{и} \quad dp d\rho = \rho^2 dw^2.$$

Для скорости распространения этой волны было получено выражение:

$$\Theta = w + \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}.$$

Интегрируя первое из этих уравнений, получим связь между давлением и плотностью в распространяющейся волне сжатия. Имеем:

$$\frac{p}{p_2} = \left(\frac{\rho}{\rho_2}\right)^\kappa.$$

Отсюда следует, что при постепенном увеличении скорости поршня газ будет сжиматься адиабатически.

Из второго уравнения, пользуясь найденным соотношением между давлением и плотностью, получим:

$$dw = \sqrt{x \frac{p_2}{\rho_2^\kappa} \rho^{\frac{\kappa-3}{2}}} d\rho.$$

В этой формуле перед корнем надо сохранить знак плюс, так как мы рассматриваем волну, распространяющуюся в сторону направления течения, и увеличение скорости поршня связано с увеличением плотности газа перед ним.

Интегрируя полученное уравнение, имеем:

$$w = w_2 + \frac{2}{\kappa - 1} a_2 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{2}} - 1 \right],$$

где

$$a_2 = \sqrt{x \frac{p_2}{\rho_2}}.$$

Для скорости распространения данного значения отношения плотностей, равного $\frac{\rho}{\rho_2}$, получим:

$$\Theta = w + a_2 \left(\frac{\rho}{\rho_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{2}}$$

или

$$\Theta = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} a_2 \left(\frac{\rho}{\rho_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{2}} - \left(\frac{2}{\kappa - 1} a_2 - w_2\right).$$

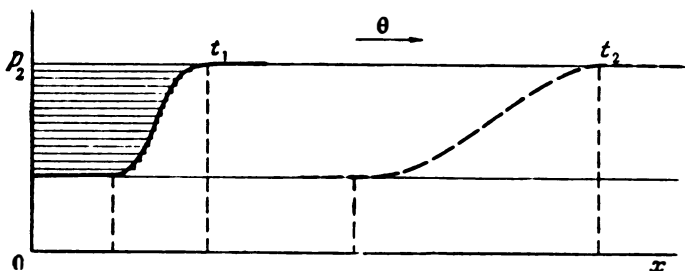
Из этого уравнения видно, что большая плотность распространяется с большей скоростью. Вследствие этого с

течением времени распределение давления, изображенное на фиг. 7 в момент t_1 , изменится так, что расстояние между фронтом волны и местом, где давление равно p , уменьшится, а изменение давления на этом участке станет резче, поэтому в момент $t_2 > t_1$ волна деформируется и приобретает вид, показанный на фиг. 7 справа. Таким образом, волна сжатия будет становиться все более крутой и будет приближаться к ударной волне.

В некоторый момент волна сжатия распадается на ударную волну и на волну разрежения, бегущую против течения. Может образоваться и более сложная система волн.

Только что рассмотренный процесс распространения волны сжатия качественно хорошо объясняет механизм возникновения ударной волны и показывает, что ударная волна является устойчивым образованием, так как волны сжатия при своем распространении имеют тенденцию к переходу в ударную волну. Уравнение ударной волны нельзя получить из уравнения волны сжатия при рассмотренной выше схеме, так как в процессах изменения, вызываемых ударной волной, существенную роль играют силы внутреннего трения и теплообмен.

Если вместо того, чтобы увеличить скорость поршня, мы будем, наоборот, ее уменьшать, то в трубе будет распространяться волна разрежения. Схема образования такой волны показана на фиг. 8. На этой фигуре изображено распределение давления вдоль волны в некоторый момент времени t_1 . Так как большая плотность распространяется с большей скоростью, то волна разрежения будет иметь тенденцию к постепенному сглаживанию. На фиг. 8 пунктиром показано распределение давления вдоль волны в момент $t_2 > t_1$. С течением времени волна разрежения растянется вдоль трубы и станет весьма пологой.



Фиг. 8

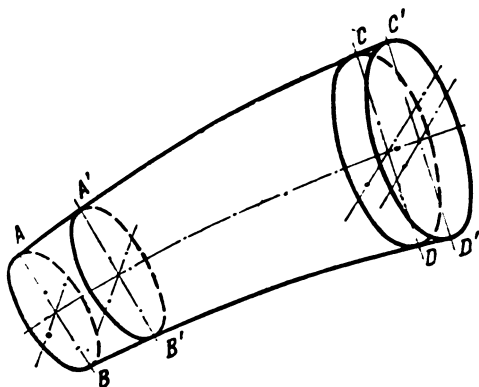
Из сказанного следует, что если бы при внезапном уменьшении скорости поршня возникла ударная волна разрежения, то она не была бы устойчива и сейчас же превратилась бы в непрерывную волну, которая с течением

времени становилась бы все более пологой. Проведенное выше рассмотрение с новой стороны поясняет причину невозможности существования ударной волны разрежения.

§ 8. Уравнение Бернулли—Сен-Венана

Составим уравнение сохранения энергии для течения газа в трубе переменного сечения.

Рассмотрим установившееся течение газа в трубе между двумя сечениями: AB и CD (фиг. 9).



Фиг. 9

Предположим сначала, что через боковую поверхность трубы газу не сообщается ни тепловая, ни механическая энергия. Это будет иметь место, например, в случае, если труба имеет неподвижные твердые стенки с тепловой изоляцией. Предположим также, что в плоскости поперечных сечений AB и CD теплообмен между соседними массами газа и работа сил трения пренебрежимо малы. Относительно течения газа между сечениями AB и CD не будем делать никаких особых предположений. Струя газа между этими сечениями может испытывать внезапные расширения, повороты, обтекать различные неподвижные препятствия; в струе могут образовываться скачки уплотнения и т. д.

Применим уравнение энергии к массе газа, заключенной в момент t между сечениями AB и CD . В момент $t + dt$ эта масса газа переместится в положение $A'B'C'D'$ (фиг. 9). Изменение энергии рассматриваемой массы газа за время dt равно разности внутренней и кинетической энергии газа в объемах $A'B'C'D'$ и $ABCD$. Так как течение установившееся, эта разность равна энергии газа в объеме $CDC'D'$ минус энергия газа в объеме $ABA'B'$. Отметим ин-

дексом „1“ величины, относящиеся к сечению AB , и индексом „2“ — величины, относящиеся к сечению CD . Для приращения энергии получим тогда выражение:

$$\left(\frac{w_2^2}{2} + Jc_v T_2\right) F_2 w_2 \rho_2 dt - \left(\frac{w_1^2}{2} - Jc_v T_1\right) F_1 w_1 \rho_1 dt.$$

Количество газа, протекающее через сечение трубы в единицу времени, называется расходом газа. При установившемся движении расход газа постоянен как во времени, так и по длине трубы.

Обозначим расход газа через Q :

$$Q = F_1 \rho_1 w_1 = F_2 \rho_2 w_2.$$

Так как приток тепла извне отсутствует, то приращение энергии газа должно равняться работе внешних сил. По предположению, работа внешних сил на стенках трубы равна нулю. Остается работа сил давления в сечениях AB и CD . Эта работа равна

$$p_1 F_1 w_1 dt - p_2 F_2 w_2 dt.$$

Приравнявая приращение энергии работе сил давления и разделив обе части равенства на Qdt , получим:

$$\frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2} + Jc_v (T_2 - T_1) = \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}.$$

Так как

$$\frac{p}{\rho} = RT = J(c_p - c_v) T,$$

имеем

$$\frac{w_1^2}{2} + Jc_p T_1 = \frac{w_2^2}{2} + Jc_p T_2. \quad (2.19)$$

Выразим температуру газа через скорость звука. Квадрат скорости звука (2.10) равен

$$a^2 = \kappa RT = (\kappa - 1) Jc_p T. \quad (2.20)$$

Уравнение (2.19) можно, следовательно, представить в виде

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{\kappa - 1} = \frac{w_2^2}{2} + \frac{a_2^2}{\kappa - 1}.$$

Мы получили уже знакомое ранее уравнение (2.15).

Полученное уравнение можно применить к любым сечениям трубы. Следовательно, в случае отсутствия притока извне тепла и механической энергии, величина

$$\frac{w^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa - 1} = \frac{w^2}{2} + J c_p T$$

остаётся постоянной по длине трубы. Эту величину назовём условно „энергией течения“.

Уравнение

$$\frac{w^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa - 1} = \frac{w^2}{2} + J c_p T = \text{const} \quad (2.21)$$

называется уравнением Бернулли—Сен-Венана; из него следует, что с изменением скорости газа изменяется и его температура.

Постоянную в правой части уравнения можно выразить через различные физические величины, например, через температуру торможения. Температурой торможения называют температуру газа при скорости, равной нулю (например, температуру в котле, из которого вытекает газ), и обозначают T_0 . Уравнение Бернулли—Сен-Венана можно тогда записать в виде

$$\frac{w^2}{2} + J c_p T = J c_p T_0. \quad (2.22)$$

Вдоль по течению скорость звука изменяется вместе со скоростью потока. В каком-то сечении трубы скорость потока и скорость звука могут быть равны. Скорость потока, равную скорости звука, называют критической скоростью. Критическую скорость обозначают a_* .

Имеем

$$\frac{w^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa - 1} = \frac{a_*^2 (\kappa + 1)}{2(\kappa - 1)}. \quad (2.23)$$

Формула (2.16) для прямого скачка уплотнения показывает, что произведение скоростей потока до и после скачка уплотнения равно квадрату критической скорости.

Температура торможения и критическая скорость являются важнейшими характеристиками течений газа.

Сравнивая правые части уравнений (2.22) и (2.23), получим выражение критической скорости через температуру торможения:

$$\begin{aligned} a_* &= \sqrt{2 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} J c_p T_0} = \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1} a_0^2} = \\ &= \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa + 1} g R T_0}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Для воздуха при $\kappa = 1,40$ и $\bar{R} = 29,27$ м/град имеем

$$a_* = 18,3 \sqrt{T_0} [\text{м/сек}].$$

Отношение скорости к критической скорости назовем „приведенной скоростью“ и обозначим λ . Имеем

$$\lambda = \frac{w}{a_*}. \quad (2.25)$$

Уравнение Бернулли—Сен-Венана, пользуясь приведенной скоростью и температурой торможения, можно еще представить в таком виде:

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2. \quad (2.26)$$

Уравнение (2.26) определяет изменение отношения абсолютной температуры газа к температуре торможения, в зависимости от приведенной скорости.

В газовой динамике теперь пользуются двумя безразмерными параметрами, определяющими скорость. Одним из них является число λ ; часто также пользуются другим параметром—числом M (числом Маха). Число M равно отношению скорости в какой-нибудь точке потока к скорости звука в этой же точке. Имеем

$$M = \frac{w}{a}.$$

Между числами λ и M существует зависимость, вытекающая из уравнения Бернулли—Сен-Венана.

Поделив обе части уравнения (2.23) на w^2 , получим

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{(\kappa - 1) M^2} = \frac{2(\kappa + 1)}{(\kappa - 1) \lambda^2}$$

или

$$1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2 = \frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2}, \quad (2.27)$$

откуда имеем

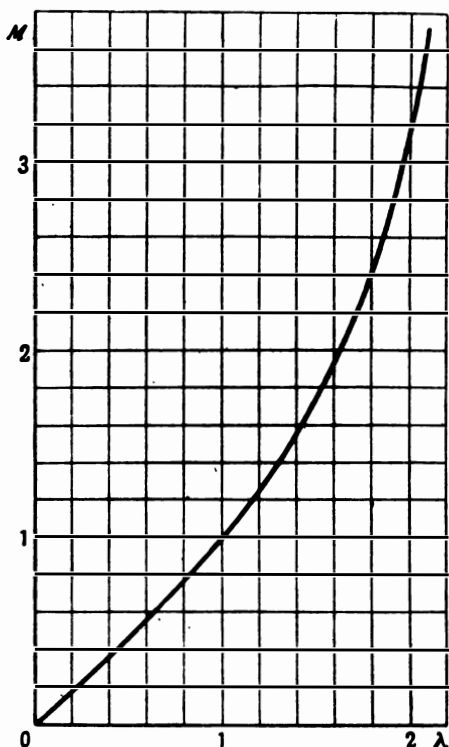
$$M = \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}} \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2}}, \quad (2.28)$$

и обратно

$$\lambda = \sqrt{\frac{\kappa + 1}{2}} \frac{M}{\sqrt{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2}}. \quad (2.29)$$

Функция (2.28) изображена графически на фиг. 10, значения ее приведены в табл. 2, 3 и 4 приложения. Пользуясь формулой (2.27), изменение температуры потока можно выразить через изменение числа M . Имеем

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{x-1}{2} M^2. \quad (2.30)$$



Фиг. 10

Составим теперь уравнение энергии в общем виде при наличии притока механической и тепловой энергии. Механическая энергия может быть сообщена газу компрессором, находящимся между рассматриваемыми сечениями трубопровода, а также может быть работой сил инерции, если трубопровод вращается.

Тепло может быть сообщено газу путем сжигания в нем топлива или путем теплопередачи через стенки трубы. Обозначим механическую работу, сообщенную газу между сечениями AB и CD в единицу времени, через N , а количество тепла — через U . Приравняв работу внешних сил

и приток тепла изменению внутренней и кинетической энергии газа, получим

$$\begin{aligned} p_1 F_1 w_1 dt - p_2 F_2 w_2 dt + N dt + J U dt = \\ = \left(\frac{w_2^2}{2} + J c_v T_2 \right) F_2 w_2 \rho_2 dt - \left(\frac{w_1^2}{2} + J c_v T_1 \right) F_1 w_1 \rho_1 dt. \end{aligned}$$

Разделив обе части равенства на

$$Q dt = F_1 \rho_1 w_1 dt = F_2 \rho_2 w_2 dt,$$

получим

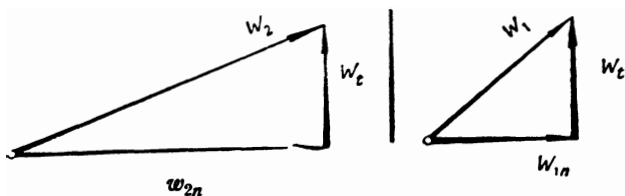
$$\left(\frac{w_2^2}{2} + J c_p T_2 \right) - \left(\frac{w_1^2}{2} + J c_p T_1 \right) = \frac{N}{Q} + \frac{J U}{Q}. \quad (2.31)$$

Это уравнение будет использовано в дальнейшем при исследовании работы диффузоров, турбин, компрессоров, камер сгорания и т. д.

§ 9. Косые скачки уплотнения

В § 5 были рассмотрены ударные волны, плоскость которых была направлена перпендикулярно направлению скорости течения. Такие волны распространяются либо прямо по течению, либо прямо против течения. Очевидно, ударные волны могут быть направлены и под некоторым углом к направлению течения, причем форма волны может быть произвольной. Ограничимся рассмотрением случая, когда ударная волна плоская.

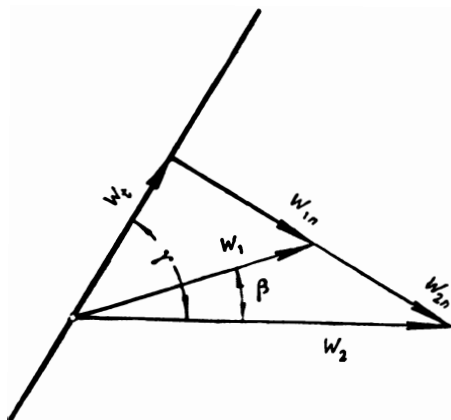
Пусть в пространстве существует равномерное течение и в нем распространяется плоская ударная волна, плоскость которой перпендикулярна направлению этого течения (фиг. 11). Законы распространения такой волны рассмотрены выше.



Фиг. 11

Обозначим скорость потока перед ударной волной w_{2n} , а после ударной волны w_{1n} . Скорость распространения ударной волны обозначим θ . Наложим теперь на рассматриваемое течение равномерное течение со скоростью w_t , направленное параллельно плоскости ударной волны (фиг. 11).

Плоскость ударной волны будет составлять тогда угол γ с направлением потока, в котором она распространяется (фиг. 12).



Фиг. 12

Уравнения распространения волны будут уравнения (2.5) и (2.6), которые запишутся теперь в виде:

$$\Theta = \frac{w_{1n}\rho_1 - w_{2n}\rho_2}{\rho_1 - \rho_2},$$

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 - \rho_2} (w_{1n} - w_{2n})^2,$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{(x+1)\rho_1 - (x-1)\rho_2}{(x+1)\rho_2 - (x-1)\rho_1},$$

где (фиг. 12)

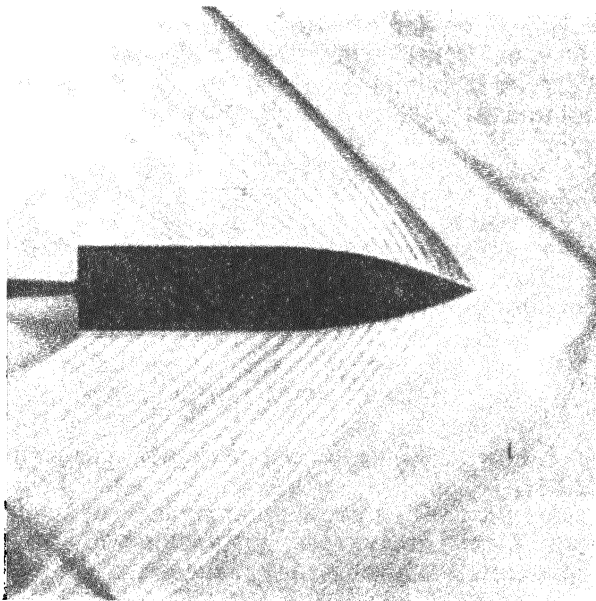
$$w_{1n} = w_1 \sin(\gamma - \beta), \quad (2.32)$$

$$w_{2n} = w_2 \sin \gamma. \quad (2.33)$$

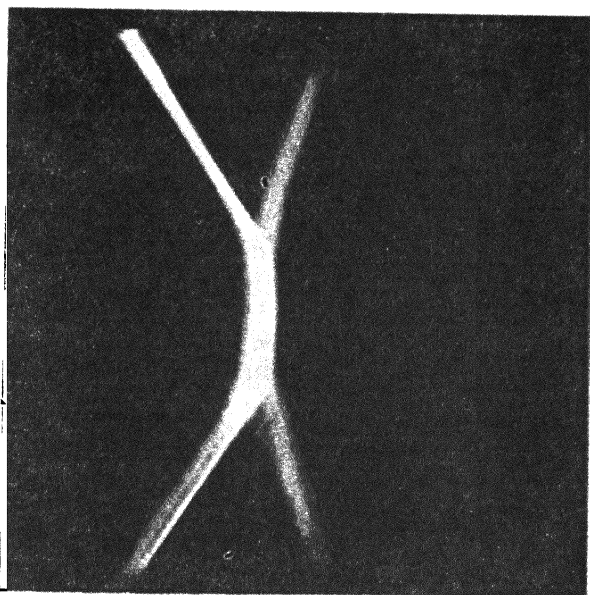
Кроме того,

$$w_2 \cos \gamma = w_1 \cos(\gamma - \beta) = w_t. \quad (2.34)$$

Если встречное течение останавливает ударную волну, плоскость которой составляет с направлением течения угол, меньший прямого, то образуется косой скачок уплотнения. На фиг. 13 и 14 даны фотографии течения в сопле и обтекания тела; светлые и темные полосы отвечают скачкам уплотнения. Эти скачки не плоские, однако на каждом небольшом участке такой скачок может рассматриваться как плоский.



Фиг. 13



Фиг. 14

Уравнения для косо́го скачка уплотнения легко получаются из уравнений для прямо́го скачка. Если, как и раньше, отметить величины, относящиеся к течению перед скачком, индексом „2“, а величины, относящиеся к течению после скачка, — индексом „1“, то эти уравнения будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 w_{2n} &= \rho_1 w_{1n}, \\ p_1 - p_2 &= \rho_2 w_{2n} (w_{2n} - w_{1n}), \\ p_1 w_{1n} - p_2 w_{2n} &= -\rho_2 w_{2n} \left[\frac{1}{x-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{w_{1n}^2}{2} - \frac{w_{2n}^2}{2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

К уравнениям (2.35) надо присоединить уравнения (2.32), (2.33) и (2.34).

Из уравнений (2.13) путем простых алгебраических преобразований были получены уравнения (2.15) и (2.16). В рассматриваемом случае эти уравнения имеют вид

$$\frac{w_{1n}^2}{2} + \frac{a_1^2}{x-1} = \frac{w_{2n}^2}{2} + \frac{a_2^2}{x-1} = C \quad (2.36)$$

и

$$w_{1n} w_{2n} = \frac{2(x-1)}{x+1} C. \quad (2.37)$$

Прибавляя к обеим частям уравнения (2.36) $\frac{w_t^2}{2}$, получим

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{x-1} = \frac{w_2^2}{2} + \frac{a_2^2}{x-1} = C + \frac{w_t^2}{2}. \quad (2.38)$$

Уравнение (2.38) представляет собой уравнение Бернулли — Сен-Венана. Отсюда, вспоминая значение постоянной в уравнении (2.23), получим

$$C + \frac{w_t^2}{2} = \frac{x+1}{2(x-1)} a_*^2. \quad (2.39)$$

Уравнение (2.37) принимает тогда следующий вид:

$$w_{1n} w_{2n} = a_*^2 - \frac{x-1}{x+1} w_t^2. \quad (2.40)$$

Пользуясь этим уравнением, зная течение перед скачком и угол, образованный плоскостью скачка с направлением течения, можно определить скорость течения после скачка. После этого из второго и третьего уравнений (2.35) определяются плотность и давление в течении за скачком. В уравнение косо́го скачка входит новый параметр — угол, образованный направлением плоскости скачка с направлением течения. Таким образом, в данном сверхзвуковом потоке могут возникать косые скачки различной интенсивности в зависимости от угла, образованного их плоскостью с направлением течения.

Рассмотрим прежде всего бесконечно малый скачок уплотнения.

В этом случае $p_1 = p_2$, $\rho_1 = \rho_2$ и $w_{1n} = w_{2n} = w_n$.
Из уравнения (2.40) следует тогда

$$w_n^2 = a_*^2 - \frac{x-1}{x+1} w_t^2$$

или

$$w^2 \sin^2 \gamma = a_*^2 - \frac{x-1}{x+1} w^2 \cos^2 \gamma,$$

откуда

$$\sin^2 \gamma = \frac{x+1}{2} \frac{1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2}{\lambda^2}.$$

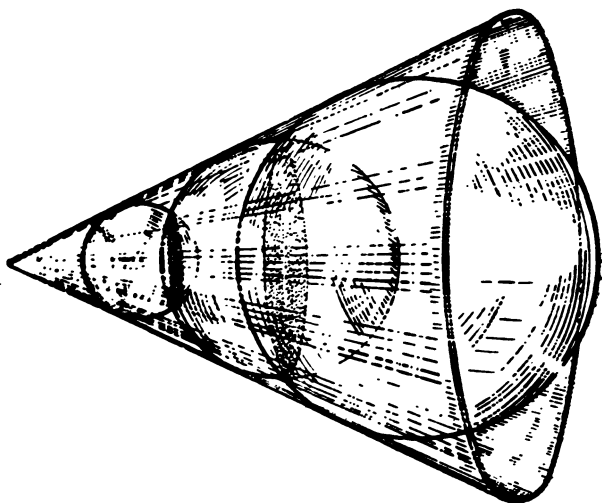
Обозначим угол γ , отвечающий бесконечно малому скачку уплотнения, через α . Угол α называется углом Маха. Пользуясь уравнением (2.28), получим

$$\sin \alpha = \frac{1}{M} = \frac{a}{w}.$$

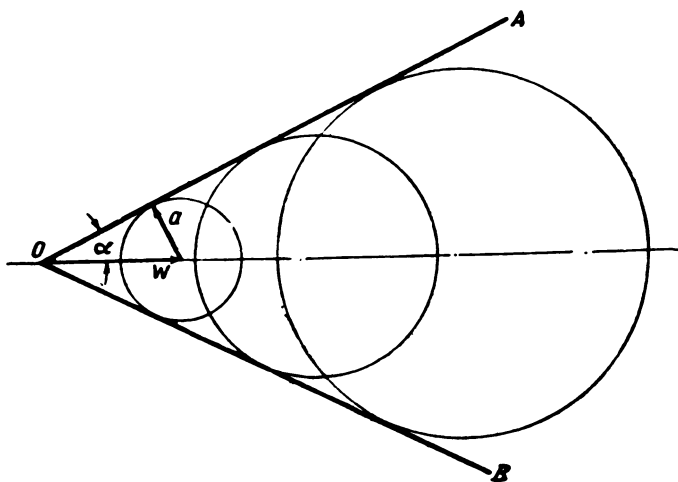
Поясним физический смысл угла Маха еще другим способом. Допустим, что мы внесли в равномерный сверхзвуковой поток какое-нибудь очень небольшое препятствие, например, острое иголки, направленной вдоль струйки. Возмущение, вызванное в потоке этим препятствием, будет распространяться относительно частиц газа во все стороны со скоростью звука в виде сферических волн. Эти волны будут сдуваться встречным сверхзвуковым течением, причем их огибающей будет конус (фиг. 15). Синус половины угла раствора этого конуса — угла Маха равен $\frac{w}{a}$.

Если в поток введена не игла, а очень тонкая длинная пластинка, то огибающая звуковых волн образует двугран-

ный угол, сечение которого изображено на фиг. 16. Прямые OA и OB называются линиями Маха.



Фиг. 15



Фиг. 16

Таким образом, пересечение бесконечно малого скачка уплотнения с плоскостью чертежа представляет собой линию Маха. На фиг. 14 приведена фотография сверхзвукового течения. На поверхности тела нанесены небольшие зарубки в виде точек и полосок; исходящие от них не-

большие возмущения совпадают приближенно с линиями Маха.

Обратимся теперь к исследованию общего случая. Пусть дан вектор скорости сверхзвукового течения перед косым скачком. Найдем геометрическое место концов вектора скорости после косоого скачка при различных значениях угла, образованного плоскостью скачка с направлением течения. Покажем, что наименьший угол, образованный плоскостью скачка с направлением течения, есть угол Маха, отвечающий бесконечно малому скачку — линии Маха. Угол, равный $\frac{\pi}{2}$, отвечает наиболее интенсивному — прямому скачку. Угол γ изменяется в пределах

$$\alpha \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}.$$

Для определения w_1 и β имеем уравнения (2.34) и (2.40). Эти уравнения можно переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \cos(\gamma - \beta) &= \lambda_2 \cos \gamma, \\ \lambda_1 \lambda_2 \sin(\gamma - \beta) \sin \gamma &= 1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda_2^2 \cos^2 \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

откуда

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 \cos^2 \gamma + \frac{\left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda_2^2 \cos^2 \gamma\right)^2}{\lambda_2^2 \sin^2 \gamma}. \quad (2.42)$$

Из уравнения (2.42) следует, что с возрастанием угла γ величина скорости λ_1 убывает. Так как скачки разрежения невозможны, то всегда должно быть

$$\lambda_1 \leq \lambda_2.$$

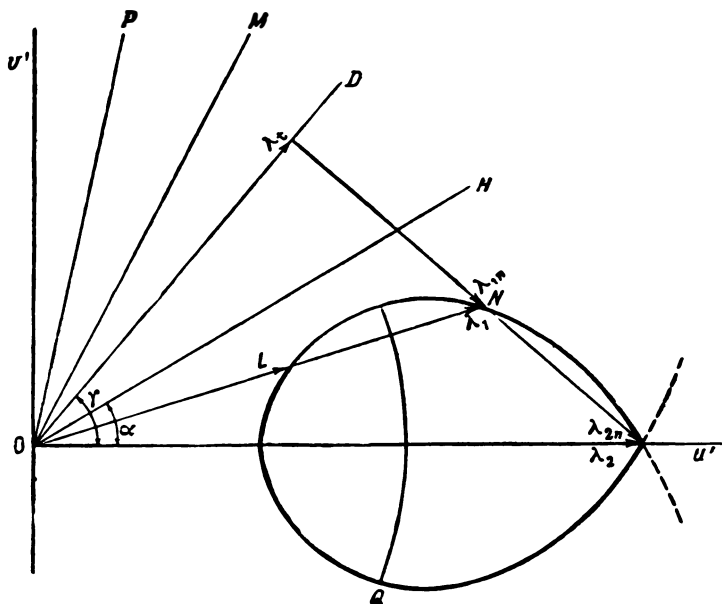
Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то из уравнения (2.42) следует, что угол γ равен углу Маха. Таким образом, наименьший угол, который косой скачок может образовать с направлением течения, есть угол Маха и скачок уплотнения есть тогда линия Маха. С увеличением угла γ до значения $\frac{\pi}{2}$ величина λ убывает до значения

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2},$$

отвечающего прямому скачку, а значения перепада давления, плотности и скорости увеличиваются до значений,

отвечающих прямому скачку. Когда угол γ изменяется в пределах $\alpha \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$, конец вектора $\vec{\lambda}_1$ описывает кривую, изображенную на фиг. 17.

Найдем уравнение этой кривой.



Фиг. 17

Из фиг. 17 следует:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= u' \cos \gamma + v' \sin \gamma = \lambda_2 \cos \gamma, \\ \lambda_{1n} &= u' \sin \gamma - v' \cos \gamma, \\ \lambda_{2n} &= \lambda_2 \sin \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

где u' и v' — проекции вектора $\vec{\lambda}_1$ на оси координат.
Из первого уравнения (2.43) имеем:

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{v'}{\lambda_2 - u'}. \quad (2.44)$$

Уравнение (2.40) примет вид:

$$\lambda_2 \sin \gamma (u' \sin \gamma - v' \cos \gamma) = 1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda_2^2 \cos^2 \gamma. \quad (2.45)$$

Выражая $\sin \gamma$ и $\cos \gamma$ через $\operatorname{ctg} \gamma$ и подставляя в (2.45), после простых преобразований получим:

$$v'^2 = (\lambda_2 - u') \frac{u' - \frac{1}{\lambda_2}}{\frac{1}{\lambda_2} - \frac{2}{x+1} \lambda_2 - u'}. \quad (2.46)$$

График уравнения (2.46) имеет вид, изображенный на фиг. 17. Физический смысл имеет лишь петля этой кривой. Точки, лежащие на уходящих в бесконечность ветвях, изображенных пунктиром, отвечают физически невозможным скачкам разрежения. В газовой динамике эту кривую называют ударной полярой.

В приложении дана сетка ударных поляр для $x = 1,4$, отвечающих различным скоростям потока.

На фиг. 17 луч OH изображает направление линии Маха, луч OM —направление скачка, после которого скорость становится равной скорости звука.

Точка Q получена в пересечении ударной поляры с окружностью радиуса, равного единице, с центром в точке O . Обратим внимание на то, что луч, совпадающий с направлением вектора скорости после скачка, пересекает ударную поляру в двух точках (точки L и N). Эти точки отвечают направлению скачков OP и OD .

ГЛАВА III

АДИАБАТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ГАЗА

§ 10. Адиабатическое течение

Рассмотрим установившееся движение газа в трубке переменного по длине сечения. Допустим, что это движение таково, что силы трения как о стенки трубки, так и между соседними массами газа пренебрежимо малы и что теплообмен через стенки трубки и между соседними частицами газа ничтожен. Течение, в котором отсутствуют силы трения и теплообмен между частицами газа, является, конечно, идеальной схемой. Однако условия, весьма близкие к указанным, имеют место в целом ряде практически важных случаев, например, для течений газа в соплах или через короткие насадки. Эта простейшая идеальная схема течения имеет, как это будет видно в дальнейшем, очень большое значение в газовой динамике.

Составим уравнения установившегося адиабатического течения газа в трубке переменного по длине поперечного сечения.

При установившемся течении масса газа, протекающая в единицу времени через любое поперечное сечение трубки, должна быть постоянной. Следовательно, уравнение сохранения массы будет

$$F\rho w = Q = \text{const}, \quad (3.1)$$

где Q — расход газа.

Для адиабатического течения, конечно, справедливо уравнение Бернулли—Сен-Венана

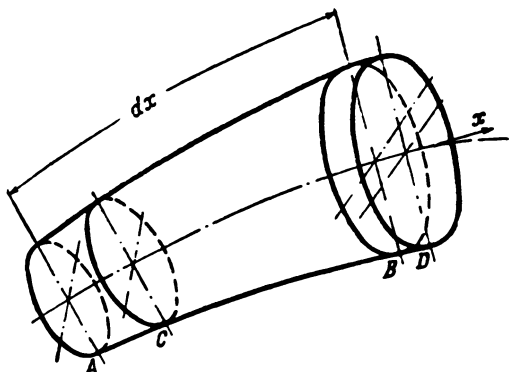
$$\frac{w^2}{2} + \frac{x}{x-1} \frac{p}{\rho} = \frac{x+1}{2(x-1)} a_*^2 \quad (2.23)$$

или

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2. \quad (2.26)$$

Составим еще уравнение изменения количества движения в проекции на направление оси трубки.

На фиг. 18 схематически изображена трубка тока. Обозначим через x продольную координату, отсчитанную вдоль оси трубки, и через F — переменную площадь поперечного сечения.



Фиг. 18

Применим уравнение количества движения к массе газа, заключенной в момент t между двумя соседними поперечными сечениями F и F' , находящимися на расстоянии dx друг от друга.

За время dt рассматриваемая масса газа из положения AB перейдет в положение CD . Разность количества движения газа в моменты $t + dt$ и t равна количеству движения газа между сечениями B и D минус количество движения газа между сечениями A и C .

Количество движения массы газа между сечениями A и C равно

$$F\rho w^2 dt,$$

т. е. количеству движения массы газа, протекающей за время dt через сечение A .

Точно так же количество движения газа между сечениями B и D равно количеству движения массы газа, протекающей за время dt через сечение B . Для количества движения массы газа, протекающего за единицу времени через сечение B на расстоянии dx от сечения A , имеем:

$$F\rho w^2 + \frac{d(F\rho w^2)}{dx} dx.$$

Следовательно, приращение количества движения равно:

$$\left(F\rho w^2 + \frac{d(F\rho w^2)}{dx} dx \right) dt - F\rho w^2 dt.$$

Проекция импульса сил давления равна разности импульсов сил давления в сечениях F и F' плюс проекция на ось трубки импульса сил давления на ее боковую поверхность.

Проекция сил давления на боковую поверхность трубки между сечениями F и F' равна силе давления на проекцию боковой поверхности трубки на плоскость, перпендикулярную ее оси. Проекция боковой поверхности трубки на эту плоскость равна разности площадей поперечного сечения трубки F' и F .

Имеем, следовательно,

$$pFdt - \left(pF + \frac{d(pF)}{dx} dx \right) dt + p \frac{dF}{dx} dx.$$

Приравнявая изменение количества движения импульсу сил давления, получим:

$$\frac{d(F\rho w^2)}{dx} = -F \frac{dp}{dx}.$$

Так как $F\rho w = \text{const}$, то уравнение изменения количества движения принимает вид

$$w dw + \frac{dp}{\rho} = 0. \quad (3.2)$$

Дифференцируя уравнение Бернулли—Сен-Венана, получим:

$$w dw + \frac{x}{x-1} \left(\frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho^2} d\rho \right) = 0.$$

Сравнивая с уравнением (3.2), имеем:

$$\frac{x}{x-1} \left(\frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho^2} d\rho \right) = \frac{dp}{\rho},$$

отсюда, интегрируя, получим

$$\frac{p}{\rho_1} = \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^x,$$

где p_1 и ρ_1 —давление и плотность газа в некотором сечении трубки.

Это есть уравнение адиабаты. Течение газа при отсутствии сил трения и теплообмена сопровождается адиабатическим расширением или сжатием газа. Поэтому такое течение называют адиабатическим.

В дальнейшем придется рассматривать движения газа в более сложных условиях, когда течение происходит не только под действием сил давления, но когда на движение газа оказывают влияние силы сопротивления и силы инерции.

Получим уравнение количества движения в предположении, что, кроме сил давления, текущий газ находится под действием силы, приложенной ко всей массе газа. Обозначим φ — проекцию на ось Ox силы, приходящейся на единицу массы. Добавляя в уравнении изменения количества движения к импульсу сил давления импульс этой силы, имеем

$$d(F\rho w^2) = -Fdp + F\rho\varphi dx$$

или

$$w dw + \frac{dp}{\rho} = \varphi dx. \quad (3.2')$$

Рассмотрим влияние силы тяжести на течение в струйке. Обозначим α — угол между осью Ox и направлением силы тяжести. Направим ось Oz вертикально вверх. Сила тяжести, действующая на единицу массы газа, равна ускорению силы тяжести g . Проекция этой силы на направление оси Ox будет $\varphi = g \cos \alpha$. Уравнение (3.2') примет вид

$$w dw + \frac{dp}{\rho} = g \cos \alpha dx;$$

но

$$\cos \alpha dx = -dz,$$

так что

$$w dw + \frac{dp}{\rho} + gdz = 0.$$

При постоянном ρ , т. е. в случае, относящемся к течению несжимаемой жидкости, это уравнение сразу интегрируется. Имеем

$$\frac{\rho w^2}{2} + p + \rho g z = \text{const.}$$

Величину $p + \rho g z = H$ называют напором.

Имеем, следовательно,

$$H + \frac{\rho \omega^2}{2} = H_0. \quad (3.2'')$$

Это есть уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости.

Если влияние силы тяжести не имеет существенного значения, то уравнение (3.2'') может быть заменено уравнением

$$p + \frac{\rho \omega^2}{2} = p_0.$$

Рассмотрим случай адиабатического течения газа. Плотность и давление газа при адиабатическом течении связаны уравнением

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa.$$

Пользуясь этим соотношением, интегрируем уравнение (3.2'). Имеем

$$\frac{\omega^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} + gz = \text{const.}$$

При течении газа в машинах изменение z исчисляется долями метра, изменения скорости, наоборот, весьма велики. Влияние силы тяжести при этом пренебрежимо мало.

В дальнейшем в рассматриваемых ниже вопросах влиянием силы тяжести на течение газа всегда можно пренебрегать.

§ 11. Элементарная струйка при адиабатическом течении

Представим себе струйку газа, вытекающую через насадок из очень большого сосуда. Скорость в сосуде можно считать равной нулю. Пусть давление в сосуде будет p_0 , плотность ρ_0 и температура T_0 . По длине струйки давление, плотность и температура газа изменяются в зависимости от скорости.

Из уравнения

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2 \quad (2.26)$$

и из уравнения адиабаты

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$

получим:

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2\right)^{\frac{x}{x-1}} \quad (3.3)$$

и

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{x-1}}. \quad (3.4)$$

Давление p_0 , температуру T_0 и плотность газа ρ_0 для скорости, равной нулю, при адиабатическом сжатии газа называют давлением, температурой и плотностью торможения. Давление p_0 называют также полным давлением.

Давление, плотность и температура торможения газа являются важнейшими характеристиками течения газа.

Отметим, что в отличие от давления и плотности торможения температура торможения допускает более общее определение, связанное не только с адиабатическими течениями, но и с любыми течениями без обмена энергией с внешней средой.

Графики функций (2.26), (3.3) и (3.4) для $x = 1,40$ приведены на фиг. 19, а значения их для $x = 1,40, 1,30$ и $1,25$ — в табл. 2, 3 и 4 приложений.

Из уравнений (2.26), (3.3) и (3.4) следует, что скорость в струе газа не может беспредельно возрастать. Наибольшая скорость получается при истечении в пустоту. Плотность и температура газа при этом стремятся к нулю. Наибольшая возможная скорость равна

$$w_{\max} = a_* \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Для воздуха при $x = 1,40$:

$$w_{\max} = 2,45 a_*.$$

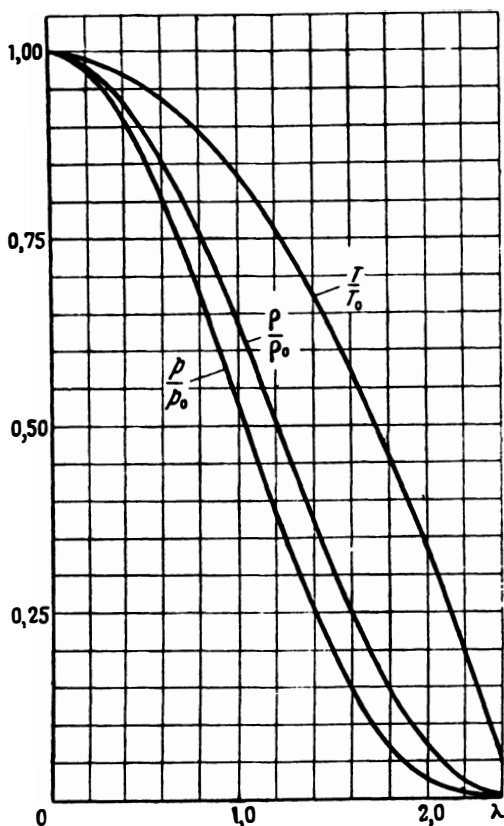
Заменяя число λ в формулах (2.26), (3.3) и (3.4) его выражением через число M , получим:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{x-1}{2} M^2, \quad (3.5)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{x-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{x-1}} \quad (3.6)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{x-1}{2} M^2\right)^{\frac{x}{x-1}}. \quad (3.7)$$

При небольших перепадах давления изменение скорости газа с изменением давления должно быть таким же, как в случае несжимаемой жидкости. Уравнение (3.3) при этом должно совпадать с уравнением Бернулли. Уравнения (3.3)



Фиг. 19

и (3.7) показывают, что небольшие перепады давления отвечают скоростям, малым по сравнению со скоростью звука. Разлагая правую часть уравнения (3.7) в ряд, получим

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{\kappa}{2} \frac{M^2}{1 - \varepsilon},$$

где

$$\frac{1}{1 - \varepsilon} = 1 + \frac{M^2}{4} + \frac{2 - \kappa}{24} M^4 + \frac{(2 - \kappa)(3 - 2\kappa)}{192} M^6 + \dots$$

при $x = 1,40$ имеем:

$$\frac{1}{1-\varepsilon} = 1 + \frac{M^2}{4} + \frac{M^4}{40} + \frac{M^6}{1600} + \dots$$

При малых значениях числа M можно пренебречь величиной ε . Заменяя M^2 через $\frac{w^2}{x \frac{\rho}{\rho_0}}$, получим

$$\rho + \frac{\rho w^2}{\varepsilon} = \rho_0. \quad (3.8)$$

Этим уравнением пользуются в аэродинамике во всех случаях, когда перепады давления невелики. Газ при этом не отличается от несжимаемой невесомой жидкости.

Предположим, что скорость по длине струйки изменяется от нуля до максимального значения. Пусть Q — масса газа, протекающего через поперечное сечение струи в единицу времени — расход газа. Имеем:

$$Q = F \rho w = a_* F \rho \lambda.$$

Пользуясь уравнением (3.3), можно выразить изменение плотности газа в зависимости от скорости; тогда

$$Q = a_* \rho_0 F \lambda \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{x-1}}.$$

Расход газа на единицу площади поперечного сечения струи будет

$$\rho w = a_* \rho_0 \lambda \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{x-1}}.$$

Дифференцируя, получим:

$$\frac{d(\rho w)}{d\lambda} = a_* \rho_0 \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2\right)^{\frac{2-x}{x}} (1 - \lambda^2). \quad (3.9)$$

Максимальное значение ρw соответствует $\lambda = 1$, т. е. значению скорости, равной критической. Соответствующие значения плотности, давления и температуры также называются критическими. Для критических значений давления, температуры и плотности имеем:

$$\rho_* = \left(\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}} \rho_0; \quad T_* = \frac{2}{x+1} T_0$$

и

$$\rho_* = \left(\frac{2}{x+1} \right)^{\frac{1}{x-1}} \rho_0. \quad (3.10)$$

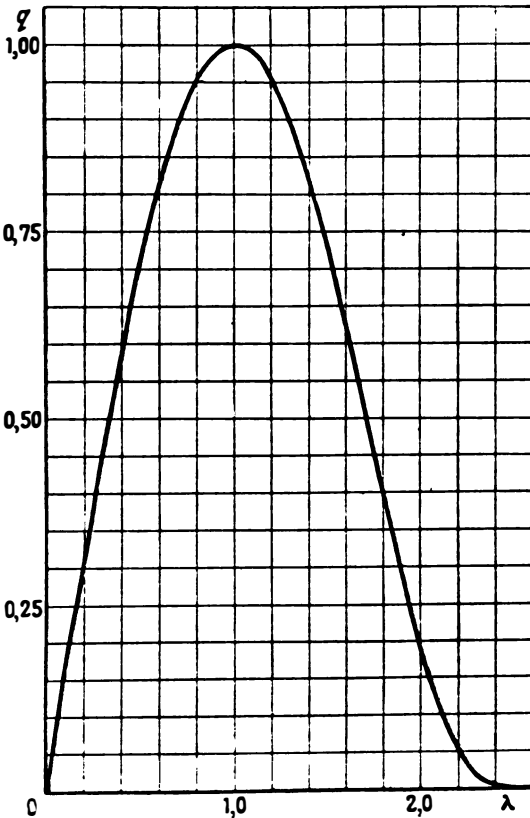
Для воздуха при $x = 1,40$:

$$\rho_* = 0,528 \rho_0, \quad \rho_* = 0,635 \rho_0, \quad T_* = 0,833 T_0.$$

Величину $q = \frac{\rho w}{\rho_* a_*}$ назовем приведенным расходом.

Имеем

$$q = \left(\frac{x+1}{2} \right)^{\frac{1}{x-1}} \lambda \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{x-1}}. \quad (3.11)$$

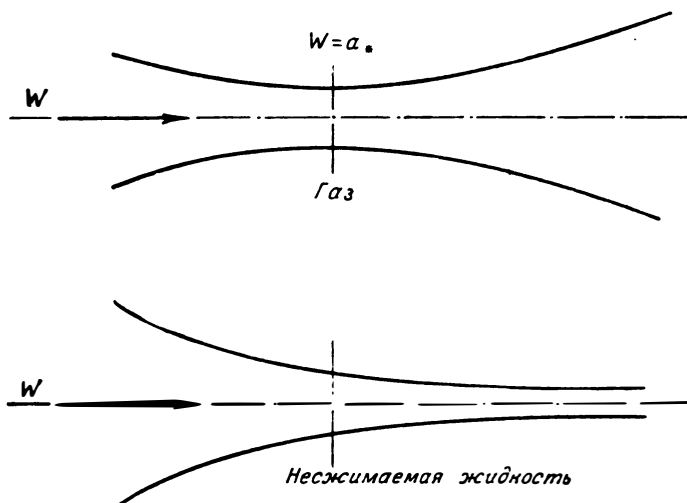


Фиг. 20

Разлагая q в ряд по степеням $\Delta\lambda = 1 - \lambda$, получим

$$q = 1 - \frac{x+1}{2} \Delta\lambda^2 - \frac{(x+1)(3-2x)}{6} \Delta\lambda^3 + \frac{(x+1)(2-x)(2x-1)}{8} \Delta\lambda^4 + \dots \quad (3.12)$$

Функция $q(\lambda)$ для $x = 1,4$ изображена на фиг. 20; ее значения даны в табл. 2, 3 и 4. С увеличением скорости расход на единицу площади поперечного сечения струи сначала растет и, следовательно, площадь поперечного сечения струи уменьшается. При скорости, равной критической, площадь сечения струи минимальна. При дальнейшем увеличении скорости площадь поперечного сечения струйки возрастает и при приближении к максимальной скорости становится сколь угодно большой. Схематическое изменение сечений струйки, вдоль которой скорость все время увеличивается по направлению течения, дано на фиг. 21. В случае несжимаемой жидкости поперечное сечение струи изменяется обратно пропорционально скорости.



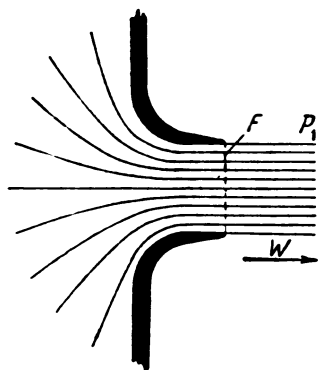
Фиг. 21

Увеличение площади поперечного сечения струи газа с увеличением скорости при $w > a_*$ объясняется тем, что в случае адиабатического течения плотность газа все время уменьшается с увеличением скорости и при достижении критической скорости плотность газа убывает настолько быстро, что для дальнейшего увеличения скорости необходимо увеличение площади поперечного сечения струи.

§ 12. Примеры применения уравнений адиабатического течения

Применим полученные зависимости для адиабатических течений к решению некоторых задач.

Вычислим расход газа из котла через насадок (фиг. 22).



Фиг. 22

Пусть давление газа в котле — p_0 , плотность — ρ_0 и температура — T_0 . Давление вне котла $p_1 < p_0$. При наличии хорошего насадка можно считать, что скорости в выходном сечении насадка распределяются равномерно. Обозначим площадь выходного сечения насадка F (см. фиг. 22) и скорость в этом сечении w_1 .

Для весового расхода имеем:

$$\bar{Q} = F \rho w_1 g,$$

где g — ускорение силы тяжести.

Пользуясь уравнением (3.3), получим:

$$w_1 = \sqrt{\frac{a^2}{x-1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{x-1}{x}} \right]}.$$

Так как

$$\rho_1 = \rho_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1}{x}}$$

и

$$a^2 = \frac{2x}{x+1} \frac{p_0}{\rho_0},$$

то

$$\bar{Q} = F \sqrt{\frac{2x}{x-1} g \rho_0 \gamma_0 \left[\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{2}{x}} - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{x+1}{x}} \right]}, \quad (3.13)$$

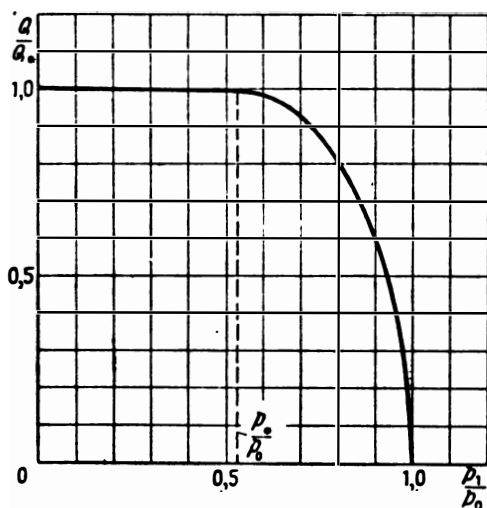
где $\gamma_0 = g \rho_0$ — вес кубического метра газа при давлении p_0 и температуре T_0 .

Формула (3.13) носит название формулы Сен-Венана—Ванцеля [7]. С помощью этой формулы можно вычислить расход газа, если известны давление и плотность газа в котле и давление в пространстве, куда вытекает газ.

Проследим, как изменяется расход газа при изменении давления p_1 . При уменьшении p_1 расход возрастает до тех пор, пока давление p_1 не станет равным критическому давлению $p_* = \left(\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}} p_0$. Когда давление p_1 станет равным p_* , в выходном сечении насадка скорость станет равной скорости звука. Опыт показывает, что при дальнейшем понижении давления скорость в этом сечении остается равной скорости звука, а струя по выходе из насадка начинает расширяться. Таким образом, при понижении давления ниже критического, расход газа не увеличится, а останется равным

$$\bar{Q}_* = F \left(\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}} \sqrt{\frac{2x}{x-1} g p_0 \gamma_0}. \quad (3.14)$$

Поэтому формула (3.13) может быть применена для вычисления расхода лишь при $p_1 \geq p_*$. При $p_1 < p_*$ надо пользоваться формулой (3.14). На фиг. 23 показано изменение расхода в зависимости от $\frac{p_1}{p_0}$, определенное по формулам (3.13) и (3.14).



Фиг. 23

Рассмотренному явлению можно дать следующее объяснение.

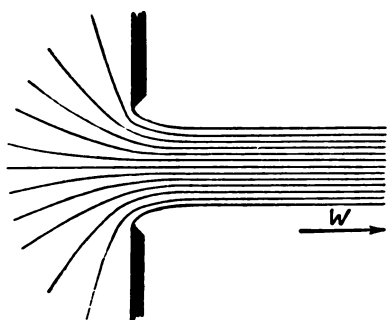
Увеличение расхода газа через сужающийся насадок с ростом перепада давления происходит до тех пор, пока

площадь поперечного сечения струи уменьшается с увеличением скорости. Наибольшая скорость будет в самом узком сечении насадка на его срезе. Если скорость в конце насадка была бы сверхзвуковой, то самое узкое сечение струи, в котором скорость равна скорости звука, было бы где-то внутри насадка. Это невозможно при все время сужающемся насадке. Поэтому критическое сечение в плавно сужающемся насадке совпадает всегда с концом насадка.

К объяснению этого замечательного явления можно подойти и с другой точки зрения.

Представим себе, что понижение давления p_1 вне котла производится при помощи какого-нибудь вакуумнасоса. Понижение давления, как всякая волна разрежения, будет распространяться от всасывающего патрубка со скоростью звука. При скорости в конце насадка, равной скорости звука, изменение давления не сможет проникнуть через насадок и вызвать какое-либо изменение течения в котле и самом насадке. Когда скорость в выходном сечении насадка достигает скорости звука, создается как бы воздушный барьер, не позволяющий возмущениям извне проникнуть внутрь котла. Этим своеобразным явлением часто пользуются в технике.

При рассмотрении истечения через насадок мы пренебрегали влиянием сил вязкости и неравномерностью распределения скоростей в выходном сечении насадка. Изучение течения через мерные насадки и сравнение результатов расчета с экспериментом будет произведено ниже. Заметим лишь, что для хороших насадков формулы (3.13) и (3.14) дают замечательное согласие с экспериментом.



Фиг. 24

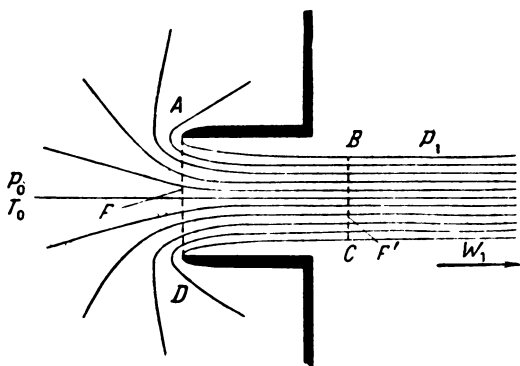
Мы рассмотрели течение через постепенно сужающийся насадок. При течении газа через диафрагму струя имеет вид, изображенный на фиг. 24. Самое узкое сечение струи, в котором давление можно считать выравненным по сечению и равным давлению в окружающем пространстве, будет находиться на некотором расстоянии от отверстия. Отношение площади этого сечения к площади отверстия носит

название коэффициента сжатия. При исследовании истечения через диафрагму основным вопросом является определение коэффициента сжатия струи.

При давлении вне котла, равном критическому, в самом узком сечении струи возникает скорость, равная скорости звука. Однако при дальнейшем понижении давления расход газа не останется постоянным, как в случае истечения через насадок, а будет изменяться благодаря тому, что струя газа начнет деформироваться.

Коэффициент сжатия струи может быть весьма просто определен в одном частном случае истечения через так называемый насадок Борда. Рассмотрение этого примера пояснит высказанные выше общие соображения.

Рассмотрим течение через насадок Борда (фиг. 25). Количество движения, уносимое струей через насадок в единицу времени, равно $F' \rho_1 w_1^2$, где ρ_1 и w_1 — плотность и скорость



Фиг. 25

рость газа в самом узком сечении струи, в котором давление равно p_1 ; F' — площадь этого сечения. Пусть p_0 — давление в котле. Стенки котла снаружи находятся под давлением p_1 . Так как стенки насадка параллельны струе, то переменное давление на эти стенки не дает составляющей в направлении течения. Составляя проекцию сил давления на направление течения струи, можно считать давление на стенки внутри котла везде равным p_0 . Отсюда проекция на направление оси струи сил давления, действующих в данный момент на массу газа, заключенную в котле и в части струи $ABCD$, равна $F(p_0 - p_1)$. Приравнявая изменение количества движения импульсу сил давления, получим для коэффициента сжатия μ_x :

$$\mu_x = \frac{F'}{F} = \frac{p_0 - p_1}{w_1^2 \rho_1},$$

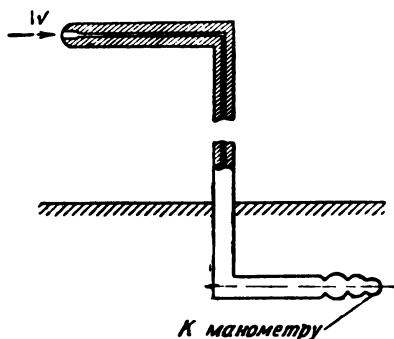
откуда, пользуясь формулой (3.7), получим:

$$\mu_x = \frac{\frac{p_0}{p_1} - 1}{x M_1^2} = \frac{x-1}{2x} \frac{\frac{p_0}{p_1} - 1}{\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{x-1}{x}} - 1}. \quad (3.15)$$

Рассмотрим изменение μ_x в зависимости от $\frac{p_0}{p_1}$. При приближении $\frac{p_0}{p_1}$ к единице, μ_x стремится к половине. Для несжимаемой жидкости получается коэффициент сжатия струи $\mu_x = \frac{1}{2}$. При $p_1 = p_*$ в случае воздуха $\mu_x = 0,636$. При дальнейшем увеличении перепада давления коэффициент μ_x все время возрастает.

В качестве следующего примера рассмотрим измерение приведенной скорости потока или числа M . Приведенную скорость потока и число M можно определить из формул (3.3) и (3.7), зная статическое и полное давление.

Для измерения полного давления служит трубка Пито (фиг. 26). Статическое давление измеряется специальным насадком, имеющим вид тонкого зонда, на поверхности

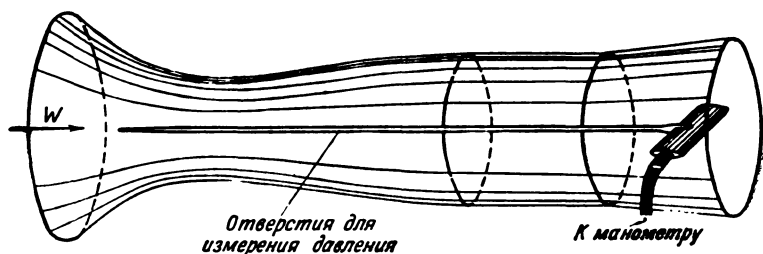


Фиг. 26

которого нанесены отверстия для восприятия статического давления (фиг. 27). Вопрос о тарировке трубки Пито и насадка для измерения статического давления будет рассмотрен ниже. Здесь мы остановимся лишь на вычислении приведенной скорости и числа M по результатам измерения статического давления и показаниям трубки Пито.

Пусть скорость потока меньше скорости звука. Течение газа перед отверстием трубки Пито и в самом насадке

можно считать адиабатическим. Обозначим полное давление, измеренное трубкой Пито, через p_0 , а статическое давление в потоке — через p .



Фиг. 27

Имеем

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}},$$

откуда

$$\lambda = \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]}. \quad (3.16)$$

Пользуясь формулой (3.7), имеем также

$$p_0 = p \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}.$$

Следовательно, для определения числа M получим:

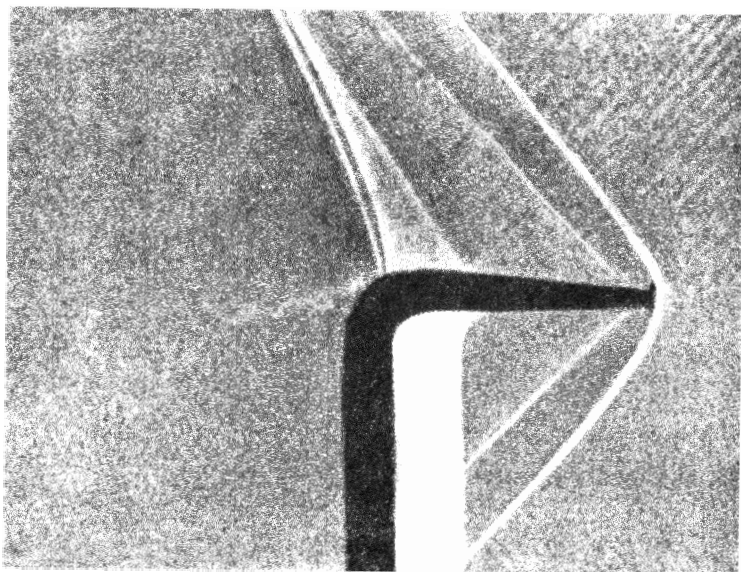
$$M = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} - 1 \right]}. \quad (3.17)$$

Пусть скорость потока больше скорости звука. Тогда перед насадком возникает скачок уплотнения. Можно считать, что струйка, попадающая в отверстие насадка, проходит через прямой скачок уплотнения. На фиг. 28 дана фотография скачка уплотнения перед трубкой Пито. Обозначим M , λ , p , p_0 —число M , приведенную скорость, давление и полное давление в рассматриваемой точке потока.

Приведенную скорость и давление после скачка обозначим λ' и p' , а давление, которое показывает трубка Пито, — через p'_0 .

Имеем:

$$p' = p'_0 \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda'^2 \right)^{\frac{x}{x-1}}.$$



Фиг. 28

С другой стороны, пользуясь формулами для прямого скачка (§ 6), имеем:

$$\lambda' = \frac{1}{\lambda},$$

$$p' = p + \rho w (w - w'),$$

откуда

$$p' = p \left[1 + \frac{\rho}{p} w^2 \left(1 - \frac{w'}{w} \right) \right] = p \left[1 + x M^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \right],$$

так что

$$\frac{p}{p_0'} = \frac{\left(1 - \frac{x-1}{x+1} \frac{1}{\lambda^2}\right)^{\frac{x}{x-1}}}{1 + xM^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)}.$$

Заменяя в этом уравнении λ^2 его выражением через M^2 получим формулу Релея [6]:

$$\frac{p}{p_0'} = \frac{\left[\frac{4x}{(x+1)^2} - \frac{2(x-1)}{(x+1)^2} \frac{1}{M^2}\right]^{\frac{x}{x-1}}}{\frac{2x}{x+1} M^2 - \frac{x-1}{x+1}}. \quad (3.18)$$

Пользуясь этой формулой, можно определить число M по измерениям статического давления и показаниям трубки Пито.

Вычислим изменение полного давления в скачке уплотнения.

Так как

$$p_0 = p \left(1 + \frac{x-1}{2} M^2\right)^{\frac{x}{x-1}},$$

то

$$\frac{p_0'}{p_0} = \frac{\frac{2x}{x+1} M^2 - \frac{x-1}{x+1}}{\left[\frac{4x}{(x+1)^2} - \frac{2(x-1)}{(x+1)^2} \frac{1}{M^2}\right]^{\frac{x}{x-1}} \left(1 + \frac{x-1}{2} M^2\right)^{\frac{x}{x-1}}}. \quad (3.19)$$

Заменяя в формуле (3.19) число M его выражением через число λ , получим:

$$\frac{p_0'}{p_0} = \lambda^2 \left[\frac{1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2}{1 - \frac{x-1}{x+1} \frac{1}{\lambda^2}} \right]^{\frac{1}{x-1}} = \frac{q(\lambda)}{q\left(\frac{1}{\lambda}\right)}. \quad (3.20)$$

Значения функций (3.18) и (3.20) даны в табл. 2, 3 и 4.

Разлагая отношение $\frac{p'_0}{p_0}$ в ряд по степеням $\Delta\lambda = \lambda - 1$, получим, пользуясь формулой (3.12), следующее выражение:

$$\frac{p'_0}{p_0} = 1 - \frac{2}{3} x(x+1) \Delta\lambda^3 + \frac{1}{2} (x+1)(2x+1) \Delta\lambda^4 + \dots \quad (3.21)$$

В первом приближении, при небольших значениях $\Delta\lambda$, можно считать, что относительные потери полного давления

$$\frac{p_0 - p'_0}{p_0} = \frac{2}{3} x(x+1) \Delta\lambda^3 - \frac{1}{2} (x+1)(2x+1) \Delta\lambda^4 + \dots \quad (3.22)$$

возрастают пропорционально кубу $\Delta\lambda$.

Потери полного давления в скачках уплотнения, образующихся в потоках, скорость которых превосходит скорости звука не более чем на 25%, очень малы (меньше одного процента). При дальнейшем увеличении скорости потока потери в скачках уплотнения быстро растут. Этот факт имеет очень большое значение в газовой динамике.

ГЛАВА IV

ТЕЧЕНИЯ В ТРУБАХ

§ 13. Законы механического подобия

Адиабатическое течение газа является предельной идеальной схемой. В действительности при наличии сил трения и теплообмена давление, плотность и температура газа будут гораздо более сложным образом определяться условиями течения. При этом ряд существенных зависимостей должен быть дополнительно найден из данных эксперимента. Для того, чтобы найти общие закономерности в этих разнообразных явлениях и иметь возможность свести число экспериментально определяемых коэффициентов к минимуму, необходимо при исследованиях принимать во внимание некоторые общие положения, вытекающие из соображений о механическом подобии явлений.

При экспериментальном исследовании механических явлений обычно изучают эти явления на моделях при значениях основных физических параметров, отличных от тех, которые имеют место в действительном процессе. Точное перенесение результатов исследования одного явления на другое возможно лишь, если эти явления подобные, т. е. если возможен переход от описания одного из этих явлений к другому изменением единиц измерения.

В основание анализа механического подобия положим метод размерностей. Напомним соображения, на которых основан этот метод.

В результате измерения величин получают именованные числа, эти числа зависят от принятых единиц измерения.

В механике обычно приняты три основные единицы измерения: единица длины, времени и массы. Остальные единицы выражают через эти три основные, пользуясь законами, связывающими данную величину с величинами, единицы измерения которых известны. Так, например, единица силы

определяется уравнением Ньютона, единица работы—равенством, определяющим работу, и т. д. При исследовании механических явлений, однако, не обязательно ограничиться тремя основными единицами, можно было бы ввести, например, независимую единицу силы. Тогда уравнение Ньютона приняло бы вид:

$$F = cma,$$

где величина c была бы размерной постоянной.

В газовой динамике приходится иметь дело с тепловыми явлениями. К основным механическим единицам надо добавить единицу измерения количества тепла и единицу измерения температуры. Пользуясь уравнением сохранения энергии, можно было бы выразить количество тепла непосредственно в механических единицах. Точно так же, пользуясь уравнением состояния, можно было бы выразить температуру в механических единицах.

Механический эквивалент тепла и газовая постоянная выражались бы тогда отвлеченными числами. Однако привычно выразить количество тепла в калориях, а температуру—в градусах. При этом в уравнения газовой динамики входят две размерные постоянные: механический эквивалент тепла и газовая постоянная. Размерность газовой постоянной определяется из уравнения Клапейрона, а размерность механического эквивалента тепла—из уравнения, выражающего первое начало термодинамики.

Выберем в качестве основных единиц измерения единицы длины, времени, массы, количества тепла и температуры. Обозначим размерности этих пяти основных величин \bar{L} , \bar{T} , \bar{M} , \bar{U} , $\bar{\Theta}$.

Для обозначения размерности всех других величин воспользуемся знаком []. Тогда имеем: [скорость] = $\bar{L} \bar{T}^{-1}$, [ускорение] = $\bar{L} \bar{T}^{-2}$, [сила] = $\bar{M} \bar{L} \bar{T}^{-2}$, [работа] = $\bar{M} \bar{L}^2 \bar{T}^{-2}$, [плотность] = $\bar{M} \bar{L}^{-3}$, [разность давлений] = $\bar{M} \bar{L}^{-1} \bar{T}^{-2}$, [механический эквивалент тепла] = $\bar{M} \bar{L}^2 \bar{T}^{-2} \bar{U}^{-1}$, [газовая постоянная] = $\bar{L}^2 \bar{T}^{-2} \bar{\Theta}^{-1}$, [удельная теплоемкость] = $\bar{U} \bar{\Theta} \bar{M}^{-1}$.

Силы сопротивления обусловлены вязкостью газа. Коэффициент вязкости определяется законом Ньютона для ламинарного течения вязкой жидкости.

Если обозначить через τ силу трения на единицу площади (напряжение трения), то закон Ньютона выражается уравнением

$$\tau = \mu \frac{dv}{dn}, \quad (4.1)$$

где μ — коэффициент вязкости и $\frac{dv}{dn}$ — градиент скорости в направлении нормали к рассматриваемой площадке.

Отсюда размерность коэффициента вязкости будет

$$[\mu] = \bar{M} \bar{L}^{-1} \bar{T}^{-1}.$$

Коэффициент вязкости совершенного газа не зависит от давления. Опыты показывают, что и для реальных газов зависимость коэффициента вязкости от давления оказывается очень слабой и в очень широком диапазоне изменения давления можно считать μ не зависящим от величины давления. Величина коэффициента вязкости существенно изменяется при изменении температуры газа. Для воздуха эта зависимость может быть представлена в таком виде:

$$\mu \cdot 10^6 = 1,712 \sqrt{1 + 0,003665 \Theta} (1 + 0,0008\Theta)^2, \quad (4.2)$$

где Θ — температура газа в градусах Цельсия,
 μ — коэффициент вязкости в $кг \cdot сек / м^2$.

Для приближенных расчетов удобно пользоваться зависимостью вязкости от абсолютной температуры T в таком виде:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{273} \right)^{3/2}, \quad (4.3)$$

где μ_0 — коэффициент вязкости при температуре $\Theta = 0^\circ$.

Теплообмен определяется теплопроводностью газа. Коэффициент теплопроводности определяется из уравнения, связывающего поток тепла через площадку, имеющую площадь S , с градиентом температуры в направлении, перпендикулярном этой площадке. Имеем

$$dU = \eta \frac{dT}{dn} S dt, \quad (4.4)$$

где η — коэффициент теплопроводности,

$\frac{dT}{dn}$ — градиент температуры.

Размерность коэффициента теплопроводности будет $\bar{U} \bar{T}^{-1} \bar{L}^{-1} \bar{\Theta}^{-1}$.

При исследовании некоторой совокупности процессов экспериментатор варьирует различные параметры, определяющие, при прочих равных условиях, изучаемое явление. Например, при исследовании сопротивления гладкой трубы можно изменять перепад давления на концах трубы, абсолютную величину давления газа, его температуру, диаметр и длину трубы и, наконец, степень турбулентности потока

у входа в трубу. Среди исследуемых параметров можно всегда выделить ряд независимых друг от друга параметров, определяющих процесс. Выбор числа таких параметров в известной степени произволен. С увеличением числа определяющих параметров увеличивается совокупность сравниваемых между собой процессов. Например, если при исследовании течения газа в трубе ограничиться изменением только скорости потока, то мы получим совокупность процессов, отличающихся одним параметром. При изменении диаметра трубы, давления и температуры газов мы получаем более обширную совокупность процессов.

Говоря о том, что задание рассматриваемых параметров полностью определяет данный процесс, подразумевают, что при наличии остальных условий, которые остаются неизменными, и при данных значениях этих параметров реализуется единственно возможный процесс. Это может быть известным из эксперимента или служить рабочей гипотезой при исследовании.

Дадим точное определение механически подобных явлений: два явления называются механически подобными, если можно выбрать две системы единиц так, чтобы численные значения всех соответствующих величин в этих явлениях, выраженные в своих единицах, были бы одинаковы. Иначе говоря, два явления подобны, если можно от одного из этих явлений перейти к другому изменением масштабов.

Для совокупности механически подобных явлений все отвлеченные комбинации встречающихся величин имеют одинаковое численное значение. Обратное, если все комбинации отвлеченных величин для двух каких-нибудь явлений совпадают, то эти явления подобны. Это можно было бы принять за определение механически подобных явлений.

Рассмотрим какую-нибудь совокупность явлений, определяемую n независимыми параметрами, которые могут быть как отвлеченными, так и размерными. Все остальные величины определяются заданием этих параметров.

Пусть размерности этих n параметров выражены через размерности k основных единиц измерения и пусть $n \geq k$. Тогда имеет место следующая теорема [9].

Из основных n параметров можно образовать только $n - k$ независимых безразмерных комбинаций

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-k},$$

т. е. независимых отвлеченных величин, которые можно поставить в связь с рассматриваемой совокупностью явлений. Необходимое и достаточное условие механического подобия двух явлений заключается в равенстве между собой этих основных отвлеченных параметров.

Таким образом, совокупность механически подобных явлений определяется равенствами

$$\alpha_1 = \text{const}, \quad \alpha_2 = \text{const}, \quad \dots, \quad \alpha_{n-k} = \text{const}.$$

В качестве примера рассмотрим движение газа в круглых гладких трубах при наличии сил трения и теплопередачи. В этом случае имеем систему следующих двенадцати параметров:

- l — длина трубы,
- D — ее диаметр,
- ρ — плотность газа,
- Δp — перепад давления,
- w — скорость движения газа,
- T — температура газа,
- μ — коэффициент вязкости газа,
- J — механический эквивалент тепла,
- c_v — теплоемкость газа при постоянном объеме,
- c_p — теплоемкость газа при постоянном давлении,
- R — газовая постоянная,
- η — коэффициент теплопроводности.

Механический эквивалент тепла, газовая постоянная и теплоемкость газа связаны уравнением

$$R = J(c_p - c_v); \quad R = Jc_v(x - 1).$$

Опыты показывают, что при прочих равных условиях скорость в трубе зависит от перепада давления. Таким образом, скорость и перепад давления нельзя считать независимыми величинами. Можно было бы рассматривать в качестве параметра абсолютное давление газа, но оно связано с плотностью, температурой и газовой постоянной уравнением состояния. Таким образом, имеем десять независимых параметров; величины этих параметров выражены через пять единиц измерения.

Из этих величин можно, следовательно, составить пять независимых безразмерных параметров. Обычно принимают следующую систему параметров:

$$\left. \begin{aligned} \frac{l}{D}, \quad \frac{\rho D w}{\mu} = \text{Re}; \quad \frac{w}{\sqrt{xRT}} = M; \\ \frac{\mu c_p}{\eta} = \text{Pr}; \quad x - 1 = \frac{R}{Jc_v}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Число Re называется числом Рейнольдса по имени открывшего его ученого. Это число определяет явления, связанные с вязкостью и силами трения. Вместо числа M можно было бы ввести связанное с ним число λ . Параметр Pr связан с явлениями теплопередачи.

Течения газа в гладких трубах, для которых значения указанных пяти параметров одинаковы, будут механически подобными. Поэтому эти параметры можно назвать критериями подобия. Отношение $\frac{l}{D}$ есть параметр, определяющий в данном случае геометрическое подобие. Числа α и Pr зависят от природы газа и от температуры. При обычных условиях для данного газа α и Pr могут считаться постоянными величинами. Таким образом, имеем два существенных критерия механического подобия (геометрическое подобие подразумевается как очевидно необходимое условие): равенство чисел Re и M .

Приведенные рассуждения справедливы, очевидно, не только для круглых труб, но и для установившихся течений в любых геометрически подобных газопроводах, соплах, диффузорах и т. д. Однако не надо забывать, что мы не рассматривали влияние шероховатости стенок и степени турбулентности потока у входа в трубу и считали, что условия на входе в трубу во всех течениях одни и те же. Если принять во внимание изменение этих условий, то получим еще два новых критерия подобия.

Вернемся к примеру течения в круглой трубе. Если силы трения и теплопередача через стенки трубы отсутствовали бы, то в трубе могло установиться неизменяющееся по длине трубы течение с любой скоростью. Давление также не изменялось бы по длине трубы. В действительности для получения данной скорости течения через трубу необходимо создать разность давлений в начале и в конце трубы. Величина этой разности зависит от вязкости газа и от теплообмена через стенки трубы и характеризует силы сопротивления. Вместо разности давления удобно ввести безразмерный параметр. В качестве такого принимают:

$$\frac{\Delta p}{\frac{\rho w^2}{2}}. \quad (4.6)$$

Этот параметр является функцией определяющих безразмерных параметров. Следовательно, имеем:

$$\frac{\Delta p}{\frac{\rho w^2}{2}} = f\left(\frac{l}{D}, \alpha, Re, M, Pr\right). \quad (4.7)$$

Задачей исследования течений в гладких круглых трубах является определение этой функциональной зависимости.

Правую часть равенства (4.7) принято называть „коэффициентом сопротивления“.

Если явлениями теплообмена можно пренебрегать, то течение не должно зависеть от числа Pr . Уравнение (4.7) примет вид:

$$\frac{\Delta p}{\frac{\rho w^2}{2}} = F \left(\frac{\Delta l}{D}; Re, M, x \right). \quad (4.8)$$

На бесконечно малом участке трубы Δl можно считать, что F есть линейная функция от $\frac{\Delta l}{D}$. В этом случае уравнение (4.8) можно представить в виде:

$$\frac{\Delta p}{\Delta l} = \frac{\rho w^2}{2D} \zeta (Re, M, x). \quad (4.9)$$

Коэффициент $\zeta(Re, M, x)$ называется коэффициентом сопротивления трубы.

Если перепад давления вдоль трубы невелик, то изменение температуры газа вдоль трубы не оказывает влияния на течение газа. Коэффициент сопротивления в этом случае не должен зависеть от числа M и числа x . В этом случае скорость и плотность газа будут постоянны вдоль трубы, постоянными будут число Re и зависящий только от числа Re коэффициент сопротивления.

Следовательно,

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{\rho w^2}{2D} \zeta (Re). \quad (4.10)$$

В случае течения тяжелой жидкости, заменяя давление напором, получаем известную формулу для вычисления расхода жидкости через трубу

$$\frac{\Delta H}{l} = \frac{\rho w^2}{2D} \zeta (Re). \quad (4.11)$$

Введем понятие о силе сопротивления.

При равномерном течении несжимаемой жидкости на участке трубы длиной l разность сил давления в сечениях, ограничивающих рассматриваемую массу жидкости, должна равняться силе трения о стенки трубы—силе сопротивления.

Обозначая через τ силу трения на единицу площади поверхности трубы, получим:

$$\frac{\pi D^2}{4} \Delta p = \pi D l \tau.$$

Правая часть этого равенства есть сила сопротивления. Отсюда:

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{4 \tau}{D}.$$

Из сравнения этого равенства с уравнением (4.10) видно, что силу сопротивления можно представить так:

$$\frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho \omega^2}{2D} \zeta.$$

Сила сопротивления, отнесенная к единице объема, будет, следовательно,

$$f = \zeta \frac{\rho \omega^2}{2D}. \quad (4.12)$$

В гидравлике и прикладной газовой динамике принято силу сопротивления представлять в этом виде.

Уравнение изменения количества движения при отсутствии сил сопротивления (§ 10) имело вид

$$\omega d\omega = - \frac{dp}{\rho}. \quad (3.2)$$

Добавляя к импульсу сил давления импульс сил сопротивления, определяемых уравнением (4.12), получим уравнение изменения количества движения при наличии сил сопротивления в следующем виде:

$$\omega d\omega = - \frac{dp}{\rho} - \zeta \frac{\omega^2}{2} \frac{dx}{D}. \quad (4.13)$$

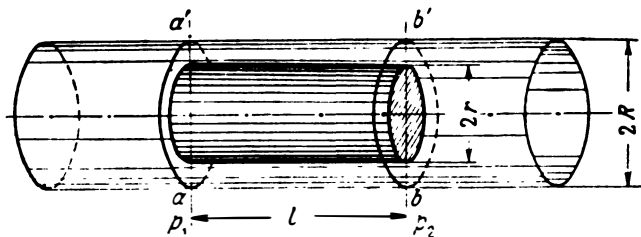
В цилиндрической трубе D — диаметр трубы. В насадках переменного сечения D есть в общем случае величина, характеризующая линейные размеры поперечного сечения, изменяющегося по длине насадка.

§ 14. Ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе

При ламинарном течении в цилиндрической трубе частицы жидкости движутся по прямым, параллельным оси трубы. Поэтому любая струйка имеет форму цилиндра с образующей, параллельной оси трубы.

Распределение скоростей по диаметру остается одинаковым в любом поперечном сечении трубы. Ускорение в направлении оси трубы равно нулю.

Рассмотрим отрезок струйки жидкости в виде соосного с трубой цилиндра радиуса r , заключенного между двумя поперечными сечениями aa' и bb' (фиг. 29), отстоящими на расстоянии l одно от другого.



Фиг. 29

Разность давлений $p_1 - p_2$, действующих на торцевые части рассматриваемого цилиндра, дает силу

$$(p_1 - p_2) \pi r^2,$$

направленную по оси трубы. Так как ускорение равно нулю, то эта сила уравнивается силой трения, возникающей на боковой поверхности цилиндра, равной

$$2 \pi r l \tau,$$

где τ — абсолютное значение напряжения трения.

Величина τ по закону Ньютона пропорциональна производной от скорости по радиусу

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr},$$

где v — переменная по радиусу скорость жидкости.

Знак минус взят в связи с тем, что τ по определению величина положительная, а $\frac{dv}{dr}$ — отрицательная величина. Условие равновесия сил приводит к дифференциальному уравнению:

$$(p_1 - p_2) r = -2l \mu \frac{dv}{dr}$$

или

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2l\mu} r dr.$$

Интегрируя это уравнение и принимая во внимание условие прилипания жидкости к стенкам трубы: $v = 0$ при $r=R$, где R —радиус трубы, получим

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu} (R^2 - r^2). \quad (4.14)$$

Таким образом, при установившемся ламинарном течении жидкости в круглой трубе скорость жидкости в поперечном сечении трубы изменяется по параболическому закону (закон Пуазейля).

Объемный расход жидкости равен:

$$V = 2\pi \int_0^R r v dr = \frac{p_1 - p_2}{8\mu l} \pi R^4. \quad (4.15)$$

Вычислим среднюю скорость w :

$$w = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{p_1 - p_2}{8\mu l} R^2. \quad (4.16)$$

Перепад давления, выраженный через среднюю скорость, равен

$$p_1 - p_2 = 8\mu \frac{l w}{R^2}.$$

Эту формулу легко преобразовать к такому виду:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{64}{\text{Re}} \frac{l}{D} \frac{\rho w^2}{2}.$$

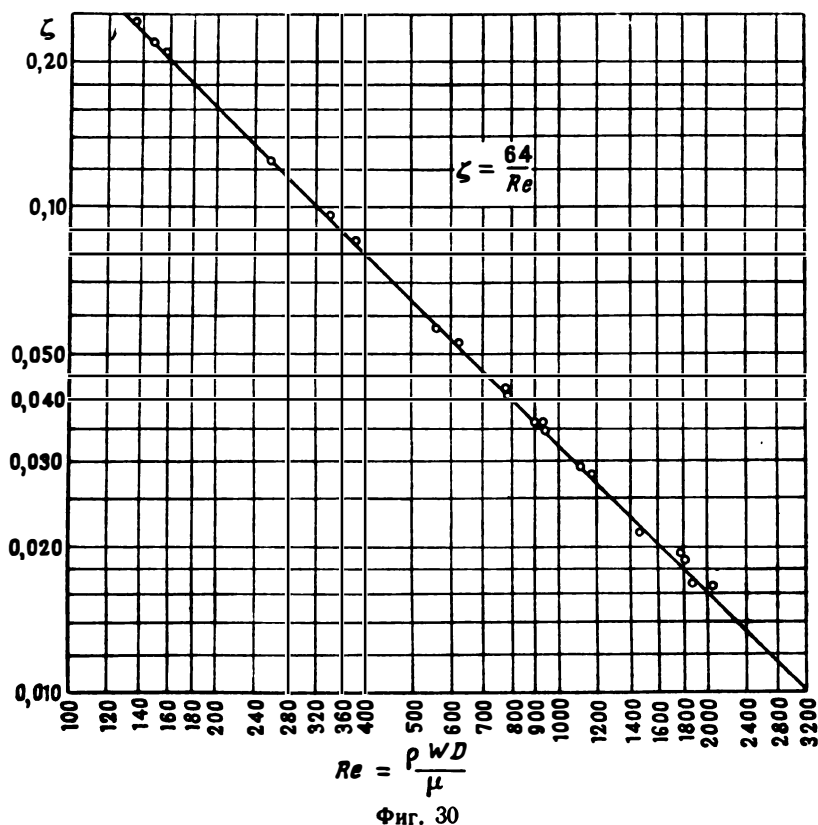
Величина

$$\zeta = \frac{64}{\text{Re}} \quad (4.17)$$

является коэффициентом сопротивления при ламинарном течении жидкости в круглой цилиндрической трубе. Теоретическая формула (4.17) прекрасно подтверждается экспериментально при достаточно малых значениях числа Re , которым соответствует ламинарное течение жидкости.

На фиг. 30 результаты измерений изображены на логарифмической сетке. Точки соответствуют экспериментальным данным, сплошная прямая построена по теоретической формуле (4.17). Измерения ζ были проделаны для труб различных диаметров, при различной температуре воды. Экспериментальные точки при обработке в безразмерных

величинах $\lg \zeta$ и $\lg Re$ легли на одну теоретическую прямую $\lg \zeta = \lg 64 - \lg Re$ при значениях Re до $Re = 2000$. При больших числах Re обычно имеет место турбулентное течение.



§ 15. Опытные данные для коэффициентов сопротивления труб

При турбулентном течении жидкости в трубе коэффициент сопротивления зависит от числа Re потока и от степени шероховатости внутренней поверхности трубы. В отличие от случая ламинарного течения, где коэффициент сопротивления определяется теоретической формулой, для расчета сопротивления при турбулентном течении до настоящего времени приходится пользоваться эмпирическими формулами или формулами, основанными на полуэмпирических теориях.

Приведем ряд формул для коэффициентов сопротивления гладких труб с указанием границ их применимости.

Формула Блязиуса, полученная в результате обработки опытных материалов, имеет вид:

$$\zeta = \frac{0,3164}{(\text{Re})^{0,25}}. \quad (4.18)$$

Формула Блязиуса справедлива вплоть до $\text{Re} = 1 \cdot 10^6$. При числах Re от $\text{Re} = 1 \cdot 10^5$ до $\text{Re} = 4 \cdot 10^5$ можно пользоваться формулой Стантона и Паннеля:

$$\zeta = 0,00357 + \frac{0,3052}{(\text{Re})^{0,35}}. \quad (4.19)$$

В широком диапазоне изменения числа Re справедлива полуэмпирическая формула Никурадзе [10]:

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta}} = 2,01 \lg (\text{Re} \sqrt{\zeta}) - 0,84. \quad (4.20)$$

Эта формула проверена в диапазоне чисел Re

$$3 \cdot 10^3 < \text{Re} < 3,2 \cdot 10^6.$$

Недостатком этой формулы Никурадзе является то, что она не дает явного выражения для коэффициента сопротивления и поэтому неудобна для применения.

Для вычислений удобнее пользоваться формулами, выражающими коэффициент сопротивления в виде явной функции от Re . Такую формулу предложил Никурадзе:

$$\zeta = 0,0032 + \frac{0,221}{(\text{Re})^{0,237}}. \quad (4.21)$$

Этой формулой можно пользоваться в диапазоне чисел Рейнольдса от $1 \cdot 10^5$ до $1 \cdot 10^8$. На фиг. 31 изображена зависимость ζ от Re в логарифмической сетке. Сплошная кривая соответствует формуле Никурадзе (4.21), пунктирная — формуле Блязиуса.

Приведенные выше формулы оказываются непригодными для шероховатых труб. Шероховатость стенок труб увеличивает сопротивление при турбулентном течении. Коэффициент сопротивления оказывается при этом функцией не только числа Re , но и параметра, характеризующего состояние поверхности трубы. Вместо одной кривой $\zeta = f(\text{Re})$ получается сетка кривых, соответствующих различным значениям параметра шероховатости.

В качестве параметра шероховатости обычно берут отношение ε высоты выступов шероховатости e к радиусу трубы

$$\varepsilon = \frac{2e}{D}. \quad (4.22)$$



Фиг. 31

Зависимость коэффициента сопротивления ζ от числа Re и от степени шероховатости установлена многочисленными экспериментами над течением в трубах как жидкости, так и газа. Основными опытами, послужившими для установления этой зависимости, явились опыты Никурадзе над течением воды в шероховатых трубах разных диаметров, в которых значения чисел Re доходили до $8 \cdot 10^6$ [11].

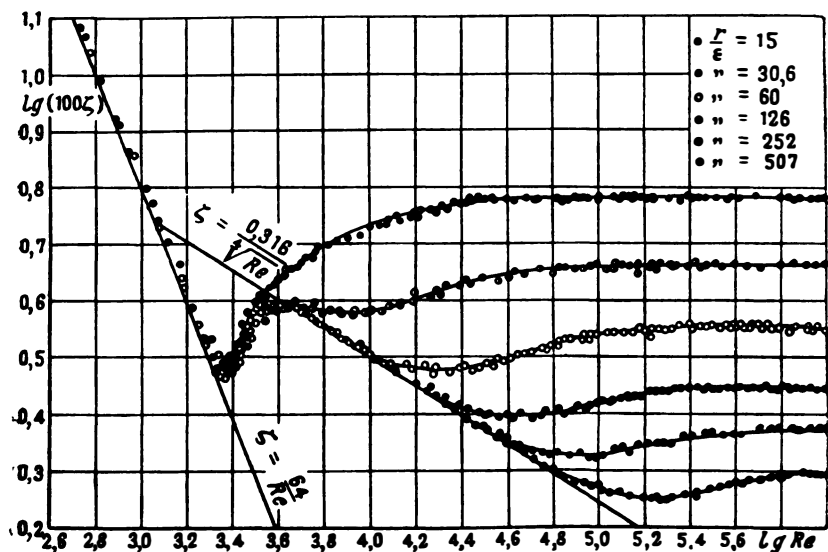
Эти исследования показывают, что в шероховатых трубах с возрастанием числа Re коэффициент сопротивления стремится к постоянному значению, зависящему только от степени шероховатости, т. е. сопротивление становится пропорциональным квадрату скорости. Квадратичный закон сопротивления, т. е. постоянство ζ , в трубах с большой относительной шероховатостью наступает при меньших числах Re .

На основании опытов Никурадзе установлено, что эти предельные, не зависящие от числа Re значения коэффициента ζ связаны с ε формулой:

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta}} = 1,74 + 2 \lg \frac{1}{\varepsilon}. \quad (4.23)$$

Этой формулой можно пользоваться при значениях числа Re больших, чем $4 \cdot 10^6 \div 5 \cdot 10^6$, в зависимости от значения величины ε .

Экспериментальные кривые зависимости коэффициента ζ от ε и Re для шероховатых труб приведены на фиг. 32.



Фиг. 32

Опыты Никурадзе были проведены в трубах с искусственной шероховатостью, которая создавалась нанесением на поверхность трубы зерен песка определенных размеров. Шероховатость реальных трубопроводов зависит от качества обработки трубы и изменяется вследствие коррозии и оседания на поверхности трубы частиц, переносимых газом. Опыты Идельчика, произведенные с трубами, имеющими естественную шероховатость, показали, что формула Никурадзе (4.23) справедлива и для реальных труб, при этом в качестве ε нужно брать некоторую среднюю высоту шероховатости, определяемую по профилограмме поверхности [13].

§ 16. Общие соображения о течениях газа при наличии трения и теплообмена

При расчете коротких труб, сопел и диффузоров можно почти всегда пренебрегать теплопередачей. В длинных трубах можно пренебрегать теплопередачей при наличии тепловой изоляции. При отсутствии теплообмена с внеш-

ней средней температура торможения T_0 и критическая скорость a_* сохраняют постоянное значение по всей длине струи. Из уравнения Бернулли—Сен-Венана следует, что для течений без теплообмена изменения температуры и приведенной скорости связаны уравнением (см. § 8):

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2. \quad (2.26)$$

Под влиянием сил сопротивления энтропия газа будет возрастать по направлению течения. Рассмотрим энтропию газа в каком-нибудь сечении струи. Для этого переведем газ в состояние покоя при помощи адиабатического процесса, т. е. определим давление торможения p'_0 и плотность торможения ρ'_0 газа в данном сечении струи. Для энтропии имеем, пользуясь (1.28):

$$S' = c_v (x-1) \ln \frac{T_0^{\frac{x}{x-1}}}{p'_0} + \text{const.}$$

Так как T_0 постоянно по длине струи, то действие сил сопротивления выражается в падении полного давления.

Приращение энтропии равно

$$\Delta S = S' - S = (x-1) c_v \ln \frac{p_0}{p'_0}, \quad (4.24)$$

где p_0 — полное давление в начальном сечении струи.

Назовем отношение полного давления в каком-нибудь сечении струи к полному давлению в начальном сечении „коэффициентом восстановления“ и обозначим его ν . Имеем

$$\nu = \frac{p'_0}{p_0}. \quad (4.25)$$

Относительную потерю полного давления назовем „коэффициентом потерь“ и будем обозначать его δ . Имеем

$$\delta = \frac{p_0 - p'_0}{p_0} = 1 - \nu. \quad (4.26)$$

Для приращения энтропии получим

$$\Delta S = -(x-1) c_v \ln (1 - \delta)$$

или

$$\Delta S = (x-1) c_v \left(\delta + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} + \dots \right).$$

Так как δ обычно малая величина, то в первом приближении коэффициент потерь пропорционален приращению энтропии

$$\delta \approx \frac{1}{x-1} \frac{\Delta S}{c_p} = \frac{J}{R} \Delta S. \quad (4.27)$$

В дальнейшем при анализе процессов, сопровождающихся действием сил сопротивления, мы всегда будем пользоваться коэффициентом потерь или коэффициентом восстановления.

Оценим влияние сил сопротивления на форму газовой струи. Так как T_0 не изменяется по длине струи, то

$$\nu = \frac{p'_0}{p_0} = \frac{\rho'_0}{\rho_0}.$$

Имеем:

$$Q = F \rho w = F \rho_0 a_* \frac{\rho'_0}{\rho_0} \lambda \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{x-1}}, \quad (4.28)$$

откуда

$$F = \left(\frac{x+1}{2} \right)^{\frac{1}{x-1}} \frac{Q}{a_* \rho_0 \nu q(\lambda)}. \quad (4.29)$$

Из этого равенства следует, что площадь поперечного сечения струи, соответствующая данному значению λ , будет в $\frac{1}{\nu}$ раз больше, чем при адиабатическом течении.

Так как ν убывает по направлению течения, то, в частности, минимальное сечение струи будет соответствовать не $\lambda=1$, а несколько большей скорости. Однако потери в соплах обычно настолько малы, что этой разностью пренебрегают.

Рассмотрим подробнее течение в цилиндрической трубе. При отсутствии сопротивления скорость не должна изменяться по длине трубы. При наличии сил сопротивления коэффициент ν убывает по направлению течения. Так как приведенный расход $q(\lambda)$ при дозвуковых скоростях возрастает с увеличением скорости, то из формулы (4.29) следует, что скорость должна возрастать по направлению течения. Расширение струи под влиянием потерь должно точно компенсироваться сужением струи при возрастании скорости.

При сверхзвуковой скорости приведенный расход возрастает, а скорость убывает по длине трубы. В частности, отсюда следует, что в цилиндрической трубе (при отсут-

ствии теплообмена через стенки) скорость из дозвуковой не может перейти в сверхзвуковую. Если отношение давления в начале трубы к давлению в конце трубы достаточно велико, то скорость в конце трубы будет равна скорости звука.

Рассмотрим изменение давления вдоль трубы. Пользуясь уравнением Бернулли—Сен-Венана, имеем:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2 \right).$$

Из уравнения постоянства расхода получаем:

$$\rho = \frac{Q}{Fa_* \lambda},$$

откуда

$$\frac{p}{p_0} = \frac{Q}{F\rho_0 a_*} \frac{1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2}{\lambda}$$

или

$$p = \frac{x+1}{2x} \frac{1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2}{\lambda} a_* \frac{Q}{F}. \quad (4.30)$$

Из этого равенства следует, что с ростом приведенной скорости давление всегда убывает.

При дозвуковой скорости давление падает вдоль трубы. Течение в трубе устанавливается в зависимости от отношения давлений на концах трубы.

При сверхзвуковой скорости давление возрастает по длине трубы, и движение газа осуществляется за счет падения кинетической энергии. Опыты показывают, что такое течение невозможно на участке трубы любой длины. Если труба имеет достаточно большую длину, то в некотором сечении трубы образуется скачок уплотнения. Скорость в этом сечении внезапно переходит в дозвуковую и затем начинает возрастать. Положение скачка уплотнения зависит от длины трубы и от давления в конце трубы. Аналогичные заключения справедливы и для сужающихся насадков.

В заключение отметим полезное соотношение, следующее из формулы (4.28), в применении к цилиндрической трубе. Если p_0 — полное давление в начале трубы и λ_1 — приведенная скорость в начале трубы, то имеем

$$v = \frac{p_0'}{p_0} = \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda)}. \quad (4.31)$$

В диффузорах и соплах имеем аналогичным образом

$$v = \frac{p_0'}{p_0} = \frac{F_1 \zeta(\lambda_1)}{F q(\lambda)}. \quad (4.32)$$

Формула (3.20), полученная в § 12 для потерь в скачке уплотнения, является частным случаем формулы (4.31).

Рассмотрим общий случай течения газа при наличии сил трения и притока тепла. При наличии теплообмена температура торможения и критическая скорость будут изменяться вдоль струи. Критическую скорость и температуру торможения в данном сечении струи определим уравнением

$$\frac{x+1}{2(x-1)} a_*^2 = \frac{w^2}{2} + \frac{x}{x-1} \frac{p}{\rho},$$

где

$$a_* = \sqrt{\frac{2x}{x+1} R T_0'}.$$

Приведенной скоростью назовем, как и ранее, отношение скорости потока в данном сечении к критической скорости в этом сечении. Имеем

$$\lambda = \frac{w}{a_*}.$$

Уравнение энергии (2.31) при $N=0$, пользуясь понятием критической скорости в данном сечении струи, можно представить в виде

$$a_*^2 - a_{*1}^2 = \frac{2(x-1)JU}{x+1} Q, \quad (4.33)$$

где a_{*1} — критическая скорость в начальном сечении струи. Преобразуем уравнение расхода. Имеем

$$Q = \rho w F = \left(\frac{2}{x+1} \right)^{\frac{1}{x-1}} F a_{*1} \rho_0 q(\lambda) \frac{\rho_0' a_{*1}}{\rho_0 a_{*1}}.$$

Из уравнения Клапейрона следует

$$v = \frac{p_0'}{p_0} = \frac{\rho_0' T_0'}{\rho_0 T_0}.$$

Обозначим отношение критической скорости в данном сечении струи к критической скорости в начальном сечении через ϑ . Имеем

$$\vartheta = \frac{a_*}{a_{*1}} = \sqrt{\frac{T_0'}{T_0}}. \quad (4.34)$$

Уравнение (4.33) принимает вид

$$Q = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} F a_{*1} \rho_0 q(\lambda) \frac{\nu}{\vartheta}. \quad (4.35)$$

Если тепло подводится к газу, то влияние притока тепла на форму газовой струи аналогично влиянию потерь полного давления (уменьшению ν). Площадь поперечного сечения струи, соответствующая данному значению λ , будет при наличии притока тепла в ϑ раз больше, чем при течении без притока тепла. Отсюда следуют выводы, аналогичные тем, которые были получены ранее для влияния потерь на течения без теплообмена. Так, в цилиндрической трубе при дозвуковой скорости скорость возрастает вдоль трубы, а при сверхзвуковой — убывает. В цилиндрической трубе в случае, когда тепло только подводится, невозможен переход от дозвуковой скорости к сверхзвуковой. Такой переход возможен лишь в насадке, который сначала сужается, а затем расширяется.

Если производить интенсивный отбор тепла от текущего газа, то можно достигнуть того, что, наоборот, при дозвуковых скоростях скорость будет убывать по длине трубы, а при сверхзвуковых — возрастать. Теоретически мыслим переход от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым в цилиндрической трубе, если в некотором сечении трубы заменить нагревание газа интенсивным охлаждением.

Для зависимости давления от приведенной скорости имеем формулу (4.30), в которой a_* — теперь переменная величина. В зависимости от величины притока тепла давление как при дозвуковых, так и при сверхзвуковых течениях вдоль струи может убывать или возрастать.

Применяя формулу (4.35) к начальному и к некоторому произвольному сечению трубы, получим для коэффициента восстановления следующее выражение

$$\nu = \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda)} \vartheta. \quad (4.36)$$

Для насадков переменного сечения аналогичным образом имеем.

$$v = \frac{F_1 q(\lambda_1)}{F q(\lambda)} \vartheta. \quad (4.37)$$

§ 17. Течение в трубе без притока тепла

Рассмотрим течение газа в цилиндрической трубе при отсутствии теплообмена с внешней средой.

Движение газа определяется в этом случае следующими уравнениями:

уравнением изменения количества движения:

$$w \frac{dw}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} - \zeta \frac{w^2}{2D}, \quad (4.13)$$

уравнением постоянства энергии потока:

$$\frac{w^2}{2} + \frac{x}{x-1} \frac{p}{\rho} = \frac{a_*^2 (x+1)}{2(x-1)} \quad (2.23)$$

или

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2, \quad (2.26)$$

и уравнением постоянства расхода вдоль трубы:

$$Q = F \rho w = \text{const.}$$

Уравнение (4.13), как это будет видно в дальнейшем, может быть проинтегрировано. В связи с этим все вопросы о течении газа в трубе при отсутствии теплопередачи могут быть полностью решены при наличии данных о зависимости коэффициента сопротивления ζ от чисел M и Re .

Опыты, поставленные Фресселем для определения зависимости коэффициента сопротивления ζ от числа M , показали (см. ниже), что для гладких труб коэффициент ζ практически не зависит от числа M , а следовательно, и от числа λ .

Это обстоятельство чрезвычайно облегчает расчет труб и позволяет непосредственно пользоваться для течений газа богатым экспериментальным материалом, полученным при исследованиях движения воды в трубах.

Преобразуем уравнение (4.13). Уравнение энергии и уравнение расхода позволяют выразить плотность и давление через приведенную скорость. Имеем

$$\rho = \frac{Q}{F a_*} \frac{1}{\lambda}$$

$$p = \frac{x+1}{2x} \frac{a_* Q}{F} \frac{1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2}{\lambda}. \quad (4.30)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (4.13), получим:

$$\frac{x+1}{x} \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1 \right) \frac{d\lambda}{\lambda} = \zeta \frac{dx}{D}. \quad (4.38)$$

Из этого уравнения сейчас же следует вывод, полученный уже раньше из общих соображений: в цилиндрической трубе скорость из дозвуковой не может перейти в сверхзвуковую. Действительно, при $\lambda < 1$, $\frac{d\lambda}{dx} > 0$, т. е. скорость вдоль трубы возрастает, а при $\lambda > 1$ из уравнения (4.38) следует, что $\frac{d\lambda}{dx} < 0$, т. е. скорость убывает вдоль трубы. Если скорость увеличится в трубе до скорости звука, то она уже не может дальше возрасти. Таким образом, скорость звука может установиться только в выходном сечении трубы.

Проинтегрируем уравнение (4.38) и при этом заменим размерную координату x безразмерной величиной \bar{x} , выражающей длину трубы в долях диаметра.

Имеем

$$\chi(\lambda_1) - \chi(\lambda) = \int_0^{\bar{x}} \zeta(\text{Re}) d\bar{x}, \quad (4.39)$$

где

$$\chi(\lambda) = \frac{x+1}{2x} \left[\frac{1}{\lambda^2} + 2 \ln \lambda \right]. \quad (4.40)$$

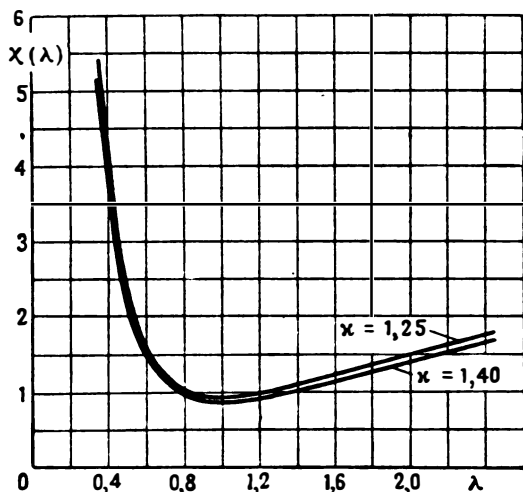
Приведенная скорость в начале трубы обозначена через λ_1 ; x и λ относятся к произвольному сечению трубы. График функции $\chi(\lambda)$ дан на фиг. 33; значения этой функции приведены в табл. 2, 3 и 4. Длину трубы, выраженную в долях диаметра, обозначим через \bar{l} , а приведенную скорость в конце трубы — через λ_2 .

Для определения течения в трубе необходимо, чтобы у входа в трубу были известны основные параметры, характеризующие состояние газа: значения x , R , T_0 , ρ_0 и p_0 .

Имеем:

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^x = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{x}{x-1}} = \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda_1^2\right)^{\frac{x}{x-1}},$$

где p_1 , ρ_1 , T_1 и λ_1 — давление, плотность, температура и приведенная скорость газа в начальном сечении трубы. Эти величины обычно подлежат определению.



Фиг. 33

Расход на единицу площади поперечного сечения трубы будет:

$$\frac{Q}{F} = \rho w.$$

Условный критический расход, соответствующий скорости, равной скорости звука, т. е. $\lambda_1 = 1$, в начальном сечении трубы будет:

$$\rho_* a_* = \left(\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}} \sqrt{\frac{2x}{x+1} p_0 \rho_0}.$$

Этот расход мог бы быть реально осуществлен при бесконечно малой длине трубы и перепаде давления, превышающем критический.

Отношение расхода к условному критическому расходу равно приведенному расходу в начальном сечении трубы. Имеем

$$q_1 = \frac{\rho w}{\rho_* \alpha_*} = \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} \lambda_1 \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda_1^2\right)^{\frac{1}{x-1}}. \quad (4.41)$$

Расход газа через трубу в дальнейшем мы будем выражать через q_1 . Имеем

$$q_1 = \frac{Q}{F} \frac{\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}}{\sqrt{\frac{2x}{x+1} p_0 \rho_0}}. \quad (4.42)$$

Выразим давление через q_1 и приведенную скорость. Заменяя в уравнении (4.30) отношение $\frac{Q}{F}$ его выражением через q_1 из (4.42), получим

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}} \frac{1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2}{\lambda} q_1.$$

Обозначая

$$\beta = \frac{p}{p_0}$$

и

$$y(\lambda) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} \frac{\lambda}{1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2}, \quad (4.43)$$

имеем:

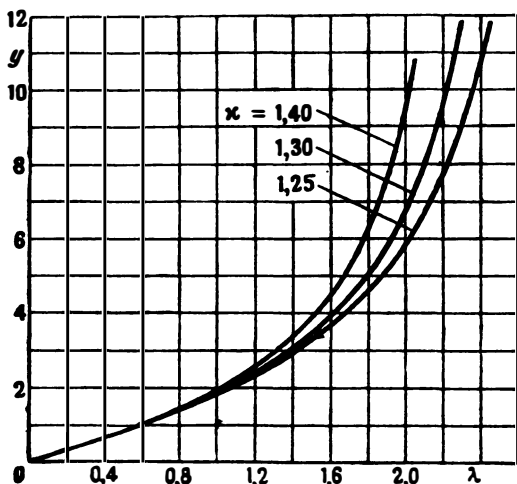
$$y = \frac{q_1}{\beta}. \quad (4.44)$$

График функции (4.43) изображен на фиг. 34. Значения функции y даны в табл. 2, 3 и 4.

Из формулы (4.44) можно определить критическое давление. Если приведенная скорость в конце трубы равна единице, то имеем

$$\beta_{кр} = \left(\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}} q_1. \quad (4.45)$$

Критическое давление в конце трубы равно критическому давлению в начале трубы, умноженному на приведенный расход в начале трубы.



Фиг. 34

Как было указано выше (§ 15), приведенную скорость и приведенный расход в данном сечении трубы можно выразить через коэффициент восстановления

$$v = \frac{p'_0}{p_0} = \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda)} \quad (4.36)$$

Коэффициент восстановления в конце трубы при $\lambda = 1$ будет равен q_1 :

$$v_{кр} = q_1.$$

Пользуясь формулами (4.40), (4.41) и (4.44), можно построить графики зависимости χ от y и q . Эти графики даны на фиг. 35 и 36. Значения этих функций даны в табл. 2, 3 и 4. Уравнение (4.39) можно представить в виде:

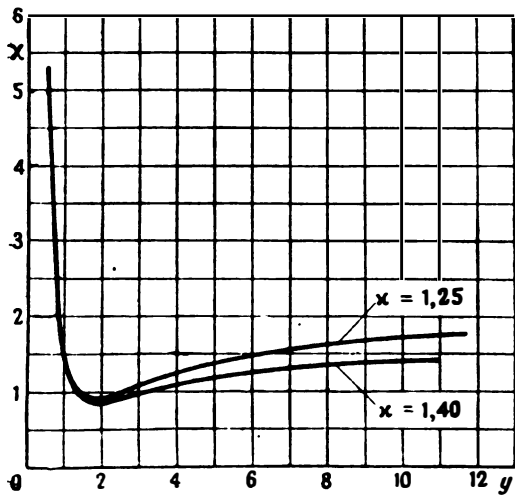
$$f(q_1) - \Phi(y) = \int_0^{\bar{x}} \zeta(\text{Re}) d\bar{x}, \quad (4.45)$$

где

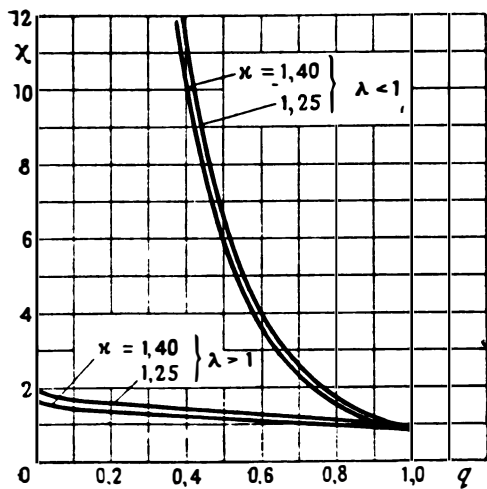
$$f(q) = \chi(\lambda) \quad (4.47)$$

и

$$\Phi(y) = \Phi\left(\frac{q_1}{\beta}\right) = \chi(\lambda). \quad (4.48)$$



Фиг. 35



Фиг. 36

Уравнение (4.39) или (4.46) решается последовательными приближениями. Остановимся подробно на вопросе вычисления первого приближения.

Как установлено опытами Фресселя, коэффициент ζ для гладких труб не зависит от числа M , а зависит лишь от числа Re .

Число Re для трубы можно представить в виде

$$Re = \frac{\rho \omega D}{\mu} = \left(\frac{2}{x+1} \right)^{\frac{1}{x-1}} \frac{q_1 D}{\mu} \sqrt{\frac{2x}{x+1} \rho_0 \rho_0}. \quad (4.49)$$

Вдоль трубы может изменяться лишь коэффициент вязкости, зависящий от температуры. Зависимость μ от температуры приведена выше—§ 13, формулы (4.2) и (4.3).

Вследствие изменения скорости по длине трубы изменяется температура газа, а следовательно, и коэффициент вязкости и число Re . Коэффициент вязкости слабо зависит от температуры, а коэффициент сопротивления при больших значениях числа Re изменяется очень немного. Поэтому в первом приближении можно считать коэффициент сопротивления постоянным вдоль всей трубы и затем, если это необходимо, ввести небольшую поправку.

Рассмотрим сначала уравнение (4.46) для всей трубы. Считая ζ постоянным по длине трубы, имеем

$$f(q_1) - \Phi\left(\frac{q_1}{\beta_2}\right) = \bar{\zeta}. \quad (4.50)$$

Пусть требуется определить расход через трубу по заданному значению β_2 в конце трубы. Пользуясь графиками или таблицами функций f и Φ , строим график зависимости

$f(q_1) - \Phi\left(\frac{q_1}{\beta_2}\right)$ от q_1 и, пользуясь (4.49),—график $\bar{\zeta}$ от q_1 .

Пересечение этих кривых определяет q_1 и, следовательно, расход газа через трубу. Приведенная скорость в конце трубы определяется по формуле (4.44), а коэффициент восстановления,—пользуясь формулой (4.31).

Если необходимо ввести поправку на изменение числа Re вдоль трубы, можно поступить следующим образом. Применяя формулу (4.32) к участку трубы от начального сечения до некоторого произвольного сечения и считая q_1 и ζ известными из первого приближения, получим

$$\Phi\left(\frac{q_1}{\beta}\right) = \chi(\lambda) = f(q_1) - \bar{\zeta}x. \quad (4.51)$$

Из этого уравнения находим значения λ , а следовательно, значения $\frac{T}{T_0}$ вдоль трубы.

Определяя затем Re и ζ вдоль трубы, вычислим

$$\int_0^{\bar{l}} \zeta (Re) d\bar{x}$$

и внесем соответствующую поправку в определение q_1 . Дальнейшие приближения уже не нужны.

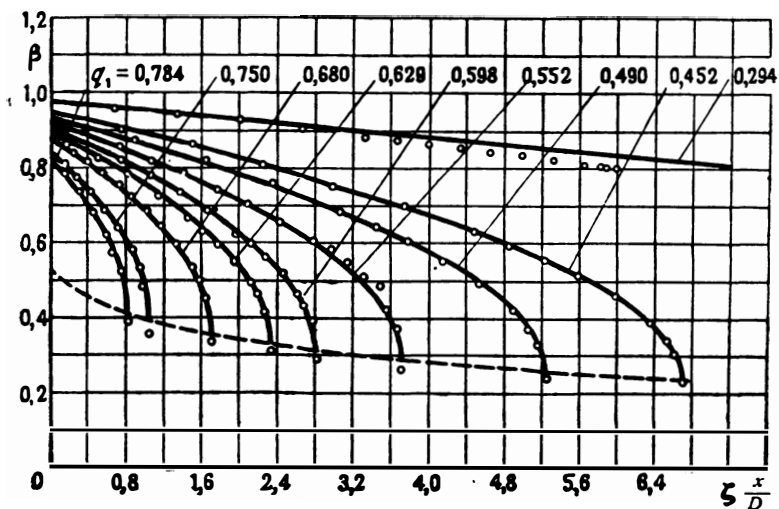
Большой интерес представляет вычисление критического, максимального возможного расхода через трубу. Критический расход соответствует скорости, равной скорости звука в конце трубы. Считая ζ постоянным по длине трубы, имеем:

$$\bar{U}_{кр} = f(q_{1кр}) - \frac{x+1}{2x}. \quad (4.52)$$

Для уточнения значения $\bar{l}_{кр}$, принимая во внимание изменение числа Re вдоль трубы, можно воспользоваться уравнением (4.51), так, как это было указано выше.

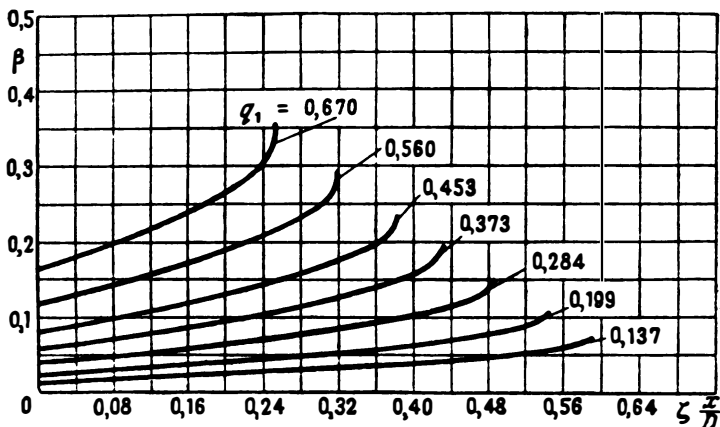
Уравнение (4.51) при заданном q_1 дает возможность вычислить распределение приведенной скорости, а следовательно, и давления вдоль трубы.

На фиг. 37 изображена сетка кривых распределения давления для различных значений приведенного расхода q_1



Фиг. 37

в виде зависимости $\beta = \frac{P}{P_0}$ от $\zeta \bar{x}$ для дозвукового потока, а на фиг. 38—соответствующие кривые для сверхзвукового потока. При помощи этих кривых, зная расход, а следовательно, число Re и соответствующее ему значение ζ , можно определить давление в любом сечении трубы. При дозвуковой скорости давление сначала медленно, а затем все более быстро падает, пока не достигнет критического значения при $\zeta \bar{x}$, соответствующем критической длине. Нижняя пунктирная кривая соединяет эти критические точки.



Фиг. 38

При сверхзвуковом течении картина распределения давления обратная: давление сначала медленно, а затем все более быстро возрастает.

На фиг. 39 дана кривая зависимости $\zeta \bar{L}_{кр}$, вычисленная на основании формулы (4.52).

Малые значения скорости, соответствующие малым значениям чисел M и λ , когда сжимаемость газа имеет небольшое значение, отвечают, как это видно из уравнения (4.41), малым значениям q_1 . Обозначим

$$\varphi = \left(\frac{2}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}} q_1. \quad (4.53)$$

В этом случае, пользуясь разложением (3.12), имеем для уравнения (4.39) следующее выражение:

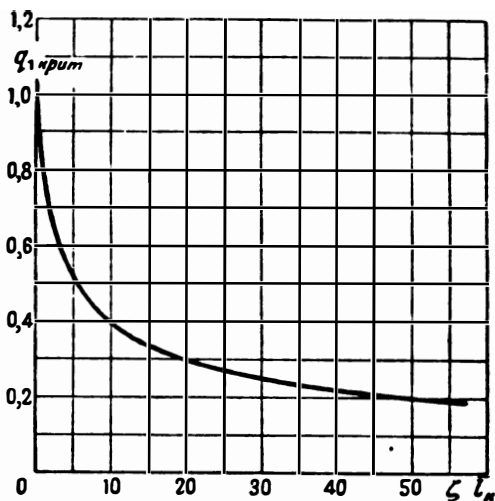
$$\frac{x}{x+1} \int_0^{\bar{x}} \zeta(Re) d\bar{x} = \frac{1-v^2}{2} \frac{1}{\varphi^2} + \ln v + \frac{\varphi^2}{2(x+1)} \left(1 - \frac{1}{v^2} \right) + \dots (4.54)$$

Пользуясь коэффициентом потерь

$$\delta = 1 - \nu,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} \int_0^{\bar{x}} \zeta (Re) d\bar{x} &= \left(\delta - \frac{1}{2} \delta^2 \right) \frac{1}{\varphi^2} - \left(\delta - \frac{1}{2} \delta^2 + \dots \right) \cdot \\ &- \frac{\varphi^2}{x+1} \left(\delta + \frac{3}{2} \delta^2 + \dots \right). \end{aligned} \quad (4.55)$$



Фиг. 39

При малых значениях φ и небольших потерях δ приближенно будет

$$\frac{x}{x+1} \zeta \bar{x} = \frac{\delta}{\varphi^2}.$$

Но при малых значениях λ_1 и φ имеем

$$\varphi^2 \approx \lambda_1^2 = \frac{w^2}{a_*^2} = \frac{w^2}{\zeta x \frac{\rho_0}{x+1}},$$

откуда

$$\rho_0 - \rho'_0 = \zeta \frac{\rho_0 w^2}{2}.$$

Мы получили уже известную формулу для расчета течения несжимаемой жидкости в трубах.

Из уравнения (4.39) для двух любых сечений трубы имеем:

$$\Phi\left(\frac{q_1}{\beta_A}\right) - \Phi\left(\frac{q_1}{\beta_B}\right) = \int_{\bar{x}_A}^{\bar{x}_B} \zeta(\text{Re}) d\bar{x}.$$

Пользуясь этим уравнением, можно определить значение ζ по измерениям расхода через трубу и по распределению давления вдоль трубы:

$$\zeta \approx \Phi'\left(\frac{q_1}{\beta}\right) \frac{1}{\beta^2} \frac{\Delta\beta}{\Delta x}. \quad (4.56)$$

Рассмотрим подробнее случай, когда скорость в трубе больше скорости звука. Для получения сверхзвуковой скорости в трубе перед ее начальным сечением должно быть помещено сопло Лавалья.

Расход газа в трубе в этом случае известен. Известны также скорость, плотность, температура и давление газа в начальном сечении трубы.

Как было показано выше, при сверхзвуковой скорости давление по длине трубы возрастает, а скорость падает.

Пользуясь формулой (4.39), можно вычислить скорость в любом сечении трубы. Имеем:

$$\chi(\lambda) = \chi(\lambda_1) - \int_0^{\bar{x}} \zeta(\text{Re}) d\bar{x}.$$

Определяя Re в начальном сечении и считая его в первом приближении постоянным по длине трубы, находим распределение λ вдоль трубы. Для уточнения можно по найденным значениям λ вычислить изменение числа Re вдоль трубы и снова произвести определение λ .

Скорость и давление в трубе на участке со сверхзвуковой скоростью не зависят от давления в конце трубы. Движение газа происходит в этом случае за счет кинетической энергии струи. Если труба имеет достаточно большую длину, то, как показывают наблюдения, сверхзвуковое течение по всей длине трубы невозможно. В некотором сечении трубы возникает скачок уплотнения, и скорость внезапно переходит в дозвуковую и возрастает затем к концу трубы. Положение скачка уплотнения зависит от длины трубы и от давления в конце трубы.

Для определения положения скачка уплотнения вычислим для каждого сечения трубы приведенную скорость λ'

и давление p' , которые имели бы место в этом сечении, если бы перед ним располагался скачок уплотнения. Имеем

$$\lambda' = \frac{1}{\lambda},$$

$$\frac{p'}{p_0} = \frac{q_1}{y(\lambda')}.$$

С другой стороны, можно вычислить приведенную скорость λ_2 в конце трубы по заданному давлению p_2 . Имеем

$$y(\lambda_2) = \frac{q_1}{\beta_2}.$$

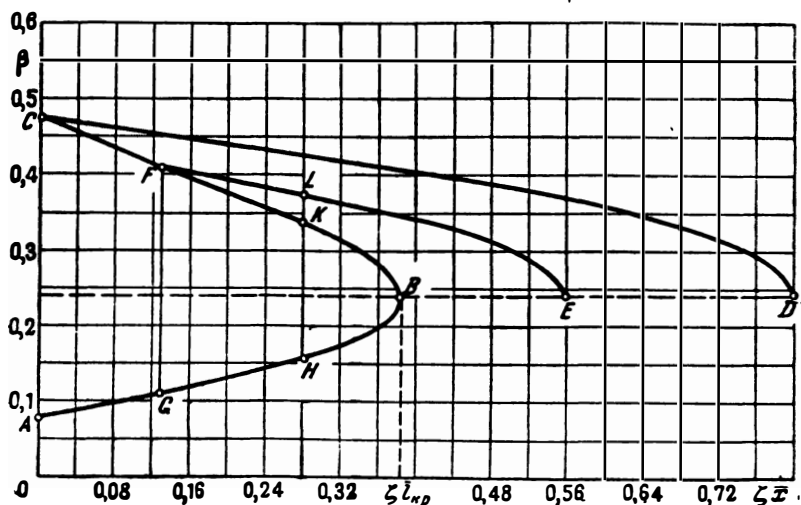
Интегрируя (4.38), получим:

$$\chi(\lambda_2) - \chi(\lambda) = - \int_{\frac{\lambda}{x}}^{\frac{1}{x}} \zeta(\text{Re}) d\bar{x}. \quad (4.57)$$

Пользуясь формулой (4.57), можно вычислить распределение скорости и давления по трубе, начиная с ее конца.

Положение скачка уплотнения определяется пересечением кривых распределения давления при наличии скачка уплотнения, вычисленных от начала и от конца трубы.

Рассмотрим различные возможные случаи. Пусть в начале трубы заданы p_0 , ρ_0 , T_0 и λ_1 . По этим данным определяем q_1 и $\beta_{кр}$. На фиг. 40 изображен случай, отвечающий $\lambda_1 = 1,76$, $q_1 = 0,453$. Кривая AB соответствует повы-



Фиг. 40

шению давления вдоль трубы при постепенном падении скорости под влиянием сил сопротивления. Точка B отвечает критической длине трубы. Кривая BC изображает давление в каждом данном сечении трубы при наличии скачка уплотнения непосредственно перед этим сечением. Кривая CD изображает падение давления по длине трубы при увеличении скорости после скачка уплотнения, если скачок расположен в самом начале трубы. На фигуре хорошо видны различные возможные случаи. Допустим, что длина трубы превышает критическую и отвечает, например, точке E . В этом случае сверхзвуковое течение без скачка уплотнения не может существовать в трубе, как бы низко ни было давление в конце трубы. Если давление в конце трубы равно критическому или ниже его, распределение давления по длине трубы будет изображаться кривой $EFGA$. Если давление выше критического, то скачок уплотнения соответственно смещается к началу трубы. Если давление в конце трубы больше значения, отвечающего точке D , в трубе вообще не может существовать течение с расходом q_1 . Точке D отвечает максимальная длина трубы, при которой в начале трубы приведенная скорость равна λ_1 .

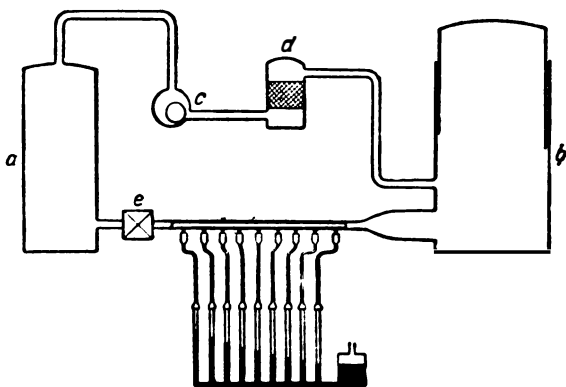
Рассмотрим случай, когда длина трубы меньше критической и отвечает, например, точке H на фиг. 40. Сверхзвуковой поток может занимать всю длину трубы, если давление в конце трубы меньше значения, отвечающего точке K кривой BC . Если давление в конце трубы ниже значения, отвечающего точке H на кривой AB , из конца трубы вырывается сверхзвуковая струя, имеющая давление и скорость, соответствующие точке H . Если давление в конце трубы лежит между значениями, отвечающими точкам H и K , в конце трубы образуется система косых скачков уплотнения, которые постепенно при увеличении давления в конце трубы до значения, отвечающего точке K , переходят в прямой скачок. При дальнейшем увеличении давления скачок перемещается по направлению к началу трубы. Эпюра давления при этом имеет, например, вид $LFGA$.

Диаграмма на фиг. 40 дает приближенные результаты. Она построена в предположении, что в трубе образуется прямой скачок уплотнения. В действительности в зависимости от значений числа Re вместо прямого скачка при переходе к дозвуковой скорости могут образовываться сложные системы косых скачков. С другой стороны, при расчете принимается, что коэффициент сопротивления после скачка уплотнения можно вычислять, пользуясь обычными формулами для течения в данной трубе. После скачка уплотнения на некотором расстоянии от него неравномер-

ность поля скоростей в поперечном сечении может быть значительной и вследствие этого коэффициент сопротивления повышен.

Все эти обстоятельства не учитываются приведенным расчетом и требуют для своего выяснения тщательно поставленных опытов. Результаты приведенных расчетов могут поэтому рассматриваться лишь как приближенные.

Течения в гладких цилиндрических трубах при отсутствии теплообмена были экспериментально изучены Фресселем. Установка Фресселя состояла из котла *a* емкостью 40 м³, газометра *b* емкостью 25 м³, вакуумноса *c*, сушильного аппарата *d*, быстродействующего запорного крана *e* и исследуемого участка трубопровода (фиг. 41).



Фиг. 41

При помощи вакуумноса воздух отсасывался из котла и, пройдя сушильный аппарат, поступал в газометр, в котором поддерживалось давление, близкое к атмосферному. Кран при этом должен быть закрыт. После открытия крана воздух под действием разности между атмосферным давлением в газометре и пониженным давлением в котле устремлялся через трубопровод из газометра в котел. Для того, чтобы состояние потока в трубопроводе оставалось во время опыта неизменным, между газометром и трубопроводом или между трубопроводом и котлом устанавливалось сопло, критическое сечение которого было не меньше сечения трубопровода.

Если сопло устанавливалось за трубопроводом, то перед котлом в трубопроводе устанавливалась дозвуковая скорость.

Для достижения сверхзвуковой скорости сопло, имеющее форму сопла Лаваля, устанавливалось перед трубопроводом.

Расход воздуха через трубопровод определялся по измерениям скорости опускания колпака газометра, площадь поперечного сечения которого была известна, и по измерению давления и температуры воздуха в газометре. Одновременно при помощи ртутного батарейного манометра, соединенного с дренажными отверстиями, тщательно просверленными в стенках трубопровода, измерялось распределение давления по длине исследуемого участка трубопровода. Результаты измерений Фресселя отмечены на фиг. 37 точками. Кривые на фиг. 37 и 38 построены по теоретической формуле (4.51). При построении экспериментальных точек были приняты во внимание потери, имевшие место на входе в трубу в этих экспериментах. Эти потери были вычислены следующим образом.

Зная q_1 , можно определить λ_1 в начале трубы и, следовательно,

$$\beta_1 = \frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda_1^2 \right)^{\frac{x}{x-1}}.$$

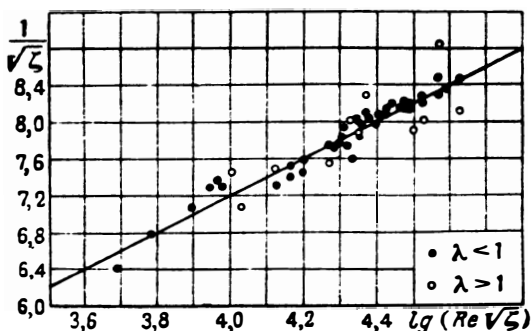
В опытах Фресселя значения давления отнесены к давлению в котле, равному

$$p_{0к} = \frac{p_0}{v_1},$$

где v_1 — коэффициент потерь между котлом и началом трубы.

Отношение $\frac{p}{p_{0к}}$ и значение β_1 , имеющиеся в работе Фресселя, определяют v_1 :

$$v_1 = \frac{p}{p_{0к} \beta_1}.$$



Фиг. 42

Заметим, что Фрессель не обратил внимания на существование этих потерь, и эта ошибка вошла во все приведенные им данные.

На основании измерения распределения давления вдоль трубы и измерения расхода Фрессель вычислил значения коэффициента сопротивления ζ . Как уже было отмечено из опытов Фресселя, выяснилось, что коэффициент сопротивления газа не зависит от числа M и будет таким же, как и в случае несжимаемой жидкости.

Зависимость коэффициента сопротивления воздуха от числа Re по измерениям Фресселя как для дозвуковых, так и для сверхзвуковых скоростей представлена на фиг. 42. Здесь прямая соответствует зависимости (4.20) коэффициента сопротивления от числа Re , установленной Никурадзе на основании опытов с течением воды в гладких трубах.

§ 18. Течение в трубе при наличии притока тепла

Во многих случаях необходимо исследовать влияние притока тепла или теплоотдачи на движение газа в трубе.

Если приток тепла осуществляется за счет сжигания топлива непосредственно в текущем газе, он может считаться заданной величиной.

При течении в трубопроводах приток или отвод тепла происходит через стенки трубы и зависит от разности температуры текущего газа и температуры внешней среды, а также от теплопроводности стенок трубы и газа.

Преобразуем уравнения движения. Уравнение энергии (2.31) при наличии притока тепла и $N=0$ можно представить в виде:

$$a_*^2 - a_{*1}^2 = \frac{2(x-1)}{x+1} \frac{JU}{Q}. \quad (4.33)$$

Уравнение количества движения будет

$$w dw = -\frac{dp}{\rho} - \zeta \frac{w^2}{2D} dx. \quad (4.13)$$

Выразим плотность через скорость при помощи уравнения расхода

$$\rho = \frac{Q}{Fw}.$$

Давление через приведенную скорость выражается уравнением

$$p = \frac{x+1}{2x} \frac{Q}{F} a_* \frac{1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2}{\lambda} \quad (4.30)$$

или

$$p = \frac{x+1}{2x} \frac{Q}{F} \frac{a_*}{y(\lambda)} \left(\frac{x+1}{2} \right)^{\frac{1}{x-1}}.$$

Подставляя полученные выражения ρ и p в уравнение (4.13) и памятуя, что a_* — переменная величина, получим

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{1+\lambda^2}{\lambda^2} d \ln \frac{a_*}{a_{*1}} = -\frac{x}{x+1} \zeta d\bar{x}. \quad (4.58)$$

Из этого уравнения сразу вытекают заключения, уже полученные ранее из общих соображений. В случае, когда по всей длине трубы приток тепла или положителен, или равен нулю, при дозвуковой скорости ($\lambda < 1$) скорость вдоль трубы возрастает в направлении течения, а при сверхзвуковой скорости — убывает. Отсюда также следует, что когда имеется только подвод тепла извне, то газ не может в цилиндрической трубе перейти от дозвуковой скорости к сверхзвуковой.

Рассмотрим сначала частный случай течения газа при наличии теплообмена, но при отсутствии сил трения. Это отвечает, например, процессу в камере сгорания воздушно-реактивного двигателя, где силами трения о стенки камеры можно в первом приближении пренебречь. В уравнении (4.58) при этом разделяются переменные, и это уравнение интегрируется.

При рассмотрении этого случая мы предпочтем, однако, снова вернуться непосредственно к уравнению изменения количества движения.

Применяя уравнение изменения количества движения к массе газа, расположенной в данный момент между начальным сечением и некоторым другим сечением, получим

$$p_1 - p = \rho w^2 - \rho_1 w_1^2 \quad (4.59)$$

или

$$w_1 + \frac{p_1}{\rho_1 w_1} = w + \frac{p}{\rho w}. \quad (4.60)$$

Пользуясь уравнением (4.33), определяющим критическую скорость, получим

$$\frac{p}{\rho} = RT = RT'_0 \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2\right).$$

Кроме того,

$$a_*^2 = \frac{2x}{x+1} RT_*.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (4.60), получим¹

$$\left(\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1}\right) a_{*1} = \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) a_*. \quad (4.61)$$

Обозначим

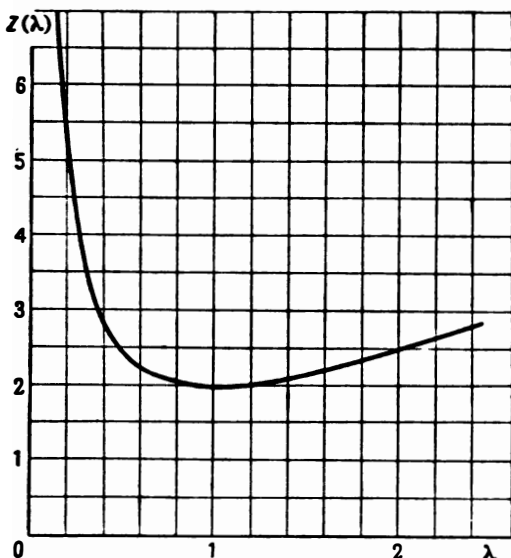
$$z(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda}. \quad (4.62)$$

Эта функция имеет важное значение в газовой динамике и в дальнейшем будет часто встречаться при рассмотрении различных вопросов. График этой функции показан на фиг. 43. Значения этой функции приведены в табл. 5. Уравнение (4.61) принимает вид

$$z(\lambda_1) = \vartheta z(\lambda), \quad (4.63)$$

где

$$\vartheta = \frac{a_*}{a_{*1}}. \quad (4.36)$$



Фиг. 43

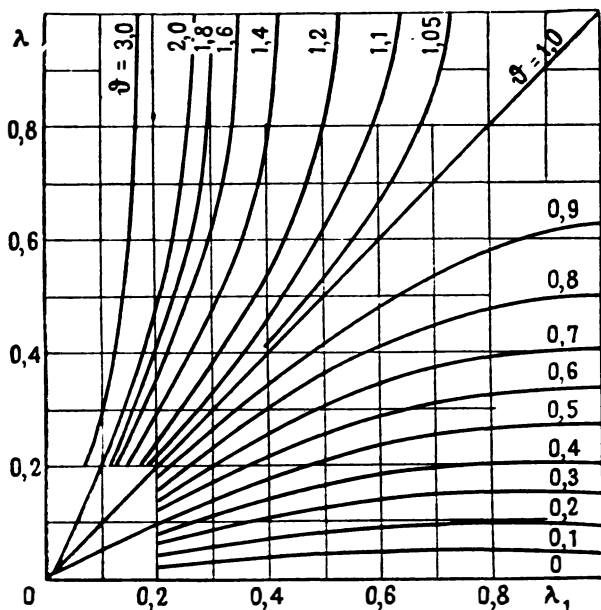
Это же уравнение получается при интегрировании уравнения (4.58).

Пользуясь уравнением (4.63), можно, зная приведенную скорость в начале трубы и приток тепла, определить ско-

¹ Это преобразование дано в работе Б. М. Киселева „Расчет одномерных газовых течений“. „Прикладная математика и механика“, 1947, т. XI, вып. 1.

рость в конце трубы. Если в начале трубы скорость была дозвуковой, то она будет, как это было указано выше, дозвуковой или звуковой в конце трубы.

На фиг. 44 приведен график зависимости λ от λ_1 и ϑ . Область $\vartheta > 1$ диаграммы отвечает случаю, когда тепло подводится к газу. Газ при этом ускоряется по направлению течения, и его приведенная скорость в конце камеры может дойти до единицы. Область $\vartheta < 1$ отвечает случаю, когда тепло отводится от газа. При этом по направлению течения поток уменьшает свою скорость.



Фиг. 44

Из уравнения (4.63) и из диаграммы фиг. 44 следует, что при большом притоке тепла приведенная скорость в начальном сечении не может быть близка к скорости звука. Если скорость в начальном сечении близка к скорости звука, газу можно сообщить только небольшое количество тепла. Максимальная приведенная скорость в начале трубы при данном притоке тепла отвечает скорости, равной скорости звука в конце трубы. В этом случае имеем

$$z(\lambda_{1 \max}) = 2\vartheta, \quad (4.64)$$

откуда

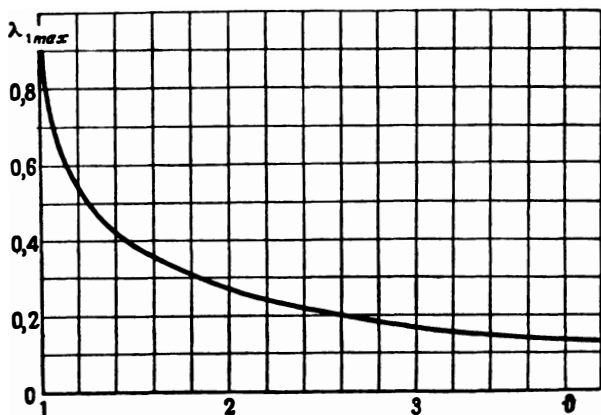
$$\lambda_{1 \max} = \vartheta - \sqrt{\vartheta^2 - 1}.$$

На фиг. 45 дан график зависимости $\lambda_{1 \max}$ от ϑ .

Нагревание газа в цилиндрической камере сопровождается падением коэффициента восстановления

$$\nu = \frac{p'_0}{p_0},$$

где p_0 — полное давление в начале камеры, а p'_0 — в конце камеры.



Фиг. 45

Для коэффициента потерь, пользуясь (4.38), имеем:

$$\delta = 1 - \nu = 1 - \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda)} \vartheta. \quad (4.65)$$

График зависимости δ от λ_1 при различных значениях ϑ показан на фиг. 46. При малых значениях λ_1 и значениях ϑ , близких к единице, из формулы (4.63), преобразуя (4.65) к виду

$$\delta = 1 - \left(\frac{1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2} \right)^{\frac{1}{x-1}} \frac{\lambda_1^2 + 1}{\lambda^2 + 1},$$

получаем для коэффициента потерь следующую приближенную формулу:

$$\delta \approx \frac{x}{x+1} (\vartheta^2 - 1) \lambda_1^2.$$

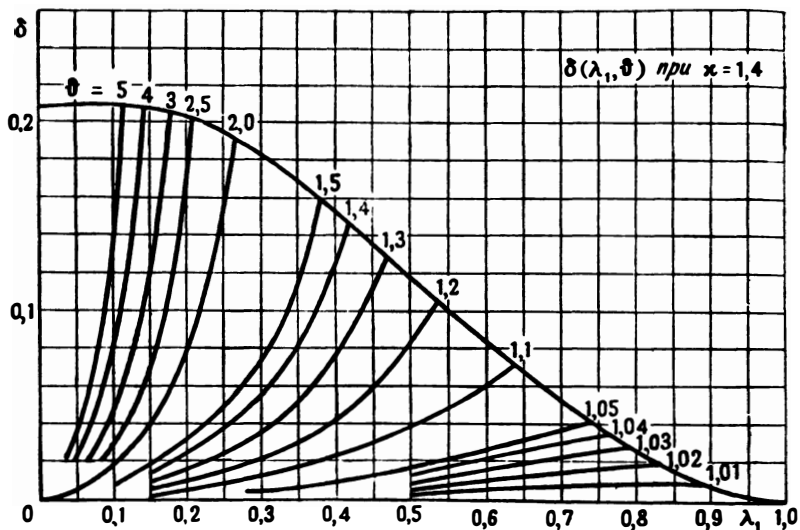
Наличие форсунок в камере сгорания двигателя и трение о стенки камеры создают силы сопротивления. Эти

силы можно определять по испытаниям камеры в холодном состоянии при соответствующем значении числа Re.

Представим силы сопротивления в виде

$$f = \zeta_k \frac{\rho_1 w_1^2}{q} F,$$

где w_1 — скорость в начале камеры,
 ζ_k — коэффициент сопротивления камеры,
 F — площадь поперечного сечения камеры.



Фиг. 46

Рассмотрим влияние сил сопротивления на течение газа в камере. Добавляя в уравнение (4.59) силы сопротивления, получим

$$p + \rho w^2 = p_1 + \left(1 - \frac{\zeta}{2}\right) \rho_1 w_1^2.$$

Преобразуя это уравнение, имеем

$$z(\lambda) = \frac{1}{\delta} \left[z(\lambda_1) - \frac{x}{x+1} \zeta_1 \right]. \quad (4.66)$$

Из этого уравнения видно, что при данном притоке тепла и данной скорости в начале камеры, при наличии сил сопротивления увеличиваются значения приведенной скорости λ в конце камеры. Это приводит к более раннему образованию критической скорости на выходе из камеры и к дополнительному росту коэффициента потерь δ .

§ 19. Изотермическое течение в трубе

При расчете длинных газопроводов без тепловой изоляции можно считать температуру газа постоянной по длине трубы, равной температуре окружающей среды. Изотермическое течение является наиболее простым случаем течения при наличии притока тепла извне.

Воспользуемся уравнением изменения количества движения

$$w \frac{dw}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} - \zeta \frac{w^2}{2D}. \quad (4.13)$$

К этому уравнению добавляется условие постоянства расхода

$$Q = F\rho w = \text{const},$$

а также условие постоянства температуры вдоль трубы. Коэффициент сопротивления ζ зависит от трех параметров: числа Re —

$$Re = \frac{D\rho w}{\mu},$$

числа M —

$$M = \frac{w}{a}$$

и относительной шероховатости ε (4.22) стенок трубы.

Вследствие постоянства расхода и температуры число Re постоянно по длине трубы.

Можно считать, что ζ не зависит от числа M . Опыты Фресселя (см. выше § 17) подтвердили это положение для течений в гладких трубах без теплообмена с внешней средой. Это заключение может быть с известным основанием перенесено и на течения при наличии теплообмена. Для шероховатых труб это утверждение не столь очевидно. Влияние числа M на коэффициент сопротивления шероховатых труб нуждается в экспериментальных исследованиях.

При отсутствии зависимости от числа M коэффициент ζ будет постоянной величиной вдоль трубы. Уравнение (4.13) при этом может быть легко проинтегрировано.

Имеем:

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

и

$$w = \frac{RTQ}{Fp}. \quad (4.67)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (4.13) и обозначая $\bar{x} = \frac{x}{D}$ — расстояние вдоль трубы, выраженное в долях диаметра, получим

$$\zeta d\bar{x} = 2 \frac{dp}{p} - 2 \frac{F^2}{RTQ^2} p dp. \quad (4.68)$$

В начале трубы $\bar{x} = 0$. Давление в начале трубы обозначим p_1 . Интегрируя уравнение (4.68), получим

$$\zeta \bar{x} = \frac{F^2}{RTQ^2} (p_1^2 - p^2) + 2 \ln \frac{p}{p_1}. \quad (4.69)$$

Если обозначить через \bar{l} длину трубы в долях диаметра и через p_2 — давление в конце трубы, то имеем:

$$Q = F \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{RT \left(\zeta \bar{l} + 2 \ln \frac{p_1}{p_2} \right)}} \quad (4.70)$$

или

$$\zeta \bar{l} = \frac{1}{\kappa M_1^2} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^2 \right] + 2 \ln \frac{p_2}{p_1}, \quad (4.71)$$

где

$$M_1 = \frac{w_1}{a_1} -$$

число M в начале трубы.

При небольших значениях M_1 второе слагаемое в правой части уравнения (4.71) мало по сравнению с первым. Пренебрегая этим слагаемым, получим:

$$Q = F \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{RT \zeta \bar{l}}}. \quad (4.72)$$

Отбрасывание второго слагаемого в уравнении (4.71) равносильно пренебрежению влиянием сил инерции. Уравнение (4.72) получается непосредственно при интегрировании уравнения (4.13), в котором отброшено слагаемое $w dw$, относящееся к силам инерции.

При исследовании изотермического течения удобно перейти к числам M . Число M равно

$$M = \frac{w}{a} = \frac{Q}{Fp} \sqrt{\frac{RT}{x}}, \quad (4.73)$$

следовательно, имеем:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{M_1}{M},$$

где попрежнему M_1 — значение числа M на входе в трубу. Формула (4.71) примет теперь такой вид:

$$\bar{\zeta}_x = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M^2} \right) + 2 \ln \frac{M_1}{M}. \quad (4.74)$$

Это уравнение дает закон изменения по длине трубы числа M в случае изотермического течения.

Если $M_1 < 1$, т. е. в трубу поступает дозвуковой поток, то с увеличением \bar{x} число M возрастает и может достигнуть единицы в конце трубы. Соответствующую длину трубы назовем критической длиной. Для данной критической длины число $M_{1\max}$ определяет максимальный возможный расход. Если длина трубы равна критической, то расход нельзя увеличить снижением давления в конце трубы.

Критическую длину можно получить из уравнения (4.74), полагая в нем $M=1$. Имеем:

$$\bar{\zeta}_{\text{кр}} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{M_{1\max}^2} - 1 \right) + 2 \ln M_{1\max}. \quad (4.75)$$



Фиг. 47

На фиг. 47 изображена зависимость $\bar{\zeta}_{\text{кр}}$ от $M_{1\max}$. При возрастании $M_{1\max}$, а следовательно, и расхода через трубу

критическая длина уменьшается и при $M_1 \approx 0,7$ обращается в нуль. Это означает, что при таком большом значении M_1 (а следовательно, и расхода) изотермическое течение в цилиндрической трубе невозможно.

Это можно пояснить следующим образом. При небольшой длине трубы можно пренебрегать силами сопротивления и, следовательно, для этого течения можно применить уравнения, приведенные в § 18.

Вычислим приток тепла, который должен иметь место в изотермическом течении. Имеем

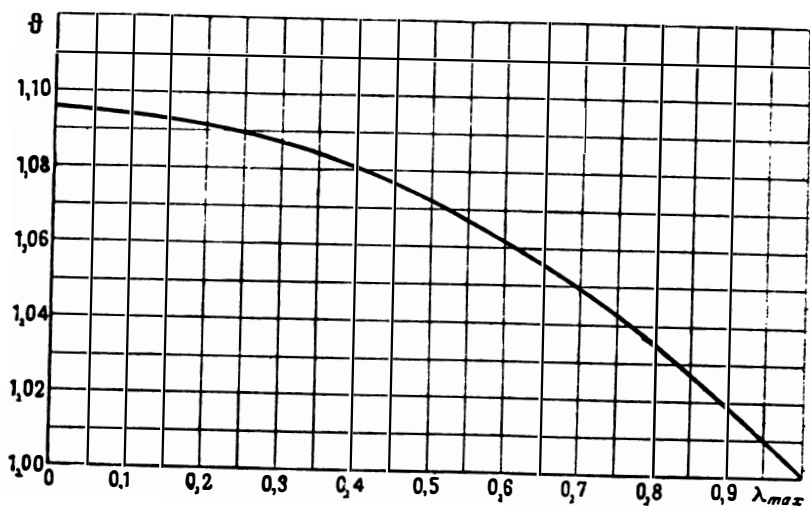
$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2.$$

Вычислим ϑ , соответствующее изотермическому течению в случае, когда $\lambda=1$:

$$\vartheta = \sqrt{\frac{T_0'}{T_0}} = \sqrt{\frac{x+1}{2} \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda_{1 \max}^2 \right)}.$$

Зависимость ϑ от $\lambda_{1 \max}$ изображена на фиг. 48. С другой стороны, имеем

$$z(\lambda_{1 \max}) = 2\vartheta.$$



Фиг. 48

Решая эти уравнения, получим

$$\lambda_{1 \max} = \sqrt{\frac{1}{2x-1}}.$$

Эта величина определяет наибольшее значение λ_1 , при котором возможно изотермическое течение в трубе. Это

значение $\lambda_{1 \max}$ при $x=1,4$ равно 0,745 и соответствует величине M_1 , при которой $\bar{L}_{кр}$ равно нулю (фиг. 47). Отметим, что изотермическое течение в коротком трубопроводе обычно не осуществляется.

Оценка длины трубопровода, на которой устанавливается изотермическое течение в случае постоянной по длине трубы температуры внешней среды, может быть получена на основании данных, приведенных в следующем параграфе.

§ 20. Течение в трубе при наличии теплообмена через стенки

Рассмотрим течение в трубе, стенки которой проводят тепло. Если температура газа отлична от температуры окружающей среды, то через стенки трубы будет происходить теплообмен между текущим газом и внешней средой.

Явление теплопередачи складывается из теплоотдачи от газа к стенкам трубы, теплопередачи через стенки и теплоотдачи от стенок трубы в окружающую среду. Передача тепла от газа к стенкам трубы осуществляется путем турбулентного переноса тепла и лучеиспусканием. Рассмотрим сперва случай, когда лучистым теплообменом можно пренебрегать. В этом случае отдача тепла от газа к стенкам обусловлена теми же явлениями, что и силы сопротивления. Поэтому интенсивность теплоотдачи зависит от числа Re . Она зависит также от числа Pr , образованного из параметров, характеризующих теплопроводность газа, — коэффициента теплопроводности η , коэффициента теплоемкости при постоянном давлении c_p и коэффициента вязкости μ .

Коэффициент теплопроводности газа может быть представлен в виде:

$$\eta = \varepsilon \mu c_p,$$

следовательно,

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\eta} = \frac{x}{\varepsilon}.$$

Величина ε зависит в основном от x и может быть приближенно вычислена по следующей эмпирической формуле:

$$\varepsilon = \frac{3,2(x-1)}{x^{1,3}}. \quad (4.76)$$

Количество U тепла, переходящего в единицу времени от стенки трубы к газу, пропорционально разности температуры внутренней поверхности стенки T_{c1} и температуры газа T . Имеем

$$U = K_1 S (T_{c1} - T), \quad (4.77)$$

где S — площадь поверхности стенки.

Коэффициент K_1 называется коэффициентом теплоотдачи. Его размерность такова:

$$[K_1] = \text{кал/м}^2\text{сек.}$$

Для того, чтобы выразить этот коэффициент через число Re и число Pr , образуем безразмерный параметр

$$\frac{K_1 D}{\eta} = Nu_1.$$

Этот безразмерный параметр носит название числа Нуссельта.

Опытные данные по теплоотдаче представляют в виде зависимости

$$Nu_1 = f(Re, Pr).$$

Для теплоотдачи при турбулентном течении при числах порядка 10000—50000 справедлива эмпирическая формула

$$Nu_1 = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4}. \quad (4.78)$$

Следующая теоретическая формула, установленная Прандлем, справедлива и для больших значений числа Re :

$$Nu_1 = \frac{1}{8} Re \zeta \frac{Pr}{1 + 1,74 Re^{-\frac{1}{8}} (Pr - 1)}. \quad (4.79)$$

В этой формуле ζ —коэффициент сопротивления трубы.

Количество тепла, получаемого текущим газом из окружающей среды, можно представить в виде

$$U = KS(T_n - T), \quad (4.80)$$

где T_n — температура окружающей среды.

Коэффициент теплопередачи K зависит от коэффициента теплоотдачи K_1 от стенки к движущемуся газу, коэффициента теплопроводности стенки η_c , толщины стенки δ и коэффициента теплоотдачи K_2 от стенки в окружающую среду.

Имеем равенства:

$$U = K_1 S (T_{c1} - T),$$

$$U = \frac{\eta_c}{\delta} S (T_{c2} - T_{c1}),$$

$$U = K_2 S (T_n - T_{c2}),$$

где T_{c2} — температура внешней поверхности стенки.

Имеем

$$T_n - T = T_n - T_{c2} + T_{c2} - T_{c1} + T_{c1} - T,$$

отсюда

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{\delta}{\eta_c} + \frac{1}{K_2}. \quad (4.81)$$

Для железных труб имеем $\eta_c \approx 0,011$ кал/мсекград.

Величина коэффициента внешней теплоотдачи зависит от состояния окружающей среды. Ниже приведены данные, относящиеся к теплоотдаче от горизонтально расположенной трубы в покоящийся газ, заполняющий весьма большой объем. В этом случае теплоотдача обусловлена явлением свободной конвекции.

Интенсивность конвекционных течений зависит от разности температур стенки, отдающей тепло, и наружной среды, размеров поверхности, отдающей тепло, от силы тяжести, плотности газа, его вязкости и коэффициента объемного расширения. Из указанных величин составляется безразмерный параметр—число Gr:

$$Gr = \frac{g\alpha^2 D^3 (T_{c2} - T_n)}{\mu^2},$$

где α —коэффициент объемного расширения газа, равный

$$\alpha = \frac{1}{273} \frac{1}{град}.$$

Число Nu_2 , соответствующее коэффициенту внешней теплоотдачи K_2 , зависит от чисел Pr и Gr. Для определения Nu_2 в случае теплоотдачи от горизонтально расположенных труб можно воспользоваться следующей экспериментальной формулой:

$$Nu_2 = 0,54 (Gr Pr)^{0,25}, \quad (4.82)$$

где

$$Nu_2 = \frac{K_2 D}{\eta_2}.$$

Вычислим количество тепла, поступающее в трубу в единицу времени. Имеем:

$$U = \pi D \int_0^x K (T_n - T) dx. \quad (4.83)$$

Обозначая через T_0 температуру торможения у входа в трубу, через T'_0 — температуру торможения в некотором

сечении трубы, $\vartheta = \sqrt{\frac{T'_0}{T_0}}$ и $\vartheta_n = \sqrt{\frac{T_n}{T_0}}$, получим

$$U = \pi D T_0 \eta \int_0^{\bar{x}} \text{Nu} \left[\vartheta_n^2 - \vartheta^2 \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2 \right) \right] d\bar{x}.$$

Здесь число Nu — отвечающее коэффициенту теплопередачи:

$$\text{Nu} = \frac{KD}{\eta},$$

η — коэффициент теплопроводности газа в трубе и

$$d\bar{x} = \frac{dx}{D}.$$

Из уравнения энергии имеем

$$a_*^2 - a_{*1}^2 = \frac{JU}{Q} \frac{2(x-1)}{x+1},$$

откуда

$$\vartheta^2 - 1 = \frac{4}{\text{PrRe}_1} \int_0^{\bar{x}} \text{Nu} \left[\vartheta_n^2 - \vartheta^2 \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2 \right) \right] d\bar{x}. \quad (4.84)$$

К этому уравнению надо присоединить уравнение изменения количества движения

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{1+\lambda^2}{\lambda^2} d \ln \vartheta + \frac{x}{x+1} \zeta d\bar{x} = 0. \quad (4.85)$$

Рассмотрим подробно случай, когда $\vartheta_n = \text{const}$. Из уравнения (4.84) следует

$$\frac{du}{dx} = B \left[1 - u \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2 \right) \right], \quad (4.86)$$

где

$$u = \frac{\vartheta^2}{\vartheta_n^2}$$

и

$$B = \frac{4}{\text{PrRe}_1} \text{Nu}. \quad (4.87)$$

Величина Nu весьма слабо изменяется по длине трубы, так как числа Re и Pr , от которых она зависит, остаются почти неизменными по длине трубы. Поэтому величину B в первом приближении можно считать постоянной по длине трубы. Когда теплопроводность стенок и внешняя теплопроводность весьма велики, число Nu вычисляется по коэффициенту внутренней теплопроводности газа. Пользуясь формулой (4.79), получаем:

$$B = \frac{1}{2} \zeta \frac{1}{1 + 1,74 Re^{-\frac{1}{8}} (Pr - 1)} \quad (4.88)$$

или

$$B = b\zeta, \quad (4.89)$$

где b — величина, которая при $\lambda_1 < 0,7$ и $Re > 10^5$ слабо изменяется с изменением λ_1 , Re и Pr . В первом приближении $b = 0,5$.

Исключая из уравнений (4.85) и (4.86) $d\bar{x}$, получим

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda^2} \frac{du}{u} + a \frac{du}{1 - u \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2\right)} = 0, \quad (4.90)$$

где

$$a = \frac{x}{x+1} \frac{\zeta}{B}.$$

Исследование течения газа при наличии теплообмена сводится к интегрированию этого уравнения. Обозначим $v = \lambda^2$. Уравнение (4.90) примет вид:

$$\frac{v-1}{v+1} \frac{dv}{v} + \frac{du}{u} + \frac{2av}{1+v} \frac{du}{1 - u \left(1 - \frac{x-1}{x+1} v\right)} = 0. \quad (4.91)$$

На фиг. 49 и в приложении дана сетка изоклин и интегральных кривых этого уравнения при $a = 1,20$. Это значение a соответствует $b = 0,5$. Изоклины отвечают значениям $\frac{dv}{du} = c$, указанным на сетке. При интенсивном теплообмене роль последнего слагаемого в уравнении (4.91), связанного с влиянием сил сопротивления на течение газа, невелика. В этом случае приближенно имеем:

$$\frac{v-1}{v+1} \frac{dv}{v} + \frac{du}{u} = 0;$$

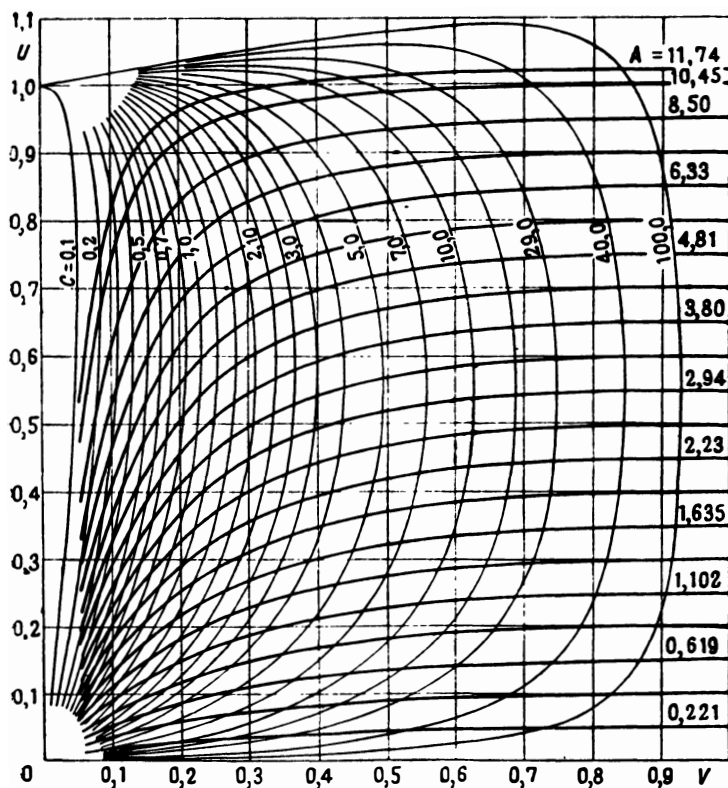
интегрируя, получим

$$(1 + v)^2 \frac{u}{v} = A = \text{const} \quad (4.92)$$

или

$$\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \vartheta = \text{const.}$$

(Этот интеграл был получен выше в § 18).



Фиг. 49

Решение уравнение (4.91) удобно представить в виде

$$u = \frac{Av}{(1 + v)^2} F(v). \quad (4.93)$$

Здесь

$$A = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{u}{v}.$$

Подставляя (4.93) в уравнение (4.91), получим

$$\frac{F'}{F^2} = 2aAv \frac{v-1}{v+1} \times \\ \times \frac{1}{(1+v)^3 - AFv \left[(1+v) \left(1 - \frac{x-1}{x+1} v \right) - 2av \right]}. \quad (4.94)$$

При небольших значениях v решение этого уравнения, отвечающее начальному условию при $v=0$, $F=1$, можно получить в виде ряда по степеням v :

$$1 - F = aAv^2 (1 + b_1v + b_2v^2 + b_3v^3 + \dots),$$

где

$$b_1 = -\frac{2}{3} (5 - A),$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \left[(4 - A)(5 - A) - 6 + \frac{2}{x+1} A - 4aA \right],$$

$$b_3 = \frac{2}{15} \left[3A^2 - A^2 \left(27 + 25a + 6 \frac{x-1}{x+1} \right) + \right. \\ \left. + A \left(21 \frac{x-1}{x+1} + 98a + 81 \right) - 90 \right].$$

Этим рядом можно пользоваться для вычисления F при значениях v , не превосходящих $1/4$.

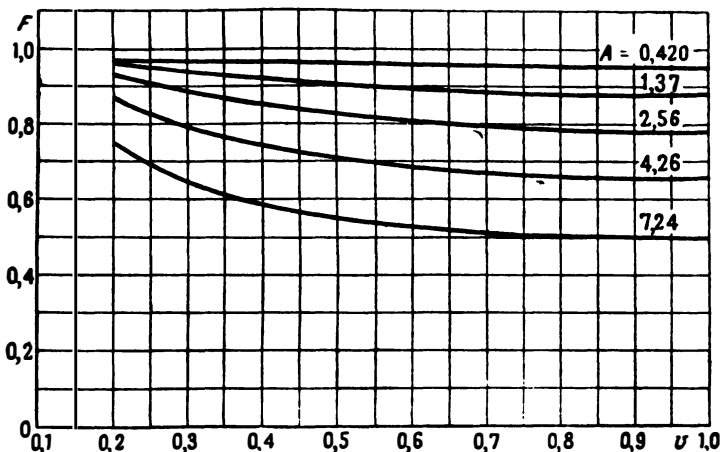
Если известно решение уравнения (4.91) при некотором значении a , то уравнение (4.94) может быть использовано для вычисления значений F при близких значениях a .

Интегрируя (4.94), получаем

$$\frac{1}{F} = 1 + 2aA \int_0^v v \frac{1-v}{1+v} \times \\ \times \frac{dv}{(1+v)^3 - AFv \left[(1+v) \left(1 - \frac{x-1}{x+1} v \right) - 2av \right]}. \quad (4.95)$$

Для $a=1,20$ графики функции $F(v)$, вычисленные непосредственно при помощи сетки интегральных кривых, изображенных на фиг. 49, даны на фиг. 50. Из графиков

фиг. 50 следует, что при значениях $A < 0,5$ можно пользоваться интегралом (4.92) при всех значениях v . При $v < 0,5$ можно пользоваться интегралом (4.95) для $A < 1$, а при $v < 0,25$ — для $A < 1,5$. Формула (4.95) дает возможность вычислять приближенные значения F при изменении величины a , так как подинтегральное выражение в этой формуле слабо зависит от величины a .



Фиг. 50

Для вычисления распределения температур и скоростей по длине трубы следует проинтегрировать уравнение (4.86). Это уравнение, заменяя λ^2 через v , запишем в виде

$$\frac{du}{dx} = B \left[1 - u \left(1 - \frac{x-1}{x+1} v \right) \right]. \quad (4.96)$$

При $v < 0,5$, т. е. $\lambda < 0,7$, приближенно можно положить

$$\frac{du}{dx} = B(1 - u), \quad (4.97)$$

откуда при условии $\bar{x}=0$, $u = u_n = \frac{T_0}{T_n}$ получим:

$$\frac{1-u}{1-u_n} = e^{-B\bar{x}}. \quad (4.98)$$

При значениях v , близких к единице, необходимо учитывать изменение v в зависимости от u , пользуясь соответствующим решением уравнения (4.91).

Для вычисления распределения давления вдоль трубы пользуемся формулой

$$p = \frac{x+1}{2x} \frac{a_* Q}{F} \frac{1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2}{\lambda}.$$

Преобразуя, получаем

$$p = \left(\frac{2}{x+1} \right)^{\frac{1}{x-1}} p_0 a_{*1} q(\lambda_1) \frac{1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2}{\lambda}, \quad (4.99)$$

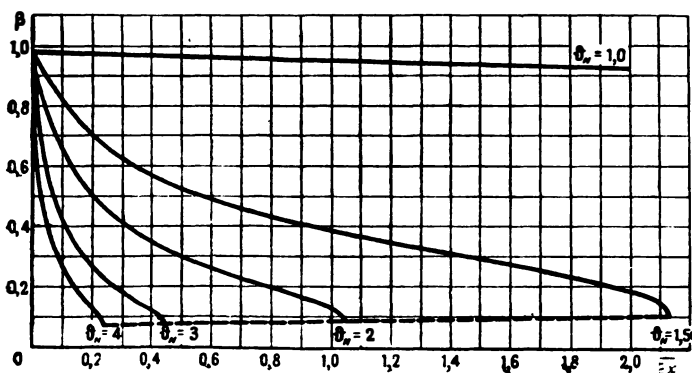
откуда

$$\frac{p}{p_0} = \beta = \frac{q(\lambda_1)}{\vartheta y(\lambda)}, \quad (4.100)$$

где

$$y(\lambda) = \left(\frac{x+1}{2} \right)^{\frac{1}{x-1}} \frac{\lambda}{1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2}.$$

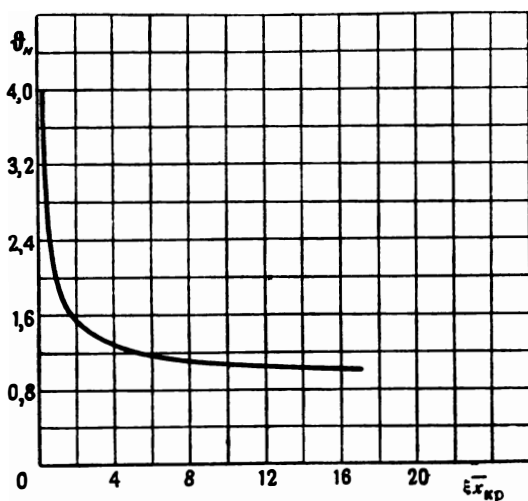
На фиг. 51 представлены кривые распределения давления вдоль трубы, соответствующие (при $a=1,20$) значениям



Фиг. 51

ϑ_n при $\lambda_1=0,2$, равным $\vartheta_n = 1,5; 2; 3; 4$. Верхняя кривая соответствует течению без теплообмена с внешней средой. С увеличением ϑ_n (температуры внешнего обогрева) критическая длина трубы уменьшается. Зависимость критической длины от ϑ_n представлена на фиг. 52. Следует иметь в виду, что при больших значениях ϑ_n интенсивность теплообмена

с окружающей средой увеличивается вследствие теплоотдачи лучеиспусканием, которая должна быть введена в уравнение притока тепла. Приблизительно лучистый теплообмен можно учитывать соответствующим увеличением коэффициента теплоотдачи. Это приведет к дифференциальному уравнению (4.91) с другим значением коэффициента a . Данные о коэффициентах теплоотдачи с учетом лучеиспускания можно найти в литературе по теплопередаче (см., например, [15]).



Фиг. 52

Рассмотрим решение следующей задачи. Для данной трубы заданы значения p_0 , T_0 , T_n и расход Q . Требуется определить давление в конце трубы.

По этим данным вычисляем $q(\lambda_1)$, λ_1 и u_n . Затем находим соответствующий интеграл уравнения (4.91), пользуясь сеткой фиг. 49. Интегрируя уравнение (4.96), находим распределение скорости и температуры по длине трубы. Распределение давления находим по формуле (4.100).

В случае, если задано давление в конце трубы и требуется определить расход, задача решается последовательными приближениями: задаваясь расходом (величиной q_1), находим температуру и скорость в конце трубы. Затем из уравнения (4.100), по данному значению $\beta_2 = \frac{p_2}{p_0}$ и найденным значениям $y(\lambda_2)$ и $\vartheta = \vartheta_2$, определяем значение q_1 первого приближения, которое можно уточнить, повторяя расчет.

В случае, когда теплообмен невелик, удобнее непосредственно интегрировать уравнение

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{1+\lambda^2}{\lambda^2} d \ln \vartheta + \frac{x}{x+1} \zeta d\bar{x} = 0. \quad (4.85)$$

Пренебрегая в первом приближении теплообменом, получим распределение скоростей по длине трубы так, как указано в § 17. Из уравнения (4.96) найдем тогда распределение температур по длине трубы в первом приближении. Подставляя найденные значения ϑ в уравнение (4.85), получим уточненное распределение скоростей, при помощи которого можно уточнить также распределение температур.

§ 21. Поправки в уравнениях движения газа на неравномерность распределения скорости по сечению трубы

При исследовании течений газа в цилиндрических трубах, а также в диффузорах и соплах, стенки которых образуют малые углы с осью потока, мы всегда пользуемся понятиями средней скорости и средней плотности. Уточним эти понятия.

Средняя скорость w определяется отношением объемного расхода к площади сечения

$$w = \frac{\int u dF}{F},$$

где u — истинная скорость, переменная по сечению трубы, F — площадь сечения трубы.

Величину средней скорости можно вычислить, если известно распределение скорости по сечению.

При ламинарном течении в цилиндрической трубе средняя скорость равна половине максимальной скорости в данном сечении; при турбулентном течении закон распределения скорости изменяется с изменением числа Re , и отношение средней и максимальной скорости является функцией числа Re .

Опыты Никурадзе, проведенные с несжимаемой жидкостью, показали, что при больших числах Re имеет место степенной закон распределения скорости по радиусу трубы:

$$u = u_{\max} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^m,$$

где R — радиус трубы и u_{\max} — скорость в центре трубы.

Показатель степени m зависит от числа Re . При числах Re порядка 100000 имеем $m = \frac{1}{7}$, а при числах Re порядка 3000000, $m = \frac{1}{10}$.

Пользуясь степенным законом, легко вычислить отношение средней скорости к максимальной скорости потока

$$\frac{w}{u_{\max}} = \frac{2\pi \int_0^R ur dr}{\pi R^2 u_{\max}} = \frac{2}{(m+1)(m+2)}. \quad (4.86)$$

Опыты Фресселя, проведенные с газом при больших числах Re , показывают, что эти законы распределения скоростей сохраняются и при больших скоростях, как дозвуковых, так и сверхзвуковых, т. е. профиль скорости не зависит от числа M потока.

При $Re = 3000000$ $\frac{w}{u_{\max}} = 0,87$; при возрастании числа Re до значения $Re \approx 10^8$ величина $\frac{w}{u_{\max}}$ возрастает примерно до 0,90.

Для дальнейшего нам необходимо иметь значения отношений $\eta_n = \frac{\int u^n dF}{w^n F}$ при $n=2$ и $n=3$.

При степенном законе распределения скоростей имеем

$$\eta_n = \frac{(m+1)^n (m+2)^n}{2^{n-1}} \frac{1}{(mn+1)(mn+2)} \approx$$

$$\approx 1 + \frac{5(n-1)n}{8} m^2;$$

при $n=2$

$$\eta_2 \approx 1 + \frac{5}{4} m^2,$$

при $n=3$

$$\eta_3 \approx 1 + \frac{15}{4} m^2.$$

Если ввести обозначение

$$\varepsilon = \frac{5}{4} m^2,$$

то получим

$$\eta_2 = 1 + \varepsilon,$$

$$\eta_3 = 1 + 3\varepsilon.$$

Отсюда следует, что интегралы вида $\int u^n dF$, встречающиеся в уравнениях движения газа, можно выразить через среднюю скорость, а именно

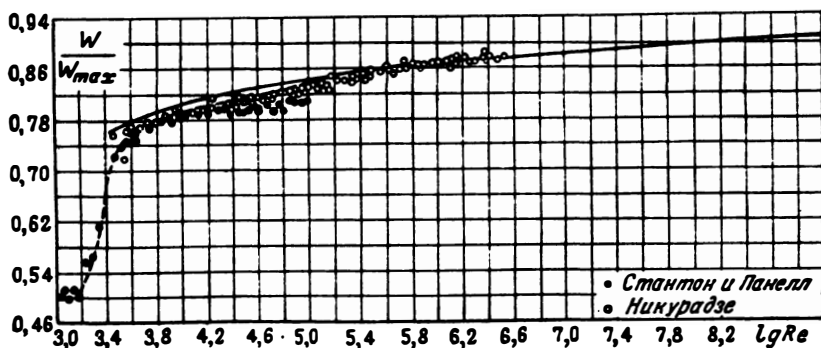
$$\int u^2 dF = (1 + \varepsilon) w^2 F$$

и

$$\int u^3 dF = (1 + 3\varepsilon) w^3 F.$$

При определении ε значения m должны быть взяты в соответствии со значением числа Re потока. Величину m при данном числе Re можно определить по формуле (4.86), пользуясь опытным значением $\frac{w}{u_{max}}$ при данном числе Re .

Опытные значения $\frac{w}{u_{max}}$ для круглых цилиндрических труб приведены на фиг. 53.



Фиг. 53

Среднюю плотность газа в данном сечении определим отношением

$$\rho = \frac{\int \rho' dF}{F},$$

где ρ' — истинная плотность, в общем случае переменная по сечению.

Давление в поперечном сечении трубы обычно остается почти постоянным, и его незначительным изменением можно пренебрегать.

В случае, когда между струйками газа имеет место настолько интенсивный теплообмен, что температура в сечении устанавливается постоянной, из постоянства давления в сечении следует и постоянство плотности, т. е. в этом случае

$$\rho = \rho'.$$

Наиболее неравномерное распределение плотности по сечению мы получим в случае, когда теплообмен между струйками полностью отсутствует.

Приближенную оценку неравномерности поля скоростей по сечению трубы в случае отсутствия теплообмена между струйками можно произвести следующим образом.

Истинная плотность равна

$$\rho' = \frac{p}{RT} = \frac{p}{RT_0 \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \frac{u^2}{a_*^2} \right)},$$

где p — давление, постоянное в данном сечении.

Среднюю плотность можно приближенно получить, пренебрегая поправками в уравнении энергии, которые должны вводиться при осреднении по сечению трубы, полагая $u = w$. Максимальная плотность, соответствующая максимальной скорости, равна

$$\rho_{\max} = \frac{p}{RT_0 \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \frac{u_{\max}^2}{a_*^2} \right)}.$$

Отношение $\frac{\rho}{\rho_{\max}}$ равно

$$\frac{\rho}{\rho_{\max}} = \frac{1 - \frac{x-1}{x+1} \frac{u_{\max}^2}{a_*^2}}{1 - \frac{x-1}{x+1} \frac{w^2}{a_*^2}} = \frac{1 - \frac{x-1}{x+1} \frac{(m+1)^2(m+2)^2 \lambda^2}{4}}{1 - \frac{x-1}{x+2} \lambda^2}.$$

В качестве примера отметим, что при $Re = 3000000$
 $\frac{w}{u_{\max}} = 0,87$, $m = \frac{1}{10}$. Следовательно, имеем:

при $\lambda = 1$

$$\frac{\rho}{\rho_{\max}} = 0,93,$$

при $\lambda = 0,7$

$$\frac{\rho}{\rho_{\max}} = 0,97.$$

Таким образом, неравномерности поля скоростей $\frac{w}{u_{\max}} = 0,87$ соответствует значительно меньшая неравномерность плотности, даже в случае отсутствия теплообмена между струйками.

Так как при течении реального газа имеет место интенсивный теплообмен, в особенности при больших числах Re , то при расчетах можно принимать, что плотность по сечению трубы постоянна.

Расход газа через сечение выражается интегралом

$$Q = \int \rho' u dF,$$

где ρ' — истинная плотность, которую можно на основании изложенных выше соображений вынести за знак интеграла; тогда имеем:

$$Q = \rho w F,$$

т. е. расход газа равен произведению средней плотности на среднюю скорость и площадь сечения трубы.

В дальнейшем при вычислении интегралов, содержащих плотность, мы будем всегда считать плотность постоянной в сечении трубы и выносить ее за знак интеграла.

Рассмотрим теперь, каким образом поправки на неравномерность распределения скорости по сечению трубы входят в уравнения движения.

Составим для этого уравнения движения газа. Уравнение количества движения для массы газа, заключенной между двумя сечениями трубы, отстоящими на расстоянии dx , можно записать в таком виде

$$\frac{1}{F} \frac{d}{dx} \int \rho' u^2 dF = - \frac{dp}{dx} - \zeta \frac{\rho w^2}{2D}.$$

Так как на основании вышезложенного

$$\frac{\int \rho' u^2 dF}{\rho w^2 F} = \frac{\int u^2 dF}{w^2 F} = \eta_2,$$

то уравнению количества движения можно придать такой вид:

$$\eta_2 \frac{1}{F} \frac{d}{dx} \rho w^2 F = - \frac{dp}{dx} - \zeta \frac{\rho w^2}{2D}.$$

Так как по условию сохранения массы

$$\rho w F = Q = \text{const},$$

то это произведение можно вынести за знак дифференцирования. После сокращений получим

$$\eta_2 w \frac{dw}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} - \zeta \frac{w^2}{2D}.$$

Таким образом, уравнение количества движения реального потока с неравномерным распределением скорости по сечению трубы содержит поправочный коэффициент η_2 .

Составим уравнение баланса энергии для массы газа, заключенной между двумя поперечными сечениями трубы, отстоящими одно от другого на расстоянии dx . Рассмотрим случай, когда теплообмен с окружающей средой отсутствует. Работа сил давления в сечениях, ограничивающих эту массу газа, в единицу времени равна

$$\int p u dF - \left[\int p u dF + \frac{d}{dx} \left(\int p u dF \right) dx \right] = - \frac{d}{dx} \left(\int p u dF \right) dx.$$

Работа сил давления на боковые стенки трубы равна нулю, так как направление этих сил нормально к направлению перемещения.

Изменение внутренней и кинетической энергии равно разности между энергией газа, протекающего за единицу времени через сечение с абсциссой $x + dx$, и энергией газа, протекающего за то же время через сечение с абсциссой x :

$$\frac{d}{dx} \left[\int \left(J c_v T + \frac{u^2}{2} \right) \rho u dF \right] dx.$$

Уравнение сохранения энергии будет иметь вид

$$\frac{d}{dx} \left[\int \left(Jc_v T + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \rho u dF \right] dx = 0,$$

откуда

$$\int \left(Jc_v T + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \rho u dF = \text{const.}$$

Используя термодинамические соотношения

$$\frac{p}{\rho} = \bar{R} T; \quad \bar{R} = J(c_p - c_v); \quad x = \frac{c_p}{c_v},$$

получим

$$\int \frac{x}{x-1} p u dF + \frac{1}{2} \int \rho u^3 dF = \text{const.}$$

Принимая во внимание постоянство давления в сечении, будем иметь

$$\frac{x}{x-1} p w F + \frac{1}{2} \int \rho u^3 dF = \text{const.}$$

Принимая теперь во внимание, что

$$\frac{\int \rho u^3 dF}{\rho w^3 F} \approx \frac{\int u^3 dF}{w^3 F} = \eta_3,$$

и сокращая полученное уравнение на постоянную величину расхода $Q = \rho w F$, получим

$$\frac{x}{x-1} \frac{p}{\rho} + \eta_3 \frac{w^2}{2} = \text{const.}$$

Таким образом, уравнение энергии для реального потока содержит так же, как и уравнение импульсов, поправочный коэффициент, зависящий от распределения скорости в сечении. Поправочный коэффициент в уравнении энергии больше, чем поправочный коэффициент в уравнении количества движения.

Уравнение (2.23) можно записать в такой форме:

$$\eta_3 \frac{w^2}{2} + \frac{a^2}{x-1} = \frac{\eta_3(x-1) + 2}{2(x-1)} a_*^2$$

или в форме (2.26):

$$T = T_0 \left(1 - \frac{\eta_s(x-1)}{\eta_s(x-1) + 2} \lambda^2 \right) \approx T_0 \left[1 - \frac{x-1}{x+1} \left(1 + \frac{6}{x+1} \varepsilon \right) \lambda^2 \right],$$

где ε — величина, равная для степенного закона распределения скорости

$$\varepsilon = \frac{5}{4} m^2.$$

При $Re = 3\,000\,000$ поправка эта незначительна. Так как

$$\varepsilon = 0,0125,$$

то

$$1 + \frac{6}{x+1} \varepsilon \approx 1,03.$$

Введение этого множителя в уравнение энергии равносильно замене значения отношения теплоемкости, равного для воздуха величине $x = 1,40$, величиной $x = 1,415$. Этой поправкой в большинстве случаев можно пренебрегать. Таким образом, при расчете течений газа в трубах при больших числах Re , а также при течении в соплах можно пренебрегать поправками на неравномерность распределения скорости, т. е. полагать

$$\eta_2 = \eta_s = 1.$$

При изучении течения газа в трубах при малых числах Re , а также при расчете течений в диффузорах и в каналах газовых машин при наличии больших потерь эти поправки необходимо иметь в виду.

Таблица 1

Газ	Молекулярный вес μ	Вес единиц объема γ [кг/м ³] ¹	\bar{R} [м/град] ²	α	\bar{c}_p [кал/кгград] ³
Воздух	28,9	1,29	29,3	1,40	0,240
Кислород	32,0	1,43	26,5	1,40	0,218
Водород	2,02	0,0900	420	1,41	3,40
Азот	28,0	1,25	30,3	1,41	0,249
Водяной пар (перегретый)	18,0	0,803	47,1	1,29	0,457
Метан	16,0	0,717	53,0	1,30	0,531 ⁴
Окись углерода CO	28,0	1,25	30,3	1,40	0,251
Углекислота CO ₂ . .	44,0	1,98	19,3	1,31	0,202
Гелий	4,0	1,79	21,2	1,66	1,25
Пироксилиновый порох ⁵	23,0	1,03	36,9	1,25	0,430
Нитроглицериновый порох ⁵	28,7	1,28	29,6	1,16	0,491

¹ При $\theta=0^\circ\text{Ц}$, $\rho=1033,10$ кг/м³, $g=9,81$ м/сек².

² \bar{R} определена по формуле (1.8).

³ \bar{c}_p при $\theta=0^\circ\text{Ц}$.

⁴ При $\theta=15^\circ\text{Ц}$.

⁵ При $\theta=2000^\circ\div 3000^\circ\text{Ц}$.

Таблица 2

$\alpha = 1,40$

λ	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{p}{p_0}$	q (А)	χ (А)	y (А)	$\frac{p'_0}{p_0}$	$\frac{p'}{p'_0}$	M
0	1	1	1	0	∞	0	1	1,00	0
0,05	0,9996	0,9990	0,9986	0,0787	337,70	0,0789	1	0,9985	0,0457
0,10	0,9983	0,9958	0,9941	0,1570	81,763	0,1580	1	0,9941	0,0913
0,15	0,9962	0,9907	0,9870	0,2343	34,841	0,2375	1	0,9868	0,1372
0,20	0,9933	0,9833	0,9767	0,3101	18,669	0,3175	1	0,9767	0,1832
0,25	0,9896	0,9742	0,9640	0,3841	11,337	0,3984	1	0,9639	0,2294

λ	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{P}{P_0}$	$q(\lambda)$	$\chi(\lambda)$	$y(\lambda)$	$\frac{P'}{P_0}$	$\frac{P}{P_0}$	M
0,30	0,9850	0,9629	0,9485	0,4555	7,459	0,4803	1	0,9485	0,2759
0,35	0,9796	0,9497	0,9303	0,5242	5,197	0,5634	1	0,9302	0,3228
0,40	0,9733	0,9346	0,9096	0,5895	3,786	0,6481	1	0,9096	0,3701
0,45	0,9662	0,9178	0,8868	0,6512	2,864	0,7345	1	0,8866	0,4179
0,50	0,9583	0,8991	0,8616	0,7088	2,240	0,8228	1	0,8616	0,4663
0,55	0,9496	0,8786	0,8343	0,7621	1,809	0,9134	1	0,8343	0,5152
0,60	0,9400	0,8567	0,8053	0,8105	1,505	1,007	1	0,8053	0,5649
0,65	0,9296	0,8331	0,7744	0,8541	1,290	1,103	1	0,7745	0,6154
0,70	0,9184	0,8083	0,7423	0,8920	1,138	1,202	1	0,7423	0,6668
0,75	0,9062	0,7818	0,7085	0,9246	1,031	1,305	1	0,7085	0,7192
0,80	0,8933	0,7542	0,6738	0,9515	0,957	1,412	1	0,6738	0,7727
0,85	0,8796	0,7256	0,6382	0,9726	0,908	1,524	1	0,6382	0,8274
0,90	0,8650	0,6959	0,6020	0,9877	0,877	1,641	1	0,6020	0,8834
0,95	0,8496	0,6652	0,5651	0,9967	0,862	1,763	1	0,5651	0,9409
1,00	0,8333	0,6339	0,5282	1,0000	0,857	1,893	1	0,5282	1,0000
1,05	0,8162	0,6019	0,4912	0,9965	0,861	2,029	0,9990	0,4905	1,0609
1,10	0,7983	0,5694	0,4546	0,9877	0,872	2,173	0,9979	0,4546	1,1240
1,15	0,7795	0,5365	0,4183	0,9728	0,888	2,326	0,9940	0,4206	1,1890
1,20	0,7600	0,5035	0,3827	0,9528	0,908	2,490	0,9860	0,3881	1,2566
1,25	0,7395	0,4704	0,3478	0,9271	0,931	2,666	0,9745	0,3572	1,3269
1,30	0,7183	0,4373	0,3141	0,8965	0,957	2,854	0,9581	0,3280	1,4002
1,35	0,6962	0,4044	0,2815	0,8629	0,985	3,058	0,9368	0,3007	1,4769
1,40	0,6733	0,3720	0,2505	0,8213	1,014	3,279	0,9104	0,2751	1,5585
1,45	0,6495	0,3400	0,2208	0,7775	1,045	3,521	0,8790	0,2513	1,6423
1,50	0,6250	0,3088	0,1930	0,7302	1,076	3,785	0,8424	0,2291	1,7320
1,55	0,5995	0,2783	0,1668	0,6802	1,108	4,077	0,8003	0,2086	1,8273
1,60	0,5733	0,2489	0,1427	0,6278	1,140	4,402	0,7539	0,1893	1,9290
1,65	0,5462	0,2204	0,1204	0,5737	1,173	4,764	0,7028	0,1712	2,0379
1,70	0,5183	0,1934	0,1002	0,5182	1,206	5,174	0,6485	0,1543	2,1556
1,75	0,4895	0,1676	0,0820	0,4625	1,239	5,638	0,5904	0,1383	2,2832
1,80	0,4600	0,1435	0,0660	0,4070	1,272	6,172	0,5307	0,1244	2,4227
1,85	0,4295	0,1209	0,0519	0,3527	1,305	6,793	0,4684	0,1143	2,5767
1,90	0,3983	0,1001	0,0399	0,2999	1,338	7,525	0,4067	0,1027	2,7481
1,95	0,3661	0,0811	0,0297	0,2494	1,370	8,400	0,3445	0,0979	2,9414
2,00	0,3333	0,0641	0,0214	0,2021	1,402	9,466	0,2852	0,0750	3,1623
2,05	0,2994	0,0491	0,0147	0,1586	1,434	10,798	0,2278	0,0645	3,4190

λ	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{P}{P_0}$	$q(\lambda)$	$\chi(\lambda)$	$y(\lambda)$	$\frac{p'_0}{p_0}$	$\frac{P}{P'_0}$	M
2,10	0,2650	0,0362	0,0096	0,1196	1,466	12,50	0,1755	0,0547	3,7240
2,15	0,2294	0,0252	0,0058	0,0854	1,498	14,78	0,1273	0,4819	4,0962
2,20	0,1933	0,0164	0,0032	0,0569	1,529	17,96	0,0866	0,0369	4,5676
2,25	0,1561	0,0096	0,0015	0,0342	1,559	22,73	0,0529	0,0285	5,1962
2,30	0,1183	0,0048	0,00057	0,0174	1,590	30,68	0,0276	0,0207	6,1037
2,35	0,0794	0,0018	0,00014	0,0065	1,620	46,67	0,0106	0,0134	7,6044
2,40	0,0400	0,0003	0,00013	0,0012	1,650	95,09	0,0020	0,0066	10,955

 $x=1,30$

Таблица 3

λ	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{P}{P_0}$	$q(\lambda)$	$\chi(\lambda)$	$y(\lambda)$	$\frac{p'_0}{p_0}$	$\frac{P}{P'_0}$	M
0,05	0,9997	0,999	0,999	0,080	348,6	0,080	1	0,999	0,0466
0,10	0,9990	0,996	0,994	0,159	84,4	0,160	1	0,994	0,0933
0,15	0,997	0,990	0,988	0,237	35,9	0,240	1	0,988	0,140
0,20	0,995	0,983	0,978	0,313	19,3	0,320	1	0,978	0,187
0,25	0,992	0,973	0,965	0,388	11,7	0,402	1	0,965	0,234
0,30	0,988	0,962	0,950	0,460	7,70	0,484	1	0,950	0,281
0,35	0,984	0,948	0,932	0,528	5,36	0,567	1	0,932	0,329
0,40	0,979	0,932	0,912	0,594	3,91	0,651	1	0,912	0,377
0,45	0,974	0,915	0,890	0,656	2,96	0,736	1	0,890	0,425
0,50	0,967	0,895	0,866	0,713	2,31	0,824	1	0,866	0,474
0,55	0,961	0,874	0,840	0,766	1,87	0,912	1	0,840	0,523
0,60	0,953	0,852	0,812	0,815	1,55	1,003	1	0,812	0,573
0,65	0,945	0,828	0,782	0,857	1,33	1,096	1	0,782	0,624
0,70	0,936	0,802	0,751	0,895	1,17	1,192	1	0,751	0,675
0,75	0,927	0,776	0,719	0,927	1,06	1,290	1	0,719	0,726
0,80	0,917	0,748	0,686	0,954	0,987	1,391	1	0,686	0,779
0,85	0,906	0,719	0,651	0,974	0,937	1,495	1	0,651	0,833
0,90	0,894	0,689	0,616	0,989	0,905	1,603	1	0,616	0,888
0,95	0,882	0,659	0,581	0,997	0,889	1,716	1	0,581	0,943
1,00	0,870	0,628	0,546	1,000	0,885	1,832	1	0,546	1,000
1,05	0,856	0,596	0,510	0,997	0,889	1,954	0,999	0,511	1,058
1,10	0,842	0,564	0,475	0,988	0,899	2,08	0,997	0,476	1,118

λ	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{p}{p_0}$	$q(\lambda)$	$\chi(\lambda)$	$y(\lambda)$	$\frac{p'_n}{p_0}$	$\frac{p}{p'_0}$	M
1,15	0,828	0,532	0,440	0,975	0,916	2,21	0,994	0,443	1,178
1,20	0,812	0,500	0,406	0,956	0,936	2,35	0,988	0,411	1,242
1,25	0,796	0,468	0,372	0,932	0,961	2,50	0,977	0,381	1,306
1,30	0,780	0,436	0,340	0,903	0,988	2,66	0,963	0,353	1,373
1,35	0,762	0,405	0,309	0,871	1,016	2,82	0,945	0,327	1,442
1,40	0,744	0,374	0,278	0,834	1,046	3,00	0,922	0,302	1,513
1,45	0,726	0,344	0,249	0,794	1,078	3,18	0,895	0,278	1,587
1,50	0,707	0,314	0,222	0,751	1,110	3,38	0,863	0,257	1,664
1,55	0,687	0,286	0,196	0,706	1,143	3,60	0,828	0,237	1,744
1,60	0,666	0,258	0,172	0,658	1,177	3,83	0,787	0,219	1,828
1,65	0,645	0,232	0,150	0,610	1,211	4,08	0,744	0,202	1,916
1,70	0,623	0,207	0,129	0,560	1,245	4,35	0,697	0,185	2,008
1,75	0,601	0,183	0,111	0,510	1,278	4,64	0,648	0,171	2,105
1,80	0,578	0,160	0,093	0,460	1,313	4,97	0,596	0,156	2,208
1,85	0,554	0,139	0,077	0,411	1,347	5,32	0,544	0,142	2,318
1,90	0,529	0,120	0,063	0,363	1,380	5,72	0,490	0,129	2,436
1,95	0,504	0,102	0,051	0,317	1,414	6,16	0,436	0,117	2,561
2,00	0,478	0,086	0,041	0,273	1,448	6,66	0,383	0,107	2,697
2,05	0,452	0,071	0,032	0,232	1,480	7,23	0,332	0,0964	2,843
2,10	0,425	0,058	0,024	0,193	1,513	7,88	0,281	0,0854	3,003
2,15	0,397	0,046	0,018	0,158	1,546	8,63	0,235	0,0766	3,181
2,20	0,369	0,036	0,013	0,126	1,578	9,50	0,191	0,0681	3,377
2,25	0,340	0,027	0,009	0,098	1,610	10,55	0,151	0,0596	3,598
2,30	0,310	0,025	0,006	0,073	1,641	11,81	0,114	0,0526	3,851
2,35	0,280	0,014	0,004	0,054	1,672	13,38	0,0863	0,0464	4,140
2,40	0,249	0,010	0,002	0,037	1,703	15,36	0,0602	0,0400	4,485
2,45	0,217	0,006	0,0013	0,024	1,733	17,97	0,0397	0,0338	4,904
2,50	0,185	0,004	0,0007	0,014	1,763	21,5	0,0236	0,0287	5,420
2,55	0,152	0,002	0,0003	0,008	1,792	26,7	0,0137	0,0207	6,098
2,60	0,118	0,001	0,0001	0,003	1,821	35,0	0,0052	0,0184	7,058
2,65	0,084	0,000	0,0000	0,001	1,850	50,1	0,0018	0,0123	8,527
2,70	0,049	0,000	0,0000	0,0002	1,878	87,1	0,0003	0,0059	12,08
2,75	0,014	0,000	0,0000	0,0000	1,906	317,5	0,0000	0,0000	21,68

$x=1,25$

λ	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{p}{p_0}$	$q(\lambda)$	$\chi(\lambda)$	$y(\lambda)$	$\frac{p'_0}{p_0}$	$\frac{p}{p_0}$	M
0,05	0,9997	0,999	0,999	0,080	354,6	0,080	1	0,999	0,047
0,10	0,999	0,996	0,994	0,160	85,9	0,160	1	0,994	0,094
0,15	0,997	0,990	0,988	0,238	36,6	0,241	1	0,988	0,141
0,20	0,996	0,982	0,978	0,315	19,6	0,322	1	0,978	0,189
0,25	0,993	0,972	0,966	0,389	11,9	0,403	1	0,966	0,237
0,30	0,990	0,961	0,951	0,462	7,83	0,485	1	0,951	0,285
0,35	0,986	0,947	0,934	0,531	5,46	0,568	1	0,934	0,332
0,40	0,982	0,931	0,914	0,596	3,98	0,652	1	0,914	0,381
0,45	0,978	0,913	0,892	0,658	3,01	0,737	1	0,892	0,4290
0,50	0,972	0,894	0,869	0,716	2,35	0,824	1	0,869	0,4780
0,55	0,966	0,872	0,843	0,768	1,90	0,912	1	0,843	0,5280
0,60	0,960	0,849	0,815	0,816	1,58	1,00	1	0,815	0,5770
0,65	0,953	0,825	0,786	0,859	1,36	1,09	1	0,786	0,628
0,70	0,946	0,799	0,756	0,896	1,20	1,19	1	0,756	0,679
0,75	0,938	0,772	0,724	0,928	1,08	1,28	1	0,724	0,730
0,80	0,929	0,744	0,692	0,954	1,00	1,38	1	0,692	0,782
0,85	0,920	0,716	0,658	0,974	0,953	1,48	1	0,658	0,835
0,90	0,910	0,686	0,624	0,988	0,921	1,58	1	0,624	0,889
0,95	0,900	0,655	0,590	0,997	0,905	1,69	1	0,590	0,943
1,00	0,889	0,624	0,555	1,000	0,900	1,80	1,0000	0,555	1,000
1,05	0,878	0,593	0,520	0,997	0,904	1,92	0,9998	0,520	1,057
1,10	0,866	0,561	0,486	0,989	0,915	2,04	0,9989	0,487	1,114
1,15	0,853	0,530	0,452	0,976	0,932	2,16	0,996	0,454	1,174
1,20	0,840	0,498	0,418	0,957	0,953	2,29	0,989	0,423	1,236
1,25	0,826	0,466	0,385	0,934	0,978	2,42	0,979	0,393	1,296
1,30	0,812	0,435	0,353	0,906	1,01	2,56	0,965	0,366	1,360
1,35	0,798	0,404	0,323	0,875	1,03	2,71	0,948	0,341	1,425
1,40	0,782	0,374	0,293	0,840	1,07	2,87	0,927	0,316	1,493
1,45	0,766	0,345	0,264	0,801	1,10	3,03	0,901	0,293	1,562
1,50	0,750	0,316	0,237	0,760	1,13	3,20	0,872	0,272	1,633
1,55	0,733	0,289	0,212	0,717	1,16	3,39	0,839	0,253	1,707
1,60	0,716	0,262	0,188	0,672	1,20	3,58	0,802	0,234	1,783
1,65	0,698	0,237	0,165	0,626	1,23	3,79	0,762	0,217	1,862

λ	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{p}{p_0}$	$q(\lambda)$	$\chi(\lambda)$	$y(\lambda)$	$\frac{p'_0}{p_0}$	$\frac{p}{p'_0}$	M
1,70	0,679	0,212	0,144	0,578	1,27	4,01	0,718	0,201	1,945
1,75	0,660	0,190	0,125	0,531	1,30	4,25	0,674	0,185	2,031
1,80	0,640	0,168	0,107	0,484	1,34	4,50	0,625	0,171	2,121
1,85	0,620	0,148	0,091	0,437	1,37	4,78	0,576	0,158	2,215
1,90	0,599	0,129	0,077	0,392	1,40	5,08	0,527	0,146	2,315
1,95	0,578	0,111	0,064	0,347	1,44	5,41	0,475	0,135	2,418
2,00	0,556	0,095	0,053	0,305	1,47	5,77	0,426	0,124	2,529
2,05	0,533	0,081	0,043	0,265	1,51	6,16	0,377	0,114	2,647
2,10	0,510	0,068	0,034	0,228	1,540	6,60	0,331	0,103	2,773
2,15	0,486	0,056	0,027	0,193	1,572	7,08	0,286	0,0944	2,908
2,20	0,462	0,046	0,021	0,161	1,606	7,62	0,243	0,0864	3,052
2,25	0,438	0,037	0,016	0,132	1,638	8,24	0,203	0,0788	3,206
2,30	0,412	0,029	0,0120	0,106	1,669	8,94	0,166	0,0723	3,378
2,35	0,386	0,022	0,00861	0,084	1,701	9,53	0,134	0,0643	3,566
2,40	0,360	0,017	0,00605	0,065	1,732	10,68	0,105	0,0576	3,771
2,45	0,333	0,012	0,00410	0,048	1,763	11,78	0,0780	0,0526	4,002
2,50	0,306	0,0087	0,00266	0,035	1,793	13,10	0,0587	0,0453	4,261
2,55	0,278	0,0059	0,00165	0,024	1,824	14,7	0,0410	0,0402	4,559
2,60	0,249	0,0038	0,000955	0,016	1,853	16,7	0,0278	0,0343	4,912
2,65	0,220	0,0023	0,000512	0,010	1,882	19,7	0,0177	0,0289	5,327
2,70	0,190	0,0013	0,000248	0,006	1,911	22,7	0,0108	0,0230	5,840
2,75	0,160	0,0006	0,000104	0,003	1,940	27,6	0,0054	0,0190	6,482
2,80	0,129	0,0003	0,00004	0,0012	1,968	34,8	0,0023	0,0162	7,349
2,85	0,098	0,0000	0,00000	0,0004	1,996	46,8	0,0007	0,0117	8,584
2,90	0,066	0,0000	0,00000	0,0001	1,933	70,8	0,0002	0,0070	10,64
2,95	0,033	0,0000	0,00000	0,0000	2,051	142,0	0,0000	0,0000	15,31
3,00	0,0001	0,0000	0,00000	0,0000	2,077	∞	0,0000	0,0000	28,28

Таблица 5

λ	$z(\lambda)$	λ	$z(\lambda)$	λ	$z(\lambda)$	λ	$z(\lambda)$	λ	$z(\lambda)$
0,05	20,05	0,25	4,25	0,45	2,672	0,65	2,188	0,85	2,026
0,10	10,10	0,30	3,633	0,50	2,500	0,70	2,128	0,90	2,011
0,15	6,817	0,35	3,207	0,55	2,368	0,75	2,083	0,95	2,003
0,20	5,200	0,40	2,900	0,60	2,266	0,80	2,050	1,00	2,000

λ	$z(\lambda)$	λ	$z(\lambda)$	λ	$z(\lambda)$	λ	$z(\lambda)$	λ	$z(\lambda)$
1,05	2,002	1,45	2,139	1,85	2,390	2,25	2,694	2,65	3,027
1,10	2,009	1,50	2,166	1,90	2,426	2,30	2,735	2,70	3,070
1,15	2,011	1,55	2,195	1,95	2,463	2,35	2,775	2,75	3,114
1,20	2,033	1,60	2,225	2,00	2,500	2,40	2,817	2,80	3,157
1,25	2,050	1,65	2,256	2,05	2,538	2,45	2,858	2,85	3,201
1,30	2,069	1,70	2,288	2,10	2,576	2,50	2,900	2,90	3,245
1,35	2,091	1,75	2,321	2,15	2,615	2,55	2,942	2,95	3,289
1,40	2,114	1,80	2,355	2,20	2,654	2,60	2,985	3,00	3,333

Таблица 6

T		p [кг/см ²]							
		193,7	223	273	323	373	423	473	523
0	c_p	0,241	0,241	0,241	0,241	0,242	0,243	0,244	0,245
1		0,2435	0,242	0,241	0,241	0,242	0,243	0,244	0,245
50		0,317	0,283	0,265	0,257	0,253	0,2505	0,2495	0,2495
100		0,416	0,3265	0,287	0,272	0,2635	0,258	0,2555	0,254
150		0,496	0,360	0,305	0,2845	0,2725	0,265	0,2605	0,258
200		0,515	0,380	0,320	0,2955	0,2805	0,2705	0,265	0,262
0	c_v	0,172	0,172	0,172	0,1725	0,1735	0,1745	0,1755	0,176
50		0,185	0,178	0,1755	0,176	0,176	0,176	0,1765	0,1775
100		0,196	0,1825	0,178	0,178	0,1775	0,1775	0,178	0,179
150		0,206	0,186	0,1795	0,1795	0,179	0,179	0,1795	0,180
200		0,215	0,1885	0,181	0,181	0,181	0,181	0,181	0,181
0		$\frac{c_p}{c_v}$	1,40	1,40	1,40	1,395	1,395	1,39	1,39
1	1,40		1,40	1,40	1,40	1,40	1,395	1,39	1,39
50	1,715		1,59	1,51	1,465	1,44	1,425	1,415	1,405
100	2,12		1,79	1,61	1,53	1,485	1,455	1,435	1,42
150	2,41		1,935	1,70	1,585	1,52	1,48	1,45	1,435
200	2,395		2,02	1,77	1,635	1,55	1,495	1,465	1,45

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Планк. Введение в теоретическую физику, ч. V. Теория теплоты. М. Л., 1935 г.
 2. М. П. Малков и К. Ф. Павлов. Справочник по глубокому охлаждению в технике. М. Л., 1947 г.
 3. Landolt—Börnstein. Physikalisch-Chemische Tabellen. Fünfte Auflage. Berlin, 1927.
 4. А. М. Литвин. Техническая термодинамика, изд. 2. М. Л., 1947 г.
 5. H. Hugoniot. Sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans le gaz parfaits. Journal de l'école polytechnique, 58 cahier. Paris, 1889.
 6. J. Rayleigh. Aerial plane waves of finite amplitude. Transactions of Royal Society A. 84, 247, 1910.
 7. Barréde Saint-Venant et Laurent Wantzel. Memoire et expériences sur l'écoulement de l'air déterminé par des différences de pressions considérables. Journal de l'école Royale Polytechnique XXVII, Tome XVI, Paris, 1839.
 8. Ф. И. Франкль, Р. Н. Алексеева, С. А. Христианович. Основы газовой динамики. Труды ЦАГИ № 354, 1938 г.
 9. Л. И. Седов. Методы теории размерностей и теории подобия в механике. М. Л., 1944 г.
 10. И. Никурадзе. Закономерности турбулентного движения в гладких трубах. Сборник „Проблемы турбулентности“, М. Л., 1936 г. (I. Nikuradse. Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren VDI—Forschungsheft № 356, 1932).
 11. I. Nikuradse. Strömungsgesetze in rauhen Rohren VDI—Forschungsheft. 361, 1933.
 12. С. А. Христианович, Ф. А. Требин и В. И. Черникин. Изотермическое течение газа в трубах. Известия Академии наук СССР, Отделение технических наук, № 9, стр. 845, 1945 г.
 13. И. Е. Идельчик. Определение коэффициента трения стальных труб газопровода Саратов—Москва. 1945 г.
 14. W. Frössel. Strömung in glatten, geraden Rohren mit Über- und Unterschallgeschwindigkeit. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens Band 7, № 2, s. 75, 1936.
 15. М. А. Михеев. Основы теплопередачи. М. Л., 1947 г.
-

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть 1

	<i>Стр.</i>
Глава I. Предварительные сведения из физики и термодинамики	5
§ 1. Уравнение состояния вещества	—
§ 2. Первое начало термодинамики	11
§ 3. Второе начало термодинамики	18
§ 4. Диаграммы состояния	25
Глава II. Скачки уплотнения	28
§ 5. Ударная волна	—
§ 6. Скачок уплотнения	35
§ 7. Распространение волны сжатия и волны разрежения. Образование ударной волны	38
§ 8. Уравнение Бернулли—Сен-Венана	42
§ 9. Косые скачки уплотнения	47
Глава III. Адиабатическое течение газа	56
§ 10. Адиабатическое течение	—
§ 11. Элементарная струйка при адиабатическом течении	60
§ 12. Примеры применения уравнений адиабатического течения	66
Глава IV. Течения в трубах	75
§ 13. Законы механического подобия	—
§ 14. Ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе	82
§ 15. Опытные данные для коэффициентов сопротивления труб	85
§ 16. Общие соображения о течениях газа при наличии трения и теплообмена	88
§ 17. Течение в трубе без притока тепла	94
§ 18. Течение в трубе при наличии притока тепла	109
§ 19. Изотермическое течение в трубе	115
§ 20. Течение в трубе при наличии теплообмена через стенки	119
§ 21. Поправки в уравнениях движения газа на неравномерность распределения скорости по сечению трубы	129
Приложение	137

